UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Estudo de um Operador de Dirichlet-Neumann Aplicado ao Problema de Existência e Unicidade da Solução das Equações de Ondas em Água

por

Eduardo Ribeiro Model

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Profa. Dra. Juliana Sartori Ziebell
Orientadora

Porto Alegre, junho de 2022

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Model, Eduardo Ribeiro

Estudo de um Operador de Dirichlet-Neumann Aplicado ao Problema de Existência e Unicidade da Solução das Equações de Ondas em Água / Eduardo Ribeiro Model.— Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2022.

80 p.: il.

Dissertação (mestrado)— Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2022.
Orientadora: Ziebell, Juliana Sartori

Dissertação: Matemática Aplicada, Análise Aplicada
Distribuições, Operadores Elípticos, Operador de Dirichlet-Neumann, Equações de ondas em água

Estudo de um Operador de Dirichlet-Neumann Aplicado ao Problema de Existência e Unicidade da Solução das Equações de Ondas em Água

por

Eduardo Ribeiro Model

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Análise Aplicada

Orientadora: Profa. Dra. Juliana Sartori Ziebell

Banca examinadora:

Prof. Dr. Wilberclay Gonçalves Melo
PROMAT - UFS

Profa. Dra. Patrícia Lisandra Guidolin
PPGEMat - UFRGS

Prof. Dr. Leandro Farina
PPGMAp - UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
março de 2022.

Prof. Dr. Lucas da Silva Oliveira
Coordenador

“ "Bom dia!", disse Bilbo, e era verdade. O sol estava brilhando, e a grama estava muito verde. Mas Gandalf olhou para ele debaixo de sobrancelhas longas e hirsutas, que se projetavam mais para frente do que a aba de seu grande chapéu. "O que quer dizer?", perguntou. "Está me desejando um bom dia, ou quer dizer que é um bom dia quer eu queira ou não; ou que você se sente bem neste dia; ou que é um bom dia para ser bom?" "Tudo isso de uma vez", disse Bilbo. ”

– O Hobbit, J.R.R. Tolkien

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, que sempre me proporcionou todas as condições para que eu pudesse estudar o que quisesse, me garantiu uma enorme estrutura familiar mesmo sendo mãe solo, e sempre foi uma grande amiga.

À minha orientadora, Juliana, que sempre teve muita paciência para me esclarecer qualquer dúvida, sempre me auxiliou no processo de encontrar soluções para os problemas que encontrávamos ao logo do caminho, e estava sempre aberta a novas opiniões.

Às minhas professoras de graduação, Tania Elisa Seibert e Ana Brunet, que me incentivaram a seguir meu próprio caminho e ingressar no mestrado em matemática aplicada.

Ao meu pai, Nilson Batista da Silveira, quem devo muito do homem que sou hoje, e a quem dedico em sua memória a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

APÊNDICES

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Gerais

α	Multi-índice em $\mathbb{N}^{d+1}$. Somente no capítulo 2, por mera simplicidade, α é dito pertencer a $\mathbb{N}^d$.
$\Lambda(D)$	Multiplicador de Fourier com símbolo do multiplicador dado por $\Lambda(\xi)$.
$\mathbb{P}$	Operador elíptico de coeficientes constantes em uma faixa.
$\mathbb{Q}$	Operador elíptico de coeficientes variáveis em uma faixa plana.
$\mathcal{F}(f)$	Transformada de Fourier da função $f \in \mathcal{S}$. Por vezes representaremos como $\hat{f}$.
ϕ	Potencial de velocidade.
ψ	Traço do potencial de velocidade ϕ.
$\tilde{\mathbb{P}}$	Operador elíptico de coeficientes variáveis em uma faixa.
$\tilde{R}$	Difeomorfismo entre S e Ω tal que $\tilde{R} = R^{-1}$.
$\vec{n}_+$	Vetor normal externo a superfície livre.
$\vec{n}_-$	Vetor normal externo a fundo.
ζ	Parametrização da superfície livre no problema de ondas em água.
a	Parametrização da superfície livre no problema elíptico de fronteira em uma faixa.
b	Parametrização do fundo.
d	Dimensão espacial horizontal.

D^α	Derivada parcial de ordem α
e_i	Vetor unitário cuja i-coordenada é igual a 1.
g	Aceleração da gravidade.
$G(\zeta)$	Operador de Dirichlet-Neumann, onde em casos mais gerais será denotado por $G(a,b)$.
R	Difeomorfismo entre Ω e S.
t	Variável temporal.
V	Campo de velocidade em $\mathbb{R}^{d+1}$.
X	Variável espacial horizontal em $\mathbb{R}^d$.
y	Variável espacial vertical em $\mathbb{R}$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno usual definido no L^2.

Espaços Vetoriais

$\mathcal{D}$	Espaço das funções teste.
$\mathcal{D}'$	Espaço das distribuições.
$\mathcal{S}$	Espaço de Schwartz.
Ω	Domínio do problema elíptico de fronteira em uma faixa. Somente no capítulo 2, este espaço é considerado apenas um subconjunto de $\mathbb{R}^d$.
Ω_t	Domínio do fluido em relação ao tempo.
C	Espaço das funções continuamente diferenciáveis.
C^∞	Espaço das funções suaves.

C_0^∞	Espaço das funções teste.
C_b^k	Espaço das funções continuamente k vezes diferenciáveis e limitadas.
C_{loc}	Espaço das funções localmente contínuas.
H^s	Espaço de Sobolev das funções $f \in \mathcal{S}'$ tal que $\Lambda(\xi)^s \hat{f}(\xi) \in L^2$, com $s \in \mathbb{R}$.
L^p	Espaço das classes de equivalência de funções p integráveis.
L^1_{loc}	Espaço das classes de equivalência de funções localmente integráveis.
S	Faixa plana $S = \mathbb{R}^d \times (-1, 0)$.
$W^{m,p}$	Espaço de Sobolev das funções L^p com m derivadas L^p.

RESUMO

Nesse trabalho estudamos um operador de Dirichlet-Neumann em termos da solução de um problema de valor de contorno elíptico definido em uma faixa $S = \mathbb{R}^d \times (-1, 0)$. Usando um difeomorfismo, esse problema pode ser associado a uma equação elíptica definida em um domínio $\Omega = \{(X, y) \in \mathbb{R}^{d+1} : \ a(X) < y < b(X))\}$ sob certas condições de a e b. Algumas estratégias de regularização de difeomorfismos também são utilizadas, com o objetivo de se obter resultados mais precisos.

Ainda, estudamos de que forma os resultados obtidos sobre esse operador podem ser aplicados ao problema de existência e unicidade da solução das equações de ondas em água.

Palavras-chave: Distribuições; Operadores Elípticos; Operador de Dirichlet-Neumann; Equações de ondas em água.

ABSTRACT

In this work we studied a Dirichlet-Neumann operator in terms of a solution of an elliptic boundary value problem on the flat strip $S = \mathbb{R}^d \times (-1, 0)$. Using a diffeomorphism, this problem could be associated with an elliptic equation defined in a domain $\Omega = \{(X, y) \in \mathbb{R}^{d+1} : a(X) < y < b(X))\}$ with certain conditions over a and b. Some diffeomorphism regularization strategies are also used, in order to obtain more accurate results.

Besides that, we studied in which way the obtained results about this operator could be applied to the problem about existence and uniqueness of solution of water waves equations.

Keywords: Distributions; Elliptic Operators; Dirichlet-Neumann Operator; Water Waves Equations.

1 INTRODUÇÃO

Uma das grandes aplicações da matemática sempre foi buscar descrever com precisão diversos sistemas reais, tais como os fenômenos naturais. Dessa maneira, a partir do seu surgimento, a teoria de equações diferenciais passou a ter grande destaque neste cenário, devido ao seu enorme potencial para descrever tais sistemas.

A teoria das equações diferencias foi subdividida em dois grupos, as equações ordinárias que descrevem problemas que possuem apenas uma variável livre, e as equações parciais que descrevem problemas com mais de uma variável livre. As equações diferenciais parciais formam um grupo que constitui a maior parte das possibilidades de representação de um sistema real Além disso, em particular, elas descrevem as equações de ondas em água, as quais ocuparão um lugar significativo no estudo realizado neste trabalho.

A origem das equações diferenciais parciais ocorreu no contexto da geometria, no estudo de superfícies, e em diversos problemas da mecânica clássica. Mas foi a partir da metade do século XIX que estas equações se tornaram mais relevantes com o interesse de diversos matemáticos importantes em investigar efetivamente inúmeros problemas apresentados por essas tais equações. Com o crescimento da teoria de equações diferenciais parciais, foram elaborados métodos para encontrar soluções de equações lineares, contribuindo então para a construção de uma teoria mais geral. Assim, as equações diferenciais parciais foram consideradas parte fundamental no estudo das superfícies, e tornaram-se parte central na matemática moderna, especialmente em problemas relacionados a física, geometria e análise.

Ainda no contexto das equações diferencias parciais, as equações de Stokes segundo Gondar e Cipalotti [11], que descrevem a dinâmica de fluidos incompressíveis e não viscosos, também descrevem de maneira geral o problema de ondas em água e serão portanto o nosso ponto de partida no estudo da aplicação feita sobre este problema.

Já durante o último século, a teoria das equações diferencias parciais se tornou demasiadamente ampla e produziu diversos áreas de especialidade, tais como as equações elípticas, e operadores lineares em espaços de Banach. O interesse crescente nestas áreas segundo Escher [9] se deu pelo forte impacto deste cálculo sobre a teoria das equações de evolução abstrata.

Se tratando de operadores lineares em espaços de Banach, em situações concretas muitas vezes o operador é diferencial. Contudo, para muitas aplicações interessantes, a limitação a operadores diferenciais é muito restritiva. Analisando as equações de evolução para operadores elípticos segundo Escher [9], na maioria dos casos, verifica-se em primeiro lugar que são quasilineares ou mesmo totalmente não lineares, e em segundo lugar, que estas equações de evolução envolvem operadores pseudodiferenciais (que não são operadores diferenciais) com símbolos regulares e suaves.

Ainda sobre operadores diferenciais, abordaremos neste trabalho um operador de Dirichlet-Neumann, o qual fará parte central dos resultados obtidos no texto. Neste ponto de vista, podemos dizer que este trabalho tem por objetivo estudar, a partir dos resultados apresentados por Lannes em [14], algumas propriedades de um operador de Dirichlet- Neumann, assim como sua aplicação no problema de ondas em água, afim de se obter uma solução única.

1.1 Equações de Stokes

Nesta etapa iremos mostrar como as equações de Stokes descrevem o movimento de fluidos, assim como apresentado em [11]. Em primeiro lugar vamos considerar uma porção do fluido que, em um determinado instante t, em uma região Ω_t, se move em um campo de velocidade $\vec{u}(t,X) = (u_1,\cdots,u_d)$, com $X = (X_1,\cdots,X_d)$. Isto representa que cada componente de $\vec{u}$ descreve uma trajetória $P(t)$ tal que

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \vec{u}(t,P)$$

Seja $\rho(t,X)$ a densidade do fluido em X no instante t, então a massa do fluido em Ω_t é dada por

$$M(t) = \int_{\Omega_t} \rho(t,X)dX.$$

Pela lei de conservação de massa $M(t)$ deve ser constante ao longo do tempo, ou seja, $M'(t) = 0$ para todo t. Assim pela derivação de Euler

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_t} \rho(t,X)dX = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t}\rho(t,X)dX + \int_{\partial\Omega_t} \rho(t,X)\vec{u}\cdot\vec{n}dS = 0, \qquad (1.1)$$

onde $\partial\Omega_t$ denota a fronteira de Ω_t e $\vec{n}$ denota o vetor unitário normal exterior a $\partial\Omega_t$ no ponto $X \in \partial\Omega_t$.

Observação 1.1.1. Nesta etapa utilizaremos o teorema do divergente para encontrarmos as equações de Stokes, porém não o apresentaremos nem entraremos em detalhes teóricos. Contudo, este mesmo teorema será apresentado com mais detalhes no capítulo 2.

Assim, aplicando em (1.1) o teorema do divergente,

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,X) + \text{div }(\rho\vec{u})dX\right) = 0. \qquad (1.2)$$

Como Ω_t é arbitrário então

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,X) + \text{div }(\rho\vec{u}) = 0. \qquad (1.3)$$

Suponhamos que o fluido seja incompressível e homogêneo, então $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ e $\frac{\partial\rho}{\partial X} = 0$. Assim, $\rho(t,X) = \rho_0 > 0$ e então (1.3) se reduz a

$$\text{div }\vec{u} = 0 \qquad (1.4)$$

e (1.1) resulta em

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} dX = 0,$$

que é o mesmo que dizer que o volúme da região Ω_t é constante ao longo do tempo.

A quantidade de movimento do fluido é dado pela expressão

$$\vec{Q}(t) = \int_{\Omega_t} \rho(t,X)\vec{u}(t,X)dX = \rho_0 \int_{\Omega_t} \vec{u}(t,X)dX.$$

De acordo com a lei de Newton, a variação da quantidade de movimento $\vec{Q}'(t)$ é igual a resultante das forças externas que atuam em Ω_t. Neste caso iremos supor que as forças externas que atuam em Ω_t são $\vec{F}(t) = \vec{F}_1(t) + \vec{F}_2(t)$, onde $\vec{F}_1(t)$ é a resultante da ação da gravidade e $\vec{F}_2(t)$ é a resultante das forças de interação do fluido exterior a Ω_t. Como o campo gravitacional é dado por $\vec{g} = -ge_d$, onde g é a aceleração da gravidade, então

$$\vec{F}_1(t) = \int_{\Omega_t} \rho_0\vec{g}dX = \int_{\Omega_t} -\rho_0 g e_d dX = -M(t)ge_d.$$

Suponhamos também que o fluido seja não viscoso. Dessa maneira estamos admitindo que o fluido age sobre cada partícula por meio de forças provocadas pela pressão normal, logo

$$\vec{F}_2(t) = -\int_{\partial\Omega_t} p(X)\vec{n}dS,$$

onde $p(X)$ é a intensidade da pressão em X. Com isso, pelo teorema do divergente.

$$\vec{F}_2(t) = -\int_{\Omega_t} \nabla_X p(X)dX.$$

Portanto,

$$\vec{F}(t) = \int_{\Omega_t} \left(-\rho_0 g e_d - \nabla_X p(X)\right) dX.$$

Pela lei de Newton,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_t} \left(\rho_0\vec{u}\right) dX = \int_{\Omega_t} \left(-\rho_0 g e_d - \nabla_X p(X)\right) dX. \tag{1.5}$$

A partir daqui vamos calcular a derivada do lado esquerdo de (1.5). Para isso, analogamente ao processo feito em (1.1) e (1.2), para cada i-ésima componente do campo de velocidade $\vec{u}(t,X)$, com $i = 1, 2, \cdots, d$, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_t}(\rho_0 u_i)\,dX = \int_{\Omega_t}\rho_0\frac{\partial u_i}{\partial t}dX + \int_{\Omega_t}\rho_0 \mathrm{div}(u_i\vec{u})dX, \tag{1.6}$$

e sabendo que $\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$ então

$$\mathrm{div}(u_i\vec{u}) = \sum_{j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial X_j}(u_i u_j) = \sum_{j=1}^{d}\frac{\partial u_i}{\partial X_j}u_j + u_i\,\mathrm{div}\,\vec{u} = \sum_{j=1}^{d}\frac{\partial u_i}{\partial X_j}u_j. \tag{1.7}$$

Logo, por (1.6) e (1.7), temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_t}(\rho_0 u_i)\,dX = \int_{\Omega_t}\rho_0\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d}\frac{\partial u_i}{\partial X_j}u_j\right)dX. \tag{1.8}$$

Expressando as equações (1.5) e (1.8) na sua forma vetorial

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_t}(\rho_0\vec{u})\,dX = \int_{\Omega_t}\rho_0\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla_X\vec{u}\right)dX. \tag{1.9}$$

Como Ω_t é arbitrário, segue por (1.5) e (1.9) que

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla_X\vec{u} = -ge_d - \nabla_X p(X), \tag{1.10}$$

que é conhecida como a equação de Euler do movimento do fluido.

Por fim, as equações (1.4) e (1.10) fornecem as equações gerais para a dinâmica de fluidos não viscosos, a saber

$$\begin{cases}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla_X\vec{u} = -ge_d - \nabla_X p(X) \\ \mathrm{div}\,\vec{u} = 0\end{cases},$$

que são conhecidas como as equações de Stokes.

1.2 Problema de ondas em água

O problema de ondas em água para um líquido ideal assim como apresentado por Lannes [14], descreve o movimento da superfície livre e a evolução do campo de velocidade em uma porção de fluido perfeito (ou seja, um fluido sem viscosidade, sem tensão de cisalhamento e sem condução de calor), incompressível e irrotacional sob a influência da gravidade.

Analisaremos neste trabalho o caso em que a superfície livre é um gráfico parametrizado pela função $\zeta(t, X)$, onde t representa a variável temporal e $X = (X_1, \cdots, X_d) \in \mathbb{R}^d$ representa a variável espacial horizontal. O método desenvolvido aqui funciona igualmente para todo inteiro $d \geq 1$. Além disso, a porção do fluido é delimitada por baixo por uma parametrização do fundo dada pela função $b(X)$ que não depende do tempo.

Denotaremos o domínio do fluido em relação ao tempo por Ω_t. A incompressibilidade do fluido utiliza a noção do operador divergente e é representada pela expressão

$$\text{div}\, V = 0 \ \text{ em } \ \Omega_t, \ \ t \geq 0, \tag{1.11}$$

onde $V = (V_1, \cdots, V_d, V_{d+1})$ descreve o campo de velocidade, sendo $V_1, \cdots, V_d$ as componentes horizontais, V_{d+1} a componente vertical da velocidade. Assim como a incompressibilidade, para representar a irrotacionalidade é necessário utilizar a noção do operador rotacional através da expressão

$$\text{rot}\, V = 0 \ \text{ em } \ \Omega_t, \ \ t \geq 0. \tag{1.12}$$

As condições de fronteira da velocidade na superfície livre e no fundo são dadas pela suposição natural de que ambas as superfícies delimitam o fluido. No fundo essas condições são

$$V_n \,|_{y=b(X)} := \vec{n}_- \cdot V \,|_{y=b(X)} = 0, \ \text{ para } \ t \geq 0, \ \ X \in \mathbb{R}^d, \tag{1.13}$$

onde $\vec{n}_- := \frac{1}{\sqrt{1+\|\nabla_X b\|^2}}(\nabla_X b, -1)^T$ denota o vetor normal externo ao fundo em Ω_t. Na superfície livre, a condição de fronteira é cinemática e é dada por

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \sqrt{1 + \|\nabla_X \zeta\|^2} V_n \,|_{y=\zeta(X)} = 0, \ \text{ para } \ t \geq 0, \ \ X \in \mathbb{R}^d, \tag{1.14}$$

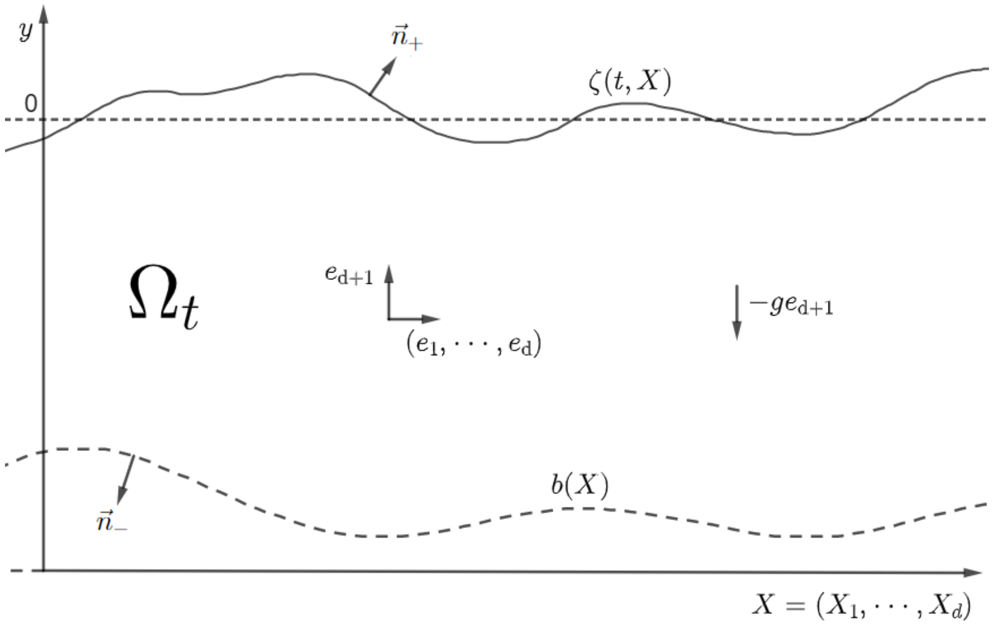

Figura 1

Fonte: Adaptada de Lannes, 2005, p.606.

onde $V_n \mid_{y=\zeta(X)} := \vec{n}_+ \cdot V \mid_{y=\zeta(X)}$, com $\vec{n}_+ := \frac{1}{\sqrt{1+\|\nabla_X \zeta\|^2}}(-\nabla_X \zeta, 1)^T$ denotando o vetor normal externo a superfície livre.

Desprezando os efeitos da tensão superficial, a pressão P é constante na fronteira entre o ar e água. Até uma renormalização, nós podemos assumir que

$$P \mid_{y=\zeta(X)} = 0 \ \text{ para } \ t \geq 0, \ \ X \in \mathbb{R}^d. \tag{1.15}$$

E por fim, a equação de Euler do movimento do fluido apresentada em (1.10) completa o conjunto de equações,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla_{X,y} V = -ge_{d+1} - \nabla_{X,y} P \ \text{ em } \ \Omega_t, \ \ t \geq 0. \tag{1.16}$$

1.3 Apresentação dos resultados

Os seguintes resultados foram apresentados em [14] e seguem a mesma linha de construção e contextualização do problema de ondas em água proposto anteriormente. Neste sentido, o presente texto será desenvolvido no contexto Euleriano ao invés do Lagrangiano, dessa maneira a propriedade física do fluido se refere, ponto a ponto, ao volume em termos de um campo. Além disso, utilizaremos uma forma alternativa das equações de ondas em água (1.11)-(1.16).

Para as condições de incompressibilidade (1.11) e irrotacionalidade (1.12), existe um potencial de velocidade ϕ tal que $V = \nabla_{X,y}\phi$ e

$$\Delta_{X,y}\phi = 0 \text{ em } \Omega_t, \;\; t \geq 0; \tag{1.17}$$

as condições de fronteira (1.13) e (1.14) podem ser expressas em termo de ϕ:

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial n_-}\right|_{y=b(X)} = 0, \text{ para } t \geq 0, \;\; X \in \mathbb{R}^d, \tag{1.18}$$

e

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \sqrt{1 + \|\nabla_X \zeta\|^2} \left.\frac{\partial \phi}{\partial n_+}\right|_{y=\zeta(t,X)} = 0, \text{ para } t \geq 0, \;\; X \in \mathbb{R}^d, \tag{1.19}$$

onde $(\frac{\partial\phi}{\partial n_-}) := \vec{n}_- \cdot \nabla_{X,y}$ e $(\frac{\partial\phi}{\partial n_+}) := \vec{n}_+ \cdot \nabla_{X,y}$. E então a equação de Euler (1.16) pode ser posta em sua forma de Bernouilli

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\|\nabla_{X,y}\phi\|^2 + gy = -P \text{ em } \Omega_t, \;\; t \geq 0. \tag{1.20}$$

Podemos ainda reduzir o sistema (1.17)-(1.20) para um sistema onde todas as funções são avaliadas apenas na superfície livre. Para tal, vamos introduzir o traço do potencial de velocidade ϕ na superfície livre

$$\psi(t, X) := \phi(t, X, \zeta(t, X)), \tag{1.21}$$

e o operador de Dirichlet-Neumann $G(\zeta)$, o qual é um operador linear definido como

$$G(\zeta)\psi := \sqrt{1 + \|\nabla_X \zeta\|^2} \left.\frac{\partial \phi}{\partial n_+}\right|_{y=\zeta(t,X)} \tag{1.22}$$

Observação 1.3.1. Por simplicidade escreveremos $G(\zeta)$ ao invés de $G(\zeta, b)$, a menos de alguma confusão a respeito da dependência da parametrização b do fundo.

Para melhor fluidez da leitura do texto a demonstração do próximo passo será apresentada no Apêndice A.

Por fim, podemos reduzir o sistema (1.17)-(1.20) a um sistema equivalente, tomando o traço de (1.20) na superfície livre

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - G(\zeta)\psi = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + g\zeta + \frac{1}{2}\|\nabla_X \psi\|^2 - \frac{1}{2\left(1+\|\nabla_X \zeta\|^2\right)}\left(G(\zeta)\psi + \nabla_X \zeta \cdot \nabla_X \psi\right)^2 = 0, \end{cases} \tag{1.23}$$

que é uma equação de evolução para a elevação da superfície livre $\zeta(t, X)$ e para o traço do potencial de velocidade na superfície livre $\psi(t, X)$.

Feita portanto, a apresentação dos resultados necessários para contextualização do que iremos estudar, vamos agora descrever brevemente como realizaremos o desenvolvimento do texto.

Sobre o ponto central abordado pelo texto, podemos dizer que trata-se de um estudo feito sobre o operador de Dirichlet-Neumann, bem como sua aplicação no problema de ondas em água. Os resultados apresentados aqui, principalmente nos capítulos 3,4 e 5, foram desenvolvidos por Lannes em [14].

Nos próximos capítulos vamos obedecer uma certa estrutura, em relação a sequência do texto, que se dará da seguinte forma: No capítulo 2, apresentaremos algumas definições e resultados clássicos em análise e teoria de equações diferenciais; No capítulo 3, estaremos preocupados em encontrar estimativas para a solução de um problema elíptico em uma faixa; No capítulo 4, abordaremos algumas propriedades do operador de Dirichlet-Neumann com relação as estimativas do capítulo anterior; No capítulo 5, estudaremos uma aplicação do operador de Dirichlet-Neumann ao problema de ondas em água.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo iremos apresentar alguns resultados preliminares referente ao estudo de transformadas de Fourier, distribuições, espaços de Sobolev e mais alguns resultados clássicos de análise funcional e equações diferenciais. Estes resultados, os quais encontram-se em [2], [7], [12] e [19], serão de grande utilidade ao longo de todo o texto, e merecem uma posição de referência para suas diversas aplicações no mesmo.

