

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Arthur Pereira Dornelles

**Modelo Baseado em Agente para Simulação de  
Fatores Socioeconômicos Orientados à Migração  
Interestadual dos Estados Unidos da América**

Porto Alegre

2023

Arthur Pereira Dornelles

**Modelo Baseado em Agente para Simulação de Fatores Socioeconômicos Orientados à Migração Interestadual dos Estados Unidos da América**

Projeto Final de Conclusão em Engenharia Física, realizado sob orientação do Profa. Dra. Rita Maria Cunha de Almeida e apresentado à Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito necessário para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Física.

Orientador: Profa. Dra. Rita Maria Cunha de Almeida

Porto Alegre

2023

# AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha gratidão a várias pessoas importantes em minha vida. Em primeiro lugar, minha orientadora, Profa. Rita Maria Cunha de Almeida, a quem tive a honra de ter como professora e que tem me dado muita atenção e incentivo não só a mim, mas a todo o curso de Engenharia Física. Sua orientação tem sido fundamental para o sucesso deste trabalho.

Também quero agradecer aos meus pais, Leandro Dornelles e Jacqueline Pereira, por terem me apoiado desde o início e por terem me ensinado lições valiosas que me tornaram a pessoa que sou hoje. Meu pai sempre incentivou minha curiosidade e me despertou o amor pela ciência, enquanto minha mãe me ensinou a importância de ser uma pessoa gentil e compassiva. E minha irmã, Daphne Dornelles, merece um agradecimento especial por ter me apoiado incondicionalmente ao longo da minha vida.

Por fim, gostaria de agradecer aos meus colegas e amigos que sempre acreditaram em mim e me ajudaram nos momentos mais difíceis. Em particular, gostaria de destacar Víctor Gandara, Gabriela Pereira Henrique e Erhon Aragão, que estiveram comigo em toda a jornada e que serão sempre chamados de amigos. A presença deles foi fundamental para que eu pudesse concluir este trabalho e chegar até aqui.

## RESUMO

Atualmente, a Califórnia, o Estado mais representativo do capital americano, tem enfrentado altos índices de êxodo, tanto humano quanto empresarial, conforme indicado pela análise da rede de migrações dos Estados americanos. Diversos estudos têm apontado que os altos índices de taxaço, os elevados custos imobiliários e a desigualdade salarial nas grandes cidades são os principais responsáveis por esse fenômeno.

Nesse contexto, o presente trabalho tem como objetivo a construção de um modelo estocástico baseado em agente para simular o fluxo migratório interestadual, levando em conta fatores como custo de vida, produção e taxas. A criação do modelo utilizará a análise de dados reais os Estados Unidos da América. Com essa abordagem inovadora, esperamos construir e compartilhar uma primeira versão robusta do modelo, que permitirá ser refinada por trabalhos futuros mais extensivos.

**Palavras-chave:** Fluxo Socioeconômico, Migração Doméstica, Modelo Baseado em Agente, Python.

# ABSTRACT

Currently, California, the state with the greatest representation in American capital, presents high levels of exodus - human and business - according to the analysis of the network of migrations among American states. Various studies point to high taxation rates, high housing costs, and wage inequality in large cities as the main causes.

The present work aims to design the construction of a stochastic agent-based model for simulating interstate migration flows with factors of cost of living, production, and rates. The model creation will use analysis from United States of America data. By employing this innovative approach, we aspire to construct and disseminate an initial version of the model, which can be further refined for more extensive future research.

**Keywords:** Socioeconomic flux, Domestic Migration, Agent-based Modeling, Python.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>11</b>
1.1.1	Objetivos Gerais	11
1.1.2	Objetivos Específicos	12
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>13</b>
<b>2.1</b>	<b>Cenário Socioeconômico</b>	<b>13</b>
2.1.1	Um Breve Contexto Sobre a Califórnia	13
2.1.2	Fluxo e Taxas Populacionais	14
2.1.3	Renda, Taxação, Paridade de Preços e Índice de Desenvolvimento Humano	15
2.1.4	Índice de Gini e a Desigualdade Salarial	17
2.1.5	Correlação Histórica	19
<b>2.2</b>	<b>Modelos Baseado em Agentes</b>	<b>20</b>
<b>2.3</b>	<b>Modelo de Migração</b>	<b>21</b>
2.3.1	Probabilidade de transação	22
2.3.2	Produção de riqueza da transação e sua distribuição	22
2.3.3	Custo de Vida	23
2.3.4	O retorno do governo	24
2.3.5	Migração	24
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>26</b>
<b>3.1</b>	<b>Obtenção, Transformação e Armazenamento dos Dados Reais</b>	<b>26</b>
<b>3.2</b>	<b>Definições Iniciais</b>	<b>26</b>
<b>3.3</b>	<b>Execução</b>	<b>27</b>
<b>3.4</b>	<b>Análises</b>	<b>27</b>
<b>3.5</b>	<b>Computação</b>	<b>28</b>
3.5.1	Python	28
3.5.2	Armazenamento de Dados	28
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>29</b>
<b>4.1</b>	<b>Uniformidade entre Estados</b>	<b>29</b>
4.1.1	Expoente de migração	31
4.1.2	Custo por densidade de população	32
4.1.3	Probabilidade e Distribuição de Transação	33
<b>4.2</b>	<b>Diferenciação entre Estados</b>	<b>36</b>
4.2.1	Taxa sobre produção	36

4.2.2	Constante de produção e custo de vida . . . . .	38
4.2.3	Pessoas por Estado e riqueza inicial . . . . .	41
<b>4.3</b>	<b>Simulação do cenário atual . . . . .</b>	<b>43</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>5.1</b>	<b>Trabalhos Futuros . . . . .</b>	<b>46</b>
<b>A</b>	<b>APÊNDICE . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>A.1</b>	<b>Numpy . . . . .</b>	<b>47</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>48</b>

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Migração doméstica absoluta do Estado da Califórnia por trimestre, adaptado de [12]. A linha contínua representa o valor absoluto e a linha tracejada representa a média do último ano. . . . .	14
Figura 2 – Migração Doméstica Líquida por Estado, composição de dados obtidos de [13] e [14] . . . . .	15
Figura 3 – Mudança Populacional por Estado, dados obtidos de [13] . . . . .	15
Figura 4 – Imposto de renda per capita ao ano em dólares atuais, dados obtidos de [16] . . . . .	16
Figura 5 – Renda Anual Per Capita vs. Paridade de Preço de Aluguel de 2021, sendo a linha pontilhada a reta de tendência entre os dois valores. Dados obtidos de [17] . . . . .	16
Figura 6 – Migração Doméstica Normalizada por Estado No Ano de 2021 Versus IDH onde a linha pontilhada é a reta de tendência, obtido de [13] e [19] . . . . .	17
Figura 7 – O Índice de Gini, obtido e adaptado de [20] . . . . .	18
Figura 8 – Índice de Gini vs. PIB per Capita por Estado, obtido de [21] . . . . .	19
Figura 9 – Distribuição de custo de vida de um Estado com $\langle \omega \rangle = 100$ , eixo das abscissas está na escala logarítmica . . . . .	23
Figura 10 – Diagrama de execução do modelo . . . . .	27
Figura 11 – Análise de resultados de 70 anos de simulação utilizando os parâmetros da tabela 3 . . . . .	30
Figura 12 – Fluxo de pessoas por ano no país complementando a análise da figura 11 . . . . .	31
Figura 13 – Fluxo de pessoas por ano no país para $T = 0.1$ , $T = 1$ , $T = 10$ e $T = 100$ . . . . .	31
Figura 14 – Desvio padrão de riqueza entre os Estados para cada valor de $T$ . . . . .	32
Figura 15 – Número de pessoas por ano sobre os valores da tabela 3 e $\tau = 1$ . Na figura a) é exposto a linha de cada Estado e na figura b) apenas para o primeiro Estado . . . . .	33
Figura 16 – Distribuição de população entre os Estados para $\lambda_t = \epsilon = 0$ . . . . .	34
Figura 17 – Riqueza total por estado por ano e número de pessoas por ano sobre os valores da tabela 3 e $\lambda_t = \epsilon = 1$ . . . . .	35
Figura 18 – Índice de Gini por Estado para $\lambda_t = \epsilon = 1$ . . . . .	35
Figura 19 – Distribuição da população para Estados contendo. . . . .	36
Figura 20 – Análise de riqueza de cada Estado para valores de $\delta = 0$ , $\delta = 0.1$ e $\delta = 0.2$ . . . . .	38
Figura 21 – Análise da diferenciação do número de pessoas e riqueza iniciais por Estado para diferentes valores de $\alpha$ de acordo com a tabela 21 . . . . .	39
Figura 22 – Análise da diferenciação do número de pessoas e riqueza iniciais por Estado para diferentes valores de $\phi$ , de acordo com a tabela 4 . . . . .	40

Figura 23 – Análise da diferenciação do número de pessoas e riqueza iniciais por Estado para diferentes valores de $\phi$ e $\alpha$ de acordo com a tabela 23 . . .	41
Figura 24 – Análise da diferenciação do número de pessoas e riqueza iniciais por Estado . . . . .	43
Figura 25 – Análise da simulação usando valores proporcionais aos Estados da Califórnia, Nova York, Texas, Flórida e da média americana . . . . .	44

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Correlação de variáveis socioeconômicas dos Estados entre 2005 e 2021 com a migração doméstica líquida normalizada. . . . .	20
Tabela 2 – Parâmetros Iniciais . . . . .	26
Tabela 3 – Parâmetros da análise de variação do coeficiente de migração . . . . .	29
Tabela 4 – Valores de $\alpha$ e $\phi$ para cada Estado . . . . .	38
Tabela 5 – Valores de $N(s)$ e $\omega_0$ para cada Estado . . . . .	42
Tabela 6 – Valores selecionados para cada um dos Estados da análise final . . . . .	43

# 1 INTRODUÇÃO

Compreender o comportamento social humano não é tarefa fácil. A falta de compreensão do comportamento de pessoas já causou inúmeras adversidades à humanidade, desde guerras até crises financeiras. Recentemente, um fenômeno que vem repercutindo o país com o maior Produto Interno Bruto do mundo, os Estados Unidos, é a evasão populacional e empresarial alarmante em seu Estado de maior participação econômica, a Califórnia. O chamado "Êxodo da Califórnia"[1] ganhou o palanque mundial quando diversas empresas e lideranças americanas saíram do Estado, levando empregos, pessoas e renda, aumentando as tensões sobre as decisões políticas do governo [2] ao ponto de fazer com que seu crescimento populacional se tornasse negativo [3].

Recentemente, a súbita ação de pessoas simultaneamente levou à segunda maior quebra de um banco na história dos Estados Unidos, o Banco do Vale do Silício, em 9 de março de 2023 [4]. Onde o Banco do Vale do Silício, SVB, - formado primariamente por clientes de empresas de start-ups de tecnologia financiadas por investidores de capital de risco - perdeu mais de 42 bilhões de dólares em apenas um dia. Essa perda repentina foi causada pela notícia da queda do portfólio dos ativos de títulos garantidos por hipotecas, MBS, fazendo com que diversas pessoas retirassem o dinheiro das contas com medo que o banco não pudesse pagar; isso gerou uma bola de neve que fez um banco multi-bilionário falir em poucas horas.

Quando estudamos o comportamento de átomos em um recipiente, podemos afirmar que a reação de cada átomo está inteiramente associado à reação de outros átomos no ambiente, assim como a ciência social afirma que a decisão de uma pessoa depende da decisão de outras [5]. O estudo de sistemas dinâmicos usufrui de leis e propriedades físicas para entender o comportamento estatístico de uma população. Há, no entanto, uma diferença importante: pessoas não são inativas, mas agentes capazes de reagir autonomamente. Isso também acontece quando se investigam o comportamento de bandos de pássaros, migração de micro-organismos, ou comportamento social de comunidades humanas. Para o estudo de sistemas de agentes autônomos, várias técnicas matemáticas e computacional surgiram nas últimas duas ou três décadas.

Relativizando com propriedades físicas do sistema, neste podemos considerar que cada pessoa dentro de uma simulação é interpretada como uma partícula. Neste trabalho, as pessoas, ou agentes, estão em um Estado e possuem uma riqueza associadas a elas. Os agentes interagem entre si e geram mais riqueza, mas também têm um custo de vida que funciona como um sumidouro de riqueza. O Estado atua como um agente que coleta uma parte da riqueza gerada nas transações e redistribui entre todos os agentes do sistema. Por fim, os agentes têm a probabilidade de migrar para um Estado cujo ganho de riqueza

líquido é diferente do que o atual.

Já foram desenvolvidos trabalhos semelhantes que descrevem modelos baseados em agentes com características socioeconômicas de mercados, como por exemplo, [6] que descreve como distribuições de Boltzmann-Gibbs emergem da simulação computacional de modelos econômicos. Logo após, temos [7] que descreve um modelo na qual os agentes competem por transações, onde cada agente tem uma riqueza inicial  $\omega_0$  e despense uma parte de sua riqueza proporcional à soma das duas riquezas envolvidas na transação. Os agentes então disputam o montante final, com probabilidade proporcional à riqueza de cada agente. Este modelo demonstrou, numericamente e analiticamente, que uma transação com um valor maior do que a riqueza de todos os agentes, envolvidos ou não, acaba gerando a condensação do Estado - onde um agente obtém toda riqueza do sistema, quando não há uma forma de favorecer os agentes com menos riqueza.

Além disso, trabalhos recentes como [8] que utilizou modelos baseado em agentes para apontar uma correlação positiva entre a expansão urbana com base e a diferença segregação de renda.

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 Objetivos Gerais

O objetivo central deste projeto é desenvolver um modelo matemático e computacional que permita uma análise profunda e extensiva de suas propriedades em trabalhos futuros. Dado que essa análise pode requerer tempo e recursos que não estão incluídos no escopo deste projeto, o modelo será projetado para permitir tais trabalhos futuros. Além disso, o projeto será disponibilizado gratuitamente através do GitHub para que outros pesquisadores possam ter acesso e contribuir para seu aprimoramento.

Consideramos um país composto de  $n$  Estados. Neste trabalho, a palavra “Estado” tem o sentido de província de um país, em contraposição ao sentido de caracterização de um estado físico ou termodinâmico. Para ressaltar esse ponto, escrevemos Estado, com letra maiúscula. A criação do modelo será feita a partir da construção de uma matriz de Estados  $1, 2, 3, \dots, E$ . Cada Estado  $s$  terá um número de agentes  $N$  que possuem uma riqueza  $\omega$ , a cada iteração os agentes podem executar uma produção de valor  $\alpha$  com um outro agente aleatório do mesmo Estado. O resultado da produção é taxado pelo Estado dos agentes; para manter-se produzindo, um agente deve pagar um custo de vida baseado na própria riqueza, na riqueza do Estado e no número de agentes do Estado em cada iteração. Após isso, a taxa recolhida pelo Estado é redistribuída para os agentes - priorizando agentes que têm riqueza negativa. Por último, cada agente tem a chance de migrar para um outro Estado aleatório cujo potencial de ganho líquido médio seja maior

do que ele está atualmente.

Após analisar o comportamento das mudanças nos parâmetros do modelo, o nosso objetivo é identificar quais características levam à estabilidade dos Estados, sem resultar em fenômenos indesejados como a morte térmica - em que todos os agentes ficam sem riqueza e param de produzir -, a condensação - em que um ou poucos agentes possuem toda a riqueza do sistema - ou a extrapolação da produção - em que a produção do agente atinge patamares exponenciais e infinitos.

Além disso, queremos compreender quais características são mais relevantes na descrição do comportamento de migração econômica e populacional entre Estados. A generalização do modelo pode nos ajudar a utilizá-lo para outros países, como a Rússia, Brasil e China ou em composições de países como a União Europeia ou o Mercosul.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

- 1) Obtenção e tratamento de dados socioeconômicos americanos;
- 2) construção do modelo baseado em agente;
- 3) estudo com a alteração dos parâmetros da simulação, definidos na seção de metodologia;
- 4) comparação do modelo criado com os dados reais;
- 5) refatoração de paradigma do projeto em busca de melhorias para estudos futuros.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Antes de analisarmos os fatores que podem impactar nosso modelo, é importante compreender o cenário socioeconômico atual dos Estados Unidos de forma estatística. Para isso, é necessário levantar as propriedades da física computacional e da economia que nos permitirão estudar as características do modelo e obter comportamentos semelhantes aos dados reais.

Nesse sentido, realizaremos um estudo do cenário socioeconômico dos Estados Unidos e buscaremos correlacionar estatisticamente as propriedades de cada Estado com sua respectiva migração. Além disso, analisaremos trabalhos que utilizaram modelos baseados em agentes para descrever o comportamento de fenômenos da natureza e da sociedade, buscando inspiração e referências para nosso modelo.

Por fim, utilizaremos essas informações para estabelecer matematicamente o comportamento do nosso modelo, buscando assim representar de forma fiel o fenômeno em estudo.

### 2.1 Cenário Socioeconômico

#### 2.1.1 Um Breve Contexto Sobre a Califórnia

Em 1848, a região da Califórnia nos Estados Unidos da América presenciou seu primeiro ápice imigratório com a descoberta de ouro na região, onde a extração do minério prometia um grande influxo de ouro na oferta monetária a qual revigoraria a economia americana. Cerca de 300 mil pessoas migraram para a região da Califórnia e foram extraídos em ouro o equivalente a 19 bilhões de dólares atualmente (2022) [9].

