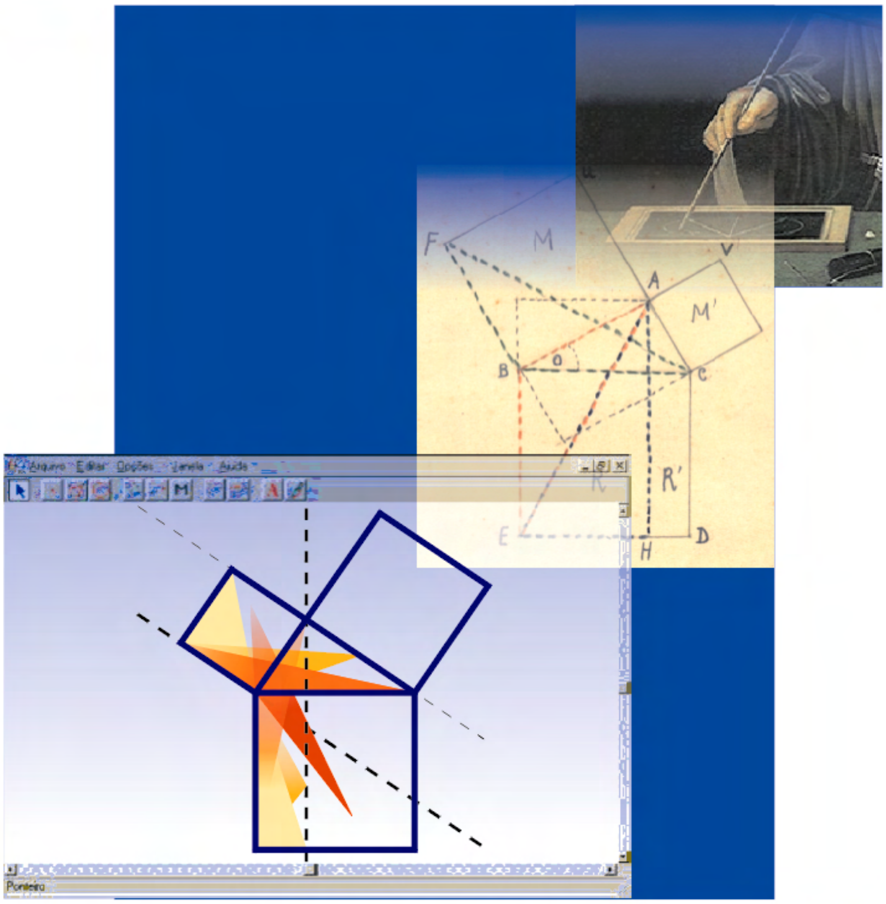
UFRGS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo



Tese de Doutorado

Maria Alice Gravina

Orientação: Profª. Drª. Lucila M. Costi Santarosa
Co-orientação: Profª. Drª. Liane Tarouco

Porto Alegre, agosto de 2001

UFRGS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo

Maria Alice Gravina

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação para obtenção do título de Doutor em Informática na Educação

Orientadora:
Prof ª. Dra. Lucila M. Costi Santarosa
Co-orientadora:
Prof ª. Dra. Liane Tarouco

Porto Alegre, setembro de 2001.

A Cecília e Vinícius, meus vínculos perenes.
Eles bem compreenderam meu empenho na realização
deste trabalho e minha conseqüente ausência, em muitos
momentos de suas vidas, durante o período de doutorado.

AGRADECIMENTOS

À professora Lucila Costi Santarosa, orientadora, pelas inúmeras discussões que sempre apontaram às necessárias clareza e coerência de idéias, fundamentais ao término da tese. Também pelas conversas amigas, com seu olhar holístico de vida, que muito me ajudaram em momentos difíceis.

À professora Liane Tarouco, co-orientadora, por seu empenho em viabilizar estágio de pesquisa junto à *Université Joseph Fourier*.

Ao professor Dalcídio Claudio pelo decidido apoio proporcionador de intercâmbio acadêmico-científico internacional à alunos ainda em fase de doutorado, do qual usufrui.

Aos pesquisadores da Equipe Informatique et Apprentissage des Mathématiques, do Laboratoire IMAG-Leibniz da Université Joseph Fourier, pela calorosa acolhida e frutuosas discussões acadêmicas. Em particular à professora Colette Laborde, com quem discuti sobre o propósito e a pertinência da tese.

A Airton Cattani e Ana Wilma Tijiboy, companheiros de doutorado, pelos estudos à três em que melhor entendemos a complexidade de um doutorado em área interdisciplinar. Também pelo apoio amigo nos solitários momentos de trabalho.

Aos treze alunos da disciplina de Geometria I do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS que prontamente se engajaram como sujeitos desta investigação. E também aos alunos, de turmas anteriores, pela contribuição ao delineamento do problema sob investigação. Com todos eles aprendi, um pouco mais, sobre o complexo processo de construção de conhecimento.

Aos colegas e funcionários do Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS, ao facilitarem condições para a realização deste trabalho.

A Carlos Alberto Gravina, pela paciente revisão do texto, desenho dos gráficos e editoração.

À PROPESQ / UFRGS pelo apoio financeiro parcial.

À FAPERGS, pelo apoio financeiro que permitiu estágio de pesquisa durante a fase final de tese junto à Equipe Informatique et Apprentissage des Mathématiques do Laboratoire IMAG-Leibniz da Université Joseph Fourier.

Em especial ao Luiz Fernando, pelos muitos mergulhos no entendimento da matemática e, também, da vida.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

4 A INVESTIGAÇÃO

RESUMO

O processo de demonstração é axial na construção do conhecimento matemático. Na geometria euclidiana, ele é um dos aspectos que apresenta grandes obstáculos aos alunos. Uma das dificuldades aparece na transição, necessária, entre o conhecimento de natureza empírica, já adquirido, e aquele a ser construído: a geometria euclidiana enquanto modelo teórico, organizado em axiomas, teoremas e demonstrações.

Os recursos informáticos hoje disponíveis provocam a busca de estratégias pedagógicas favoráveis à construção deste conhecimento. Entender as suas potencialidades torna-se um objeto de investigação: o que acontece com os processos cognitivos quando ao sujeito em interação com a máquina é possibilitada a concretização de seus *construtos* e ações mentais, e quando, mediante realimentação imediata, ele é levado a novas reelaborações e construções mentais? E como tais processos concorrem para um novo conhecimento?

Esta tese propõe uma engenharia didática, em ambiente de geometria dinâmica, que favorece a ascensão dos alunos em patamar de conhecimento — de empírico a hipotético-dedutivo. Toma-se como referencial a teoria piagetiana, bem como a teoria da situação didática em matemática desenvolvida pela escola francesa.

A engenharia se desenrola em três níveis: no primeiro, o propósito é a compreensão do significado e da necessidade de demonstração por via de construções geométricas; no segundo nível, pretende-se o desenvolvimento das primeiras habilidades na produção de demonstrações; e, no terceiro, os problemas propostos ao alunos exigem mais de seus funcionamentos cognitivos no tratamento adequado de uma figura geométrica — trata-se das extensões de desenho e concomitantes apreensões operativas responsáveis pela identificação de subconfigurações geométricas que dão suporte à argumentação dedutiva. Análise *a posteriori* do desenrolar dos trabalhos dos alunos confirma as expectativas anunciadas na análise *a priori* apresentada na fase de concepção da situação didática cuja implementação é proposta: o progresso dos alunos na construção de conhecimento em geometria, como modelo matemático, foi expressivo.

ABSTRACT

The proof process is central in the construction of knowledge in Mathematics. In Euclidean geometry it is one of the aspects that is a source of obstacles for the students. One of the difficulties lies in the necessary transition from empirical knowledge, already acquired, to more advanced knowledge: the geometry as a theoretical model, organized in axioms, theorems and proofs.

Computer technology nowadays available incites an investigation towards the pedagogical interventions that can aid the knowledge construction. The understanding of its potential becomes an investigation subject: what happens with the cognitive process when the students work in a computer environment, where a dynamical representations of their mental actions is possible, and where in face of the retroaction provided by the immediate feedback they are provoked to new actions? Are these interactions substantial for ascending to new knowledge?

The aim of this thesis is to present a didactic engineering in a dynamical geometry environment that favors the students knowledge ascension in geometry — from empirical to deductive. The theoretical frame is Piaget's theory, as well the theory of didactical situations in Mathematics, developed by the French school. The engineering is developed in three levels: in the first level the purpose is to understand the meaning of a mathematical proof and its necessity; in the second level the purpose is the development of elementary abilities for producing a proof; the final one provokes a high level of cognitive operations for accomplishing the proper treatment of geometrical figures — the design extensions / reconstructions and operative apprehensions that will produce the identifications of sub-configurations to support a deductive reasoning. An analysis *a posteriori* of the student's production confirms the anticipations made *a priori*, in the phase where the activities to be developed were delineated: the student's progress towards a geometrical knowledge as a mathematical model were expressive.

1 O FENÔMENO DE INTERESSE

O processo de demonstração é axial na construção do conhecimento matemático. Na geometria euclidiana,[1] ele é um dos aspectos que apresenta grandes obstáculos aos alunos, como o atestam pesquisas desenvolvidas na área [2] e situações de aprendizagem acompanhadas em disciplina de primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS. [3]

Uma das dificuldades aparece na transição, necessária, entre o conhecimento de natureza empírica, já adquirido, e aquele a ser construído: a geometria euclidiana enquanto corpo teórico, organizado em axiomas, teoremas e demonstrações, e definições.

O conhecimento empírico constitui-se a partir das impressões e experiências proporcionadas pelo mundo sensível imediato. É a partir da regularidade das formas aí presentes que são construídas as primeiras abstrações geométricas, caracterizadas

---

[1] A geometria euclidiana caracteriza-se por tomar como axioma que por um ponto exterior a uma reta existe uma e somente uma reta paralela a reta dada; nas geometrias elíptica e hiperólica este axioma é modificado, respectivamente, quanto à existência e quanto à unicidade.

[2] BALACHEFF, N. **Processus de Preuve et Situations de Validation**, Educational Studies in Mathematics, vol. 18, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1987. BALACHEFF, N. 1991: **Treatment of Refutations: aspects of the complexity of a constructivist approach of mathematics learning**, em Von Glasersfeld, E. (editor) **Radical construtivism in Mathematics Education**, Dordrecht : Kluwer Academic Publisher, 1991. BALACHEFF, N. **Apprendre la preuve**, em Sallantin J., Szczeciniarz J.-J. (editores), Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle, Paris : PUF, 1999. FISCHBEIN, E. **The theory of figural concepts**, Educational Studies in Mathematics, vol. 24/2, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1994. MOORE, R. 1994: **Making Transition to Formal Proof**, Educational Studies in Mathematics, vol. 27, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1994.

[3] GRAVINA, M. A. **Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria**, Anais do VII Congresso Brasileiro de Informática na Educação, Belo Horizonte MG, 1996.

sobremodo por impressões visuais, onde círculos, quadrados, retângulos são nomes que simplesmente identificam formas. As experiências escolares de medições e manipulações empíricas suportam a primeira identificação das propriedades geométricas. Por exemplo: quando os alunos manipulam triângulos, medem e somam os ângulos de diferentes triângulos e então generalizam: “a soma dos ângulos de um triângulo é sempre igual à 180 graus”. Ou seja: aqui não está em jogo a aprendizagem direcionada à construção de conhecimento de natureza hipotético-dedutiva, característica da geometria euclidiana.

A ascensão a novo patamar de conhecimento — do que poder-se-ia classificar como sensorial e prático àquele que depende de raciocínios sobre objetos abstratos, raciocínios a estabelecerem relações de caráter necessário e ou suficiente entre fatos geométricos — exige raciocínios lógico-dedutivos, nem sempre espontâneos. Neste novo estágio — o estudo da geometria hipotético-dedutiva — o que até então era aceito como intuitivamente plausível deve agora ser explicado mediante demonstração. Trata-se, doravante, da construção de conhecimento sintonizado à geometria enquanto área de saber matemático, concomitante ao desenvolvimento do que denominar-se-á pensamento geométrico.

Por pensamento geométrico entendam-se os raciocínios de natureza dedutiva e visual [4] quando manipulam desenhos inseridos num quadro conceitual bem definido. É o pensamento que permite a construção de conhecimento, a geometria concebida como modelo teórico do mundo sensível imediato. Esse modelo é construído, de forma magnífica, [5] mediante teoremas e demonstrações deduzidos, por via de regras de inferência lógica, a partir de alguns poucos pressupostos que a intuição não coloca em

---

[4] Discussão sobre pensamento de natureza visual é apresentada na seção 2.3.

[5] Em classificação apresentada por PENROSE, **The Emperor's New Mind.** New York USA **:** Penguin Books, 1989, p. 152, a geometria euclidiana é vista como uma das teorias físicas que pertence a classe bastante restrita das “magníficas”, tal classe sendo constituída pelas teorias que se aplicam com certa precisão aos fenômenos do mundo: *“A mais antiga das teorias MAGNÍFICAS* (colocado em maiúscula pelo autor*) é a geometria Euclidiana, sobre a qual aprendemos alguma coisa na escola. Os antigos podem não tê-la visto como uma teoria física, mas de fato é isto que ela é: uma sublime e magnificamente acurada teoria do espaço físico [...] Por que eu me refiro a geometria Euclidiana como teoria física e não como um ramo da matemática ? Ironicamente, uma das transparentes razões para esta visão é que nós sabemos que a geometria Euclidiana não é inteiramente acurada na descrição do espaço físico que habitamos [...] Mas isto não tira da geometria Euclidiana o caráter de MAGNÍFICA. Na escala dos metros, desvios na planura euclidiana são realmente minúsculos, erros em tratar a geometria como Euclidiana são menores do que o diâmetro de um átomo de hidrogênio!”*

questão: os axiomas. A construção do modelo envolve a produção de conjeturas e de contra-exemplos, a modificação e o refinamento de conjeturas, tendo-se sempre o intuito de apreender, através de argumentação hipotético-dedutiva, a veracidade do que até então era somente plausível; assim desencadeia-se um processo em espiral de produção de teoremas, no qual novos teoremas são produzidos a partir daqueles já demonstrados.

Na superação das dificuldades de aprendizagem, dois contextos exigem atenção: o do indivíduo e o do meio. O primeiro refere-se às construções cognitivas individuais — o sujeito nas suas elaborações mentais. O segundo, às intermediações que sintonizam as construções individuais com o saber matemático a ser aprendido — o sujeito interagindo com o meio, quer social, quer tecnológico.

Muito pouco tem feito a escola quanto ao aprendizado da geometria, ao não propiciar atitudes cognitivas voltadas à construção deste saber. Em geral, os livros didáticos tratam a geometria como um dicionário de definições, e esparsas propriedades geométricas são apresentadas como "fatos dados". Os professores, desprovidos de estratégias pedagógicas que considerem as dificuldades enfrentadas pelos alunos quanto ao significado de produzirem uma demonstração, voltam-se a um trabalho superficial, não provocador quanto a argumentações dedutivas e, portanto, pouco significativo em termos de aprendizagem.

Quanto a esse aspecto, PAIS e FREITAS [6] registram a atitude dos professores de matemática que, mesmo louvando a geometria dedutiva como um saber disciplinar importante à formação intelectual dos alunos — embora não apresentem as razões disso — também reconhecem que esta formação não vem sendo satisfatória, devido às suas próprias (deles, professores) deficiências de formação; no geral, não se manifestam quanto à relevância dos raciocínios lógico-dedutivos na construção do saber matemático, o que é preocupante. Quando falam sobre geometria, os professores referem-se somente às fórmulas e aos cálculos ou à comprovação experimental de propriedades, desconsiderando a demonstração como forma de validação do conhecimento matemático.

---

[6] PAIS, L. C. e FREITAS, J. L. **Um estudo dos processos de provas no ensino e na aprendizagem da geometria no ensino fundamental**, Bolema, no. 13, Rio Claro, Editora UNESP, 1999.

Em trabalho de retrospectiva histórica, PAVANELLO [7] aponta razões para o abandono do ensino da geometria no Brasil, entre as quais destaca a influência do período da “matemática moderna”, quando a formalização excessiva, por via da linguagem de conjuntos e estruturas algébricas, foi transposta para o dia–a-dia da sala de aula. Na geometria, isso conduziu ao tratamento mediante a teoria das transformações, muito distante da naturalidade apresentada pelas primeiras idealizações que a geometria euclidiana procura modelar.[8] Distante não só para os alunos como para os próprios professores que, então inseguros, passaram a privilegiar sobretudo conteúdos da álgebra, negligenciando cada vez mais os da geometria.

Claro reflexo desta situação é detectado nos desempenhos dos calouros que cursam a disciplina de Geometria I do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS [9]: esses alunos chegam a universidade desprovidos das habilidades intelectuais necessárias à construção do conhecimento geométrico. Abstrair, generalizar, estabelecer relações, errar, fazer conjeturas, demonstrar — as ações que caracterizam o processo de criação em matemática lhes são estranhas.

Os recursos informáticos hoje disponíveis estimulam a busca de estratégias pedagógicas favoráveis à construção de conhecimento em geometria, para além do que vem fazendo a escola. Entender as suas potencialidades torna-se um objeto de investigação: o que acontece com os processos cognitivos quando ao sujeito em interação com a máquina é possibilitada a concretização de seus *construtos* e ações mentais e quando, com realimentação imediata, ele é levado a novas reelaborações e construções mentais? E como tais processos concorrem para um novo conhecimento?

A tecnologia informática apresenta-se como um meio a dar suporte ao pen-

---

[7] PAVANELLO, R.M. 1993: **O abandono do ensino da geometria no Brasil, causas e conseqüências**, Revista Zetetiké, ano 1, vol. 1, Campinas: Editora UNICAMP, 1993.

[8] Com o movimento matemática moderna, nos início da década de 60, a excessiva formalização de linguagem trouxe sérios danos ao ensino e aprendizagem da matemática. No caso da geometria, o tratamento via transformações só se torna relevante quando quer-se destacar outros invariantes, que não distâncias, ângulos e razões entre distâncias, estes invariantes nos grupos das isometrias e das das semelhanças. É ao olhar-se para os invariantes na geometria afim e na geometria projetiva que o tratamento via transformações mostra o seu alcance teórico; mas tais invariantes não se apresentam como objeto de estudo na escola.

[9] GRAVINA, M. A. Op. cit.

sar, possibilitando "*mudar os limites entre o concreto e o formal*", [10] já que *"o computador permite criar um novo tipo de objeto — os objetos 'concreto-abstratos'; concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados; abstratos por se tratarem de realizações feitas a partir de construções mentais".* [11] Assim, a tecnologia informática transmuta-se em *tecnologia da inteligência* — termo cunhado por LEVY[12] — abarcando a possível versatilidade e até mesmo a ampliação dos funcionamentos cognitivos.

Na transição do conhecimento empírico para o que tem caráter de teoria matemática, mostra-se necessária uma crucial reestruturação de forma de pensar, e a tecnologia informática pode muito bem intermediar o desenvolvimento das habilidades cognitivas que aí entram em jogo. Anuncia-se, então, ao que se pretende esta tese: investigar como as situações que chamar-se-iam de tecno-didáticas — situações didáticas que acontecem em ambientes informatizados — podem favorecer a superação das dificuldades presentes no processo de aprendizagem da geometria.

Para investigação, tomou-se o ambiente informático referido na literatura como ambiente de geometria dinâmica. Dentre os diversos representantes desses ambientes, foi escolhido o *software* Cabri-Geometry II [13], um dos mais versáteis quanto a recursos de construção e de manipulação dinâmica de objetos geométricos, além de disponibilizar interface em português.

Podemos caracterizá-lo neste capítulo introdutório, sucintamente,[14] como um ambiente que disponibiliza régua e compasso virtuais, com as quais são feitas construções geométricas em linguagem clássica da geometria. Ver Figura 1.1.

---

[10] PAPERT, S. **The Children Machine: Rethinking Scholl in the Age of the Computers.** New York USA : Harvester Wheatsheaf, 1993.

[11] HENENSTREINT, J. **Simulation et Pédagogie, une rencontre du troisième Type.** Gif Sur Yvette, France : École Superieure d'Electricite, 1987.

[12] LEVY, P. **Tecnologias da Inteligência: o futuro do pensamento na era da informática**. São Paulo SP : Editora 34, 1993.

[13] Cabri-Geometry II é criação de J. M. Laborde e F. Bellemain, da Université Joseph Fourier-Grenoble-França. Site na Internet em http://www-cabri.imag.fr

[14] No capítulo 3 apresentamos análise detalhada deste ambiente.

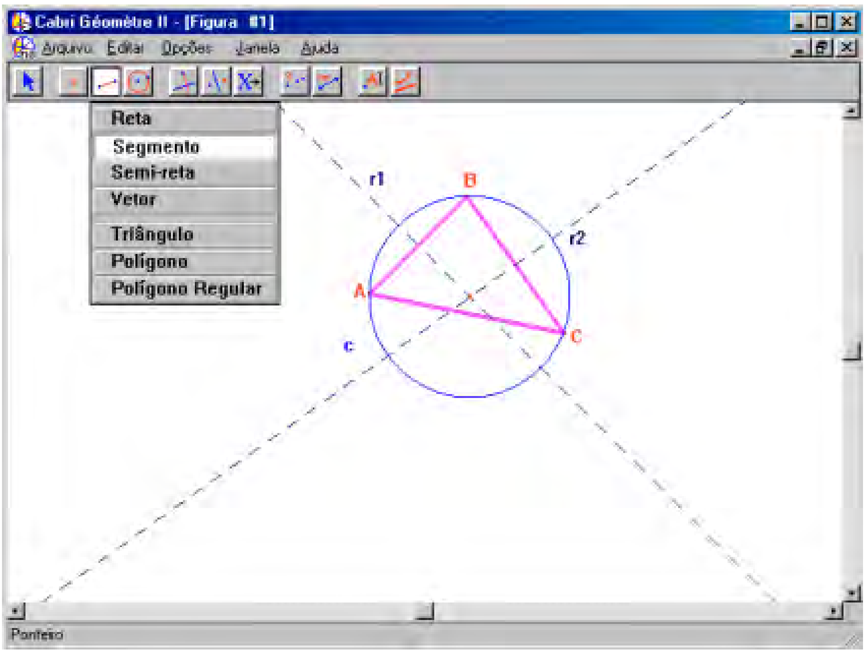


Figura 1.1
Interface do software Cabri-Geometry II

Os objetos construídos podem ser manipulados diretamente na tela do computador, imprimindo-se desta forma dinamismo às configurações. O “desenho em movimento” torna-se revelador dos invariantes que são decorrências implícitas da construção feita. De imediato percebe-se parte da potencialidade do ambiente: ao permitir a construção e manipulação de objetos *concreto-abstratos*, ele desencadeia algumas das primeiras ações mentais características do pensar matemático — o estabelecer relações e conjeturar — e o faz de forma contundente, se comparado às possibilidades apresentadas pelo desenho, estático, em papel.

Na superação de dificuldades inerentes a aprendizagem de geometria, os ambientes dinâmicos já se revelam como ferramentas promissoras. [15] Pesquisas atestam o potencial desses ambientes, sobretudo no aspecto concernente à construção de con-

---

[15] KAPUT, J. **Technology and Mathematics Education,** em Grows, D. (editor), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, New York : MacmillanPublishing Company, 1992 . LABORDE, C. e CAPPONI, B. **Cabri-géomètre constituant d'un Milieu pour l'Apprentissage de la notion de figure**, em Balacheff, N. e Vivet, M. (editores), Didactique et Intelligence Artificielle, Grenoble, France : La pensée Sauvage, 1994. LABORDE, C, **Conception et Évaluation de Scenários d ‘Enseignement avec Cabri-Géomètre**. Grenoble, France : Équipe EIAH du Laboratoire Leibniz-IMAG et de l’IUFM de Grenoble, 1998. YERUSHALMY, M. e CHAZAN, D. **Overcoming Visual Obstacles with the Aid of the Supposer**, Educational Studies in Mathematics, vol. 21/3, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher , 1990.

ceitos em geometria: *construtos* individuais, até então deformados por imagens prototípicas, são reconstruídos através do "desenho em movimento", colocando em sintonia os significados individuais e os significados inseridos na geometria enquanto teoria matemática.[16]

Pesquisas também indicam que os alunos sentem-se mais motivados a buscar explicações para conjeturas formuladas em função de suas manipulações sobre os objetos geométricos dinâmicos e das evidências que daí emergem. [17]

Quanto ao processo de demonstração, muitas são as questões em aberto, dentre elas: "de que forma os ambientes de geometria dinâmica podem desencadear, para além de situação de experimentação (os ambientes tem, de imediato, o caráter de 'laboratório de experiências'), situação de argumentação dedutiva?"

Pouco ainda se sabe do potencial desses ambientes. Qual é sua capacidade de catalisar o processo de demonstração ? Na tela do computador, "as regularidades saltam aos olhos" e nela são manipuladas, diretamente, as representações dos objetos geométricos. Desencadear o processo de demonstração exige, preliminarmente, o entendimento do que seja uma demonstração e, a seguir, o tornar-se versátil em formas de pensar — raciocínios dedutivos? raciocínios visuais? imagens mentais em transformação? — que concorrem à construção de uma demonstração.

Nesta direção insere-se a presente investigação, brevemente delimitada, neste Capítulo [18], por duas questões:

— **como os ambientes de geometria dinâmica podem contribuir para que os alunos entendam o significado de demonstração ?**

— **como os ambientes de geometria dinâmica podem contribuir para que os alunos construam suas próprias demonstrações ?**

---

[16] A título de exemplo: feita a construção de um paralelogramo que seja estável sob ação de movimento, ao deslocarem-se os vértices que são livres, obtém-se transformações no paralelogramo e na tela têm-se os casos particulares de retângulo e quadrado, evidenciando-se que tais figuras são subclasses dos paralelogramos, e com isso construtos prototípicos dos alunos — dp tipo "quadrado não é paralelogramo" — se modificam.

[17] JIANG, Z. e McCLINTOCK, E.: **Using The Geometer's Sketchpad with Preservice Teachers**, em King, J. e Schattschneider, D. (editores), Geometry Turned On, Mathematical Association of America Notes 41, Washington, USA : The Mathematical Association of America, 1997. KEYTON, M. 1997: **Students Discovering Geometry Using Dynamic Geometry Software**, em King, J. e Schattschneider, D. (editores), Op.cit.

No Capítulo 2 são delineados os princípios teóricos que subsidiarão a investigação. No Capítulo 3 são mapeadas dificuldades inerentes ao processo de aprendizagem da geometria e é sinalizado o potencial dos ambientes de geometria dinâmica na superação dessas dificuldades. O Capítulo 4 trata do problema investigado: as questões norteadoras; a metodologia de pesquisa que permitirá o tratamento do problema em consonância com quadro teórico eleito para esta investigação; o desenrolar e a análise da experimentação. No Capítulo 5 são colocados em destaque os resultados obtidos, subsídios para a implementação de novas práticas educativas quando se faz uso dos ambientes de geometria dinâmica; também são abordados possíveis desdobramentos para o trabalho até então realizado.

O Anexo 1 coleta o material utilizado na investigação: material para sondagem de conhecimentos prévios dos sujeitos participantes e as atividades implementadas na fase de experimentação.

O Anexo 2 coleta a produção dos sujeitos da experimentação (no Capítulo 4 esta produção é utilizada de forma seletiva, para não sobrecarregar-se o corpo do trabalho).

As citações provenientes de edições estrangeiras, que acompanham o trabalho, foram traduzidas ao português para fluidez da leitura. O Anexo 3 reproduz estes textos tal qual aparecem nas obras citadas. Explica-se a quantidade de citações ao longo do texto: palavras de outros pesquisadores foram tomadas, *ipsis literis*, sempre que fossem subsídio importante às reflexões teóricas que suportam a investigação.

---

[18] Questões retomadas no capítulo 4.

2 SUBSÍDIOS TEÓRICOS

Como os ambientes de geometria dinâmica podem contribuir para que os alunos entendam o significado da demonstração e, mais, para que construam suas próprias demonstrações ? A reflexão sobre o tema abrange três aspectos:

— **a natureza da matemática**, ilustrada pela vivência dos matemáticos;

— **os processos cognitivos** voltados à construção de conhecimento, indo dos aportes da teoria

— à relação entre meio e desenvolvimento cognitivo, com olhar especial sobre a tecnologia informática;

— **o complexo processo de ensino e aprendizagem,** com destaque ao trabalho da Escola Francesa de Didática da Matemática, escola debruçada, enfaticamente, sobre a investigação de situações didáticas[1] orientadas à construção de conhecimento matemático.

2.1 A natureza da matemática

A matemática é criação humana voltada ao estudo de regularidades, quer sejam advindas de percepções sobre o mundo real, quer sejam emergências num quadro puramente abstrato.[2] Este é um dos olhares sobre a matemática. Em grande parte, é o

---

[1] A metodologia de pesquisa referida como *Engenharia Didática* é usada no Capítulo 4.

[2] Freqüentemente, teorias advindas do plano abstrato tornam-se poderosas ferramentas de abordagem de fenômenos físicos. Por exemplo: a geometria *riemanniana*. Oriunda do problema de condução de calor, ela foi objeto de considerável desenvolvimento abstrato nos últimos cinqüenta anos do

olhar da geometria euclidiana. Outros podem ser os olhares, igualmente subjetivos.

Para Fourier, o estudo profundo da natureza era a fonte mais fecunda de criação matemática. Galois, nome associado à teoria dos grupos, prezava particularmente a "elegância matemática" como caminho para teorias gerais e potentes. Monge não separava a criação matemática da invenção técnica. Jacobi pensava na transcendência do espírito ao considerar um problema relativo a teoria dos números tão importante quanto uma pesquisa física ou astronômica. Gauss distinguia-se tanto na pesquisa teórica pura quanto na pesquisa aplicada. Poincaré tratava a matemática ora como filosofia, ora como física.[3] As palavras de COURANT e ROBBINS abarcam estes diferentes olhares:

> *A matemática, como uma expressão da mente humana, reflete a vontade ativa, a razão contemplativa e o desejo da perfeição estética. Seus elementos básicos são a lógica e a intuição, análise e construção, generalidade e particularidade. Ainda que tradições diversas tenham destacado aspectos diferentes, é unicamente o jogo destas forças opostas e a luta por sua síntese que constitui a vida, a utilidade e o supremo valor da ciência matemática.* [4]

Diferentemente de outras criações humanas, a matemática caracteriza-se por suas especiais universalidade e eficiência, como transparece nas palavras de DEHANE, em artigo com o sugestivo título "O π americano versus o π francês?":

> *... como um matemático você pode ir a qualquer lugar do mundo e, tomando algum tempo, você pode convencer qualquer pessoa que 3 é um número primo, que o terceiro decimal de π é 1, ou que o último teorema de Fermat é verdadeiro. O ponto é, concordância universal sobre o que constitui um fato matemático é facilmente obtida, primeiro porque nossos cérebros biológicos evoluíram para uma progressiva internalização de regularidades do mundo exterior, e segundo, porque nossa construções matemáticas culturais também evoluíram para ajustar-se ao mundo físico.* [5]

O saber matemático há muito se cristaliza na forma de teoria axiomática dedutiva: noções e relações primitivas são tomadas como ponto de partida, sem a preocupação de defini-las. Como arcabouço para a teoria, algumas relações entre os elementos primitivos — os axiomas — são tomadas como verdadeiras. Daí advêm novas relações — os teoremas — passíveis de explicação através de raciocínio lógico dedutivo, enca-

---

século XIX, tornando-se, em 1915, aparato matemático da teoria geral da relatividade de Einstein. (Em ALEKSANDROV, A. et. al. **La matemática - su contenido, métodos y significado**. Madrid : Alianza Editiorial, 1976.

[3] THUILLIER, P. **Les Mathématicians, Pour la Science.** Paris : Édition Française de Scientific American, Dossier Hors-Série.

[4] COURANT, R. e ROBBINS, H. **Qué es la matemática**. Madrid : Aguilar Ediciones, 1971. p. 3.

deando os axiomas de fundamentação da teoria e teoremas (da mesma forma já deduzidos) — as demonstrações. Tal organização enraíza-se nos “Elementos de Euclides”, erigido em paradigma da forma final da produção de saber matemático. [6]

O compartilhamento do saber e, sobretudo, a sua inserção no *construto* matemático, condiciona-se à sua apresentação sob a de forma de teoremas e demonstrações, em variados graus de rigor e formalização, determinados pela comunidade matemática da época e pelo momento histórico. Demonstrações tidas como rigorosas em determinado tempo não preenchem o critério de rigor de outras épocas.[7] Exemplo de rigor e formalização extremados encontra-se na obra de BOURBAKI [8] , na qual a axiomatização cuidadosa, as definições precisas e as demonstrações formais revelam a generalidade das estruturas matemáticas.

---

[5] DEHAENE,S. **The american PI versus the french PI ?**: EDGE 5,em http: // www. edge. Org / documents/archive/edge5.html, 1997.

[6] Vale aqui registrar que os “Elementos de Euclides” (sec. III A.C) determinaram, ao longo do tempo, a forma da produção matemática, sobretudo no mundo ocidental. Já no mundo oriental, embora hoje também se utilize este mesmo paradigma, nem sempre se deu assim. Em obra do matemático chinês Li Shanlon (1810-1882) tem-se um fórmula, referida em livros de análise combinatória como a ‘fórmula de Li Renshu’, que surpreendeu matemáticos do século XX: os procedimentos que levam ao enunciado da fórmula envolvem técnicas medievais chinesas, que não utilizam nem definições, nem teoremas e demonstrações, tornando-se assim de difícil compreensão para aqueles que trabalham com matemática dentro do paradigma ocidental; tal fórmula tornou-se então objeto de demonstração, a primeira delas, um tanto complicada, apresentada pelo matemático húngaro P.Turan, no final dos anos 30. Fonte: Dossier Hors-Série: Les Mathématiciens, Pour la Science - Édition Française de Scientific American,1994.

[7] Este é o caso da própria geometria euclidiana: é no final do século XIX que é questionado o rigor dos “Elementos de Euclides”, o que faz com que Hilbert apresente nova fundamentação para a geometria euclidiana, através de cinco grupos de axiomas, eliminando o uso de palavras (como por exemplo as que se referem a movimentos de figuras), então tomadas de forma intuitiva no trabalho de Euclides. A axiomatização apresentada por Hilbert evidencia que todas as noções primitivas devem tão somente respeitar as relações dadas pelos axiomas, assim como tornam-se desprovidas de qualquer realidade física. Tal concepção de uma axiomática da geometria euclidiana, nos dias de hoje, é aceita com naturalidade; mas na época foi realmente revolucionária.

[8] BOURBAKI é pseudônimo de um grupo de matemáticos franceses que, a partir do final dos anos 30, com renovação constante de participantes, empenhou-se em produzir um tratado que levassa a unificação de diferentes domínios da matemática, nisso levando a axiomatização, o rigor e o formalismo a graus extremos. Para BOURBAKI, a matemática é a ciência das estruturas. Esta concepção é expressa em artigo dos anos 40, "The Architecture of Mathematics”, onde é colocada a pergunta: “está a matemática se tornando uma torre de Babel, uma acumulação de disciplinas isoladas ? Estamos lidando com ‘uma’ matemática ou com diversas?” E a resposta dada é: a axiomatização moderna da matemática é uma linguagem que expressa abstratas estruturas matemáticas, que não são distintas, que não são objetos independentes, mas sim formam um sistema hierárquico. Dessa forma é introduzido o conceito de estrutura: um certo número de relações entre objetos; os objetos não são definidos e as propriedades das relações são dadas como axiomas, e disso são extraídas conseqüências, de acordo com regras de inferência lógica. É a axiomatização da estrutura algébrica, da estrutura de ordem, da estrutura topológica. A inclusão de axiomas nestas estruturas gerais gera novas estruturas, dentro de um sistema hierarquizado: por exemplo, a teoria dos grupos inclue a teoria dos grupos finitos, dos grupos abelianos, dos grupos abelianos finitos. A combinação de estruturas também gera novas estruturas, como por exemplo, a topologia algébrica.

Sistematizado e organizado, com maior ou menor rigor, o saber matemático faz-se eficaz e passível de compartilhamento. Em certos momentos, a formalização entra em cena veementemente, tornando-se ela própria objeto de estudo frente a problemas de fundamentação da matemática. Mas, na pesquisa, a atitude de formalização é geralmente o coroamento do processo de criação. A formalização é importante, é ela que explica os resultados obtidos, muitas vezes contrários à intuição imediata. Alguns exemplos: as axiomatizações que deram origem às geometrias não-euclidianas, as curvas que preenchem o espaço, as funções contínuas e seus gráficos sem reta tangente em nenhum ponto.

Freqüentemente, é na formalização, quando proposições lógico-inferenciais controlam o raciocínio, que os resultados revelam-se falsos. Raciocínios intuitivos, apresentados como 'teoremas' legítimos na fase de criação, colapsam na formalização, exigindo novos ajustes de definições, novas hipóteses e métodos. Em certos casos, nem o acurado controle da demonstração, por seu autor, evita falhas sutis na argumentação que, percebidas por quem analisa a demonstração, ameaçam a aceitabilidade do resultado. A história da recente demonstração (1994) do último teorema de Fermat [9], submetida por A.WILES ao crivo da comunidade matemática, ilustra este ponto. Problemas não detectados por WILES acarretaram-lhe meses adicionais de trabalhosas tentativas de demonstração. Só os bem sucedidos ajustes finais da demonstração asseguraram-lhe os méritos da realização.