2.1 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma ferramenta extremamente útil no estudo das equações diferenciais parciais. Ela nos permite resolver certas equações diferenciais parciais reduzindo-as a simplesmente encontrar soluções de equações diferenciais algébricas ou ordinárias. Devido a sua imensa importância iremos apresentar algumas noções básicas desta teoria.

Ao longo do texto, a tranformada de Fourier também será utilizada no contexto de distribuições, espaços de Sobolev, normas L^p, etc.

Uma definição mais rigorosa da transformada de Fourier é geralmente feita para funções definidas no espaço de Schwartz. Por isso, a definição deste espaço nos será necessária.

Notação 2.1.1. Dizemos que $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ é um multi-índice, e escrevemos $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$.

Definição 2.1.2. Seja $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ uma função suave complexa de variável real. Suponha também que para todo multi-índice α, β, é válido que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| < \infty.$$

O espaço de todas as funções com a propriedade acima é chamado de espaço de Schwartz, e denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Definição 2.1.3. Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. A transformada de Fourier da função f é o operador $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ dado por

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Note que para a definição da transformada de Fourier fazer sentido, basta assumirmos f integrável, ou seja, $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 2.1.4. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Então $\hat{f}(\xi)$ é uma função infinitamente diferenciável com suas derivadas contínuas e também

$$D^\alpha \hat{f}(\xi) = (-2\pi i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha f)(\xi)$$

e

$$\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) = (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi),$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Definição 2.1.5. Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. A transformada inversa de Fourier da função f é o operador definido por

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\cdot\xi} f(\xi)d\xi, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Propriedade 2.1.6 (Identidade de Parseval). Seja $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Chamamos de identidade de Parseval a seguinte igualdade

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Esta identidade mostra que a transformada de Fourier não é apenas uma bijeção, mas também uma isometria de $\mathcal{S}$ munido do produto escalar definido no L^2. Como o espaço $\mathcal{S}$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^d)$, a transformada de Fourier pode ser estendida exclusivamente para uma isometria de todo espaço $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 2.1.7 (Teorema de Plancherel). Existe uma isometria linear T de $L^2(\mathbb{R}^d)$ no $L^2(\mathbb{R}^d)$, definida exclusivamente pela condição

$$Tf = \hat{f}, \qquad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Além disso, a identidade de Parseval é válida para todos $u, v \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Definição 2.1.8. Um multiplicador de Fourier é um operador da forma $M(D)f(x) = \mathcal{F}^{-1}(M(\xi)\mathcal{F}(f)(\xi))(x)$, ou seja,

$$M(D)f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\cdot\xi} M(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi, \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d,$$

onde $M(\xi)$ é chamado de símbolo do multiplicador de Fourier $M(D)$. Com essa definição, é facilmente verificável que $\mathcal{F}(M(D)f(x))(\xi) = M(\xi)\mathcal{F}(f)(\xi)$.

Notação 2.1.9. Utilizaremos com frequência no decorrer do texto o multiplicador de Fourier $\Lambda(D) = (1 + |D|^2)^{\frac{1}{2}}$, com símbolo do multiplicador definido por $\Lambda(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$.

2.2 Distribuições

Assim como as transformadas de Fourier, a teoria das distribuições é uma parte importante no estudo das equações diferenciais parciais, sobre tudo do ponto de vista da análise funcional. O conhecimento desta teoria também será necessário para uma correta compreensão na leitura deste texto. Além disso, os resultados apresentados aqui encontram-se em [12].

Para uma breve apresentação da teoria, algumas definições são necessárias.

Definição 2.2.1. Seja Ω um subconjunto do $\mathbb{R}^d$ e seja $f \in C_{loc}(\Omega)$. Dizemos que o suporte de f em Ω é dado pela relação

$$supp\, f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

A função $f \in C_{loc}(\Omega)$ é dita de suporte compacto se $supp\, f$ for limitado em $\mathbb{R}^d$ e $supp\, f \subset \Omega$.

Notação 2.2.2. Seja f uma função definida em Ω infinitamente diferenciável com todas as derivadas contínuas em Ω. Dizemos então que f é uma função suave e denotamos $f \in C^{\infty}(\Omega)$.

Considere também o espaço $C_0^{\infty}(\Omega)$ como o espaço das funções suaves que se anulam na fronteira de Ω. Este espaço está contido em vários espaços importantes $(C(\Omega), L^p(\Omega), C^{\infty}(\Omega)$, etc.) e podem ser definidas diferentes noções de convergência em $C_0^{\infty}(\Omega)$. Para o nosso objetivo, utilizaremos a noção de convergência em $C_0^{\infty}(\Omega)$ apresentada abaixo.

Definição 2.2.3. Seja Ω um subconjunto do $\mathbb{R}^d$. Dizemos que $\mathcal{D}(\Omega)$ é o espaço das funções teste e é definido por

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega) : supp\, \varphi\; compacto\; em\; \Omega\}$$

com a seguinte noção de convergência:

Uma sequência $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ é dita convergente para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, se existir um conjunto $K \subset \Omega$ tal que

$$supp\, \varphi_n \in K, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e

$$\sup_{x \in K} |D^{\alpha}(\varphi_n) - D^{\alpha}(\varphi)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Com os conceitos apresentados até aqui, podemos enfim definir uma distribuição.

Definição 2.2.4. Uma distribuição é um funcional linear contínuo em $\mathcal{D}(\Omega)$. Denotamos o espaço de todas as distribuições por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Toda função localmente integrável $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ define uma distribuição

$$\langle g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x)dx, \quad \forall\, \varphi \,\in\, \mathcal{D},$$

chamada distribuição regular.

Toda distribuição $u \in \mathcal{D}'$ pode ser multiplicada por uma função suave $f \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\langle fu, \varphi \rangle = \langle u, f\varphi \rangle$$

para qualquer $\varphi \in \mathcal{D}$.

Definição 2.2.5. Podemos definir de maneira similar a multiplicação por funções suaves, a operação de derivação parcial no espaço das distribuições

$$D^\alpha : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

chamada derivada de distribuição, definida por

$$\langle D^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \varphi \rangle,$$

para toda $u \in \mathcal{D}'$ e toda $\varphi \in \mathcal{D}$.

A noção de derivada de distribuição está intimamente ligada com o conceito de derivada fraca, que será apresentado na próxima seção.

2.3 Espaços de Sobolev

A teoria moderna sobre equações diferenciais parciais tem como uma das suas principais bases o estudo dos espaços de Sobolev.

Escolher um espaço apropriado para procurar soluções de um equação diferencial parcial específica é uma parte importantíssima para poder provar a existência de soluções e estudar suas propriedades. Os espaços de Sobolev são uma boa alternativa para diversos problemas, pois possibilitam o uso de várias ferramentas de analise funcional e cálculo variacional.

Os espaços de Sobolev também serão amplamente utilizados no decorrer deste texto, e em função disso serão apresentados a seguir. Além disso, tais resultados também podem ser encontrados em [2], [3] e [12].

Definição 2.3.1. Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^d$. Tome $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ e α um multi-índice. Dizemos que g é a derivada fraca de ordem α de $f \in \Omega$, se

$$\langle g, \varphi \rangle = \int_\Omega g(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x)dx, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$. Neste caso dizemos que $g(x) = D^\alpha f(x)$.

Note que, se a derivada fraca de ordem α de $f \in \Omega$ existir então ela coincide com a definição de derivada de distribuição de uma distribuição regular.

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x)dx = \int_\Omega g(x)\varphi(x)dx = \langle g, \varphi \rangle$$

Conhecendo os conceitos apresentados acima, somos capazes então de definir um espaço de Sobolev.

Definição 2.3.2. Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^d$, α um multi-índice, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é o espaço vetorial das funções

$$\left\{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \;\; \textit{para todo}\; \alpha \in \mathbb{N}^d \; \textit{tal que}\; |\alpha| \leq m \right\}$$

com $D^\alpha u$ sendo a derivada de distribuição da função u. Em $W^{m,p}(\Omega)$ introduziremos a norma

$$\|u\|_{m,p} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^p(\Omega)}}.$$

Em particular, se assumirmos $p = \infty$ podemos definir um espaço de Sobolev $W^{m,\infty}(\Omega)$ de forma análoga, porém com a seguinte norma

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

2.4 Espaço H^s

Os espaços H^s são classes especiais de espaços de Sobolev, pois possibilitam definições alternativas e o uso de ferramentas próprias. Devido a essas particularidades iremos apresentar e definir este espaço e sua norma particular, assim como feito em [2].

Para começarmos, considere $\Omega = \mathbb{R}^d$, nós podemos usar a transformada de Fourier para fornecer uma definição alternativa do espaço de Sobolev $W^{m,2}(\mathbb{R}^d)$. Chamaremos este espaço de H^m, com $m \in \mathbb{N}$.

A partir da norma $\|u\|_{m,2}$ apresentada na definição 2.3.2 podemos obter uma norma equivalente, usando o Teorema 2.1.4 e a identidade de Parseval, da seguinte maneira.

Para qualquer $u \in \mathcal{S}$ é válido que

$$\|u\|_{m,2} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha u(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha| \leq m} \left| \widehat{D^\alpha u}(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha| \leq m} |(2\pi i)^\alpha|^2 \, |\xi^\alpha|^2 \, |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Note que para todo $m = 0, 1, 2, \cdots$ e $\xi \in \mathbb{R}^d$ nós temos

$$C^{-1}(1 + |\xi|^2)^m \leq \sum_{|\alpha| \leq m} |(2\pi i)^\alpha|^2 \, |\xi^\alpha|^2 \leq C(1 + |\xi|^2)^m$$

com a constante $C > 0$.

É fácil ver que a norma $\|u\|_{m,2}$ é equivalente em $\mathcal{S}$ a norma

$$\|u\|_{m,*} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^m \, |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall \, u \in \mathcal{S}.$$

Assim, pelo teorema 2.1.7 de Plancherel e pelo fato de $\mathcal{S}$ ser denso em L^2 podemos obter então a seguinte definição alternativa do espaço de Sobolev $H^m(\mathbb{R}^d)$ para

$m \in \mathbb{N}$

$$H^m(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^m \, |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

Com essa nova definição, é possível fazer uma generalização para espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ com $s \in \mathbb{R}$ e $\Lambda(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$ da seguinte maneira

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) : \Lambda(\xi)^s \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\}$$

com a norma

$$\|u\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \Lambda(\xi)^{2s} \, |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por fim, iremos denotar também $H^\infty(\mathbb{R}^d) = \bigcap_s H^s(\mathbb{R}^d)$ com $s \in \mathbb{R}$.

2.5 Teoremas adicionais

Nesta etapa iremos apresentar algumas definições e teoremas adicionais, pois estes serão necessários para plena compreensão e utilizados apenas como menção no decorrer do texto. Suas demonstrações encontram-se suas respectivas referências.

Definição 2.5.1 (Difeomorfismo). Sejam U e V abertos no $\mathbb{R}^d$. Dizemos que um difeomorfismo $f : U \to V$ é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável. Se f e f^{-1} são de classe C^k, dizemos que f é um difeomorfismo de classe C^k.

Teorema 2.5.2 (Teorema de Lax-Milgram). Assumiremos um espaço real de Hilbert H, com norma $\|\cdot\|$ e produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja $B : H \times H \to \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear para qual existem constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que

$$|B(u,v)| \leq \alpha \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in H,$$

e

$$\beta \|u\|^2 \leq B(u,v), \quad \forall u \in H.$$

Além disso, seja $f : H \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo e limitado. Então existe um único elemento $u \in H$ tal que para algum $w \in H$ é valido que

$$B(u,v) = (w,v), \quad \forall v \in H.$$

(Resultado apresentado em [10], [18], [4]).

Teorema 2.5.3 (Desigualdade de Poincaré). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um aberto limitado em uma direção. Então, existe uma constante positiva $C = C(\Omega, p)$, tal que $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tem-se que

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

(Resultado apresentado em [10]).

Teorema 2.5.4 (Teorema do Traço). Seja $s > \frac{1}{2}$, então qualquer função $u \in H^s(\mathbb{R}^{d+1})$ tem um traço v no hiperplano $\{y = 0\}$, tal que $v \in H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$. Além disso, o operador traço T é sobrejetivo de $H^s(\mathbb{R}^{d+1})$ para $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$, e tem-se

$$\|v\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)} \leq Cst \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^{d+1})}$$

para $v(X) = u(X, 0)$ $\forall X \in \mathbb{R}^d$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})$ e Cst constante maior que zero. (Resultado apresentado em [8]).

Teorema 2.5.5 (Teorema do Divergente). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ uma região sólida simples e $\mathcal{O}$ a fronteira de Ω, orientada positivamente (para fora). Se $\vec{F}$ é um campo vetorial de classe C^1 em Ω, então

$$\int_\Omega \nabla \cdot \vec{F} d\vec{x} = \int_\mathcal{O} \vec{n} \cdot \vec{F} d\mathcal{O}.$$

(Resultado apresentado em [11]).

Teorema 2.5.6 (Desigualdade de Young). Sejam $p, q \in \mathbb{R}$ com $p, q \geq 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então para todo $a, b \in \mathbb{R}$ com $a, b > 0$ vale

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

(Resultado apresentado em [5]).

2.6 Notações

Além das notações que já foram previamente declaradas, apresentaremos aqui um conjunto de notações que utilizaremos ao longo do texto. Algumas notações mais pontuais serão indicadas em trechos variados.

• Cst sempre representa uma constante numérica que pode mudar de uma linha para outra. Se a constante depende de alguns parâmetros $\lambda_1, \lambda_1, \cdots$, denotamos então como $C(\lambda_1, \lambda_1, \cdots)$.

• Para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{d+1}) \in \mathbb{N}^d$, definimos $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{d+1}$.

• Para todo $i = 1, \cdots, d$, a derivada parcial em relação a X_i é representada por $\frac{\partial}{\partial X_i}$. Da mesma maneira, para $i = d+1$, dizemos que $\frac{\partial}{\partial X_{d+1}} = \frac{\partial}{\partial y}$ (mesmo sabendo que $X \in \mathbb{R}^d$ escrevemos por vezes X_{d+1} ao invés de y por abuso de linguagem).

• Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^{d+1}$ e f função suave, denotamos $D^\alpha f$ por

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} X_1 \partial^{\alpha_2} X_2 \cdots \partial^{\alpha_{d+1}} X_{d+1}}.$$

• Se $f \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^d))$, dizemos que $\|f\|_{H^s_T} = \sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_{H^s}$.

• Para todo $s \in \mathbb{R}$, dizemos que $\lceil s \rceil$ denota o primeiro inteiro estritamente maior que s (assim como $\lceil 1 \rceil = 2$).

3 PROBLEMA ELÍPTICO DE FRONTEIRA EM UMA FAIXA

Neste capítulo buscaremos resolver um problema sobre um certo operador elíptico em uma faixa qualquer. Para isso, usaremos um difeomorfismo afim de equivaler este a um outro problema em uma faixa plana, e então obter estimativas sobre a solução do novo problema, assim como feito em [14]. Além disso, ao fim do capítulo construiremos estimativas mais regulares das solução encontradas.

Para começarmos a apresentar as condições, vamos considerar ao longo deste capítulo um domínio Ω definido como

$$\Omega = \left\{(X, y) \in \mathbb{R}^{d+1}, b(X) < y < a(X)\right\},$$

onde a e b satisfazem as seguintes condições:

$$\exists h_0 > 0 \text{ tal que } min\left\{-b, a - b\right\} \geq h_0 \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^d. \tag{3.1}$$

Também consideraremos um operador elíptico de coeficientes constantes $\mathbb{P} = -\nabla_{X,y} \cdot P\nabla_{X,y}$, onde P é uma matriz simétrica que satisfaz as seguintes condições:

$$\exists p > 0 \;\text{ tal que }\; P\Theta \cdot \Theta \geq p\left|\Theta\right|^2, \;\; \forall \Theta \in \mathbb{R}^{d+1}. \tag{3.2}$$

O principal objetivo deste capítulo é estudar o problema elíptico

$$\begin{cases} \mathbb{P}u = h \;\text{ em }\; \Omega \\ u\big|_{y=a(X)} = f, \qquad \frac{\partial^P}{\partial n} u\Big|_{y=b(X)} = g \end{cases}, \tag{3.3}$$

onde h é uma função definida em Ω e f e g são funções definidas no $\mathbb{R}^d$. Além disso, $\frac{\partial^P}{\partial n}\; u\big|_{y=b(X)}$ representa a derivada conormal associada ao operador $\mathbb{P}$ aplicado em u na fronteira $y = b(X)$,

$$\frac{\partial^P}{\partial n}\; u\big|_{y=b(X)} = -\vec{n}_- \cdot P\nabla_{X,y}\; u\big|_{y=b(X)}, \tag{3.4}$$

onde $\vec{n}_-$ representa o vetor normal externo a parte inferior.

Com esse propósito, vamos primeiramente mostrar que a teoria das equações elípticas (3.3) pode ser deduzida através do estudo das equações elípticas em uma faixa plana, mas com coeficientes variáveis, que será apresentado na seção 3.2. Dessa forma, iremos obter estimativas da solução do problema das equações elípticas em uma faixa plana que serão equivalentes ao problema mais geral.

A fim de mostrar a equivalência desses problemas, vamos definir um difeomorfismo entre Ω e a faixa plana, de mesmo modo que na definição 2.5.1, como veremos na próxima seção.

Notação 3.0.1. Para todo conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^{d+1}$, nós diremos que $\|\cdot : U\|_p$, $\|\cdot : U\|_{k,\infty}$ e $\|\cdot : U\|_{k,2}$ são as respectivas normas canônicas de $L^p(U)$, $W^{k,\infty}(U)$ e $H^k(U)$. Quando nenhuma confusão for possível no domínio U escreveremos apenas $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_{k,\infty}$ e $\|\cdot\|_{k,2}$.

3.1 Redução para uma equação elíptica em uma faixa plana.

Ao longo desta seção, denotaremos por R qualquer difeomorfismo entre Ω e a faixa plana $S = \mathbb{R}^d \times (-1, 0)$, que assumiremos ser da forma

$$R : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & S \\ (X, y) & \to & (X, r(X, y)) \end{array} \tag{3.5}$$

e denotaremos sua inversa R^{-1} por $\tilde{R}$

$$\tilde{R} : \begin{array}{ccc} S & \to & \Omega \\ (\tilde{X}, \tilde{y}) & \to & (\tilde{X}, s(\tilde{X}, \tilde{y})) \end{array} \tag{3.6}$$

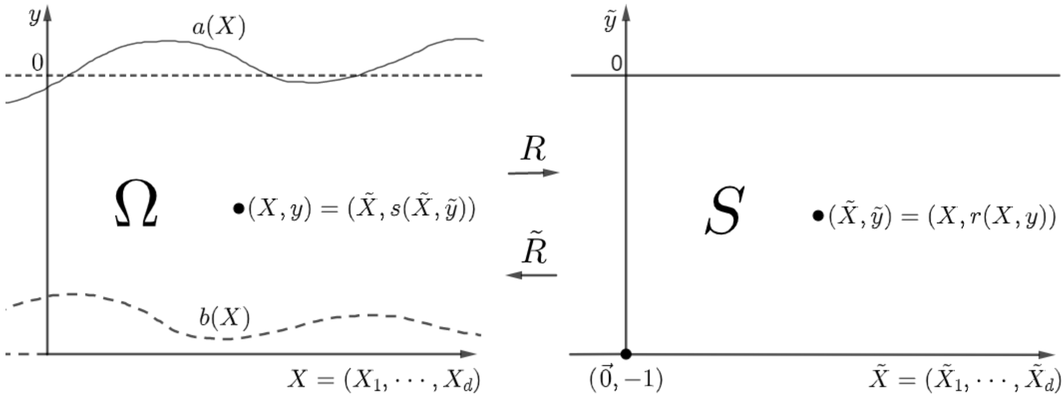

Figura 2

Fonte: Elaborada pelo autor.

Também assumiremos a seguinte condição sobre s:

Condição 3.1.1. Suponha $s \in W^{1,\infty}(S)$ com $s|_{\tilde y=0} = a$ e $s|_{\tilde y=-1} = b$. Além disso, suponha que existe $c_0 > 0$ tal que $\frac{\partial}{\partial \tilde y} s \geq c_0$ em $\overline{S}$.

Finalmente, nós precisaremos da seguinte definição:

Definição 3.1.2. Seja $k \in \mathbb{N}$. A aplicação s, dada por (3.6) é dita k-regular se satisfaz a condição 3.1.1. e pode ser decomposta em $s = s_1 + s_2$ com $s_1 \in C_b^k(\overline{S})$ e $s_2 \in H^k(S)$, além de $\frac{\partial}{\partial \tilde y} s_1 \geq c_0$ em $\overline{S}$.

Segue, além dessa definição, que toda distribuição u definida em Ω pode ser associada, usando um difeomorfismo R e sua inversa $\tilde R$ dados por (3.5) e (3.6), a uma distribuição $\tilde u$ definida em S como

$$\tilde u = u \circ \tilde R \tag{3.7}$$

e

$$u = \tilde u \circ R \tag{3.8}$$

Observação 3.1.3. Vamos adotar um exemplo simples de difeomorfismo R entre Ω e S, que é dado por

$$r(X,y) = \frac{y - a(X)}{a(X) - b(X)}$$

e com isso, $s(\tilde{X},\tilde{y}) = (a(\tilde{X}) - b(\tilde{X}))\tilde{y} + a(\tilde{X})$. Se $a \in H^k \bigcap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ e $b \in C_b^k(\mathbb{R}^d)$, fica claro que s é k-regular, com $s_1(\tilde{X},\tilde{y}) := -b(\tilde{X})\tilde{y}$, $s_2(\tilde{X},\tilde{y}) := (1+\tilde{y})a(\tilde{X})$, e $c_0 = h_0$.

O próximo lema mostra que a equação elíptica com coeficientes constantes $\mathbb{P}u = 0$ em Ω pode ser equivalentemente formulada como uma equação elíptica com coeficientes variáveis $\tilde{\mathbb{P}}\tilde{u} = 0$ em S.

Lema 3.1.4. Suponha que a aplicação s, dada por (3.6) satisfaça a condição 3.1.1. Tome $\mathbb{P} = -\nabla_{X,y} \cdot P\nabla_{X,y}$ com P satisfazendo (3.2). Assim a equação $\mathbb{P}u = h$ está definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se, e somente se, a equação $\tilde{\mathbb{P}}\tilde{u} = (\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}})\tilde{h}$ está definida em $\mathcal{D}'(S)$, onde $\tilde{u}$ e $\tilde{h}$ são deduzidos através de u e h pela fórmula (3.7) , e $\tilde{\mathbb{P}} := -\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \cdot \tilde{P}\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}}$, com

$$\tilde{P} = \frac{1}{\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right)} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right) Id_{d\times d} & 0 \\ -\nabla_{\tilde{X}} s^T & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right) Id_{d\times d} & -\nabla_{\tilde{X}} s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Além disso, para todo $\Theta \in \mathbb{R}^{d+1}$ vale que

$$\tilde{P}\Theta \cdot \Theta \geq \tilde{p}\,|\Theta|^2, \quad \text{com} \quad \tilde{p} = Cst\; p \frac{c_0^2}{\left\|\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}}\right\|_\infty (1 + \left\|\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} s\right\|_\infty)^2}$$

Dem.: Por praticidade usaremos na demonstração $d(X,y) = d\Omega$ e $d(\tilde{X},\tilde{y}) = dS$.