Em um segundo momento, após a Segunda Guerra Mundial, a Califórnia viu seu segundo ápice com o desenvolvimento da indústria de defesa militar e aeroespacial - o que formou uma base para a construção do Vale do Silício na Baía de São Francisco décadas depois.

Hoje, a Califórnia é o Estado de maior participação econômica nos Estados Unidos, atingindo 12,96% do PIB americano [10], em 2022, e se fosse um país seria a quinta maior economia mundial, superior à do Brasil [11]. Entretanto, o Estado da Califórnia ao longo das últimas duas décadas vem apresentando uma queda no fluxo migratório entre outros Estados americanos e outros países. Sendo assim, existem mais pessoas emigrando da Califórnia do que imigrando. O número de pessoas saindo se intensificou após o início da pandemia da COVID-19.

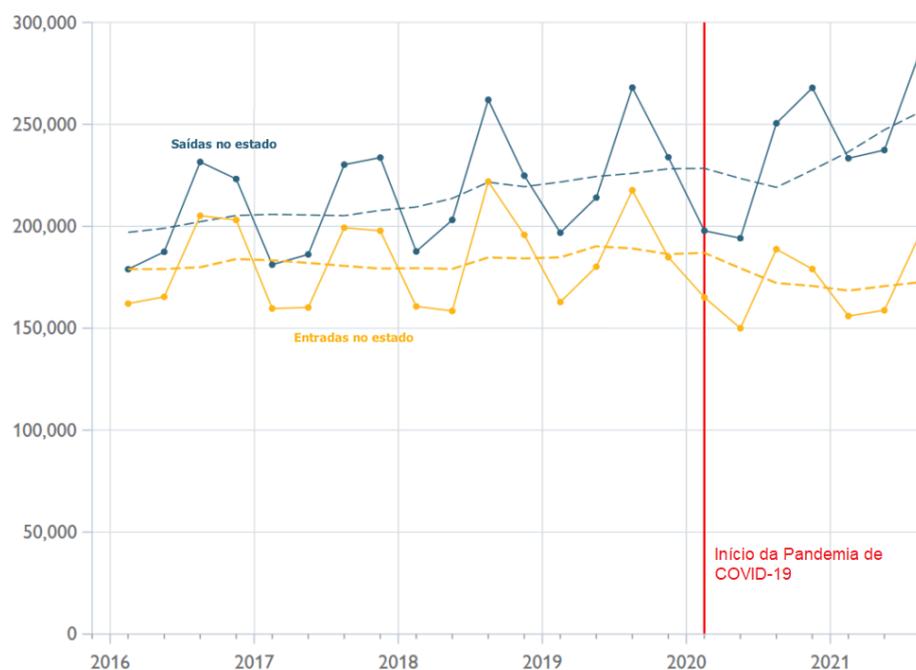


Figura 1 – Migração doméstica absoluta do Estado da Califórnia por trimestre, adaptado de [12]. A linha contínua representa o valor absoluto e a linha tracejada representa a média do último ano.

A figura 1 mostra a migração doméstica da Califórnia por trimestre, é possível notar que há um comportamento cíclico anual de migrações, tendo picos nas estações de verões do hemisfério norte e vales nas estações de inverno. Sendo o Estado mais populoso dos Estados Unidos e com tamanha densidade econômica, é fácil compreender o fato do Estado ter uma das maiores desigualdades econômicas e taxas de pobreza. Portanto, a compreensão do êxodo imobiliário, empresarial e econômico de Estados como a Califórnia é de grande relevância estratégica em investimentos financeiros e até mesmo de viés político - uma vez que as eleições americanas têm como parâmetro o tamanho da população e da participação econômica de cada Estado.

### 2.1.2 Fluxo e Taxas Populacionais

O escritório do censo americano - U.S. Census Bureau, citado diversas vezes ao longo do texto - apresenta uma coletânea de dados extremamente vasta e de livre acesso que iremos utilizar ao longo do trabalho. O gráfico da figura 2 mostra a migração interestadual líquida entre os anos 2005 e 2021 onde comparamos o Estado da Califórnia com o restante dos dados, podemos perceber que há dois grupos de Estados que se distinguem dos demais: Estados com alta emigração como Nova York e Califórnia, e Estados com alta imigração como Flórida e Texas.

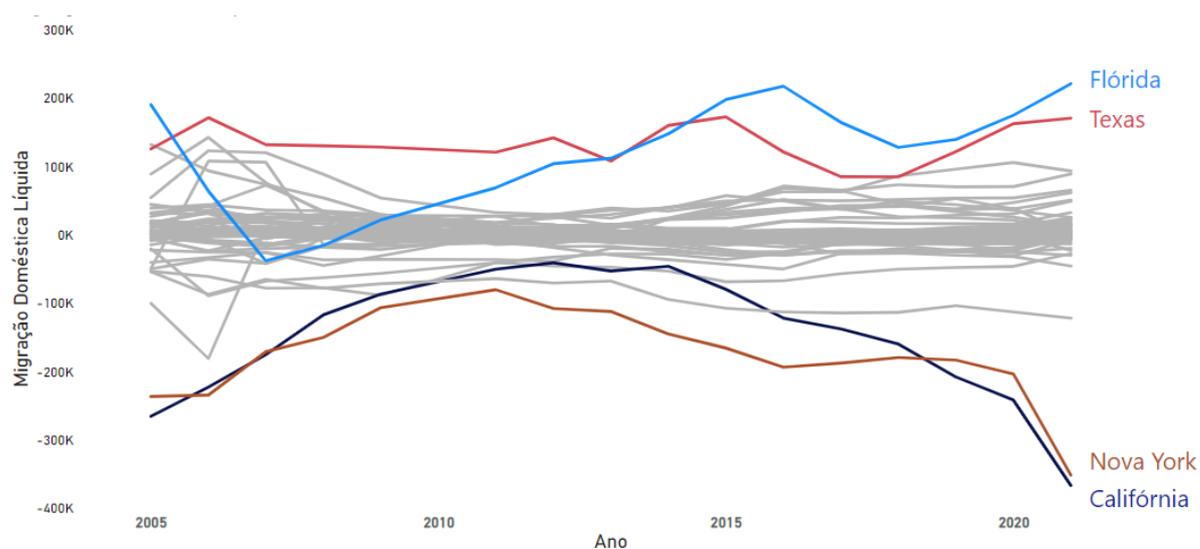


Figura 2 – Migração Doméstica Líquida por Estado, composição de dados obtidos de [13] e [14]

Uma alta taxa de emigração de habitantes para outros Estados ainda não foi o bastante para frear o crescimento populacional da Califórnia. A partir de 2015 que sucessivamente, a Califórnia viu seu crescimento desacelerar quando finalmente, em 2019, viu seu crescimento populacional se tornar negativo.

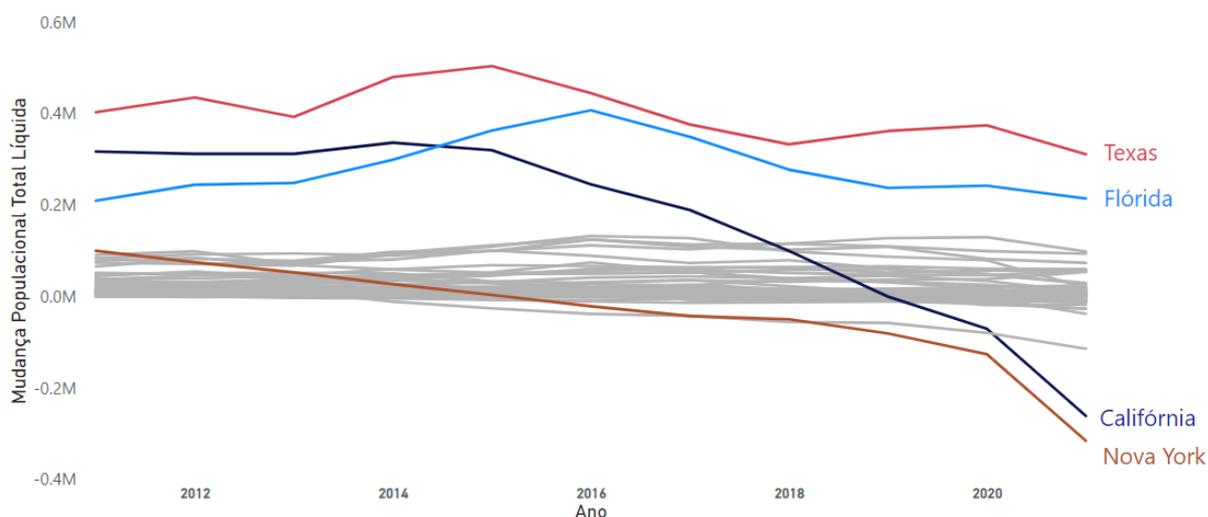


Figura 3 – Mudança Populacional por Estado, dados obtidos de [13]

### 2.1.3 Renda, Taxação, Paridade de Preços e Índice de Desenvolvimento Humano

Tanto a mídia como pesquisas sobre a opinião pública apontam que dentre os motivos da evasão de pessoas, os principais são as altas taxas de imposto, o alto custo imobiliário devido à disputa de imóveis em áreas de alta densidade populacional e a desigualdade salarial [15]. Quando comparamos o imposto de renda per capita ao ano de

cada Estado, como mostra a figura 4, e a migração doméstica líquida, figura 2, podemos notar uma correlação negativa.

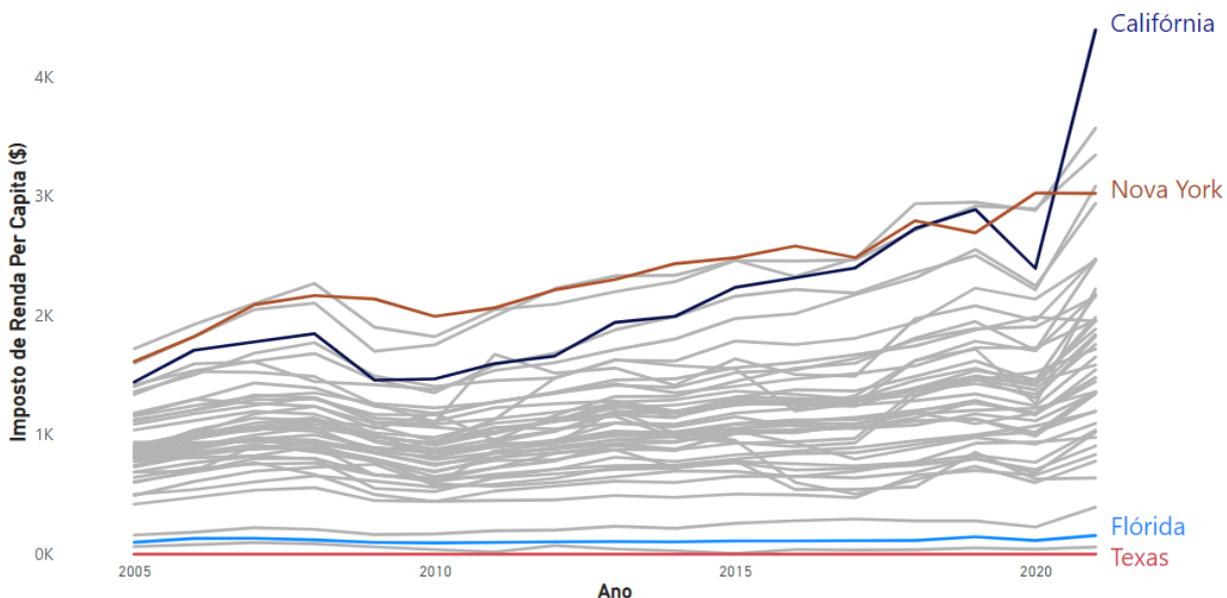


Figura 4 – Imposto de renda per capita ao ano em dólares atuais, dados obtidos de [16]

Já para entendermos o quanto o custo imobiliário de cada Estado está distribuído, podemos usar a taxa de paridade de preço aplicada ao valor do aluguel. Este índice analisa imóveis com as mesmas características e normaliza os preços definindo a média americana como 100. Portanto, se um Estado  $s$  tem a paridade de preço como 150, afirma-se que seus preços no contexto visado é 50% maior que a média americana.

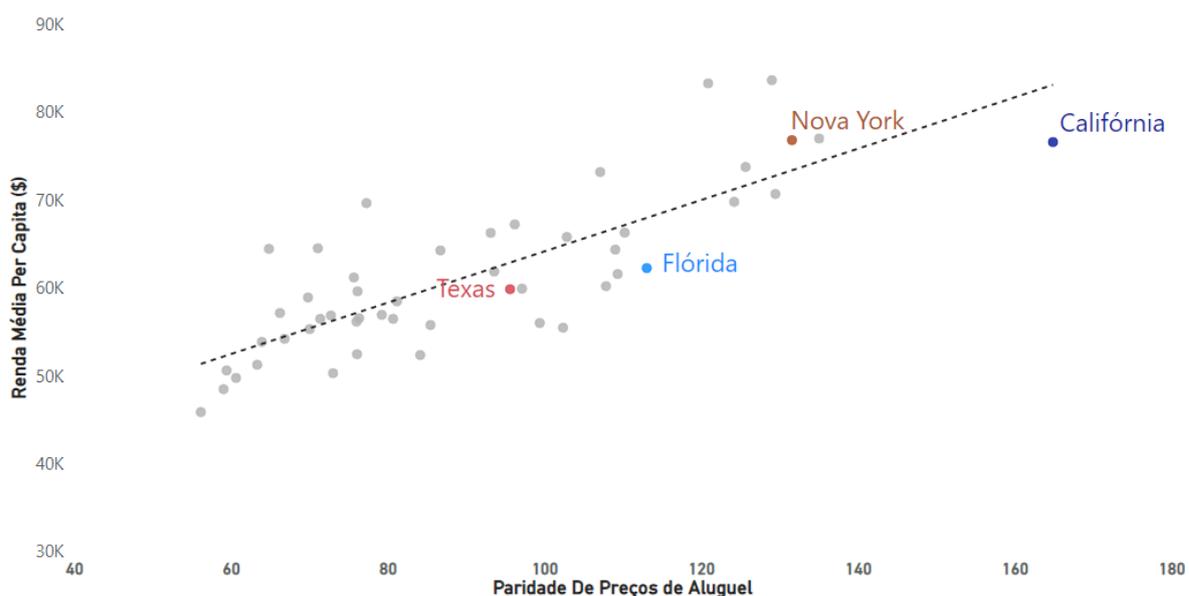


Figura 5 – Renda Anual Per Capita vs. Paridade de Preço de Aluguel de 2021, sendo a linha pontilhada a reta de tendência entre os dois valores. Dados obtidos de [17]

Analisando os dados da figura 5, podemos visualizar que U\$98,00 no Texas tem o mesmo poder de compra para alugar um imóvel do que U\$164,00 na Califórnia, um aumento de 67%. Sendo que, a renda média californiana é apenas 28% maior que a texana. Uma outra ótica relevante para analisarmos é o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) de cada Estado. O IDH foi criado em 1990 no Relatório de Desenvolvimento Humano [18] pela Organização das Nações Unidas (ONU) e leva em conta expectativa de vida, níveis educacionais e renda per capita. A distribuição do IDH de cada Estado e sua respectiva migração doméstica normalizada no ano de 2021 pode ser visualizada na figura 6. É importante ressaltar que todos os Estados americanos têm um IDH maior que 0.9, o que é categorizado como "muito alto". É possível notar que há uma grande dispersão entre a distribuição das duas características e podemos dizer que o IDH não é uma variável potencialmente relevante para predizermos o comportamento da migração doméstica.

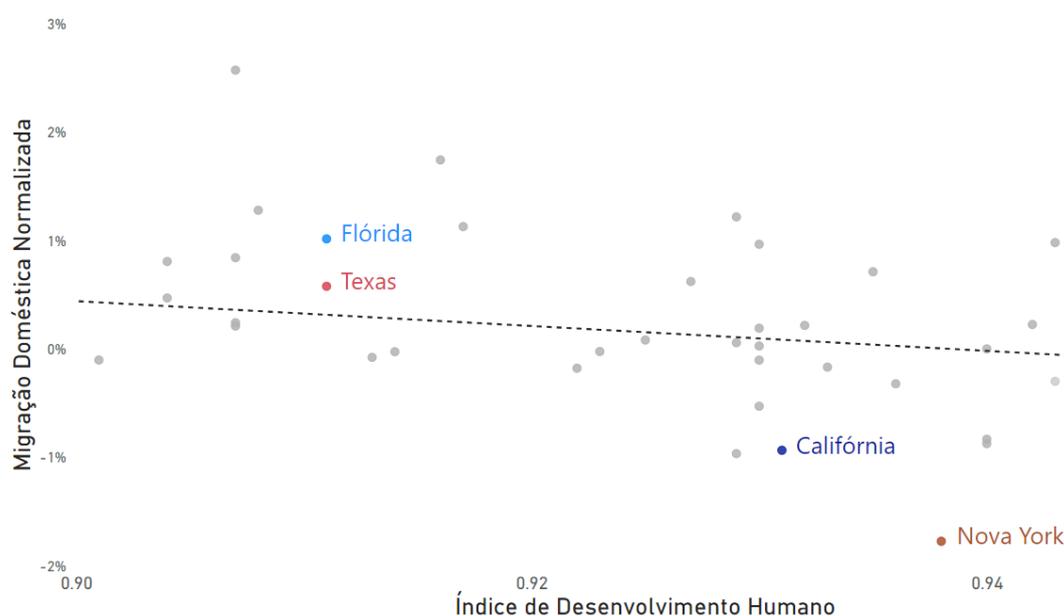


Figura 6 – Migração Doméstica Normalizada por Estado No Ano de 2021 Versus IDH onde a linha pontilhada é a reta de tendência, obtido de [13] e [19]

#### 2.1.4 Índice de Gini e a Desigualdade Salarial

O estudo de desigualdade de renda é um assunto muito fomentado entre os economistas. A discussão de quanta desigualdade é ideal e se a desigualdade de renda é um fator intrínseco das sociedades ainda é amplamente estudado. Para quantificarmos o nível de desigualdade de uma sociedade, os economistas usam o Índice de Gini [20], ou Coeficiente de Gini quando seu valor não é expresso em porcentagem. O índice é tratado como um valor entre 0 e 1, onde 0 trata-se de uma sociedade com renda totalmente igualitária e 1 quando uma única pessoa detém toda riqueza de uma sociedade.

