

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Uma generalização do problema de
Erdős–Rothschild para padrões de grafos
completos**

por

Denilson Amaral Nolibos

Tese submetida como requisito parcial
para a obtenção do título de
Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Orientador

Porto Alegre, abril de 2021.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Amaral Nolibos, Denilson

Uma generalização do problema de Erdős-Rothschild para padrões de grafos completos / Denilson Amaral Nolibos.– Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2021.

105 p.: il.

Tese (Doutorado)–Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2021.

Orientador: Hoppen, Carlos

Tese: Matemática Aplicada,
Teoria Extremal de Grafos, Grafos Completos, Colorações de Arestas, Padrões.

Uma generalização do problema de Erdős–Rothschild para padrões de grafos completos

por

Denilson Amaral Nolibos

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de

Doutor em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Matemática Discreta

Orientador: Prof. Dr. Carlos Hoppen

Banca examinadora:

Prof. Dr. Fabricio Siqueira Benevides
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Guilherme Oliveira Mota
Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Tese defendida em
abril de 2021.

Prof. Dr. Lucas Silva Oliveira
Coordenador

AGRADECIMENTOS

Para um projeto de quase seis anos, não é tarefa fácil sintetizar agradecimentos em poucas palavras, sem correr o risco de cair no lugar-comum.

Quando um projeto como este começa, a família, esposa e filhos acabam vivenciando diretamente as mudanças na rotina. Se não foi fácil para mim, tenho certeza que eles receberam o impacto dessas dificuldades juntamente comigo. Desta forma, quero que saibam, Aline, minha esposa, Vinicius e Beatriz, meus filhos, que este trabalho também é de vocês, obrigado pela compreensão, pelo apoio incondicional e pelo carinho nos momentos de dificuldades.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Hoppen, minha eterna gratidão pela excelência da orientação, pela paciência em todos os momentos, pelos ensinamentos valiosos, pelo exemplo de profissional abnegado, cientista de primeiro nível com uma simplicidade admirável. Saiba que o Sr. foi a pessoa certa no lugar certo para que este projeto se concretizasse.

Agradeço aos meus familiares que sempre tiveram uma palavra de incentivo nos momentos difíceis. Em especial, agradeço aos meus pais Pedro e Nair, pelas bases moral e intelectual que me proporcionaram, de forma que tive as condições necessárias para o término deste projeto.

Aos prezados professores integrantes do PPGMAp, minha admiração e agradecimento. É impressionante o nível do trabalho desenvolvido pelos senhores. Um trabalho que divulgarei e defenderei todas as vezes que precisar, pois sei o quanto trabalham diuturnamente em prol da ciência.

Aos cientistas alemães, o Prof. Dr. Hanno Lefmann e Dr. Knut Odermann, meus agradecimentos pelo excelente convívio, pelos ensinamentos, pela camaradagem nos momentos em que tive a oportunidade de aprender com os senhores.

Aos componentes da banca examinadora, professores doutores Fabricio Siqueira Benevides, Guilherme Oliveira Mota e Vilmar Trevisan, obrigado pela camaradagem, pelo empenho em terem estudado e contribuído com este trabalho, desde o período de qualificação.

Aos colegas do PPGMAp, obrigado pela parceria. Um agradecimento especial ao Kauê Cardoso e à Débora Dalmolin, colegas com os quais desfrutei dias e dias de estudo incessante para o exame de conhecimentos. Vocês também são parte importante deste sucesso, obrigado e contem comigo sempre.

Aos colegas do Colégio Militar de Porto Alegre, que compensaram a minha ausência durante o ano letivo de 2019, minha gratidão. Um agradecimento especial ao Prof. Dr. Orlando Vieira Furtado Filho por ter me apoiado no início do projeto.

Agradeço ao Instituto de Matemática e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul pela excelência das atividades de ensino e administrativas.

Sumário

LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE SÍMBOLOS	ix
RESUMO	x
ABSTRACT	xi
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivos e Resultados Principais	4
1.2 Organização do trabalho	12
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	14
3 DEFINIÇÕES INICIAIS E RESULTADOS BÁSICOS	21
3.1 Resultados gerais para grafos	24
3.2 Grafos Multipartidos Completos	25
4 A EXTREMALIDADE E OS GRAFOS MULTIPARTIDOS COM- PLETOS	28
4.1 Resultados gerais	28
4.2 A extremalidade em grafos \mathcal{P}_K -livres	31
4.3 Um resultado para a família $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$	42
5 FERRAMENTAS DA COMBINATÓRIA EXTREMAL	46
5.1 Lema de Regularidade de Szemerédi	46
5.2 Grafo Reduzido Multicolorido e algumas consequências	48

5.2.1	Lemas de Imersão	49
5.3	Estabilidade	54
5.4	Outros resultados necessários	56
5.4.1	A Função Entropia	56
5.4.2	O Teorema de Hall Generalizado	57
6	A ESTABILIDADE DE CORES EM GRAFOS $\mathcal{P}_{(K_K, \geq S)}$-LIVRES	58
7	O RESULTADO EXATO	76
8	CONCLUSÃO	91
8.1	Contribuições desta tese	91
8.2	Questões em aberto	94
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	99

Lista de Figuras

Figura 1.1	Colorações de K_4 que induzem partições isomorfas.	5
Figura 1.2	Uma coloração de K_3 com padrão P_M e uma coloração de K_4 com padrão P_A	5
Figura 1.3	Um grafo 3-partido completo.	7
Figura 1.4	Colorações de K_4 que representam todos os padrões na família $\mathcal{P}_{(K_4, \geq 5)}$, composta por três pares não-isomorfos (K_4, P_i)	8
Figura 2.1	Padrões T_0 de K_3 e P_2 de K_4	18
Figura 4.1	Uma extensão de $\widehat{H}(K_3, P_A)$ -livre.	31
Figura 4.2	Dois vértices independentes ligados ao subgrafo H	33
Figura 4.3	O clone \tilde{v} de um vértice v	35
Figura 4.4	A aresta vw	41
Figura 4.5	A escolha de \widehat{H}_1^w	43
Figura 4.6	Elementos da imagem e contradomínio da função ϕ	44
Figura 5.1	Um grafo reduzido multicolorido $H(\eta)$ com três vértices.	48
Figura 5.2	Um grafo reduzido multicolorido $H(\eta)$ que contém \widehat{K}_3	53
Figura 7.1	Um grafo reduzido para o Caso 1, com $k = 6$ e $s \leq 11$, onde pelo menos uma cor abundante aparece na vizinhança de x	79
Figura 7.2	Para $k = 6$ e $s = 14$, um grafo reduzido H proveniente de $\widehat{G} \in \mathcal{C}_1$ em que pelo menos quatro cores são abundantes na vizinhança de x	82
Figura 7.3	Para $k = 6$ e $s = 14$, um grafo reduzido H proveniente de $\widehat{G} \in \mathcal{C}_2$ em que não é possível garantir a existência de cor rara entre as demais classes.	83
Figura 8.1	Duas colorações de K_4 que induzem padrões $P_1 \in \mathcal{P}_1$ e $P_2 \notin \mathcal{P}_1$	96

LISTA DE SÍMBOLOS

$[n] = \{1, \dots, n\}$.

K_k : grafo completo de k vértices.

$K_{a,b}$: grafo bipartido completo com $|V_1| = a$ e $|V_2| = b$.

P_A : padrão arco-íris (todas as arestas assumem cores distintas).

P_M : padrão monocromático (todas as arestas possuem a mesma cor).

\mathcal{P} : família de pares do tipo (F, P) .

\mathcal{P}_K : família de pares do tipo (K_{k_i}, P_i) .

$\mathcal{P}_{(F, \geq s)}$: família de pares (F, P) onde P possui pelo menos s classes.

$\mathcal{C}_{r,(F,P)}(G)$: conjunto de r -colorações (F, P) -livres de G .

$c_{r,(F,P)}(n)$: $\max \{ |\mathcal{C}_{r,(F,P)}(G)| : |V(G)| = n \}$.

$\mathcal{C}_{r,\mathcal{P}}(G)$: conjunto de r -colorações \mathcal{P} -livres de G .

$c_{r,\mathcal{P}}(n)$: $\max \{ |\mathcal{C}_{r,\mathcal{P}}(G)| : |V(G)| = n \}$.

RESUMO

A presente tese de doutorado trata de um problema extremal de coloração de arestas de grafos. Mais precisamente, nós trabalhamos em uma extensão do Problema de Erdős e Rothschild para padrões de grafos completos. Nosso principal resultado prova que, para n suficientemente grande e $r \geq r_0(k, s, t)$, todo grafo G tem no máximo $r^{t_{k-1}(n)}$ colorações que são livres de cópias de K_k coloridas com s ou mais cores. Além disso, mostramos que o único grafo que alcança este número de r -colorações é o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$. Como resultados parciais, demonstramos que para toda família \mathcal{P}_K de pares (K_k, P) , onde P representa um padrão de K_k induzido por uma r -coloração, existe um grafo multipartido completo que é \mathcal{P}_K -extremal. Na sequência, mostramos que, sendo $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$ a família de todos os padrões com s ou mais classes de um grafo completo K_k , todo grafo $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$ -extremal deve ser multipartido completo. Também apresentamos, como parte da estratégia para a demonstração do resultado exato, a Propriedade de Estabilidade de Cores para grafos, a qual prova que grafos $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$ -extremais que têm o número de r -colorações maior que $r^{t_{k-1}(n)}$ devem ter uma estrutura “próxima” do grafo de Turán $T_{k-1}(n)$. Pela forma como montamos a estratégia na prova da estabilidade de cores, obtivemos uma melhoria significativa para o parâmetro r_0 em relação ao exigido por Hoppen, Lefmann e Odermann [26] para o padrão arco-íris, além de apresentar cotas inferiores para este parâmetro para todos os valores de $2 \leq s < \binom{k}{2}$.

ABSTRACT

This thesis deals with an extremal problem of edge-colorings about graphs. More precisely, we worked on an extension of the Erdős–Rothschild Problem for complete graph patterns. Our main result proves that, for n large enough and $r \geq r_0(k, s, t)$, every graph G has at most $r^{t_{k-1}(n)}$ colorings that avoid copies of K_k colored with s or more colors. In addition to this, we show that the only graph that reaches this number of r -colorings is the Turán graph $T_{k-1}(n)$. As partial results, we demonstrate that for any family \mathcal{P}_K of pairs (K_k, P) , where P represents a pattern of K_k induced by an r -coloring, there is a complete multipartite graph that is \mathcal{P}_K -extremal. We also show that, if $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$ is the family of all patterns of a complete graph K_k with s or more classes, every $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$ -extremal graph must be complete multipartite. We also present, as part of the strategy for demonstrating the exact result, the Color Stability Property for graphs, which proves that $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$ -extremal graphs must have a structure “close” to the Turán graph $T_{k-1}(n)$. Due to the way we set up the strategy in the color stability, we obtained a significant improvement on the number of colors r_0 in relation to the number required by Hoppen, Lefmann and Odermann [26] for the rainbow pattern. We also present lower bounds on this parameter for all values of $2 \leq s < \binom{k}{2}$.

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho situa-se na grande área Matemática Discreta, subárea Teoria Extremal de Grafos. Problemas extremais para grafos vêm sendo estudados desde o princípio do século passado. Um grafo G com n vértices é dito F -extremal se não possui F como subgrafo (não necessariamente induzido) e, dentre os grafos com essa propriedade, possui o maior número de arestas possível, número este denotado por $\text{ex}(n, F)$. Mantel [35] aparece com um trabalho de 1907 no qual prova que um grafo de n vértices e mais que $n^2/4$ arestas deve possuir pelo menos um triângulo. Mas o matemático húngaro Paul Turán, com seu célebre Teorema de Turán [41], foi quem realmente deu início à área de problemas extremais e é considerado o matemático precursor nesta área. Turán provou que para quaisquer inteiros positivos $n \geq k$, o grafo extremal para K_k entre todos os grafos de n vértices, a menos de isomorfismos, é o grafo $(k-1)$ -partido completo balanceado, denotado por $T_{k-1}(n)$. O seu número de arestas é denotado por $t_{k-1}(n)$. Vejamos o teorema enunciado de maneira formal.

Teorema 1.1. *(Turán, 1941, [41]) Sejam inteiros $n \geq 2$ e $k \geq 2$. Todo grafo G com n vértices e $t_{k-1}(n)$ arestas que não contém K_k como subgrafo é isomorfo ao grafo de Turán $T_{k-1}(n)$.*

Esse problema pode ser naturalmente estendido para um problema em que o grafo a ser evitado como subgrafo de G , dito grafo proibido F , é um grafo qualquer, sendo que ainda não se sabe calcular exatamente $\text{ex}(n, F)$ para grafos F em geral, mas resultados assintóticos foram obtidos em função do número cromático $\chi(F)$. O resultado principal nesta linha é o Teorema de Erdős–Stone [13], o qual apresentamos a seguir.

Teorema 1.2. (Erdős–Stone, 1946, [13]) Para todo grafo F e todo $\varepsilon > 0$, existe um inteiro n_0 tal que para todo grafo com $n \geq n_0$ vértices, vale que

$$\left(1 - \frac{1}{\chi(F) - 1}\right) \frac{n^2}{2} - \chi(F) + 1 \leq \text{ex}(n, F) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(F) - 1} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2}.$$

O Teorema de Erdős–Stone implica que, para $\chi(F) \geq 3$, o número de arestas do grafo F -extremal deve ser muito próximo de $t_{k-1}(n)$. Assim, podemos inferir um corolário deste teorema: um resultado assintótico é conhecido para qualquer grafo não bipartido. Note que quando F é bipartido e possui arestas, isto é, $\chi(F) = 2$, a desigualdade afirma apenas que o grafo F -extremal é esparso, pois implica $\text{ex}(n, F) = o(n^2)$, não trazendo informações precisas sobre a ordem de grandeza de $\text{ex}(n, F)$. Devido a esta questão, o problema de Turán envolvendo grafos bipartidos é um importante campo de pesquisa dentro da Combinatória Extremal, como podemos ver na resenha de Füredi e Simonovits [16] e nas suas referências. A seguir, trazemos um resultado mais forte para grafos bipartidos devido a Kővári, Sós e Turán [31], que obtém uma cota superior subquadrática para grafos bipartidos completos.

Teorema 1.3. (Kővári, Sós e Turán, 1954, [16]) Para todo $K_{a,b}$ com $a \leq b$, existe uma constante c tal que

$$\text{ex}(n, K_{a,b}) \leq c \cdot n^{2 - \frac{1}{a}}.$$

No contexto de grafos, *Problemas Extremais do Tipo Turán* são problemas em que, dada uma família \mathcal{L} de grafos, queremos determinar qual o grafo de n vértices que possui o maior número de arestas evitando qualquer integrante da família \mathcal{L} como subgrafo. Estes problemas foram sendo adaptados e puderam ser facilmente estendidos para os hipergrafos [29].

Com a natural evolução das pesquisas na área, surgiram variações dos *Problemas Extremais do Tipo Turán*. Erdős e Rothschild [12] abriram um novo

campo de estudo ao adicionarem um ingrediente ao problema: as cores das arestas. A função a ser maximizada passa a ser o número de *colorações de arestas* do grafo G de forma que não tenhamos o subgrafo proibido F *colorido* de uma certa maneira. Com os grafos F -extremais sendo candidatos naturais para a maximalidade, esse problema envolve a seguinte questão: se aumentamos o número de arestas, obtemos mais elementos para colorir, mas ao fazermos isto podemos gerar cópias do grafo proibido, fato que vai nos impor restrições nas formas de colorir as arestas. Encontrar o equilíbrio entre essas duas possibilidades, em muitos casos, é bastante difícil e gera diversos problemas interessantes. Nos referimos a estes problemas extremais envolvendo colorações de arestas como Problemas de Erdős–Rothschild.

Erdős e Rothschild conjecturaram que, entre todos os grafos com n vértices, o maior número de 2-colorações sem conter cópia monocromática de K_k era obtido com o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$. Com o passar do tempo, surgiram questionamentos sobre a dependência no número de cores envolvidas. Se ao invés de duas ou três cores disponíveis, tratarmos de r -colorações, este novo parâmetro impõe aos problemas um grau de dificuldade ainda maior.

O problema central desta tese é uma extensão do *Problema de Erdős–Rothschild* que, por um lado, busca apresentar o problema com maior generalidade e, por outro lado, busca investigar melhorias nas relações entre parâmetros de resultados já obtidos. Na revisão bibliográfica do Capítulo 2, vamos trazer os resultados já existentes relacionados ao nosso problema e mencionar oportunidades de melhorias na relação entre os parâmetros em soluções de problemas desta classe.

Para fins de fluidez do texto, definições básicas de Teoria de Grafos serão apresentadas no Capítulo 3, de forma que seja possível ao leitor dispensar sua

leitura se assim desejar. Traremos antecipadamente os conceitos e notações que são menos conhecidos e indispensáveis para o entendimento dos nossos objetivos.

1.1 Objetivos e Resultados Principais

Este trabalho trata de problemas que envolvem colorações em grafos. Uma r -coloração de arestas de um grafo G é uma função $f: E(G) \rightarrow [r]$ que associa uma cor de $[r] = \{1, \dots, r\}$ a cada aresta de G . Neste trabalho nos referimos às r -colorações de arestas simplesmente como r -colorações. Trataremos de r -colorações de um grafo $G = (V, E)$ que evitam determinados padrões de colorações.

Dado um grafo F , definimos um *padrão* P de F como qualquer partição de seu conjunto de arestas. Se \widehat{F} denota uma cópia do grafo F em que as arestas estão coloridas, o padrão P dado pela coloração em \widehat{F} é simplesmente o padrão induzido pelas classes de cores. Note que, ao definirmos um padrão, ignoramos os nomes das cores, o que faz com que o padrão P não dependa da rotulação das arestas e das cores em si, e sim da forma como estas estão distribuídas.

Se P é um padrão de um grafo F , uma partição do conjunto de arestas de um grafo G é dita (F, P) -livre se não induz uma partição de F isomorfa a P . Dizemos que dois grafos G e G' são isomorfos se existe uma bijeção entre os seus conjuntos de vértices, $f: V(G) \rightarrow V(G')$, tal que quaisquer dois vértices u e v de G são adjacentes em G se e somente se $f(u)$ e $f(v)$ são adjacentes em G' . Para a noção de isomorfismo no contexto das colorações, consideramos, além da função f , o conjunto C de cores atribuídas às arestas e uma segunda função bijetiva $g: C(E(G)) \rightarrow C(E(G'))$ tal que toda aresta de cor c em G tenha cor $g(c)$ em G' . Assim, dizemos que existe um *isomorfismo colorido* de G em G' . Ao particionarmos

os grafos G e G' em classes induzidas pelas cores das arestas, obteremos duas partições P e P' . Dizemos que estas partições são isomorfas pois, com as duas funções f e g definidas acima, P e P' são indistinguíveis ao desconsiderarmos os rótulos das classes e dos vértices.

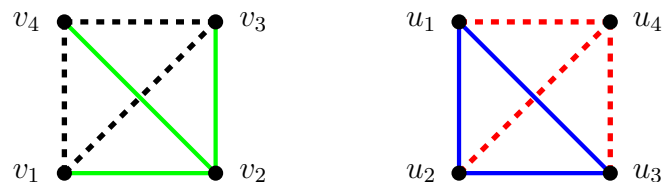


Figura 1.1: Colorações de K_4 que induzem partições isomorfas.

Se a partição de F induzida pela coloração contém uma única classe, o padrão P é dito *monocromático* e é denotado por P_M , já se a partição contiver cada aresta de F em uma classe distinta, o padrão P é dito *arco-íris* e é denotado por P_A .

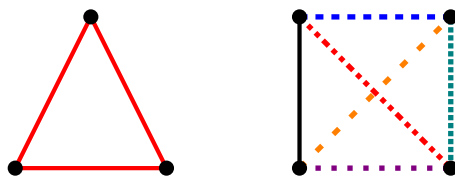


Figura 1.2: Uma coloração de K_3 com padrão P_M e uma coloração de K_4 com padrão P_A

Na Figura 1.2 fica clara a diferença entre um padrão P e uma r -coloração de um dado grafo F . Observe que um único padrão P_M de F pode ser colorido de r maneiras diferentes.

Dados um inteiro positivo r , um grafo F e um padrão P de F , denotamos por $\mathcal{C}_{r,(F,P)}(G)$ o conjunto de todas as r -colorações (F, P) -livres de um grafo G .

Escrevemos $c_{r,(F,P)}(n) = \max \{ |\mathcal{C}_{r,(F,P)}(G)| : |V(G)| = n \}$, e dizemos que um grafo G de n vértices é $(r, (F, P))$ -*extremal* se $|\mathcal{C}_{r,(F,P)}(G)| = c_{r,(F,P)}(n)$. Vemos que a conjectura de Erdős–Rothschild pode ser escrita na forma $c_{2,(K_k,P_M)}(n) = 2^{t_{k-1}(n)}$, isto é, é a instância do problema em que $r = 2$ e $(F, P) = (K_k, P_M)$. Neste trabalho, abordaremos o Problema de Erdős–Rothschild sob uma perspectiva mais geral. Seja \mathcal{P} uma família arbitrária não vazia cujos elementos são da forma (F, P) , onde F é um grafo e P é um padrão de F . Dizemos que uma r -coloração de um grafo G é \mathcal{P} -livre se esta for (F, P) -livre, para todo par $(F, P) \in \mathcal{P}$. Da mesma forma, temos $\mathcal{C}_{r,\mathcal{P}}(G)$ como o conjunto de todas as r -colorações \mathcal{P} -livres de um grafo G . Escrevemos

$$c_{r,\mathcal{P}}(n) = \max \{ |\mathcal{C}_{r,\mathcal{P}}(G)| : |V(G)| = n \},$$

e dizemos que um grafo G com n vértices é (r, \mathcal{P}) -*extremal* se $|\mathcal{C}_{r,\mathcal{P}}(G)| = c_{r,\mathcal{P}}(n)$. O nosso problema consiste em determinar $c_{r,\mathcal{P}}(n)$ para cada família \mathcal{P} e caracterizar os grafos com n vértices que admitem o maior número de r -colorações \mathcal{P} -livres para todo $n \in \mathbb{N}$. Como se pode esperar, a solução vai depender de quais restrições são impostas à família \mathcal{P} . Em nosso trabalho, resolvemos o problema completamente para diversas famílias de grafos completos. Também mostramos uma propriedade necessária para que um grafo G seja (r, \mathcal{P}) -*extremal* sempre que \mathcal{P} é uma família de padrões de grafos completos.

Antes de enunciarmos nossos resultados, considere que um grafo G é *multipartido* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em subconjuntos (ou classes) onde os vértices de uma mesma classe são dois a dois não-vizinhos. Quando, além disso, quaisquer dois vértices u e v pertencentes a classes distintas são vizinhos, o grafo é chamado de *multipartido completo*. Um grafo k -*partido completo* é um grafo multipartido completo com k partes. Na Figura 1.3, temos um grafo 3-partido completo.

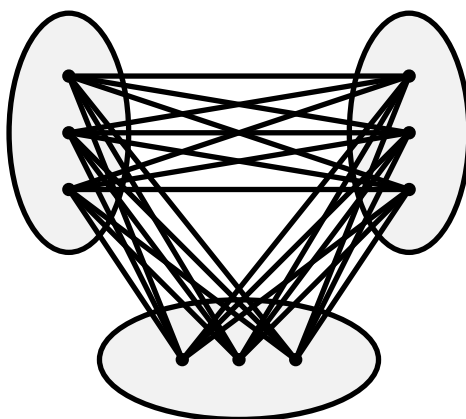


Figura 1.3: Um grafo 3-partido completo.

O nosso primeiro resultado é fruto de uma generalização do Teorema 2.6, que será apresentado na revisão bibliográfica, de Benevides, Hoppen e Sampaio [7]. Considere \mathcal{I} um conjunto de índices, possivelmente infinito, e seja

$$\mathcal{P}_K = \{(K_{k_i}, P_i) : i \in \mathcal{I}\}$$

uma família arbitrária de padrões de grafos completos, onde $k_i \geq 3$ e P_i é um padrão de K_{k_i} , para cada $i \in \mathcal{I}$. Mostraremos que existem grafos multipartidos completos que são (r, \mathcal{P}_K) -extremais.

Teorema 1.4. *Sejam $r \geq 2$ inteiro e \mathcal{P}_K uma família de padrões de grafos completos. Para todo número natural n , existe um grafo multipartido completo G^* de n vértices que é (r, \mathcal{P}_K) -extremal. Além disso, para qualquer grafo (r, \mathcal{P}_K) -extremal G de n vértices, existe um desses grafos G^* tal que $|E(G^*)| \geq |E(G)|$.*

Em seguida, denotamos por $\mathcal{P}_{(F, \geq s)}$ a família dos padrões do grafo F com pelo menos s classes. Nesta notação, r -colorações de um dado grafo G que são $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$ -livres, por exemplo, não contêm cópias de K_k coloridas com s ou mais cores. Consideremos o caso particular em que temos $k = 4$, $r \geq 6$ e $s = 5$.

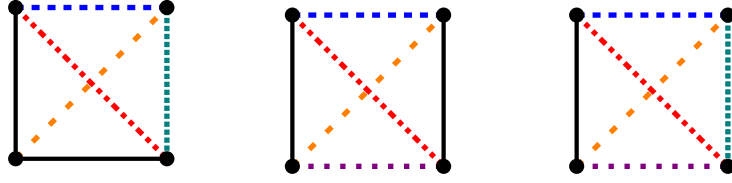


Figura 1.4: Colorações de K_4 que representam todos os padrões na família $\mathcal{P}_{(K_4, \geq 5)}$, composta por três pares não-isomorfos (K_4, P_i) .

Observe que as colorações de K_4 com exatamente cinco cores induzem somente dois padrões diferentes, um onde as duas arestas de mesma cor são incidentes no mesmo vértice e outro onde estas arestas formam um emparelhamento. Já as colorações com seis cores induzem um único padrão, com uma aresta em cada classe. Na Figura 1.4 vemos estes três padrões, que juntos formam a família $\mathcal{P}_{(K_4, \geq 5)}$.

Note também que, se $s = 1$ e $r \geq 2$, encontrar os grafos de n vértices que atingem $c_{r, (K_k, \geq 1)}(n)$ colorações é apenas uma reformulação do problema de Turán, pois, na medida em que proibimos qualquer padrão de K_k com uma classe ou mais, não admitimos nenhum K_k como subgrafo de G . Sendo assim, o maior número de colorações será atingido pelo grafo com essa propriedade e o maior número de arestas. Este é exatamente o problema resolvido por Turán, encontrar um grafo de n vértices K_k -livre com o maior número de arestas e conseqüentemente, neste caso, de colorações. Se $s = \binom{k}{2}$, determinar $c_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(n)$ é precisamente o problema de encontrar grafos $(r, (K_k, P_A))$ -extremais, onde P_A é o padrão arco-íris de K_k .

Nosso próximo teorema apresenta um resultado para a família $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$. Enquanto o Teorema 1.4 afirma que existe um grafo multipartido completo que é (r, \mathcal{P}_K) -extremal, o Teorema 1.5 provará que todo grafo $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremal

é um grafo multipartido completo, desde que s seja suficientemente grande como função de k . Ao restringir as famílias de grafos completos que consideramos, obtivemos um resultado mais preciso que o do Teorema 1.4.

Teorema 1.5. *Sejam $k \geq 4$, $r \geq s$ e $(k + 1) \leq s \leq \binom{k}{2}$. Então todo grafo $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremal é um grafo multipartido completo.*

Diferentemente do Teorema 1.5 que somente apresenta uma condição necessária para que os grafos $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremais sejam multipartidos completos, nossos próximos resultados determinam exatamente quais são os grafos $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremais. Precisamos definir alguns parâmetros referentes à quantidade r de cores disponíveis e seus vínculos com outros parâmetros utilizados. Inicialmente, definimos r_0^* como o menor inteiro tal que o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ seja sempre o grafo $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremal para todo $r \geq r_0^*$ e n suficientemente grande. A existência de r_0^* segue de resultados anteriores, como vamos deixar claro na revisão bibliográfica.