Em primeiro lugar, temos que $\mathbb{P}u = h$ está definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se, e somente se,

$$\int_\Omega \mathbb{P}u\varphi \, d\Omega = \int_\Omega h\varphi \, d\Omega, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{3.9}$$

Assim, por definição de $\mathbb{P}$, vale que

$$\int_\Omega \mathbb{P}u\varphi \, d\Omega = \int_\Omega (-\nabla_{X,y} \cdot P\nabla_{X,y} u)\varphi \, d\Omega$$

$$= \int_{\partial\Omega} (-P\nabla_{X,y}u)\varphi \, d\Omega - \int_{\Omega} (-P\nabla_{X,y}u) \cdot (\nabla_{X,y}\varphi) \, d\Omega = \int_{\Omega} P\nabla_{X,y}u \cdot \nabla_{X,y}\varphi \, d\Omega$$

pois φ se anula na fronteira de Ω. Além disso,

$$\nabla_{X,y}u = \nabla_{X,y}(\tilde{u} \circ R) = \nabla_{X,y}\tilde{u}(X, r(X,y)),$$

então

$$\int_{\Omega} P\nabla_{X,y}u \cdot \nabla_{X,y}\varphi \, d\Omega = \int_{\Omega} P\nabla_{X,y}\tilde{u}(X, r(X,y)) \cdot \nabla_{X,y}\tilde{\varphi}(X, r(X,y)) \, d\Omega.$$

Nesta etapa, é possível alterar o espaço de integração de Ω para S usando o fato de que $\int_{\Omega} f(X,y)d(X,y) = \int_S J(\tilde{X},\tilde{y})f(\tilde{X},\tilde{y})d(\tilde{X},\tilde{y})$, onde $J(\tilde{X},\tilde{y})$ é o Jacobiano da f e é definido por

$$J(\tilde{X},\tilde{y}) = \begin{vmatrix} \nabla_{\tilde{X}}X & \frac{\partial}{\partial\tilde{y}}X \\ \nabla_{\tilde{X}}y & \frac{\partial}{\partial\tilde{y}}y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \nabla_{X}X & \frac{\partial}{\partial\tilde{y}}X \\ \nabla_{\tilde{X}}s & \frac{\partial}{\partial\tilde{y}}s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \nabla_{\tilde{X}}s & \frac{\partial}{\partial\tilde{y}}s \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}s\right| \tag{3.10}$$

e então, segue que

$$\int_{\Omega} P\nabla_{X,y}\tilde{u}(X, r(X,y)) \cdot \nabla_{X,y}\tilde{\varphi}(X, r(X,y)) \, d\Omega$$

$$= \int_S \left|\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}s\right| P\nabla_{X,y}\tilde{u}(\tilde{X}, r(\tilde{X}, s(\tilde{X},\tilde{y}))) \cdot \nabla_{X,y}\tilde{\varphi}(\tilde{X}, r(\tilde{X}, s(\tilde{X},\tilde{y}))) \, dS. \tag{3.11}$$

Lembre-se que, dado $(X,y) \in \Omega$, é valido que $X = \tilde{X}$, $y = s(\tilde{X},\tilde{y})$ e $\tilde{y} = r(X,y)$, onde $(\widetilde{X,}\tilde{y}) \in S$, e note também que

$$\nabla_{X,y}\tilde{u}(\tilde{X}, r(\tilde{X}, s(\tilde{X},\tilde{y}))) = \begin{pmatrix} \nabla_{\tilde{X}}\tilde{u}(\tilde{X}, r(\tilde{X}, s(\tilde{X},\tilde{y}))) \\ \frac{\partial}{\partial s}\tilde{u}(\tilde{X}, r(\tilde{X}, s(\tilde{X},\tilde{y}))) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \nabla_{\tilde{X}}\tilde{u}(\tilde{X}, r) + \frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}(\tilde{X}, r)\nabla_{\tilde{X}}r(\tilde{X}, s) \\ \frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}(\tilde{X}, r)\frac{\partial}{\partial s}r(\tilde{X}, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{\tilde{X}}\tilde{u} + (\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\tilde{u})\nabla_{\tilde{X}}r(\tilde{X}, s) \\ (\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\tilde{u})\frac{\partial}{\partial s}r(\tilde{X}, s) \end{pmatrix},$$

o que implica em (3.11) que

$$\int_S \left|\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}s\right| P\nabla_{X,y}\tilde{u}(\tilde{X}, r(\tilde{X}, s(\tilde{X},\tilde{y}))) \cdot \nabla_{X,y}\tilde{\varphi}(\tilde{X}, r(\tilde{X}, s(\tilde{X},\tilde{y}))) \, dS$$

$$= \int_S \left|\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}s\right| P \begin{pmatrix} \nabla_{\tilde{X}}\tilde{u} + \left(\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\tilde{u}\right)\nabla_{\tilde{X}}r(\tilde{X}, s) \\ \left(\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\tilde{u}\right)\frac{\partial}{\partial s}r(\tilde{X}, s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nabla_{\tilde{X}}\tilde{\varphi} + \left(\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\tilde{\varphi}\right)\nabla_{\tilde{X}}r(\tilde{X}, s) \\ \left(\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\tilde{\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial s}r(\tilde{X}, s) \end{pmatrix} dS$$

$$= \int_S \left|\tfrac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right| P \begin{pmatrix} \nabla_{\tilde{X}} + \nabla_{\tilde{X}} r(\tilde{X}, s)\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial s} r(\tilde{X}, s)\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right) \end{pmatrix} \tilde{u} \cdot \begin{pmatrix} \nabla_{\tilde{X}} + \nabla_{\tilde{X}} r(\tilde{X}, s)\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial s} r(\tilde{X}, s)\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right) \end{pmatrix} \tilde{\varphi}\, dS$$

$$= \int_S \left|\tfrac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right| P \begin{pmatrix} \nabla_{\tilde{X}} + \nabla_{X} r\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial s} r\right)\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right) \end{pmatrix} \tilde{u} \cdot \begin{pmatrix} \nabla_{\tilde{X}} + \nabla_{X} r\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial s} r\right)\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right) \end{pmatrix} \tilde{\varphi}\, dS$$

$$= \int_S \left|\tfrac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right| P \begin{pmatrix} \nabla_{\tilde{X}} + \nabla_{\tilde{X}} \tilde{y}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial s} \tilde{y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right) \end{pmatrix} \tilde{u} \cdot \begin{pmatrix} \nabla_{\tilde{X}} + \nabla_{\tilde{X}} \tilde{y}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial s} \tilde{y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right) \end{pmatrix} \tilde{\varphi}\, dS$$

$$= \int_S \left|\tfrac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right| P \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \tilde{u} \cdot \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \tilde{\varphi}\, dS.$$

Usando integral por partes na integral acima, temos que

$$\int_S \left|\tfrac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right| P \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \tilde{u} \cdot \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \tilde{\varphi}\, dS$$

$$= (\left|\tfrac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right| P \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \tilde{u})\, \tilde{\varphi}\Big|_{\partial S} - \int_S \tilde{\varphi} (\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \cdot \left|\tfrac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right| P \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}}) \tilde{u}\, dS$$

$$= - \int_S \tilde{\varphi} \begin{pmatrix} \nabla_{\tilde{X}} + \nabla_{\tilde{X}} r(\tilde{X}, s)\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial s} r(\tilde{X}, s)\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right) \end{pmatrix} \cdot \left|\tfrac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right| P \begin{pmatrix} \nabla_{\tilde{X}} + \nabla_{\tilde{X}} r(\tilde{X}, s)\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial s} r(\tilde{X}, s)\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right) \end{pmatrix} \tilde{u}\, dS$$

$$= - \int_S \tilde{\varphi} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \cdot \begin{pmatrix} Id_{d\times d} & 0 \\ (\nabla_{\tilde{X}} r(\tilde{X}, s))^T & \frac{\partial}{\partial s} r(\tilde{X}, s) \end{pmatrix} \left|\tfrac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right| P \begin{pmatrix} Id_{d\times d} & \nabla_{\tilde{X}} r(\tilde{X}, s) \\ 0 & \frac{\partial}{\partial s} r(\tilde{X}, s) \end{pmatrix} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \tilde{u}\, dS.$$

Tomando $\tilde{P} = \begin{pmatrix} Id_{d\times d} & 0 \\ (\nabla_{\tilde{X}} r(\tilde{X}, s))^T & \frac{\partial}{\partial s} r(\tilde{X}, s) \end{pmatrix} \left|\tfrac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right| P \begin{pmatrix} Id_{d\times d} & \nabla_{\tilde{X}} r(\tilde{X}, s) \\ 0 & \frac{\partial}{\partial s} r(\tilde{X}, s) \end{pmatrix}$ temos

$$\tilde{P} = \frac{1}{\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right)} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right) Id_{d\times d} & 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right) (\nabla_{\tilde{X}} r(\tilde{X}, s))^T & \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right) \frac{\partial}{\partial s} r(\tilde{X}, s) \end{pmatrix}$$

$$\times P \begin{pmatrix} \left|\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right| Id_{d\times d} & \left|\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right| \nabla_{\tilde{X}} r(\tilde{X}, s) \\ 0 & \left|\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right| \frac{\partial}{\partial s} r(\tilde{X}, s) \end{pmatrix}.$$

Por definição de r e s segue que $r(\tilde{X}, s(\tilde{X}, \tilde{y})) = \tilde{y}$ para todo $(\tilde{X}, \tilde{y}) \in S$. Logo, derivando a igualdade acima em relação a $\tilde{X}$ e $\tilde{y}$, respectivamente, vale que

$$\nabla_{\tilde{X}} r(\tilde{X}, s(\tilde{X}, \tilde{y})) = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{y} \Leftrightarrow \nabla_{\tilde{X}} r(\tilde{X}, s) + \frac{\partial}{\partial s} r(\tilde{X}, s) \nabla_{\tilde{X}} s(\tilde{X}, \tilde{y}) = 0 \qquad (3.12)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} r(\tilde{X}, s(\tilde{X}, \tilde{y})) = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \tilde{y} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial s} r(\tilde{X}, s) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s(\tilde{X}, \tilde{y}) = 1. \tag{3.13}$$

Multiplicando a equação (3.12) por $\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s$ e usando o resultado obtido em (3.13), chagamos a

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s(\tilde{X}, \tilde{y}) \nabla_{\tilde{X}} r(\tilde{X}, s) = -\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s(\tilde{X}, \tilde{y}) \frac{\partial}{\partial s} r(\tilde{X}, s) \nabla_{\tilde{X}} s(\tilde{X}, \tilde{y}) = -\nabla_{\tilde{X}} s. \tag{3.14}$$

Portanto, utilizando as expressões (3.13) e (3.14), e pela condição 3.1.1, podemos escrever

$$\tilde{P} = \frac{1}{\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right)} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right) Id_{d\times d} & 0 \\ -\nabla_{\tilde{X}} s^T & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right) Id_{d\times d} & -\nabla_{\tilde{X}} s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, encontramos o $\tilde{P}$ dado pelo Lema (3.1.4). Logo,

$$\int_\Omega (-\nabla_{X,y} \cdot P \nabla_{X,y} u) \varphi \, dS = \int_S \tilde{\varphi} (-\nabla_{X,y} \cdot \tilde{P} \nabla_{X,y} \tilde{u}) \, dS$$

e

$$\begin{cases} \int_\Omega \mathbb{P} u \varphi \, d\Omega = \int_S \tilde{\mathbb{P}} \tilde{u} \tilde{\varphi} \, dS \\ \int_\Omega h \varphi \, d\Omega = \int_S \left(\frac{\partial}{\partial y} s\right) \tilde{h} \tilde{\varphi} \, dS \end{cases}.$$

Agora precisamos mostrar a propriedade de coercividade de $\tilde{\mathbb{P}}$. Para tal, note que

$$\tilde{P}\Theta \cdot \Theta = \frac{1}{(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s)} P A \Theta \cdot A \Theta, \quad \text{com} \quad A := \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right) Id_{d\times d} & -\nabla_{\tilde{X}} s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall \Theta \in \mathbb{R}^{d+1}$$

pois,

$$\tilde{P}\Theta \cdot \Theta = \frac{1}{\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right)} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right) Id_{d\times d} & 0 \\ -\nabla_{\tilde{X}} s^T & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right) Id_{d\times d} & -\nabla_{\tilde{X}} s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Theta \cdot \Theta$$

e note que $\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right) Id_{d\times d} & 0 \\ -\nabla_{\tilde{X}} s^T & 1 \end{pmatrix} = A^T$. Então, podemos escrever

$$\tilde{P}\Theta \cdot \Theta = \frac{1}{\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right)} A^T P A \Theta \cdot \Theta.$$

Com isso, como P é simétrica notemos que

$$A^T P A\Theta \cdot \Theta = A\Theta \cdot (A^T P)^T \Theta = A\Theta \cdot P^T A\Theta = PA\Theta \cdot A\Theta, \tag{3.15}$$

onde a demonstração da primeira igualdade de (3.15) encontra-se no Apêndice B. Logo, podemos escrever

$$\tilde{P}\Theta \cdot \Theta = \frac{1}{\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right)} A^T P A\Theta \cdot \Theta = \frac{1}{\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right)} PA\Theta \cdot A\Theta,$$

e devido à propriedade de coercividade de P, nós temos portanto

$$\tilde{P}\Theta \cdot \Theta \geq \frac{p}{\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right)} |A\Theta|^2 .$$

Além disso, sabemos que a matriz A é invertível pois possui determinante igual a $\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s \geq 0$, e sua inversa é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right)} \begin{pmatrix} Id_{d\times d} & \nabla_{\tilde{X}} s \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s \end{pmatrix},$$

de modo que $\Theta = A^{-1}A\Theta$ pode ser limitado como

$$|\Theta| = \left|A^{-1}A\Theta\right| \leq \left\|A^{-1}\right\|_\infty |A\Theta| \leq Cst \frac{1}{c_0} \left(1 + \left\|\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} s\right\|_\infty\right) |A\Theta| ,$$

pois a soma dos elementos em cada linha da matriz $\begin{pmatrix} Id_{d\times d} & \nabla_{\tilde{X}} s \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s \end{pmatrix}$ é menor que $\left(1 + \left\|\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} s\right\|_\infty\right)$, e pela condição 3.1.1 sabemos que $\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s \geq c_0$, o que implica em

$$|A\Theta| \geq Cst \frac{c_0}{\left(1 + \left\|\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} s\right\|_\infty\right)} |\Theta|$$

e tomando $\tilde{p} = Cst\, p \frac{c_0^2}{\left\|\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right\|_\infty \left(1 + \left\|\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} s\right\|_\infty\right)^2}$ podemos garantir que

$$\tilde{P}\Theta \cdot \Theta \geq \frac{p}{\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right)} |A\Theta|^2$$

$$\geq Cst \frac{p}{\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right)} \frac{c_0^2}{\left(1 + \left\|\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} s\right\|_\infty\right)^2} |\Theta|^2 \geq Cst\, p \frac{c_0^2}{\left\|\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right\|_\infty \left(1 + \left\|\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} s\right\|_\infty\right)^2} |\Theta|^2 = \tilde{p} |\Theta|^2 .$$

O que conclui o resultado deste lema. $\square$

O lema a seguir mostra como as condições de fronteira são transformadas pelo difeomorfismo R.

Lema 3.1.5. Suponha que a aplicação s, dada por (3.6), satisfaça a condição 3.1.1. Para qualquer $u \in C^1(\overline{\Omega})$, tem-se que

$$u \,|_{y=a} = \tilde{u} \,|_{\tilde{y}=0} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^P}{\partial n} \, u|_{y=b} = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla_X b|^2}} \left(\frac{\partial^{\tilde{P}}}{\partial n} \, \tilde{u}|_{\tilde{y}=-1} \right)$$

Dem.: A primeira afirmação do lema é direta. Basta observar que

$$u|_{y=a} = (\tilde{u} \circ R)|_{y=a} = \tilde{u}(X, r(X,y))|_{y=a} = \tilde{u}(X, r(X,a)) = \tilde{u}(\tilde{X}, 0) = \tilde{u}|_{\tilde{y}=0}$$

pois considerando o difeomorfismo dado pela observação 3.1.3, r é definido como

$$r(X,y) = \frac{y-a(X)}{a(X)-b(X)}.$$

Para a segunda afirmação, considere $\tilde{P}$ dado pelo lema 3.1.4, e então por definição

$$\frac{\partial^{\tilde{P}}}{\partial n} \, \tilde{u}|_{\tilde{y}=-1} = -(-e_{d+1}) \cdot \tilde{P} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \, \tilde{u}|_{\tilde{y}=-1}$$

$$= -(-e_{d+1}) \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right)} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right) Id_{d\times d} & 0 \\ -\nabla_{\tilde{X}} s^T & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right) Id_{d\times d} & -\nabla_{\tilde{X}} s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \, \tilde{u}|_{\tilde{y}=-1} \, .$$

Fazendo o mesmo processo feito no lema 3.1.4, note que

$$\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \, \tilde{u}|_{\tilde{y}=-1} = \begin{pmatrix} \nabla_X \, u|_{y=b} + \nabla_{\tilde{X}} \, s|_{\tilde{y}=-1} \left(\frac{\partial}{\partial y} \, u|_{y=b} \right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \, s|_{\tilde{y}=-1} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} \, u|_{y=b} \right) \end{pmatrix}.$$

Com isso,

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right) Id_{d\times d} & -\nabla_{\tilde{X}} s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \, \tilde{u}|_{\tilde{y}=-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s \,|_{\tilde{y}=-1}\right) Id_{d\times d} & -\nabla_{\tilde{X}} s \,|_{\tilde{y}=-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_X \, u|_{y=b} + \nabla_{\tilde{X}} \, s|_{\tilde{y}=-1} \left(\frac{\partial}{\partial y} \, u|_{y=b} \right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \, s|_{\tilde{y}=-1} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} \, u|_{y=b} \right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s \mid_{\tilde{y}=-1}\right) \nabla_X \left. u\right|_{y=b} + \left(\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right) \nabla_{\tilde{X}} \left. s\right|_{\tilde{y}=-1} - \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right) \nabla_{\tilde{X}} \left. s\right|_{\tilde{y}=-1}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} \left. u\right|_{y=b}\right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left. s\right|_{\tilde{y}=-1}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} \left. u\right|_{y=b}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s \mid_{\tilde{y}=-1}\right) \nabla_X \left. u\right|_{y=b} \\ \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left. s\right|_{\tilde{y}=-1}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} \left. u\right|_{y=b}\right) \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left. s\right|_{\tilde{y}=-1} \left(\nabla_{X,y} \left. u\right|_{y=b}\right).$$

Assim,

$$\frac{\partial^{\tilde{P}}}{\partial n} \left. \tilde{u}\right|_{\tilde{y}=-1} = -(-e_{d+1}) \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right)} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right) Id_{d\times d} & 0 \\ -\nabla_{\tilde{X}} s^T & 1 \end{pmatrix} P \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s \mid_{\tilde{y}=-1}\right) \nabla_{X,y} \left. u\right|_{y=b}$$

$$= - \begin{pmatrix} \nabla_X \left. s\right|_{\tilde{y}=-1} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot P \nabla_{X,y} \left. u\right|_{y=b} = - \begin{pmatrix} \nabla_X b \\ -1 \end{pmatrix} \cdot P \nabla_{X,y} \left. u\right|_{y=b}$$

$$= - \frac{\sqrt{1 + |\nabla_X b|^2}}{\sqrt{1 + |\nabla_X b|^2}} \begin{pmatrix} \nabla_X b \\ -1 \end{pmatrix} \cdot P \nabla_{X,y} \left. u\right|_{y=b} = \sqrt{1 + |\nabla_X b|^2} \left(-\vec{n}_- \cdot P \nabla_{X,y} \left. u\right|_{y=b}\right).$$

Logo, por definição

$$\frac{\partial^{\tilde{P}}}{\partial n} \left. \tilde{u}\right|_{\tilde{y}=-1} = \sqrt{1 + |\nabla_X b|^2} \left(\frac{\partial^P}{\partial n} \left. u\right|_{y=b}\right)$$

e isto conclui a demonstração. □

Os lemas 3.1.4 e 3.1.5 mostram que o estudo do problema de fronteira (3.3) pode ser deduzido do estudo do problema elíptico de fronteira em uma faixa plana. Dessa forma, temos a seguinte proposição que resume esse resultado:

Proposição 3.1.6. Suponha que a aplicação s, dada por (3.6), satisfaça a condição 3.1.1. Então, u é uma solução (variacional clássica) de (3.3) se, e somente se, $\tilde{u}$ dado por (3.7) for uma solução (variacional clássica) de

$$\begin{cases} \tilde{\mathbb{P}} \tilde{u} = \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s\right) \tilde{h} \ \text{ em } \ S, \\ \left. \tilde{u}\right|_{\tilde{y}=0} = f, \quad \frac{\partial^{\tilde{P}}}{\partial n} \left. \tilde{u}\right|_{\tilde{y}=-1} = \sqrt{1 + |\nabla_X b|^2} g, \end{cases}$$

onde $\tilde{\mathbb{P}}$ é o mesmo apresentado no lema 3.1.4.

A próxima seção é portanto dedicada ao estudo de problemas elípticos, bem definidos, de fronteira com coeficientes variáveis em uma faixa plana. Antes disso, vamos enunciar um lema que trata da suavidade dos coeficientes de $\tilde{P}$, o qual vamos omitir a demonstração pois a mesma foge muito do objetivo desta seção, mas ela pode ser encontrada em [14].

Lema 3.1.7. Seja $k \in \mathbb{N}$ e suponha que a aplicação s, dada por (3.6), seja $(k+1)$-regular. Então, nós podemos escrever $\tilde{P} = \tilde{P}_1 + \tilde{P}_2$ com $\tilde{P}_1 \in C_b^k(\overline{S})^{(d+1)^2}$, $\tilde{P}_2 \in H^k(S)^{(d+1)^2}$ e

$$\left\|\tilde{P}_1\right\|_{k,\infty} \leq C(\frac{1}{c_0}, \|s_1\|_{k+1,\infty});$$

$$\left\|\tilde{P}_2\right\|_{k,2} \leq C(\frac{1}{c_0}, \|s_1\|_{k+1,\infty}, \|s_2\|_{1,\infty}) \|s_2\|_{k+1,2}.$$

3.2 Equações elípticas com coeficientes variáveis em uma faixa plana.

Nós vimos na última seção que a teoria de equações elípticas em uma faixa qualquer do tipo (3.3) pode ser deduzida do estudo de equações elípticas em uma faixa plana, mas com coeficientes variáveis. Nesta seção, nós estudaremos o seguinte problema mais geral, definido em uma faixa plana:

$$\begin{cases} \mathbb{Q}u := -\nabla_{X,y} \cdot Q\nabla_{X,y} u = h \quad \text{em} \quad S, \\ u|_{y=0} = f, \qquad \frac{\partial^Q}{\partial n} u|_{y=-1} = g, \end{cases} \tag{3.16}$$

onde iremos relembrar que $\frac{\partial^Q}{\partial n}$ representa a derivada conormal associada ao operador $\mathbb{Q}$,

$$\frac{\partial^Q}{\partial n} u|_{y=0} = -e_{d+1} \cdot Q\nabla_{X,y} u|_{y=0}, \quad \frac{\partial^Q}{\partial n} u|_{y=-1} = -(-e_{d+1}) \cdot Q\nabla_{X,y} u|_{y=-1}. \tag{3.17}$$

Assumiremos também que a matriz Q satisfaz a seguinte condição de coercividade:

$$\exists\, q > 0 \text{ tal que } Q(X,y)\Theta \cdot \Theta \geq q\,|\Theta|^2, \quad \forall\, \Theta \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad \forall\, (X,y) \in S. \tag{3.18}$$

O principal resultado desta seção é o seguinte teorema, onde obtemos estimativas da solução do problema (3.16).

Teorema 3.2.1. Sejam $k \in \mathbb{N}$, $m_0 = \lceil \frac{d+1}{2} \rceil$. Tome $f \in H^{k+\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^d)$, $g \in H^{k+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$ e $h \in H^k(S)$. Então,

i. Se $Q \in W^{1+k}(S)^{(d+1)^2}$ satisfaz a condição (3.18), então existe uma única solução $u \in H^{k+2}(S)$ para (3.16). Além disso,

$$\|u\|_{k+2,2} \leq C\left(\frac{1}{q}, \|Q\|_{1+k,\infty}\right)\left(\|h\|_{k,2} + |f|_{H^{k+\frac{3}{2}}} + |g|_{H^{k+\frac{1}{2}}}\right). \tag{3.19}$$

ii. Se $Q_1 \in C_b^{k+1}(\bar{S})^{(d+1)^2}$ e $Q_2 \in H^{1+k} \cap W^{m_0,\infty}(S)^{(d+1)^2}$ tal que $Q := Q_1 + Q_2$ satisfaz (3.18), então existe uma única solução $u \in H^{k+2}(S)$ para (3.16). Além disso, para $k \geq m_0$,

$$\begin{aligned} \|u\|_{k+2,2} &\leq C_k \times \left(\|h\|_{k,2} + |f|_{H^{k+\frac{3}{2}}} + |g|_{H^{k+\frac{1}{2}}}\right) \\ &+ C_k \times \left(\|h\|_{m_0-1,2} + |f|_{H^{m_0+\frac{1}{2}}} + |g|_{H^{m_0-\frac{1}{2}}}\right)\|Q_2\|_{1+k,2}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

onde $C_k = C\left(\frac{1}{q}, \|Q_1\|_{1+k,\infty}, \|Q_2\|_{m_0+1,\infty}\right)$.

Observação 3.2.2. i. A demonstração abaixo mostra que a quantidade $\|\nabla_{X,y} u\|_{k+1,2}$ pode ser estimada mais precisamente do que $\|u\|_{k+2,2}$. Com isso, pode-se substituir as quantidades $\|f\|_{H^{k+\frac{3}{2}}}$ e $\|f\|_{H^{m_0+\frac{1}{2}}}$ em ambas as estimativas do teorema por $\|\nabla_X f\|_{H^{k+\frac{1}{2}}}$ e $\|\nabla_X f\|_{H^{m_0-\frac{1}{2}}}$, respectivamente. Esta observação é muito útil ao fornecer estimativas do operador Dirichlet-Neumann.

ii. A segunda estimativa do teorema permanece válida quando $k < m_0$, mas a primeira estimativa é mais precisa neste caso.

Dem.: (Teorema 3.2.2). Assim como feito em [14], nós apenas provaremos a segunda parte deste teorema, pois a primeira pode ser obtida seguindo os mesmo passos contudo pulando o passo 4 da demonstração.

Passo 1: Vamos construir uma solução variacional para a equação (3.16). Em primeiro lugar, defina uma função f^* como $f^*(y, \cdot) := \chi(y\,|D|)f$, onde χ é uma função suave de suporte compacto de maneira que $\chi(0) = 1$. É fácil ver que $f^*|_{y=0} = f$, e além disso também podemos notar que

$$\|\nabla_{X,y} f^*\|_{1,2} \leq Cst \, \|\nabla_X f\|_{H^{\frac{1}{2}}} \tag{3.21}$$

e que

$$\left\| \left. \frac{\partial^Q f^*}{\partial n} \right|_{y=-1} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq Cst \, \|Q\|_{1,\infty} \, \|\nabla_X f\|_{H^{\frac{1}{2}}} \,, \tag{3.22}$$

onde a demonstração destas desigualdades encontra-se no Apêndice C.

Agora tome $u^* := u - f^*$ onde u é a solução variacional de (3.16). Assim, segue que u é uma solução variacional se, e somente se, u^* também o for.

$$\begin{cases} \mathbb{Q}u^* = h - \mathbb{Q}(f^*) := h^*, \\ u^*|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^Q u^*}{\partial n}\right|_{y=-1} = \tilde{g}, \end{cases} \tag{3.23}$$

onde $\tilde{g} := g - \left.\frac{\partial^Q f^*}{\partial n}\right|_{y=-1}$.

Defina um espaço V como $V := \overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d \times [-1, 0))}$, onde o fecho é tomado em relação a norma $H^1(S)$. Com isso, pelo teorema de Lax-Milgram existe uma única solução $u^* \in V$ tal que para todo $v \in V$ vale

$$\int_S (\mathbb{Q}u^*)v = \int_S h^* v$$

$$\Rightarrow \int_S (-\nabla_{X,y} \cdot Q\nabla_{X,y} u^*)v = \int_S h^* v. \tag{3.24}$$

Além disso, note que

$$\int_S \nabla_{X,y} \cdot (Q\nabla_{X,y} u^* v) = \int_S Q\nabla_{X,y} u^* \cdot \nabla_{X,y} v + \int_S (\nabla_{X,y} \cdot Q\nabla_{X,y} u^*)v$$

$$\Rightarrow \int_S (-\nabla_{X,y} \cdot Q\nabla_{X,y} u^*)v = \int_S Q\nabla_{X,y} u^* \cdot \nabla_{X,y} v - \int_S \nabla_{X,y} \cdot (Q\nabla_{X,y} u^* v).$$

Assim, pelo teorema do divergente, chegamos a

$$\int_S (-\nabla_{X,y} \cdot Q\nabla_{X,y} u^*)v = \int_S Q\nabla_{X,y} u^* \cdot \nabla_{X,y} v - \int_{\partial S} (-e_{d+1}) \cdot Q\nabla_{X,y} u^* v.$$

Agora, substituindo o resultados encontrado em (3.24) temos

$$\int_S Q\nabla_{X,y}u^* \cdot \nabla_{X,y}v + \int_{\partial S} -(-e_{d+1}) \cdot Q\nabla_{X,y}u^* v = \int_S h^* v$$

$$\Rightarrow \int_S Q\nabla_{X,y}u^* \cdot \nabla_{X,y}v + \int_{y=0} -(-e_{d+1}) \cdot Q\nabla_{X,y}u^* v - \int_{y=-1} -(-e_{d+1}) \cdot Q\nabla_{X,y}u^* v = \int_S h^* v.$$

Como $v|_{y=0} = 0$, e por (3.17), segue que

$$\int_S Q\nabla_{X,y}u^* \cdot \nabla_{X,y}v - \int_{y=-1} \frac{\partial^Q}{\partial n} u^* v = \int_S h^* v.$$

Logo, por (3.23), obtemos

$$\int_S Q\nabla_{X,y}u^* \cdot \nabla_{X,y}v = \int_S h^* v + \int_{y=-1} \tilde{g} v. \tag{3.25}$$

Passo 2: Regularidade da solução variacional.