Se a demonstração rigorosa é um componentes naturais da matemática, a ela a matemática não se reduz. O registro formal, que cristaliza o conhecimento matemático, pouco guarda da complexidade do processo de criação.

Em "Proofs and Refutations", LAKATOS [10] examina a dinâmica da construção do conhecimento e contrapõe-se à visão estritamente formal da matemática [11], sem daí inferir que a formalização, em matemática, não faça parte do processo. Ao longo de discussão fictícia entre professor e alunos, a perene dinâmica de "prova e refuta-

---

[9] SINGH, S. **O último teorema de Fermat**. São Paulo : Editora Record, 1999.

[10] LAKATOS, I. **Proofs and Refutations**. New York : Cambridge University Press, 1976.

[11] Esta é uma questão complexa. A argumentação dedutiva organizada, já não guardando mais o processo de "prova e refutação" do ato de criação, é parte da natureza, embora distante de ser com ela identificada.

ção", permeada por choques de opiniões, raciocínios e contra-raciocínios, gradualmente refina os conceitos e hipóteses que tornam plausível o teorema em questão.[12] Num processo de constante controle de hipóteses implícitas, reveladas pela apresentação sucessiva de contra-exemplos, as hipóteses, refinadas até a impossibilidade de apresentação de contra-exemplo, e os sucessivos ajustes de argumentação culminam na demonstração que insere o fato discutido no *construto* matemático, então como um teorema.

O trabalho de LAKATOS evidencia que, no processo de produção de matemática, é relevante o *contexto da descoberta,* mesmo que, na inserção de um determinado saber no *corpus* matemático, predomine o *contexto de justificação,* a valorizar o produto final: os teoremas e as demonstrações formais.

O contexto da descoberta diz respeito às "idas e vindas" do desenvolvimento de um dado resultado; ele evidencia as reais dimensões do processo de criação, geralmente não registradas nos livros e artigos de pesquisa: *"O estilo dedutivo esconde a luta, esconde a aventura. Toda a história se evapora, as sucessivas tentativas de formulações do teorema que acompanham o processo de demonstração são fadadas ao esquecimento [...]"*[13]. Ao trazer a dinâmica de "provas e refutações", LAKATOS evidencia os procedimentos da matemática informal em processo de criação, a matemática conhecida pelos matemáticos em sua prática: "*A matemática informal, quase empírica, não progride através de um monótono crescimento no número de inquestionáveis teoremas, mas numa incessante melhoria de suposições, através de especulações e críticas, através da lógica de provas e refutações".* [14]

Os matemáticos depõem: o processo de criação cobra-lhes intenso trabalho intelectual, apoiado na intuição, na experimentação e na superação de falsas formulações. Há grandes diferenças entre o pensamento concentrado num problema e o pensamento que organiza a solução. O primeiro move-se num labirinto de representações mentais, é hesitante, conflitante, muitas vezes inconsciente. Fundeado em raciocínios lógico-inferenciais, a eles não se reduz, como o diz HALMOS:

> *Um matemático, no seu trabalho, faz vagas suposições, visualiza amplas generalizações, e joga-se em conclusões, sem garantias. Ele arranja e rearranja suas idéias e se convence de*

---

[12] Trata-se do teorema que demonstra a fórmula de Euler-Descartes para poliedros: V-A+F=2, onde V = vértices, A = arestas e F = faces.

[13] LAKATOS, I. op. cit., p. 142

[14] LAKATOS, I. op. cit., p. 5.

> *verdades antes de escrever uma demonstração lógica. A convicção não vem de imediato — geralmente vem depois de muitas tentativas, de muito fracassos, de muito desânimo, muitos êrros [...] trabalho experimental é necessário [...] experimentos de pensamento...*[15]

Quando enfim surge a solução, é num esforço consciente, penoso muitas vezes, que o matemático organiza os resultados a que chegou — este é o momento da demonstração formal. A forma pronta e acabada do conhecimento, agora socializada nos livros e revistas de pesquisa, já não testemunha o processo vivo e hesitante de criação. Neste sentido, SCHWARTZ e CONNES, dois expoentes da matemática contemporânea, são contundentes:

> *Certa ocasião procurava demonstrar um teorema e durante oito dias não tive sucesso. Todos os fins de tarde, já fatigado, pensava tê-lo demonstrado, mas no dia seguinte, ao acordar, imediatamente encontrava erros na minha demonstração do dia anterior: no oitavo dia as muralhas caíram e encontrei um contra-exemplo. O teorema que procurava demonstrar era falso e foram suficientes seis linhas para escrever o contra-exemplo. E assim redigi meu trabalho: 'Podemos nos colocar a seguinte questão [...] que é evidentemente falsa como nos mostra, de imediato, o contra-exemplo seguinte [...]* [16]

> *Eu fazia regularmente a mesma caminhada sem progredir um milímitro no meu problema, até que um dia eu tive a impressão de que tudo se esclarecia, o que eu verifiquei na minha mesa de trabalho [...] os elementos caóticos e incontroláveis se organizaram num todo coerente. O mês que se seguiu foi realmente penoso para mim porque eu devia substituir a intuição por uma demonstração rigorosa e assim eu navegava de espanto em espanto: será que não estou enganado ?* [17]

ARNOLD também se refere aos dois processos complementares que levam à produção de conhecimento matemático:

> *O sistema de construção de uma teoria matemática é exatamente o mesmo de qualquer ciência natural. Primeiro nós consideramos alguns objetos e fazemos observações em casos especiais. Então nós procuramos e encontramos os limites de aplicação de nossas observações, procurando contra-exemplos que previnam a extensão demasiada de nossas observações [...] Como resultado nós formulamos a descoberta empírica tão claro quanto possível. Depois disso vem o difícil período de verificar a confiabilidade das conclusões obtidas. Para isto uma técnica especial foi desenvolvida em matemática. Esta técnica é chamada modelagem. Quando construímos o modelo a seguinte idealização é feita: certos fatos, que são conhecidos num certo grau de probabilidade ou com um certo grau de precisão, são considerados absolutamente corretos e aceitos como axiomas. O sentido deste 'absolutamente' é que nós nos permitimos operar com estes fatos de acordo com a regras de lógica formal, declarando como teorema tudo que pode ser assim deduzido.* [18]

---

[15] KING, J. e SCHATTSCHNEIDER, D. (editores) **Geometry turned on**. Washington, USA : Mathematical Association of America Notes 41, 1997. p. 21.

[16] SCHWARTZ, L. **Le Point de Vue de Laurant Schwartz, Les Mathématicians, Pour la Science. Paris** : Édition Française de Scientific American, Dossier Hors-Série, 1994, p. 16.

[17] CONNES, A. **Le Point de Vue de Alain Connes, Les Mathématicians**, **Pour la Science.** Paris : Édition Française de Scientific American, Dossier Hors-Série, 1994, p. 107.

[18] ARNOLD, V. I. **On teaching mathematics**. Russian Math.Surveys, 53:1, 1998. p. 231 – 232.

Em “The Psychology of Invention in the Mathematical Field”,[19] publicado em 1945, HADAMARD oferece interessante discussão sobre o processo de criação matemática, ilustrada por depoimentos de diferentes matemáticos.

HADAMARD identifica, no processo de criação, quatro momentos [20]: *1. preparação* (*preparation*), estágio de intenso e deliberado trabalho intelectual, quando idéias são mobilizadas para a abordagem do problema, ainda sem a perspectiva de solucioná-lo. *2. Incubação* (*incubation*): o problema é deixado de lado temporariamente; não sujeito a atenção consciente, ele permanece sob o *trabalho inconsciente* de combinação de idéias (*unconscious work*); o momento de *incubação* conduz ao momento seguinte, a *iluminação*. *3. Iluminação* (*ilumination*): repentina e inesperadamente, há forte indicação de solução. *4. Trabalho consciente* (*the later conscious work*): finalmente, a solução é expressa em linguagem escrita, já verificadas cuidadosamente as demonstrações que confirmam a inspiração, difusa no momento de iluminação. O novo resultado, em redação precisa e agora sob controle, dá continuidade à investigação. Reinicia-se o processo de criação.

THURSTON [21] destaca como essenciais, no progresso do conhecimento matemático, as dimensões psicológicas e sociais. É mais fácil explicar pessoalmente um teorema: “*freqüentemente, uma solução pode ser comunicada em questão de minutos.* [...] *A mesma prova poderia ser lida e entendida em algumas horas ou talvez em alguns dias[...]*” se publicada num artigo de algumas páginas. Seu argumento:

> *Por que existe tanta diferença na discussão informal, na conferência, no artigo? Na discussão informal as pessoas usam canais de comunicação que estão muito além da linguagem matemática formal. As pessoas fazem gestos, desenham figuras e diagramas, usam efeitos de som e usam a linguagem do corpo [...] Com estes canais de comunicação, podem comunicar muito melhor o que está acontecendo, não somente os aspectos lógicos e lingüísticos, mas também outros aspectos mentais [...] A matemática em algum sentido usa uma linguagem comum: a linguagem dos símbolos, das definições técnicas, dos cálculos e da lógica. Esta linguagem comunica algumas formas de pensamento, mas não todas as formas de pensamento matemático.* [22]

---

[19] HADAMARD, J. **The Psychology of Invention in the Mathematical Field.** New York, NY : Dover Publications, Inc., 1945.

[20] Estes momentos aparecem claramente em experiência relatada por Poincaré: após intenso trabalho sobre um determinado problema, vencido pelo insucesso, abandona-o por algum tempo. Quando seus pensamentos estavam muito longe do problema em questão, surge de forma inesperada forte indicação de solução, sobre a qual trabalha com cuidado, resolvendo de forma satisfatória o problema, motivo de insucesso no primeiro momento de trabalho consciente.

[21] THURSTON, W. **On Proof and Progress in Mathematics.** New York**:** Bulletin of The Americam Mathematical Society, vol. 30, nº 2, 1994.

[22] Ibid, p. 166.

STEWART sinaliza uma mudança na forma de apresentação da matemática, até então sob forte influência do modelo preconizado por BOURBAKI. As "idas e vindas", condutoras das idéias centrais e que culminam nos teoremas, agora passam a merecer registro nas publicações, o que ele refere como postura de "matemático experimental": *"matemáticos experimentais acreditam que as publicações científicas devem contar a história de como tudo aconteceu, e não somente a racionalização que se segue aos eventos que levam à resposta"* [23]. THURSTON, em prefácio de livro seu, indica tal postura:

> *O estilo de exposição deste livro é de alguma forma experimental. A ordem lógica mais eficiente para um assunto é normalmente diferente da melhor ordem para aprendê-lo [...] Numa apresentação formal e lógica do assunto, os leitores tem pouca escolha e devem seguir passivamente atrás do autor [...] Quando nós lemos matemática, nós precisamos de uma mente ativa [...] Nossa intenção no estilo de exposição é encorajar o leitor a pausas, a olhar a volta e a explorar [...] a tomar seu tempo para construir suas próprias imagens mentais.* [24]

GUARNICA [25], em seu estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática, aponta a forte presença, nas salas de aula, das apresentações discursivas. Refere-se a elas como o "*fascínio da técnica e o declínio da crítica*". O *fascínio da técnica* seria o respeito à demonstração que prioriza o teorema enquanto produto final. O *declínio da crítica* refere-se à não discussão do processo gerador da demonstração e à irreflexão sobre a validação do saber matemático.[26]

CURY [27] assinala a estreita relação que há entre as concepções que os professores têm da matemática — *absolutista* ou *falibilista* — e sua atitude didática. Para os *absolutistas, o conhecimento matemático é feito de verdades absolutas e representa*

---

[23] STEWART, I.. **Bye-bye Bourbaki: paradigm shifts in mathematics,** The Mathematical Gazette, volume 80, nº 488. 1996, p. 269.

[24] THURSTON, W. NJ, USA **Three manifold geometry and topology**. NJ, USA : Princeton Press, 1997. p. 5.

[25] GARNICA, A .V. M. **Fascínio da técnica, declínio da crítica — um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática**. Rio Claro, SP : UNESP, tese de doutorado. 1995.

[26] Vale aqui destacar a pertinência desse estudo — técnica versus crítica — mas ressalvando-se a pertinência da leitura dicotômica assumida pelo referido autor quando ele afirma que "*a prova rigorosa é importante, embora tal importância possa ser lida de duas maneiras distintas, técnica ou criticamente. Cada uma destas leituras é plasmada em concepções próprias de setores bastante diferenciados: a leitura técnica funda-se na prática científica da Matemática enquanto a crítica se estabelece como ponto de vista a ser defendido pela Educação Matemática*" (p. 230). Pelos depoimentos inseridos nesta seção, vê-se que os matemáticos estão longe de assumir esta visão estritamente técnica de uma demonstração.

o domínio único do conhecimento incontestável, e eles priorizam na sala de aula a apresentação de um produto sistematizado e logicamente organizado, desconsiderando os erros dos alunos como parte natural do processo de aprendizagem e enfatizando as soluções corretas, onde não há espaço para a reflexão. Já para os *falibilistas, o conhecimento matemático é visto como falível, corrigível e em contínua expansão,* como qualquer outro tipo de conhecimento humano — em sua concepção, há espaço para as "idas e vindas" dos alunos em situação de aprendizagem, e o erro é considerado relevante para o avanço na construção de conhecimento matemático. Essa segunda atitude caracteriza concepção em sintonia com a dialética de "provas e refutações" proposta por LAKATOS.

O processo de criação matemática é complexo. Tomando-se como pressuposto que para aprender matemática são necessárias vivências similares às que produzem tal conhecimento, os *contextos da descoberta* e *da justificação* tornam-se de extrema importância nas situações de aprendizagem. Neles acontece o "pensar matemático", caracterizado por experimentar, interpretar, visualizar, abstrair, conjeturar, errar e demonstrar, muito superior à aceitação, passiva, de conhecimentos apresentados como seqüência bem ordenada de "fatos" e argumentos "prontos". Não resta dúvida que apresentações formais e discursivas de saberes matemáticos, pelo professor, esterilizam, no aluno, sua capacidade de construir saberes semelhantes. São as ativas atitudes dos alunos que podem garantir a construção de conhecimento.

Mas que atitudes são estas? Esta questão é objeto de discussão na próxima seção deste capítulo. WILES descreve sua busca, incessante e bem sucedida, da demonstração do último teorema de Fermat:

> *Entramos na primeira sala da mansão e está escuro. Completamente escuro. Caminhamos com cuidado, esbarrando na mobília, mas gradualmente aprendemos a posição de cada móvel. Finalmente depois de seis meses de exploração, você encontra o interruptor de luz, ascende as lâmpadas e tudo é iluminado. Você pode ver exatamente onde está. Então você avança para o aposento seguinte e passa outros seis meses no escuro. Assim, cada um desses períodos de iluminação, embora às vezes sejam momentâneos, às vezes durem um período de um dia ou dois, representam o clímax dos esforços e não poderiam existir sem os muitos meses de tropeços na escuridão que os antecedem.* [28]

---

[27] CURY, H. N. **As concepções de matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos**. Porto Alegre : FACED / UFRGS, Tese de Doutorado, 1994.

[28] SINGH, S. op. cit., p. 242.

2.2 O processo de construção de conhecimento

Como ilustra a seção anterior, grandes são as diferenças entre o pensamento voltado à criação matemática e o que organiza esta criação. Quando se pretende, em situações de aprendizagem, um processo similar ao da produção do saber matemático, os aportes da psicologia são valiosos para a compreensão da dinâmica que se estabelece entre funcionamentos cognitivos e construção de conhecimento.

A concepção de situação didática a ser proposta como parte experimental desta tese baseia-se fortemente na teoria psico-genética de PIAGET, mas também leva em consideração trabalhos mais recentes inseridos na linha sócio-genética. (PERRET-CLERMONT, NICOLET, entre outros). Tem-se em vista uma situação didática em que "o apreender" depende, fundamentalmente, das ações dos alunos e dos níveis de desenvolvimento cognitivo, mas que também toma como possibilidade a "versatilização" dos processos cognitivos e até mesmo o desenvolvimento das estruturas lógicas como decorrência da superação dos conflitos que perpassam o processo de construção do saber matemático.

2.2.1 Aspectos cognitivos

Se, por um lado, a teoria de PIAGET proporciona subsídios importantes para o entendimento dos funcionamentos cognitivos que levam à construção de conhecimento, por outro é importante não se perder de vista as especificidades da aprendizagem de um saber científico. A teoria piagetiana mapeia a evolução cognitiva do indivíduo em situações de interação espontânea com seu objeto de conhecimento [29], situações diferentes das apresentadas no âmbito da educação. A preocupação principal de PIAGET é de natureza epistemológica [30] e ela só entra no terreno da psicologia por-

[29] O método clínico, adaptação do método psicanalítico, utilizado por PIAGET em seus experimentos, evidencia essa perspectiva. O entrevistador deixa-se guiar pelas condutas do sujeito, sem provocar ou antecipar respostas. Já que a questão central é a compreensão das estruturas e dos processos cognitivos que levam ao conhecimento, não é propósito do entrevistador provocar a aprendizagem e assim ele não interfere no raciocínio do sujeito entrevistado.

[30] As inquietações de PIAGET originam-se na filosofia e orientam-se às grandes questões da epistemologia: a natureza do espaço, a natureza do tempo, a causualidade, o número e a moral, dentre outras categorias kantianas. Seus experimentos sempre procuram acompanhar a formação desses conhecimentos. O próprio PIAGET manifesta o quanto a epistemologia genética é essencialmente uma *filosofia experimental* ao adotar comentário da American Psychological Association como interpretação correta de seus trabalhos: *Ele (*PIAGET*) abordou questões até então exclusivamente filosóficas de uma forma*

que o processo de construção de conhecimento depende de funcionamentos de natureza psicológica:

> *Só considerarei o desenvolvimento propriamente psicológico da criança, em oposição a seu desenvolvimento escolar ou a seu desenvolvimento familiar, quer dizer que insistirei principalmente no aspecto espontâneo desse desenvolvimento, e ainda o limitarei ao desenvolvimento propriamente intelectual, cognitivo. Para efeito, podemos distinguir dois aspectos no desenvolvimento intelectual da criança. Por um lado, o que podemos chamar de aspecto psico-social, quer dizer tudo que a criança recebe do exterior, aprende por transmissão familiar, escolar, educativa em geral; e depois, existe o desenvolvimento que podemos chamar de espontâneo, que chamarei de psicológico, para abreviar, que é o desenvolvimento da inteligência mesma: o que a criança aprende por si mesma, o que não lhe foi ensinado, mas o que ela deve descobrir sozinha* . [31]

Esquematicamente, os seguintes pontos da teoria piagetiana são relevantes ao contexto deste tese [32]:

a) o conhecimento

O conhecimento não é algo predeterminado, nem por estruturas internas do sujeito, nem por características preexistentes no objeto, mas constitui-se a partir das ações do sujeito sobre o meio, ações estas que se internalizam e se organizam, desencadeando um processo evolutivo de estruturas lógicas — de menos acabadas para mais completas — com conseqüente ascensão de patamar de conhecimento.

b) as estruturas cognitivas

A ação é a força motora do desenvolvimento das estruturas cognitivas. Um dos princípios da teoria de PIAGET é que, desde os primórdios do desenvolvimento, as ações do sujeito evidenciam formas de organiza-

---

decididamente empírica e constituiu a epistemologia como ciência separada da filosofia, mas vinculada a todas as ciências humanas (em PIAGET, J. **Epistemologia Genética**. São Paulo : Martins Fontes, 1990. p. 2). É no pensamento filosófico divergente do século XVIII que estão as raízes do trabalho de PIAGET. Em Kant, no final do século XVIII, há a busca de conciliação entre as correntes filosóficas empíricistas — Locke e Hume — e as racionalistas — Descartes e Leibnitz, quando determinadas categorias do pensamento são admitidas como equipamento mental existente *a priori* e, através delas, a mente humana coordena e dá sentido às suas experiências (GARDNER, H. **The Mind's New Science — a history of the cognitive revolution**. New York : Basic Books, Inc., Publishers, 1987). PIAGET, ao substituir os métodos especulativos da epistemologia filosófica por um método científico — o método psicogenético — busca evidenciar um processo evolutivo de construção das categorias de pensamento tomadas por Kant como categorias *a priori*.

[31] PIAGET, J. **Problemas de Psicologia Genética**, em Piaget - Os Pensadores. São Paulo SP : Editora Victor Civita, 1978, p. 211.

[32] Nesta considerações tomamos como referência bibliográfica básica: PIAGET, J**. Desenvolvimento da Inteligência.** Rio de Janeiro RJ : Zahar Editores, Segunda edição, 1983. PIAGET, J. **Problemas de...** PIAGET, J. **Epistemologia Genética**. São Paulo SP : Martins Fontes, 1990.

ção: não se apresentam de forma caótica, desordenada e sem conexão, mas revelam, ao longo de seu desenvolvimento, estruturas lógicas cada vez mais ricas. PIAGET destaca tanto um tempo de desenvolvimento quanto uma imutável sucessão de estágios. O tempo para o desenvolvimento pode até variar, mas não a ordem de sucessão dos estágios, indicando a existência de uma lógica inerente à coordenação das ações a acompanhar o sujeito em processo de desenvolvimento.

No início do desenvolvimento — o *estágio sensório-motor* — as ações sobre objetos materiais e exercícios de repetição espontânea levam à coordenação e generalização das ações e, assim, constituem as primeiras ferramentas intelectuais — *os esquemas.* Neste estágio, pela ausência de um sistema de representação, a criança não consegue prever o resultado final de uma seqüência de ações: ela precisa realizar a seqüência.

Com o desenvolvimento da função representativa, e particularmente da linguagem, muda a natureza das ações, que passam a ser ações interiorizadas — este é o *estágio pré-operatório*. A criança representa suas ações de caráter sensório-motor e reestrutura no plano do pensamento o que já estava estruturado no plano das ações sensório-motoras; no sistema de representação, virtualizam-se as ações sensório-motoras — estas são *as operações.*[33] Se antes o entendimento constituía-se na ação física, ele agora se estabelece também no sistema de representação, possibilitando os experimentos de pensamento. E mais, se no estágio anterior os esquemas dirigiam-se para o êxito da ação e não para a própria ação, agora há o entendimento da própria ação e da coordenação das ações; trata-se de um primeiro distanciamento das experiências sensoriais, na forma de pensamento simbólico e pré-conceitual.

No terceiro estágio do desenvolvimento, o *operatório-concreto*, ampliam-se as possibilidades de coordenação das operações e, assim, as estruturas lógicas são enriquecidas. O aparecimento da reversibilidade de

[33] Nas palavras de Piaget: *"chamaremos operações ações interiorizadas, quer dizer executadas não mais material, mas interior e simbólicamente e ações que podem ser combinadas de todas as maneiras; em particular, que podem ser invertidas, que são reversíveis"* (PIAGET, J. **Problemas de...** p. 216).

uma operação caracteriza especialmente este estágio, quando a criança age sobre representações mas ainda precisa de objetos concretos como suporte aos experimentos de pensamento.[34] Trata-se de estrutura lógica que ainda não dá conta do pensamento puramente abstrato; e mais *"a criança não constrói sistemas [...] ela pensa concretamente, ela trata cada problema de forma isolada e não integra sua solução utilizando-se de teorias gerais, de forma a abstrair um princípio comum".*[35]

O último estágio de desenvolvimento — o *estágio operatório-formal* — é a constituição do pensamento abstrato, independente de ações e transformações reais; é o raciocínio sobre *o possível* e *o necessário*, a capacidade de pensar com hipóteses daí tirando novas relações — os raciocínios hipotéticos-dedutivo; é o raciocínio proposicional — operações sobre operações; são as generalizações, significando a possibilidade de teorizar e colocando o sujeito para além do seu então conhecido universo de experiências imediatas. Nas palavras de PIAGET:

> *[...] estabelecem-se relações de coordenação [...] de uma maneira que se aparenta cada vez mais com os procedimentos do próprio pensamento científico [...] Este último nível apresenta uma característica impressionante em continuidade: é na medida em que se interiorizam as operações lógico-matemáticas do sujeito graças às abstrações reflexionantes que constroem operações sobre outras operações, e na medida que é alcançada esta extemporaneidade característica do conjunto de transformações possíveis e já não apenas reais, que o mundo físico em seu dinamismo espaço-temporal [...] começa a ficar acessível a uma leitura objetiva de alguma de suas leis e, sobretudo, a explicações causais que obrigam o espírito a uma constante descentração em sua conquista de objetos.* [36]

Nesse quadro evolutivo de estruturas lógicas, é no *estágio operatório-formal* que se constituem as capacidades cognitivas que entram em jogo, contundentemente, na aprendizagem da geometria como um mo-

---

[34] PAPERT tece críticas ao sentido que freqüentemente é dado a palavra "concreto" na linha educação construtivista. Ela é tomada no senso comum e, desta forma, a livre manipulação de material concreto é tomada como garantia para o aprendizado. Longe disto está o sentido de "concreto" na teoria piagetiana, como o mostra PAPERT: *"Piaget está fazendo algo muito complexo e muito mais interessante quando descreve o pensamento de crianças em idade escolar como 'concreto' [...] significados serão mal-entendidos a menos que a pessoa perceba que as palavras adquirem um sentido especial nas teorias e que, não raro, contrariam a natureza do senso comum [...] O construcionismo, minha reconstrução pessoal do construtivismo [...] atribui especial importância as construções no mundo como um suporte para aquelas que acontecem na mente"* (PAPERT, S., 1993: Children's Machine, Harvester Wheatsheaf, New York, p.138 e p.142).

[35] PIAGET, J. **Six Psychological Studies**. New York : Random House, Inc., 1968, p.61.

[36] PIAGET, J. **Epistemologia**... p. 48, 50.

delo hipótetico-dedutivo. Mas, nas situações de ensino e aprendizagem, muitas vezes estas capacidades ainda estão em estado potencial, haja visto as recorrentes dificuldades que manifestam os alunos, como se constatará no Capítulo 3.

c) os funcionamentos cognitivos

Inspirado no desenvolvimento biológico, PIAGET mostra um processo similar de desenvolvimento cognitivo, destacando uma progressão extremamente regular e comparável aos estágios de uma embriogênese. Para explicar esse processo de desenvolvimento, ele introduz primeiramente os conceitos de *assimilação, acomodação* e *adaptação.* Estes conceitos mostram como os desequilíbrios entre experiência e estruturas mentais provocam o desenvolvimento de estruturas cada vez mais ricas, em que um novo objeto de conhecimento é assimilado pelo sujeito através das estruturas já constituídas, sendo o objeto entendido de uma certa maneira. Quando o "novo" produz conflitos internos, esses são superados pela acomodação das estruturas cognitivas, e o objeto passa a ser entendido de outra forma. O equilíbrio entre *assimilação* e *acomodação* — a *adaptação* — leva ao desenvolvimento das estruturas cognitivas e à construção de conhecimento.

Nestes primeiros conceitos que expõem, sobretudo, o desenvolvimento decorrente das interações do sujeito com o meio físico, o matiz é biológico. Mas, na teoria piagetiana, os conceitos também evoluem. Para explicar o desenvolvimento das estruturas decorrentes das interações do sujeito com o meio, que não se restringe aos objetos mas envolve conceitos, PIAGET fala em *equilibração.* Nos últimos trabalhos, ele avança nesse conceito e passa a falar em *abstração empírica e abstração reflexionante (réfléchissante)* — e seu caso particular de abstração *pseudo-empírica* —, e é especialmente com o conceito de *abstração reflexionante* que PIAGET procura explicar o funcionamento cognitivo que garante a evolução das estruturas lógicas.[37]

[37] RAMOZZI-CHIAROTTINO, em seu livro **Psicologia e Epistemologia Genética de Jean Piaget**, São Paulo SP : Editora Pedagógica e Universitária, 1987, indica esta linha evolutiva de

Mediante a *abstração empírica,* o sujeito isola propriedades observáveis nos objetos. Informações tiradas do objeto, como, por exemplo, peso e cor, são noções abstraídas através da percepção, portanto empíricas. Mas PIAGET deixa claro que a *abstração empírica* não se reduz à simples leitura de observáveis: *"os fatos só são acessíveis se assimilados pelo sujeito, o que pressupõe a intervenção de instrumentos lógico-matemáticos de assimilação construtora das relações que enquadram ou estruturam esses fatos e do mesmo modo os enriquecem*".[38]

Quando propriedades não observáveis são abstraídas de objetos, trata-se de *abstração pseudo-empírica,* caso particular de *abstração reflexionante,* especialmente presente no *estágio operatório-concreto.* É quando o pensamento age sobre representações mentais, mas ainda depende de materialização nos objetos para que, através das ações do sujeito, se transforme e se enriqueça.[39]

Mediante a *abstração reflexionante*, o sujeito coordena suas *ações* e depois suas *operações*, para delas abstrair características generalizadoras, transformando em objeto de pensamento o que, em patamar inferior, era utilizado de forma implícita: *"o que era instrumento a serviço do pensamento em seu processo, torna-se um objeto de pensamento e é, portanto,tematizado,em lugar de permanecer no estado instrumental"* [40]. A projeção (*réfléchissement*), num patamar superior, daquilo que é colhido num patamar inferior e nesse se reconstrói, reorganiza a construção do patamar inferior sobre o qual se apoiou (*réflexion*), tornando-a parte de uma nova totalidade. PIAGET fala também em *abstração refletida* (*abstraction réfléchie*) — *"chamaremos de abstração refletida o resultado de uma abstração reflexionante, assim que se torna consciente"*; é uma meta-reflexão, no sentido de ser instrumento de reflexão sobre a reflexão,

---

conceitos nos trabalhos de PIAGET: inicialmente há o conceito de adaptação, depois o de equilibração e finalmente o conceito de abstração reflexionante.

[38] PIAGET, J. **A Epistemologia...** p. 29.

[39] É a situação, por exemplo, em que a criança se apoia no ábaco para realizar suas primeiras operações numéricas; o ábaco é um objeto observável, mas as propriedades que estão sendo abstraídas dependem das ações da criança no ábaco.

[40] PIAGET, J. 1995: **Abstração Reflexionante**. Porto Alegre RS : Editora Artes Médicas, 1995, p. 275 e p.274.

e assim permanece em retardo em relação ao processo de abstração reflexionante.

Dada a complexidade do conceito de *abstração reflexionante*, vale a transcrição, mesmo extensa, das palavras de PIAGET:

Existe um outro tipo de abstração, a abstração reflexionante, quando abstrai-se não dos objetos mas das próprias ações. O importante é a coordenação das ações, que tem origem nas próprias ações do sujeito [...] Por que este processo de abstração reflexionante seria uma fonte de novidades e uma fonte de atos intelectuais criativos? Nisso existem dois aspectos que são distintos, mas de qualquer forma inseparáveis. Existem dois sentidos para a palavra reflexão. O primeiro é um sentido físico. Existe uma reflexão física, acontecendo aqui no sentido de reflexão num espelho. Existe uma transposição, simples como a reflexão num espelho, de um nível inferior de construção intelectual para um nível superior de construção intelectual. Por exemplo, considere o movimento da ação à representação – isto é, do ser capaz de fazer alguma coisa ao ser capaz de pensar sobre o fazer esta coisa. Neste sentido, o movimento de tornar-se consciente de suas ações é uma reflexão do nível de ação ao nível de representação.

Entretanto, um outro tipo de reflexão está envolvido, no sentido de reflexão mental— isto é, quando o sujeito reflete. Neste sentido, o sujeito não está somente refletindo em nível superior, mas está reconstruindo em nível superior o que já existia em um em nível inferior. Agora, o nível superior é sempre mais amplo, é um campo mais abarcador, de tal forma que quando o sujeito reflete no nível superior, é obrigado a enriquecê-lo com novos elementos [...]" [41]

A partir dos conceitos de *abstração reflexionante* e *abstração refletida*, PIAGET explica a construção evolutiva de estruturas cognitivas a partir da reorganização de elementos retirados de estruturas anteriores. É assim que se constituem novas capacidades intelectuais e que, concomitantemente, dá-se a ascensão à novo patamar de conhecimento:

[...] a abstração reflexionante é fonte contínua de novidades, porque atinge novas reflexões sobre cada um dos planos sucessivos do reflexionamento e estes se engendram sem que sua seqüência seja jamais acabada [...] há continuidade de engendração, e, sobre cada patamar, a reflexão reorganiza um novo sistema, com progresso da coerência e da integração, até a apreensão da razão das estruturas elaboradas anteriormente [...].

Assistimos a um processo em espiral: todo reflexionamento de conteúdos supõe a intervenção de uma forma, e os conteúdos assim transferidos exigem a construção de novas formas devido à reflexão [...] Há uma alternância ininterrupta de reflexionamentos → reflexões → reflexionamentos; e (ou) de conteúdos → formas → conteúdos reelaborados → novas formas, etc..., de domínios cada vez mais amplos, sem fim e, sobretudo , sem começo absoluto. [42]

---

[41] PIAGET, J., 1981 **Creativity**, em Gallagher, J. e Reid, D. The learning theory of Piaget and Inhelder, Monterey, California,: Brooks/Cole, 1981, p. 225. Embora no texto original só apareça a expressão "reflexive abstraction", tomamos "abstração reflexionante" como a tradução pertinente, nisso levando em consideração o sentido que lhe é dado por PIAGET ao longo do texto.

[42] PIAGET, J. **Abstração ...** p.205, 277.

A Figura 2.1 ilustra a estreita relação entre o avanço nos estágios de desenvolvimento e os funcionamentos cognitivos. O enriquecimento contínuo das estruturas lógicas imbrica-se com o crescente espaço das ações que envolvem *abstrações reflexionantes*, mas sem que desapareçam as *abstrações empíricas*.

Figura 2.1
Estruturas lógicas e funcionamento cognitivos

Estes conceitos — *abstração reflexionante e abstração refletida* — esclarecem o comportamento dos alunos quando em situação de reconstrução de saber matemático: "*todos os atos de criação intelectual são processos de abstração reflexionante [...] Existe uma transposição, de um nível inferior de construção intelectual para um nível superior de construção intelectual". [43]*

Assim funciona a transposição dos patamares de conhecimento, na direção de explicações mais generalizadoras e, portanto, mais satisfatórias, como no caso da transposição da geometria empírica para a geometria dedutiva. PIAGET indica, em diferentes trabalhos, a presença das *abstrações reflexionantes* no processo de criação em matemática [44]: "*do ponto de vista psicológico, novas construções matemáticas procedem através de abstrações reflexionantes (o que nos leva a supor que toda criação matemática expande o desenvolvimento mental a níveis cada vez mais elevados"); [45]* ou ainda "*a matemática é um modelo de criatividade que apoia-se na abstração reflexionante [...] Toda a história da matemática é uma história de abstrações reflexionantes"*

[43] PIAGET,J. **Creativity**, em Gallagher, J. e Reid, D. (1981, p. 225.)

[44] Nas traduções para o inglês dos trabalhos de Piaget, aqui tomados como referência, só aparecem os termos 'reflexive abstraction' e 'reflective abstraction' e, pelo contexto, eles correspondem ao conceito de *abstração reflexionante*. A título de ilustração, destacamos, do artigo citado na nota acima, frase em que 'reflexive abstraction' tem o sentido de *abstração reflexionante*: "*There is another kind of abstraction, reflexive abstraction, where you abstract not from objects but from your actions*"; traduzido: "Existe um outro tipo de abstração, a abstração reflexionante, onde as abstrações não são sobre os objetos mas sobre as ações", p.224.

[45] PIAGET, J. e BETH, E. **Mathematical Epistemology and Psychology**. Dordrecht, Holland : D.Reidel Publishing Company, 1966, p.205.

[46]. Em certos momentos, PIAGET é categórico: "*a abstração reflexionante suporta e dá vida ao imenso edifício de construções lógico-matemáticas*". [47]

Há exemplos reveladores da presença destes funcionamentos no avanço do conhecimento científico.

Na matemática: certas noções são utilizadas muitas vezes de forma instrumental, sem que haja tomada de consciência de sua essência teórica. Após um processo mais ou menos longo, o conhecimento instrumental torna-se objeto de reflexão e então emerge a generalidade constitutiva de novo objeto matemático. É assim que, na virada do século XVIII, os matemáticos começam a trabalhar com transformações que conservam determinadas propriedades e operações, estando ainda latentes as propriedades que viriam a caracterizar o conceito de grupo apresentado por Caley em 1854.

A história do desenvolvimento da geometria também revela um processo de sucessivas abstrações reflexionantes e refletidas. Nascida na antigüidade como ciência prática para a solução de problemas de medidas, com os gregos ela se faz conhecimento de caráter abstrato e culmina na sistematização do "Elementos de Euclides", que toma como ponto de partida axiomas intuitivamente indiscutíveis, pois inspirados pelo mundo físico, a partir dos quais novas verdades são estabelecidas mediante raciocínios dedutivos. Com as geometrias não-euclidianas do século XIX, tem-se a geometria extremamente abstrata cuja escolha de axiomas não mais se baseia na intuição informada pela realidade imediata.