Sabemos que até um certo número r_1 de cores disponíveis, temos para $r \leq r_1$ que

$$|\mathcal{C}_{r, (K_k, \geq s)}(K_n)| > |\mathcal{C}_{r, (K_k, \geq s)}(T_{k-1}(n))|. \quad (1.1)$$

Se nosso grafo for um grafo de Turán $T_{k-1}(n)$, podemos utilizar arbitrariamente as r cores pois não temos cópias de K_k . Ao fixarmos $(s - 1)$ cores e colorirmos um K_n com essas cores, não vamos obter cópias de K_k com s ou mais cores e, dependendo do valor de r , já alcançamos a desigualdade (1.1). Para valores grandes de n , isso se verifica sempre que

$$r^{\frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2}{2}} < (s-1)^{\binom{n}{2}} \iff r < (s-1)^{\frac{k-1}{k-2}},$$

sendo o expoente de r , $\left(\frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2}{2}\right)$, proveniente da Proposição 3.1.

Desta forma, definimos $r_1(k, s) = \lceil (s-1)^{\frac{k-1}{k-2}} - 1 \rceil$, função que nos dá uma cota inferior para r_0^* . Fica claro que $r_0^* \geq r_1(k, s) + 1$ para o problema.

O parâmetro s tem um papel primordial no desenvolvimento de nossas estratégias para as demonstrações e cálculos. Se s é máximo ($s = \binom{k}{2}$), muitas colorações das cópias de K_k são permitidas, na verdade todas, exceto as que induzem o padrão arco-íris, já se s é mínimo ($s = 2$), permitimos somente o padrão monocromático para K_k . Essas diferenças nos levaram a concluir que, se dividíssemos o problema em partes de acordo com o parâmetro s , poderíamos obter valores de r menores de forma que nossa estratégia nas demonstrações ainda funcionasse. Nossos esforços vão no sentido de encontrar o maior número de triplas (r, k, s) para os quais a solução exata é conhecida, sempre procurando obter r mais próximo de r_0^* . Nos dois teoremas a seguir, para k e s fixos, queremos otimizar os valores de r para os quais a prova do nosso resultado exato seja válida. Portanto, consideramos os valores de s em diferentes intervalos de acordo com o parâmetro $s_0(k)$, definido como segue.

$$s_0(k) = \binom{k}{2} - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 2. \quad (1.2)$$

Se $s > s_0(k)$, seja uma outra função adicional $s_t(k)$. Para $t \in [k]$, definimos

$$s_t(k) = \binom{k}{2} - k + t. \quad (1.3)$$

O parâmetro t terá um papel na melhoria das condições de dependência entre r e o par (k, s) . Por exemplo, quando $s = s_k(k) = \binom{k}{2}$, as exigências para os vínculos que serão estabelecidos são diferentes de quando $s = s_1(k) = \binom{k}{2} - k + 1$

Considere ainda, que r_0 é a menor quantidade de cores que devem estar disponíveis para que os argumentos utilizados nos nossos cálculos sejam válidos. O valor do parâmetro r_0 será definido de forma diferente para diferentes intervalos de s , isto é, $r_0 = r_0(k, s, t)$. A definição depende de conceitos auxiliares e será apresentada no Capítulo 6.

De posse de todas estas definições, podemos enunciar o próximo teorema que é a principal contribuição desta tese. Ao fixarmos inteiros positivos $k \geq 4$, $s \leq \binom{k}{2}$ e $r \geq r_0$, conseguimos determinar quais são os grafos $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremais, para todo n suficientemente grande.

Teorema 1.6. *Sejam $k \geq 4$ e $2 \leq s \leq \binom{k}{2}$ inteiros e seja $t \in \{0, 1, \dots, k\}$ o menor índice tal que $s \leq s_t(k)$ ¹. Fixe $r \geq r_0(k, s, t)$ conforme o Teorema 1.7. Existe $n_0 = n_0(r, k, s)$ tal que o seguinte é válido para todo $n \geq n_0$. Se G é um grafo de n vértices, com $n > n_0$, então $|\mathcal{C}_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(G)| \leq r^{tk-1(n)}$. Além disso, o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ é o único grafo de n vértices para o qual a igualdade é alcançada.*

Para a demonstração do resultado exato, foi utilizada uma importante propriedade dos grafos que satisfazem $|\mathcal{C}_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(G)| \geq r^{tk-1(n)}$, a dita *Propriedade de Estabilidade de Cores*, que afirma que grafos que são potencialmente candidatos à $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremalidade devem ser estruturalmente próximos de $T_{k-1}(n)$. A restrição em r_0 na demonstração do Teorema 1.6 é consequência do Teorema 1.7.

Teorema 1.7. *Sejam $k \geq 4$, e $2 \leq s \leq \binom{k}{2}$ inteiros e seja $t \in \{0, 1, \dots, k\}$ o menor índice tal que $s \leq s_t(k)$. Fixe $r \geq r_0(k, s, t)$ conforme as desigualdades (6.1) ou (6.2). Para todo $\delta > 0$, existe $n'_0 = n'_0(\delta, r, k, s)$ tal que o seguinte é verdadeiro. Se $G = (V, E)$ é um grafo de $n \geq n'_0$ vértices tal que $|\mathcal{C}_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(G)| \geq r^{tk-1(n)}$,*

¹Esta escolha produz dois intervalos não triviais, $[2, s_0(k)]$ e $[s_0(k) + 1, s_1(k)]$. Os demais intervalos contém um único elemento.

então existe uma partição $V = W_1 \cup \dots \cup W_{k-1}$ tal que no máximo δn^2 arestas têm ambas as extremidades em alguma classe W_i .

1.2 Organização do trabalho

Este trabalho está dividido de forma que, para o leitor interessado em algum tópico específico, cada capítulo seja autocontido. A distribuição dos assuntos começa com o Capítulo 2, que traz uma revisão bibliográfica com os principais resultados da literatura relacionados ao nosso trabalho.

Em seguida, o Capítulo 3 traz definições básicas de Teoria dos Grafos e que poderá ser consultado a critério do leitor.

No Capítulo 4, vamos desenvolver estratégias que nos levarão a demonstrar o Teorema 1.4 e o Teorema 1.5. Estes serão passos intermediários, mas não menos importantes, para a prova do resultado exato, o Teorema 1.6.

A seguir, temos no Capítulo 5 uma série de teoremas, lemas e definições mais específicas da Combinatória Extremal, as quais nomeamos Ferramentas da Combinatória Extremal. São um conjunto de tópicos recorrentes nessa área e fundamentais para o desenvolvimento dos capítulos posteriores.

No Capítulo 6, apresentamos a Propriedade de Estabilidade de Cores para grafos $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$ -livres. Vamos mostrar que se um grafo G satisfaz a desigualdade $|\mathcal{C}_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(G)| \geq r^{t_{k-1}(n)}$, então sua estrutura deve ser próxima do grafo de Turán $T_{k-1}(n)$.

Finalmente, o Capítulo 7 traz o desenvolvimento da prova de nosso principal teorema, o resultado exato, onde mostramos que dadas as condições

necessárias para a validade da Propriedade de Estabilidade de Cores, todo grafo G de n vértices irá satisfazer $|\mathcal{C}_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(G)| \leq r^{t_{k-1}(n)}$. Mostraremos que o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ é o único grafo de n vértices para o qual a igualdade é alcançada.

Na conclusão, apresentamos uma discussão dos principais resultados obtidos e algumas possibilidades de prosseguimento das pesquisas, com problemas em aberto a partir do que realizamos aqui.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Vamos apresentar alguns dos principais resultados da literatura relacionados ao nosso trabalho, utilizando nossa notação e, sempre que possível, discutindo os vínculos com nossos resultados. A descrição destes resultados será feita pelo tipo de problema abordado e não de forma cronológica. Considerando o que apresentamos na introdução, nossa revisão parte de um resultado de Yuster [43]. Desde a Conjectura de Erdős–Rothschild, tivemos um período sem grandes novidades na área, até que em 1996, Yuster deu uma resposta afirmativa a um caso da conjectura, provando o seguinte teorema.

Teorema 2.1. [43] *Sejam $r = 2$ e $n \geq 6$. Então $c_{2,(K_3,P_M)}(n) = 2^{\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor}$.*

Em 2004, Alon, Balogh, Keevash e Sudakov [1] provaram a Conjectura de Erdős e Rothschild, para todo $k \geq 3$ e $r = 2$. Eles também provaram que o mesmo resultado é válido para $r = 3$.

Teorema 2.2. [1] *Seja $k \geq 3$ um inteiro e seja $r \in \{2, 3\}$. Existe $n_0(k)$ tal que todo grafo G de ordem $n > n_0(k)$ tem $c_{r,(K_k,P_M)}(G) \leq r^{tk-1(n)}$. Além disso, o único grafo de n vértices em que $c_{r,(K_k,P_M)}(n) = r^{tk-1(n)}$ é o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$.*

Naquele trabalho, os autores mostraram também que o resultado não pode ser estendido para valores de $r \geq 4$, já que $c_{r,(K_k,P_M)}(n)$ se torna exponencialmente maior que $r^{tk-1(n)}$, o que torna o problema bem mais desafiador.

Um fato interessante na resolução de problemas extremais é que mesmo problemas parcialmente resolvidos geram possibilidades de pesquisas. Isto se deve à permanente busca de melhoria na dependência entre parâmetros tais como o número mínimo de vértices n_0 ou de cores disponíveis r . Ao analisarmos o

prova do Teorema 2.2 em [1], vemos uma desvantagem advinda da utilização do Lema de Regularidade de Szemerédi: o parâmetro n_0 deve ser um número extremamente grande (uma torre de dois com altura dependendo do parâmetro ε). Em 2018, Hàn e Jiménez [20] obtiveram cotas significativamente melhores para n_0 ($n_0(k) = \exp(Ck^4)$) para uma certa constante absoluta C em relação às constantes em [1], ao utilizarem o Método dos Contêineres, método que utiliza conceitos de hipergrafos e foi desenvolvido independentemente por Balogh, Morris e Samotij [5] e Saxton e Thomason [38]. Por outro lado, se focarmos nossas atenções no parâmetro r , outros resultados podem ser obtidos. Pikhurko e Yilma [36] encontraram os grafos que admitem o maior número de colorações para $r = 4$ e $k \in \{3, 4\}$, que são grafos multipartidos balanceados completos, mas que não são K_k -livres. Vejamos o teorema.

Teorema 2.3. [36] *Existe um n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ temos que*

$$c_{4,(K_3,P_M)}(n) = 4^{t_4(n)} \quad e \quad c_{4,(K_4,P_M)}(n) = 4^{t_9(n)}.$$

Além disso, $T_4(n)$ e $T_9(n)$, respectivamente, são os únicos grafos que alcançam o máximo.

Note que, neste resultado, temos a extremalidade em grafos que não são livres do grafo proibido para valores grandes de n . Aqui fica explícito o dilema entre o aumento do número de arestas e a presença de cópias do grafo proibido. Ao considerarmos um grafo que não é livre de K_k temos mais arestas para colorir, mas ao mesmo tempo temos que controlar o modo como se distribuem as cores nas arestas.

Em 2019, um grupo de pesquisadores formado por Botler, Corsten, Dankovics, Frankl, Hàn, Jiménez e Skokan [8] apresentou resultados para grafos $(r, (K_3, P_M))$ -extremais para $r = 5$ e $r = 6$.

Teorema 2.4. [8] *Para todo n , temos $c_{6,(K_3,P_M)}(n) = (c_n + o(1)) \cdot 3^{n^2/3} 4^{3n^2/16}$, onde c_n é uma constante que depende somente do valor de n módulo 8. Além disso, para valores grandes de n , se $c_{6,(K_3,P_M)}(G) = c_{6,(K_3,P_M)}(n)$, então G é isomorfo ao grafo de Turán $T_8(n)$.*

No mesmo trabalho, também provaram um resultado aproximado para $r = 5$, ao mostrarem uma cota superior para $c_{5,(K_3,P_M)}(n)$. Aqui temos novamente o fenômeno do grafo extremal conter cópias do grafo proibido. Isso sempre ocorre para o padrão monocromático de um grafo proibido quando $r \geq 4$. Nestes resultados, também foi utilizado o Método dos Contêineres.

Ainda na versão monocromática do problema, Hoppen, Kohayakawa e Lefmann [21] foram os primeiros a estudá-lo para grafos bipartidos F . Mais especificamente, eles trataram de colorações que proibiam um emparelhamento de ℓ arestas. Os mesmos autores, em 2014, trataram de algumas famílias de árvores, tais como caminhos e estrelas [22]. Estes são grafos que tem o número de Turán linear, ou seja, $ex(n, F) = O(n)$, o que faz com que a solução do problema utilize outro tipo de estratégia. Em um trabalho de 2020, Colucci, Györi e Methuku [10] melhoraram os resultados de Hoppen, Kohayakawa e Lefmann para grafos extremos considerando estrelas monocromáticas.

Um problema um pouco mais amplo, pois considera grafos completos de tamanhos diferentes, foi apresentado por Pikhurko, Staden e Yilma [37]. Um dos resultados obtidos pelos autores é que, dada um sequência de números naturais $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_\ell)$, ao evitarmos grafos completos monocromáticos de cor c e ordem k_c para toda cor $c \in \{1, \dots, \ell\}$, o grafo que admite o maior número de ℓ -colorações com essas restrições deve ser um grafo multipartido completo, resultado apresentado no seguinte teorema. Grafos com o maior número de colorações desse tipo são ditos \mathbf{k} -extremos.

Teorema 2.5. [37] *Para todo $n, \ell \in \mathbb{N}$ e $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^\ell$, existe um grafo \mathbf{k} -extremal que é multipartido completo.*

A demonstração do Teorema 2.5 não nos permite definir se este grafo multipartido completo é necessariamente único e é necessariamente balanceado, problema que se encontra em aberto. Ao trazermos o Teorema 2.5 para o nosso contexto, poderíamos dizer que ao evitarmos um conjunto de grafos completos de diferentes tamanhos, todos com padrão monocromático, existe um grafo multipartido completo que é extremal.

No decorrer do Capítulo 4, veremos que o nosso Teorema 1.4, na linha de identificar uma propriedade dos grafos extremais, generaliza o Teorema 2.6 abaixo, de Benevides, Hoppen e Sampaio em [7], o ampliando para uma família \mathcal{P}_K de pares (K_{k_i}, P_i) . O nosso teorema também engloba as instâncias do Teorema 2.5 que correspondem ao nosso problema.

Teorema 2.6. [7] *Seja \widehat{K}_k uma r -coloração de K_k que induz um padrão P . Para todo natural n , existe um grafo multipartido completo que é $(r, (K_k, P))$ -extremal.*

O trabalho constante em [7] foi importante referência para nossos resultados sendo que a estratégia desenvolvida pelos autores foi utilizada nesta tese em um contexto ainda mais geral. O Teorema 1.5 segue a linha do resultado obtido no Teorema 2.7, constante em [7], que afirma o seguinte.

Teorema 2.7. [7] *Sejam $r \geq 2$ e $k \geq 3$ inteiros e um padrão P induzido por uma r -coloração \widehat{K}_k de K_k e diferente dos padrões P_M e T_0 . Também assumamos que se $r = 2$, P é diferente do padrão P_2 (ver Figura 2.1). Todo grafo $(r, (K_k, P))$ -extremal é um grafo multipartido completo.*



Figura 2.1: Padrões T_0 de K_3 e P_2 de K_4 .

Resultados como os constantes no Teorema 1.5 e no Teorema 2.7 não fazem uma caracterização completa dos grafos extremais, mas sim identificam uma propriedade destes.

Podemos ver que, assim como variações do subgrafo proibido foram consideradas, a maneira como este é colorido também surgiu como uma nova variante do problema. Balogh [3] foi o primeiro a considerar r -colorações que evitavam cópias de um grafo F colorido de um modo não-monocromático. O problema proposto e resolvido por Balogh foi assim apresentado.

Teorema 2.8. [3] *Seja $k \geq 3$ um inteiro e \widehat{K}_k uma 2-coloração fixa de K_k que usa ambas as cores. Existe um $n_0(k)$ tal que todo grafo G de ordem $n > n_0(k)$ tem no máximo $2^{t_{k-1}(n)}$ colorações com duas cores que não contêm cópia de \widehat{K}_k . Além disso, o único grafo de n vértices que atinge o máximo é o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$.*

Apesar do Teorema 2.8 não ter falado em padrões, e sim de colorações, ele implica um resultado sobre padrões de duas cores e $r = 2$. Ao evitarmos um único padrão P de duas cores, o grafo extremal é o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$, para todo n suficientemente grande.

Um dos primeiros trabalhos que mencionou padrões de forma explícita foi apresentado por Hoppen e Lefmann em [23]. Os autores consideraram, como o par a ser evitado, um emparelhamento com um dado padrão P . Outros trabalhos com padrões foram desenvolvidos, tais como o que considerou estrelas arco-íris [27]

e o que considerou grafos completos arco-íris [26], referência esta essencial para o nosso trabalho e publicada por Hoppen, Lefmann e Odermann. O teorema a seguir traz a solução constante em [26] para o par (K_k, P_A) .

Teorema 2.9. [26] *Sejam r e $k \geq 3$ inteiros positivos tais que $r \geq \binom{k}{2}^{8k-4}$. Existe n_0 tal que todo grafo G de ordem $n > n_0$ satisfaz $c_{r,(K_k,P_A)}(G) \leq r^{tk-1(n)}$. Além disso, o único grafo de n vértices em que $c_{r,(K_k,P_A)}(n) = r^{tk-1(n)}$ é o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$.*

Note que a existência de r_0^* , definido na introdução, segue diretamente do Teorema 2.9. Isto se deve ao fato de que, ao proibirmos um ou mais padrões além do arco-íris, o número de colorações válidas só poderá diminuir, nunca aumentar, o que faz com que o resultado seja o mesmo para estas novas famílias. Desta forma, é verdade que existe r_0^* tal que $T_{k-1}(n)$ superará qualquer grafo de n vértices e será o grafo $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremal (veja Proposição 4.1 (b)). Observe ainda, que o Teorema 2.9 exige uma grande quantidade r de cores disponíveis para garantir a extremalidade de $T_{k-1}(n)$. O nosso Teorema 1.6, no caso específico para $s = \binom{k}{2}$, melhora significativamente a cota inferior do parâmetro r para grafos (K_k, P_A) -extremais. Assim como no caso do Teorema 2.2, a cota inferior para n_0 depende do Lema de Regularidade. Isso também é uma característica do nosso resultado.

Os autores de [26] mostraram em [28] que é possível obter resultados mais precisos limitando k ao caso específico $k = 3$.

Teorema 2.10. [28] *Seja $r \geq 5$ um inteiro positivo. Existe n_0 tal que todo grafo de ordem $n > n_0$ tem no máximo $c_{r,(K_3,P_A)}(n) \leq r^{t_2(n)}$. Além disso, o único grafo de n vértices em que $c_{r,(K_3,P_A)}(n) = r^{t_2(n)}$ é o grafo de Turán $T_2(n)$.*

Note que a cota inferior para o parâmetro r nesse teorema é muito melhor que a do Teorema 2.9 para $k = 3$. Já se tomarmos $r \geq 10$, é possível

melhorar muito o parâmetro n_0 , pois todo $n \geq 5$ é suficiente para obtermos a solução ótima.

Teorema 2.11. [28] *Para todo $n \geq 5$ e $r \geq 10$, $c_{r,(K_3, P_A)}(n) \leq r^{t_2(n)}$ e este número é alcançado somente pelo grafo de Turán $T_2(n)$.*

Em 2019, Balogh e Li [4] conseguiram resolver o problema dos casos que faltavam no Teorema 2.11. Os autores mostraram que o número de r -colorações (K_3, P_A) -livres¹ de K_n é $\left(\binom{r}{2} + o(1)\right) 2^{\binom{n}{2}}$. Esse resultado indica que quase todas as r -colorações (K_3, P_A) -livres de K_n utilizam apenas duas cores.

Outro resultado constante em [4], apresentado no Teorema 2.12, prova uma conjectura de Hoppen, Lefmann e Odermann [28], que se originou do Teorema 2.10. A conjectura propunha que, para $r = 3$, o grafo extremal seria K_n e, se $r = 4$, o grafo extremal seria o grafo de Turán $T_2(n)$, sempre com n suficientemente grande, o que foi provado pelo seguinte teorema de Balogh e Li.

Teorema 2.12. [4] *Existe n_0 tal que para todo $n > n_0$ temos o seguinte. O único grafo $(3, (K_3, P_A))$ -extremal é o grafo completo K_n e o único grafo $(4, (K_3, P_A))$ -extremal é o grafo de Turán $T_2(n)$.*

Como já mencionamos, a busca por melhoria de parâmetros, inclusive de problemas já resolvidos parcialmente, faz parte da Combinatória Extremal. A variação no número de cores gera problemas diferentes e, muitas vezes, soluções diferentes, como acontece neste caso das colorações de Gallai. Para mais informações, o leitor pode consultar [6, 14, 17, 18, 19]. Mais referências bibliográficas serão apresentadas à medida que formos avançando no trabalho.

¹Colorações também chamadas de colorações de Gallai.

3 DEFINIÇÕES INICIAIS E RESULTADOS BÁSICOS

Inicialmente, definiremos conceitos e notações utilizados em resultados básicos da Teoria de Grafos.

Como ponto de partida, definimos que um grafo é um par $G = (V, E)$ em que V é um conjunto finito qualquer e $E \subseteq [V]^2$, onde $[V]^2$ denota o conjunto de pares não-ordenados com elementos em V . Os elementos de $V = V(G)$ são ditos *vértices* de G e os elementos de $E = E(G)$ são *arestas* de G . Dois vértices x e y são *adjacentes*, ou *vizinhos*, se xy é uma aresta de G . Se todos os n vértices de G são dois a dois adjacentes, então G é dito *completo* e é denotado por K_n . Trataremos somente com grafos *simples*, ou seja, sem laços nos vértices nem mais de uma aresta ligando dois vértices.

Seja um grafo $G = (V, E)$. O conjunto de vizinhos de um vértice v em G é denotado por $N_G(v)$, ou mais simplesmente, $N(v)$, quando o contexto estiver claro. Para todo $X \subseteq V$, os vizinhos dos vértices de X em $V \setminus X$ são chamados de vizinhança de X e denotados por $N(X)$. Um emparelhamento em G é um conjunto M de arestas dotado da seguinte propriedade: todo vértice de G incide em no máximo um elemento de M .

Sendo $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ dois grafos, dizemos que G e G' são isomorfos, e denotamos por $G \simeq G'$, se existir uma bijeção $\varphi : V \rightarrow V'$ com $xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$ para todo $x, y \in V$. Um grafo F é dito um *subgrafo* de um grafo G se $V(F) \subseteq V(G)$ e $E(F) \subseteq E(G)$. Dizemos que um grafo G contém um outro grafo F se algum subgrafo de G é isomorfo a F . Um grafo G é F -livre se não existe cópia de F em G . Um grafo H é um *subgrafo induzido* de G se o

seu conjunto de arestas consiste em todas as arestas que aparecem em G sobre o mesmo conjunto de vértices. Quando o conjunto de vértices de H é denotado por S , então H pode ser escrito como $G[S]$ e diz-se ser induzido por S .

Um grafo $G = (V, E)$ é dito ℓ -partido se existe uma partição de seu conjunto de vértices, $V = V_1 \cup \dots \cup V_\ell$, para a qual $E(G[V_i]) = \emptyset$ para todo $i \in [\ell]$. Um grafo é dito ℓ -partido completo se é ℓ -partido e possui o maior número de arestas dentre os grafos ℓ -partidos com a mesma partição. Se um grafo é ℓ -partido completo, qualquer aresta adicionada (ligando dois vértices de uma mesma classe) fará com que este grafo deixe de satisfazer esta propriedade. Chamaremos este tipo de aresta de *aresta interna* a uma classe V_i , com $i \in [\ell]$. Desta forma, um grafo será bipartido quando existir a partição $V = V_1 \cup V_2$ de seu conjunto de vértices para a qual $E(G[V_i]) = \emptyset$ para todo $i \in \{1, 2\}$, e será bipartido completo se possuir todas as arestas possíveis. O grafo bipartido completo tal que $|V_1| = a$ e $|V_2| = b$ é denotado por $K_{a,b}$.

Dado um conjunto de vértices V e uma partição \mathcal{V} deste conjunto em ℓ classes $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_\ell\}$, dizemos que \mathcal{V} é uma partição *balanceada* se $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ para quaisquer $i, j \in [\ell]$. Ainda, um grafo ℓ -partido é dito *balanceado* se sua partição for uma das possíveis partições *balanceadas* de G .

O problema de particionar um dado grafo G pode ser abordado a partir da ideia de atribuir cores distintas aos seus vértices. Uma coloração de vértices de um grafo $G = (V, E)$ gera uma família de subconjuntos de V disjuntos $C = \{C_1, \dots, C_k\}$, cuja união é V . Os conjuntos da partição são chamados de classes de cor, ou simplesmente cores. Dizemos que uma coloração é *própria* se toda aresta de G conecta vértices em conjuntos distintos da partição. Grafos que possuem coloração própria com k cores são ditos k -coloríveis. O número cromático de G , denotado $\chi(G)$, é o menor número de conjuntos que forma uma coloração

própria de G . Em nosso estudo, é útil destacar que $\chi(G)$ é o menor número k para o qual G é um grafo k -partido.

Como mencionamos anteriormente, dado um grafo fixo F , o problema de Turán para F pergunta qual o número máximo $\text{ex}(n, F)$ de arestas entre todos os grafos F -livres de n vértices. Os grafos que atingem esse máximo são chamados *F-extremais*. Quando $F = K_k$ é o grafo completo com $k \geq 3$ vértices, o único grafo extremal para F com n vértices, a menos de isomorfismo, é grafo $(k - 1)$ -partido balanceado completo $T_{k-1}(n)$, conhecido como *grafo de Turán* para K_k [41]. A seguir, faremos uma demonstração dos limites para o número de arestas do grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ que nos será útil.

Proposição 3.1. *O número de Turán $\text{ex}(n, K_k)$ está compreendido entre as seguintes cotas, para todo $k \geq 2$:*

$$\left(\frac{k-2}{k-1}\right) \cdot \frac{n^2}{2} - k + 1 \leq t_{k-1}(n) \leq \left(\frac{k-2}{k-1}\right) \cdot \frac{n^2}{2}. \quad (3.1)$$

Demonstração. Pelo Teorema de Turán, sabemos que o grafo de n vértices K_k -extremal é o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$. Vamos calcular as cotas inferior e superior para o número de Turán $\text{ex}(n, K_k)$. Suponha que $n = t(k - 1) + r$, com $0 \leq r \leq k - 2$. Assim, os n vértices são distribuídos de forma balanceada nos subconjuntos V_1, V_2, \dots, V_{k-1} , com r deles de cardinalidade $(t + 1)$ e $(k - 1 - r)$ de cardinalidade t . O número de Turán $\text{ex}(n, K_k)$ pode ser calculado a partir do total de arestas de um grafo completo de n vértices, menos as arestas que ligam vértices de uma mesma classe V_i , com $i \in [k - 1]$. Ao todo, temos

$$\text{ex}(n, K_k) = \binom{n}{2} - r \binom{t+1}{2} - (k-1-r) \binom{t}{2}$$

arestas em $T_{k-1}(n)$. Note que podemos substituir a variável t por $t = \frac{n-r}{k-1}$ na equação acima e obter a seguinte igualdade, após alguns cálculos omitidos aqui:

$$\text{ex}(n, K_k) = \left(\frac{k-2}{k-1} \right) \cdot \frac{n^2}{2} - \frac{r(k-1-r)}{2(k-1)}.$$

A segunda desigualdade em (3.1) é imediata. Vamos verificar a primeira:

$$\begin{aligned} \left(\frac{k-2}{k-1} \right) \cdot \frac{n^2}{2} - k + 1 &\leq \left(\frac{k-2}{k-1} \right) \cdot \frac{n^2}{2} - \frac{r(k-1-r)}{2(k-1)} \\ k-1 &\geq \frac{r(k-1-r)}{2(k-1)} \\ 2(k-1)^2 &\geq -r^2 + (k-1)r \\ r^2 - (k-1)r + 2(k-1)^2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Para verificarmos a desigualdade (3.2), vemos que a função quadrática do primeiro membro não possui raízes reais ($\Delta < 0$), o que faz com que (3.2) seja válida para todo $k \geq 2$, como queríamos demonstrar. \square

Temos também a seguinte igualdade relacionando o número de Turán $\text{ex}(n, K_k)$ com o grau mínimo $\delta_{k-1}(n)$ do grafo de Turán $T_{k-1}(n)$, a qual será importante mais à frente:

$$\text{ex}(n, K_k) = \text{ex}(n-1, K_k) + \delta_{k-1}(n). \tag{3.3}$$

3.1 Resultados gerais para grafos

Para uso posterior, afirmamos o seguinte fato, já bem conhecido, sobre o tamanho das classes em um grafo $(k-1)$ -partido com um grande número de arestas. Uma prova pode ser encontrada na Proposição 2.7 em [26].