Nós veremos que $u^* \in H^2(S)$, para tal considere a seguinte definição: Para todo $v \in V$ e $i = \{1, \cdots, d\}$, tem-se que $\rho_{i,h}(v) \in V$, onde $\rho_{i,h}(v)$ é definido como

$$\rho_{i,h}(v) := \frac{\tau_{i,h}(v) - v}{h}, \qquad \text{com} \qquad \tau_{i,h}(\varphi) := \varphi(X + he_i, y), \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \times [-1, 0));$$

Sabendo que o operador adjunto de $\rho_{i,h}$ é $-\rho_{i,-h}$ e utilizando a regra do produto segue que

$$\rho_{i,h}(v_1 v_2) = \frac{\tau_{i,h}(v_1 v_2) - v_1 v_2}{h} = \frac{v_1(X + he_i)v_2(X + he_i) - v_1(X)v_2(X)}{h}$$

$$= \frac{v_1(X + he_i)v_2(X + he_i) + v_2(X + he_i)v_1(X) - v_2(X + he_i)v_1(X) - v_1(X)v_2(X)}{h}$$

$$= v_2(X + he_i)\left(\frac{v_1(X + he_i) - v_1(X)}{h}\right) + v_1(X)\left(\frac{v_2(X + he_i) - v_2(X)}{h}\right)$$

$$\Rightarrow \rho_{i,h}(v_1 v_2) = \tau_{i,h}(v_2)\rho_{i,h}(v_1) + v_1 \rho_{i,h}(v_2)$$

$$\Rightarrow v_1 \rho_{i,h}(v_2) = \rho_{i,h}(v_1 v_2) - \tau_{i,h}(v_2)\rho_{i,h}(v_1).$$

Usando $\rho_{i,h}(v)$ em vez de v em (3.25) temos

$$\int_S Q\nabla_{X,y}u^* \cdot \nabla_{X,y}\rho_{i,h}(v) = \int_S h^* \rho_{i,h}(v) + \int_{y=-1} \tilde{g} \rho_{i,h}(v)$$

$$\Rightarrow -\int_S Q\nabla_{X,y}u^* \cdot \nabla_{X,y}\rho_{i,h}(v) = -\int_S h^*\rho_{i,h}(v) - \int_{y=-1} \tilde{g}\rho_{i,h}(v)$$

$$\Rightarrow \int_S -[-\rho_{i,-h}Q\nabla_{X,y}u^*] \cdot \nabla_{X,y}v = -\int_S h^*\rho_{i,h}(v) - \int_{y=-1} \tilde{g}\rho_{i,h}(v)$$

$$\Rightarrow \int_S \frac{1}{h}\left[(Q\nabla_{X,y}u^*)(X-he_i) - (Q\nabla_{X,y}u^*)(X)\right] \cdot \nabla_{X,y}v = -\int_S h^*\rho_{i,h}(v) - \int_{y=-1} \tilde{g}\rho_{i,h}(v)$$

$$\Rightarrow \int_S \frac{1}{h}[Q(X-he_i)\nabla_{X,y}u^*(X-he_i) - Q(X)\nabla_{X,y}u^*(X)] \cdot \nabla_{X,y}v = -\int_S h^*\rho_{i,h}(v) - \int_{y=-1} \tilde{g}\rho_{i,h}(v)$$

$$\Rightarrow \int_S \frac{1}{h}[Q(X-he_i)\nabla_{X,y}u^*(X-he_i) - Q(X-he_i)\nabla_{X,y}u^*(X) + Q(X-he_i)\nabla_{X,y}u^*(X) - Q(X)\nabla_{X,y}u^*(X)] \cdot \nabla_{X,y}v = -\int_S h^*\rho_{i,h}(v) - \int_{y=-1} \tilde{g}\rho_{i,h}(v)$$

$$\Rightarrow \int_S \left[Q(X-he_i)\nabla_{X,y}\left(\frac{u^*(X-he_i) - u^*(X)}{h}\right)\right] \cdot \nabla_{X,y}v - \left[\nabla_{X,y}u^*\left(\frac{Q(X-he_i) - Q(X)}{h}\right)\right] \cdot \nabla_{X,y}v = -\int_S h^*\rho_{i,h}(v) - \int_{y=-1} \tilde{g}\rho_{i,h}(v)$$

$$\Rightarrow \int_S [(\tau_{i,-h}(Q))\nabla_{X,y}(\rho_{i,-h}(u^*)) - \nabla_{X,y}u^*\rho_{i,-h}(Q)] \cdot \nabla_{X,y}v = -\int_S h^*\rho_{i,h}(v) - \int_{y=-1} \tilde{g}\rho_{i,h}(v)$$

$$\Rightarrow \int_S (\tau_{i,-h}(Q))\nabla_{X,y}(\rho_{i,-h}(u^*)) \cdot \nabla_{X,y}v = -\int_{y=-1} \tilde{g}\rho_{i,h}(v) - \int_S h^*\rho_{i,h}(v) + \int_S \nabla_{X,y}u^*\rho_{i,-h}(Q) \cdot \nabla_{X,y}v. \tag{3.26}$$

Agora, note que pela desigualdade e Poincaré e pelo teorema do traço podemos garantir que

$$\|\rho_{i,h}(v)\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \leq Cst \, \|\nabla_{X,y}v\|_2 .$$

Assim, usando a desigualdade a cima, o lado direito de (3.26) pode ser majorado considerando que

$$\tilde{g}\rho_{i,h}(v) = \Lambda(D)\tilde{g}\Lambda(D)^{-1}\rho_{i,h}(v)$$

$$\Rightarrow \int_{y=-1} \tilde{g}\rho_{i,h}(v) \leq \|\tilde{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}} \|\rho_{i,h}(v)\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \leq Cst \|\tilde{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}} \|\nabla_{X,y} v\|_2 ,$$

além de

$$\int_S h^* \rho_{i,h}(v) \leq \left| \int_S h^* \rho_{i,h}(v) \right| \leq \int_S |h^* \rho_{i,h}(v)| \leq \|h^*\|_2 \|\rho_{i,h}(v)\|_2 .$$

Agora note que, dado $h > 0$, tem-se que

$$v(X + he_i, y) - v(X, y) = h \int_0^1 \frac{\partial}{\partial X_i} v(X + the_i, y) dt$$

$$\Rightarrow |v(X + he_i, y) - v(X, y)| \leq |h| \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial X_i} v(X + the_i, y) \right| dt$$

$$\Rightarrow |\rho_{i,h}(v)| \leq \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial X_i} v(X + the_i, y) \right| dt$$

$$\Rightarrow |\rho_{i,h}(v)|^2 \leq \left(\int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial X_i} v(X + the_i, y) \right| dt \right)^2$$

e então aplicando a desigualdade de Hölder temos

$$\Rightarrow |\rho_{i,h}(v)|^2 \leq \left(\int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial X_i} v(X + the_i, y) \right|^2 dt \right) \left(\int_0^1 1^2 dt \right)$$

$$\Rightarrow \int_S |\rho_{i,h}(v)|^2 ds \leq \int_S \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial X_i} v(X + the_i, y) \right|^2 dtds.$$

Logo, pelo teorema de Fubini e utilizando mudança de variável, temos

$$\int_S |\rho_{i,h}(v)|^2 ds \leq \int_0^1 \int_S \left| \frac{\partial}{\partial X_i} v(X + the_i, y) \right|^2 dsdt \leq \int_0^1 \|\nabla_{X,y} v\|_2^2 dt = \|\nabla_{X,y} v\|_2^2 .$$

Portanto,

$$\int_S h^* \rho_{i,h}(v) \leq \|h^*\|_2 \|\nabla_{X,y} v\|_2$$

e ainda

$$\int_S \nabla_{X,y} u^* \rho_{i,-h}(Q) \cdot \nabla_{X,y} v \leq \|Q\|_{1,\infty} \|\nabla_{X,y} u^*\|_2 \|\nabla_{X,y} v\|_2 ,$$

onde $Q = (q_{i,j})_{i,j}$ e $\|Q\|_{1,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha q_{i,j}\|_\infty = \sum_{|\alpha| \leq 1} \underset{i,j}{max} |D^\alpha q_{i,j}|$. Então podemos concluir que a equação (3.26) é limitada superiormente por

$$Cst \left[\|\tilde{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \|h^*\|_2 + \|Q\|_{1,\infty} \|\nabla_{X,y} u^*\|_2 \right] \|\nabla_{X,y} v\|_2 . \tag{3.27}$$

Tomando $v = \rho_{i,-h}(u^*)$ como uma função teste e fazendo $h \mapsto 0$, note que o termo a ser integrado no lado esquerdo da equação (3.26) pode ser limitado inferiormente por

$$\lim_{h\mapsto 0} (\tau_{i,-h}(Q)) \left|\nabla_{X,y} \left(\rho_{i,-h}(u^*)\right)\right|^2 = Q \left|\nabla_{X,y}\left(\frac{\partial u^*}{\partial X_i}\right)\right|^2 \geq q \left|\nabla_{X,y}\left(\frac{\partial u^*}{\partial X_i}\right)\right|^2.$$

A última desigualdade é valida pela propriedade (3.18) de coercividade. Logo, fazendo $h \mapsto 0$ em (3.27) e relacionando os limites superior e inferior de (3.26) temos

$$q \left\|\nabla_{X,y}\left(\frac{\partial u^*}{\partial X_i}\right)\right\|_2^2 \leq Cst \left[\|\tilde{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \|h^*\|_2 + \|Q\|_{1,\infty} \|\nabla_{X,y} u^*\|_2\right] \left\|\nabla_{X,y}\left(\frac{\partial u^*}{\partial X_i}\right)\right\|_2$$

$$\Rightarrow \left\|\nabla_{X,y}\left(\frac{\partial u^*}{\partial X_i}\right)\right\|_2 \leq \frac{Cst}{q} \left[\|\tilde{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \|h^*\|_2 + \|Q\|_{1,\infty} \|\nabla_{X,y} u^*\|_2\right] \tag{3.28}$$

para cada $1 \leq i \leq d$. Antes de continuarmos, notemos que

$$\left\|\frac{\partial^2 u^*}{\partial X_i \partial X_j}\right\|_2 \leq \left\|\sum_{j=1}^{d+1} \frac{\partial}{\partial X_j}\left(\frac{\partial u^*}{\partial X_i}\right)\right\|_2 = \left\|\nabla_{X,y}\left(\frac{\partial u^*}{\partial X_i}\right)\right\|_2.$$

Portanto, aplicando o resultado acima em (3.28) é válido que

$$\left\|\frac{\partial^2 u^*}{\partial X_i \partial X_j}\right\|_2 \leq \frac{Cst}{q} \left[\|\tilde{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \|h^*\|_2 + \|Q\|_{1,\infty} \|\nabla_{X,y} u^*\|_2\right] \tag{3.29}$$

para $1 \leq i, j \leq d+1$ tal que $i + j \leq 2d + 1$. Com isso, devemos ainda estimar superiormente o termo $\left\|\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\right\|_2$. Para tal, a partir da definição do operador $\mathbb{Q}$ dada por (3.16) temos

$$-\mathbb{Q}u^* = \nabla_{X,y} \cdot Q \nabla_{X,y} u^* = \sum_{i+j \leq 2d+1} \frac{\partial}{\partial X_i}\left(q_{i,j} \frac{\partial u^*}{\partial X_j}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(q_{d+1,d+1} \frac{\partial u^*}{\partial y}\right)$$

$$= \sum_{i+j \leq 2d+1} \frac{\partial}{\partial X_i}\left(q_{i,j} \frac{\partial u^*}{\partial X_j}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(q_{d+1,d+1}\right)\left(\frac{\partial u^*}{\partial y}\right) + q_{d+1,d+1}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\right)$$

O que resulta em

$$-\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} = \frac{1}{q_{d+1,d+1}} \left[\mathbb{Q}u^* + \sum_{i+j \leq 2d+1} \frac{\partial}{\partial X_i}\left(q_{i,j} \frac{\partial u^*}{\partial X_j}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(q_{d+1,d+1}\right)\left(\frac{\partial u^*}{\partial y}\right)\right], \tag{3.30}$$

onde $Q = (q_{i,j})_{i,j}$. Nesta etapa vamos elevar a equação (3.30) ao quadrado. Para isso, utilizaremos um resultado auxiliar provado no Apêndice D. Logo, desenvolvendo um pouco mais (3.30) e aplicando o resultado acima, segue que

$$\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{q_{d+1,d+1}}\left[\mathbb{Q}u^* + \sum_{i+j\leq 2d+1}\frac{\partial}{\partial X_i}\left(q_{i,j}\frac{\partial u^*}{\partial X_j}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(q_{d+1,d+1}\right)\left(\frac{\partial u^*}{\partial y}\right)\right]\right)^2$$

$$= \frac{1}{\left(q_{d+1,d+1}\right)^2}\left[\mathbb{Q}u^* + \sum_{i+j\leq 2d+1} q_{i,j}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial X_i \partial X_j}\right) + \sum_{i+j\leq 2d+1}\frac{\partial}{\partial X_i}\left(q_{i,j}\right)\frac{\partial u^*}{\partial X_j}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(q_{d+1,d+1}\right)\left(\frac{\partial u^*}{\partial y}\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{\left(q_{d+1,d+1}\right)^2}\left[\mathbb{Q}u^* + \sum_{i+j\leq 2d+1} q_{i,j}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial X_i \partial X_j}\right) + \sum_{i+j\leq 2d+2}\frac{\partial}{\partial X_i}\left(q_{i,j}\right)\frac{\partial u^*}{\partial X_j}\right]^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\right)^2 \leq \frac{3}{\left(q_{d+1,d+1}\right)^2}\left[\left|\mathbb{Q}u^*\right|^2 + \sum_{i+j\leq 2d+1}\left|q_{i,j}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial X_i \partial X_j}\right)\right|^2\right.$$
$$\left. + \sum_{i+j\leq 2d+2}\left|\frac{\partial}{\partial X_i}\left(q_{i,j}\right)\frac{\partial u^*}{\partial X_j}\right|^2\right],$$

além disso, note que $\exists M > 0$ tal que $0 \leq q \leq \frac{1}{\sqrt{M}} q_{d+1,d+1}$, o que implica em $\frac{1}{q^2} \geq \frac{M}{(q_{d+1,d+1})^2}$. Logo,

$$\left(\int_S \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{Cst^2}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\int_S \left|\mathbb{Q}u^*\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i+j\leq 2d+1}\left(\int_S\left|q_{i,j}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial X_i \partial X_j}\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left. + \sum_{i+j\leq 2d+2}\left(\int_S\left|\frac{\partial}{\partial X_i}\left(q_{i,j}\right)\frac{\partial u^*}{\partial X_j}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

O que implica em

$$\left\|\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\right\|_2 \leq \frac{Cst}{q}\left[\|h^*\|_2 + \|Q\|_{1,\infty}\left(\sum_{i+j\leq 2d+1}\left\|\frac{\partial^2 u^*}{\partial X_i \partial X_j}\right\|_2 + \|\nabla_{X,y}u^*\|_2\right)\right]. \quad (3.31)$$

Com os resultados acima em mãos vamos agora estimar o termo $\|\nabla_{X,y}u^*\|_{1,2}$. Para isso, sabemos que pela desigualdade de Poincaré vale que

$$\|\nabla_{X,y}u^*\|_{1,2} \overset{def}{=} \left(\sum_{|\alpha|\leq 1}\|D^\alpha(\nabla_{X,y}u^*)\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\|\nabla_{X,y}u^*\|_2^2 + \|D(\nabla_{X,y}u^*)\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq Cst \left\| D(\nabla_{X,y} u^*) \right\|_2 \leq Cst \sum_{i+j \leq 2d+2} \left\| \frac{\partial^2 u^*}{\partial X_i \partial X_j} \right\|_2 .$$

Portanto, segue de (3.29) e (3.31) que

$$\left\| \nabla_{X,y} u^* \right\|_{1,2} \leq C \left(\frac{1}{q}, \left\| Q \right\|_{1,\infty} \right) \left(\left\| \tilde{g} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \left\| h^* \right\|_2 + \left\| \nabla_{X,y} u^* \right\|_2 \right).$$

Substituindo u^*, h^* e $\tilde{g}$ por suas expressões na desigualdade acima, e usando as estimativas (3.21) e (3.22) temos

$$\left\| \tilde{g} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq \left\| g \right\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \left\| \left. \frac{\partial^Q f^*}{\partial n} \right|_{y=-1} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq \left\| g \right\|_{H^{\frac{1}{2}}} + Cst \left\| Q \right\|_{1,\infty} \left\| \nabla_X f \right\|_{H^{\frac{1}{2}}} ,$$

além disso

$$\left\| h^* \right\|_2 \leq \left\| h \right\|_2 + \left\| \mathbb{Q}(f^*) \right\|_2 \leq \left\| h \right\|_2 + \left\| \nabla_{X,y} \cdot Q \nabla_{X,y} (f^*) \right\|_2$$

$$\leq \left\| h \right\|_2 + \left\| Q \right\|_{1,\infty} \left\| \nabla_{X,y} (f^*) \right\|_{1,2} \leq \left\| h \right\|_2 + Cst \left\| Q \right\|_{1,\infty} \left\| \nabla_X f \right\|_{H^{\frac{1}{2}}}$$

e

$$\left\| \nabla_{X,y} u^* \right\|_2 \leq \left\| \nabla_{X,y} u \right\|_2 + \left\| \nabla_{X,y} f^* \right\|_2 \leq \left\| \nabla_{X,y} u \right\|_2 + \left\| \nabla_{X,y} f^* \right\|_{1,2}$$

$$\leq \left\| \nabla_{X,y} u \right\|_2 + Cst \left\| \nabla_X f \right\|_{H^{\frac{1}{2}}} .$$

O que implica portanto em

$$\left\| \nabla_{X,y} u \right\|_{1,2} \leq C \left(\frac{1}{q}, \left\| Q \right\|_{1,\infty} \right) \left(\left\| g \right\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \left\| h \right\|_2 + \left\| \nabla_{X,y} u \right\|_2 + \left\| \nabla_X f \right\|_{H^{\frac{1}{2}}} \right).$$

Passo 3: Melhor regularidade.

Vamos mostrar por indução finita em k que para todo $u \in H^{2+k}(S)$, $k = 0, \cdots, m_0 - 1$ podemos garantir que

$$\left\| \nabla_{X,y} u \right\|_{1+k,2} \leq C \left(\frac{1}{q}, \left\| Q \right\|_{1+k,\infty} \right)$$

$$\times \left(\left\| \left. \frac{\partial^Q u}{\partial n} \right|_{y=-1} \right\|_{H^{k+\frac{1}{2}}} + \left\| \mathbb{Q} u \right\|_{k,2} + \left\| \nabla_{X,y} u \right\|_{k,2} + \left\| \nabla_X \left. u \right|_{y=0} \right\|_{H^{k+\frac{1}{2}}} \right). \tag{3.32}$$

Pelo passo 2, a estimativa é válida para $k = 0$. Para $k > 0$, seja $m_0 > k \geq 1$ e suponha também que $0 \leq l \leq k-1$. Para todo $i = 1, \cdots, d$, vamos aplicar (3.32) com $l = k-1$ a função $\rho_{i,h}(u)$:

$$\|\nabla_{X,y}\rho_{i,h}(u)\|_{k,2} \leq C\left(\frac{1}{q}, \|Q\|_{k,\infty}\right)\left(\left\|\frac{\partial^Q}{\partial n}\rho_{i,h}(u)\Big|_{y=-1}\right\|_{H^{k-\frac{1}{2}}}\right.$$

$$\left.+\|\mathbb{Q}\rho_{i,h}(u)\|_{k-1,2} + \|\nabla_{X,y}\rho_{i,h}(u)\|_{k-1,2} + \left\|\nabla_X\ \rho_{i,h}(u)|_{y=0}\right\|_{H^{k-\frac{1}{2}}}\right). \tag{3.33}$$

Agora, vamos estimar os quatro termos que aparecem no lado direito de (3.33). Em primeiro lugar, notemos que $\mathbb{Q}\rho_{i,h}(u) = \nabla_{X,y}\cdot\rho_{i,h}(Q)\nabla_{X,y}\tau_{i,h}(u) - \rho_{i,h}(\mathbb{Q}u)$ pois

$$\mathbb{Q}\rho_{i,h}(u) = -\nabla_{X,y}\cdot Q(X,y)\nabla_{X,y}\rho_{i,h}(u)$$

$$= -\nabla_{X,y}\cdot\frac{1}{h}Q(X,y)\nabla_{X,y}u(X+he_i,y) + \nabla_{X,y}\cdot\frac{1}{h}Q(X,y)\nabla_{X,y}u(X,y).$$

Assim, somando e subtraindo o termo $\nabla_{X,y}\cdot\frac{1}{h}Q(X+he_i,y)\nabla_{X,y}u(X+he_i,y)$ na equação acima podemos obter

$$\mathbb{Q}\rho_{i,h}(u) = \nabla_{X,y}\cdot\rho_{i,h}(Q)\nabla_{X,y}u(X+he_i,y)$$

$$-\nabla_{X,y}\cdot\frac{1}{h}\left[Q(X+he_i,y)\nabla_{X,y}u(X+he_i,y) - Q(X,y)\nabla_{X,y}u(X,y)\right]$$

$$\Rightarrow \mathbb{Q}\rho_{i,h}(u) = \nabla_{X,y}\cdot\rho_{i,h}(Q)\nabla_{X,y}\tau_{i,h}(u) - \rho_{i,h}(\mathbb{Q}u). \tag{3.34}$$

Logo, temos

$$\|\mathbb{Q}\rho_{i,h}(u)\|_{k-1,2} = \|\nabla_{X,y}\cdot\rho_{i,h}(Q)\nabla_{X,y}\tau_{i,h}(u) - \rho_{i,h}(\mathbb{Q}u)\|_{k-1,2}$$

$$\leq \|\nabla_{X,y}\cdot\rho_{i,h}(Q)\nabla_{X,y}\tau_{i,h}(u)\|_{k-1,2} + \|\rho_{i,h}(\mathbb{Q}u)\|_{k-1,2}$$

$$\leq \|\nabla_{X,y}\cdot\rho_{i,h}(Q)\|_{k-1,\infty}\|\nabla_{X,y}u\|_{k-1,2} + \|\rho_{i,h}(\mathbb{Q}u)\|_{k-1,2}$$

$$\leq \left\|\nabla_{X,y}\cdot\left(\frac{Q(X+he_i,y)-Q(X,y)}{h}\right)\right\|_{k-1,\infty}\|\nabla_{X,y}u\|_{k,2} + \|\rho_{i,h}(\mathbb{Q}u)\|_{k-1,2}$$

$$= \sum_{|\alpha|\leq k-1}\left\|D^\alpha\left(\nabla_{X,y}\cdot\left(\frac{Q(X+he_i,y)-Q(X,y)}{h}\right)\right)\right\|_\infty\|\nabla_{X,y}u\|_{k,2} + \|\rho_{i,h}(\mathbb{Q}u)\|_{k-1,2}$$

$$\leq Cst\sum_{|\alpha|\leq k}\sup\left|D^\alpha\left(\frac{Q(X+he_i,y)-Q(X,y)}{h}\right)\right|\|\nabla_{X,y}u\|_{k,2} + \|\rho_{i,h}(\mathbb{Q}u)\|_{k-1,2}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq Cst \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{1\leq j,l\leq d+1} \int_0^1 |D^\alpha (\nabla_{X,y} q_{i,j})|\, dt \,\|\nabla_{X,y} u\|_{k,2} + \|\rho_{i,h}(\mathbb{Q}u)\|_{k-1,2} \\
&= Cst \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{1\leq j,l\leq d+1} |D^\alpha (\nabla_{X,y} q_{i,j})| \,\|\nabla_{X,y} u\|_{k,2} + \|\rho_{i,h}(\mathbb{Q}u)\|_{k-1,2} \\
&\leq Cst \sum_{|\alpha|\leq k+1} \sup_{1\leq j,l\leq d+1} |D^\alpha (q_{i,j})| \,\|\nabla_{X,y} u\|_{k,2} + \|\rho_{i,h}(\mathbb{Q}u)\|_{k-1,2} \\
&= Cst \,\|Q\|_{k+1,\infty} \,\|\nabla_{X,y} u\|_{k,2} + \|\rho_{i,h}(\mathbb{Q}u)\|_{k-1,2}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \|\mathbb{Q}\rho_{i,h}(u)\|_{k-1,2} \leq Cst \,\|Q\|_{k+1,\infty} \,\|\nabla_{X,y} u\|_{k,2} + \|\rho_{i,h}(\mathbb{Q}u)\|_{k-1,2}\,. \tag{3.35}
$$

Para o primeiro termo utilizando um processo análogo ao feito em (3.34) temos

$$
\left.\frac{\partial^Q}{\partial n}\rho_{i,h}(u)\right|_{y=-1} = \left.\left(-e_{d+1}\cdot \rho_{i,h}(Q)\nabla_{X,y}\tau_{i,h}(u) + e_{d+1}\cdot \rho_{i,h}(Q\nabla_{X,y}u)\right)\right|_{y=-1}
$$

e então

$$
\begin{aligned}
\left\| \left.\frac{\partial^Q}{\partial n}\rho_{i,h}(u)\right|_{y=-1} \right\|_{H^{k-\frac{1}{2}}} &\leq \left\| \left. e_{d+1}\cdot \rho_{i,h}(Q)\nabla_{X,y}\tau_{i,h}(u)\right|_{y=-1} \right\|_{H^{k-\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \left\| \left. e_{d+1}\cdot \rho_{i,h}(Q\nabla_{X,y}u)\right|_{y=-1} \right\|_{H^{k-\frac{1}{2}}}\,.
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

Logo, pelo teorema do traço, podemos garantir que

$$
\left\| \left. e_{d+1}\cdot \rho_{i,h}(Q)\nabla_{X,y}\tau_{i,h}(u)\right|_{y=-1} \right\|_{H^{k-\frac{1}{2}}} \leq Cst \,\| e_{d+1}\cdot \rho_{i,h}(Q)\nabla_{X,y}\tau_{i,h}(u)\|_{H^k}\,,
$$

e assim, fazendo o processo análogo ao feito em (3.35), temos que

$$
\left\| \left. e_{d+1}\cdot \rho_{i,h}(Q)\nabla_{X,y}\tau_{i,h}(u)\right|_{y=-1} \right\|_{H^{k-\frac{1}{2}}} \leq Cst \,\|Q\|_{k+1,\infty} \,\|\nabla_{X,y}u\|_{k,2}\,.
$$

Portanto, segue de (3.36), que

$$
\left\| \left.\frac{\partial^Q}{\partial n}\rho_{i,h}(u)\right|_{y=-1} \right\|_{H^{k-\frac{1}{2}}} \leq \left\| \left. e_{d+1}\cdot \rho_{i,h}(Q\nabla_{X,y}u)\right|_{y=-1} \right\|_{H^{k-\frac{1}{2}}} + Cst \,\|Q\|_{k+1,\infty} \,\|\nabla_{X,y}u\|_{k,2}\,. \tag{3.37}
$$

Para os dois últimos termos de (3.33), a estimativa desejada será garantida quando fizermos h tender a zero.