Outras vezes, diferentes teorias agregam-se como casos particulares de uma teoria generalizadora. KLEIN [48], no século XIX, mostra como diferentes geometrias podem ser entendidas dentro de sua teoria de grupo de transformações. [49]

Na física, modelos matemáticos são refinados, elevando o patamar de conhecimento de determinado fenômeno:[50] Galileu apresenta a primeira descrição matemática do movimento de objetos na presença da gravidade, Newton mostra como as mesmas leis da física que agem sobre os objetos terrestres também agem sobre os ob-

---

[46] PIAGET, J. **Creativity**, em Gallagher, J. e Reid, D. (1981, p. 227.) Neste artigo são destacados três momentos da história que ilustram um sucessivo processo de abstrações: a matemática grega, no séc. III A.C; o desenvolvimento da álgebra, no séc. XVII; a teoria de grupos, com Galois, no final do séc. XIX, e seu frutuoso desenvolvimento no séc. XX.

[47] Apud DUBINSKY, E. **Reflective Abstraction**, em TALL, D. (ed) Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht, The Nederlands : Kluwer Academic Press, 1991, p. 98.

jetos celestes e, com a teoria da relatividade geral, Einstein esclarece conceitos problemáticos das teorias anteriores mas preservando, no seu aspecto explicativo geral e sob condições particulares, o bom funcionamento da explicação newtoniana.

Em discussão sobre a matemática na descrição do mundo, CONNES [51] dá indicação deste processo de reflexionamentos e reflexões. Frente a pergunta — em uma teoria mais evoluída poderão aparecer diferentes categorias de números? — responde que isso é muito provável, pois na medida em que a noção de número real advém de experimentações no espaço físico, avanços nas categorias de números poderão acontecer com a melhoria de recursos para investigação experimental (e refere-se especialmente aos paradoxos da mecânica quântica).

Mas cabe ressaltar: não é só a *abstração reflexionante* que permeia o processo de construção de conhecimento. Ele também depende de *abstração empírica* quando se colhem informações, e é a *abstração reflexionante* que estrutura e organiza as informações quando se busca a coerência explicativa: "*a abstração reflexionante é essencialmente estruturante, enquanto que a abstração empírica fornece os dados* [...]".[52] A *abstração reflexionante* acompanha sobremodo os processos de generalização e teorização que conduzem o fenômeno investigado a novo grau de entendimento: *"a abstração reflexionante purifica-se sempre, e cada vez mais, em função de seu próprio mecanismo de reflexão sobre reflexões, enquanto que a abstração empírica não consegue realizar progressos em refinamento e objetividade, senão apoiando-se, cada vez mais fortemente, sobre a colaboração necessária da abstração reflexionante".* [53] O funcionamento destes dois tipos de abstração é intrincado e complexo: partindo das

---

[48] KLEIN, F. **Le Programme d'Erlangen – considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes**. Paris : Gauthier-Villars Ëditeurs, 1974.

[49] A geometria euclidiana é vista através de grupo de transformações que preservam comprimentos e ângulos; a geometria afim como grupo de transformações que preserva linearidade e paralelismo; já o grupo de transformações que preserva simplesmente as retas corresponde à geometria projetiva; e há finalmente o grupo que corresponde a topologia em que os invariantes dizem respeito a deformações contínuas. Partindo-se da estrutura mais rica e com forte senso intuitivo — a geometria euclidiana — gradativamente enfraquecem-se as exigências sobre invariantes, chegando-se então a estrutura mais elementar e mais abstrata, a topologia.

[50] GLEISER, M. **O mistério gravitacional e as perguntas da ciência**. Jornal Folha de São Paulo, Caderno Mais, 28/02/98.

[51] CONNES, A., LICHNEROWICZ, A., SCHÜTZENBERGER, M., 2000: **Triangle de pensées**. Paris : Editions Odile Jacob, 2000.

[52] PIAGET, J. e GARCIA, R. **Psicogénese e História das Ciências**. Lisboa : Publicações Dom Quixote, 1987, p. 212.

abstrações empíricas, é com as abstrações reflexionantes que se constróem as teorias, como descreve ARNOLD [54] o processo de criação em matemática.

O alcance do trabalho de PIAGET no processo educativo está em sua motivação epistemológica — "o que é o conhecimento? como se passa de um conhecimento menor a um conhecimento maior?" Sua teoria procura responder a estas questões através de exaustiva análise do processo evolutivo — do nascimento à adolescência — da construção do conhecimento espontâneo. Mas o objetivo maior de PIAGET é entender como as teorias evolucionam, com o tempo, a bagagem cultural da humanidade. Ele vê, como paralelos, dois processos: as estruturas cognitivas evolvem de formas menos acabadas a formas mais acabadas, o que explica a evolução do conhecimento espontâneo; e as teorias progridem de um menor para um maior conhecimento. A evolução, em ambos os casos, ocorre por sucessivas *abstrações reflexionantes* e *refletidas*. O acesso à novo estágio cognitivo — ou patamar de conhecimento — dá-se com a reconstrução do conhecimento adquirido nos níveis precedentes, ou seja, "*é reorganização dos conhecimentos à luz das informações obtidas de um modo novo e de uma reinterpretação dos conceitos-base*" .[55]

Na teoria piagetiana, o modelo de sujeito é o epistêmico, cujo último estágio de desenvolvimento cognitivo é o *operatório-formal*. Tratando-se de um modelo, nada garante que os sujeitos reais, em situação de aprendizagem, estejam em tal estágio ou funcionalmente aptos a construir conhecimento matemático. Seus recursos intelectuais encontram-se, muitas vezes, em estado potencial, passíveis de serem colocados em ação mediante provocação. Como assinala RAMOZZI-CHIAROTTINO:

> *Piaget tratou do sujeito epistêmico, do sujeito do conhecimento, e não do sujeito psicológico ou dos indivíduos concretos. Os estágios indicam as possibilidades do ser humano, não dizem respeito à todos os indivíduos. As observações de Piaget [...] demonstram que o ser humano tem possibilidades genéticas de raciocinar sobre relações e de levantar hipóteses [...] mas isto não quer dizer que necessariamente todos cheguem lá. [...] se muitos ou mesmo a maioria dos seres humanos não chega a raciocinar sobre hipóteses, isto não invalida a afirmação piagetiana [...] Piaget falou em possibilidade e não naquilo que se passa concretamente, com todos os indivíduos considerados particularmente.* [56]

---

[53] PIAGET, J. **Abstração...** p.287.

[54] Ver seção 2.1, p. 12.

[55] PIAGET, J. e GARCIA, R. Op. cit., p. 111. É especialmente neste livro, primeira edição em 1983, que são dadas respostas às questões epistemológicas.

[56] RAMOZZI-CHIAROTTINO, Z. Op. cit., p. 31.

Das atitudes didáticas dependem a potencialização ou a esterilização das capacidades intelectuais presentes em todos os indivíduos, atualizáveis ou não em função das solicitações do meio. O próprio PIAGET, em diferentes momentos, enfatiza que o caminho que leva à constituição destas capacidades, em particular ao pensamento matemático formal com suas especificidades, merece atenção:

> *Nós percebemos que a psicologia do pensamento matemático depende, muito, de diferentes sistemas lógicos, diferentes dos usuais [...] Lendo Johannot, somos obrigados a reconhecer, recorrentemente, que tanto nos adolescente como nas crianças, uma coisa é compreender uma operação sobre 'realidades' e outra coisa é traduzi-las em linguagem abstrata e operar somente com os símbolos desta linguagem especial . E sobretudo percebemos que mesmo já tendo tomado forma o pensamento formal, quer dizer, este modo de raciocínio que age sobre 'proposições' e não mais sobre 'realidades' manipuláveis, ainda subsistem muitas etapas antes que o sujeito possa assimilar o ensinamento da matemática (...) Ainda existem sucessivos patamares de abstração; dito de outra forma, estágios intermediários entre as primeiras operações formais e aquelas que atingem uma verdadeira generalização.* [57]

No último capítulo de seu livro "Da lógica da criança à lógica do adolescente", PIAGET comenta:

> *[...] é surpreendente que tão pouco trabalho tenha sido realizado quanto ao pensamento do adolescente [...] Os poucos estudos minuciosos a respeito são muito valiosos, mas até agora não nos permitiram ter um quadro coerente de conjunto [...] Alguns trabalhos sobre o pensamento matemático e físico dos adolescentes mostram principalmente os resíduos do pensamento da criança que encontramos durante a adolescência, e isso por uma espécie de permanência dos problemas do plano concreto num plano mais abstrato.* [58]

Na construção do conhecimento matemático, é relevante o aspecto funcional, no qual combinam-se os processos de evolução das estruturas e de evolução do conhecimento. A face estrutural da inteligência revela as capacidades prévias dos alunos, e o ângulo funcional permite entender o processo de construção do conhecimento. A

---

[57] Em prefácio do livro JOHANNOT, L. 1947: **Le Raisonnement mathématique de l'adolescent**. Paris : Delachaux e Niestlé, 1947. Embora sendo o trabalho de JOHANNOT nada recente, merece destaque por se tratar de uma investigação cuidadosa e bem documentada da evolução do pensamento algébrico nos adolescentes, onde se torna claro que o raciocínio algébrico evolui, entre 13 e 18 anos, de comportamentos ainda próximos daqueles das crianças — de natureza operatório-concreto — para o que seria o raciocínio lógico da fase operatório-formal, em que operações sobre sistemas de representação abstratos (no caso a linguagem da álgebra) tornam-se possíveis. Esta evolução se evidencia na forte relação que existe entre a natureza do material que dá suporte à representação de um problema algébrico e o sucesso na sua resolução (o que se torna muito explícito ao longo das entrevistas documentadas): alunos, em torno de 13 anos, tem sucesso na resolução quando usam bastões de madeira; depois passam para diagramas representativos da situação, para então finalmente resolver o problema, com sucesso, através de representação algébrica, isto em torno dos 18 anos. O trabalho evidencia a necessidade de diferentes níveis de tratamento didático para um mesmo problema (de tratamento concreto à tratamento abstrato), em função dos diferentes níveis de estrutura lógica em que se encontram os alunos, para que assim possam dar conta dos raciocínios que levam à resolução do problema.

questão é: como criar situações didáticas provocadoras, nos alunos, dos funcionamentos cognitivos que levem à construção de conhecimento matemático e que, ao mesmo tempo, conduzam ao enriquecimento de suas estruturas lógicas? O meio ambiente, como provocador de mudanças cognitivas e de ascensão de patamares de conhecimento, sugere algumas respostas.

A teoria piagetiana contempla, principalmente, o processo individual de construção de conhecimento. Na obra de PIAGET há diversas referências ao papel do meio no desenvolvimento do sujeito: *"a construção progressiva das operações intelectuais supõe uma interdependência crescente entre os fatores mentais e as interações interindividuais",* [59] embora investigações mais específicas não tenham sido por ele perseguidas.

É na linha de pesquisa sócio-genética [60] da psicologia, estabelecida nos anos 80 na escola de Genebra como desdobramento natural do trabalho de PIAGET, que principia a busca: que complexa articulação há entre ambiente e desenvolvimento da inteligência individual?

> *Nós nos engajamos, no contexto da psicologia socio-genética, na tentativa de refutar o desafio que se coloca como alternativa ao estudo empírico: 'desenvolvimento endógeno ou transmissão social?' [...] temos o projeto de colocar em evidência empírica quais são os processos mediadores que fazem com que aspectos sociais provoquem construções teóricas, afetem e até mesmo suscitem ou construam os processos cognitivos [...]* [61]

O pressuposto dessa linha de pesquisa é a impossibilidade de isolarem-se as dinâmicas sociais e culturais dos comportamentos e estratégias dos sujeitos, cabendo investigar-se o encontro dos processos psicológicos individuais com as regulações sociais advindas das interações entre sujeitos pensantes. Como modelo descritivo de desenvolvimento da inteligência, as investigações retém os aspectos construtivos e estruturais da teoria piagetiana. Sua originalidade reside na abordagem funcional do desenvolvi-

---

[58] PIAGET, J. e INHELDER, B. **Da Lógica da Criança à Lógica do Adolescente**. São Paulo SP : Livraria Pioneira Editora, 1976, p. 249.

[59] PIAGET, J. 1973 : **Estudos Sociológicos**. Rio de Janeiro RJ : Editora Forense, 1973, p. 29.

[60] Esta linha de pesquisa também tem sido referida na literatura como linha sócio-construtivista, como por exemplo em GARNIER, C., BEDNARZ, N. e ULANOVSKAYA, I.. (editores) **Após Vygotsky e Piaget – perspectivas social e construtivista**. Porto Alegre RS : Editora Artes Médicas, 1996.

[61] PERRET CLERMONT, A. N. e NICOLET, M. (editores) **Interagir e Connaître : enjeux et régulations sociales dans le développement cognitif**. Suisse : DelVal, 1988, p.11.

mento: as variáveis sociais são *elementos constitutivos* do mecanismo de desenvolvimento, e não apenas fatores externos capazes de influenciá-lo.

Na perspectiva sócio-genética, as capacidades cognitivas são *artefatos culturais* constituídos na dinâmica das interações e regulações sociais. O desenvolvimento da inteligência depende de outros fatores, não é mais estritamente endógeno. Ganha interesse o estudo das interações sociais que desencadeiam no sujeito *conflitos sócio-cognitivos,* situações que lhe exigem um repensar sobre suas certezas e saberes, e que o levam à nova reestruturação mental. [62]

Identificar situações de *conflito sócio-cognitivo,* que vão muito além de uma simples relação social, é uma tarefa delicada. Permeadas pelas contradições entre os sujeitos envolvidos, estas situações provocam a recuperação de estabilidade cognitiva, tanto individual quanto coletiva. O dinâmica de uma tal situação é: a) a partir das diferentes visões surge o conflito social — é o *desequilíbrio inter-individual*; b) confrontado em suas idéias, o sujeito entra em conflito interno — é o *desequilíbrio intra-individual*. Estando os sujeitos em interação, a superação do conflito vai além da busca de equilíbrio interno. Eles buscam o equilíbrio social através da coordenação e conciliação de pontos de vista e, ao superar o conflito inter-individual, ultrapassam também o conflito intra-individual.[63] E mais: *"é necessário que a desestabilização aja sobre o próprio processo de resolução [...] as perturbações devem afetar os modos de agir e não somente os resultados aos quais estes últimos conduzem".* [64]

Assim, situações de conflito sócio-cognitivo tributárias do desenvolvimento não surgem nas interações sociais de forma necessariamente espontânea, e a espontaneidade do conflito de idéias não basta para que a dinâmica acima delineada se estabeleça. Tais situações requerem, muitas vezes, uma concepção prévia, em função do funcionamento cognitivo a ser provocado:

> *O tipo de funcionamento sócio-cognitivo colocado em ação em situação de resolução (*de problema*) bem como a sua eficácia em termos de benefícios individuais, dependem os dois do tipo de funcionamento cognitivo induzido pela situação [...] para se obter progresso individual na resolução interativa é preciso perguntar-se, para cada tipo de progresso cognitivo visado, qual é a melhor maneira de construir a situação-problema, de tal forma que*

---

[62] PERRET CLERMONT, A. N. **La Structuration des Échanges Symboliques**, em PERRET CLERMONT, A. N. e NICOLET, M. Op. cit.

[63] GILLY, M. **Interaction entre Pairs et Constructions Cognitives: modeles explicatifs**, em PERRET CLERMONT, A. N. e NICOLET, M. Op. cit.

[64] Ibid, p. 26.

ela favoreça tanto colocarem-se em ação os funcionamentos cognitivos a serem modificados como o funcionamento socio-cognitivo mais favorável para que isto aconteça. [65]

Ou seja, as interações que se proponham a desencadear conflitos sócio-cognitivos requerem a estreita relação entre a condição de apresentação do problema, o funcionamento sócio-cognitivo e o funcionamento cognitivo individual. Em ambientes de ensino e aprendizagem, pela própria natureza das relações que aí se podem estabelecer, há a possibilidade de tais interações. Pesquisa de CAROTENUTO [66], em dois grupos —sujeitos escolarizados e sujeitos analfabetos — registra diferenças substanciais, quanto à competência para raciocínios lógicos e generalizadores, a favor do primeiro grupo, colocando em relevância a questão "o quanto o desenvolvimento cognitivo também depende de situações de aprendizagem?":

*A falta de generalização (*nos adultos analfabetos*) constitui um dos aspectos mais surpreendentes de nossos resultados [...] O problema que agora nos colocamos é o da passagem de tal modo de pensar para aquele observado na maioria dos sujeitos escolarizados [...] A hipótese que formulamos é que a aquisição de capacidade de pensamento lógico é determinada tanto pela experiência no senso estrito (empírica) quanto pelas interações em certos contextos sociais particulares. A própria escolarização é, seja em termos de exercício de aprendizagem, seja em termos de prática de interações sociais extra-familiares, um condicionamento em parte exterior ao indivíduo, uma disciplina mental específica [...]* [67]

Pesquisas nesta linha sócio-genética também registram que grupos de alunos com defasagem no desenvolvimento cognitivo, identificada no início dos experimentos, superam estas diferenças ao longo do próprio experimento. A possível relação entre estágio de desenvolvimento e origem sócio-cultural desaparece, podendo-se considerar que a atualização de nível operatório é resultado da interação social instaurada na própria situação de experimento.[68]

---

[65] Ibid, p. 27.

[66] CAROTENUTO, V. 1988: **Experience Sociale et Elaboration de Notions Logiques** em PERRET CLERMONT, A. N. e NICOLET, M. Op. cit. O experimento contou com um grupo de 50 adultos que nunca freqüentaram a escola. Foram propostos problemas relativos a inclusão de classes, rotação de figuras, conservação. No geral, a noção de estruturas de classes e princípios generalizadores não foram detectados nestes sujeitos; o autor fala em uma certa margem de imprevisibilidade no comportamento intelectual destes sujeitos, cada vez que confrontados com uma nova tarefa, o que ele identifica como a ausência de sistematização nos processos de pensamento. Chama a atenção que o desempenho foi melhor entre os sujeitos do meio urbano do que entre os provenientes do meio rural, e o autor interpreta este fato como resultado de experiências vividas — mais ricas no meio urbano —, decisivas para certo tipo de desenvolvimento mental.

[67] Ibid, p. 209.

[68] PERRET CLERMONT, A. N. e MUGNY, G. 1985**: Effets sociologiques et processus didactiques**, em MUGNY, G. (editor) **Psychologie Sociale du Dévelopement Cognitif**. Berne : Peter Lang, collection Exploration, 1985. GROSSEN, M. e NICOLET, M.1988: **Origine Social et Performan-**

Ao colocar em cena a dimensão psicossocial do desenvolvimento, muitas das pesquisas passam a acontecer no próprio contexto escolar. Diferentemente daquelas que ocorrem em "situação de laboratório", nestas as variáveis de controle também consideram o próprio processo de ensino e aprendizagem, visando-se um melhor entendimento do desenvolvimento presente no seio da relação didática agregadora de saberes, alunos e professor. [69]

Cabe, aqui, breve referência a teoria vygotskyana [70] de desenvolvimento, já que a teoria sócio-genética indica compatibilidades entre as teorias piagetiana e vygotskyana. De PIAGET, a teoria sócio-genética toma o aspecto endógeno do desenvolvimento e, ao colocar em cena as interações sociais como elementos constitutivos da dinâmica de desenvolvimento, aproxima-se da idéia vygotskyana de internalização mediada da cultura.

VYGOTSKY postula que a internalização dos saberes científicos torna-se fator decisivo para o desenvolvimento cognitivo do sujeito; a operação com símbolos, o entendimento da estrutura de um corpo teórico, a generalização e a abstração permeiam o pensar científico, conduzindo o sujeito à níveis psicológicos superiores: "*a consciência reflexiva chega à criança através dos portais do conhecimento científico*" [71], mediante "*um processo dialético complexo caracterizado pela periodicidade, desigualdade no desenvolvimento de diferentes funções, metamorfose ou transformação qualitativa de uma forma em outra, imbricamento de fatores internos e externos, e processos adaptativos que superam os impedimentos que a criança encontra*" [72]. Mas desde que isto aconteça no que Vygotsky denomina "*zona de desenvolvimento proximal – dada pela distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas , e o nível de desenvolvimento potencial, deter-*

---

ces Cognitives: contribution psycho-sociologique a une redefinition de la problematique, em PERRET CLERMONT, A. N. e NICOLET ,M. (editores) Op.cit.

[69] PERRET CLERMONT, A. N. e NICOLET, M. (editores), Op. cit. VERGNAUD, G. 1990: **Epistemology and Psychology of Mathematics Education, in Mathematics and Cognition.** ICMI Study Series, 1990.

[70] VYGOTSKY, S. Y. **A Formação Social da Mente**. São Paulo SP : Martins Fontes, 1996.

[71] VYGOTSKY, S. Y. 1993: **Pensamento e Linguagem**. São Paulo SP : Martins Fontes, 1993, p.79.

[72] VYGOTSKY, S. Y. **A Formação Social...** p. 96.

minado através da solução de problemas sob orientação de um adulto ou em colaboração com outros companheiros mais capazes. [73]

Estas considerações enfraquecem as correntes que colocam as duas teorias em oposição, permitindo considerá-las como diferentes facetas do processo de desenvolvimento da inteligência. Outros autores endossam esta atitude: conforme PERRET-CLERMONT e NICOLET, *"grandes autores como Vygotsky e Piaget nos apresentam elaborações teóricas suscetíveis de darem conta dos intrincados processos psicológicos e de regulação social. Mas cada um, à sua maneira, tem a tendência de privilegiar uma dimensão particular [...]* [74]

Ou, ainda, nas palavras de CASTORINA:

> *Um exame conceitual do programa piagetiano não revela incoerência entre seu núcleo teórico e a postulação do 'saber a ser ensinado' (…) Admitindo as diferentes raízes das perguntas e perspectivas, não existe incompatibilidade entre o construtivismo e a aquisição de conhecimento na zona de desenvolvimento proximal. Mas é necessária a realização de indagações que mostrem efetivamente o desenvolvimento dos mecanismos universais de apropriação no interior daquela interação com os saberes escolares e um avanço na reconstrução psicogenêtica das idéias prévias que correspondem aos conteúdos curriculares em diferentes domínios.* [75]

As perguntas de COLL e LERNER encaram firmemente uma das questões centrais da educação, quando esta leva em conta a teoria piagetiana: "*como ensinar o que deve ser construído?"* [76]; *"como sustentar ao mesmo tempo que o aluno é protagonista do aprendizado e que o professor é que deve planejar as atividades (…) e zelar para que a natureza dos conhecimentos que está tentando comunicar não seja desvirtuada?".* [77] A seção 2.3 deste Capítulo apresenta, no que diz respeito a construção do conhecimento em matemática, algumas respostas a estas perguntas.

---

[73] Ibid, p. 112.

[74] PERRET CLERMONT, A. N. e NICOLET, M., (editores), Op. cit., p.10.

[75] CASTORINA, J. **O Debate Piaget-Vygotsky**, em CASTORINA, J., FERREIRO, E., LERNER, D. e OLIVEIRA, M. (editores), **Piaget e Vygotsky — Novas Contribuições para o Debate**. São Paulo SP : Editora Ática, 1995, p.27.

[76] COLL, C. **Constructivismo e Intervención Educativa: ¿Cómo Enseñar lo que as há de construir ?** Buenos Aires, Argentina : Flacso, 1993.

[77] LERNER, D. **O Ensino e a Aprendizagem Escolar**, em CASTORINA, J.,FERREIRO, E., LERNER, D. e OLIVEIRA, M. (editores), Op. cit., p. 119, 1995.

2.2.2 Tecnologia informática

Artefatos os mais variados acompanham e determinam o desenvolvimento da humanidade. Se nos seus primórdios o homem construía artefatos que o tornassem mais apto à sobrevivência, hoje os artefatos vão muito além da substituição do trabalho físico: são máquinas que ampliam o alcance e poder da mente humana.

Inicialmente essas novas máquinas serviam quase exclusivamente à realização de cálculos que ultrapassavam a capacidade humana, daí seu nome: computadores. Eram ferramentas disponíveis essencialmente para pesquisadores. Hoje elas fazem parte do dia-a-dia, interferindo, em nova escala, nos processos intrincados dos desenvolvimentos individuais e sociais.

LEVY aponta a forte relação que existe o aparato intelectual — a inteligência — e os aparatos tecnológicos intelectuais de que se dispõe a cada época — as *tecnologias da inteligência*:

> *A inteligência ou cognição são o resultado de redes complexas onde interage um grande número de atores humanos, biológicos e técnicos (…) O pensamento se dá em uma rede na qual neurônios, módulos cognitivos, humanos, instituições de ensino, línguas, sistemas de escrita, livros e computadores se interconectam, transformam e traduzem as representações.* [78]

A tecnologia informática disponibiliza, cada vez mais, ferramentas que suportam a exteriorização, a diversificação e a ampliação dos funcionamentos cognitivos, através das linguagens de programação acessíveis aos não especialistas, dos documentos hipertextuais com tratamento simultâneo de texto, imagem e som, das ferramentas de autoria, modelagem e simulação. Em especial, o crescente desenvolvimento de linguagens de programação voltadas para objetos evidencia o potencial dos computadores como ferramentas para modelagem e simulação.

Essas ferramentas não só aumentam as possibilidades de dimensionamento dos modelos: elas oferecem interação mais natural com eles. Agora, além das variáveis e equações matemáticas a reger o modelo, os objetos metafóricos utilizados também podem ser modificados pela manipulação direta na tela do computador. As simulações e seus objetos metafóricos tornam-se instâncias de representação de imagens mentais, com iconografia em profusão (símbolos, gráficos, diagramas) e com o dinamismo de

---

[78] LEVY, P. **Tecnologias da Inteligência: o futuro do pensamento na era da informá-**

imagens presentes na tela do computador. A versatilidade do ambiente dá fluidez aos processos mentais e suporta formas de pensar que ultrapassam as do discurso oral ou escrito, ou do desenho estático. As simulações e as explorações exteriorizam a atividade intelectual que antecede o controle e a exposição racional :

> *A teoria, sobretudo em sua versão mais formalizada, é uma forma de apresentação do saber [...] A simulação, pelo contrário, corresponde antes às etapas da atividade intelectual anteriores à exposição racional: a imaginação, a bricolagem mental, as tentativas e erros. (...)O modelo digital do qual nos servimos para fazer simulações encontra-se muito mais próximo dos bastidores da atividade intelectual do que a cena teórica.* [79]

Sobre o uso do computador na pesquisa matemática, diz POLLAK:

> *Nós nos encontramos, na máquina, examinado uma coleção de casos especiais, complexos demais para que possamos lidar com nossos meios convencionais. O computador nos encoraja a praticar, sem vergonha e em plena luz do dia, coisas que só nos permitíamos no ambiente privado de nosso gabinetes, as quais nós nunca admitíamos frente aos estudantes: a experimentação. Em um grau que nunca aprece nos cursos que ministramos, matemática é uma ciência experimental [...] O computador se tornou o principal veículo para o aspecto experimental da matemática.* [80]

O suporte dos ambientes informatizados a pesquisa em matemática favorece a exploração, a elaboração de conjeturas e o refinamento destas, e a gradativa construção de uma teoria matemática. Por exemplo: a teoria do caos nasceu do estudo de equações diferenciais por Lorentz; ao implementar sistemas que se diferenciavam minimamente nas condições iniciais, Lorentz constatou que a evolução do sistema tornava-se imprevisível, surgindo daí os resultados teóricos sobre a instabilidade dos sistemas dinâmicos. Um segundo exemplo: a representação gráfica de maciças computações tornou possível a teoria de fractais, em que figuras surpreendentes provocaram conjeturas que desencadearam a busca de demonstrações.

As possibilidades que se descortinam com as tecnologias intelectuais contemporâneas, como a explicitação de idéias através de sistemas de representação dinâmicos, propõem a questão: em que grau o pensar humano se apoia em raciocínio do tipo lógico-proposicional?

---

tica. São Paulo SP : Editora 34, 1993, p. 135, 137.

[79] Ibid. p.124-125.

[80] Apud DE VILLIERS, M. **The Role of Proof in Investigative, Computer-based Geometry: Some Personal Reflections**, em KING, J. e SCHATTSCHNEIDER, D.(editores), **Geometry Turned On**. Washington USA : Mathematical Association of America Notes 41, 1997, p. 21.

Figura 2.2
Construção de conhecimento e tecnologia informática

Muito da pesquisa em ciência cognitiva direcionou-se ao entendimento do pensamento humano sob a ótica lógico-proposicional, contribuindo para tal enfoque a forma como tem se cristalizado o conhecimento científico. GARDNER [81] considera que, tendo sido a ciência cognitiva concebida à sombra da lógica contemporânea, a primeira geração de cientistas cognitivos modelou o ser humano como decididamente racional, e com isto se dedicou à investigação baseada em experimentos voltados à revelação do caráter lógico do pensamento humano. Segundo PAPERT [82], a epistemologia se desenvolveu sob o domínio do pensamento proposicional, estreitamente vinculado a tecnologia do texto linear; com o advento das novas tecnologias de suporte ao pensamento, ele considera uma possível mudança no entendimento dos processos cognitivos da construção do conhecimento que lançaria novas luzes sobre as questões epistemológicas. Ainda segundo PAPERT — pesquisador e educador na linha piagetiana —, se até então se considerava que o progresso intelectual evolui por raciocínios que avançam de um plano concreto à um plano abstrato formal, hoje a possibilidade de manipular objetos na tela do computador revela formas de pensamento presentes na criança e nos adultos, estes engajados em sofisticadas atividades intelectuais. É o que ele denomina *bricolage* ou *pensamento concreto* em que, no ato de pensar, o sujeito cria modelos, faz simulações e analogias, experimenta e erra, adentrando por caminhos e formas de pensamento que não correspondem aos padrões formais e analíticos registra-

---

[81] GARDNER, H. Op. cit.

[82] PAPERT, S. **The Children Machine...**

dos pela epistemologia [83]:

> *A epistemologia tradicional baseia-se na proposição, tão intimamente ligada ao meio do texto – escrito e especialmente impresso. Bricolage e pensamento concreto sempre existiram, mas foram marginalizados em contextos eruditos pela privilegiada posição do texto. À medida que passamos para a era da informática e que meios novos e mais dinâmicos surgirem, isso mudará [...]* [84]

LEVY [85], frente às potencialidades das *tecnologias da inteligência* da era da informática, teoriza sobre uma linguagem que estaria por nascer — a *ideografia dinâmica (idéographie dynamique).* Esta seria uma tecnologia de apoio à imaginação, ao raciocínio e à comunicação, diferente das linguagens escritas até então disponíveis, constituindo-se de signos dinâmicos, impregnados de significação em seus movimentos e metamorfoses. Com a *ideografia dinâmica,* dispor-se-ia de um meio de registro dos funcionamentos cognitivos associado à modelos e imagens mentais, entendendo-se por modelo uma estrutura organizada composta de ideogramas, a guardar relações entre os componentes; e por, imagem, uma instância de representação do modelo, impregnada de significação no seu dinamismo. Raciocinar sobre determinado problema significaria construir e manipular modelos mentais da situação sob exame, tendo-se como suporte a tecnologia informática; compreender uma teoria significaria a interiorização de modelos já construídos; e comunicar significaria estabelecer sintonia entre modelos mentais, passíveis de serem concretizados.

Para LEVY, a lógica é uma ferramenta intelectual que permite maior controle e explicitação de processos complexos de pensamento, mas se limita a registro de caráter proposicional. Já esta nova linguagem seria, por um lado, mais adequada ao registro dos processos de pensamento apoiados em modelos e imagens mentais e, por outro, um ponto de apoio para novos tipos de representação mental e de raciocínios sobre essas representações.

Nos recursos tecnológicos informáticos está latente o desenvolvimento de formas de representação sintonizadas com o pensar por imagens mentais, cada vez mais referido na literatura *como pensamentos de natureza visual* (*visual thinking*). São pen-

---

[83] Esta posição está em sintonia com o que foi discutido na seção 2.1, quando destacamos os *contextos da descoberta e da justificação* como constituidores do processo de criação matemática.

[84] PAPERT, S. **The Children Machine...,** p. 156.

[85] LEVY, P. **L'Idéographie Dynamique: vers une Imagination Artificielle?** Paris, França : Éditions La Découvert, 1991.

samentos que utilizam imagens — desenhos e diagramas — e trabalham com representação mental econômica. Isso denota elementos organizados e estruturados a reter um grande número de premissas, tarefa que seria muito mais difícil sob a forma proposicional.[86] Esses recursos possibilitam a expressão, até mesmo o desenvolvimento, de pensamentos de natureza visual que muito contribuem à apreensão de idéias profundas, com o que não é difícil imaginar-se uma conseqüente ascensão de capacidades intelectuais.

Pensamentos de natureza visual fazem parte, em diversos grau, dos funcionamentos cognitivos. Anteriormente aos recursos informáticos, eles ocorriam de modo restrito, num plano puramente mental e não concretizável em suporte exterior. Em resposta à investigação, empreendida pelo matemático HADAMARD [87] nos anos 40, sobre as formas de pensar que perpassam o processo de criação científica, Einstein diz que as palavras e a linguagem, na forma escrita ou falada, não pareciam ter nenhum papel em seus mecanismos de pensamento; ele valia-se de signos e imagens que podiam ser voluntariamente reproduzidos e combinados. Ele também fala de uma certa conexão entre estes elementos e conceitos lógicos relevantes, mas dizendo que, do ponto de vista psicológico, o jogo combinatório com os signos e imagens parecia ser o aspecto essencial do pensamento, antes de qualquer conexão com a construção lógica em palavras.

Outro relato, também documentado por HADAMARD, é o do geneticista Galton: Galton conta sua necessidade de, após período de profundo trabalho intelectual, tendo chegado a resultados claros e satisfatórios, passar para praticamente outro plano intelectual no momento, para ele então penoso, de expressar seus resultados. A investigação empreendida por HADAMARD deixa claro que, não obstante as diferenças presentes na maneira de tratar as imagens mentais, o processo de criação envolve pensamentos de natureza visual e freqüentemente imagens de natureza geométrica. PENROSE, em seu livro ‘The emperor’s new mind’, também fala da forma visual de pensar:

> *Quase todo meu pensamento matemático acontece visualmente e em termos de pensamento sem palavras [...] Freqüentemente é porque não existem palavras disponíveis para expres-*

---

[86] Os desenhos que acompanham a demonstração de um teorema em geometria são uma forma de representação em sintonia com os pensamentos de natureza visual.

[87] HADAMARD, J. Op. cit.

> *sar os conceitos envolvidos [...] seguidamente faço cálculos usando diagramas especiais [...] De fato, seria um processo muito penoso traduzir tais diagramas em palavras [...] Acho que as palavras são praticamente inúteis para o pensamento matemático.* [88]

Na pesquisa matemática atual, objetos e processos abstratos até então restritos aos "olhos da mente" são agora externalizados através de precisas, objetivas e dinâmicas visualizações na tela de um computador, implicando novos *insights* na abordagem da complexidade e do precário entendimento de muitos destes objetos e processos. Nesta perspectiva, por exemplo, PALAIS vem desenvolvendo *software* especialmente dirigido ao que ele denomina *visualização matemática* (*mathematical visualization).* Sua preocupação central é disponibilizar na tela do computador não os simples objetos matemáticos, mas os processos matemáticos que os constituem, através de rotações e morfismos animados: "*conforme a matemática se torna mais e mais complexa, torna-se cada vez mais importante ter ferramentas que suplementem nossa intuição e que nos ajudem a comunicar nossa idéias intuitivas".* [89]

No contexto da educação matemática, surge nos anos 80, com a "tartaruga Logo" de PAPERT [90], um primeiro suporte informático para pensamentos de natureza visual: o movimento da tartaruga encerra conceitos importantes de geometria. Desde então, crescem as potencialidades das interfaces informáticas que dão suporte ao pensamento matemático de natureza visual.

Utilizando o ambiente "Logo", STEVENSON [91] desenvolveu um "micromundo" que permite a visualização de estruturas abstratas correspondentes às geometrias não-euclidianas; ao explorar o movimento da tartaruga, os alunos começam a entender que o universo da tartaruga tem propriedades diferentes das conhecidas propriedades euclidianas; através das imagens e pensamentos visuais, concretizados nos deslocamentos da tartaruga, eles passam a "viver", com naturalidade, nos mundos elíptico e hiperbólico.

---

[88] PENROSE, R., **The Emperor's New Mind**. New York, USA : Penguin Books, 1989, p.424-425.

[89] PALAIS, R. **The visualization of mathematics**. Notices of the MAS, vol. 46, nº 6, 1999, p. 657.

[90] PAPERT,S. **Logo — computadores e educação**. São Paulo SP : Editora Brasiliense, 1988.

[91] STEVENSON, I. **Constructing Curvature: the iterative design of a computer-based microworlds for non-euclidian geometry**. Doctoral Dissertation, , London : Institute of Education, University of London, 1995.

KAPUT vem desenvolvendo, no projeto “SimCalculus” [92], ferramenta interativa para visualização, transformação e simulação de objetos matemáticos; através da manipulação de objetos metafóricos na tela do computador, acompanhada de representação gráfica, torna-se natural, para alunos ainda em idade escolar, a construção de conceitos fundamentais do cálculo diferencial e integral.

Com propósito similar, mas com maiores possibilidades de modelagem e simulação de fenômenos em diferentes áreas de conhecimento, o *software* “Modellus” [93] — desenvolvido por TEODORO, VIEIRA e CLÉRIGO — proporciona ambiente em que os alunos trabalham com múltiplas representações de objetos matemáticos — analíticas, analógicas e gráficas — e interagem com estas representações, obtendo da tela do computador um dinâmico *feedback*.

