

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Problemas de Coloração em Grafos
Evitando Famílias de Padrões de Grafos
Completos**

por

Dionatan R. Schmidt

Tese submetida como requisito parcial
para a obtenção do título de
Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Orientador

Porto Alegre, Abril de 2023.

CIP - Catalogação na Publicação

Schmidt, Dionatan Ricardo
Problemas de Coloração em Grafos Evitando Famílias
de Padrões de Grafos Completos / Dionatan Ricardo
Schmidt. -- 2023.
114 f.
Orientador: Carlos Hoppen.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio
Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística,
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada,
Porto Alegre, BR-RS, 2023.

1. Teoria Extremal de Grafos. 2. Colorações de
arestas. I. Hoppen, Carlos, orient. II. Título.

Problemas de Coloração em Grafos

Evitando Famílias de Padrões de Grafos

Completos

por

Dionatan R. Schmidt

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor

Doutor em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Matemática Discreta

Orientador: Prof. Dr. Carlos Hoppen

Banca examinadora:

Prof. Dr. Antonio Josefran de Oliveira Bastos

UFC

Prof. Dr. Fabricio Siqueira Benevides

UFC

Prof. Dr. Lucas Colucci Cavalcante de Souza

USP

Prof. Dr. Luiz Emílio Allem

UFRGS

Tese defendida e aprovada em
Abril de 2023.

Prof. Dr. Lucas da Silva Oliveira
Coordenador

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Edelar e Janete, por sempre me apoiar e me incentivar.

Ao meu orientador, professor Carlos, pela paciência e conhecimento transmitido ao longo da minha formação.

Ao professor Hanno, Josefran e ao Knut, por compartilharem experiências de vida e de conhecimento.

Ao meus amigos Everton, Douglas, Guilherme, Ismael, Ian, Paulo, Patrícia, Taiana, Bruna, Dudu, Erdem, Cristian, Galhardo e Junio por compartilharem bons momentos durante essa trajetória.

A minha família em geral, o apoio de vocês foi muito importante.

Ao PICME/CAPES pelo suporte financeiro.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE SÍMBOLOS	viii
RESUMO	ix
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Organização do Trabalho	4
1.2 Definições	5
1.3 Revisão Bibliográfica	10
1.4 Nossos Resultados	20
2 NOTAÇÃO E DEFINIÇÕES BÁSICAS	29
3 RESULTADO EXATO A PARTIR DA ESTABILIDADE	35
3.1 Prova do Teorema 1.12	36
4 ESTABILIDADE DE CORES PARA GRAFOS \mathcal{P}_K^*-EXTREMAIS	40
4.1 Prova do Lema 4.1	42
4.1.1 Prova da Afirmação 4.2	47
4.2 Cota para $B(\mathcal{P}_k^*)$	56
4.3 Cota superior $\omega(k)$ do parâmetro r_0	59
5 ESTABILIDADE DE CORES PARA GRAFOS \mathcal{P}_3^*-EXTREMAIS	63

5.1	Propriedade de Estabilidade De Cores para Grafos $K_3^{(2)}$-livres	64
5.1.1	Prova do Teorema 1.15	65
5.1.2	Prova da Afirmação 5.1	69
5.1.3	Prova do Lema 5.2	73
6	ESTABILIDADE DE CORES PARA GRAFOS \mathcal{P}_4^*-EXTREMAIS	83
6.1	Propriedade de Estabilidade De Cores para Grafos \mathcal{P}_4^*-livres	83
6.1.1	Prova do Teorema 1.17	84
6.1.2	Prova da Afirmação 6.1	89
6.1.3	Prova do Lema 6.2	96
7	CONCLUSÃO	105
7.1	Problemas Futuros	106
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	109

Lista de Figuras

1.1	Os grafos aresta-coloridos G_1 e G_2	6
1.2	Coloração de K_6 que contém o padrão monocromático P de K_4	7
1.3	Padrões K_3^M , K_3^R e $K_3^{(2)}$, respectivamente.	16
1.4	Cota inferior $\mu(K_3^{(2)})$ do parâmetro $r_0(K_3^{(2)})$	20
1.5	Cotas inferiores e superiores referentes ao parâmetro $r_0(\mathcal{P}_k^*)$	21
1.6	Família de padrões r -saturada.	23
1.7	Grafo 4-partido $(6, \mathcal{P}_3^*)$ -livre.	25
1.8	Cotas referentes ao parâmetro r_0	26

LISTA DE SÍMBOLOS

- $ex(n, F)$: número máximo de arestas em um grafo com n vértices livre de F .
- $T_{k-1}(n)$: grafos de Turán $(k - 1)$ -partido com n vértices.
- $\chi(F)$: número cromático do grafo F .
- K_n : grafo completo (clique) com n vértices.
- $K_k(G)$: o número de cópias de K_k no grafo G .
- K_k^M : grafo completo com k vértices e padrão monocromático.
- K_k^R : grafo completo com k vértices e padrão arco-íris.
- F^P : cópias de F coloridas de acordo com o padrão P .
- \mathcal{P} : uma família arbitrária não-vazia cujos elementos são da forma (F, P) , onde F é um grafo e P é um padrão de F .
- $\mathcal{C}_{r, F^P}(G)$: conjunto de todas as r -colorações F^P -livres de um grafo G .
- $c_{r, F^P}(n)$: $\max\{|\mathcal{C}_{r, F^P}(G)| : |V(G)| = n\}$.
- $\mathcal{C}_{r, \mathcal{P}}(G)$: conjunto de todas as r -colorações \mathcal{P} -livres de um grafo G .
- $c_{r, \mathcal{P}}(n)$: $\max\{|\mathcal{C}_{r, \mathcal{P}}(G)| : |V(G)| = n\}$.
- $A(\mathcal{P}_k)$: conjunto de todos os valores de r tais que $T_{k-1}(n)$ é o único grafo (r, \mathcal{P}_k) -extremal.
- $B(\mathcal{P}_k^*)$: conjunto de todos os valores de r tais que $T_{k-1}(n)$ é o único grafo (r, \mathcal{P}_k^*) -extremal.

RESUMO

Nessa tese são abordados problemas dentro da Teoria Extremal de Grafos. Mais especificamente problemas de colorações de arestas, propostos inicialmente por Erdős e Rothschild. O primeiro problema considerado aqui envolve a família de padrões \mathcal{P}_k^* que *não* contêm o padrão arco-íris K_k^R . Para todo $k \geq 3$, apresentamos resultados em direção a obtenção de cotas inferiores e superiores para o parâmetro $r_0(\mathcal{P}_k^*)$, que é o valor onde o grafo de Turán deixa de ser o grafo extremal. Ainda em relação a família \mathcal{P}_k^* , apresentamos uma construção para uma cota superior $\omega(\mathcal{P}_k^*)$ em relação ao parâmetro $r_0(\mathcal{P}_k^*)$, onde, para todo $r \geq \omega(\mathcal{P}_k^*)$, o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ não é mais o grafo (r, \mathcal{P}_k^*) -extremal.

Outra contribuição do nosso trabalho é para $k = 3$, e considerando o padrão $K_3^{(2)}$ da família \mathcal{P}_3^* , determinamos que o parâmetro $r_0(K_3^{(2)})$ vale 26. Mais especificamente, provamos que o grafo de Turán $T_2(n)$ é o único grafo extremal, para o padrão $K_3^{(2)}$, onde $2 \leq r \leq 26$. A principal contribuição dessa tese é a incorporação de um componente indutivo na prova desse resultado, o que nos permite explorar melhor as restrições locais e estender o resultado de [24] para todos os valores de r para os quais foi conjecturado.

Por último, aplicamos a estrutura de demonstração desenvolvida na solução do problema do parágrafo acima, obtemos progresso no melhoramento da cota inferior de $r_0(\mathcal{P}_4^*)$. Conseguimos encontrar uma cota inferior $\mu_4(\mathcal{P}_4^*)$ que melhora a cota inferior dada pelo primeiro resultado desse trabalho, mostrando assim que essa técnica tem potencial para ser empregada para melhorar resultados já existentes.

1 INTRODUÇÃO

Na Combinatória, muitas vezes estamos interessados em procurar, dentre todos os grafos com alguma estrutura pré-determinada, aqueles que são maximais ou minimais com respeito a algum parâmetro. Nosso intuito foi abordar problemas de otimização específicos na área de Teoria Extremal de Grafos. Mais especificamente, trabalhamos com problemas de colorações de arestas de grafos motivados por questões propostas por Erdős e Rothschild.

Um dos trabalhos pioneiros em Teoria Extremal de Grafos foi o de encontrar um grafo G , com n vértices, que possua o maior número de arestas e seja livre de F , ou seja, que não contenha uma cópia de F como subgrafo. Denotamos por $\text{ex}(n, F)$ o número máximo de arestas em um grafo livre de F (ou F -livre) com n vértices. Os grafos F -livres que atingem o número máximo $\text{ex}(n, F)$ de arestas são chamados F -extremais. Mantel resolveu este problema para o triângulo $F = K_3$ em [34], em que constatou que o grafo K_3 -extremal é um grafo bipartido completo balanceado.

Turán provou em [43] uma generalização do Teorema de Mantel para grafos completos arbitrários, onde afirma que o grafo K_k -extremal é um grafo $(k-1)$ -partido completo balanceado com n vértices. Os grafos K_k -extremais são chamados de grafos de Turán, sendo o grafo denotado por $T_{k-1}(n)$ e seu número de arestas por $t_{k-1}(n)$. Ou seja, $\text{ex}(n, K_k) = t_{k-1}(n)$, para todo $n, k \geq 2$.

Teorema 1.1 (Teorema de Turán). *Sejam n e k inteiros positivos, temos que todo grafo K_k -extremal é isomorfo a $T_{k-1}(n)$.*

Posteriormente, Erdős e Stone provaram, em [13], um resultado nesta linha, para grafos F arbitrários. O número cromático $\chi(F)$ de um grafo F é o menor número inteiro positivo k tal que o grafo F é k -partido. Em outras palavras, o número cromático $\chi(F)$ é o menor número de cores tal que existe uma atribuição de cores aos vértices de F de tal forma que quaisquer dois vértices adjacentes recebam cores diferentes.

Teorema 1.2 (Teorema de Erdős-Stone). *Para todo grafo F , vale a seguinte propriedade. Para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon, F)$ tal que para todo $n \geq n_0$, vale que*

$$\left(1 - \frac{1}{\chi(F) - 1} - \epsilon\right) \frac{n^2}{2} \leq \text{ex}(n, F) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(F) - 1} + \epsilon\right) \frac{n^2}{2}$$

Podemos concluir do teorema acima que, para $\chi(F) \geq 3$, o número de arestas do grafo extremal para F tem de ser muito próximo do número de arestas de $T_{\chi(F)-1}(n)$. Assim, podemos observar que, para qualquer grafo que não é bipartido, o resultado assintótico

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}(n, F)}{\binom{n}{2}} = \frac{\chi(F) - 2}{\chi(F) - 1} > 0$$

é conhecido. Se o grafo F é bipartido, isto é, $\chi(F) = 2$, podemos afirmar apenas que o grafo F -extremal é esparso, pois a desigualdade acima implica $\text{ex}(n, F) = o(n^2)$ fazendo com que não possamos ter informações precisas sobre a ordem de grandeza de $\text{ex}(n, F)$. Sendo assim, o problema de Turán para grafos bipartidos é ainda amplamente estudado, constituindo um importante campo de pesquisa na área, como podemos ver no trabalho de Füredi e Simonovits [16] e nas suas referências.

Assim, podemos entender os problemas extremais do tipo de Turán como problemas que buscam determinar qual é o grafo de n vértices que possui o maior

número de arestas, evitando um grafo específico (ou, mais geralmente, uma família de grafos) como subgrafo. Podemos também estender o problema de Turán para partições, perguntando de quantas maneiras podemos particionar as arestas de um grafo G de modo que não haja cópia do grafo proibido F formada por arestas de uma mesma classe. Nesse caso, G pode ter cópias de F , desde que a cópia tenha arestas em classes diferentes.

Utilizando outra terminologia, podemos pensar em colorações, onde o problema de perguntar de quantas maneiras podemos particionar as arestas de G evitando F é a mesma coisa que de quantas maneiras podemos colorir as arestas de G com um certo número de cores, de tal forma que não tenha cópia monocromática de F . Ou seja, se adicionarmos cores às arestas, a função a ser maximizada passa a ser o número de *colorações de arestas* do grafo G de forma que não tenhamos o subgrafo proibido F *colorido de uma certa maneira*. Com essa definição, um grafo F -livre $G = (V, E)$ admite $r^{|E|}$ colorações, já que nenhuma delas poderá conter uma cópia proibida, onde r é o número de cores usado na coloração de G . Por isso, os grafos F -extremais são os grafos F -livres que maximizam o número de colorações dentre todos os grafos F -livres. Podemos notar também que, se aumentarmos o número de arestas de um grafo, obtemos mais elementos para colorir, mas ao fazermos isto, podemos gerar cópias do grafo proibido, fazendo com que tenhamos mais restrições nas formas em que as arestas podem ser coloridas. Logo, não estamos mais interessados em procurar por um grafo G que seja F -extremal, isto é, que apenas maximize o número de arestas, pois talvez esse mesmo grafo G não seja o grafo que maximize o número de colorações evitando o subgrafo F . Nos referimos a estes problemas extremais envolvendo colorações de arestas como Problemas de Erdős–Rothschild. Uma outra questão que surge naturalmente é sobre a dependência no número de cores envolvidas,

ou seja, se a propriedade seria mantida se permitíssemos o uso de r cores, ao invés de duas cores. Como veremos a seguir, a introdução desse novo parâmetro eleva consideravelmente a dificuldade do problema.

Vamos tratar nessa tese de problemas que são variantes do *Problema de Erdős-Rothschild*, buscando encontrar estruturas que maximizam certas r -colorações, para alguns padrões específicos do subgrafo a ser evitado. Mostraremos também que a quantidade de cores afeta essa extremalidade.

1.1 Organização do Trabalho

Na próxima seção desse capítulo, Seção 1.2, vamos introduzir a notação para uma melhor apresentação dessas ideias. Na Seção 1.3, vamos abordar os resultados já existentes relacionados a colorações de grafos, fazendo assim uma revisão bibliográfica envolvendo o problema de Erdős-Rothschild. Já na Seção 1.4, apresentaremos nossas contribuições para alguns problemas relacionados à coloração de arestas para grafos K_k -extremais com padrões específicos.

No Capítulo 2, traremos definições e resultados básicos de Teoria de Grafos, dos quais faremos uso nos capítulos seguintes. No Capítulo 3, vamos apresentar resultados específicos da Teoria Extremal de Grafos, os quais foram adaptados para nosso contexto. No Capítulo 4 apresentaremos a demonstração do resultado que se refere a grafos K_k -extremais com uma certa famílias de padrões, o Teorema 1.11. No Capítulo 5 apresentaremos a prova para uma conjectura proposta, o Teorema 1.13, que trata de grafos K_3 -extremais para um padrão específico. Analogamente ao capítulo anterior, no Capítulo 6, apresentaremos uma melhora em

um parâmetro específico, para grafos K_4 -extremais, o Teorema 1.16. Por último, no Capítulo 7, faremos uma síntese dos problemas futuros que possam vir a ser considerados, derivados desse trabalho.

1.2 Definições

Uma r -coloração de arestas de um grafo rotulado G é uma função $f: E(G) \rightarrow [r]$ que associa uma cor de $[r] = \{1, \dots, r\}$ a cada aresta de G . Nesta Tese nos referimos às r -colorações de arestas simplesmente como r -colorações.

Sejam $r \geq 1$ um determinado número de cores e um grafo F , definimos um r -padrão P de F como uma partição do seu conjunto de arestas em no máximo r classes. Se \widehat{F} denota uma cópia do grafo F em que as arestas estão coloridas, o padrão P dado pela coloração em \widehat{F} é simplesmente o padrão induzido pelas classes de cores.

Um isomorfismo entre dois grafos aresta-coloridos G_1 e G_2 é dado por uma bijeção f de $V(G_1)$ em $V(G_2)$ e por uma bijeção g entre os conjuntos de cores das arestas de G_1 e de G_2 tais que $\{u, v\} \in E(G_1)$ tem a cor α , se, e somente se, $\{f(u), f(v)\} \in E(G_2)$ tem a cor $g(\alpha)$. Duas colorações de aresta de um grafo F têm o mesmo padrão se existe um isomorfismo entre os grafos coloridos por elas no sentido da frase anterior. Vejamos um exemplo.

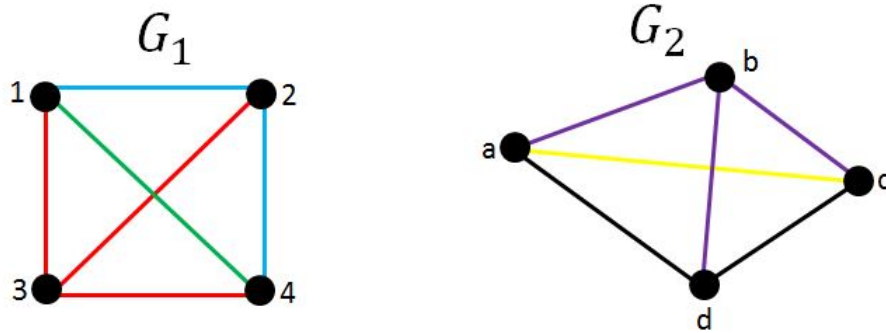


Figura 1.1 Os grafos aresta-coloridos G_1 e G_2

Na Figura 1.1 temos dois grafos aresta-coloridos G_1 e G_2 , onde cada um tem uma coloração diferente. Precisamos verificar duas coisas para que G_1 e G_2 tenham o mesmo padrão. Se existe uma bijeção f de $V(G_1)$ em $V(G_2)$, e se a bijeção g das cores das arestas de G_1 para as cores das arestas G_2 é preservada por f e uma bijeção g .

Seja $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ dada por $f(1) = a, f(2) = d, f(3) = b$ e $f(4) = c$. Seja g a bijeção das cores das arestas de G_1 nas cores das arestas de G_2 dada por $g(\text{vermelho}) = \text{roxo}, g(\text{verde}) = \text{amarelo}$ e $g(\text{azul}) = \text{preto}$. É fácil ver que o par (f, g) é um isomorfismo entre G_1 e G_2 .

O padrão de K_k em que todas as arestas têm a mesma cor é dito o *padrão monocromático* de K_k e denotamos por K_k^M . O padrão de K_k em que todas as arestas têm cores distintas é dito o *padrão arco-íris* e a denotado por K_k^R .

É interessante notar que, se dispusermos de 3 cores, a única forma de termos um K_3^R é quando utilizamos as três cores, uma em cada aresta do triângulo K_3 , e ainda, podemos ter três colorações distintas que representam o padrão monocromático K_3^M , cada uma associada a uma das 3 cores. Além dos padrões monocromático e arco-íris, o triângulo K_3 admite apenas mais um padrão, denotado por $K_3^{(2)}$, que é o padrão de coloração do triângulo com duas arestas de uma mesma cor, e a outra aresta com cor diferente.

Dizemos que uma coloração de arestas de G contém um padrão P de um grafo F , se G contém uma cópia de F na qual a partição do conjunto de arestas induzida pela coloração tem padrão P , como mostra a Figura 1.2 abaixo, onde o grafo completo $K_6 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ é colorido com três cores, e contém o padrão P de K_4 , com $K_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e P o padrão monocromático de F .

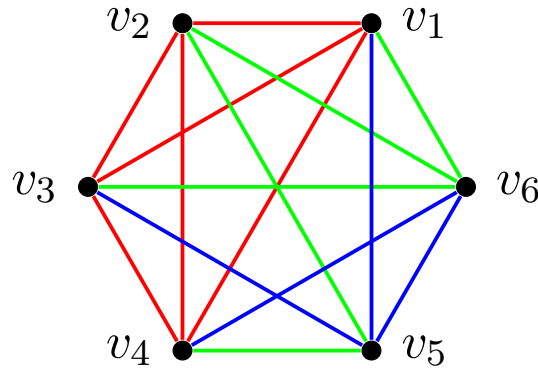


Figura 1.2 Coloração de K_6 que contém o padrão monocromático P de K_4 .

Ainda, dizemos que uma coloração de arestas de um grafo G é P -livre, se não contém cópias de F coloridas de acordo com o padrão P . Definimos $C_{r,P}(G)$

como o conjunto de todas as r -colorações P -livres de um grafo G , e seja

$$c_{r,P}(n) = \max\{|C_{r,P}(G)| : |V(G)| = n\}.$$

Entre todos os grafos com n vértices, um grafo que maximiza o número de r -colorações P -livres é dito (r, P) -extremal. Assim, um problema do tipo Erdős-Rothschild é determinar a função $c_{r,P}(n)$ e os grafos (r, P) -extremais.

Como comentamos anteriormente, os grafos F -extremais são candidatos naturais para maximizar o número de r -colorações P -livres, pois qualquer r -coloração das arestas de um grafo F -livre é trivialmente P -livre para qualquer padrão P de F , o que leva ao número $r^{\text{ex}(n,F)}$ de tais colorações. Não é óbvio qual grafo G vence a “disputa” para maximizarmos o número de r -colorações. Por um lado, a adição de arestas permite que tenhamos mais elementos para colorir. Por outro, aumenta o número de cópias de K_k , o que cria novas restrições na maneira de colorir. O que é óbvio da discussão anterior é que $r^{\text{ex}(n,K_k)}$ é uma cota inferior para o número de r -colorações.

Seja \mathcal{P} uma família arbitrária não-vazia cujos elementos são os grafos F com o padrão P . Dizemos que uma r -coloração de um grafo G é \mathcal{P} -livre se esta for P -livre, para todo grafo F com padrão P . Da mesma forma, temos $\mathcal{C}_{r,\mathcal{P}}(G)$ como o conjunto de todas as r -colorações \mathcal{P} -livres de um grafo G . Escrevemos

$$c_{r,\mathcal{P}}(n) = \max\{|\mathcal{C}_{r,\mathcal{P}}(G)| : |V(G)| = n\},$$

e dizemos que um grafo G com n vértices é (r, \mathcal{P}) -extremal se $|\mathcal{C}_{r,\mathcal{P}}(G)| = c_{r,\mathcal{P}}(n)$. Determinar $c_{r,\mathcal{P}}(n)$ e os grafos (r, \mathcal{P}) -extremais é uma generalização do Problema de Erdős-Rothschild.

Um exemplo interessante de família de padrões, que será também estudada no decorrer desse trabalho, é a família \mathcal{P} , que contém todos os padrões de K_k exceto o padrão arco-íris. Dizemos que uma família de padrões desse tipo é uma família de padrões de K_k , pois todos os seus elementos são padrões do mesmo grafo.

Vamos agora enunciar a última definição dessa seção, que trata da estabilidade de cores, uma importante propriedade que contribuiu para o desenvolvimento da área.

Definição 1.3. *Seja F um grafo com número cromático $\chi(F) = k \geq 3$ e seja \mathcal{P} uma família de padrões de F . Dizemos que a família \mathcal{P} satisfaz a Propriedade de Estabilidade de Cores para um inteiro positivo r se, para cada $\delta > 0$, existe n_0 com a seguinte propriedade. Se $n > n_0$ e G é um grafo com n vértices tal que $|c_{r,\mathcal{P}}(G)| \geq r^{\text{ex}(n,F)}$, então existe uma partição $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_{k-1}$ tal que $\sum_{i=1}^{k-1} e(V_i) < \delta n^2$, onde $e(V_i)$ denota o número de arestas de G com ambas as extremidades em V_i .*

Como veremos mais adiante, esta propriedade será fundamental para auxiliar a demonstração de alguns dos nossos resultados, uma vez que, ela nos fornece uma importante propriedade estrutural, garantindo uma certa “regularidade” para o grafo que cumpre suas hipóteses.

Neste trabalho estamos particularmente interessados em determinar $c_{r,\mathcal{P}}(n)$ para determinadas famílias \mathcal{P} e caracterizar os grafos com n vértices que admitem o maior número de r -colorações \mathcal{P} -livres para todo $n \in \mathbb{N}$. Como poderá ser verificado nos próximos capítulos, além de depender da família \mathcal{P} propriamente dita, a solução vai depender especificamente do número de cores disponíveis r .

1.3 Revisão Bibliográfica

Nessa seção vamos apresentar alguns resultados que contribuíram para o desenvolvimento do problema de Erdős-Rothschild. Cabe ressaltar que não vamos fazer uma apresentação em ordem puramente cronológica, mas vamos agrupar os avanços em cada instância específica do problema.

Como já mencionado anteriormente, os primeiros a tratarem de problemas extremais do tipo Turán, pensando em colorações de arestas, foram Erdős e Rothschild, que conjecturaram em [14] que o maior número de 2-colorações sem conter K_k^M , para n suficientemente grande, seria obtido com o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$, isto é

$$c_{2, K_k^M}(n) = 2^{t_{k-1}(n)}.$$

Além disso, se G tem n vértices, eles conjecturaram que $c_{2, K_k^M}(G) = c_{2, K_k^M}(n)$ se, e somente se, G é isomorfo a $T_{k-1}(n)$.

Anos depois dos primeiros questionamentos, Yuster [44] avançou nessa questão, provando a conjectura para $r = 2$ cores e o padrão K_3^M , ao mostrar o valor exato de $c_{2, K_3^M}(n) = 2^{\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor}$ para todo $n \geq 6$.

Um trabalho que contribuiu de maneira muito importante para o desenvolvimento desta área é devido a Alon, Balogh, Keevash e Sudakov [1], que enunciaram em seu artigo a solução do problema de Erdős e Rothschild para $r \in \{2, 3\}$ e qualquer $k \geq 3$, para n suficientemente grande.

Teorema 1.4 (Alon et al). *Sejam $k \geq 2$ um inteiro e $r \in \{2, 3\}$. Então existe $n_0(k)$ tal que todo grafo G de ordem $n > n_0(k)$ satisfaz $c_{r, K_k^M}(G) \leq r^{t_{k-1}(n)}$. Além disso,*

o único grafo de $n \geq n_0(k)$ vértices em que $c_{r, K_k^M}(G) = r^{t_{k-1}(n)}$ é o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$.

Vale aqui fazermos uma breve menção à estratégia de prova utilizada em [1], uma vez que essa mesma estratégia mostrou-se adaptável para resolver diversos outros problemas na área. A prova do teorema se divide em duas partes. A primeira parte consiste em um resultado de estabilidade para colorações, isto é, estabelece que, se um grafo G tem um número de r -colorações pelo menos tão grande quanto o do grafo de Turán, então G deve ser “quase” $(k - 1)$ -partido, no sentido do Teorema 1.5 abaixo. Na segunda parte, obtém-se o resultado exato, isto é, o Teorema 1.4, a partir da estabilidade. Em outras palavras, mostra-se que, dentre todos os grafos quase $(k - 1)$ -partidos, o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ maximiza o número de r -colorações K_k^M -livres. Tal estrutura de demonstração mostrou ser de grande relevância, já que foi adaptada a diversas situações e problemas correlatos [3, 4, 27, 28]. Um trabalho que usou uma adaptação da estabilidade para outras estruturas ótimas foi devido a [37].

Utilizando a definição de estabilidade de cores da Seção 1.2, podemos enunciar o Teorema 1.5, resultado de estabilidade, o qual garante que qualquer possível contra-exemplo deve ser quase $(k - 1)$ -partido.

Teorema 1.5. *Se $r \in \{2, 3\}$ e k é inteiro positivo, então K_k^M satisfaz a Propriedade de Estabilidade de Cores.*

Um fato interessante a ser notado é que mesmo tendo uma prova cabal da validade do resultado do Teorema 1.4, quando olhamos para o número mínimo de vértices n_0 que esse método de demonstração exige, podemos notar que ele é um

número extremamente grande. Enquanto a prova da parte exata requer um n_0 que dependa exponencialmente de k , a prova de estabilidade usa o Lema de Regularidade de Szemerédi [42], que produz um $n_0(k)$ que é um tipo de torre de 2, com altura dependendo de k , ou seja, da forma $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}$, veja [22].

Sendo assim, um questionamento interessante, abordado por Hàn e Jiménez [23], é qual o menor valor de n para que o resultado seja válido. Os mesmo autores mostraram que, para um $n_0 = n_0(k) = \exp(Ck^4)$, onde C é uma constante absoluta, o resultado é mantido. Vale destacar que o resultado obtido em [23] é essencialmente o melhor possível, no sentido de que n_0 deve ser no mínimo exponencial em k . A demonstração aplica o Método dos Contêineres, que foi desenvolvido independentemente por Balogh, Morris e Samotij [5] e Saxton e Thomason [40]. Este método fornece uma caracterização estrutural dos conjuntos independentes em hipergrafos uniformes que satisfazem certas condições naturais, mostrando que em tais hipergrafos cada conjunto independente está totalmente contido em uma família de conjuntos relativamente pequeno, os ditos *contêineres*. Em outras palavras, o método fornece uma família relativamente pequena de contêineres para os conjuntos independentes, cada um contendo poucas arestas. Nas aplicações desse método, o hipergrafo é definido de maneira conveniente para que os conjuntos independentes estejam relacionados ao objeto que se quer estudar. Em certas aplicações, esse método substitui a aplicação de resultados clássicos, como o Lema de Regularidade.

Por outro lado, se o parâmetro r for alterado para valores maiores, o Teorema 1.4 deixa de valer e outras configurações extremas podem ser obtidas. Um trabalho nesse sentido é o de Pikhurko e Yilma [37], que determinaram, para $k \in \{3, 4\}$, o grafo (r, K_k^M) -extremal com $r = 4$ cores. Eles mostraram que existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, o valor extremal $c_{4, K_3^M}(n)$ é alcançado unicamente com o

grafo de Turán $T_4(n)$. Também mostraram que existe n_1 tal que para todo $n \geq n_1$, alcançamos $c_{4,K_4^M}(n)$ unicamente com $T_9(n)$. Note que ambos são grafos multipartidos completos balanceados, mas não evitam a formação de K_3 e K_4 , respectivamente, explicitando assim a dificuldade do problema de maximização de colorações de arestas, uma vez que grafos que contêm a estrutura proibida podem admitir mais colorações do que grafos que maximizam o número de arestas sem conter essa estrutura proibida.

Em 2019, outro grupo de pesquisadores obtiveram avanços na questão de considerar o parâmetro r de cores para problemas desse tipo. Botler, Corsten, Dankovics, Frankl, Hàn, Jiménez e Skokan [11] provaram, para $r \in \{5, 6\}$, resultados para grafos (r, K_k^M) -extremais. Para $r = 6$, eles mostraram que $T_8(n)$ é o único grafo $(6, K_3^M)$ -extremal para $n \geq n_0$ e, para $r = 5$, provaram um resultado aproximado mostrando uma cota superior para $c_{5,K_3^M}(n) \leq 6^{n^2/4+o(n^2)}$. Vale observar que, para $r = 5$, este problema admite várias configurações não isomorfas que atingem o valor extremal em sentido assintótico e, os grafos extremais exatos, não são conhecidos. Para $r = 7$, Pikhurko e Staden [38] conseguiram avançar provando que o grafo de Turán $T_8(n)$ é o único grafo $(7, K_3^M)$ -extremal.