Proposição 3.2. *Seja $G = (V, E)$ um grafo $(k-1)$ -partido com m vértices e partição $V = V_1 \cup \dots \cup V_{k-1}$. Se, para algum $t \geq (k-1)^2$, o grafo G contém pelo*

menos $ex(m, K_k) - t$ arestas, então para $i \in \{1, \dots, k-1\}$ nós temos

$$\left| |V_i| - \frac{m}{k-1} \right| < \sqrt{2t}.$$

Apresentamos agora o seguinte lema auxiliar.

Lema 3.3. *Se $\ell \geq 2$ e G é um grafo com m arestas, então G contém um subgrafo ℓ -partido com pelo menos $\frac{\ell-1}{\ell}m$ arestas.*

Demonstração. Considere um subgrafo ℓ -partido G' de G com o maior número possível de arestas. Seja $v \in V_i$. Se $i \neq j$, então $|N(v) \cap V_j| \geq |N(v) \cap V_i|$, caso contrário moveríamos v para V_j aumentando o número de arestas no subgrafo ℓ -partido. Isso implica que o tamanho da vizinhança de v para todo V_j deve ser $|N(v) \cap V_j| \leq \frac{d(v)}{\ell}$, onde $d(v)$ é o grau de v em G . Então

$$\begin{aligned} e(V_1) + \dots + e(V_\ell) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{v \in V_j} |N(v) \cap V_j| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{v \in V_j} \frac{d(v)}{\ell} \\ &= \frac{1}{2\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{v \in V_j} d(v) = \frac{m}{\ell}. \end{aligned}$$

Consequentemente, obtemos

$$|E(G)| - (e(V_1) + \dots + e(V_\ell)) \geq m - \frac{m}{\ell} = \frac{(\ell-1)}{\ell}m.$$

□

3.2 Grafos Multipartidos Completos

Trataremos agora de alguns resultados envolvendo grafos multipartidos completos, necessários no decorrer deste trabalho.

Para $j \in \{2, \dots, k-1\}$, seja a função $A(k, j)$ tal que

$$A(k, j) = \binom{\lfloor k/j \rfloor}{2} \left(\left\lfloor \frac{k}{j} \right\rfloor j + j - k \right) + \binom{\lceil k/j \rceil}{2} \left(k - \left\lfloor \frac{k}{j} \right\rfloor j \right). \quad (3.4)$$

Esta função nos dá o menor número de arestas que devem ser excluídas de K_k para torná-lo j -partido. Veremos que (3.4) surge naturalmente na demonstração do resultado a seguir, o Lema 3.4. Note que $A(k, k-i) \geq i$ para todo $i \leq k-1$ e a igualdade vale se, e somente se, $i \leq \lfloor k/2 \rfloor$.

O lema a seguir nos dá a cota superior para a quantidade de arestas de um grafo j -partido com k vértices, $a(k, j)$, em função de $A(k, j)$, definida acima.

Lema 3.4. *Sejam $k \geq j \geq 2$ inteiros. Para todo grafo j -partido G , todo subgrafo G' de G com k vértices tem no máximo*

$$a(k, j) = \binom{k}{2} - A(k, j)$$

arestas, sendo $A(k, j)$ definido em (3.4).

Demonstração. Um subgrafo j -partido G' de G tem o maior número de arestas quando é balanceado completo. Seja $k = q \cdot j + p$, onde q e p são inteiros não negativos tais que $p < j$. Para distribuímos k vértices em j classes balanceadas, p classes devem ter $\lceil \frac{k}{j} \rceil$ vértices e as $j-p$ classes restantes devem ter $\lfloor \frac{k}{j} \rfloor$ vértices. Claramente, $q = \lfloor \frac{k}{j} \rfloor$, tal que $p = k - j \lfloor \frac{k}{j} \rfloor$ e $j-p = j \lfloor \frac{k}{j} \rfloor + j - k$. Isto implica que G' contém

$$\begin{aligned} & \binom{\lfloor k/j \rfloor j + j - k}{2} \cdot \left\lfloor \frac{k}{j} \right\rfloor^2 + \binom{k - \lfloor k/j \rfloor j}{2} \cdot \left\lceil \frac{k}{j} \right\rceil^2 + \\ & + \left(\left\lfloor \frac{k}{j} \right\rfloor j + j - k \right) \cdot \left(k - \left\lfloor \frac{k}{j} \right\rfloor j \right) \cdot \left\lfloor \frac{k}{j} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{k}{j} \right\rceil \end{aligned}$$

arestas, que é precisamente $\binom{k}{2} - A(k, j)$. □

Para $i \in \{1, 2, \dots, k-2\}$, obtemos $A(k, k-i)$ trocando $j = k-i$ em (3.4). Então temos

$$\begin{aligned}
 A(k, k-i) &= \binom{\lfloor k/(k-i) \rfloor}{2} \left(\left\lfloor \frac{k}{k-i} \right\rfloor (k-i) - i \right) + \\
 &+ \binom{\lceil k/(k-i) \rceil}{2} \left(k - \left\lfloor \frac{k}{k-i} \right\rfloor (k-i) \right)
 \end{aligned}$$

arestas internas às classes na $(k-i)$ -partição de uma cópia de K_k .

4 A EXTREMALIDADE E OS GRAFOS MULTIPARTIDOS COMPLETOS

A demonstração dos Teoremas 1.4 e 1.5 foi baseada na técnica utilizada para a demonstração dos Teoremas 2.6 e 2.7 de Benevides, Hoppen e Sampaio [7]. Naquele trabalho, foi aplicada a técnica de simetrização de Zykov [44] junto com a Desigualdade Generalizada de Hölder. Nosso mérito aqui foi verificar que aqueles resultados poderiam ser estendidos para grafos que evitam uma família \mathcal{P} de grafos completos com determinadas características, em contrapartida a um único par (K_k, P) .

4.1 Resultados gerais

Apresentaremos alguns resultados para grafos \mathcal{P} -extremais, procurando estabelecê-los de forma que a família \mathcal{P} englobe a maior quantidade de pares (F, P) em cada abordagem, ou seja, que os resultados sejam aplicáveis ao maior número de problemas possíveis. Veremos que estes resultados serão importantes, pois nos darão o alicerce das soluções desenvolvidas na sequência do trabalho.

Inicialmente, propomos um resultado que é consequência imediata da definição de uma família de padrões \mathcal{P} . Para enunciá-lo, precisamos introduzir uma notação adicional. O número de classes em um padrão P é denotado por $\gamma(P)$ e, para uma família de padrões \mathcal{P} temos $\gamma_{\min}(\mathcal{P}) = \min\{\gamma(P) : (F, P) \in \mathcal{P}\}$. Para o número cromático χ , dada uma família de padrões \mathcal{P} , seja $\chi_{\min}(\mathcal{P}) = \min\{\chi(F) : (F, P) \in \mathcal{P}\}$.

Proposição 4.1. *Sejam \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 famílias de padrões, e seja $r \geq 2$ um inteiro. Então,*

(a) *se $r < \gamma_{\min}(\mathcal{P}_1)$, então $c_{r,\mathcal{P}_1}(n) = r^{\binom{n}{2}}$ e K_n é o único grafo (r, \mathcal{P}_1) -extremal.*

(b) *se $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$, então $c_{r,\mathcal{P}_1}(n) \geq c_{r,\mathcal{P}_2}(n)$. Além disso, se $s = \chi_{\min}(\mathcal{P}_2) - 1$ e o grafo de Turán $T_s(n)$ é (r, \mathcal{P}_1) -extremal, então $T_s(n)$ também é (r, \mathcal{P}_2) -extremal.*

Demonstração. A parte (a) é trivial, pois nenhuma r -coloração pode produzir um padrão em \mathcal{P}_1 .

Para a parte (b), fixe $r \geq 2$ e considere famílias de padrões \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 tais que $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$. Para qualquer grafo G , toda coloração (r, \mathcal{P}_2) -livre também é (r, \mathcal{P}_1) -livre, de forma que $|\mathcal{C}_{r,\mathcal{P}_1}(G)| \geq |\mathcal{C}_{r,\mathcal{P}_2}(G)|$. Isto implica imediatamente que $c_{r,\mathcal{P}_1}(n) \geq c_{r,\mathcal{P}_2}(n)$. Assuma que o grafo de Turán $T_s(n)$ é (r, \mathcal{P}_1) -extremal, onde $s = \chi_{\min}(\mathcal{P}_2) - 1$. Esta escolha de s implica que nenhum padrão proibido de \mathcal{P}_2 pode ser produzido ao colorirmos as arestas de $T_s(n)$. Portanto, para qualquer grafo G de n vértices, temos que

$$|\mathcal{C}_{r,\mathcal{P}_2}(T_s(n))| = r^{ts(n)} = |\mathcal{C}_{r,\mathcal{P}_1}(T_s(n))| \geq |\mathcal{C}_{r,\mathcal{P}_1}(G)| \geq |\mathcal{C}_{r,\mathcal{P}_2}(G)|,$$

onde a primeira desigualdade segue do fato que $T_s(n)$ é (r, \mathcal{P}_1) -extremal. Logo, $T_s(n)$ é (r, \mathcal{P}_2) -extremal. \square

Antes de prosseguirmos, vamos trazer algumas ferramentas teóricas do estudo dos vetores, as quais passaremos a tratar agora. Como mencionamos anteriormente, a técnica apresentada aqui pode ser encontrada em [7]. Seja um vetor \vec{x} indexado por um conjunto T . Denotamos por $x(t)$ o valor de \vec{x} na coordenada t , onde $t \in T$. A ℓ_p -norma de \vec{x} é denotada por $\|\vec{x}\|_p$, de forma que para

$p \in (0, \infty)$, temos

$$\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{t \in T} |x(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para vetores $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_z$, indexados por T , denotamos o produto coordenada a coordenada deles por $\prod_{k=1}^z \vec{x}_k$, isto é, o vetor \vec{y} tal que, para cada $t \in T$, temos

$$y(t) = \prod_{k=1}^z \vec{x}_k(t).$$

Definição 4.2. Se H é um subgrafo de um grafo G e \widehat{H} é uma r -coloração \mathcal{P} -livre de H , denotamos por $c_{r,\mathcal{P}}(G|\widehat{H})$ o número de maneiras de colorir as arestas em $E(G) - E(H)$ de modo que a coloração resultante ainda seja \mathcal{P} -livre. Para um vértice $v \in V(G) - V(H)$, denotamos por $c_{r,\mathcal{P}}(v, \widehat{H})$ o número de maneiras de colorir as arestas entre v e $V(H)$ (de novo evitando \mathcal{P}). Também definimos $\vec{v}_{H,r,\mathcal{P}}$ como o vetor cujas coordenadas correspondem à quantidade de colorações \mathcal{P} -livres obtidas a partir de v e cada \widehat{H} de H dadas por

$$\vec{v}_{H,r,\mathcal{P}}(\widehat{H}) = c_{r,\mathcal{P}}(v, \widehat{H}).$$

A Definição 4.2 pode ser considerada para situações de maior generalidade pois não há qualquer restrição ao tratarmos da família \mathcal{P} a ser evitada. O número $c_{r,\mathcal{P}}(v, \widehat{H})$ será uma das coordenadas do vetor $\vec{v}_{H,r,\mathcal{P}}$, sendo que as demais estão vinculadas a cada uma das outras colorações possíveis de H . O somatório das coordenadas de $\vec{v}_{H,r,\mathcal{P}}$ nos fornece o número de r -colorações \mathcal{P} -livres do grafo $H \cup \{v\}$.

Para ilustrar, considere que temos $r = 3$ e estamos interessados nas colorações (K_3, P_A) -livres de $G = K_4$.

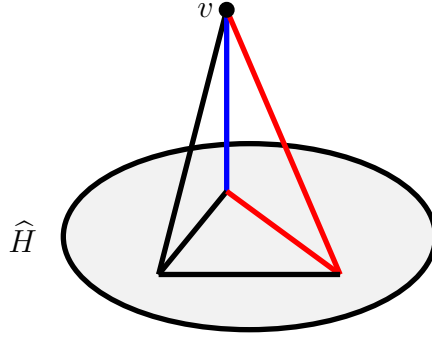


Figura 4.1: Uma extensão de \widehat{H} (K_3, P_A) -livre.

Fixe um vértice v de $G = K_4$ e considere o grafo $H = G - v$. Vemos que $E(G) - E(H)$ denota as arestas que ligam v ao grafo H . Com $r = 3$ e a coloração específica \widehat{H} dada na Figura 4.1, temos 13 possibilidades de colorações para as arestas $E(G) - E(H)$. As 14 colorações proibidas são aquelas que formam K_3 arco-íris a partir de v . Vemos que o vetor $\vec{v}_{H,3,(K_3,P_A)}$ tem vinte e uma coordenadas, três provenientes de colorações monocromáticas de H e dezoito de 2-colorações de H . Além disso, podemos afirmar que uma das vinte e uma coordenadas do vetor $\vec{v}_{H,3,(K_3,P_A)}$ é 13, coordenada esta vinculada à coloração \widehat{H} da Figura 4.1.

4.2 A extremalidade em grafos \mathcal{P}_K -livres

Vamos relembrar a definição da família \mathcal{P}_K que apresentamos no Capítulo 1 e da qual trataremos a partir de agora. Considere \mathcal{I} um conjunto de índices, possivelmente infinito, e seja

$$\mathcal{P}_K = \{(K_{k_i}, P_i) : i \in \mathcal{I}\}$$

uma família de padrões de grafos completos, onde $k_i \geq 3$ e P_i é um padrão de K_{k_i} , para cada $i \in \mathcal{I}$. Nosso objetivo agora é estender o Teorema 2.6 provado em [7],

o qual trata de um único par (K_k, P) , para a família \mathcal{P}_K . Para isso, vamos provar o seguinte teorema.

Teorema 1.4. *Sejam $r \geq 2$ inteiro e \mathcal{P}_K uma família de padrões de grafos completos. Para todo número natural n , existe um grafo multipartido completo G^* de n vértices que é (r, \mathcal{P}_K) -extremal. Além disso, para qualquer grafo (r, \mathcal{P}_K) -extremal G de n vértices, existe um desses grafos G^* tal que $|E(G^*)| \geq |E(G)|$.*

Note que agora estamos tratando de uma família de pares onde somente padrões de grafos completos estão sendo considerados. Na sequência, deixaremos claro onde a nossa prova depende dessa hipótese.

Proposição 4.3. *Se H é um subgrafo induzido de G tal que $S = V(G) - V(H)$ é um conjunto independente em G , e \widehat{H} é \mathcal{P}_K -livre, então*

$$c_{r, \mathcal{P}_K}(G|\widehat{H}) = \prod_{v \in S} c_{r, \mathcal{P}_K}(v, \widehat{H}).$$

Demonstração. Sejam um grafo G e um subgrafo induzido H de G de forma que $V(G) - V(H)$ seja um conjunto S independente. Fixe uma coloração \mathcal{P}_K -livre \widehat{H} de H . Para obtermos $c_{r, \mathcal{P}_K}(G|\widehat{H})$, observemos que qualquer cópia de K_k , para todo $k \geq 3$, não pode conter dois vértices de S simultaneamente. Este fato faz com que a escolha de cores para as arestas incidentes em um vértice de S não afete a escolha de cores das arestas incidentes em outro vértice de S . É neste momento que a nossa prova depende da hipótese de termos pares formados somente por grafos completos, pois para qualquer grafo que não seja completo, esta afirmação falharia. Desta forma, podemos contar as extensões válidas de cada vértice de S para \widehat{H} , considerando cada um isoladamente. Segue, pelo princípio multiplicativo, que $c_{r, \mathcal{P}_K}(G|\widehat{H})$ será dado pelo produto do número de colorações válidas obtidas a partir de cada $v \in S$, como queríamos demonstrar. \square

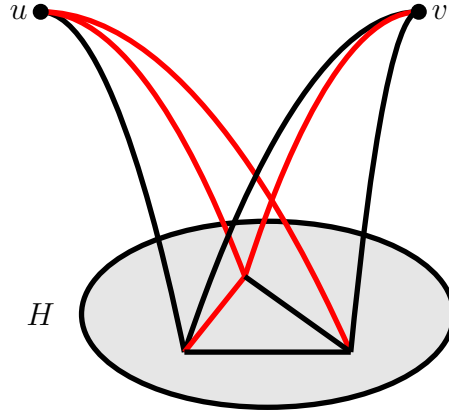


Figura 4.2: Dois vértices independentes ligados ao subgrafo H .

Na Figura 4.2, ao evitarmos o par (K_3, P_A) , claramente vemos que para vértices independentes u e v , a coloração das arestas entre u e H não interfere na escolha das cores das arestas entre v e H .

Na sequência, necessitamos da desigualdade abaixo, conhecida como Desigualdade de Hölder Generalizada [42] (utilizada aqui para o caso particular de medida de contagem em um conjunto finito).

Lema 4.4. (*Desigualdade de Hölder*) *Sejam $r \in (0, \infty)$ e $p_1, p_2, \dots, p_z \in (0, \infty)$ tais que*

$$\sum_{k=1}^z \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r},$$

e sejam $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_z$ vetores com coordenadas complexas indexadas pelo mesmo conjunto T . Temos

$$\left\| \prod_{k=1}^z \vec{x}_k \right\|_r \leq \prod_{k=1}^z \|\vec{x}_k\|_{p_k}.$$

Além disso, a igualdade acima acontece se, e somente se, para todo $i, j \in [z]$ existe $\alpha_{i,j}$ tal que para cada $t \in T$ temos

$$|\vec{x}_i(t)|^{p_i} = \alpha_{i,j} \cdot |\vec{x}_j(t)|^{p_j}.$$

Observação: Pode-se verificar facilmente que $\alpha_{i,j} = \frac{(\|\vec{x}_i\|_{p_i})^{p_i}}{(\|\vec{x}_j\|_{p_j})^{p_j}}$.

Na verdade, vamos usar a desigualdade do Lema 4.4 apenas na seguinte forma particular.

Corolário 4.5. *Sejam $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_z$ vetores com coordenadas complexas indexadas por um mesmo conjunto. Temos*

$$\left\| \prod_{k=1}^z \vec{x}_k \right\|_1 \leq \prod_{k=1}^z \|\vec{x}_k\|_z.$$

Além disso, a igualdade acontece se e somente se para todo $i, j \in [z]$ o vetor $(|x_i(t)|)_{t \in T}$ (cujas entradas são os valores absolutos daqueles em \vec{x}_i) é um múltiplo de $(|x_j(t)|)_{t \in T}$.

Demonstração. Tome $r = 1$ e, para $1 \leq i \leq z$, tome $p_i = z$ na afirmação do Lema 4.4. A condição de igualdade também segue da condição de igualdade no Lema 4.4. \square

Dizemos que *clonar* um vértice v de um grafo G significa criar um novo grafo \tilde{G} cujo conjunto de vértices é $V(G) \cup \tilde{v}$ onde \tilde{v} é um novo vértice não adjacente a v e com a mesma vizinhança de v . Esta operação de clonagem de um vértice v está representada na figura abaixo.

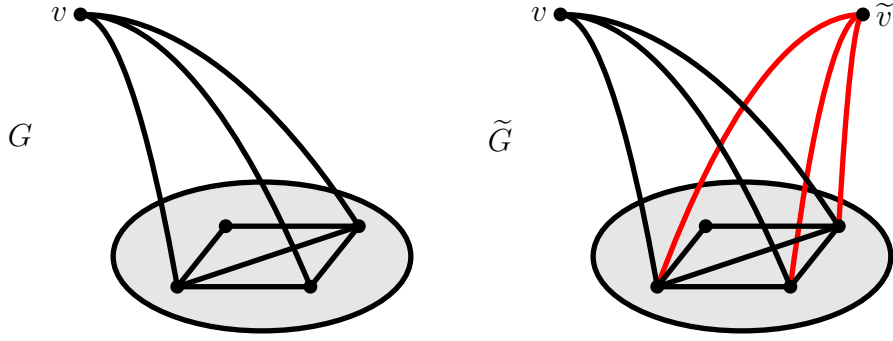


Figura 4.3: O clone \tilde{v} de um vértice v .

Para o próximo lema consideramos a seguinte operação: pegue um conjunto independente S de um grafo G , selecione um vértice específico $v \in S$, exclua todos os vértices em $S - v$ e realize $|S| - 1$ clonagens de v . Para alguma escolha de v , o resultado é um novo grafo que tem pelo menos tantas colorações \mathcal{P}_K -livres quanto G .

Lema 4.6. *Seja G um grafo com n vértices, $S \subset V(G)$ um conjunto independente com $|S| = z$, $H = G - S$ e $A = V(G) - S$. Existe um vértice $v \in S$ com a propriedade de que se construirmos o grafo \tilde{G} com $V(\tilde{G}) = V(H) \cup \tilde{S}$, onde $\tilde{G}[A \cup v] = G[A \cup v]$ e \tilde{S} é um conjunto independente de z vértices, sendo o vértice v um deles e todos os demais provenientes da clonagem de v , então $c_{r, \mathcal{P}_K}(\tilde{G}) \geq c_{r, \mathcal{P}_K}(G)$.*

Demonstração. Seja S um conjunto independente em G , e seja $H = G - S$. Para cada $u \in S$, considere o vetor $\vec{u}_{H, r, \mathcal{P}_K}$ como na Definição 4.2. Pela Proposição 4.3, o número total de r -colorações \mathcal{P}_K -livres de G é

$$c_{r, \mathcal{P}_K}(G) = \sum_{\hat{H}} c_{r, \mathcal{P}_K}(G|\hat{H}) = \sum_{\hat{H}} \prod_{u \in S} c(u, \hat{H}) = \left\| \prod_{u \in S} \vec{u}_{H, r, \mathcal{P}_K} \right\|_1$$

onde as somas são tomadas sobre todas as possíveis r -colorações \mathcal{P}_K -livres \hat{H} de H (para a última igualdade estamos utilizando o fato de que todas as coordenadas de $\vec{u}_{H,r,\mathcal{P}_K}$ são não-negativas).

Seja v um vértice em S para o qual $\|\vec{v}_{H,r,\mathcal{P}_K}\|_z$ é máxima. Este fato, junto com a Desigualdade de Hölder nos dá:

$$\left\| \prod_{u \in S} \vec{u}_H \right\|_1 \leq \prod_{u \in S} \|\vec{u}_{H,r,\mathcal{P}_K}\|_z \leq \|\vec{v}_{H,r,\mathcal{P}_K}\|_z^z. \quad (4.1)$$

Por outro lado, para o grafo \tilde{G} definido na afirmação deste lema, temos

$$c_{r,\mathcal{P}_K}(\tilde{G}) = \sum_{\hat{H}} c_{r,\mathcal{P}_K}(v, \hat{H})^z = \|\vec{v}_{H,r,\mathcal{P}_K}\|_z^z.$$

Desta forma, $c_{r,\mathcal{P}_K}(\tilde{G}) \geq c_{r,\mathcal{P}_K}(G)$, como queríamos demonstrar. \square

A partir deste resultado, é possível obtermos o seguinte corolário:

Corolário 4.7. *Seja um grafo G de n vértices (r, \mathcal{P}_K) -extremal e $S \subset V(G)$ um conjunto independente. Para todos $u, w \in S$ devemos ter $\vec{u}_{H,r,\mathcal{P}_K} = \vec{w}_{H,r,\mathcal{P}_K}$.*

Demonstração. Assuma que $|S| = z$ e \tilde{G} é como definido no Lema 4.6. Como G é um grafo (r, \mathcal{P}_K) -extremal e, pelo Lema 4.6, $c_{r,\mathcal{P}_K}(\tilde{G}) \geq c_{r,\mathcal{P}_K}(G)$, devemos ter $c_{r,\mathcal{P}_K}(\tilde{G}) = c_{r,\mathcal{P}_K}(G)$. Assim, devemos ter igualdade em ambas as desigualdades em (4.1). Da segunda, segue que, para todo $u \in S$, devemos ter

$$\|\vec{u}_{H,r,\mathcal{P}_K}\|_z = \|\vec{v}_{H,r,\mathcal{P}_K}\|_z.$$

Da primeira, onde usamos o Corolário 4.5, a condição de igualdade em tal corolário, junto com o fato de os nossos vetores $\vec{u}_{H,r,\mathcal{P}_K}$ e $\vec{v}_{H,r,\mathcal{P}_K}$ terem somente coordenadas não-negativas, implica que $\vec{u}_{H,r,\mathcal{P}_K} = \vec{v}_{H,r,\mathcal{P}_K}$. Portanto, para todo $u, w \in S$ devemos ter $\vec{u}_{H,r,\mathcal{P}_K} = \vec{w}_{H,r,\mathcal{P}_K}$. \square

De posse do Corolário 4.7, temos também o seguinte resultado:

Corolário 4.8. *Se G é um grafo (r, \mathcal{P}_K) -extremal e $u, v \in V(G)$ são vértices não adjacentes quaisquer, então excluindo v e clonando u obtemos um grafo que também é extremal.*

Demonstração. Dado que G é extremal, pelo Corolário 4.7 com $S = \{u, v\}$ e $G_{uv} = G - \{u, v\}$, devemos ter

$$\vec{u}_{G_{uv}, r, \mathcal{P}_K} = \vec{v}_{G_{uv}, r, \mathcal{P}_K},$$

ou seja, ao trocarmos v por um vértice clonado de u (ou vice-versa) não alteramos o número de r -colorações de G . \square

Com as definições e lemas desenvolvidos acima, ferramentas necessárias para a demonstração do Teorema 1.4, vamos a ela:

Demonstração. Seja G qualquer grafo (r, \mathcal{P}_K) -extremal com n vértices. Construiremos uma sequência de grafos extremais, cada um com n vértices, digamos G_0, G_1, \dots, G_t , onde $G_0 = G$ e G_t é um grafo multipartido completo. Faremos isso de tal modo que para todo $i \geq 1$, temos $V(G_i) = S_1 \cup \dots \cup S_i \cup R_i$, onde, para todo $j \in \{1, \dots, i\}$, o conjunto S_j é um conjunto independente e todos os vértices em S_j são adjacentes a todos os vértices fora de S_j (incluindo aqueles em R_i), mas não temos nenhum controle sobre as arestas dentro de R_i . Teremos também que

$$R_t \subset R_{t-1} \subset \dots \subset R_1 \subset V(G),$$

e R_t será independente.

Inicialmente, definimos que $R_0 = V(G_0) = V(G)$. Assumimos que construímos G_i com as propriedades acima para algum $i \geq 0$. Se R_i é um conjunto

independente, estamos prontos. Caso contrário, seja v_i um vértice qualquer de R_i que tenha vizinhos em R_i . Note que, pela definição de G_i , todos não-vizinhos de v_i pertencem a R_i . Seja \bar{d}_i o número de não-vizinhos de v_i . Podemos obter G_{i+1} aplicando o Corolário 4.8 sucessivamente \bar{d}_i vezes no grafo inteiro G_i (e não apenas em $G_i[R_i]$), excluindo cada não-vizinho de v_i e adicionando clones de v_i (um a um). Seja S_{i+1} o conjunto formado por v_i e os seus novos clones e seja R_{i+1} o conjunto de vizinhos de v_i em R_i . Note que R_{i+1} é estritamente menor que R_i , visto que não contém v_i .