Esses três ambientes, juntamente com o ambiente de geometria dinâmica, mostram o potencial da tecnologia informática na educação matemática. Outros ambientes, com características similares, diferem destes essencialmente pela quantidade de recursos disponibilizados. [94]

Pela própria natureza da geometria enquanto área de saber matemático, os ambientes informatizados que suportam instâncias de representação das imagens mentais que acompanham o pensamento geométrico — os ambientes de geometria dinâmica — apresentam-se como ferramentas de grande potencial para a exteriorização e “versatilização” de pensamentos de natureza visual. Esta questão será abordada no capítulo 3, seção 3.3.

---

[92] KAPUT, J. **SimCalc,** em http://www.simcalc.umassd.edu/

[93] TEODORO, V. D. **From formulae to conceptual experiments: interactive modelling in the physical sciences and in mathematics**. Invited paper presented at the International CoLos Conference New Network-Based Media in Education, Maribor, Slovenia. 1998.

[94] SANTAROSA, L. e GRAVINA, M. A. **Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados**. Anais do IV Congresso Iberoamericano de Informática Educativa, Brasília, 1998. No *site* “Educação Matemática e Novas tecnologias” (http:// www. mat. ufrgs. Br/ ~edumatec), sob responsabilidade da pesquisadora, tem-se como objetivos a difusão desses ambientes e a apresentação de sugestões de sua utilização em sala de aula.

2.3 A situação didática

Desenvolvimento cognitivo, aprendizagem e ensino são processos que se apresentam intrincados quando se tem como objetivo a apropriação de um certo saber matemático. A aprendizagem trata da construção e reconstrução de saberes socialmente estabelecidos, e depende de funcionamentos cognitivos do sujeito e de um meio que encerre intenções, dentre elas a intenção de desencadear uma dinâmica espiral de equilíbrios e desequilíbrios cognitivos, ilustrada na Figura 2.3.

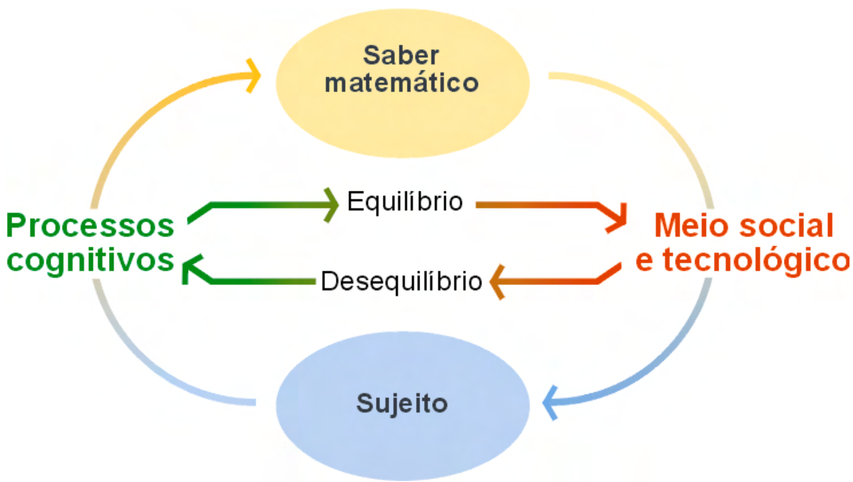


Figura 2.3
Os equilíbrios / desequilíbrios do sujeito

Como bem destaca BALACHEFF:

> *"Os alunos precisam aprender matemática como um saber social . Eles não estão livres para escolher os significados de suas construções. O significado não só deve ser eficiente para resolver problemas, mas também deve ser coerente com aquele socialmente reconhecido".* [95]

Nem sempre as estruturas cognitivas dos alunos se apresentam prontas para a construção de saberes matemáticos conforme ilustram, especialmente, suas dificuldades frente ao aprendizado de teoremas e demonstrações, quando são solicitadas estruturas de pensamento de caráter operatório-formal.[96] É o próprio processo de aprendizagem, desencadeado com a intenção de ensinar-se um certo saber matemático,

[95] BALACHEFF, N. 1991: **Treatement of Refutations: Aspects of the Complexity of a Constructivist Aproach of Mathematics Learning**, em VON GLASESFELD (editor), **Radical Construtivism in Mathematics Education**, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1991, p. 89.

que permite potencializar, e mesmo desenvolver, os aspectos cognitivos.

A ocorrência de obstáculos e a sua superação permeiam a história do desenvolvimento da matemática. Saberes estabelecidos que dão suporte ao avanço do conhecimento também podem barrar este avanço. Processo similar ocorre nas situações de aprendizagem: cada aluno tem uma bagagem intelectual de conhecimentos prévios e de ferramentas mentais que favorece ou dificulta novo aprendizado. O aprendizado da matemática muitas vezes exige construções mentais nem sempre espontâneas ou naturais. Freqüentemente, as concepções dos alunos conflitam com o saber objeto de aprendizagem; a ruptura com estas concepções resistentes a mudanças depende de momentos de conflitos e desequilíbrios, e é na superação de conflitos inter-individuais e intra-individuais que os alunos constróem o novo conhecimento.

Cabe enfatizar os diferentes aspectos que permeiam uma situação de aprendizado: a natureza do saber objeto da aprendizagem; os alunos e seus processos cognitivos, e os momentos de conflitos cognitivos; o meio no qual os alunos interagem; as intervenções pedagógicas que, reservando ao professor, especialmente, o papel de balizador, dão *status* de saber científico ao conhecimento matemático então em construção. O ponto delicado, para o professor, é detectar que sentido os alunos atribuem, nas suas construções individuais, aos conceitos e idéias matemáticas; é fundamental que ele entre em sintonia com as dificuldades cognitivas dos alunos e encontre estratégias para superá-las, garantindo-lhes a apropriação do saber matemático..

Freqüentemente, propostas pedagógicas têm incorporado métodos de trabalho inspirados em metodologias de pesquisa oriundas da psicologia, desconsiderando que as questões propostas num experimento que investiga o desenvolvimento cognitivo são muito diferentes das presentes numa situação de aprendizado: as primeiras se voltam à análise dos processos de pensamento onde a espontaneidade é privilegiada, enquanto as segundas priorizam o conteúdo, nas suas especificidades e inerentes dificuldades de aprendizagem.[97]

Educadores inseridos na linha pedagógica construtivista radical têm tomado o desenvolvimento das estruturas lógicas e os funcionamentos cognitivos dos alunos

---

[96] Assunto a ser abordado, especialmente, no capítulo 3, que trata da aprendizagem da geometria.

como objetivo e conteúdo da educação, pressupondo ser o instrumental lógico suficiente para que os alunos, com autonomia, construam conceitos científicos. Assim, enfatizam sobremodo os processos construtivos espontâneos, convertendo a prática docente em situações de problematização e de desequilíbrios cognitivos, deixando de lado aspectos relevantes à aquisição de saberes socialmente estabelecidos. [98]

Mas o próprio PIAGET procurou esclarecer o alcance de sua teoria na prática educativa:

> *Estou convencido de que nossos trabalhos podem prestar serviços à educação, na medida que vão além de uma teoria do aprendizado e permitem vislumbrar outros métodos de aquisição de conhecimento. Isso é essencial. Mas como não sou pedagogo, não posso dar nenhum conselho aos educadores. A única coisa que posso fazer é fornecer dados. Além do mais, considero que os educadores estão em condições de encontrar por si mesmos novos métodos pedagógicos (…) A pedagogia dista muito de ser uma simples aplicação do saber psicológico.* [99]

As especificidades do processo educativo fazem do professor mais do que um provocador de desenvolvimento cognitivo, com objetivos que ultrapassam a construção de conhecimentos espontâneos. Conforme CASTORINA:

> *Gostaria de salientar a insuficiência da 'pedagogia construtivista' [...] A teoria de desenvolvimento foi elaborada fora da sala de aula e foi orientada à indagação da modificação das estruturas cognitivas [...] Pois bem, a prática educativa não pode ser considerada uma ilustração da teoria mais geral de desenvolvimento. Basicamente porque um dos objetivos centrais dessa prática é a 'transmissão dos saberes historicamente constituídos', desde a escrita até a matemática e os conceitos sobre a natureza e a sociedade. E esses saberes, ou uma boa parte deles, não poderiam ser adquiridos pelos alunos sem uma intervenção docente de qualidade diversa da requerida para a promoção do pensamento lógico.* [100]

No âmbito da pesquisa em educação, subsidiada por aportes teóricos de uma ou outra teoria de desenvolvimento cognitivo — socio-genética ou vygotskiana —, há diferentes aproximações quanto ao tratamento da situação didática que visa a aquisição de saberes. Um marco nesta direção é o livro "Após Vygotsky e Piaget" [101], coletânea de trabalhos de pesquisa das escolas russa e ocidental. Para ambas as escolas, a construção de conhecimento resulta da interação de processos inter-individuais e intra-

---

[97] MIGNE, J. **Les Obstacles Épistémologiques à la formation de concepts**, Education Permanente, no. 119, vol 2, 1994.

[98] BRUN, J. **Evolution de Rapports entre la Psychologie du Dévellopement Cognitif et la Didactique des Mathématiques**, em ARTIGUE, M., GRAS, R., LABORDE, C. e TAVIGNOT (editores), **Vingt Ans de Didactique des Mathematiques en France,** em Collection Recherches en Didactique des Mathématiques, Paris, France : La Pensée Sauvage Éditions, 1994.

[99] Apud LERNER, D. Op. cit., p. 87, 91.

[100] CASTORINA, J. Op. cit., p.25.

individuais, cabendo ao professor um papel fundamental na organização de situações que tornem produtivo o processo de ensino e aprendizagem:

> *Enquanto espaço social de aprendizagem, a sala de aula deve ser organizada sob a forma de situações, nas quais os alunos enfrentam problemas a resolver. É o professor que coloca ou até mesmo prepara essa organização, na qual são postos em relação os conhecimentos e os alunos, dentro de um contexto de interações. Esse contexto permite aos alunos realizarem atividades coletivas, nas quais suas ações são coordenadas e instrumentos cognitivos são elaborados. Fundamentalmente, a construção de conhecimentos pelos alunos resulta da interação de processos inter-individuais e intra-individuais, que se desenvolvem dentro de um contexto no qual o professor concebe situações que otimizam essas interações, dando-lhes a oportunidade de desenvolver-se para atingir o objetivo visado.* [102]

As duas linhas de pesquisa caracterizam-se pela análise *a priori* do fenômeno didático, a partir da qual são constituídas situações pedagógicas em que um dado saber pode tornar-se, pelos alunos, objeto de construção.

Um pressuposto do quadro teórico russo é aquisição de conhecimentos teóricos gerais precedendo a aquisição de conhecimentos específicos, pressuposto enraizado na teoria vygotskiana que vê a aquisição de conceitos científicos como um processo a transitar do geral para o particular. As situações de aprendizagem são organizadas a partir da análise lógica dos conteúdos a serem ensinados e do nível de desenvolvimento dos comportamentos dos alunos face a esse conteúdo, tendo como objetivo principal a apreensão de conceitos teóricos gerais através da reflexão. É desta forma, por exemplo, que SEMENOVA[103], a partir de análise do conceito de número, organiza atividade pedagógica que desenvolve inicialmente o conceito teórico de grandeza, surgindo deste conceito geral, como casos particulares, os diferentes campos numéricos.

Na escola ocidental, o ponto de vista dominante é a análise das etapas e dificuldades que marcaram a elaboração de conceitos e idéias matemáticas, e a atividade pedagógica é projetada de modo a provocar nos alunos um processo similar. Por exemplo: é a partir da análise histórica do desenvolvimento do conceito de número e de questões de caráter epistemológico que BEDNARZ[104] define os princípios condutores da escolha das situações a serem apresentadas na atividade pedagógica; a atividade, cujo

---

[101] GARNIER, C., BEDNARZ, N. e ULANOVSKAYA, I. (editores). Op. cit.

[102] Ibid., p. 215.

[103] SEMENOVA, M. **A Formação Teórica e Científica do Pensamento dos Escolares**. em GARNIER, C., BEDNARZ, N. e ULANOVSKAYA, I. (editores). Op. cit.

[104] BERDNARZ, N. **Interações Sociais e a Construção de um Sistema de Escrita dos Números no Ensino Fundamental**, em GARNIER, C., BEDNARZ, N. e ULANOVSKAYA, I. (editores). Op. cit.

objetivo final é a construção de sistema de representação numérico-decimal, começa pela explicitação das concepções prévias dos alunos e de suas representações, fontes de conflitos sócio-cognitivos; se bem conduzidos, os alunos reconstroem as concepções e representações prévias, na direção do saber objeto de aprendizagem.

É especialmente na escola francesa de didática da matemática[105] que se encontram investigações consistentes sobre as dificuldades dos alunos em situações de ensino e aprendizagem, com metodologia de pesquisa própria e diferenciada — a engenharia didática[106]: "*o campo da didática muito se aproxima das ciências humanas, em que o objetivo não é estabelecer teoremas e leis, mas sobretudo conseguir colocar em evidência certas regularidades.*" [107]

As investigações da escola francesa caracterizam-se pela integração de três grandes eixos: os funcionamentos cognitivos que permeiam o processo de aprendizagem, a natureza do meio que propicia a aprendizagem e a natureza do saber matemático objeto da aprendizagem. Elas compartilham, como princípios gerais[108] que:

a) o aluno aprende ao adaptar-se a um meio que é fonte de dificuldades, contradições, equilíbrios e desequilíbrios; tomam-se, aqui, aportes da teoria piagetiana e seu desdobramento sócio-genético;

b) um meio sem intenções didáticas é insuficiente para a aquisição de saberes matemáticos e, portanto, cabe ao professor organizar o meio mediante a criação de situações provocadoras do aprendizado. Tais situações devem engajar, decisivamente, os saberes matemáticos cuja aquisição é desejada. Conforme LABORDE, "*um dos objetivos fundamentais da di-*

---

[105] Grupo que tem sido referido na literatura como École Française de Didactique des Mathématiques.

[106] A ser detalhada na seção 4.2. De forma muito breve, neste momento: a engenharia didática é metodologia de pesquisa que envolve a concepção de situação didática intencionalmente projetada para a aquisição de determinado saber matemático. A concepção apoia-se em análise prévia do problema e na formulação *a priori* de hipóteses a serem testadas; implementada a situação didática, com eventuais modificações na experiência em curso, uma análise *a posteriori* identifica a concorrência dos resultados obtidos às hipóteses formuladas.

[107] ROBERT, A. **Problèmes méthodologiques en didactique des mathématiques**. Recherche en Didactique des Mathématiques, vol. 12, no. 1. Grenole, La Pensée Sauvage Éditions, 1992.

[108] LABORDE, C., 1996 **Duas utilizações complementares da dimensão social nas situações de aprendizado da matemática**, em GARNIER, C., BEDNARZ, N. e ULANOVSKAYA ,I. (editores), Op. cit.

dática da matemática é saber caracterizar essas situações e organizar este ambiente propiciador do aprendizado de determinados conhecimentos matemáticos".[109]

Um marco teórico importante na escola francesa firma-se nos anos 80 com o trabalho de BROUSSEAU — a teoria das situações didáticas [110] — em que ele disseca, através da construção de um modelo teórico, os aspectos constitutivos de uma situação didática, tomando como pressuposto fundamental que *"um meio sem intenção didática é decididamente insuficiente para induzir os alunos ao conhecimento cultural que se deseja que eles aprendam".* [111] Ver Figura 2.4.

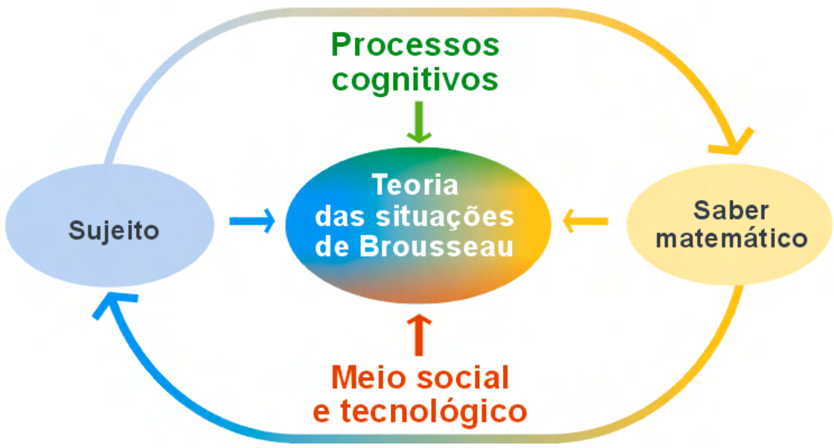


Figura 2.4
O sujeito e o saber, na teoria das situações didáticas

Situação didática é definida como uma situação de sala de aula que envolve como atores professor e alunos e que tem como objeto de interesse um certo saber disciplinar. No modelo de BROUSSEAU são explicitadas as diferentes fases de uma situação didática, onde se destacam os diferentes papéis dos atores envolvidos. Ver Figura 2.5.

---

[109] Ibid., p.29.

[110] BROUSSEAU, G. **Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques, Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble, France : Editions la Pensée Sauvage, vol 7.2, 1986. PERRIN-GLORIAN, M. J. **Théorie des sittuations didactiques: naissance, développement, perspectives**, em ARTIGUE, M., GRAS, R., LABORDE, C. e TAVIGNOT (editores), **Vingt Ans de Didactique des Mathematiques en France,** Collection Recherches en Didactique des Mathématiques, Paris, France : La Pensée Sauvage Éditions, 1994.

Figura 2.5
O desenrolar da situação didática

Nesse modelo, tomando como ponto de partida certo saber disciplinar, objeto de aprendizagem mas ainda descontextualizado, o professor inicia com a *situação de contextualização* desse saber — a primeira fase; trata-se da apresentação de um problema ou atividade de forma a provocar nos alunos um processo de investigação similar ao que vive o matemático em seu processo de criação e que intenta a apropriação de saber matemático. Nessa fase inicial, é papel do professor garantir a situação de *devolução* [112]: os alunos engajam-se no problema ou atividade não mais para atender a uma exigência do professor, mas movidos por interesse próprio, chamando a si a responsabilidade dos procedimentos de investigação. Estes procedimentos são, em certo grau, expectativas do professor, definidas no momento da concepção do problema / atividade, dada a intencionalidade de construção de determinado saber matemático.

É desta forma que inicia a segunda fase — a fase de *situação adidática*, que tem três momentos: *ação*, *formulação* e *validação.* Nela são contemplados basicamente os processos cognitivos individuais e os conflitos sócio-cognitivos produzidos nas interações com um meio que incorpore intenções de aprendizagem. Nesta fase, BROSSEAU destaca como fundamental o desencadeamento de atitudes cognitivas que levam a novas adaptação:

---

[111] BROUSSEAU, G. Op. cit., p.49.

[112] Em um dos artigos de BROSSEAU (**Os diferentes papéis do professor** em LERNER, D. **Didática da Matemática**. Porto Alegre RS : Editora Artes Médicas, 1996, p.51.) encontra-se a razão da escolha do termo frances *dévolution* — ele reflete a relação professor / alunos em uma situação didática: "*A devolução era um ato pelo qual o rei abandonava seu poder para remetê-lo a uma câmara. A 'devolução' significa: já não se trata de minha vontade, mas do que vocês devem querer, porém, eu lhes confiro este direito porque vocês não podem reivindicá-los por si mesmos*".

> *O aluno aprende se adaptando a um meio que é fonte de contradições, de dificuldades, de desequilíbrios [...] Este saber, fruto de adaptação, se manifesta nas novas respostas, uma prova da aprendizagem [...] A concepção moderna de ensino exige que o professor provoque os alunos na direção da adaptação desejada, isto através de escolha cuidadosa dos problemas serem propostos. Estes problemas [...] devem lhes fazer agir, falar, refletir, evoluir a partir de seus próprios movimentos. Entre o momento no qual o aluno toma o problema como seu e aquele em que produz uma resposta, o professor se recusa a intervir como proponente do conhecimento que ele deseja ver aparecer [...] Os problemas, escolhidos de forma tal a engajar os alunos, devem provocá-los a agir, falar, refletir, evoluir nos seus próprios movimentos [...] O aluno bem sabe que o problema foi escolhido para que adquira um novo conhecimento, mas ele também deve saber que este conhecimento está inteiramente justificado na lógica interna da situação e que ele pode construí-lo sem ter que apelar à razões didáticas .* [113]

A produção dos alunos é retomada pelo professor na terceira fase — *situação de institucionalização.* [114] Da *situação de ação* é reconhecido o valor de um procedimento que se converterá em recurso de referência; *formulações* que serão conservadas ou reescritas são evidenciadas. Da *situação de prova e validação* são retidas as propriedades que se identificam com o saber objeto de construção.

BROUSSEAU enfatiza as dificuldades de aprendizagem que permeiam uma situação didática, buscando entendimento através do conceito de *obstáculo*, que é um conhecimento, uma concepção, que resiste a contradições e a reelaborações, que se manifesta de forma intempestiva, independente da tomada de consciência de sua inadequação. E classifica as origens de tais obstáculos: *ontogenética*, quando há limitações no desenvolvimento cognitivo; *didática*, quando diretrizes e escolhas do sistema educativo são impróprias à implementação em sala de aula; e *epistemológica*, quando se trata de dificuldades registradas na própria história de desenvolvimento da matemática. Nas palavras de PERRIN-GLORIAN:

> *A noção de obstáculo é central na teoria das situações, por um lado, porque o aprendizado por adaptação, que permite dar sentido aos conceitos, também produz conceitos errados, conhecimentos locais que devem ser colocados em questão; por outro lado, porque as resistências, os obstáculos necessitam de construção de adequada situação didática, para que os alunos possam então superá-los ...*[115]

O trabalho de BROUSSEAU registra pressupostos tomados da teoria piagetiana no que diz respeito ao processo de construção de conhecimento, especialmente

---

[113] BROUSSEAU, G. Op. cit., p. 48 - 49.

[114] As situações de ensino tradicional reduzem-se ao momento de institucionalização: o professor não se preocupa com a criação de sentido por parte dos alunos, simplesmente diz o que deseja que o aluno saiba e verifica o que foi aprendido.

no momento de situação *adidática*; mas também considera, muito claramente, os aspectos referentes à apropriação de saber disciplinar, nos seus momentos de contextualização e institucionalização. Em seus primeiros trabalhos, o modelo ainda não contemplava papel mais significativo para o professor [116] e é mais adiante que a *situação de institucionalização* passa a ser uma das fases do modelo.

Nesta tese adota-se como referência teórica relevante a escola francesa em Didática da Matemática que, pelo lado da psicologia, se inspira nas teorias piagetiana e sócio-genética e que, recentemente, também busca compatibilizar-se com a teoria vygotskiana, mas sempre com a precaução de manter enfoque sobre as especificidades do objeto de investigação, buscando a estruturação de um corpo teórico capaz de explicar a complexidade dos fenômenos que perpassam o aprendizado e o ensino da matemática. São preocupação desta escola as especificidades do objeto de investigação, ou seja, a complexidade dos fenômenos que perpassam o ensino e o aprendizado da matemática.

---

[115] PERRIN-GLORIAN, M .J. **Utilisation de la notion d'obstacle en didactique des mathématiques, Recherches en Didactique des Mathématiques**. Paris, France : La Pensée Sauvage Éditions, 1986, p. 7.

[116] Isto porque, desde o início, a pesquisa na escola francesa tomou como subsídio a teoria piagetiana, e, nesse momento inicial, priorizou os processos cognitivos dos alunos.

3 A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO EM GEOMETRIA

Este Capítulo trata de questões que dizem respeito à construção de conhecimento em geometria. Inicia apontando a natureza evolutiva do pensamento que, inicialmente empírico, culmina nos pensamentos hipotético-dedutivos. O Capítulo prossegue discutindo as dificuldades inerentes à aprendizagem, aquelas que dizem respeito ao entendimento do significado de demonstração e à habilidade em produzir demonstrações.

Mapeadas as dificuldades, discute-se como os ambientes de geometria dinâmica, mediadores das ações mentais e dos experimentos de pensamento, podem concorrer para a superação das dificuldades do sujeito frente ao saber objeto de construção. Também discute-se o potencial desses ambientes quanto ao aluno tornar-se versátil em formas de pensar não só empíricas ou dedutivas — o caso do pensamento visual que, no ambiente estático do lápis e do papel, não se manifesta com suficiente transparência ou talvez se mantenha latente.

3.1 Da geometria empírica à geometria dedutiva

A geometria euclidiana é a parte do saber matemático voltada a objetos idealizados. Idealizados no sentido de não existirem no mundo físico, mas apenas no mundo das idéias, nascidos, portanto, de processos de abstração e generalização. Triângulos, quadrados, círculos, esferas são idealizações de formas físicas presentes no mundo ambiente. As primeiras idealizações espontâneas de qualquer criança apoiam-se em qualidades comuns que certos objetos apresentam, e são simplesmente impressões visuais, associadas a determinados nomes.

No processo de ensino e aprendizagem da geometria, as idealizações sofisticam-se e os registros perceptivos transformam-se em objetos geométricos pela conceituação de suas propriedades características. A modelagem matemática organiza as formas idealizadas, possibilitando relações geométricas sempre novas, em novo patamar de conhecimento, através de teoremas e demonstrações que explicitam e explicam relações, muitas vezes surpreendentes, entre os objetos idealizados.

Entender o sentido de uma teoria axiomatizada, entender o significado de uma demonstração e conseguir ser autor de teoremas — isso não é simples nem espontâneo, como o registra, contundentenente, FISCHBEIN:

> *Axiomas, definições, teoremas e demonstrações devem ser incorporados como componentes ativos do processo de pensar (...) Eles devem ser inventados ou aprendidos, organizados, verificados, e usados pelos alunos de forma ativa. Entendimento do sentido de rigor numa construção hipotético dedutiva, o sentimento de coerência e consistência, a capacidade de pensar proposicionalmente, independentemente de restrições práticas, não são aquisições espontâneas. Na teoria piagetiana, todas estas capacidades são descritas como sendo relacionadas a idade — o período operatório formal (...) Na verdade, elas são potencialidades que somente um adequado processo aprendizagem consegue desenvolver e transformar em ativas realidades mentais.* [1]

Do conhecimento empírico ao que é objeto de construção na geometria euclidiana, faz-se necessária uma *adaptação*, com seus inevitáveis conflitos cognitivos: agora buscam-se argumentações que expliquem certas propriedades como decorrentes de outras, diferentemente das simples verificações e constatações até então satisfatórias. Trata-se do domínio de um certo modelo da realidade, e isto depende de abstrações e deduções inseridas em um corpo teórico:

> *Uma modelagem coloca em jogo certa abstração de domínio de realidade, retendo deste último tão somente um certo número de objetos e relações, que são representados no modelo. O modelo dá conta de uma certa parte do domínio de realidade (...) A cada modelo é portanto associado um domínio de funcionamento dentro do domínio de realidade, que depende dos objetos e relações a serem retidos pelo modelo.* [2]

No caso da geometria euclidiana, o modelo é determinado pelos axiomas, em particular o axioma das paralelas, com o domínio de seu funcionamento dado pelas regras de inferência lógica. O entendimento deste modelo depende de processo evoluti-

---

[1] FISCHBEIN, E. **The interaction betweeen the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity**, em Biehler, R. e outros (editores), Didactics of mathematics as a scientific discipline. Dordrecht, Netherlands : Kluwer Academic Publishers, 1994. p. 232.

[2] LABORDE, C. **Ensigner la géométrie: permanences et révolutions.** Proceedings of the 7th International Congress on Mathematical Education, Montreal, 1992, p. 49.

vo de pensamento. Esta evolução é explicitada por VAN HIELE [3] através de diferentes níveis de pensamento que guardam estreita relação com os estágios de desenvolvimento cognitivo da teoria piagetiana.

No ***nível zero***, o da *visualização*, as crianças classificam e nomeiam formas geométricas, ao abstrair dos objetos aspectos de natureza ainda perceptiva; reconhecem quadrados, retângulos, losangos, mas sem a eles atribuir propriedades.

No ***nível um***, o da *análise*, propriedades são depreendidas das formas geométricas e com elas se identificam, mas não são estabelecidas relações inferenciais entre as propriedades, e definições ainda não se apresentam; por exemplo, através de manipulações de figuras (recortes, dobraduras, medidas) um retângulo passa a ser entendido como uma forma que tem quatro ângulos retos, diagonais congruentes e lados opostos congruentes, mas ainda não se fazem presentes relações do tipo "se quatro ângulos retos, então necessariamente lados opostos congruentes".

É no ***segundo nível***, o da *dedução informal*, que relações de implicação entre propriedades começam a ser estabelecidas, mas ainda desprovidas de argumentos dedutivos que expliquem o porquê destas relações; neste nível o aluno passa a entender o "definir objetos geométricos" e a hierarquizar propriedades, mas ainda não possui habilidades para produzir suas próprias demonstrações.

No ***nível três***, da *dedução formal*, constitui-se o pensamento geométrico de natureza dedutiva, quando então axiomas e teoremas se integram no modelo teórico que forma a geometria euclidiana; é neste nível que se dá o entendimento do significado de uma demonstração e que se torna possível a produção de demonstrações.

O pensamento geométrico culmina no que seria o ***nível quatro*** — *o do rigor* — quando passa a transitar por teorias axiomatizadas — as geometrias não-euclidianas — que não mais dependem de experiências e intuições sobre o mundo sensível imediato. As palavras de VAN HIELE tornam transparente esse processo evolutivo:

> *Tomemos por exemplo um losango! Antes de aprender geometria as crianças processam a 'imagem' do losango; elas conhecem o losango como um caso especial de objeto concreto. Agora elas vão 'experienciar' o que significa um losango no contexto da geometria. Elas descobrem propriedades desta figura (...) Os alunos que começaram no 'nível 0', sem diferenciar estruturas, avançam para o primeiro nível (...) As propriedades geométricas das*

---

[3] FUYS, D. GEDDES, D. e TISHLER, R. (editores) **English translation of selected writings of D. Van Hiele and P. Van Hiele.** New York, Brooklin College : CUNY, 1984. Este é um trabalho dos anos 50, mas foi somente nos anos 80 que ele se difundiu no cenário internacional.

figuras são organizadas... Entretanto neste nível as relações entre elas não são objeto de atenção; a atenção é sobre a própria figura... No segundo nível, as relações objeto de organização no primeiro, tornam-se objeto de atenção Aqui os mecanismos organizadores são relações sobre relações, na sua maioria de caráter lógico... a inter-relação entre relações, na forma de implicações, á usadas neste nível, mas elas se tornam objeto de atenção somente no terceiro (...) E finalmente, no quarto nível (dificilmente atingido em idade escolar) o próprio pensamento lógico torna-se objeto de atenção. [4]

Trabalho de DENIS [5], com grupo de alunos entre 14 e 19 anos, constata estreita correspondência entre os quatro primeiros níveis de pensamento geométrico apresentados por VAN HIELE e os estágios de desenvolvimento cognitivo da teoria piagetiana: os *níveis um* e *dois* de pensamento geométrico correspondem ao estágio *operatório-concreto;* os sujeitos classificados em *nível de dedução formal* apresentam funcionamentos cognitivos relativos ao estágio *operatório-formal*, mas também manifestam formas de pensar correspondentes aos níveis anteriores. Ver Figura 3.1.

Figura 3.1
Correspondência entre os quatro primeiros níveis de pensamento geométrico do modelo de VAN HIELE e os estágios de desenvolvimento cognitivo da teoria piagetiana.
Fonte: autora

No modelo de VAN HIELE transparece o quanto propriedades enunciadas num certo nível se tornam objeto de reflexão no nível seguinte, mostrando um processo de avanço por patamares de conhecimento similar ao processo de desenvolvimento cognitivo do sujeito. Ao observar, em situações de aprendizagem, adultos sem conhecimentos prévios de geometria, VAN HIELE detectou as mesmas dificuldades apresenta-

[4] FREUDHENTAL, H. **Revisiting mathematics education**, Dordrecht / Boston / London : Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 98. No caso do losango, se de início ele é simplesmente uma forma, no nível 1 são identificadas propriedades: "lados iguais", "diagonais perpendiculares", "ângulos opostos iguais". No nível 2, as propriedades são postas em relação: "se lados opostos são iguais então as diagonais são perpendiculares". No nível três as relações inferenciais são demonstradas. No nível 4, é o pensamento que torna significativas as geometrias não-euclidianas.

[5] DENIS, L. **Relaciones entre la etapa de desarrolo cognoscitivo del adolescente y sus niveles Van Hiele de pensamiento geométrico**, em Revista de Didáctica de las matemáticas, nº 2. 1994.

das pelos alunos em idade escolar, o que desencadeou sua investigação sobre os diferentes níveis de pensamento geométrico.

NASSER [6] infere, após aplicar clássico teste de identificação de nível de pensamento geométrico, que os alunos cursando o primeiro ano de universidade não apresentam desenvoltura em raciocínios dedutivos. Tomando como critério classificatorio quatro acertos dentre cinco das questões propostas em cada nível e mantendo para classificação somente os alunos que respeitaram a hierarquia de níveis, obteve como resultados:

Nível 4	Nível 3	Nível 2	Nível 1	Nível 0	Abaixo	Não classificados
2.7%	7.6%	20.1 %	20.9 %	11.4%	4.9%	32.3%

É à luz da teoria de PIAGET que se pode entender esta evolução do pensamento geométrico. A identificação de diferentes formas geométricas começa com as *abstrações empíricas*; é assim que a palavra "triângulo" passa a designar a classe das formas triangulares pela comparação com formas que não guardam esta característica. As *abstrações pseudoempíricas* respondem pelas depreensão, nos objetos geométricos, de propriedades neles não explícitas, mediante experimentos de pensamento; é quando são identificadas as diferentes propriedades de um quadrado — ângulos retos, lados iguais, diagonais perpendiculares — mas ainda sem o estabelecimento de relações inferenciais entre essas propriedades. Quanto aos teoremas e demonstrações, entram em cena, sobremodo, as *abstrações reflexionantes*, quando relações inferenciais tornam-se objeto de investigação e a explicação exige raciocínios de natureza lógico-dedutiva. É na coordenação das operações mentais que se constituem as relações existentes entre esses objetos e as razões que as explicam. Isto implica a construção de conhecimento na forma de teoria, viabilizando novos patamares de conhecimento.

Para PIAGET, a axiomatização resulta da *abstração reflexiva.* Esta, ao retroagir sobre o modelo teórico, leva à tomada de consciência da essência da axiomatização. Em novo patamar de reflexão, a liberdade de escolha de axiomas assegura fundamentos para teorias cada vez menos intuitivas (o caso das geometrias não-euclidianas):

[6] NASSER, L. **Using the Van Hiele Theory to improve secondary school geometry in Brasil**, PhD Thesis, King's College, University of London. London, England, 1992. O teste foi aplicado a amostra de 263 alunos, na faixa etária de 18-19 anos, cursando o primeiro ano dos cursos de Matemática, Física, Química, Geologia e Geografia, na Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Com efeito, se a axiomatização baseia-se em certos processos de abstração reflexiva, ela acrescenta-lhe uma liberdade de manobra cada vez maior (...) a própria história da axiomatização mostra que, a partir de um nível onde, como Euclides, os axiomas deviam ainda permanecer intuitivos e evidentes (e consistir, portanto, em simples empréstimos ao pensamento natural) a abstração retroativa promoveu-se à categoria de atividade diferenciada que, tornando-se consciente de seus objetivos e generalizando-os, adquiriu esse poder novo de assegurar fundamentos para teorias cada vez menos intuitivas (...) a formalização constitui efetivamente, do ponto de vista genético, um prolongamento das abstrações reflexivas já em ação no desenvolvimento do pensamento, mas um prolongamento que, pelas especializações e generalizações por ele dominadas, adquire uma liberdade e uma fecundidade combinatória que superam amplamente e em todos os aspectos os limites do pensamento natural (...) [7]

Entretanto, a construção do conhecimento em geometria — a geometria encarada como modelo teórico — também depende de *abstrações empíricas.* PIAGET, em seu livro “Abstração Reflexionante”, destaca [8] que, no terreno *sui generis* da geometria, os funcionamentos cognitivos envolvem constante colaboração das duas formas de *abstração* — a *empírica* e a *reflexionante* —, incluindo-se aqui o caso particular de *abstração pseudoempírica*:

A tomada de conhecimento de propriedades espaciais levanta um problema complexo, devido ao fato de que a abstração empírica não basta neste caso, de forma alguma, a si própria e tem a necessidade de um quadro reflexionante (...) e também devido ao fato de que , reciprocamente a isto, a abstração reflexionante, apoiando-se sobre a coordenação das ações do sujeito, exige constantemente, sempre que se trata, não de teoria pura (em que a verificação permanece reflexionante e intrínsica), mas de representação do real, uma correspondência com os produtos da abstração empírica, apoiando-se nos objetos e fornecendo uma informação complementar quanto a significação das deduções efetuadas. [9]

PIAGET avança razões para esta complexidade: a construção de conhecimento geométrico dá-se em zona de intersecção da realidade exterior, fonte das idealizações figurativas, com as operações do sujeito. Os observáveis figurativos participam das transformações racionais e, sendo estas transformações também representáveis sob forma figurativa, vem daí a imbricação das abstrações:

(...) o espaço constitui o ponto de junção entre a realidade exterior e as operações do sujeito: de onde a união particular que existe entre a abstração reflexionante e a abstração empírica, a primeira conferindo às propriedades espaciais um caráter de necessidade e a segunda apoiando-se sobre o fato de que estas propriedades existiam no objeto, antes de sua tomada de conhecimento (...) toda a evolução da geometria é a de uma formalização

---

7 PIAGET, J. **Epistemologia Genética**. São Paulo SP : Martins Fonte, 1990 p. 70 - 71.

8 Isto também aparece no trabalho de DENIS, já referido, quando ele constata a presença de pensamentos do *nível 1-2* , mesmo já estando o aluno no *nível da dedução formal*.