Um resultado geral sobre grafos (r, K_k^M) -extremais é devido a Pikhurko, Staden e Yilma [39], os quais provaram que sempre existe um grafo multipartido completo que é K_k^M -extremal. O enunciado original deste resultado [39, Teorema 2], é para uma outra generalização do Problema de Erdős-Rothschild, mas que foi adaptado ao contexto desta tese, como segue.

Teorema 1.6. *Para quaisquer n, r e k inteiros positivos, existe pelo menos um grafo (r, K_k^M) -extremal de ordem n que é multipartido completo.*

Note que nesse resultado, os autores não conseguiram identificar quem é esse grafo extremal, no sentido de determinar quantas classes ele possui, e se essas classes são balanceadas. Além disso, não se sabe se ele é único.

O padrão monocromático também foi estudado para grafos que não são completos. Em Alon et al [1], os autores observaram que era possível modificar o argumento para aplicar a situação geral de encontrar o número de colorações H -livres, onde H é qualquer grafo aresta-crítico. Um grafo H , com número cromático $\chi(H) = k + 1$, é dito aresta-crítico se houver alguma aresta e de H para a qual $\chi(H - e) = k$. Um exemplo de grafo desse tipo, também encontrado em [1], é o de ciclos ímpares C_{2n-1} , para $n \in \mathbb{N}$, que tem como número cromático $\chi(C_{2n-1}) = 3$. Se retirarmos uma aresta $e \in E(C_{2n-1})$, passa a ser um caminho, que tem como número cromático $\chi(C_{2n-1} - e) = 2$.

Os primeiros a estudar esse problema na versão monocromática para grafos bipartidos foram Hoppen, Kohayakawa e Lefmann [29]. Os autores trataram de colorações que proibiam um emparelhamento de s arestas. Além disso, esses autores trataram de algumas famílias de árvores, tais como caminhos e estrelas [30]. Estes são grafos que tem o número de Turán linear, ou seja, satisfazem $\text{ex}(n, F) = O(n)$, o que faz com que a solução do problema utilize outro tipo de estratégia. Em um trabalho de 2020, Colucci, Gyóri e Methuku [12] melhoraram os resultados de Hoppen, Kohayakawa e Lefmann para estrelas monocromáticas.

Em 2006, Balogh [3] foi o primeiro a tratar de padrões não-monocromáticos. Um de seus resultados implica que, para $r = 2$ cores e qualquer padrão P de K_k , denotado por K_k^P , que usa essas as duas cores, o grafo $(2, K_k^P)$ -extremal é o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$, para $n \geq n_0$. No entanto, ele também observou que para $r = 3$

cores, e colorindo o grafo completo K_n com duas cores, o número de colorações é pelo menos $3(2^{\binom{n}{2}} - 1)$, que é mais do que o número de colorações K_k^R -livres do grafo de Turán $T_2(n)$. Isso mostra que o comportamento da solução é diferente para padrões distintos de um mesmo grafo.

Lefmann, Hoppen e Odermann, veja [27], contribuíram com um resultado geral para o padrão arco-íris K_k^R e caracterizaram grafos (r, K_k^R) -extremais. Mais especificamente,

Teorema 1.7 (Hoppen, Lefmann e Odermann). *Sejam inteiros $k \geq 2$ e $r \geq \binom{k}{2}^{8k+4}$. Existe n_0 tal que o número de colorações K_k^R -livres em todo grafo de ordem $n \geq n_0$ é no máximo $r^{\text{ex}(n, K_k)}$. O grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ é o único grafo com esse número de colorações, a menos de isomorfismo.*

Observe que o Teorema 1.7 exige uma grande quantidade r de cores disponíveis para garantir a extremalidade de $T_{k-1}(n)$.

Ainda, os mesmo autores provaram, agora em [28], resultados específicos para $k = 3$, melhorando a dependência nos parâmetros r e n_0 . Para r -colorações K_3^R -livres, mostraram que, para todo $r \geq 5$, existe n_0 tal que, se $n \geq n_0$, o grafo $T_2(n)$ é o (r, K_3^R) -extremal. Já se tivermos $r \geq 10$, todo $n \geq 5$ é suficiente para provar que $T_2(n)$ é o grafo extremal. Hoppen, Lefmann e Nolibos [31] abordaram uma generalização desse problema, que no caso específico de r -colorações K_k -livres, melhora significativamente a cota inferior do parâmetro r para grafos K_k^R -extremais do Teorema 1.7.

Balogh e Li [4] mostraram um resultado assintótico para o número de colorações do grafo completo K_n , evitando o padrão K_3^R . Colorações de arestas de

grafos completos K_n , onde procura-se evitar triângulos arco-íris, são chamadas de colorações de Gallai, o leitor pode encontrar mais informações em [6, 17, 18, 20, 21]. Isso foi utilizado para identificar os grafos (r, K_3^R) -extremais, provando que, o grafo completo K_n é o grafo $(3, K_3^R)$ -livres, enquanto para $r \geq 4$, o grafo bipartido completo balanceado $T_2(n)$ é o grafo (r, K_3^R) -extremal. Para mais resultados relacionados, veja [9, 10, 27]. Assim, dada a liberdade na escolha de padrões, alguns trabalhos consideraram, por exemplo, a estrela arco-íris [26].

Outro trabalho que seguiu nessa linha, isto é, estudando padrões não monocromáticos de forma explícita, foi apresentado por Hoppen e Lefmann em [24], considerando o padrão $K_3^{(2)}$, isto é, o padrão de coloração do triângulo com duas arestas de uma mesma cor, e a outra aresta com cor diferente.

Teorema 1.8 (Hoppen e Lefmann). *Se $2 \leq r \leq 12$, então existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ e todo grafo G com n vértices, temos*

$$|C_{r, K_3^{(2)}}(G)| \leq r^{\text{ex}(n, K_3)}. \quad (1.1)$$

Além disso, a igualdade vale em (1.1) para $n \geq n_0$ se e somente se G é isomorfo ao grafo de Turán $T_2(n)$.

Os mesmos autores conjecturaram que o resultado é mantido para $r \leq 26$ cores. Na próxima seção entraremos em mais detalhes dessa conjectura.

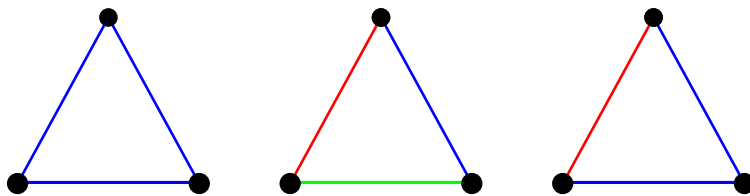


Figura 1.3 Padrões K_3^M , K_3^R e $K_3^{(2)}$, respectivamente.

Ainda pensando em padrões de forma geral, Benevides, Hoppen e Sampaio [10] provaram um resultado mais estrutural, no sentido do Teorema 1.6.

Teorema 1.9 (Benevides, Hoppen e Sampaio). *Seja P_k um padrão qualquer de K_k . Para cada número natural n , existe um grafo multipartido completo de ordem n que é (r, P_k) -extremal.*

Recentemente, Nolibos [35] mostrou uma versão ainda mais geral do Teorema 1.9, agora para o caso de famílias de padrões de K_k . O autor mostrou uma propriedade estrutural para famílias \mathcal{P}_k de padrões, como mostra o teorema abaixo.

Teorema 1.10 (Nolibos). *Sejam $r \geq 2$ e $k \geq 3$ inteiros, e seja \mathcal{P} uma família de padrões cujos elementos são padrões do grafo completo K_k . Para qualquer número inteiro positivo n , existe um grafo multipartido completo com n vértices que é (r, \mathcal{P}) -extremal. Além disso, se existe um grafo G com n vértices que é (r, \mathcal{P}) -extremal e G não é o grafo multipartido completo, então existem pelo menos dois grafos multipartidos completos com n vértices, não isomorfos, que são (r, \mathcal{P}) -extremais.*

Assim, o Teorema 1.10 nos fornece candidatos a serem grafos extremais não mais apenas para padrões de grafos completos, mas agora para famílias.

Uma característica do problema de Erdős-Rothschild é que a natureza da solução para famílias \mathcal{P}_k de padrões de um grafo completo pode mudar dependendo se K_k^R pertence a família ou não. De fato, basta compararmos o Teorema 1.7, em que K_k^R pertence a família ou não, com os Teoremas 1.4 e 1.8, para os quais K_k^R não pertence a família. No Teorema 1.7 o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ é quem maximiza o número de colorações a partir de um r suficientemente grande, e nos Teoremas 1.4 e 1.8, o grafo

de Turán $T_{k-1}(n)$ é quem maximiza o número de colorações para r até um certo valor.

Vamos denotar por \mathcal{P}_k uma família de padrões de K_k que contém K_k^R e por $\overline{\mathcal{P}_k}$ uma família que contém padrões de K_k , que não contém o padrão K_k^R , isto é, a família $\overline{\mathcal{P}_k}$ corresponde a colorir o grafo de modo que, se o grafo contém uma cópia de K_k , esta cópia só pode ser colorida de forma que K_k seja arco-íris. Vamos também definir o conjunto $B(\mathcal{P})$, associado a família \mathcal{P} de padrões do grafo completo K_k , como o conjunto de todos os valores de r tais que existe n_0 onde, para $n > n_0$, o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ é o único grafo (r, \mathcal{P}) -extremal.

Para a família \mathcal{P}_k , o conjunto $B(\mathcal{P}_k)$ dos valores de r em que o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ é o único grafo (r, \mathcal{P}_k) -extremal, é não vazio, pois é uma consequência do Teorema 1.7 (para mais detalhes, veja Nolibos [35]), que estabelece que para $r \geq \binom{k}{2}^{8k+4}$, que o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ é o único grafo (r, \mathcal{P}_k) -extremal, para n grande. Em geral, estamos interessados em determinar o parâmetro $r_1(\mathcal{P}_k) = \min\{B(\mathcal{P}_k)\}$, ou seja, o valor mínimo $r_1(\mathcal{P}_k)$ em que ocorre a transição entre $T_{k-1}(n)$ ser o único grafo (r_1, \mathcal{P}_k) -extremal, e $T_{k-1}(n)$ não ser mais o grafo (r, \mathcal{P}_k) -extremal, para $r < r_1(\mathcal{P}_k)$. Note que, exceto para algumas famílias \mathcal{P}_k , esse parâmetro $r_1(\mathcal{P}_k)$ não é conhecido explicitamente, então buscam-se cotas superiores para esse parâmetro. Para as famílias em que o resultados é conhecidos até o momento, o conjunto $B(\mathcal{P}_k)$ é um intervalo de números naturais, ou seja, o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ é extremal para todo $r \geq r_1$.

Já para a família $\overline{\mathcal{P}_k}$, isto é, para qualquer família que não contém o padrão K_k^R , o conjunto $B(\overline{\mathcal{P}_k})$ é limitado superiormente, como uma consequência do Teorema 1.11, que apresentaremos na próxima seção (para mais detalhes, veja

também Nolibos [35]). Assim, temos que, para a família $\overline{\mathcal{P}_k}$, valores grandes de r não pertencem a $B(\overline{\mathcal{P}_k})$.

Nesta tese, vamos considerar a família \mathcal{P}_k^* como sendo a família de todos os padrões de K_k , exceto o padrão K_k^R . Um dos principais objetivos do nosso estudo foi o de buscar determinar o parâmetro $r_0(\mathcal{P}_k^*) = \max\{B(\mathcal{P}_k^*)\}$, isto é, o maior valor $r_0(\mathcal{P}_k^*)$ tal que, para $r \leq r_0(\mathcal{P}_k^*)$, o grafo $T_{k-1}(n)$ é o único grafo (r, \mathcal{P}_k^*) -extremal. Da mesma forma que para o conjunto $B(\mathcal{P}_k)$, para as famílias em que os resultados são conhecidos até o momento, o conjunto $B(\mathcal{P}_k^*)$ é um intervalo de números naturais, ou seja, para $r > r_0(\mathcal{P}_k^*)$, o grafo $T_{k-1}(n)$ não é mais o grafo (r, \mathcal{P}_k^*) -extremal.

Veremos nos próximos capítulos que determinar o parâmetro $r_0(\mathcal{P}_k^*)$ explicitamente é um problema difícil, assim, muitas vezes buscamos encontrar cotas inferiores para o parâmetro $r_0(\mathcal{P}_k^*)$. Vale notar também que, podemos buscar por cotas superiores para o parâmetro $r_0(\mathcal{P}_k^*)$, onde, para todo $r \geq \omega(r_0)$, o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ não seja o grafo (r, \mathcal{P}_k^*) -extremal.

Uma implicação do resultado obtido em [24] é que, para o padrão $K_3^{(2)}$, que pertence a família \mathcal{P}_3^* , os autores conjecturaram o valor do parâmetro $r_0(K_3^{(2)}) = 26$, e provaram uma cota inferior $\mu(K_3^{(2)}) = 12$. Veja a figura abaixo, que mostra as cotas obtidas, conforme a terminologia definida acima.

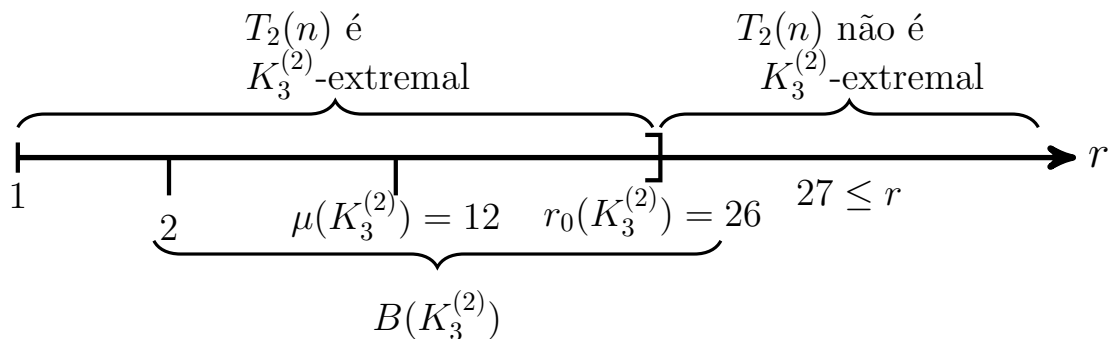


Figura 1.4 Cota inferior $\mu(K_3^{(2)})$ do parâmetro $r_0(K_3^{(2)})$.

1.4 Nossos Resultados

Assim como nos últimos resultados apresentados na Seção 1.3, vamos considerar aqui essencialmente a família de padrões \mathcal{P}_k^* que *não* contêm o padrão arco-íris K_k^R . Para todo $k \geq 3$, vamos apresentar resultados em direção a obtenção de cotas inferiores para o parâmetro $r_0(\mathcal{P}_k^*)$, e cotas superiores, também referentes ao parâmetro $r_0(\mathcal{P}_k^*)$. Já para o caso específico $k = 3$, e considerando o padrão $K_3^{(2)}$, conseguimos apresentar um valor exato do parâmetro $r_0 = 26$.

Observemos agora que, uma cota inferior trivial é $\mu_1(k) = \binom{k}{2} - 1$, isto é, se dispormos de no máximo $\binom{k}{2} - 1$ cores, o grafo completo terá $\binom{k}{2}$ arestas, fazendo assim com que, para colorir todas as arestas desse grafo, duas arestas teriam a mesma cor, ou seja, nunca formando uma cópia arco-íris. Já o Teorema 1.11 garante uma cota inferior $\mu_2(k)$ não trivial com relação ao parâmetro $r_0(\mathcal{P}_k^*)$. Uma observação que é interessante de ser feita, mas que será melhor compreendida no Capítulo 4, é que a demonstração do Teorema 1.11 define implicitamente uma cota inferior $\mu_3(k)$

melhor que $\mu_2(k)$, para o qual o resultado segue válido, mas esse limitante $\mu_3(k)$ é mais difícil de definir explicitamente.

Ainda em relação a família \mathcal{P}_k^* , apresentamos uma construção para uma cota superior $\omega(k)$ em relação ao parâmetro $r_0(\mathcal{P}_k^*)$, onde, para todo $r \geq \omega(k)$, o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ não é mais o grafo (r, \mathcal{P}_k^*) -extremal. Para um melhor entendimento das cotas do parâmetro $r_0(\mathcal{P}_k^*)$, veja a figura abaixo.

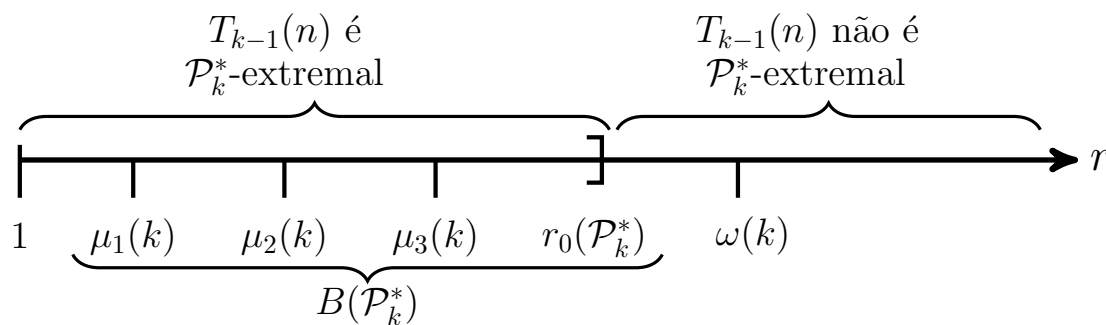


Figura 1.5 Cotas inferiores e superiores referentes ao parâmetro $r_0(\mathcal{P}_k^*)$.

Vale ainda destacar, antes de fazermos o enunciado formal do próximo resultado que, de uma forma geral, os resultados obtidos nos Capítulos 3 e 4 são frutos de um trabalho em conjunto, no período em que estive no doutorado sanduíche na Alemanha, com os professores Josefran Bastos, Hanno Lefmann e do então aluno de mestrado Andy Oertel. Parte dos resultados fazem parte de sua dissertação de mestrado [36]. Vamos agora ao enunciado formal do Teorema 1.11.

Teorema 1.11. *Para qualquer inteiro fixo $k \geq 3$ e seja a família \mathcal{P}_k^* de todos os padrões de K_k exceto K_k^R , a função $\mu_2(k)$, definida abaixo, é uma cota inferior para*

o parâmetro $r_0(\mathcal{P}_k^*)$.

$$\mu_2(k) \geq \begin{cases} \left(\frac{k^2}{2(k-1)}\right)^{\frac{k-1}{2}} & \text{se } k \text{ é ímpar} \\ \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}} & \text{se } k \text{ é par.} \end{cases} \quad (1.2)$$

A prova do Teorema 1.11 consiste em uma abordagem de estabilidade, na qual primeiro mostramos que todos os grafos que admitem um grande número de colorações viáveis devem ser estruturalmente semelhantes ao grafo de Turán $T_{k-1}(n)$, ou seja, mostramos a propriedade de estabilidade de cores para a família \mathcal{P}_k^* .

Para provar o Teorema 1.11, também chamado de resultado exato, vamos utilizar um resultado que irá auxiliar na prova, o Teorema 1.12. Para inteiros positivos r e k , dizemos que uma família de padrões \mathcal{P}_k^S de K_k é r -saturada se, para qualquer padrão P' da estrela $K_{1,k-1}$, com $(k-1)$ arestas, existe um padrão $P \in \mathcal{P}_k^S$ e um vértice $v \in V(K_k)$ tal que o padrão induzido por P nas arestas incidentes com v é isomorfo a P' . Em outras palavras, qualquer padrão da estrela $K_{1,k-1}$ deve aparecer como um subgrafo de um padrão de \mathcal{P}_k^S .

A Figura 1.6 mostra que as arestas dentre v e os $k-1$ vértices são coloridas arbitrariamente, as arestas dentro da classe de $k-1$ vértices podem ser coloridas de tal forma que o K_k resultante seja K_k^P -livre.

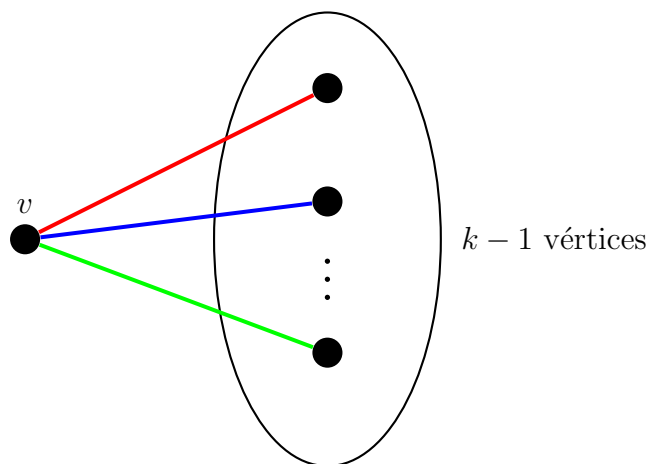


Figura 1.6 Família de padrões r -saturada.

Agora, podemos enunciar o próximo resultado.

Teorema 1.12. *Para inteiros fixos $k \geq 3$ e $r \geq 2$, seja \mathcal{P}_k^S uma família de padrões de K_k que é r -saturada. Se \mathcal{P}_k^S satisfaz a propriedade de estabilidade de cores para r , então existe um inteiro $n_0 > 0$ tal que o seguinte acontece para cada $n > n_0$. Se G é um grafo com n vértices, então $c_{r, \mathcal{P}_k^S}(G) \leq r^{\text{ex}(n, K_k)}$. Além disso, o único grafo com n vértices para o qual o número de r -colorações (r, \mathcal{P}_k^S) -livres é igual a $r^{\text{ex}(n, K_k)}$ é o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$.*

A prova desse resultado será discutida no Capítulo 3. Combinado com a propriedade de estabilidade de cores e o Teorema 1.10, o Teorema 1.12 implica o Teorema 1.11. De uma perspectiva mais geral, podemos dizer que a estrutura de prova por trás do Teorema 1.11, que é um importante resultado desse trabalho, combina a estratégia geral de [1] e [27] com programação linear.

Seguindo, a principal contribuição desse trabalho é para $k = 3$, e considerando o padrão $K_3^{(2)}$ da família \mathcal{P}_3^* , determinamos que o parâmetro $r_0(K_3^{(2)})$ vale

26. Mais especificamente, provamos a conjectura proposta no trabalho de Hoppen e Lefmann [24], o Teorema 1.8, isto é, que o grafo de Turán $T_2(n)$ é o único grafo extremal, para o padrão $K_3^{(2)}$, para $2 \leq r \leq 26$. Vale aqui destacar que, provando o valor exato do parâmetro r_0 para o padrão $K_3^{(2)}$, e notando que a família $\mathcal{P}_3^* = \{K_3^{(2)}, K_3^M\}$, isso implica que $T_2(n)$ será o único grafo extremal também para a família \mathcal{P}_3^* . Por outro lado, para $r = 27$, já se sabe que $T_2(n)$ não é um grafo $(27, K_3^{(2)})$ -extremal, para n arbitrariamente grande, como veremos a seguir.

Considere as seguintes colorações de $T_4(n)$ com conjunto de vértices particionado $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ com partição balanceada. Seja $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ uma partição do conjunto de cores tal que arestas entre V_1 e V_2 , e entre V_3 e V_4 são coloridas com cores de C_1 ; arestas entre V_1 e V_3 , e entre V_2 e V_4 coloridas com cores de C_2 ; arestas entre V_1 e V_4 , e entre V_2 e V_3 coloridas com cores de C_3 . Os conjuntos C_1, C_2 e C_3 representam uma partição disjunta do conjunto de cores tais que $|C_1| = |C_2| = |C_3| = 9$. Por construção, todos os triângulos em $T_4(n)$ têm padrão arco íris e isso produz colorações em $C_{27, K_3^{(2)}}(T_4(n))$. Supondo, por simplicidade, que n é divisível por 4, o número de colorações produzidas por essa forma de colorir $T_4(n)$ é, pelo menos

$$9^{6 \cdot \frac{n^2}{16}} = 27^{\frac{n^2}{4}} = 27^{\text{ex}(n, K_3)}.$$

Como ainda é possível colorir $T_4(n)$ de outras formas, evitando $K_3^{(2)}$, podemos concluir que

$$c_{27, K_3^{(2)}}(n) > 27^{\text{ex}(n, K_3)},$$

fazendo com que, para $r = 27$, o grafo de Turán $T_2(n)$ não seja mais $K_3^{(2)}$ -extremal.

A Figura 1.7 abaixo, ilustra uma coloração de um grafo 4-partido, utilizando 6 cores, que é \mathcal{P}_3^* -livre. Note que nessa figura, existe a formação de K_3 , mas na coloração apresentada na figura, ela não contém o padrão proibido.

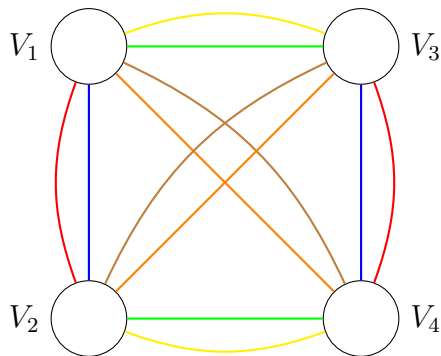


Figura 1.7 Grafo 4-partido $(6, \mathcal{P}_3^*)$ -livre.

Passamos agora ao enunciado formal de nosso resultado.

Teorema 1.13. *Se $2 \leq r \leq 26$, então existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ e todo grafo G com n vértices, temos*

$$|C_{r, K_3^{(2)}}(G)| \leq r^{\text{ex}(n, K_3)}. \quad (1.3)$$

Além disso, a igualdade vale em (1.3) para $n \geq n_0$ se e somente se G é isomorfo ao grafo de Turán $T_2(n)$.

Antes de falarmos sobre a prova do Teorema 1.13, vamos enunciar um corolário que deixa claro a validade do resultado também para a família \mathcal{P}_3^* , como discutido anteriormente.

Corolário 1.14. *Se $2 \leq r \leq 26$, então existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ e todo grafo G com n vértices, temos*

$$|C_{r, \mathcal{P}_3^*}(G)| \leq r^{\text{ex}(n, K_3)}. \quad (1.4)$$

Além disso, a igualdade vale em (1.4) para $n \geq n_0$ se e somente se G é isomorfo ao grafo de Turán $T_2(n)$.

Vejamos mais claramente, na Figura 1.8, as cotas para o parâmetro $r_0(\mathcal{P}_3^*)$ que ilustram o Corolário 1.14.

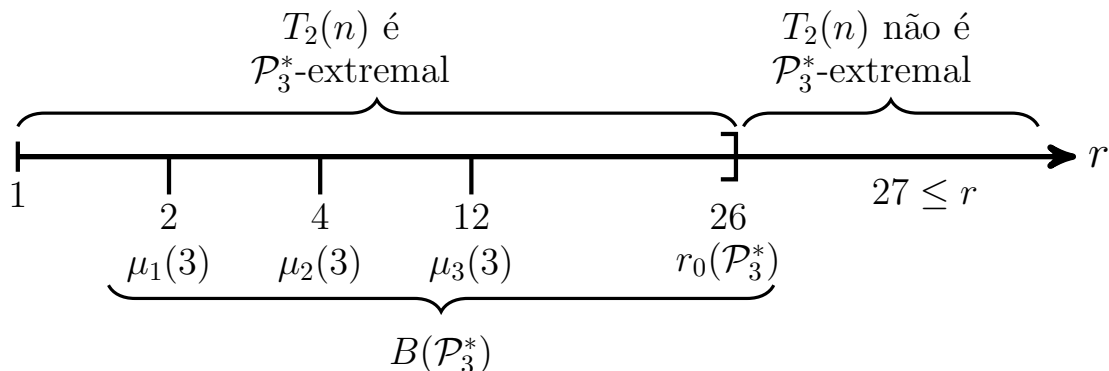


Figura 1.8 Cotas referentes ao parâmetro r_0 .

Note que $\mu_1(3) = 2$ é o limitante trivial, $\mu_2(3) = 4$ é o limitante fornecido pelo Teorema 1.11, $\mu_3(3) = 12$ é o limitante fornecido pela demonstração do Teorema 1.11, como veremos melhor no Capítulo 4, e $r_0 = 26$ é o valor do parâmetro fornecido pelo Teorema 1.13, que também será discutido no Capítulo 5.

A prova do Teorema 1.13 é estruturalmente similar à prova do Teorema 1.11, ou seja, é suficiente provar o seguinte resultado de estabilidade.

Teorema 1.15. *Seja $2 \leq r \leq 26$. Para qualquer $\delta > 0$, existe n_0 tal que o seguinte acontece para todo $n \geq n_0$. Se o grafo $G = (V, E)$, com n vértices, é tal que*

$$|C_{r, K_3^{(2)}}(G)| \geq r^{\text{ex}(n, K_3)}, \quad (1.5)$$

então existe uma partição $V = W_1 \cup W_2$ de seu conjunto de vértices tal que $e_G(W_1) + e_G(W_2) \leq \delta n^2$.

A ideia da prova do Teorema 1.15 é, após a aplicação do Lema de Regularidade de Szemerédi, mostrar que existe um grafo reduzido multicolorido \mathcal{H} que maximiza o número de r -colorações $K_3^{(2)}$ -livres de G , onde este grafo \mathcal{H} é bem determinado. Em algumas aplicações anteriores deste método, como no caso do Teorema 1.11, os limites gerais fornecidos pela programação linear não eram fortes o suficiente para estender a conclusão do Teorema 1.15 para determinar o valor do parâmetro r_0 . Neste trabalho incorporamos um componente indutivo na prova, o que nos permite explorar melhor as restrições locais e estender o resultado de [24] para todos os valores de r para os quais foi conjecturado, o qual é a principal contribuição dessa tese.

Por último, e de modo similar ao resultado anterior, tivemos progresso no melhoramento da cota inferior de $r_0(\mathcal{P}_4^*)$. Conseguimos encontrar uma cota inferior $\mu_4(k)$ que melhora a cota inferior $\mu_3(k)$ fornecida pela demonstração do Teorema 1.11. Mais especificamente estendemos a validade de $\mu_3(k) = 91$ para $\mu_4(k) = 135$. Vale aqui ressaltar, que diferentemente do Teorema 1.13, não conseguimos determinar o valor do parâmetro $r_0(\mathcal{P}_4^*)$. Assim, nosso resultado é enunciado abaixo.

Teorema 1.16. *Se $2 \leq r \leq 135$, então existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ e cada grafo G de n -vértices, temos que*

$$|\mathcal{C}_{r,(K_4,\mathcal{P}_4^*)}(G)| \leq r^{\text{ex}(n,K_4)}.$$

A prova desse resultado, apresentada no Capítulo 6, segue, com as devidas adaptações, a estrutura e a técnica utilizada na prova do Teorema 1.13, mostrando assim que nossa contribuição, acrescentando o argumento indutivo na prova, pode ser adaptada a mais contextos que no caso específico de padrões de triângulos.