O Índice de Gini é calculado com base na proporção da área abaixo da reta de fração populacional e da área acima da curva de Lorenz da fração de renda da população.

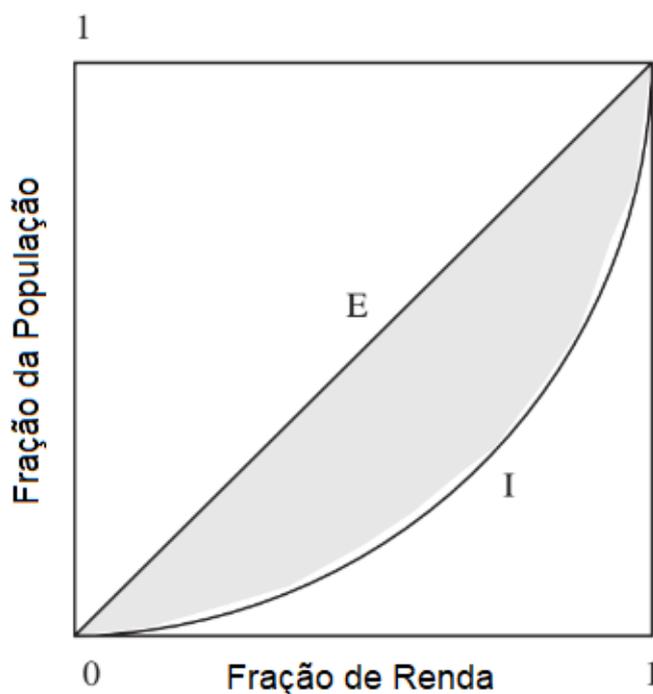


Figura 7 – O Índice de Gini, obtido e adaptado de [20]

O Coeficiente de Gini  $G$  pode ser facilmente obtido de

$$G = \frac{A_E}{(A_E + A_I)}, \quad (2.1)$$

onde  $A_E$  representa a área entre a reta  $E$  e a curva  $I$ , enquanto  $A_I$  é a área abaixo da curva  $I$ . Ou, ordenando a contribuição para a renda de cada indivíduo da população  $R_i$  e a contribuição para a fração da população  $P_i$ , o cálculo para o coeficiente de Gini se torna

$$G = 1 - \sum_{i=1}^{k=n-1} (R_{i+1} - R_i)(P_{i+1} - P_i). \quad (2.2)$$

A dispersão do Índice de Gini versus o Produto Interno Bruto per Capita de cada Estado toma a forma da figura 8

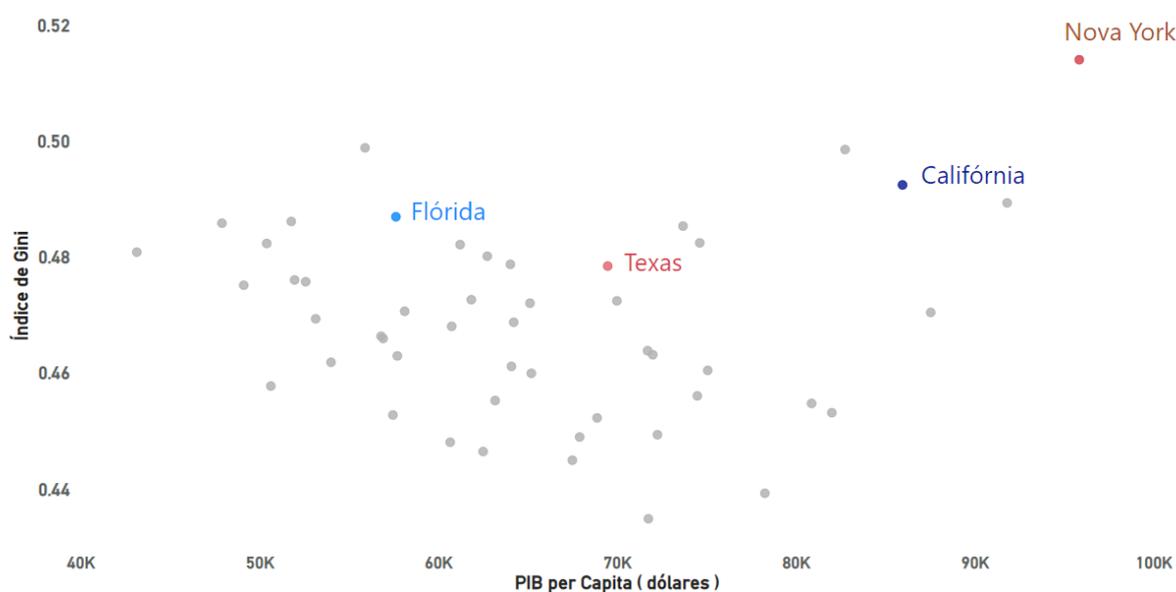


Figura 8 – Índice de Gini vs. PIB per Capita por Estado, obtido de [21]

onde podemos observar que Nova York é o Estado de maior PIB per capita e também o com maior Índice de Gini - ou seja, o Estado com maior desigualdade de renda - e a Califórnia como o quarto Estado mais desigual. Podemos observar que a distribuição americana da desigualdade sobre o PIB per Capita tem um comportamento uniforme para a média americana e que apresenta um picos de desigualdade em Estados muito mais ricos que a média americana.

O mecanismo de taxação de renda pode ser uma ferramenta do governo para mitigar a desigualdade salarial. Porém, como podemos observar, mesmo a Califórnia e Nova York estarem entre os Estados com maior coleta de imposto sobre a renda per capita, eles ainda estão entre os Estados com maiores custos de vida e desigualdade salarial.

### 2.1.5 Correlação Histórica

Ao analisar a série temporal anual de todas as variáveis que vimos até agora e as comparando com a migração doméstica líquida normalizada obtemos a tabela 1. É importante ressaltar que valores positivos da migração doméstica líquida se referem a um fluxo resultante de maior entrada no Estado e valores negativos referem-se à saída no Estado.

Categoria	Correlação
Migração Doméstica Líquida Normalizada	100.00%
População Estimada	-0.72%
IDH	-8.12%
Imposto sobre Consumo Per Capita	-10.91%
Imposto sobre Propriedade Per Capita	-11.47%
Renda Per Capita	-13.10%
Índice de Gini	-25.08%
Paridade de Preço de Aluguel	-28.01%
Imposto Total Per Capita	-28.10%
Imposto de Renda Per Capita	-29.12%

Tabela 1 – Correlação de variáveis socioeconômicas dos Estados entre 2005 e 2021 com a migração doméstica líquida normalizada.

O cálculo de correlações foi feito usando o coeficiente de correlação padrão, disponível na ferramenta Pandas do Python. Ao analisar os valores de correlação da tabela 1, concluímos que as variáveis que mais influenciam nas previsões são o imposto de renda per capita, imposto total per capita, a paridade de preço de aluguel e o Índice de Gini. Isso significa que ao longo dos 16 anos avaliados, as pessoas que se mudaram para outros Estados buscaram lugares com menor carga tributária, principalmente em relação ao imposto de renda, preços mais baixos de aluguel e menor desigualdade de renda.

## 2.2 Modelos Baseado em Agentes

Modelos baseados em agentes são eficazes para estudar fenômenos de comportamento de indivíduos e suas interações com o ambiente. A premissa principal é definir regras e parâmetros para um ambiente e seus agentes, fazendo com que eles reajam entre si, tomem decisões e até mesmo aprendam com decisões passadas.

Podemos definir os agentes, descrito em [22], como tendo certas propriedades e atributos como: ser autônomo e auto-direcionado - funcionar independentemente em seu ambiente e ter uma fronteira de comportamento; modular - sendo uma propriedade discreta do modelo com um conjunto de características e habilidade de tomada de decisão; social - ter protocolos que descrevem como um agente interage com outros agentes. Também definimos que nossos agentes vivem em um ambiente - como em um Estado, e tem atributos de recursos - como riqueza ou energia.

Há diversos trabalhos que utilizaram modelos baseado em agentes para descrever o comportamento de troca de riqueza, o já citado [7] e trabalhos anteriores como [6] e, [23]. Além disso, há também trabalhos que utilizaram modelos baseado em agentes para descrever migração como [8].

Observa-se frequentemente a presença de padrões similares na natureza em di-

ferentes áreas científicas, mesmo quando a correlação entre elas não é óbvia. Por isso, modelos baseados em agentes que utilizam abordagens inicialmente criadas para descrever o comportamento de partículas estão cada vez mais presentes em estudos das mais variadas áreas do conhecimento. A simulação computacional é uma ferramenta que pode ser utilizada para descrever comportamentos dinâmicos em tais modelos, e alguns exemplos recentes incluem aplicações para agentes biológicos [24], antropológicos [25], financeiros [26], químicos [27] e ecológicos [28].

Um dos primeiros trabalhos importantes dentro dos modelos baseados em agentes para descrição de características socioeconômicas é o modelo de Schelling sobre segregação [29]. Esse modelo descreve como a segregação pode ocorrer em um ambiente onde agentes tomam decisões sobre onde viver com base nas características de seus vizinhos. O modelo mostrou que a segregação pode ocorrer mesmo quando os indivíduos não são explicitamente preconceituosos, mas simplesmente porque preferem viver em ambientes com pessoas que sejam semelhantes a eles.

Além disso, o modelo de Schelling introduziu o conceito de satisfação dos agentes com base em seus vizinhos. Isso permite que os agentes tomem decisões com base em seus próprios interesses e preferências individuais. Podemos interpretar o conceito de satisfação do modelo de Schelling neste trabalho como a vontade de cada indivíduo de migrar para um Estado com maior potencial de prosperidade econômica.

## 2.3 Modelo de Migração

Podemos perceber na análise dos dados americanos que altos índices de impostos, que não se convertem em uma redução do custo de vida, preços imobiliários elevados devido à densidade populacional em grandes centros urbanos e desigualdade salarial estão correlacionados ao fenômeno de êxodo para Estados que, por sua vez, não apresentam tais índices elevados. Diante disso, iremos modelar nosso sistema dinâmico com base em agentes, levando em conta esses dados.

Consideramos uma população de  $N$  pessoas, distribuídas em  $E$  Estados. O  $i$ -ésimo agente,  $i = 1, 2, \dots, N$  reside em um Estado  $s_i$ ,  $s_i = 1, 2, \dots, E$  e possui uma riqueza  $\omega_i$ , tomado como um número real, em uma determinada semana  $t$ ,  $t = 1, 2, \dots, t_{\text{total}}$ . A população de cada Estado  $P(s, t)$  pode ser descrita por

$$P(s, t) = \sum_{\omega} N(\omega, s, t), \quad (2.3)$$

onde  $N(\omega, s, t)$  é o número de agentes que vivem no Estado  $s$  e possuem riqueza  $\omega$ . A população total do país é

$$P(t) = \sum_s P(s, t). \quad (2.4)$$

A riqueza média de um Estado é representada por  $\langle \omega(s) \rangle$  e pode ser calculada pela seguinte equação

$$\langle \omega(s) \rangle = \frac{1}{P(s)} \sum_w \omega N(\omega, s, t) . \quad (2.5)$$

A riqueza no tempo  $t = 0$  entre os agentes de cada Estado foi tomada como sendo uma distribuição normal com média  $\mu = 100$  e variância  $\sigma = 10$ , que resulta em uma distribuição muito mais justa do que a que vimos no cenário americano; queremos, portanto, observar para quais valores de parâmetros a tendência do nosso modelo é de gerar desigualdade de riqueza.

### 2.3.1 Probabilidade de transação

A probabilidade do agente  $i$  ser selecionado para uma transação é

$$p_i = \frac{\omega_i^\lambda}{\sum_{j=0}^N \omega_j^\lambda} , \quad (2.6)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro que regula quão importante é a riqueza do agente para ser escolhido. Quando  $\lambda = 0$  a probabilidade para fazer uma transação é igual para todos os agentes, quando assume valores negativos a probabilidade para fazer uma transação é maior para agentes com menor riqueza proporcional. Assim podemos controlar a forma da distribuição de probabilidade de transações. O termo no denominador da Eq. 2.6 garante a normalização da distribuição de probabilidades:

$$\sum_i \frac{\omega_i^\lambda}{\sum_{j=0}^N \omega_j^\lambda} = 1 . \quad (2.7)$$

Cada transação envolve dois agentes, sendo que o segundo agente é escolhido com a mesma equação de probabilidade, mas normalizada pela riqueza total do Estado do primeiro agente escolhido e restrito aos residentes desse mesmo Estado. Isso significa que as transações ocorrem apenas entre agentes do mesmo Estado. Se  $\lambda > 0$ , isso também significa que os moradores de um Estado mais rico têm maiores probabilidades de participarem de transações.

### 2.3.2 Produção de riqueza da transação e sua distribuição

A produção de riqueza devida à transação entre os agentes  $i$  e  $j$  será constante e definida por  $\alpha$ , cujo valor será 1. A riqueza produzida é então distribuída entre os participantes da transação e o governo da seguinte forma

$$\alpha = \beta_i + \beta_j + \beta_{gov} , \quad (2.8)$$

sendo  $\beta_i$  a parcela da riqueza destinado ao agente  $i$ ,  $\beta_j$  o mesmo para o agente  $j$  e  $\beta_{gov}$  representa o imposto sobre produção recolhido pelo governo.

A parcela do imposto acontece antes da distribuição para os agentes,  $\beta_{gov} = \delta\alpha$  onde  $\delta$  é um coeficiente entre 0 e 1. O restante é distribuído entre os agentes da seguinte forma

$$\beta_i = (\alpha - \beta_{gov}) \frac{\omega_i^\epsilon}{(\omega_i^\epsilon + \omega_j^\epsilon)}, \quad (2.9)$$

onde  $\epsilon$  é um expoente de distribuição da produção sobre a proporção da riqueza semelhante a 2.6; o valor para  $\beta_j$  é obtido similarmente. Podemos também reescrever a produção gerada após o recolhimento de imposto na equação 2.9 para  $\alpha - \beta_{gov} = \Delta\omega_{\text{prod}}(1 - \delta)$  onde nos ajuda a evidenciar o impacto do valor de  $\delta$  sobre o imposto e sobre a remuneração da população.

### 2.3.3 Custo de Vida

O custo de vida que incide sobre cada agente deve ser dependente da riqueza  $\omega$  de cada agente e acontecerá a cada 52 semanas, aproximadamente um ano. Também deve haver um custo mínimo e máximo relativos à distribuição de riqueza do Estado. Sendo assim, podemos definir que o custo de vida  $g$  dos agente no Estado  $s$  segue a distribuição

$$g(\omega) = 0.8\langle\omega(s)\rangle + 2\langle\omega(s)\rangle \frac{\tanh\left(\frac{\omega}{\langle\omega(s)\rangle} - 1\right)}{2}. \quad (2.10)$$

Portanto, definimos que em um determinado Estado, um agente com riqueza aproximadamente 10 vezes a média ou mais tem um teto de custo de vida e um agente com riqueza de 1/10 da média ou menos tem um piso no custo de vida. O comportamento da função de custo de vida 2.10 sobre a riqueza pode ser observada na figura 9.

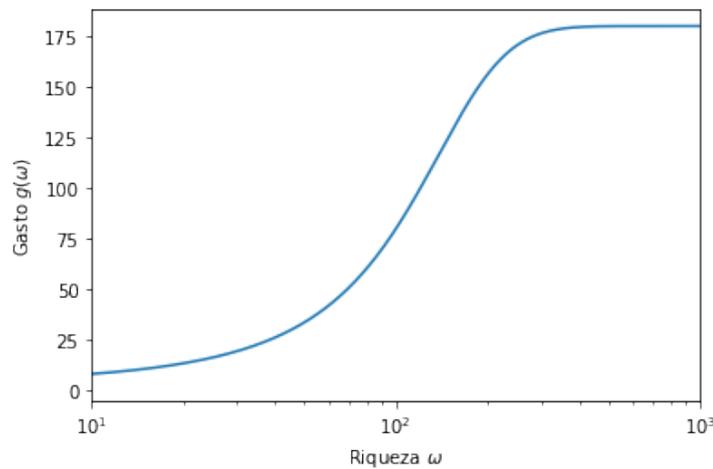


Figura 9 – Distribuição de custo de vida de um Estado com  $\langle\omega\rangle = 100$ , eixo das abscissas está na escala logarítmica

Considerando que o custo de vida está intimamente ligado ao custo de moradia, e como já discutimos anteriormente, o valor dos imóveis é afetado diretamente pela

disponibilidade dos mesmos, ou seja, quanto mais densamente povoada uma região, maior será o custo de manter um imóvel e, conseqüentemente, maior será o custo de vida. Podemos adicionar um termo ao gasto

$$g(\omega) = [0.8\langle\omega(s)\rangle + 2\langle\omega(s)\rangle \frac{\tanh\left(\frac{\omega}{\langle\omega(s)\rangle} - 1\right)}{2}]e^{\tau \frac{N(s,t)}{P}}, \quad (2.11)$$

onde  $\tau$  é, novamente, um termo de importância da densidade populacional sobre o custo de vida. Se  $\tau$  for 0, o gasto torna-se independente da densidade populacional, se for maior que zero, o custo cresce com o aumento da densidade da população no Estado. É importante mencionar que o retorno do governo irá permitir que um agente saia de um valor negativo de riqueza. Porém, caso mesmo assim um agente acabe com a riqueza negativa no final do ano, o gasto é computado como se ele tivesse uma riqueza total de 0, que equivale ao piso do custo de vida daquele Estado que pode ser visto na figura 9.