Para construir um grafo G^* com a propriedade que $|E(G^*)| \geq |E(G)|$, basta escolher, a cada passo, um vértice $v_i \in R_i$ com grau máximo. \square

O seguinte resultado implica que qualquer grafo (r, \mathcal{P}_K) -extremal pode ser transformado em um grafo multipartido completo através da remoção de arestas (possivelmente nenhuma).

Lema 4.9. *Seja \mathcal{I} um conjunto de índices, possivelmente infinito, e seja $\mathcal{P}_K = \{(K_{k_i}, P_i) : i \in \mathcal{I}\}$ uma família de padrões de grafos completos, onde $k_i \geq 3$ e P_i é um padrão de K_{k_i} , para cada $i \in \mathcal{I}$. Seja G um grafo (r, \mathcal{P}_K) -extremal, com $r \geq 2$ um número natural. Para quaisquer u, v e w tais que $uv, uw \notin E(G)$ e $vw \in E(G)$, se excluirmos a aresta vw , então o grafo resultante ainda é (r, \mathcal{P}_K) -extremal.*

Demonstração. Seja G um grafo como no enunciado. Fixe vértices u, v e w tais que $uv, uw \notin E(G)$ e $vw \in E(G)$ (isto implica que G não é um grafo multipartido completo). Sejam $H = G - \{u, v, w\}$ e $H^x = G[V(H) \cup x]$ para $x \in \{u, v, w\}$. Seja G' o grafo obtido excluindo a aresta vw de G (mas não os vértices v e w) e seja G^* o grafo obtido de H^u adicionando outros dois clones de u , digamos u_1 e u_2 .

Pelo Corolário 4.8, o grafo G^* também é extremal, pois podemos aplicar a operação de substituição no par u, v (excluindo v e adicionando u_1) e

depois novamente ao par u, w , excluindo w e adicionando u_2 . Portanto

$$c_{r, \mathcal{P}_K}(G) = c_{r, \mathcal{P}_K}(G^*).$$

Aplicando a Proposição 4.3 para G^* e $S = \{u, u_1, u_2\}$ temos

$$c_{r, \mathcal{P}_K}(G^*) = \sum_{\hat{H}} c_{r, \mathcal{P}_K}(G^* | \hat{H}) = \sum_{\hat{H}} c_{r, \mathcal{P}_K}(u, \hat{H})^3 = \|\vec{u}_{H,r, \mathcal{P}_K}\|_3^3,$$

onde o somatório totaliza todas as r -colorações \mathcal{P}_K -livres de G^* , a partir de cada coloração válida \hat{H} .

Note que, com um cálculo análogo, se começarmos com H e adicionarmos três clones de w ao invés de u , o grafo resultante terá $\|\vec{w}_H\|_3^3$ colorações válidas. Mas o uso do vértice w como clone não nos garante que obteríamos um grafo extremal, pois a presença da aresta vw não permite a aplicação do Corolário 4.8, já que este nos garante a extremalidade do grafo resultante somente se, ao excluirmos um vértice e clonarmos outro, estes não sejam adjacentes. Somente u se enquadra nesta condição. Só temos que

$$\|\vec{w}_{H,r, \mathcal{P}_K}\|_3^3 \leq \|\vec{u}_{H,r, \mathcal{P}_K}\|_3^3. \quad (4.2)$$

Por outro lado, uma vez que não existem arestas de u para $\{v, w\}$, podemos calcular $c_{r, \mathcal{P}_K}(G)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} c_{r, \mathcal{P}_K}(G) &= \sum_{\hat{H}} c_{r, \mathcal{P}_K}(u, \hat{H}) \cdot c_{r, \mathcal{P}_K}(G - u | \hat{H}) \\ &= \sum_{\hat{H}} \left(c_{r, \mathcal{P}_K}(u, \hat{H}) \cdot \left(\sum_{\widehat{H^w} | \hat{H}} c_{r, \mathcal{P}_K}(v, \widehat{H^w}) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Aqui, o somatório interno é obtido computando as colorações \mathcal{P}_K -livres de H^w que estendem uma coloração válida de H , ou seja, sobre as colorações das

arestas de w a H , para as quais a coloração resultante é válida. Pelo Corolário 4.7, dado que G é extremal e $uv \notin E(G)$, temos que $\vec{v}_{H^w, r, \mathcal{P}_K} = \vec{u}_{H^w, r, \mathcal{P}_K}$, ou seja, $c_{r, \mathcal{P}_K}(v, \widehat{H^w}) = c_{r, \mathcal{P}_K}(u, \widehat{H^w})$, para todo $\widehat{H^w}$.

Finalmente, note que $c_{r, \mathcal{P}_K}(u, \widehat{H^w})$ não depende das cores das arestas de w para H , de forma que $c_{r, \mathcal{P}_K}(u, \widehat{H^w}) = c_{r, \mathcal{P}_K}(u, \widehat{H})$. Portanto

$$\begin{aligned} c_{r, \mathcal{P}_K}(G) &= \sum_{\widehat{H}} \left(c_{r, \mathcal{P}_K}(u, \widehat{H}) \cdot \left(\sum_{\widehat{H^w} | \widehat{H}} c_{r, \mathcal{P}_K}(u, \widehat{H}) \right) \right) \\ &= \sum_{\widehat{H}} \left(c_{r, \mathcal{P}_K}(u, \widehat{H}) \cdot c_{r, \mathcal{P}_K}(u, \widehat{H}) \cdot \sum_{\widehat{H^w} | \widehat{H}} 1 \right) \\ &= \sum_{\widehat{H}} c_{r, \mathcal{P}_K}(u, \widehat{H})^2 \cdot c_{r, \mathcal{P}_K}(w, \widehat{H}) \\ &\leq \|\vec{u}_{H, r, \mathcal{P}_K}\|_3 \cdot \|\vec{u}_{H, r, \mathcal{P}_K}\|_3 \cdot \|\vec{w}_{H, r, \mathcal{P}_K}\|_3 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\leq \|\vec{u}_{H, r, \mathcal{P}_K}\|_3^3. \quad (4.5)$$

Sendo $c_{r, \mathcal{P}_K}(G) = \|\vec{u}_{H, r, \mathcal{P}_K}\|_3^3$, devemos ter igualdade em (4.4) e (4.5), o que nos leva a concluir que $\|\vec{u}_{H, r, \mathcal{P}_K}\|_3 = \|\vec{w}_{H, r, \mathcal{P}_K}\|_3$. A condição de igualdade no Lema 4.4 implica que $\vec{u}_{H, r, \mathcal{P}_K} = \vec{w}_{H, r, \mathcal{P}_K}$. Analogamente, $\vec{u}_{H, r, \mathcal{P}_K} = \vec{v}_{H, r, \mathcal{P}_K}$. Segue que

$$c_{r, \mathcal{P}_K}(G^*) = \sum_{\widehat{H}} c_{r, \mathcal{P}_K}(u, \widehat{H}) \cdot c_{r, \mathcal{P}_K}(v, \widehat{H}) \cdot c_{r, \mathcal{P}_K}(w, \widehat{H}) = c_{r, \mathcal{P}_K}(G').$$

□

Na Figura 4.4, vemos uma representação em que a aresta vw se enquadra nas condições do Lema 4.9, ou seja, sendo G um grafo (r, \mathcal{P}_K) -extremal, ao excluirmos a aresta vw , o grafo resultante ainda é extremal.

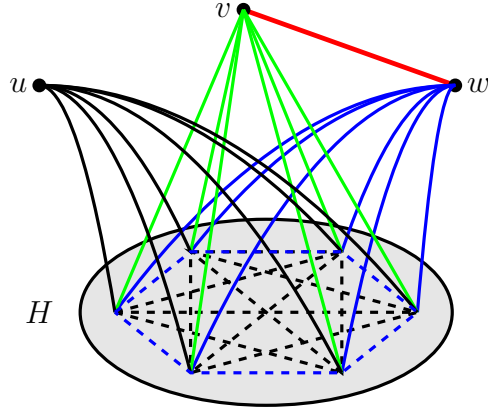


Figura 4.4: A aresta vw .

Podemos combinar o Teorema 1.4 e o Lema 4.9, a fim de obtermos o seguinte corolário:

Corolário 4.10. *Sejam $n, r \geq 2$ inteiros e \mathcal{P}_K uma família de padrões de grafos completos. Se existir um grafo (r, \mathcal{P}_K) -extremal que não é multipartido completo, então existem dois grafos multipartidos completos de n vértices, não isomorfos, que são (r, \mathcal{P}_K) -extremais.*

Demonstração. Assuma que G é um grafo (r, \mathcal{P}_K) -extremal que não é multipartido completo. Pelo Teorema 1.4, podemos produzir um grafo multipartido completo (r, \mathcal{P}_K) -extremal G_1^* tal que $|E(G_1^*)| \geq |E(G)|$. Através de sucessivas aplicações do Lema 4.9, podemos produzir um grafo multipartido completo (r, \mathcal{P}_K) -extremal G_2^* tal que $|E(G_2^*)| < |E(G)|$. \square

4.3 Um resultado para a família $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$

Trataremos agora de outro objetivo intermediário na busca do resultado exato, o Teorema 1.5 mencionado na introdução. Este teorema trata de uma família mais específica, com características que servirão para provarmos o nosso principal resultado, o Teorema 1.6. Além da imposição sobre o grafo F do par (F, P) ser um grafo completo que fizemos para a formação da família \mathcal{P}_K , vamos impor duas restrições a mais para a nova família: agora fixamos k e caracterizamos os padrões P . Desta forma, a família $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$ é constituída por todos os pares (K_k, P_i) possíveis, tais que P_i é um padrão de K_k com s ou mais classes.

Teorema 1.5. *Sejam $k \geq 4$, $r \geq s$ e $(k+1) \leq s \leq \binom{k}{2}$. Então todo grafo $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremal é um grafo multipartido completo.*

Demonstração. Seja s qualquer valor entre $(k+1) \leq s \leq \binom{k}{2}$ e suponha que exista um grafo G $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremal que não seja multipartido completo.

Sejam $H = G - \{u, v, w\}$ e $H^x = G[V(H) \cup x]$ para $x \in \{u, v, w\}$ como definidos na prova do Lema 4.9. No final da prova daquele lema, concluímos que $\vec{u}_{H, r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}} = \vec{v}_{H, r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}} = \vec{w}_{H, r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}$, então para toda coloração \widehat{H} de H temos que $c_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(u, \widehat{H}) = c_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(v, \widehat{H}) = c_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(w, \widehat{H})$. Observamos também que, para toda extensão de \widehat{H} para uma coloração \widehat{H}^w , temos $c_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(u, \widehat{H}^w) = c_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(u, \widehat{H})$.

Agora observe que, como u e v não são adjacentes, pelo Corolário 4.7, temos $\vec{u}_{H^w, r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}} = \vec{v}_{H^w, r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}$, isto é, $c_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(u, \widehat{H}^w) = c_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(v, \widehat{H}^w)$ para toda extensão \widehat{H}^w de uma coloração \widehat{H} de H para H^w . Ao percorrermos as igualdades acima $(c_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(v, \widehat{H}) = c_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(u, \widehat{H}) = c_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(u, \widehat{H}^w) = c_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(v, \widehat{H}^w))$, segue que, para toda extensão \widehat{H}^w de \widehat{H} que é $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$ -livre,

devemos ter

$$c_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(v, \widehat{H}^w) = c_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(v, \widehat{H}). \quad (4.6)$$

Nosso objetivo é conseguir uma contradição a esse fato, o que vai implicar que G não pode existir. Nós precisamos somente encontrar uma r -coloração \widehat{H} de H e uma extensão da coloração \widehat{H} para uma coloração \widehat{H}^w de H^w , que seja $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$ -livre, para a qual a equação (4.6) não valha.

Seja \widehat{H}_1^w a coloração de H^w que possui todas as arestas azuis de modo que \widehat{H}_1 é uma coloração de H com todas as arestas azuis, conforme a Figura 4.5. Seja vw a aresta que liga os vértices v e w .

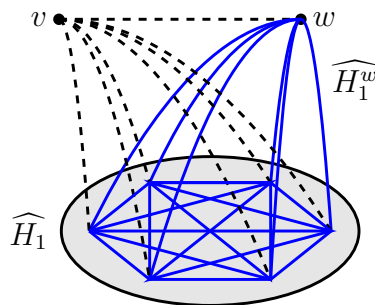


Figura 4.5: A escolha de \widehat{H}_1^w .

Sejam $\mathcal{H}_1(v)$ e $\mathcal{H}_1^w(v)$ os conjuntos das extensões $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$ -livres de \widehat{H}_1 para o grafo H^v e de \widehat{H}_1^w para o grafo $G - u$ respectivamente. Para encontrar a contradição em (4.6), mostraremos que existe uma função injetora $\phi : \mathcal{H}_1(v) \rightarrow \mathcal{H}_1^w(v)$ que não é sobrejetora.

Vamos definir a função $\phi : \mathcal{H}_1(v) \rightarrow \mathcal{H}_1^w(v)$. Para qualquer atribuição de cores às arestas entre v e H , que nos leve a uma extensão válida de \widehat{H}_1 para o grafo H^v , tome a mesma extensão de \widehat{H}_1^w para as arestas entre v e H e atribua a cor azul para a aresta vw . Note que a escolha da cor azul para \widehat{H}_1^w e a

aresta vw possibilita que qualquer r -coloração das arestas entre v e H defina uma coloração pertencente ao conjunto $\mathcal{H}_1(v)$. De fato, se as $(k - 1)$ arestas que ligam v a uma cópia de K_{k-1} em \widehat{H}_1 tiverem cores distintas entre si e diferentes de azul, a cópia formada de K_k teria no máximo k cores, portanto uma r -coloração válida, já que $s \geq (k + 1)$ (neste ponto a limitação da prova para valores de s maiores que k fica evidenciada). Se considerarmos cópia de K_k envolvendo o vértice w teríamos no máximo $(k - 1)$ cores. Assim, qualquer coloração das arestas entre v e H gera um elemento do domínio da função ϕ e, pela construção de ϕ , esta coloração terá uma única coloração correspondente em $\mathcal{H}_1^w(v)$, como queríamos.

Agora considere a coloração de $G - u$ onde todas as arestas são azuis, com exceção da aresta vw , que é colorida de vermelho (veja Figura 4.6). Isto nos dá uma r -coloração $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$ -livre pertencente ao contradomínio $\mathcal{H}_1^w(v)$ de ϕ . No entanto, essa coloração não está na imagem de ϕ , e conseqüentemente, a igualdade na equação (4.6) não se verifica. A Figura 4.6 retrata essa contradição: o primeiro grafo mostra a imagem de uma coloração em que as arestas entre v e H receberam a cor azul. Já o segundo, nos mostra uma coloração de $G - u$ que ilustra uma das possíveis contradições à equação (4.6). Com essa contradição, concluímos que G , sendo um grafo $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremal, deve ser multipartido completo. \square

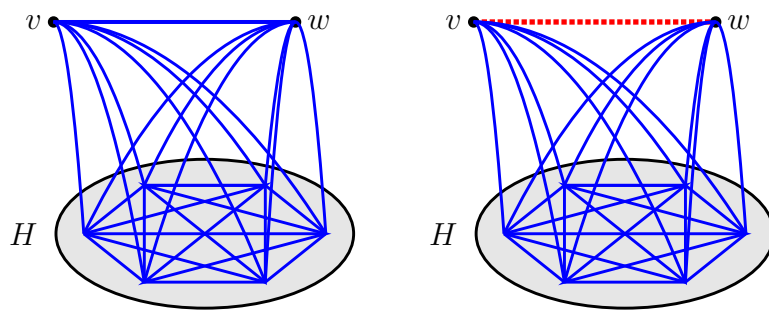


Figura 4.6: Elementos da imagem e contradomínio da função ϕ .

Se fixarmos k e $s = \binom{k}{2}$, nossa família $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$ fica restrita a um único par (K_k, P_A) . Mas este caso está resolvido pelo Teorema 2.7 no trabalho de Benevides, Hoppen e Sampaio [7], onde foi provado que todo grafo $(r, (K_k, P))$ -extremal é um grafo multipartido completo, para qualquer padrão $P \neq P_M$.

A forma como montamos a prova do Teorema 1.5 nos permitiu um resultado válido para a família $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$, onde $r \geq s$ e $s \geq (k+1)$, ou seja, para estes valores de r e s , todo grafo $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremal é um grafo multipartido completo. Mas o que podemos afirmar para os demais valores de s ? Pela Proposição 4.1 (b), se o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ é $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremal, então $T_{k-1}(n)$ também é $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s')})$ -extremal, para todo $2 \leq s' < (k+1)$, pois $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)} \subseteq \mathcal{P}_{(K_k, \geq s')}$. Note que a Proposição 4.1 (b) exige mais do que a simples afirmação do grafo extremal ser multipartido completo, agora precisamos que este grafo seja o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$. Isto é verdade e será demonstrado no Teorema 1.6. Vamos ver que, à medida que s cresce, o número de cores disponíveis para que o grafo extremal seja $T_{k-1}(n)$ também deve crescer. Ao tomarmos $s' < s$, o parâmetro r_0 diminui, o que sugere uma aproximação de r_0^* . Desta forma, poderemos considerar a extremalidade de $T_{k-1}(n)$ para valores menores de r . Esta discussão será pormenorizada na conclusão do trabalho.

5 FERRAMENTAS DA COMBINATÓRIA EXTREMAL

Este capítulo traz os principais teoremas e lemas utilizados na área de colorações de grafos extremais. São ferramentas já estabelecidas cujas demonstrações fogem do escopo deste trabalho. Somente as demonstrações julgadas importantes para o entendimento das estratégias utilizadas nas soluções de nossos problemas serão apresentadas.

5.1 Lema de Regularidade de Szemerédi

Seja $G = (V, E)$ um grafo e sejam A e B dois conjuntos disjuntos de $V(G)$. Com A e B não vazios, definimos a *densidade de arestas* entre A e B por

$$d(A, B) = \frac{e(A, B)}{|A||B|}.$$

Para $\varepsilon > 0$, o par (A, B) é dito ε -regular se, para todo $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$, satisfazendo $|X| \geq \varepsilon|A|$ e $|Y| \geq \varepsilon|B|$, temos

$$|d(X, Y) - d(A, B)| < \varepsilon.$$

Uma partição balanceada do conjunto de vértices $V(G)$ em m classes disjuntas V_1, \dots, V_m é dita ε -regular se no máximo εm^2 pares (V_i, V_j) não são ε -regulares. O parâmetro ε mede o erro na aproximação e limita o tamanho dos subconjuntos que podem ser considerados (diminuir ε melhora ambos).

Trazemos o seguinte lema que será necessário para os resultados de imersão envolvendo grafos reduzidos multicoloridos e encontra-se em [30].

Lema 5.1. *Se (A, B) é um par ε -regular com densidade d e $Y \subseteq B$ tem tamanho $|Y| \geq \varepsilon|B|$, então todos, exceto no máximo $\varepsilon|A|$ dos vértices de A , têm pelo menos $(d - \varepsilon)|Y|$ vizinhos em Y .*

Demonstração. Se $d \leq \varepsilon$ o resultado é trivial. Seja então $d > \varepsilon$. Se houver um subconjunto $X \subseteq A$ de tamanho $|X| \geq \varepsilon|A|$ vértices, em que cada vértice em X tem menos de $(d - \varepsilon)|Y|$ vizinhos em Y , inferimos que

$$d(X, Y) < \frac{|X| \cdot (d - \varepsilon)|Y|}{|X| \cdot |Y|} = d - \varepsilon,$$

o que contradiz a ε -regularidade do par (A, B) . □

Vamos agora enunciar formalmente o Lema de Regularidade de Szemerédi [40], o qual pode ser encontrado como o Teorema 1.7 na versão abaixo no trabalho de Komlós e Simonovits [30].

Teorema 5.2. *(Lema de Regularidade de Szemerédi, [30]) Para todo $\varepsilon > 0$ e inteiro positivo m , existem n_0 e M com a seguinte propriedade: todo grafo G com $n \geq n_0$ vértices admite uma partição $V_1 \cup \dots \cup V_t$ tal que:*

- $m \leq t \leq M$,
- $||V_i| - |V_j|| \leq 1$, e
- todos, exceto no máximo εt^2 , pares (V_i, V_j) são ε -regulares.

Para o leitor interessado em mais aplicações do Lema de Regularidade de Szemerédi, o trabalho de Komlós e Simonovits [30] discute esta poderosa ferramenta em diferentes contextos. Para nossos objetivos, utilizaremos uma *versão colorida* do Lema de Regularidade de Szemerédi, a qual nos permite obter uma partição ε -regular para todas as r cores simultaneamente e isso nos dará o grafo reduzido multicolorido associado à partição.

Lema 5.3. [30] Para todo $\varepsilon > 0$ e todo inteiro r , existe uma constante $M = M(\varepsilon, r)$ tal que obtemos a seguinte propriedade. Se as arestas de um grafo G de ordem $n > M$ são r -coloridas $E(G) = E_1 \cup \dots \cup E_r$, então existe uma partição do conjunto de vértices $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_m$, com $\frac{1}{\varepsilon} \leq m \leq M$, que é ε -regular simultaneamente em todos os grafos $G_i = (V, E_i)$ para $1 \leq i \leq r$.

5.2 Grafo Reduzido Multicolorido e algumas consequências

A forma como esse assunto será apresentado foi inspirada por [26]. Dada uma partição com m classes $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$ como a do Lema 5.3, ε -regular para todas as r cores, definimos o *grafo reduzido multicolorido* $H = H(\eta)$ associado a esta partição e à constante $\eta > 0$: o conjunto de vértices é $[m]$ e $e = \{i, j\}$ é uma aresta de H se o par (V_i, V_j) é ε -regular em relação a todas as cores e a densidade entre V_i e V_j é pelo menos η para pelo menos uma das cores. Para cada aresta $e = ij$ em H é atribuída a lista L_e de cores c tais que c aparece com densidade pelo menos η entre V_i e V_j em G .

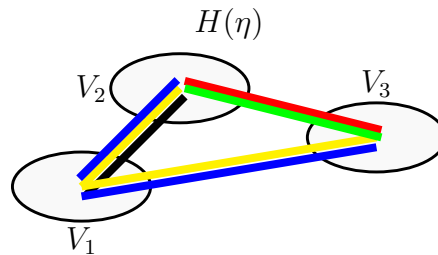


Figura 5.1: Um grafo reduzido multicolorido $H(\eta)$ com três vértices.

No grafo reduzido representado na Figura 5.1, obtido a partir de uma dada coloração de G , as cores que compõem a lista de cada aresta L_e aparecem sobre as arestas. Podemos obter diversas informações a partir do grafo $H(\eta)$, uma delas é que as cores vermelho e verde apresentam densidade pelo menos η somente entre o par ε -regular (V_2, V_3) . Outra é que todos os pares (V_i, V_j) são ε -regulares para todas as cores.

Dado um grafo colorido \widehat{F} , dizemos que um grafo reduzido multicolorido H contém \widehat{F} se H contém uma cópia do grafo (não colorido) induzido por \widehat{F} em que a cor de cada aresta de \widehat{F} está contida na lista da aresta correspondente em H . De forma mais geral, se F é um grafo com padrão de coloração P , falamos que H contém (F, P) se ele contém alguma cópia colorida de F com padrão P . O grafo reduzido $H(\eta)$ da Figura 5.1 contém o par (K_3, P_A) mas não contém o par (K_3, P_M) . Na próxima seção, veremos que a r -coloração de G que deu origem ao grafo reduzido $H(\eta)$ possui muitos triângulos arco-íris.

Dados grafos coloridos \widehat{F} e \widehat{H} , uma função $\psi: V(\widehat{F}) \rightarrow V(\widehat{H})$ é dita um *homomorfismo colorido* de \widehat{F} em \widehat{H} se, para toda aresta $e = ij \in E(\widehat{F})$, o par $\psi(i)\psi(j)$ é uma aresta de \widehat{H} com a cor de e . Se ao invés de um grafo colorido \widehat{H} , consideramos um grafo reduzido multicolorido H , é suficiente que a cor de e esteja na lista associada à aresta $\psi(i)\psi(j)$.

5.2.1 Lemas de Imersão

Vamos tratar agora dos chamados lemas de imersão. Um lema de imersão deve mostrar que, sob determinadas condições, um dado grafo G contém um grafo H como subgrafo. Muitas vezes, os lemas de imersão utilizam a regularidade de Szemerédi em seus enunciados e demonstrações, de forma que G deve ser

um grafo denso (número de arestas assintoticamente igual ao quadrado do número de vértices), com um número de vértices tal que a regularidade possa ser considerada (Lema 5.5). Outras vezes, o enfoque se dá a partir do fato de que há muitas arestas entre conjuntos (Lema 5.4) ou ainda, muitas arestas em geral (sempre com grafos densos).

Começamos com um lema de imersão que exige somente um tamanho mínimo dos subconjuntos considerados e uma densidade de arestas entre eles vinculada aos seus tamanhos. Este lema, que não se baseia na regularidade de Szemerédi, será útil na prova do resultado exato, o Teorema 1.6:

Lema 5.4. *Sejam $r, k \geq 2$ inteiros e uma constante $0 < \alpha < \frac{1}{(k-1)^{\frac{1}{k}}}$ e seja \widehat{K}_k um grafo colorido com conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_k\}$ tal que cada aresta $v_i v_j \in E(K_k)$ tenha cor $c_{i,j} \in [r]$. Considere um grafo colorido \widehat{G} e conjuntos mutuamente disjuntos $W_1, \dots, W_k \subseteq V(G)$ com a seguinte propriedade. Para todo par $\{i, j\}$, com $i \neq j$, e todo par de subconjuntos $X_i \subseteq W_i$, $|X_i| \geq \alpha^k |W_i|$ e $X_j \subseteq W_j$, $|X_j| \geq \alpha^k |W_j|$, existem pelo menos $\alpha |X_i| |X_j|$ arestas de cor $c_{i,j}$ entre X_i e X_j em \widehat{G} . Então \widehat{G} contém uma cópia de \widehat{K}_k com um vértice em cada conjunto W_i .*

Demonstração. Nós usaremos indução em k . Para $k = 2$, a afirmação é obviamente verdadeira. Assuma por indução que a hipótese seja válida para $k - 1$, onde $k \geq 3$. Agora fixe

$$0 < \alpha < (k - 1)^{-\frac{1}{k}} \tag{5.1}$$

e sejam W_1, \dots, W_k os subconjuntos de vértices de \widehat{G} que satisfazem as condições do lema. Para todo $1 \leq i \leq k - 1$, seja $W_k^i \subseteq W_k$ o subconjunto de todos os vértices em W_k que tenham menos que $\alpha |W_i|$ vizinhos em W_i via arestas coloridas com a cor $c_{i,k}$. Então temos $e(W_k^i, W_i) < \alpha |W_k^i| |W_i|$ e portanto $|W_k^i| < \alpha^k |W_k|$.

Desse modo deduzimos pela nossa escolha de α que

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k-1} W_k^i \right| < (k-1)\alpha^k |W_k| \stackrel{(5.1)}{<} |W_k|.$$

Em particular, existe um vértice v em W_k que não pertence a $\bigcup_{i=1}^{k-1} W_k^i$. Para todo $1 \leq i \leq k-1$, seja W_i' o conjunto de vizinhos de v em W_i que são adjacentes a v pelas arestas de cor $c_{i,k}$. Pela nossa escolha de v , temos $|W_i'| \geq \alpha |W_i|$. Seja $K_{k-1} = K_k - v$. Note que para todo par de subconjuntos $X_i \subseteq W_i'$ e $X_j \subseteq W_j'$ com tamanhos $|X_i| \geq \alpha^{k-1} |W_i'| \geq \alpha^k |W_i|$ e $|X_j| \geq \alpha^{k-1} |W_j'| \geq \alpha^k |W_j|$, o grafo \widehat{G} contém pelo menos $\alpha |X_i| |X_j|$ arestas de cor $c_{i,j}$ entre X_i e X_j . Pela hipótese de indução existe uma cópia de K_{k-1} com um vértice em cada W_i' , para $1 \leq i \leq k-1$. Esta cópia, juntamente com o vértice v , forma um grafo completo de ordem k com um vértice em cada W_i , onde cada aresta vv_i tem cor $c_{i,k}$, como queríamos. \square

Para a imersão de um dado grafo colorido \widehat{F} em um grafo colorido \widehat{G} utilizando a regularidade de Szemerédi, preparamos \widehat{G} seguindo os passos para a construção do grafo reduzido multicolorido associado. Iniciamos encontrando uma partição $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$ como a do Lema 5.3, ε -regular para todas as r cores, depois descartamos as *arestas ruins* habituais e definimos o grafo reduzido $H(\eta)$ da seguinte forma: seu conjunto de vértices é $[m]$ e $e = ij$ será aresta de H se o par (V_i, V_j) ε -regular tiver densidade de arestas pelo menos η . De posse do grafo reduzido $H(\eta)$, será possível mostrar que se $H(\eta)$ contém \widehat{F} , então \widehat{G} tem muitas cópias de \widehat{F} . O seguinte lema formaliza esta afirmação. A hipótese adicional de regularidade permite que a densidade de arestas entre as classes seja bem menor do que é exigido no Lema 5.4.