Assim como nas provas dos Teoremas 1.13 e 1.11, é suficiente provar o seguinte resultado de estabilidade para provar o Teorema 1.17.

Teorema 1.17. *Seja $2 \leq r \leq 135$. Para qualquer $\delta > 0$, existe n_0 tal que o seguinte acontece para todo $n \geq n_0$. Se $G = (V, E)$ é um grafo de n vértices tal que*

$$|\mathcal{C}_{r,(K_4,\mathcal{P})}(G)| \geq r^{\text{ex}(n,K_4)},$$

então existe uma partição $V = W_1 \cup W_2 \cup W_3$ do seu conjunto de vértices tal que $e_G(W_1) + e_G(W_2) + e_G(W_3) \leq \delta n^2$.

2 NOTAÇÃO E DEFINIÇÕES BÁSICAS

Vamos aqui trazer algumas definições e resultados básicos da Teoria de Grafos, como forma de unificar a notação e não causar confusão ao longo do texto.

Seja $G = (V, E)$ um grafo. O número de vértices $|V(G)|$ é a *ordem* de G , e escrevemos $e(G) = |E(G)|$ para o número de arestas de G . Para subconjuntos de vértices $A, B \subseteq V$ escrevemos

$$e(A, B) = |\{(a, b) : a \in A, b \in B, \{a, b\} \in E(G)\}|$$

para o número de arestas onde uma extremidade está em A e a outra extremidade está em B , note que quando A e B são disjuntos, $e(A, B)$ é o número de arestas com uma extremidade em A e a outra em B , e $e(A) = e(A, A)/2$ para o número de arestas com ambas extremidades em A . Para A e B não-vazios, seja

$$d(A, B) = \frac{e(A, B)}{|A||B|},$$

a densidade de arestas de entre A e B .

Uma importante ferramenta que usamos é o Lema da Regularidade de Szemerédi [42]. Para $\varepsilon > 0$, um par $\{A, B\}$, onde $A, B \subset V$, é chamado ε -regular se, para cada $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$ satisfazendo $|X| > \varepsilon|A|$ e $|Y| > \varepsilon|B|$, temos que

$$|d(X, Y) - d(A, B)| < \varepsilon$$

Uma *partição balanceada* do conjunto V é uma partição dos elementos de V em classes mutuamente disjuntas V_1, \dots, V_m tais que $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ para todo $i, j \in [m]$. Uma partição balanceada $V_1 \cup \dots \cup V_m$ do conjunto de vértices V de G é chamada

ε -regular se no máximo $\varepsilon \binom{m}{2}$ desses pares $\{V_i, V_j\}$ não são ε -regulares. Nós usaremos a seguinte versão do Lema da Regularidade para grafos com arestas coloridas, que pode ser encontrada em [32, Teorema 1.18].

Lema 2.1. *Para todo $\varepsilon > 0$ e todo inteiro positivo r , existe $M = M(\varepsilon, r)$ tal que o seguinte acontece. Se as arestas de um grafo G , de ordem $n > M$ são r -coloridas, então há uma partição do conjunto de vértice $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_m$, com $1/\varepsilon \leq m \leq M$, a qual é ε -regular simultaneamente com respeito aos grafos $G_i = (V, E_i)$ para todo $i \in [r]$, onde E_i é o conjunto de arestas de cor i .*

Uma partição $V_1 \cup \dots \cup V_m$ de $V(G)$ como a do Lema 2.1 é chamada de uma *partição multicolorida ε -regular*.

Para $\eta > 0$, definimos um *grafo multicolorido reduzido* $\mathcal{H}(\eta)$ associado a esta partição, onde o conjunto de vértices é $[m]$ e $e = ij$ é uma aresta de $\mathcal{H}(\eta)$ se $\{V_i, V_j\}$ é um par regular em G para toda cor $c \in [r]$ e a densidade de arestas do par $\{V_i, V_j\}$ é pelo menos η para alguma cor $c \in [r]$. Para cada aresta $e \in E(\mathcal{H}(\eta))$, é atribuída a lista L_e contendo todas as cores para as quais a densidade de arestas é pelo menos η , de modo que $|L_e| \geq 1$ para toda $e \in E(\mathcal{H}(\eta))$. Dizemos que um grafo reduzido multicolorido \mathcal{H} contém um grafo colorido \widehat{F} se \mathcal{H} contém uma cópia do grafo subjacente (não colorido) de \widehat{F} para a qual a cor de cada aresta de \widehat{F} está contida na lista da aresta correspondente em \mathcal{H} . Com relação a essa definição, podemos obter o seguinte resultado de imersão, cuja prova segue de argumentos como na prova de [32, Teorema 2.1].

Lema 2.2. *Para cada $\eta > 0$ e quaisquer inteiros positivos k e r , existem $\varepsilon = \varepsilon(r, \eta, k) > 0$ e um inteiro positivo $n_0(r, \eta, k)$ com a seguinte propriedade. Suponha que \widehat{G} é um grafo r -colorido de ordem $n > n_0$ com uma partição multicolorida*

ε -regular $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$ que define um grafo reduzido multicolorido $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\eta)$. Seja F um grafo fixo de ordem k com padrão de cores P . Se \mathcal{H} contém (F, P) , então o grafo \widehat{G} contém (F, P) . \square

Para a prova do Teorema 1.12, vamos usar um resultado de imersão que não necessita da regularidade.

Proposição 2.3. *Sejam $r > 0$ e $k \geq 2$ inteiros positivos e seja \widehat{K}_k uma cópia r -colorida do grafo completo K_k com conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_k\}$ tal que cada aresta $v_i v_j$ têm cor $\alpha_{i,j} \in [r]$. Seja $\omega: [k] \rightarrow (0, 1]$, com $\omega(i) \leq 1/(i-1)$ para todo $1 < i \leq k$, uma função não-crescente e fixe $\beta \geq \omega(i)/\omega(i-1)$ para todo $1 < i \leq k$. Seja \widehat{G} um grafo colorido cujo conjunto de vértices contém conjuntos mutuamente disjuntos W_1, \dots, W_k com a seguinte propriedade. Se para cada par $\{i, j\} \subseteq [k]$ e todos os subconjuntos $X_i \subseteq W_i$, onde $|X_i| \geq \omega(k)|W_i|$, e $X_j \subseteq W_j$, onde $|X_j| \geq \omega(k)|W_j|$, há pelo menos $\beta|X_i||X_j|$ arestas de cor $\alpha_{i,j}$ entre X_i e X_j em \widehat{G} , então \widehat{G} contém uma cópia de \widehat{K}_k com um vértice em cada conjunto W_i .*

Para ilustrarmos as ferramentas utilizadas em nosso trabalho, e considerando que a adaptação desse resultado é um pouco mais técnica para nosso contexto, optamos por trazer a sua demonstração.

Prova. Fixe um inteiro $r > 0$. A prova é por indução em k . Para $k = 2$ o resultado é trivial. Fixe $k \geq 3$ e sejam $\widehat{K}_k, \widehat{G}, \omega$ e β como no enunciado da proposição. Lembre-se que \widehat{K}_k têm conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_k\}$ e cada aresta $v_i v_j$ tem cores $\alpha_{i,j} \in [r]$. Por indução, suponha que o resultado é válido para $k-1$.

Para cada $i \in [k-1]$, seja $W_k^{\alpha_{i,k}} \subseteq W_k$ o conjunto maximal de vértices de W_k tal que cada vértice de $W_k^{\alpha_{i,k}}$ tem menos que $\beta|W_i|$ vizinhos de cor $\alpha_{i,k}$ em

$|W_i|$. Temos menos que $\beta|W_i||W_k^{\alpha_{i,k}}|$ arestas de cores $\alpha_{i,k}$ entre W_i e $W_k^{\alpha_{i,k}}$. Assim, a definição de \widehat{G} implica que $|W_k^{\alpha_{i,k}}| < \omega(k)|W_k|$. Como $\omega(k) \leq 1/(k-1)$, temos que

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k-1} W_k^{\alpha_{i,k}} \right| \leq \sum_{i=1}^{k-1} |W_k^{\alpha_{i,k}}| < |W_k|.$$

Portanto, existe um vértice $x_k \in W_k$ que tem pelo menos $\beta|W_i|$ vizinhos de cor $\alpha_{i,k}$ em W_i para cada $i \in [k-1]$.

Seja o conjunto $W'_i = N(x_k) \cap W_i$. Queremos mostrar que podemos aplicar indução em $\widehat{G}' = \widehat{G}[\bigcup_{i=1}^{k-1} W'_i]$ e o grafo r -colorido $\widehat{K}_{k-1} = \widehat{K}_k[\{v_1, \dots, v_{k-1}\}]$ para obter vértices x_1, \dots, x_{k-1} , com $x_i \in W_i$, tais que $\widehat{G}[x_1, \dots, x_k]$ é uma cópia r -colorida de \widehat{K}_k . Primeiro, pela definição, ω e β satisfazem as condições da proposição para $k-1$. Por outro lado, para qualquer $X_i \subseteq W'_i$ fixo, com $|X_i| \geq \omega(k-1)|W'_i|$, temos que

$$|X_i| \geq \omega(k-1)|W'_i| \geq \omega(k-1)\beta|W_i| \geq \omega(k)|W_i|.$$

Assim, pela nossa escolha de \widehat{G}' , todos os pares de conjuntos $X_i \subseteq W'_i$, com $|X_i| \geq \omega(k-1)|W'_i|$, e $X_j \subseteq W'_j$, com $|X_j| \geq \omega(k-1)|W'_j|$ têm pelo menos $\beta|X_i||X_j|$ arestas de cor $\alpha_{i,j}$ entre eles. Assim, o resultado é válido para $k-1$, portanto, por indução, o resultado segue para k , isto é, \widehat{G} contém uma cópia de \widehat{K}_k com um vértice em cada conjunto W_i . \square

Outra ferramenta básica em nosso trabalho é um resultado de estabilidade para grafos devido a Füredi [15, Theorem 2].

Teorema 2.4. *Seja $G = (V, E)$ um grafo K_k -livre com m vértices. Se $|E| = \text{ex}(m, K_k) - t$, então existe uma partição $V = V_1 \cup \dots \cup V_{k-1}$ com $\sum_{i=1}^{k-1} e(V_i) \leq t$.*

Também usamos o seguinte lema de Alon e Yuster [2, Lema 2.3] (veja também [27, Lema 4.7]).

Lema 2.5. *Sejam $k, m \geq 3$ inteiros e fixe um inteiro $0 < t \leq \left(\binom{m}{2} - \text{ex}(m, K_k)\right) / (2k - 2)$. Seja G um grafo $(k - 1)$ -partido com m vértices, partição $V(G) = U_1 \cup \dots \cup U_{k-1}$ e com pelo menos $\text{ex}(m, K_k) - t$ arestas. Se adicionarmos pelo menos $(2k - 1)t$ novas arestas em G , então o grafo resultante terá uma cópia de K_k com exatamente uma nova aresta. Além disso, essa aresta tem ambas as suas extremidades em U_i , para algum $i \in [k - 1]$.*

Também usaremos o seguinte fato sobre os tamanhos das classes em um grafo $(k - 1)$ -partido com muitas arestas.

Proposição 2.6. *[27, Proposição 2.7] Seja $G = (V, E)$ um grafo $(k - 1)$ -partido com m vértices e com partição $V = V_1 \cup \dots \cup V_{k-1}$. Se, para algum $t \geq (k - 1)^2$, o grafo G contém pelo menos $\text{ex}(m, K_k) - t$ arestas, então para cada $i \in [k - 1]$ temos que $||V_i| - m/(k - 1)| < \sqrt{2t}$.*

Vamos apresentar agora a função entropia, que tem um papel importante em diversas demonstrações, para mais detalhes, veja [33]. Essa função é definida como $H: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, onde

$$H(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2(1 - x)$$

com $H(0) = H(1) = 0$. Será conveniente usar as seguintes desigualdade, que são válidas para todo $0 \leq \alpha \leq 1$ e todo $0 \leq x \leq 1/8$:

$$\binom{n}{\alpha n} \leq 2^{H(\alpha)n}, \quad (2.1)$$

e será utilizado em estimativas para o número de colorações. A seguinte cota superior para $H(x)$ com $x \leq \frac{1}{2}$ também é bem conhecida:

$$H(x) \leq -2x \log_2 x. \quad (2.2)$$

Para concluir o capítulo, enunciamos um resultado de Teoria de Grafos que será utilizado em alguns momentos do texto.

Teorema 2.7. *Todo grafo G contém um subgrafo s -partido com mais de $\frac{(s-1)|E(G)|}{s}$ arestas de G .*

3 RESULTADO EXATO A PARTIR DA ESTABILIDADE

Vamos, nesse capítulo, demonstrar o Teorema 1.12, cuja prova combina a estratégia geral de [1] e [27]. Para isso, recordamos o seu enunciado.

Teorema 1.12. *Para inteiros fixos $k \geq 3$ e $r \geq 2$, seja \mathcal{P}_k^S uma família de padrões de K_k que é r -saturada. Se \mathcal{P}_k^S satisfaz a propriedade de estabilidade de cores para r (veja Definição 1.3), então existe um inteiro $n_0 > 0$ tal que o seguinte acontece para cada $n > n_0$. Se G é um grafo com n vértices, então $c_{r, \mathcal{P}_k^S}(G) \leq r^{\text{ex}(n, K_k)}$. Além disso, o único grafo com n vértices para o qual o número de r -colorações (r, \mathcal{P}_k^S) -livres é igual a $r^{\text{ex}(n, K_k)}$ é o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$.*

O Teorema 1.12 contribuirá para a prova do resultado exato, o Teorema 1.11. A prova do Teorema 1.11 é feita em duas partes. A primeira é a prova da estabilidade de cores, que será vista no Capítulo 4, e que de fato é a parte mais trabalhosa, garantindo que um grafo que tem pelo menos $|\mathcal{C}_{r, \mathcal{P}_k^*}(n)| \geq r^{\text{ex}(n, K_k)}$ é estruturalmente próximo do grafo de Turán $T_{k-1}(n)$. A segunda parte da prova do Teorema 1.11 consiste em, supondo a validade da estabilidade de cores, garantir que o número total de colorações do nosso grafo extremal é maximizado pelo grafo de Turán $T_{k-1}(n)$. Isso é precisamente o enunciado do Teorema 1.12.

Para aplicarmos o Teorema 1.12 na demonstração do Teorema 1.11, precisamos verificar que a família \mathcal{P}_k^* é r -saturada. Considere então a família de padrões \mathcal{P}_k^* , é bastante simples mostrar que essa família de padrões é r -saturada, para cada $k \geq 3$ e $r \geq 2$. Para qualquer r coloração da estrela $K_{1, k-1}$, com $(k-1)$ arestas, é possível construir uma r coloração de K_k , que não tenha o padrão arco

íris, adicionando as arestas ausentes a estrela $K_{1,k-1}$ e, colorindo essas arestas com a cor de uma aresta $e \in E(K_{1,k-1})$.

3.1 Prova do Teorema 1.12

Prova. Para $k \geq 3$ e $r \geq 2$, seja \mathcal{P}_k^S uma família de padrões de K_k que é $(r, k-1)$ -vértice-saturada que satisfaz a propriedade de estabilidade de cores para r . Seja n_0 dado pela propriedade de estabilidade de cores para $\delta = 1/(5^{2k+1}r^{4k}k^2)$. Caso necessário, redefiniremos n_0 tal que $n_0 \geq \max\{(k-1)^2/\sqrt{\delta}, 3/\delta\}$.

Pelo Teorema 1.10, existe um grafo completo G de ordem n que é s -partido, com $n > n_0$, tal que $c_{r,\mathcal{P}_k^S}(G) = c_{r,\mathcal{P}_k^S}(n) \geq r^{\text{ex}(n,K_k)}$. Pelo Teorema de Turán (Teorema 1.1), G é isomorfo a $T_{k-1}(n)$ ou $s \geq k$. Por contradição, suponha que $s \geq k$ e denote por $V(G) = V_1' \cup \dots \cup V_s'$ a s -partição do conjunto de vértices de G . Seja $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_{k-1}$ uma partição do conjunto de vértices de G tal que $\sum_{i=1}^{k-1} e(V_i)$ é mínimo. Isso implica que, se $v \in V_i$ e $j \in [k-1]$, temos que $|N(v) \cap V_j| \geq |N(v) \cap V_i|$, caso contrário poderíamos redefinir a partição transferindo v para V_j reduzindo o número de arestas internas. Além disso, pela propriedade de estabilidade de cores, temos $\sum_{i=1}^{k-1} e(V_i) \leq \delta n^2$. Em outras palavras, o subgrafo G' de G obtido deletando as arestas internas é $(k-1)$ -partido com partição $V_1 \cup \dots \cup V_{k-1}$, e contém pelo menos $|E(G) - \delta n^2| \geq |\text{ex}(n, K_k)| - \delta n^2$ arestas. Assim, pela Proposição 2.6, para todo $i \in [k-1]$ temos que

$$|V_i| \geq n/(k-1) - \sqrt{2\delta}n.$$

Afirmção 3.1. *Existe um vértice v , que assumimos estar em V_1 , reordenando as classes se necessário, tal que $|N(v) \cap V_i| \geq n/(2k)$ para todo $i \in [k-1]$.*

Demonstração. Como G não é $(k - 1)$ -partido, existe uma aresta uv com ambas as extremidades em uma das classes da partição, digamos que a classe seja V_1 . Isso significa que u e v estão em classes diferentes com respeito à partição $V'_1 \cup \dots \cup V'_s$. Como G é multipartido completo, para cada vértice $x \in V(G) \setminus \{u, v\}$, x deve ser adjacente a u ou v . Em particular, assumindo, sem perda de generalidade, que $|N(v) \cap V_1| \geq |N(u) \cap V_1|$, temos

$$|N(v) \cap V_1| \geq \frac{|V_1|}{2} \geq \frac{n}{2(k-1)} - \sqrt{\delta}n \geq \frac{n}{2k},$$

dado que $\delta < \frac{1}{5^{2k+1}r^{4k}k^2} \leq \frac{1}{4k^2(k-1)^2}$. A afirmação segue porque $|N(v) \cap V_i| \geq |N(v) \cap V_1|$ para todo $i \geq 1$. \square

Usando a Afirmação 3.1, podemos fixar um vértice v , digamos $v \in V_1$, que é adjacente a pelo menos $n/(2k)$ vértices em cada V_i , com $i \in [k - 1]$.

Vamos analisar a estrutura de uma r -coloração fixa \widehat{G} de G que seja \mathcal{P}_k^S -livre. Para $i \in [k - 1]$, defina $W_i = N(v) \cap V_i$ e note que $|W_i| \geq n/(2rk)$.

Pelo Princípio da Casa dos Pombos, existem cores $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \in [r]$, não necessariamente distintas, e subconjuntos $W_1^{\alpha_1}, \dots, W_{k-1}^{\alpha_{k-1}}$, com $W_i^{\alpha_i} \subseteq W_i$, tais que todas as arestas entre v e $W_i^{\alpha_i}$ têm cor α_i e $|W_i^{\alpha_i}| \geq n/(2rk)$.

Pela definição de \mathcal{P}_k^S , existe um padrão P tal que $(K_k, P) \in \mathcal{P}_k^S$ e um vértice $x \in V(K_k)$ tal que o padrão das arestas incidentes em x é isomorfo ao padrão induzido pelas cores $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$. Como \widehat{G} é (K_k, P) -livre, vamos aplicar a Proposição 2.3 com $\beta = 1/5r^2$ e $\omega(i) = 1/(5r^2)^i$ para cada $i \in [k]$ para fixar uma cor $h \in [r]$ e um par (X_i, X_j) que satisfaz $X_i \subseteq W_i^{\alpha_i}$, onde $|X_i| \geq \omega(k - 1)|W_i^{\alpha_i}|$

e $X_j \subseteq W_j^{\alpha_j}$, onde $|X_j| \geq \omega(k-1)|W_j^{\alpha_j}|$ e há menos de $\beta|X_i||X_j|$ arestas de cor h entre $|X_i|$ e $|X_j|$.

Usaremos isso para limitar o tamanho de $\mathcal{C}_{r, \mathcal{P}_k^S}(G)$. Note que existem r escolhas para a cor h e no máximo 2^{2n} escolhas para os conjuntos X_i e X_j . Uma vez que fixamos a cor h e os conjuntos X_i e X_j temos no máximo

$$\begin{aligned} \binom{|X_i||X_j|}{\beta|X_i||X_j|} \cdot (r-1)^{|X_i||X_j|} &\stackrel{(2.1)}{\leq} 2^{H(\beta)|X_i||X_j|} \cdot (r-1)^{|X_i||X_j|} \\ &\leq \left((5r^2)^{2/(5r^2)} \cdot (r-1) \right)^{|X_i||X_j|} \end{aligned}$$

maneiras de colorir as arestas entre X_i e X_j . Pela escolha da partição, temos no máximo $\text{ex}(n, K_k) + \delta n^2 - |X_i||X_j|$ outras arestas em G , que podem ser coloridas em no máximo $r^{\text{ex}(n, K_k) + \delta n^2 - |X_i||X_j|}$ maneiras diferentes, ou seja,

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_{r, \mathcal{P}_k^S}(G)| &\leq r^{2n} \cdot (5r^2)^{2|X_i||X_j|/(5r^2)} \cdot (r-1)^{|X_i||X_j|} \cdot r^{\text{ex}(n, K_k) + \delta n^2 - |X_i||X_j|} \\ &\leq \left(25r^4 \left(\frac{r-1}{r} \right)^{5r^2} \right)^{|X_i||X_j|/(5r^2)} \cdot r^{\text{ex}(n, K_k) + 2\delta n^2}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$25r^4 \cdot \left(\frac{r-1}{r} \right)^{5r^2} \leq 25r^4 \cdot e^{-5r} < \frac{(2re^{-r})^5}{r} < \frac{1}{r}.$$

Finalmente, lembrando que $\delta = \frac{1}{5^{2k+1}r^{4k}k^2}$ e usando o limite inferior em $|W_i^{\alpha_i}|$ e $|X_i|$,

$$|X_i||X_j| \geq \omega(k-1)^2 |W_i^{\alpha_i}| |W_j^{\alpha_j}| \geq \frac{n^2}{4r^2 k^2 (5r^2)^{2k-2}} > \frac{n^2}{5^{2k-1} r^{2(2k-1)} k^2},$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_{r, \mathcal{P}_k^S}(G)| &< r^{\text{ex}(n, K_k) + 2\delta n^2 - |X_i||X_j|/(5r^2)} \\ &< r^{\text{ex}(n, K_k) + 2\delta n^2 - n^2/(5^{2k} r^{4k} k^2)} \end{aligned}$$

$$< r^{\text{ex}(n, K_k)},$$

o que contradiz a maximalidade de G . Isso mostra que todo grafo s -partido que é (r, \mathcal{P}_k^S) -extremal é isomorfo a $T_{k-1}(n)$. Pelo Teorema 1.10, todo grafo (r, \mathcal{P}_k^S) -extremal de ordem n é isomorfo a $T_{k-1}(n)$.

4 ESTABILIDADE DE CORES PARA GRAFOS \mathcal{P}_K^* -EXTREMAIS

Neste capítulo, vamos mostrar a estabilidade de cores para grafos \mathcal{P}_k^* -livres, ou seja, vamos mostrar que se um grafo G de ordem n satisfaz $c_{r, \mathcal{P}_k^*}(G) \geq r^{\text{ex}(n, K_k)}$, então esse grafo deve ter uma estrutura muito próxima à do grafo de Turán $T_{k-1}(n)$. Também apresentaremos uma construção para uma cota superior $\omega(k)$ referente ao parâmetro $r_0(\mathcal{P}_k^*)$, onde, para $r \geq \omega(k)$, o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ não é o grafo (r, \mathcal{P}_k^*) -extremal. Ao longo do capítulo vamos nos referir a $r_0 = r_0(\mathcal{P}_k^*)$, sempre que for explícito a dependência do parâmetro com a família.

A principal contribuição desse capítulo, no emprego dessas técnicas para provar a estabilidade de cores para grafos \mathcal{P}_k^* -livres, está em encontrar uma cota inferior $\mu_2(k)$, em relação ao parâmetro $r_0(\mathcal{P}_k^*)$. A Propriedade de Estabilidade de Cores será demonstrada na próxima seção e, juntamente com o Teorema 1.12, provado no capítulo anterior, isso implicará na prova do Teorema 1.11, o qual enunciaremos novamente aqui.

Teorema 1.11. *Para qualquer inteiro fixo $k \geq 3$ e seja a família \mathcal{P}_k^* de todos os padrões de K_k exceto K_k^R , a função $\mu_2(k)$, definida abaixo, é uma cota inferior para o parâmetro $r_0(\mathcal{P}_k^*)$.*

$$\mu_2(k) \geq \begin{cases} \left(\frac{k^2}{2(k-1)} \right)^{\frac{k-1}{2}} & \text{se } k \text{ é ímpar} \\ \left(\frac{k}{2} \right)^{\frac{k}{2}} & \text{se } k \text{ é par.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Nossa abordagem consiste em empregar a estratégia geral de [1] e [27] que combinam o Lema da Regularidade de Szemerédi com programação linear. Essa

estratégia nos fornece um intervalo para o número de cores r para o qual vale a propriedade de estabilidade de cores para a família de padrões \mathcal{P}_k^* . Lembrando que faremos a prova considerando uma cota inferior $\mu_3(k)$ maior que $\mu_2(k)$, que sua forma explícita é difícil de ser escrita para o caso geral, uma vez que sua obtenção depende da solução de um problema de programação linear.

Vamos agora enunciar a estabilidade de cores que será provada na próxima seção.

Lema 4.1. *O seguinte acontece para todos os inteiros $2 \leq r \leq \mu_3(k)$. Para cada $\delta > 0$ existe n_0 tal que se $G = (V, E)$ é um grafo de ordem $n \geq n_0$ com $c_{r, \mathcal{P}_k^*}(G) \geq r^{\text{ex}(n, K_k)}$, então existe uma partição $V = V_1 \cup \dots \cup V_{k-1}$ do conjunto de vértices tal que $\sum_{i=1}^{k-1} e(V_i) \leq \delta n^2$.*

Antes de seguirmos para a prova desse lema, que será feita na Seção 4.1, vamos dar uma ideia geral de como ela será feita. Inicialmente, para a prova do Lema 4.1, fixamos uma coloração do grafo G e então aplicamos o Lema da Regularidade de Szemerédi, na sua versão multicolorida (Lema 2.1), para obtermos um grafo reduzido multicolorido. Em um segundo momento, fazemos uma contagem do número de colorações do grafo G que estão associadas a cada partições multicolorida dada pelo Lema 2.1. Em seguida consideramos um programa linear cujas variáveis estão associadas às listas de cores das arestas do grafo reduzido multicolorido onde essas restrições façam com que a solução do programa linear forneça uma cota útil.

4.1 Prova do Lema 4.1

Sejam $k \geq 3$ e $\delta > 0$. Vamos definir

$$\ell = \ell(k) = \binom{k}{2} - 1.$$

Considere $\mu_3(k) \geq 2\ell + 1$, com $\mu_3(k)$ sendo a cota inferior do parâmetro r_0 . O parâmetro $\mu_3(k)$ será definido explicitamente quando tratarmos da solução do problema de programação linear, mais adiante. Fixe um inteiro r tal que $2 \leq r \leq \mu_3(k)$.

Consideremos constantes auxiliares $\xi > 0$ e $\eta = \eta(\xi) > 0$ suficientemente pequenas, tais que:

$$\xi < \frac{1}{2(2k-1)^2}, \quad \xi < \frac{\delta}{8k} \quad \text{e} \quad \eta < \frac{\delta}{2r},$$

E escolhendo $\eta(\xi)$ tal que

$$r^{r\eta + H(r\eta)} < \min \left\{ \left(\frac{r}{Y_{r,k}^*} \right)^\xi, \left(\frac{r}{2} \right)^\xi \right\}.$$

Sejam $\varepsilon_0 = \varepsilon(r, \eta, k) > 0$ e $n_0 = n_0(r, \eta, k)$ satisfazendo o enunciado do Lema 2.2, e fixe $0 < \varepsilon < \min\{\eta/2, \varepsilon_0, 1/n_0\}$. Fixe $M = M(r, \varepsilon)$ dado pelo Lema 2.1. Para $n > M$ suficientemente grande, seja G um grafo com n vértices tal que $c_{r, \mathcal{P}_k^*}(G) \geq r^{\text{ex}(n, K_k)}$.

Pelo Lema 2.1, fixe uma partição ε -regular multicolorida $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$, onde $1/\varepsilon \leq m \leq M$. Para $\eta > 0$, definimos o grafo reduzido multicolorido

$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\eta)$ associado a essa partição, isto é, o grafo cujo conjunto de vértices é $[m]$ tal que $e = ij$ é uma aresta de $\mathcal{H}(\eta)$ se $\{V_i, V_j\}$ é um par regular em G para qualquer cor $c \in [r]$ e com densidade de arestas, para pelo menos uma das cores $c \in [r]$ pelo menos η . A cada aresta e , é atribuída a lista L_e contendo todas as cores para as quais sua densidade de aresta é pelo menos η , de modo que $|L_e| \geq 1$, para todo $e \in E(\mathcal{H}(\eta))$. Sejam $E_j(\mathcal{H}) = \{e \in E(\mathcal{H}) : |L_e| = j\}$ e $e_j(\mathcal{H}) = |E_j(\mathcal{H})|$ para todo $j \in [r]$.

Vamos agora limitar superiormente o número de r -colorações de G que têm origem na partição $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_m$ e no grafo reduzido multicolorido H . Dada uma cor $c \in [r]$, o número de pares ε -irregulares (V_i, V_j) com relação ao subgrafo G_c de G com conjunto de arestas dado por todas as arestas de cor c é no máximo $\varepsilon \binom{m}{2}$. Isto nos dá no máximo

$$r \cdot \varepsilon \cdot \binom{m}{2} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2 \leq \frac{r\varepsilon}{2} \cdot n^2 \leq \frac{r\eta}{4} \cdot n^2 \quad (4.2)$$

arestas entre pares ε -irregulares com relação a alguma das r cores. Pela definição de uma partição ε -regular e pelo fato de que $m \geq 1/\varepsilon$, existem no máximo

$$m \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2 = \frac{n^2}{m} \leq \varepsilon n^2 \leq \frac{\eta}{2} \cdot n^2 \quad (4.3)$$

arestas de G cujas extremidades estão em uma mesma classe V_i da partição para algum $i \in [m]$. Finalmente, o número de arestas com alguma cor c conectando um par (V_i, V_j) tal que a densidade do par em G_c é menor que η é limitado superiormente por

$$r \cdot \eta \cdot \binom{m}{2} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2 < \frac{r\eta}{2} \cdot n^2. \quad (4.4)$$

Combinando as desigualdades (4.2) - (4.4) e utilizando que $\varepsilon < \eta/2$, concluímos que existem no máximo $r\eta n^2$ arestas destes três tipos em G .