### 2.3.4 O retorno do governo

Como uma forma de mitigar a desigualdade salarial, o governo redistribui, a cada ano, os impostos recolhidos igualmente depois de cobrir custos de pessoas que acabaram com riqueza negativa. Podemos chamar a redistribuição do governo de volta aos contribuintes de  $\gamma$ . Finalmente, a nova riqueza dos agentes definida por

$$\begin{cases} \Delta\omega_i(t+1) = \omega_i(t) + \sum \alpha_{i,t} & , \text{ se } t \neq 52d \text{ onde } d = 1, 2, 3, 4, \dots \\ \Delta\omega_i(t+1) = \omega_i(t) + \sum \alpha_{i,t} - g(\omega_i(t)) + \gamma & , \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (2.12)$$

### 2.3.5 Migração

O modelo foi criado com o objetivo de compreender os aspectos socioeconômicos que influenciam o processo de migração entre Estados. Dessa forma, podemos afirmar que o fator econômico que determina se um agente vai se mudar para outro Estado é o potencial de obter um ganho líquido maior nesse Estado. Assim, um agente não pode se mudar para um Estado cuja expectativa de ganho líquido no último ano, após os gastos e retornos do governo, seja menor do que a sua situação atual. É importante destacar que um Estado que é atraente para obter ganhos acaba se tornando mais caro para permanecer devido ao aumento da demanda por imóveis, o que pode reduzir o ganho líquido dos agentes. Portanto, para determinar o ganho de riqueza do agente  $i$ , precisamos primeiro calcular quanto ele obteve no último ano

$$\Delta\omega_i = \omega_i(t) - \omega_i(t - 52). \quad (2.13)$$

Dessa forma, definimos que a migração só é possível para Estados cujo ganho estimado seja maior do que no Estado atual. Para isso, é calculada a média de  $\Delta\omega$  para

todos os agentes que possuem riqueza entre  $\omega - \frac{\langle \omega(s') \rangle}{200}$  e  $\omega + \frac{\langle \omega(s') \rangle}{200}$  em um Estado aleatório  $s'$ , a qual chamaremos de  $\langle \Delta\omega(s') \rangle$ .

Finalmente, a probabilidade de um agente migrar para um Estado  $s'$  é

$$p_m = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{\langle \Delta\omega(s') \rangle - \Delta\omega_i}{\Delta\omega_i T}} & , \text{ se } \langle \Delta\omega(s') \rangle > \Delta\omega_i \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}, \quad (2.14)$$

onde  $T$  é um coeficiente que regula flutuações, relativo ao inverso da temperatura de Boltzmann, em nosso paralelismo com o sistema de partículas. Quanto menor o valor de  $T$ , mais suscetível à migração um agente fica. Se  $T$  for grande, a diferença de potencial de ganho tem que ser muito grande para a probabilidade de migração ser relevante.

### 3 METODOLOGIA

Todo código e construção do modelo bem como a descrição de como utilizar e aplicar as modelagens em uma máquina pessoal estão disponibilizados livremente no GitHub [30]. Além disso, disponibilizamos também um repositório para transformação e manipulação dos dados [31].

#### 3.1 Obtenção, Transformação e Armazenamento dos Dados Reais

O governo americano possui um escritório oficial de censo [32] na qual disponibiliza os dados de pesquisas em sua plataforma. Os dados mostrados nas figuras 3–5 e figura 8 foram obtidos gratuitamente através de planilhas no formato *xlsx*. Para dados anuais, como o já citado [14], foram obtidos as planilhas de cada um dos anos estudados e concatenados com a utilização da biblioteca Pandas do Python.

Uma vez que os formatos dos documentos variam entre as pesquisas e, às vezes, entre os anos da mesma pesquisa, o código teve que ser adaptado para se ajustar à estrutura dos dados. A visualização dos dados foi feita usando a ferramenta gratuita Power BI da Microsoft, com os dados transformados no Python sendo carregados.

#### 3.2 Definições Iniciais

O primeiro passo para a construção do modelo é definirmos os parâmetros necessários para a realização do projeto, podemos isolar-los para uma fácil modificação e amostragem.

Índice	Variável	Representação	Valor Inicial
1	Iterações	$t_{total}$	3650
2	Número de Estados	$E$	6
3	Pessoas por Estado	$n_{s,t=0}$	1000
4	Taxa sobre produção	$\delta$	0.15
5	Constante de produção	$\alpha$	1
6	Expoente de migração	$T$	10
7	Modificador de probabilidade de transação	$\lambda_t$	0.5
8	Modificador de distribuição de transação	$\epsilon$	0.5
9	Expoente de custo por população	$\tau$	0

Tabela 2 – Parâmetros Iniciais

Os valores iniciais foram gerados arbitrariamente. Durante a fase de análise de dados iremos alterar os parâmetros da tabela 2. Além disso, iremos criar uma matriz da tabela 2 por Estado com valores referentes à proporção dos dados reais dos Estados

americanos selecionados. Os agentes serão definidos como um arranjo bidimensional, tendo 3 características individuais: identificador do agente, Estado atual e riqueza atual.

### 3.3 Execução

As funções serão definidas separadamente e poderemos utilizar programação orientada a objetos para permitir a construção de métodos que se comunicam. Como a migração que utiliza os cálculos de valor de transação e gasto para levantar o ganho de riqueza líquido esperado. A figura 10 ilustra o processo inicial, das iterações e salvamentos que ocorrem ao longo do modelo.

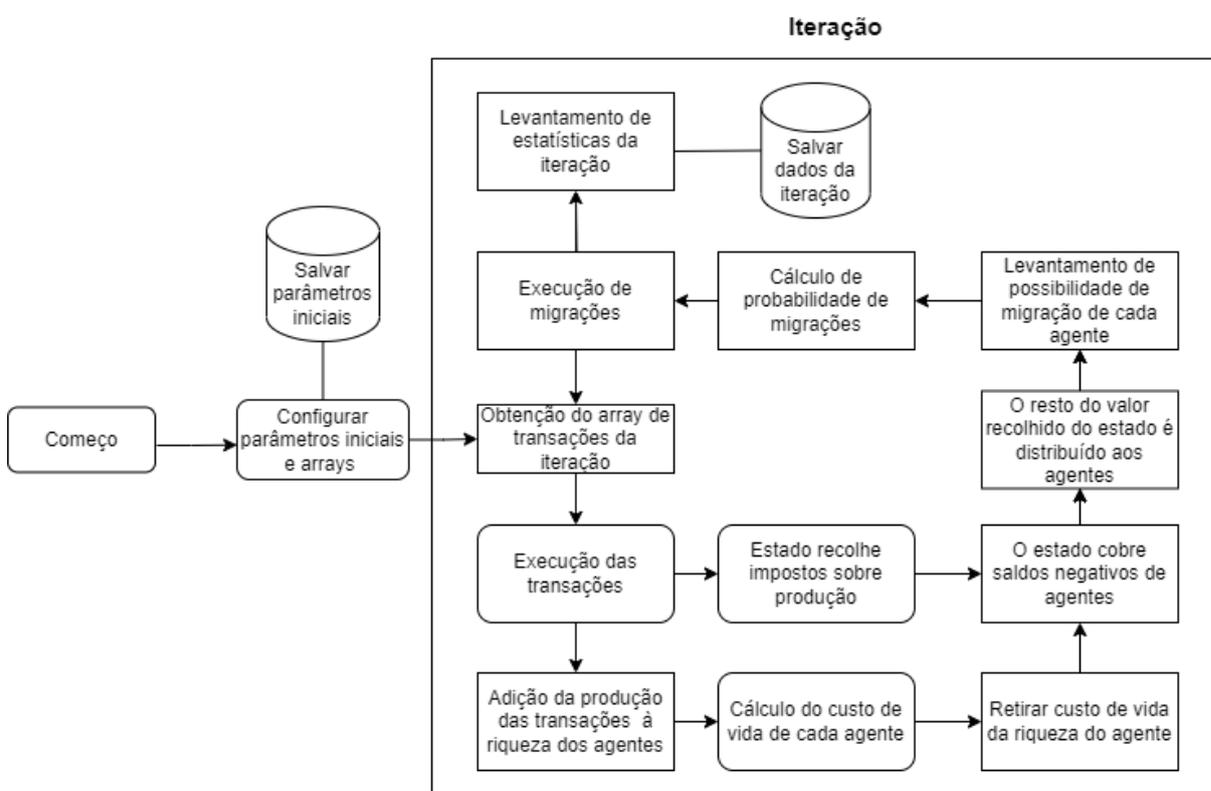


Figura 10 – Diagrama de execução do modelo

### 3.4 Análises

Após a conclusão do modelo computacional, serão geradas amostras através da variação de até três parâmetros de cada vez, com o objetivo de entender quais parâmetros são mais relevantes para imitar o comportamento real da migração americana. Esse é um passo importante na validação do modelo, pois permitirá verificar se ele é capaz de reproduzir os padrões de migração observados na realidade.

Para realizar essa análise, serão utilizados dois indicadores principais: o índice de Gini, que mede a desigualdade de riqueza entre os Estados, e as medidas de fluxo de

pessoas entre os Estados. O uso do índice de Gini é importante porque a desigualdade de riqueza pode influenciar a decisão das pessoas de migrar de um Estado para outro. Por exemplo, se um Estado é muito desigual, com uma pequena elite detendo a maior parte da riqueza, as pessoas com menos recursos podem ser mais propensas a deixá-lo em busca de melhores oportunidades em outros lugares.

As medidas de fluxo de pessoas fornecem uma visualização do comportamento de movimento populacional entre os Estados e podem ser usadas para validar a capacidade do modelo de reproduzir os padrões de migração observados na realidade. Combinando esses dois indicadores, espera-se identificar a relação entre os parâmetros do modelo e as características da migração observada, o que se espera gerar novas perspectivas importantes sobre os fatores que influenciam a decisão das pessoas de migrar e as consequências dessas decisões para a dinâmica populacional dos Estados.

## 3.5 Computação

### 3.5.1 Python

Devido à alta complexidade do modelo do projeto, foi decidido utilizar a linguagem Python, mesmo que ela seja mais lenta em comparação com linguagens de baixo nível, como C ou C++. Essa escolha foi feita porque a troca entre velocidade de desenvolvimento e performance do código acaba sendo vantajosa, especialmente considerando o prazo limitado do projeto. O apêndice A apresenta técnicas de vetorização de funções e aplicação de álgebra linear que serão utilizadas ao longo do projeto com o auxílio da biblioteca Numpy.

### 3.5.2 Armazenamento de Dados

O armazenamento dos dados para amostragem e análise será feita por um banco SQL local usando o dialeto Postgres. Em todas as iterações, almeja-se obter os valores estatísticos por Estado como: número de pessoas, média de riqueza, mediana de riqueza, variância de riqueza, máxima riqueza, mínima riqueza, valor coletado pelo Estado e fluxo de migrações; além de características de configuração iniciais.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O capítulo de resultados e discussão foi dividido em três seções distintas. A primeira seção, intitulada “Uniformidade entre Estados”, tem como objetivo analisar os resultados obtidos a partir de valores uniformes para os parâmetros utilizados entre os Estados estudados. Isso significa que os Estados possuem os mesmos valores de imposto, custo de vida e outros parâmetros iniciais. Para isso, é disposta a comparação entre os valores de expoente de migração ( $T$ ), custo por densidade de população ( $\tau$ ), probabilidade de transação ( $\lambda_t$ ) e distribuição de transação ( $\epsilon$ ).

Já a segunda seção, chamada “Diferenciação entre Estados”, tem como objetivo estudar o comportamento a influência do restante dos parâmetros sobre os agentes em Estados que possuem parâmetros diferentes em uma mesma amostragem do modelo. O foco desta seção será a taxa sobre produção ( $\delta$ ), a constante de produção ( $\alpha$ ), a população por Estado ( $N_s$ ) e a riqueza inicial ( $\omega_0$ ).

Finalmente, a terceira seção, chamada “Simulação do Cenário Atual”, serão levantados as variações de todos os parâmetros avaliados até então. Por questões de tempo do projeto, iremos simular apenas os Estados que mais tem nosso interesse neste contexto, sendo eles a Califórnia, Nova York, Flórida e Texas.

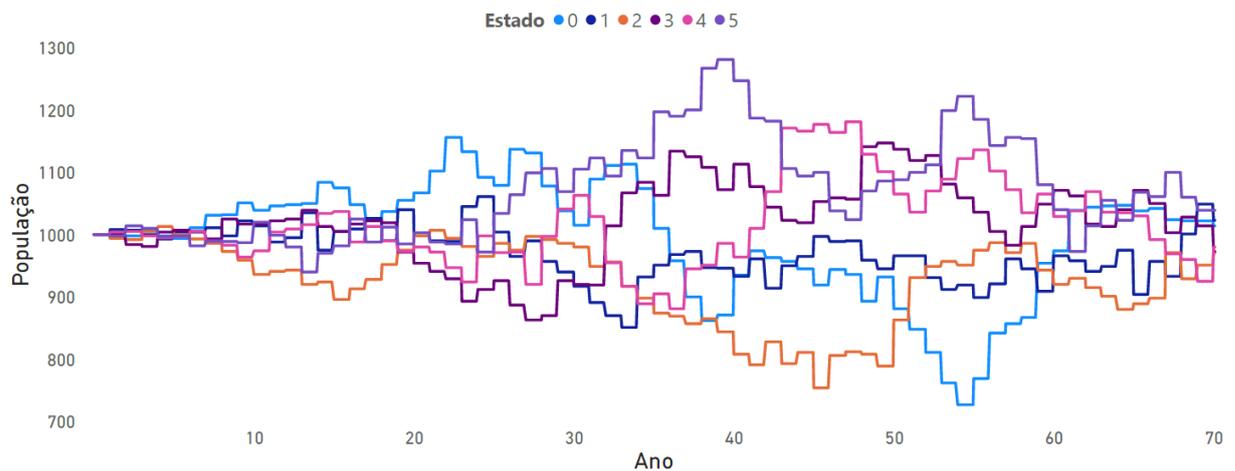
### 4.1 Uniformidade entre Estados

Esta seção tem como objetivo entender a importância que alguns dos parâmetros iniciais têm sobre os resultados finais e assim decidiremos quais escolhas dos valores representarão um comportamento mais próximo ao real. Antes de começarmos as análises, definiremos os valores iniciais de todos os parâmetros, na tabela 3, assim poderemos alterar individualmente cada um dos parâmetros.

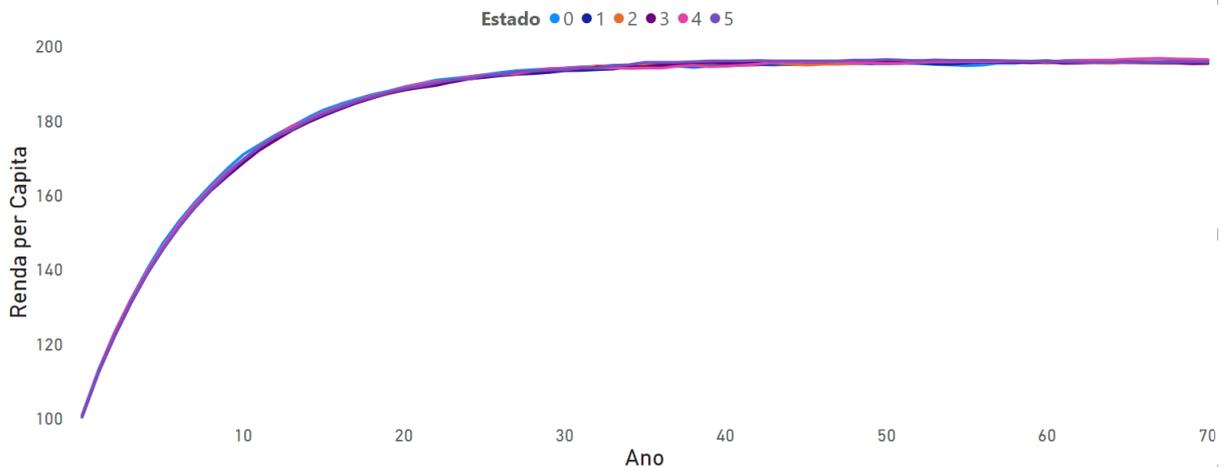
Variável	Representação	Valor Inicial
Iterações	$t_{total}$	3650
Número de Estados	$E$	6
Pessoas por Estado	$n_{s,t=0}$	1000
Riqueza inicial	$\omega_0$	100
Taxa sobre produção	$\delta$	0.15
Constante de produção	$\alpha$	1
Modificador de probabilidade de transação	$\lambda_t$	0.5
Modificador de distribuição de transação	$\epsilon$	0.5
Expoente de Migração	$T$	10
Expoente de custo por população	$\tau$	0

Tabela 3 – Parâmetros da análise de variação do coeficiente de migração

As figuras 11.a e 11.b mostram a distribuição da população sobre os 6 Estados simulados e a distribuição de riqueza per capita dos mesmos. Podemos perceber que a riqueza média do país atinge um equilíbrio com o custo de vida, fazendo com que a riqueza total de cada estado tenda a ficar estagnada em um limite. Já quando estudamos o fluxo anual de pessoas por ano, podemos notar que há um pico de migração próximo ao ano 10, como podemos observar na figura 12.