Lema 5.5. *Para todo $\eta > 0$ e todos os inteiros positivos k e r , existe $\varepsilon = \varepsilon(\eta, k) > 0$ e um inteiro positivo $n_0(r, \eta, k)$ com a seguinte propriedade. Suponha que $\widehat{G} = (V, E)$ é um grafo r -colorido com $n > n_0$ vértices com uma partição*

ε -regular multicolorida $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$ que define um grafo reduzido multicolorido $H = H(\eta)$. Seja \widehat{F} um grafo de k vértices colorido com $t \leq r$ cores. Se existe um homomorfismo colorido ψ de \widehat{F} em H , então o grafo \widehat{G} contém \widehat{F} .

Demonstração. O argumento utilizado aqui é padrão e segue a prova do Lema 2.4 em [26]. Sejam u_1, \dots, u_k os vértices de \widehat{F} . As arestas de \widehat{F} são denotadas $e_{i,j} = u_i u_j$ e suas cores são denotadas $c_{i,j}$. Denote por $N_c(v)$ o conjunto de vizinhos de v que estão ligados a v por uma aresta de cor c .

Nós escolheremos os vértices v_1, \dots, v_k que geram a cópia de \widehat{F} em \widehat{G} indutivamente. Com base no homomorfismo colorido ψ , começamos com os conjuntos $Y_i^0 = V_{\psi(u_i)}$ para $i \in \{1, \dots, k\}$. A ideia é escolher $v_1 \in Y_1^0$ com a propriedade que, para todo i tal que $e_{1,i} \in E(\widehat{F})$, o vértice v_1 tem pelo menos $(\eta - \varepsilon)|Y_i^0|$ vizinhos em Y_i^0 que são ligados ao vértice v_1 por uma aresta de cor $c_{1,i}$. Pela definição de H e pelo Lema 5.1, isto pode ser feito se $|Y_1^0| > (k - 1)\varepsilon|Y_1^0| \geq d_F(u_1)\varepsilon|Y_1^0|$, onde $d_F(u_1)$ é o grau do vértice u_1 em \widehat{F} . Para $i \geq 2$ tal que $e_{1,i} \in E(\widehat{F})$, defina $Y_i^1 = Y_i^0 \cap N_{c_{1,i}}(v_1)$; caso contrário faça $Y_i^1 = Y_i^0$. Note que $|Y_i^1| > (\eta - \varepsilon)|Y_i^0|$ para todo $i \geq 2$.

Indutivamente, suponha que v_1, \dots, v_{j-1} foram escolhidos e definimos conjuntos $Y_i^{j-1} = V_{\psi(u_i)}$ para todos os $i \geq j$ tais que $|Y_i^{j-1}| > (\eta - \varepsilon)^{j-1}|Y_i^0|$ e todos os vértices de Y_i^{j-1} são adjacentes a v_ℓ com uma aresta de cor $c_{\ell,i}$ sempre que $\ell < j$ e $e_{i,\ell} \in E(\widehat{F})$. Enquanto

$$|Y_j^{j-1}| - |\{i : i > j \text{ e } e_{i,j} \in E(\widehat{F})\}| \cdot \varepsilon|Y_j^0| \geq j \quad (5.2)$$

e $|Y_i^{j-1}| > \varepsilon|Y_i^0|$ para todo $i > j$, podemos aplicar o Lema 5.1 para o par ε -regular (Y_j^0, Y_i^0) e o subconjunto $Y_i^{j-1} \subseteq Y_i^0$ para obter $v_j \in Y_j^{j-1} \setminus \{v_1, \dots, v_{j-1}\}$ com a propriedade que

$$|Y_i^{j-1} \cap N_{c_{j,i}}(v_j)| \geq (\eta - \varepsilon)|Y_i^{j-1}| \geq (\eta - \varepsilon)^j|Y_i^0|$$

para todo $i > j$ tal que $e_{j,i} \in E(\widehat{F})$. Em seguida definimos $Y_i^j = Y_i^{j-1} \cap N_{c_{j,i}}(v_j)$ se $e_{j,i} \in E(\widehat{F})$ e $Y_i^j = Y_i^{j-1}$ caso contrário.

Este procedimento nos permite a imersão total de \widehat{F} em \widehat{G} se fixarmos $\varepsilon = \varepsilon(\eta, k) > 0$ pequeno o suficiente para satisfazer

$$(\eta - \varepsilon)^{k-1} \geq k\varepsilon \quad (5.3)$$

e tomarmos $n > n_0 \geq Mk/\varepsilon$ onde $M = M(r, \varepsilon)$ é definido no Lema 5.3. De fato, a condição (5.3) implica que, no processo acima, $|Y_j^{j-1}| \geq k\varepsilon|Y_j^0|$ para todo $j \leq k$. Além disso, a escolha de n_0 garante que, para todo j , tenhamos $\varepsilon|Y_j^0| \geq \varepsilon n/M \geq k \geq j$. Então, podemos usar a condição $|Y_j^{j-1}| \geq k\varepsilon|Y_j^0|$ para todo $j \leq k$, para assegurar a validade de (5.2), visto que

$$\begin{aligned} |Y_j^{j-1}| &\geq k\varepsilon|Y_j^0| = \varepsilon|Y_j^0| + (k-1)\varepsilon|Y_j^0| \\ &\geq j + |\{i : i > j \text{ e } e_{i,j} \in E(\widehat{F})\}|\varepsilon|Y_j^0|. \end{aligned}$$

□

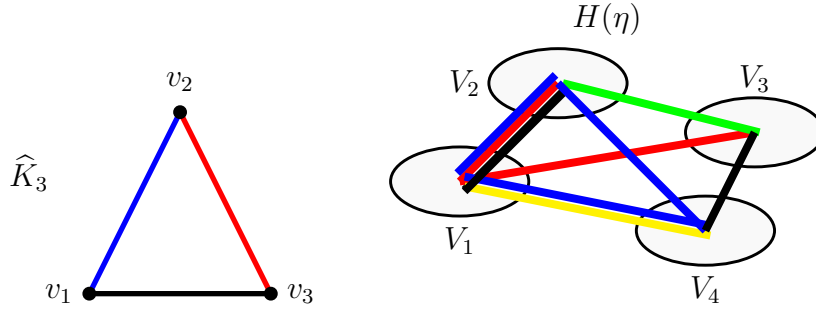


Figura 5.2: Um grafo reduzido multicolorido $H(\eta)$ que contém \widehat{K}_3 .

O grafo reduzido multicolorido $H(\eta)$ representado na Figura 5.2 nos dá a lista de cores que apresentam densidade pelo menos η a cada um dos pares

de uma partição ε -regular para todas as cores. Neste exemplo, existe um homomorfismo colorido ψ de \widehat{K}_3 em $H(\eta)$ que mapeia v_1 em V_4 , v_2 em V_1 e v_3 em V_3 , de forma que, pelo Lema 5.5, o grafo colorido \widehat{G} contém cópias de \widehat{K}_3 .

5.3 Estabilidade

O tipo de problema clássico da Combinatória Extremal é o de maximizarmos (ou minimizarmos) uma dada função real f sobre os elementos de uma determinada classe \mathcal{G} de grafos de n vértices. Nesse contexto, uma determinada função (propriedade) possuir estabilidade significa que se a função f admite uma solução ótima, toda solução que se aproxima da solução ótima deve ser estruturalmente “próxima” desta. Um dos primeiros problemas estudados sob a ótica da estabilidade em grafos foi o problema de Turán. Em seu trabalho original, Simonovits [39] mostrou que se um grafo G é K_k -livre e possui um número de arestas “próximo” de $t_{k-1}(n)$, então existe uma $(k-1)$ -partição de G excluindo-se uma “pequena” quantidade de arestas.

Em 2015, Füredi [15] provou um importante resultado de estabilidade, o qual é adequado para os nossos propósitos. Seu resultado trata a estabilidade em relação a um número fixo t de arestas. Vejamos:

Teorema 5.6. *Suponha que G seja um grafo livre de K_k com n vértices e $t_{k-1}(n) - t$ arestas. Então G pode ser particionado em $(k-1)$ partes excluindo no máximo t arestas.*

O próximo lema é um resultado de imersão que utiliza estabilidade e generaliza um resultado de Alon e Yuster [2].

Lema 5.7. *Sejam $1 \leq j \leq k-1$ e $0 < \gamma \leq j/(4(k-1)^2)$ e seja H'' um grafo $(k-1)$ -partido de m vértices com partição $V(H'') = U_1 \cup \dots \cup U_{k-1}$ e pelo menos $t_{k-1}(m) - \gamma m^2$ arestas. Se adicionarmos mais do que $(2(k-1)/j + 1)\gamma m^2$ arestas novas em H'' , o grafo resultante conterá uma cópia de K_k com no máximo $\min\{j, \lfloor k/2 \rfloor\}$ arestas novas, cada uma delas ligando dois vértices de K_k que estão em alguma classe U_i de H'' .*

Demonstração. Seja H'' como no enunciado do lema. Seja H' um grafo obtido de H'' pela adição de $(2(k-1)/j + 1)\gamma m^2$ arestas novas. Pelo menos $(2(k-1)/j)\gamma m^2$ arestas novas ligam vértices que estão em uma mesma classe da partição. Por um argumento de média, existem j classes U_{i_1}, \dots, U_{i_j} que contêm pelo menos $2\gamma m^2$ arestas novas. De fato, se isto fosse falso, teríamos

$$\begin{aligned} \binom{k-2}{j-1} (e_{H'}(U_1) + \dots + e_{H'}(U_{k-1})) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k-1} (e_{H'}(U_{i_1}) + \dots + e_{H'}(U_{i_j})) \\ &< \binom{k-1}{j} \cdot 2\gamma m^2, \end{aligned}$$

o que implica que $e_{H'}(U_1) + \dots + e_{H'}(U_{k-1}) \leq (2(k-1)/j)\gamma m^2$, uma contradição. Seja Γ o subgrafo de H' gerado com arestas em $E_{H'}(U_{i_1}) \cup \dots \cup E_{H'}(U_{i_j})$, tal que Γ contém pelo menos $2\gamma m^2$ arestas. Pelo Lema 3.3, Γ tem um subgrafo bipartido Γ' com pelo menos γm^2 arestas. Iremos nos referir às arestas de Γ' como *arestas novas*. A soma do número de arestas em Γ' com o número de arestas em H'' é maior que $t_{k-1}(m)$, portanto existe uma cópia de K_k na união de H'' e Γ' . Note que não podem existir três ou mais vértices desta cópia na mesma classe U_i , pois isto produziria um triângulo onde todas as arestas seriam novas, uma contradição. Desta forma, esta cópia de K_k contém no máximo $\min\{j, \lfloor k/2 \rfloor\}$ arestas novas. \square

Enunciamos o Lema 5.7 para o caso especial em que $j = 1$, que é precisamente o resultado de Alon e Yuster [2].

Corolário 5.8. *Seja $0 < \gamma \leq 1/(4(k-1))$ fixado e seja H'' um grafo de m vértices $(k-1)$ -partido com partição $V(H'') = U_1 \cup \dots \cup U_{k-1}$ e com pelo menos $t_{k-1}(m) - \gamma m^2$ arestas. Se adicionarmos mais do que $(2k-1)\gamma m^2$ arestas novas em H'' , o grafo resultante conterá uma cópia de K_k com exatamente uma aresta nova, a qual conecta dois vértices de K_k que estão na mesma classe U_i de H'' .*

Os resultados de estabilidade são muito úteis quando necessitamos provar que, fixado F , um grafo F -livre que possui uma quantidade de arestas “próxima” a $ex(n, F)$ deve possuir estrutura “similar” à do grafo F -extremal. Nosso próximo capítulo se dedica a mostrar o que chamamos de *Propriedade de Estabilidade de Cores*. Neste contexto, a função a ser maximizada é o número de r -colorações de um grafo $\mathcal{P}_{(k, \geq s)}$ -livre. Mostraremos que um grafo G terá a propriedade de estabilidade de cores se este grafo tiver $c_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(G) \geq r^{ex(n, K_k)}$ e uma estrutura “muito próxima” do grafo de Turán $T_{k-1}(n)$.

5.4 Outros resultados necessários

5.4.1 A Função Entropia

A função entropia tem um papel importante nas demonstrações em que necessitamos limitar valores que dependem de números binomiais, de forma que podemos comparar números binomiais com potências. Para mais detalhes, o leitor pode consultar [34]. Considere $H : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$H(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2(1-x)$$

com $H(0) = H(1) = 0$. É bem conhecido que, para todo $0 \leq \alpha \leq 1$, a desigualdade

$$\binom{n}{\alpha n} \leq 2^{H(\alpha)n} \tag{5.4}$$

é válida, que é basicamente o que será utilizado em estimativas para o número de colorações. A seguinte cota superior para $H(x)$ com $x \leq \frac{1}{2}$ também é bem conhecida e nos será útil:

$$H(x) \leq -2x \log_2 x. \quad (5.5)$$

Cabe ressaltar que o número αn , dependendo do valor de α , pode não ser um inteiro, o que não faria sentido no nosso contexto. Neste caso será necessário trabalhar ou com o teto $\lceil \alpha n \rceil$ ou com o piso $\lfloor \alpha n \rfloor$. Para fins de simplicidade, omitimos estes símbolos no decorrer do trabalho, salientando que as pequenas diferenças numéricas decorrentes disso não afetam a validade das cotas obtidas, pois seriam facilmente absorvidas pelas cotas superiores utilizadas para n grande.

5.4.2 O Teorema de Hall Generalizado

O seguinte teorema da Teoria de Grafos será utilizado para provarmos o nosso resultado exato, o Teorema 1.6. Para uma prova, o leitor pode consultar [11].

Teorema 5.9. *Seja $G = (V, E)$ um grafo bipartido com bipartição $V_1 \cup V_2$. Existe um emparelhamento M de cardinalidade $|M| \geq |V_1| - d$ se, e somente se, $|N(X)| \geq |X| - d$ para todo $X \subseteq V_1$.*

6 A ESTABILIDADE DE CORES EM GRAFOS $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$ -LIVRES

Nosso objetivo neste capítulo é mostrar que se um grafo G de n vértices possui $c_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(G) \geq r^{ex(n, K_k)}$, então este grafo deve ter uma estrutura muito próxima à do grafo de Turán $T_{k-1}(n)$.

O Teorema 2.9, provado em [26], nos mostra que dados $k \geq 4$ e o par (K_k, P_A) , existe r_0 tal que $c_{r, (K_k, P_A)}(n) = |\mathcal{C}_{r, (K_k, P_A)}(T_{k-1}(n))|$ para todo $r \geq r_0$ e $n \geq n_0(r, k)$. Com o Lema 4.1 (b), sabemos que, dados $k \geq 4$ e $s \leq \binom{k}{2}$, sempre temos $c_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(n) = |\mathcal{C}_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(T_{k-1}(n))|$. O valor de r_0 obtido com a estratégia utilizada em [26] é superexponencial em k , ainda que os autores acreditassem que esse resultado fosse válido para valores muito menores de r_0 . Aqui, confirmando a previsão deles, vamos fornecer limites melhores de r_0 para $s = \binom{k}{2}$. Com as ferramentas utilizadas nesta tese, cotas menores podem ser obtidas à medida que fixarmos valores menores para s .

Sabemos que para r distintos, podemos obter grafos extremais distintos nos problemas de Erdős–Rothschild. Relembre que o nosso parâmetro r_0^* é o menor inteiro tal que o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ é sempre o grafo $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremal para todo $r \geq r_0^*$ e n suficientemente grande. Veremos que fixado k , pela forma como conduzimos a prova do Teorema 1.7, à medida que o valor de s decresce, o parâmetro r_0 também diminui, o que faz com que tenhamos valores de r_0 muito bons para a validade de nossos resultados, alguns chegando a alcançar r_0^* .

Em seguida, apresentamos o resultado principal deste capítulo. Lembre que a equação (3.4) define

$$A(k, j) = \binom{\lfloor k/j \rfloor}{2} \left(\left\lfloor \frac{k}{j} \right\rfloor j + j - k \right) + \binom{\lceil k/j \rceil}{2} \left(k - \left\lfloor \frac{k}{j} \right\rfloor j \right)$$

como o menor número de arestas a serem retiradas para que um grafo K_k se torne j -partido. Lembre também que definimos $s_0(k)$ na equação (1.2) da seguinte maneira.

$$s_0(k) = A(k, 2) + 2 = \binom{k}{2} - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 2.$$

Seja i^* o menor valor de i tal que $A(k, k - i) \geq s - 2$. Para esclarecer, se quisermos obter uma $(k - 1)$ -partição de uma cópia de K_k , devemos particionar os seus k vértices em $(k - 1)$ classes. Portanto, dois vértices devem estar em uma mesma classe e conseqüentemente a aresta que os ligava no grafo K_k deve ser retirada. Ao considerarmos uma $(k - 2)$ -partição, perdemos duas arestas, pois duas classes terão dois vértices e assim sucessivamente. Seja então o 1º passo a $(k - 1)$ -partição, o 2º passo a $(k - 2)$ -partição, o i -ésimo passo a $(k - i)$ -partição. Note que para $i \leq \lfloor k/2 \rfloor$, as arestas retiradas em cada passo aumentam de uma em uma, desde a $(k - 1)$ -partição até a $(k - \lfloor k/2 \rfloor)$ -partição. A partir de $i > \lfloor k/2 \rfloor$, o número de arestas retiradas entre um passo e outro variará em mais de uma unidade, pois pelo menos uma classe receberá mais de dois vértices de K_k .

Assim, o parâmetro i^* representa o número de passos que devemos realizar para transformar uma cópia de K_k em um grafo $(k - i)$ -partido até que tenhamos o número de arestas excluídas pelo menos $(s - 2)$. Vejamos um pequeno exemplo considerando uma cópia de K_6 , $s = 5$ e $s = s_0(6) = 8$ respectivamente:

i	$A(k, k - i)$	$s - 2 = 3$
1	$A(6, 5) = 1$	< 3
2	$A(6, 4) = 2$	< 3
$i^* = 3$	$A(6, 3) = 3$	≥ 3
4	$A(6, 2) = 6$	≥ 3

i	$A(k, k - i)$	$s - 2 = 6$
1	$A(6, 5) = 1$	< 6
2	$A(6, 4) = 2$	< 6
3	$A(6, 3) = 3$	< 6
$i^* = 4$	$A(6, 2) = 6$	≥ 6

Note que, pela condição sobre s , temos $i^* \leq \min\{s - 2, k - 2\}$.

Agora considere que, para $s \leq s_0(k)$, temos $r_0(k, s, 0)$ sendo o menor inteiro maior do que

$$(s - 1)^{\frac{k-1}{k-2}} \prod_{i=2}^{i^*} (s - A(k, k - i + 1) - 1)^{\frac{1}{(k-i-1)(k-i)}}, \quad (6.1)$$

A função adicional $s_t(k)$, constante em (1.3), foi desenvolvida a fim de melhorar a dependência entre os parâmetros quando $s > s_0(k)$. Para $t \in [k]$, temos

$$s_t(k) = \binom{k}{2} - k + t.$$

Para $s \leq s_t(k)$, com $t \in [k]$, fixe $j = k - t + 1$. Definimos $r_0(k, s, t)$ como o menor inteiro que é maior que

$$(s - A(k, 2) - 1)^{\frac{4(k-1)}{j}} \cdot \left(\prod_{i=2}^{k-2} (s - A(k, k - i + 1) - 1)^{\frac{1}{(k-i-1)(k-i)}} \right) \cdot (s - 1)^{\frac{k-1}{k-2}}. \quad (6.2)$$

Primeiro, consideremos $s \leq s_0(k)$. Vamos tratar agora de um parâmetro que aparece na definição do $r_0(k, s, 0)$ em (6.1).

As tabelas a seguir fornecem os valores de $r_0(k, s, t)$, para $t \in \{0, 1, \dots, k\}$, e $r_1(k, s)$ respectivamente, para pequenos valores de k e s :

$k \setminus s$	2	3	4	5	6	7	8	9
3	2	4						
4	2	3	8	887				
5	2	3	5	11	19	457		
6	2	3	5	7	15	24	35	481

Tabela 6.1: $r_0(k, s, t)$ para pequenos valores de k e s .

$k \setminus s$	3	4	5	6	7	8	9	10	12	13	15
4	2	5	7	11							
5	2	4	6	8	10	13	15	18			
6	2	3	5	7	9	11	13	15	20	22	27

Tabela 6.2: $r_1(k, s)$ para pequenos valores de k e s .

Em particular, estas tabelas mostram que os valores de $r_0(k, s, t)$ alcançam r_0^* para os pares (k, s) em que $s = 3$ e o par $(k, s) = (5, 4)$. Para valores em geral de k e s existe uma diferença, que aumenta substancialmente para valores grandes de k , entre $r_1(k, s)$ e $r_0(k, s, t)$. Para os valores de r entre $(s-1)$ e $r_0(k, s, t)$ o problema segue em aberto, fato que pode ser objeto de futuras pesquisas.

Estamos prontos para provar o Teorema 1.7, enunciado novamente aqui para a conveniência do leitor. Este resultado, que traz a Propriedade de Estabilidade de Cores, pode ser considerado como o principal passo intermediário em busca do nosso resultado exato.

Teorema 1.7. *Sejam $k \geq 4$, e $2 \leq s \leq \binom{k}{2}$ inteiros e seja $t \in \{0, 1, \dots, k\}$ o menor índice tal que $s \leq s_t(k)$. Fixe $r \geq r_0(k, s, t)$ conforme as desigualdades (6.1) ou (6.2). Para todo $\delta > 0$, existe $n'_0 = n'_0(\delta, r, k, s)$ tal que o seguinte é verdadeiro. Se $G = (V, E)$ é um grafo de $n \geq n'_0$ vértices tal que $|\mathcal{C}_{r, \mathcal{P}(K_{k, \geq s})}(G)| \geq r^{t_{k-1}(n)}$, então existe uma partição $V = W_1 \cup \dots \cup W_{k-1}$ tal que no máximo δn^2 arestas têm ambas as extremidades em alguma classe W_i .*

Demonstração. Fixe inteiros positivos $k \geq 4$, $2 \leq s \leq \binom{k}{2}$, $t \in \{0, 1, \dots, k\}$ e $r \geq r_0(k, s, t)$. Seja $\delta > 0$ e considere $\beta_0 > 0$ e $\eta > 0$ suficientemente pequenos

para satisfazer

$$r\eta < \frac{\delta}{2} \quad \text{e} \quad (8k-3)\beta_0 < \frac{\delta}{2}.$$

Sejam $n_0 = n_0(r, \eta, k)$ e $0 < \varepsilon(r, \eta, k) < \eta/2$ dados pelo Lema 5.5 e seja $M = M(\varepsilon, r)$ definido pelo Lema 5.3. Tomemos $n'_0 \geq \max\{n_0, M\}$. Seja G um grafo de $n > n'_0$ vértices com pelo menos $c_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(G) \geq r^{t_{k-1}(n)}$. Fixe uma destas colorações.

Pelo Lema 5.3, existe uma partição de $V(G)$ em m partes, onde $1/\varepsilon \leq m \leq M$, que é ε -regular com relação a todas as r cores. Seja $H = H(\eta)$ um grafo reduzido multicolorido de m vértices associado a esta partição, onde cada aresta e tem uma lista não vazia L_e de cores. Denotamos por $E_i = E_i(H)$ o conjunto de arestas de H em que $|L_e| = i$, e seja $e_i(H) = |E_i(H)|$, para $i \in [r]$.

Buscamos limitar superiormente o número de r -colorações de G que têm origem na partição $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_m$ e no grafo reduzido multicolorido H . Dada uma cor $c \in [r]$, o número de pares ε -irregulares (V_i, V_j) com relação ao subgrafo G_c de G com conjunto de arestas dado por todas as arestas de cor c é no máximo $\varepsilon \binom{m}{2}$. Isto nos dá no máximo

$$r \cdot \varepsilon \cdot \binom{m}{2} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2 \leq \frac{r \cdot \varepsilon}{2} \cdot n^2 \quad (6.3)$$

arestas entre pares ε -irregulares com relação a alguma cor. Pela definição de uma partição ε -regular e o fato de que $m \geq 1/\varepsilon$, existem no máximo

$$m \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2 = \frac{n^2}{m} \leq \varepsilon n^2 \quad (6.4)$$

arestas cujas extremidades estão em uma mesma classe V_i da partição para algum $i \in [m]$. Finalmente, o número de arestas com alguma cor c conectando um par (V_i, V_j) tal que a densidade do par em G_c é menor que η é limitado acima por

$$r \cdot \eta \cdot \binom{m}{2} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2 < \frac{r \cdot \eta}{2} \cdot n^2. \quad (6.5)$$

Combinando as desigualdades (6.3) – (6.5) e utilizando que $\varepsilon < \eta/2$, concluímos que existem no máximo $r\eta n^2$ arestas destes três tipos. Elas podem ser escolhidas no grafo G de no máximo $\binom{n^2/2}{r\eta n^2}$ modos e podem ser coloridas de no máximo $r^{r\eta n^2}$ modos.

As arestas restantes de G que formam o grafo reduzido multicolorido $H = H(\eta)$ são aquelas que ligam vértices dos pares (V_i, V_j) que são ε -regulares em relação a todas as cores. Para o grafo reduzido, a aresta $e = ij$ existe se a densidade de arestas entre V_i e V_j é pelo menos η para pelo menos uma das cores. Assim, cada aresta de H possui uma lista L_e de cores c tal que c aparece com densidade pelo menos η entre V_i e V_j em G . Como consequência, o número de r -colorações de G que têm origem na partição $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_m$ e no grafo reduzido multicolorido $H(\eta)$ é limitado acima por

$$\binom{n^2/2}{r\eta n^2} \cdot r^{r\eta n^2} \cdot \left(\prod_{e \in E(H)} |L_e| \right)^{\binom{n}{m}^2} \stackrel{(5.4)}{\leq} 2^{H(2r\eta)\frac{n^2}{2}} \cdot r^{r\eta n^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^r i^{e_i(H)} \right)^{\binom{n}{m}^2} \quad (6.6)$$

Uma vez que $m \leq M$, existem no máximo M^n partições ε -regulares distintas $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_m$. Somando (6.6) sobre todas as partições possíveis e todos os possíveis grafos reduzidos multicoloridos H , o número de r -colorações $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$ -livres de G é no máximo

$$M^n \cdot 2^{H(2r\eta)\frac{n^2}{2}} \cdot r^{r\eta n^2} \cdot \sum_H \left(\prod_{i=1}^r i^{e_i(H)} \right)^{\binom{n}{m}^2}. \quad (6.7)$$

Note que na expressão temos $m = m(H) = |V(H)|$. Queremos limitar o valor de $\prod_{i=1}^r i^{e_i(H)}$.