Portanto, fazendo h tender a zero em (3.33), (3.35) e (3.37), segue que $\left\|\frac{\partial u}{\partial X_i}\right\|_{k+1,2}$ é limitado superiormente pelo lado direito de (3.32). Para completar a prova, ainda é preciso uma estimativa para $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ em $H^k(S)$. Da mesma maneira feita no passo 2, esta estimativa é obtida utilizando (3.30).

Passo 4: Melhor regularidade.

Vamos novamente por indução em k generalizar (3.32) para $k \geq m_0$ como

$$\begin{aligned} \|\nabla_{X,y} u\|_{1+k,2} \leq C_k \times & \left(\left\| \left. \frac{\partial^Q u}{\partial n} \right|_{y=-1} \right\|_{H^{k+\frac{1}{2}}} + \|\mathbb{Q}u\|_{k,2} + \|\nabla_{X,y} u\|_{k,2} \right. \\ & \left. + \left\| \nabla_X \left. u \right|_{y=0} \right\|_{H^{k+\frac{1}{2}}} + \|Q_2\|_{1+k,2} \|\nabla_{X,y} u\|_{m_0,2} \right), \end{aligned} \tag{3.38}$$

onde $C_k = C\left(\frac{1}{q}, \|Q_1\|_{1+k,\infty}, \|Q_2\|_{1+m_0,\infty}\right)$.

Procedendo de forma análoga ao passo 3 as estimativas são garantidas.

Os próximos dois lemas que apresentaremos nesta seção serão utilizados para concluirmos o teorema 3.2.1. No entanto, omitiremos suas demostrações por questões de objetividade e tempo de realização deste trabalho.

Lema 3.2.3. Seja $l \in \mathbb{N}$ e $u, v \in H^l(S) \cap L^\infty(S)$. Então

$$\|uv\|_{l,2} \leq Cst(\|u\|_{l,2} \|v\|_\infty + \|v\|_{l,2} \|u\|_\infty).$$

Isso resulta em

$$\begin{aligned} \|\mathbb{Q}\rho_{i,h}(v)\|_{k-1,2} &\leq \|\mathbb{Q}u\|_{k,2} \\ &+ Cst\left((\|Q_1\|_{k+1,\infty} + \|Q_2\|_{1,\infty}) \|\nabla_{X,y} u\|_{k,2} + \|Q_2\|_{k+1,2} \|\nabla_{X,y} u\|_\infty \right). \end{aligned}$$

A estimativa (3.37) é modificada na mesma linha e segue da imersão $H^{m_0}(S) \subset L^\infty(S)$ que $\left\| \frac{\partial u}{\partial X_i} \right\|_{k+1,2}$ é limitada por cima pelo lado direito de (3.38).

Uma estimativa de $\frac{\partial^2 u}{\partial y}$ em $H^k(S)$ é então fornecida como anteriormente usando (3.30), o que conclui a a primeira parte do teorema 3.2.1.

Passo 5: Por fim, a partir da formulação variacional do problema, pode-se obter o seguinte lema, cuja demostração omitiremos por questões de objetividade e tempo de realização deste trabalho.

Lema 3.2.4. Seja $h \in L^2(S)$, $f \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$ e $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$. Se $u \in H^2(S)$ é solução do problema de valor de fronteira (3.16), então

$$\|\nabla_{X,y} u\|_2 \leq C\left(\frac{1}{q}, \|Q\|_\infty\right)(\|h\|_2 + \|\nabla_{X,y} f\|_{H^{-\frac{1}{2}}} + \|g\|_{H^{-\frac{1}{2}}})$$

e

$$\|u\|_{1,2} \leq C\left(\frac{1}{q}, \|Q\|_\infty\right)(\|h\|_2 + \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \|g\|_{H^{-\frac{1}{2}}}).$$

Iterando as estimativas (3.32) e (3.38) e usando o lema concluímos a prova do teorema 3.2.1.□

3.3 Difeomorfismos regularizáveis.

Nós vimos nas seções 3.1 e 3.2 que se u for solução do problema de valor de fronteira (3.3), então é possível encontrar estimativas precisas de $\tilde{u} = u \circ \tilde{R}$, conforme mostram a proposição 3.1.6, o lema 3.1.7 e o teorema 3.2.1. Entretanto, estas estimativas dependem fortemente do difeomorfismo $\tilde{R}$ escolhido para determinar o domínio desejado do fluido. Sabendo que o difeomorfismo trivial apresentado na observação 3.1.3 não é a melhor escolha possível, vamos buscar um difeomorfismo que seja uma escolha mais apropriada.

Para podermos controlar a norma $H^k(S)$ em seu componente Sobolev, é preciso controlar a norma $H^k(\mathbb{R}^d)$ da parametrização da superfície a. A próxima proposição mostra que existem difeomorfismos regularizáveis para os quais um controle linear da norma $H^{k-\frac{1}{2}}$ é suficiente.

Proposição 3.3.1. Seja $k \in \mathbb{N}$, $k - \frac{1}{2} > 1 + \frac{d}{2}$, e seja $b \in C_b^k(\mathbb{R}^d)$, $a \in H^{k-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$. Se existir $h_0 > 0$ tal que $a - b \geq h_0$ em $\mathbb{R}^d$, então deve existir um difeomorfismo $\tilde{R}$ da forma (3.6) tal que

- s é k-regular (com $c_0 = \frac{h_0}{2}$);
- $(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}})\, s|_{\tilde{y}=0} = a - b$;

- $s_1 = -b(\tilde{X})\tilde{y}$ e $\|s_2\|_{k,2} \leq Cst\,\|a\|_{H^{k-\frac{1}{2}}}$.

Dem.: Note que o Jacobiano da aplicação $(\tilde{X}, \tilde{y}) \in S \mapsto (\tilde{X}, s(\tilde{X}, \tilde{y})) \in \Omega$ é igual a $(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s)$. Além disso, se s satisfaz a condição 3.1.1, $\tilde{R}$ é na verdade um difeomorfismo entre S e Ω.

Seja $s_1 \in C_b^k(\overline{S})$ dado por

$$s_1(\tilde{X}, \tilde{y}) = -b(\tilde{X})\tilde{y}, \quad \forall (\tilde{X}, \tilde{y}) \in S;$$

nós procuramos por um $s_2 \in H^k(S)$ tal que $s := s_1 + s_2$ satisfaça o seguinte

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s \geq \frac{h_0}{2} \text{ em } \overline{S}, \quad s_2|_{\tilde{y}=0} = a, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\, s_2|_{\tilde{y}=0} = a, \quad s_2|_{\tilde{y}=-1} = 0. \tag{3.39}$$

Vamos construir esta aplicação s_2 usando uma extensão de a. Seja χ uma função suave de suporte compacto definida em $\mathbb{R}^d$ tal que $\chi(0) = 1$ e $\chi'(0) = 0$. Para todo $\lambda > 0$, e $a \in H^{k-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$, nós iremos definir $a_\lambda \in H^k(S)$ como $a_\lambda(\cdot, \tilde{y}) = \chi(\lambda \tilde{y} \Lambda(D))a$. Desta definição segue também que para todo $(\tilde{X}, \tilde{y}) \in \overline{S}$, vale

$$\left|\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} a_\lambda(\tilde{X}, \tilde{y})\right| = \left|\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \chi(\lambda \tilde{y} \Lambda(D))a\right| = |\lambda \chi'(\lambda \tilde{y} \Lambda(D))\Lambda(D)a| \leq \lambda \|\chi'\|_\infty |\Lambda(D)a|$$

$$\leq \lambda \|\chi'\|_\infty \|\Lambda(D)a\|_2 = \lambda \|\chi'\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left|\Lambda(D)a(\tilde{X})\right|^2 d\tilde{X}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lambda \|\chi'\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} \Lambda(\xi)\, |\hat{a}(\xi)|^2\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} = \lambda \|\chi'\|_\infty \|a\|_{H^1} \leq Cst\, \lambda \|\chi'\|_\infty \|a\|_{H^{k-\frac{1}{2}}}.$$

A última desigualdade é válida desde de que $k - \frac{1}{2} > 1 + \frac{d}{2}$.

Defina agora $s_2 := (\tilde{y} + 1)a_\lambda$. É claro que s_2 satisfaz as últimas três condições de (3.39), pois

$$s_2|_{\tilde{y}=0} = a_\lambda\,|_{\tilde{y}=0} = \chi(0)a = a, \qquad s_2|_{\tilde{y}=-1} = (0)a_\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\, s_2|_{\tilde{y}=0} = \left(a_\lambda \tfrac{\partial}{\partial \tilde{y}}(\tilde{y}+1) + (\tilde{y}+1)\tfrac{\partial}{\partial \tilde{y}} a_\lambda\right)\Big|_{\tilde{y}=0} = a_\lambda\,|_{\tilde{y}=0} = \chi(0)a = a.$$

Para a primeira condição de (3.39) lembre-se que

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s_1 + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s_2 = -b + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s_2 = -b + a - a + a_\lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}(\tilde{y}+1) + (\tilde{y}+1)\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} a_\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s = (a-b) + (a_\lambda - a) + (\tilde{y}+1)\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} a_\lambda \tag{3.40}$$

e como

$$\left| a_\lambda(\tilde{X},\tilde{y}) - a(\tilde{X}) \right| = |\chi(\lambda \tilde{y} \Lambda(D))a - a| = \left| \int_0^{\tilde{y}} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} a_\lambda(\tilde{X},\tilde{y}')d\tilde{y}' \right| \leq \sup_{\overline{S}} \left| \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} a_\lambda \right|,$$

então considerando a hipótese de que existe $h_0 > 0$ tal que $a - b > h_0$, (3.40) fica

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s \geq h_0 - \sup_{\overline{S}} \left| \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} a_\lambda \right| - \left| \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} a_\lambda \right|,$$

e assim, tomando λ suficientemente pequeno podemos concluir que

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} s \geq h_0 \geq \frac{h_0}{2} = c_0.$$

Além disso, usando (3.39), temos que

$$s|_{\tilde{y}=0} = (s_1+s_2)|_{\tilde{y}=0} = a, \qquad \text{e} \qquad s|_{\tilde{y}=-1} = (s_1+s_2)|_{\tilde{y}=-1} = b.$$

Logo s é k-regular, e

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\, s|_{\tilde{y}=0} = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\, (s_1+s_2)|_{\tilde{y}=0} = a - b.$$

Agora, considerando que $k - \frac{1}{2} > 1 + \frac{d}{2}$ para $k \in \mathbb{N}$, vamos mostrar a seguinte estimativa

$$\|s_2\|_{k,2} \leq Cst \, \|a\|_{H^{k-\frac{1}{2}}}.$$

Para esta estimativa vamos considerar 4 casos utilizando a seguinte norma

$$\|s_2\|_{k,2} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha s_2\|_2,$$

com $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{d+1}) \in \mathbb{N}^{d+1}$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{d+1}$.

i. Caso em que $|\alpha| = 0$

$$\|s_2\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{-1}^0 \left[(\tilde{y}+1)\chi(\lambda \tilde{y} \Lambda(D))a(\tilde{X}) \right]^2 d\tilde{y} d\tilde{X},$$

com isso, como $(\tilde{y}+1) \in (0,1)$ e $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ então

$$\|s_2\|_2^2 \leq Cst \int_{\mathbb{R}^d} \left[a(\tilde{X}) \right]^2 d\tilde{X} = Cst \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{a}(\xi)|^2 d\xi,$$

onde a última igualdade é valida pela propriedade 2.1.6 de Parseval, o que implica em

$$\|s_2\|_2^2 \leq Cst \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{k-\frac{1}{2}} |\hat{a}(\xi)|^2 \, d\xi = Cst \, \|a\|_{H^{k-\frac{1}{2}}}^2 .$$

ii. Caso em que $|\alpha| \geq 1$ e $\alpha_{d+1} = 0$

$$\|D^\alpha s_2\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{-1}^0 |D^\alpha s_2|^2 \, d\tilde{y} d\tilde{X} = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{-1}^0 \left| D^\alpha \left((\tilde{y} + 1)\chi(\lambda \tilde{y} \Lambda(D)) a(\tilde{X}) \right) \right|^2 d\tilde{y} d\tilde{X},$$

como a derivada em relação a $\tilde{y}$ é uma derivada de ordem α_{d+1}, então as funções que dependem de $\tilde{y}$ não serão derivadas e assim

$$\|D^\alpha s_2\|_2^2 = \int_{-1}^0 |(\tilde{y} + 1)\chi(\lambda \tilde{y} \Lambda(D))|^2 \, d\tilde{y} \int_{\mathbb{R}^d} \left| D^{\alpha^*} a(\tilde{X}) \right|^2 d\tilde{X},$$

com $\alpha^* = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$. Dessa maneira, como $(\tilde{y} + 1) \in (0, 1)$ segue que

$$\|D^\alpha s_2\|_2^2 \leq Cst \int_{-1}^0 |\chi(\lambda \tilde{y} \Lambda(D))|^2 \, d\tilde{y} \int_{\mathbb{R}^d} \left| D^{\alpha^*} a(\tilde{X}) \right|^2 d\tilde{X}$$

$$= Cst \left| \frac{G(0) - G(-\lambda \Lambda(D))}{\lambda \Lambda(D)} \right| \int_{\mathbb{R}^d} \left| D^{\alpha^*} a(\tilde{X}) \right|^2 d\tilde{X} \leq Cst \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\Lambda(D)} \left| D^{\alpha^*} a(\tilde{X}) \right|^2 d\tilde{X}$$

onde $G(\cdot)$ é alguma primitiva de χ^2. Logo, aplicando a propriedade 2.1.6. de Parseval, obtemos

$$\|D^\alpha s_2\|_2^2 \leq Cst \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\Lambda(\xi)} \left| \mathcal{F} \left(D^{\alpha^*} a(\tilde{X}) \right) (\xi) \right|^2 d\xi.$$

Então, pelo teorema 2.1.4, chegamos a

$$\|D^\alpha s_2\|_2^2 \leq Cst \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\Lambda(\xi)} \left| (2\pi i)^{|\alpha^*|} \xi^{\alpha^*} \hat{a}(\xi) \right|^2 d\xi \leq Cst \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\xi|^{2|\alpha^*|}}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} |\hat{a}(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$\leq Cst \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\xi|^{2|\alpha^*|}}{|\xi|} |\hat{a}(\xi)|^2 \, d\xi = Cst \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2|\alpha^*|-1} |\hat{a}(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$= Cst \int_{\mathbb{R}^d} (|\xi|^2)^{|\alpha^*|-\frac{1}{2}} |\hat{a}(\xi)|^2 \, d\xi \leq Cst \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{|\alpha^*|-\frac{1}{2}} |\hat{a}(\xi)|^2 \, d\xi,$$

e como $|\alpha^*| \leq |\alpha| \leq k$, tem-se que

$$\|D^\alpha s_2\|_2^2 \leq Cst \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{k-\frac{1}{2}} |\hat{a}(\xi)|^2 \, d\xi = Cst \, \|a\|_{H^{k-\frac{1}{2}}}^2 .$$

iii. Caso em que $|\alpha| \geq 1$ e $\alpha_{d+1} = 1$.

$$\|D^\alpha s_2\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{-1}^{0} |D^\alpha s_2|^2 \, d\tilde{y} d\tilde{X} = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{-1}^{0} \left| D^\alpha \left((\tilde{y}+1)\chi(\lambda \tilde{y} \Lambda(D)) a(\tilde{X}) \right) \right|^2 d\tilde{y} d\tilde{X}.$$

Assim como no caso anterior, a derivada em relação a $\tilde{y}$ é uma derivada de ordem α_{d+1}, mas neste caso as funções que dependem de $\tilde{y}$ serão derivadas uma vez, e com isso

$$\|D^\alpha s_2\|_2^2 = \int_{-1}^{0} \left| \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[(\tilde{y}+1)\chi(\lambda \tilde{y} \Lambda(D)) \right] \right|^2 d\tilde{y} \int_{\mathbb{R}^d} \left| D^{\alpha^*} a(\tilde{X}) \right|^2 d\tilde{X},$$

com $\alpha^* = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$. Então pelo teorema fundamental do cálculo e devido ao fato das funções de variável $\tilde{y}$ serem todas limitadas segue que

$$\|D^\alpha s_2\|_2^2 \leq Cst \int_{\mathbb{R}^d} \left| D^{\alpha^*} a(\tilde{X}) \right|^2 d\tilde{X} = Cst \int_{\mathbb{R}^d} \left| \mathcal{F} \left(D^{\alpha^*} a(\tilde{X}) \right) (\xi) \right|^2 d\xi,$$

onde a última igualdade usa a propriedade 2.1.6 de Parseval. Portanto, aplicando o teorema 2.1.4 segue que

$$\|D^\alpha s_2\|_2^2 \leq Cst \int_{\mathbb{R}^d} \left| (2\pi i)^{|\alpha^*|} \xi^{\alpha^*} \hat{a}(\xi) \right|^2 d\xi \leq Cst \int_{\mathbb{R}^d} (|\xi|^2)^{\alpha^*} |\hat{a}(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$\leq Cst \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{|\alpha^*|} |\hat{a}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Como $|\alpha| \leq k$ então $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{d+1} \leq k$, ou seja $\alpha_1 + \cdots + \alpha_d = |\alpha^*| \leq k-1$, pois $\alpha_{d+1} = 1$. Portanto,

$$\|D^\alpha s_2\|_2^2 \leq Cst \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{k-1} |\hat{a}(\xi)|^2 \, d\xi = Cst \, \|a\|_{H^{k-1}}^2 \leq Cst \, \|a\|_{H^{k-\frac{1}{2}}}^2 .$$

iv. Caso em que $|\alpha| \geq 1$ e $\alpha_{d+1} > 1$

$$\|D^\alpha s_2\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{-1}^{0} |D^\alpha s_2|^2 \, d\tilde{y} d\tilde{X} = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{-1}^{0} \left| D^\alpha \left((\tilde{y}+1)\chi(\lambda \tilde{y} \Lambda(D)) a(\tilde{X}) \right) \right|^2 d\tilde{y} d\tilde{X}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{-1}^{0} \left| \left[\chi(\lambda \tilde{y} \Lambda(D)) \frac{\partial^{\alpha_{d+1}}}{\partial \tilde{y}} (\tilde{y}+1) + (\tilde{y}+1) \frac{\partial^{\alpha_{d+1}}}{\partial \tilde{y}} \chi(\lambda \tilde{y} \Lambda(D)) \right] D^{\alpha^*} a(\tilde{X}) \right|^2 d\tilde{y} d\tilde{X},$$

com $\alpha^* = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$. Como $\alpha_{d+1} > 1$ então $\frac{\partial^{\alpha_{d+1}}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{y}+1) = 0$, e além disso como $(\tilde{y}+1) \in (0,1)$ e $\chi \in C_0^\infty$ então

$$\|D^\alpha s_2\|_2^2 \leq Cst \int_{\mathbb{R}^d} \left| D^{\alpha^*} a(\tilde{X}) \right|^2 d\tilde{X}.$$

Analogamente ao processo feito no caso anterior obtemos a estimativa

$$\|D^\alpha s_2\|_2^2 \leq Cst \, \|a\|^2_{H^{k-\frac{1}{2}}} \, .$$

Logo, como consequência de todos os casos contemplados anteriormente

$$\|s_2\|_{k,2} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha s_2\|_2 \leq Cst \, \|a\|_{H^{k-\frac{1}{2}}} \, ,$$

o que conclui a demonstração da proposição em questão. $\square$

Observação 3.3.2. O difeomorfismo $\tilde{R}$ indicado pela proposição 3.3.1 é uma perturbação do difeomorfismo trivial apresentado na observação 3.1.3. O componente s_1 permanece inalterado, e o comportamento na superfície é exatamente o mesmo. No entanto, o componente s_2 é meia derivada mais suave aqui do que no difeomorfismo trivial (onde têm a suavidade de a). É por isso que dizemos que o difeomorfismo é regularizável.

4 OPERADOR DE DIRICHLET-NEUMANN

O objetivo deste capítulo é investigar as propriedades do operador de Dirichlet-Neumann associado a uma classe de problemas de valor de fronteira incluída na estrutura estudada no capítulo 3. Sabe-se que tais operadores segundo Lannes [14], são analiticamente dependentes da parametrização da superfície, contudo a dependência de interesse aqui é sobre funções em espaços de Sobolev.

4.1 Definição e propriedades básicas

Assim como no capítulo 3, vamos considerar um domínio Ω da forma

$$\Omega = \left\{(X,y) \in \mathbb{R}^{d+1}, b(X) < y < a(X)\right\}$$

onde a e b satisfazem

$$\exists h_0 > 0, \ \ min\left\{-b, a-b\right\} \geq h_0 > 0 \text{ em } \mathbb{R}^d. \tag{4.1}$$

Consideraremos também um operador elíptico de coeficientes constantes $\mathbb{P} = -\nabla_{X,y} \cdot P\nabla_{X,y}$, satisfazendo a condição de coercividade (3.2). Os problemas de valor de fronteira considerados nesta seção são um caso particular do problema de valor de fronteira (3.3) desde que consideremos apenas o caso de um termo de origem homogênea e a condição de fronteira de Neumann no fundo. Mais precisamente, seja u solução de

$$\begin{cases} \mathbb{P}u = 0 \ \text{ em } \ \Omega \\ \left. u\right|_{y=a(X)} = f, \quad \frac{\partial^P}{\partial n} \left. u\right|_{y=b(X)} = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

onde, lembremos que como definido em (3.4), $\frac{\partial^P}{\partial n}$ denota a derivada conormal associada ao operador $\mathbb{P}$.

Para todo $k \in \mathbb{N}$ e $f \in H^{k+\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^d)$, e desde que a e b sejam suaves o suficiente, nós sabemos pelo teorema 3.2.2 que $u \in H^{k+2}(\Omega)$ existe e é único. Portanto, a seguinte definição faz sentido.

Definição 4.1.1. Seja $k \in \mathbb{N}$, e assuma que $a, b \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ satisfazem a condição (4.1). Vamos definir o operador de Dirichlet-Neumann como o operador $G(a,b)$ dado por

$$G(a,b) : \begin{array}{ccc} H^{k+\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^d) & \to & H^{k+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d) \\ f & \mapsto & -\sqrt{1+|\nabla_X a|^2}\frac{\partial^P}{\partial n} u|_{y=a(X)} \end{array}$$

onde u corresponde a solução de (4.2).

Como no capítulo 3, podemos associar a (4.2) um problema elíptico de valor de fronteira em uma faixa plana $S = \mathbb{R}^d \times (-1, 0)$: denotando por R o difeomorfismo entre S e Ω (e por $\tilde{R}$ sua inversa) dado pela proposição 3.3.1, e $\tilde{u} = u \circ \tilde{R}$, sendo então

$$\begin{cases} \tilde{\mathbb{P}}\tilde{u} = 0 \ \text{ em } \ S, \\ \quad \tilde{u}|_{\tilde{y}=0} = f, \qquad \frac{\partial^{\tilde{P}}}{\partial n}\tilde{u}|_{\tilde{y}=-1} = 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

onde $\tilde{\mathbb{P}} = -\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \tilde{P} \cdot \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}}$ é como o $\tilde{\mathbb{P}}$ dado pelo lema 3.1.4.

Observação 4.1.2.

- Assim como foi definido, $G(a,b)$ não é exatamente o operador de Dirichlet-Neumann por causa do fator de escala $\sqrt{1+|\nabla_X a|^2}$; contudo, usaremos essa terminologia por mera simplicidade.

- Graças ao sinal de menos na definição, $G(a,b)$ mapeia os dados de Dirichlet para a derivada normal externa (redimensionada) quando $P = Id$.

Notação 4.1.3. Denotemos f^b como a solução do problema de valor de fronteira (4.3) Assim como no lema 3.1.5, na seguinte proposição podemos definir o operador de Dirichlet-Neumann em termos de f^b.

Proposição 4.1.4. Considerando as mesmas condições apresentadas na definição 4.1.1, temos

$$G(a,b)f = -\frac{\partial^{\tilde{P}}}{\partial n} f^b|_{\tilde{y}=0}, \qquad \forall f \in H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^d),$$

onde f^b é o mesmo definido na notação 4.1.3.