9 PIAGET, J. **Abstração Reflexionante**. Porto Alegre RS : Editora Artes Médicas, 1995, p. 269.

> *progressiva que dissocia as formas operatórias de seu conteúdo figurativo (...) Não é pois surpreendente que (...) as reações aos problemas geométricos comportem as três características seguintes. Em primeiro lugar, uma primazia provisória da abstração empírica, envolvida, desde o início, pelos esboços de uma abstração reflexionante que assumirá importância cada vez maior(...) Em segundo lugar, o sujeito detém-se a verificar a convergência entre os produtos de suas abstrações reflexionantes e as propriedades do objeto, estando a abstração empírica, que fornece o conhecimento destas, cada vez melhor afinada pelas coordenações inferenciais reflexionantes (...) Em terceiro lugar (...) a abstração refletida começa tardiamente em relação ao que produz o processo como tal, da abstração reflexionante, e finalmente é fonte de progresso, engendrando reflexões sobre reflexões."* [10]

PIAGET registra, na análise da experiência sobre as relações entre área e perímetro de um retângulo que, desde os estágios iniciais de desenvolvimento, há na dialética *empírico* / *reflexionante* gradativo enquadramento do primeiro momento pelo segundo, mediante ações que refinam o "olhar empírico" em relação ao observável. A *abstração empírica* direciona-se a constatações, e a *abstração reflexionante* direciona-se especialmente às razões que explicam as constatações, introduzindo necessidade que transcende a simples constatação. Isso nada mais é do que o propósito de uma demonstração matemática.

O matemático HILBERT também se refere à natureza *sui generis* da geometria:

> *Geometria é a ciência que trata das propriedades do espaço. Ela difere, na sua essência, de domínios da matemática pura como a teoria dos números, a álgebra ou a teoria das funções. Os resultados nestas últimas são obtidos através de puro pensamento (...) A situação é completamente diferente no caso da geometria. Eu nunca posso penetrar nas propriedades do espaço através de pura reflexão (...) Espaço não é um produto da minha reflexão. Pelo contrário, ele me á dado através da impressão.* [11]

A aprendizagem da geometria leva, necessariamente, a ascensão em patamar de conhecimento. Mas esta é aprendizagem que depende de provocação intencional porque na crucial mudança de natureza de pensamento – de empírico para dedutivo – apresentam-se dificuldades não superáveis de forma espontânea.

---

[10] Ibid, p.270, p. 271e p.272.

[11] Transcrito de notas de curso ministrado por HILBERT, em Königsberg, 1891. Em CORRY, L. **The Origins of Eternal Truth in Modern Mathematics: Hilbert to Bourbaki and Beyond**, 1999, http:// spinoza.tau.ac.il/hci /ins/ cohn/corry/download/truth.htm.

3.2 As dificuldades

Das pesquisas em educação matemática relativas ao ensino e aprendizagem da geometria, interessam aqui, especialmente, as que lançam luzes sobre os funcionamentos cognitivos solidários ao processo de construção deste conhecimento.[12] O "estado da arte" da pesquisa proporciona interessantes subsídios para o entendimento das dificuldades dos alunos em situação de aprendizagem, em particular os trabalhos que têm aportes teóricos advindos da teoria piagetiana. Também merece consideração o surpreendente trabalho documentado nos "Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics" [13], realizado ainda nos anos 50 e divulgado internacionalmente somente nos anos 70.

Para tornar mais clara a discussão sobre as dificuldades de aprendizado, é pertinente explicitar, agora com mais cuidado, o modelo teórico em que se baseia a geometria.

Este modelo organiza-se em *noções* e *relações primitivas*, *axiomas*, *definições* e *teoremas*. As *noções* e as *relações primitivas* são aceitas sem explicação e revestem-se de significados intuitivos; é assim que se fala, inequivocamente, de *pontos*, *retas*, *estar entre*, *ser igual a*... *Axiomas* são os pressupostos aceitos como ponto de partida para a construção do modelo, não cabendo questionamentos quanto à sua veracidade. No caso da geometria euclidiana, a intuição advinda das experiências com o mundo sensível reforça sua aceitabilidade, e assim se admitem, como axiomas: "dois pontos determinam uma única reta", "por um ponto exterior a uma reta passa uma única reta paralela".[14] *Definições* são simples facilitadores na organização do modelo, encerrando, em expressão única, determinadas relações geométricas: a expressão "mediatriz" é tomada como "a reta perpendicular a segmento que passa pelo seu ponto médio"**.** *Teoremas* são afirmações passíveis de demonstração, estando sua veracidade garantida por um encadeamento de inferências lógicas — a argumentação lógico-dedutiva — apoiadas na estrutura que dá início ao modelo, e nos teoremas que, similarmente, já foram aí

---

[12] Grupo de destaque na área da educação matemática é o International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME).

[13] Os resultados da pesquisa do grupo soviético surpreendem pela sistematização: inicialmente são investigadas e detectadas dificuldades dos alunos; após, estratégias didáticas visando a superação das dificuldades são projetadas e implementadas, seguindo-se novas investigações sobre possíveis melhorias nos desempenhos dos alunos.

[14] A geometria euclidiana se caracteriza por este axioma.

inseridos; é assim que se faz demonstrável a afirmação "num triângulo o ponto de intersecção das mediatrizes de dois dos lados eqüidista dos três vértices".

É nas definições, nos teoremas e demonstrações que se concentram as dificuldades a serem discutidas.

3.2.1 O desenho, a linguagem e os conceitos geométricos

Na modelagem dos objetos geométricos e de suas relações há um sistema de representação que envolve linguagem simbólica, linguagem natural e desenhos. Como bem assinala THURSTON,[15] os objetos matemáticos são entidades intelectuais dotadas de plena existência só na mente das pessoas que os concebem ou que os utilizam, e é o sistema de representação cristalizador desses objetos que permite, entre outros recursos, o compartilhamento de idéias e novos resultados entre interlocutores.

No sistema de representação da geometria tem-se linguagem natural / simbólica e desenhos, em solidariedade, dando suporte aos raciocínios de natureza dedutiva tiva [16]. Um exemplo: a demonstração do teorema de Pitágoras — "num triângulo retângulo a área do quadrado sob a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados sobre os catetos" — inicia com desenho bastante simples solidário ao enunciado, a saber, um triângulo retângulo e quadrados sobre os lados do triângulo. É o acréscimo de novos objetos geométricos que torna o desenho solidário à demonstração — são novos triângulos que "deslizam" em retas paralelas. Ver Figura 3.2.

Uma das primeiras dificuldades da situação de aprendizagem é interpretar o desenho que acompanha uma definição ou um teorema e sua demonstração. Trata-se de entender que o desenho é uma instância particular de representação de determinada classe de objetos geométricos e que é na fusão adequada de significantes (no desenho) e significados (nos enunciados) que se constituem mentalmente os objetos geométricos e os teoremas cristalizados no sistema de representação.

---

[15] THURSTON, W. **On Proof and Progress in Mathematics**, Bulletin of The American Mathematical Society, vol.30, nº 2, 1994.

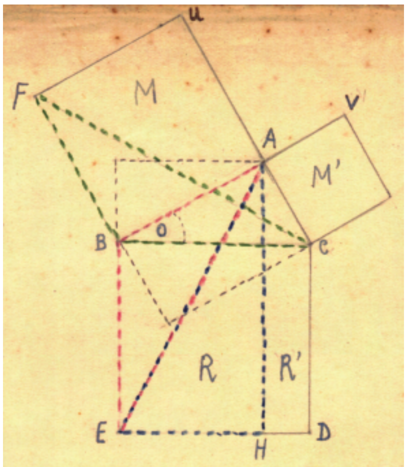


Figura 3.2
Teorema de Pitágoras
Fonte: caderno de anotações da professora G.F.Gravina, 1952.

FISCHBEIN [17] esclarece esta dificuldade de ver o objeto geométrico quando fala em *conceito figural* (*figural concept*). O conceito tem dois componentes: um *conceitual* e outro *figural*. O componente *conceitual*, com maior ou menor grau de formalismo vazado em linguagem natural e / ou simbólica, caracteriza uma certa classe de idealizações. Já o *componente figural* é de natureza visual (forma, posição, tamanho) e se expressa através de um desenho. É da natureza da geometria apreender relações existentes entre os objetos geométricos e, para tal, torna-se importante uma adequada simbiose entre os componentes conceitual e figural:

> *(...) no caso especial de raciocínio geométrico, nós temos que lidar com um tipo especial de objeto mental, o qual possui, ao mesmo tempo, propriedades conceituais e propriedades figurais. No raciocínio geométrico a razão desta profunda simbiose entre restrições simbólicas/analíticas e propriedades figurais é que nós estamos lidando com um sistema axiomático (...) É fazendo uso de figuras intrinsecamente controladas por restrições conceituais, que o processo de invenção em geometria progride de forma criativa."* [18]

Com os *conceitos figurais*, FISCHBEIN evidencia uma das primeiras dificuldades a ser superada pelos alunos na ascensão de patamar de conhecimento, do empírico para o hipotético-dedutivo:

---

[16] Também existem convenção de signos que indicam certas relações: congruência de segmentos, de ângulos, perpendicularidade, etc...

[17] FISCHBEIN, E. **The Theory of Figural Concepts.** Educational Studies in Mathematics, 24, nº 2, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1993.

[18] Ibid, p. 144, 149, 160.

> *A dificuldade em manipular conceitos figurais, isto é, a tendência de negligenciar a definição em função da pressão de restrições figurais, representa um dos maiores obstáculos ao raciocínio geométrico (...) Freqüentemente, restrições figurais escapam do controle conceitual e impõem à linha de raciocínio interpretações que figurativamente são consistentes, mas que não estão mais sujeitas às restrições conceituais"* [19]

É assim, por exemplo, que os alunos tomam como propriedade do segmento altura de um triângulo o "*ser um segmento no interior do triângulo*", ou que se referem ao paralelogramo como o "quadrilátero com dois ângulos agudos e dois obtusos".[20] Dificuldade clássica, registrada em diversos momentos na literatura, é a ordenação por inclusão na família dos quadriláteros: os quadrados não são reconhecidos como subclasse dos retângulos, nem os retângulos como subclasse dos paralelogramos.

A origem dessas dificuldades reside nos desenhos prototípicos, inadequadamente tomados como a expressão do componente figural (outras possíveis expressões normalmente não são consideradas) e nos quais, de fato, são procedentes as propriedades depreendidas. A dificuldade está em entender que um dado desenho nada mais é do que uma instância particular do componente figural, guardando, portanto, uma generalidade no seu aspecto figural, controlada pelo componente conceitual.

Em casos extremos, os alunos até mesmo confundem características físicas do desenho — espessura do traçado, tamanho do ponto — com propriedades geométricas ao dizerem, por exemplo, *que "círculos tangentes se interceptam em infinitos pontos"* [21] ou que o *"ponto de intersecção de duas retas é menor que o ponto de interseção de três retas"*.[22] São casos que ilustram, de forma contundente, a atribuição de significados que fogem do domínio de seu funcionamento — o desenho "escapa" do significado que lhe é atribuído no modelo teórico.

É interessante observar que FISCHBEIN registra em PIAGET e INHELDER considerações que estão em sintonia com a sua proposta de *conceito figural*:

---

[19] Ibid, ps. 151, 155, 161

[20] Por definição: a) a altura relativa à um dos lados de um triângulo é o segmento AB , onde A é vértice oposto ao lado em questão e B é o pé da reta perpendicular que intercepta o lado e passa por A; b) um paralelogramo é um quadrilátero com lados opostos paralelos.

[21] Resposta dada por alunos calouros do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, registrada em GRAVINA, M. A. **Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria** em Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, Belo Horizonte, 1996.

[22] Resposta dada por alunos de 11 anos, registrada em FISCHBEIN, **The Theory of Figural...,** p. 148.

> *(...) no caso especial das operações geométricas, cujo papel é descrever as figuras espaciais e suas transformações, existe uma homogeneidade entre significado das operações espaciais e representante simbólico, também de natureza espacial: é uma privilegiada situação de intuição geométrica, cuja dupla natureza operacional e imaginatória, atinge uma síntese como em nenhum outro domínio (...) Somente subordinando os elementos imaginados ao núcleo operacional é que a intuição geométrica atinge adequadamente esta síntese e esta subordinação implica desenvolvimento.* [23]

MARIOTTI [24] aponta para os efeitos positivos de situações didáticas projetadas para o estabelecimento de um processo dialético de construção de *conceitos figurais,* de modo a obter-se a harmonização dos componentes conceitual e figural. Essas situações didáticas desenvolvem-se por via de discussão coletiva: inicialmente de forma espontânea, os alunos expressam seus conceitos geométricos e classificações deles decorrentes, e a partir disso o professor provoca discussão sobre as generalidades e particularidades que aí se apresentam, de tal forma que os conceitos espontâneos, resistentes à modificação, sejam reconstruídos em novo patamar, quando então se inserem dentro de teoria organizadora do conhecimento. Na experiência relatada por MARIOTTI, no início é natural, para os alunos, classificar cubos e paralelepípedos como classes disjuntas de objetos geométricos; em suas manifestações espontâneas, os alunos dizem que "*paralelepípedos tem faces distintas*", e isso se explica pela predominância de imagem visual prototípica no componente figural. É pela discussão dialética em que, por um lado, características particulares são abstraídas e generalizadas e, por outro, certas particularidades são descartadas da generalização, que os alunos reconstroem os conceitos, os quais são então institucionalizados, quando a classe dos cubos passa a ser entendida como uma subclasse dos paralelepípedos.

Outros autores também se referem a dificuldades na construção de conceitos em contextos que não o da geometria, mas a essência do problema é a mesma. VINNER[25] fala de *conceito definição* como sendo o registrado nos livros e de *conceito imagem* como a construção cognitiva feita pelo aluno a partir do *conceito definição;* o conceito imagem deve ser construído em sintonia com o conceito definição, mas o autor registra que, freqüentemente, ele resiste à subordinação: "*os hábitos de pensamento do*

---

[23] FISCHBEIN, Ibid. **,** p. 154.

[24] MARIOTTI, M.A . **Figural and conceptual aspects in a defining process**. Proceedings of Psychology of Mathematics Education Congress, Lisboa, 1994.

[25] VINNER, S. **The Role of Definition in the Teaching and Learning of Mathematics**, em D.Tall (editores.), Advanced Mathematical Thinking, Dordrecht – Boston - London : Kluwer Academic Publishers, 1991.

dia-a-dia predominam e os alunos deixam de considerar a necessidade de consultar as definições formais". Isso explica o recorrente uso inadequado, pelos alunos, de definições. MOORE [26] aponta a utilização inadequada de conceitos, e o reduzido domínio da linguagem e da notação matemática em situação de produção de demonstrações, como duas das principais dificuldades cognitivas enfrentadas por alunos universitários.

Não resta dúvida: chegar a *construtos geométricos individuais* em sintonia com os objetos cristalizados na geometria não é um processo natural. Depende, e muito, das ações e elaborações mentais dos alunos e, pela natureza deste conhecimento, as elaborações exigem tanto *abstrações empíricas* como *abstrações reflexionantes* — essas, em especial, na forma particular de *abstrações pseudo-empíricas*. É com a subordinação, crescente, das primeiras pelas últimas, que instala-se o pensamento hipotético-dedutivo.

É necessário que os conceitos empíricos e espontâneos sejam postos em discussão para que recebam reelaboração e depuração. Não basta o professor apresentar, de forma pronta e acabada, os objetos geométricos pois os alunos, privados das necessárias reflexões, resistem aos conceitos que participam do modelo. E mais: sem este processo construtivo, o significado e a importância de um conceito tornam-se a eles inacessíveis, explicando, por exemplo, sua resistência à definição "*um paralelogramo* é *quadrilátero com lados opostos paralelos*"; eles continuam se referindo sempre ao paralelogramo como "*quadrilátero com lados opostos paralelos, dois consecutivos sempre diferentes e com ângulos agudos e obtusos".*

Como bem destaca DE VILLIERS, [27] a elaboração de uma definição é atividade matemática não menos importante do que outras, tais como fazer conjeturas e produzir demonstrações; no entanto, é surpreendente quão pouco espaço à ela é reservado nas situações de aprendizagem.

---

[26] MOORE, R. **Making Transition to Formal Proof**, Educational Studies in Mathematics, 27, Dordrecht – Boston - London : Kluwer Academic Publishers, 1994. p. 249, 265

[27] DE VILLIERS, M. **To teach definitions in geometry or teach to define?** Proceedings of PME, vol 2, Stellenbosch, South Africa, 1998.

3.2.2 O significado de uma demonstração

"Um matemático não fica satisfeito enquanto uma demonstração não está completa e é considerada completa pelos padrões da Matemática …[Sarnak]
Em Matemática existe este conceito de demonstrar alguma coisa, de conhecer com absoluta certeza. O que é chamado de demonstração rigorosa …[Manzur]
Demonstração rigorosa é uma série de argumentos… [Ribet]
baseados em dedução lógica [Sarnak],
que são construídos um após o outro [Ribet],
passo à passo, até que se chega na prova completa [Sarnak]
É disto que trata a Matemática…" [Manzur] [28]

Outra dificuldade no processo de aprendizagem da geometria é o entendimento do sentido de demonstração, o perceber a diferença entre argumento de natureza empírica e argumento de natureza dedutiva, ou seja, que *"é o discurso demonstrativo que determina o* status *dos objetos em jogo (...) A demonstração participa da construção daquilo que nós chamamos inteligibilidade dos fatos matemáticos".*[29]

Demonstrar uma propriedade geométrica significa estabelecer sua veracidade através de argumentação lógico-dedutiva, apoiando-se nos axiomas e nos teoremas da mesma forma já demonstrados. O propósito é a explicitação de razões que explicam a evidência da uma propriedade — no geral propriedades que são intuitivamente óbvias. Nas palavras de DAVIS & HERSH:

> *Parece claro que nós buscamos uma demonstração porque se alguma coisa é verdadeira e nós não conseguimos explicar "por quê" isto significa uma falta de entendimento de nossa parte. Nós acreditamos que a demonstração é uma forma de entender porque uma conjetura é verdadeira, o que é muito mais do que convincentes argumentos heurísticos.* [30]

A título de ilustração: mediante manipulações empíricas, conclui-se que "um ângulo inscrito num círculo, subentendendo sempre o mesmo arco, tem medida

[28] Composição de idéias de matemáticos contemporâneos apresentada na fita de video **The Proof** (Nova & Public Broadcasting Television System USA, 1997). A fita traz a história que culmina com demonstração da conjetura de Fermat. Os depoimentos de Andrew Wiles, matemático que finalmente demonstrou a conjetura, e de outros matemáticos que também se envolveram de forma direta neste acontecimento, registram, de forma vívida e profunda, o complexo processo de criação em matemática.

[29] BKOUCHE, R. **De la Démonstration en Géométrie**, em Actes du Colloque de Géométrie, Institut de Recherche de l'Ensignement de Mathématiques, Lille, 1994, p. 218, 225.

[30] DAVIS, P. e HERSH, R. **The Mathematical Experience**. Boston, Great Britain :Pelican Books, 1983, p. 368.

constante". De início, o que se tem é uma conjetura com forte evidência de veracidade, mas não uma compreensão. É na argumentação dedutiva que se dá a compreensão.

A ascensão ao nível de pensamento geométrico, onde se torna claro o significado de uma demonstração, depende de um longo processo. Os alunos hesitam entre argumentos de natureza empírica e argumentos de natureza dedutiva até que, finalmente, torna-se claro que certas propriedades impostas aos objetos geométricos implicam outras, então passíveis de demonstração.

Na literatura, diversos trabalhos [31] registram comportamento de alunos, já no final dos estudos secundários e mesmo no início de estudos universitários, no qual: a) a verificação empírica é considerada suficiente para garantir a veracidade de uma propriedade; tais alunos não hesitam em aceitar como verdade, após algumas medições, que "a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus"; b) a demonstração é tomada como garantia de verdade somente na situação particular do desenho representativo do teorema em questão — após terem trabalhado com a demonstração que garante que "os pontos médios dos lados de um quadrilátero formam um paralelogramo", eles vacilam para responder se a propriedade aplica-se a um quadrilátero diferente do inicialmente representado.

Especialmente em CHAZAN[32] encontra-se pesquisa bem documentada (entrevistas com alunos) onde aparecem esses comportamentos, mesmo já tendo os alunos discutido os diferentes alcances de argumentações empíricas e dedutivas. O autor detecta, nos comentários dos alunos, argumentos extremamente articulados, bem como habilidade em comunicar o que estão pensando, evidenciando resistências à mudança do natureza de pensamento. Alguns destes comentários: [33]

> *Se eu testei num monte de triângulos e é sempre verdade então eu aceito o resultado... Se continuo testando mais e mais vezes, digamos mais 10 vezes, e sempre funciona, eu diria que, sem dúvida, tem que ser deste jeito...*
>
> *Esta demonstração dedutiva é para este triângulo (no desenho associado), mas o enunciado diz que é para qualquer triângulo. Eu tenho que pensar em todos os tipos de triângulo, poderia ser verdade. Eu não poderia garantir isto de imediato...*

---

[31] Em HAREL, G. e SOWDER, L. **Student's proof schemas: results from exploratory studies**, em Schoenfeld, A . et alli (editores), Research in Collegiate Mathematics Education, vol III,Washington, American Mathematical Society, 1991.

[32] CHAZAN, D. **High scholl geometry students'justification for their views of empirical evidence and mathematical proof**, Educational Studies in Mathematics, nº 24, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1993.

[33] Ibid., p. 382

> *Eu ainda tentaria num monte de triângulos diferentes. Mesmo que a gente tenha visto a demonstração, para ficar seguro, eu testaria nos triângulos. Com a prova dedutiva e sem exemplos, eu sempre fico em dúvida... Eu ainda me mantenho, de alguma forma, cético...*

Ao mapear em duas categorias as *provas* produzidas por alunos, BALLACHEF [34] coloca em cena o que denomina *gênesis cognitiva da demonstração* e indica a necessidade de evolução cognitiva, até que eles entendam o significado de uma demonstração e se tornem aptos a produzir demonstrações. São as *provas pragmáticas (preuve pragmatique)* e as *provas intelectuais (preuve intellectuelle)* que revelam o *status* do conhecimento em questão. As primeiras são explicações advindas de ações diretas sobre certas representações dos objetos matemáticos —*"hipotecada pela singularidade do acontecimento que a constitui (...) tributária de uma contingência material: ferramentas imprecisas, defeitos no funcionamento..."*. [35] As segundas já não dependem apenas da ação efetiva sobre a representação, mas têm nas ações interiorizadas e no discurso lógico-dedutivo o controle dos objetos e de suas relações.

A ascensão de categoria depende de concomitante evolução nas formas de *ação, formulação e validação.*[36] O autor identifica quatro diferentes níveis de formas de validação, solidárias ao processo de ascensão: [37]

— o *empirismo ingênuo* (*empirism naïf*) toma, para validação de uma propriedade, a sua verificação em alguns poucos casos, sem questionamento quanto a particularidades; este modo de validação rudimentar, reconhecidamente insuficiente, é uma das primeiras formas do processo

---

[34] BALACHEFF, N. **Processus de Preuve et Situations de Validation**, Educational Studies in Mathematics, 18, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1987.

[35] Ibid., p. 157

[36] Ver Capítulo 2, p. 48.

[37] No artigo de BALACHEFF tem-se relato de experiência que ilustra os diferentes níveis, onde o problema proposto é relativo ao número de diagonais de um polígono. No *empirismo ingênuo,* os alunos determinam experimentalmente que o número de diagonais de um certo pentágono é 5; modificam a forma do pentágono e conferem novamente a constatação inicial; daí concluem peremptoriamente que um hexágono tem 6 diagonais. Na *experiência crucial* os alunos fazem experiência com um polígono de muitos vértices (*uma imensa figura*), buscando depreender generalização empírica, buscando a validação em outros casos particulares. No *exemplo genérico* os alunos utilizam o caso particular do hexágono para explicação, mas desprendem-se de particularidades, o que dá indícios de pensamento dedutivo: "num polígono com 6 vértices, em cada vértice temos *3 diagonais. Assim são 18 diagonais; mas como uma diagonal une dois pontos, o número de diagonais é 9. O mesmo acontece com 7 vértices, 8, 9..."* E finalmente, na *experiência mental* os alunos se desprendem do caso particular o que transparece na argumentação: "em cada vértice o número de diagonais é o número de vértices menos os dois *vértices vizinhos; é preciso multiplicar isto que encontramos pelo número de vértices, porque em cada vértice parte o mesmo*

de generalização, e resiste ao longo do processo de desenvolvimento do pensamento geométrico;

— *experiência crucial* (*expérience cruciale*) é procedimento de validação em que é proposto, explicitamente, o problema da generalização; ele intenta verificar a propriedade em caso particular mas sem considerá-lo tão particular, de modo a permitir, não mais de forma peremptória, a generalização;

— o *exemplo genérico* (*exemple générique*) consiste na explicitação das razões que validam uma propriedade que encerra uma generalidade mesmo, fazendo uso de um representante particular do objeto geométrico;

— *experiência mental (expérience mentale)* é explicação depreendida de concretização em representante particular; a argumentação flui através de pensamentos que controlam toda a generalidade da situação, e não mais através de situações particulares, como no *exemplo genérico*.

Ainda segundo BALACHEFF, o nível *experiência mental* marca claramente a transição da *prova pragmática* à *prova intelectual*. Nesse nível, ações interiorizadas dirigem-se à generalidade, despreendidas de concretização particular, em *gênesis cognitiva da demonstração.* O nível *exemplo genérico* é uma fase intermediária, ora na categoria de *prova pragmática*, ora na categoria de *prova intelectual*, dependendo da natureza efetiva da ação sobre o exemplo — ou ação ainda dependente de concretização particular, ou ação que usa a concretização apenas como suporte para expressar raciocínio generalizador. Já a *experiência mental* converge para explicação caracterizada como demonstração matemática, e nesta se transforma quando considera os princípios de organização do modelo teórico:

> *A elaboração de uma demonstração requer uma organização e um* status *particular de conhecimento, explicitados e aceitos por uma comunidade, que não se autoriza mais a buscar onde quiser os argumentos que utiliza. O conhecimento deve se constituir como um conjunto fortemente institucionalizado de definições, teoremas e regras de dedução, cuja validade é socialmente compartilhada. Este é o princípio que fundamenta o rigor matemático*. [38]

---

número de diagonais. Mas estamos contando cada diagonal duas vezes; o número de diagonais que procuramos se encontra dividindo por 2 e obtemos uma vez cada diagonal"

[38] BALACHEFF, N. **Apprendre la Preuve**, em Sallantin J., Szczeciniarz J.-J. (editores) Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle. Paris, France : PUF, 1998. p. 201.

Nas diferentes formas de validação anteriormente apresentadas, identifica-se em funcionamento, especialmente nos dois primeiros níveis, a *abstração empírica;* nos dois últimos níveis ocorrem as *abstrações reflexionantes*. Quanto às categorias de provas — *pragmáticas* e *intelectuais* — pode-se relacionar a segunda, no nível de validação *experiência mental*, a processos cognitivos característicos do *estágio operatório-formal*; já a primeira, no seu início, corresponde a comportamentos assemelhados aos do *estágio pré-operatório*; o nível de validação *exemplo genérico*, momento crucial na transição de categorias, relaciona-se com os processos cognitivos do *estágio operatório-concreto.* Ver Figura 3.3.

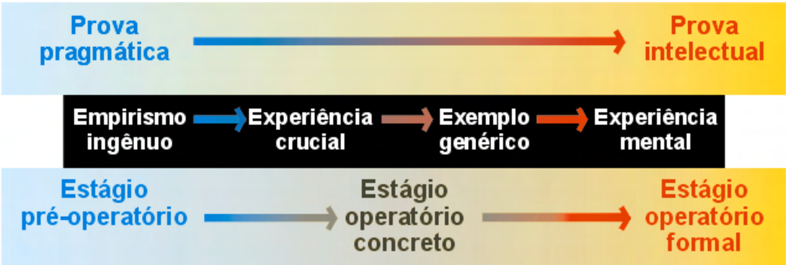


Figura 3.3
Correspondência entre estágios desenvolvimento cognitivo e categorias de provas
Fonte: autora

De forma não tão explícita, o autor também aponta para essa estreita relação entre categorias de provas e estágios de desenvolvimento cognitivo:

> *A evolução de provas pragmáticas para provas intelectuais e para demonstrações não é marcada somente por uma evolução nas características de linguagem, mas também pelo* status *e natureza do conhecimento. As provas pragmáticas apoiam-se em saberes práticos, essencialmente decorrentes de ações (*aqui no sentido de concretas)*; as provas intelectuais exigem que o conhecimento seja colocado como objeto de reflexão ou de debate. Isso corresponde à clássica evolução descrita na teoria piagetiana.* [39]

A categorização de provas apresentada por BALACHEFF torna claro um dos pontos de dificuldade dos alunos: o entendimento do significado de uma demonstração, de que certas relações entre os objetos geométricos — as *hipóteses* de um teorema — encerram necessariamente novas relações — a *tese* do teorema — e de que, assim sendo, elas se tornam explicáveis na forma de argumentação dedutiva.

[39] Ibid., p.159

A explicação é um dos propósitos de uma demonstração. No processo de aprendizagem, tal propósito merece destaque especial por evidenciar a necessidade da ação "demonstrar" — ou seja, explicar relações geométricas não mais passíveis de escolha, pois elas "estão" nos objetos. Para os alunos, essa necessidade não se apresenta de forma natural, como o revela a recorrente pergunta: "*por que demonstrar esta propriedade se estou 'vendo' que é verdadeira?*" DE VILLIERS [40] sugere que os alunos entenderiam melhor essa necessidade se esclarecidos sobre as diferentes funções de uma demonstração: é *explicação* quando esclarece porque uma certa propriedade (mesmo intuitivamente óbvia) é verdadeira; é *convencimento* quando trata-se de garantir a veracidade de uma propriedade que não é óbvia[41] ; é *descoberta* quando o processo de demonstração faz emergir novas propriedades; e é *sistematização* quando ela organiza os resultados obtidos.

Muitos dos teoremas da geometria são intuitivamente óbvios, mas no modelo teórico eles devem ser demonstrados. Isto é de difícil entendimento para os alunos. A dificuldade é explicável: algumas propriedades — os *axiomas* da teoria — são tomadas como pressupostos verdadeiros, e no caso da geometria a aceitação é natural; no entanto, outras propriedades também intuitivamente óbvias devem ser demonstradas — por exemplo, que "por um ponto exterior à uma reta passa uma única perpendicular à esta reta". Assim sendo, para alunos em início de aprendizagem, a necessidade de demonstração pode advir, primordialmente, da busca de *explicação;* muito mais do que o *convencimento,* busca-se o entendimento do "porquê" de certas propriedades geométricas.

Enquanto se fizer presente a pergunta dos alunos "*por que demonstrar?*" depreende-se que eles estão atribuindo à demonstração, quase que exclusivamente, a função de *convencimento,* a qual, no estudo inicial da geometria, não se apresenta como convincente justificativa para a necessidade de demonstração. Vale destacar: no proces-

---

[40] DE VILLIERS, M. **Developing understanding of proof within the context of defining quadrilaterals**, em International News Letter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, http://www-cabri.imag.fr/Preuve, mai/juin 2000.

[41] Por exemplo, quando se demonstra que a seqüência alternada de polígonos e círculos — P_i polígonos regulares convexos com i vértices e C_i círculos inscrito em P_i e circunscrito a P_{i+1} — converge para um círculo, já que a intuição sugere que tal seqüência converge para um ponto. Ou ainda: sabendo-se que no plano o quadrado que 'engloba' os quatro círculo de centros (+ - 1, + - 1) e raio 1 engloba o círculo de centro (0,0) tangente aos quatro círculos e que fato similar acontece no espaço, é uma demonstração que convence no espaço n-dimensional (n> 3) a esfera, então generalização do círculo tangente em dimensão dois, não está contida no cubo de dimensão n.

so de criação em matemática, quando uma conjetura é posta sob demonstração, é muito mais a função de *explicação* que comparece, e não tanto a de *convencimento*; a veracidade da conjetura geralmente não está em questão, pois é com confiança na veracidade que o matemático se coloca em processo de demonstração. [42].

Indicativa da importância da demonstração como *explicação* é a recorrente busca de novas demonstrações para teoremas já estabelecidos; quão mais simples a demonstração, mais transparente se torna a veracidade do teorema. Quanto a isto, são interessantes as palavras de HALMOS sobre o teorema das quatro cores: [43]

> *(...) algum dia, talvez daqui a seis meses, talvez daqui a seis anos, alguém vai produzir uma demonstração, em sessenta páginas, para o teorema das quatro cores (...)Imediatamente depois disto, talvez em seis meses ou quem sabe em sessenta anos, alguém vai produzir uma demonstração em quatro páginas, baseada em conceitos que, com o passar do tempo, foram desenvolvidos, estudados, entendidos. O resultado será inserido na grandiosa, gloriosa, arquitetural estrutura da matemática. Eficiência não é tão importante, o que vale é o entendimento.* [44]

Mapeadas as dificuldades dos alunos no que diz respeito ao entendimento do significado de demonstração, novo problema se apresenta: como produzir demonstrações?

---

[42] Ver depoimentos na seção 2.1. Mas às vezes também se tem a situação extrema da demonstração que convence mas não explica. Deligne, matemático contemporâneo, após ter produzido uma demonstração técnica e formal de um teorema, comenta:*"Eu ficaria muito grato se alguém, que tenha entendido esta demonstração, ma explicasse"*, relatado em ALIBERT, D. e THOMAS, M. **Research on mathematical proof**, em Tall, D. (editor) Advanced Mathematical Thinking Kluwer, Dordrecht, The Nederlands : Academic Press, 1991. p. 220.

[43] O "teorema das quatro cores" diz que para colorir um gráfico planar bastam quatro cores. Foi demonstrado por Appel e Haken, em 1976. A demonstração utiliza processo exaustivo de coloração de certos subconjuntos dos grafos planares, envolvendo computações além de qualquer capacidade humana. Sendo demonstração que utiliza resultados obtidos em computador, ela é motivo de polêmica na comunidade matemática.

[44] DE VILLIERS, M. **An alternative approach to proof in dynamic geometry,** em Lehrer, R. e Chazan, D. (editores) Designing Learning environments for developing understanding of geometry and space. London, England : Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 1998. p. 379.

3.2.3 O processo de demonstração

A produção / construção de uma demonstração é um processo complexo e muito pouco desta complexidade foi abordada até aqui. Na seção que trata da natureza da matemática [45] evidenciou-se quão complexo é o seu processo de criação, com suas tentativas e erros, idéias vagas, experimentos de pensamento e combinações de idéias. Um aluno, em suas tentativas de produção de demonstração e um matemático, em sua pesquisa de ponta, encontram-se em situação similar quanto aos funcionamentos cognitivos. A diferença reside no grau de sofisticação com que o matemático manipula os objetos e processos abstratos, decorrente de sua "bagagem matemática". A Figura 3.4 ilustra a complexidade desse processo.

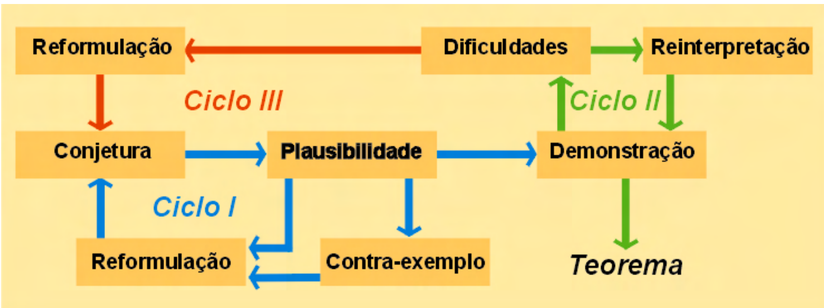


Figura 3.4
Complexidade do processo de criação
Fonte: autora

Na figura, o Ciclo I corresponde ao processo que conduz à formulação de conjeturas cada vez mais plausíveis mas que, às vezes, culmina no confronto com um contra-exemplo. O Ciclo II é o processo de demonstração de conjeturas, que se inicia movido pela plena confiança na veracidade. Seus desdobramentos possíveis são: ou o sucesso na demonstração, que pode depender de sucessivas reinterpretações do problema e, como resultado, a conjetura se transforma em teorema — ou surgimento de dificuldades, implicando a reformulação da conjetura — o Ciclo III. Este conduz a novas tentativas de demonstração, retornando-se ao Ciclo I. Há também o caso em que o insucesso de demonstração não afeta a plausibilidade da conjetura — as famosas conjeturas que, ainda sem demonstração, merecem plena confiança quanto à sua veracidade.

---

[45] Capítulo 2, seção 2.1

Para os alunos em situação de aprendizagem, é principalmente o Ciclo II que se destaca, pois as conjeturas enunciadas geralmente são bastante óbvias quanto à sua veracidade (Ciclo I) e a dificuldade em produzir demonstrações se deve a fatores que não chegam a implicar passagem pelo Ciclo III. Em geral, são dificuldades que se inserem no próprio Ciclo II: a produção de uma demonstração depende, em grande parte, de adequada manipulação do componente figural solidário ao enunciado da conjetura, o que significa torná-lo fonte de idéias a possibilitar o fluir da argumentação dedutiva.