Assim, essas arestas podem ser escolhidas no grafo G de no máximo $\binom{n^2}{r\eta n^2}$ modos e podem ser coloridas de no máximo $r^{r\eta n^2}$ formas.

$$\binom{n^2}{r\eta n^2} \cdot r^{r\eta n^2} \leq r^{r\eta n^2} \cdot 2^{H(r\eta)n^2}. \quad (4.5)$$

A desigualdade acima é devida às propriedades da função de entropia, isto é, a equação (2.1) do Capítulo 2.

As arestas restantes de G são aquelas que ligam vértices dos pares (V_i, V_j) que são ε -regulares em relação a todas as cores. Além disso, a cor atribuída a elas tem densidade pelo menos η com respeito a esse par. Portanto, o número de r -colorações de G que têm origem na partição $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_m$ e no grafo reduzido multicolorido $\mathcal{H}(\eta)$ é limitado superiormente por

$$r^{r\eta n^2} \cdot 2^{H(r\eta)n^2} \cdot \left(\prod_{j=1}^r j^{e_j(\mathcal{H})} \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^2}. \quad (4.6)$$

Existem no máximo M^n partições com $m \leq M$ classes e, para cada uma dessas partições, existem no máximo $2^{rM^2/2}$ escolhas para o grafo reduzido multicolorido com conjunto de vértices $[m]$.

Assim, usando (4.6), e somando-o para todas as partições e todos os grafos reduzidos multicoloridos correspondentes \mathcal{H} , o número de r colorações \mathcal{P}_k^* -livres de G é limitado superiormente por

$$M^n \cdot 2^{H(r\eta)n^2} \cdot 2^{\frac{rM^2}{2}} \cdot r^{r\eta n^2} \cdot \max_{\mathcal{H}} \left(\prod_{j=1}^r j^{e_j(\mathcal{H})} \right)^{|V(\mathcal{H})|} \quad (4.7)$$

$$\stackrel{n \gg 1}{\leq} 2^{\frac{3}{2}H(r\eta)n^2} \cdot r^{r\eta n^2} \cdot \max_{\mathcal{H}} \left(\prod_{j=1}^r j^{e_j(\mathcal{H})} \right)^{|V(\mathcal{H})|} \quad (4.8)$$

$$\stackrel{r \geq 2}{\leq} r^{(r\eta + H(r\eta))n^2} \cdot \max_{\mathcal{H}} \left(\prod_{j=1}^r j^{e_j(\mathcal{H})} \right)^{|V(\mathcal{H})|}. \quad (4.9)$$

Note que, na segunda desigualdade, supusemos que n é suficientemente grande e que o termo $j = 1$ não afeta o produto em (4.9).

Para continuar a prova, vamos definir como $\mathcal{S} = \mathcal{S}(G)$ o conjunto de todos os subgrafos dos grafos reduzidos multicoloridos \mathcal{P}_k^* -livres de G tais que todas as arestas estejam associadas a listas de tamanho pelo menos dois.

Dado $\mathcal{H} \in \mathcal{S}$, vamos definir

$$c(\mathcal{H}) = \prod_{e \in E(\mathcal{H})} |L_e|^{\frac{1}{|V(\mathcal{H})|^2}}. \quad (4.10)$$

Desejamos encontrar $\max_{\mathcal{H} \in \mathcal{S}} c(\mathcal{H})$ para limitar (4.9).

O passo principal em nossa prova é a próxima afirmação, que basicamente diz que existe um grafo reduzido multicolorido \mathcal{H} que tem uma quantidade de arestas muito próxima do grafo de Turán $T_{k-1}(n)$, e que essas arestas têm listas de cores “grandes”.

Afirmação 4.2. *Existe um grafo reduzido multicolorido \mathcal{H} tal que*

$$e_{\lceil r/\ell \rceil}(\mathcal{H}) + \dots + e_r(\mathcal{H}) \geq \text{ex}(m, K_k) - \xi m^2. \quad (4.11)$$

Antes de abordar a prova desta afirmação, que será feita na Seção 4.1.1, vamos provar que, se a Afirmação 4.2 valer, a propriedade de estabilidade de cores será válida para a família \mathcal{P}_k^* , isto é, existirá uma partição do conjunto de vértices $V = V_1 \cup \dots \cup V_{k-1}$ tal que poucas arestas estarão contidas inteiramente dentro de alguma dessas classes, ou seja, $\sum_{i=1}^{k-1} e(V_i) \leq \delta n^2$.

Seja \mathcal{H} um grafo reduzido multicolorido com m vértices que satisfaz (4.11). Aplicando o Teorema 2.4 ao grafo reduzido multicolorido \mathcal{H} , obtemos uma partição

$V(\mathcal{H}')$ de \mathcal{H} com conjunto de vértices $V(\mathcal{H}') = U_1 \cup \dots \cup U_{k-1}$ e $\sum_{i=1}^{k-1} e(U_i) \leq \xi m^2$. O subgrafo $(k-1)$ -partido $\widehat{\mathcal{H}}$ obtido da partição $V(\mathcal{H}')$ removendo todas as arestas com ambas as extremidades na mesma classe satisfaz

$$e(\widehat{\mathcal{H}}) \geq (\text{ex}(m, K_k) - \xi m^2) - \xi m^2 = \text{ex}(m, K_k) - 2\xi m^2.$$

Aqui vamos fazer uma primeira exigência para ξ . Assim, escolhendo ξ de forma que

$$\xi < \frac{1}{2(2k-1)^2}$$

garantimos que

$$e_1(\mathcal{H}) + \dots + e_{\lceil r/\ell \rceil - 1}(\mathcal{H}) \leq (4k-2)\xi m^2,$$

pois, caso contrário, o Lema 2.5 pode ser aplicado, e o grafo obtido pela adição das arestas $E_1(\mathcal{H}) \cup \dots \cup E_{\lceil r/\ell \rceil - 1}(\mathcal{H})$ em $\widehat{\mathcal{H}}$ conteria uma cópia de K_k tal que no máximo uma dessas arestas estaria em $E_1(\mathcal{H}) \cup \dots \cup E_{\lceil r/\ell \rceil - 1}(\mathcal{H})$. Sejam $f_2, \dots, f_{\ell+1}$ todas as outras arestas que estariam em $E_{\lceil r/\ell \rceil}(\mathcal{H}) \cup \dots \cup E_r(\mathcal{H})$. Vamos denotar por $f_1, \dots, f_{\ell+1}$ as arestas dessa cópia e assumir que $|L_{f_1}|, \dots, |L_{f_\ell}| \geq \lceil r/\ell \rceil$. Temos então

$$|L_{f_1}| + \dots + |L_{f_{\ell+1}}| \geq 1 + \left\lceil \frac{r}{\ell} \right\rceil \cdot \ell \geq r + 1 > r.$$

Portanto, alguma cor apareceria em listas distintas. Assim, $\widehat{\mathcal{H}}$ conteria (K_k, P) para algum $P \in \mathcal{P}_k^*$. Pelo Lema 2.2, o mesmo acontece para qualquer coloração \widehat{G} que gera o grafo reduzido multipartido \mathcal{H} , uma contradição.

Concluimos que o número de arestas de \mathcal{H} com ambas as extremidades na mesma classe U_i é no máximo $4k\xi m^2$. Seja $W_i = \cup_{j \in U_i} V_j$ para $i \in [k-1]$. Então, impomos mais uma exigência para ξ , que também satisfaz a anterior, e requeremos

a primeira condição para η . Escolhendo η e ξ tais que

$$\eta < \frac{\delta}{2r} \quad \text{e} \quad \xi < \frac{\delta}{8k},$$

isso implica que

$$\begin{aligned} e_G(W_1) + \cdots + e_G(W_{k-1}) &\leq r\eta n^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 \cdot (e_{\mathcal{H}}(U_1) + \cdots + e_{\mathcal{H}}(U_{k-1})) \\ &\leq r\eta n^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 \cdot 4k\xi m^2 \\ &< \frac{r\delta n^2}{2r} + \frac{4k\delta n^2 m^2}{8km^2} \\ &= \frac{\delta n^2}{2} + \frac{\delta n^2}{2} = \delta n^2, \end{aligned}$$

como requerido, o que prova o Lema 4.1 assumindo a validade da Afirmação 4.2.

4.1.1 Prova da Afirmação 4.2

No restante dessa seção, vamos provar a Afirmação 4.2 por contradição. Para isso consideramos um programa linear cujas variáveis estão associadas aos valores $e_i(\mathcal{H})$.

Suponha por contradição que qualquer coloração (r, \mathcal{P}_k^*) -livre de G e qualquer partição regular multicolorida associada a esta coloração induz um grafo reduzido multicolorido \mathcal{H} tal que

$$e_{\lceil r/\ell \rceil}(\mathcal{H}) + \cdots + e_r(\mathcal{H}) < \text{ex}(m, K_k) - \xi m^2. \quad (4.12)$$

Primeiramente, suponha que $2 \leq r \leq 2\ell$, e seja \mathcal{H} um grafo reduzido multicolorido (r, \mathcal{P}_k^*) -livre. Lembre-se de que estamos assumindo que nenhuma aresta de \mathcal{H} tem lista de tamanho menor que dois. Como $\lceil r/\ell \rceil \leq 2$ e $c(\mathcal{H})^{(n/m)^2}$ pode ser

estimado usando apenas a desigualdade (4.12), então por (4.9), (4.12) e, para n grande, que

$$r^{(r\eta+H(r\eta))n^2} \cdot r^{\text{ex}(n,K_k)-\xi n^2} \ll r^{\text{ex}(n,K_k)}, \quad (4.13)$$

o que é uma contradição com a hipótese do Teorema 1.15, pela qual G tem pelo menos $r^{\text{ex}(n,K_k)}$ colorações (r, \mathcal{P}_k^*) -livres. Isso significa que a Afirmação 4.2 é válida para todo $r \leq 2\ell$.

Suponha agora que $r = 2\ell + 1$. Para este valor de r , nossa suposição em (4.12) nos diz que

$$e_3(\mathcal{H}) + \cdots + e_r(\mathcal{H}) < \text{ex}(m, K_k) - \xi m^2. \quad (4.14)$$

O fato de $r < 2\binom{k}{2} = 2\ell + 2$ também implica que

$$e_2(\mathcal{H}) + \cdots + e_r(\mathcal{H}) \leq \text{ex}(m, K_k),$$

como \mathcal{H} não contém uma cópia de K_k . De fato, se houvesse tal cópia com arestas $e_1, \dots, e_{\ell+1}$, teríamos que

$$|L_{e_1}| + \cdots + |L_{e_{\ell+1}}| \geq 2(\ell + 1) > r,$$

o que nos daria novamente duas listas com interseção não vazia, uma contradição. Assim, temos

$$\begin{aligned} c(\mathcal{H}) &\leq 2^{\text{ex}(m,K_k)-(e_3(\mathcal{H})+\cdots+e_r(\mathcal{H}))} \cdot r^{e_3(\mathcal{H})+\cdots+e_r(\mathcal{H})} \\ &\leq 2^{\text{ex}(m,K_k)} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^{e_3(\mathcal{H})+\cdots+e_r(\mathcal{H})} \stackrel{(4.14)}{\leq} 2^{\xi m^2} \cdot r^{\text{ex}(m,K_k)-\xi m^2}. \end{aligned}$$

Por isso, (4.9) é limitado superiormente por

$$(2\ell + 1)^{((2\ell+1)\eta+H((2\ell+1)\eta))n^2} \cdot 2^{\xi n^2} \cdot (2\ell + 1)^{\text{ex}(n,K_k)-\xi n^2} \ll (2\ell + 1)^{\text{ex}(n,K_k)}, \quad (4.15)$$

o que é novamente uma contradição.

Agora, vamos provar o caso mais complexo. Suponha que $r > 2\ell + 1$. Em vez de diretamente considerar (4.12), obteremos uma contradição de

$$e_{r-2\ell+1}(\mathcal{H}) + \cdots + e_r(\mathcal{H}) \leq e_{\lceil r/\ell \rceil}(\mathcal{H}) + \cdots + e_r(\mathcal{H}) < \text{ex}(m, K_k) - \xi m^2, \quad (4.16)$$

que vale porque $r - 2\ell + 1 \geq \lceil r/\ell \rceil$.

Dado um conjunto $S \subset [r]$ de ℓ elementos e um inteiro $j \in [r - 2\ell]$, seja $E_j(S, \text{int}_{\geq 1}; \mathcal{H})$ o conjunto de todas as arestas $e' \in E_j(\mathcal{H})$ que satisfazem $|L_{e'} \cap S| \geq 1$, e seja $e_j(S, \text{int}_{\geq 1}; \mathcal{H}) = |E_j(S, \text{int}_{\geq 1}; \mathcal{H})|$. A próxima proposição vai nos auxiliar na prova.

Proposição 4.3. *Dado um grafo reduzido multicolorido \mathcal{H} que é \mathcal{P}_k^* -livre, o seguinte é válido.*

(a) *Para cada conjunto $S \subset [r]$ de ℓ elementos, o subgrafo \mathcal{H}' do grafo reduzido multicolorido \mathcal{H} com conjunto de arestas*

$$\bigcup_{j=2}^{r-2\ell} E_j(S, \text{int}_{\geq 1}; \mathcal{H}) \cup \bigcup_{p=r-2\ell+1}^r E_p(\mathcal{H}),$$

é K_k -livre.

(b) *Existe um conjunto $S \subset [r]$ de ℓ elementos tal que*

$$\left| \bigcup_{j=2}^{r-2\ell} E_j(S, \text{int}_{\geq 1}; \mathcal{H}) \right| \geq \sum_{j=2}^{r-2\ell} \frac{\binom{r}{\ell} - \binom{r-j}{\ell}}{\binom{r}{\ell}} \cdot |E_j(\mathcal{H})|.$$

Prova. Fixe um conjunto $S \subset [r]$ de ℓ elementos. Primeiramente, a parte (a) será provada. Afirmamos que o conjunto de arestas $E' = \bigcup_{j=2}^{r-2\ell} E_j(S, \text{int}_{\geq 1}; \mathcal{H}) \cup$

$\bigcup_{p=r-2\ell+1}^r E_p(\mathcal{H})$ é K_k -livre. Por contradição, suponha que existe uma cópia de K_k com arestas $f_1, \dots, f_{\binom{k}{2}}$ em E' . No máximo ℓ dessas arestas estão contidas em $\bigcup_{j=2}^{r-2\ell} E_j(S, \text{int}_{\geq 1}; \mathcal{H})$, caso contrário, adicionando os tamanhos de $L_{f_1} \cap S, \dots, L_{f_{\ell+1}} \cap S$, obtemos pelo menos $\ell + 1$, de modo que pelo menos duas das listas devem conter a mesma cor, o que produz um K_k sem a coloração arco-íris, uma contradição. Portanto, pelo menos uma das arestas está contida em $\bigcup_{p=r-2\ell+1}^r E_p(\mathcal{H})$. A soma dos tamanhos das listas das arestas $\binom{k}{2}$ nesta cópia é pelo menos

$$2\ell + (r - 2\ell + 1) = r + 1 > r.$$

Portanto, pelo menos uma cor aparece em pelo menos duas listas, o que produz um K_k sem a coloração arco-íris, uma contradição, provando a parte (a).

Para a parte (b), afirmamos que

$$\sum_{S \in \binom{[r]}{\ell}} \sum_{j=2}^{r-2\ell} |E_j(S, \text{int}_{\geq 1}; \mathcal{H})| = \sum_{j=2}^{r-2\ell} \left(\binom{r}{\ell} - \binom{r-j}{\ell} \right) \cdot e_j(\mathcal{H}).$$

Com efeito, para $j \in \{2, \dots, r - 2\ell\}$, cada aresta $e \in E_j(\mathcal{H})$ é contada no lado esquerdo para todos os conjuntos $S \in \binom{[r]}{\ell}$ tais que $|S \cap e| \geq 1$, o que equivale a $\binom{r}{\ell} - \binom{r-j}{\ell}$ vezes.

Fazendo a média, como existem $\binom{r}{\ell}$ subconjuntos distintos de ℓ elementos em $[r]$, existe um conjunto $S \subset [r]$ de ℓ elementos tal que

$$\left| \bigcup_{j=2}^{r-2\ell} E_j(S, \text{int}_{\geq 1}; \mathcal{H}) \right| = \sum_{j=2}^{r-2\ell} |E_j(S, \text{int}_{\geq 1}; \mathcal{H})| \geq \sum_{j=2}^{r-2\ell} \frac{\binom{r}{\ell} - \binom{r-j}{\ell}}{\binom{r}{\ell}} \cdot e_j(\mathcal{H}).$$

□

Isso significa que a Proposição 4.3 leva à seguinte desigualdade:

$$\sum_{j=2}^{r-2\ell} \frac{\binom{r}{\ell} - \binom{r-j}{\ell}}{\binom{r}{\ell}} \cdot e_j(\mathcal{H}) + \sum_{p=r-2\ell+1}^r e_p(\mathcal{H}) \leq \text{ex}(m, K_k). \quad (4.17)$$

Em seguida, fixe $s \in \{1, \dots, k-1\}$. Para qualquer inteiro positivo q , definimos

$$t(k, s, q) = \left\lfloor \frac{r - \text{ex}(k, K_{s+1}) \cdot q}{\binom{k}{2} - \text{ex}(k, K_{s+1})} \right\rfloor.$$

Seja $q^*(r, k, s)$ o maior valor de q' tal que $t(k, s, q) + 1 \geq q$ para todo $2 \leq q \leq q'$.

Pela definição de $t(k, s, q)$, temos que $t(k, s, q) \leq \frac{r - \text{ex}(k, K_{s+1}) \cdot q}{\binom{k}{2} - \text{ex}(k, K_{s+1})}$, portanto

$$\begin{aligned} t(k, s, q) + 1 &\leq \frac{r - \text{ex}(k, K_{s+1}) \cdot q}{\binom{k}{2} - \text{ex}(k, K_{s+1})} + 1 = \frac{r + \binom{k}{2} - \text{ex}(k, K_{s+1}) \cdot (q + 1)}{\binom{k}{2} - \text{ex}(k, K_{s+1})} \leq \frac{r + \binom{k}{2} - \text{ex}(k, K_{s+1})}{\binom{k}{2} - \text{ex}(k, K_{s+1})} \\ &= \frac{r + \binom{k}{2} - \text{ex}(k, K_{s+1})}{\binom{k}{2}} \cdot \frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{2} - \text{ex}(k, K_{s+1})} \leq \left\lfloor \frac{r + \binom{k}{2} - \text{ex}(k, K_{s+1})}{\binom{k}{2}} \right\rfloor, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade decorre do fato de $\frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{2} - \text{ex}(k, K_{s+1})} \geq 1$ para todo $s < k-1$.

Assim, temos que

$$q^*(r, k, s) \geq \left\lfloor \frac{r + \binom{k}{2} - \text{ex}(k, K_{s+1})}{\binom{k}{2}} \right\rfloor.$$

Proposição 4.4. *Sejam $k, r \geq 3$ inteiros. Para $s \in \{1, \dots, k-1\}$ e $q \in \{2, \dots, q^*(r, k, s)\}$, considere um grafo reduzido multicolorido \mathcal{H} que é \mathcal{P}_k^* -livre. Seja $\mathcal{H}'_{s,q}$ o subgrafo de \mathcal{H} com conjunto de arestas $\bigcup_{j=q}^{t(k,s,q)} E_j(\mathcal{H})$ e fixe um subgrafo $B'_{s,q}$ s -partido de $\mathcal{H}'_{s,q}$.*

(a) *O subgrafo $\mathcal{H}''_{s,q}$ do grafo reduzido multicolorido \mathcal{H} com conjunto de arestas*

$$E(B'_{s,q}) \cup \bigcup_{p=t(k,s,q)+1}^r E_p(\mathcal{H})$$

é K_k -livre.

(b) *Além disso, existe um subgrafo s -partido $B'_{s,q}$ tal que*

$$|E(B'_{s,q})| \geq \frac{s-1}{s} \cdot |E(\mathcal{H}'_{s,q})|.$$

Prova. Primeiramente, a parte (a) será provada. Para uma contradição, suponha que existe uma cópia K_k em \mathcal{H} com arestas $f_1, \dots, f_{\ell+1} \in E(B'_{s,q}) \cup \bigcup_{p=t(k,s,q)+1}^r E_p(\mathcal{H})$. Dado que $B'_{s,q}$ é s -partido, pelo menos $\binom{k}{2} - \text{ex}(k, K_{s+1})$ dessas arestas estão em $\bigcup_{p=t(k,s,q)+1}^r E_p(\mathcal{H})$. Portanto, ao menos $\binom{k}{2} - \text{ex}(k, K_{s+1})$ dessas arestas têm lista de tamanho pelo menos $t(k, s, q) + 1$ e as outras $\text{ex}(k, K_{s+1})$ arestas têm lista de tamanho pelo menos q . Somando os tamanhos das listas $L_{f_1}, \dots, L_{f_{\ell+1}}$ e usando a condição $q \leq t(k, s, q) + 1$ temos pelo menos

$$\begin{aligned} & \text{ex}(k, K_{s+1}) \cdot q + \left(\binom{k}{2} - \text{ex}(k, K_{s+1}) \right) \cdot (t(k, s, q) + 1) \\ &= \text{ex}(k, K_{s+1}) \cdot q + \left(\binom{k}{2} - \text{ex}(k, K_{s+1}) \right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{r - \text{ex}(k, K_{s+1}) \cdot q}{\binom{k}{2} - \text{ex}(k, K_{s+1})} \right\rfloor + 1 \right) \\ &> \text{ex}(k, K_{s+1}) \cdot q + \left(\binom{k}{2} - \text{ex}(k, K_{s+1}) \right) \cdot \frac{r - \text{ex}(k, K_{s+1}) \cdot q}{\binom{k}{2} - \text{ex}(k, K_{s+1})} \\ &= r. \end{aligned}$$

Como existem apenas r cores e, a soma é maior que r , pelo menos uma cor aparece em pelo menos duas listas, o que produz um K_k sem coloração arco-íris, uma contradição. Isso prova a parte (a).

Parte (b) segue, utilizando o Teorema 2.7, que nos diz que qualquer grafo $G = (V, E)$ com pelo menos uma aresta contém um subgrafo s -partido com mais de $(s-1)|E(G)|/s$ arestas. \square

Para $r \geq 2\binom{k}{2}$, $s \in \{1, \dots, k-1\}$ e $q \in \{2, \dots, q^*(r, k, s)\}$, a Proposição 4.4 leva à desigualdade

$$\frac{s-1}{s} \cdot \sum_{j=q}^{t(k,s,q)} e_j(\mathcal{H}) + \sum_{p=t(k,s,q)+1}^r e_p(\mathcal{H}) \leq \text{ex}(m, K_k). \quad (4.18)$$

Encontrar o máximo de $c(\mathcal{H})$ em (4.9) é equivalente a maximizar

$$e_2 \ln 2 + e_3 \ln 3 + \cdots + e_r \ln r,$$

que é uma função objetivo em relação às variáveis $e_2, \dots, e_r \geq 0$. Juntamente com as restrições lineares de (4.17) e (4.18), obtemos um programa linear. Note que $t(k, k-1, 2) = r - 2\ell$. Dado \mathcal{H} , seja

$$\zeta(\mathcal{H}) = (\text{ex}(m, K_k) - e_{r-2\ell+1}(\mathcal{H}) - \cdots - e_r(\mathcal{H})) / m^2,$$

assim $\zeta(\mathcal{H}) > \xi$ por (4.16). Isso leva ao programa linear

$$\begin{aligned} \max \quad & x_2 \ln 2 + \cdots + x_{r-2\ell} \ln(r - 2\ell) & (4.19) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=2}^{r-2\ell} \frac{\binom{r}{\ell} - \binom{r-j}{\ell}}{\binom{r}{\ell}} \cdot x_j \leq 1 \\ & \frac{s-1}{s} \cdot \sum_{j=q}^{t(k,s,q)} x_j + \sum_{p=t(k,s,q)+1}^{r-2\ell} x_p \leq 1, \quad s = 1, \dots, k-1, q = 2, \dots, q^*(r, k, s) \text{ e} \\ & x_2, \dots, x_{r-2\ell} \geq 0, \end{aligned}$$

onde x_i desempenha o papel de $e_i(\mathcal{H}) / (\zeta(\mathcal{H})m^2)$.

Para a prova da próxima afirmação, será necessário o seguinte teorema, conhecido como Teorema Fundamental da Programação Linear, mais detalhes podem ser encontrados em [19].

Teorema 4.5. *Para um problema de programação linear (PL), apenas uma das seguintes afirmações é válida:*

1. (LP) é inviável, isto é, nenhum vetor $(x_2, \dots, x_{r-2\ell})$ satisfaz as restrições do problema.;

2. (LP) é ilimitado;
3. (LP) tem uma solução ótima.

Passamos agora a afirmação.

Afirmação 4.6. *O problema de programação linear (4.19) tem uma solução ótima $u(r, k)$.*

Para a prova dessa afirmação, podemos proceder mostrando que as duas primeiras afirmações do Teorema 4.5 não são satisfeitas, logo o (PL) (4.19) terá uma solução ótima $u(r, k)$.

Prova. Considere a solução nula $\bar{X} = (x_2, \dots, x_{r-2\ell})$, onde $x_i = 0$ para todo $i \in \{2, \dots, r - 2\ell\}$. A primeira condição diz que é inviável, assim, tomando a solução nula, temos que \bar{X} satisfaz todas as condições do programa linear e portanto não é inviável.

Agora note que, para cada $i \in \{2, \dots, r - 2\ell\}$, as constantes que multiplicam os x_i são limitadas por (1), logo podemos tomar seu máximo (ou mínimo, se menor que 1) como limitante para todas, e como temos no máximo $r - 2\ell$ elementos, vamos ter uma soma limitada de elementos limitados, que será algo limitado.

Portanto, aplicando o Teorema 4.5, temos que a única afirmação possível é que o (PL) (4.19) terá uma solução ótima $u(r, k)$. □

Seja $Y_{r,k}^* = e^{u(r,k)}$. Agora estamos prontos para definir a cota inferior

$$\mu_3(k) = \min\{r \in \mathbb{N}: r \geq 2\ell + 1 \text{ e } e^{u(r+1,k)} \geq r + 1\}. \quad (4.20)$$

Note que a segunda restrição, isto é, $e^{u(r+1,k)} \geq r+1$ é exatamente a solução do programa linear. A definição da cota inferior $\mu_3(k)$ requer que o conjunto $\{r \in \mathbb{N} : r \geq 2\ell + 1 \text{ e } e^{u(r+1,k)} \geq r+1\}$ seja não vazio para cada k . Isso pode ser provado diretamente, mostrando que, para r suficientemente grande, a solução tal que $x_{\lfloor r/(2\binom{k}{2}) \rfloor} = k/(k-1)$ e $x_i = 0$ para todos os outros valores de i é viável e tem valor objetivo maior que $\ln r$.

Assim, lembrando que sua solução ótima é denotada por $u(r, k)$, temos que $Y_{r,k}^* = e^{u(r,k)} < r$ para todo $2\ell + 1 < r \leq r_0^*(k)$. Com as restrições acima, para qualquer grafo reduzido multicolorido \mathcal{H} , temos

$$\begin{aligned}
c(\mathcal{H}) &= \left(\prod_{j=2}^{r-2\ell} j^{e_j(\mathcal{H})} \right) \cdot \left(\prod_{j=r-2\ell+1}^r j^{e_j(\mathcal{H})} \right) \\
&= \left(\prod_{j=2}^{r-2\ell} j^{e_j(\mathcal{H})} \right) \cdot r^{\text{ex}(m, K_k) - \zeta(\mathcal{H})m^2} \\
&\leq \left(\prod_{j=2}^{r-2\ell} j^{e_j(\mathcal{H})} \right) \cdot r^{e_{r-2\ell+1}(\mathcal{H}) + \dots + e_r(\mathcal{H})} \\
&\leq Y_{r,k}^* \zeta(\mathcal{H})m^2 \cdot r^{\text{ex}(m, K_k) - \zeta(\mathcal{H})m^2} \leq Y_{r,k}^* \xi m^2 \cdot r^{\text{ex}(m, K_k) - \xi m^2}. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

como $Y_{r,k}^* < r$ e $\zeta(\mathcal{H}) > \xi$

Finalmente, por (4.9), (4.21) e aqui fazendo mais uma escolha para $\eta(\xi)$, ou seja tomando η tal que

$$r^{r\eta + H(r\eta)} < \min \left\{ \left(\frac{r}{Y_{r,k}^*} \right)^\xi, \left(\frac{r}{2} \right)^\xi \right\}$$

temos que

$$r^{r\eta + H(r\eta)} < \left(\frac{r}{Y_{r,k}^*} \right)^\xi, \tag{4.22}$$

e, para n suficientemente grande, temos

$$r^{(r\eta+H(r\eta))n^2} \cdot \left(\frac{Y_{r,k}^*}{r}\right)^{\xi n^2} \cdot r^{\text{ex}(n,K_k)} \stackrel{n \gg 1}{\ll} r^{\text{ex}(n,K_k)}, \quad (4.23)$$

Isso implica que G tem menos de $r^{\text{ex}(n,K_k)}$ colorações \mathcal{P}_k^* -livres, uma contradição às hipóteses do Lema 4.1. Isso conclui a prova da afirmação 4.2.

4.2 Cota para $B(\mathcal{P}_k^*)$.

Nesta seção vamos mostrar os valores explícitos de $\mu_3(k)$ e verificar que os valores definidos em (1.2) são cotas inferiores $\mu_2(k)$ para o parâmetro r_0 , concluindo assim a prova do Lema 4.1, ou seja,

$$\mu_2(k) \geq \begin{cases} \left(\frac{k^2}{2(k-1)}\right)^{\frac{k-1}{2}}, & \text{se } k \text{ é ímpar,} \\ \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}}, & \text{se } k \text{ é par.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Mas antes, vale notar que a cota inferior $\mu_2(k)$, apesar de não ser trivial, fornece cotas distantes das que acreditamos ser as melhores possíveis. Para ver isso, podemos observar que, na demonstração do Lema 4.1, conseguimos encontrar, através de uma análise mais detalhada na solução do programa linear, um cota inferior $\mu_3(k)$ que melhora $\mu_2(k)$ em relação ao parâmetro r_0 . Note que essa nova cota inferior $\mu_3(k)$ ainda é uma cota inferior para o parâmetro r_0 , como pode ser observado pelo Teorema 1.13, onde $\mu_3(k) = 12$ e o parâmetro $r_0 = 26$.

Como a obtenção da cota inferior $\mu_3(k)$ está interligada à resolução do programa linear, para alguns valores de k , podemos conseguir valores explícitos de $\mu_3(k)$, utilizando um software para solução de programas lineares. Infelizmente, esta tarefa é muito exigente em termos computacionais, e nós apenas computamos esses valores explicitamente para valores pequenos de k .

