UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Processos Estocásticos α-Estáveis Média Móvel Fracionariamente Integrados com Longa Dependência

Dissertação de Mestrado

Guilherme de Lima Feltes

Porto Alegre, Março de 2020

Dissertação submetida por Guilherme de Lima Feltes[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Probabilidade e Estatística pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professora Orientadora:

Drª. Sílvia Regina Costa Lopes - (UFRGS)

Banca Examinadora:

Drª. Adriana Neumann de Oliveira (UFRGS)

Dr. Artur Oscar Lopes (UFRGS)

Drª. Josiane Stein (IFSul Sapiranga)

Data da Defesa: 13 de Março de 2020.

[1] Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Feltes, Guilherme de Lima
Processos Estocásticos α-Estáveis Média Móvel Fracionariamente Integrados com Longa Dependência / Guilherme de Lima Feltes. - - Março de 2020.
63 p. : il.

Orientadora: Drª Sílvia Regina Costa Lopes

Dissertação (Mestrado) - - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Porto Alegre, BR-RS, Março de 2020.

1. Processos estocásticos α-estáveis. 2. Processos média móvel fracionariamente integrados. 3. Movimento estável fracionário linear. 4. Medidas de dependência. 5. Propriedade de longa dependência. I. Lopes, Sílvia Regina Costa, orient. II. Título.

Agradecimentos

Começo meus agradecimentos adiantando que será um texto talvez extenso na opinião de alguns, mas aqui quero ressaltar o fato de que esse trabalho foi feito por várias pessoas. Mesmo que o trabalho leve meu nome na capa, garanto que ele não existiria se não fosse essa longa lista de nomes que citarei aqui. Com isso, começo.

Primeiramente, quero agradecer às pessoas que me apresentaram a pesquisa, no meu ensino médio integrado com técnico em eletrônica, na Fundação Liberato (Novo Hamburgo, RS) - instituição que sempre serei imensamente grato por tudo que me ensinou e proporcionou. Dela, agradeço a todos os professores que passaram por mim, em especial aos meus orientadores dos trabalhos de conclusão, professores Raul e André. Além desses, minha querida professora de matemática Francine (Fran) que me ensinou muito desta matéria e da vida e sempre acreditou muito em mim, sendo decisiva na minha escolha em cursar matemática na UFRGS.

Agradeço, no início da minha caminhada na matemática, aos meus colegas do PIC e a esse incrível projeto da OBMEP que tanto proporciona para jovens talentos na matemática. Em especial, ao meu professor e grande exemplo pra mim, Professor Rogério. Agradeço por me mostrar o quão legal e divertida a matemática pode ser, sempre resolvendo todos os problemas com facilidade - triviais, segundo ele. Agradeço imensamente pelos conselhos que me deu, por ter compartilhado comigo sua história, e por me apresentar a minha orientadora na UFRGS mesmo antes de prestar o vestibular.

Aqui seguem os professores (P.) da UFRGS que marcaram a minha passagem pelos meus estudos simultâneos de bacharelado e mestrado - aqui novamente agradeço ao projeto PICME da OBMEP, que me proporcionou bolsa de IC (CNPq) nos meus dois primeiros anos de bacharelado e ingresso como aluno regular com bolsa no mestrado nos dois últimos anos (CAPES). P. Alveri por longas discussões após as aulas de álgebra linear e por me aconselhar na hora de entrar para o PICME; P. Leonardo por conselhos e por me apresentar análise após as aulas de cálculo A; P. Paques por me ensinar toda álgebra que sei e sempre me instigar a resolver problemas e discuti-los; P. Barrionuevo por bons conselhos e conversas em álgebra linear e topologia; P. Jairo por formalmente me apresentar análise e me recomendar para meu primeiro verão no IMPA; P. Brietzke por me ensinar muito cálculo e análise; P. Diego por várias disciplinas e por sempre me receber prontamente a qualquer hora em seu gabinete para tratar de qualquer assunto; P. Patrícia por todo entusiasmo e diversão em introdução à geometria; P. Artur por compartilhar muita intuição e idéias matemáticas em diversos cursos, por me escrever diversas cartas de recomendação e por participar da minha banca de defesa do mestrado;

P. Pumi por diversas discussões em probabilidade e processos estocásticos. Prof Fagner por um curso muito divertido de EDO; P. Baraviera por me apresentar EDPs e discutir problemas interessantes pós aula; P. Vanderson por várias conversas e conselhos e por me apresentar geometria diferencial; P. Adriana por me proporcionar o curso que mais gostei de fazer até hoje, diversos conselhos e discussões sobre problemas, bem como ser minha recomendadora para meu doutorado e por fazer parte da banca de defesa; Ao P. Álvaro por diversas boas conversas e por me apresentar geometria. Ao P. Milton do IMPA por um curso extremamente motivador de Cadeias de Markov e por seu meu recomendador para o doutorado; P. Josiane por fazer parte da minha banca e apontar diversas sugestões no trabalho. A todos esses, agradeço IMENSAMENTE por toda atenção e conhecimento compartilhado comigo.

Não posso deixar de agradecer para as funcionárias da COMGRAD da Matemática que me ajudaram demais com a burocracia da graduação, Flávia e Giovana; à Rosane e Isabela do PPGMAT, pelo mesmo fato mas do lado da pós graduação. Muito obrigado!

Nesses meus anos de UFRGS criei vários laços essencias, pessoas que estiveram comigo nos vários momentos de convivência, tanto de estudo quanto diversão. São pessoas que tiveram um peso fundamental na minha formação, desenvolvimento pessoal e bem estar. São meus amigos Marcus, Izabella, Hugo, Bruno, Gleiciano, Thomas, Lucas, Eduardo, Maicon, Leonardo, Mikaela, Gustavo C., Gustavo S., Gustavo M. Uma atenção especial aos que eu convivi grosseiramente mais tempo, William e meu fiel companheiro Gustavo. Por fim, aos meus amigos e grandes refências pra mim, que muito me ajudaram e ensinaram durante minha caminhada, Thomás, Jader e Josué. Também aos amigos que fiz nos verões do IMPA, Caio, Daniel R. e Daniel Y. Agradeço também ao meu psicólogo Tiago pelo excelente trabalho de terapia. À esses e a todos os outros que eu convivi mas esqueci de citar, muito obrigado!

Um parágrafo de agradecimento totalmente trivial para as pessoas que são responsáveis pela minha existência, criação, educação e por sempre acreditarem em mim e me apoiarem em tudo que eu quis fazer até hoje. E por serem tão amorosos comigo. Meus pais, Jaci e Marcelo. Meu amor por vocês é algo que não cabe nesse agradecimento. Obrigado por tudo do fundo do coração.

Depois dos meus pais, agora agradeço à pessoa que considero a minha mãe na academia, minha orientadora Sílvia. Simplesmente não há palavras para descrever tamanha gratidão. Me orientou desde antes de eu me inscrever para o vestibular. Minha maior realização profissional até hoje foi quando ela me disse, em seu gabinete em uma de nossas reuniões de "brainstorming", que observou uma grande evolução em mim e que já me considerava um pesquisador. Eu me senti honrado por saber que estava sendo capaz de contribuir de alguma maneira com o trabalho dela. Agradeço por todo ensinamento de vida que me proporcionou, além de como ler papers, fazer pesquisa e escrever. Por toda extensa ajuda em obter meu doutorado fora do país e pelas diversas cartas de recomendação. Mas mais importante de tudo, por sempre me tratar com atenção, afeto e carinho. Muito obrigado por tudo, Sílvia.

Por fim, agradeço à minha motivação de vida, meu amor, minha companheira, a pessoa que me junta do chão e me recompõe toda vez que caio e que faz o excelente trabalho de sempre me repreender quando estou errado. A pessoa que avalia comigo a pessoa que eu era, me faz ser quem eu sou hoje e que me ajuda a ser quem eu quero ser no futuro. Minha esposa, Daniele, eu te amo incondicionalmente e só obrigado nem faz sentido, mas muito obrigado!

Concluindo, agradeço ao acaso por me permitir ser uma pessoa tão imensamente privilegiada.

Resumo

Longa dependência para processos estocásticos de Lévy com segundo momento finito tem sido bem estudada pela literatura. Tais processos formam uma classe muito rica de modelos apresentando uma função de autocovariância que decai lentamente como uma função polinomial. Aqui, nós estudamos uma classe de processos de Lévy com segundo momento infinito: a classe dos processos estocásticos α-estáveis. Consideramos operadores de integração fracionária e, analogamente ao bem conhecido caso Gaussiano, relacionamos esses processos com o equivalente α-estável do movimento Browniano fracionário, chamado de movimento estável fracionário linear. Por fim, mostramos a propriedade de longa dependência para esses processos.

Palavras-chaves: Processos Estocásticos α-Estáveis Média Móvel Fracionariamente Integrados; Propriedade de Longa Dependência; Movimento Estável Fracionário Linear.

Abstract

Long memory processes driven by Lévy noise with finite second order moments have been well studied in the literature. They form a very rich class of processes presenting an autocovariance function which decays like a power function. Here, we study a class of Lévy process with infinite second order moments: the α-stable processes. We consider fractional integration operators and, analogously to the well-known Gaussian case, we relate these processes with the fractional Brownian motion's stable counterpart, the so-called linear fractional stable motion. Finally, we show its property of long-range dependence.

Keywords: Fractionally Integrated Moving Average Stable Processes; Long-Range Dependence; Linear Fractional Stable Motion.

Lista de abreviaturas e notações

$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
i.i.d.	variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas
$\stackrel{d}{\Rightarrow}$	convergência em distribuição
$\stackrel{d}{=}$	igualdade em distribuição
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	distribuição normal de média μ e variância σ^2
$\overline{A}$	fecho do conjunto A
$\mathbb{Z}$	conjunto dos inteiros
$\Gamma(a)$	função Gama, calculada em a
$\mathbb{1}_A$	função indicadora do conjunto A
$u_+(\cdot)$	função parte positiva da função $u(\cdot)$
$u_-(\cdot)$	função parte negativa da função $u(\cdot)$
$\mathrm{sign}(\cdot)$	função sinal
$S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$	distribuição α-estável com α, σ, β e μ indicando respectivamente, o índice de estabilidade e os parâmetros de escala, simetria e locação
$S\alpha S$	distribuição simétrica α-estável
$\mathcal{C}(\mu, \sigma)$	distribuição de Cauchy com parâmetro de locação μ e parâmetro de escala σ
$\mathbb{E}(X)$	esperança da variável aleatória X
$\mathbb{R}^d$	espaço euclidiano d-dimensional
$\gamma_X(t)$	função de autocovariância do processo $\{X(t)\}_{t\in T}$.
$\mathbb{E}(e^{i\theta X})$	função característica da variável X
$\mathbb{P}(X \in A)$	probabilidade de X pertencer ao conjunto A
$\mathcal{B}$	σ-álgebra de Borel
L^p	espaço vetorial das funções p-integráveis

$\|\|f\|\|_p$	norma p da função $f \in L^p$
$\sim$	igualdade em distribuição
$\sim$	mesmo comportamento assintótico
$\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$	movimento Browniano padrão
$\{L_\alpha(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$	processo $S\alpha S$ padrão
I_-^d	integral fracionária de R-L pela direita
I_+^d	integral fracionária de R-L pela esquerda
$\mathcal{D}_-^d$	derivada fracionária de R-L pela direita
$\mathcal{D}_+^d$	derivada fracionária de R-L pela esquerda
$\{B_H(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$	movimento Browniano fracionário
$\{M_{\alpha,H}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$	movimento estável fracionário linear

Sumário

1 Introdução

Neste trabalho estamos interessados em processos estocásticos α-estáveis média móvel a tempo contínuo que apresentem a propriedade de longa dependência ou longa memória. Existem diversas aplicações interessantes para tais processos na literatura, veja Samorodnitsky (2006) para uma apresentação intuitiva e histórica dessa propriedade. Processos que possuem longa memória apresentam um fenômeno no qual alguma medida própria da estrutura de dependência do processo - geralmente essa medida é a função de autocovariância, quando bem definida - se comporta como uma função polinomial, tendo um lento decaimento. Lento no sentido de que converge a zero mas a correspondente série diverge (expoente expoente do decaimento em $(-1,0)$).

Variáveis aleatórias α-estáveis são uma generalização das conhecidas variáveis aleatórias Normais ou Gaussianas. O parâmetro α é chamado de índice de estabilidade e pertence ao conjunto $(0,2]$, sendo o caso $\alpha = 2$ precisamente o caso Gaussiano. Elas surgem como generalizações do Teorema Central do Limite (TCL), sendo definidas como limites de somas parciais de variáveis aleatórias i.i.d. devidamente padronizadas. O índice de estabilidade aparece no expoente dessa normalização. A principal diferença entre os casos $0 < \alpha < 2$ e $\alpha = 2$ é que enquanto no caso Gaussiano essas variáveis possuem os momentos de todas as ordens finitos, no outro só existem os momentos de ordem $p < \alpha$.

O movimento estável fracionário linear (MEFL) é uma generalização do bem conhecido e estudado movimento Browniano fracionário (mBf) para o caso α-estável. De acordo com Samorodnitsky e Taqqu (1994), ele possui a seguinte representação média móvel. Para $0 < \alpha \leq 2$, $0 < H < 1$, $H \neq \frac{1}{\alpha}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $|a| + |b| > 0$,

$$M_{\alpha,H}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a\left[(t-x)_+^{H-\frac{1}{\alpha}} - (-x)_+^{H-\frac{1}{\alpha}}\right] + b\left[(t-x)_-^{H-\frac{1}{\alpha}} - (-x)_-^{H-\frac{1}{\alpha}}\right] dM(x) \ , \quad (1.1)$$

para $t \in \mathbb{R}$. Onde $u_+ = \max\{u, 0\}$ e $u_- = \max\{-u, 0\}$ são as partes positivas e negativas de u, respectivamente e M é uma medida aleatória $S\alpha S$ com medida de controle $dm(x) = dx$ de Lebesgue. O processo $\{M_{\alpha,H}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é auto-similar com parâmetro de Hurst H e possui incrementos estacionários. Quando $\alpha = 2$, ele se reduz ao mBf ($M_{2,H}(\cdot) := B_H(\cdot)$), que apresenta o seguinte comportamento assintótico na função de autocovariância do processo de incrementos $Y(t) := B_H(t+1) - B_H(t)$

$$\mathrm{Cov}(Y(0), Y(t)) \sim H(2H-1)t^{2H-2} \ . \quad (1.2)$$

Portanto, quando $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ dizemos que os incrementos do mBf possuem a propriedade de longa dependência, pois $-1 < 2H - 2 < 0$. Analogamente ao caso do mBf, quando $1 < \alpha < 2$, dizemos que os incrementos do MEFL possuem a propriedade de longa dependência quando $H \in \left(\frac{1}{\alpha}, 1\right)$. Esse é um dos exemplos clássicos de processos α-estáveis com longa memória.

Como podemos perceber pela exposição acima, existe uma relação entre auto-similaridade e a propriedade de longa dependência. Assim como há uma relação entre integração fracionária e auto-similaridade, dada por $d = H - \frac{1}{\alpha}$. Nesse trabalho focaremos na relação entre o parâmetro de integração fracionária d e a longa dependência. Esse trabalho será apresentado da seguinte maneira, a primeira parte é composta pelos Capítulos 2 e 3, em que o objetivo é dar a base para que o leitor fique familiarizado com os conceitos e ferramentas utilizadas na teoria desenvolvida no artigo que está anexado. Esses capítulos foram escritos de maneira direta, mas com pontos importantes mais detalhados. Um leitor confortável com os assuntos aqui tratados pode ir direto para a leitura do artigo, pois o mesmo possui uma seção de conceitos preliminares bem mais direta.

O Capítulo 2 trata de conceitos básicos para o desenvolvimento da teoria. Introduzimos as variáveis aleatórias e processos α-estáveis com suas respectivas integrais estocásticas, em que essa construção é feita através de medidas aleatórias α-estáveis. Falamos também sobre a propriedade de longa dependência e sua relação com a auto-similaridade.

O Capítulo 3 ainda trata de ideias preliminares, mas mais voltadas para os processos que serão tratados no artigo. Introduzimos as integrais fracionárias de Riemann-Liouville e com elas os processos estocásticos fracionariamente integrados, bem como processos estocásticos média móvel fracionariamente integrados, que são sempre estacionários. Apresentamos também uma medida de dependência alternativa à função de autocovariância para o caso das α-estáveis que tem sido amplamente utilizada na literatura para tais processos. Como aplicação, apresentamos a propriedade de longa dependência dos incrementos do MEFL segundo essa medida de dependência.

Na Conclusão, são feitos comentários sobre os resultados que são desenvolvidos no artigo. O artigo, que se encontra no Anexo A, segue organizado da seguinte maneira: introdução, conceitos preliminares - que apresenta de uma maneira extremamente direta e resumida o que se encontra aqui nos Capítulos 2 e 3 - e resultados principais I e II, onde são desenvolvidos os resultados. Note que fazemos uma troca de notação no artigo de medidas aleatórias $S\alpha S$, M para processos $S\alpha S$, $\{L_\alpha(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, segundo a Observação 3.16. A razão disso é que a segunda é a notação amplamente utilizada na literatura e a primeira foi utilizada no intuito de permitir uma apresentação um pouco mais formal das integrais estocásticas estáveis.

Na Seção 3 do artigo - resultados principais I - construimos, através das integrais fracionárias de Riemann-Liouville, os processos estocásticos α-estáveis fracionariamente integrados. Também com as mesmas, construimos as integrais estocásticas em relação ao MEFL e provamos uma representação muito importante dos processos fracionariamente integrados, relacionando-os com o MEFL.

Na Seção 4 do artigo - resultados principais II - construimos os processos estocásticos α-estáveis média móvel fracionariamente integrados e, de acordo com os resultados da Seção 3, mostramos uma representação deles em função do MEFL. Em seguida, utilizando-se de uma medida própria de dependência, mostramos que esses processos possuem a propriedade de longa dependência.

2 Noções e Conceitos Preliminares

Neste capítulo, apresentamos os conceitos preliminares para a teoria que é desenvolvida no artigo anexado. Aqui são apresentadas algumas proposições e resultados, mas suas provas são omitidas, sendo indicadas as referências ao leitor interessado.