Primeiro observe que, para qualquer distribuição de cores nas listas de um grafo reduzido multicolorido H ,

$$e_s(H) + \dots + e_r(H) \leq t_{k-1}(m). \quad (6.8)$$

Caso contrário, pelo Teorema de Turán [41, Teorema 1.1], o grafo reduzido multicolorido H conteria uma cópia de K_k tal que cada aresta teria uma lista de tamanho pelo menos s . Isso induz uma cópia de algum padrão de K_k com pelo menos s classes em H , pois vai existir uma função $\psi: V(\widehat{K}_k) \rightarrow V(\widehat{H})$ para um homomorfismo colorido de \widehat{K}_k em \widehat{H} e, na pior das hipóteses, as arestas de K_k terão listas de cores de tamanho s . Assim, pelo Lema de Imersão (Lema 5.5), G conteria uma cópia de K_k cujo conjunto de arestas é colorido com s cores, uma contradição. Mais geralmente, provamos o seguinte:

Afirmção 6.1. *Seja H um grafo reduzido multicolorido $\mathcal{P}_{(K_{k,i} \geq s)}$ -livre em que $E_j = E_j(H)$ é o conjunto de arestas em H com lista de tamanho j e $e_j(H) = |E_j(H)|$ para todo $j \in [r]$. Para i tal que $A(k, k-i) \leq s-1$, não existe cópia de K_k em que todas as arestas estão em $E_{s-A(k,k-i)} \cup \dots \cup E_r$ e pelo menos $A(k, k-i)$ arestas estão em $E_s \cup \dots \cup E_r$. Desta forma, se $i \leq k-2$ e $A(k, k-i) \leq s-1$, a seguinte desigualdade vale:*

$$\frac{k-i-1}{k-i} \cdot (e_{s-A(k,k-i)}(H) + \dots + e_{s-1}(H)) + e_s(H) + \dots + e_r(H) \leq t_{k-1}(m).$$

Demonstração. Assuma que existe uma cópia de K_k em que todas as arestas estão em $E_{s-A(k,k-i)} \cup \dots \cup E_r$ e pelo menos $A(k, k-i)$ arestas estão em $E_s \cup \dots \cup E_r$. Seja p o número de arestas em $E_{s-A(k,k-i)} \cup \dots \cup E_{s-1}$ nesta cópia de K_k . Procedendo “gulosamente” (e começando com as arestas em $E_{s-A(k,k-i)} \cup \dots \cup E_{s-1}$), podemos encontrar uma cópia de K_k tal que $\alpha \geq \min\{s - A(k, k-i), p\}$ cores distintas aparecem nas arestas que estão em $E_{s-A(k,k-i)} \cup \dots \cup E_{s-1}$. Se $\alpha \geq s - A(k, k-i)$, então pelo menos $s - \alpha$ outras cores distintas podem ser escolhidas nas arestas em $E_s \cup \dots \cup E_r$, pois essa união contém pelo menos $A(k, k-i)$ arestas, cada uma delas com uma lista de cores de tamanho pelo menos s . Se $\alpha = p < s - A(k, k-i)$, então o número de arestas da cópia em $E_s \cup \dots \cup E_r$ é $\binom{k}{2} - p \geq s - p$, de forma que pelo menos $s - \alpha$ outras cores distintas podem ser escolhidas para as arestas

deste conjunto. Em ambos os casos, conseguimos uma cópia de K_k colorido com s ou mais cores, a contradição desejada.

Em seguida, assumindo que $k - i \geq 2$ e que $A(k, k - i) \leq s - 1$, seja $E' \subseteq E_{s-A(k, k-i)} \cup \dots \cup E_{s-1}$ de tamanho máximo com a propriedade que as arestas de E' induzem um subgrafo $(k - i)$ -partido de H . Pelo Lema 3.4, o número de arestas de E' na cópia $(k - i)$ -partida de K_k é no máximo $a(k, k - i) = \binom{k}{2} - A(k, k - i)$, tal que $|E'| + e_s(H) + \dots + e_r(H) \leq t_{k-1}(m)$ pela discussão anterior. Pelo Lema 3.3, sabemos que $|E'| \geq (k - i - 1) \cdot |E_{s-A(k, k-i)} \cup \dots \cup E_{s-1}| / (k - i)$, que nos dá o resultado desejado. \square

Note que $A(k, k - i) = i$ para $i \leq \lfloor k/2 \rfloor$, e neste caso a desigualdade da Afirmação 6.1 torna-se

$$\frac{k - i - 1}{k - i} \cdot (e_{s-i}(H) + \dots + e_{s-1}(H)) + e_s(H) + \dots + e_r(H) \leq t_{k-1}(m). \quad (6.9)$$

Para um grafo reduzido multicolorido H , seja

$$\beta = \beta(H) = \frac{1}{m(H)^2} \left(t_{k-1}(m(H)) - \sum_{j=s}^r e_j(H) \right) \geq 0.$$

Para limitarmos superiormente o número de r -colorações $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$ -livres de G em (6.7), consideremos o produto

$$\begin{aligned} \left(\prod_{e \in E(H)} |L_e| \right)^{\binom{n}{m}^2} &= \prod_{i=2}^r i^{e_i(H)} \\ &\leq 2^{e_2(H)} \cdot 3^{e_3(H)} \dots (s-1)^{e_{s-1}(H)} \cdot r^{t_{k-1}(n) - \beta(H)n^2}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Maximizar este produto é o mesmo que maximizar

$$\log \left(2^{e_2(H)} \cdot 3^{e_3(H)} \dots (s-1)^{e_{s-1}(H)} \right) = \log 2 \cdot e_2(H) + \dots + \log(s-1) \cdot e_{s-1}(H). \quad (6.11)$$

Para simplificar as expressões abaixo, para $k \geq 3$ e $2 \leq i \leq k-2$, definimos as funções

$$s_i = s - A(k, k-i+1) - 1 \quad \text{e} \quad \xi_i = \frac{1}{(k-i-1)(k-i)}. \quad (6.15)$$

Combinando estas soluções ótimas para $e_j(H)$ em (6.7), obtemos

$$M^n \cdot 2^{H(2r\eta)\frac{n^2}{2}} \cdot r^{r\eta n^2} \cdot \sum_H \left(\prod_{i=1}^r e_i(H) \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^2} \leq r^{(H(2r\eta)+2r\eta)\frac{n^2}{2}}. \quad (6.16)$$

$$\cdot \sum_H \left(\frac{\left(\prod_{i=2}^{i^*} (s - A(k, k-i+1) - 1)^{\frac{1}{(k-i-1)(k-i)}} \right) (s-1)^{\frac{k-1}{k-2}}}{r} \right)^{\beta(H)n^2} r^{t_{k-1}(n)}.$$

Pela nossa escolha de $r_0 = r_0(k, s, 0)$ (ver (6.1)), para todo $\beta_0 > 0$ existe $\eta > 0$ tal que

$$r^{2H(2r\eta)+2r\eta} \left(\frac{\left(\prod_{i=2}^{i^*} s_i^{\xi_i} \right) \cdot (s-1)^{\frac{k-1}{k-2}}}{r} \right)^{\beta_0} < 1. \quad (6.17)$$

Lembre que estamos usando $\beta_0 < \delta/(8k+2)$ e que $\eta > 0$ satisfaz a hipótese inicial e (6.17) para estes valores de β_0 .

Afirmamos que existe um grafo reduzido multicolorido H tal que $\beta(H) < \beta_0$. De fato, se isto não acontecesse, a inequação (6.16) seria limitada acima por

$$r^{(H(2r\eta)+2r\eta)\frac{n^2}{2}} \cdot 2^{rM^2/2} \left(\frac{\left(\prod_{i=2}^{i^*} s_i^{\xi_i} \right) \cdot (s-1)^{\frac{k-1}{k-2}}}{r} \right)^{\beta_0 n^2} \cdot r^{t_{k-1}(n)} \stackrel{(6.17)}{<} r^{t_{k-1}(n)}, \quad (6.18)$$

uma contradição (estamos usando que o número de grafos reduzidos multicoloridos é limitado acima por $2^{rM^2/2}$, que é menor que $r^{H(2r\eta)n^2/2}$ para n suficientemente grande).

Então, seja H um grafo reduzido multicolorido em que $\beta = \beta(H) < \beta_0$. Considere o subgrafo H' de H com conjunto de arestas $E_s \cup \dots \cup E_r$. Este grafo contém $t_{k-1}(m) - \beta m^2$ arestas. Podemos aplicar o Teorema 5.6 com $t = \beta m^2$. Ao removermos no máximo βm^2 arestas de H' , obtemos um subgrafo $(k-1)$ -partido H'' . Seja $U_1 \cup \dots \cup U_{k-1}$ a partição resultante de $V(H'') = V(H)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{k-1} e_{H'}(U_i) \leq \beta m^2. \quad (6.19)$$

Pela Afirmação 6.1 para $i = k-2$, sabemos que $e_2(H) + \dots + e_{s-1}(H) \leq 2\beta m^2$. Para limitar $e_1(H)$, aplicamos o Corolário 5.8 ao grafo $(k-1)$ -partido H'' . O corolário assegura que não podemos ter $e_1(H) \geq (2k-1) \cdot 2\beta m^2 = (4k-2)\beta m^2$, em caso contrário, adicionando E_1 a H'' produziríamos uma cópia de K_k na qual exatamente uma das arestas teria uma lista de tamanho um e todas as outras arestas teriam listas com s ou mais cores. Então, pelo Lema 5.5, teríamos uma cópia de K_k colorida com o padrão proibido em G . Assim, devemos ter $e_1(H) < (4k-2)\beta m^2$. Isto nos dá um limite superior para o número de arestas de H com listas de tamanho até $(s-1)$:

$$e_1(H) + \dots + e_{s-1}(H) \leq 4k\beta m^2. \quad (6.20)$$

Seja $W_i = \bigcup_{j \in U_i} V_j$, onde $i \in [k-1]$. Vamos provar que a partição $V(G) = W_1 \cup \dots \cup W_{k-1}$ satisfaz a conclusão do teorema. Arestas internas às classes W_i de G podem vir de três lugares: arestas de G que não estão representadas em H ; arestas de G em pares (V_s, V_t) tais que $\{s, t\} \in E(H) \setminus E(H')$; arestas de G em pares (V_s, V_t) que correspondem a arestas internas às classes U_j em $E(H')$. Por (6.3) – (6.5) e (6.20), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} e_G(W_i) &\leq r\eta n^2 + \left(\sum_{i=1}^{k-1} e_{H'}(U_i) + e_1(H) + \dots + e_{s-1}(H) \right) \cdot \left(\frac{n}{m} \right)^2 \\ &\leq r\eta n^2 + (\beta_0 m^2 + 4k\beta_0 m^2) \cdot \left(\frac{n}{m} \right)^2 \leq \delta n^2, \end{aligned}$$

Portanto, pela escolha de $r_0(k, s, t)$ (ver (6.2)) maior que

$$(s - A(k, 2) - 1)^{\frac{4(k-1)}{j}} \cdot \left(\prod_{i=2}^{k-2} s_i^{\xi_i} \right) \cdot (s - 1)^{\frac{k-1}{k-2}},$$

o valor de $\eta > 0$ escolhido inicialmente garante que

$$r^{2H(2r\eta)+2r\eta} \left(\frac{\left(\prod_{i=2}^{i^*} s_i^{\xi_i} \right) \cdot (s - 1)^{\frac{k-1}{k-2}}}{r} \right)^{\frac{j}{8(k-1)^2}} < 1. \quad (6.23)$$

Isso significa que

$$\begin{aligned} & r^{(H(2r\eta)+2r\eta)\frac{n^2}{2}} \cdot 2^{rM^2/2} \left(\frac{\left(\prod_{i=2}^{i^*} s_i^{\xi_i} \right) \cdot (s - 1)^{\frac{k-1}{k-2}}}{r} \right)^{\frac{j}{8(k-1)^2} n^2} \\ & \cdot r^{t_{k-1}(n)} \stackrel{(6.23)}{<} r^{t_{k-1}(n)}, \end{aligned} \quad (6.24)$$

e novamente obtemos uma contradição, com o mesmo argumento utilizado para o número de grafos reduzidos multicoloridos (limitado acima por $2^{rM^2/2}$, que é menor que $r^{H(2r\eta)n^2/2}$ para n suficientemente grande).

2ª Parte. Supomos agora que $\beta = \beta(H) < j/(8(k-1)^2)$. Como acima, seja H' subgrafo de H com conjunto de arestas $E_s \cup \dots \cup E_r$ e seja H'' o subgrafo $(k-1)$ -partido de H' com número máximo de arestas. Note que $|E(H')| = t_{k-1}(m) - \beta m^2$. Pelo Teorema 5.6, sabemos que

$$|E(H'')| \geq |E(H')| - \beta m^2 \geq t_{k-1}(m) - 2\beta m^2.$$

Seja $E' = E_2 \cup \dots \cup E_{s-1}$. Podemos aplicar o Lema 5.7 para nossos valores de j quando $\gamma = 2\beta$. Existem dois casos. Se $t \leq \lfloor k/2 \rfloor$ (e então $\lfloor k/2 \rfloor \leq j$),

concluimos que, se $|E'| > (4(k-1)/j+2)\beta m^2$, então o grafo reduzido multicolorido obtido ao adicionarmos as arestas de E' em H'' conteria uma cópia de K_k com no máximo $\lfloor k/2 \rfloor$ arestas em E' . Isto nos dá uma cópia de K_k com pelo menos $2 + \min\{s-2, \binom{k}{2} - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$ cores. Isto é uma contradição sempre que $s \leq \binom{k}{2} - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2$, que acontece para $s \leq s_t(k)$ com $t \leq \lfloor k/2 \rfloor$. Agora assuma que $s \leq s_t(k)$ para $t > \lfloor k/2 \rfloor$, tal que $j \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. Como no caso anterior, se $|E'| > (4(k-1)/j+2)\beta m^2$, então adicionando arestas de E' em H'' produziríamos uma cópia de K_k com no máximo j arestas em E' . Isto nos dá uma cópia de K_k com pelo menos $2 + \min\{s-2, \binom{k}{2} - j\}$ cores. Isto é uma contradição sempre que $s \leq \binom{k}{2} - j + 2 = s_t(k)$, que é precisamente a hipótese neste caso.

Como consequência, temos

$$e_2(H) + \dots + e_{s-1}(H) \leq (4(k-1)/j+2)\beta m^2. \quad (6.25)$$

Usando um argumento como o utilizado para a desigualdade (6.16) em conjunto com (6.25) para limitar $e_2(H), \dots, e_{s-A(k,k-i+1)-1}(H)$, novamente usando as funções s_i e ξ definidas em (6.15) e o fato de que $e_{s-A(k,2)}(H) + \dots + e_{s-1}(H) = 2\beta m^2$, quando a solução ótima da equação linear é alcançada, obtemos a seguinte desigualdade.

$$\prod_{i=1}^r i^{e_i(H)} \leq \left(\frac{(s - A(k, 2) - 1)^{\frac{4(k-1)}{j}} \cdot \left(\prod_{i=2}^{k-2} s_i^{\xi_i} \right) \cdot (s-1)^{\frac{k-1}{k-2}}}{r} \right)^{\beta m^2} \cdot r^{t_{k-1}(m)}. \quad (6.26)$$

Como na 1ª Parte, pela nossa escolha de $r_0 = r_0(k, s, t)$ maior que

$$(s - A(k, 2) - 1)^{\frac{4(k-1)}{j}} \cdot \left(\prod_{i=2}^{k-2} (s - A(k, k-i+1) - 1)^{\frac{1}{(k-i-1)(k-i)}} \right) \cdot (s-1)^{\frac{k-1}{k-2}},$$

existe $\beta_0 > 0$ e $\eta > 0$ tal que

$$r^{2H(2r\eta)+2r\eta} \left(\frac{(s - A(k, 2) - 1)^{\frac{4(k-1)}{j}} \cdot \left(\prod_{i=2}^{k-2} s_i^{\xi_i} \right) \cdot (s-1)^{\frac{k-1}{k-2}}}{r} \right)^{\beta_0} < 1. \quad (6.27)$$

Afirmamos que existe um grafo reduzido multicolorido H tal que $\beta(H) < \beta_0$. De fato, se isto não acontecesse, a inequação (6.27) seria limitada acima por

$$r^{(H(2r\eta)+2r\eta)\frac{n^2}{2}} \cdot 2^{rM^2/2} \left(\frac{(s - A(k, 2) - 1)^{\frac{4(k-1)}{j}} \cdot \left(\prod_{i=2}^{k-2} s_i^{\xi_i} \right) \cdot (s - 1)^{\frac{k-1}{k-2}}}{r} \right)^{\beta_0 n^2}.$$

$$r^{t_{k-1}(n)} \stackrel{(6.27)}{<} r^{t_{k-1}(n)}, \quad (6.28)$$

a mesma contradição já encontrada nos casos anteriores.

Então, seja H um grafo reduzido multicolorido em que $\beta = \beta(H) < \beta_0$. Considere o subgrafo H' de H com conjunto de arestas $E_s \cup \dots \cup E_r$. Este grafo contém $t_{k-1}(m) - \beta m^2$ arestas. Podemos aplicar o Teorema 5.6 com $t = \beta m^2$. Ao removermos no máximo βm^2 arestas de H' , obtemos um subgrafo $(k-1)$ -partido H'' . Seja $U_1 \cup \dots \cup U_{k-1}$ a partição resultante de $V(H'') = V(H)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{k-1} e_{H'}(U_i) \leq \beta m^2. \quad (6.29)$$

Sabemos que $e_2(H) + \dots + e_{s-1}(H) \leq \left(\frac{4(k-1)}{j} + 2 \right) \beta m^2$. Para limitar $e_1(H)$, aplicamos o Corolário 5.8 ao grafo $(k-1)$ -partido H'' . O corolário assegura que não podemos ter $e_1(H) \geq (2k-1) \cdot 2\beta m^2 = (4k-2)\beta m^2$, em caso contrário, adicionando E_1 a H'' produziríamos uma cópia de K_k na qual exatamente uma das arestas teria uma lista de tamanho um e todas as outras arestas teriam listas com s ou mais cores. Então, pelo Lema 5.5, teríamos uma cópia de K_k colorida com o padrão proibido em G . Assim, devemos ter $e_1(H) < (4k-2)\beta m^2$. Isto nos dá um limite superior para o número de arestas de H com listas de tamanho até $(s-1)$:

$$e_1(H) + \dots + e_{s-1}(H) \leq \left(4k + \frac{4(k-1)}{j} \right) \beta m^2. \quad (6.30)$$

Seja $W_i = \bigcup_{j \in U_i} V_j$, onde $i \in [k-1]$. Vamos provar que a partição $V(G) = W_1 \cup \dots \cup W_{k-1}$ satisfaz a conclusão do teorema. Arestas internas às classes W_i de G podem vir de três lugares: arestas de G que não estão representadas em H ; arestas de G em pares (V_s, V_t) tais que $\{s, t\} \in E(H) \setminus E(H')$; arestas de G em pares (V_s, V_t) que correspondem a arestas internas às classes U_j em $E(H')$. Por (6.3) – (6.5) e (6.30), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k-1} e_G(W_i) &\leq r\eta n^2 + \left(\sum_{i=1}^{k-1} e_{H'}(U_i) + e_1(H) + \dots + e_{s-1}(H) \right) \cdot \left(\frac{n}{m} \right)^2 \\
&\leq r\eta n^2 + \left[\beta_0 m^2 + \left(4k + \frac{4(k-1)}{j} \right) \beta_0 m^2 \right] \cdot \left(\frac{n}{m} \right)^2 \\
&\leq r\eta n^2 + \left[(4k+1)\beta_0 m^2 + \left(\frac{4(k-1)}{j} \right) \beta_0 m^2 \right] \cdot \left(\frac{n}{m} \right)^2 \\
&\leq r\eta n^2 + \left[\left((4k+1) + \frac{4(k-1)}{j} \right) \beta_0 m^2 \right] \cdot \left(\frac{n}{m} \right)^2 \\
&\leq r\eta n^2 + (4k+1+4k-4) \beta_0 m^2 \cdot \left(\frac{n}{m} \right)^2 \\
&\leq r\eta n^2 + (8k-3) \beta_0 \cdot n^2 \leq \delta n^2
\end{aligned}$$

pela nossa escolha de β_0 e $\eta > 0$, o que conclui a prova. \square

Nós não acreditamos que os valores para $r_0(k, s, t)$ considerados no enunciado do Teorema 1.7 são os melhores possíveis, no sentido de que a estabilidade pode valer para valores menores de r . No entanto, se $s \leq s_0(k)$, o valor fornecido para r_0 é menor que $(s-1)^2$. Isto se deve ao fato de que, se i^* é máximo ($i^* = k-2$), a última desigualdade do sistema (6.13) nos dá a maior soma possível de $(e_{s-A(k, k-i^*)}(H) + \dots + e_{s-1}(H))$. Então, a desigualdade

$$\frac{k-i^*-1}{k-i^*} \cdot (e_{s-A(k, k-i^*)}(H) + \dots + e_{s-1}(H)) \leq \beta m^2$$

pode ser reescrita como

$$e_2(H) + \dots + e_{s-1}(H) \leq 2\beta m^2.$$

Isto claramente nos diz que a soma dos expoentes constantes no desenvolvimento da expressão que define $r_0(k, s, 0)$ para estes valores de s ,

$$\left(\prod_{i=2}^{k-2} (s - A(k, k-i+1) - 1)^{\frac{1}{(k-i-1)(k-i)}} \right) \cdot (s-1)^{\frac{k-1}{k-2}}$$

é limitada superiormente por 2. Mesmo que todas as arestas desta união tenham lista de cores de tamanho $(s-1)$, teremos $r_0(k, s, 0) < (s-1)^2$.

Na discussão dos nossos resultados constante na conclusão, veremos que para $s = \binom{k}{2}$, nossos valores já melhoram muito as cotas inferiores obtidas em [26].

A seguinte proposição será utilizada no próximo capítulo, para a prova do resultado exato.

Proposição 6.2. *Para todo $s \geq \binom{k-1}{2} + 2$ temos que $r_0(k, s, t) > (k-1)^3$.*

Demonstração. Para verificarmos essa afirmação, pela definição de $r_0(k, s, t)$ para $s_t(k) \geq \binom{k-1}{2} + 2 > s_0(k)$ devemos ter

$$\begin{aligned} r_0(k, s, t) &\geq (s - A(k, 2) - 1)^{\frac{4(k-1)}{j}} \cdot \left(\prod_{i=2}^{k-2} (s - A(k, k-i+1) - 1)^{\frac{1}{(k-i-1)(k-i)}} \right) (s-1)^{\frac{k-1}{k-2}} \\ &\geq (s - A(k, 2) - 1)^4 \cdot \left((s - A(k, 2) - 1)^{2 - \frac{k-1}{k-2}} \right) \cdot (s-1)^{\frac{k-1}{k-2}} \\ &\geq (s - A(k, 2) - 1)^5 \cdot \left((s - A(k, 2) - 1)^{1 - \frac{k-1}{k-2}} \right) \cdot (s-1)^{\frac{k-1}{k-2}} \\ &\geq (s - A(k, 2) - 1)^5 \cdot \left(\frac{s-1}{s - A(k, 2) - 1} \right)^{\frac{k-1}{k-2}} \\ &\geq (s - A(k, 2) - 1)^5 \cdot (s-1)^{\frac{k-1}{k-2}} \\ &\geq (s - A(k, 2) - 1)^5 \cdot \left(\binom{k-1}{2} + 1 \right) \\ &\geq \left(\binom{k-1}{2} - \left(\binom{k}{2} - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \right) + 1 \right)^5 \cdot \binom{k-1}{2} \\ &\geq \left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - k + 2 \right)^5 \cdot \binom{k-1}{2} \end{aligned} \tag{6.31}$$

Note que se $k = 4$ temos $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \lceil \frac{k}{2} \rceil - k + 2 = \frac{16}{4} - 4 + 2 = 2 = k - 2$.
 Para qualquer $k \geq 5$, segue que $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \lceil \frac{k}{2} \rceil - k + 2 \geq \frac{k^2-1}{4} - k + 2 \geq k - 2$.

Desta forma, a desigualdade (6.31) nos leva a concluir que

$$r_0(k, s, t) \geq (k - 2)^5 \cdot \frac{(k - 1)(k - 2)}{2} = \frac{(k - 1)(k - 2)^6}{2} > (k - 1)^3, \quad (6.32)$$

onde a última desigualdade pode ser provada facilmente por indução (para $k \geq 4$).

□

Esta cota inferior para $r_0(k, s, t)$ será relevante no desenvolvimento dos cálculos para o resultado exato no próximo capítulo.

7 O RESULTADO EXATO

O presente capítulo é dedicado a demonstrar o Teorema 1.6. Para isto, combinamos as ideias utilizadas em [1] e [26]. Assim como acontece nesses dois trabalhos, utilizamos inicialmente um resultado de estabilidade para colorações (Teorema 1.7), o qual nos garante que um grafo que admite $|\mathcal{C}_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(n)| \geq r^{t_{k-1}(n)}$ é estruturalmente próximo do grafo de Turán $T_{k-1}(n)$.

Teorema 1.6. *Sejam $k \geq 4$ e $2 \leq s \leq \binom{k}{2}$ inteiros e seja $t \in \{0, 1, \dots, k\}$ o menor índice tal que $s \leq s_t(k)$. Fixe $r \geq r_0(k, s, t)$ conforme o Teorema 1.7. Existe $n_0 = n_0(r, k, s)$ tal que o seguinte é válido para todo $n \geq n_0$. Se G é um grafo de n vértices, com $n > n_0$, então $|\mathcal{C}_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(G)| \leq r^{t_{k-1}(n)}$. Além disso, o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ é o único grafo de n vértices para o qual a igualdade é alcançada.*

Demonstração. Sejam $k \geq 4$, $2 \leq s \leq \binom{k}{2}$ e $t \in \{0, 1, \dots, k\}$ inteiros. Fixe $r \geq r_0(k, s, t)$, com $r_0(k, s, t)$ proveniente do Teorema 1.7, e constantes positivas $\alpha(r, k)$ e $\delta = \delta(r, k, s, \alpha)$ tais que

$$2^{2 \cdot H(\alpha)} \cdot (r - 1) < r, \quad (7.1)$$

$$\delta = \delta(r, k, s, \alpha) < \frac{1}{2(k-1)^8} \quad \text{e} \quad (7.2)$$

$$r^\delta < \left[\frac{r}{(r-1)2^{2 \cdot H(\alpha)}} \right]^{\frac{\alpha^{2k-2}}{r^{2(k-1)^6}}}. \quad (7.3)$$

Seja $n'_0 = n'_0(\delta, r, k, s)$ proveniente do Teorema 1.7. Fixe $n_0 \geq (n'_0)^2$.

Para chegar a uma contradição, suponha que existe um grafo $G = (V, E)$ de n vértices que é $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremal e que não é o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$. Podemos supor que esse grafo G é multipartido completo, caso contrário, podemos

trocá-lo por um grafo $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremal multipartido completo, que supomos não ser $T_{k-1}(n)$, e que sabemos que existe pelo Corolário 4.10. Como $G \neq T_{k-1}(n)$, temos que $|E(G)| > t_{k-1}(n)$. Então, ao considerarmos uma $(k-1)$ -partição de G , necessariamente existem arestas internas a uma ou mais classes.

Vamos denotar por \mathcal{C} o conjunto de todas as r -colorações $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$ -livres de G , ou mais simplesmente, de todas as colorações válidas. Seja a partição $V = V_1 \cup \dots \cup V_{k-1}$ do conjunto de vértices de G que minimiza $\sum_i e(V_i)$ de forma que, pelo Teorema 1.7, $\sum_i e(V_i) \leq \delta n^2$. Assim, temos $r^{t_{k-1}(n)} \leq |\mathcal{C}| \leq r^{t_{k-1}(n) + \delta n^2}$. Pela Proposição 3.2, as classes V_i da partição devem ter um tamanho que não é tão distante da partição balanceada, a saber

$$\left| |V_i| - \frac{n}{k-1} \right| < \sqrt{2\delta} n.$$

Seja a aresta xy uma aresta interna pertencente à classe V_1 . Sendo G um grafo multipartido completo, sabemos que x e y estão em classes diferentes. Logo um dos dois vértices possui pelo menos $\frac{|V_1|}{2}$ vizinhos em V_1 . Consideremos que x seja este vértice. Então

$$|N(x) \cap V_1| \geq \frac{|V_1|}{2} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{n}{k-1} - \sqrt{2\delta} n \right) \stackrel{(7.2)}{\geq} \frac{n}{(k-1)^3},$$

para n grande e o valor de $\delta(r, k, s, t)$ considerado. Denotemos por W_i o conjunto de vizinhos de x em cada classe V_i .