Para $k \in \{3, \dots, 9\}$, os valores estão explicitados na Tabela 4.1, devido a [36]. Para $k = 8$ e $k = 9$, os valores de $\mu_3(k)$ na Tabela 4.1 foram obtidos usando menos restrições, portanto, esses valores são cotas inferiores para $\mu_3(k)$ que podem ser obtidos a partir do programa linear (4.19).

k	3	4	5	6	7	8	9
$\mu_3(k)$	12	91	617	4 694	48 164	292 397	3 198 545

Tabela 4.1 $\mu_3(k)$ para $3 \leq k \leq 9$.

Observamos que, para $k = 8$, o valor $\mu_3(k)$ foi obtido usando apenas as restrições para $q = 2, \dots, 390$ e $s = 1, \dots, k - 1$. Já para $k = 9$, o valor de $\mu_3(k)$, o valor foi obtido usando apenas as restrições para $q = 2, \dots, 35$ e $s = 1, \dots, k - 1$. Para mais detalhes sobre os programas lineares e como obter suas soluções, veja [36], o qual faz todas as construções das restrições e aplicações.

A seguinte proposição será útil.

Proposição 4.7. *Dados inteiros $r \geq 2\binom{k}{2}$ e $2 \leq s \leq k/2$, vale o seguinte:*

$$t(k, s, 2) = \left\lfloor \frac{r - 2 \operatorname{ex}(k, K_{s+1})}{\binom{k}{2} - \operatorname{ex}(k, K_{s+1})} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{4sr}{k^2} \right\rfloor.$$

Prova. O termo $t(k, s, 2)$ é não decrescente, em função de s , para $r \geq 2\binom{k}{2}$. Visto que $\operatorname{ex}(k, K_{s+1}) \leq (s - 1) \cdot k^2 / (2s)$, inferimos que

$$t(k, s, 2) \leq \left\lfloor \frac{r - \frac{(s-1)}{s}k^2}{\frac{k^2}{2s} - \frac{k}{2}} \right\rfloor.$$

Note que

$$\frac{r - \frac{(s-1)k^2}{s}}{\frac{k^2}{2s} - \frac{k}{2}} \leq \frac{4sr}{k^2} \iff -\frac{(s-1)}{s}k^4 \leq kr(k-2s)$$

levando ao resultado desejado. \square

Agora vamos provar a validade de (1.2). Descrevemos o argumento em detalhes para k par, um argumento semelhante se aplica a k ímpar. Para este fim, fixe um $k \geq 4$ par. Lembrando que r_0 é definido como o maior valor r tal que o valor ótimo $Y_{r,k}$ do programa linear (4.19) satisfaz $Y_{r,k} < r$ para todo $2\binom{k}{2} = 2\ell + 2 \leq r \leq r_0$.

Fixe $r \geq 2\binom{k}{2}$. Para um limitante superior de $Y_{r,k}$, expandimos a região viável considerando apenas as restrições de não negatividade e a segunda desigualdade em (4.19) para $s = k/2$ E $q = 2$. Isso produz o LP

$$\begin{aligned} \max \quad & x_2 \ln 2 + \cdots + x_{r-2\ell} \ln (r - 2\ell) \\ \text{s.t.} \quad & \frac{k-2}{k} \cdot \sum_{j=2}^{t(k,k/2,2)} x_j + \sum_{p=t(k,k/2,2)+1}^{r-2\ell} x_p \leq 1 \\ & x_2, \dots, x_{r-2\ell} \geq 0, \end{aligned} \tag{4.24}$$

Pela Proposição 4.7,

$$t\left(k, \frac{k}{2}, 2\right) \leq \left\lfloor \frac{2r}{k} \right\rfloor.$$

Se $\lfloor 2r/k \rfloor \leq r - 2\ell$, o ótimo para (4.24) é limitado superiormente pelo valor ótimo $Y_{r,k}^*$ de

$$\begin{aligned} \max \quad & x_{\lfloor 2r/k \rfloor} \cdot \ln \lfloor 2r/k \rfloor + x_{r-2\ell} \cdot \ln (r - 2\ell) \\ \text{s.t.} \quad & \frac{k-2}{k} \cdot x_{\lfloor 2r/k \rfloor} + x_{r-2\ell} \leq 1 \\ & x_{\lfloor 2r/k \rfloor}, x_{r-2\ell} \geq 0. \end{aligned}$$

É claro que $Y_{r,k}^* < r$ se

$$\frac{k}{k-2} \cdot \ln\left(\frac{2r}{k}\right) < \ln r,$$

que vale para

$$r < \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}}.$$

Por outro lado, se $r - 2\ell < \lfloor 2r/k \rfloor$, $Y_{r,k}^*$ é limitado superiormente por

$$\frac{k}{k-2} \cdot \ln(r - 2\ell) \leq \frac{k}{k-2} \cdot \ln\left(\frac{2r}{k}\right),$$

a mesma conclusão vale.

Para k ímpar, repetimos este argumento usando a restrição para $s = (k-1)/2$ e $q = 2$. Cálculos análogos levam a

$$r < \left(\frac{k^2}{2k-2}\right)^{\frac{k-1}{2}},$$

como desejado.

4.3 Cota superior $\omega(k)$ do parâmetro r_0 .

Vamos apresentar nessa seção uma construção para obtermos limitantes $\omega(k)$, onde $\omega(k)$ tem a propriedade de que para todo $r \geq \omega(k)$ o grafo $T_{k-1}(n)$ não é mais o grafo (r, \mathcal{P}_k^*) -extremal. Também justificamos que $\omega(k)$ está bem definido mostrando que outros grafos admitem mais colorações (r, \mathcal{P}_k^*) -livres, se r for suficientemente grande.

Em relação a cota superiores $\omega(k)$ de r_0 , seja $k \geq 3$ um inteiro fixo. Conforme mencionado na introdução, se \mathcal{P}_k^* for qualquer família de padrões de K_k que não contenha K_k^R , a seguinte quantidade $\omega(k)$ está bem definida: o maior inteiro

positivo $\omega(k)$ tal que, para todo $r \geq \omega(k)$, existe n_0 tal que o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ não é mais o grafo com n vértices que é (r, \mathcal{P}_k^*) -extremal para $n \geq n_0$. Para justificar a existência de tal $\omega(k)$, vamos descrever sua construção de [27, Remark 4.2].

Assumindo que r é divisível por $\binom{k}{2}$ e divida o conjunto $[r]$ de cores em pares de conjuntos disjuntos $C_1, \dots, C_{\binom{k}{2}}$ de mesmo tamanho. Associando cada conjunto C_j de cores com uma aresta de K_k . Considere o grafo G com n vértices dado pelo blow-up do conjunto de vértices de K_k em classes V_1, \dots, V_k de tamanho n/k cada, onde novamente assumimos que k divide n para evitar tecnicidades. Observamos as colorações de G de modo que as arestas entre V_i e V_j sejam coloridas arbitrariamente com cores do conjunto associado à aresta ij de K_k , de modo que todas as cópias de K_k em G são arco-íris. Isto mostra que

$$c_{r, \mathcal{P}_k^*}(G) > \left(\frac{r}{\binom{k}{2}} \right)^{\frac{k-1}{2k}n^2} \geq r^{\frac{k-2}{2(k-1)} \cdot n^2} \geq r^{\text{ex}(n, K_k)} \quad (4.25)$$

para $r \geq \binom{k}{2}^{(k-1)^2}$, o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ não é (r, \mathcal{P}_k^*) -extremal. Embora isso seja suficiente para encontrar um limite superior para $r_0(\mathcal{P}_K^*)$, notamos que, mesmo nos casos em que as restrições de divisibilidade não são válidas, podemos novamente concluir que $G = T_k(n)$ tem mais (r, \mathcal{P}_k^*) -colorações que $T_{k-1}(n)$, para r e n suficientemente grandes, observando que, escrevendo $\ell + 1 = \binom{k}{2}$, temos

$$c_{r, \mathcal{P}_k^*}(G) > \left[\frac{r}{\binom{k}{2}} \right]^{\frac{k-1}{2k}n^2 - 0(n^2)} \geq \left(\frac{r - \ell}{\ell + 1} \right)^{\frac{k-1}{2k}n^2 - 0(n^2)} > r^{\frac{k-2}{2(k-1)}n^2} \geq r^{\text{ex}(n, K_k)}.$$

De maneira mais geral, sejam $s \geq k \geq 4$ inteiros e suponha que r é divisível por $\binom{s}{2}$. Divida o conjunto $[r]$ de cores em pares de conjuntos disjuntos $C_1, \dots, C_{\binom{s}{2}}$ de igual tamanho. Associando cada conjunto C_j de cores com uma aresta de K_s . Considere o grafo G com n vértices dado pelo *blow-up* do conjunto de

vértices de K_s das classes V_1, \dots, V_s de tamanho n/s cada, onde estamos assumindo que s divide n . Observamos as colorações de G de modo que as arestas entre V_i e V_j sejam coloridas arbitrariamente com as cores do conjunto associado à aresta ij de K_s , de modo que todas as cópias de K_k em G são arco-íris. Isso mostra que

$$c_{r, \mathcal{P}_k^*}(G) > \left(\frac{r}{\binom{s}{2}} \right)^{\frac{s-1}{2s}n^2} \geq r^{\frac{k-2}{2(k-1)} \cdot n^2} \geq r^{\text{ex}(n, K_k)} \quad (4.26)$$

para

$$r \geq \binom{s}{2}^{\frac{(s-1)(k-1)}{s-k+1}} = h(s),$$

então, novamente o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ não é (r, \mathcal{P}_k^*) -extremal. A função $h(s)$ têm um único mínimo local $s_0 \in \mathbb{R}^+$, onde $s_0 \approx k \ln k$. portanto, o conjunto $s = \lceil k \ln k \rceil$,

e

$$r = \binom{\lceil k \ln k \rceil}{2}^{\lceil \frac{(k-1)(\lceil k \ln k \rceil - 1)}{\lceil k \ln k \rceil - k + 1} \rceil}.$$

Como visto acima, o grafo de Turán $T_k(n)$ vence $T_{k-1}(n)$ para $r \geq \binom{k}{2}^{(k-1)^2}$. Mas

$$\binom{\lceil k \ln k \rceil}{2}^{\lceil \frac{(k-1)(\lceil k \ln k \rceil - 1)}{\lceil k \ln k \rceil - k + 1} \rceil} \leq \lceil k \ln k \rceil^{2k} < \binom{k}{2}^{(k-1)^2}$$

para $k \geq 4$, isto é, $\omega(k) \leq \binom{\lceil k \ln k \rceil}{2}^{\lceil \frac{(k-1)(\lceil k \ln k \rceil - 1)}{\lceil k \ln k \rceil - k + 1} \rceil} \leq \lceil k \ln k \rceil^{2k}$. Isso sugere que o grafo de Turán $T_k(n)$ nunca é extremal para a família \mathcal{P}_k^* e n suficientemente grande. Devemos mencionar que existem r colorações \mathcal{P}_k^* -livres de $T_k(n)$ que não são contadas em (4.25), mas acreditamos que elas só afetam o limite inferior por um termo multiplicativo constante.

Para $k \geq 3$, podemos encontrar $\omega(k)$ tal que: existe $\omega(k)$ onde para cada $r \geq \omega(k)$ e algum $s > (k-1)$, $c_{r, \mathcal{P}_k^*}(T_s(n))$ é maior que $c_{r, \mathcal{P}_k^*}(T_{k-1}(n))$. Assim, o número $\omega(k)$ é o menor r (necessariamente maior que o parâmetro r_0) tal que

$T_{k-1}(n)$ não é \mathcal{P}_k^* -extremal. A próxima tabela, também devido a [36], nos fornece cotas de $\omega(k)$ para alguns valores de k .

k	3	4	5	6	7	8
$\omega(k)$	27	759375	$\approx 8.3038 \cdot 10^9$	$\approx 1.4071 \cdot 10^{14}$	$\approx 3.5567 \cdot 10^{18}$	$\approx 1.3087 \cdot 10^{23}$
s	4	6	10	15	19	24

Tabela 4.2 $\omega(k)$ para $3 \leq k \leq 9$.

De fato, para nossa família \mathcal{P}_k^* , pode ser dito mais com um argumento semelhante. Sabemos pelo Teorema 1.10 que, para qualquer n fixado, r e k , existe um grafo multipartido completo G com n vértices que é (r, \mathcal{P}_k^*) -extremal. Assumindo que G é completo e s partido. Por outro lado, para r e k fixos, não podemos ter $\binom{s}{2} > r$, dado que G contém K_s como subgrafo, mas há menos de $\binom{s}{2}$ cores disponíveis.

Por outro lado, para k e $s \geq k - 1$ fixos. Seja G um grafo com n vértices s partido, onde n suficientemente grande. Com os argumentos que levam a (4.25), temos claramente

$$c_{r, \mathcal{P}_k^*}(T_{s+1}(n)) > \left(\frac{r}{\binom{s+1}{2}} \right)^{\frac{s}{2(s+1)} n^2} > r^{\frac{s-1}{2s} \cdot n^2} \geq c_{r, \mathcal{P}_k^*}(G)$$

para $r > \binom{s+1}{2}^{s^2}$.

Isso mostra que, para qualquer k fixo, a estrutura dos grafos (r, \mathcal{P}_k^*) -extremais muda infinitamente à medida que r aumenta. Isso sugere que determinar grafos com n vértices (r, \mathcal{P}_k^*) -extremais para $r > r_0$ é um problema difícil.

5 ESTABILIDADE DE CORES PARA GRAFOS \mathcal{P}_3^* -EXTREMAIS

O objetivo desse capítulo é provar a estabilidade de cores para grafos \mathcal{P}_3^* -livres, ou seja, vamos mostrar que, para um grafo G de n vértices o qual possui $c_{r, \mathcal{P}_3^*}(G) \geq r^{\text{ex}(n, K_3)}$, então esse grafo deve ter uma estrutura muito próxima à do grafo de Turán $T_2(n)$. Vale notar que, como mencionado na introdução, vamos provar esse resultado para o padrão $K_3^{(2)}$, implicando assim na validade do resultado para a família \mathcal{P}_3^* . Portanto, para o restante do capítulo vamos fazer as construções dos resultados para o padrão $K_3^{(2)}$, valendo também o resultado para a família \mathcal{P}_3^* .

Para isso, vamos inicialmente empregar a estratégia do capítulo anterior, que consiste em empregar a estratégia geral de [1] e [27] que utilizam o Lema da Regularidade de Szemerédi e Programação Linear. Uma das questões que dificultavam mostrar a validade da propriedade de estabilidade de cores para o padrão $K_3^{(2)}$ para todo r até o parâmetro de transição r_0 , é que, como essa dependência de r está associado as cotas fornecidas pela programação linear, não conseguimos mais ter avanços nessa técnica. Lembrando que o parâmetro r_0 é o valor máximo tal que, para todo $r \leq r_0$ o grafo $T_2(n)$ é o único grafo $(r, K_3^{(2)})$ -extremal.

Uma das nossas principais contribuições desse trabalho foi remodelar essa técnica, identificando os pontos do argumento que restringiam o incremento das cotas inferiores $\mu(k)$ do parâmetro r_0 , para a validade da estabilidade de cores. Ao acrescentar um argumento indutivo, explorando melhor as restrições locais e assim provar a validade da propriedade de estabilidade de cores para todo r até o parâmetro de transição r_0 .

A principal contribuição desse capítulo, no emprego dessa nova técnica, está em provar que o grafo $T_2(n)$ é o único grafo $(r, K_3^{(2)})$ -extremal, para todo $r \leq 26 = r_0$, isto é, mostrar a validade do resultado até o parâmetro de transição, onde que para $r > 26$, $T_2(n)$ não é o grafo $(r, K_3^{(2)})$ -extremal. O que confirma a conjectura de [24], como já visto no Capítulo 1, que para $r = 27$ já sabemos que o grafo $T_4(n)$ possui mais colorações $(27, K_3^{(2)})$ -livres.

5.1 Propriedade de Estabilidade De Cores para Grafos

$K_3^{(2)}$ -livres

Estamos interessados agora em provar que o grafo de Turán $T_2(n)$ é o único grafo $(r, K_3^{(2)})$ -extremal, para isso, vamos mostrar a propriedade da estabilidade de cores para o padrão $K_3^{(2)}$, a qual nos fornecerá o parâmetro $r_0 = 26$, uma vez que para $r_0 + 1 = 27$ já é conhecido que o grafo $T_4(n)$ produz mais colorações que $T_2(n)$.

Vamos enunciar novamente o Teorema 1.15, principal resultado desse capítulo.

Teorema 1.15. *Seja $2 \leq r \leq 26$. Para $\delta > 0$ fixo, existe n_0 tal que o seguinte ocorre, para todo $n \geq n_0$. Se $G = (V, E)$ é um grafo de ordem n tal que*

$$c_{r, K_3^{(2)}}(G) \geq r^{\text{ex}(n, K_3)},$$

então existe uma partição $V = W_1 \cup W_2$ do conjuntos de vértices tal que $e_G(W_1) + e_G(W_2) \leq \delta n^2$.

A prova é, estruturalmente, similar a prova do Lema 4.1 do capítulo anterior, onde também aplicamos o Lema da Regularidade de Szemerédi. A principal

diferença entre as provas das estabilidades de cores do capítulo anterior para a que será feita aqui, está justamente na prova de uma afirmação que será feita, similar a Afirmação 5.1, uma vez que a prova da afirmação do capítulo anterior é feita através de argumentos de programação linear, para a prova da afirmação que será feita aqui, vamos usar um argumento indutivo, no qual fica mais claro o processo de explorar algumas restrições mais locais, mas que são essenciais para conseguirmos encontrar o limitante parâmetro r_0 .

5.1.1 Prova do Teorema 1.15

Antes de iniciarmos a prova do Teorema 1.15, vale ressaltar que, como fizemos uma aplicação detalhada do Lema de Regularidade de Szemerédi no capítulo anterior e, como a aplicação aqui será semelhante, omitiremos maiores detalhes. Outro detalhe importante a ser mencionado, é que faremos a prova para $8 \leq r \leq 26$, pois a prova para $2 \leq r < 8$ é um caso específico do Teorema 1.11, para $k = 3$.

Sejam $r \in \{8, \dots, 26\}$ fixo e $\delta > 0$. Consideremos as constantes auxiliares $\xi > 0$ e $\eta > 0$ suficientemente pequenas, tais que:

$$\xi < \frac{\delta}{22}, \quad \xi > 10^4 \cdot H((r+1)\eta) + (10^4 + 1) \cdot (r+1) \cdot \eta \quad \text{e} \quad \eta < \frac{\delta}{2r}.$$

Sejam $\varepsilon = \varepsilon(r, \eta, 3) > 0$ e $n_0 = n_0(r, \eta, 3)$ tais que satisfaçam as suposições do Lema 2.2, e suponha, sem perda de generalidade, que $0 < \varepsilon < \min\{\eta/2, 1/n_0\}$. Fixe $M = M(r, \varepsilon)$ dado pelo Lema 2.1.

Dado um grafo G com n vértices tal que $n \geq n_0$, seja $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G)$ o conjunto de todas as r -colorações $K_3^{(2)}$ -livres de G . Pelo Lema 2.1 e a discussão que se segue, cada coloração $\Phi \in \mathcal{C}$ está associada a uma partição multicolorida ε -regular

$V = V_1 \cup \dots \cup V_m$, onde $1/\varepsilon \leq m \leq M$. Essa partição, por sua vez, está associada a um grafo reduzido multicolorido $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\eta)$. Nossa escolha de parâmetros implica que \mathcal{H} deve ser $K_3^{(2)}$ -livre, caso contrário, a coloração de G que leva a ele conteria uma cópia de $K_3^{(2)}$ pelo Lema 2.2.

Novamente, usando a mesma argumentação da prova do Lema 4.1, isto é, aplicando o Lema 2.1, podemos concluir que, o número de colorações $K_3^{(2)}$ -livre de G é no máximo

$$M^n \cdot 2^{rM^2/2} \cdot 2^{H((r+1)\eta)n^2} \cdot r^{(r+1)\eta n^2} \cdot \max_{\mathcal{H}} \left(\prod_{j=1}^r j^{\frac{e_j(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|^2}} \right)^{n^2}. \quad (5.1)$$

Nosso objetivo é encontrar um limite superior para (5.1). O termo $j = 1$ no produto (5.1) não afeta o resultado. Então, definimos $\mathcal{S} = \mathcal{S}(G)$ para ser o conjunto de todos os subgrafos reduzidos multicoloridos \mathcal{H} de G tais que todas as arestas estejam associadas a listas de tamanho pelo menos dois. Note que $\mathcal{H} \in \mathcal{S}$ é $K_3^{(2)}$ -livre se, e somente se, todas as listas associadas às arestas de um triângulo são mutuamente disjuntas. Dado $\mathcal{H} \in \mathcal{S}$, seja

$$c(\mathcal{H}) = \prod_{e \in E(\mathcal{H})} |L_e|^{\frac{1}{|V(\mathcal{H})|^2}}. \quad (5.2)$$

Queremos encontrar $\max_{\mathcal{H} \in \mathcal{S}} c(\mathcal{H})$ para limitar (5.1).

O passo principal em nossa prova será a próxima afirmação, pela qual existe um grafo reduzido multicolorido \mathcal{H} que tem uma quantidade de arestas muito próxima do grafo de Turán $T_2(n)$, e essas arestas têm suas listas de cores “grandes”. A seguir faremos algumas definições importantes para a sequência da prova.

No restante da prova, dado um inteiro r , consideramos as funções

$$r_0 = r_0(r) = \begin{cases} \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor & \text{se } 8 \leq r \leq 13 \\ \lfloor r - 2\sqrt{r} \rfloor & \text{se } 14 \leq r \leq 26. \end{cases} \quad (5.3)$$

$$r_1 = r_1(r) = r_0 + 1. \quad (5.4)$$

Visto que, dependendo do valor de r considerado, a definição de r_0 e r_1 é alterada, faremos, sempre que necessário, uma análise desses diferentes casos no restante da demonstração. As próximas duas afirmações são cruciais para o decorrer da prova, para ajudar em suas provas, observe a seguinte tabela que contém os valores de r_1 .

r	r_1	r	r_1	r	r_1	r	r_1	r	r_1	r	r_1	r	r_1
8	4	11	6	14	7	17	9	20	12	23	14	26	16
9	5	12	6	15	8	18	10	21	12	24	15		
10	5	13	7	16	9	19	11	22	13	25	16		

Tabela 5.1 Valores de r_1 para $8 \leq r \leq 26$.

Utilizando a Tabela 5.1, podemos constatar os seguintes dois fatos:

$$A(r) = \lfloor (r - r_1)/2 \rfloor \cdot \lceil (r - r_1)/2 \rceil < r, \quad (5.5)$$

e

$$2 \cdot r_1 \geq r. \quad (5.6)$$

Assim como a Afirmação 4.2 é o passo principal da prova do Lema 4.1, a próxima afirmação, que cumpre um papel muito parecido ao da Afirmação 4.2, é também o passo principal da prova do Teorema 1.15.

Afirmação 5.1. *Existe um grafo reduzido multicolorido \mathcal{H} tal que*

$$e_{r_1}(\mathcal{H}) + \cdots + e_r(\mathcal{H}) \geq \text{ex}(m, K_3) - \xi m^2. \quad (5.7)$$

Antes de abordar a prova da Afirmação 5.1, mostramos que ela implica o resultado desejado.

Seja \mathcal{H} um grafo reduzido multicolorido com m vértices tal que $e_{r_1}(\mathcal{H}) + \cdots + e_r(\mathcal{H}) \geq \text{ex}(m, K_3) - \xi m^2$. Seja \mathcal{H}' o subgrafo de \mathcal{H} com conjunto de arestas $E_{r_1}(\mathcal{H}) \cup \cdots \cup E_r(\mathcal{H})$, cujas listas têm tamanho j . Afirmamos que \mathcal{H}' é K_3 -livre. De fato, se \mathcal{H}' contivesse um triângulo com arestas e_1, e_2, e_3 , então

$$|L_{e_1}| + |L_{e_2}| + |L_{e_3}| \geq 3r_1 > 2r_1 + 1 > r,$$

o que implica que duas das listas têm interseção não vazia, levando a um $K_3^{(2)}$ em G pelo Lema 2.2.

Pelo Teorema 2.4, existe uma partição $U_1 \cup U_2 = [m]$ com

$$e_{\mathcal{H}'}(U_1) + e_{\mathcal{H}'}(U_2) \leq \xi m^2,$$

onde $e_{\mathcal{H}'}(U_i)$ é o número de arestas de \mathcal{H}' com ambas as extremidades em U_i . O subgrafo bipartido $\widehat{\mathcal{H}}$ obtido de \mathcal{H}' removendo todas as arestas com ambas as extremidades na mesma classe satisfaz

$$e(\widehat{\mathcal{H}}) \geq (\text{ex}(m, K_3) - \xi m^2) - \xi m^2 = \text{ex}(m, K_3) - 2\xi m^2.$$

Afirmamos que, mesmo se adicionarmos arestas de listas de tamanho 1 em \mathcal{H} , preservando sua propriedade de ser $K_3^{(2)}$ -livre, vamos ter que $e_1(\mathcal{H}) + \cdots + e_{r_0}(\mathcal{H}) \leq 10\xi m^2$. Caso contrário, tomando $\xi \leq 10^{-2}$, e aplicando o Lema 2.5, para

$k = 3$, o grafo obtido adicionando as arestas de $E_1 \cup \dots \cup E_{r_0}$ a $\widehat{\mathcal{H}}$ conteria um K_3 tal que exatamente uma das arestas, digamos f_1 , esteja em algum conjunto U_i . Sejam f_2, f_3 as outras arestas da cópia de K_3 , que se encontram em $E_{r_1} \cup \dots \cup E_r$. Por construção, temos

$$|L_{f_1}| + |L_{f_2}| + |L_{f_3}| \geq 1 + 2r_1 > r,$$

o que repete a contradição anterior.

Por isso o número de arestas de \mathcal{H} com ambas as extremidades no mesmo conjunto U_i é no máximo $11\xi m^2$. Seja $W_i = \cup_{j \in U_i} V_j$ para $i \in \{1, 2\}$. Então, tomando

$$\xi < \frac{\delta}{44} \quad \text{e} \quad \eta < \frac{\delta}{2r},$$

temos

$$e_G(W_1) + e_G(W_2) \leq r\eta n^2 + (n/m)^2 \cdot (e_{\mathcal{H}}(U_1) + e_{\mathcal{H}}(U_2)) < \delta n^2,$$

como requerido. Isso prova Teorema 1.15.

5.1.2 Prova da Afirmação 5.1

Passamos agora para a prova da Afirmação 5.1.

Dado um grafo reduzido \mathcal{H} , seja $E_b(\mathcal{H})$ o conjunto de todas as arestas cujas listas de cores têm tamanhos entre r_1 e r . Nós nos referimos a elas como as arestas *azuis* de \mathcal{H} . Seja $E_g(\mathcal{H})$ o conjunto de todas as arestas cujas listas de cores tenham tamanhos entre 2 e r_0 , as arestas *verdes* de \mathcal{H} . O ingrediente principal na prova da Afirmação 5.1 é o seguinte lema auxiliar.

Lema 5.2. *Seja r um inteiro tal que $2 \leq r \leq 26$ e seja \mathcal{H} um grafo reduzido multicolorido $K_3^{(2)}$ -livre para o qual todas as arestas são verdes. Então, para todo*

$$0 < \alpha < \frac{1}{1000},$$

$$c(\mathcal{H}) \leq r^{\frac{1}{4}-\alpha} < r^{\frac{1}{4}},$$

Antes de provar este lema, mostraremos que ele implica a validade da Afirmação 5.1. Para este fim, suponha por contradição que qualquer coloração de G , evitando $K_3^{(2)}$, leva a um grafo reduzido multicolorido \mathcal{H} , onde $|V(\mathcal{H})| = m$, para o qual

$$e_{r_1}(\mathcal{H}) + \cdots + e_r(\mathcal{H}) < \text{ex}(m, K_3) - \xi m^2. \quad (5.8)$$

Seja $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$. Se \mathcal{H}_0 contém uma aresta azul, fixe uma aresta $e_1 = \{u, v\}$ com $|L_{e_1}| \geq r_1$. Seja w é um vértice $V \setminus \{u, v\}$. Se no máximo um dos pares $\{u, w\}$ e $\{v, w\}$ é uma aresta de \mathcal{H}_0 , a lista de cores nesta aresta não pode produzir um $K_3^{(2)}$ envolvendo e_1 . Se w é um vizinho comum de u e v , a soma dos tamanhos de $L_{\{u,z\}}$ e $L_{\{v,z\}}$ é no máximo $r - |L_{e_1}| \leq r - r_1$, caso contrário, obtemos uma cópia de $K_3^{(2)}$. Assim, o produto dos tamanhos das listas de $L_{\{u,z\}}$ e $L_{\{v,z\}}$ é no máximo $A(r) = \lfloor (r - r_1)/2 \rfloor \cdot \lfloor (r - r_1)/2 \rfloor < r$ pela equação (5.5). Dizemos que um vértice w é do *tipo 1* se houver uma única aresta conectando-o a $\{u, v\}$, e essa aresta for azul. Caso contrário, diz-se que ele é do *tipo 2*. Se w é uma aresta do tipo 2, então ou a lista da aresta que a conecta a u ou v tem lista de tamanho no máximo r_0 (caso w seja adjacente a no máximo um vértice entre u e v), ou o produto dos tamanhos das listas é no máximo $A(r)$ (caso w seja adjacente a u e v). Isso significa que o produto dos tamanhos das listas das arestas conectando um vértice tipo 2 a $\{u, v\}$ é no máximo $B(r) = \max\{r_0, A(r)\} < r$. Sabemos que $B(r) \leq r - 1$. Note que

$$\frac{B(r)}{r} \leq \frac{r-1}{r} \leq r^{-\alpha} \quad (5.9)$$

é válido se $e^{-1/r} \leq r^{-\alpha}$, o que é equivalente a $\alpha \ln r - 1/r \leq 0$. A derivada de $f(r) = \alpha \ln r - 1/r$ é positiva, o que significa que (5.9) é satisfeito para todo $r \leq 26$ se $\alpha \ln 26 - 1/26 \leq 0$, que é válido para todo $\alpha \leq 0.0118$.