2.1 Processos Estocásticos e Propriedade de Longa Dependência

Nesta seção apresentamos uma rápida introdução ao conceito de processos estocásticos que possuem a propriedade de longa dependência. Apresentamos também o conceito de processos auto-similares e sua relação com processos que possuem a propriedade de longa dependência. Para leitores não familiarizados com os assuntos, sugerimos Billingsley (1995) para noções gerais de probabilidade e processos estocásticos, Samorodnitsky (2006) para uma introdução intuitiva e histórica da propriedade de longa dependência e Beran (2013) para aspectos probabilísticos e estatísticos de tais processos. Para auto-similaridade e longa dependência, ver Pipiras e Taqqu (2017).

2.1.1 Processos Estocásticos

Um processo estocástico é uma sequência de eventos aleatórios indexados por um conjunto de índices, que pode ser discreto ou contínuo, e geralmente é pensado como tempo. Veja Billingsley (1995) e Lopes e Lopes (2019).

Definição 2.1. Uma *variável aleatória* em um *espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é uma função mensurável definida $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (S, \mathcal{A})$, onde S recebe o nome de *espaço de estados* é onde a variável aleatória toma valores. Na grande maioria dos casos, trataremos $S = \mathbb{R}$ e a *σ-álgebra* $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ de *Borel*, que é gerada pelos abertos da reta (intervalos (a, b) para $a, b \in \mathbb{R}$). Para todo $A \in \mathcal{A}$ mensurável, associamos a chamada *distribuição* de X por

$$\mu(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A) \ . \tag{2.1}$$

Dessa forma, uma variável aleatória está bem definida através de sua distribuição.

Exemplo 2.2. (Distribuição Normal). Sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$. Dizemos que X possui *distribuição Normal* e escrevemos $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ se ela toma valores em $\mathbb{R}$ e sua distribuição é dada por, para $B \in \mathcal{B}$

$$\mathbb{P}(X \in B) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} \int_B e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx \; . \tag{2.2}$$

Definição 2.3. Considere uma sequência de variáveis aleatórias reais $X, X_1, X_2, \cdots$ definidas num espaço comum de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. A elas, estão associadas as medidas de distribuição $\mu, \mu_1, \mu_2, \cdots$ como em (2.1). Dizemos que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge em distribuição* para a variável aleatória X e escrevemos $X_n \overset{d}{\Rightarrow} X$ se

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A) \tag{2.3}$$

para todo A da forma $A = (-\infty, x]$ em que $\mu(\{x\}) = 0$.

Definição 2.4. Um *processo estocástico* é uma coleção $\{X_t\}_{t\in T}$ de variáveis aleatórias definidas em um espaço comum de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tomando valores num espaço de estados comum $(S, \mathcal{A})$, onde T é o conjunto de índices. Geralmente, T é pensado como tempo, sendo $T = \mathbb{N}$ ou $T = \mathbb{Z}$ no caso discreto e $T = [0, \infty)$ ou $T = \mathbb{R}$ no caso contínuo.

Exemplo 2.5. (Lançamento de Moedas). Considere $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), tal que para todo n, $\mathbb{P}\,(X_n = \text{Cara}) = \frac{1}{2}$ e $\mathbb{P}\,(X_n = \text{Coroa}) = \frac{1}{2}$. Então $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é um processo estocástico a tempo discreto que modela o lançamento sucessivo de moedas honestas independentes. Sob essas condições é possível mostrar que, por exemplo, a frequência de aparecimentos de Cara converge para $\frac{1}{2}$, isto é, ao longo de muitos lançamentos de moedas, aproximadamente em metade deles o resultado observado será Cara. Esse resultado é conhecido como Lei dos Grandes Números. Veja James (2015).

Observação 2.6: A partir de agora, toda vez que não citado contrário, estaremos considerando o espaço de estados $S = \mathbb{R}$ como a reta e a σ-álgebra como $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ de Borel.

Exemplo 2.7. (Movimento Browniano - mB). Considere $\{B_t\}_{t\geq 0}$ definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) O processo começa em 0:

$$\mathbb{P}\,(B_0 = 0) = 1 \; ; \tag{2.4}$$

ii) Os incrementos são independentes: se $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant ... \leqslant t_k$, então para todos A_i mensuráveis,

$$\mathbb{P}\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \in A_i, 1 \leqslant i \leqslant k\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \in A_i\right) \; ; \tag{2.5}$$

iii) Para $0 \leqslant s < t$ o incremento $B_t - B_s$ tem distribuição Normal com média 0 e variância $t - s$. Isto é, para todo A mensurável,

$$\mathbb{P}\left(B_t - B_s \in A\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_A e^{\frac{-x^2}{2(t-s)}} dx \; . \tag{2.6}$$

São necessárias algumas tecnicalidades para mostrar a existência de tal processo, das quais iremos mencionar uma em seguida. Esse processo foi batizado em homenagem ao botânico Robert Brown, que descreveu no século XIX o movimento de uma partícula suspensa sobre líquido, bombardeada por moléculas em movimento termal, ou seja, uma partícula que se movimenta aleatoriamente para todas as direções sobre um espaço contínuo (plano, nesse caso) em tempo contínuo. O mB é um objeto matemático extremamente sofisticado e repleto de propriedades interessantes. É possível mostrar, usando o Lema de Borel-Cantelli, que com probabilidade 1 o mB possui caminhos amostrais contínuos. Isto é, existe $\Omega' \subset \Omega$ tal que $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ e para todo $\omega \in \Omega'$, temos que a função $t \mapsto B_t(\omega)$ é contínua em t, veja Revuz e Yor (1999). É possível mostrar, também, que com probabilidade 1, o mB escapa de qualquer compacto. Isto é, existe $\Omega' \subset \Omega$ tal que $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ e para todo $\omega \in \Omega'$, temos que $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |B_t(\omega)| = \infty$, veja mesma referência anterior. Existe uma conexão muito rica entre o mB e equações diferenciais parciais, um dos exemplos mais clássicos é que o mB resolve o Problema de Dirichlet, que consiste em encontrar uma função definida em $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ para uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que satisfaça a seguinte equação

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & \text{se } x \in \Omega, \\ u(x) = f(x), & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

Onde Δ denota o operador laplaciano e f é chamada de *condição de bordo*. Temos que a solução desse problema pode ser escrita como

$$\begin{cases} u(x) = \mathbb{E}_x\left(f(B_\tau)\right), & \text{se } x \in \Omega, \\ u(x) = f(x), & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.8}$$

onde $\mathbb{E}_x$ significa tomar a esperança sob a probabilidade em que $\mathbb{P}\left(B_0 = x\right) = 1$, isto é, começar em x com probabilidade 1 e τ é o tempo de parada de acertar o bordo da região Ω ($\tau = \inf\{t > 0, B_t \in \partial\Omega\}$). Veja Revuz e Yor (1999) e Karatzas e Shreve (1991).

Para definir um processo estocástico, basta olhar para suas distribuições finito-dimensionais, isto é, as distribuições que o processo induz nos espaços euclidianos k-dimensionais.

Definição 2.8. Chamamos de *distribuições finito-dimensionais*, a coleção de probabilidades tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ e $t_1, t_2, \cdots, t_k$ elementos distintos de T, associa ao vetor $(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_k}) \in \mathbb{R}^k$ a probabilidade de pertencer a algum conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^k$. Isto é, a coleção $\mu_{t_1,t_2,\cdots,t_k}$ tal que

$$\mu_{t_1,t_2,\cdots,t_k}(A) = \mathbb{P}\left((X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_k}) \in A\right) \; . \tag{2.9}$$

Se essa coleção de probabilidades satisfizer duas condições de consistência bem intuitivas, o Teorema de Existência de Kolmogorov garante a existência de um processo estocástico em um espaço de probabilidade que possui exatamente essa coleção de distribuições como suas distribuições finito-dimensionais, veja Billingsley (1995). Seja π uma permutação de $(1, 2, \cdots, k)$ e $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$, $A_i \in \mathbb{R}$. As condições de consistência são:

i) Invariância por permutações na ordem dos eventos:

$$\mu_{t_1,t_2,\cdots,t_k}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) = \mu_{t_{\pi 1},t_{\pi 2},\cdots,t_{\pi k}}(A_{\pi 1} \times A_{\pi 2} \times \cdots \times A_{\pi k})\ ; \qquad (2.10)$$

ii) Invariância por adicionar um evento de pertencer ao todo:

$$\mu_{t_1,t_2,\cdots,t_{k-1}}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{k-1}) = \mu_{t_1,t_2,\cdots,t_{k-1},t_k}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{k-1} \times \mathbb{R})\ . \quad (2.11)$$

Agora passamos a algumas propriedades sobre processos estocásticos que serão úteis daqui para frente. Daqui em diante estaremos tratando apenas com processos a tempo contínuo.

Observação 2.9: Para processos a tempo contínuo que admitem saltos, o espaço usual é conhecido como espaço de *Skorohod*, ou espaço das funções *càdlàg*, do francês *continue à droite, limite à gauche* que se traduz para *contínua à direita, limite à esquerda*. Nesse espaço define-se uma métrica chamada *métrica de Skorohod* que induz uma topologia no mesmo, dependendo se o conjunto T do tempo é compacto ou não. Veja Billingsley (2013) para o caso de T compacto e Oliveira e Lopes (2007) para o caso de $T = [0, \infty)$. Intuitivamente, esse espaço é uma generalização do espaço métrico das funções contínuas munido da métrica da convergência uniforme, no intuito de permitir processos que possuem caminhos amostrais com descontinuidades do tipo salto, exemplificados pela ampla classe dos *processos de Lévy* (da qual os processos aqui estudados fazem parte). Veja Applebaum (2004) para uma apresentação desses processos juntamente com o desenvolvimento do cálculo estocástico. Nesse espaço, definimos *caminho amostral* como sendo, para cada $\omega \in \Omega$, a função $\omega : T \to \mathbb{R}$ que leva para cada $t \in T$, $t \mapsto X_t(\omega)$, sendo definida por $\omega_t := X_t(\omega)$ (chamado de *processo canônico*, veja Revuz e Yor (1999)). As funções ω também são chamadas de *realizações do processo*. Todo processo de Lévy definido em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ possui caminhos amostrais càdlàg com probabilidade 1, isto é, existe $\Omega_0 \subset \Omega$ com $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ tal que para todo $\omega \in \Omega_0$, a função $\omega_t = X_t(\omega),\ t \in T$, é càdlàg.

Definição 2.10. Um processo estocástico $\{X_t\}_{t\in T}$ é dito ser *fortemente estacionário* ou somente *estacionário* se sua coleção de distribuições finito-dimensionais é invariante por translações no tempo, isto é, para todos $h, t_1, t_2, \cdots, t_k \in T$, temos

$$\mathbb{P}\left((X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_k}) \in A\right) = \mathbb{P}\left((X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \cdots, X_{t_k+h}) \in A\right) \qquad (2.12)$$

para todo A mensurável.

Esse conceito significa, intuitivamente, que um processo estocástico estacionário apresenta os mesmos aspectos estatísticos sobre observações em dois intervalos de tempos distintos, desde que eles tenham o mesmo tamanho.

Exemplo 2.11. (Processo Identicamente Distribuído). Seja $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$, X_t possui a mesma distribuição $X_t \sim X_1$. Portanto, para todos $h, t_1, \cdots, t_k \in \mathbb{R}$, temos

$$\mathbb{P}\left((X_{t_1}, \cdots, X_{t_k}) \in A\right) = \mathbb{P}\left((X_{t_1+h}, \cdots, X_{t_k+h}) \in A\right) \tag{2.13}$$

para todo A mensurável. □

Uma classe de processos que estaremos interessados são os processos de incremento. Intuitivamente, esses processos consistem de uma diferença entre tempos distintos de um mesmo processo, como no exemplo a seguir.

Exemplo 2.12. (Incrementos do Movimento Browniano). Temos que, para todo $0 \leqslant s < t$, $h \geqslant 0$ e A mensurável

$$\mathbb{P}\left(B_{t+h} - B_{s+h} \in A\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_A e^{\frac{-x^2}{2(t-s)}} dx = \mathbb{P}\left(B_t - B_s \in A\right) = \mathbb{P}\left(B_{t-s} \in A\right) \ .$$

□

2.1.2 Longa Dependência

A propriedade de longa dependência, como o nome sugere, é uma propriedade encontrada em processos estocásticos que possuem um certo tipo de relação de dependência entre incrementos de tempo que parece se manter em algum sentido mesmo quando o tamanho do incremento cresce. Processos com tal propriedade são muito utilizados em aplicações em diversas áreas, como por exemplo finanças, econometria, modelagem em internet, hidrologia, estudos climáticos, linguística ou sequenciamento de DNA; veja Samorodnitsky (2006). Mas para falarmos de dependência em processos estocásticos, primeiro precisamos de alguma ferramenta para medir dependência entre dois tempos de um processo. Já que a natureza gosta muito do número dois, quando olhamos para propriedades de segunda ordem, obtemos a riqueza dos espaços de *Hilbert*, onde conseguimos definir um produto interno e tudo fica mais fácil (veja referência preferida de teoria da medida e/ou análise funcional). Dito isso, a medida de dependência mais natural usada nesta seção é a função de autocovariância.

Definição 2.13. Considere um processo estocástico $\{X_t\}_{t\in T}$ com segundo momento finito, isto é, $\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] < \infty$, $\forall t \in T$. Para $t, h \in T$, definimos a função de *autocovariância* por

$$\gamma_X(t, t+h) = Cov(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}\left[X_t\right])(X_{t+h} - \mathbb{E}\left[X_{t+h}\right])\right] \ . \tag{2.14}$$

Agora note que se o processo estocástico $\{X_t\}_{t\in T}$ for estacionário, podemos denotar sua função de autocovariância por

$$\gamma_X(h) = \gamma_X(t, t+h) = Cov(X_t, X_{t+h}) = Cov(X_0, X_h) \ . \tag{2.15}$$

Daremos a definição do que é a propriedade de Longa Dependência para processos estacionários segundo Beran (2013).

Definição 2.14. Seja $\{X_t\}_{t\in T}$ um processo estocástico estacionário que satisfaz a seguinte condição: existe um número real $\theta \in (0,1)$ e uma constante $c_\gamma > 0$ tais que

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} \frac{h^\theta}{c_\gamma} = 1 \ . \tag{2.16}$$

Então, $\{X_t\}_{t\in T}$ é chamado um *processo estocástico estacionário com a propriedade de longa dependência.*

Equivalentemente, (2.16) significa que

$$\frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} \sim \frac{c_\gamma}{h^\theta} \ . \tag{2.17}$$

Em outras palavras, a função de autocorrelação do processo decai para zero, mas mais devagar do que n^{-1}, precisamente a uma taxa $n^{-\theta}$, com $0 < \theta < 1$.

Adiante, definimos um novo parâmetro que tem uma relação com esse θ, $H = 1 - \frac{\theta}{2}$, chamado parâmetro de Hurst (parâmetro de auto-similaridade). Segundo esse parâmetro, a longa dependência ocorrerá quando $\frac{1}{2} < H < 1 \iff 0 < \theta < 1$. Nessa ocasião também apresentamos um exemplo de tal processo.

2.1.3 Processos Auto-Similares

A propriedade de auto-similaridade em processos estocásticos remete a uma estrutura fractal nos caminhos amostrais desses processos, isto é, seus caminhos amostrais parecem ter a mesma estrutura mesmo olhando muito de perto. Por definição, os processos auto-similares são aqueles em que escalas no tempo são iguais em distribuição à escalas apropriadas no espaço, segundo um parâmetro (veja (2.18) abaixo). Processos auto-similares são muito utilizados em aplicações, pois podem apresentar a propriedade de longa dependência, dentre muitas outras. Processos estocásticos auto-similares às vezes são chamados de *fractais aleatórios.*

Definição 2.15. O processo $\{X_t\}_{t\in T}$ é dito *auto-similar* de parâmetro $H \in \mathbb{R}$ se, e somente se, para todo $c > 0$ e $t_1, t_2, \cdots, t_k \in T$, temos

$$\mathbb{P}\left((X_{ct_1}, X_{ct_2}, \cdots, X_{ct_k}) \in A\right) = \mathbb{P}\Big((c^H X_{t_1}, c^H X_{t_2}, \cdots, c^H X_{t_k}) \in A\Big) \ . \tag{2.18}$$

Ou, mais simplesmente, X_{ct} tem a mesma distribuição de $c^H X_t$, para todo $t \in T$ e $c > 0$.

Exemplo 2.16. (Movimento Browniano). Seja $\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ o mB definido no Exemplo 2.7. Seja $c > 0$, para todo $t \in [0,\infty)$ temos:

$$B_{ct} \overset{d}{=} \mathcal{N}(0, ct) \overset{d}{=} c^{\frac{1}{2}}\mathcal{N}(0,t) \overset{d}{=} c^{\frac{1}{2}} B_t \ , \tag{2.19}$$

onde "$\overset{d}{=}$"significa igualdade em distribuição. Logo, o mB é auto-similar com parâmetro $H = \frac{1}{2}$. □

Segundo Beran (2013), se $\{X_t\}_{t\in T}$ é um processo estocástico com segundo momento finito, auto-similar de parâmetro $H \in (0,1)$ e com incrementos estacionários, então ele apresenta a *propriedade de longa dependência* quando $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, satisfazendo a relação $H = 1 - \frac{\theta}{2}$, onde $\theta \in (0,1)$ é o parâmetro da Definição 2.14. Em seguida, vamos ilustrar essa relação com um exemplo.