Note que o número de vizinhos de qualquer vértice $x \in G$ em uma classe distinta da sua deve ser pelo menos o mesmo número de sua própria classe, caso contrário poderíamos mover x para outra classe e diminuir as arestas internas da partição, o que contraria nossa escolha inicial. Logo, a desigualdade acima deve valer para todo $x \in G$ e toda classe V_i com $i \in [k-1]$.

Fixe uma coloração válida $\widehat{G} \in \mathcal{C}$. Para todo $i \in [k-1]$ e toda cor $c \in [r]$, sejam $W_{i,c}^{\widehat{G}}$ os subconjuntos de vértices de cada W_i que são ligados a x por arestas de cor $c \in [r]$. Para todo $i \in [k-1]$, pelo Princípio da Casa dos Pombos, deve existir uma cor $c_i \in [r]$ tal que $W_{i,c_i}^{\widehat{G}}$ satisfaz a desigualdade

$$|W_{i,c_i}^{\widehat{G}}| \geq \frac{1}{r}|W_i| \geq \frac{n}{r(k-1)^3}.$$

Dizemos que uma cor c é *rara* para um par $\{i, \ell\} \in \binom{[k-1]}{2}$ se houver subconjuntos $X_i \subseteq W_{i,c_i}^{\widehat{G}}$, $|X_i| \geq \alpha^{k-1}|W_{i,c_i}^{\widehat{G}}|$ e $X_\ell \subseteq W_{\ell,c_\ell}^{\widehat{G}}$, $|X_\ell| \geq \alpha^{k-1}|W_{\ell,c_\ell}^{\widehat{G}}|$, com $i \neq \ell$ tais que existem menos de $\alpha|X_i||X_\ell|$ arestas de cor c entre X_i e X_ℓ em G . Caso contrário, c é dita *abundante* para o par $\{i, \ell\}$.

Trataremos de dois casos distintos em função do valor de s fixado.

Caso 1. Sejam $k \geq 4$ e os valores de s tais que $2 \leq s \leq \binom{k-1}{2} + 1$.

Seja $\widehat{G} \in \mathcal{C}$ uma coloração válida de G tal que c_1 seja uma cor abundante para as arestas entre x e os vértices das classes distintas da sua. Afirmamos que, com estes valores de s , para toda coloração \widehat{G} , devem existir $i, \ell \in [k-1]$, com $i \neq \ell$, e uma cor c , tal que c é rara para o par $\{i, \ell\}$, ou seja, algum par de subconjuntos $X_i \subseteq W_{i,c_i}^{\widehat{G}}$, $|X_i| \geq \alpha^{k-1}|W_{i,c_i}^{\widehat{G}}| \geq \frac{\alpha^{k-1}n}{r(k-1)^3}$ e $X_\ell \subseteq W_{\ell,c_\ell}^{\widehat{G}}$, $|X_\ell| \geq \alpha^{k-1}|W_{\ell,c_\ell}^{\widehat{G}}| \geq \frac{\alpha^{k-1}n}{r(k-1)^3}$, contém menos de $\alpha|X_i||X_\ell|$ arestas coloridas com cor c entre X_i e X_ℓ em \widehat{G} . A Figura 7.1 retrata esta situação.

Para uma contradição, supomos que não existam $i, \ell \in [k-1]$, com $i \neq \ell$, e a cor c nas condições do parágrafo anterior, ou seja, toda cor c é abundante para todo par $\{i, \ell\}$. Como $r \geq s$ e $s \leq \binom{k-1}{2} + 1$, podemos escolher $s-1$ cores em $[r] \setminus \{c_1\}$ e designá-las arbitrariamente aos pares $\{i, j\} \in \binom{[k-1]}{2}$, de modo que a cada par é atribuída uma cor e todas as $s-1$ cores aparecem. Desta forma, obtemos uma coloração \widehat{K}_{k-1} de uma cópia de K_{k-1} com conjunto de vértices

$\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$, onde $s - 1$ cores são utilizadas, todas diferentes de c_1 . Isto se deve ao fato de que, quando negamos a existência do par $\{i, \ell\}$, com $i \neq \ell$, e uma cor rara c associada, temos todas as condições necessárias para a aplicação do Lema 5.4, pois para quaisquer $X_i \subseteq W_{i,c_i}^{\widehat{G}}$, $|X_i| \geq \alpha^{k-1}|W_{i,c_i}^{\widehat{G}}|$ e $X_\ell \subseteq W_{\ell,c_\ell}^{\widehat{G}}$, $|X_\ell| \geq \alpha^{k-1}|W_{\ell,c_\ell}^{\widehat{G}}|$, temos pelo menos $\alpha|X_i||X_\ell|$ arestas coloridas com uma cor c entre X_i e X_ℓ em \widehat{G} . Assim, pelo Lema 5.4, \widehat{G} contém uma coloração \widehat{K}_{k-1} com o conjunto de vértices $\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ com a propriedade que $x_i \in W_{i,c_i}^{\widehat{G}}$ para todo $i \in [k-1]$. Pela nossa construção, o conjunto de vértices $\{x\} \cup \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ induz uma cópia de K_k com pelo menos s cores em que as arestas xx_i são coloridas com c_i , pois na coloração válida \widehat{G} , c_1 é uma das cores abundantes atribuída às arestas entre x e algum conjunto $W_{i,c_i}^{\widehat{G}}$, a contradição desejada.

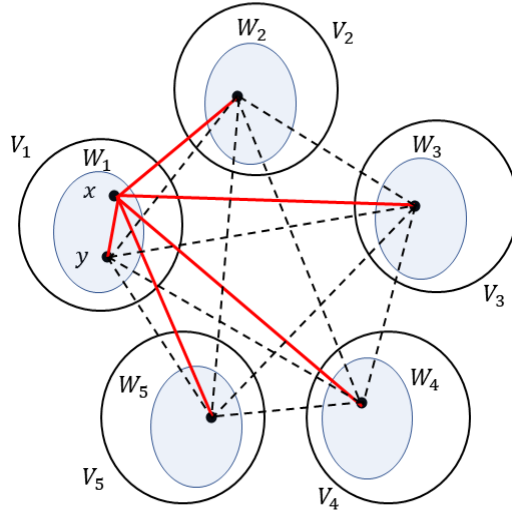


Figura 7.1: Um grafo reduzido para o Caso 1, com $k = 6$ e $s \leq 11$, onde pelo menos uma cor abundante aparece na vizinhança de x .

Tendo como referência \widehat{G} , sabemos que existem os subconjuntos $X_i \subseteq W_i$ e $X_\ell \subseteq W_\ell$ que testemunham que uma cor c é *rara*. Com isso, vamos obter um

cota superior para $|\mathcal{C}|$ a partir da limitação no número de possíveis colorações das arestas existentes entre tais conjuntos.

Supondo que c, i, ℓ, X_i e X_ℓ tenham sido fixados, o número de maneiras de colorir todas as arestas entre X_i e X_ℓ é limitada superiormente por

$$\binom{|X_i||X_\ell|}{\alpha|X_i||X_\ell|} (r-1)^{|X_i||X_\ell|} \stackrel{(5.4)}{<} 2^{H(\alpha)|X_i||X_\ell|} (r-1)^{|X_i||X_\ell|},$$

onde $H(x)$ é a função entropia definida na Seção 5.4.1.

Existem r escolhas para a cor *rara* e no máximo 2^{2n} maneiras de escolher os conjuntos X_i e X_ℓ . Já que sabemos que existem no máximo $t_{k-1}(n) + \delta n^2 - |X_i||X_\ell|$ outras arestas neste grafo, onde $|X_i|$ e $|X_\ell|$ têm pelo menos $\frac{\alpha^k n}{r(k-1)^3}$ vértices, concluímos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}| &\leq r \cdot 2^{2n} \cdot r^{t_{k-1}(n) + \delta n^2 - |X_i||X_\ell|} \cdot 2^{H(\alpha)|X_i||X_\ell|} (r-1)^{|X_i||X_\ell|} & (7.4) \\ &\leq \left(2^{2 \cdot H(\alpha)} \cdot \frac{(r-1)}{r} \right)^{|X_i||X_\ell|} \cdot r^{\delta n^2} \cdot r^{t_{k-1}(n)} \\ &\leq \left(2^{2 \cdot H(\alpha)} \cdot \frac{(r-1)}{r} \right)^{\left(\frac{\alpha^{2k-2}}{r^2(k-1)^6} \right) n^2} \cdot r^{\delta n^2} \cdot r^{t_{k-1}(n)}. \end{aligned}$$

Da primeira para segunda desigualdade, utilizamos que

$$r \cdot 2^{2n} = 2^{2n + \log_2 r} < 2^{H(\alpha) \left(\frac{\alpha^{2k-2}}{r^2(k-1)^6} \right) n^2} \leq 2^{H(\alpha)|X_i||X_j|}$$

para n suficientemente grande. Note que, pelas escolhas de $\alpha(r, k)$ em (7.1) e $\delta(r, k, s, t)$ em (7.2) e (7.3), obtemos que

$$|\mathcal{C}| < r^{t_{k-1}(n)-1},$$

contradizendo o fato de que G é $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremal.

É importante ressaltar que nesta primeira parte da prova, a contradição se dá para todo $r \geq s$, o que nos permite o uso do melhor $r \geq r_0(k, s, t)$ para a validade da Propriedade de Estabilidade de Cores (Teorema 1.5). Assim, considerando $k \geq 4$ e $2 \leq s \leq \binom{k-1}{2} - 1$, mostramos que não pode existir aresta xy interna às classes V_i o que implica que não pode existir um grafo G que seja $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremal e diferente do grafo de Turán $T_{k-1}(n)$.

Caso 2.

Agora tratemos da prova com os valores de $k \geq 4$ e s compreendido entre $\binom{k-1}{2} + 2 \leq s \leq \binom{k}{2}$. Seguimos a estratégia geral desenvolvida para provar o Teorema 2.2 em [1]. Para chegarmos a uma contradição, assumimos que o grafo $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremal multipartido completo G tem $r^{t_{k-1}(n)+m}$ colorações válidas, com $m \geq 0$. Queremos mostrar que G contém um vértice x tal que o grafo $G - x$ obtido pela retirada de x tem pelo menos $r^{t_{k-1}(n-1)+m+1}$ colorações válidas. Uma vez que temos G com $n > n_0 \geq (n'_0)^2$ vértices, podemos repetir este argumento de forma iterativa, obtendo um grafo com n'_0 vértices cujo número de r -colorações $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$ -livres é pelo menos $r^{t_{k-1}(n'_0)+m+n-n'_0} > r^{(n'_0)^2}$. No entanto, um grafo com n'_0 vértices tem no máximo $(n'_0)^2/2$ arestas e, portanto, o número de tais colorações é no máximo $r^{(n'_0)^2/2}$, que é a contradição desejada.

Vamos particionar o conjunto \mathcal{C} das colorações válidas de G em dois subconjuntos. Para simplificar a notação, seja $s' = s - \binom{k-1}{2}$ tal que $2 \leq s' \leq k-1$. Seja \mathcal{C}_1 o subconjunto de todas as colorações válidas \widehat{G} para as quais existe uma escolha de s' índices distintos $i_1, \dots, i_{s'}$ e cores distintas $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_{s'}} \in [r]$ tais que para todo $p \in [s']$, o conjunto $W_{i_p, c_{i_p}}^{\widehat{G}} \subseteq W_p$ de vizinhos de x em V_p ligados por uma aresta de cor c_{i_p} (considerando \widehat{G}) satisfaça $|W_{i_p, c_{i_p}}^{\widehat{G}}| \geq n/[r(k-1)^3]$. Para todo $i \in [k-1] \setminus \{i_1, \dots, i_{s'}\}$, fixamos uma cor arbitrária c_i tal que o conjunto $W_{i, c_i}^{\widehat{G}}$ de vizinhos de x em V_i , ligados por uma aresta de cor c_i satisfaça $|W_{i, c_i}^{\widehat{G}}| \geq \frac{n}{r(k-1)^3}$

(como já mencionamos, esta cor existe pelo Princípio da Casa dos Pombos). A Figura 7.2 retrata esta situação.

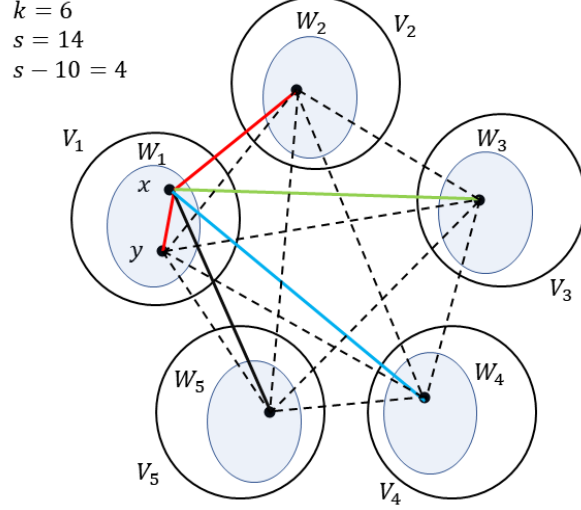


Figura 7.2: Para $k = 6$ e $s = 14$, um grafo reduzido H proveniente de $\widehat{G} \in \mathcal{C}_1$ em que pelo menos quatro cores são abundantes na vizinhança de x .

Como no Caso 1, uma cor c é *rara* para um par $\{i, \ell\} \in \binom{[k-1]}{2}$ se houver subconjuntos $X_i \subseteq W_{i,c_i}^{\widehat{G}}$, $|X_i| \geq \alpha^{k-1}|W_{i,c_i}^{\widehat{G}}|$ e $X_\ell \subseteq W_{\ell,c_\ell}^{\widehat{G}}$, $|X_\ell| \geq \alpha^{k-1}|W_{\ell,c_\ell}^{\widehat{G}}|$, com $i \neq \ell$ tais que existem menos de $\alpha|X_i||X_\ell|$ arestas de cor c entre X_i e X_ℓ em G . Caso contrário, c é dita *abundante* para o par $\{i, \ell\}$. Afirmamos que para qualquer coloração válida \widehat{G} , deve existir algum par $\{i, \ell\}$, tal que os subconjuntos $X_i \subseteq W_{i,c_i}^{\widehat{G}}$ e $X_\ell \subseteq W_{\ell,c_\ell}^{\widehat{G}}$ tenham uma cor rara c associada na $(k-1)$ -partição. Caso isto não fosse verdade, poderíamos escolher $\binom{k-1}{2}$ cores distintas, no conjunto $[r] \setminus \{c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_s'}\}$, para a coloração das arestas de uma cópia de K_{k-1} , a qual, considerando o vértice x e o Lema 5.4, nos levaria à mesma contradição obtida no Caso 1. Mais detalhadamente, conseguiríamos construir uma cópia de K_k com s ou mais cores porque as arestas entre x e os $(k-1)$ vértices originários de cada classe da $(k-1)$ -partição contêm pelo menos $s - \binom{k-1}{2}$ cores. Já as outras $\binom{k-1}{2}$

arestas admitem qualquer atribuição de cores, pois as r cores seriam abundantes para todos os pares $\{i, \ell\}$, sendo possível atribuímos cores distintas entre si e diferentes de $\{c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_{s'}}\}$ às arestas que ligam os vértices da cópia de K_k que não envolvem x , pois $r - (s - \binom{k-1}{2}) = (r - s) + \binom{k-1}{2}$ e $r \geq r_0 \geq s$.

Ao obtermos um limitante superior para $|\mathcal{C}_1|$ a partir da coloração das arestas existentes entre X_i e X_ℓ , o cálculo realizado no Caso 1 a partir da desigualdade (7.4) se repete e chegamos à conclusão que

$$|\mathcal{C}_1| < r^{t_{k-1}(n)-1}.$$

Seja $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_1$, mais especificamente, \mathcal{C}_2 é o subconjunto das colorações válidas \widehat{G} em que não existe uma escolha de $(s - \binom{k-1}{2})$ cores distintas $\{c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_{s'}}\} \in [r]$, que atendam as condições descritas acima para os conjuntos $W_{i_p, c_{i_p}}^{\widehat{G}} \subseteq W_p$, com $p \in [s']$. Fixe uma boa coloração $\widehat{G} \in \mathcal{C}_2$. A Figura 7.3 retrata um exemplo para esta situação.

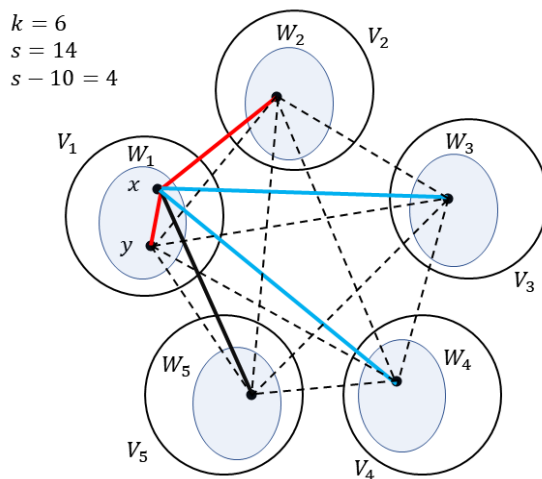


Figura 7.3: Para $k = 6$ e $s = 14$, um grafo reduzido H proveniente de $\widehat{G} \in \mathcal{C}_2$ em que não é possível garantir a existência de cor rara entre as demais classes.

Pela discussão acima, \mathcal{C}_2 contém

$$|\mathcal{C}| - |\mathcal{C}_1| \geq r^{t_{k-1}(n)} \cdot \left(r^m - \frac{1}{r} \right) > r^{t_{k-1}(n)} \cdot \frac{r^m}{r} = r^{t_{k-1}(n)+m-1}$$

colorações válidas de G . Seja \widehat{G}_2 uma delas. Definimos o grafo bipartido B com classes $[k-1]$ e $[r]$ onde $\{i, c\}$ é uma aresta sempre que o conjunto de vizinhos de x em V_i ligados por uma aresta de cor c_i satisfazem $|W_{i,c_i}^{\widehat{G}_2}| \geq n/[r(k-1)^3]$.

Vamos aplicar o Teorema de Hall Generalizado (Teorema 5.9) no grafo bipartido B com classes $[k-1]$ e $[r]$. O tamanho do conjunto X presente no enunciado do teorema será s' e a constante d será sempre igual a $(k-1-s+(\binom{k-1}{2}))$. Note que, pela definição de \mathcal{C}_2 , não existe no grafo bipartido B um emparelhamento de tamanho s' . Como $\widehat{G} \in \mathcal{C}_2$, existe um inteiro h , $1 \leq h \leq s' - 1$, conjuntos distintos $W_{i_1}, \dots, W_{i_{h+1}}$, com $i \in [k-1]$, e um conjunto $C \in [r]$ de cores, com $|C| \leq h$, tais que $|W_{i_j,c}^{\widehat{G}}| \geq n/[r(k-1)^3]$, com $j \in [h+1]$, somente se $c \in C$. Isso permite associar cada coloração $\widehat{G} \in \mathcal{C}_2$ a um inteiro h , a $h+1$ subconjuntos W_{i_j} e a um conjunto C de cores. Destacamos que podemos considerar $|C| = h$ pois é possível adicionar arbitrariamente novos elementos a C se for o caso. Sempre que fixamos h , os subconjuntos e as cores vinculadas, é possível limitar o número de colorações válidas que poderiam ser levadas a essa tripla. Isto nos permite limitar superiormente $|\mathcal{C}_2|$. Dado h , temos $\binom{k-1}{h+1} \leq 2^{k-1}$ maneiras de escolher os conjuntos $W_{i_1}, \dots, W_{i_{h+1}}$ e $\binom{r}{h} \leq 2^r$ maneiras de escolher o conjunto C de cores. Após fixarmos uma tripla, obtemos um limite superior para o número de maneiras de colorir as arestas entre x e seus vizinhos em V_i da seguinte forma. O número de maneiras de selecionar no máximo $n/[r(k-1)^3]$ arestas para cada uma das cores *raras* em relação a x e cada W_{i_j} , $j = 1, \dots, h+1$ é limitado acima por

$$\left(\frac{|V_i|}{n/[r(k-1)^3]} \right)^r \stackrel{(5.4)}{\leq} \left(2^{H\left(\frac{1}{r(k-1)^3}\right)n} \right)^r \stackrel{(5.5)}{\leq} [r(k-1)^3]^{\frac{2n}{(k-1)^3}}.$$

As arestas restantes são coloridas livremente com as h cores que podem ser *abundantes*, c_1, c_2, \dots, c_h . Deduzimos que o número de maneiras de colorir as arestas

entre x e cada V_{i_j} é limitado acima por

$$[r(k-1)^3]^{\frac{2n}{(k-1)^3}} \cdot h^{\left(\frac{1}{k-1} + \sqrt{2\delta}\right)n}.$$

Para todo $\ell \in [k-1] \setminus \{i_1, \dots, i_{h+1}\}$, suporemos que as arestas entre x e V_ℓ podem ser coloridas arbitrariamente, de no máximo

$$r^{\left(\frac{1}{k-1} + \sqrt{2\delta}\right)n}$$

modos. Para n grande, combinando estas informações, concluimos que o número N_x de colorações de arestas incidentes em x satisfaz

$$\begin{aligned} N_x &\leq \sum_{h=1}^{s'-1} \binom{k-1}{h+1} \cdot \binom{r}{h} \cdot [r(k-1)^3]^{\frac{(h+1) \cdot 2n}{(k-1)^3}} \cdot h^{(h+1)\left(\frac{1}{k-1} + \sqrt{2\delta}\right)n} \cdot r^{(k-h-2)\left(\frac{1}{k-1} + \sqrt{2\delta}\right)n} \\ &\leq \sum_{h=1}^{s'-1} 2^{k-1} \cdot 2^r \cdot [r(k-1)^3]^{\frac{2(h+1)n}{(k-1)^3}} \cdot (h^{h+1} \cdot r^{k-h-2})^{\left(\frac{1}{k-1} + \sqrt{2\delta}\right)n} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Seja $f(h) = h^{h+1} \cdot r^{k-h-2}$. Com $k \geq 3$ e $h \leq k-2$, temos que a desigualdade

$$\frac{f(h+1)}{f(h)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h \cdot \frac{(h+1)^2}{h}}{r} \leq \frac{e(h+2+1/h)}{r} < 1$$

é válida para $r > e(k+1)$. Assim, os somatórios são decrescentes em h , logo, para obter uma cota superior, podemos utilizar $f(1) = r^{k-3}$ em (7.5) ao invés de $f(h)$.

Para uma cota superior de N_x , primeiro utilizamos $f(1) = r^{k-3}$ e após, tomamos o maior valor de h , $h = \left(s - \binom{k-1}{2} - 1\right) = s' - 1$ em substituição a cada variável h restante. O produto de todos os termos que não dependem de n pode ser representado pelas constantes C_i , as quais são negligíveis no cálculo de N_x para n grande. Nosso objetivo é obter N_x em função do grau mínimo $\delta_{k-1}(n)$ de $T_{k-1}(n)$. Para isso, vamos introduzir o fator $r^{\delta_{k-1}(n) - \frac{(k-2)n}{k-1} + 1} > 1$. Esta cota é válida pois

$$\delta_{k-1}(n) = n - \left\lceil \frac{n}{k-1} \right\rceil \geq n - \frac{n}{k-1} - \frac{k-2}{k-1} > n - \frac{n}{k-1} - 1 = \frac{(k-2)n}{k-1} - 1.$$

$$\begin{aligned}
N_x &\leq (s' - 1) \cdot 2^{k-1} \cdot 2^r \cdot [r(k-1)^3]^{\frac{(2s')n}{(k-1)^3}} \cdot r^{(k-3)\left(\frac{1}{k-1} + \sqrt{2\delta}\right)n} \\
&\leq C_0 \cdot [r(k-1)^3]^{\frac{(2s')n}{(k-1)^3}} \cdot r^{(k-3)\left(\frac{1}{k-1} + \sqrt{2\delta}\right)n} \\
&\stackrel{(7.2)}{\leq} C_0 \cdot [r(k-1)^3]^{\frac{(2s')n}{(k-1)^3}} \cdot r^{(k-3)\left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{(k-1)^4}\right)n} \cdot r^{\delta_{k-1}(n) - \frac{(k-2)n}{k-1} + 1} \\
&\leq C_1 \cdot [r(k-1)^3]^{\frac{(2s')n}{(k-1)^3}} \cdot r^{\left(\frac{-1}{k-1} + \frac{1}{(k-1)^3}\right)n} \cdot r^{\delta_{k-1}(n)} \\
&\leq C_1 \cdot \left[\frac{[(k-1)^3]^{2s'}}{r^{(k-1)^2 - (2s'+1)}} \right]^{\frac{n}{(k-1)^3}} \cdot r^{\delta_{k-1}(n)}. \tag{7.6}
\end{aligned}$$

Vamos utilizar neste momento o fato de que, para os valores de s considerados no Caso 2, $r \geq r_0 > (k-1)^3$, fato que mostramos na desigualdade (6.32) constante na Proposição 6.2. Com isso, basta mostrarmos que o expoente de $(k-1)^3$, no numerador da fração acima, é menor que o expoente de r no denominador para termos uma base de potência menor que um, fato necessário para o argumento da prova. Fazendo

$$\begin{aligned}
2s' &< (k-1)^2 - (2s'+1) \\
4s' &< k^2 - 2k,
\end{aligned}$$

e considerando que o maior valor possível para s' é $(k-1)$, que ocorre quando $s = \binom{k}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned}
4(k-1) &< k^2 - 2k \\
0 &< k^2 - 6k + 4,
\end{aligned}$$

a qual é válida para todo $k \geq 6$. Isto nos dá a condição de considerar que, para todo $r \geq r_0(k, s, t)$ e $k \geq 6$, temos

$$N_x < C_1 \cdot \left[\frac{[(k-1)^3]^{2s'}}{r^{(k-1)^2 - (2s'+1)}} \right]^{\frac{n}{(k-1)^3}} \cdot r^{\delta_{k-1}(n)} < r^{\delta_{k-1}(n) - 2}.$$

Vemos que a potência de base menor que um e expoente em função de n absorve a constante C_1 e decresce à medida que n cresce.

Para os casos em que $k = 4$ e $k = 5$, vamos utilizar a desigualdade (7.5) para compararmos os valores de r necessários nesta parte da prova com aqueles provenientes da estabilidade de cores (Teorema 1.7), analisando cada valor possível de s .

Quando $k = 4$, os possíveis valores de s para que estejamos no Caso 2 são $s = 5$ e $s = 6$. Vejamos:

- $k = 4, s = 5, h = 1$:

$$\begin{aligned} N_x &\leq C_1 \cdot (27r)^{\frac{4n}{27}} \cdot r^{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81}\right)n} \cdot r^{\delta_3(n) - \frac{2n}{3}} \\ &\leq C_1 \cdot \left(\frac{27^{\frac{4}{27}}}{r^{\frac{1}{3} - \frac{4}{27} - \frac{1}{81}}} \right)^n \cdot r^{\delta_3(n)} \\ &\leq C_1 \cdot \left(\frac{27^{\frac{12}{81}}}{r^{\frac{14}{81}}} \right)^n \cdot r^{\delta_3(n)} \end{aligned}$$

Note que $r > 27$ faz com que a base da potência seja menor que um. Mas $r_0(4, 5, 1) = 222$.

- $k = 4, s = 6, 1 \leq h \leq 2$:

$$\begin{aligned} N_x &\leq C_1 \cdot (27r)^{\frac{6n}{27}} \cdot r^{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81}\right)n} \cdot r^{\delta_3(n) - \frac{2n}{3}} \\ &\leq C_1 \cdot \left(\frac{27^{\frac{6}{27}}}{r^{\frac{1}{3} - \frac{6}{27} - \frac{1}{81}}} \right)^n \cdot r^{\delta_3(n)} \\ &\leq C_1 \cdot \left(\frac{27^{\frac{18}{81}}}{r^{\frac{8}{81}}} \right)^n \cdot r^{\delta_3(n)} \end{aligned}$$

Agora $r \geq 1662 > 27^{\frac{9}{4}}$ faz com que a base da potência seja menor que um. Mas $r_0(4, 6, 2) = 1812$.