Sejam $n_1(e_1)$ e $n_2(e_1)$ o número de vértices do tipo 1 e 2 em relação a e_1 , respectivamente. Agora remova os vértices u e v e todas as arestas incidentes de \mathcal{H}_0 , e seja \mathcal{H}_1 o grafo multicolorido restante com $(m - 2)$ vértices. Se \mathcal{H}_1 contém uma aresta azul e_2 , repetimos este argumento para \mathcal{H}_1 e para os grafos subsequentes até chegarmos a um grafo \mathcal{H}_{k_1} com $(m - 2k_1)$ vértices que não contém qualquer aresta azul, ou seja, tal que toda aresta de \mathcal{H}_{k_1} seja verde. Por construção, temos

$$k_1 + \sum_{i=1}^{k_1} (n_1(e_i) + n_2(e_i)) = \sum_{i=1}^{k_1} (m - 2i + 1) = k_1 m - k_1^2. \quad (5.10)$$

Concluimos que o número de colorações $K_3^{(2)}$ -livres de \mathcal{H} é no máximo

$$\begin{aligned} & r^{k_1 + n_1(e_1) + \dots + n_1(e_{k_1})} \cdot (B(r))^{n_2(e_1) + \dots + n_2(e_{k_1})} \cdot c(\mathcal{H}_{k_1})^{(m-2k_1)^2} \\ = & \left(\frac{B(r)}{r} \right)^{n_2(e_1) + \dots + n_2(e_{k_1})} \cdot r^{k_1 m - k_1^2} \cdot c(\mathcal{H}_{k_1})^{(m-2k_1)^2}. \end{aligned}$$

Como todas as arestas do grafo \mathcal{H}_{k_1} são verdes e usando o limite superior dado pelo Lema 5.2, obtemos

$$\begin{aligned} c(\mathcal{H})^{m^2} & \leq \left(\frac{B(r)}{r} \right)^{n_2(e_1) + \dots + n_2(e_{k_1})} \cdot r^{k_1 m - k_1^2} \cdot r^{\left(\frac{1}{4} - \alpha\right)(m-2k_1)^2} \\ & = \left(\frac{B(r)}{r} \right)^{n_2(e_1) + \dots + n_2(e_{k_1})} \cdot r^{\frac{m^2}{4} - \alpha(m-2k_1)^2}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Relembre que, por (5.8), estamos assumindo que o número de arestas azuis de \mathcal{H} é no máximo $\text{ex}(m, K_3) - \xi m^2$. Vamos considerar dois cenários. Primeiro suponha que $k_1 m - k_1^2 \leq \text{ex}(m, K_3) - \xi m^2$, então $k_1 \leq m/2 - \sqrt{\xi} m$. Neste caso, todos os vértices

na construção acima podem ter o tipo 1, e (5.11) é no máximo

$$r^{\frac{m^2}{4} - \alpha \xi m^2} \leq r^{\frac{m^2}{4} - \frac{1}{10^4} \xi m^2}.$$

No segundo cenário, suponha que $k_1 = m/2 - \sqrt{\xi}m + q$, para $q > 0$ e $q \leq \sqrt{\xi}m$, então, por (5.10) e nossa restrição no número de arestas azuis, ou seja, $k_1 + \sum_{j=1}^{k_1} n_1(e_j) \leq \text{ex}(m, K_3) - \xi m^2$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k_1} n_2(e_j) &= k_1 m - k_1^2 - \left(k_1 + \sum_{j=1}^{k_1} n_1(e_j) \right) \\ &\geq q(2\sqrt{\xi}m - q). \end{aligned}$$

A equação (5.11) é no máximo

$$\left(\frac{B(r)}{r} \right)^{q(2\sqrt{\xi}m - q)} \cdot r^{\frac{m^2}{4} - \alpha(2\sqrt{\xi}m - 2q)^2}. \quad (5.12)$$

Se $q \leq 3\sqrt{\xi}m/4$, a equação (5.12) é no máximo

$$r^{\frac{m^2}{4} - \alpha(2\sqrt{\xi}m - 2q)^2} \leq r^{\frac{m^2}{4} - \frac{\alpha \xi m^2}{4}} \leq r^{\frac{m^2}{4} - \frac{1}{10^4} \xi m^2}$$

for $\alpha \geq 10^{-5}$.

Se $q \geq 3\sqrt{\xi}m/4$, a equação (5.12) é no máximo

$$\left(\frac{B(r)}{r} \right)^{\frac{15\xi m^2}{16}} \cdot r^{\frac{m^2}{4}} \stackrel{(5.9)}{\leq} r^{\frac{m^2}{4} - \frac{1}{10^4} \xi m^2},$$

para $2 \leq r \leq 26$

$$\left(\frac{B(r)}{r} \right)^{\frac{15}{16}} \cdot r^{\frac{1}{10^4}} \leq \left(\frac{r-1}{r} \right)^{\frac{15}{16}} \cdot r^{\frac{1}{10^4}} \leq e^{-\frac{15}{16r} + \frac{1}{10^4} \ln r} \leq 1.$$

Combinando os casos acima e usando o limite superior (4.9), concluímos que o número de colorações $K_3^{(2)}$ -livres do grafo G satisfaz

$$|\mathcal{C}_{r, \mathcal{P}_3^*}(G)| \leq M^n \cdot 2^{(H((r+1)\eta))n^2 + rM^2/2} \cdot r^{(r+1)\eta m^2} \cdot \left(r^{\frac{m^2}{4} - \frac{1}{10^4} \xi m^2} \right)^{\left(\frac{n}{m} \right)^2}$$

$$\begin{matrix} n \gg 1 \\ \ll \end{matrix} r^{\text{ex}(n, K_3)},$$

como $\xi > (10^4 + 1) \cdot (r + 1) \cdot \eta + 10^4 \cdot H((r + 1)\eta)$, o que contradiz a hipótese de que $|\mathcal{C}_{r, K_3^{(2)}}(G)| \geq r^{\text{ex}(n, K_3)}$ e prova a Afirmação 5.1.

Para concluir a prova da Afirmação 5.1 (e assim provar o Teorema 1.15), ainda precisamos provar o Lema 5.2.

5.1.3 Prova do Lema 5.2

Fixe um inteiro r tal que $8 \leq r \leq 26$, e seja \mathcal{H} um grafo reduzido multicolorido $K_3^{(2)}$ -livre para o qual todas as arestas são verdes. Lembre-se de que estamos assumindo que nenhuma aresta de \mathcal{H} tem listas de tamanho menor que dois.

A prova do Lema 5.2 será por indução, e dividiremos o conjunto \mathcal{S} de grafos reduzidos multicoloridos $K_3^{(2)}$ -livres para os quais todas as arestas são verdes em duas classes. Uma dessas classes, chamada \mathcal{S}_1 , contém todos os grafos reduzidos multicoloridos $\mathcal{H} \in \mathcal{S}$ que são K_4 -livres tais que não há cópia de K_3 cujas três arestas tenham listas de cores de tamanho pelo menos quatro.

Lema 5.3. *Dado $\mathcal{H} \in \mathcal{S}_1$ de ordem m , o seguinte é válido para $8 \leq r \leq 26$ e $0 < \alpha \leq \frac{1}{1000}$:*

$$c(\mathcal{H}) \leq r^{\frac{1}{4} - \alpha}.$$

Demonstração. Seja $\mathcal{H} \in \mathcal{S}_1$ com m vértices. Se $m = 1$, não há nada para provar. Se $m = 2$ e $8 \leq r \leq 13$, temos que

$$c(\mathcal{H}) \leq r_0 \leq \frac{r-1}{2} \leq r^{1-\alpha}$$

para $\alpha \leq 0.3014 < \frac{\ln 26 - \ln 12}{\ln 13} \leq \frac{\ln 2r - \ln(r-1)}{\ln r}$.

Para $r \geq 14$, temos que

$$c(\mathcal{H}) \leq r_0 \leq r - 2\sqrt{r} = r \left(1 - \frac{2}{\sqrt{r}}\right) \leq r e^{-2/\sqrt{r}} \leq r^{1-\alpha}$$

para $\alpha \leq 0.1203 < \frac{2}{\sqrt{26} \ln 26} \leq \frac{2}{\sqrt{r} \ln r}$.

Em seguida, assumamos $m \geq 3$ e $r \geq 9$. Pela definição de \mathcal{S}_1 , o conjunto $E_4 \cup \dots \cup E_{r_0}$ não induz uma cópia de K_3 . Assim, pelo Teorema de Turán, temos

$$|E_4| + \dots + |E_{r_0}| \leq \text{ex}(m, K_3) \leq \frac{1}{4}m^2.$$

Novamente, pela definição de \mathcal{S}_1 , o conjunto $E_2 \cup \dots \cup E_{r_0}$ não contém uma cópia de K_4 , levando a

$$|E_2| + \dots + |E_{r_0}| \leq \text{ex}(m, K_4) \leq \frac{1}{3}m^2.$$

Seja $x_i = |E_i|/m^2$ para $i \in \{2, \dots, r_0\}$, por (5.2), temos que

$$c(\mathcal{H}) = \prod_{j=2}^{r_0} j^{x_j},$$

assim, o logaritmo $\ln c(\mathcal{H})$ é limitado superiormente pela solução do programa

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=2}^{r_0} x_j \ln j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=4}^{r_0} x_j \leq \frac{1}{4}, \quad \sum_{j=2}^{r_0} x_j \leq \frac{1}{3} \\ & x_j \geq 0, \quad j \in \{2, \dots, r_0\}. \end{aligned}$$

A solução deste programa linear fornece a solução ótima $x_{r_0} = 1/4$, $x_3 = 1/12$ e $x_j = 0$ para os demais valores de j . Para $9 \leq r \leq 13$, temos

$$r_0^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{12}} \leq \left(\frac{r-1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{12}} \leq r^{\frac{1}{4}-\alpha}$$

$$\implies r^\alpha \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2r}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{12}} \leq 13^\alpha \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{26}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{12}} \leq 1. \quad (5.13)$$

Para $14 \leq r \leq 26$, temos que

$$\begin{aligned} r_0^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{12}} &\leq (r - 2\sqrt{r})^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{12}} \leq r^{\frac{1}{4}-\alpha} \\ \implies r^\alpha \cdot \left(1 - \frac{2}{\sqrt{r}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{12}} &\leq 26^\alpha \cdot \left(1 - \frac{2}{\sqrt{26}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{12}} \leq 1. \end{aligned} \quad (5.14)$$

A equação (5.13) e (5.14) é válida para $0 < \alpha \leq 0.0101$. Observe que, para $r = 8$, temos que $r_0 = 3$ e assim $E_2 \cup E_3$ não contém uma cópia de K_4 , e apenas esta restrição basta para que a solução ótima do programa linear seja $x_3 = 1/3$, $x_2 = 0$, e portanto $3^{\frac{1}{3}} \leq 1.44 < 1.68 \leq 8^{\frac{1}{4}}$. Isso leva a $c(\mathcal{H}) \leq r^{1/4-\alpha}$. \square

Para completar a prova da Afirmação 5.1, vamos considerar agora os grafos reduzidos que não foram considerados no Lema 5.3. Em nossos argumentos, usamos o seguinte problema de otimização para inteiros positivos $p \geq 2$ e L :

$$\begin{aligned} \max \quad & \prod_{j=1}^c x_j \\ \text{s.t.} \quad & c, x_1, \dots, x_c \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \\ & x_1 + \dots + x_c \leq p \\ & c \leq L. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Definição 5.4. *Dados inteiros positivos $k \geq 2$ e $r \geq 2$, sejam*

- (i) $c_k(r)$ o máximo do problema de otimização (5.15) com $p = r \cdot \lfloor k/2 \rfloor$ e $L = \binom{k}{2}$;
- (ii) $c_k^*(r)$ o máximo do problema de otimização (5.15) com $p = r$ e $L = k$.

Usaremos os três lemas a seguir.

Lema 5.5. *Seja $k \geq 3$ e considere \mathcal{H} um grafo reduzido multicolorido $K_3^{(2)}$ -livre tal que $|L_e| \geq 2$ para todo $e \in E(\mathcal{H})$. Assuma que $A \subset V(\mathcal{H})$ é tal que $\mathcal{H}[A]$ é isomorfo a K_k . Para um vértice $v \in V(\mathcal{H})$ seja $E'(v) = \{\{v, x\} \in E(\mathcal{H}) : x \in A\}$. Para qualquer $v \in V(\mathcal{H}) \setminus A$, vale o seguinte*

$$\prod_{e \in E'(v)} |L_e| \leq c_k^*(r) \leq \bar{c}_k(r) = \max \left\{ \left(\frac{r}{j} \right)^j : j \in \{1, \dots, k\} \right\}. \quad (5.16)$$

Prova. Para cada aresta $e \in E'(v)$, seja $x_e = |L_e|$. Por A induzir uma clique e \mathcal{H} ser $K_3^{(2)}$ -livre, as listas associadas às arestas entre v e A são mutuamente disjuntas, de modo que $\sum_{e \in E'(v)} x_e \leq r$. Seja $j \leq k$ o número de arestas entre v e A . Está claro que

$$\prod_{e \in E'(v)} |L_e| \leq \max \left\{ \prod_{i=1}^j a_i : 1 \leq j \leq k, a_1, \dots, a_j > 0, a_1 + \dots + a_j \leq r \right\} = c_k^*(r).$$

O resultado segue pois, para $a_1 + \dots + a_j \leq r$, temos

$$\prod_{i=1}^j a_i \leq \left(\frac{r}{j} \right)^j.$$

Lema 5.6. *Sejam r e $k \geq 3$ inteiros positivos. Para $j \geq 1$, considere uma partição do conjunto de arestas $E(K_k) = E_1 \cup \dots \cup E_j$ do grafo completo K_k e fixe inteiros $1 \leq s_1, \dots, s_j \leq r$ tais que*

$$r \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor < \sum_{i=1}^j |E_i| s_i.$$

Então, para qualquer atribuição de listas de cores em $[r]$ às arestas de K_k tal que, para cada i , todas as arestas $e \in E_i$ tenham lista de tamanho pelo menos s_i , existe um cópia de K_3 para a qual duas das listas têm interseção não vazia.

Prova. Suponha uma atribuição da lista de cores como no enunciado tal que, para todas as cópias de K_3 em K_k , as listas associadas a quaisquer duas de suas arestas sejam disjuntas. Isso significa que, para cada cor α , as arestas cujas listas contêm α formam um emparelhamento em K_k . Como um emparelhamento máximo em K_k tem tamanho $\lfloor k/2 \rfloor$, devemos ter

$$r \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \geq \sum_{e \in E(K_k)} |L_e| \geq \sum_{i=1}^j |E_i| s_i,$$

contradizendo nossa suposição sobre r e k .

Lema 5.7. *Sejam $r \geq 2$ e $k \geq 3$ inteiros. Seja \mathcal{H} grafo reduzido multicolorido $K_3^{(2)}$ -livre cujo grafo subjacente é K_k e cujas listas de cores das arestas estão contidas em $[r]$ e têm tamanho pelo menos dois. Então*

$$\prod_{e \in E(\mathcal{H})} |L_e| \leq \tilde{c}_k(r) = \left(\frac{r}{\binom{k}{2}} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \right)^{\binom{k}{2}}.$$

Prova. Dado uma aresta $e \in E(\mathcal{H})$, seja $x_e = |L_e|$. Seja E_i denotando o conjunto de arestas de \mathcal{H} cujas listas de cores têm tamanho i . Pelo Lema 5.6, $\sum_{e \in E(\mathcal{H})} x_e = \sum_{i=2}^r i \cdot |E_i| \leq r \lfloor k/2 \rfloor$, dado que \mathcal{H} é $K_3^{(2)}$ -livre.

Em particular, o vetor $(x_e)_{e \in E(\mathcal{H})}$ é uma solução viável para o problema de otimização (5.15) com $p = r \lfloor k/2 \rfloor$ e $L = \binom{k}{2}$. Para a desigualdade, observe que para qualquer escolha de j números reais positivos tais que $a_1 + \dots + a_j \leq r \lfloor k/2 \rfloor$, temos que

$$\prod_{i=1}^j a_i \leq \left(\frac{r}{j} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \right)^j.$$

Isso conclui a prova.

Agora estamos prontos para provar o resultado desejado.

Lema 5.8. *Fixe um inteiro r tal que $8 \leq r \leq 26$. Dado $\mathcal{H} \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_1$ e $0 < \alpha \leq \frac{1}{1000}$, temos que*

$$c(\mathcal{H}) \leq r^{\frac{1}{4}-\alpha}.$$

Demonstração. Seja $r \in \{8, \dots, 26\}$. Por contradição, suponha que o resultado seja falso e escolha um contra-exemplo $\mathcal{H} \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_1$ com o número mínimo de vértices. Lembre-se que as arestas de \mathcal{H} possuem listas de cores com tamanhos entre 2 e r_0 . Seja m o número de vértices de \mathcal{H} . Primeiro mostramos que \mathcal{H} não é isomorfo a uma clique K_m tal que $3 \leq m \leq 6$.

Para \mathcal{H} isomorfo a K_3 , Lema 5.7 nos diz que $c(\mathcal{H})^9 \leq \tilde{c}_3(r) = (r/3)^3$. Lema 5.8 é válido nesse caso pois $c(\mathcal{H}) \leq ((r/3)^3)^{\frac{1}{9}} \leq r^{\frac{1}{4}-\alpha}$ para $r^{\frac{1}{12}+\alpha} \leq 26^{\frac{1}{12}+\alpha} \leq 3^{\frac{1}{3}}$, que por sua vez vale para

$$\alpha \leq 0.02906 < \frac{4 \ln 3 - \ln 26}{12 \ln 26}.$$

Para \mathcal{H} isomorfo a K_4 , Lema 5.7 nos dá $c(\mathcal{H})^{16} \leq \tilde{c}_4(r) = (r/3)^6$. Portanto, precisamos $c(\mathcal{H}) \leq ((r/3)^6)^{\frac{1}{16}} \leq r^{\frac{1}{4}-\alpha}$, que vale para

$$\alpha \leq 0.00144 < \frac{3 \ln 3 - \ln 26}{8 \ln 26}.$$

Se \mathcal{H} é isomorfo a K_5 , Lema 5.7 nos dá $c(\mathcal{H})^{25} \leq \tilde{c}_5(r) = (r/5)^{10}$. Portanto, $c(\mathcal{H}) \leq ((r/5)^{10})^{\frac{1}{25}} = (r/5)^{2/5} < r^{\frac{1}{4}-\alpha}$ se

$$\alpha \leq 0.04759 < \frac{8 \ln 5 - 3 \ln 26}{20 \ln 26}.$$

Finalmente, se \mathcal{H} é isomorfo a K_6 , pelo Lema 5.7 o produto do tamanho das listas de cores de \mathcal{H} é no máximo $\tilde{c}_6(r)$. Temos assim

$$c(\mathcal{H})^{36} \leq (\tilde{c}_6(r))^{\frac{1}{36}} = \left(\frac{r}{5}\right)^{\frac{15}{36}} \leq r^{\frac{1}{4}-\alpha},$$

que vale para

$$\alpha \leq 0.03915 < \frac{15 \ln 5 - 6 \ln 26}{36 \ln 26}.$$

Tendo estabelecido que \mathcal{H} não é isomorfo a uma clique de $3 \leq m \leq 6$ vértices, seja $\omega(\mathcal{H}) \geq 3$ denotando o tamanho de um clique máximo em \mathcal{H} . Se $\omega(\mathcal{H}) \geq 6$, então o fato de $\mathcal{H} \neq K_6$ implica que $m > 6$. Fixe $k = 6$ e escolha um conjunto de vértices A tal que A induz uma cópia de K_6 em \mathcal{H} . Caso contrário, seja $k = \omega(\mathcal{H})$ e fixe um conjunto A de vértices de tamanho k que induza uma cópia de K_k em \mathcal{H} . Portanto, sabemos, neste caso, que $m > k$. Dado um vértice $v \in V(\mathcal{H}) \setminus A$, seja c_v o produto dos tamanhos das listas das arestas conectando v a A . Claramente,

$$c(\mathcal{H})^{m^2} = c(\mathcal{H}[A])^{k^2} \cdot \left(\prod_{v \in V(\mathcal{H}) \setminus A} c_v \right) \cdot c(\mathcal{H}[V(\mathcal{H}) \setminus A])^{(m-k)^2}. \quad (5.17)$$

Sabemos que $c(\mathcal{H}[A]), c(\mathcal{H}[V(\mathcal{H}) \setminus A]) \leq r^{\frac{1}{4}-\alpha}$ pela minimalidade de \mathcal{H} .

Se $k = 6$, temos que $c_v \leq \bar{c}_6(r)$ pelo Lema 5.5. Então (5.17) leva a

$$\begin{aligned} c(\mathcal{H})^{m^2} &\leq r^{(\frac{1}{4}-\alpha)6^2} \cdot (\bar{c}_6(r))^{m-6} \cdot r^{(\frac{1}{4}-\alpha)(m-6)^2} \\ &= \left(\frac{\bar{c}_6(r)}{r^{3-12\alpha}} \right)^{m-6} \cdot r^{(\frac{1}{4}-\alpha)m^2}. \end{aligned}$$

Concluimos então que $c(\mathcal{H})^{m^2} \leq r^{(\frac{1}{4}-\alpha)m^2}$ pois $\bar{c}_6(r)/r^{3-12\alpha} < 1$ para $13 \leq r \leq 26$. Aqui, basta verificar que $\bar{c}_6(r)$, definida em (5.16), satisfaz $\bar{c}_6(r) < r^{3-12\alpha}$. Temos que

$$\bar{c}_6(r) = \begin{cases} (r/6)^6 & \text{se } r \geq 15 \\ (r/5)^5 & \text{se } 13 \leq r \leq 14 \\ (r/4)^4 & \text{se } 10 \leq r \leq 12 \\ (r/3)^3 & \text{se } 8 \leq r \leq 9 \end{cases}$$

Assim $\bar{c}_6(r) < r^{3-12\alpha}$ para

$$\alpha \leq 0.0249 < \frac{2 \ln 6 - \ln 26}{4 \ln 26}.$$

Para $k < 6$, a maximalidade do clique implica que qualquer vértice $v \in V(\mathcal{H}) \setminus A$ tem no máximo $k - 1$ vizinhos em A , de modo que (5.17) torna-se

$$\begin{aligned} c(\mathcal{H})^{m^2} &\leq r^{(\frac{1}{4}-\alpha)k^2} \cdot (c_{k-1}^*(r))^{m-k} \cdot r^{(\frac{1}{4}-\alpha)(m-k)^2} \\ &= \left(\frac{c_{k-1}^*(r)}{r^{\frac{k}{2}-2k\alpha}} \right)^{m-k} \cdot r^{(\frac{1}{4}-\alpha)m^2} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Para obter nosso resultado, mostramos que $c_{k-1}^*(r) < r^{\frac{k}{2}-2k\alpha}$ para todos os $k < 6$ e $8 \leq r \leq 26$.

Se $k = 5$, usamos que $c_4^*(r) \leq \bar{c}_4(r) \leq \max \left\{ \left(\frac{r}{j} \right)^j : j \in \{1, 2, 3, 4\} \right\} \stackrel{(i)}{<} r^{\frac{5}{2}-10\alpha}$ para $8 \leq r \leq 26$.

Aqui, basta verificar que $\bar{c}_4(r)$, definida em (5.16), satisfaz $\bar{c}_4(r) < r^{\frac{5}{2}-10\alpha}$. Temos que

$$\bar{c}_4(r) = \begin{cases} (r/4)^4 & \text{se } 10 \leq r \leq 26 \\ (r/3)^3 & \text{se } 8 \leq r \leq 9 \end{cases}$$

De fato, para $10 \leq r \leq 26$, (i) é equivalente a $r^{10\alpha+\frac{3}{2}} \leq 4^4$, que vale se

$$\alpha \leq 0.0201 < \frac{8 \ln 4 - 3 \ln 26}{20 \ln 26}.$$

Para $8 \leq r \leq 9$, (i) é equivalente a $r^{10\alpha+\frac{1}{2}} \leq 3^3$, que vale se

$$\alpha \leq 0.1 < \frac{6 \ln 3 - \ln 9}{20 \ln 9}.$$

Se $k = 4$, usamos que $c_3^*(r) \leq \bar{c}_3(r) = (r/3)^3 \stackrel{(ii)}{<} r^{2-8\alpha}$ para $8 \leq r \leq 26$.

De fato, (ii) é equivalente a $r^{1+8\alpha} \leq 3^3$, que vale se

$$\alpha \leq 0.0014 < \frac{3 \ln 3 - \ln 26}{8 \ln 26}.$$

Observamos que, para $r = 27$, não existe $\alpha > 0$ para o qual (ii) vale.

Se $k < 4$, sabemos por hipótese $\mathcal{H} \notin \mathcal{S}_1$ que \mathcal{H} é K_4 -livre, mas contém uma cópia de K_3 cujas arestas tem tamanho da listas de cores de pelo menos quatro. Fixamos um conjunto 3-vértice $A \subset V(\mathcal{H})$ que induz uma cópia de K_3 cujas arestas têm listas de tamanho de pelo menos quatro. Se $v \in V(\mathcal{H}) \setminus A$, então v tem no máximo dois vizinhos em A . Se $v \in V(\mathcal{H}) \setminus A$ tem no máximo um vizinho em A , então sua lista tem tamanho no máximo r_0 . Se $v \in V(\mathcal{H}) \setminus A$ tem exatamente dois vizinhos em A , digamos v_1 e v_2 , então essas arestas formam um triângulo com uma aresta na cópia de K_3 . Como a lista da aresta $\{v_1, v_2\}$ tem tamanho no mínimo quatro, o produto c_v dos tamanhos das listas associadas às duas arestas entre A e v é no máximo $(r-4)^2/4 = s^*(r)$. Afirmamos que $r_0 < s^*(r)$ para todo $r \geq 8$. De fato,

$$\frac{r-1}{2} < \frac{(r-4)^2}{4}.$$

Desenvolvendo essa desigualdade, chegamos a

$$0 < r^2 - 10r + 18,$$

que é válido para todo $r \geq 8$. Com isso, a desigualdade (5.18) pode ser tomada como

$$c(\mathcal{H})^{m^2} \leq \left(\frac{(r-4)^2}{4r^{\frac{3}{2}-6\alpha}} \right)^{m-k} \cdot r^{(\frac{1}{4}-\alpha)m^2}.$$

Note que $(r-4)^2 \leq 4 \cdot r^{\frac{3}{2}-6\alpha}$ é equivalente a

$$r^{\frac{1}{2}+6\alpha} \left(1 - \frac{4}{r} \right)^2 \leq 4.$$

Para $\alpha > 0$, o lado esquerdo está aumentando em função de r , então isso vale para $8 \leq r \leq 26$ pois

$$26^{\frac{1}{2}+6\alpha} \left(1 - \frac{4}{26}\right)^2 \leq 4$$

vale para $\alpha \leq 0,0046$. Isso conclui o passo de indução e prova o Lema 5.8.

□

6 ESTABILIDADE DE CORES PARA GRAFOS \mathcal{P}_4^* -EXTREMAIS

O objetivo desse capítulo é provar a estabilidade de cores para grafos \mathcal{P}_4^* -livres, ou seja, vamos mostrar que um grafo G de n vértices o que satisfaz $c_{r, \mathcal{P}_4^*}(G) \geq r^{\text{ex}(n, K_4)}$, deve ter uma estrutura muito próxima à do grafo de Turán $T_3(n)$, sendo este o grafo (r, \mathcal{P}_4^*) -extremal.

Nossa abordagem é semelhante à dos Capítulos 3 e 4. Como no Capítulo 5, acrescentamos um argumento indutivo para encontrar uma nova cota inferior $\mu_4(4)$ para o parâmetro $r_0(\mathcal{P}_4^*)$, a qual melhora a cota inferior $\mu_3(4)$, fornecido pela demonstração do Teorema 1.11. A principal diferença com o Capítulo 5 é que aqui não conseguimos encontrar o valor exato do parâmetro $r_0(\mathcal{P}_4^*)$, apenas uma cota inferior melhor.

6.1 Propriedade de Estabilidade De Cores para Grafos

\mathcal{P}_4^* -livres

A principal contribuição desse capítulo é melhorar a cota do Capítulo 4, de $\mu_3(4) = 91$ para $\mu_4(4) = 135$, provando que o grafo $T_3(n)$ é o único grafo (r, \mathcal{P}_4^*) -extremal para o intervalo $2 \leq r \leq 135 = \mu_4(4)$. Para demonstrar isso, vamos mostrar a propriedade da estabilidade de cores para o padrão \mathcal{P}_4^* , estabelecendo assim o limite superior $\mu_4(4)$.

Vamos enunciar novamente o Teorema 1.17, principal resultado desse capítulo.

Teorema 1.17. *Seja $2 \leq r \leq 135$. Para qualquer $\delta > 0$, existe n_0 tal que o seguinte vale para qualquer $n \geq n_0$. Se $G = (V, E)$ é um grafo de n vértices tal que*

$$|\mathcal{C}_{r,(K_4,\mathcal{P})}(G)| \geq r^{\text{ex}(n,K_4)},$$

então existe uma partição $V = W_1 \cup W_2 \cup W_3$ do conjunto de vértices tal que $e_G(W_1) + e_G(W_2) + e_G(W_3) \leq \delta n^2$.

A prova é, estruturalmente, similar à prova do Teorema 1.15 do capítulo anterior, onde também aplicamos o Lema da Regularidade de Szemerédi e, posteriormente, provaremos uma afirmação similar à Afirmação 5.1.

6.1.1 Prova do Teorema 1.17

Antes de iniciarmos a prova do Teorema 1.17, vale ressaltar que, novamente omitiremos alguns detalhes da aplicação do Lema de Regularidade de Szemerédi. Uma observação importante é de nos concentraremos em provar o Teorema 1.17 para $r \in \{92, \dots, 135\}$, uma vez que para $r \in \{2, \dots, 91\}$ a prova segue do Teorema 1.12 para $k = 4$.

Sejam $r \in \{92, \dots, 135\}$ fixo e $\delta > 0$. Consideremos as constantes auxiliares $\xi > 0$ e $\eta = \eta(\xi) > 0$ suficientemente pequenas, de modo que as definiremos ao longo do texto.

Fixe $\varepsilon = \varepsilon(r, \eta, 4) > 0$ e $n_0 = n_0(r, \eta, 4)$ que satisfazem o Lema 2.2, e suponha, sem perda de generalidade, que $0 < \varepsilon < \min\{\eta/2, 1/n_0\}$. Fixe $M = M(r, \varepsilon)$ dado pelo Lema 2.1.

Dado um grafo G com n vértices tal que $n \geq n_0$, seja $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G)$ o conjunto de todas as r -colorações \mathcal{P}_4^* -livres de G . Pelo Lema 2.1 e a discussão que se segue, cada coloração $\Phi \in \mathcal{C}$ está associada a uma partição multicolorida ε -regular $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$, onde $1/\varepsilon \leq m \leq M$. Essa partição, por sua vez, está associada a um grafo reduzido multicolorido $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\eta)$. Nossa escolha de parâmetros implica que \mathcal{H} deve ser \mathcal{P}_4^* -livre, caso contrário, a coloração de G que leva a ele conteria uma cópia de \mathcal{P}_4^* pelo Lema 2.2.

Novamente, usando a mesma argumentação da prova do Lema 4.1, isto é, aplicando o Lema 2.1, podemos concluir que, o número de colorações \mathcal{P}_4^* -livre de G é no máximo

$$M^n \cdot 2^{rM^2/2} \cdot 2^{H((r+1)\eta)n^2} \cdot r^{(r+1)\eta n^2} \cdot \max_{\mathcal{H}} \left(\prod_{j=1}^r j^{\frac{e_j(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|^2}} \right)^{n^2}. \quad (6.1)$$

Nosso objetivo é encontrar um limitante superior para (6.1). O termo $j = 1$ no produto (6.1) não afeta o resultado. Então, definimos $\mathcal{S} = \mathcal{S}(G)$ como o conjunto de todos os subgrafos reduzidos multicoloridos \mathcal{H} de G de modo que todas as arestas estejam associadas a listas de tamanho pelo menos dois. Note que, $\mathcal{H} \in \mathcal{S}$ é \mathcal{P}_4^* -livre se, e somente se, todas as listas associadas às arestas de uma cópia de K_4 são mutuamente disjuntas. Dado $\mathcal{H} \in \mathcal{S}$, seja

$$c(\mathcal{H}) = \prod_{e \in E(\mathcal{H})} |L_e|^{\frac{1}{|V(\mathcal{H})|^2}}. \quad (6.2)$$

Queremos encontrar $\max_{\mathcal{H} \in \mathcal{S}} c(\mathcal{H})$ para limitar (6.1).