Exemplo 2.17. (Movimento Browniano Fracionário - mBf). Segundo Samorodnitsky e Taqqu (1994), o *movimento Browniano fracionário* é o único processo estocástico Gaussiano auto-similar de incrementos estacionários. O mBf padrão, que possui $\mathbb{E}\left[B_H(1)^2\right] = 1$, pode ser definido como o processo estocástico $\{B_H(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ Gaussiano que satisfaz:

i) $B_H(0) = 0$,

ii) $\mathbb{E}\left[B_H(t)\right] = 0$, para todo $t \geqslant 0$,

iii) $\mathbb{E}\left[B_H(t)B_H(s)\right] = \frac{1}{2}(|t|^{2H} - |t-s|^{2H} + |s|^{2H})$, para todo $s, t \geqslant 0$,

onde o parâmetro $H \in (0,1)$ é o parâmetro de Hurst da auto-similaridade, pois (iii) implica que $\mathbb{E}\left[B_H(t)^2\right] = t^{2H}$, para todo $t \geqslant 0$. Logo, para $c > 0$

$$B_H(ct) \overset{d}{=} \mathcal{N}(0, (ct)^{2H}) \overset{d}{=} c^H \mathcal{N}(0, t^{2H}) \overset{d}{=} c^H B_H(t) \ . \tag{2.20}$$

Note que quando $H = \frac{1}{2}$, o mBf se reduz ao mB, portanto vamos desconsiderar o caso $H = \frac{1}{2}$ no que segue. Como os incrementos do mBf são estacionários, considere agora o processo de incrementos $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ dado por:

$$Y_j := B_H(j+1) - B_H(j) \ , \tag{2.21}$$

que forma uma sequência estacionária. O processo $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ assim definido é chamado de *Ruído Gaussiano Fracionário (rGf)*. Segundo a Proposição 7.2.9 de Samorodnitsky e Taqqu (1994), o rGf possui função de autocovariância dada por

$$\gamma_Y(j) = \frac{1}{2}(|j+1|^{2H} - 2|j|^{2H} + |j-1|^{2H}) \ , \ j \in \mathbb{Z} \ . \tag{2.22}$$

Agora note que para $j \geq 1$, temos

$$\gamma_Y(j) = \frac{j^{2H-2}}{2}\left[j^2\left(\left(1+\frac{1}{j}\right)^{2H} - 2 + \left(1-\frac{1}{j}\right)^{2H}\right)\right] . \tag{2.23}$$

Assim sendo, o termo que está dentro de $[\cdot]$ converge para $2H(2H-1)$, quando $j \to \infty$. Isto é, o comportamento da função de autocovariância, quando j é grande, é dado por

$$\gamma_Y(j) \sim H(2H-1)j^{2H-2} . \tag{2.24}$$

Logo, para $H \in (0,1)$, $H \neq \frac{1}{2}$, $\gamma_Y(j)$ converge a zero quando $j \to \infty$, mas somente quando $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ essa taxa é mais devagar do que j^{-1}. Portanto, dizemos que os incrementos do mBf possuem a propriedade de longa dependência quando $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, segundo a Definição 2.14.

2.2 Variáveis Aleatórias α-Estáveis e Integrais Estocásticas Estáveis

Nesta seção apresentamos o que são variáveis aleatórias α-estáveis e algumas de suas propriedades, bem como processos estocásticos envolvendo essas variáveis. Em seguida, damos uma breve exposição de como são definidas as integrais estocásticas segundo esses processos, que recebem o nome de *integrais estocásticas estáveis*. Por fim, introduzimos o conceito de média móvel e sua relação com estacionariedade. A referência básica para essa seção é Samorodnitsky e Taqqu (1994).

2.2.1 Variáveis Aleatórias α-Estáveis

Variáveis aleatórias α-estáveis, com $0 < \alpha \leqslant 2$, conhecidas também por sua classe de variáveis estáveis, são variáveis que podem ser descritas como limites de somas de outras variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), com essa soma devidamente normalizada. Isto é, surgem de certas generalizações do Teorema Central do Limite (TCL). Sendo assim, podem também serem vistas como uma generalização do caso Gaussiano, que ocorre quando $\alpha = 2$, originando assim uma variável aleatória com distribuição Normal. As variáveis aleatórias α-estáveis com $0 < \alpha < 2$ são importantes em aplicações, pois permitem modelar situações com muito mais variação do que no caso Normal. Existem diversas definições equivalentes para uma variável α-estável. Aqui apresentamos duas delas, uma que remete intuitivamente ao TCL e outra que é mais utilizada em termos de manipulação dessas variáveis, sendo definida através da sua função característica.

Definição 2.18. Uma variável aleatória X é dita ter uma *distribuição estável* se ela possui um *domínio de atração*, isto é, se existe uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

e sequências de números reais positivos $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e de números reais $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tais que

$$\frac{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n}{d_n} + a_n \overset{d}{\Rightarrow} X \ , \tag{2.25}$$

onde $\overset{d}{\Rightarrow}$ significa convergência em distribuição.

Note que quando X é Gaussiana e a sequência $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é i.i.d. com variância finita, (2.25) é o enunciado do Teorema Central do Limite. As variáveis $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são ditas pertencer ao *domínio de atração normal* de X se $d_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$, para $\alpha \in (0, 2]$. No caso geral, elas são ditas pertencer ao *domínio de atração* de X, se $d_n = n^{\frac{1}{\alpha}} h(n)$, onde $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma *função de variação lenta no infinito*, isto é, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{h(ux)}{h(x)} = 1$, para todo $u > 0$.

Agora uma segunda definição que é equivalente à anterior, segundo Samorodnitsky e Taqqu (1994). Essa nos permite extrair facilmente diversas propriedades dessas distribuições.

Definição 2.19. Uma variável aleatória X é dita ter uma *distribuição estável* se existem parâmetros $0 < \alpha \leqslant 2$, $\sigma \geqslant 0$, $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$, e $\mu \in \mathbb{R}$ tais que sua função característica tem a seguinte forma. Para $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[e^{i\theta X}\right] = \begin{cases} \exp\left\{-\sigma^\alpha|\theta|^\alpha\left(1 - i\beta \text{sign}\,(\theta)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) + i\mu\theta\right\}, & \text{se } \alpha \neq 1, \\ \exp\left\{-\sigma|\theta|\left(1 + i\beta\frac{2}{\pi}\text{sign}\,(\theta)\ln(|\theta|)\right) + i\mu\theta\right\}, & \text{se } \alpha = 1. \end{cases} \tag{2.26}$$

O parâmetro α é chamado de *índice de estabilidade* e a função sign$\,(\cdot)$ é dada por

$$\text{sign}\,(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{se } \theta > 0, \\ 0, & \text{se } \theta = 0, \\ -1, & \text{se } \theta < 0. \end{cases} \tag{2.27}$$

Os parâmetros σ, β e μ são únicos. Por conta disso, iremos identificar uma distribuição α-estável com os parâmetros listados por $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ e escrever

$$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$$

para indicar que X possui tal distribuição. Aqui $\sim$ significa o mesmo que $\overset{d}{=}$ de igualdade em distribuição.

Observação 2.20: No geral, não existe uma fórmula fechada para a função densidade de uma variável aleatória α-estável, por isso trabalhamos apenas com a sua função característica. No entanto, existem três casos especiais de α em que uma fórmula fechada da função densidade é conhecida em termos de funções elementares. Como mencionado anteriormente, quando $\alpha = 2$, temos o caso Gaussiano $S_2(\sigma, 0, \mu) \sim \mathcal{N}(\mu, 2\sigma^2)$ em que

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \ , x \in \mathbb{R} \ . \tag{2.28}$$

Quando $\alpha = 1$, temos a *Distribuição de Cauchy*, $S_1(\sigma, 0, \mu) \sim \mathcal{C}(\sigma, \mu)$, valendo

$$X \sim \mathcal{C}(\sigma, \mu) \Longrightarrow f_X(x) = \frac{1}{\pi\sigma}\left(\frac{\sigma^2}{(x-\mu)^2+\sigma^2}\right), x \in \mathbb{R}\ . \tag{2.29}$$

finalmente quando $\alpha = \frac{1}{2}$, temos a *Distribuição de Lévy*, isto é, $S_{\frac{1}{2}}(\sigma, 1, \mu) \sim \mathcal{L}(\sigma, \mu)$, assim

$$X \sim \mathcal{L}(\sigma, \mu) \Longrightarrow f_X(x) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}}\left(\frac{e^{-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}}}{(x-\mu)^{\frac{3}{2}}}\right), x \in [\mu, \infty)\ . \tag{2.30}$$

Ainda existe um quarto caso em que a função de densidade é dada por funções hipergeométricas. Se $\alpha = \frac{3}{2}$, $S_{\frac{3}{2}}(\sigma, 0, \mu)$ tem *Distribuição de Holtsmark* (ver Karling et al. 2019). Quando $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, se $X \sim S_{\frac{3}{2}}(1, 0, 0)$, então

$$\begin{aligned} f_X(x) = {} & \frac{1}{\pi}\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) {}_2F_3\left(\frac{5}{12}, \frac{11}{12}; \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}; -\frac{4x^6}{729}\right) & (2.31)\\ & - \frac{x^2}{3\pi}\, {}_3F_4\left(\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}; \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{4}{3}; -\frac{4x^6}{729}\right) & (2.32)\\ & + \frac{7x^4}{81\pi}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) {}_2F_3\left(\frac{13}{12}, \frac{19}{12}; \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}; -\frac{4x^6}{729}\right), & (2.33) \end{aligned}$$

onde $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ é a função Gama e se $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$,

$${}_pF_q(a_1, \cdots, a_p; b_1, \cdots, b_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n}\frac{x^n}{n!}\ . \tag{2.34}$$

Sabemos que o parâmetro $\alpha \in (0, 2]$ é o índice de estabilidade da variável aleatória. Agora, seguem algumas das mais importantes propriedades sobre variáveis aleatórias α-estáveis que nos ajudam a entender melhor o papel dos outros três parâmetros que as definem. Todas essas propriedades podem ser encontradas na referência básica citada. Suas provas serão omitidas, mas todas são consequências da definição pela função característica.

Proposição 2.21. *Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias independentes com $X_i \sim S_\alpha(\sigma_i, \beta_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$. Então $X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, com*

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\ ,\ \beta = \frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}\ ,\ \mu = \mu_1 + \mu_2\ . \tag{2.35}$$

Proposição 2.22. *Seja $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ e a um número real. Então*

$$X + a \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a)\ . \tag{2.36}$$

Observação 2.23: Essa propriedade classifica $\mu \in \mathbb{R}$ como um *parâmetro de locação.*

Proposição 2.24. *Seja $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ e $a \neq 0$ um número real. Então*

$$\begin{aligned} &aX \sim S_\alpha(|a|\sigma, sign\,(a)\,\beta, a\mu), \quad se\ \alpha \neq 1\ ,\\ &aX \sim S_1(|a|\sigma, sign\,(a)\,\beta, a\mu - \frac{2}{\pi}a(\ln(|a|)\sigma\beta), \quad se\ \alpha = 1\ . \end{aligned} \tag{2.37}$$

Observação 2.25: Essa propriedade classifica $\sigma \geqslant 0$ como *parâmetro de escala.*

Proposição 2.26. *Se $\mu = 0$ e $0 < \alpha < 2$,*

$$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0) \iff -X \sim S_\alpha(\sigma, -\beta, 0) \ . \tag{2.38}$$

Proposição 2.27. *A variável $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ é simétrica se e somente se $\beta = 0$ e $\mu = 0$. A variável X é simétrica em torno de μ se e somente se $\beta = 0$.*

Observação 2.28: Essas duas propriedades classificam $\beta \in [-1, 1]$ como *parâmetro de assimetria.* No caso em que $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$ é simétrica, denotamos $X \sim S\alpha S$.

Para finalizar essa breve introdução das distribuições α-estáveis, seguem duas propriedades muito importantes que fundamentalmente diferenciam o caso $0 < \alpha < 2$ do caso Gaussiano ($\alpha = 2$). A primeira é a famosa propriedade de *cauda pesada*, que apresenta o lento decaimento das funções de distribuição acumulada dessas distribuições - o decaimento das funções $\mathbb{P}(X > \lambda)$ em λ. A segunda, como consequência direta da primeira, apresenta a falta dos momentos dessas distribuições de ordem maior ou igual a α.

Proposição 2.29. *Seja $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, com $0 < \alpha < 2$. Então,*

$$\begin{cases} \lim\limits_{\lambda \to \infty} \lambda^\alpha \mathbb{P}(X > \lambda) = C_\alpha \frac{1+\beta}{2} \sigma^\alpha \ , \\ \lim\limits_{\lambda \to \infty} \lambda^\alpha \mathbb{P}(X < -\lambda) = C_\alpha \frac{1-\beta}{2} \sigma^\alpha \ , \end{cases} \tag{2.39}$$

onde $C_\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante. Ou seja, as distribuições tem decaimento na ordem de $\lambda^{-\alpha}$.

Proposição 2.30. *Seja $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, com $0 < \alpha < 2$. Então,*

$$\begin{cases} \mathbb{E}[|X|^p] < \infty, & se\ 0 < p < \alpha \ , \\ \mathbb{E}[|X|^p] = \infty, & se\ p \geqslant \alpha \ . \end{cases} \tag{2.40}$$

Observação 2.31: Quando $1 < \alpha \leq 2$ vemos que a média da variável $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ está bem definida, e vale

$$\mathbb{E}[X] = \mu \ . \tag{2.41}$$

Da mesma forma, o parâmetro σ generaliza a variância de X, que só existe no caso Gaussiano de $\alpha = 2$. Essa proposição também nos mostra que não podemos trabalhar com propriedades de segunda ordem, como é usual no caso Gaussiano. Isso nos fará buscar alternativas que envolvam momentos de ordens menores do que α, conforme veremos no decorrer deste trabalho.

2.2.2 Processos Estocásticos Estáveis

Esta é uma seção curta, em que iniciamos definindo o que são processos estocásticos estáveis em um contexto geral, através de suas distribuições finito-dimensionais. Em seguida, damos um exemplo importante desses processos.

Definição 2.32. Um processo estocástico $\{X_t\}_{t\in T}$ é dito ser *α-estável* se todas as suas distribuições finito-dimensionais são α-estáveis. Equivalentemente, o processo é dito ser *α-estável simétrico* se todas as suas distribuições finito-dimensionais são α-estáveis simétricas.

O seguinte teorema ajuda a caracterizar esses processos.

Teorema 2.33. *Seja $\{X_t\}_{t\in T}$ um processo estocástico. O processo $\{X_t\}_{t\in T}$ é α-estável simétrico se e somente se para $t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$ e $b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$ todas as combinações lineares*

$$\sum_{i=1}^{n} b_i X_{t_i} \tag{2.42}$$

são α-estáveis simétricas.

O próximo exemplo é o equivalente ao movimento Browniano para o caso geral de $\alpha \in (0, 2]$, que se reduz ao mB quando $\alpha = 2$.

Exemplo 2.34. (Movimento de Lévy α-Estável). Um processo estocástico $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ é chamado de *Movimento de Lévy α-Estável Padrão* se satisfaz as seguintes propriedades:

i) O processo começa em 0:
$$\mathbb{P}\left(X_0 = 0\right) = 1 \; ; \tag{2.43}$$

ii) Os incrementos são independentes: se $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_k$
$$\mathbb{P}\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \in A_i, 1 \leqslant i \leqslant k\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \in A_i\right) \; ; \tag{2.44}$$

iii) Para $0 \leqslant s < t$, o incremento $X_t - X_s$ tem distribuição:
$$X_t - X_s \sim S_\alpha((t-s)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta, 0) \; , \tag{2.45}$$
para algum $\alpha \in (0, 2]$ e $\beta \in [-1, 1]$.

Observação 2.35: Note que o processo acima possui incrementos estacionários. Como observado anteriormente, é o mB, quando $\alpha = 2$. Se $\beta = 0$, é conhecido como *Movimento de Lévy $S\alpha S$*. Note também que esse processo é auto-similar com parâmetro $H = \frac{1}{\alpha}$, pois, pela Propriedade 2.24, para $c > 0$ e para todo $t \geqslant 0$

$$X_{ct} \stackrel{d}{=} c^{\frac{1}{\alpha}} X_t \; . \tag{2.46}$$

2.2.3 Integrais Estocásticas Estáveis

Nesta seção expomos uma breve introdução às integrais estocásticas estáveis, começando com a apresentação das medidas aleatórias α-estáveis e então integrais com respeito a essas medidas, seguindo a referência básica Samorodnitsky e Taqqu (1994). Apesar dessa construção exigir alguns detalhes técnicos, aqui apresentamos apenas as ideias principais, sugerindo ao leitor interessado a leitura da referência para maior detalhamento. Em seguida, alguns exemplos de processos estáveis definidos através de integrais estocásticas estáveis. Por fim, definimos os processos média móvel e sua relação com a estacionariedade.

A ideia intuitiva por trás de medidas aleatórias é que elas são processos estocásticos indexados por conjuntos. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $L^0(\Omega)$ o conjunto de todas as variáveis aleatórias definidas nesse espaço. Seja $(E, \mathcal{E}, m)$ um espaço de medida,

$$\beta : E \to [-1, 1] \tag{2.47}$$

uma função mensurável, e seja

$$\mathcal{E}_0 = \{A \in \mathcal{E} : m(A) < \infty\} \tag{2.48}$$

o subconjunto de $\mathcal{E}$ que contém os conjuntos de medida m finita.

Definição 2.36. Uma função de conjuntos, σ-aditiva e independentemente espalhada (definições a seguir)

$$M : \mathcal{E}_0 \to L^0(\Omega) \tag{2.49}$$

tal que, para cada $A \in \mathcal{E}_0$,

$$M(A) \sim S_\alpha\left((m(A))^{\frac{1}{\alpha}}, \frac{\int_A \beta(x)dm(x)}{m(A)}, 0\right) \tag{2.50}$$

é chamada uma *medida aleatória α-estável* em $(E, \mathcal{E})$ com *medida de controle m* e *intensidade de assimetria β*.

Independentemente espalhada significa que se $A_1, A_2, \cdots, A_k \in \mathcal{E}_0$ são disjuntos, então as variáveis aleatórias $M(A_1), M(A_2), \cdots, M(A_k) \in L^0(\Omega)$ são independentes. Já *σ-aditiva*, significa que se $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{E}_0$ são disjuntos e $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$, então

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i) \;\; q.t.p., \tag{2.51}$$

onde *q.t.p.* significa que a igualdade vale para *quase todo ponto*, o que é equivalente a dizer que vale a igualdade dessas variáveis aleatórias com probabilidade 1.