Quando $k = 5$, os possíveis valores de s são $s = 8, s = 9$ e $s = 10$. Vejamos:

- $k = 5, s = 8, h = 1$:

$$\begin{aligned}
N_x &\leq C_1 \cdot (64r)^{\frac{4n}{64}} \cdot r^{2(\frac{1}{4} + \frac{1}{256})n} \cdot r^{\delta_4(n) - \frac{3n}{4}} \\
&\leq C_1 \cdot \left(\frac{64^{\frac{4}{64}}}{r^{\frac{1}{4} - \frac{4}{64} - \frac{1}{128}}} \right)^n \cdot r^{\delta_4(n)} \\
&\leq C_1 \cdot \left(\frac{64^{\frac{8}{128}}}{r^{\frac{23}{128}}} \right)^n \cdot r^{\delta_4(n)}
\end{aligned}$$

Valores de $r > 5$ fazem com que a base da potência seja menor que um. Mas $r_0(5, 8, 2) = 3270$.

- $k = 5, s = 9, 1 \leq h \leq 2$:

$$\begin{aligned}
N_x &\leq C_1 \cdot (64r)^{\frac{6n}{64}} \cdot r^{2(\frac{1}{4} + \frac{1}{256})n} \cdot r^{\delta_4(n) - \frac{3n}{4}} \\
&\leq C_1 \cdot \left(\frac{64^{\frac{6}{64}}}{r^{\frac{1}{4} - \frac{6}{64} - \frac{1}{128}}} \right)^n \cdot r^{\delta_4(n)} \\
&\leq C_1 \cdot \left(\frac{64^{\frac{12}{128}}}{r^{\frac{19}{128}}} \right)^n \cdot r^{\delta_4(n)}
\end{aligned}$$

Novamente, $r > 64$ faz com que a base da potência seja menor que um. Mas $r_0(5, 9, 3) = 13877$.

- $k = 5, s = 10, 1 \leq h \leq 3$:

$$\begin{aligned}
N_x &\leq C_1 \cdot (64r)^{\frac{8n}{64}} \cdot r^{2(\frac{1}{4} + \frac{1}{256})n} \cdot r^{\delta_4(n) - \frac{3n}{4}} \\
&\leq C_1 \cdot \left(\frac{64^{\frac{8}{64}}}{r^{\frac{1}{4} - \frac{8}{64} - \frac{1}{128}}} \right)^n \cdot r^{\delta_4(n)} \\
&\leq C_1 \cdot \left(\frac{64^{\frac{16}{128}}}{r^{\frac{15}{128}}} \right)^n \cdot r^{\delta_4(n)}
\end{aligned}$$

Agora necessitamos que $r \geq 85 > 64^{\frac{16}{15}}$. Mas $r_0(5, 10, 4) = 43780$.

Com esses cálculos adicionais envolvendo $k = 4$ e $k = 5$, mostramos que para valores de $k \geq 4$ e $\binom{k-1}{2} + 2 \leq s \leq \binom{k}{2}$, os valores de r tais que $r \geq r_0(k, s, t)$, sendo r_0 proveniente da Propriedade de Estabilidade da Cores, são suficientes para a validade dos cálculos até aqui. Nestas condições, é verdade que

$$N_x < r^{\delta_{k-1}(n)-2}.$$

Nós já sabemos que $|\mathcal{C}_2| \geq r^{t_{k-1}(n)+m-1}$, de modo que o número de r -colorações $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$ -livres de $G - x$ é pelo menos

$$\frac{r^{t_{k-1}(n)+m-1}}{r^{\delta_{k-1}(n)-2}} = r^{t_{k-1}(n)+m-1-\delta_{k-1}(n)+2} \stackrel{(3.3)}{\geq} r^{t_{k-1}(n-1)+m+1}.$$

Como queríamos demonstrar, este fato nos leva à inviabilidade de G . Isto conclui a prova. \square

Ao terminarmos a prova do resultado exato, cabe ressaltar que nosso teorema generaliza o Teorema 2.9 de [26]. Para um k fixo e $s = \binom{k}{2}$, permitimos todas as colorações de K_k exceto as arco-íris. Aqui temos a vantagem de podermos reduzir consideravelmente o parâmetro r_0 . Também tivemos uma redução substancial no desenvolvimento da prova do resultado exato, em relação às provas constantes em [1] e [26], ao utilizamos o fato de podermos escolher, pelo Corolário 4.10, o grafo $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremal G sendo multipartido completo. Ao partirmos deste grafo G nos livramos de um dos passos das provas anteriores. Nesses desenvolvimentos, eram considerados dois casos para análise: o primeiro, em que o vértice x possuía “muitos” vizinhos em sua própria classe e, o segundo, em que o vértice x possuía “poucos” vizinhos em sua própria classe. Em nossa prova, foi possível reduzirmos esta análise somente para o primeiro caso.

Algum leitor pode observar que, se tínhamos o resultado exato para grafos (K_k, P_A) -livres, poderíamos estender o resultado para $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$ para todos os demais valores de s utilizando o Lema 4.1 (b), e isto é fato. Mas, ao simplesmente aplicarmos o Lema 4.1 (b), sem nenhuma análise adicional, perderíamos a principal contribuição da nossa prova, que foi o fato de podermos considerar valores de r_0 muito menores para a validade do Teorema 1.6 em relação aos constantes em [26].

8 CONCLUSÃO

Problemas de Erdős–Rothschild têm sido muito estudados pois surgem em diversos contextos. Por exemplo, Lefmann, Person, Rödl e Schacht [33] estudaram colorações das arestas de hipergrafos 3-uniformes sem cópias monocromáticas do Plano de Fano, e Lefmann, Person e Schacht [32] obtiveram resultados assintóticos para hipergrafos arbitrários k -uniformes. Outros problemas extremais de estruturas discretas também são bastante estudados, tais como famílias de conjuntos e espaços vetoriais. Como um exemplo recente de trabalho nessas áreas, podemos citar um artigo de 2018 de Clemens, Das e Tran [9].

Na Teoria de Grafos, variações na estrutura do grafo proibido e na forma como essa estrutura é colorida geram uma infinidade de questões em aberto, que ao serem abordadas, vão incorporando novas ferramentas, as quais são fonte de evolução da Matemática Aplicada. Dentro desse espectro, procuramos desenvolver contribuições para a área, com resultados que poderão ser utilizados em outros problemas similares e que apresentamos a partir de agora.

8.1 Contribuições desta tese

Os primeiros resultados originais aparecem no Capítulo 4, onde trabalhamos com ferramentas já conhecidas e constantes do trabalho de Benevides, Hoppen e Sampaio [7]. Nossa contribuição foi a de vislumbrar que a estratégia desenvolvida em [7] também se adequaria à demonstração dos nossos Teoremas 1.4 e 1.5. Mostramos que existe um grafo multipartido completo que é (r, \mathcal{P}_K) -extremal e na sequência, impondo restrições à família de grafos completos, provamos que todos os grafos $(r, \mathcal{P}_{(K_k, s)})$ -extremais devem ser multipartidos completos. Enquanto

o Teorema 1.5 segue a linha do resultado do Teorema 2.7 de [7], o Teorema 1.4 generaliza o Teorema 2.6 do mesmo trabalho. A informação proveniente do Teorema 1.5 deixou a prova do nosso resultado exato (Teorema 1.6) mais curta que as provas de problemas similares anteriores, como em [1] e em [26].

Em seguida, trabalhamos com a Propriedade de Estabilidade de Cores, o Teorema 1.7, de um grafo $\mathcal{P}_{(K_{k,\geq s})}$ -livre. A estratégia de considerar essa propriedade foi importante pois nos permitiu restringir a prova do Teorema 1.6 a grafos que têm uma estrutura próxima do grafo de Turán $T_{k-1}(n)$. O nosso Teorema 1.6 demonstra que, ao fixarmos $k \geq 4$, $2 \leq s \leq \binom{k}{2}$ e $r_0(k, s, t)$, para todo $r \geq r_0$, existe um número de vértices n_0 tal que se um grafo G é um grafo de n vértices, com $n > n_0$, então $|\mathcal{C}_{r, \mathcal{P}_{(K_{k,\geq s})}}(G)| \leq r^{t_{k-1}(n)}$. Além disso, o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ é o único grafo de n vértices para o qual a igualdade é alcançada.

Apesar de chamarmos de propriedade de estabilidade, esta não é exatamente uma propriedade de grafos. Na verdade, no desenvolvimento da prova do Teorema 1.6, vemos que o grafo de Turán é o único grafo ao qual a propriedade é aplicada.

Relembre que:

(a) Se $r \geq r_0(k, s, t)$ e n é suficientemente grande, então o grafo $(r, \mathcal{P}_{(K_{k,\geq s})})$ -extremal é o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$.

(b) Se $r \leq r_1(k, s)$, então $|\mathcal{C}_{r, (K_{k,\geq s})}(K_n)| > |\mathcal{C}_{r, (K_{k,\geq s})}(T_{k-1}(n))|$.

A forma como montamos a prova do Teorema 1.7 nos possibilitou obter valores de $r_0(k, s, 0)$ e $r_0(k, s, t)$ que, em muitos casos, conforme podemos ver nas Tabelas 6.1 e 6.2, se aproximaram bastante da cota ideal, o nosso r_0^* . Já citamos que encontramos r_0^* , para os pares (k, s) em que $s = 3$ e o par $(k, s) = (5, 4)$.

Ao analisarmos o número mínimo de cores necessário para que o Teorema 2.9 provado em [26] seja válido, podemos elencar como contribuição de nosso trabalho a melhoria deste parâmetro. Ao tomarmos $s = \binom{k}{2}$, o Teorema 1.7 se aplica com

$$r > (\lfloor k/2 \rfloor \lceil k/2 \rceil - 1)^{4(k-1)} \left(\binom{k}{2} - 1 \right)^2,$$

enquanto os resultados em [26] requerem $r \geq \binom{k}{2}^{8k-4}$. Calculando a razão entre os valores mínimos de r constantes em [26] e os obtidos a partir deste trabalho temos que, para k grande,

$$\frac{\binom{k}{2}^{8k-4}}{(\lfloor k/2 \rfloor \lceil k/2 \rceil - 1)^{4(k-1)} \left(\binom{k}{2} - 1 \right)^2} = \frac{k^{8k-4}}{4} (1 + o(1)).$$

Isto mostra uma redução significativa para o valor de r ao considerarmos o padrão arco-íris. Sabemos que à medida que s diminui, a família de grafos proibidos aumenta. Para todo $s < \binom{k}{2}$, os parâmetros r_0 obtidos utilizando as definições (6.1) e (6.2) serão menores, o que sugere que estão se aproximando de r_0^* , para cada decréscimo de s . Essas cotas para a quantidade de cores r para cada par (k, s) representam uma novidade desenvolvida nesta tese, já que os resultados prévios que trazem o parâmetro r_0 , no âmbito do problema tratado pelo Teorema 1.6, se referem somente ao padrão arco-íris.

Cabe ressaltar que para o caso em que $k = 3$, já existem resultados prévios que resolveram completamente este problema, pelo menos para n grande. Note que neste caso, $1 \leq s \leq 3$. Se $s = 1$, temos o problema de Turán. Se $s = 2$, toda cópia de K_3 presente em um grafo G deve ser monocromática em uma r -coloração $\mathcal{P}_{(K_3, \geq 2)}$ -livre de G , de tal forma que a retirada de arestas para desfazer triângulos não interfere no número de colorações de G . Então

$c_{r, \mathcal{P}_{(K_3, \geq 2)}}(G) = |\mathcal{C}_{r, \mathcal{P}_{(K_3, \geq 2)}}(T_2(n))|$, para todo $r \geq 2$ e $n \geq 2$. Para $s = 3$, Balogh e Li [4] provaram que, para n suficientemente grande, K_n é ótimo para $r \leq 3$ e $T_2(n)$ é o único grafo extremal para $r \geq 4$. Bastos, Benevides e Han [6] obtiveram resultados relacionados.

8.2 Questões em aberto

Como mencionamos anteriormente, a alteração do grafo proibido F e de parâmetros, tais como a quantidade de cores disponíveis r , geram uma infinidade de questionamentos que podem nos levar a problemas diferentes. Vamos trazer algumas destas possibilidades que se encontram em aberto, das mais gerais para as mais específicas, as quais completam lacunas que restaram em nosso estudo.

Problema 1. À medida que consideramos famílias arbitrárias de pares (F, P) , uma questão natural seria obter um resultado que seja comum para famílias tão gerais quanto possível. Nosso resultado nesse sentido, o Teorema 1.4, trabalha com uma família arbitrária \mathcal{P}_K de padrões de grafos completos e prova a existência de um grafo multipartido completo que é extremal. Algumas questões que surgem como possibilidade a partir desse resultado.

a. É possível obter um resultado similar para famílias \mathcal{P} de grafos que não são completos? Caso não seja possível, que condições devem ser impostas à família para que o resultado valha?

b. É possível mostrar que os grafos \mathcal{P}_K -extremais multipartidos completos mencionados no Teorema 1.4 são sempre balanceadas?

c. Este grafo \mathcal{P}_K -extremal é único? Em caso positivo, conseguimos determiná-lo?

Para os próximos problemas, considere que n é suficientemente grande.

Problema 2. No decorrer da tese, introduzimos as definições dos parâmetros r_0^* , $r_1(k, s)$, $r_0(k, s, 0)$ e $r_0(k, s, t)$. Ao analisarmos os dados constantes nas tabelas 6.1 e 6.2, observamos que à medida que k e s crescem, $r_1(k, s)$, e r_0 tendem a se distanciar. Podemos fazer os seguintes questionamentos a partir do Teorema 1.6.

a. Qual o grafo $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremal para $s \leq r \leq r_1(k, s)$? Note que K_n é um candidato pois supera o grafo de Turán $T_{k-1}(n)$ no número de r -colorações para estes valores de r .

b. Para quais pares (k, s) , $r_0^* = r_1(k, s) + 1$?

c. Existe um único grafo $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremal quando temos valores de r tais que $s \leq r < r_0$?

d. Em caso positivo, este grafo é $T_{k-1}(n)$, assim como para valores de $r \geq r_0$ provenientes do Teorema 1.6, ou é outro grafo de Turán que contém cópias de K_k , como em resultados obtidos em [36] e em [8]?

e. É verdade que, para todo par (k, s) tal que $k \geq 3$, $3 \leq s \leq \binom{k}{2}$ e $r \geq s$, temos que

$$\left| c_{r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}}(K_n) \right| = \left(\binom{r}{s-1} + o_n(1) \right) (s-1)^{\binom{n}{2}} ? \quad (8.1)$$

Para o caso em que $k = 3$, a equação (8.1) é verdadeira pois, como mencionamos na revisão bibliográfica, Balogh e Li [4] provaram este resultado. O trabalho de Bastos, Benevides e Han [6] mostra que a conclusão da fórmula (8.1) para $k = 3$ é válida até mesmo quando $r = r(n)$ e $r(n)$ cresce rapidamente com n . Mas o resultado não vale se $r \geq 2^{n/2}$.

Problema 3. O Teorema 1.5 demonstra que todo grafo $(r, \mathcal{P}_{(K_k, \geq s)})$ -extremal deve ser um grafo multipartido completo. O modo como montamos a estratégia para a prova só permitiu sua validade para valores de $(k+1) \leq s \leq \binom{k}{2}$.

a. Com alguma modificação da estratégia, é possível estender a validade do teorema para valores de $2 \leq s \leq k$?

b. Existem outras famílias de pares (F, P) para as quais a mesma estratégia utilizada na demonstração do Teorema 2.7 em [7] funcionará para obtermos resultado similar ao do Teorema 1.5?

Como uma resposta parcial para esta questão, vislumbramos uma família para a qual a estratégia já desenvolvida funciona. A mesma contradição obtida na demonstração do Teorema 1.5 pode ser encontrada se considerarmos a família \mathcal{P}_1 de grafos completos, com k fixo e padrões P_i de colorações de K_k , em que cada um de seus vértices seja incidente a arestas de pelo menos três cores distintas. Ao considerarmos um K_4 , veremos que a família \mathcal{P}_1 definida deste modo proíbe algumas 3-colorações e admite outras 4-colorações ou 5-colorações. Na Figura 8.1 apresentamos o padrão P_1 formado por três emparelhamentos, induzido por uma 3-coloração, o que faz com que o par $(K_4, P_1) \in \mathcal{P}_1$. A segunda cópia colorida de K_4 na Figura 8.1 induz outro padrão $P_2 \notin \mathcal{P}_1$, mesmo sendo uma 4-coloração.

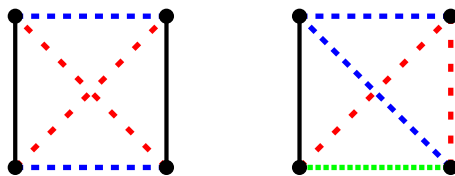


Figura 8.1: Duas colorações de K_4 que induzem padrões $P_1 \in \mathcal{P}_1$ e $P_2 \notin \mathcal{P}_1$.

Podemos mostrar que a estratégia do Teorema 1.5 funciona para a família \mathcal{P}_1 (vamos conseguir a contradição) e afirmar que existe um grafo \mathcal{P}_1 -extremal que deve ser multipartido completo. Já com uma família contendo o padrão P_2 nossa estratégia não funciona.

Problema 4. Dados inteiros $r \geq 2$, $n \geq k \geq 3$ e $1 \leq s \leq \binom{k}{2}$, uma questão interessante é considerar colorações de arestas que evitam cópia de K_k colorido com s **ou menos** cores, o que levaria a uma generalização comum do problema de Turán e do problema (monocromático) de Erdős–Rothschild. A classe de configurações extremais para n e r grandes será muito mais rica, já que K_n não admite qualquer coloração pelo Teorema de Ramsey e $T_{k-1}(n)$ admite menos colorações do que outras construções (ver [1, 37]).

Problema 5. Uma outra dependência de parâmetro que vem sendo estudada é em relação ao número mínimo de vértices para que os resultados valham. Neste sentido, podemos fazer o seguinte questionamento dentro do nosso problema. Podemos obter resultados similares aos dos Teoremas 1.6 e 1.7 com valores “pequenos” para o parâmetro n_0 ?

Já existem pesquisas com a aplicação do Método dos Contêineres, que surge como uma nova ferramenta para problema extremais. Esta é uma possibilidade para abordar o Problema 5.

O trabalho desenvolvido nesta tese é parte do Projeto PROBRAL, projeto ainda vigente em que participam pesquisadores brasileiros e alemães. Nosso trabalho deu origem ao artigo An extension of the rainbow Erdős–Rothschild problem [24], escrito em parceria com meu orientador, Prof Dr Carlos Hoppen e o Prof Dr Hanno Lefmann, pesquisador alemão. O artigo foi submetido para fins

de publicação e aceito pela revista científica *Discrete Mathematics* [25], sendo que encontra-se aguardando publicação.

Referências Bibliográficas

- [1] N. Alon, J. Balogh, P. Keevash and B. Sudakov, The number of edge colorings with no monochromatic cliques, *J. London Math. Soc.*, **Vol. 70**, N° 2, (2004), 273–288.
- [2] N. Alon and R. Yuster, The number of orientations having no fixed tournament, *Combinatorica*, **Vol. 26**, (2006), 1–16.
- [3] J. Balogh, A remark on the number of edge colorings of graphs, *European Journal of Combinatorics*, **Vol. 27**, (2006), 565–573.
- [4] J. Balogh and L. Li, The typical structure of Gallai colorings and their extremal graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **Vol. 33**, N° 4, (2019), 2416–2443.
- [5] J. Balogh, R. Morris and W. Samotij, Independent sets in hypergraphs. *J. Am. Math. Soc.*, **Vol. 28**, N° 3, (2015), 669–709.
- [6] J. O. Bastos, F. S. Benevides and J. Han, The number of Gallai k -colorings of complete graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **Vol. 144**, (2020), 1–13.
- [7] F. S. Benevides, C. Hoppen and R. M. Sampaio, Edge-colorings of graphs avoiding a prescribed coloring pattern, *Discrete Mathematics*, **Vol. 240**, N° 9, (2017), 2143–2160.
- [8] F. Botler, J. Corsten, A. Dankovics, N. Frankl, H. Hàn, A. Jiménez and J. Skokan, Maximum number of triangle-free edge colourings with five and six colours, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, **Vol. 88**, N° 3, (2019), 495–499.

- [9] D. Clemens, S. Das and T. Tran, Colourings without monochromatic disjoint pairs, *European Journal of Combinatorics* **Vol. 70**, (2018), 99–124.
- [10] L. Colucci, E. Győri and A. Methuku, Edge colorings of graphs without monochromatic stars, *Discrete Mathematics*, **Vol. 343**, N° 12, (2020), 112–140.
- [11] R. Diestel, Graph Theory, GTM 173 *5nd Edition*, Ed. Springer, (2016-2017).
- [12] P. Erdős, Some new applications of probability methods to combinatorial analysis and graph theory, *Proc. of the Fifth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing* (1974), 39–51.
- [13] P. Erdős and A. H. Stone, On the structure of linear graphs, *Bull. Am. Math. Soc.*, **Vol. 52**, (1946), 1087–1091.
- [14] J. Fox, A. Grinshpun, and J. Pach, The Erdős-Hajnal conjecture for rainbow triangles, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **Vol. 111**, (2015), 75–125.
- [15] Z. Füredi, A proof of the stability of extremal graphs, Simonovits’s stability from Szemerédi’s regularity, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **Vol. 115**, (2015), 66–71.
- [16] Z. Füredi and M. Simonovits, The history of degenerate (bipartite) extremal graph problems, *Erdős Centennial, Bolyai Society of Mathematics*, Springer Verlag, **Vol.25**, (2013), 169–213.

- [17] A. Gyárfás and G. N. Sárközy, Gallai colorings of non-complete graphs, *Discrete Mathematics*, **Vol. 310**, (2010), 977–980.
- [18] A. Gyárfás and G. N. Sárközy, A. Sebő, and S. Selkow Ramsey-type results for Gallai colorings, *Journal of Graph Theory*, **Vol. 64**, (2010), 233–243.
- [19] A. Gyárfás and G. N. Sárközy, Edge colorings of complete graphs without tricolored triangles, *Journal of Graph Theory*, **Vol. 46**, (2004), 211–216.
- [20] H. Hàn and A. Jiménez, Improved bound on the maximum number of clique-free colorings with two and three colors, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **Vol. 32**, N° 2, (2018), 1364–1368.
- [21] C. Hoppen, Y. Kohayakawa and H. Lefmann, Edge colourings of graphs avoiding monochromatic matchings of a given size. *Combinatorics, Probability and Computing* **Vol. 21**, N° 1-2, (2012), 203–218.
- [22] C. Hoppen, Y. Kohayakawa and H. Lefmann, Edge-colorings of graphs avoiding fixed monochromatic subgraphs with linear Turán number, *European Journal of Combinatorics*, **Vol. 35**, N° 1, (2014), 354–373.
- [23] C. Hoppen and H. Lefmann, Edge-colorings avoiding a fixed matching with a prescribed color pattern, *European Journal of Combinatorics*, **Vol. 47**, (2015), 75–94.
- [24] C. Hoppen, H. Lefmann and D. Nolibos, An extension of the rainbow Erdős–Rothschild problem, <https://arxiv.org/abs/2103.11892>.
- [25] C. Hoppen, H. Lefmann and D. Nolibos, An extension of the rainbow Erdős–Rothschild problem, *Discrete Mathematics*, no prelo.

- [26] C. Hoppen, H. Lefmann and K. Odermann, A rainbow Erdős–Rothschild problem, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **Vol. 31**, (2017), 2647–2674.
- [27] C. Hoppen, H. Lefmann and K. Odermann, and J. Sanches, Edge-colorings avoiding fixed rainbow stars, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, **Vol. 50**, (2015), 275–280.
- [28] C. Hoppen, H. Lefmann and and K. Odermann, On graphs with a large number of edge-colorings avoiding a rainbow triangle, *European Journal of Combinatorics* **Vol. 66**, (2017), 168–190.
- [29] P. Keevash, Hypergraph Turán problems, *Surveys in Combinatorics, Cambridge University Press* **Vol. 392**, (2011), 83–140.
- [30] J. Komlós and M. Simonovits, Szemerédi regularity lemma and its application in graph theory *Proceedings of Colloquia of the Bolyai Mathematical Society 2, Keszthely*, (1993), 295–352
- [31] T. Kővári, V. T. Sós and P. Turán, On a problem of K. Zarankiewicz, *Colloq. Math.*, **Vol. 3**, (1954), 50–57.
- [32] H. Lefmann, Y. Person and M. Schacht, A structural result for hypergraphs with many restricted edge colorings, *J. Combin.*, **Vol.1, N° 3–4**, (2010), 441–475.
- [33] H. Lefmann, Y. Person, V. Rödl, and M. Schacht, On colorings of hypergraphs without monochromatic Fano planes, *Combin. Probab. Comput.*, **Vol. 18**, (2009), 803–818.

- [34] D. J. C. MacKay, *Information Theory, Inference and Learning Algorithms*, Version 7.2 (fourth printing), *Cambridge University Press*, (2005).
- [35] W. Mantel, Problem 28, *Wiskundige Opgaven*, **Vol. 10**, N° 60–61, (1907), 320.
- [36] O. Pikhurko and Z. B. Yilma, The maximum number of K_3 -free and K_4 -free edge 4-colorings, *J. London Math. Soc.*, **Vol. 85**, N° 2, (2012), 593–615.
- [37] O. Pikhurko, K. Staden and Z.B. Yilma, The Erdős–Rothschild problem on edge-colourings with forbidden monochromatic cliques, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **Vol. 163**, N° 2, (2017), 341–356.
- [38] D. Saxton and A. Thomason, Hypergraph containers *Invent. Math.* , **Vol. 201**, (2015), 925–992.
- [39] M. Simonovits, A Method for Solving Extremal Problems in Graph Theory, Stability Problems, *Theory of Graphs (Proc. Colloq., Tihany, 1966)*, *Academic Press, New York*, (1968), 279–319.
- [40] E. Szemerédi, *Regular partitions of graphs*, Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976), *Colloq. Internat. CNRS*, **Vol. 260**, CNRS, Paris (1978), 399–401.
- [41] P. Turán, On an extremal problem in graph theory (in Hungarian), *Matematikai és Fizikai Lapok*, **Vol. 48**, (1941), 436–452.

- [42] R. L. Wheeden, *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis* **Vol. 308**, *CRC Press*, (2015).
- [43] R. Yuster, The number of edge colorings with no monochromatic triangle, *J. Graph Theory* **Vol. 21**, (1996), 441–452.
- [44] A. A. Zykov, On some properties of linear complexes, *Mat. Sb.* **Vol. 66, N° 2**, (1949), 163–188.

Índice Remissivo

- aresta interna, 22
- coloração de arestas, 4
- emparelhamento, 21
- família
 - $\mathcal{P}_{(K_k, \geq s)}$, 42
 - $\mathcal{P}_{(F, \geq s)}$, 7
 - \mathcal{P}_K , 7
- função
 - $A(k, j)$, 26
 - $a(k, j)$, 26
 - $s_t(k)$, 60
- grafo
 - k -colorível, 22
 - ℓ -partido, 22
 - completo, 22
 - de Turán, 23
 - bipartido, 22
 - completo, 21
 - definição, 21
 - extremal, 1, 23
 - isomorfo, 4
 - multipartido completo, 6, 25
 - reduzido multicolorido, 48
- Lema
 - de Regularidade de Szemerédi, 47
- lema
 - de imersão, 49
- número
 - cromático, 22
 - de Turán, 23
- padrão P de F , 4
- parâmetro
 - r_0^* , 10
 - $r_0(k, s, t)$, 60
 - $r_1(k, s)$, 10
 - $s_0(k)$, 10, 59
- partição
 - balanceada, 22
- Problemas
 - de Erdős–Rothschild, 3
 - do tipo Turán, 2
- subgrafo, 21
 - induzido, 21
- Teorema
 - Erdős–Stone, 1
 - Turán, 1
- vizinhança, 21