O passo principal em nossa prova é a próxima afirmação que afirma que existe um grafo reduzido multicolorido \mathcal{H} que tem uma quantidade de arestas muito próxima do grafo de Turán $T_3(n)$, e essas arestas têm listas de cores “grandes”. A seguir faremos algumas definições importantes para a sequência da prova.

No restante da prova, dado um inteiro r , consideramos as funções

$$r_0 = r_0(r) = \lfloor \sqrt{6r - 35} \rfloor, \quad (6.3)$$

$$r_1 = r_1(r) = r_0 + 1. \quad (6.4)$$

A propriedade crucial na definição de r_1 é que

$$A(r) = \left(\frac{r - 3 \cdot r_1}{3} \right)^3 < r^2. \quad (6.5)$$

Aplicando a definição de r_1 , a inequação (6.5) pode ser vista como

$$r - 3 \cdot (\sqrt{6r - 35} - 1) < 3r^{2/3} \quad (6.6)$$

A inequação (6.6) pode ser interpretada como uma função $f(r) = r - 3 \cdot (\sqrt{6r - 35} - 1) - 3r^{2/3}$, onde $f(r) < 0$ para $92 \leq r \leq 135$. Tomando a derivada de $f(r)$

$$f'(r) = -\frac{9}{\sqrt{6r - 35}} - \frac{2}{r^{1/3}} + 1.$$

Observe que

$$-\frac{9}{\sqrt{6r - 35}} - \frac{2}{r^{1/3}} \leq -\frac{9}{\sqrt{6 \cdot 135 - 35}} - \frac{2}{135^{1/3}} < 1.$$

Portanto, $f'(r)$ é positiva para $r \geq 92$, e assim, $f(x)$ é crescente. Assim, a inequação (6.6) é válida para todo $92 \leq r \leq 135$ se $f(135) < 0$. Note que

$$f(135) = 135 - 3 \cdot (\sqrt{6 \cdot 135 - 35} - 1) - 3 \cdot 135^{2/3} = -24.46 < 0.$$

Outra propriedade importante de r_1 é que $5 \cdot r_1 + 1 > r$. Para provar que

$$5(\sqrt{6r - 35} - 1) + 1 > r, \quad (6.7)$$

observe que (6.7) é equivalente a

$$r^2 - 142r + 891 < 0, \quad (6.8)$$

a qual é satisfeita para todo $92 \leq r \leq 135$.

Seja \mathcal{H} um grafo reduzido multicolorido com m vértices qualquer. Nossa conclusão seguirá a seguir.

Afirmção 6.1. *Existe um grafo reduzido multicolorido \mathcal{H} tal que*

$$e_{r_1}(\mathcal{H}) + \cdots + e_r(\mathcal{H}) \geq \text{ex}(m, K_4) - \xi m^2. \quad (6.9)$$

Antes de abordar a prova da Afirmção 6.1, mostramos que ela implica o resultado desejado.

Seja \mathcal{H} um grafo reduzido multicolorido com m vértices tal que $e_{r_1}(\mathcal{H}) + \cdots + e_r(\mathcal{H}) \geq \text{ex}(m, K_4) - \xi m^2$. Seja \mathcal{H}' o subgrafo de \mathcal{H} com conjunto de arestas $E_{r_1}(\mathcal{H}) \cup \cdots \cup E_r(\mathcal{H})$, onde $E_j(\mathcal{H})$ denota o conjunto de arestas de \mathcal{H} cujas listas têm tamanho j . Afirmamos que \mathcal{H}' é K_4 -livre. De fato, se \mathcal{H}' contivesse uma cópia de K_4 com arestas $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$, então

$$|L_{e_1}| + |L_{e_2}| + |L_{e_3}| + |L_{e_4}| + |L_{e_5}| + |L_{e_6}| \geq 6r_1 > 5r_1 + 1 > r$$

implica que duas das listas têm interseção não vazia, levando a um \mathcal{P}_4^* em G pelo Lema 2.2.

Pelo Teorema 2.4, existe uma partição $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = [m]$ com

$$e_{\mathcal{H}'}(U_1) + e_{\mathcal{H}'}(U_2) + e_{\mathcal{H}'}(U_3) \leq \xi m^2,$$

onde $e_{\mathcal{H}'}(U_i)$ é o número de arestas de \mathcal{H}' com ambas as extremidades em U_i . Pelo Teorema 2.2 O subgrafo tripartido $\widehat{\mathcal{H}}$ obtido de \mathcal{H}' removendo todas as arestas com ambas as extremidades na mesma classe satisfaz

$$e(\widehat{\mathcal{H}}) \geq (\text{ex}(m, K_4) - \xi m^2) - \xi m^2 = \text{ex}(m, K_4) - 2\xi m^2.$$

Afirmamos que, mesmo que haja um número arbitrário de arestas em \mathcal{H} com listas de tamanho 1 a r_0 (enquanto preservamos sua propriedade de ser \mathcal{P}_4^* -livre), $e_1(\mathcal{H}) + \dots + e_{r_0}(\mathcal{H}) \leq 12\xi m^2$. Caso contrário, por nossa escolha de ξ , o Lema 2.5 pode ser aplicado e o grafo obtido adicionando as arestas em $E_1 \cup \dots \cup E_{r_0}$ ao grafo $\widehat{\mathcal{H}}$ conteria um K_4 tal que exatamente uma das arestas, digamos f_1 , esteja em algum conjunto U_i . Sejam f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 as outras arestas da cópia de K_4 , que se encontram em $E_{r_1} \cup \dots \cup E_r$. Por construção, temos

$$|L_{f_1}| + |L_{f_2}| + |L_{f_3}| + |L_{f_4}| + |L_{f_5}| + |L_{f_6}| \geq 1 + 5r_1 > r,$$

levando a uma cópia de \mathcal{P}_4^* em G pelo Lema 2.2, uma contradição.

Portanto, o número de arestas de \mathcal{H} com ambas as extremidades no mesmo conjunto U_i é no máximo $13\xi m^2$. Seja $W_i = \cup_{j \in U_i} V_j$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. Então, tomando $\eta < \frac{\delta}{2r}$ e $\xi < \frac{\delta}{26}$, temos

$$e_G(W_1) + e_G(W_2) + e_G(W_3) \leq r\eta n^2 + (n/m)^2 \cdot (e_{\mathcal{H}}(U_1) + e_{\mathcal{H}}(U_2) + e_{\mathcal{H}}(U_3)) < \delta n^2,$$

como requerido. Isso prova Teorema 1.15.

6.1.2 Prova da Afirmação 6.1

Passamos agora para a prova da Afirmação 6.1. Dado um grafo reduzido \mathcal{H} , seja $E_b(\mathcal{H})$ o conjunto de todas as arestas cujas listas de cores têm tamanhos entre r_1 e r . Chamamos essas arestas de arestas *azuis* de \mathcal{H} . Seja $E_g(\mathcal{H})$ o conjunto de todas as arestas cujas listas de cores tenham tamanhos entre 2 e r_0 , as arestas *verdes* de \mathcal{H} . O ingrediente principal na prova da Afirmação 6.1 é o seguinte lema auxiliar.

Lema 6.2. *Seja r um inteiro tal que $2 \leq r \leq 135$ e seja \mathcal{H} um grafo reduzido multicolorido \mathcal{P}_4^* -livre para o qual o conjunto de arestas azuis é livre de triângulos. Então, para todo $0 < \alpha < 10^{-6}$,*

$$c(\mathcal{H}) \leq r^{\frac{1}{3}-\alpha}.$$

Antes de provar este lema, mostraremos que ele implica a validade da Afirmação 6.1. Para este fim, suponha por contradição que qualquer coloração de G , evitando \mathcal{P}_4^* , leva a um grafo reduzido multicolorido \mathcal{H} , onde $|V(\mathcal{H})| = m$, para o qual

$$e_{r_1}(\mathcal{H}) + \cdots + e_r(\mathcal{H}) < \text{ex}(m, K_4) - \xi m^2. \quad (6.10)$$

Seja $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$. Se existirem vértices $u, v, w \in \mathcal{H}_0$ tais que $T_1 = \{u, v, w\}$ forma uma cópia de K_3 onde as três arestas têm lista de cores de tamanho pelo menos r_1 , isto é, $|L_{u,v}|, |L_{u,w}|, |L_{v,w}| \geq r_1$, vamos proceder da seguinte forma. Seja $z \in V(\mathcal{H}_0) \setminus \{u, v, w\}$. Se no máximo dois dos pares $\{u, z\}$, $\{v, z\}$ e $\{w, z\}$ são arestas de \mathcal{H}_0 , as listas de cores nestas arestas não podem produzir um \mathcal{P}_4^* envolvendo T_1 . Se z é vizinho comum de u, v e w , a soma dos tamanhos de $L_{\{z,u\}}$, $L_{\{z,v\}}$ e $L_{\{z,w\}}$ é no máximo $r - (L_{\{u,v\}} + L_{\{u,w\}} + L_{\{v,w\}}) \leq r - 3r_1$, caso contrário, obtemos uma cópia

de \mathcal{P}_4^* . Assim, a soma dos tamanhos das três listas é no máximo $r - 3r_1$, fazendo com que o produto dos tamanhos das listas $L_{\{u,z\}}$, $L_{\{v,z\}}$ e $L_{\{w,z\}}$ seja no máximo $A(r) = \left(\frac{r-3r_1}{3}\right)^3$. Dizemos que um vértice z é do *tipo 1* se houver uma única aresta conectando-o a T_1 e essa aresta for azul. Se z for um vértice que tem duas arestas conectando-o a T_1 e essas arestas forem azuis, dizemos que esse vértice é do *tipo 2*. Caso contrário, diz-se que ele é do *tipo 3*. Se z é uma aresta do tipo 3, então ou a aresta que a conecta a algum vértice de T_1 tem lista de tamanho no máximo r_0 ou z tem duas arestas que conectam-se a T_1 , onde pelo menos uma delas seja verde. Assim, o produto dos tamanhos das listas de arestas é no máximo $r \cdot r_0$ ou, no caso de z ter três arestas que conectam-se a T_1 , o produto dos tamanhos das listas é no máximo $A(r)$. Isso significa que o produto dos tamanhos das listas das arestas conectando um vértice do tipo 3 a T_1 é no máximo $B(r) = \max\{r_0, r \cdot r_0, A(r)\} < r^2$. Isso significa que $B(r) \leq r^2 - 1$. Note que

$$\frac{B(r)}{r^2} \leq \frac{r^2 - 1}{r^2} \leq r^{-\alpha} \quad (6.11)$$

é válido se $e^{-1/r^2} \leq r^{-\alpha}$, o que é equivalente a $\alpha \ln r^2 - 1/r \leq 0$. A derivada de $f(r) = \alpha \ln r^2 - 1/r$ é positiva, o que significa que (6.11) é satisfeita para todo $92 \leq r \leq 135$ se $\alpha \ln 135^2 - 1/135 \leq 0$, que é válido para $\alpha \leq 0.0006$.

Sejam $n_1(T_1)$, $n_2(T_1)$ e $n_3(T_1)$ o número de vértices do tipo 1, 2 e 3, respectivamente, com respeito a T_1 . Agora, remova os vértices u , v e w e todas as arestas incidentes neles de \mathcal{H}_0 , e denote por \mathcal{H}_1 o grafo multicolorido remanescente de $(m - 3)$ vértices. Se \mathcal{H}_1 contém uma cópia de um triângulo T_2 onde as três arestas têm lista de cores de tamanho pelo menos r_1 , repetimos esse argumento para \mathcal{H}_1 e para grafos subsequentes até chegarmos a um grafo \mathcal{H}_{k_1} com $(m - 3k_1)$ vértices que não contém nenhuma cópia de triângulos T_i cujas três arestas tenham listas de cores

de tamanho pelo menos r_1 . Por construção, temos

$$3k_1 + \sum_{i=1}^{k_1} (n_1(T_i) + n_2(T_i) + n_3(T_i)) = \sum_{i=1}^{k_1} (m - 3i + 3) = k_1 m - \frac{3}{2}k_1^2 + \frac{3}{2}k_1. \quad (6.12)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & r^{3k_1+n_1(T_1)+\dots+n_1(T_{k_1})} \cdot r^{2(n_2(T_1)+\dots+n_2(T_{k_1}))} \cdot (B(r))^{n_3(T_1)+\dots+n_3(T_{k_1})} \\ = & r^{3k_1+n_1(T_1)+\dots+n_1(T_{k_1})} \cdot r^{2(n_2(T_1)+\dots+n_2(T_{k_1}))} \cdot (B(r))^{n_3(T_1)+\dots+n_3(T_{k_1})} \cdot \left(\frac{r}{r}\right)^{2(n_3(T_1)+\dots+n_3(T_{k_1}))} \\ = & r^{k_1 m - \frac{3}{2}k_1^2 + \frac{3}{2}k_1} \cdot r^{n_2(T_1)+\dots+n_2(T_{k_1})+n_3(T_1)+\dots+n_3(T_{k_1})} \cdot \left(\frac{B(r)}{r^2}\right)^{n_3(T_1)+\dots+n_3(T_{k_1})}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

Defina quantidades β e γ tais que

$$\sum_{i=1}^{k_1} n_2(T_i) = \beta(k_1 m - \frac{3}{2}k_1^2 + \frac{3}{2}k_1) \text{ e } \sum_{i=1}^{k_1} n_3(T_i) = \gamma(k_1 m - \frac{3}{2}k_1^2 + \frac{3}{2}k_1),$$

de forma que

$$\sum_{i=1}^{k_1} (n_2(T_i) + n_3(T_i)) = (\beta + \gamma)(k_1 m - \frac{3}{2}k_1^2 + \frac{3}{2}k_1),$$

com $0 \leq \beta + \gamma \leq 1$. A equação (6.13) pode ser reescrita como

$$r^{k_1 m - \frac{3}{2}k_1^2 + \frac{3}{2}k_1} \cdot r^{(\beta+\gamma)(k_1 m - \frac{3}{2}k_1^2 + \frac{3}{2}k_1)} \cdot \left(\frac{B(r)}{r^2}\right)^{\gamma(k_1 m - \frac{3}{2}k_1^2 + \frac{3}{2}k_1)} \quad (6.14)$$

$$= r^{(1+\beta+\gamma)(k_1 m - \frac{3}{2}k_1^2 + \frac{3}{2}k_1)} \cdot \left(\frac{B(r)}{r^2}\right)^{\gamma(k_1 m - \frac{3}{2}k_1^2 + \frac{3}{2}k_1)}. \quad (6.15)$$

Observar que, como $0 \leq k_1 \leq m/3$, quanto maior o valor de k_1 , maior esse termo.

Como o grafo \mathcal{H}_{k_1} não contém triângulos azuis e usando o limite superior dado no Lema 6.2, obtemos

$$c(\mathcal{H})^{m^2} \leq r^{(1+\beta+\gamma)(k_1 m - \frac{3}{2}k_1^2 + \frac{3}{2}k_1)} \cdot \left(\frac{B(r)}{r^2}\right)^{\gamma(k_1 m - \frac{3}{2}k_1^2 + \frac{3}{2}k_1)} \cdot r^{(\frac{1}{3}-\alpha)(m-3k_1)^2} \quad (6.16)$$

Relembre que, por (6.10), estamos assumindo que o número de arestas azuis de \mathcal{H} é no máximo $\text{ex}(m, K_4) - \xi m^2$. Vamos considerar dois cenários.

Caso 1: Primeiro suponha que $k_1 m - \frac{3}{2}k_1^2 + \frac{3}{2}k_1 \leq \text{ex}(m, K_4) - \xi m^2$. Neste cenário, todos os vértices na construção acima podem ser do tipo 1 ou 2. Portanto, tomando $k_1 = \frac{m}{3} - \sqrt{\xi}m$ a equação (6.16) se reduz a

$$r^{(1+\beta+\gamma)\left(\frac{m^2}{6} - \frac{3\xi m^2}{2} - \frac{3\sqrt{\xi}m}{2} + \frac{m}{2}\right)} \cdot \left(\frac{B(r)}{r^2}\right)^{\gamma\left(\frac{m^2}{6} - \frac{3\xi m^2}{2} - \frac{3\sqrt{\xi}m}{2} + \frac{m}{2}\right)} \cdot r^{3\xi m^2 - 9\alpha\xi m^2} \quad (6.17)$$

Estamos interessados em buscar um limitante superior para a equação (6.17), isto é

$$\begin{aligned} & r^{2\left(\frac{m^2}{6} - \frac{3\xi m^2}{2} - \frac{3\sqrt{\xi}m}{2} + \frac{m}{2}\right)} \cdot r^{3\xi m^2 - 9\alpha\xi m^2} \\ & < r^{\frac{m^2}{3} + m - 9\alpha\xi m^2} < r^{\frac{m^2}{3} - \alpha\xi m^2}. \end{aligned}$$

A última desigualdade vale pois $\frac{1}{m} < 8\alpha\xi$, para m suficientemente grande. Note que, na demonstração, m depende do parâmetro ε , que é escolhido depois de ξ .

Caso 2: No segundo cenário, suponha que $k_1 = m/3 - \sqrt{\xi}m + q$, para $q > 0$ e $q \leq \sqrt{\xi}m$. Novamente, estamos buscando um limitante superior para a equação (6.16).

Assim, tomando $k_1 = m/3 - \sqrt{\xi}m + q$ na equação (6.16), temos

$$\begin{aligned} & r^{(1+\beta+\gamma)\left(\frac{m^2}{6} + 3\sqrt{\xi}qm - \frac{3}{2}\xi m^2 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{m}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{\xi}m + \frac{3}{2}q\right)} \cdot r^{\left(\frac{1}{3} - \alpha\right)(3\sqrt{\xi}m - 3q)^2} \times \\ & \times \left(\frac{B(r)}{r^2}\right)^{\gamma\left(\frac{m^2}{6} + 3\sqrt{\xi}qm - \frac{3}{2}\xi m^2 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{m}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{\xi}m + \frac{3}{2}q\right)}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Vamos novamente supor dois casos.

Subcaso 1: Primeiro suponha que $\beta + \gamma \leq 1 - \kappa$, para alguma constante $0 < \kappa$.

Portanto, um limite superior para a equação (6.18), tomando $1 + \beta + \gamma = \rho$, é

$$r^{\rho\left(\frac{m^2}{6} + 3\sqrt{\xi}qm - \frac{3}{2}\xi m^2 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{m}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{\xi}m + \frac{3}{2}q\right)} \cdot r^{\left(\frac{1}{3} - \alpha\right)(3\sqrt{\xi}m - 3q)^2} \stackrel{(*)}{\leq} r^{\rho\left(\frac{m^2}{6} + 3c\xi m^2 + \frac{m}{2} + \frac{3}{2}c\sqrt{\xi}m\right) + 3\xi m^2 + 3c^2\xi m^2}$$

$$\leq r^{\rho \frac{m^2}{6} + 3\rho c \xi m^2 + \frac{\rho m}{2} + \frac{3}{2} \rho c \sqrt{\xi} m + 3\xi m^2 + 3c^2 \xi m^2} < r^{\frac{m^2}{3} - \alpha \xi m^2},$$

a desigualdade (*) decorre de $q = c\sqrt{\xi}m$, com $0 \leq c \leq 1$. Dividindo todos os termos por m^2 e reagrupando, a última desigualdade é válida pois

$$\frac{1}{m} \left(\frac{3\rho\sqrt{\xi}}{2} + \frac{\rho}{2} \right) + \xi (\alpha + 3c\rho + 3 + 3c) < \frac{2 - \rho}{6}, \quad (6.19)$$

que é válido pois, como $0 \leq c \leq 1$, α e ξ são constantes pequenas, tomando m grande e observando que $2 - \rho > 0$, isto é, o lado direito é uma constante positiva, a desigualdade segue.

Subcaso 2: Vamos agora supor que $\beta + \gamma \geq 1 - \kappa$, para alguma constante $0 < \kappa$. Assim, tomando $1 + \beta + \gamma = \rho$, a equação (6.18) é no máximo

$$r^{\rho \left(\frac{m^2}{6} + 3\sqrt{\xi}mq - \frac{3\xi m^2}{2} - \frac{3q^2}{2} + \frac{m}{2} - \frac{3\sqrt{\xi}m}{2} + \frac{3q}{2} \right) + 3\xi m^2 - 6\sqrt{\xi}qm + 3q^2 - 9\alpha \xi m^2 + 18\alpha\sqrt{\xi}mq - 9\alpha q^2} \times \\ \times \left(\frac{B(r)}{r^2} \right)^{\gamma \left(\frac{m^2}{6} + 3\sqrt{\xi}qm - \frac{3}{2}\xi m^2 - \frac{3}{2}q^2 - \frac{3}{2}\sqrt{\xi}m \right)}. \quad (6.20)$$

Vamos agora dividir em dois sub-casos.

Caso A) $0 \leq q \leq \frac{66\sqrt{\xi}m}{100}$: Como estamos buscando um limitante superior para a equação (6.20), tomamos $\rho = 2$, então a equação (6.20) é no máximo

$$r^{\frac{m^2}{3} + m - \frac{26\alpha\xi m^2}{25}} < r^{\frac{m^2}{3} - \alpha\xi m^2},$$

dividindo ambos os lados por m^2 , temo que a equação acima é

$$\frac{1}{m} < \frac{\alpha\xi}{25}$$

que é válida para m suficientemente grande.

Caso B) $\frac{66\sqrt{\xi}m}{100} \leq q \leq \sqrt{\xi}m$: Aqui, novamente vamos subdividir em dois casos.

Subcaso B1) $0 < \frac{2\xi}{10} \leq \gamma$: Como estamos buscando um limitante superior para a equação (6.20), tomamos $\rho = 2$, então a equação (6.20) é no máximo

$$r^{\frac{m^2}{3} + m + 3\sqrt{\xi}m + 6\alpha\xi m^2} \cdot \left(\frac{B(r)}{r^2}\right)^{\frac{\xi m^2}{30} - \frac{4\xi^2 m^2}{10} - \frac{3\xi\sqrt{\xi}m}{10}} < r^{\frac{m^2}{3} - \alpha\xi m^2},$$

onde a desigualdade é válida pois, tomando logaritmos e dividindo todos os termos por m^2 , temos

$$\ln(r) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{m} + \frac{3\sqrt{\xi}}{m} + 6\alpha\xi\right) + \ln\left(\frac{B(r)}{r^2}\right) \left(\frac{\xi}{30} - \frac{4\xi^2}{10} - \frac{3\xi\sqrt{\xi}}{10m}\right) < \left(\frac{1}{3} - \alpha\xi\right) \ln(r).$$

Reordenando e agrupando termos semelhantes temos

$$\frac{\xi^{-1}}{m} \left(\ln(r) + 3\sqrt{\xi} \ln(r) - \frac{3\xi\sqrt{\xi}}{10} \ln\left(\frac{B(r)}{r^2}\right)\right) + 7\alpha \ln(r) - \frac{4\xi}{10} \ln\left(\frac{B(r)}{r^2}\right) < \frac{1}{30} \ln\left(\frac{r^2}{B(r)}\right),$$

portanto, para m grande suficiente, ξ pode ser tomado suficientemente pequeno e $\alpha < 10^{-6}$, segue a desigualdade, observando que o lado direito é fixo.

Caso B2) $0 \leq \gamma \leq \frac{2\xi}{10}$:

Antes de entrarmos na prova desse caso de fato, vamos argumentar primeiro que $\beta \leq 1 - \frac{2449\xi}{1250}$. De fato, pela nossa restrição no número de arestas azuis e pela definição dos vértices de tipo 1 e 2, temos que

$$3k_1 + \sum_{j=1}^{k_1} (n_1(T_j) + 2 \cdot n_2(T_j)) \leq \text{ex}(m, K_4) - \xi m^2. \quad (6.21)$$

Observando que os termos $3k_1 + \sum_{j=1}^{k_1} n_1(T_j)$ são positivos, temos que um limite inferior para o lado esquerdo da equação 6.21 é

$$\sum_{j=1}^{k_1} 2 \cdot n_2(T_j) < \text{ex}(m, K_4) - \xi m^2.$$

Por outro lado,

$$\sum_{j=1}^{k_1} 2 \cdot n_2(T_j) = 2\beta \left(k_1 m - \frac{3}{2} k_1^2 + \frac{3}{2} k_1 \right).$$

Logo

$$2\beta \left(k_1 m - \frac{3}{2} k_1^2 + \frac{3}{2} k_1 \right) < \text{ex}(m, K_4) - \xi m^2.$$

Assim, tomando $k_1 = \frac{m}{3} - \sqrt{\xi}m + q \geq \frac{m}{3} - \frac{17\sqrt{\xi}m}{50}$, com $q = \frac{66\sqrt{\xi}m}{100}$, temos como limitante inferior

$$2\beta \left(\frac{m^2}{6} - \frac{867\xi m^2}{5000} \right) \leq 2\beta \left(k_1 m - \frac{3}{2} k_1^2 + \frac{3}{2} k_1 \right),$$

Portanto, como queremos que

$$\beta \left(\frac{m^2}{3} - \frac{867\xi m^2}{2500} \right) < \frac{m^2}{3} - \xi m^2,$$

que é válido para todo $\beta \leq 1 - \frac{2449\xi}{1250}$.

Agora, temos que $1 + \beta + \gamma \leq 2 + \gamma - \frac{2449\xi}{1250}$, como $\gamma \leq \frac{2\xi}{10}$, temos então $1 + \beta + \gamma \leq 2 - \frac{2199\xi}{1250}$ e assim, um limite superior para a equação (6.20), tomando $1 + \beta + \gamma = \rho$, é

$$\begin{aligned} & r^{\rho} \left(\frac{m^2}{6} + 3\sqrt{\xi}qm + \frac{m}{2} + \frac{3q}{2} - \frac{3q^2}{2} - \frac{3\xi m^2}{2} \right) + 3\xi m^2 - 6\sqrt{\xi}qm + 3q^2 - 9\alpha\xi m^2 + 18\alpha\sqrt{\xi}qm - 9\alpha q^2 \\ & \stackrel{(*)}{\leq} r^{\left(2 - \frac{2199\xi}{1250}\right)} \left(\frac{m^2}{6} - \frac{867\xi m^2}{5000} + \frac{m}{2} + \frac{198\sqrt{\xi}m}{200} \right) + \frac{867\xi m^2}{2500} - \frac{2601\alpha\xi m^2}{2500} < r^{\frac{m^2}{3} - \alpha\xi m^2}, \end{aligned}$$

a desigualdade (*) decorre de $\frac{66\sqrt{\xi}m}{100} \leq q \leq \sqrt{\xi}m$ tendo o máximo atingido para $q = \frac{66\sqrt{\xi}m}{100}$. Dividindo todos os termos por m^2 e reagrupando, a última desigualdade é válida pois

$$\frac{\xi^{-1}}{m} \left(1 + \frac{198\sqrt{\xi}}{100} \right) + \frac{8\xi}{25} - \frac{101\alpha}{2500} < \frac{2199}{7500}, \quad (6.22)$$

o que é válido, para m suficientemente grande e levando em conta que $\alpha \leq 10^{-6}$.

Combinando estes casos, e usando o limite superior (6.1), concluímos que o número de colorações \mathcal{P}_4^* -livres do grafo G satisfaz

$$|\mathcal{C}_{r,(K_4,\mathcal{P})}(G)| \leq M^n \cdot 2^{(H((r+1)\eta))n^2 + rM^2/2} \cdot r^{(r+1)\eta n^2} \cdot \left(r^{\text{ex}(m,K_4) - \frac{1}{10^4}\xi m^2} \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^2}$$

$$\ll_{n \gg 1} r^{\text{ex}(n,K_4)},$$

como $\xi > 10^4 \cdot (r+1) \cdot \eta + 10^4 \cdot H((r+1)\eta)$, o que contradiz a hipótese de que $|\mathcal{C}_{r,(K_3,\mathcal{P})}(G)| \geq r^{\text{ex}(n,K_4)}$ que prova a Afirmação 6.1.

Para concluir a prova da Afirmação 6.1, e portanto, do Teorema 1.17, ainda precisamos provar Lema 6.2. Para este fim, vamos fixar um inteiro r tal que $92 \leq r \leq 135$, e seja \mathcal{H} um grafo multicolorido \mathcal{P}_4^* -livre, para o qual todas as arestas são verdes. Lembrando que estamos assumindo que todas as arestas possuem pelo menos duas cores.

6.1.3 Prova do Lema 6.2

A prova do Lema 6.2 será por indução, e iremos dividir o conjunto \mathcal{S} dos grafo reduzidos \mathcal{P}_4^* -livres, onde todas as arestas ou são verdes ou são arestas azuis que não formam triângulos, em duas classes. Uma dessas classes, chamada \mathcal{S}_1 , contém todos os $\mathcal{H} \in \mathcal{S}$ que são K_5 -livres.

Lema 6.3. *Seja $\mathcal{H} \in \mathcal{S}_1$ de ordem m , para todo $92 \leq r \leq 135$ e $0 < \alpha \leq 10^{-6}$, o seguinte é válido:*

$$c(\mathcal{H}) \leq r^{\frac{1}{3} - \alpha}. \tag{6.23}$$

Demonstração. Fixe $\mathcal{H} \in \mathcal{S}_1$ com m vértices. Lembre da definição de

$$c(\mathcal{H}) = \prod_{e \in E(\mathcal{H})} |L_e|^{\frac{1}{|V(\mathcal{H})|^2}},$$

onde $|V(\mathcal{H})| = m$.

Se $m = 1$, não há nada para provar. Se $m = 2$ e $92 \leq r \leq 135$, temos que $c(\mathcal{H}) \leq r^{\frac{1}{4}}$, então

$$c(\mathcal{H}) \leq r^{\frac{1}{4}} < r^{\frac{1}{3}-\alpha},$$

para todo $0 \leq \alpha < \frac{3}{4}$.