Exemplo 2.37. (Movimento de Lévy α-Estável como Medida Aleatória). Seja M uma medida aleatória α-estável definida em $([0, \infty), \mathcal{B})$, onde $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de Borel (gerada pelos abertos da topologia usual da reta) com medida de controle $dm(x) = dx$ de Lebesgue e intensidade de assimetria constante $\beta(x) = \beta,\ x \in [0, \infty)$. Seja, para $t \in [0, \infty)$,

$$X_t := M((0, t]) \ , \tag{2.52}$$

onde M está bem definida, pois $m((0, t]) = t < \infty$, para todo $t \geqslant 0$. É fácil ver que a definição de $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$ é equivalente ao Exemplo 2.34. Pois

i) O processo começa em 0:

$$\mathbb{P}\left(X_0 = 0\right) = \mathbb{P}\left(M((0, 0]) = 0\right) = 1 \ ; \tag{2.53}$$

ii) Os incrementos são independentes: se $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_k$, os intervalos $\{(t_{i-1}, t_i]\}_{1 \leq k \leq k}$ são disjuntos, logo

$$\{X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\}_{1 \leq k \leq k} \sim \{M((t_{i-1}, t_i])\}_{1 \leq k \leq k} \tag{2.54}$$

são independentes;

iii) Para $0 \leqslant s < t$, o incremento $X_t - X_s$ tem distribuição:

$$X_t - X_s \sim M((s, t]) \sim S_\alpha((t - s)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta, 0) \ . \tag{2.55}$$

□

Segue então a definição das integrais.

Definição 2.38. Seja M uma medida aleatória α-estável em $(E, \mathcal{E})$ com medida de controle m e intensidade de assimetria β. Para funções mensuráveis $f : E \to \mathbb{R}$ que satisfazem

$$\begin{cases} \int_E |f(x)|^\alpha dm(x) < \infty \ (\iff f \in L^\alpha(E, m)), & \text{se } \alpha \neq 1 \ , \\ \int_E |f(x)\beta(x)| \ln(|f(x)|) dm(x) < \infty, & \text{se } \alpha = 1 \ , \end{cases} \tag{2.56}$$

a integral $I(f)$ denotada por

$$I(f) = \int_E f(x) dM(x) \tag{2.57}$$

está bem definida. A construção dessas integrais estocásticas em relação às medidas aleatórias estáveis se dá na forma usual: primeiro definem-se as integrais para funções simples $\phi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$ como $\int_E \phi(x) dM(x) = \sum_{i=1}^n c_i M(A_i)$, depois prova-se a densidade de tais funções simples nas funções $f \in L^\alpha(E, m)$ e define-se a integral $I(f)$ acima como sendo o limite em probabilidade das integrais das funções simples que aproximam tal f.

Proposição 2.39. *Sob as condições acima, temos que $I(f) \sim S_\alpha(\sigma_f, \beta_f, \mu_f)$, com*

$$\sigma_f = \left(\int_E |f(x)|^\alpha dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} = ||f||_\alpha \ , \tag{2.58}$$

$$\beta_f = \frac{\int_E f(x)^{<\alpha>} \beta(x) dm(x)}{\int_E |f(x)|^\alpha dm(x)} \ , \tag{2.59}$$

$$\mu_f = \begin{cases} 0, & se \ \alpha \neq 1 \ , \\ -\frac{2}{\pi} \int_E f(x)\beta(x) \ln(|f(x)|) dm(x), & se \ \alpha = 1 \ , \end{cases} \tag{2.60}$$

onde $a^{<p>} = |a|^p sign(a)$ é a função potência com sinal. Em outras palavras, temos que a função característica de $I(f)$ é dada por

$$\mathbb{E}\left[\exp\{i\theta I(f)\}\right] =$$
$$\begin{cases} \exp\left\{-|\theta|^\alpha \int_E |f(x)|^\alpha \left(1 - i\beta(x) sign(\theta f(x)) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) dm(x)\right\}, & se \ \alpha \neq 1 \ , \\ \exp\left\{-|\theta| \int_E |f(x)| \left(1 + i\frac{2}{\pi}\beta(x) sign(\theta f(x)) \ln(|\theta f(x)|)\right) dm(x)\right\}, & se \ \alpha = 1 \ . \end{cases} \tag{2.61}$$

Demonstração. Veja proposição 3.4.1 em Samorodnitsky e Taqqu (1994). □

Observação 2.40: No que segue usaremos o espaço $E = \mathbb{R}$ ou $E = [0, \infty)$, σ-álgebra $\mathcal{E} = \mathcal{B}$ de Borel e medida $dm(x) = dx$ de Lebesgue. Note que a expressão (2.58) nos remete à norma clássica dos espaços L^α. Devido à isso, por questão de notação, usaremos

$$\sigma_f = \left(\int_E |f(x)|^\alpha dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} = ||f||_\alpha \ . \tag{2.62}$$

Note que, de acordo com a última definição e proposição, podemos definir um processo estocástico estável por sua *representação integral* da seguinte maneira: seja $\{f_t\}_{t\in T}$ uma família de funções mensuráveis tais que para cada $t \in T$, f_t satisfaz as condições da Definição 2.38 e M é uma medida aleatória α-estável com medida de controle m. Definimos o processo $\{X(t)\}_{t\in T}$ como

$$X(t) := \int_E f_t(x) dM(x) \ , t \in T \ . \tag{2.63}$$

Exemplo 2.41. (Movimento de Lévy Simétrico α-Estável como Integral Estocástica). Na representação apresentada acima, para $t \geqslant 0$, considere $f_t(x) = \mathbb{1}_{\{x \leqslant t\}}(x)$ e temos

$$X_t = \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{x\leqslant t\}}(x) dM(x) = \int_0^t dM(x) = M((0,t]) \ , \tag{2.64}$$

onde M é uma medida aleatória $S\alpha S$ (parâmetro $\beta = 0$) em $[0, \infty)$ com medida de controle $dm(x) = dx$ de Lebesgue. Então $X_0 = 0$ com probabilidade 1, e para $0 \leqslant s < t$,

$$X_t - X_s = \int_s^t dM(x) = M((s,t]) \sim S_\alpha(|t-s|^{\frac{1}{\alpha}}, 0, 0). \tag{2.65}$$

Além disso, para $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, temos que

$$(X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) = \left(\int_{t_1}^{t_2} dM(x), \int_{t_2}^{t_3} dM(x), \cdots, \int_{t_{n-1}}^{t_n} dM(x) \right) \tag{2.66}$$

são independentes, pois pelo teorema 3.5.3 de Samorodnitsky e Taqqu (1994), uma coleção de integrais estocásticas estáveis é independentes se, e somente se, os suportes dos seus respectivos integrandos são disjuntos - alternativamente, a medida aleatória M é independentemente espalhada. Logo, vemos que $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$ é o Movimento de Lévy $S\alpha S$ definido no Exemplo 2.34 com $\beta = 0$. □

Finalizamos essa seção apresentando como exemplo de integral estocástica estável os processos *média móvel* que, como veremos, são sempre estacionários.

Exemplo 2.42. (Média Móvel). Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função mensurável satisfazendo $||f||_\alpha < \infty$, para $0 < \alpha \leqslant 2$. Defina, para $t \in \mathbb{R}$,

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - x) dM(x) \ , \tag{2.67}$$

onde M é $S\alpha S$ com medida de controle m. Um processo da forma (2.67) é chamado *processo $S\alpha S$ média móvel* e a função f é chamada de *função núcleo*. De acordo com a representação (2.63), temos $f_t(x) = f(t - x)$. O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é estacionário, pois como uma distribuição $S\alpha S$ é determinada unicamente por σ, temos que para quaisquer $t_1, t_2, \cdots, t_d, h, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_d \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{d} \theta_i X_{t_i + h} \right\|_\alpha^\alpha &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{d} \theta_i f(t_i + h - x) \right|^\alpha dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{d} \theta_i f(t_i - y) \right|^\alpha dy \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{d} \theta_i X_{t_i} \right\|_\alpha^\alpha . \end{aligned} \tag{2.68}$$

Logo, pelo dispositivo de Cramer-Wold o processo é estacionário. Veja Billingsley (1995). □

3 Processos $S\alpha S$ Fracionariamente Integrados e Longa Dependência

Este capítulo complementa o anterior no intuito de apresentar ao leitor a base para a leitura do artigo Feltes e Lopes (2020) no Anexo A. No entanto, esse capítulo é mais voltado ao caso específico dos processos e das ferramentas que são mencionadas no artigo. Novamente alguns resultados são apresentados com suas provas omitidas, referenciadas ao leitor interessado. Como vimos anteriormente, os processos auto-similares têm grande relação com a propriedade de longa dependência, exemplificado com o mBf. Como veremos nesse capítulo, existe também uma relação entre auto-similaridade e integração fracionária. Apresentamos brevemente as integrais e derivadas fracionárias de Riemann-Liouville, segundo Samko et al. (1993) e apresentamos os processos que são tratados no artigo. Explicitamos a relação entre as integrais fracionárias e o movimento estável fracionário linear (MEFL), que será aqui também brevemente apresentado. O último aparece como exemplo de processo estocástico estável com a propriedade de longa dependência, logo após uma medida própria de dependência para esses processos e definição de longa dependência serem apresentadas.

3.1 Processos $S\alpha S$ Fracionariamente Integrados

Como o próprio nome do capítulo sugere, aqui estamos interessados em questões como integração e derivação, mas não no sentido usual e sim no sentido fracionário, onde definimos o que significa integrar e derivar na ordem de $d \in (0,1)$. Com isso, definiremos os chamados *processos fracionariamente integrados.*

3.1.1 Integrais Fracionárias de Riemann-Liouville

Definição 3.1. Seja $d \in (0,1)$. Para $f \in L^p(\mathbb{R})$, onde $1 \leqslant p < \frac{1}{d}$, definimos

$$(I_-^d f)(x) = \frac{1}{\Gamma(d)} \int_x^\infty f(t)(t-x)^{d-1} dt \tag{3.1}$$

e

$$(I_+^d f)(x) = \frac{1}{\Gamma(d)} \int_{-\infty}^x f(t)(x-t)^{d-1} dt \ , \tag{3.2}$$

onde $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ é a função Gamma. As integrais acima estão bem definidas, e são chamadas *integrais fracionárias de Riemann-Liouville à direita e à esquerda de ordem* d, respectivamente.

Por outro lado, a diferenciação fracionária foi introduzida como a operação inversa da integração fracionária. Considere $d \in (0,1)$, $1 \leqslant p < \frac{1}{d}$ e denote por $I^d_{\pm}(L^p)$ a classe de funções $\phi \in L^p$ que podem ser representadas como uma integral fracionária $I^d_{\pm}$ de alguma função $f \in L^p$.

Definição 3.2. Seja $\phi \in I^d_{\pm}(L^p)$, então existe uma única $f \in L^p$ tal que $\phi = I^d_{\pm} f$ e f é precisamente a *derivada fracionária de Riemann-Liouville pela direita e pela esquerda de ordem* d, respectivamente, definidas por

$$(\mathcal{D}^d_{-}\phi)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-d)}\frac{d}{dx}\int_x^{\infty} \phi(t)(t-x)^{-d}dt \tag{3.3}$$

e

$$(\mathcal{D}^d_{+}\phi)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-d)}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} \phi(t)(x-t)^{-d}dt\ , \tag{3.4}$$

onde $\frac{d}{dx}$ denota a operação usual de diferenciação em relação à variável x e a convergência das integrais na singularidade $t = x$ vale pontualmente para quase todo x, se $p = 1$, e no sentido L^p se, $p > 1$. Ver Samko et al (1993).

Exemplo 3.3. (Representação Média Móvel do Movimento Browniano Fracionário). Segundo Samorodnitsky e Taqqu (1994), para $H \in (0,1)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, o mBf possui a seguinte representação em termos de um processo média móvel (veja Definição 2.42)

$$B_H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a\left[(t-x)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-x)_+^{H-\frac{1}{2}}\right] + b\left[(t-x)_-^{H-\frac{1}{2}} - (-x)_-^{H-\frac{1}{2}}\right] dM(x)\ , \tag{3.5}$$

onde $u_+ = \max\{u, 0\}$ é a parte positiva de u, $u_- = \max\{-u, 0\}$ é a parte negativa de u e M é uma medida $S2S$ com medida de controle $dm(x) = dx$ de Lebesgue, isto é, $B_t = \frac{M([0,t])}{\sqrt{2}}$ é o mB definido no Exemplo 2.7. Note a relação entre os parâmetros de integração e de auto-similaridade $d = H - \frac{1}{2}$. Tomando $a = \frac{1}{\Gamma(H+\frac{1}{2})} = \frac{1}{\Gamma(d+1)}$ e $b = 0$ em (3.5), temos a relação

$$B_H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (I^d_{-}\mathbf{1}_{[0,t]})(x) dM(x)\ , \tag{3.6}$$

pois

$$\frac{1}{\Gamma(d)}\int_x^{\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(s)(s-x)^{d-1}ds = \frac{1}{\Gamma(d+1)}[(t-x)_+^d - (-x)_+^d]\ , \tag{3.7}$$

onde para $t < 0$, $\mathbf{1}_{[0,t]}$ é interpretado como $-\mathbf{1}_{[t,0]}$. Essa relação também valerá para o MEFL e será fundamental na Seção 3 do artigo Feltes e Lopes (2020).

Demonstração. Para mostrar a expressão (3.7), vamos considerar $t > 0$ e três casos para x. Se $x < 0$, temos

$$\int_x^{\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(s)(s-x)^{d-1}ds = \int_0^t (s-x)^{d-1}ds = \frac{(t-x)^d - (-x)^d}{d} = \frac{(t-x)_+^d - (-x)_+^d}{d}\ .$$

Se $x \in [0,t]$, temos

$$\int_x^\infty \mathbf{1}_{[0,t]}(s)(s-x)^{d-1}ds = \int_x^t (s-x)^{d-1}ds = \frac{(t-x)^d - 0}{d} = \frac{(t-x)_+^d - (-x)_+^d}{d} .$$

Por fim, se $x > t$, temos

$$\int_x^\infty \mathbf{1}_{[0,t]}(s)(s-x)^{d-1}ds = 0 = \frac{(t-x)_+^d - (-x)_+^d}{d} .$$

Já que $d\,\Gamma(d) = \Gamma(d+1)$, o resultado segue. Para $t < 0$, a prova é análoga considerando $\mathbf{1}_{[0,t]}(s) = -\mathbf{1}_{[t,0]}(s)$. Para mais detalhes, veja Pipiras e Taqqu (2000). □

Observação 3.4: Vimos que o mBf foi definido anteriormente em função de sua estrutura de autocovariância (Exemplo 2.17). Essa representação média móvel é importante, pois é através de uma generalização da mesma que definimos o MEFL na Definição 2.63. Note que como a propriedade de longa dependência ocorre quando $\frac{1}{2} < H < 1$, equivalentemente podemos dizer que ela ocorre quando $0 < d < \frac{1}{2}$. A partir de agora passamos a utilizar mais o parâmetro d de integração fracionária do que o parâmetro H de Hurst.

3.1.2 Definições e Propriedades

Nesta seção definimos o que são processos estocásticos α-estáveis fracionariamente integrados no geral e particularmente o caso de processos estocásticos α-estáveis média móvel fracionariamente integrados. A idéia por trás disso de definirmos tais processo é de que quando temos um processo definido em sua representação integral com uma função núcleo de *curta memória*, isto é, de rápido decaimento, obtemos um processo de longa memória substituindo esse núcleo por sua respectiva integral fracionária (veja Samorodnitsky, 2006 e Marquardt, 2006). Essa é a ideia usada na Seção 4 do artigo Feltes e Lopes (2020).

Definição 3.5. Sejam $d \in (0,1)$ e $\{g_t\}_{t\in T}$ uma família de funções mensuráveis tais que para cada $t \in T$, $g_t \in L^1(\mathbb{R})$ e $I_-^d g_t$ está bem definida e satisfaz as condições da Definição 2.38, onde M é uma medida aleatória α-estável com índice de estabilidade $0 < \alpha \leq 2$ e medida de controle m. Definimos o processo $\{X_d(t)\}_{t\in T}$ como

$$X_d(t) := \int_E (I_-^d g_t)(x)dM(x)\ , t \in T\ . \tag{3.8}$$

Esse processo é chamado de *processo estocástico α-estável fracionariamente integrado*. A definição utilizando a integral fracionária I_+^d é análoga.

Apenas traduzindo a Proposição 2.39, temos o seguinte enunciado.

Proposição 3.6. *Sob as condições da Definição 3.5, temos que $X_d(t) \sim S_\alpha(\sigma_t, 0, 0)$, com*

$$\sigma_t = \left(\int_E |(I_-^d g_t)(x)|^\alpha dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\ . \tag{3.9}$$

Em outras palavras, temos que a função característica de $X_d(t)$ é dada por

$$\mathbb{E}\left[\exp\{i\theta X_d(t)\}\right] = \exp\left\{-|\theta|^\alpha \int_E |(I_-^d g_t)(x)|^\alpha dm(x)\right\} . \tag{3.10}$$

Observação 3.7: Na Seção 3 do artigo Feltes e Lopes (2020), tomando $1 < \alpha < 2$, o espaço $E = \mathbb{R}$ e a medida de controle $dm(x) = dx$ de Lebesgue, impomos simples condições sobre a família de núcleos $\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ para que o processo $\{X_d(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ esteja bem definido, ou seja, satisfaça as condições da Definição 3.5.

Para obtermos um processo que sempre é estacionário, utilizamos os processos média móvel.

Definição 3.8. Sejam $d \in (0,1)$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$ tais que $I_-^d g$ está bem definida e satisfaz as condições do Exemplo 2.42, onde M é uma medida aleatória α-estável com índice de estabilidade $0 < \alpha \leq 2$ e medida de controle m. Definimos o processo $\{Y_d(t)\}_{t\in T}$ como

$$Y_d(t) := \int_E (I_-^d g)(t-x) dM(x) \ , t \in T \ . \tag{3.11}$$

Esse processo é chamado de *processo estocástico α-estável média móvel fracionariamente integrado*. A definição utilizando a integral fracionária I_+^d é análoga.

Observação 3.9: Na Seção 4 do artigo Feltes e Lopes (2020), tomando $1 < \alpha < 2$, o espaço $E = \mathbb{R}$ e a medida de controle $dm(x) = dx$ de Lebesgue, impomos simples condições sobre a função de núcleo g para que o processo $\{Y_d(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ esteja bem definido, ou seja, satisfaça as condições do Exemplo 2.42. Mostramos também que se o núcleo for de curta memória - ter o decaimento controlado por uma exponencial - o processo possui a propriedade de longa dependência, utilizando a tecnologia definida na seção seguinte.