Dem.: Basta fazer um processo semelhante ao feito na demonstração do lema 3.1.5. Logo, por definição

$$G(a,b)f = -\sqrt{1+|\nabla_X a|^2}\left(\frac{\partial^P}{\partial n}\, u|_{y=a(X)}\right) = \sqrt{1+|\nabla_X a|^2}\left(-\vec{n}_- \cdot P\nabla_{X,y}\, u|_{y=a}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{1+|\nabla_X a|^2}}{\sqrt{1+|\nabla_X a|^2}}\begin{pmatrix}\nabla_X a\\ -1\end{pmatrix}\cdot P\nabla_{X,y}\, u\Big|_{y=a} = -\begin{pmatrix}\nabla_X\, s\Big|_{\tilde{y}=0}\\ -1\end{pmatrix}\cdot P\nabla_{X,y}\, u\Big|_{y=a}$$

$$= -(-e_{d+1})\cdot\frac{1}{\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}s\right)}\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}s\right)Id_{d\times d} & 0\\ -\nabla_{\tilde{X}}s^T & 1\end{pmatrix}P\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\, s|_{\tilde{y}=0}\right)\nabla_{X,y}\, u|_{y=a}$$

$$= -(-e_{d+1})\cdot\frac{1}{\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}s\right)}\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}s\right)Id_{d\times d} & 0\\ -\nabla_{\tilde{X}}s^T & 1\end{pmatrix}P\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}s\right)Id_{d\times d} & -\nabla_{\tilde{X}}s\\ 0 & 1\end{pmatrix}\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}}\, \tilde{u}|_{y=0}$$

$$= -(-e_{d+1})\cdot\tilde{P}\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}}\, \tilde{u}|_{\tilde{y}=0} = -\frac{\partial^{\tilde{P}}}{\partial n}\, \tilde{u}|_{\tilde{y}=0} = -\frac{\partial^{\tilde{P}}}{\partial n}\, f^b|_{\tilde{y}=0}.$$

Isto conclui a demonstração. □

Antes de apresentarmos as principais estimativas sobre o operador de Dirichlet-Neumann, vamos estabelecer algumas notações.

Notação 4.1.5.

- Quando uma parametrização do fundo $b \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)$ ($k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$) é dada, nós escrevemos geralmente $B = \|b\|_{W^{k,\infty}}$.

- Para todo $r, s \in \mathbb{R}$, vamos denotar geralmente por $M(s)$ (respectivo a $M_r(s)$) as constantes que dependem de B e $\|a\|_{H^s}$ (respectivo a r, B e $\|a\|_{H^s}$).

O próximo teorema mostra que o operador de Dirichlet-Neumann é de ordem um, e oferece estimativas sobre a norma desse operador. Entretanto, deve-se observar que as condições sobre a e b são ligeiramente diferentes das apresentadas aqui.

Teorema 4.1.6. Seja $m_0 = \left\lceil \frac{d+1}{2} \right\rceil$ e a, b duas funções contínuas satisfazendo (4.1). Então:

i. Para todo $k \in \mathbb{N}$, se $a, b \in W^{k+2,\infty}(\mathbb{R}^d)$, então para toda f tal que $\nabla_X f \in H^{k+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)^2$, vale que

$$\|G(a,b)f\|_{H^{k+\frac{1}{2}}} \leq C(\|a\|_{W^{k+2,\infty}}, \|b\|_{W^{k+2,\infty}}) \|\nabla_X f\|_{H^{k+\frac{1}{2}}}.$$

ii. Para todo $k \in \mathbb{N}$, se $a \in H^{2m_0+\frac{1}{2}} \cap H^{k+\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^d)$ e $b \in W^{k+2}(\mathbb{R}^d)$, então

$$\|G(a,b)f\|_{H^{k+\frac{1}{2}}} \leq M_s(2m_0 + \frac{1}{2})(\|\nabla_X f\|_{H^{k+\frac{1}{2}}} + \|a\|_{k+\frac{3}{2}} \|\nabla_X f\|_{H^{m_0+\frac{1}{2}}}),$$

para toda f tal que $\nabla_X f \in H^{k+\frac{1}{2}} \cap H^{m_0+\frac{1}{2}}$, onde nós usamos a notação 4.1.5.

Observação 4.1.7. Note que o operador de Dirichlet-Neumann é definido para funções f com gradiente em algum espaço de Sobolev, mas que não estão necessariamente em um espaço de Sobolev.

Dem.: (Teorema 4.1.6). Usando o fato de $\tilde{P}$ ser simétrica e fazendo o mesmo processo feito em (3.15), temos

$$\begin{aligned}\|G(a,b)f\|_{H^{k+\frac{1}{2}}} &= \left\| -\frac{\partial^{\tilde{P}} \tilde{u}}{\partial n}\Big|_{\tilde{y}=0} \right\|_{H^{k+\frac{1}{2}}} = \left\| -(-e_{d+1}) \cdot \tilde{P} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}}\, \tilde{u}|_{\tilde{y}=0} \right\|_{H^{k+\frac{1}{2}}} \\ &= \left\| \tilde{P}\Big|_{\tilde{y}=0} (e_{d+1}) \cdot \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}}\, \tilde{u}|_{\tilde{y}=0} \right\|_{H^{k+\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

Pelo teorema 2.5.4 do traço, vale que

$$\|G(a,b)f\|_{H^{k+\frac{1}{2}}} \leq Cst \left\| \tilde{P}(e_{d+1}) \cdot \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \tilde{u} \right\|_{H^{k+1}}.$$

Usando a decomposição $\tilde{P} = \tilde{P}_1 + \tilde{P}_2$ apresentada no lema 3.1.7 e a estimativa dada no lema 3.2.3, temos

$$\begin{aligned}\|G(a,b)f\|_{H^{k+\frac{1}{2}}} &\leq Cst \left\| \tilde{P}_1 \right\|_{k+1,\infty} \|\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \tilde{u}\|_{H^{k+1}} \\ &+ Cst \left\| \tilde{P}_2 \right\|_{\infty} \|\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \tilde{u}\|_{H^{k+1}} + Cst \left\| \tilde{P}_2 \right\|_{k+1,2} \|\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \tilde{u}\|_{H^{m_0}}. \qquad (4.4)\end{aligned}$$

Agora, observando que quando o difeomorfismo $\tilde{R}$ entre a faixa plana S e o domínio Ω é o difeomorfismo da proposição 3.3.1, as estimativas controladas do lema 3.1.7, juntas com a imersão $H^{m_0}(S) \subset L^\infty(S)$ resultam em

$$\left\| \tilde{P}_1 \right\|_{k+1,2} \leq C(B);$$

$$\left\| \tilde{P}_2 \right\|_{k+1,2} \leq C(B, \|a\|_{H^{m_0+\frac{1}{2}}}) \|a\|_{H^{k+\frac{3}{2}}} .$$

Assim como feito com cada C_k que aparece no teorema 3.2.1, quando se toma $Q = \tilde{P}$ podemos estimar $\tilde{P}$ por $C(B, \|a\|_{H^{m_0+\frac{1}{2}}})$ e o resultado segue portanto de (4.4), do teorema 3.2.1 e da observação 3.2.2. $\square$

A próxima proposição lista algumas propriedades importantes do operador Dirichlet-Neumann.

Proposição 4.1.8. Sejam $a, b \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ que satisfazem (4.1). Então:

i. O operador $G(a, b)$ é auto-adjunto:

$$(G(a, b)f, g) = (f, G(a, b)g), \qquad \forall f, g \in S(\mathbb{R}^d).$$

ii. O operador $G(a, b)$ é positivo:

$$(G(a, b)f, f) \geq 0, \qquad \forall f \in S(\mathbb{R}^d).$$

iii. Temos também a estimativa

$$|(G(a, b)f, g)| \leq M(m_0 + \frac{1}{2}) \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}} , \qquad \forall f, g \in S(\mathbb{R}^d).$$

Observação 4.1.9. Como $G(a, b)$ é auto-adjunto, é possível estender este operador para todos os espaços $H^s(\mathbb{R}^d)$, com $s \in \mathbb{R}$.

Dem.: (Proposição 4.1.8).

i. Devido a proposição 4.1.4, e usando a notação 4.1.3, temos

$$(G(a, b)f, g) = \left(-\frac{\partial^{\tilde{P}}}{\partial n} f^b \Big|_{\tilde{y}=0} , g \right)$$

e pela identidade de Green

$$\left(-\frac{\partial^{\tilde{P}}}{\partial n} f^b \Big|_{\tilde{y}=0} , g \right) = \left(f, -\frac{\partial^{\tilde{P}}}{\partial n} g^b \Big|_{\tilde{y}=0} \right)$$

e usando novamente a propriedade 4.1.4

$$\left(f, -\frac{\partial^{\tilde{P}}}{\partial n} \, g^b \big|_{\tilde{y}=0} \right) = (f, G(a,b)g)$$

e isso conclui o primeiro item.

ii. Usando proposição 4.1.4, temos

$$(G(a,b)f, f) = \left(-\frac{\partial^{\tilde{P}}}{\partial n} \, f^b \big|_{\tilde{y}=0}, f \right) = \left(-(-e_{d+1}) \cdot \tilde{P} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \, f^b \big|_{\tilde{y}=0}, f \right)$$

$$= \int_S \left((e_{d+1}) \cdot \tilde{P} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \, f^b \big|_{\tilde{y}=0} \right) f. \tag{4.5}$$

Agora, considere a seguinte situação sobre a integral de $\tilde{\mathbb{P}} f^b$. Por um lado é valido que

$$\int_S \left(\tilde{\mathbb{P}} f^b \right) f^b = \int_S \left(\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \cdot \tilde{P} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b \right) f^b$$

$$= \int_S \left(\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \cdot \left(\tilde{P} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b \right) \right) f^b + \int_S \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b \cdot \tilde{P} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b$$

e, por outro lado, pelo teorema da divergência segue que

$$\int_S \left(\tilde{\mathbb{P}} f^b \right) f^b = \int_S \left(\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \cdot \tilde{P} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b \right) f^b = \int_{\partial S} \left((e_{d+1}) \cdot \tilde{P} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b \right) f^b.$$

Logo, unindo os resultados, temos

$$\int_{\partial S} \left((e_{d+1}) \cdot \tilde{P} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b \right) f^b = \int_S \left(\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \cdot \left(\tilde{P} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b \right) \right) f^b + \int_S \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b \cdot \tilde{P} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b.$$

como f^b é solução de (4.3) então $\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} \cdot \left(\tilde{P} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b \right) = \tilde{\mathbb{P}} f^b = 0$. Portanto, a integral acima resulta em

$$\int_{\partial S} \left((e_{d+1}) \cdot \tilde{P} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b \right) f^b = \int_S \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b \cdot \tilde{P} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b$$

$$\Rightarrow \int_{\tilde{y}=0} \left((e_{d+1}) \cdot \tilde{P} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b \right) f^b - \int_{\tilde{y}=-1} \left((e_{d+1}) \cdot \tilde{P} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b \right) f^b = \int_S \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b \cdot \tilde{P} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b$$

$$\Rightarrow \int_S \left((e_{d+1}) \cdot \tilde{P} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b \, |_{\tilde{y}=0} \right) f^b \, |_{\tilde{y}=0} = \int_S \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b \cdot \tilde{P} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b.$$

Então, por consequência, (4.5) resulta em

$$(G(a,b)f,f) = \int_S \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b \cdot \tilde{P} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b \geq \tilde{p} \left\| \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b \right\|_2^2 \geq 0$$

onde a penúltima desigualdade usa a coercividade de $\tilde{\mathbb{P}}$ provada no lema 3.1.4.

iii. Pelo mesmo processo feito em **ii**, temos

$$(G(a,b)f,g) = \int_S \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b \cdot \tilde{P} \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} g^b \leq \left\| \tilde{P} \right\|_\infty \left\| \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} f^b \right\|_2 \left\| \nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} g^b \right\|_2,$$

onde a partir do lema 3.2.4, podemos obter

$$(G(a,b)f,g) \leq C\left(\frac{1}{q}, \left\| \tilde{P} \right\|_\infty\right) \| \nabla_{\tilde{X}} f \|_{H^{-\frac{1}{2}}} \| \nabla_{\tilde{X}} g \|_{H^{-\frac{1}{2}}},$$

pois $h = 0$ e $\left.\frac{\partial^{\tilde{P}} f^b}{\partial n}\right|_{\tilde{y}=-1} = 0$ em (4.3). Assim, podemos garantir que $(G(a,b)f,g)$ é menor que

$$\begin{aligned}
& C\left(\frac{1}{q}, \left\| \tilde{P} \right\|_\infty\right) \left(\int_S \Lambda(\xi)^{-1} \left| \widehat{\nabla_{\tilde{X}} f}(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_S \Lambda(\xi)^{-1} \left| \widehat{\nabla_{\tilde{X}} g}(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C\left(\frac{1}{q}, \left\| \tilde{P} \right\|_\infty\right) \left(\int_S \Lambda(\xi)^{-1} |\xi|^2 \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_S \Lambda(\xi)^{-1} |\xi|^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left(\frac{1}{q}, \left\| \tilde{P} \right\|_\infty\right) \left(\int_S \Lambda(\xi)^{1} \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_S \Lambda(\xi)^{1} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C\left(\frac{1}{q}, \left\| \tilde{P} \right\|_\infty\right) \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Agora, basta mostrarmos que $\left\| \tilde{P} \right\|_\infty \leq M(m_0 + \frac{1}{2}) \stackrel{def}{=} M(B, \|a\|_{H^{m_0+\frac{1}{2}}})$, estimativa esta que encontra-se demostrada no Apêndice E. O que conclui o resultado. □

A próxima proposição terá sua demostração omitida, pois esta é demasiadamente longa e foge do objetivo do capítulo. Mas a mesma pode ser encontrada em [14].

Proposição 4.1.10. Seja $m_0 = \lceil \frac{d+1}{2} \rceil$ e $k \in \mathbb{N}$, $k \geq m_0$. Suponha que $\underline{a} \in H^{k+\frac{3}{2}} \cap H^{2m_0+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$, $\nabla_X f \in H^{k+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)^d$ e $b \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$ satisfazendo (4.1). Então a aplicação

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{U}_{\underline{a}} \subset H^{k+\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^d) & \to & H^{k+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d) \\ a & \mapsto & G(a,b)f \end{array}$$

é de classe C^∞ e as derivadas sucessivas são controladas:

i. Para todo $h \in H^{k+\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^d)$, tem-se

$$\|d_{\underline{a}}G(\cdot,b)f\cdot h\|_{H^{k+\frac{1}{2}}} \leq C(k,B,\|\underline{a}\|_{H^{2m_0+\frac{1}{2}}},\|\nabla_X f\|_{H^{m_0-\frac{1}{2}}})$$

$$\times\Big(\|h\|_{H^{k+\frac{3}{2}}}+\|h\|_{H^{m_0+\frac{1}{2}}}(\|\underline{a}\|_{H^{k+\frac{3}{2}}}+\|\nabla_X f\|_{H^{k+\frac{1}{2}}})\Big)\,;$$

ii. Para todo $h_1,h_2 \in H^{k+\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^d)$,

$$\left\|d_{\underline{a}}^2G(\cdot,b)f\cdot(h_1,h_2)\right\|_{H^{k+\frac{1}{2}}} \leq C(k,B,\|\underline{a}\|_{H^{2m_0+\frac{1}{2}}},\|\nabla_X f\|_{H^{m_0-\frac{1}{2}}})$$

$$\times\Big(\|h_1\|_{H^{k+\frac{3}{2}}}+\|h_2\|_{H^{m_0+\frac{1}{2}}}+\|h_2\|_{H^{k+\frac{3}{2}}}\|h_1\|_{H^{m_0+\frac{1}{2}}}$$

$$+\|h_1\|_{H^{m_0+\frac{1}{2}}}\|h_2\|_{H^{m_0+\frac{1}{2}}}(\|\underline{a}\|_{H^{k+\frac{3}{2}}}+\|\nabla_X f\|_{H^{k+\frac{1}{2}}})\Big)\,;$$

iii. Estimativas semelhantes valem para $d_{\underline{a}}^jG(\cdot,b)f$, com $j\in\mathbb{N}$ tal que $j\geq 3$.

5 EQUAÇÕES NÃO LINEARES

Neste capítulo, nós vamos apresentar uma aplicação do operador de Dirichlet-Neumann em função da construção de uma solução para o problema de ondas em água, como feito em [14] e [17]. A principal ideia aqui é utilizar uma estimativa controlada na equação linearizada, a qual iremos apresentar brevemente. Usaremos para isso o esquema do tipo Nash-Moser, como apresentado em [20].

Enunciaremos também alguns teoremas dos quais não provaremos, devido ao fato de suas demonstrações serem muito longas e de não tratarem do objetivo deste capítulo, porém se fazem necessários para encontrar a solução do problema de ondas em água.

Em primeiro lugar, vamos apresentar o teorema da função implícita de Nash-Moser, e então usar este resultado para encontrar a solução do problema de ondas em água.

5.1 Equação linearizada de ondas em água

Esta seção será dedicada a apresentar definições que se fazem necessárias para desenvolvimento dos resultados no decorrer do capítulo.

Como visto na introdução em (1.23) as equações de ondas em água são

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - G(\zeta)\psi = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + g\zeta + \frac{1}{2}\left\|\nabla_X \psi\right\|^2 - \frac{1}{2\left(1+\|\nabla_X \zeta\|^2\right)}\left(G(\zeta)\psi + \nabla_X \zeta \cdot \nabla_X \psi\right)^2 = 0, \end{cases}$$

onde, por mera simplicidade escrevemos $G(\zeta)$ ao invés de $G(\zeta, b)$, com b representando a parametrização do fundo.

Podemos ainda escrever este sistema em uma forma mais condensada como

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{T}(U) = 0, \tag{5.1}$$

com $U = (\zeta, \psi)^T$ e

$$\mathcal{T}(U) = \left(-G(\zeta)\psi, g\zeta + \frac{1}{2}\left\|\nabla_X \psi\right\|^2 - \frac{\left(G(\zeta)\psi + \nabla_X \zeta \cdot \nabla_X \psi\right)^2}{2\left(1 + \left\|\nabla_X \zeta\right\|^2\right)} \right)^T. \tag{5.2}$$

Definição 5.1.1. Seja $T > 0$. Dizemos que $\underline{U} = (\underline{\zeta}, \underline{\psi})^T$ é um estado de referência admissível se $(\underline{\zeta}, \underline{\psi} - \underline{\psi}\big|_{t=0})^T \in C([0,T]; H^\infty(\mathbb{R}^d)^2)$ e $\nabla_X \underline{\psi}\big|_{t=0} \in H^\infty(\mathbb{R}^d)^d$, e além disso,

$$\exists h_0 > 0, \;\; min\left\{-b, \underline{\zeta} - b\right\} \geq h_0 > 0 \text{ em } [0,T] \times \mathbb{R}^d,$$

onde devemos lembrar que $y = b(X)$ é uma parametrização do fundo.

Por definição, o operador linearizado $\underline{\mathcal{L}}$ associado a (5.1) é dado por $\underline{\mathcal{L}} := \frac{\partial}{\partial t} + d_{\underline{U}}\mathcal{T}$; a partir da igualdade (5.2), podemos calcular

$$d_{\underline{U}}\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -d_{\underline{\zeta}}G(\cdot)\psi & -G(\zeta) \\ -Zd_{\underline{\zeta}}G(\cdot)\underline{\psi} - \underline{Z}\underline{\mathbf{v}} \cdot \nabla_X + g & \underline{\mathbf{v}} \cdot \nabla_X - \underline{Z}G(\underline{\zeta}) \end{pmatrix},$$

com $\underline{Z} = Z(\underline{U})$, $\underline{\mathbf{v}} := \mathbf{v}(\underline{U})$ e, para todo $U = (\zeta, \psi)^T$ suficientemente pequeno

$$Z(U) := \frac{1}{1 + \left\|\nabla_X \zeta\right\|^2}\left(G(\zeta)\psi + \nabla_X \zeta \cdot \nabla_X \psi\right) \tag{5.3}$$

e

$$\mathbf{v}(U) := \nabla_X \psi - Z(U)\nabla_X \zeta. \tag{5.4}$$

A partir daqui, podemos determinar o problema bem definido de Cauchy

$$\begin{cases} \underline{\mathcal{L}}U = G, \\ U\big|_{t=0} = U_0 \end{cases} \tag{5.5}$$

Precisamos em primeiro lugar apresentar duas escalas de espaços de Banach, E_a e F_a, nas quais algumas estimativas podem ser escritas de forma simples, e também podemos construir um esquema de Nash-Moser.

Notação 5.1.2. Para todo U suficientemente suave, denotaremos

$$\mathfrak{a}(U) := g + \frac{\partial}{\partial t} Z(U) + \mathbf{v}(U) \cdot \nabla_X Z(U),$$

onde $Z(U)$ e $\mathbf{v}(U)$ são definidos em (5.3) e (5.4).

Definição 5.1.3. Seja $T > 0$ e $a \in \mathbb{R}$. Defina os espaços de Banach E_a e F_a como

$$E_a := \bigcap_{j=0}^{2} C^j([0,T], H^{a+2-j}(\mathbb{R}^d)^2),$$

$$F_a := \bigcap_{j=0}^{1} C^j([0,T], H^{a+1-j}(\mathbb{R}^d)^2) \times H^{a+2}(\mathbb{R}^d)^2,$$

com as seguintes normas

$$\|f\|_{E_a} := \sum_{j=0}^{2} \left\| \frac{\partial^j f}{\partial t} \right\|_{H_T^{a+2-j}}, \qquad \|(g,h)\|_{F_a} := \sum_{j=0}^{1} \left\| \frac{\partial^j g}{\partial t} \right\|_{H_T^{a+1-j}} + \|h\|_{H^{a+2}}.$$

Proposição 5.1.4. Seja $m_0 = \lceil \frac{d+1}{2} \rceil$, $T > 0$ e $\underline{U}$ um estado de referência admissível satisfazendo que

$$\exists c_0 > 0 \ \text{ tal que } \ \underline{\mathfrak{a}}(t,X) \geq c_0, \quad \forall (t,X) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d, \tag{5.6}$$

onde $\underline{\mathfrak{a}}$ é definido em termos de $\underline{U}$ como apresentado na notação 5.1.2. Além disso, seja $G \in C^1([0,T] \times H^\infty(\mathbb{R}^d)^2)$ e $U_0 \in H^\infty(\mathbb{R}^d)^2$. Então existe uma única solução $U \in C^2([0,T], H^\infty(\mathbb{R}^d)^2)$ de (5.5). Mais ainda, para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \geq m_0 + 1$, vale a seguinte estimativa:

$$\|U\|_{E_a} \leq C\left(k, B, \|\underline{U}\|_{E_{q_0+\frac{1}{2}}}, T\right) \left(\|(G,U_0)\|_{F_{a+\frac{3}{2}}} + \|(G,U_0)\|_{F_{m_0+1}} \|\underline{U}\|_{E_{a+\frac{5}{2}}} \right),$$

para algum $q_0 \in \mathbb{N}$ dependendo apenas de d.

A demonstração do último resultado pode ser encontrada em [14].

5.2 Um simples teorema da função implícita de Nash-Moser

Por mera simplicidade, ao invés de usarmos a forma mais geral deste teorema usaremos uma versão mais simples, a qual apresentaremos abaixo e que também pode ser encontrada em [20].

Sejam E_a e F_a, $a \geq 0$ duas escalas de espaços de Banach apresentadas na definição 5.1.2, e denote $E_\infty = \bigcap_{a\geq 0} E_a$, $F_\infty = \bigcap_{a\geq 0} F_a$. Suponha ainda que deva existir alguns operadores de suavização $(\mathcal{Z}_\theta)_{\theta>1} : E_\infty \to E_\infty$ satisfazendo que para todo $V \in E_\infty$, com $\theta > 1$ e $s, t \geq 0$, tem-se que

$$\begin{cases} \|\mathcal{Z}_\theta V\|_{E_s} \leq C_{s,t}\theta^{s-t} \|V\|_{E_t} & \text{se } s \geq t; \\ \|V - \mathcal{Z}_\theta V\|_{E_s} \leq C_{s,t}\theta^{s-t} \|V\|_{E_t} & \text{se } s \leq t. \end{cases}$$

E suponha também que $\|V\|_{E_s} \leq \|V\|_{E_t}$ sempre que $s \leq t$.

Teorema 5.2.1. Seja $\Phi : E_\infty \to F_\infty$ e suponha que existam $\overline{U} \in E_\infty$, um inteiro $m > 0$, um numero real δ e as constantes C_1, C_2 e $(C_a)_{a\geq m}$ tal que para todo $U, V, W \in E_\infty$,

$$\left\|U - \overline{U}\right\|_{E_{3m}} < \delta \Rightarrow \begin{cases} \|\Phi(U)\|_{F_a} \leq C_a(1 + \|U\|\ E_{a+m}), \quad \forall a \geq m \\ \|d_U\Phi \cdot V\|_{F_{2m}} \leq C_1 \|V\|_{E_{3m}} \\ \|d_U^2\Phi \cdot (V, W)\|_{F_{2m}} \leq C_2 \|V\|_{E_{3m}} \|W\|_{E_{3m}}. \end{cases} \tag{5.7}$$

Além disso, suponha também que para todo $U \in E_\infty$ tal que $\left\|U - \overline{U}\right\|_{3m} < \delta$, existe um operador $\Psi(U) : F_\infty \to E_\infty$ satisfazendo que para toda $\varphi \in F_\infty$, $d_U\Phi{\cdot}\Psi(U)\varphi = \varphi$ e

$$\|\Psi(U)\varphi\|_{E_a} \leq C_a(\|\varphi\|_{F_{a+m}} + \|U\|_{E_{a+m}} \|\varphi\|_{F_{2m}}), \quad \forall a \geq m. \tag{5.8}$$

Assim se $\left\|\Psi(\overline{U})\right\|_{F_{2m}}$ for suficientemente pequeno (em relação a um limite superior $\frac{1}{\delta}$, $\left\|\overline{U}\right\|_M$ e $(C_a)_{a\leq M}$ onde M só depende de m), então existe uma função $U \in E_\infty$ tal que $\Psi(U) = 0$.

Observação 5.2.2. De acordo com Lannes [14], a demonstração feita por [20] mostra de fato que para $M \geq 3m$ e para todo $a \geq M$, assumindo $\overline{U} \in E_a$ ao invés de $\overline{U} \in E_\infty$ podemos garantir a existência de uma solução $U \in E_a$ ao invés de E_∞.

5.3 Resolução das equações de ondas em água

Agora nós estamos prontos para apresentar o teorema que garante a existência e unicidade da solução das equações de ondas em água (1.23).

Teorema 5.3.1. Sejam $b \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\zeta_0 \in H^{s+1}(\mathbb{R}^d)$ e ψ_0 tal que $\nabla_X \psi_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)^d$, com $s > M$ (M dependendo apenas de d). Suponha, além disso, que

$$min\,\{\zeta_0 - b, -b\} \geq 2h_0 \;\text{ em }\; \mathbb{R}^d, \;\text{ para algum }\; h_0 > 0,$$

e

$$\mathfrak{a}(\overline{U})\mid_{t=0} \geq c_0 > 0 \;\text{ em }\; \mathbb{R}^d,$$

onde $\mathfrak{a}$ é apresentado na notação 5.1.2 e $\overline{U} = U_0 - t\mathcal{T}(U_0)$, com $U_0 = (\zeta_0, \psi_0)^T$ e $\mathcal{T}$ é definido como em (5.2). Então existe $T > 0$ e uma única solução (ζ, ψ) das equações de ondas em água (1.23) com condições iniciais (ζ_0, ψ_0) e tal que $(\zeta, \psi - \psi_0) \in C^1([0, T], H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d))$.