(a) Distribuição de pessoas por ano para cada Estado



(b) Distribuição de riqueza per capita ao ano por Estado

Figura 11 – Análise de resultados de 70 anos de simulação utilizando os parâmetros da tabela 3

Já quando estudamos o fluxo anual de pessoas por ano, nota-se que há um pico de migração próximo ao ano 10, como podemos observar na figura 12. E logo após, há um breve declínio até ter uma sustentação de migrações entre os Estados.

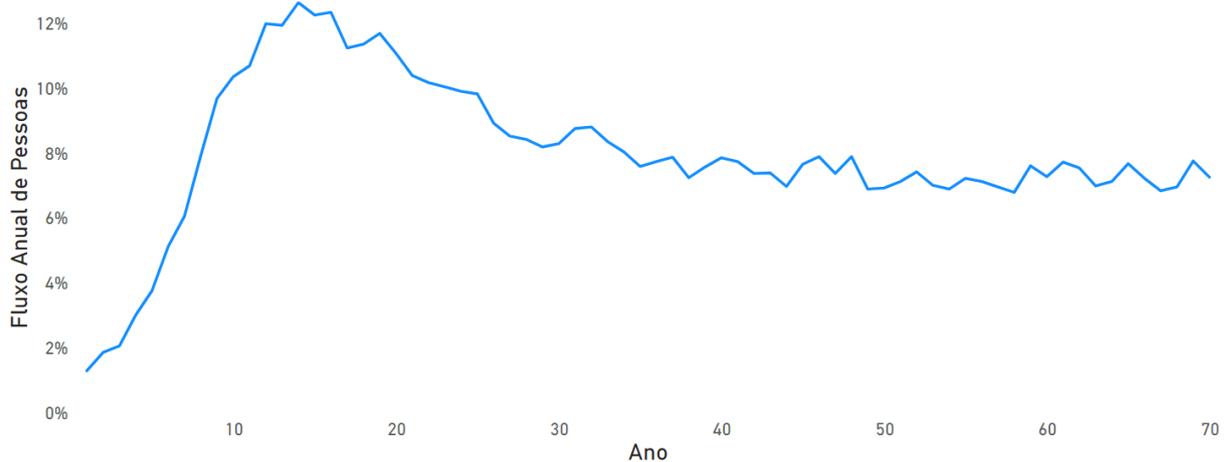


Figura 12 – Fluxo de pessoas por ano no país complementando a análise da figura 11

Além disso, com o equilíbrio do valor produzido e do custo de vida, há um ciclo de migrações entre os Estados que tiveram maior produção no último ano. Portanto, podemos considerar que parâmetros que alteram as propriedades de migração terão grande importância na evolução econômica de um Estado.

#### 4.1.1 Expoente de migração

O expoente de migração  $T$  determina o quão suscetível é a migração de um agente sobre a diferença de ganho líquido dos agentes em questão. Um valor baixo de  $T$  determina uma grande facilidade na migração, já um valor alto aponta uma resistência na migração. Primeiramente, avaliamos a distribuição do fluxo de pessoas que migraram para cada um dos valores de  $T$  na figura 13.

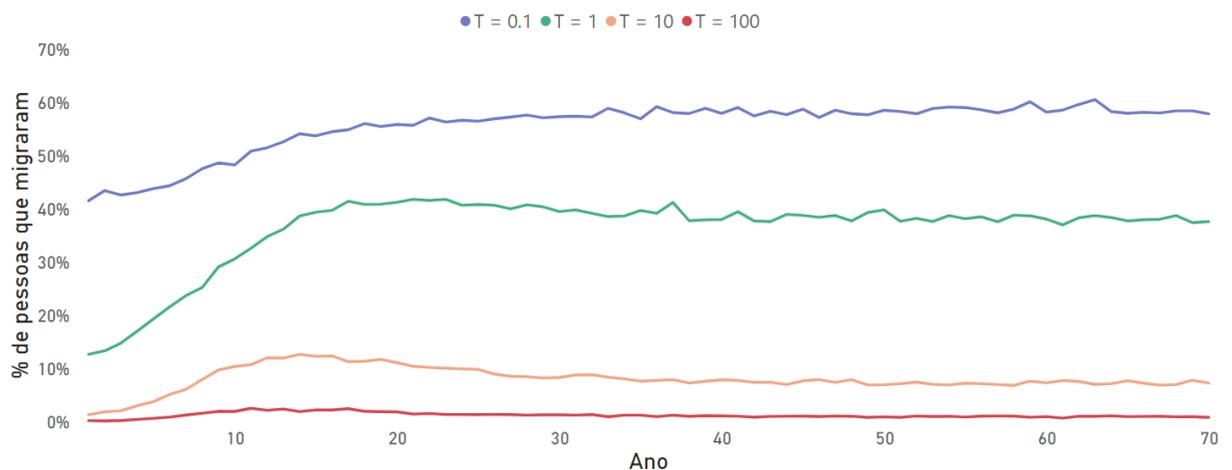


Figura 13 – Fluxo de pessoas por ano no país para  $T = 0.1$ ,  $T = 1$ ,  $T = 10$  e  $T = 100$ .

E como podíamos esperar, a alteração do valor de  $T$  determina a quantidade de migração entre os Estados por ano. Também devemos imaginar que Estados com mais

dinheiro têm maior probabilidade de transações. Logo, esperamos que um alto valor de  $T$  tende a ter uma condensação de pessoas ricas em um Estado - pois agentes ricos fazem mais transações que agentes pobres. Porém, como podemos perceber pela análise da figura 14 que, para este modelo e com os parâmetros já esclarecidos anteriormente, não há a aglomeração de riqueza em um Estados para altos valores de  $T$ .

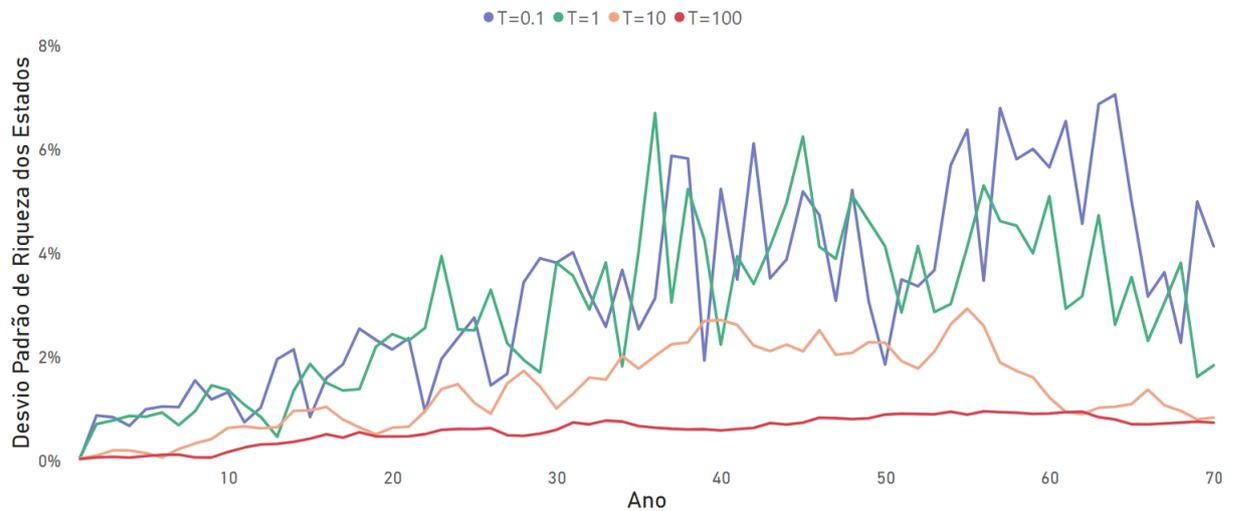
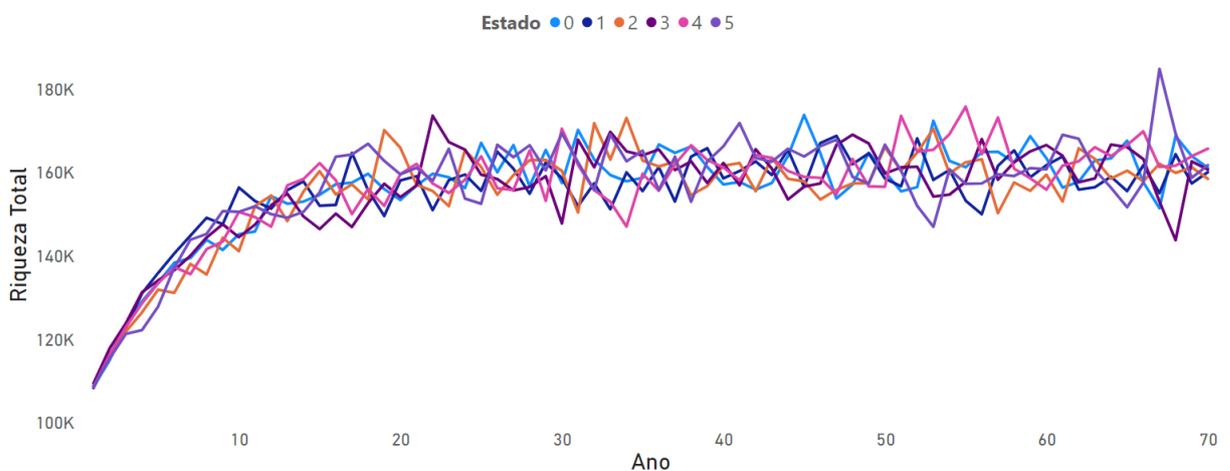


Figura 14 – Desvio padrão de riqueza entre os Estados para cada valor de  $T$ .

#### 4.1.2 Custo por densidade de população

O expoente de custo por densidade de população  $\tau$  faz com que o custo de vida aumente com o tamanho da população do Estado - representando a disputa pela oferta imobiliária. Esperamos que com o aumento deste expoente impacte significativamente a distribuição de riqueza, especialmente por equilibrar a distribuição de população do país - em uma situação de igualdade de oportunidades, a riqueza está onde as pessoas estão.



(a) Riqueza total por Estado ao final de cada ano para  $\tau = 1$

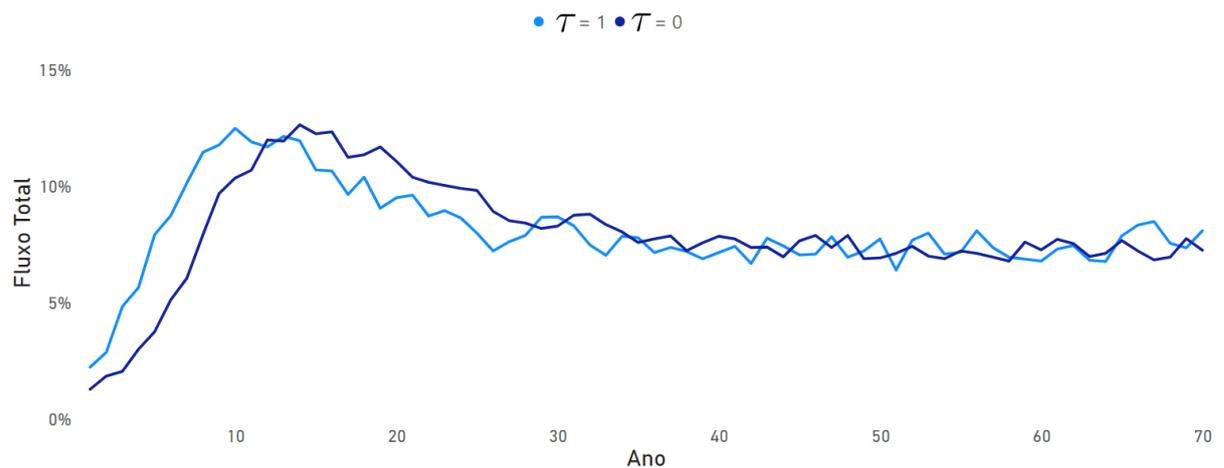
(b) Fluxo total de pessoas para  $\tau = 1$  e  $\tau = 0$ 

Figura 15 – Número de pessoas por ano sobre os valores da tabela 3 e  $\tau = 1$ . Na figura a) é exposto a linha de cada Estado e na figura b) apenas para o primeiro Estado

Analisando a figura 15.a podemos notar que a migração de pessoas, com  $\tau = 1$ , gera uma troca maior de riqueza entre Estados quando comparada com a mesma análise com  $\tau = 0$ , na figura 11.b. Por outro lado, quando comparamos o fluxo total de pessoas, na figura 15.b, podemos dizer que  $\tau = 1$  não altera o número de migrações no país, apenas concentra suas migrações em Estados que tem maior quantidade de pessoas - fazendo com que a amplitude de oscilação da riqueza do Estado seja consideravelmente menor do que quando  $\tau = 0$ .

### 4.1.3 Probabilidade e Distribuição de Transação

O modificador de probabilidade de transação,  $\lambda_t$ , determina a importância da riqueza de cada agente para fazer uma nova transação - podendo ser interpretado como: Estados que têm maior riqueza têm mais fluxo econômico do que Estados de mais baixa riqueza. Espera-se que o aumento de  $\lambda_t$ , assim como esperávamos com  $T$ , gere o aumento da desigualdade - uma vez que quando mais uma pessoa acumula, mais ela acumulará estatisticamente. O modificador de distribuição de transação,  $\epsilon$ , dita a distribuição da produção entre os dois agentes envolvidos. Assim como  $\lambda_t$ , esperamos que o aumento de  $\epsilon$  acelere a geração de desigualdade entre Estados e entre os agentes de cada Estado.

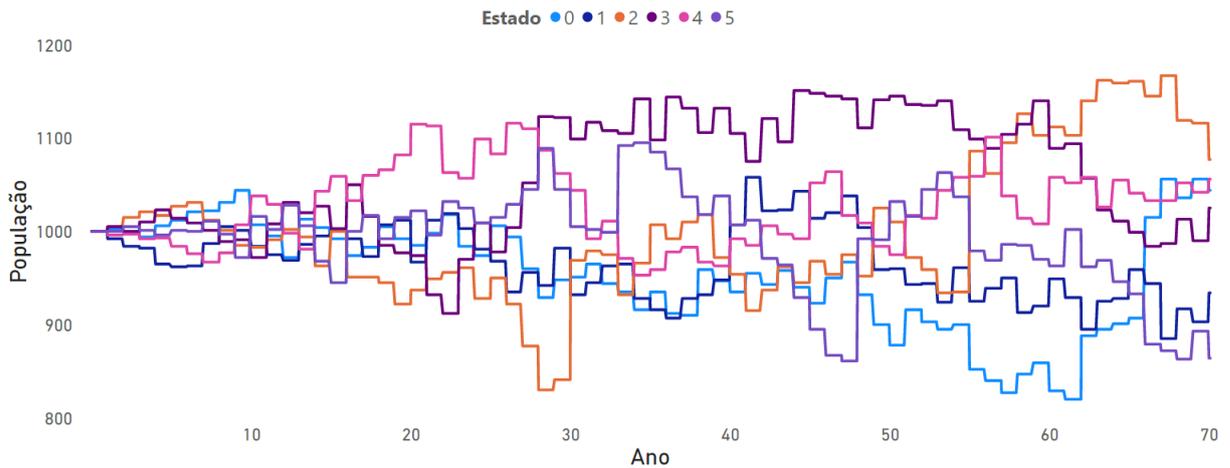
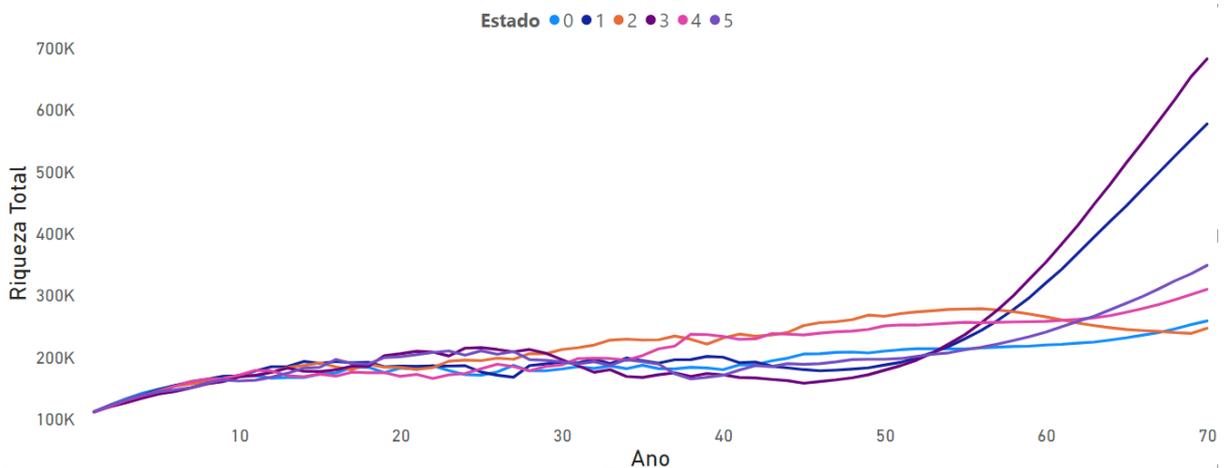


Figura 16 – Distribuição de população entre os Estados para  $\lambda_t = \epsilon = 0$

A figura 16 demonstra a equidade na probabilidade da transação e na distribuição da produção. Portanto, percebemos que os valores da população e consequentemente da produção se mantém muito semelhantes aos resultados anterior. Por outro lado, quando determinamos que  $\lambda_t = \epsilon = 1$  a probabilidade e a distribuição da produção passam a crescer linearmente com o aumento da riqueza de cada agente. A figura 17.a mostra o crescimento destoante da riqueza em dois Estados; se analisarmos a população, visto na figura 17.b, apontamos que o início da condensação da riqueza nesses dois Estados ocorreu quando ambos estiveram em um vale populacional.