3.2 Longa Dependência para Processos α-Estáveis

O foco dessa seção se dá ao fato de que para os processos $S\alpha S$ com os quais estamos trabalhando, a função de autocovariância não está definida. Portanto, a medida de dependência tratada nesta seção é uma generalização daquela associada à função de autocovariância (tratada na Definição 2.13), no sentido de que conseguimos propriedades semelhantes e quando $\alpha = 2$ é possível relacionar as duas. Por fim definimos o movimento estável fracionário linear, cujo processo de incrementos será um exemplo de processo α-estável com a propriedade de longa dependência, definida segundo a medida apresentada a seguir.

3.2.1 Medida de Dependência

Utilizando-se da existência e boa definição da função característica para processos α-estáveis, consideramos a seguinte medida de dependência, de acordo com vários autores

Astrauskas et al (1991); Lévy e Taqqu (1991); Maejima e Yamamoto (2003); Magdziarz e Weron (2007); Magdziarz (2007). Seja $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ um processo estocástico $S\alpha S$ estacionário. Para $\theta_1, \theta_2, t \in \mathbb{R}$, seja

$$\begin{aligned} r(t) &:= r(\theta_1, \theta_2; t) \\ &:= \mathbb{E}\Big[\exp\{i(\theta_1 X(t) + \theta_2 X(0))\}\Big] - \mathbb{E}\Big[\exp\{i\theta_1 X(t)\}\Big]\mathbb{E}\Big[\exp\{i\theta_2 X(0)\}\Big] . \end{aligned} \tag{3.12}$$

Note que a medida $r(\theta_1, \theta_2; t)$ é tão somente a diferença entre a função característica conjunta do par $(X(t), X(0))$ e o produto das funções características de $X(t)$ e $X(0)$. Portanto, se o processo $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é independente, $r(\theta_1, \theta_2; t) = 0$. Outra medida importante é, também para $\theta_1, \theta_2, t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} I(t) &:= I(\theta_1, \theta_2; t) \\ &:= -\log\Bigg(\mathbb{E}\Big[\exp\{i(\theta_1 X(t) + \theta_2 X(0))\}\Big]\Bigg) \\ &\quad + \log\Bigg(\mathbb{E}\Big[\exp\{i\theta_1 X(t)\}\Big]\Bigg) + \log\Bigg(\mathbb{E}\Big[\exp\{i\theta_2 X(0)\}\Big]\Bigg) . \end{aligned} \tag{3.13}$$

Que é conhecida como *codiferença generalizada*, veja Samorodnitsky e Taqqu (1994). Segundo os autores citados, existe uma relação muito importante entre as funções $r(\theta_1, \theta_2; t)$ e $I(\theta_1, \theta_2; t)$. Definindo

$$\begin{aligned} K(\theta_1, \theta_2; t) &= \mathbb{E}\Big[\exp\{i\theta_1 X(t)\}\Big]\mathbb{E}\Big[\exp\{i\theta_2 X(0)\}\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\exp\{i\theta_1 X(0)\}\Big]\mathbb{E}\Big[\exp\{i\theta_2 X(0)\}\Big] =: K(\theta_1, \theta_2) =: K , \end{aligned} \tag{3.14}$$

que não depende de t já que $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é estacionário. A relação entre r e I é dada por

$$r(\theta_1, \theta_2; t) = K(\theta_1, \theta_2; t)\Big(e^{-I(\theta_1, \theta_2; t)} - 1\Big) . \tag{3.15}$$

Portanto, é possível mostrar que se $I(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, então $r(t) \sim -KI(t)$ quando $t \to \infty$, o que significa que essas duas funções são assintoticamente iguais. Note que se o processo é Gaussiano ($\alpha = 2$), a função $-I(1, -1; t)$ coincide com a função de autocovariância definida na Definição 3.8. A função $r(t)$ tem se provado ser uma ferramenta própria para descrever a estrutura de dependência de processos α-estáveis e tem sido usada por diversos autores, como aqueles citados anteriormente. Além disso, ela é usada por Maruyama (1970) para dar condições necessárias e suficientes para processos estacionários e infinitamente divisíveis possuirem a propriedade de *mixing* - propriedade presente no estudo da *teoria ergódica*, que basicamente trata de processos estocásticos que possuem uma medida invariante perante alguma transformação, que pode ser vista como um *sistema dinâmico*, ver Lopes e Lopes (2019). Samorodnitsky e Taqqu (1994) também notam que a função $I(t)$ pode ser usada para mostrar que dois processos são diferentes, mostrando-se que suas respectivas funções são assintoticamente diferentes. Sabendo que as duas funções são assintoticamente iguais, podemos usar a função que mais nos facilita as contas, que no caso é a função $I(t)$, pois como as funções características das α-estáveis são dadas em termos de uma exponencial, obtemos uma expressão simplificada.

Seja $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ um processo $S\alpha S$ estacionário dado em sua representação integral, como em (2.63), com $E = \mathbb{R}$ e $dm(x) = dx$. Pela Propriedade 2.39, obtemos:

$$I(\theta_1, \theta_2; t) = -\int_{\mathbb{R}} |\theta_1 f_t(x) + \theta_2 f_0(x)|^\alpha dx + \int_{\mathbb{R}} |\theta_1 f_t(x)|^\alpha dx + \int_{\mathbb{R}} |\theta_2 f_0(x)|^\alpha dx \,. \tag{3.16}$$

Por essa expressão, vemos a conveniência de trabalhar com tal medida de dependência. Lembrando que obtendo o comportamento assintótico de $I(\theta_1, \theta_2; t) \to 0$, quando $t \to \infty$, obtemos essa mesma taxa de convergência para a função $r(\theta_1, \theta_2; t)$. Portanto, essa é a tecnologia que usaremos para investigar a propriedade de longa dependência para os processos aqui estudados. Nessa linha, definimos a propriedade de longa dependência para processos α-estáveis.

Definição 3.10. Para $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ estacionário, como definido acima, e $r(t)$ como definido em (3.12), dizemos que o processo $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ possui a *propriedade de longa dependência* ou *longa memória* se existe um $\theta \in (0,1)$ e uma constante $c_r > 0$ tais que $r(t)$ satisfaz

$$\lim_{t\to\infty} |r(t)| \frac{t^\theta}{c_r} = 1 \,, \tag{3.17}$$

isto é, equivalentemente,

$$|r(t)| \sim c_r t^{-\theta} \,. \tag{3.18}$$

Observação 3.11: Note que essa definição é uma generalização intuitiva e equivalente à Definição 2.14, pois é possível utilizá-la também para a função de autocovariância, visto que

$$|r(1,-1;t)| \sim |KI(1,-1;t)| \sim |K\text{Cov}(X(t), X(0))| = |K\gamma_X(t)| \tag{3.19}$$

quando $\alpha = 2$, $\theta_1 = 1$ e $\theta_2 = -1$, onde $\phi(n) \sim \psi(n)$ significa que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\phi(n)}{\psi(n)} = 1$.

3.2.2 Movimento Estável Fracionário Linear (MEFL)

Assim como o movimento de Lévy $S\alpha S$ é o análogo ao movimento Browniano para $0 < \alpha < 2$, e se reduz ao caso do mB quando $\alpha = 2$, o movimento estável fracionário linear é o análogo ao movimento Browniano fracionário para o caso de α geral. Analogamente ao caso Gaussiano, aqui teremos a mesma relação entre os parâmetros de auto-similaridade e integração fracionária, dada por $d = H - \frac{1}{\alpha}$. De acordo com Samorodnitsky e Taqqu (1994), o MEFL possui a seguinte representação média móvel.

Definição 3.12. Sejam $0 < \alpha \leq 2$, $0 < H < 1$, $H \neq \frac{1}{\alpha}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $|a| + |b| > 0$. Para $t \in \mathbb{R}$,

$$M_{\alpha,H}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} a\left[(t-x)_{+}^{H-\frac{1}{\alpha}} - (-x)_{+}^{H-\frac{1}{\alpha}}\right] + b\left[(t-x)_{-}^{H-\frac{1}{\alpha}} - (-x)_{-}^{H-\frac{1}{\alpha}}\right] dM(x)\ , \quad (3.20)$$

onde $u_+ = \max\{u, 0\}$ e $u_- = \max\{-u, 0\}$ são as partes positivas e negativas de u, respectivamente, e M é uma medida $S\alpha S$ com medida de controle $dm(x) = dx$ de Lebesgue. O processo $\{M_{\alpha,H}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é chamado de *movimento estável fracionário linear.*

Observação 3.13: Usando o parâmetro de integração fracionária d e omitindo o parâmetro α para simplificar a notação, tomando $a = \frac{1}{\Gamma(H+\frac{1}{2})} = \frac{1}{\Gamma(d+1)}$ e $b = 0$ em (3.20), obtemos a relação

$$M_d(t) = \frac{1}{\Gamma(d+1)} \int_{-\infty}^{\infty} (t-x)_{+}^{d} - (-x)_{+}^{d}\ dM(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (I_{-}^{d}\mathbf{1}_{[0,t]})(x) dM(x)\ , \quad (3.21)$$

pois, novamente,

$$\frac{1}{\Gamma(d)} \int_{x}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(s)(s-x)^{d-1} ds = \frac{1}{\Gamma(d+1)}[(t-x)_{+}^{d} - (-x)_{+}^{d}]\ , \quad (3.22)$$

já que $d\,\Gamma(d) = \Gamma(d+1)$. Como mencionado anteriormente, essa relação será fundamental na teoria desenvolvida na Seção 3 do artigo Feltes e Lopes (2020).

Observação 3.14: Assim como mencionado anteriormente, o MEFL se reduz ao caso do mBf quando tomamos $\alpha = 2$. Além disso, ele é auto-similar com parâmetro $H = d + \frac{1}{\alpha}$ e possui incrementos estacionários. Portanto, analogamente ao caso Gaussiano, dizemos que os incrementos do MEFL possuem a propriedade de longa dependência quando $\frac{1}{\alpha} < H < 1$, ou, consequentemente, quando $0 < d < 1 - \frac{1}{\alpha}$. Dito isso, como estamos interessados em processos com a propriedade de longa dependência, focaremos no caso $1 < \alpha < 2$, pois só nesse intervalo podemos encontrar tal propriedade.

Seguindo a discussão acima, Astrauskas et al. (1991) estudam o comportamento assintótico do processo incrementos do MEFL. Isto, é, para $|t| \to \infty$, o comportamento do processo $\{Y_{\alpha,H}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ dado por

$$Y_{\alpha,H}(t) := M_{\alpha,H}(t+1) - M_{\alpha,H}(t)\ ,\ t \in \mathbb{R}, \quad (3.23)$$

onde $\{M_{\alpha,H}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é o MEFL da Definição 3.12.

Teorema 3.15. *Seja $\{Y_{\alpha,H}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ o processo incrementos do MEFL como acima. Para $1 < \alpha < 2$ e $1 - \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} < H < 1$, $H \neq \frac{1}{\alpha}$, seja a função $r(t)$ em (3.12) definida para $Y_{\alpha,H}(t)$. Então*

$$|r(t)| \sim AB|t|^{\alpha H - \alpha}\ , \quad (3.24)$$

quando $|t| \to \infty$, onde $A, B > 0$ são constantes que dependem dos parâmetros α e H.

Demonstração. Ver Astrauskas et al. (1991). □

Logo, o processo $\{Y_{\alpha,H}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ de incrementos do MEFL possui a propriedade de longa dependência, segundo a Definição 3.10, quando $1 < \alpha < 2$ e $\frac{1}{\alpha} < H < 1$. De fato, vemos que $\frac{1}{\alpha} < H < 1$ implica $1 - \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} < H < 1$, pois $1 - \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} < \frac{1}{\alpha} \iff \alpha(\alpha-2) < 0$, que vale pois $1 < \alpha < 2$. Portanto, vale o Teorema 3.15 e temos

$$|r(t)| \sim AB|t|^{\alpha H-\alpha}\ , \tag{3.25}$$

com $-1 < \alpha H - \alpha < 0$, pois $\frac{1}{\alpha} < H < 1$. □

Para concluir essa exposição dos conceitos básicos, observamos que iremos mudar a notação no artigo. O motivo para isso é que aquela é a notação amplamente usada na literatura. A escolha de tratar de medidas aleatórias nesses capítulos iniciais foi para poder dar uma introdução mais formal à construção das integrais estocásticas α-estáveis.

Observação 3.16: Como definido na seção anterior, para integração estocástica, considere que quando dizemos que $\{L_\alpha(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é um processo estocástico $S\alpha S$ com medida de controle m, estamos nos referindo ao mesmo sentido de uma medida aleatória $S\alpha S$ com medida de controle $dm(x) = dx$ de Lebesgue. Então vale que para $s < t$, $L_\alpha(t) - L_\alpha(s) = M((s,t])$ e que para $f \in L^\alpha$, as expressões

$$\int_E f(x)dL_\alpha(x) = \int_E f(x)dM(x) \tag{3.26}$$

têm o mesmo sentido, como no Exemplo 2.37, em que temos $L_\alpha(t) := M((0,t])$.

4 Conclusão

A conclusão desse trabalho leva em consideração toda a teoria desenvolvida no artigo anexado. Dito isso, acreditamos ter cumprido os objetivos do trabalho, que eram definir processos estocásticos α-estáveis com a propriedade de longa dependência. Para isso, uma longa caminhada se iniciou. Primeiro, adaptando as ideias de Pipiras e Taqqu (2000) e Marquardt (2006) construimos as integrais estocásticas em relação ao movimento estável fracionário linear. Além disso, provamos uma representação extremamente útil dos processos estocásticos α-estáveis fracionariamente integrados como integrais estocásticas em relação ao MEFL. Essa representação, por utilizar um núcleo de curta memória, ou de rápido decaimento, permite fazer algoritmos de simulações mais eficientes e baratos, visto que a representação integral usual do processo apresenta um núcleo de longa memória, que possui um lento decaimento, tornando os algoritmos mais lentos e caros.

Para avaliarmos a estrutura de longa dependência, utilizamos uma função muito importante, amplamente utilizada na literatura e que apresenta diversas propriedades interessantes, como citadas no texto. Note que o decaimento da função $r(t)$ dos processos estocásticos α-estáveis média móvel fracionariamente integrados, aqui construídos, possuem o mesmo expoente de decaimento do que o próprio MEFL, o que reforça mais ainda a representação pela integral estocástica em relação ao MEFL. Intuitivamente, o que está acontecendo com essas integrais são aproximações de combinações lineares de incrementos do MEFL, que já sabemos possuirem a propriedade de longa dependência, como apresentados no Capítulo 3. Portanto, essa similaridade no comportamento assintótico da medida de dependência para esses processos é um tanto quanto esperada.

Em resumo, assumindo simples condições em uma função núcleo g, que são $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\alpha(\mathbb{R})$, mostramos que o processo estocástico α-estável média móvel fracionariamente integrado com ele construído está bem definido e possui a propriedade de longa dependência quando a função g tem decaimento controlado por uma função exponencial. Além disso, vale a representação citada acima com integração estocástica em relação ao MEFL em que a própria função g aparece como núcleo. Aqui, há uma troca do parâmetro d de integração fracionária entre o integrando e o integrador, relembrando a conhecida fórmula de integração por partes do cálculo tradicional.

Referências

Applebaum, D. (2004) *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press.

Astrauskas, A., Lévy, J.B. e Taqqu, M.S. (1991). "The asymptotic dependence structure of the linear fractional Lévy motion". *Litovskii Matematicheskii Sbornik*, Vol **31**(1), 3-28.

Beran, J., Feng, Y., Ghosh, S. e Kulik, R. (2013). *Long-Memory Processes - Probabilistic Properties and Statistical Methods*. Berlin: Springer-Verlag.

Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York: Wiley.

Billingsley, P. (2013). *Convergence of Probability Measures*. Wiley Series in Probability and Statistics. New York: Wiley.

James, B. R. (2015). *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Rio de Janeiro: IMPA.

Karatzas, I. e Shreve, S.E. (1991). *Brownian motion and stochastic calculus. Second edition*. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag.

Karling, M.J., Lopes, S.R.C. e Souza, R.M. (2019). "A Bayesian Approach for Estimating the Parameters of an α-Stable Distribution". Submetido.

Lévy, J.B. e Taqqu, M.S. (1991). "A Characterization of the asymptotic behavior of stationary stable processes", Em: Stable Processes and Related Topics, Cambanis, S., Samorodnitsky, G. e M.S. Taqqu, eds., Birkhäuser, Boston, 181-198.

Lopes, A.O. e Lopes, S.R.C. *Introdução aos Processos Estocásticos para estudantes de Matemática*. Disponível em http://mat.ufrgs.br/ til alopes/pub3/Livro-ProcEst.pdf, Acessado em 11/02/2020.

Maejima, M. e Yamamoto, K. (2003). "Long-Memory Stable Ornstein-Uhlenbeck Processes". *Electron. J. Probab*, Vol. **8**(19), 1-18.

Magdziarz, M. e Weron, A. (2007). "Fractional Langevin equation with alpha-stable noise. A link to fractional ARIMA time series". *Studia Mathematica*, Vol. **181**(1), 47-60.

Magdziarz M. (2007). "Short and long memory fractional Ornstein-Uhlenbeck alpha-stable processes". *Stochastic Models*, Vol. **23**(3), 451-473.

Maruyama, G. (1970). "Infinitely divisible processes". *Theory Probab. Appl.*, Vol. **15**, 13-23.

Marquardt, T. (2006). "Fractional Lévy process with an application to long memory moving average processes". *Bernoulli*, Vol. **12**(6), 1099-1126.

Oliveira, A.N. (2007). *A métrica de Skorohod*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Pipiras, V. e Taqqu, M. (2000). "Integration questions related to fractional Brownian motion". *Probab. Theory Relat. Fields*, Vol **118**, 251-291.

Pipiras, V. e Taqqu, M. (2017). *Long-Range Dependence and Self-Similarity.* Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press.

Revuz, D. e Yor, M. (1999). *Continuous martingales and Brownian motion. Third edition.* Fundamental Principles of Mathematical Sciences. Berlin: Springer-Verlag.

Samko, S.G., Kilbas, A.A. e Marichev, O.I. (1993). *Fractional Integrals and Derivatives.* Lausanne: Gordon and Breach.

Samorodnitsky, G. e Taqqu, M.S. (1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes.* New York: Chapman & Hall.

Samorodnitsky, G. (2006). *Long Range Dependence.* Foundation and Trends in Stochastic Systems. Vol **1**(3), 163-257.