Observação 5.3.3. O resultado é obtido como uma consequência do teorema 5.2.1 de Nash-Moser. Nós trabalharemos na demonstração com as escalas de espaços de Banach $(E_a)_a$ e $(F_a)_a$ dados pela definição 5.1.3.

Dem.: (Teorema 5.3.1). Dado qualquer condição inicial $U_0 = (\zeta_0, \psi_0)$ tal que $(\zeta_0, \nabla_X \psi_0) \in H^\infty(\mathbb{R}^d)^{1+d}$, é possível encontrar $\overline{U} \in C^3([0, T], H^\infty(\mathbb{R}^d)^2) \subset E_\infty$ tal que

$$\overline{U}\mid_{t=0} = 0, \quad [\tfrac{\partial \overline{U}}{\partial t} + \mathcal{T}(\overline{U} + U_0)]\mid_{t=0} = 0, \quad [\tfrac{\partial^2 \overline{U}}{\partial t} + \partial_t(\mathcal{T}(\overline{U} + U_0))]\mid_{t=0} = 0.$$

Vamos definir a função $\overline{G}$ tal que $\overline{G} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial t} + \mathcal{T}(\overline{U} + U_0)$ e introduzir

$$\Phi : \begin{array}{ccc} E_\infty & \rightarrow & F_\infty \\ U & \mapsto & (\frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{T}(U + U_0), U\mid_{t=0}), \end{array}$$

Assim $\Phi(\overline{U}) = (\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} + \mathcal{T}(\overline{U} + U_0), \overline{U}\mid_{t=0}) = (\overline{G}, 0)$. Então $U + U_0$ fornecem uma solução para o problema de Cauchy (1.23) com condições iniciais (ζ_0, ψ_0).

Agora vamos verificar se as condições do teorema 5.2.1 são satisfeitas. Para tal, sabemos que para todo $a \geq 0$ é válido que

$$\begin{aligned}
\|\Phi(U)\|_{F_a} &= \left\| \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{T}(U + U_0), U\mid_{t=0} \right) \right\|_{F_a} \\
&\stackrel{def}{=} \sum_{j=0}^{1} \left\| \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{T}(U + U_0) \right) \right\|_{H_T^{a+1-j}} + \|U\mid_{t=0}\|_{H^{a+2}} \\
&= \left\| \frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{T}(U + U_0) \right\|_{H_T^{a+1}} + \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{T}(U + U_0)) \right\|_{H_T^a} + \|U\mid_{t=0}\|_{H^{a+2}} \\
&= \left\| \frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{T}(U + U_0) \right\|_{H_T^{a+1}} + \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + d_{U+U_0}\mathcal{T} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(U + U_0) \right\|_{H_T^a} + \|U\mid_{t=0}\|_{H^{a+2}} \\
&\leq \left\| \frac{\partial U}{\partial t} \right\|_{H_T^{a+1}} + \|\mathcal{T}(U + U_0)\|_{H_T^{a+1}} + \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right\|_{H_T^a} + \left\| d_{U+U_0}\mathcal{T} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \right\|_{H_T^a} + \|U\|_{H_T^{a+2}} \\
&= \|U\|_{E_a} + \|\mathcal{T}(U + U_0)\|_{H_T^{a+1}} + \left\| d_{U+U_0}\mathcal{T} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \right\|_{H_T^a}.
\end{aligned}$$

A última igualdade é válida pois

$$\|U\|_{E_a} \stackrel{def}{=} \sum_{j=0}^{2} \left\| \frac{\partial^j U}{\partial t} \right\|_{H_T^{a+2-j}} = \|U\|_{H_T^{a+2}} + \left\| \frac{\partial U}{\partial t} \right\|_{H_T^{a+1}} + \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial t} \right\|_{H_T^a}.$$

Portanto,

$$\|\Phi(U)\|_{F_a} \leq \|U\|_{E_a} + \|\mathcal{T}(U + U_0)\|_{H_T^{a+1}} + \left\| d_{U+U_0}\mathcal{T} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \right\|_{H_T^a}. \tag{5.9}$$

Agora vamos estimar os termos do lados direito de (5.9) tal que $a \geq m_0 + \frac{1}{2}$, afim de mostrar a seguinte estimativa.

$$\|\Phi(U)\|_{F_a} \leq C\left(a, B, \|\zeta_0\|_{H^{a+2}}, \|\nabla_X \psi_0\|_{H^{a+1}}, \|U\|_{E_{2m_0+\frac{1}{2}}}\right)\left(1 + \|U\|_{E_a}\right). \tag{5.10}$$

De início, notemos que o segundo termo do lado direito de (5.9) pode ser estimado a partir de (5.2) como

$$\|\mathcal{T}(U+U_0)\|_{H_T^{a+1}} \leq \|G(\zeta+\zeta_0)(\psi+\psi_0)\|_{H_T^{a+1}} + |g| \, \|\zeta+\zeta_0\|_{H_T^{a+1}}$$

$$+\frac{1}{2}\left\|\|\nabla_X(\psi+\psi_0)\|^2\right\|_{H_T^{a+1}} + \left\|\frac{(G(\zeta+\zeta_0)(\psi+\psi_0)+\nabla_X(\zeta+\zeta_0)\cdot\nabla_X(\psi+\psi_0))^2}{2\left(1+\|\nabla_X(\zeta+\zeta_0)\|^2\right)}\right\|_{H_T^{a+1}}.$$

e, usando o teorema 4.1.6 e a proposição 4.1.10, obtemos a estimativa (5.10).

Tomando $m \geq m_0$ e algum $\delta > 0$, a condição $\left\|U-\overline{U}\right\|_{E_{3m}} \leq \delta$ implica que $\|U\|_{E_{3m}}$ e portanto $\|U\|_{E_{2m_0+\frac{1}{2}}}$ permanece limitado. Definindo C_a como o supremo de todas as constantes que aparecem em (5.10) onde U permanece na bola $\left\|U-\overline{U}\right\|_{E_{3m}} \leq \delta$, garantimos a primeira condição de (5.7).

Agora para mostrarmos as duas ultimas condições de (5.7) considere que para todo $H, H_1, H_2 \in E_\infty$ temos

$$d_U\Phi \cdot H = \lim_{\delta\to 0}\frac{\Phi(U+\delta H)-\Phi(U)}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\frac{(\frac{\partial}{\partial t}(U+\delta H)+\mathcal{T}(U+\delta H+U_0),(U+\delta H)\mid_{t=0})-(\frac{\partial U}{\partial t}+\mathcal{T}(U+U_0),U\mid_{t=0})}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\mathcal{T}(U+U_0+\delta H)-\mathcal{T}(U+U_0)}{\delta},\, H|_{t=0}\right).$$

$$\Rightarrow d_U\Phi\cdot H = \left(\frac{\partial H}{\partial t}+d_{U+U_0}\mathcal{T}\cdot H,\, H|_{t=0}\right). \tag{5.11}$$

Logo, pela proposição 4.1.10, garantimos que

$$\|d_U\Phi\cdot H\|_{F_{2m}} \leq C_1\,\|H\|_{E_{2m}},$$

e também

$$d_U^2\Phi\cdot(H_1,H_2) = \frac{\partial}{\partial U}(d_U\phi\cdot H_1)\cdot H_2 = \lim_{\delta\to 0}\frac{d_U\phi\cdot H_1(U+\delta H_2)-d_U\phi\cdot H_1(U)}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\frac{\left(\frac{\partial H_1}{\partial t}+d_{U+\delta H_2+U_0}\mathcal{T}\cdot H_1,\, H_1|_{t=0}\right)-\left(\frac{\partial H_1}{\partial t}+d_{U+U_0}\mathcal{T}\cdot H_1,\, H_1|_{t=0}\right)}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\frac{(d_{U+\delta H_2+U_0}\mathcal{T}(U+\delta H_2+U_0)\cdot H_1-d_{U+U_0}\mathcal{T}(U+U_0)\cdot H_1, 0)}{\delta}.$$

$$\Rightarrow d_U^2\Phi \cdot (H_1, H_2) = \left(d_{U+U_0}^2\mathcal{T} \cdot (H_1, H_2), 0\right),$$

e novamente pelo proposição 4.1.10 podemos garantir que

$$\left\|d_U^2\Phi \cdot (H_1, H_2)\right\|_{F_{2m}} \leq C_2 \left\|H_1\right\|_{E_{3m}} \left\|H_2\right\|_{E_{3m}}.$$

Vamos agora verificar a condição (5.8). A partir da expressão de $d_U\Phi$ dada por (5.11), notemos que sua inversa à direita $\Psi(U)$ deve ser definida como

$$\forall (G, V_0) \in F_\infty, \qquad \Psi(U)(G, V_0) = V,$$

onde

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + d_{U+U_0}\mathcal{T} \cdot V = G \\ V|_{t=0} = V_0 \end{cases}.$$

Para mostrarmos a estimativa (5.8) a partir da proposição 5.1.4 devemos garantir que para todo $U \in E_\infty$ com $\left\|U - \overline{U}\right\|_{E_{3m}} < \delta$, temos que $U + U_0$ é um estado de referência admissível como apresentado na definição 5.1.1, satisfazendo (5.6) uniformemente, ou seja, existe $h_0 > 0$ e $c_0 > 0$ tal que

$$\forall U \in E_\infty, \qquad \left\|U - \overline{U}\right\|_{E_{3m}} < \delta, \qquad U_1 + \zeta_0 - b \geq h_0 \text{ em } [0, T] \times \mathbb{R}^d, \tag{5.12}$$

e

$$\forall U \in E_\infty, \qquad \left\|U - \overline{U}\right\|_{E_{3m}} < \delta, \qquad \mathfrak{a}(U + U_0) \geq c_0 \text{ em } [0, T] \times \mathbb{R}^d, \tag{5.13}$$

onde $\mathfrak{a}(u)$ é como definido na notação 5.1.2, e U_1 é componente de U.

Em primeiro lugar, notemos que $\overline{U}$ foi definido como uma função tal que $\overline{U} \in C^3([0, T], H^\infty(\mathbb{R}^d)^2) \subset E_\infty$. Também sabemos que $\zeta_0 \in H^{s+1}(\mathbb{R}^d)$ e $\nabla_X\psi_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)^d$ com $s > M$. Assim dado $U \in E_\infty$ exite $\delta > 0$ tal que se $\left\|U - \overline{U}\right\|_{E_\infty} < \delta$ podemos garantir que $U + U_0 \in C([0, T], H^\infty(\mathbb{R}^d)^2)$. De fato, como $\overline{U}$ é de classe C^3 então $\forall t \in [0, T], \forall \vec{x}, \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d$, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$ tal que $\left\|(\vec{x}, t) - (\vec{x}_0, t)\right\|_{E_\infty} < \delta_1$, temos que $\left\|\overline{U}(\vec{x}, t) - \overline{U}(\vec{x}_0, t)\right\|_{E_\infty} < \frac{\varepsilon}{3}$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
\|U(\vec{x},t) - U(\vec{x}_0,t)\|_{E_\infty} &\leq \left\|U(\vec{x},t) - \overline{U}(\vec{x},t)\right\|_{E_\infty} + \left\|\overline{U}(\vec{x},t) - \overline{U}(\vec{x}_0,t)\right\|_{E_\infty} \\
&\quad + \left\|\overline{U}(\vec{x}_0,t) - U(\vec{x}_0,t)\right\|_{E_\infty} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \left\|\overline{U}(\vec{x},t) - U(\vec{x},t)\right\|_{E_\infty} + \left\|\overline{U}(\vec{x}_0,t) - U(\vec{x}_0,t)\right\|_{E_\infty}.
\end{aligned}
$$

Tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, com $0 < \delta_2 < \frac{\varepsilon}{3}$ tal que $\left\|\overline{U}(\vec{x},t) - U(\vec{x},t)\right\|_{E_\infty} < \delta_2$, podemos garantir que $\|U(\vec{x},t) - U(\vec{x}_0,t)\|_{E_\infty} \leq \varepsilon$, $\forall(\vec{x},t) \in \mathbb{R}^d \times [0,T]$. Logo, U é uniformemente contínua em $(\vec{x},t) \in \mathbb{R}^d \times [0,T]$, o que implica em $U + U_0 \in C([0,T], H^\infty(\mathbb{R}^d)^2)$.

Portanto, para aplicarmos a proposição 5.1.4 ainda devemos provar (5.12) e (5.13). Para mostrarmos (5.12) notemos que

$$
\begin{aligned}
U_1 + \zeta_0 - b = U_1 - U_1|_{t=0} + U_1|_{t=0} + \zeta_0 - b &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} U_1(t')dt' + U_1|_{t=0} + \zeta_0 - b \\
&\geq -\int_0^T \left|\frac{\partial}{\partial t} U_1(t')\right| dt' - \left|\left(U_1 - \overline{U}_1\right)\big|_{t=0}\right| + 2h_0 \\
&\geq -T \left\|\frac{\partial U_1}{\partial t}\right\|_{L^\infty_T} - \left|\left(U_1 - \overline{U}_1\right)\big|_{t=0}\right| + 2h_0 \\
&\geq -Cst\; T \|U\|_{E_{3m}} - \left|\left(U_1 - \overline{U}_1\right)\big|_{t=0}\right| + 2h_0,
\end{aligned}
$$

onde $\overline{U}_1\big|_{t=0} = 0$. Além disso, notemos também que

$$
\left|\left(U_1 - \overline{U}_1\right)\big|_{t=0}\right| \leq \left\|U_1 - \overline{U}_1\right\|_{L^\infty_T} \leq \left\|U - \overline{U}\right\|_{L^\infty_T} \leq Cst \left\|U - \overline{U}\right\|_{E_{3m}} \leq \delta Cst,
$$

onde a penúltima desigualdade se deve do fato das normas serem equivalentes no $\mathbb{R}^d$. Como isso, tomando $\delta = \frac{h_0 - Cst\, T\|U\|_{E_{3m}}}{Cst} > 0$ podemos garantir que para um T suficientemente pequeno vale

$$
U_1 + \zeta_0 - b \geq -Cst\; T \|U\|_{E_{3m}} - \delta Cst + 2h_0 = h_0.
$$

Para mostrarmos (5.13) notemos primeiramente que

$$
\mathfrak{a}(U + U_0) = \mathfrak{a}(U + U_0) - \mathfrak{a}(\overline{U} + U_0) + \mathfrak{a}(\overline{U} + U_0) - \mathfrak{a}(\overline{U}\big|_{t=0} + U_0) + \mathfrak{a}(\overline{U}\big|_{t=0} + U_0)
$$

$$= \mathfrak{a}(U+U_0) - \mathfrak{a}(\overline{U}+U_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t'}\left(\mathfrak{a}(\overline{U}(t')+U_0)\right) dt' + \mathfrak{a}(U_0)$$

e além disso,

$$\left|\int_0^t \frac{\partial}{\partial t'}\left(\mathfrak{a}(\overline{U}(t')+U_0)\right) dt'\right| \leq \int_0^T \left|\frac{\partial}{\partial t'}\left(\mathfrak{a}(\overline{U}(t')+U_0)\right)\right| dt' \leq T \left\|\frac{\partial}{\partial t'}\left(\mathfrak{a}(\overline{U}(t)+U_0)\right)\right\|_{L_T^\infty}$$

$$\leq TC\left(\|U_0\|_{E_{3m}}, \left\|\overline{U}\right\|_{E_{3m}}\right),$$

e também

$$\left\|\mathfrak{a}(U+U_0) - \mathfrak{a}(\overline{U}+U_0)\right\|_{E_{3m}} \leq C\left(\|U_0\|_{E_{3m}}, \left\|\overline{U}\right\|_{E_{3m}}\right)\left\|U-\overline{U}\right\|_{E_{3m}}$$

$$\leq \delta C\left(\|U_0\|_{E_{3m}}, \left\|\overline{U}\right\|_{E_{3m}}\right).$$

Agora, notemos que

$$\mathfrak{a}(U+U_0) \geq \mathfrak{a}(U_0) - C\left(\|U_0\|_{E_{3m}}, \left\|\overline{U}_0\right\|_{E_{3m}}\right)(T+\delta).$$

Por hipótese, $\exists c_0 > 0$ tal que $\mathfrak{a}(\overline{U})\big|_{t=0} \geq c_0 > 0$ no $\mathbb{R}^d$. Como $\mathfrak{a}$ é contínua então $\forall t \in [0,T] \Rightarrow \mathfrak{a}(U_0) = \lim\limits_{t\to 0} \mathfrak{a}(U_0 - t\mathcal{T}(U_0)) = \mathfrak{a}(\overline{U})\big|_{t=0} \geq c_0 > 0$. Portanto

$$\mathfrak{a}(U+U_0) \geq c_0 - C\left(\|U_0\|_{E_{3m}}, \left\|\overline{U}_0\right\|_{E_{3m}}\right)(T+\delta) \geq c_0 \geq 0.$$

Logo segue que $U+U_0$ é um estado de referência admissível tal que $\mathfrak{a}(U+U_0) \geq c_0 \geq 0$ para algum $c_0 \in \mathbb{R}^d$.

Portanto pela proposição 5.1.4, existe uma única solução $U \in C^2([0,T], H^\infty(\mathbb{R}^d)^2)$ de

$$\begin{cases} \underline{\mathcal{L}}U = G, \\ U|_{t=0} = U_0, \end{cases} \qquad \text{onde} \qquad \underline{\mathcal{L}} := \tfrac{\partial}{\partial t} + d_{\underline{U}}\mathcal{T},$$

tal que

$$\|U\|_{E_a} \leq C\left(k, B, \|\underline{U}\|_{E_{q_0+\frac{1}{2}}}, T\right)\left(\|(G,U_0)\|_{F_{a+\frac{3}{2}}} + \|(G,U_0)\|_{F_{m_0+1}}\|\underline{U}\|_{E_{a+\frac{5}{2}}}\right),$$

para algum $q_0 \in \mathbb{N}$ dependendo apenas de d.

Definindo $\varphi = (G, V_0) \in F_\infty$ temos

$$\|\Psi(U)\varphi\|_{E_a} \leq C\left(k, B, \|U+U_0\|_{E_{q_0+\frac{1}{2}}}, T\right)\left(\|\varphi\|_{F_{a+\frac{3}{2}}} + \|\varphi\|_{F_{m_0+1}}\|U+U_0\|_{E_{a+\frac{5}{2}}}\right),$$

e então, tomando $m_1 \geq 2$ implica em $a + m_1 \geq a + \frac{3}{2}$, ou seja,

$$\|\varphi\|_{F_{a+\frac{3}{2}}} \leq \|\varphi\|_{F_{a+m_1}}.$$

Além disso, $m_2 \geq m_0 \Rightarrow 2m_2 \geq m_0 + 1$, o que resulta em

$$\|\varphi\|_{F_{m_0+1}} \leq \|\varphi\|_{F_{2m_2}}.$$

Ainda, $m_3 \geq 3 \Rightarrow a + m \geq a + \frac{5}{2}$, e então

$$\|U+U_0\|_{E_{a+\frac{5}{2}}} \leq \|U+U_0\|_{E_{a+m_3}}$$

$$= \|U+U_0\|_{H_T^{a+m_3+2}} + \left\|\frac{\partial}{\partial t}(U+U_0)\right\|_{H_T^{a+m_3+1}} + \left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}(U+U_0)\right\|_{H_T^{a+m_3}}$$

$$\leq \|U\|_{H_T^{a+m_3+2}} + \|U_0\|_{H_T^{a+m_3+2}} + \left\|\frac{\partial}{\partial t}(U+U_0)\right\|_{H_T^{a+m_3+1}} + \left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}(U+U_0)\right\|_{H_T^{a+m_3}}$$

$$\leq \|U\|_{H_T^{a+m_3+2}} + \sup_{t\in[0,T]}\|U\|_{H^{a+m_3+2}} + \left\|\frac{\partial}{\partial t}(U+U_0)\right\|_{H_T^{a+m_3+1}} + \left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}(U+U_0)\right\|_{H_T^{a+m_3}}$$

$$\leq 2\left(\|U\|_{H_T^{a+m_3+2}} + \left\|\frac{\partial}{\partial t}(U+U_0)\right\|_{H_T^{a+m_3+1}} + \left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}(U+U_0)\right\|_{H_T^{a+m_3}}\right)$$

$$\Rightarrow \|U+U_0\|_{E_{a+\frac{5}{2}}} \leq \|U+U_0\|_{E_{a+m_3}} \leq Cst\,\|U\|_{E_{a+m_3}}$$

Logo, tomando $m = max\{m_1, m_2, m_3\}$ podemos garantir $\Psi(U)\varphi$ suficientemente pequeno assim como em (5.8).

Podemos portanto utilizar o teorema 5.2.1, que afirma que se pode resolver a equação $\Phi(U) = 0$ desde que $\|\Phi(U)\|_{F_{2m}} \leq M_0$ para algum $M_0 > 0$. Observemos então que $\Phi(\overline{U}) = (\overline{G}, 0)$ e, por construção,

$$\overline{G}\big|_{t=0} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial t} + \mathcal{T}\left(\overline{U}+U_0\right)\big|_{t=0} = 0; \quad \left.\frac{\partial \overline{G}}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{T}\left(\overline{U}+U_0\right)\big|_{t=0}\right) = 0.$$

Logo,

$$\left\|\Phi(\overline{U})\right\|_{F_{2m}} = \left\|(\overline{G},0)\right\|_{F_{2m}} = \left\|\overline{G}\right\|_{H_T^{2m+1}} + \left\|\frac{\partial \overline{G}}{\partial t}\right\|_{H_T^{2m}}$$

$$\leq T\left(\left\|\frac{\partial \overline{G}}{\partial t}\right\|_{H_T^{2m+1}} + \left\|\frac{\partial^2 \overline{G}}{\partial t^2}\right\|_{H_T^{2m}}\right),$$

e tomando T menor se necessário garantimos $\|\Phi(U)\|_{F_{2m}} \leq M_0$. Provamos, portanto, a existência de uma solução $U \in E_\infty$ para $\Phi(U) = 0$, ou seja, a solução para as equações de ondas em água (1.23).

Vamos agora provar a unicidade. Sejam U_1 e U_2 duas soluções em E_{a+m} para algum $a \geq m_0 + \frac{1}{2}$ e para m como escolhido anteriormente. A diferença $U = U_2 - U_1$ resolve dessa maneira

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + d_{U_1+U_0}\mathcal{T} \cdot U = G, \\ U|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad \text{com} \quad G := -\int_0^1 (1-t) d^2_{U_0+U_1+t(U_2-U_1)}\mathcal{T} \cdot (U,U)dt.$$

Usando a proposição 4.1.10, podemos obter que para todo $s \geq 2m_0 + \frac{1}{2}$, temos $\|G\|_{H^s} \leq C_s \|U\|_{H^{m_0 \frac{1}{2}}}$, onde a constante C_s depende das normas de U_1 e U_2 em E_s. A partir das condições da proposição 5.1.4, podemos obter a estimativa

$$\|U\|_{H_T^a} \leq C_{a+m} C(T) \int_0^t \|U(t)\|_{H^{m_0+\frac{1}{2}}} dt,$$

para algum inteiro $m > 0$. Limitando $\|U(t)\|_{H^{m_0+\frac{1}{2}}}$ superiormente por $\|U(t)\|_{H^a}$ e usando um argumento clássico de Gronwall garantimos que $U = 0$, o que conclui a unicidade, e portanto o teorema em questão. $\square$

.1 Apêndice A

Vamos mostrar como reduzir o sistema (1.17)-(1.20) para um sistema equivalente, assim como feito por Craig em [6]. Para isso, precisamos tomar o traço de (1.20) na superfície livre e utilizar a regra da cadeia como feito a seguir:

Em primeiro lugar vamos desenvolver os termos $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ e $\|\nabla_{X,y}\phi\|^2$ da equação (1.20). Para o primeiro termo sabemos de (1.21) que

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,X) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(t,X,\zeta(t,X)) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right). \tag{14}$$

Para o segundo termo, utilizando um resultado análogo ao obtido em (14) para $\frac{\partial \phi}{\partial X_i}$, com $i = 1, 2, \cdots, d$ temos

$$\|\nabla_{X,y}\phi\|^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial X_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial \phi}{\partial X_d}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2$$

$$= \left[\frac{\partial \psi}{\partial X_1} - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right]^2 + \cdots + \left[\frac{\partial \psi}{\partial X_d} - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial X_d}\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right]^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial \psi}{\partial X_1}\right)^2 - 2\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial \zeta}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right] + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial X_1}\right)^2\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X_d}\right)^2 - 2\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial X_d}\right)\left(\frac{\partial \zeta}{\partial X_d}\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right] + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial X_d}\right)^2\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2$$

$$= \|\nabla_X\psi\|^2 - 2\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)(\nabla_X\psi \cdot \nabla_X\zeta) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\left(\|\nabla_X\zeta\|^2 + 1\right). \tag{15}$$

Utilizando então os resultados (14) e (15) em (1.20) temos

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\|\nabla_X\psi\|^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)(\nabla_X\psi \cdot \nabla_X\zeta)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\left(\|\nabla_X\zeta\|^2 + 1\right) + g\zeta = -P. \tag{16}$$

Antes de continuarmos, notemos que o lado esquerdo da equação (1.19) pode ser reescrita da seguinte maneira,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \sqrt{1 + \|\nabla_X\zeta\|^2}\,\frac{\partial \phi}{\partial n_+}\bigg|_{y=\zeta(t,X)} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \sqrt{1 + \|\nabla_X\zeta\|^2}\vec{n}_+ \cdot \nabla_{X,y}\phi$$

$$= \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\sqrt{1 + \|\nabla_X \zeta\|^2}}{\sqrt{1 + \|\nabla_X \zeta\|^2}} (-\nabla_X \zeta, 1)^T \cdot \nabla_{X,y} \phi = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla_X \zeta \cdot \nabla_X \phi - \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla_X \zeta \cdot \nabla_X \phi - \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0. \tag{17}$$

Então ao substituirmos o resultado de (17) em (16) vamos ter

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \nabla_X \phi \cdot \nabla_X \zeta\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\|\nabla_X \psi\|^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)(\nabla_X \psi \cdot \nabla_X \zeta)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \left(\|\nabla_X \zeta\|^2 + 1\right) + g\zeta = -P$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + (\nabla_X \phi \cdot \nabla_X \zeta)\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\|\nabla_X \psi\|^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)(\nabla_X \psi \cdot \nabla_X \zeta)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \left(\|\nabla_X \zeta\|^2 + 1\right) + g\zeta = -P. \tag{18}$$

Agora vamos desenvolver o termo $(\nabla_X \phi)$ da última equação. Para isso, a partir de (1.21) podemos escrever que

$$\nabla_X \psi(t, X) = \nabla_X \phi(t, X, \zeta(t, X)) \quad \Rightarrow \quad \nabla_X \psi = \nabla_X \phi + \nabla_X \zeta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla_X \phi = \nabla_X \psi - \nabla_X \zeta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right). \tag{19}$$

Substituindo (19) em (18) temos

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \left[\left(\nabla_X \psi - \nabla_X \zeta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right) \cdot \nabla_X \zeta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right] + \frac{1}{2}\|\nabla_X \psi\|^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)(\nabla_X \psi \cdot \nabla_X \zeta)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \left(\|\nabla_X \zeta\|^2 - 1\right) + g\zeta = -P$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\psi - \|\nabla_X \zeta\|^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\|\nabla_X \psi\|^2 + \frac{1}{2}\left(\|\nabla_X \zeta\|^2 - 1\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + g\zeta = -P$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} + g\zeta + \frac{1}{2}\|\nabla_X \psi\|^2 - \frac{1}{2}\left(1 + \|\nabla_X \zeta\|^2\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 = -P. \tag{20}$$

Por fim, temos que desenvolver o termo $\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$. Com isso, a partir de (1.19) e (1.22) podemos obter

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - G(\zeta)\psi = 0, \tag{21}$$

substituindo (17) em (21) segue que

$$-\nabla_X\zeta\cdot\nabla_X\phi+\frac{\partial\phi}{\partial y}-G(\zeta)\psi=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=G(\zeta)\psi+\nabla_X\zeta\cdot\nabla_X\phi$$

assim, usando o resultado obtido em (19) na última equação temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial y}&=G(\zeta)\psi+\nabla_X\zeta\cdot\left(\nabla_X\psi-\nabla_X\zeta\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\right)\\
\Rightarrow\frac{\partial\phi}{\partial y}&=G(\zeta)\psi+\nabla_X\zeta\cdot\nabla_X\psi-\|\nabla_X\zeta\|^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\\
\Rightarrow\frac{\partial\phi}{\partial y}&=\frac{1}{1+\|\nabla_X\zeta\|^2}\left(G(\zeta)\psi+\nabla_X\zeta\cdot\nabla_X\psi\right) \qquad (22)
\end{aligned}$$

Dessa maneira, com (20), (21) e (22) obtemos enfim o sistema

$$\begin{cases}\frac{\partial\zeta}{\partial t}-G(\zeta)\psi=0,\\ \frac{\partial\psi}{\partial t}+g\zeta+\frac{1}{2}\|\nabla_X\psi\|^2-\frac{1}{2\left(1+\|\nabla_X\zeta\|^2\right)}\left(G(\zeta)\psi+\nabla_X\zeta\cdot\nabla_X\psi\right)^2=0,\end{cases}$$

onde as equações são avaliadas apenas na superfície livre, o que justifica por (1.15) o fato de P ser zero.