(a) Riqueza total por Estado para  $\lambda_t = \epsilon = 1$

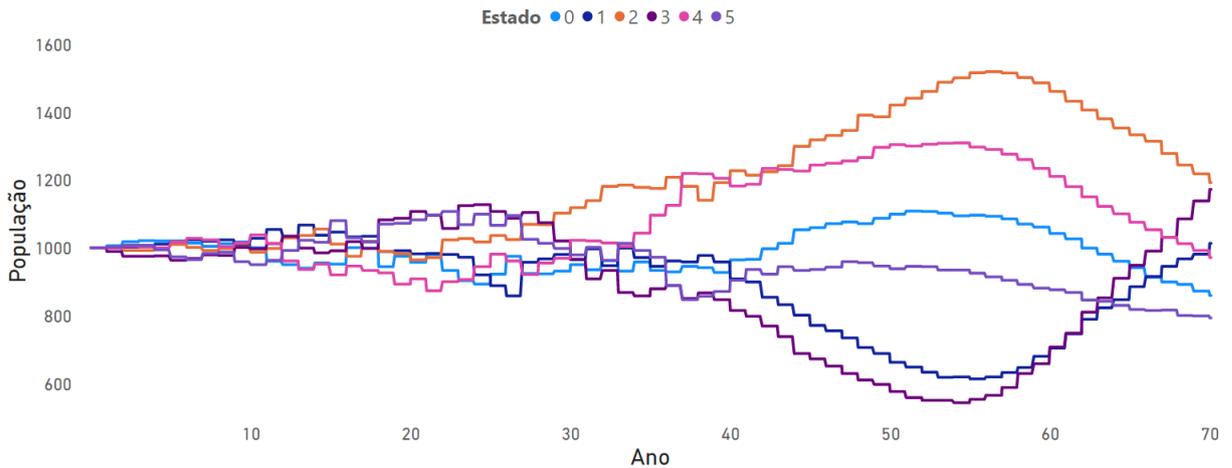
(b) Distribuição de pessoas por Estado para  $\lambda_t = \epsilon = 1$ 

Figura 17 – Riqueza total por estado por ano e número de pessoas por ano sobre os valores da tabela 3 e  $\lambda_t = \epsilon = 1$

Devido à desigualdade na distribuição e probabilidade, dois Estados acumularam a maioria das transações no país. Isso atraiu pessoas dos Estados com menor volume de transações em busca de melhores retornos; no entanto, a chegada de mais pessoas nesses Estados mais ricos reduziu a riqueza média e, conseqüentemente, o custo de vida do grupo de pessoas mais ricas, fazendo com que algumas pessoas ultrapassassem o limite de gastos definido pela equação 2.10. Assim que algumas pessoas começaram a ganhar muito mais do que conseguem gastar, o aumento da riqueza por parte destas pessoas começa a se tornar exponencial. A figura 18 mostra o índice de Gini para cada Estado, onde vemos que em todos os Estados há a condensação da riqueza por uma pequena parte dos agentes.

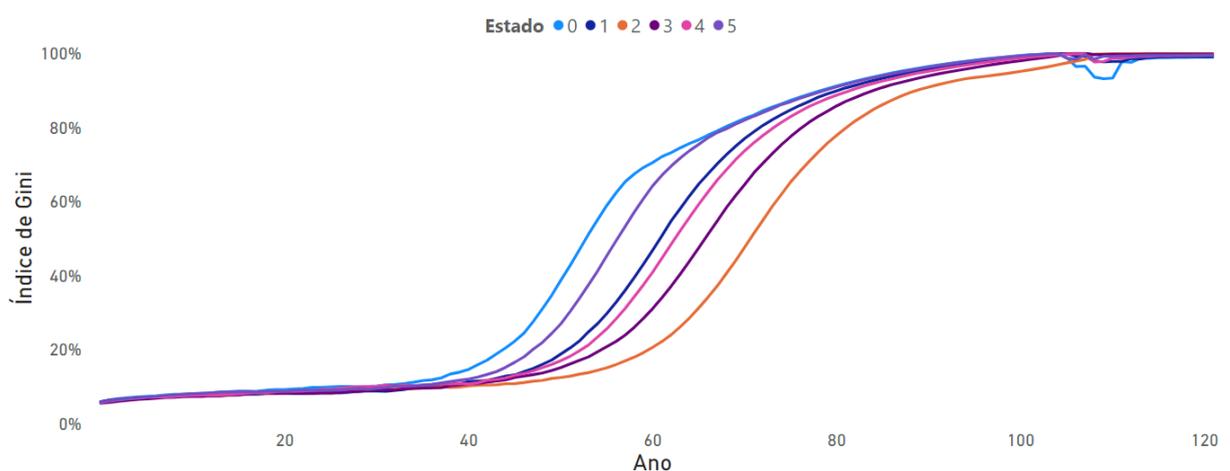


Figura 18 – Índice de Gini por Estado para  $\lambda_t = \epsilon = 1$

## 4.2 Diferenciação entre Estados

O estudo da variação dos parâmetros até agora nos permitiu estudar se o comportamento do modelo segue padrões que avaliamos na sociedade real. Agora, tendo uma compreensão maior de como o modelo funciona, começaremos a diferenciar os Estados entre si. Começaremos avaliando como a alteração da taxa sobre a produção,  $\delta$ , afeta a distribuição de pessoas e de riqueza entre os Estados - retomando novamente a seção de cenário econômico na qual foi levantado que o imposto de renda per capita, das variáveis abordadas neste trabalho, tem a maior capacidade de predição do fluxo de pessoas. Logo após isso, avaliaremos alteração da constante de produção, que relativiza com a diferença na renda anual per capita que cada Estado possui e claro, iremos modificar a população e riqueza inicial de cada Estado.

### 4.2.1 Taxa sobre produção

A taxa de produção é um mecanismo do modelo de mitigação da desigualdade de renda em Estado. O valor coletado de imposto é facilmente metrificado e há diferenças grandes no valor coletado para cada região. Evidentemente, há outros inúmeros fatores que determinam o real retorno do governo à sociedade, uma vez que um Estado não simplesmente devolve o montante acumulado igualmente e nem mesmo tem 100% de eficiência ao fazê-lo. Para isso, um governo executa o retorno para a população na forma de infraestrutura, programas sociais, saúde, educação e outros programas. Sendo assim, neste trabalho, será avaliado de forma direta o impacto do governo como uma propriedade de mitigação da desigualdade.

Utilizando os mesmos valores da tabela 3, iremos analisar os dados para  $\delta = 0$ ,  $\delta = 0.1$  e  $\delta = 0.2$ . A figura 19 demonstra que há um acúmulo de pessoas nos dois Estados que possuem o maior valor de imposto, de 20%, seguido pelos Estados com imposto em 10% e por fim, os Estados sem imposto.

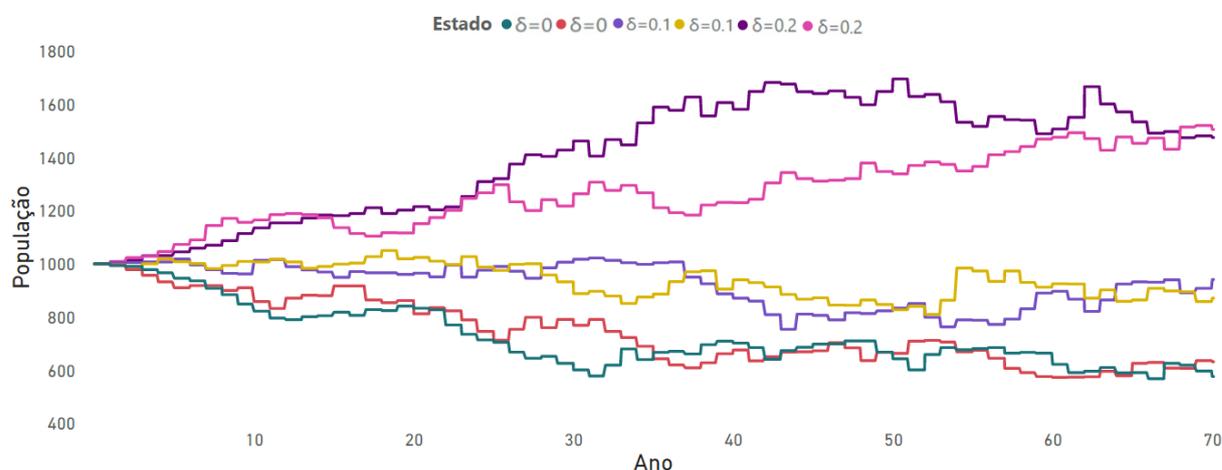
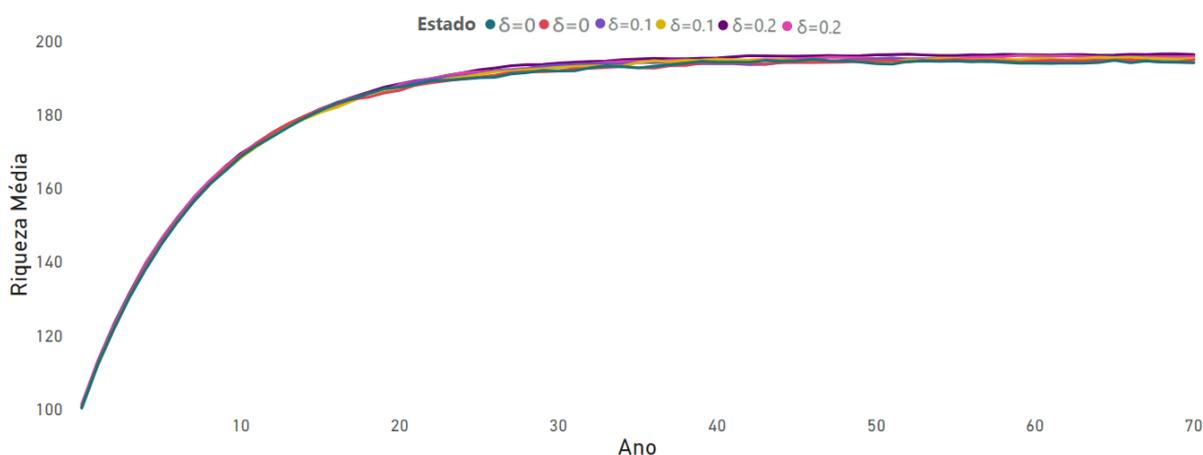
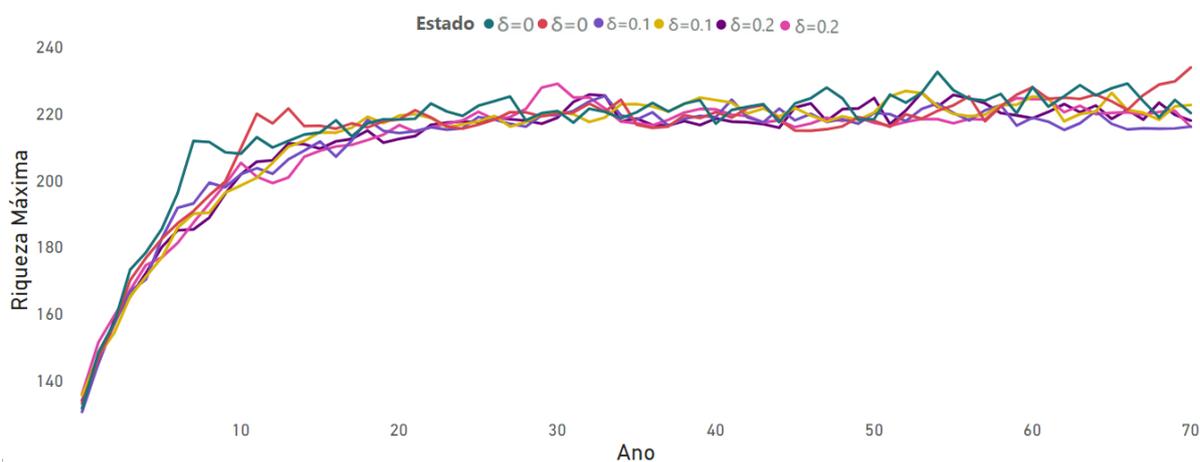


Figura 19 – Distribuição da população para Estados contendo.

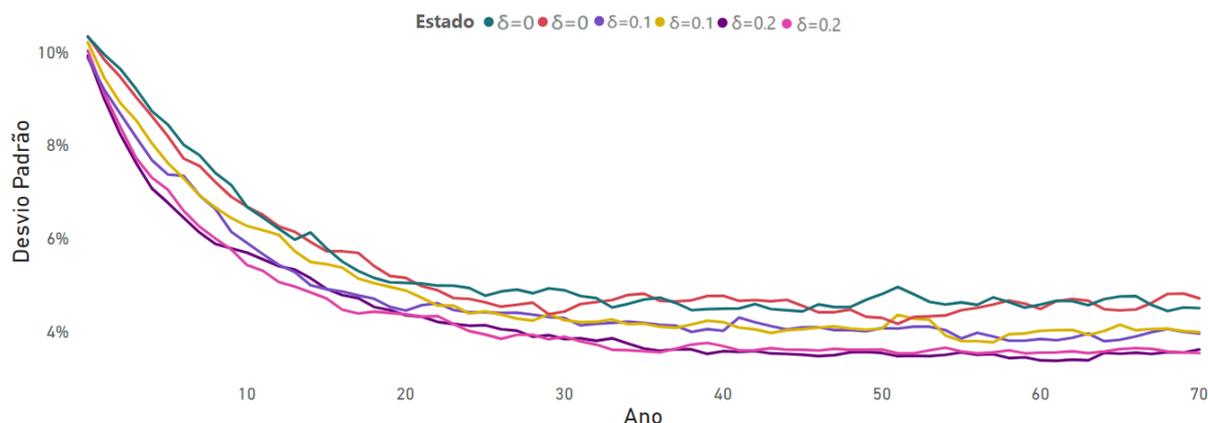
Quando avaliamos a riqueza e sua distribuição, usando a figura 20, vemos que a riqueza média e máxima de cada Estado não é diretamente afetada pela coleta e distribuição do imposto; porém, a desigualdade, representada pelo desvio padrão da renda, é consideravelmente menor nos Estados de maior taxação de imposto. Podemos afirmar que, no modelo atual, o maior valor da coleta de imposto não aumenta e nem diminui o acúmulo de riqueza da população em média, mas torna ela mais igualitária e conseqüentemente mais atrativa para os agentes.



(a) Riqueza média por Estado



(b) Riqueza máxima de um agente por Estado



(c) Desvio padrão normalizado por Estado

Figura 20 – Análise de riqueza de cada Estado para valores de  $\delta = 0$ ,  $\delta = 0.1$  e  $\delta = 0.2$

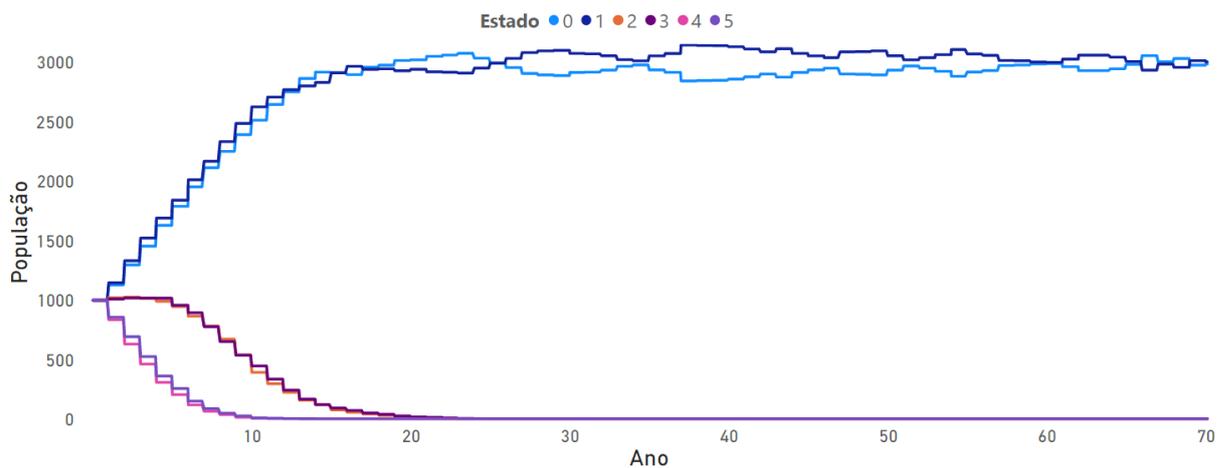
#### 4.2.2 Constante de produção e custo de vida

Na seção de análise dos dados reais, foi mencionado que a opinião pública aponta os altos custos de vida como um dos principais fatores que contribuem para o êxodo populacional da Califórnia e Nova York. Além disso, foi observado que, mesmo com um aumento estatístico na renda média, o peso dos altos custos de vida é mais significativo na decisão das pessoas. Para melhor entender essa dinâmica, analisaremos primeiro cada parâmetro isoladamente e, em seguida, combinaremos os dois. A tabela 4 define os valores das alterações para essa análise.