Anexo A – Artigo Feltes e Lopes (2020)

Fractionally Integrated Moving Average Stable Processes With Long-Range Dependence

G.L. Feltes and S.R.C. Lopes ‡

Mathematics and Statistics Institute
Federal University of Rio Grande do Sul
Porto Alegre - RS - Brazil

March 13, 2020

Abstract

Long memory processes driven by Lévy noise with finite second order moments have been well studied in the literature. They form a very rich class of processes presenting an autocovariance function which decays like a power function. Here, we study a class of Lévy process with infinite second order moments: the α-stable processes. We consider fractional integration operators and, analogously to the well-known Gaussian case, we relate these processes with the fractional Brownian motion's stable counterpart, the so-called linear fractional stable motion. Finally, we show its property of long-range dependency.
Keywords: Fractionally Integrated Moving Average Stable Processes, Long-Range Dependence, Linear Fractional Stable Motion.

Mathematical Subject Classification (2010). Primary 62H20, 60G10, 62M10, 62E10; Secondary 54E99.

1 Introduction

In this work we are interested in fractionally integrated stable processes and its property of long-range dependence (LRD) or long memory. There are many interesting applications of such processes throughout the literature (see Samorodnitsky, 2006 for an intuitive and historical introduction). This property presents a phenomena in which some proper measure of the process' dependence structure - usually the autocovariance when defined - behaves like a power function, having a slow decay. Slow in the sense that the correspondent sum will diverge (power function with exponent between $(-1, 0)$). Linear fractional stable motion (LFSM) is a generalization of the well-known fractional Brownian motion (fBm) to the α-stable case. Accordingly to Samorodnitsky and Taqqu (1994), it has the following moving average representation. For $0 < \alpha \leq 2$, $0 < H < 1$, $H \neq \frac{1}{\alpha}$ and $a, b \in \mathbb{R}$ such that $|a| + |b| > 0$,

$$M_{\alpha,H}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a\left[(t-x)_+^{H-\frac{1}{\alpha}} - (-x)_+^{H-\frac{1}{\alpha}}\right] + b\left[(t-x)_-^{H-\frac{1}{\alpha}} - (-x)_-^{H-\frac{1}{\alpha}}\right] dL_\alpha(x) \,, \quad (1.1)$$

‡Corresponding author. E-mail: silvia.lopes@ufrgs.br

for $t \in \mathbb{R}$, where $u_+ = \max\{u, 0\}$ and $u_- = \max\{-u, 0\}$ are the positive and negative part of u, respectively, and $\{L_\alpha(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ is a $S\alpha S$ process with Lebesgue control measure. The process $\{M_{\alpha,H}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ is self-similar with Hurst parameter H and it has stationary increments. When $\alpha = 2$, it reduces to the fBm ($M_{2,H}(\cdot) := B_H(\cdot)$), which has the following autocovariance asymptotic behavior of its increment process $Y(t) := B_H(t+1) - B_H(t)$ (see Samorodnitsky and Taqqu, 1994)

$$\mathrm{Cov}(Y(0), Y(t)) \sim H(2H-1)t^{2H-2} \quad . \tag{1.2}$$

So when $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ the increment process has LRD, because $-1 < 2H - 2 < 0$. Analogously to the fBm case, when $1 < \alpha < 2$, the increments of LFSM have LRD when $H \in \left(\frac{1}{\alpha}, 1\right)$ and it is one of the classical examples of long memory α-stable process.

This work is presented as the following: Section 2 starts with some basic facts. Using Riemann-Liouville fractional integrals we construct in Section 3 a stochastic integral with respect to a LFSM and prove an interesting formula for representing the fractionally integrated α-stable processes. In Section 4 we construct a long memory fractionally integrated moving average α-stable process and relate it to the LFSM using the previous sections results.

2 Definitions and Preliminaries Results

Let $\{L_\alpha(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ be a $S\alpha S$ process with index of stability $0 < \alpha \leq 2$ and Lebesgue control measure $dm(x) = dx$. Accordingly to Samorodnitsky and Taqqu (1994), for a measurable function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $f \in L^\alpha(\mathbb{R})$ the stable stochastic integral

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dL_\alpha(x) \tag{2.1}$$

is well defined and has the following properties.

Proposition 2.1. *The distribution of $I(f)$ is given by*

$$I(f) \sim S_\alpha(\sigma_f, 0, 0) \ , \tag{2.2}$$

where

$$\sigma_f = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} = ||f||_\alpha \ , \tag{2.3}$$

which means that

$$\mathbb{E}\left[\exp\{i\theta I(f)\}\right] = \exp\left\{-|\theta|^\alpha \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^\alpha dx\right\} \quad . \tag{2.4}$$

Proof. See proposition 3.4.1 in Samorodnitsky and Taqqu (1994).

□

In order to define the fractionally integrated stable processes we need to introduce the fractional integrals and derivatives of Riemann-Liouville (see Samko et al, 1993).

Definition 2.1. Let $d \in (0, 1)$. For $f \in L^p(\mathbb{R})$, where $1 \leq p < \frac{1}{d}$, we define

$$(I_-^d f)(x) = \frac{1}{\Gamma(d)} \int_x^\infty f(t)(t-x)^{d-1} dt \tag{2.5}$$

and

$$(I_+^d f)(x) = \frac{1}{\Gamma(d)} \int_{-\infty}^x f(t)(x-t)^{d-1} dt \ , \tag{2.6}$$

where $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ is the Gamma function, are well defined, and are respectively called *right and left-sided Riemann-Liouville fractional integrals of order* d.

On the other hand, fractional differentiation was introduced as the inverse of fractional integration. Consider $d \in (0, 1)$, $1 \leq p < \frac{1}{d}$ and denote by $I_\pm^d(L^p)$ the class of functions $\phi \in L^p$ that can be represented as a fractional integral $I_\pm^d$ of some function $f \in L^p$.

Definition 2.2. Let $\phi \in I_\pm^d(L^p)$ be of the form $\phi = I_\pm^d f$, for a function $f \in L^p$. Then f is precisely the *right or left-sided Riemann-Liouville fractional derivative of order* d, respectively, given by

$$(\mathcal{D}_-^d \phi)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-d)} \frac{d}{dx} \int_x^\infty \phi(t)(t-x)^{-d} dt \tag{2.7}$$

and

$$(\mathcal{D}_+^d \phi)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-d)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \phi(t)(x-t)^{-d} dt \ , \tag{2.8}$$

where $\frac{d}{dx}$ is the usual operation of differentiation with respect to x and the convergence of the integrals at the singularity $t = x$ holds pointwise with probability 1, if $p = 1$ and in the L^p sense, if $p > 1$.

Remark 2.1. In fractional processes as the LFSM defined in (1.1), for $0 < \alpha \leq 2$, one has an interesting relationship between the fractional parameter d and the Hurst parameter H of self-similarity which is given by

$$H = d + \frac{1}{\alpha} \ . \tag{2.9}$$

As we are more interested in the fractional integration point of view, we will often mention the parameter $d = H - \frac{1}{\alpha}$.

3 Main Results I

This section is based on Pipiras and Taqqu (2000) and Marquardt (2006) in which we define stochastic integrals with respect to the linear fractional stable motion (LFSM) and prove a formula that can be seen as an integration by parts' formula, analogous to Proposition 5.5 on Marquardt (2006) for the fractional Brownian motion. We restrict ourselves to the case $1 < \alpha < 2$, because we are interested in processes with the property of long-range dependence. While the cited authors deal with Lévy processes with finite second moment, we handle the infinite second order moments of $S\alpha S$ processes by using their finite lower order moments in a suitable space. This result is important since it gives us an interesting representation feature for the processes.

3.1 Fractionally Integrated Processes and the $B_{\alpha,p}$ space

Let $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ be a $S\alpha S$ process, with index of stability $1<\alpha<2$, given in its integral representation, accordingly to the family $\{f_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ of functions such that, for every $t\in\mathbb{R}$, $f_t : E\to\mathbb{R}$, $f_t\in L^\alpha(E)$ and $\{L_\alpha(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ is a $S\alpha S$ process with Lebesgue control measure $dm(x)=dx$. Then, according to Proposition 2.1, we know that

$$X(t)=\int_{\mathbb{R}} f_t(x)dL_\alpha(x)\sim S_\alpha(\sigma_t,0,0) \tag{3.1}$$

defined and its distribution is totally determined by

$$\sigma_t=\left(\int_{\mathbb{R}}|f_t(x)|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}=||f_t||_\alpha\ . \tag{3.2}$$

It would be important to have an isometry property for the $S\alpha S$ processes as the Itô's isometry for processes with finite second order moment. Since the α-stable distributions only have finite moments of order $p<\alpha$, we shall consider the following known result.

Proposition 3.1. *Let $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ be the process defined in (3.1) and let $1\le p<\alpha$. Then*

$$\mathbb{E}[|X(t)|^p]=\mathbb{E}[|L_\alpha(1)|^p]\ ||f_t||_\alpha^p\ . \tag{3.3}$$

Proof. From expression (3.1) and since for any positive a, $S_\alpha(a\sigma,0,0)\sim aS_\alpha(\sigma,0,0)$, where $\sim$ means equality in distribution, we have

$$X(t)\sim S_\alpha(\sigma_t,0,0)\sim\sigma_t S_\alpha(1,0,0)\sim\sigma_t L_\alpha(1)\ . \tag{3.4}$$

Therefore

$$\mathbb{E}[|X(t)|^p]=\mathbb{E}[|\sigma_t L_\alpha(1)|^p]=\mathbb{E}[|L_\alpha(1)|^p]\ ||f_t||_\alpha^p\ . \tag{3.5}$$

□

Now, for measurable functions $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g\in L^1(\mathbb{R})$ and $d\in(0,1-\frac{1}{\alpha})$, consider the right-sided Riemann-Liouville fractional integral of order d, $I_-^d g=\frac{1}{\Gamma(d)}\int_x^\infty g(t)(t-x)^{d-1}dt$ and denote by $\tilde{B}_\alpha$ the set

$$\tilde{B}_\alpha=\left\{g\in L^1(\mathbb{R})\Big/\int_{-\infty}^{\infty}|(I_-^d g)(x)|^\alpha dx<\infty\right\}. \tag{3.6}$$

The set $\tilde{B}_\alpha$ can be seen as the set of kernel functions $g\in L^1(\mathbb{R})$ for which the stable stochastic integral of its respective fractional integral $\int_{\mathbb{R}}(I_-^d g)(x)dL_\alpha(x)$ is well defined. For the next proposition we will need the following lemma (Leach, 1956).

Lemma 3.1. *Let $1<p<\infty$ and $1<q<\infty$ such that $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. For a measurable function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\in L^p(\mathbb{R})$ if and only if there exists a constant $C>0$ such that*

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x)h(x)|dx\le C||h||_q\ , \tag{3.7}$$

for every function $h\in L^q(\mathbb{R})$.

Note that since α lies in the interval $(1,2)$, $L^{\alpha}(\mathbb{R})$ is a Banach space. Using the previous lemma:

Proposition 3.2. *If $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^{\alpha}(\mathbb{R})$, then $g \in \tilde{B}_{\alpha}$.*

Proof. For every $h \in L^{\beta}(\mathbb{R})$, such that $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, we have

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left| h(x)(I_{-}^{d} g)(x) \right| dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x}^{\infty} \left| h(x) g(t) \frac{(t-x)^{d-1}}{\Gamma(d)} \right| \, dt \, dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(d)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \left| h(x) g(s+x) s^{d-1} \right| \, ds \, dx \, . \end{aligned} \tag{3.8}$$

Rewriting the last expression, we get

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \left| h(x) g(s+x) s^{d-1} \right| \, ds \, dx = I_1 + I_2, \tag{3.9}$$

where

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{1}^{\infty} \left| h(x) g(s+x) s^{d-1} \right| \, ds \, dx \tag{3.10}$$

and

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{1} \left| h(x) g(s+x) s^{d-1} \right| \, ds \, dx \, . \tag{3.11}$$

Use the Fubini's theorem and the Holder's inequality to get

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{0}^{1} s^{d-1} \int_{-\infty}^{\infty} |h(x) g(s+x)| dx \, ds \\ &\leq \int_{0}^{1} s^{d-1} ||h||_{\beta} ||g||_{\alpha} ds = \frac{1}{d} ||h||_{\beta} ||g||_{\alpha} \, . \end{aligned} \tag{3.12}$$

For I_1 in (3.10), set $t = s + x$ and apply the Holder's inequality to get

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \int_{1}^{\infty} |h(t-s) s^{d-1}| ds \, dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| ||h||_{\beta} \left(\int_{1}^{\infty} s^{\alpha(d-1)} ds \right)^{\frac{1}{\alpha}} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| ||h||_{\beta} \frac{1}{(\alpha(1-d)-1)^{\frac{1}{\alpha}}} \, dt \\ &\leq \frac{1}{(\alpha(1-d)-1)^{\frac{1}{\alpha}}} ||g||_1 ||h||_{\beta} \, . \end{aligned} \tag{3.13}$$

Combine (3.8), (3.9), (3.12) and (3.13) to finally get

$$\int_{\mathbb{R}} \left| h(x)(I_{-}^{d} g)(x) \right| dx \leq \left[\frac{1}{\Gamma(d)} \left(\frac{||g||_{\alpha}}{d} + \frac{||g||_1}{(\alpha(1-d)-1)^{\frac{1}{\alpha}}} \right) \right] ||h||_{\beta} \, , \tag{3.14}$$

where

$$C = \frac{1}{\Gamma(d)} \left(\frac{||g||_{\alpha}}{d} + \frac{||g||_1}{(\alpha(1-d)-1)^{\frac{1}{\alpha}}} \right) > 0 \, . \tag{3.15}$$

□

Remark 3.1. As well as for the right-sided Riemann-Liouville fractional integral $I_-^d g$, the same is true for the left-sided Riemann-Liouville fractional integral $I_+^d g$, which means that if $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\alpha(\mathbb{R})$, then $\int_{\mathbb{R}} |(I_+^d g)(x)|^\alpha dx < \infty$ and its stable stochastic integral $\int_{\mathbb{R}} (I_+^d g)(x) dL_\alpha(x)$ is well defined. The proof is completely analogous and will be omitted.

As we have seen, $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\alpha(\mathbb{R}) \subset \tilde{B}_\alpha$, so we would like to define a norm which could allow us to work with isometries for processes of the form $\int_{\mathbb{R}} (I_+^d g)(x) dL_\alpha(x)$. Before defining such norm, a simple lemma is helpful:

Lemma 3.2. *For $\alpha > 1$, if $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\alpha(\mathbb{R})$ then $g \in L^p(\mathbb{R})$, for all $1 \le p \le \alpha$.*

Proof.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p dx &= \int_{|g(x)|\ge 1} |g(x)|^p dx + \int_{|g(x)|<1} |g(x)|^p dx \\ &\le \int_{|g(x)|\ge 1} |g(x)|^\alpha dx + \int_{|g(x)|<1} |g(x)| dx \le ||g||_\alpha + ||g||_1 .\end{aligned} \tag{3.16}$$

□

The following norm is based on Theorem 3.2 of Pipiras and Taqqu (2000), which in this case it comes from an inner product. Now, inspired by Proposition 3.1 and using the previous lemma, we define:

Definition 3.1. For a fixed $1 < p < \alpha$ and $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\alpha(\mathbb{R})$, let the *norm* $|| \cdot ||_{\alpha,p}$ be defined as

$$||g||_{\alpha,p} = \left(\mathbb{E}[|L_\alpha(1)|^p] \int_{\mathbb{R}} |(I_-^d g)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} . \tag{3.17}$$

Proposition 3.3. *The expression given in Definition 3.1 defines a norm. Moreover, for $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\alpha(\mathbb{R})$, there exist $M, N > 0$ such that*

$$||g||_{\alpha,p} \le M||g||_1 + N||g||_p . \tag{3.18}$$

Proof. First, note that $||g||_{\alpha,p} = D||I_-^d g||_p$, where $D = (\mathbb{E}[|L_\alpha(1)|^p])^{\frac{1}{p}}$ does not depend on g and $|| \cdot ||_p$ is the usual $L^p(\mathbb{R})$ norm.

(i) since $D > 0$, $||g||_{\alpha,p} = 0 \iff ||I_-^d g||_p = 0 \iff I_-^d g = 0 \iff g = \mathcal{D}_-^d (I_-^d g) = 0$;

(ii) for $a \in \mathbb{R}$, $||ag||_{\alpha,p} = D||I_-^d ag||_p = D||aI_-^d g||_p = |a|||g||_{\alpha,p}$;

(iii) for $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\alpha(\mathbb{R})$, $||f + g||_{\alpha,p} = D||I_-^d (f + g)||_p = D||I_-^d f + I_-^d g)||_p \le D||I_-^d f||_p + D||I_-^d g||_p = ||f||_{\alpha,p} + ||g||_{\alpha,p}$.

Finally, (3.18) can be seen by the proof of Proposition 3.2. Taking $p < \alpha$ and doing the same as in (3.14) for α, we get

$$\int_{\mathbb{R}} \left| h(x)(I_-^d g)(x) \right| dx \le \left[\frac{1}{\Gamma(d)} \left(\frac{||g||_p}{d} + \frac{||g||_1}{(p(1-d)-1)^{\frac{1}{p}}} \right) \right] ||h||_q , \tag{3.19}$$

for every $h \in L^q(\mathbb{R})$ where $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Now, since $G(h) = \int_{\mathbb{R}} h(x)(I^d_- g)(x)dx$ is a bounded linear functional defined in $L^q(\mathbb{R})$, we know that

$$||(I^d_- g)||_p = \sup_{||h||_q = 1} |G(h)| \leq \left[\frac{1}{\Gamma(d)} \left(\frac{||g||_p}{d} + \frac{||g||_1}{(p(1-d)-1)^{\frac{1}{p}}} \right) \right] . \tag{3.20}$$

And (3.18) follows by setting

$$M = \frac{(\mathbb{E}[|L_\alpha(1)|^p])^{\frac{1}{p}}}{\Gamma(d)} \frac{1}{(p(1-d)-1)^{\frac{1}{p}}} > 0 \text{ and } N = \frac{(\mathbb{E}[|L_\alpha(1)|^p])^{\frac{1}{p}}}{\Gamma(d)} \frac{1}{d} > 0 \ . \tag{3.21}$$

□

Now we are able to define the space which will allow us to define the desired stochastic integrals.