À luz dos *conceitos figurais,*[46] pode-se falar em propriedade geométrica como sendo uma *propriedade figural*, com dois componentes: o proposicional, correspondente ao enunciado em linguagem natural e / ou simbólica; e o figural, que se concretiza num desenho. A Figura 3.5 exemplifica essas relações.

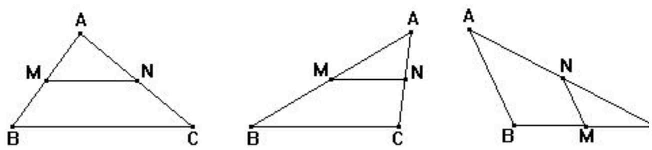
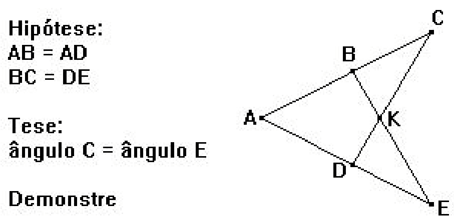
Componente proposicional (teorema da base média)	**Desenhos, possíveis instâncias do componente figural**
"Num triângulo o segmento unindo os pontos médios de dois lados é paralelo ao terceiro lado e tem como medida a metade da medida deste lado"	

Figura 3.5
Componente proposicional e componente figural
Fonte: autora

Na construção de uma demonstração, que pode ser interpretada como um processo de *transformações figurais* — argumentações dedutivas que se apoiam em *componente figural* em transformação — uma das grandes dificuldades é o tratamento a ser dado ao desenho. Trata-se de manipulá-lo, mantendo-o sempre sob o controle do componente proposicional, de tal forma que se possam aí reconstruir teoremas e conceitos (então já sob domínio) e com isto estabelecer a seqüência de raciocínios que demonstra o teorema / propriedade em questão. Quão mais implícitos estão no componente figural os elementos geométricos necessários para concatenação lógico-inferencial de hipótese e tese, tão mais difícil se torna o processo de demonstração, e este é o caso dos problemas e desafios intelectuais mais interessantes.

[46] Assunto tratado na seção 3.1.1

CURY [47] apresenta detalhada análise de comportamentos de alunos em processo de argumentação dedutiva e categoriza os erros recorrentes: a) uso inadequado de símbolos e convenções de linguagem escrita; b) informações tomadas de forma equivocada na instância particular de desenho ou informações corretas mas de caráter puramente perceptivo; c) errôneo uso de conceitos geométricos; d) conclusões de argumentação tomadas em razões inaceitáveis; e) uso inadequado de hipóteses que garantem a aplicação de teoremas já conhecidos; uso da própria tese objeto de demonstração ou de propriedades dela decorrentes. Ilustra-se estes comportamentos com uma situação analisada e respectivas manifestações dos alunos. Ver Figura 3.6.



"K forma dois triângulos , Δ BCK e ΔDEK"; "os ângulos de vértice K são alternos internos"

"traçando o segmento CE dá para fazer um triângulo equilátero"; "eu estou pensando agora se o ponto médio B vai me servir"

"o triângulo isósceles é os dois lados iguais e o outro desigual, a base (...) tem a base sempre menor que os dois lados"

"sendo Â o ângulo formado pelos segmentos AE e AC e como BE=CD pode-se concluir que ângulo C = ângulo E"; "rebatendo o ΔDKE sobre o ΔBKC veria que o ângulo B é igual ao ângulo D pois tenho BC=DE"

"Posso dizer que o ângulo C é congruente ao ângulo D pelo caso de congruência de triângulos retângulos, se não me engano, que é lado, ângulo e ângulo oposto"

Figura 3.6
Problema utilizado para categorizar erros dos alunos em argumentações dedutivas

ZYKOVA,[48] em estudo detalhado e amplamente documentado sobre dificuldades dos alunos no tratamento do componente figural, traz alguns subsídios ao

[47] CURY, H. N. **Análise de erros em demonstrações de geometria plana – um estudo com alunos do terceiro grau,** Dissertação de Mestrado, FACED / UFRGS, Porto Alegre RS, 1994. A autora também destaca erros do tipo "lapso" e de português, que não chegam a caracterizar dificuldades relativas à argumentação dedutiva .

[48] ZYKOVA, V. I. **Operating with concepts when solving geometry problems**, em Kilpatrick. J, e Wirzup, I. Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, vol 1, Scholl Mathematics Study Group, Stanford University e Survey of Recent East European Mathematical Literature, University of Chicago, 1969, p. 149, 188. Trabalho originalmente publicado em 1950 nos Proceedings of the Academy of Pedagogical Sciences of the RSFR, vol. 28. Na descrição do trabalho de

tema. No tratamento do componente figural ela destaca duas situações de dificuldade: quando ele exige a *reinterpretação de desenho* e quando exige *reconstrução do desenho*. A primeira, dificuldade menor, corresponde à situação em que o *componente figural* de um conceito está presente no *componente figural* da propriedade enunciada, devendo a propriedade ser reinterpretada, de forma a inferir-se o conceito não explicitado no enunciado. A segunda situação de dificuldade ocorre quando diversos elementos do *componente figural* da propriedade enunciada devem ser colocados em relação para que então se depreenda o que dir-se-ia ser um *subcomponente figural* solidário a *conceito* ou *propriedade figural* já conhecidos. Ver Figura 3.7.

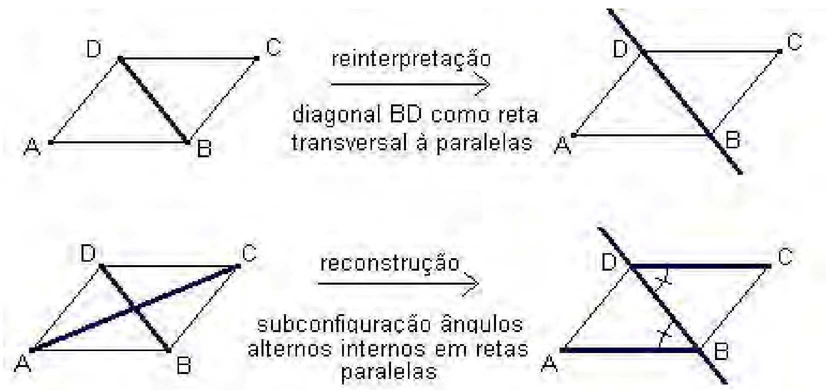


Figura 3.7
Tratamento do componente figural: reinterpretação e reconstrução
Fonte: autora

Em geral, a situação de *reconstrução* também depende de *reinterpretação* e dificilmente esta última aparece de forma isolada. Com o propósito de evidenciar diferenças, dir-se-ia que na *reinterpretação* a atenção está voltada para um certo elemento do *componente figural* enquanto na *reconstrução* ela se orienta à coordenação de diversos elementos, os quais vão constituir um *subcomponente figural*.

ZYKOVA também registra situações em que os alunos reinterpretam ou reconstroem o desenho usando "fatos aparentes", isto é, fatos que não estão sujeitos às condições dadas no enunciado ou que delas possam ser inferidos — este é o problema da fusão inadequada dos componentes conceitual e figural discutido por FISCHBEIN. São as particularidades do desenho-instância do componente figural que perturbam o

ZYKOVA foram feitos ajustes entre a linguagem utilizada em seu artigo e a utilizada neste Capítulo. O texto original é transcrito no Apêndice III.

controle lógico da argumentação, integrando-se à linha de raciocínio sem que os alunos tenham consciência da impropriedade de tais inferências.

A forma de apresentação de certas demonstrações em livros didáticos dá indicação das dificuldades apontadas por ZYKOVA. Um exemplo: uma possível demonstração do teorema de Pitágoras é a que envolve semelhança de triângulos retângulos, a serem *reconstruídos no componente figural*, devendo a posição relativa dos triângulos ser controlada na reconstrução. O que se vê na apresentação da demonstração são desenhos, à parte do desenho-instância do componente figural do teorema, de dois triângulos subcomponentes da componente figural, colocando em evidência a necessidade de sua *reconstrução.* Ver Figura 3.8.

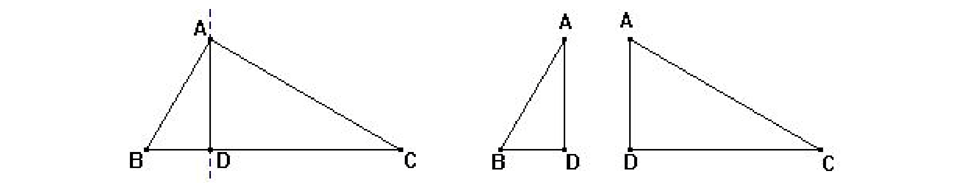


Figura 3.8
Reconstrução do componente figural
Fonte: autora

Uma terceira situação de dificuldade, não discutida por ZYKOVA, apresenta-se no processo de demonstração e é a mais complexa das três: os objetos geométricos necessários ao encadeamento de relações inferenciais não estão ainda visíveis no *componente figural* e devem ser identificados e acrescidos ao componente figural para que assim emerjam, via *reinterpretações* e *reconstruções*, os *subcomponentes figurais* que sustentarão a argumentação. É o que se vai denominar *extensão de desenho*, como ilustrado na Figura 3.9.

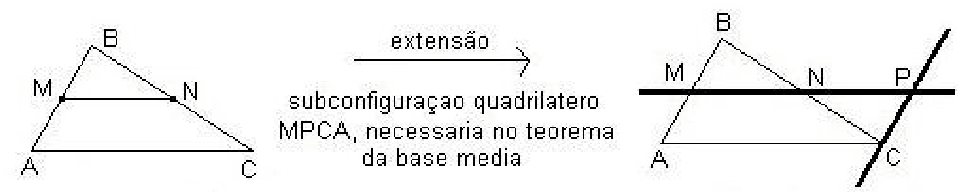


Figura 3.9
Extensão de desenho
Fonte: autora

As dificuldades acentuam-se quando a *extensão do componente figural* envolve *reinterpretações* ou *reconstruções* de objetos geométricos em posição não familiar aos alunos, isto é, diferentes das prototípicas. Tome-se aqui um exemplo, a Figura 3.10, que envolve *reconstrução / extensão / reconstrução* e que coloca em cena, como *sub-componente figural*, o *componente figural* do teorema da base média [49] — suporte para a argumentação dedutiva (no exemplo, trata-se de demonstrar que MNRQ é paralelogramo).

Se no triângulo ABC, M, N e P são pontos médios dos lados do triângulo e Q e R são pontos médios dos segmentos BP e PC, que particularidade tem o quadrilátero é MNRQ ?

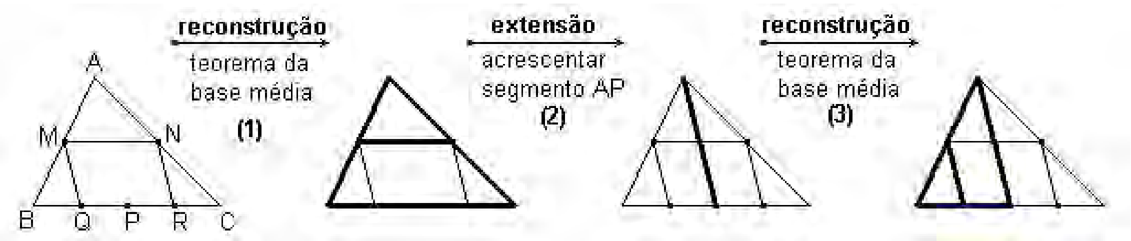


Figura 3.10
Reconstrução / extensão / reconstrução no tratamento do desenho
Fonte: autora

A *reconstrução* **(1)** geralmente não apresenta maiores problemas, pois o desenho que expressa o *componente figural* do teorema da base média está em posição familiar; já a *reconstrução* **(3)**, após a *extensão* de desenho feita em **(2)** apresenta dificuldade porque exige *reconstrução* do subcomponente situado em posição não prototípica.

DUVAL[50] fala em diferentes tipos de *apreensão cognitiva* (*cognitive apprehension*) de um desenho geométrico, com o propósito de destacar o papel heurístico do desenho nos *insights* que desencadeiam o processo de demonstração e também de entender porque os alunos, frente a problemas similares, apresentam desempenhos tão diferentes.

---

[49] O teorema do valor médio diz que “os pontos médios de dois lados de um triângulo determinam um segmento que é paralelo ao terceiro lado e que tem como medida a metade da medida deste terceiro lado”.

[50] DUVAL, R. **Geometrical pictures — representation and specific processing**, em Sutherland, R. e Mason, J. (editores). Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematical Education, Nato ASI Serie F, vol 138, Berlin: Spring Verlag, 1995. Como no caso do trabalho de ZYKOVA, também aqui foram feitos ajustes entre a linguagem utilizada por DUVAL e a utilizada neste capítulo.

Ele classifica como *perceptiva* (*perceptual apprehension*) a apreensão que reconhece uma "forma" e é resultado da integração inconsciente de um desenho ou de partes deste, através de discriminação e reorganização do percebido. A *apreensão perceptiva* é fonte de dificuldades quando "fatos" são tomados como "certos" pelos alunos, sem levar em consideração a necessária e imprescindível fusão, referida por FISCHBEIN, entre componentes figural e conceitual / proposicional. Esta é a situação, por exemplo, em que os alunos "enxergam" num triângulo qualquer um triângulo retângulo, "fato" este simplesmente tomado da aparência da instância particular do desenho que é expressão do componente figural.

Na *apreensão seqüencial* (*sequential apprehension*), o desenho é controlado pelos procedimentos de uma construção geométrica; o componente figural emerge numa seqüência de passos de construção, e diferentes procedimentos de construção resultam em desenhos, expressão do componente, que não são perceptivelmente diferentes. Este tipo de apreensão coloca em relevância o quanto o significado de um desenho está subordinado às relações geométricas que lhe são impostas.

A apreensão é *discursiva* (*discursive apprehension*) quando um enunciado acompanha o desenho; diferentes enunciados podem corresponder ao mesmo desenho, significando que a *apreensão discursiva* pode mudar sem que mude a impressão perceptiva do desenho. Muitas vezes, em situação de aprendizagem, a *apreensão discursiva* é perturbada pela *apreensão perceptiva*, o que transparece nas palavras de DUVAL (similares às de FISCHBEIN):

> *Em qualquer representação geométrica a identificação perceptiva de propriedades geométricas deve permanecer sob controle das afirmações. É a dependência dedutiva entre as afirmações que determina o que a figura representa. Aqui pode-se ter uma divergência entre o que a figura* <u>*mostra*</u> *e o que ela* <u>*representa*</u> (grifado pelo autor). *A percepção da figura mostra é o que é visto sem análise consciente.* [51]

Finalmente, DUVAL fala de *apreensão operativa* (*operative apprehension*): são as manipulações no desenho, físicas e mentais, que visam a depreender subcomponentes e a recompor novos subcomponentes, e que podem incluir transformações em tamanho, posição e orientação, ao buscar-se sintonia entre o desenho e a representação mental. É primordialmente a apreensão operativa que proporciona a função heurística do desenho (embora ela dificilmente se apresente isolada dos demais tipos de apreensão), tornando-o, desta forma, fonte de *insights* para o avanço do processo de demonstração.

DUVAL destaca como crucial na *apreensão operativa* o grau de *visibilidade* das operações que podem ser realizadas no desenho, e apresenta certas características como possíveis parâmetros da “medida de dificuldade” na execução de operações, das quais sobressaem como mais significativas: a) desenho com subcomponentes explícitos; b) desenho com subcomponentes complementares; c) duplo uso de um subcomponente do desenho. E traz exemplo ilustrativo[52] da estreita relação entre estas características e o desempenho dos alunos. Ver Figura 3.11.

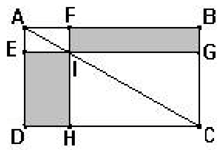
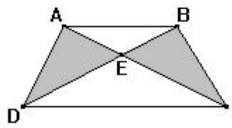
Problema proposto	**Sucesso no problema**	**Características**		
		Sub-componentes explícitas	Sub-componentes complementares	Duplo uso de sub-componentes
 Compare a área dos retângulos destacados	**60 %**	**sim** tri AEI tri AFI tri CIG tri CIH	**sim** tri ACD tri ACB	**não**
 Compare as áreas dos triângulos destacados	**11 %**	**não** tri ADC tri BCD	**não** tri ADC tri BCD	**sim** tri DEC

Figura 3.11
Relação entre as características das subcomponentes dos desenhos e o desempenho dos alunos
Fonte: autora

Embora sejam diferentes os vocabulários de DUVAL e ZYKOVA, transparece estreita relação entre as *apreensões operativas* discutidas pelo primeiro e as *rein-*

[51] Ibid., p. 146.
[52] Ibid, p. 150

terpretações e *reconstruções de desenho* discutidas pelo segundo. A classificação de DUVAL pode ser vista como um refinamento dos conceitos introduzidos por ZYKOVA, mostrando melhor entendimento das dificuldades que se apresentam aos alunos, especialmente quando se trata de *reconstrução de desenho*.

O caso de *extensão de desenho,* introduzido pela autora deste trabalho, amplia o leque de análise de dificuldades que se apresentam, em situação de aprendizagem, no tratamento do *componente figural*. As *extensões de desenho* também dependem de *apreensões operativas*, estas antecipadoras das subconfigurações que vão dar suporte à argumentação.

A *apreensão operativa* e o processo de *abstração reflexionante* também guardam estreita correspondência: em geometria, a ascensão em patamar de conhecimento depende de operações sobre *componentes proposicionais* / *figurais*, que se fazem acompanhar de sucessivos reflexionamentos, até que finalmente emerge a argumentação dedutiva que valida uma propriedade geométrica. E nisso entram em cena as estruturas cognitivas correspondentes ao *estágio operatório-formal*.

Também se constata que a categoria *prova intelectual*, destacada por BALACHEFF, é dependente sobretudo de *apreensões operativas;* já as *provas pragmáticas* estão diretamente relacionadas com a *apreensão perceptiva* — elas não apresentam a reflexão propiciadora do raciocínio generalizador.

A Figura 3.12 ilustra a estreita correspondência que há entre os conceitos / classificações apresentados por FISCHBEIN, BALACHEFF, DUVAL e ZYKOVA, e os estágios de desenvolvimento cognitivos descritos na teoria piagetiana.

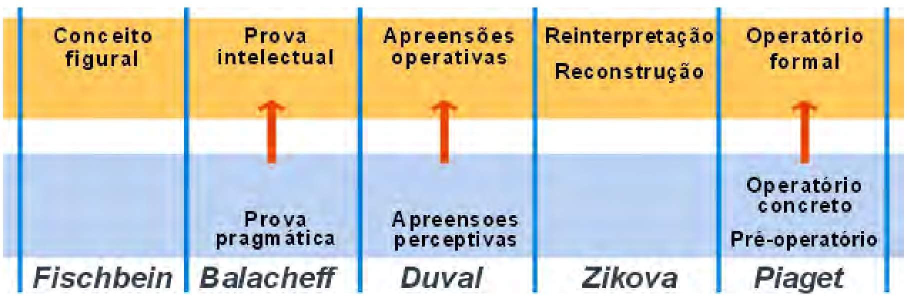


Figura 3.12
Relação entre conceitos / classificações em FISCHBEIN, BALACHEFF, DUVAL, ZYKOVA e em PIAGET
Fonte: autora

Do discutido até aqui, fica claro que o tratamento do *componente figural* de um enunciado geométrico é uma fonte de dificuldades para os alunos, quando em processo de produção de demonstração. A superação dessas dificuldades depende, certamente, de um meio que provoque quer sejam *abstrações reflexionantes*, quer *reinterpretações / reconstruções / extensões*, quer *apreensões operativas* que não percam de vista a necessária fusão entre os componentes *conceituais/proposicionais* e *figurais*.

Há outro aspecto a merecer destaque na situação de aprendizagem: tão importante quanto o processo de construção de conhecimento é o produto resultante da aprendizagem. O avanço no conhecimento depende do que já foi construído. A base de conhecimento dos alunos deve estar em constante expansão, numa sucessiva integração de novas propriedades geométricas. O potencial da base de conhecimento, quanto à construção de novas demonstrações, depende muito da multiplicidade de imagens mentais associadas ao componente figural das propriedades e conceitos. Nas situações de aprendizagem deve-se atentar para o quanto as imagens prototípicas dominam os *construtos mentais individuais* e tornam-se fonte de dificuldades no fluir das argumentações dedutivas. KABANOVA-MELLER [53] registra situação em que os alunos, após terem acompanhado o desenvolvimento da demonstração de determinado teorema e terem evidenciado compreensão da seqüência lógica de argumentos, encontram dificuldades em refazer a demonstração quando lhes é apresentado desenho diferente do originalmente trabalhado.

Na superação das dificuldades que permeiam o processo de aprendizagem, a contribuição de situações de metaprendizagem também merece consideração, tais como: situações de reflexão sobre a natureza do conhecimento objeto de construção; de procedimentos pertinentes ao domínio de funcionamento do modelo; de dificuldades cognitivas que se apresentam; e da própria história de desenvolvimento do conhecimento. Em certos momentos a aprendizagem depende de reflexão — *abstrações refletidas* [54] — sobre o conhecimento que está sendo construído. Estas são reflexões no plano do metaconhecimento.

---

[53] KABANOVA-MELLER,E.N., **The role of diagram in the application of geometric theorems**, em KILPATRICK, J. e I. WIRZUP, I. Op. cit., 1970.

[54] "Chamamos de abstração 'refletida' o resultado de uma abstração reflexionante, assim que se torna consciente." PIAGET, J. 1995: **Abstração Reflexionante...** p.274.

O livro "A arte de resolver problema" de POLYA [55] é um trabalho precursor nesta direção ao propor, como parte importante da aprendizagem, o retrospecto da resolução do problema: cabe aos alunos refletir sobre as dificuldades, sobre a idéia central de resolução e sobre a estratégia utilizada, e identificar outros problemas cuja estratégia possa ser reutilizada. ROBERT e TENAUD [56] apontam resultados positivos, quanto ao desempenho dos alunos na produção de demonstrações em geometria, nas situações de aprendizagem em que é destacada a metaprendizagem de *métodos (méthods)* — procedimentos aplicáveis à uma classe de problemas. É o caso dos problemas de construção geométrica que usam como método de demonstração as transformações isométricas e homotéticas, nas quais os objetos geométricos passam a ser vistos como conjuntos de pontos sobre os quais agem as transformações.

Os artigos do "Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics" [57] surpreendem pela recorrente preocupação em contemplar, na situação didática, momentos que classificar-se-iam como de metaprendizagem. Nas situações de aprendizagem é feito deliberado estudo de interpretação do desenho associado ao componente figural de um conceito ou propriedade, no qual são destacados tanto os fatos geométricos que estão sob controle do componente conceitual quanto aqueles que ali estão em função de contingência da representação e que portanto não devem ser incorporados à linha de raciocínio: "o*s alunos devem ver tanto o essencial como o que não é essencial, o geral e o específico. Eles devem conscientemente distinguir estes aspectos para que possam dominar conceitos e teoremas".*[58] Em conseqüência deste procedimento didático, são registrados progressos significativos dos alunos na construção de demonstrações.

---

[55] POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro RJ : Editora Interciencias, 1975.

[56] ROBERT, A . e TENAUD, I. **Une expérience d'ensignement de la géométrie en terminal C**, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 9, nº 1, Grenoble, La Pensée Sauvage Éditions, 1988.

[57] KILPATRICK, J. e WIRZUP, I. **Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, The learning of mathematical concepts**, vol I., **Problem solving in geometry**, vol. IV e **The development of spatial abilities**, vol. V, Scholl Mathematics Study Group, Stanford University e Survey of Recent East European Mathematical Literature, University of Chicago,1970.

[58] KABANOVA-MELLER,E.N., 1970: **The role of diagram...**, p. 48.

Quanto a metaprendizagem, SCHOENFELD [59] lista as atitudes dos alunos que devem permear a situação de aprendizagem: o uso de heurísticas na resolução de problemas; a tomada de consciência das atitudes cognitivas que participam da escolha de estratégias; a resolução de um problema como sendo mais do que simples obtenção de uma resposta, devendo incluir uma análise da estratégia de resolução e a busca de outras soluções e generalizações; o tomar a si a responsabilidade do processo de investigação — as explorações e formulações de conjeturas e a validação das argumentações. A experiência analisada é uma situação didática voltada ao ensino da resolução de problemas, com ênfase no processo de demonstração.

Delineada a complexidade do processo que leva a construção de conhecimento em geometria, finaliza-se esta seção com as pertinentes palavras de FISCHBEIN:

> *A integração de propriedades conceituais e figurais numa unitária estrutura mental, com a predominância das restrições conceituais sobre as figurais, não é um processo natural (...) Uma das principais razões que faz com que a geometria seja um assunto tão difícil (...) é que os conceitos figurais não se desenvolvem na direção de sua forma ideal (...) Conseqüentemente, um dos maiores desafios para a educação matemática (no domínio da geometria) é criar situações didáticas que sistematicamente exijam a integração destes dois aspectos, até que se tornem um unitário objeto mental.* [60]

São, estas, palavras provocadoras quanto à situação didática capaz de propiciar a aprendizagem da geometria. É nesta direção que se insere esta tese, ao colocar sob investigação uma situação que contempla o uso dos ambientes de geometria dinâmica.

3.3 Os ambientes de geometria dinâmica

Os ambientes de geometria dinâmica são ferramentas informáticas que oferecem régua e compasso virtuais [61], permitindo a construção de objetos geométricos a partir das propriedades que os definem. São micromundos que concretizam um domínio teórico, no caso a geometria euclidiana, pela construção de seus objetos e de representações que podem ser manipuladas diretamente na tela do computador. Ver Figura 3.13 à página 83.

---

[59] SCHOENFELD, A. **Reflections on a course in mathematical problem solving**, em Schoenfeld, A.et alli (eds), Research in Collegiate Mathematics Education, Issues in Mathematics Education, vol. 7, Washinton, Mathematical Assocoation of America, 1998.

[60] FISCHBEIN, **The theory of...** , p.156, 161.

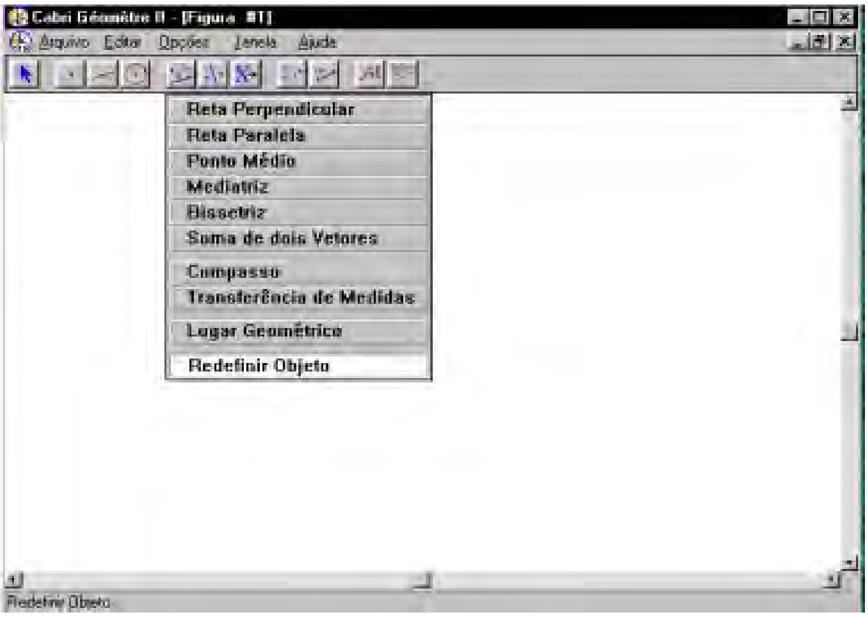


Figura 3.13
Interface de software de geometria dinâmica
Fonte: autora

O processo de construção de objetos é feito mediante escolhas de primitivas disponibilizadas pelo programa em seus diferentes menus — pontos, retas, círculos, retas paralelas, retas perpendiculares, transformações geométricas, por exemplo. A base inicial de menus pode ser expandida com a inclusão de pseudoprimitivas, via procedimento que automatiza as rotinas — a macroconstrução.

Estes programas oferecem o recurso de “estabilidade sob ação de movimento”: feita uma construção, mediante deslocamentos (*dragging*) aplicados aos elementos iniciais determinadores do objeto geométrico, o desenho na tela do computador — instância de representação do componente figural — transforma-se mas preserva, nas novas instâncias, as relações geométricas impostas inicialmente à construção, bem como as relações delas decorrentes. Ou seja, para um dado objeto ou propriedade, tem-se na tela do computador uma coleção de “desenhos em movimento” que guarda certos invariantes geométricos, declarados ou não no procedimento de construção. Por exemplo (ver Figura 3.14) : um quadrado, construído com controle geométrico — o desenho se constitui a partir de propriedades geométricas do quadrado — e um quadrado construído a partir da experiência sensível — o desenho do tipo “à mão livre”. Ambos têm o mesmo aspecto na tela do computador *enquanto não lhes são aplicados movimentos* (na

[61] Conforme já mencionado no capítulo 1, o *software Cabri-Geometry II* é um dos repre-

figura, quadrados pontilhados). Sob aplicação de movimento — deslocamento do vértice A —, o primeiro quadrado muda de tamanho ou posição ou direção, mas se man-

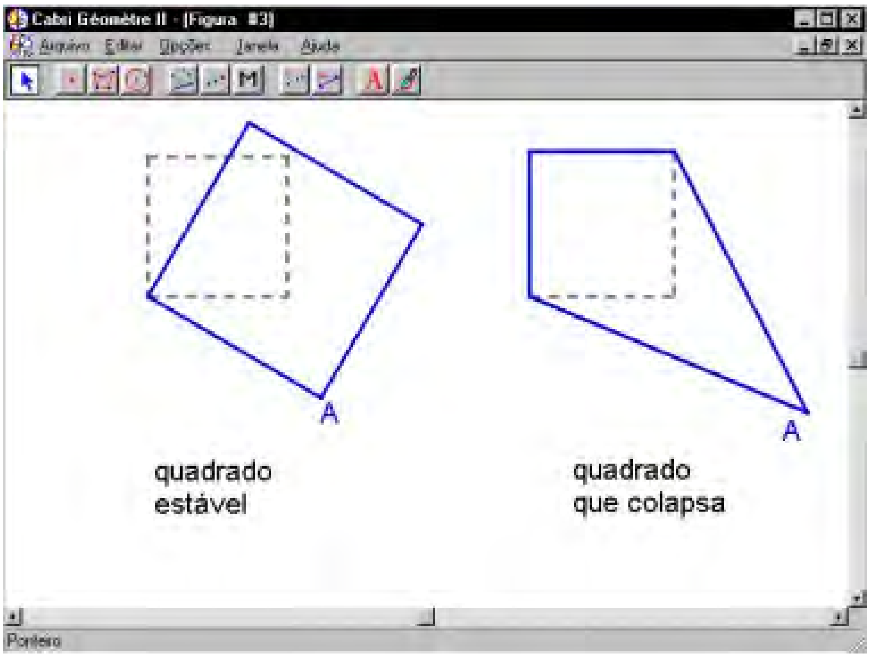


Figura 3.14
Quadrados construídos com controle geométrico (à esquerda)
e sem controle geométrico (à direita)
Fonte: autora

tém sempre quadrado. O outro colapsa sob a ação do movimento, pois "perde" as propriedades "todos os ângulos retos" e "todos os lados congruentes entre si".

A estabilidade sob ação de movimento resulta das relações geométricas impostas à construção e que encerram as propriedades características do quadrado enquanto objeto geométrico.

O quadrado mostrado na Figura 3.15, à página 85, foi obtido pelo seguinte procedimento: segmento AB; retas perpendiculares ao segmento passando pelos extremos; círculo de centro A passando por B e interceptando uma das reta em D; círculo de centro B passando por A e interceptando a outra reta em C; segmentos AD, DC e CB. Este quadrado é estável sob ação de movimento. E mais, a congruência do segmento DC aos demais lados, bem como a perpendicularidade nos vértices D e C são fatos não declarados na construção e alí "estão" — são os *fatos estáveis implícitos*, então passíveis de demonstração.

---

sentantes de tais ambientes e foi o software escolhido para os propósitos desta tese.

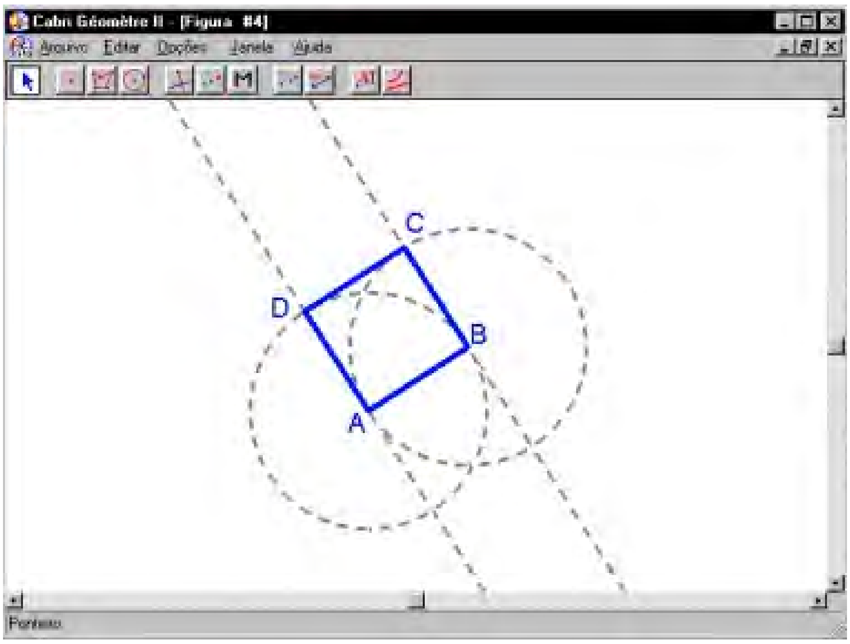


Figura 3.15
Desenho de quadrado com procedimento geométrico
Fonte: autora

Registre-se que o *software*, através do procedimento de construção, armazena relação funcional entre objetos geométricos. Na construção do quadrado mostrado na Figura 3.16, a relação funcional faz a correspondência entre segmento e quadrado mediante procedimento de construção especificado.

Figura 3.16
Relação funcional entre objetos, armazenada pelo software.
Fonte: autora

Ou seja, nos ambientes de geometria dinâmica, o processo de construção geométrica explicita ineditamente o conceito de função. [62] A relação funcional revela-se, parcialmente, no tipo de dinamismo da figura: as variáveis independentes correspondem aos objetos que podem ser movimentados e são estes que dão dinamismo à figura.

No caso do quadrado, estas variáveis são os pontos A e B, extremos do segmento que origina a construção, embora diferentes procedimentos de construção possam resultar em quadrado com o mesmo tipo de dinamismo.

Observe-se que, mesmo antes do advento do computador, a literatura registra abordagens dinâmicas dos objetos geométricos, similares às disponibilizadas pela tecnologia informática. ZYKOVA, contrapondo-se à prática usual de tratamento estático dos desenhos, responsável pela constituição de imagens prototípicas, diz que "*para ter–se habilidade para operar com conceitos é necessária experiência visual qualitativamente diversificada*".[63] Em discussão com os alunos sobre os conceitos de ângulos adjacentes e ângulos suplementares, o segundo conceito é tratado como caso particular do primeiro, mediante a visualização do movimento do lado de um dos ângulos adjacentes, até que os dois ângulos tornam-se suplementares. Ver Figura 3.17.

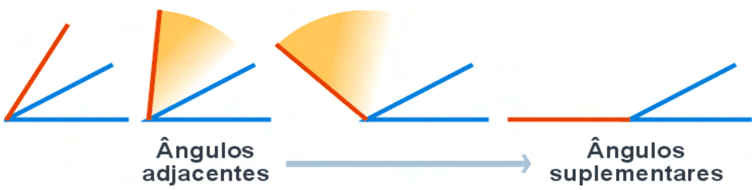


Figura 3.17
Ângulos em movimento : de adjacente a suplementar.
Fonte: autora

KABANOVA-MELLER também se refere diretamente ao tratamento dinâmico dos desenhos quando aponta como um dos objetivos de seu experimento: "*nas situações de ensino provocamos nosso alunos para que fiquem alertas <u>ao princípio de variação dos elementos geométricos</u>* (sublinhado pelo autor) *(...) posição, direção e grandeza podem ser diferentes nos desenhos sem que com isto mude o significado do teorema*".[64]

LABORDE [65] elege o movimento como uma das dimensões que, perpassando a exploração e modelização em geometria, remonta no tempo e, nos dias de hoje, materializa-se na tela do computador: os gregos empregavam instrumentos mecânicos

---

[62] Inédita porque, geralmente, o conceito de função está fortemente associado a conjuntos numéricos. E mais, na geometria um desenho estático não revela de forma tão transparente este conceito.

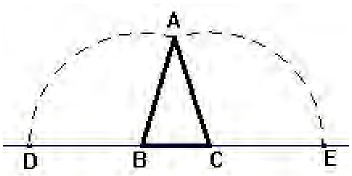
[63] ZYKOVA,V. I. **Operating with concepts...**, p.146

[64] KABANOVA-MELLER, **The role of diagram...** p. 43.