.2 Apêndice B

Considere as matrizes quadradas $A_{n\times n}$ e $B_{n\times n}$ e note que

$$\begin{aligned}
BA\Theta\cdot\Theta&=\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Theta_1\\\vdots\\\Theta_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\Theta_1\\\vdots\\\Theta_n\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}\Theta_1+\cdots+a_{1n}\Theta_n\\\vdots\\a_{n1}\Theta_1+\cdots+a_{nn}\Theta_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\Theta_1\\\vdots\\\Theta_n\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}b_{11}(a_{11}\Theta_1+\cdots+a_{1n}\Theta_n)+\cdots+b_{1n}(a_{n1}\Theta_1+\cdots+a_{nn}\Theta_n)\\\vdots\\b_{n1}(a_{11}\Theta_1+\cdots+a_{1n}\Theta_n)+\cdots+b_{nn}(a_{n1}\Theta_1+\cdots+a_{nn}\Theta_n)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\Theta_1\\\vdots\\\Theta_n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \Big[b_{11}(a_{11}\Theta_1 + \cdots + a_{1n}\Theta_n) + \cdots + b_{1n}(a_{n1}\Theta_1 + \cdots + a_{nn}\Theta_n)\Big]\,\Theta_1 + \cdots$$

$$\cdots + \Big[b_{n1}(a_{11}\Theta_1 + \cdots + a_{1n}\Theta_n) + \cdots + b_{nn}(a_{n1}\Theta_1 + \cdots + a_{nn}\Theta_n)\Big]\,\Theta_n$$

$$= b_{11}\Theta_1(a_{11}\Theta_1 + \cdots + a_{1n}\Theta_n) + \cdots + b_{1n}\Theta_1(a_{n1}\Theta_1 + \cdots + a_{nn}\Theta_n) + \cdots$$

$$\cdots + b_{n1}\Theta_n(a_{11}\Theta_1 + \cdots + a_{1n}\Theta_n) + \cdots + b_{nn}\Theta_n(a_{n1}\Theta_1 + \cdots + a_{nn}\Theta_n)$$

$$= (a_{11}\Theta_1 + \cdots + a_{1n}\Theta_n)(b_{11}\Theta_1 + \cdots b_{n1}\Theta_n) + \cdots$$

$$\cdots + (a_{n1}\Theta_1 + \cdots + a_{nn}\Theta_n)(b_{1n}\Theta_1 + \cdots + b_{nn}\Theta_n)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\Theta_1 + \cdots + a_{1n}\Theta_n \\ \vdots \\ a_{n1}\Theta_1 + \cdots + a_{nn}\Theta_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11}\Theta_1 + \cdots + b_{n1}\Theta_n \\ \vdots \\ b_{1n}\Theta_n + \cdots + b_{nn}\Theta_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_n \end{pmatrix} = A\Theta \cdot B^T\Theta.$$

.3 Apêndice C

Vamos demostrar as seguintes estimativas

$$\|\nabla_{X,y} f^*\|_{1,2} \leq Cst\, \|\nabla_X f\|_{H^{\frac{1}{2}}}$$

e que

$$\left\| \left.\frac{\partial^Q f^*}{\partial n}\right|_{y=-1} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq Cst\, \|Q\|_{1,\infty} \, \|\nabla_X f\|_{H^{\frac{1}{2}}}.$$

Para a primeira estimativa consideremos que

$$\|\nabla_{X,y} f^*\|_{1,2}^2 = \sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha(\nabla_{X,y} f^*)\|_2^2 = \|\nabla_{X,y} f^*\|_2^2 + \|D(\nabla_{X,y} f^*)\|_2^2. \qquad (23)$$

Vamos estimar em primeiro lugar o termo $\|\nabla_{X,y} f^*\|_2$ de (23) e assim

$$\|\nabla_{X,y} f^*\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f^*}{\partial X_i} + \frac{\partial f^*}{\partial y} \right\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^{d} \chi(y\,|D|)\frac{\partial f}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial y}(\chi(y\,|D|))f \right\|_2$$

$$\leq \|\chi(y\,|D|)\nabla_X f\|_2 + \|\chi'(y\,|D|)\,|D|\,f\|_2 \leq Cst\,\|\nabla_X f\|_2 + \|\chi'(y\,|D|)\,|D|\,f\|_2 .$$

A última desigualdade é valida pois χ e uma função de suporte compacto. Logo, com esse resultado em mãos, segue que

$$\|\nabla_{X,y} f^*\|_2 \leq Cst\,\|\Lambda(D)\nabla_X f\|_2 + \left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{-1}^{0} |\chi'(y\,|D|)\,|D|\,f|^2\,dydX\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= Cst\,\|\Lambda(D)\nabla_X f\|_2 + \left(\int_{-1}^{0} |\chi'(y\,|D|)|^2\,dy \int_{\mathbb{R}^d} |D|^2\,|f|^2\,dX\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Assim, usando a propriedade 2.1.6 de Parseval e pelo fato de $\chi \in C_0^\infty$ então

$$\|\nabla_{X,y} f^*\|_2 \leq Cst\left\|\Lambda(\xi)\widehat{\nabla_X f}\right\|_2 + Cst\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^2\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 dX\right)^{\frac{1}{2}},$$

com isso, pelo teorema 2.1.4 segue que

$$\|\nabla_{X,y} f^*\|_2 \leq Cst\,\|\nabla_X f\|_{H^{\frac{1}{2}}} + Cst\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^2\left|\frac{1}{2\pi i\xi}\widehat{\nabla_X f}(\xi)\right|^2 dX\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq Cst\,\|\nabla_X f\|_{H^{\frac{1}{2}}} + Cst\left(\int_{\mathbb{R}^d} \Lambda(\xi)\left|\widehat{\nabla_X f}(\xi)\right|^2 dX\right)^{\frac{1}{2}} \leq Cst\,\|\nabla_X f\|_{H^{\frac{1}{2}}} .$$

Agora, vamos estimar o termo $\|D(\nabla_{X,y} f^*)\|_2$ de (23)

$$\|D(\nabla_{X,y} f^*)\|_2 = \left\|\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial X_i}(\nabla_{X,y} f^*) + \frac{\partial}{\partial y}(\nabla_{X,y} f^*)\right\|_2$$

$$= \left\|\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial X_i}\left(\nabla_X f^* + \frac{\partial f^*}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nabla_X f^* + \frac{\partial f^*}{\partial y}\right)\right\|_2$$

$$= \left\|\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial X_i}\left(\nabla_X f^*\right) + \nabla_X\left(\frac{\partial f^*}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nabla_X f^*\right) + \frac{\partial^2 f^*}{\partial y^2}\right\|_2$$

$$= \left\|\chi(y\,|D|)\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial X_i}\left(\nabla_X f\right) + 2\chi'(y\,|D|)\,|D|\,\nabla_X f + \chi''(y\,|D|)\,|D|^2\,f\right\|_2$$

$$\leq \|\chi(y\,|D|)\nabla_X\left(\nabla_X f\right)\|_2 + \|2\chi'(y\,|D|)\,|D|\,\nabla_X f\|_2 + \left\|\chi''(y\,|D|)\,|D|^2\,f\right\|_2 ,$$

e como $\chi \in C_0^\infty$ e pela propriedade 2.1.6 de Parseval então

$$\|D(\nabla_{X,y} f^*)\|_2 \leq Cst\left(\|\mathcal{F}\left(\nabla_X\left(\nabla_X f\right)\right)\|_2 + \|\mathcal{F}\left(|D|\,\nabla_X f\right)\|_2 + \left\|\mathcal{F}\left(|D|^2\,f\right)\right\|_2\right)$$

$$= Cst \left(\left\| |(2\pi i)| \, |\xi| \, \widehat{\nabla_X f}(\xi) \right\|_2 + \left\| |\xi| \, \widehat{\nabla_X f}(\xi) \right\|_2 + \left\| \frac{1}{|(2\pi i)|} \, |\xi| \, \widehat{\nabla_X f}(\xi) \right\|_2 \right)$$

$$\leq Cst \left\| |\xi| \, \widehat{\nabla_X f}(\xi) \right\|_2 \leq Cst \left\| (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \widehat{\nabla_X f}(\xi) \right\|_2 = Cst \left\| \nabla_X f \right\|_{H^{\frac{1}{2}}},$$

onde a penúltima igualdade vale pelo teorema 2.1.4. Logo, substituindo as estimativas encontradas em (23) concluímos que

$$\left\| \nabla_{X,y} f^* \right\|_{1,2} \leq Cst \left\| \nabla_X f \right\|_{H^{\frac{1}{2}}}.$$

E para demostrar a segunda desigualdade note que

$$\left\| \left. \frac{\partial^Q f^*}{\partial n} \right|_{y=-1} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}} = \left\| -(-e_{d+1}) \cdot Q \nabla_{X,y} \, f^* |_{y=-1} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \left\| -(-e_{d+1}) \cdot Q \nabla_{X,y} \, \chi(y \, |D|) f |_{y=-1} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{d} q_{d+1,i} \, \chi(y \, |D|) \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{y=-1} + q_{d+1,d+1} \, f \left. \frac{\partial}{\partial y} \chi(y \, |D|) \right|_{y=-1} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}}$$

$$\leq \left\| \sup_{1 \leq i \leq d+1} q_{d+1,i} \left(\sum_{i=1}^{d} \chi(-|D|) \frac{\partial f}{\partial X_i} + \chi'(-|D|) \, |D| \, f \right) \right\|_{H^{\frac{1}{2}}}$$

Como $\chi(-|D|)$ e $\chi'(-|D|)$ são funções de suporte compacto, segue que

$$\left\| \left. \frac{\partial^Q f^*}{\partial n} \right|_{y=-1} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq \overline{C} \left\| Q \right\|_{1,\infty} \left(\left\| \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial X_i} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \left\| |D| \, f \right\|_{H^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$= \overline{C} \left\| Q \right\|_{1,\infty} \left\| \nabla_X f \right\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \overline{C} \left\| Q \right\|_{1,\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \Lambda(\xi) \, |\xi|^2 \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \overline{C} \left\| Q \right\|_{1,\infty} \left\| \nabla_X f \right\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \overline{C} \left\| Q \right\|_{1,\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \Lambda(\xi) \, |\xi|^2 \left| \frac{1}{2\pi i \xi} \widehat{\nabla_X f}(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \overline{C} \left\| Q \right\|_{1,\infty} \left\| \nabla_X f \right\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \overline{\overline{C}} \left\| Q \right\|_{1,\infty} \left\| \nabla_X f \right\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq Cst \left\| Q \right\|_{1,\infty} \left\| \nabla_X f \right\|_{H^{\frac{1}{2}}}.$$

.4 Apêndice D

Sejam A, B e C variáveis do polinômio $A + B + C$. O quadrado deste polinômio é dado por

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC,$$

pela desigualdade de Young temos

$$(A+B+C)^2 \leq A^2+B^2+C^2+2\left(\frac{A^2}{2}+\frac{B^2}{2}\right)+2\left(\frac{A^2}{2}+\frac{C^2}{2}\right)+2\left(\frac{B^2}{2}+\frac{C^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow (A+B+C)^2 \leq 3(\left|A^2\right|+\left|B^2\right|+\left|C^2\right|).$$

.5 Apêndice E

Vamos mostrar a seguinte estimativa

$$\left\|\tilde{P}\right\|_\infty \leq M(B, \|a\|_{H^{m_0+\frac{1}{2}}}).$$

Pela definição de $\tilde{P}$ apresentada no lema 3.1.4, temos que os coeficientes não constantes de $\tilde{P}$ são da forma,

$$\mathcal{A} = \tfrac{\partial s}{\partial \tilde{X}_i} \text{ com } i=1,\cdots,d+1; \quad \mathcal{B} = \tfrac{1}{\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}}} \quad \text{ou} \quad \mathcal{C} = \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial \tilde{X}_i}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial \tilde{X}_j}\right)}{\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}}}, \text{ com } 1 \leq, j \leq d,$$

onde s é dado por (3.6) e satisfaz a condição 3.1.1. Dessa maneira, estimar $\tilde{P}$ é equivalente a estimar os seus coeficiente não constantes $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. Com isso, começando por $\mathcal{A}$, podemos escrever $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ com $\mathcal{A}_1 = \frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_i}$ e $\mathcal{A}_2 = \frac{\partial s_2}{\partial \tilde{X}_i}$ pois,

$$\mathcal{A} = \frac{\partial s}{\partial \tilde{X}_i} = \frac{\partial}{\partial \tilde{X}_i}(s_1+s_2) = \frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_i} + \frac{\partial s_2}{\partial \tilde{X}_i} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2.$$

Logo,

$$\|\mathcal{A}_1\|_\infty = \left\|\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_i}\right\|_\infty \leq \left\|\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}} s_1\right\|_\infty \leq \left\|\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}}\left(b(\tilde{X})\tilde{y}\right)\right\|_\infty$$

$$= Cst\left\|\nabla_{\tilde{X}} b(\tilde{X})\right\|_\infty + \left\|\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\left(b(\tilde{X})\tilde{y}\right)\right\|_\infty = Cst\left\|\nabla_{\tilde{X}} b(\tilde{X})\right\|_\infty + \left\|b(\tilde{X})\right\|_\infty \leq Cst\,\|b\|_{2,\infty}$$

e como $m_0 + \frac{1}{2} \geq 1$ por definição, então

$$\|\mathcal{A}_2\|_\infty = \left\|\frac{\partial s_2}{\partial \tilde{X}_i}\right\|_\infty = \left\|\frac{\partial}{\partial \tilde{X}_i}\left((\tilde{y}+1)a_\lambda\right)\right\|_\infty \leq \left\|\nabla_{\tilde{X},\tilde{y}}\left((\tilde{y}+1)a_\lambda\right)\right\|_\infty$$

$$\leq Cst\,\|\nabla_{\tilde{X}} a\|_\infty + \left\|a\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\left((\tilde{y}+1)\chi(\lambda\tilde{y}\Lambda(D))\right)\right\|_\infty$$

$$\leq Cst\,\|\nabla_{\tilde{X}} a\|_2 + \|\chi(\lambda\tilde{y}\Lambda(D))a\|_\infty + \|(\tilde{y}+1)\lambda\Lambda(D)\chi'(\lambda\tilde{y}\Lambda(D))a\|_\infty$$

$$\leq \left(\int_S \left| \widehat{\nabla_{\tilde{X}} a}(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + Cst \left\| a \right\|_\infty + Cst \left\| \Lambda(D) a \right\|_\infty$$

$$\leq \left(\int_S |\xi|^2 \left| \hat{a}(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + Cst \left\| a \right\|_2 + Cst \left\| \Lambda(D) a \right\|_2$$

$$\leq \left(\int_S \left(1 + |\xi|^2\right)^{m_0 + \frac{1}{2}} \left| \hat{a}(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + Cst \left\| \Lambda(\xi)^{2(m_0+\frac{1}{2})} \hat{a}(\xi) \right\|_2 \leq Cst \left\| a \right\|_{H^{m_0+\frac{1}{2}}},$$

onde a propriedade 2.1.6 de Parseval é utilizada em algumas etapas. Além disso, podemos escrever $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$ com $\mathcal{B}_1 = \frac{1}{\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}}$ e $\mathcal{B}_2 = -\frac{\frac{\partial s_2}{\partial \tilde{y}}}{\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}}\right)}$ pois,

$$\mathcal{B} = \frac{1}{\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}}} = \frac{\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}}{\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}}\right)} = \frac{\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}} - \frac{\partial s_2}{\partial \tilde{y}}}{\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}}\right)} = \frac{\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}\left(\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}} - \frac{\partial s_2}{\partial \tilde{y}}\right)}{\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}\right)^2\left(\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}}\right) - \left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}\right)\left(\frac{\partial s_2}{\partial \tilde{y}}\right)}{\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}\right)^2\left(\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}}\right)}{\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}\right)^2\left(\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}}\right)} - \frac{\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}\right)\left(\frac{\partial s_2}{\partial \tilde{y}}\right)}{\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}\right)^2\left(\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}}\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}} - \frac{\frac{\partial s_2}{\partial \tilde{y}}}{\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}}\right)} = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2.$$

Então, por (3.39) $\left\| \mathcal{B}_1 \right\|_\infty \leq Cst$ e mais ainda,

$$\left\| \mathcal{B}_2 \right\|_\infty = \left\| -\frac{\frac{\partial s_2}{\partial \tilde{y}}}{\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}}\right)} \right\|_\infty \leq \left\| -\frac{\frac{\partial s_2}{\partial \tilde{y}}}{-b(\tilde{X})c_0} \right\|_\infty \leq \left\| -\frac{\frac{\partial s_2}{\partial \tilde{y}}}{h_0 c_0} \right\|_\infty \leq Cst \left\| \frac{\partial s_2}{\partial \tilde{y}} \right\|_\infty,$$

onde a última desigualdade é valida pois como $h_0 c_0 > 0$ e $\left(\frac{\partial s_2}{\partial \tilde{y}}\right) > h_0 > 0$, então

$$\Rightarrow \left\| \mathcal{B}_2 \right\|_\infty \leq Cst \sup_{1 \leq i \leq d+1} \left\| \mathcal{A}_2 \right\|_\infty,$$

Portanto, pela estimativa de $\left\| \mathcal{A}_2 \right\|_\infty$ feita anteriormente, temos

$$\left\| \mathcal{B}_2 \right\|_\infty \leq Cst \left\| a \right\|_{H^{m_0+\frac{1}{2}}}.$$

Por fim, podemos escrever $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$, com

$$\mathcal{C}_1 = \frac{\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_i}\right)\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_j}\right)}{\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}},$$

$$\mathcal{C}_2 = \frac{\left[\left(\frac{\partial s_2}{\partial \tilde{X}_i}\right)\left(\frac{\partial s_2}{\partial \tilde{X}_j}\right) + \left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_i}\right)\left(\frac{\partial s_2}{\partial \tilde{X}_j}\right) + \left(\frac{\partial s_2}{\partial \tilde{X}_i}\right)\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_j}\right)\right]\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}} - \left(\frac{\partial s_2}{\partial \tilde{y}}\right)\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_i}\right)\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_j}\right)}{\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}}\right)},$$

pois,

$$\mathcal{C} = \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial \tilde{X}_i}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial \tilde{X}_j}\right)}{\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}}} = \frac{\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_i} + \frac{\partial s_2}{\partial \tilde{X}_i}\right)\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_j} + \frac{\partial s_2}{\partial \tilde{X}_j}\right)}{\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}}}$$

$$= \frac{\left[\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_i}\right)\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_j}\right) + \left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_i}\right)\left(\frac{\partial s_2}{\partial \tilde{X}_j}\right) + \left(\frac{\partial s_2}{\partial \tilde{X}_i}\right)\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_j}\right) + \left(\frac{\partial s_2}{\partial \tilde{X}_i}\right)\left(\frac{\partial s_2}{\partial \tilde{X}_j}\right)\right]\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}}{\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}}\right)}$$

$$= \frac{\left[\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_i}\right)\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_j}\right)\right]\left(\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}} - \frac{\partial s_2}{\partial \tilde{y}}\right) + \left[\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_i}\right)\left(\frac{\partial s_2}{\partial \tilde{X}_j}\right) + \left(\frac{\partial s_2}{\partial \tilde{X}_i}\right)\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_j}\right) + \left(\frac{\partial s_2}{\partial \tilde{X}_i}\right)\left(\frac{\partial s_2}{\partial \tilde{X}_j}\right)\right]\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}}{\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial \tilde{y}}\right)}$$

$$= \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2.$$

Com isso,

$$\|\mathcal{C}_1\|_\infty = \left\|\frac{\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_i}\right)\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_j}\right)}{\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{y}}}\right\|_\infty \leq \left\|\frac{\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_i}\right)\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tilde{X}_j}\right)}{b(\tilde{X})}\right\|_\infty \leq Cst\left\|(\nabla_{\tilde{X}} b)^2\right\|_\infty \leq Cst\,\|b\|_{2,\infty}.$$

Logo, de maneira análoga podemos estimar $\|\mathcal{C}_2\|_\infty$ por $Cst\,\|a\|_{H^{m_0+\frac{1}{2}}}$. Assim, com esse resultado em mãos, podemos garantir que

$$\left\|\tilde{P}\right\|_\infty \leq M(B, \|a\|_{H^{m_0+\frac{1}{2}}}).$$

com B assim como apresentado na notação 4.1.5. $\square$

Os resultados obtidos neste trabalho, utilizaram além das referências citadas anteriormente as seguintes referências: [1], [8], [13], [15], [16] e [21].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ALINHAC, S., AND GÉRARD, P. *Opérateurs pseudo-différentiels et théoremè de Nash-Moser*. Editions du CNRS, 1991.

[2] BORODZIK, M., ET AL. *Problems on partial differential equations*. Gewerbestrasse: Springer Nature Switzerland AG, 2019.

[3] BRENNER, P., THOMÉE, V., AND WAHLBIN, L. B. *Besov spaces and applications to difference Methods for initial value problems*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1975.

[4] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. New York: Springer, 2011.

[5] CAVALCANTI, M. M., AND DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. *Introdução à teoria das distribuições e aos espaços de Sobolev*. Maringá: Eduem, 2009.

[6] CRAIG, W., SCHANZ, U., AND SULEM, C. The modulational regime of three-dimensional water waves and the davey-stewartson system. *Analyse non linéaire 14*, 5 (1997), 615–667.

[7] DENK, R., HEIBER, M., AND PRÜSS, J. *R-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type*, vol. 166. Providence: American Mathematical Society, 2003.

[8] DI NEZZA, E., PALATUCCI, G., AND VALDINOCI, E. Hitchhiker's guide to the fractional sobolev spaces. *Elsevier 136*, 5 (2012), 521–573.

[9] ESCHER, J., AND SEILER, J. Bounded h-calculus for pseudodifferential operators and applications to the dirichlet-neumann operador. *A 360*, 8 (2008), 3945–3973.

[10] EVANS, L. C. *Partial differential equations*, 2 ed., vol. 3. Providence: American Mathematical Society, 2010.

[11] Gondar, J. L., and Cipolatti, R. *Iniciação à física matemática: modelagem de processos e métodos de solução*, 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

[12] Haroske, D. D., and Triebel, H. *Distributions, Sobolev spaces, elliptic equations.* Zürich: European Mathematical Society, 2008.

[13] Hieber, M. Operator valued fourier multipliers. *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications 35* (1999), 363–380.

[14] Lannes, D. Well-posedness of the water-waves equations. *Jornal of the mathematical society 18*, 3 (2005), 605–654.

[15] Lannes, D. *The water waves problem: mathematical analysis and asymptotics*, vol. 188. Providence: American Mathematical Society, 2013.

[16] Liu, P., and Liu, W. Global well-posedness of an initial-boundary value problem of the 2-d incompressible navier-stokes-darcy system. 101–128.

[17] Nalimov, v. I. Differential properties of the dirichlet–neumann operator. *Siberian Mathematical Journal 54*, 2 (2013), 271–300.

[18] Rudin, W. *Functional analysis*, 2 ed. New York: McGraw-Hill, 1991.

[19] Ruzhansky, M., and Turunen, V. *Pseudo-differential operators and symmetries: background analysis and advanced topics*, vol. 2. Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser-Verlag AG, 2010.

[20] Saint Raymond, X. A simple nash-moser implicit function theorem. *Enseign. Math 35*, 2 (1989), 217–226.

[21] Tartar, L. *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.