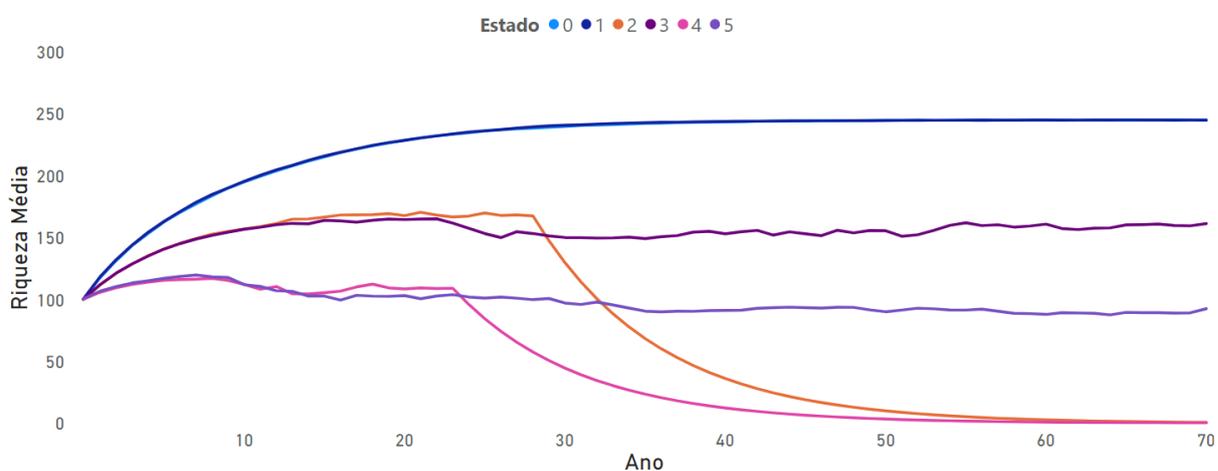
Estado	$\alpha$	$\phi$
0	1.25	18.75%
1	1.25	18.75%
2	1	15%
3	1	15%
4	0.75	11.25%
5	0.75	11.25%

Tabela 4 – Valores de  $\alpha$  e  $\phi$  para cada Estado

A figura 21 mostra a variação de  $\alpha$ ; podemos ver que é distinta a atratividade de um estado que produz mais que outros estados, tanto em aumento populacional como em aumento da riqueza.



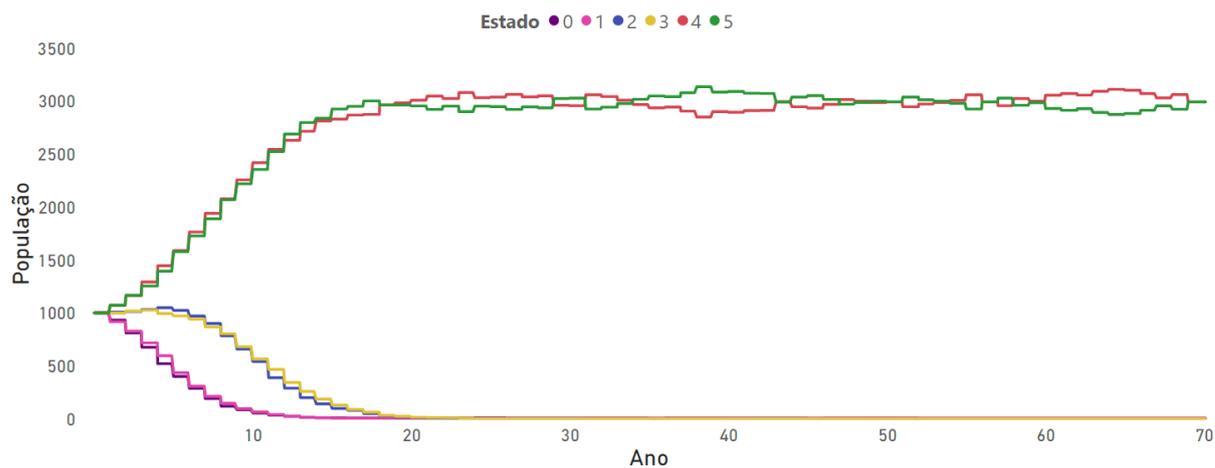
(a) Distribuição da população entre Estados;



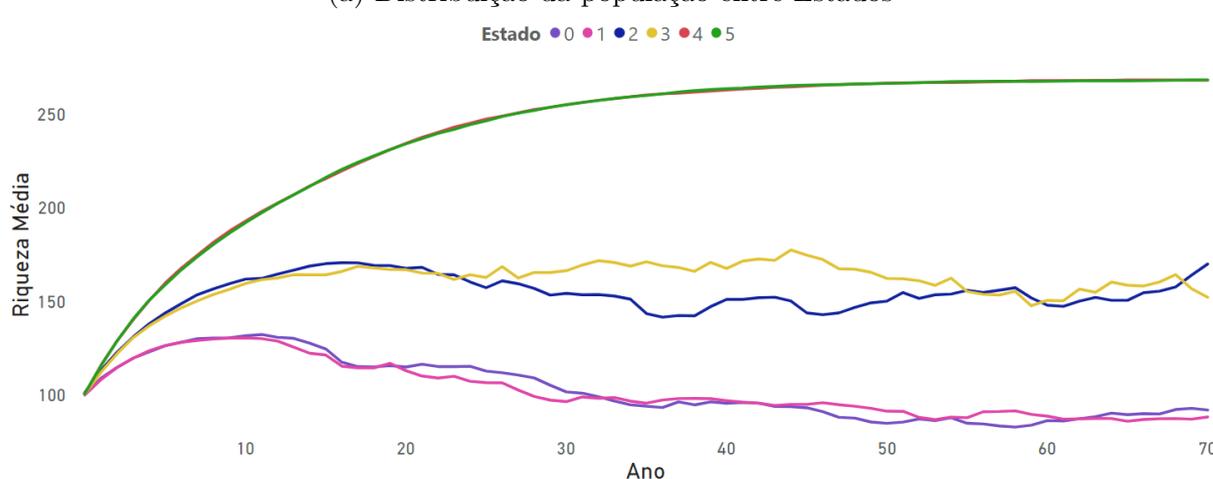
(b) Distribuição de riqueza média por Estado

Figura 21 – Análise da diferenciação do número de pessoas e riqueza iniciais por Estado para diferentes valores de  $\alpha$  de acordo com a tabela 21

O mesmo pode ser esperado analisando uma diminuição do custo de vida na figura 22, onde os estados que têm um menor custo de vida, são diretamente mais atrativos que estados com maior custo de vida.



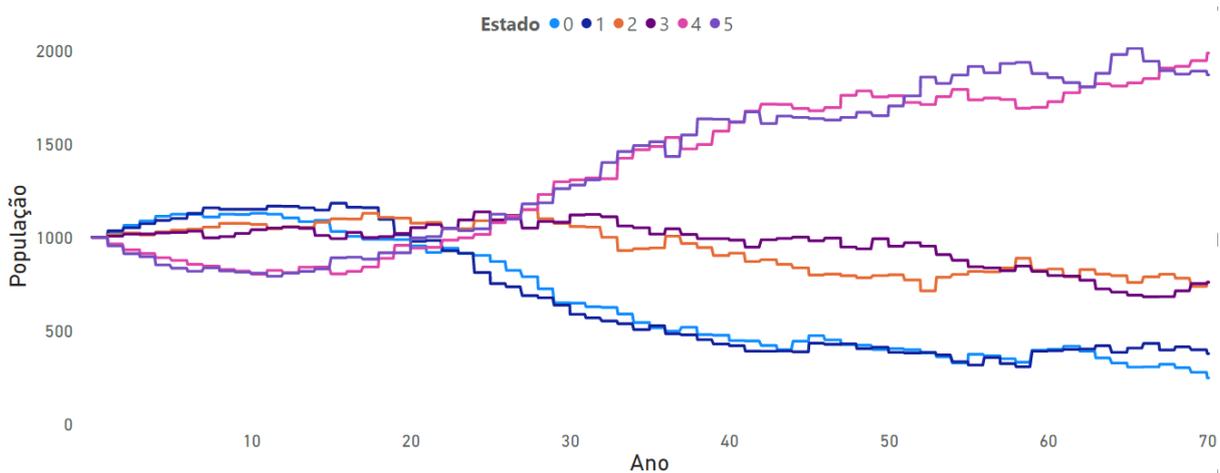
(a) Distribuição da população entre Estados



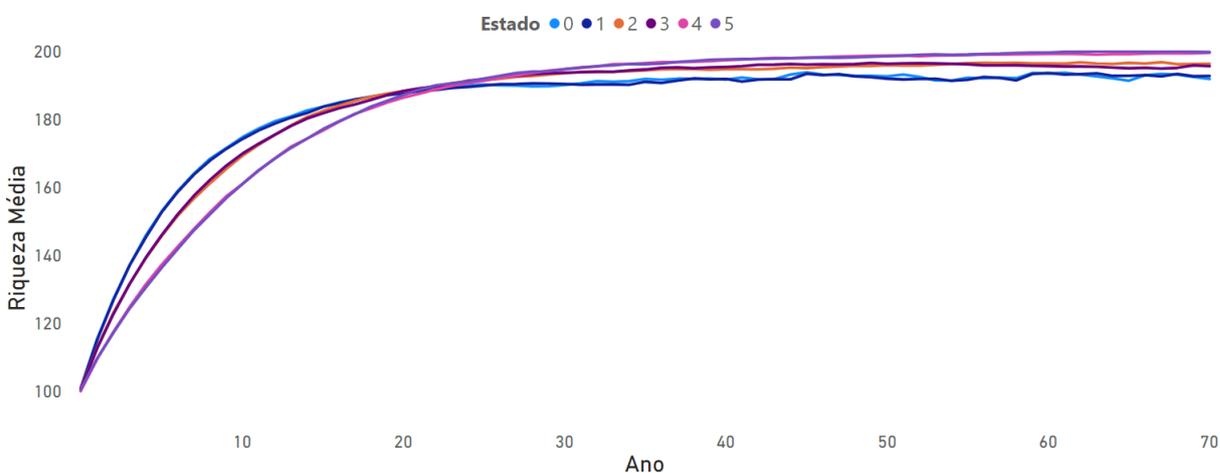
(b) Distribuição de riqueza média por Estado

Figura 22 – Análise da diferenciação do número de pessoas e riqueza iniciais por Estado para diferentes valores de  $\phi$ , de acordo com a tabela 4

Porém, quando analisamos os dados dos estados americanos, notamos que um aumento da renda média da população também representava um aumento no custo de vida - na qual as duas propriedades cresciam proporcionalmente. Também foi apresentada que a opinião pública americana indica que o alto custo de vida não é compatível com um alto ganho de renda proporcional à outros estados. Sendo assim, alteraremos simultaneamente o custo de vida e de renda para cada Estado com o objetivo de equilibrar o ganho médio, que podem novamente ser visualizados na tabela 4.



(a) Distribuição da população entre Estados



(b) Distribuição de riqueza média por Estado

Figura 23 – Análise da diferenciação do número de pessoas e riqueza iniciais por Estado para diferentes valores de  $\phi$  e  $\alpha$  de acordo com a tabela 23

A figura 23.b mostra que a variação proporcional dos valores de  $\alpha$  e  $\phi$  realmente resultam em um equilíbrio na riqueza média entre os Estados. Já a figura 23.a mostra que mesmo tendo um equilíbrio na riqueza média há um deslocamento do equilíbrio na população, mostrando que mesmo nos casos que os ganhos não tendem a ser potencialmente maiores os agentes convergem para Estados que tem custos menores.

#### 4.2.3 Pessoas por Estado e riqueza inicial

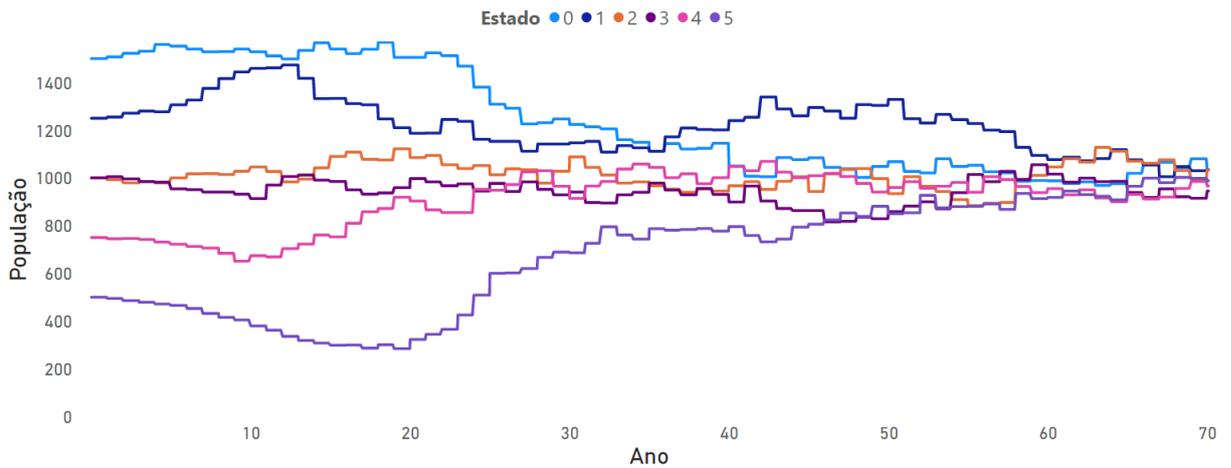
Como debatemos antes, as pessoas geram riqueza e maiores ganhos atraem mais agentes. Sendo assim, consideraremos alterar os valores de riqueza e população iniciais para entender se Estados inicialmente com maior fluxo econômico podem ocasionar um efeito cascata e atingir uma taxa de crescimento consistentemente maior do que os outros Estados ou se atingirão um equilíbrio com a distribuição equivalente de pessoas e riqueza.

A tabela 5 mostra a distribuição dos valores de riqueza inicial e de população para cada Estado.

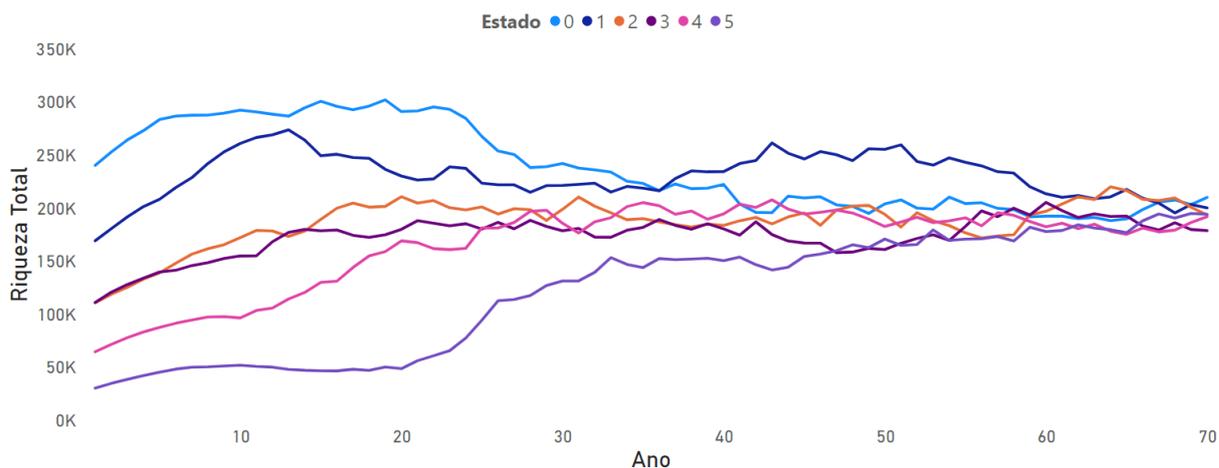
Estado	$N(s)$	$\omega_0$
0	1500	150
1	1250	125
2	1000	100
3	1000	100
4	750	75
5	500	50

Tabela 5 – Valores de  $N(s)$  e  $\omega_0$  para cada Estado

A figura 24 mostra que mesmo os Estados com maior riqueza e maior população inicialmente tendem a atingir o equilíbrio com o restante dos Estados quando expostos às mesmas condições. Logo, podemos afirmar que, nas condições analisadas, há uma regressão à média dos Estados, muito similar ao efeito de difusão.