[65] LABORDE,C., 1992: **Ensigner la Géométrie...** , p. 31.

para descrever curvas (hoje modelizáveis no computador [66]); os lugares geométricos nada mais são do que pontos em movimentos regidos por certas condições.

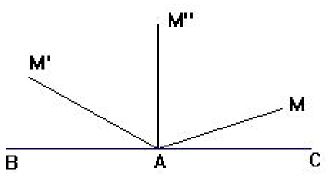
No clássico "Éléments de Géométrie" de CLAIRAUT, em 1741, o movimento comparece como recurso de explicação, registrado nas expressões "*o movimento do ponto P implica uma variação de ângulo...*", "*girando os triângulos até que ocupem as posições vemos que ...*". A Figura 3.18 mostra a explicação de CLAIRAUT para a propriedade "os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais entre eles".



"Pode-se ver facilmente as razões se representamos o que acontecerá, quando de início, supõem-se os dois lados AB e AC do triângulo deitados sobre BD e CE, prolongamentos da base BC, e que em seguida eles se levantam para reunir suas extremidades em A; a igualdade dos dois lados vai lhes impedir de fazer um caminho maior do que o outro. Assim, estando juntos, eles se inclinam igualmente sobre a base BC. Portanto o ângulo ABC será igual ao ângulo ACB" [67]

Figura 3.18
Explicação de CLAIRAUT, utilizando figura dinâmica.
Fonte: Clairaut, com adaptação da autora

No livro de LEGENDRE, Éléments de Géométrie, primeira edição em 1794, é também a dinâmica da figura que explica a propriedade "por um ponto sobre uma reta podemos elevar uma perpendicular a esta reta, e não mais do que uma". Ver Figura 3.19.



"Com efeito, suponhamos que uma reta AM, a principio deitada sobre AC, gire em torno do ponto A: ela formará dois ângulo adjacentes, MAC e MAB, um dos quais, MAC, sendo a principio muito pequeno, vai sempre crescendo; o outro, MAB, maior que MAC no começo vai constantemente decrescendo até zero. O ângulo MAC, a princípio menor que MAB, torna-se-a, pois, maior que este ângulo: por consequencia, haverá para a reta móvel uma posição AM" em que esses dois ângulos são iguais; e é evidente que esta posição é única" [68]

Figura 3.19
Explicação de LEGENDRE, utilizando figura dinâmica.
Fonte: Legendre, com adaptação da autora

---

[66] Merecem destaque dois *sites* que tratam deste assunto: **A Visual Dictionary of Special Plane Curves**, em http: // xahlee.org/PageTwo_dir/ more.html ; **Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica**, em http: // www.museo.unimo.it/theatrum/inizio.htm

[67] CLAIRAUT, A. C. **Éléments de Géométrie**, vol.1. Paris, France : Gauthier-Villars et Cie Éditeurs, 1920. p.31.

[68] LEGENDRE, A . M. **Elementos de Geometria**. Rio de Janeiro RJ : Livraria Garnier Editores, 1915, p. 7.

Com a apresentação dos ambientes de geometria dinâmica e dos registros sobre quanto o dinamismo pode estar associado ao entendimento de propriedades geométricas, passa-se a discutir o potencial dos ambientes de geometria dinâmica nas situações de aprendizagem, elencando-se, na seção 3.2.1 que se segue, mais subsídios para responder às perguntas suscitadas no capítulo 1.

3.3.1 As possibilidades

Preliminarmente, pode-se afirmar que a base de conhecimento dos ambientes de geometria dinâmica e a interface de trabalho por eles disponibilizada propiciam, com manipulação de *objetos concretos-abstratos* na tela do computador, a ascensão de patamar de conhecimento, de empírico para inserido em modelo teórico.

Inicialmente, as construções dos alunos são desenhos do tipo “à mão livre”, reproduções de formas conhecidas, como quadrados e retângulos — predomina aí a percepção. Ao movimentarem o desenho, os alunos constatam que a forma colapsa e deixa de apresentar a impressão visual desejada. O recurso de “estabilidade sob ação de movimento” desafia os alunos a construírem formas sob controle geométrico, isto é, submetidas a propriedades geométricas por eles escolhidas. Na tela do computador, os objetos vão se concretizando sob gradativo controle, na espiral *ação / formulação / validação.* Os discursos dos alunos convergem, assim, a uma linguagem geométrica cada vez mais precisa.

Em situações de aprendizagem, freqüentemente é negligenciada a simbiose dos *componentes conceitual / proposicional* e *figural* de uma dada situação geométrica. Ignorando esta relação, os alunos apresentam recorrentes dificuldades, como foi discutido na seção anterior. Os ambientes de geometria dinâmica explicitam tal relação. Com o advento dos ambiente de geometria dinâmica, na literatura já se faz distinção entre os termos *figura* e *desenho* [69]: o primeiro refere-se ao objeto matemático inserido no modelo euclidiano, dado pelas propriedades que lhe são impostas, por via de construção geométrica; e o segundo refere-se à instância de representação do componente figural, quer seja ela um desenho em papel, quer seja um desenho na tela do computador.

O processo de construção e a estabilidade geométrica das diferentes instâncias de representação propiciam a adequada fusão entre os *componentes conceitual / proposicional* e *figural* constitutivos da situação geométrica. Uma família de "desenhos em movimento" substitui o desenho particular como expressão do *componente figural,* descaracterizando as particularidades não relevantes do desenho particular. Na literatura encontram-se registros de efetivos progressos dos alunos na construção de conceitos geométricos em conseqüência da presença dos "desenhos em movimento" nos *construtos mentais individuais* .[70]

O recurso de "estabilidade sob ação de movimento" revela aos alunos o grau de controle que eles exercem sobre os *objetos concreto-abstratos,* e obter uma construção estável torna-se um problema genuíno. Para um mesmo objeto geométrico são múltiplas as construções possíveis [71] e assim os alunos passam a compreender que, a partir de certos fatos declarados (ou seja, hipóteses de um teorema), outros destes decorrem — os *fatos estáveis implícitos* (ou seja, a tese do teorema) —, então passíveis de explicação. Dir-se-ia que esta compreensão é parte da *gênesis cognitiva da demonstração.*

Pelo recurso de estabilidade, as configurações geométricas clássicas (os teoremas) passam a ter multiplicidade de representações. Os desenhos deixam de ser prototípicos. E os alunos tornam-se mais hábeis na identificação, quando em processo de demonstração, de subconfigurações não prototípicas de propriedades já conhecidas, necessárias ao desenrolar da argumentação.

Os ambientes de geometria dinâmica também incentivam o espírito de investigação matemática: sua interface interativa, aberta à exploração e à experimentação, disponibiliza os *experimentos de pensamento*. Manipulando diretamente os objetos na tela do computador, e com realimentação imediata, os alunos questionam o resultado de

---

[69] LABORDE, C. **L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques**, Recherche en didactique des Mathématiques, 9 (3) , Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions, 1990.

[70] LABORDE, C. e CAPPONI, B. **Cabri-géomètre constituant d'un Milieu pour l'Apprentissage de la notion de figure**, em Balacheff, N. e Vivet, M. (editores), Didactique et Intelligence Artificielle. Grenoble, France : La pensée Sauvage, 1994. YERUSHALMY, M. e CHAZAN, D. **Overcoming Visual Obstacles with the Aid of the Supposer**, Educational Studies in Mathematics, vol.21/3. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1990

suas ações / operações, conjeturam e testam a validade das conjeturas inicialmente através dos recursos de natureza empírica — medidas, oráculo [72], sobreposição de objetos geométricos ? [73] Num segundo momento, coloca-se à eles o problema de explicar as regularidades que 'saltam aos olhos' nos "desenhos em movimento", ou seja, de engajarem-se na construção de demonstrações.

Em relação a este segundo momento — a construção de demonstrações, HOYLES e NOSS [74] discutem a tensão existente entre as explorações livres dos alunos, permitida pelos micromundos, e a intenção da situação didática orientada à construção de um determinado saber, o que coloca em cena a necessidade de intervenções pedagógicas com propósitos bem definidos. Vale ressaltar que, pelos recursos que disponibilizam e pelo alto grau de precisão dos desenhos neles obtidos, os ambientes de geometria dinâmica também podem desencadear nos alunos atitudes que priorizam as validações empíricas, em detrimento das validações hipotético-dedutivas. É o caso em que os recursos de medição informam: "soma constante de 180 graus para os ângulos de um triângulo" ou "igualdade das áreas dada no enunciado do teorema de Pitágoras", e os alunos tomam estas informações como validações satisfatórias.

LABORDE e LABORDE [75], atentos à este comportamento, sugerem situações-problemas onde alternem-se experimentações no ambiente, visualizações, formulações de questões, leituras e releituras geométricas, que culminem na necessidade de argumentação dedutiva. As situações-problemas são postas sob responsabilidade dos alunos e exigem, por exemplo: a explicação de um fenômeno visual — "dado o segmento AB, controlar na tela o rastro do ponto P de forma tal que o ângulo APB seja sempre reto"; a justificativa de porque um certo fenômeno geométrico não pode ocorrer

---

[71] Por exemplo: um paralelogramo pode ser construído por via de paralelismo, ou de simetria central, ou de diagonais que se bissectam. No primeiro caso, o paralelismo está declarado na construção; nos outros dois casos é uma decorrência implícita da construção, passível de ser demonstrada.

[72] O 'oráculo' é recurso que responde perguntas como: 'retas são paralelas ?' , 'ponto pertence à objeto?' A sobreposição de objetos que validam fatos implícitos é ilustrada pelo exemplo: numa certa construção parece ser fato implícito que três pontos satisfazem a condição AO = OB, o que então os alunos validam construindo o círculo de centro O passando por A e constatam que passa por B, usando aqui o recurso de movimento de desenho.

[73] Por exemplo, situação em que conjetura sobre paralelismo é reforçada com a construção de reta paralela.

[74] HOYLES, C. e NOSS, R. **A pedagogy for mahematical microworlds**, Educational Studies in Mathematics, 23, nº 1, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1992.

— quando eles tentam construir um triângulo com duas bissetrizes perpendiculares; a explicação de ambigüidades visuais — casos em que, numa configuração sob movimento, uma certa propriedade ora se verifica, ora não, exigindo a identificação das condições para que ela sempre se verifique; e o controle geométrico para que determinada construção atenda restrições quanto ao tipo de movimento — "dado um ponto O, construir triângulo equilátero com centro em O e tal que um dos vértices mova-se em círculo de centro O".

Em configurações geométricas mais complexas, é no dinamismo da figura que se revelam muitos dos *fatos estáveis implícitos,* ao mesmo tempo em que os fatos aparentes, provenientes de instância particular de desenho expressão do *componente figural*, tornam-se irrelevantes na exploração. E mais: este dinamismo evidencia a função heurística do desenho, colocando em cena as *apreensões operativas* necessárias às *reinterpretações / reconstruções / extensões* que concorrem para o fluir da argumentação dedutiva.

Ao observar adultos com conhecimentos de geometria resolvendo problemas em tais ambientes, LABORDE [76] registra o quanto a evidência visual torna-se importante no processo de investigação: a evidência é interpretada em termos geométricos e gera questões que são resolvidas através de conhecimento geométrico; e a análise da situação provoca novas questões, exploradas empiricamente, num primeiro momento, através do recurso de movimento. LABORDE também registra que certamente a bagagem matemática dos sujeitos observados desempenhou papel importante, quanto ao uso da evidência visual, na proposição de perguntas e de estratégias bem direcionadas para a solução do problema.[77] Já para os alunos em situação de aprendizagem, esta habilidade ainda precisa ser desenvolvida. Isto exige a concepção de situações-problemas provocadoras da interação entre tratamento visual e tratamento geométrico: "*além do uso do fenômeno visual como um catalisador para produção de conjeturas, os problemas-*

---

[75] LABORDE, C. e LABORDE, J. **What about a learning environment where euclidian concepts are manipulated with a mouse?** em diSessa, A . et alli (editores), Computers and Exploratory Learning, NATO ASI Series, serie F, vol. 146, Berlin: Spring Verlag, 1993.

[76] LABORDE, C. **Visual phenomena in the teaching /l earning of geometry in a computer based environment**, em Mammana, C. e Villani, V. (edutores), Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century, Dordrecht / Boston / London : Kluwer Academic Publishers, 1998.

[77] No capítulo I em KING, J. e SCHATTSCHNEIDER, D.(editores), **Geometry Turned On**, Washington : Mathematical Association of America Notes 41, 1997, há depoimentos ilustrativos de

desafios devem ser colocado de forma tal que o aluno faça conexão entre os aspectos visuais e teóricos da geometria". [78]

3.3.2 Pensamento visual e argumentação

Sem dúvida, os ambientes de geometria dinâmica, com seus "desenhos em movimento", propiciam os *experimentos de pensamento* que acompanham o processo de criação em matemática: fazer explorações, elaborar e refinar conjeturas, testar hipóteses, produzir demonstrações.

Conforme já bem discutido, um dos pontos cruciais na constituição do pensamento geométrico é o entendimento da diferença entre validações empíricas e argumentações hipotético-dedutivas, e o entendimento da necessidade destas últimas. Segue-se a isto o desenvolvimento de competência para construir demonstrações.

A evidência experimental que o ambiente propicia compele à busca de demonstração. É ilustrativo o depoimento de DE VILLIERS:

> *Embora freqüentemente eu fique confiante na validade de uma conjetura, veja a sua veracidade no descortinar contínuo de transformações na tela do computador, isto não me dá uma satisfatória explicação de* ***'por que' ela é verdadeira*** (grifado pelo autor) *(...) Somente confirma que é verdade, e embora seja possível considerar mais e mais exemplos, que aumentam a minha confiança, isto não me dá o sentimento psicologicamente satisfatório de iluminação (...) Na minha experiência, quão mais convencido estou tão mais motivado fico para encontrar uma explicação para o 'porquê' da veracidade.* [79]

É o processo de demonstração que explica os *fatos estáveis implícitos* que emergem sob movimento. O processo inicia, geralmente, com a plausibilidade de uma conjetura. Mas a construção de uma demonstração depende, sobretudo, de *insight*, e então o problema que aí se coloca é: de que forma o dinamismo dos desenhos contribui para o *insight* que gradativamente se organiza como uma argumentação dedutiva ?

---

utilização dos ambientes de geometria dinâmica onde fica clara a importância da cultura matemática na produção de demonstrações de resultados interessantes.

[78] Ibid., p.114

[79] DE VILLIERS, M. **The Role of Proof in Investigative, Computer-based Geometry: Some Personal Reflections**, em King, J. e Schattschneider, D. (editores), Op. cit., p.22.

Diversos autores se propõem esta mesma questão, cujas respostas ainda não são satisfatórias. SCHER [80] registra que a utilização dos ambientes de geometria dinâmica nas situações de aprendizagem muitas vezes revela uma ruptura: por um lado, o ambiente é utilizado para verificação empírica de certas regularidades — por via da dinâmica de imagens, ou por via de medições — e, por outro, pouco uso se faz do ambiente no desenrolar do processo que busca explicações.

DE VILLIERS [81], ao mesmo tempo em que aponta o quanto a variação continua de configurações na tela do computador facilita a verificação empírica de conjeturas, traz discussão de situação didática em que os alunos, interagindo com o ambiente, colocam-se diante da necessidade de demonstração, sobretudo na sua função de explicação. Mas DE VILLIERS não deixa de assinalar que o progresso dos alunos na produção de demonstrações depende de conhecimento prévio de natureza empírica e, principalmente, de exposição sistemática de como proceder em argumentações dedutivas:

> *Para explicar alguma coisa, nós temos que explicá-la em termos de outras. Os alunos podem precisar de orientação para produzir explicações adequadas (demonstrações), explicações alternativas e fazer comparações (...) Em nossa experiência, é somente após um considerável trabalho desta natureza que os alunos se tornam hábeis na construção de suas explicações e de forma crítica as comparam. Entretanto, é significativo que quando a demonstração é vista como uma explicação, parece acontecer substancial progresso dos alunos na direção de* <u>*atitudes*</u> (sublinhado pelo autor*) voltadas a construir demonstrações.* [82]

HOYLES & JONES [83] posicionam-se criticamente quanto à utilização dos ambientes de geometria dinâmica quando esta privilegia validações de natureza empírica em detrimento de argumentações dedutivas e observam que isto tem sido bastante freqüente, dadas as facilidades que os ambientes oferecem. Opondo-se a tal utilização, discutem como esses ambientes podem se apresentar como contextos que provoquem a necessidade de ascensão na natureza das explicações, supondo-se tal intenção na situação didática, caracterizados por: a) alunos encorajados a fazer conjeturas a partir da análise de dependência entre relações geométricas; b) definição explícita dos objetivos

---

[80] SCHER,D. **Problem solving and proof in the age of dynamical geometry**, Micromath, vol. 15/1, 1999.

[81] DE VILLIERS **An alternative approach...** ,

[82] Ibid., p. 388.

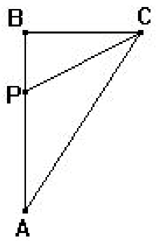
[83] HOYLES, C. e JONES, K. **Proof in dynamic geometry contexts**, em Mammana,C. e Villani,V. (editores), Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century, ICMI Study Series, vol. 5. London, England : Kluwer Academic Publishers, 1998.

matemáticos das atividades, de forma tal que o ambiente se torne um espaço de construções geométricas e não de simples desenhos.

Dadas as características dos ambientes de geometria dinâmica, merecem atenção as considerações de SIMON:[84] a partir da observação de alunos em processo de resolução de problemas, ele registra o que seria um terceiro tipo de raciocínio — o *raciocínio transformational* (*transformational reasoning*), aparentemente fecundo em idéias que levam ao processo de demonstração. Baseando-se em algumas situações-exemplo, SIMON sugere que o *raciocínio transformacional* acompanha os funcionamentos cognitivos que levam à descoberta de teoremas e à conexão entre idéias matemáticas, bem como à validação de idéias:

> *Freqüentemente o que os alunos procuram é um entendimento de como um 'sistema matemático' funciona. Tal entendimento resulta, geralmente, de atitude que corresponde a fazer o sistema 'rodar', não no sentido de acumular* outputs *para approach indutivo, mas sim para adquirir feeling. Isto eu chamo de raciocínio transformacional (...) Raciocínio transformacional é suportado pela transformação ou antecipação de imagens. Nos dois casos o aluno tem a capacidade de visualizar os resultados de suas operações (...) Raciocínio transfomacional envolve vislumbrar, na situação matemática, transformações e o resultado destas transformações (...) é freqüentemente um sentimento de entendimento de como tudo funciona.* [85]

Ele exemplifica com a argumentação de um aluno, colocado frente ao problema de estabelecer relação entre AB+BC e AP+PC, sendo ABC um triângulo retângulo em C e P é um ponto no lado AB. Ver Figura 3.20.



"O ponto A é minha casa e o ponto C é minha escola. O triângulo ABC é uma área verde. Normalmente, caminho da minha casa até a esquina B , dobro para à direita e caminho até a escola. Algumas vezes eu ando até um pedaço e então, em P, cruzo a área verde (...)
o caminho é menor. Sei que quanto antes eu cruzar na área verde, mais curto fica o caminho..." [86]

Figura 3.20
Raciocínio de aluno, de natureza transformacional
Fonte: autora

---

[84] SIMON, M. **Beyond inductive and deductive reasoning; the search for a sense of knowing**, Educational Studies in Mathematics 30, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1996.

[85] Ibid., p. 198, 202, 207.

[86] Ibid, p.201

HAREL & SOWDER [87] registram situação também ilustrativa de *raciocínio transformacional*: aos alunos, em programa de formação de professores, foram apresentadas duas demonstrações do teorema da soma dos ângulos de um triângulo. A primeira, clássica e de caráter estático, sempre comparece nos livros de geometria. Já a segunda envolve "desenho em movimento", e foi eleita pelos alunos como a mais significativa como explicação da veracidade do teorema. Ver Figura 3.21.

(...) a demonstração seguinte foi apresentada por Amy, aluna futura professora, em um curso de geometria: Amy mostrou para os colegas como ela imagina o teorema, "a soma dos ângulos de um triângulo é 180". Falou sobre o efeito que ela percebia ao fazer os lados AB e AC do triângulo girarem em torno dos vértices B e C, em direções opostas, até que os ângulos com o segmento BC fossem, respectivamente 90 graus (figura a e figura b). *Este movimento transforma o triângulo ABC na figura A'BCA", onde A'B e A"C são perpendiculares ao segmento BC. Para recriar o triângulo original, os segmentos A'B e A"C são inclinados um na direção do outro, até que os pontos A' e A" coincidam com o ponto A* (figura c). *Amy falou que fazendo isto ela'perde duas peças' nos ângulos de 90 graus em B e C (i.é., os ângulos A'BA e A"CA), mas que ao mesmo tempo ela "ganha estas peças de volta" ao criar o ângulo A.*

Isto pode ser melhor visualizado se traçamos AO perpendicular à BC: os ângulos A'BA e A''CA são congruentes aos ângulos BAO e CAO, respectivamente (figura d).

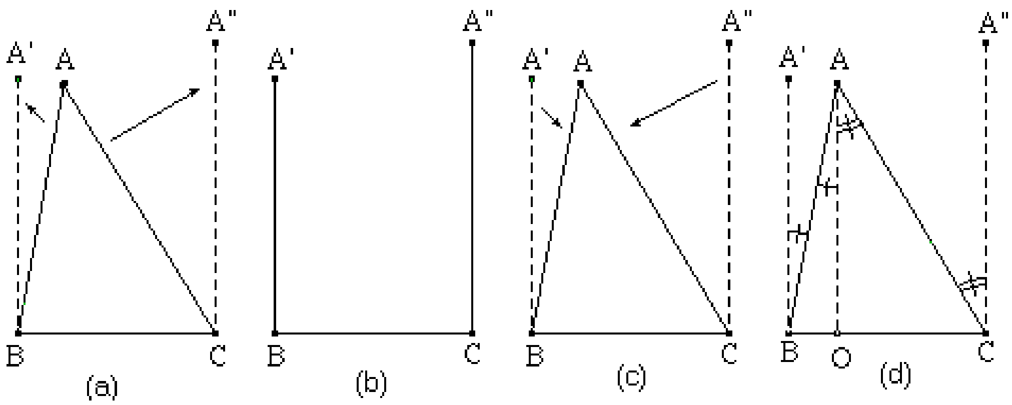


Figura 3.23
Demonstração do teorema da soma dos ângulos de um triângulo, feita por aluna utilizando o recurso de "desenho em movimento".
Fonte: autora

Mas em geral os alunos não expressam tal tipo de raciocínio, ou talvez não os manifestem de forma explícita, sendo pontuais na literatura os exemplos desses raciocínio. No entanto, eles são raciocínios referidos pelos matemáticos como partícipes do processo Incluem-se aqui também, como exemplos de *raciocínios transformacionais*, as explicações de CLAIRAUT e LEGENDRE relativas a propriedades clássicas em geo-

[87] HAREL, op. cit., p.259.

metria, registradas na seção 2.3. de criação — pensamentos visuais [88] —, tomando estes e os transformacionais como sendo de mesma natureza.

Tendo em vista os recursos oferecidos pelos ambientes de geometria dinâmica, GOLDENBERG [89] sugere novo tratamento para os enunciados clássicos da geometria: teoremas devem ser tratados não como propriedades estáticas, mas como funções dinâmicas a agir sobre uma certa classe de objetos geométricos. Ele ilustra esta proposição com o enunciado clássico, “o ponto médio da hipotenusa de um triângulo retângulo eqüidista dos vértices do triângulo”, reenunciado em formato generalizador[90], ao considerar a classe dos triângulos retângulos com hipotenusa fixa e um dos catetos como parâmetro livre, onde é colocada sob observação a trajetória do ponto médio da hipotenusa quando aplicado movimento ao cateto livre. Ver Figura 3.22. O dinamismo do desenho provoca evidência visual que generaliza a propriedade clássica e desencadeia nova questão generalizadora: “como é a trajetória de um outro ponto sobre a hipotenusa?”

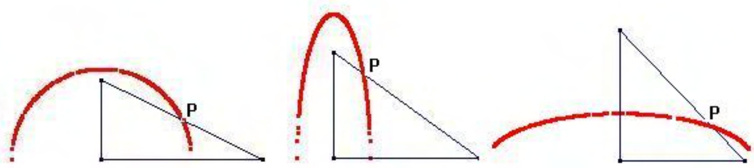


Figura 3.22
O teorema clássico, “o ponto médio da hipotenusa de um triângulo retângulo eqüidista dos vértices do triângulo”, como caso particular de função generalizadora.
Fonte: adaptação de GOLDENBERG

E mais, as trajetórias ilustradas na figura anterior podem ser pensadas como estando sob a perspectiva de um observador posicionado no vértice ângulo reto, como na Figura 3.23. Uma mudança de perspectiva, em que o observador coloca-se no ponto sobre a hipotenusa em torno do qual o triângulo realiza um movimento de rotação, estabelece novas relações entre trajetórias — a elipse trajetória do vértice ângulo reto tem seus eixos maior e menor determinados pelos círculos trajetórias dos outros dois vértices.

---

[88] Ver Capítulo 2, seção 2.2.2.

[89] GOLDENBERG, E. P. **Ruminations about dynamic imagery**, em Sutherland, R e Mason, J. (editores), Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematical Education, Nato ASI Serie F, vol 138, Berlin: Spring Verlag, 1995.

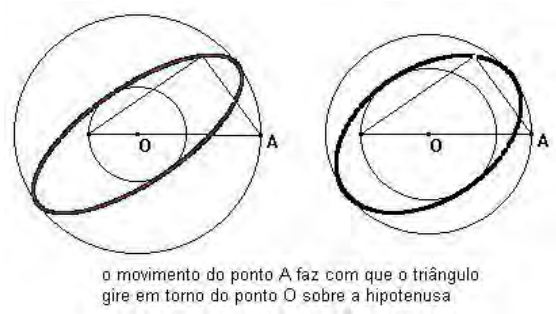


Figura 3.23
O dinamismo e a mudança de ponto de vista
Fonte: autora

GOLDENBERG segue, nesta exploração, na direção de idéias cada vez mais generalizadoras, respondendo a perguntas para o caso em que o triângulo em questão não é mais retângulo. Com este exemplo, ele ilustra o quanto uma releitura de propriedades clássicas, em que os recursos dos ambientes cumprem papel fundamental, desencadeia explorações e investigações onde a constituição de imagens mentais dinâmicas coloca os teoremas clássicos da geometria em novo patamar de entendimento e significação. Ao apontar para a necessidade de reenunciar os teoremas clássicos da geometria, GOLDENBERG visa a que os enunciados e os *insigths* empregados na criação de demonstrações possam emergir do dinamismo da figura que está na tela do computador.

Os exemplos registrados nesta seção apresentam explicações que utilizam o "desenho em movimento", e vê-se nelas o quão significativo, com esta utilização, se torna o entendimento de propriedades geométricas. Os ambientes de geometria dinâmica potencializam naturalmente a concretização de *experimentos de pensamento,* em especial os que envolvem pensamentos de natureza visual.

Mas para que eles se tornem suporte à ascensão em patamar de conhecimento geométrico — de empírico para hipotético-dedutivo — permanece "*o desafio de construir novas peças de matemática passível de aprendizagem (firmemente base-*

---

[90] Ibid, p.207 - 210

adas nas antigas), as quais se tornam passíveis de serem aprendidas porque utilizam o potencial das novas tecnologias", nas pertinentes palavras de HOYLES & JONES. [91]

[91] HOYLES e JONES, op. cit., p.123.

4 A INVESTIGAÇÃO

4.1 O problema central

De acordo com o referencial teórico apresentado nos capítulos 2 e 3, os pressupostos norteadores da investigação objeto desta tese são:

— da teoria piagetiana e de seu desdobramento socio-genético, a importância da ação dos alunos e de seus diferentes funcionamentos cognitivos, o que põe o processo de aprendizagem em sintonia com o processo de criação em matemática, e a relevância dos conflitos sócio-cognitivos como propulsores da construção de conhecimento;

— quanto à situação didática, a retomada da importância dos diferentes momentos que participam do processo de ensino e aprendizagem, com destaque especial à *situação adidática,* espaço para os funcionamentos cognitivos necessários à construção de conhecimento;

— no âmbito da situação de construção de conhecimento em geometria, levar-se em consideração a natureza evolutiva do pensamento — de empírico para hipotético-dedutivo, quando entra em cena a estrutura cognitiva operatório-formal e os *experimentos de pensamento* que envolvem *abstrações reflexionantes e refletidas.*

As perguntas a serem respondidas, anunciadas no Capítulo 1 e reenunciadas à luz do exposto nos capítulos 2 e 3, são:

— *de que forma os ambientes de geometria dinâmica podem contribuir para que os alunos comprendam o que é uma demonstração — que certas hipóteses implicam necessariamente novas relações geométricas,* *explicáveis via argumentação hipotético-dedutiva — e assim ascendam ao patamar de conhecimento em que a geometria é um modelo teórico que se organiza por via de axiomas, teoremas e demonstrações?*

— *de que forma os ambientes de geometria dinâmica podem contribuir para que os alunos construam suas demontrações, ou seja, para que se tornem versáteis no tratamento dos* **componentes conceituais / proposicionais / figurais** *que acompanham as argumentações dedutivas? Em particular, o quanto esses ambientes, com seus "desenhos em movimento", podem dar suporte aos* **experimentos de pensamento** *participantes do processo de demonstração, dentre eles os que envolvem pensamentos de natureza visual?*

4.2 A metodologia: Engenharia Didática

A metodologia de pesquisa escolhida é a Engenharia Didática, desenvolvida na escola francesa de Didática da Matemática.[1] Nela se tem, de forma muito clara, a possibilidade de implementar investigação em que a *realização didática* torna-se fundamental na busca de respostas a questões relativas ao ensino e aprendizagem da matemática — ela "é *um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, o que quer dizer, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino.*"[2]

Em seu cenário, a Engenharia Didática tem princípios gerais tomados da teoria piagetiana. Isto se reflete, especialmente, no espaço reservado ao aluno, onde são privilegiados os funcionamentos cognitivos que concorrem para o aprendizado.

Quanto a construção de conhecimento em matemática, a referência fundamental é a teoria da situação didática de BROUSSEAU. E mais, a metodologia eviden-

[1] Para descrição da metodologia toma-se como referências: ARTIGUE, M. : **Ingeniería Didáctica**, em Gómez, P. (editor) Ingeniería Didáctica en Educación Matemática, Bogota : Grupo Editorial Iberoamérica, 1995. ARTIGUE, M. **Ingénierie Didactique**, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.9, no.31, Grenoble France : La Pensée Sauvage Éditions, 1988. A denominação "Engenharia Didática" deve-se a equiparação feita entre o trabalho didático e o trabalho de um engenheiro: este, para realizar um projeto, toma os conhecimentos científicos de sua área e submete-se a controle do tipo científico, mas tem que lidar com objetos muito mais complexos do que aqueles depurados pela ciência, o que lhe exige atacar, com todos os meios de que dispõe, problemas ainda não resolvidos.

[2] ARTIGUE, M., **Ingénierie Didactique...**, p.285.

cia a importância da *realização didática* ao delinear estratégia de intervenção em sala de aula, também em consonância com esta teoria.

4.3 Detalhamento e implementação da Engenharia Didática

Na Engenharia Didática a investigação se organiza em de três fases, apresentadas de forma esquemática no diagrama abaixo e detalhadas a seguir, em contexto geral e no contexto específico desta investigação.[3]

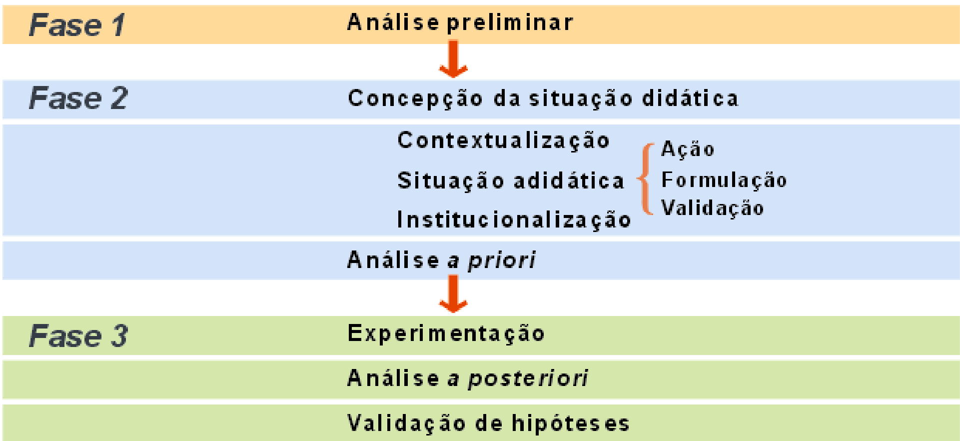


Figura 4.1
Engenharia Didática: fases da investigação.
Fonte: autora

4.3.1 Análise preliminar (Fase 1)

A análise preliminar é a fase de busca de subsídios para o tratamento do problema sob investigação, os quais também indicam a relevância do problema. Alguns dos aspectos que podem fazer parte desta fase preliminar são: análise epistemológica do conteúdo objeto de ensino; análise da forma como é tratado usualmente o assunto no ensino e dos efeitos desse tratamento; análise de restrições presentes nas realizações didáticas. Ou ainda: a análise das dificuldades e resistências que se apresentam em situações de aprendizagem. Este é o aspecto considerado nesta investigação, objeto de análise no Capítulo 3.

Um reforço a esta analise preliminar é a experiência, ao longo de anos, com alunos da disciplina Geometria I do Curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS:

[3] O último momento da Fase 3, a validação de hipóteses, é apresentado no Capítulo 5.

estes alunos manifestam as mesmas dificuldades e resistências.[4]

4.3.2 Concepção da situação didática, análise *a priori* e formulação de hipóteses (Fase 2)

Por concepção de situação didática entende-se o delineamento de atividades a serem propostas aos alunos, sempre levando-se em consideração os diferentes momentos da situação apresentados na teoria de BROUSSEAU.

São feitas escolhas didáticas em função dos problemas apontados na análise preliminar, e escolhas justificam-se *a priori*. Esta justificativa tem caráter de predição e dá suporte ao enunciado de hipóteses a serem colocadas sob validação na Fase 3 da Engenharia Didática. A análise *a priori* indica de que forma as atividades propostas propiciarão a aprendizagem almejada e também fornece critérios para observar os alunos no desenrolar da *situação adidática.*

No contexto específico desta investigação, a concepção de situação coloca em destaque a utilização dos ambientes de geometria dinâmica, relevância justificada nas considerações feitas na seção 3.2 do Capítulo 3. É utilizado um representante significativo de tais ambientes — o *software* Cabri-Geometry II. [5]

Com suporte deste ambiente, a *realização didática* foi assim projetada:

a) o meio é um provocador de desequilíbrios / equilíbrios cognitivos ao desencadear as ações dos alunos, as reflexões sobre as ações em função da realimentação proporcionada pelo ambiente, novas ações e reflexões. Também foi levada em consideração a importância dos *conflitos sócio-cognitivos*, o que se reflete em duas escolhas didáticas — a dinâmica de trabalho em duplas e momentos de discussão coletiva.

b) são respeitados os momentos de:

— *contextualização*, a proposta de atividade. a interface do ambiente garante naturalmente o momento de *devolução* — os alunos engajam-se na resolução do problema proposto movidos por interesse próprio e assim instala-se a *situação adidática.*

---

[4] GRAVINA, M.A. **Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria**. Em: Anais do VII Congresso Brasileiro de Informática na Educação, Belo Horizonte, MG, 1996.

— *situação adidática*, fase de exploração e manipulação de configurações geométricas, quando os alunos *agem / formulam / validam* e a *interface* dinâmica do ambiente tem papel fundamental porque desencadeia um processo espiral de construção de conhecimento, devido aos conflitos que se estabelecem entre ação e efeitos desejados no "desenho em movimento"; tem-se, na *situação adidática*, processo de investigação similar ao vivenciado pelos matemáticos — a *descoberta* e a *justificação* — discutido na seção 2.1 do Capítulo 2; nos sucessivos *experimentos de pensamento*, sintonizados com os "desenhos em movimento", entram em cena as *abstrações reflexionantes*, quando os alunos coordenam suas ações, identificam pressupostos e conseqüências presentes nas construções, e abstraem características generalizadoras; transformam em objeto de pensamento o que é tomado, num primeiro momento, como *abstrações empíricas* e assim convergem para explicações de natureza dedutiva, ou seja, as demonstrações.

— *institucionalização*, que é a discussão coletiva das *ações / formulações / validações* que perpassam as produções dos alunos; momentos direcionados à metaprendizagem tornam-se necessários — concorrem para o entendimento do modelo em construção; institucionaliza-se, em sintonia com o saber constitutivo da geometria euclidiana, o conhecimento construído pelos alunos.

c) a seqüência de atividades proposta é organizada em níveis de crescente complexidade [6]: o primeiro visa à compreensão do significado de demonstração; o segundo, ao desenvolvimento das primeiras competências para construir demonstrações; o terceiro nível propõe o desenvolvimento de competências para o tratamento de problemas mais complexos.

Ênfase foi dada à atividade do tipo "caixa preta": a tela do computador mostra uma configuração geométrica e os alunos não têm acesso ao procedimento de

---

[5] São deste ambiente as telas que acompanham a seqüência de atividades proposta.