Definition 3.2. Let $B_{\alpha,p}$ be the space $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\alpha(\mathbb{R})$ under the equivalence relation $\sim$ in which for $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\alpha(\mathbb{R})$,

$$f \sim g \iff ||f - g||_{\alpha,p} = 0 \ . \tag{3.22}$$

3.2 Stochastic Integral and Integration by Parts Formula

We proceed with the construction of the stochastic integral with respect to the linear fractional stable motion. Details on the stochastic integration with respect to the fractional Brownian motion can be found in Pipiras and Taqqu (2000), Nualart (2006) and Carmona et al. (2001) and with respect to fractional Lévy processes as a generalization of the fBm using Malliavin Calculus in He (2014).

Firstly, let us recall the LFSM defined in (1.1): let $\{L_\alpha(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ be a $S\alpha S$ process with index of stability $1 < \alpha < 2$ and Lebesgue control measure $dm(x) = dx$ and let $0 < d < 1 - \frac{1}{\alpha}$ be the fractional integration parameter. Then, taking $a = \frac{1}{\Gamma(d+1)}$ and $b = 0$ and using the notation of Remark 2.1, we define

$$M_d(t) := \frac{1}{\Gamma(d+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(t-x)^d_+ - (-x)^d_+ \right] \, dL_\alpha(x) \ , \quad t \in \mathbb{R} \ . \tag{3.23}$$

Equipped with the $B_{\alpha,p}$ space given in Definition 3.2 and the norm $|| \cdot ||_{\alpha,p}$ given in Definition 3.1, we want to define, for functions $g \in B_{\alpha,p}$, the stochastic integral

$$I_{M_d}(g) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dM_d(x) \ . \tag{3.24}$$

As usual, we start by defining the integral for simple functions. Let $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be of the form

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(x), \tag{3.25}$$

where $a_i \in \mathbb{R}$ and $-\infty < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$. It is easy to see that $\phi \in B_{\alpha,p}$. So we define the integral

$$I_{M_d}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dM_d(x) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i [M_d(t_{i+1}) - M_d(t_i)] \, . \tag{3.26}$$

Note that the integral $I_{M_d}(\cdot)$ is linear for simple functions. Moreover, we have the proposition below.

Proposition 3.4. *Let $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a simple function. Then*

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dM_d(x) = \int_{\mathbb{R}} (I_-^d \phi)(x) \, dL_\alpha(x) \tag{3.27}$$

and $\phi \to I_{M_d}(\phi)$ is an isometry between $B_{\alpha,p}$ and $L^p(\Omega, \mathbb{P})$, in the sense that $||I_{M_d}(\phi)||^p_{L^p(\Omega,\mathbb{P})}$ $= ||\phi||^p_{\alpha,p}$, where $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ is the underlying probability space.

Proof. It suffices to show (3.27) for indicator functions $\phi(x) = \mathbb{1}_{(0,t]}(x)$, $t > 0$, because every other simple function is a linear combination of such functions. In fact,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dM_d(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(0,t]}(x) dM_d(x) = M_d(t) \tag{3.28}$$

and for the right-hand side of (3.27), we have

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (I_-^d \phi)(x) \, dL_\alpha(x) &= \frac{1}{\Gamma(d)} \int_{\mathbb{R}} \int_x^\infty (s-x)^{d-1} \mathbb{1}_{(0,t]}(s) ds dL_\alpha(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(d+1)} \int_{\mathbb{R}} [(t-x)_+^d - (-x)_+^d] dL_\alpha(x) = M_d(t). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Furthermore, for all simple functions ϕ it follows from Proposition 3.1 that

$$\begin{aligned} ||I_{M_d}(\phi)||^p_{L^p(\Omega,\mathbb{P})} &= \mathbb{E}\left[\left| \int_{\mathbb{R}} (I_-^d \phi)(x) dL_\alpha(x) \right|^p \right] \\ &= \mathbb{E}[|L_\alpha(1)|^p] \int_{\mathbb{R}} |(I_-^d \phi)(x)|^p dx \\ &= ||\phi||^p_{\alpha,p} \, . \end{aligned} \tag{3.30}$$

□

Having the integral $I_{M_d}(\cdot)$ well defined for simple functions, we are ready to prove the next theorem and to define the integral for any $g \in B_{\alpha,p}$.

Theorem 3.1. *Let $M_d = \{M_d(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ be the linear fractional stable motion defined in (3.23) and let the function $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be in $B_{\alpha,p}$. Then there exists a sequence of simple functions $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, satisfying $||\phi_n - g||_{\alpha,p} \to 0$ as $n \to \infty$ such that $I_{M_d}(\phi_n)$ converges in $L^p(\Omega, \mathbb{P})$ to a limit denoted by $I_{M_d}(g) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dM_d(x)$ and $I_{M_d}(g)$ is independent of the approximating sequence ϕ_n. Moreover, the isometry property holds*

$$||I_{M_d}(g)||^p_{L^p(\Omega,\mathbb{P})} = ||g||^p_{\alpha,p} \, . \tag{3.31}$$

Proof. As we know the simple functions are dense in $L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ and $L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ is dense in $B_{\alpha,p}$ by construction of the space $B_{\alpha,p}$. Also (3.18) holds, so whenever a sequence converges in $L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ it will converge in $B_{\alpha,p}$. Therefore the simple functions are dense in $B_{\alpha,p}$. Hence, there exists a sequence ϕ_n of simple functions such that $||\phi_n - g||_{\alpha,p} \to 0$ as $n \to \infty$. It follows from the isometry property (3.30) that $\int_{\mathbb{R}} \phi_n(x) dM_d(x)$ converges in $L^p(\Omega, \mathbb{P})$ towards a limit denoted by $\int_{\mathbb{R}} g(x) dM_d(x)$ and the isometry property is preserved in this procedure, so (3.31) holds. Finally, (3.31) implies that the limit denoted by the integral $\int_{\mathbb{R}} g(x) dM_d(x)$ is the same for all approximating sequences ϕ_n converging to g.

□

Note that convergence in the L^p sense implies convergence in probability, which is enough to define the integrals. Usually they are defined with equality in probability or even in the L^p sense, most commonly in L^2 (see Kuo, 2006). The next theorem states that we can interchange the fractional integration between the integrand function and the process in respect to which we are integrating. This formula reminds the well known integration by parts formula from traditional calculus.

Theorem 3.2. *Let $g \in B_{\alpha,p}$. Then*

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dM_d(x) = \int_{\mathbb{R}} (I_-^d g)(x)\, dL_\alpha(x)\,. \tag{3.32}$$

Proof. It follows from Proposition 3.4 and Theorem 3.1.

□

4 Main Results II

In this section, we are interested in defining a class of continuous-time moving average stable processes that present the property of long-range dependence. Let $\{L_\alpha(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ be a $S\alpha S$ process with index of stability $1 < \alpha < 2$ and Lebesgue control measure. Accordingly to Samorodnitsky and Taqqu (1994), if g is a real measurable function defined on $\mathbb{R}$ satisfying $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^\alpha dx < \infty$, and define

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) dL_\alpha(x), \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{4.1}$$

then $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ is well defined and stationary. A process of this form is called *$S\alpha S$ moving average process.* The function g is often called *kernel function.*

It is known in the literature that one can construct a long-memory process by considering moving average processes whose kernel function is the fractional integral of a *short-memory* function (see Samorodnitsky, 2006 and Marquardt, 2006). So henceforth we are considering functions with *short memory* and with positive support, which means that we will assume the following conditions:

(C1) $g(t) = 0$, for all $t < 0$;

(C2) $|g(t)| \leq Ce^{-ct}$, for some constants $C > 0$ and $c > 0$.

Note that every such function g satisfying (C1) and (C2) belongs to $B_{\alpha,p}$.

Let us recall the left-sided Riemann-Liouville fractional integral of order $d \in (0,1)$ of a function $g \in L^1(\mathbb{R})$, as defined in (2.6):

$$(I_+^d g)(x) = \frac{1}{\Gamma(d)} \int_{-\infty}^{x} g(t)(x-t)^{d-1} dt = \frac{1}{\Gamma(d)} \int_0^{\infty} g(x-s)(s)^{d-1} ds \quad . \tag{4.2}$$

So for $1 < \alpha < 2$ and $1 < p < \alpha$ the idea is to define the moving average stable process using the left-sided Riemann-Liouville fractional integral of a kernel function g satisfying (C1) and (C2).

Definition 4.1 (FIMA Stable process)**.** Let $\{L_\alpha(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ be a $S\alpha S$ process with index of stability $1 < \alpha < 2$ and Lebesgue control measure. For $d \in (0, 1 - \frac{1}{\alpha})$, define

$$Y_d(t) = \int_{-\infty}^{t} (I_+^d g)(t-x) dL_\alpha(x) \;, t \in \mathbb{R} \;. \tag{4.3}$$

Theorem 4.1. *The FIMA Stable process $\{Y_d(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ in (4.3) is well defined and stationary.*

Proof. We know that $g \in B_{\alpha,p}$ implies $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\alpha(\mathbb{R})$, so by Remark 3.1 it follows that $\int_{\mathbb{R}} |(I_+^d g)(x)|^\alpha dx < \infty$ and the process is well defined. Now, for $t_1, \cdots, t_d, h, \theta_1, \cdots, \theta_d \in \mathbb{R}$, setting $y = x - h$, we have

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{d} \theta_i Y_d(t_i + h) \right\|_\alpha^\alpha &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{d} \theta_i \mathbb{1}_{(-\infty, t_i+h]}(x) (I_+^d g)(t_i + h - x) \right|^\alpha dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{d} \theta_i \mathbb{1}_{(-\infty, t_i]}(y) (I_+^d g)(t_i - y) \right|^\alpha dy \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{d} \theta_i Y_d(t_i) \right\|_\alpha^\alpha \quad .
\end{aligned} \tag{4.4}$$

□

Now, using Theorem 3.2, we can represent the FIMA Stable process with the linear fractional stable motion.

Theorem 4.2. *Let $\{Y_d(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ be the FIMA Stable process defined in (4.3) and $\{M_d(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ be the linear fractional stable motion defined in (3.23). Then, Y_d can be represented as*

$$Y_d(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-x) dM_d(x) \;, \quad t \in \mathbb{R} \tag{4.5}$$

Proof. For each $t \in \mathbb{R}$, consider $g_t(x) := g(t-x)$, so from Theorem 3.2, we have

$$\int_{-\infty}^{t} g(t-x) dM_d(x) = \int_{-\infty}^{t} g_t(x) dM_d(x) = \int_{-\infty}^{t} (I_-^d g_t)(x) dL_\alpha(x) \tag{4.6}$$

using the definition of the right-sided fractional integral $(I_-^d g_t)(x)$ and setting $w = u - x$ we get

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{t} (I_-^d g_t)(x) dL_\alpha(x) &= \frac{1}{\Gamma(d)} \int_{-\infty}^{t} \int_{x}^{\infty} (u-x)^{d-1} g_t(u) du\, dL_\alpha(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(d)} \int_{-\infty}^{t} \int_{x}^{\infty} (u-x)^{d-1} g(t-u) du\, dL_\alpha(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(d)} \int_{-\infty}^{t} \int_{0}^{\infty} w^{d-1} g(t-x-w) dw\, dL_\alpha(x) \,.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Finally, using the definition of the left-sided fractional integral $(I_+^d g)(t - x)$ we get the result

$$\frac{1}{\Gamma(d)} \int_{-\infty}^{t} \int_{0}^{\infty} w^{d-1} g(t-x-w) dw\, dL_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{t} (I_+^d g)(t-x) dL_\alpha(x) = Y_d(t) \,. \tag{4.8}$$

□

Remark 4.1. Note that this representation allows us to work with a rapid decay kernel function g instead of a slow decay kernel function $(I_+^d g)$, which can be useful for more efficient simulation algorithms.

Now we turn our attention to the property of long-range dependence, or long-memory of the process $\{Y_d(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. As we know, for stationary Gaussian processes one can describe the long-range dependence property as the slow decaying of its covariance function. Since we cannot use such function in our setting, as Maejima and Yamamoto (2003) we are going to use the following and proceed with similar calculations than the cited authors. For $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, let

$$\begin{aligned} r(t) &:= r(\theta_1, \theta_2; t) \\ &:= \mathbb{E}\Big[\exp\{i(\theta_1 Y_d(t) + \theta_2 Y_d(0))\}\Big] - \mathbb{E}\Big[\exp\{i\theta_1 Y_d(t)\}\Big]\mathbb{E}\Big[\exp\{i\theta_2 Y_d(0)\}\Big]\end{aligned} \tag{4.9}$$

and

$$\begin{aligned} I(t) &:= I(\theta_1, \theta_2; t) \\ &:= -\log\left(\mathbb{E}\Big[\exp\{i(\theta_1 Y_d(t) + \theta_2 Y_d(0))\}\Big]\right) \\ &\quad + \log\left(\mathbb{E}\Big[\exp\{i\theta_1 Y_d(t)\}\Big]\right) + \log\left(\mathbb{E}\Big[\exp\{i\theta_2 Y_d(0)\}\Big]\right) .\end{aligned} \tag{4.10}$$

Setting

$$\begin{aligned} K(\theta_1, \theta_2; t) &= \mathbb{E}\big[\exp\{i\theta_1 Y_d(t)\}\big]\mathbb{E}\big[\exp\{i\theta_2 Y_d(0)\}\big] \\ &= \mathbb{E}\big[\exp\{i\theta_1 Y_d(0)\}\big]\mathbb{E}\big[\exp\{i\theta_2 Y_d(0)\}\big] =: K(\theta_1,\theta_2) =: K\end{aligned}$$

which does not depend on t since $\{Y_d(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ is stationary, there is a relationship between r and I given by

$$r(\theta_1, \theta_2; t) = K(\theta_1, \theta_2; t)\big(e^{-I(\theta_1,\theta_2;t)} - 1\big) \,. \tag{4.11}$$

Furthermore, if $I(t) \to 0$ as $t \to \infty$, then $r(t) \sim -KI(t)$ as $t \to \infty$, which means that the quantities are asymptotically equal. Note that the quantity $r(\theta_1, \theta_2; t)$ is the difference between the joint characteristic function of the pair $(\theta_1 Y_d(t), \theta_2 Y_d(0))$ and the product of the marginal characteristic functions of $\theta_1 Y_d(t)$ and $\theta_2 Y_d(0)$. So if the process is independent, $r(\theta_1, \theta_2; t) = 0$, and if the process is Gaussian or has finite second order moments, the quantity $-I(1, -1; t)$ coincides with the covariance function. The quantity $r(t)$ has been proved to be a proper tool for describing the dependence structure of stable processes and has been used by several authors Astrauskas et al (1991); Lévy and Taqqu (1991); Magdziarz and Weron (2007); Magdziarz (2007); etc. In addition, it is used in Maruyama (1970) relating it to the mixing property for stationary infinitely divisible processes. Also, (Samorodnitsky and Taqqu, 1994) point out that the quantity $I(t)$ can be used to show that two processes are different by showing that their respective quantities are asymptotically different. Let us then define what we mean by the property of long-range dependence or long-memory in our setting.

Definition 4.2. Let $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ be a stationary $S\alpha S$ process and $r(t)$ as in (4.9). We say the process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ has *long-range dependence* or *long-memory property* if there exists a $\theta \in (0,1)$ and a constant $c_r > 0$ such that $r(t)$ satisfies

$$\lim_{t\to\infty} |r(t)| \frac{t^\theta}{c_r} = 1 , \tag{4.12}$$

or, equivalently,

$$|r(t)| \sim c_r t^{-\theta} . \tag{4.13}$$

Note that since the process $\{Y_d(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ is stationary,

$$(Y_d(t), Y_d(0)) \stackrel{d}{=} (Y_d(0), Y_d(-t)) , \tag{4.14}$$

thus $r(\theta_1, \theta_2; t) = r(\theta_2, \theta_1; -t)$. Therefore, the asymptotic behavior of $r(\theta_1, \theta_2; t)$ as $t \to \infty$ is essentially the same as $r(\theta_1, \theta_2; t)$ as $t \to -\infty$. Since the computations for $t < 0$ as $t \to -\infty$ are a bit easier in our setting, as in Maejima and Yamamoto (2003), we will analyze the asymptotic behavior of $r(\theta_1, \theta_2; t)$ for $t < 0$, as $t \to -\infty$.

Recall that for a $S\alpha S$ process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ given by (3.1), by Proposition 2.1 we have

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{i\theta \int_{\mathbb{R}} f_t(x) dL_\alpha(x)\right\}\right] = \exp\left\{-|\theta|^\alpha \int_{\mathbb{R}} |f_t(x)|^\alpha dx\right\} . \tag{4.15}$$

Theorem 4.3. *Let $\{Y_d(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ be the FIMA Stable process defined in (4.3). If $1 < \alpha < 2$ and $0 < d < 1 - \frac{1}{\alpha}$, then, as $t \to -\infty$,*

$$r(t) = r(\theta_1, \theta_2; t) \sim -KC|t|^{\alpha(d-1)+1} , \tag{4.16}$$

where

$$K = \exp\left\{ -\frac{\theta_1^\alpha + \theta_2^\alpha}{\Gamma(d)^\alpha} \int_{-\infty}^0 \left| \int_x^0 g(-u)(u-x)^{d-1} du \right|^\alpha dx \right\} , \tag{4.17}$$

and

$$C = \left(\frac{1}{\Gamma(d)} \int_0^\infty g(u) du \right)^\alpha \times \int_1^\infty \left(\left|\theta_1 (x-1)^{d-1} + \theta_2 x^{d-1}\right|^\alpha - \left|\theta_1 (x-1)^{d-1}\right|^\alpha - \left|\theta_2 x^{d-1}\right|^\alpha \right) dx . \tag{4.18}$$

Proof.