(a) Distribuição da população entre Estados ao longo de 70 anos para diferentes valores de  $\omega_0$  e população inicial



(b) Distribuição de riqueza total por Estado ao longo de 70 anos para diferentes valores de  $\omega_0$  e população inicial

Figura 24 – Análise da diferenciação do número de pessoas e riqueza iniciais por Estado

### 4.3 Simulação do cenário atual

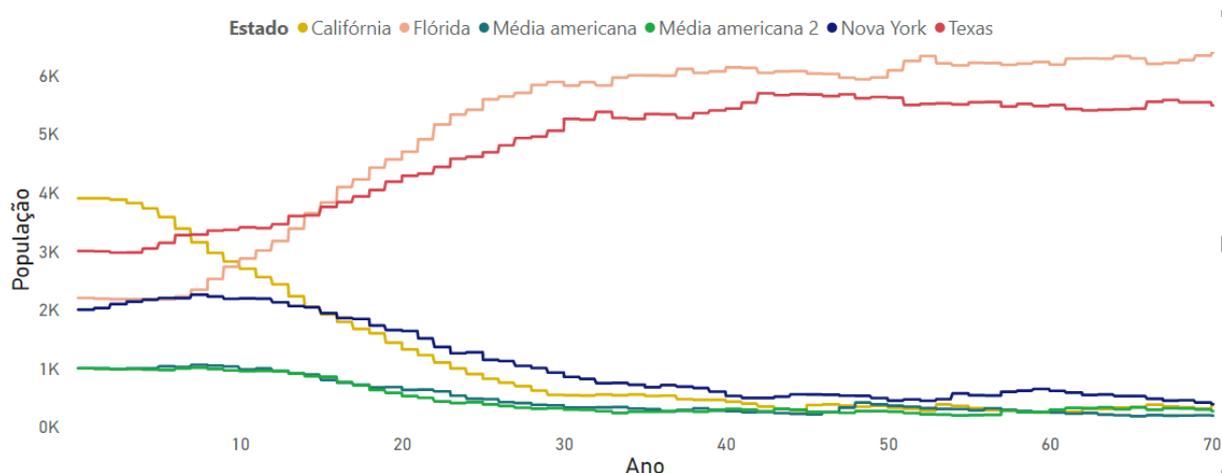
Após termos estudado como o modelo se comporta com a modificação de seus parâmetros individualmente, ou em pequenos conjuntos, podemos executar uma diferenciação dos Estados para possuírem valores semelhantes aos reais. Sendo assim, com o uso dos dados expostos na seção de dados reais utilizaremos as proporções de população, PIB per Capita como riqueza inicial, o total de imposto regional por Estado como  $\delta$ , a paridade de preços como  $\phi$  e a renda média anual como  $\alpha$ . Utilizando 6 Estados, abordaremos uma estratégia de adicionar dois Estados que representam a média americana e mais os quatro Estados mais visados até então: Califórnia, Nova York, Flórida e Texas. A distribuição dos valores pode ser vista na tabela 6.

Estado	Nº do Estado	$\omega_0$	$N(s)$	$\delta$	$\alpha$	$\phi$
Califórnia	0	124	3900	13.5%	1.2375	19.26%
Nova York	1	129	2000	15.9%	1.1094	17.21%
Média americana	2	100	1000	11.0%	1	16%
Média americana	3	100	1000	11.0%	1	16%
Flórida	4	80	2200	9.1%	1.0801	15.94%
Texas	5	104	3000	8.6%	0.9851	14.67%

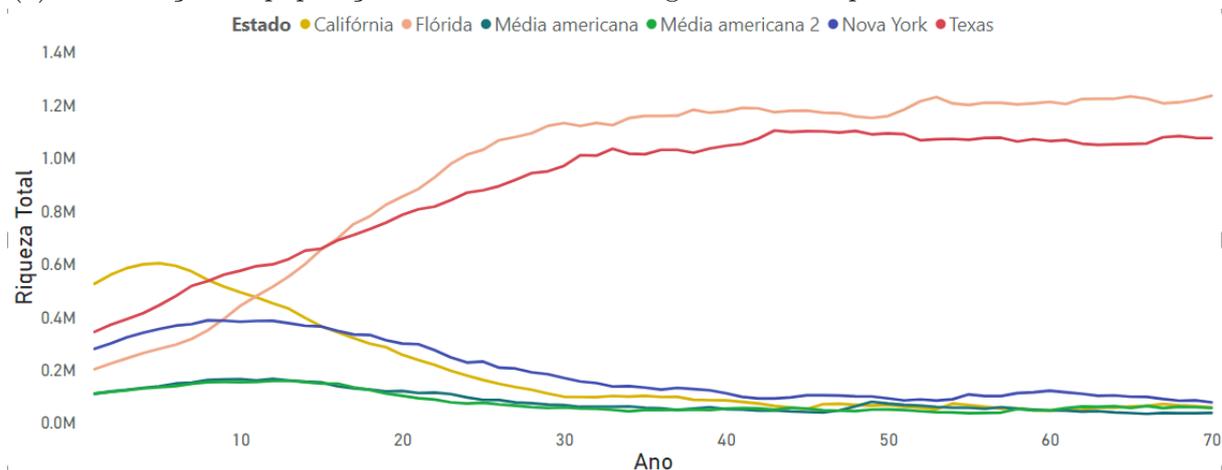
Tabela 6 – Valores selecionados para cada um dos Estados da análise final

Antes de analisarmos os dados reais, é essencial destacar que os resultados do modelo não devem ser interpretados como uma representação precisa do comportamento real dos estados. Em vez disso, o modelo mostrará, com base nas características analisadas, uma tendência de crescimento ou queda na competição pela população. Logo, analisando a figura 25 podemos notar que quando isolamos o Estado da Califórnia, Nova York, dois

Estados médios americanos, Flórida e Texas, os quatro primeiros Estados são massivamente consumidos pelos dois últimos - tanto populacionalmente quanto economicamente.



(a) Distribuição da população entre Estados ao longo de 70 anos para os Estados selecionados



(b) Distribuição de riqueza total por Estado ao longo de 70 anos para os Estados selecionados

Figura 25 – Análise da simulação usando valores proporcionais aos Estados da Califórnia, Nova York, Texas, Flórida e da média americana

Com base nos resultados do modelo e na análise dos dados reais, podemos concluir que, caso a Califórnia e Nova York não implementem mudanças significativas em suas direções administrativas e políticas de incentivos sociais, ambos os estados continuarão a tender para a média. Esse padrão é observado em outros estados, como Texas e Flórida, que estão se destacando com o avanço empresarial e financeiro. Se não houver uma ação para mudar essa tendência, a Califórnia e Nova York podem perder grande parte de seu protagonismo e capital político.

Além disso, podemos aplicar essa metodologia em outros países emergentes, como o Brasil, e usar a inteligência agregada neste estudo para prever o futuro do país. Por exemplo, podemos questionar se a região de São Paulo continuará sendo a protagonista na economia do país ou se, assim como a Califórnia, irá regredir para a média com o avanço de outros estados.

## 5 CONCLUSÃO

As simulações de modelos baseados em agentes são uma ferramenta poderosa para estudar as dinâmicas sociais e entender sistemas sociais complexos que moldam nosso mundo. A combinação de abordagens teóricas com modelagem computacional permite aos pesquisadores obter novas ideias sobre como sistemas sociais se comportam e como podem mudar ao longo do tempo, ajudando a construir uma compreensão mais precisa e abrangente das sociedades humanas.

A análise dos dados reais mostrou que é possível levantar ideias para o modelo, como a correlação negativa entre migração e IDH, que fogem da intuição à primeira vista. Além disso, a evolução financeira e populacional de Estados como Califórnia e Nova York apresenta níveis alarmantes.

A construção de um modelo protótipo demonstrou-se frutífera e com grande capacidade para futuros trabalhos mais extensivos. A análise do modelo atual mostrou que, estatisticamente, os agentes convergiram para Estados com menores riscos de perda, mesmo abrindo mão de ganhos potencialmente mais altos. Quando expostos ao mesmo ambiente com distribuições igualitárias nas oportunidades de transações, os agentes geraram igualdade de fortunas e de renda. No entanto, modelos que aumentam a probabilidade de produção para agentes mais ricos, geraram condensação da riqueza em cada Estado, e os Estados que obtiveram a maior riqueza dos indivíduos que as acumularam, também foram os Estados que mais rapidamente convergiram para a desigualdade. Os agentes extremamente ricos de cada Estado disputavam os agentes pobres entre os Estados, pois sem eles, o custo de vida aumentaria e eles veriam suas riquezas sendo consumidas pelo gasto.

Observou-se que todos os Estados da Califórnia e de Nova York rapidamente perderam boa parte de sua população, muito provavelmente representando que, para este modelo o cenário atual destes Estados são menos atraentes quando comparados estatisticamente com os Estados do Texas e da Flórida. Isso pode representar que os esses primeiros Estados estão atualmente em situações insustentáveis para um próspero crescimento econômico e populacional, fazendo com que a economia americana esteja vendo um inédito período histórico de homogeneização socioeconômico. Os Estados que concentram grande volume populacional também estão crescendo no desenvolvimento tecnológico, empresarial e econômico. O risco a longo prazo de Estados em declínio pode ser bastante elevado, e a análise e conclusão desta visão são fundamentais para a ideia de equilíbrio, uma vez que a análise de valor e ganho por economistas levanta o risco como um de seus pilares. Muito provavelmente, casos como a quebra do Banco do Vale do Silício são sintomas da quebra de expectativas surrealistas da percepção mundial sobre Estados

como Califórnia e Nova York, tornando outros Estados de crescimento grandes potenciais de ganho.

## 5.1 Trabalhos Futuros

Como uma continuação ao trabalho apresentado, almejamos aumentar as proporções das análises - trabalharmos com centenas de milhares ou até mesmo com milhões de agentes e dezenas de Estados. Para isso, iremos requerer uma capacidade computacional bastante acentuada quando comparada ao escopo do atual trabalho, uma vez que podemos esperar que com o atual modelo, uma amostra de 70 anos pode demorar até mesmo alguns dias para ser calculada.

Além disso, mudanças no modelo como efetividade do retorno do Estado, inflação, satisfação e IDH não foram levantados no atual modelo por questões de tempo; um dos tópicos muito importantes que nosso modelo não abrange é o conceito de empresas e pessoas jurídicas, já que um dos grandes vetores da migração de pessoas é o deslocamento por conta do trabalho, podemos fazer uma interpretação de que os agentes que condensavam a riqueza eram pessoas jurídicas e assim poder executar novas abordagens para solução do problema. Um estudo e uma elaboração mais profunda sobre estas características podem trazer ainda mais frutos ao trabalho.

Esperamos também aumentar a análise de dados reais e incluir modelos de aprendizado de máquina e redes neurais para se obter um maior entendimento do atual cenário e alavancar a habilidade de predição de valores de migração e crescimentos econômicos.

## A APÊNDICE

### A.1 Numpy

A biblioteca Numpy facilita a manipulação dos dados e permite que os arranjos sejam tratados de forma generalizada com ferramentas de álgebra linear. Por exemplo, algo que seria executado da seguinte forma:

```
lista = [1,2,3,4,5,6]
quadrados = [valor**2 for valor in lista]
print(quadrados)
# imprime [1,4,9,16,25,36]
```

enquanto usando Numpy:

```
import numpy as np
array = np.array([1,2,3,4,5,6])
quadrados = array**2
print(quadrados)
# imprime numpy.array([1,4,9,16,25,36])
```

Além disso, o numpy permite vetorizarmos funções, sendo assim digamos que temos um arranjo bidimensional da seguinte forma:

```
array = np.array([[1,2], [3,4], [5,6]])
```

podemos definir uma função que redefine o valor da primeira coluna como sendo a soma das duas colunas originais.

```
def replace_first_column(
    value_1: np.array,
    value_2: np.array
) -> np.array:
    return value_1+value_2

replace_first_column_v = np.vectorize(replace_first_column)
array[:,0] = replace_first_column_v(array[:,0], array[:,1])
print(array)
# imprime np.array([3,2], [7,4], [11,6])
```

## REFERÊNCIAS

- [1] Nate Cohn. The California Exodus. The New York Times. 2014. Disponível em: <https://www.nytimes.com/2014/08/15/upshot/the-california-exodus.html>. Acesso em: 19/02/2023.
- [2] Adam A. Millsap. Businesses Are Fleeing California Along With Its Residents, And President Biden Should Pay Attention. Forbes. Disponível em: <https://www.forbes.com/sites/adammillsap/2021/08/27/businesses-are-fleeing-california-along-with-its-residents-and-president-biden-should-pay-attention/?sh=24f3e6862327>. Acesso em: 19/02/2023.
- [3] California's population shrinks for second year in a row. The Guardian. 2022. Disponível em: <https://www.theguardian.com/us-news/2022/may/02/california-population-decline-trend-covid>. Acesso em: 19/02/2023.
- [4] Hanna Ziady. CNN. Silicon Valley Bank collapsed and what it could mean. Disponível em: = <https://edition.cnn.com/2023/03/13/investing/silicon-valley-bank-collapse-explained/index.html>.
- [5] Steven N. Durlauf. How can statistical mechanics contribute to social science? *Proc. Natl. Acad. Sci. USA Vol. 96, pp.10581-10584*, 1999.
- [6] A. Dragulescu and V.M. Yakovenko. Statistical mechanics of money. *Eur. Phys. J. B 17, 723-729 (2000)*.
- [7] J.R. Iglesias and R.M.C. de Almeida. Entropy and equilibrium state of free market models. *Eur. Phys. J. B (2012) 85: 85*.
- [8] Carten M Buchmann Cheng Guo and Nina Schawrz. Linking urban sprawl and income segregation - findings from a stylized agent-based model. *Environment and Planning B. Urban Analytics and City Science 0(0) 1-21*, 2017.
- [9] The Museum of The City Of San Francisco. San Francisco Gold Rush Chronology 1846-1849. Disponível em <http://www.sfmuseum.org/hist/chron1.html>. Acesso em: 18/02/2023.
- [10] U.S. Bureau of Economic Analysis (BEA). GDP by State. Disponível em <https://www.bea.gov/data/gdp/gdp-state>. Acesso em: 18/02/2023.
- [11] International Monetary Fund. GDP By Country. Disponível em <https://www.imf.org/en/Publications/WEO/weo-database/2022/October/>. Acesso em: 18/02/2023.

- [12] White E.Holmes, N. Pandemic Patterns: California is Seeing Fewer Entrances and More Exits (Corrected). California Policy Lab. Disponível em: <https://www.capolicylab.org/pandemic-patterns-california-is-seeing-fewer-entrances-and-more-exits-april-2022-update/>, 2022. Acesso em: 18/02/2023.
- [13] United States Census Bureau. 2021 National and State Population Estimates Press Kit. Disponível em <https://www.census.gov/newsroom/press-kits/2021/2021-national-state-population-estimates.html>. Acesso em: 19/02/2023.
- [14] United States Census Bureau. State-to-State Migration. Disponível em <https://www.census.gov/data/tables/time-series/demo/geographic-mobility/state-to-state-migration.html>. Acesso em: 19/02/2023.
- [15] Brandon Ristoff. The California Exodus Explained. Californai Policy Center. Disponível em: <https://californiapolicycenter.org/the-california-exodus-explained/>. Acesso em: 21/02/2023.
- [16] United States Census Bureau. Annual Survey of State Government Tax Collections (STC). Disponível em <https://www.census.gov/programs-surveys/stc.html>. Acesso em: 19/02/2023.
- [17] United States Census Bureau. "Regional Price Parities by State and Metro Area . <https://www.bea.gov/data/prices-inflation/regional-price-parities-state-and-metro-area>.
- [18] United Nations Development Programme. Human Development Reports. Disponível em: <https://hdr.undp.org/>.
- [19] Global Data Lab. Subnational Human Development. Disponível em: <https://globaldatalab.org/shdi/>.
- [20] Bikas K. Chakrabarti, Anirban Chakraborti, Satya R. Chakravarty and Arnab Chatterjee. *Econophysics of Income and Wealth Distributions*. Cambridge University Press, 1 edition, 2013.
- [21] United States Census Bureau American Community Survey. Gini Index of Income Inequality, 2021. Disponível em <https://data.census.gov/table?q=Gini>. Acesso em: 19/02/2023.
- [22] Charles M. Macal and Michael J. North. Agent-based modeling and simulations. *Proceedings of the 2009 WSC. IEEE, 2009*.
- [23] Hunter A. Vallejos, James J. Nutaro and Kalyan S. Perumalla . An agent-based model of the observed distribution of wealth in the united states.

- 
- [24] Mohammad Soheilypour, Mohammad R. K. Mofrad. Agent-based modeling in molecular systems biology. *BioEssays Vol. 40, 7*, 2018.
- [25] Samuel Leturcq Elisabeth Zadora-Rio Cécile Tannier, Robin Cura. An agent-based model for exploring the combined effects of social and demographic changes on the concentration and hierarchy of rural settlement patterns in North-Western Europe during the Middle Ages (800–1200 CE). *Journal of Anthropological Archaeology Volume 59*, 2020.
- [26] Mitja Steinbacher, Matthias Raddant, Fariba Karimi, Eva Camacho Cuenca, Simone Alfarano, Giulia Iori and Thomas Lux. Advances in the agent-based modeling of economic and social behavior. *SN Business Economics volume 1*, 2021.
- [27] Glen CM, Kemp ML, Voit EO. Agent-based modeling of morphogenetic systems: Advantages and challenges. *PLoS Comput Biol 15(3): e1006577*, 2019.
- [28] Bo Zhang, Donald L DeAngelis. An overview of agent-based models in plant biology and ecology. *Annals of Botany, Volume 126, Issue 4*, 2020.
- [29] Thomas C. Schelling. Dynamic models of segregation. *The Journal of Mathematical Sociology. Informa UK Limited. 1 (2): 143–186*, 1971.
- [30] Arthur Dornelles. Trabalho de Conclusão de Curso - Agent Based Model. Disponível em: = <https://github.com/ArthurDornelles/TCC-AgentBasedModel>.
- [31] Arthur Dornelles. Trabalho de Conclusão de Curso - Análise de Dados. Disponível em: = <https://github.com/ArthurDornelles/TCC-DataAnalysis>.
- [32] United States Census Bureau. Disponível em: <https://www.census.gov/en.html>.