Para $m = 3$ e $r \geq 92$, como \mathcal{H} não contém triângulo azul, o produto do tamanho das listas das arestas é no máximo $r^2 \cdot r_0$. Portanto, temos que $c(\mathcal{H}) \leq (r \cdot r \cdot r_0)^{\frac{1}{9}}$, portanto

$$c(\mathcal{H}) \leq (r^2 \cdot r_0)^{\frac{1}{9}} \leq (r^2 \cdot \sqrt{6r - 35})^{\frac{1}{9}} < r^{\frac{1}{3}-\alpha},$$

a última desigualdade é válida pois, elevando ambos os lados da última inequação ao quadrado e tomando logaritmo, temos

$$\ln(6r - 35) < 2 \ln(r) - 18\alpha \ln(r)$$

$$\text{para } \alpha \leq 0.034 < \frac{2 \ln(92) - \ln(6 \cdot 92 - 35)}{18 \ln(92)} \leq \frac{2 \ln(r) - \ln(6 \cdot r - 35)}{18 \ln(r)}.$$

Vamos agora assumir que $m \geq 4$. Pela definição de \mathcal{S}_1 , as arestas ou são verdes ou as arestas azuis não formam uma cópia de K_3 , ou seja, o conjunto $E_{r_0+1} \cup \dots \cup E_r$ não pode conter uma cópia de K_3 . Assim, pelo Teorema de Turán, temos

$$|E_{r_1}| + \dots + |E_r| \leq \text{ex}(m, K_3) \leq \frac{1}{4}m^2. \quad (6.24)$$

Considere agora $r_* = r_*(r)$ como segue

$$r_* = \begin{cases} 23 & \text{se } 132 \leq r \leq 135 \\ 22 & \text{se } 126 \leq r \leq 131 \\ 21 & \text{se } 120 \leq r \leq 125 \\ 20 & \text{se } 114 \leq r \leq 119 \\ 19 & \text{se } 108 \leq r \leq 113 \\ 18 & \text{se } 102 \leq r \leq 107 \\ 17 & \text{se } 96 \leq r \leq 101 \\ 16 & \text{se } 92 \leq r \leq 95 \end{cases}$$

O conjunto $E_{r_*} \cup \dots \cup E_r$ não pode conter uma cópia de K_4 , pois $6 \cdot r_* > r$ e, portanto, qualquer cópia de K_4 com esta propriedade produziria uma cópia de \mathcal{P}_4^* em \mathcal{H} . Isto leva a

$$|E_{r_*}| + \dots + |E_r| \leq \text{ex}(m, K_4) \leq \frac{m^2}{3}. \quad (6.25)$$

Novamente, pela definição de \mathcal{S}_1 , o conjunto $E_2 \cup \dots \cup E_r$ não pode induzir uma cópia de K_5 . Assim, pelo Teorema de Turán, temos

$$|E_2| + \dots + |E_r| \leq \text{ex}(m, K_5) \leq \frac{3m^2}{8}. \quad (6.26)$$

Se definirmos $x_j = |E_j|/m^2$ para $j \in \{2, \dots, r\}$, por (6.2), temos

$$c(\mathcal{H}) = \prod_{j=2}^{92} j^{x_j}, \quad (6.27)$$

de modo que $\ln c(\mathcal{H})$ é limitado superiormente pela solução ótima do programa linear

$$\max \sum_{j=2}^r x_j \ln j$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t. } \quad & x_{r_0+1} + \cdots + x_r \leq \frac{1}{4}, \\
& x_{r_*} + \cdots + x_r \leq \frac{1}{3}, \\
& \sum_{j=2}^r x_j \leq \frac{3}{8}, \\
& x_j \geq 0, \quad j \in \{2, \dots, r\}.
\end{aligned}$$

Resolver este LP fornece a solução ótima $x_r = 1/4$, $x_{r_0} = 1/12$, $x_{r_*} = 1/24$ e $x_j = 0$ para os valores restantes de j . Isso leva a $c(\mathcal{H}) \leq r^{\frac{1}{4}} \cdot r_0^{\frac{1}{12}} \cdot r_*^{\frac{1}{24}}$. Para $132 \leq r \leq 135$, temos que $r_* = 23$ e então

$$\begin{aligned}
c(\mathcal{H}) &\leq r^{\frac{1}{4}} \cdot r_0^{\frac{1}{12}} \cdot r_*^{\frac{1}{24}} \\
&\leq r^{\frac{1}{4}} \cdot (\sqrt{6 \cdot r - 35})^{\frac{1}{12}} \cdot 23^{\frac{1}{24}} \\
&= r^{\frac{1}{4}} \cdot (6 \cdot r - 35)^{\frac{1}{24}} \cdot 23^{\frac{1}{24}} < r^{\frac{1}{3} - \alpha},
\end{aligned}$$

já que, após aplicar logaritmos na última desigualdade, e multiplicar todos os termos por 24, ela segue pois

$$\ln(6r - 35) + \ln(23) < 2 \ln(r) - 24\alpha \ln(r),$$

$$\text{para } \alpha \leq 0.0000063 < \frac{2 \ln(132) - \ln(6 \cdot 132 - 35) - \ln(23)}{24 \ln(132)} \leq \frac{2 \ln(r) - \ln(6r - 35) - \ln(22)}{24 \ln(r)}.$$

Dado que para os valores $r < 132$ a prova acima é análoga, basta considerar os valores de r^* apropriados ao intervalo, sua prova será omitida. \square

Para completar a prova da Afirmação 6.1, vamos considerar os grafos reduzidos que não são considerados no Lema 6.2.

Em nossos argumentos, usamos o seguinte problema de otimização para inteiros positivos $p \geq 2$ e L :

$$\begin{aligned}
\max \quad & \prod_{j=1}^c x_j & (6.28) \\
\text{s.t.} \quad & c, x_1, \dots, x_c \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \\
& x_1 + \dots + x_c \leq p \\
& c \leq L.
\end{aligned}$$

Definição. Dados inteiros positivos $k \geq 2$ e $r \geq 2$, seja

- (i) $c_k(r)$ o máximo do problema de otimização (6.28) com $p = r$ e $L = \binom{k}{2}$;
- (ii) $c_k^*(r)$ o máximo do problema de otimização (6.28) com $p = r$ e $L = k$.

Os próximos três lemas técnicos auxiliarão na demonstração do Lema 6.7.

Lema 6.4. *Sejam $k \geq 4$, e \mathcal{H} o grafo reduzido multipartido \mathcal{P}_4^* -livre tal que $|L_e| \geq 2$ para toda $e \in E(\mathcal{H})$, e assumamos que $A \subset V(\mathcal{H})$ é tal que $\mathcal{H}[A]$ é isomorfo a K_k . Para um vértice $v \in V(\mathcal{H})$ seja $E'(v) = \{\{v, x\} \in E(\mathcal{H}) : x \in A\}$. Para qualquer $v \in V(\mathcal{H}) \setminus A$, vale o seguinte limitante superior*

$$\prod_{e \in E'(v)} |L_e| \leq c_k^*(r) \leq \bar{c}_k(r) = \max \left\{ r, r^2, \left(\frac{r - 2 \cdot \binom{j}{2}}{j} \right)^j : j \in \{3, \dots, k\} \right\}. \quad (6.29)$$

Demonstração. Seja $A = \{x_1, \dots, x_k\}$ e note que A induz uma clique e que \mathcal{H} é \mathcal{P}_4^* -livre. Para cada aresta $e \in E'(v)$, seja $x_e = |L_e|$. Primeiro, considere que $E'(v)$ tem apenas uma aresta, digamos $e_1 = \{x_1, v\}$, assim $x_{e_1} \leq r$. Agora, considere o caso em que $E'(v)$ tem duas arestas, digamos $e_1 = \{x_1, v\}$ e $e_2 = \{x_2, v\}$, como não temos

restrições nas listas de colorações dessas arestas, temos que $|L_{e_1}| \cdot |L_{e_2}| \leq r^2$. Por último, vamos considerar o caso em que $E'(v)$ tem 3 ou mais arestas. Se tomarmos quaisquer 3 vértices de A , suponhamos $\{x_1, x_2, x_3\}$, e adicionarmos v a este conjunto, teremos uma cópia K_4 , com $V(K_4) = \{x_1, x_2, x_3, v\}$, logo, temos que todas as listas de cores associadas a $e \in E'(v)$ tem que ser disjuntas de todas as listas de cores de $e \in E(A)$. Portanto, as listas de cores das arestas entre v e A são mutualmente disjuntas e $|L_e| \geq 2$, logo $\sum_{e \in E'(v)} x_e \leq r - 2 \cdot \binom{k}{2}$. Seja $j \leq k$ o número de arestas entre v e A . Claramente temos que

$$\prod_{e \in E'(v)} |L_e| \leq \max \left\{ \prod_{i=1}^j a_i : 1 \leq j \leq k, a_1, \dots, a_j > 0, a_1 + \dots + a_j \leq r - 2 \cdot \binom{k}{2} \right\} = c_k^*(r).$$

O resultado segue porque para $a_1 + \dots + a_j \leq r$, isto é,

$$\prod_{i=1}^j a_i \leq \left(\frac{r - 2 \cdot \binom{j}{2}}{j} \right)^j.$$

□

Lema 6.5. *Sejam r e $k \geq 4$ inteiros positivos. Para $j \geq 1$, considere a partição $E(K_k) = E_1 \cup \dots \cup E_j$ do conjunto de arestas do grafo completo K_k e inteiros positivos $1 \leq s_1, \dots, s_j \leq r$ tais que*

$$r < \sum_{i=1}^j |E_i| s_i.$$

Então, para qualquer atribuição de lista de cores em $[r]$ às arestas de K_k tais que, para cada i , todas arestas $e \in E_i$ tem lista de tamanho pelo menos s_i , existe uma cópia de K_4 para a qual duas das listas têm interseção não vazia.

Demonstração. Basta observar que para qualquer K_k , com $k > 4$, quaisquer 4 vértices $\{u, v, w, z\} \in V(K_k)$ formam um K_4 , logo se duas arestas quaisquer, suponhamos $\{u, v\}$ e $\{w, z\}$ tiverem uma mesma cor α , isto é, $\alpha \in L_{\{u,v\}}$ e $\alpha \in L_{\{w,z\}}$,

isso significa que a cópia de K_4 induzida por $\{u, v, w, z\}$ conterà algum padrão proibido em \mathcal{P}_4^* . \square

Lema 6.6. *Sejam $r \geq 2$ e $k \geq 4$ inteiros. Seja \mathcal{H} grafo reduzido multicolorido \mathcal{P}_4^* -livre cujo grafo subjacente é K_k e cujas listas de arestas estão contidas em $[r]$ e têm tamanho de pelo menos dois. Então*

$$\prod_{e \in E(\mathcal{H})} |L_e| \leq \tilde{c}_k(r) = \left(\frac{r}{\binom{k}{2}} \right)^{\binom{k}{2}}.$$

Demonstração. Dada uma aresta $e \in E(\mathcal{H})$, seja $x_e = |L_e|$. Seja E_i o conjunto das arestas de \mathcal{H} cujas listas têm tamanho i . Pelo Lema 6.5, $\sum_{e \in E(\mathcal{H})} x_e = \sum_{i=2}^r i \cdot |E_i| \leq r$, dado que \mathcal{H} é \mathcal{P}_4^* -livre.

Em particular, o vetor $(x_e)_{e \in E(\mathcal{H})}$ é uma solução viável para o problema de otimização (6.28) com $p = r$ e $L = \binom{k}{2}$. Para a desigualdade, observe que para qualquer escolha de j números reais positivos tais que $a_1 + \dots + a_j \leq r$, temos que

$$\prod_{i=1}^j a_i \leq \left(\frac{r}{\binom{k}{2}} \right)^{\binom{k}{2}}.$$

Isso conclui a prova. \square

Agora estamos prontos para provar o resultado desejado.

Lema 6.7. *Fixe um inteiro r tal que $92 \leq r \leq 135$. Dado $\mathcal{H} \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_1$ e $0 < \alpha \leq 10^{-6}$, temos que*

$$c(\mathcal{H}) \leq r^{\frac{1}{3} - \alpha}.$$

Demonstração. Seja $r \in \{92, \dots, 135\}$. Por contradição, assuma que o resultado é falso e escolha um contraexemplo $\mathcal{H} \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_1$ com o número mínimo de vértices. Seja

m o número de vértices de \mathcal{H} e $\omega(\mathcal{H}) \geq 5$ o tamanho de uma clique máxima em \mathcal{H} . Primeiro mostramos que \mathcal{H} não é isomorfo a uma clique K_5 .

Se \mathcal{H} é isomorfo a um K_5 , o Lema 6.6 nos dá que $c(\mathcal{H})^{25} \leq \tilde{c}_5(r) = (r/10)^{10}$. Portanto, $c(\mathcal{H}) \leq ((r/10)^{10})^{\frac{1}{25}} = (r/10)^{2/5} < r^{\frac{1}{3}-\alpha}$ se

$$\alpha \leq 0.12 < \frac{-\ln 135 + 6 \ln 10}{15 \ln 135} \leq \frac{-\ln r + 6 \ln 10}{15 \ln r}.$$

Como $\omega(\mathcal{H}) \geq 5$, então o fato de que $\mathcal{H} \neq K_5$ implica que $m > 5$. Fixe $k = 5$ e escolha um conjunto A de vértices tal que A induza uma cópia de K_5 em \mathcal{H} . Dado um vértice $v \in V(\mathcal{H}) \setminus A$, seja c_v o produto dos tamanhos das listas nas arestas que conectam v a A . Claramente,

$$c(\mathcal{H})^{m^2} = c(\mathcal{H}[A])^{k^2} \cdot \left(\prod_{v \in V(\mathcal{H}) \setminus A} c_v \right) \cdot c(\mathcal{H}[V(\mathcal{H}) \setminus A])^{(m-k)^2}. \quad (6.30)$$

Sabemos que $c(\mathcal{H}[A]), c(\mathcal{H}[V(\mathcal{H}) \setminus A]) \leq r^{\frac{1}{3}-\alpha}$ pela minimalidade de \mathcal{H} .

Como $c_v \leq \bar{c}_5(r)$ pelo Lema 6.4. Então (6.30) leva a

$$\begin{aligned} c(\mathcal{H})^{m^2} &\leq r^{\frac{1}{3}-\alpha} \cdot (\bar{c}_5(r))^{m-5} \cdot r^{\frac{1}{3}-\alpha} \cdot r^{\frac{1}{3}-\alpha} \cdot r^{\frac{1}{3}-\alpha} \cdot r^{\frac{1}{3}-\alpha} \cdot r^{\frac{1}{3}-\alpha} \\ &= \left(\frac{\bar{c}_5(r)}{r^{\frac{10}{3}-10\alpha}} \right)^{m-5} \cdot r^{\frac{1}{3}-\alpha} \cdot r^{\frac{1}{3}-\alpha} \cdot r^{\frac{1}{3}-\alpha} \cdot r^{\frac{1}{3}-\alpha} \cdot r^{\frac{1}{3}-\alpha}. \end{aligned}$$

Concluimos que $c(\mathcal{H})^{m^2} \leq r^{\frac{1}{3}-\alpha} m^2$ pois $\bar{c}_5(r)/r^{10/3-10\alpha} < 1$ para $92 \leq r \leq 135$. Aqui, basta verificar que $\bar{c}_5(r)$, definida em (6.29), satisfaz, $\bar{c}_5(r) < r^{10/3-10\alpha}$. Observe que, para todo $92 \leq r \leq 135$, temos que $(\frac{r-12}{4})^4 < (\frac{r-20}{5})^5$. Portanto a desigualdade anterior é equivalente a

$$\bar{c}_5(r) = \left(\frac{r-20}{5} \right)^5 < r^{10/3-10\alpha},$$

que é válido para todo

$$\alpha \leq 0.013 < \frac{10 \ln 135 - 15 \ln(135 - 20) + 15 \ln 5}{30 \ln 135} \leq \frac{10 \ln r - 15 \ln r - 20 + 15 \ln 5}{30 \ln r}.$$

Isso conclui o passo de indução e prova o Lema 6.6. □

7 CONCLUSÃO

Nesta tese, estudamos problemas de colorações de arestas dentro da Teoria Extremal de Grafos. Mais especificamente, procuramos por grafos que maximizem o número de colorações de arestas, quando queremos evitar um determinado grafo completo munido com um padrão de cores, ou uma família de padrões de cores, os quais chamamos de problemas de colorações de Erdős e Rothschild. Na estratégia de demonstração, seguimos uma linha semelhante a de [1] e [24] utilizando o Lema da Regularidade de Szemerédi e programação linear, adicionando alguns argumentos indutivos à nossa prova para a obtenção de resultados mais precisos.

Inicialmente, estudamos grafos de ordem n que maximizam o número de r -colorações de arestas que não contenham uma cópia de K_k , onde a família de padrões de K_k considerada é a família de padrões \mathcal{P}_k^* que não contêm o padrão arco-íris K_k^R . Mais especificamente, mostramos que para todo $k \geq 3$, obtemos cotas inferiores para o parâmetro $r_0(\mathcal{P}_k^*)$, e cotas superiores, também referentes ao parâmetro $r_0(\mathcal{P}_k^*)$. Também apresentamos uma construção para cotas superiores, em relação ao parâmetro $r_0(\mathcal{P}_k^*)$, onde para todo r maior que essa cota superior, o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ não é mais o grafo (r, \mathcal{P}_k^*) -extremal. Esses resultados foram apresentados como resumo expandido no XI Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium [7]. Uma versão completa desse trabalho foi aceita para publicação pelo periódico Discrete Applied Mathematics [8].

Outra contribuição dessa tese é um resultado para $k = 3$, do problema do paragrafo acima, isto é, consideramos a família de padrões $\mathcal{P}_3^* = \{K_3^{(2)}, K_3^M\}$ do grafo completo K_3 e, determinamos que o parâmetro $r_0(\mathcal{P}_3^*)$ vale 26. Mais especificamente,

provamos que o grafo de Turán $T_2(n)$ é o único grafo extremal, para a família de padrões \mathcal{P}_3^* , para $2 \leq r \leq 26$. Para $r = 27$, apresentamos uma construção que garante que o grafo $T_2(n)$ não é mais o grafo (r, \mathcal{P}_3^*) -extremal, pois o grafo $T_4(n)$ possui mais colorações \mathcal{P}_3^* -livres. Esse resultado foi apresentado no XLI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC 2022) e foi publicado como resumo expandido no Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics [41]. Em breve, também esperamos submeter a versão completa à publicação, uma vez que ela se encontra em *preprint* [25].

Por fim, mas de modo similar ao resultado anterior, progredimos no melhoramento da cota inferior do parâmetro $r_0(\mathcal{P}_4^*)$. Os resultados do Capítulo 4 foram apresentados na seção de pôsteres do Latin American Congress on Industrial and Applied Mathematics (LACIAM). Pretendemos concluir esse resultado, buscando uma cota inferior para o parâmetro $r_0(\mathcal{P}_4^*)$ ainda melhor que a já encontrada, uma vez em que acreditamos ser possível encontrar algumas restrições que tornem isso possível. Futuramente queremos também submeter a versão completa à publicação.

7.1 Problemas Futuros

Devido a variedade de problemas aqui estudados, e as várias técnicas empregadas para suas demonstrações, problemas derivados surgem de uma maneira natural, ora por serem extensões de problemas resolvidos, ora por serem problemas identificados no processo. Vamos aqui mencionar alguns problemas que pretendemos seguir trabalhando em busca de suas soluções.

Um problema que surge de forma natural como um trabalho futuro é empregar a técnica utilizada para a demonstração do Teorema 1.15 na obtenção de cotas inferiores do parâmetro $r_0(\mathcal{P}_k^*)$ melhores para o Teorema 1.11, uma vez que ela mostrou-se eficaz para provar que o grafo $T_2(n)$ é o grafo (r, \mathcal{P}_3^*) -extremal estendendo a cota inferior até o valor do parâmetro. Então, um caminho que pretendemos seguir é o de identificar os valores exatos dos parâmetros $r_0(\mathcal{P}_k^*)$, para $k \geq 4$, identificando o exato valor de transição, onde os grafos de Turán $T_{k-1}(n)$ são os grafos (r, \mathcal{P}_k^*) -extremais.

De uma forma mais específica que o problema considerado nos parágrafos anteriores, poderíamos considerar a estratégia de demonstração do Teorema 1.13 para provar que o grafo de Turán $T_4(n)$ é o grafo (r, \mathcal{P}_3^*) -extremal, para $r \geq 27$. Outra questão a ser considerada também é determinar o valor do novo parâmetro $r'_0(\mathcal{P}_3^*)$, isto é, o valor $r'_0(\mathcal{P}_3^*)$ para o qual o grafo de Turán $T_4(n)$ deixa de ser o grafo (r, \mathcal{P}_3^*) -extremal, para $r > r'_0(\mathcal{P}_3^*)$.

Outro problema que poderia vir a ser considerado é o de buscarmos uma função que indique os valores dos parâmetro $r_0(k)$, não apenas para quando o grafo de Turán é o extremal, mas para cada grafo que é o \mathcal{P}_k^* -extremal, em um determinado intervalo de r , uma vez que podemos notar que quando maior o valor de r , os grafos extremais irão mudar, isto é, buscar pelos parâmetros de transição dos grafos \mathcal{P}_k^* -extremais, para cada $k \geq 3$ fixo. De forma similar, identificar uma função que nos mostre quem são, estruturalmente, esses grafos extremais, uma vez que até o momento não temos uma forma de caracterizá-los.

De uma forma mais geral, ainda pensando sobre colorações evitando famílias \mathcal{P} de padrões de um grafo completo K_k envolve o conjunto $B(\mathcal{P})$ definido

no Capítulo 1. Lembre que o conjunto $B(\mathcal{P})$, associado a família \mathcal{P} de padrões do grafo completo K_k , é o conjunto de todos os valores de r tais que existe n_0 onde, para $n > n_0$, o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ é o único grafo (r, \mathcal{P}) -extremal. Uma questão que surge nesse sentido é, considerando o conjunto $B(\mathcal{P})$, se esse conjunto deixaria de ser um intervalo de números naturais, uma vez que para as famílias conhecidas até o momento, isso não ocorre.

Como um problema mais específico, mas na mesma direção do parágrafo anterior, seria perguntar se, para a família \mathcal{P}_k^* , existiria um novo parâmetro $r_0^*(\mathcal{P}_k^*)$, onde $r_0^*(\mathcal{P}_k^*) > r_0(\mathcal{P}_k^*)$, em que para $r \geq r_0^*(\mathcal{P}_k^*)$, o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ voltaria a ser (r, \mathcal{P}_k^*) -extremal, fazendo com que o conjunto $B(\mathcal{P}_k^*)$ deixe de ser um intervalo de números naturais. De uma forma semelhante, poderíamos fazer a mesma indagação para a família \mathcal{P}_k , isto é, se existiria um novo parâmetro $r_1^*(\mathcal{P}_k)$, onde $r_1^*(\mathcal{P}_k) < r_1(\mathcal{P}_k)$, em que para $r \leq r_1^*(\mathcal{P}_k)$, o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ voltaria a ser (r, \mathcal{P}_k) -extremal.

Referências Bibliográficas

- [1] N. Alon, J. Balogh, P. Keevash, and B. Sudakov, *The number of edge colorings with no monochromatic cliques*, J. London Math. Soc., **Vol. 70**, (2004), pp. 273–288.
- [2] N. Alon and R. Yuster, *The number of orientations having no fixed tournament*, Combinatorica, **Vol. 26**, (2006), pp. 1–16.
- [3] J. Balogh, *A remark on the number of edge colorings of graphs*, European J. Combin., **Vol. 27**, (2006), pp. 565–573.
- [4] J. Balogh and L. Li, *The typical structure of Gallai colorings and their extremal graphs*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, **Vol. 33**, (2019), pp. 2416–2443.
- [5] J. Balogh, R. Morris and W. Samotij, *Independent sets in hypergraphs*, J. Amer. Math. Soc., **Vol. 28**, (2015), pp. 669–709.
- [6] J. O. Bastos, F. S. Benevides and J. Han, *The number of Gallai k -colorings of complete graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, **Vol. 144**, (2020), pp. 1–13.
- [7] J. O. Bastos, C. Hoppen, H. Lefmann, A. Oertel and D. R. Schmidt, *Maximum number of r -edge-colorings such that all copies of K_k are rainbow*, Proceedings of the XI Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium, Procedia Computer Science, **Vol. 195**, (2021), pp. 419–426.

- [8] J. O. Bastos, C. Hoppen, H. Lefmann, A. Oertel and D. R. Schmidt, *Graphs with many edge-colorings such that complete graphs are rainbow*, Discrete Applied Mathematics, **Vol. 333**, (2023), pp. 151–164.
- [9] J. O. Bastos, F. S. Benevides, G. Mota and I. Sau, *Counting Gallai 3-colorings of complete graphs*, Discrete Mathematics, **Vol. 342**, (2019), pp. 2618–2631.
- [10] F. S. Benevides, C. Hoppen and R. Sampaio, *Edge-colorings of graphs avoiding complete graphs with a prescribed coloring*, Discrete Mathematics, **Vol. 340**, **Nº 9**, (2017), pp. 2143–2160.
- [11] F. Botler, J. Corsten, A. Dankovics, N. Frankl, H. Hàn, A. Jiménez and J. Skokan, *Maximum number of triangle-free edge colourings with five and six colours*, Acta Mathematica Universitatis Comenianae, **Vol. 88**, **Nº 3**, (2019), pp. 495–499.
- [12] L. Colucci, E. Györi and A. Methuku, *Edge colorings of graphs without monochromatic stars*, Discrete Mathematics, **Vol. 343**, (2019), pp. 112–140.
- [13] P. Erdős, *On the structure of linear graphs*, Israel Journal of Mathematics, **Vol. 1**, **Nº 3**, (1963), pp. 156–160.
- [14] P. Erdős, *Some new applications of probability methods to combinatorial analysis and graph theory*, in Proceedings of the 5th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Boca Raton, FL, (1974), pp. 39–51.

- [15] Z. Füredi, *A proof of the stability of extremal graphs, Simonovits's stability from Szemerédi's regularity*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, **Vol. 115**, (2015), pp. 66–71.
- [16] Z. Füredi and M. Simonovits, *The history of degenerate (bipartite) extremal graph problems*, Erdős Centennial, Bolyai Society of Mathematics, Springer Verlag, **Vol.25**, (2013), pp. 169–213.
- [17] J. Fox, A. Grinshpun, and J. Pach, *The Erdős-Hajnal conjecture for rainbow triangles*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, **Vol. 111**, (2015), pp. 75–125.
- [18] A. Gyárfás and G. N. Sárközy, *Gallai colorings of non-complete graphs*, Discrete Mathematics, **Vol. 310**, (2010), pp. 977–980.
- [19] B. D. George, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press. (1998).
- [20] A. Gyárfás and G. N. Sárközy, A. Sebő, and S. Selkow, *Ramsey-type results for Gallai colorings*, Journal of Graph Theory, **Vol. 64**, (2010), pp. 233–243.
- [21] A. Gyárfás and G. N. Sárközy, *Edge colorings of complete graphs without tricolored triangles*, Journal of Graph Theory, **Vol. 46**, (2004), pp. 211–216.
- [22] W. Gowers, *Lower bounds of tower type for Szemerédi's uniformity lemma*, Geom. Funct. Anal., **Vol. 7**, (1997), pp. 322–337.
- [23] H. Hàn and A. Jiménez, *Improved Bound on the Maximum Number of Clique-Free Colorings with Two and Three Colors*, SIAM J. Discrete Math. **Vol. 32**, **N^o 2**, pp. 1364–1368.

- [24] C. Hoppen and H. Lefmann, *Remarks on an Edge-coloring Problem*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science, **Vol. 346**, (2019), pp. 511-521.
- [25] C. Hoppen, H. Lefmann and D.R. Schmidt, *Edge-Colorings Avoiding Patterns in a Triangle*, preprint (arXiv:2209.06991).
- [26] C. Hoppen, H. Lefmann and K. Odermann, and J. Sanches, *Edge-colorings avoiding rainbow stars*, Journal of Graph Theory, **Vol. 87, N^o 4**, (2018), pp. 399–429.
- [27] C. Hoppen, H. Lefmann and K. Odermann, *A rainbow Erdős-Rothschild problem*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, **Vol. 31**, (2017), pp. 2647–2674.
- [28] C. Hoppen, H. Lefmann and K. Odermann, *On graphs with a large number of edge-colorings avoiding a rainbow triangle*, European Journal of Combinatorics, **Vol. 66**, (2017), pp. 168–190.
- [29] C. Hoppen, Y. Kohayakawa and H. Lefmann, *Edge colourings of graphs avoiding monochromatic matchings of a given size*, Combinatorics, Probability and Computing, **Vol. 21, N^o 1-2**, (2012), pp. 203–218.
- [30] C. Hoppen, Y. Kohayakawa and H. Lefmann, *Edge-colorings of graphs avoiding fixed monochromatic subgraphs with linear Turán number*, European Journal of Combinatorics, **Vol. 35, N^o 1**, (2014), pp. 354–373.
- [31] C. Hoppen, H. Lefmann and D.A. Nolibos, *An extension of the rainbow Erdős-Rothschild problem*, Discrete Mathematics, **Vol. 344, N^o 8**, (2021), pp. 112443.

- [32] J. Komlós and M. Simonovits, *Szemerédi’s regularity lemma and its applications in graph theory*, Combinatorics, Bolyai Math. Soc., **Vol. 2**, (1996), pp. 295–352.
- [33] D. J. C. MacKay, *Information Theory, Inference and Learning Algorithms*, Cambridge University Press, (2005).
- [34] W. Mantel, *Problem 28*, solution by H. Gouwentak, W. Mantel, J. Teixeira de Mattes, F. Schuh, and W.A. Wytho, *Wiskundige Opgaven*, **Vol. 10**, (1907), pp. 60–61.
- [35] D. A. Nolibos, *Uma generalização do problema de Erdős-Rothschild para padrões de grafos completos*, Tese de Doutorado, PPGMAP - UFRGS, (2021).
- [36] A. Oertel, *Proving an Extremal Graph Coloring Theorem using Linear Programming*, Master Thesis, TU-Chemnitz, (2021).
- [37] O. Pikhurko and Z. B. Yilma, *The maximum number of K_3 -free and K_4 -free edge 4-colorings*, J. Lond. Math. Soc., **Vol. 85**, (2012), pp. 593–615
- [38] O. Pikhurko and K. Staden, *Exact solutions to the Erdős-Rothschild problem*, arXiv:2108.12789 (2021).
- [39] O. Pikhurko, K. Staden and Z. B. Yilma, *The Erdős-Rothschild problem on edge-colourings with forbidden monochromatic cliques*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **Vol. 163**, (2017), pp. 341–356.
- [40] D. Saxton and A. Thomason, *Hypergraph containers*, Invent. Math., **Vol. 201**, (2015), pp. 925–992.

- [41] D.R. Schmidt, C. Hoppen and H. Lefmann, *Um problema de coloração de arestas em grafos evitando um padrão específico em triângulos*, Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, **Vol. 9, Nº 1**, (2022), 18pp.
- [42] E. Szemerédi, *Regular partitions of graphs*, Proc. Colloque Inter. CNRS (J. -C. Bermond, J. -C. Fournier, M. Las Vergnas and D. Sotteau eds.) (1978), 399–401.
- [43] P. Turán, *On an extremal problem in graph theory* (em húngaro), Matematikai és Fizikai Lapok, **Vol. 48**, (1941), pp. 436–452.
- [44] R. Yuster, *The number of edge colorings with no monochromatic triangle*, Journal of Graph Theory, **Vol. 21**, (1996), pp. 441–452.