We start by calculating K. By (4.15), (4.7) and (4.8)

$$
\begin{aligned}
K &= \mathbb{E}\big[\exp\{i\theta_1 Y_d(0)\}\big]\mathbb{E}\big[\exp\{i\theta_2 Y_d(0)\}\big] \\
&= \exp\left\{ -\frac{1}{\Gamma(d)^\alpha}\int_{-\infty}^{0}\left(\left|\int_x^0 \theta_1 g(-u)(u-x)^{d-1}du\right|^\alpha \right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \left|\int_x^0 \theta_2 g(-u)(u-x)^{d-1}du\right|^\alpha\right)dx\right\} \\
&= \exp\left\{ -\frac{\theta_1^\alpha+\theta_2^\alpha}{\Gamma(d)^\alpha}\int_{-\infty}^{0}\left|\int_x^0 g(-u)(u-x)^{d-1}du\right|^\alpha dx\right\}. \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

Now, let us compute $I(t)$. Again by (4.15), (4.7) and (4.8), we have

$$
\begin{aligned}
I(t) &= -\log\left(\mathbb{E}\Big[\exp\{i(\theta_1 Y_d(t)+\theta_2 Y_d(0))\}\Big]\right) \\
&\quad + \log\left(\mathbb{E}\Big[\exp\{i\theta_1 Y_d(t)\}\Big]\right) + \log\left(\mathbb{E}\Big[\exp\{i\theta_2 Y_d(0)\}\Big]\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(d)^\alpha}\int_{-\infty}^{t}\left(\left|\int_x^t \theta_1 g(t-u)(u-x)^{d-1}du + \int_x^0 \theta_2 g(-u)(u-x)^{d-1}du\right|^\alpha\right. \\
&\quad \left. - \left|\int_x^t \theta_1 g(t-u)(u-x)^{d-1}du\right|^\alpha - \left|\int_x^0 \theta_2 g(-u)(u-x)^{d-1}du\right|^\alpha\right)dx\,. \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

Set $x = xt$ and $u = ut$ and recall that $t < 0$ to get

$$
\begin{aligned}
I(t) &= \frac{1}{\Gamma(d)^\alpha}\int_1^\infty\left(\left|\int_1^x \theta_1 g(t(1-u))(x-u)^{d-1}|t|^{d-1}|t|du\right.\right. \\
&\quad \left. + \int_0^x \theta_2 g(-tu)(x-u)^{d-1}|t|^{d-1}|t|du\right|^\alpha - \left|\int_1^x \theta_1 g(t(1-u))(x-u)^{d-1}|t|^{d-1}|t|du\right|^\alpha \\
&\quad \left. - \left|\int_0^x \theta_2 g(-tu)(x-u)^{d-1}|t|^{d-1}|t|du\right|^\alpha\right)|t|dx\,. \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

Since $\left(|t|^{d-1}|t|\right)^\alpha|t| = |t|^{\alpha d+1}$, it follows that

$$
\begin{aligned}
I(t) &= \frac{|t|^{\alpha d+1}}{\Gamma(d)^\alpha}\int_1^\infty\left(\left|\int_1^x \theta_1 g(t(1-u))(x-u)^{d-1}du + \int_0^x \theta_2 g(-tu)(x-u)^{d-1}du\right|^\alpha\right. \\
&\quad \left. - \left|\int_1^x \theta_1 g(t(1-u))(x-u)^{d-1}du\right|^\alpha - \left|\int_0^x \theta_2 g(-tu)(x-u)^{d-1}du\right|^\alpha\right)dx \\
&=: |t|^{\alpha d+1}\int_1^\infty |\phi(t,x)+\psi(t,x)|^\alpha - |\phi(t,x)|^\alpha - |\psi(t,x)|^\alpha\,dx\,, \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

where for $x > 1$

$$
\phi(t,x) = \frac{1}{\Gamma(d)}\int_1^x \theta_1 g(t(1-u))(x-u)^{d-1}du \qquad (4.23)
$$

and

$$\psi(t,x) = \frac{1}{\Gamma(d)} \int_0^x \theta_2 g(-tu)(x-u)^{d-1} du \ . \tag{4.24}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to-\infty} |t|^{\alpha-\alpha d-1} I(t) = \\ &= \lim_{t\to-\infty} \int_1^\infty |t\phi(t,x) + t\psi(t,x)|^\alpha - |t\phi(t,x)|^\alpha - |t\psi(t,x)|^\alpha \, dx \ . \end{aligned} \tag{4.25}$$

We want to use the Dominated Convergence theorem to deal with this limit, but in order to do so we need the following lemmas. Their proofs are going to be given later.

Lemma 4.1. *For $1 < \alpha < 2$ and for $r, s \in \mathbb{R}$, it is true that*

$$||r+s|^\alpha - |r|^\alpha - |s|^\alpha| \le \alpha |r||s|^{\alpha-1} + (\alpha+1)|r|^\alpha \ . \tag{4.26}$$

Lemma 4.2. *There exist constants $K_1, K_2 > 0$ such that for any $t < 0$ and $x > 1$ we have*

$$|t\phi(t,x)| \le K_1 (x-1)^{d-1} \tag{4.27}$$

and

$$|t\psi(t,x)| \le K_2 x^{d-1} \ . \tag{4.28}$$

Lemma 4.3. *There exists a constant $L \in \mathbb{R}$ such that*

$$\lim_{t\to-\infty} t\phi(t,x) = L\theta_1 (x-1)^{d-1} \tag{4.29}$$

and

$$\lim_{t\to-\infty} t\psi(t,x) = L\theta_2 x^{d-1} \ . \tag{4.30}$$

By Lemma 4.1 with $r = t\psi(t,x)$, $s = t\phi(t,x)$ and Lemma 4.2, it follows that

$$\begin{aligned} &|t\phi(t,x) + t\psi(t,x)|^\alpha - |t\phi(t,x)|^\alpha - |t\psi(t,x)|^\alpha \\ &\le \alpha |t\psi(t,x)||t\phi(t,x)|^{\alpha-1} + (\alpha+1)|t\psi(t,x)|^\alpha \\ &\le \alpha K_2 x^{d-1} (K_1 (x-1)^{d-1})^{\alpha-1} + (\alpha+1)(K_2 x^{d-1})^\alpha \\ &= \alpha K_1^{(\alpha-1)(d-1)} K_2 x^{d-1} (x-1)^{(\alpha-1)(d-1)} + (\alpha+1) K_2^\alpha x^{\alpha(d-1)} \ . \end{aligned} \tag{4.31}$$

Note that $1 < \alpha < 2$ implies $0 < \alpha - 1 < 1$ and $0 < d < 1 - \frac{1}{\alpha}$ implies $-1 < d - 1 < -\frac{1}{\alpha}$, so $-1 < (\alpha-1)(d-1)$ and $\alpha(d-1) < -1$. Thus, $x^{\alpha(d-1)}$ clearly is in $L^1(1,\infty)$. As for $x^{d-1}(x-1)^{(\alpha-1)(d-1)}$, the integral may diverge when $x \to 1$ and $x \to \infty$. But when $x \to 1$, $x^{d-1}(x-1)^{(\alpha-1)(d-1)}$ behaves like $(x-1)^{(\alpha-1)(d-1)}$, which is integrable since $-1 < (\alpha-1)(d-1)$. And when $x \to \infty$, $x^{d-1}(x-1)^{(\alpha-1)(d-1)}$ behaves like $x^{\alpha(d-1)}$. Hence,

$$\int_1^\infty \left| \alpha K_1^{(\alpha-1)(d-1)} K_2 x^{d-1} (x-1)^{(\alpha-1)(d-1)} + (\alpha+1) K_2^\alpha x^{\alpha(d-1)} \right| dx < \infty \tag{4.32}$$

and we can apply the desired theorem in (4.25) altogether with Lemma 4.3 to obtain

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to-\infty} |t|^{\alpha-\alpha d-1} I(t) = \\
&= \int_1^{\infty} \lim_{t\to-\infty} |t\phi(t,x)+t\psi(t,x)|^{\alpha} - |t\phi(t,x)|^{\alpha} - |t\psi(t,x)|^{\alpha}\, dx \\
&= L^{\alpha} \int_1^{\infty} \left|\theta_1(x-1)^{d-1}+\theta_2 x^{d-1}\right|^{\alpha} - \left|\theta_1(x-1)^{d-1}\right|^{\alpha} - \left|\theta_2 x^{d-1}\right|^{\alpha} dx \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

which is C in (4.18) (see the proof of Lemma 4.3 for the value of L). Thus $I(t) \to 0$ as $t \to \infty$ and therefore

$$r(t) \sim -KI(t) \sim -KC|t|^{\alpha(d-1)+1} \qquad (4.34)$$

as $t \to \infty$.

□

For the proof of Lemma 4.1 see (Maejima and Yamamoto, 2003). Now, let us proceed to the proofs of Lemmas 4.2 and 4.3. Firstly, note that setting $w = u + 1$

$$\begin{aligned}
\theta_2^{-1}\psi(t,x-1) &= \frac{1}{\Gamma(d)}\int_0^{x-1} g(-tu)(x-1-u)^{d-1}du \\
&= \frac{1}{\Gamma(d)}\int_1^{x} g(t(1-w))(x-w)^{d-1}dw = \theta_1^{-1}\phi(t,x) \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

thus it suffices to show (4.27) and (4.29).

Proof of Lemma 4.2. In fact, we have

$$\begin{aligned}
&|t\phi(t,x)| = \left|\frac{1}{\Gamma(d)}\int_1^{x} t\theta_1 g(t(1-u))(x-u)^{d-1}du\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{\Gamma(d)}\int_1^{\frac{x+1}{2}} t\theta_1 g(t(1-u))(x-u)^{d-1}du\right| + \left|\frac{1}{\Gamma(d)}\int_{\frac{x+1}{2}}^{x} t\theta_1 g(t(1-u))(x-u)^{d-1}du\right| \\
&=: I_1 + I_2\ . \qquad (4.36)
\end{aligned}$$

Recall that $t < 0$. For I_1, it follows that

$$I_1 \leq \frac{|t\theta_1 C|}{\Gamma(d)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{d-1}\int_1^{\frac{x+1}{2}} e^{ct(u-1)}du \leq \frac{|\theta_1 C|}{\Gamma(d)c}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{d-1} \qquad (4.37)$$

and

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{|t\theta_1 C|}{\Gamma(d)} e^{\frac{ct(x-1)}{2}} \int_{\frac{x+1}{2}}^{x} (x-u)^{d-1}du \\
&= \frac{|\theta_1 C|}{\Gamma(d)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{d} |t| e^{\frac{ct(x-1)}{2}} \leq \frac{|\theta_1 C|}{\Gamma(d)ce}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{d-1}, \qquad (4.38)
\end{aligned}$$

since $z(t) := |t|e^{\frac{ct(x-1)}{2}}$ takes its maximum value $\frac{2}{c(x-1)e}$ at $t = \frac{-2}{c(x-1)}$. Combining (4.37) and (4.38), we have

$$|t\phi(t,x)| \leq I_1 + I_2 \leq \frac{|\theta_1 C|}{\Gamma(d)c}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{d-1} + \frac{|\theta_1 C|}{\Gamma(d)ce}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{d-1} \leq K_1(x-1)^{d-1}, \quad (4.39)$$

which is (4.27).

□

Proof of Lemma 4.3. For (4.29), it follows that

$$\begin{aligned}\lim_{t\to-\infty} t\phi(t,x) &= \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{\Gamma(d)}\int_1^{\frac{x+1}{2}} t\theta_1 g(t(1-u))(x-u)^{d-1}du \\ &+ \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{\Gamma(d)}\int_{\frac{x+1}{2}}^{x} t\theta_1 g(t(1-u))(x-u)^{d-1}du \\ &=: l_1 + l_2 \ . \end{aligned} \tag{4.40}$$

So, set $w = t(u-1)$ to get

$$\begin{aligned} l_1 &= \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{\Gamma(d)}\int_0^{\frac{t(x-1)}{2}} \theta_1 g(-w)\left(x-\frac{w}{t}-1\right)^{d-1}dw \\ &= -\lim_{t\to-\infty}\frac{\theta_1}{\Gamma(d)}\int_{-\infty}^{0} \mathbb{1}_{\left[\frac{t(x-1)}{2},0\right]}(w)g(-w)\left(x-\frac{w}{t}-1\right)^{d-1}dw \end{aligned} \tag{4.41}$$

but by (C2),

$$\begin{aligned} &\left|\mathbb{1}_{\left[\frac{t(x-1)}{2},0\right]}(v)g(-w)\left(x-\frac{w}{t}-1\right)^{d-1}\right| \\ &\le C\left|\mathbb{1}_{\left[\frac{t(x-1)}{2},0\right]}(w)e^{cv}\left(x-\frac{w}{t}-1\right)^{d-1}\right| \le Ce^{cw}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{d-1} \end{aligned} \tag{4.42}$$

which is w integrable in $(-\infty,0)$. Thus, again by the Dominated Convergence theorem and setting $u=-w$, we get

$$l_1 = -\frac{\theta_1}{\Gamma(d)}\int_{-\infty}^{0} g(-w)\,(x-1)^{d-1}\,dw = \left[\frac{1}{\Gamma(d)}\int_0^\infty g(u)du\right]\theta_1(x-1)^{d-1} \ . \tag{4.43}$$

And for l_2,

$$\begin{aligned} |l_2| &\le \lim_{t\to-\infty}\frac{|\theta_1|}{\Gamma(d)}\int_{\frac{x+1}{2}}^{x} |tg(t(1-u))|(x-u)^{d-1}du \\ &\le \lim_{t\to-\infty}\frac{|t\theta_1|}{\Gamma(d)}\int_{\frac{x+1}{2}}^{x} e^{ct(u-1)}(x-u)^{d-1}du \\ &\le \lim_{t\to-\infty}\frac{|t\theta_1|}{\Gamma(d)}e^{\frac{ct(x-1)}{2}}\int_{\frac{x+1}{2}}^{x}(x-u)^{d-1}du = 0 \ . \end{aligned} \tag{4.44}$$

Therefore, by (4.38)-(4.40), it follows that

$$\lim_{t\to-\infty} t\phi(t,x) = \left[\frac{1}{\Gamma(d)}\int_0^\infty g(u)du\right]\theta_1(x-1)^{d-1} \tag{4.45}$$

and we get (4.29) by setting

$$L = \frac{1}{\Gamma(d)}\int_0^\infty g(u)du \ . \tag{4.46}$$

□

As our last theorem, at this point has a pretty obvious statement.

Theorem 4.4. *Let $\{Y_d(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ be the FIMA Stable process defined in (4.3). If $1 < \alpha < 2$ and $0 < d < 1 - \frac{1}{\alpha}$, then it has the property of long-range dependence or long-memory, in the sense of Definition 4.2.*

Proof Since $1 < \alpha < 2$ and $-1 < d - 1 < -\frac{1}{\alpha}$ imply that $-2 < \alpha(d-1) < -1$, we have by the Theorem 4.3 that $r(t)$ satisfies

$$|r(t)| = |r(\theta_1, \theta_2; t)| \sim KCt^{\alpha(d-1)+1}\,, \tag{4.47}$$

with $-1 < \alpha(d-1) + 1 < 0$.

□

5 Conclusions

We have successfully constructed a continuous time fractionally integrated moving average α-stable process with the property of long-range dependence. The results presented here can be applied in models which captures both high variability behavior and long-range dependence structure. Due to the slow decay of the fractionally integrated kernel $I_+^d g$, simulation algorithms for such processes can be very slow and expensive. The representation (4.5) obtained with the theory developed within the Main Results I features a rapid decay kernel function g, which allows much more efficient simulation algorithms. Also, it reveals a core relationship between a FIMA Stable process and the LFSM.

Acknowledgments

G.L. Feltes was supported by CAPES-Brazil. S.R.C. Lopes research was partially supported by CNPq-Brazil.

References

Applebaum, D. (2004). *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press.

Astrauskas, A., Lévy, J.B. and Taqqu, M.S. (1991). "The asymptotic dependence structure of the linear fractional Lévy motion". *Litovskii Matematicheskii Sbornik*. Vol **31**(1), 3-28.

Beran, J., Feng, Y., Ghosh, S. and Kulik, R. (2013). *Long-Memory Processes - Probabilistic Properties and Statistical Methods*. Berlin: Springer-Verlag.

Billingsley, P. (2013). *Convergence of Probability Measures*. Wiley Series in Probability and Statistics. New York: Wiley.

Carmona, P., Coutin, L. and Montseny, G. (2003). "Stochastic integration with respect to fractional brownian motion". *Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics*. Vol **39**(1), 27-68.

He, K.(2014). “Stochastic calculus for fractional Lévy processes”. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics.* Vol **17**, No 01, 1450006, 14 pp.

Kuo, H. (2006). *Introduction to Stochastic Integration.* New York: Springer.

Leach, E.B. (1956). “On a converse of the Hölder inequality”. Proc. Amer. Math. Soc. Vol. **7**, 607-608.

Lévy, J.B. and Taqqu, M.S. (1991). “A Characterization of the asymptotic behavior of stationary stable processes”, In: Stable Processes and Related Topics, Cambanis, S., Samorodnitsky, G. and M.S. Taqqu, eds., Birkhäuser, Boston, 181-198.

Maejima, M. and Yamamoto, K. (2003). “Long-Memory Stable Ornstein-Uhlenbeck Processes”. *Electron. J. Probab.* Vol. **8**(19), 1-18.

Magdziarz, M. and Weron, A. (2007). “Fractional Langevin equation with alpha-stable noise. A link to fractional ARIMA time series”, *Studia Mathematica*, Vol. **181**(1), 47-60.

Magdziarz M. (2007). “Short and long memory fractional Ornstein-Uhlenbeck alpha-stable processes”, *Stochastic Models*, Vol. **23**(3), 451-473.

Maruyama, G. (1970). “Infinitely divisible processes”. *Theory Probab. Appl.*, Vol. **15**, 13-23.

Marquardt, T. (2006). “Fractional Lévy process with an application to long memory moving average processes”. *Bernoulli*, Vol. **12**(6), 1099-1126.

Nualart, D. (2006). “Stochastic calculus with respect to fractional Brownian motion”. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques*, Serie 6, Vol. **15**, 63-78.

Pipiras, V. and Taqqu, M. (2000). “Integration questions related to fractional Brownian motion”. *Probab Theory Relat Fields*, Vol **118**, 251-291.

Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev, O.I. (1993). *Fractional Integrals and Derivatives.* Lausanne: Gordon and Breach.

Samorodnitsky, G. and Taqqu, M.S. (1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes.* New York: Chapman & Hall.

Samorodnitsky, G. (2006). *Long Range Dependence.* Foundation and Trends in Stochastic Systems, Vol **1**(3), 163-257.