[6] No delineamento da seqüência de atividades tomam-se também, como subsídio, experiências prévias, em ambientes de geometria dinâmica, com alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS.

construção utilizado.[7] Explorando o "desenho em movimento" que aí se descortina, o desafio é construir réplicas das "caixas pretas, para o que eles devem analisar as propriedades geométricas contidas no dinamismo e na estabilidade da figura. Algumas das "caixas pretas" são teoremas clássicos da geometria, apresentados de forma tal que do processo de construção é depreendido o teorema.

4.3.2.1 A seqüência de atividades e a análise *a priori*

As atividades propostas, apresentadas a seguir com suas respectivas análises *a priori*, assim se distribuem:

Nível I	Atividade 1 , Atividade 2
Nível II	Atividade 3 – duas partes, Atividade 4 – duas partes
Nível III	Atividade 5 – duas partes, Atividade 6, Atividade 7

Atividade 1

A tela apresenta (Ver Figura 4.2) três "caixas pretas". O desafio é, utilizando movimento, explorar o tipo de estabilidade e dinamismo aí descortinados e construir réplicas das "caixas pretas".

Análise *a priori*: é aplicando movimento nos vértices que os alunos exploram as relações geométricas que determinam a estabilidade e o tipo dinamismo em cada um dos quadriláteros, implementam estratégias de construção com a escolha de menus e depois as validam utilizando o "desenho em movimento". Na busca de procedimento de construção que garanta o mesmo "efeito" que se têm nas "caixas pretas", eles se engajam em *ações / formulações / validações / ações.* As ações e formulações provocam o controle do *componente conceitual* do objeto geométrico; com os "desenhos em movimento", eles controlam o componente figural.

A atividade visa à compreensão do significado de desenho, o que implica a

---

7 Com o recurso de macroconstrução é que são produzidas as "caixas pretas".

superação da dificuldade que os alunos encontram quanto à fusão adequada de *componentes conceitual* e *figural* que determinam um objeto geométrico. Deve se tornar claro para os alunos que a impressão perceptiva não dá conta do significado de um desenho: desenhos que a percepção registra como iguais podem guardar diferentes relações geométricas, e particularidades do desenho instância de representação devem ser descartadas. Os ambientes de geometria dinâmica provocam esta compreensão porque no dinamismo das figuras se reflete a imposição de diferentes relações bem como a irrelevância de certas particularidades.

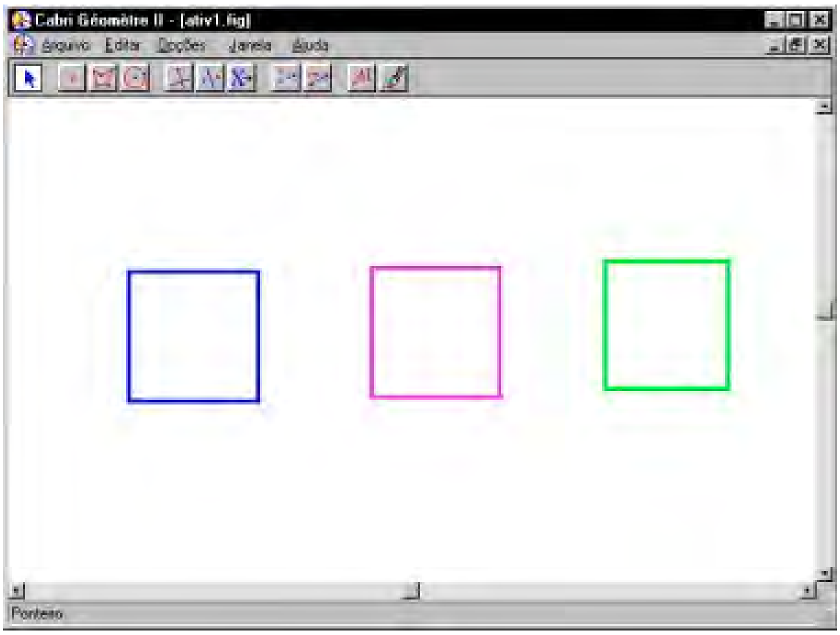


Figura 4.2
Análise* a priori, *atividade 1 : *no primeiro quadrilátero a construção inicia com segmento lado e resulta em quadrado; o segundo inicia com segmento diagonal e resulta também quadrado; três pontos dão inicio a construção do terceiro quadrilátero, que resulta em paralelogramo.*
Fonte: autora

Atividade 2

A atividade tem como propósito o compartilhamento das construções feitas na Atividade 1, abordando: os diferentes procedimentos e os correspondentes efeitos na estabilidade e no dinamismo do desenho; os casos em que as figuras colapsam sob ação de movimento; as construções que resultam em quadriláteros com particularidades diferentes das registradas nas “caixas pretas”. Durante o compartilhamento, os alunos são provocados a identificar propriedades declaradas na construção que participam da definição de quadrado e paralelogramo e propriedades decorrentes da construção — os *fatos estáveis implícitos* — que também participam dessas definições. Estes são os fatos que garantem as definições, sendo os últimos passíveis de demonstração. O desafio final é a produção das primeiras demonstrações, no que antecede a situação de metaprendizagem em que é discutido o modelo teórico que caracteriza a geometria euclidiana — as noções e relações primitivas, os axiomas e os teoremas.

A título de ilustração, traz-se uma possível construção de paralelogramo (terceira "caixa preta"), no caso com a particularidade de ser ele losango. Nos passos de construção não é declarado o paralelismo dos lados opostos, portanto *fato estável implícito*. Ver Figura 4.3.

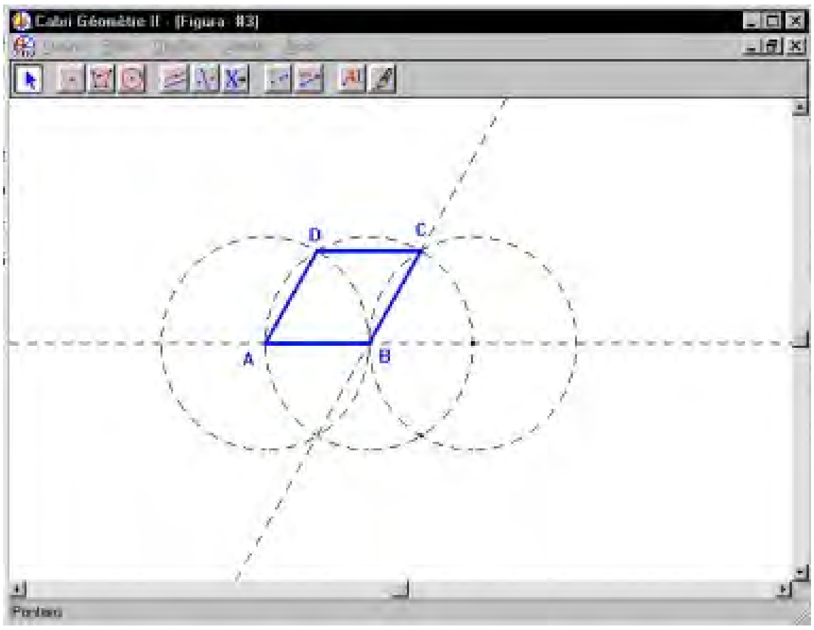


Figura 4.3
Análise* a priori, *atividade 2: *uma possível construção inicia com o segmento AB e prossegue com círculos que determinam os pontos C e D.*
Fonte: autora

Análise *a priori*: a atividade tem como objetivo provocar a compreensão de que, no processo de construção de uma figura, a partir de certo momento têm-se relações que não podem ser mais impostas à construção.

Com a liberdade de escolha de procedimentos de construção das réplicas das "caixas pretas", delega-se aos alunos o controle dos fatos a serem declarados (as hipóteses de um teorema), preparando-os para o controle dos diferentes *fatos estáveis implícitos*, conseqüentes de imposições feitas à construção (a tese de um teorema).

Nas *ações / formulações / validações* que perpassam a construção deve se tornar claro que, sem mais escolha (a figura já está na tela do computador), tem-se relações que são decorrentes de imposições feitas à construção. Desta forma espera-se, por parte dos alunos, a pertinente pergunta: *"por que a imposição de certas relações geométricas à construção implica regularidades estáveis sob ação de movimento, não declaradas na construção?"*

O problema agora é demonstrar relações que independem de imposições — elas *estão* na figura construída — , as quais garantem que o quadrilátero construído atende às condições da definição – ser quadrado ou ser paralelogramo.

Para que se dê inicio ao processo de demonstração prevê-se como necessário o momento de metaprendizagem em que é discutido o modelo teórico objeto de aprendizagem. Introduz-se a estrutura do modelo, a "fundação" — são as noções e relações primitivas, os axiomas; após, os primeiros "pilares" — essencialmente os casos de congruência de triângulos.[8] Progride-se no modelo — os primeiros teoremas e demonstrações, aqui se retomando construção feita na Atividade 1. Apoiando-se na "fundação" e nos "pilares" iniciais, coletivamente constrói-se uma primeira argumentação dedutiva que explica os *fatos estáveis implícitos*. Isto requer controle acurado de hipóteses — os fatos declarados na construção — e acurada explicitação do que se deseja demonstrar. Quanto a *reinterpretações / reconstruções / extensões* do componente figural, necessárias ao fluir da argumentação, nesta atividade a exigência é muito modesta. As *extensões* se apresentam de forma natural — são diagonais dos quadriláteros, e as *reinterpretações* e *reconstruções* envolvem subconfigurações que são triângulos e ângulos alternos internos em retas paralelas.

Nesta atividade espera-se crucial provocação para a ascensão de conhecimento em geometria — de empírico a hipotético-dedutivo. Conforme apontado na análise preliminar, esta não é uma transição espontânea e, assim, depende de proposital momento de metaprendizagem. É esta ênfase que acompanha a atividade: os alunos

---

[8] Já tendo sido introduzido o axioma de congruência LAL. Os demais casos de congruência —ALA, LLL e LAA — são introduzidos como teoremas.

retomam as construções compartilhadas, com o desafio de demonstrar os *fatos estáveis implícitos*, agora levando em consideração o modelo constitutivo da geometria euclidiana.

Atividade 3

À semelhança da Atividade 1, os alunos são desafiados a "abrir" duas "caixas pretas", ou seja, a construir réplicas delas. Ver Figuras 4.4 e 4.5.

Análise *a priori*: ao realizar-se a construção (*ação / formulação*) e validá-la por via de movimento (*validação empírica*), dá-se controle dos *fatos declarados*, bem como dos *fatos estáveis implícitos* e dessa forma emergem *os* clássicos teoremas de círculos circunscrito e inscrito a triângulo.[9] A apresentação inicial das "caixas pretas" é propositadamente prototípica, e é no movimento da figura que surgem os conflitos que instalam o processo espiral de *ação / formulação / validação / ação* ...

Apoiando-se em competências desenvolvidas no nível anterior, os alunos são desafiados a explicar os *fatos estáveis implícitos*. Nesta atividade são maiores as exigências de *extensões / reconstruções* de desenho e de *apreensões operativas* para que se evidenciem as subconfigurações suporte à demonstração. Na primeira "caixa preta" são triângulos que se constituem pela inclusão de segmentos com origem no ponto de intersecção de duas das mediatrizes e extremidades nos vétrices do triângulo inicial. Já na segunda, a extensão depende não só das bissetrizes, mas também de reta perpendicular a um dos lados do triângulo, o que implica previsíveis conflitos.

---

[9] Teorema do círculo circunscrito: "Num triângulo o ponto de intersecção de duas das mediatrizes define o centro do círculo circunscrito ao triângulo e a terceira mediatriz também passa pelo centro deste círculo". Teorema do círculo inscrito: "Num triângulo o ponto de intersecção de duas bissetrizes define o centro do círculo inscrito ao triângulo e a terceira bissetriz também passa pelo centro deste círculo".

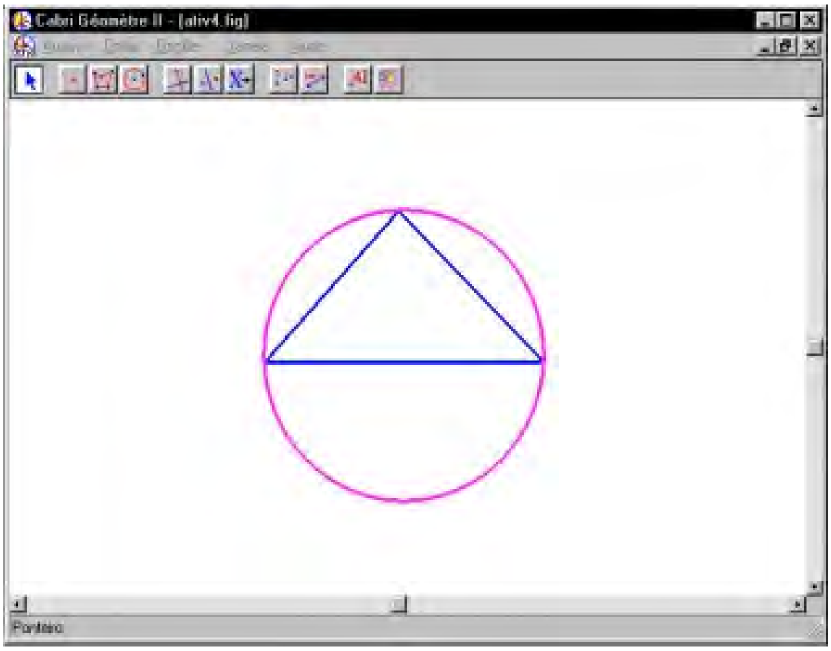


Figura 4.4
Análise* a priori, *atividade 3, primeira parte : *a construção inicia com o triângulo, segue com as mediatrizes de dois dos lados, por último é o círculo com centro no ponto de intersecção das mediatrizes passando por um dos vértices do triângulo.*
Fonte: autora

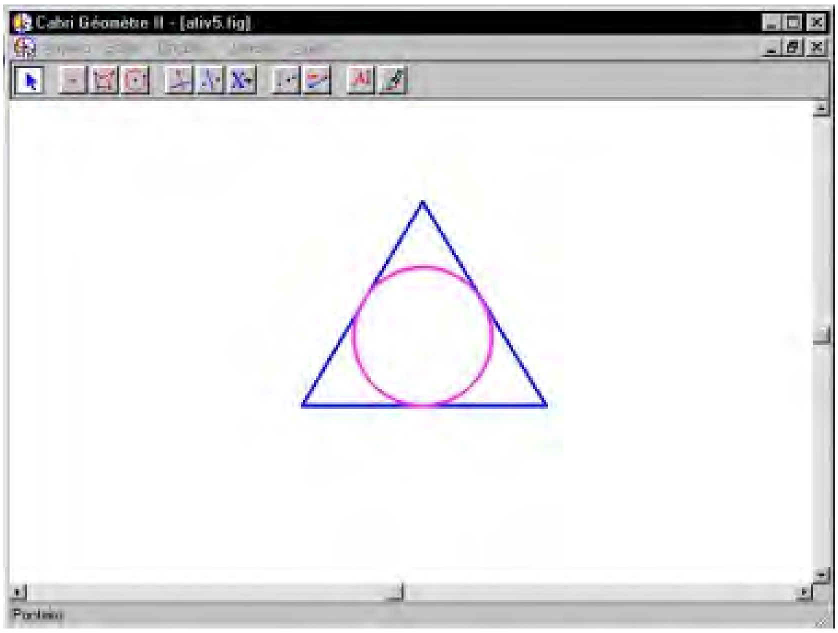


Figura 4.5
Análise* a priori, *atividade 3, parte 2 : *a construção inicia com triângulo, segue com as bissetrizes de dois dos ângulos, reta perpendicular à um dos lados passando pelo ponto de intersecção das bissetrizes, e finalmente o círculo com centro no ponto de intersecção das bissetrizes passando pelo ponto pé-da-perpendicular.*
Fonte: autora

Atividade 4

Na primeira parte da atividade os alunos aplicam movimentos à figura (uma construção bastante simples e buscam regularidades correspondentes ao teorema de Varignon. [10]). Ver Figura 4.6. A atividade prossegue com a produção de demonstração do teorema.

Na segunda parte, eles são desafiados a "abrir" três "caixas pretas" que, sob ação de movimento, apresentam regularidades surpreendentes. Ver Figura 4.7. É no processo de construção de réplicas das "caixas pretas" que os alunos depreendem as condições a serem impostas ao quadrilátero ABCD que garantem os quadriláteros particulares MNPQ — ser quadrado, retângulo ou losango — , isto objeto de demonstração.

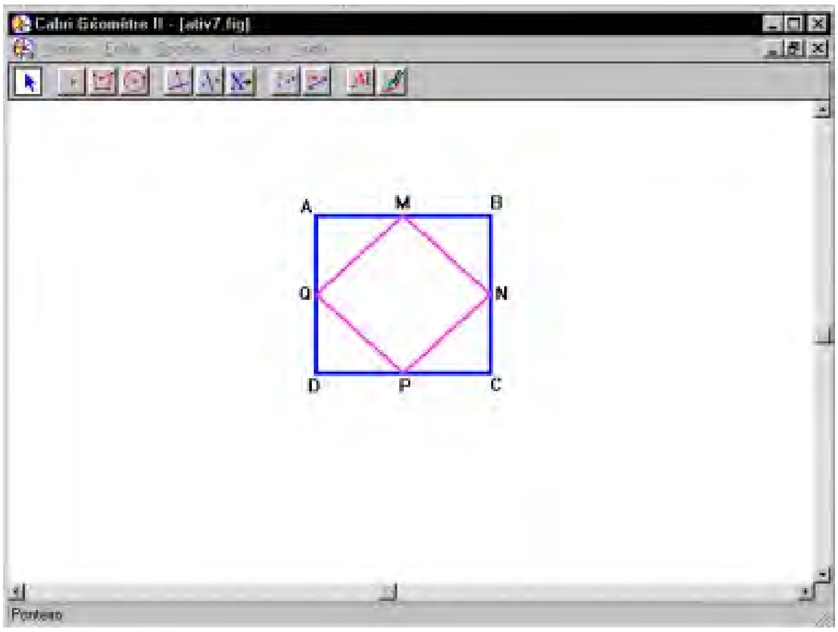


Figura 4.6
Análise* a priori*, atividade 4, primeira parte: *a construção inicia com quadrilátero qualquer e os pontos médios dos seus lados definem um novo quadrilátero.*
Fonte: autora

Análise *a priori*: aplica-se aqui a análise feita na atividade anterior, acrescida de maiores expectativas quanto à produção de demonstrações: o tratamento a ser dado ao *componente figural* exige *extensão de desenho* de identificação não imediata. Conforme discutido no Capítulo 3, uma das dificuldades que se apresenta aos alunos no processo de construção de demonstração é identificar os elementos geométricos que devem ser acrescidos ao componente figural de modo a garantir o fluxo da argumentação. Não é uma tarefa fácil quando em inicio de aprendizado.

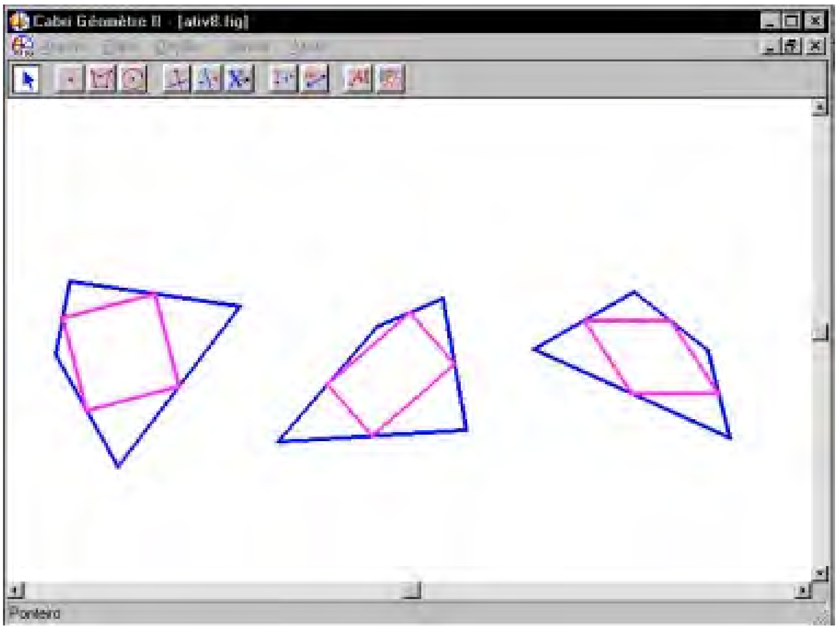


Figura 4.7
Análise* a priori*, atividade 4, segunda parte: *a construção das três caixas pretas inicia com um dos segmentos diagonal e segue com a construção da segunda diagonal respeitando, respectivamente, as condições diagonais perpendiculares e congruentes, diagonais perpendiculares, diagonais congruentes.*
Fonte: autora

Na primeira parte da atividade, a demonstração exige a emergência de subconfiguração relativa ao teorema da base,[11] dependente de *extensões* e *reconstruções* de desenho em instância não prototípica. Este é o primeiro desafio.

Quanto às particularidades do quadrilátero MNPQ: na primeira parte da atividade, a exploração não chega a fornecer indícios de hipóteses sobre o quadrilátero ABCD. Isto explica a recorrente formulação de conjeturas falsas:[12] “*MNPQ é quadrado se e somente se ABCD é quadrado*” ou “*MNPQ é losango se e somente se ABCD é retângulo”.*

---

[10] Teorema de Varignon: “Se ABCD é um quadrilátero e M, N , P e Q são pontos médios dos lados então o quadrilátero MNPQ é um paralelogramo”.

[11] O teorema da base média garante que o “segmento determinado por dois pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado do triângulo e tem como medida a metade da medida deste terceiro lado”.

[12] Experiências prévias dão esta indicação.

É na segunda parte, com o dinamismo do desenho, que se criam conflitos. Com mais cuidado, os alunos devem explorar as condições aplicadas sobre o quadrilátero ABCD que garantem as regularidades surpreendentes dos quadriláteros MNPQ, condições que permitem “abrir” as “caixas pretas”. O processo de construção das réplicas provoca o controle de hipóteses e tese, a serem formuladas sob a forma de enunciados passíveis de demonstração. Ao final da construção é preciso *reconstruir* o desenho de modo a evidenciar a subconfiguração “teorema da base média” que suporta a argumentação.

Atividade 5

Nesta atividade, são dois os instrumentos virtuais. Os alunos exploram o funcionamento e as relações geométricas que os definem e são desafiados a produzir demonstrações que expliquem o funcionamento descrito, tomando como hipóteses as relações geométricas impostas nos instrumentos . Ver Figuras 4.8 e 4.9.

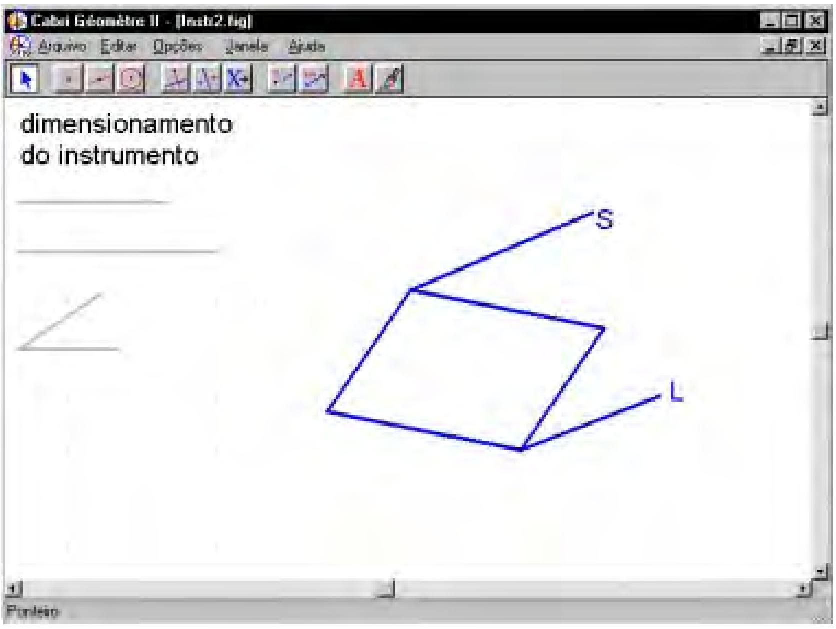


Figura 4.8
Análise* a priori, *atividade 5, primeira parte: *o ponto L é uma rotação do ponto S, de um certo ângulo fixo, em torno de um ponto fixo.*
Fonte: autora

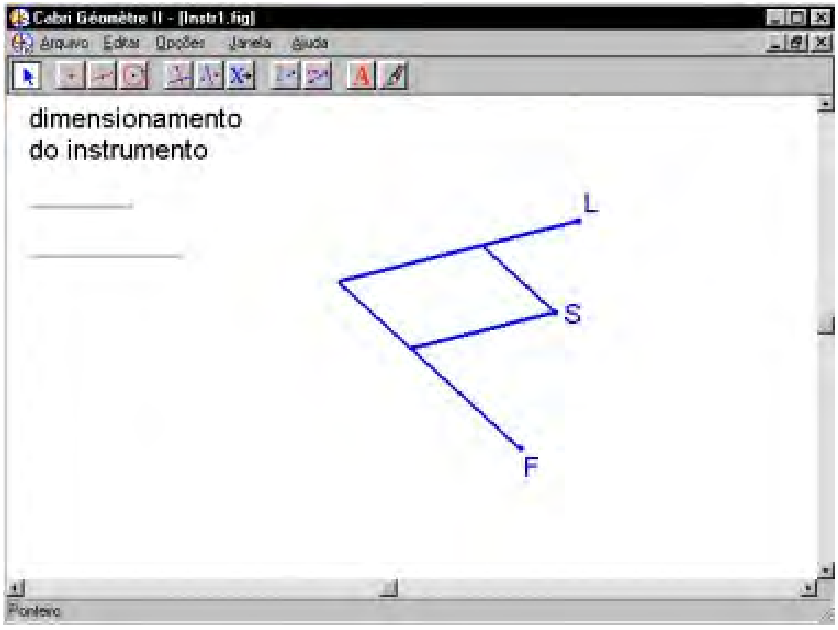


Figura 4.9
Análise* a priori*, atividade 5, segunda parte: *o ponto L é a imagem homo-tética de S, com centro de homotetia em F.*
Fonte: autora

Análise *a priori*: neste nível são propostos desafios mais complexos. Fazer descrição dos instrumentos em linguagem geométrica acurada é o primeiro desafio; é preciso manipular os instrumentos e aqui os recursos "Lugar geométrico" e "Rastro On/Off" disponíveis no ambiente tornam-se importantes.

Quanto as características geométricas, a pergunta norteadora é "como fazer concretamente um tal instrumento?" Ou seja, são as condições das "varetas" e articula-ções entre elas que devem ser determinadas. Nisso, novamente o dinamismo contribui, bem como a possibilidade de redimensionar os instrumentos.

A última etapa da atividade é explicar porque tais condições garantem o funcionamento do instrumento. Aqui, os alunos são confrontados com a necessidade de acurada descrição dos instrumentos — os conceitos de rotação e homotetia, em substi-tuição a eventuais descrições intuitivas. O nível de exigência nas *apreensões operativas* é maior já que, de antemão, nada é dito sobre os instrumentos: o que se tem na tela é a simulação de instrumentos geométricos, a ser entendida via o dinamismo. *Extensões* e *reconstruções* de desenho e identificação de subconfigurações são necessárias para o avanço do processo de demonstração.

Atividade 6

A atividade se inicia com uma construção muito simples: ângulo de vértice O, ponto P no interior do ângulo, ponto A num dos lados do ângulo, semi-reta AP interceptando o outro lado do ângulo no ponto B. O problema a ser resolvido é: “que condição deve ter o ponto A para que a área do triângulo OAB seja mínima?”. Ver Figura 4.10.

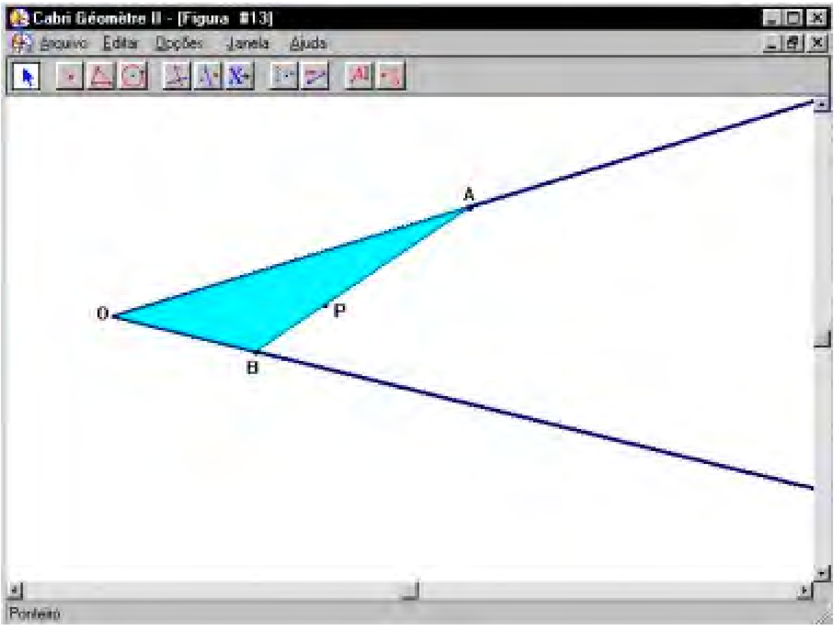


Figura 4.10
Análise* a priori*, atividade 6.
Um problema de minimização
Fonte: autora

Análise *a priori*: a pergunta proposta desencadeia, de forma natural, exploração inicial de caráter empírico. Os recursos de medição que o ambiente oferece, em conjunto com as manipulações que ele proporciona, ajudam a localizar perceptivamente o ponto A; o desafio é fazer a leitura geométrica desta posição, o que significa construir o ponto A e enunciar a propriedade “*se A .... então a área do triângulo é mínima*”.

Nesta atividade, são naturais, de início, as validações empíricas, do tipo *“as medidas dão suporte à propriedade enunciada*”. Mas neste ponto, os alunos já bem sabem que as validações devem acontecer em patamar superior de conhecimento.

A figura que está na tela é muito simples, porém exige mais habilidade quanto às *extensões* e *reconstruções* de desenho para que sejam identificadas as subconfigurações que dão suporte à argumentação dedutiva. Sendo atividade onde o processo de demonstração é mais complexo, mais intensa é a similaridade entre a situação de aprendizagem e a situação de criação em matemática — na forma de *ações / formulações / validações / ações ...*

Nesta atividade, é maior a demanda cognitiva. Assim sendo, antecipa-se a possibilidade de detectar, com mais transparência, pensamentos de natureza visual que podem proporcionar *insights* ao avanço no processo de demonstração.

Atividade 7

Na Figura 4.11, uma estratégia esconde um tesouro (ponto T), sendo suas referências uma árvore (ponto A) e duas pedras (pontos P1 e P2). O desafio é dado pela pergunta: "admitindo-se que, com o passar do tempo a árvore desapareceu, como localizar o tesouro?"

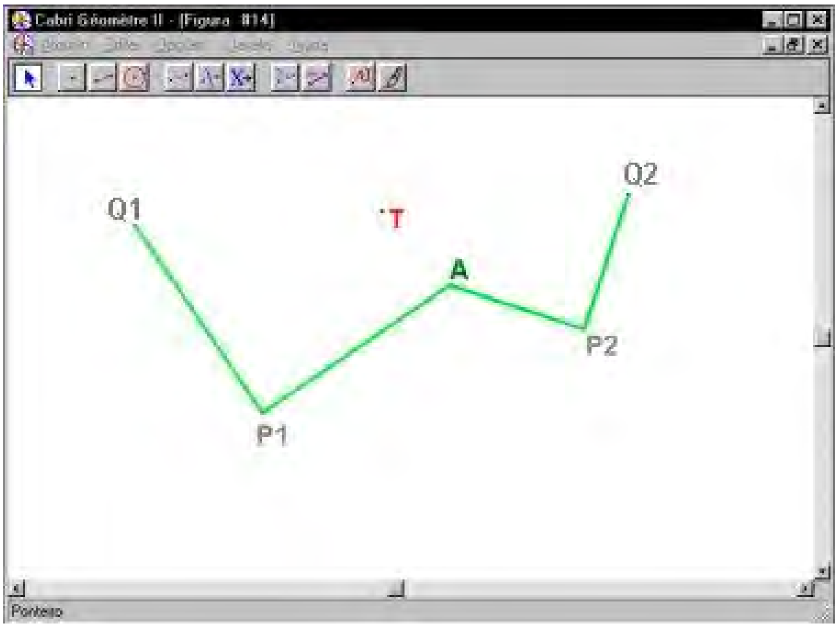


Figura 4.11
Análise* a priori, *atividade 7: *os segmentos AP1 e P1Q1 são congruentes e perpendiculares, bem como os segmentos AP2 e AQ2; o ponto T é ponto médio de Q1Q2.*
Fonte: autora

Análise *a priori*: esta atividade é similar à anterior quanto às exigências cognitivas. Feita a construção da figura, é o efeito produzido pelo movimento do ponto A que surpreende: o ponto T mantém-se fixo. É esta imobilidade que dá indícios para construção de estratégia que não dependa de A. Construir uma nova estratégia não é difícil e a coincidência de pontos, o ponto T e novo ponto construído T', pode ser validada empiricamente deslocando-se o ponto A.

A pergunta a ser respondida é muito simples na sua primeira formulação: "por que T' = T?". Muitas vezes, como no caso desta atividade, o processo de demonstração exige a formulação de perguntas equivalentes à que se deseja responder. Este é o desafio inicial que se apresenta aos alunos**.**

Formuladas as perguntas equivalentes, coloca-se o problema de tratamento do desenho. Como na atividade anterior, a figura na tela é bastante simples e o grande desafio concentra-se na *extensão* do desenho e concomitantes *apreensões operativas* de subconfigurações, de forma a explicitar uma demonstração.

Também nesta atividade, dadas as exigências cognitivas, vê-se a possibilidade de detectar nos pensamentos de natureza visual uma fonte de *insights* no processo de demonstração.

4.3.2.2 Formulação de hipóteses

A concepção da seqüência de atividades, acompanhada das respectivas análises *a priori*, dá suporte à formulação de hipóteses, a serem validadas na análise *a posteriori* que acompanha a fase de experimentação:

— a utilização dos ambientes de geometria dinâmica provoca a ascensão de patamar de conhecimento geométrico, com concomitante ascensão de natureza de pensamento;

a) estando no patamar de conhecimento ainda empírico, os alunos ascendem ao patamar em que a geometria passa a ser entendida como um modelo teórico e desta forma torna-se compreensível o significado de uma demonstração;

b) de explicações empíricas, os alunos ascendem às argumentações que caracterizam o pensamento hipotético-dedutivo. Neste novo patamar desenvolvem, progressivamente, competências para construir suas próprias demonstrações.

— a utilização dos ambientes de geometria dinâmica favorece a exteriorização e a "versatilização" de pensamentos de natureza visual, os quais são fonte de *insights* para construção de demonstrações; "os desenhos em movimento" provocam as *apreensões operativas* de invariantes figurais, que são então colocados sob controle geométrico por via de argumentação dedutiva, o que exige novas *apreensões operativas* — *re-interpretações, reconstruções, extensões.*

4.3.3 A experimentação e a análise *a posteriori* (Fase 3 — os dois momentos iniciais)

Concebida a situação didática, a próxima fase da Engenharia Didática é o momento de implementação. Esta terceira fase é um momento delicado da investigação, pois ao mesmo tempo em que já têm-se delineadas, na análise *a priori*, expectativas em relação às atitudes e conseqüentes progressos dos alunos, deve-se estar atento para detectar atitudes não previstas. No decorrer da seqüência de atividades também podem surgir dificuldades e obstáculos não previstos na análise preliminar. Nessas condições faz-se necessária a reformulação e reestruturação da engenharia didática proposta, então tomada como uma primeira aproximação para a superação das dificuldades apontadas na análise preliminar e com estratégia de ataque explicitada na análise *a priori*. É uma metodologia de caráter dialético: o próprio desenrolar da experimentação retroage sobre a engenharia concebida.

É a confrontação da análise *a priori* com o que se produz efetivamente no desenrolar da experiência que sustenta a análise *a posteriori*, sistematizadora dos resultados produzidos pela situação didática implementada. A validação das hipóteses formuladas[13] ou eventuais reformulações destas é decorrência dessa confrontação.

4.3.3.1 A experimentação

A. Os sujeitos participantes

A experiência começou com 16 alunos, numa escolha aproximadamente aleatória dentre os calouros do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, constituindo uma turma especial, no semestre 01/2000, da disciplina de Geometria I [14], obrigatória no início do curso.

Os alunos eram recém egressos do ensino médio (excluindo-se os casos de alunos egressos de cursos supletivo e profissionalizante) e na faixa etária de 17-20 anos. Estas condições se justificam: para controle da experimentação julgou-se importante ter-se alunos com conhecimentos prévios em geometria não muito discrepantes [15], o que garantiu melhores condições para identificar e categorizar os comportamentos e avanços na construção de conhecimento, resultantes das interações com o ambiente de geometria dinâmica.

Ao longo da experiência, 3 alunos, dentre os 16 previstos, desistiram de cursar a disciplina; um deles bem no início dos trabalhos e os outros dois na terceira atividade. Dos 13 alunos que se mantiveram até o final da experimentação, 9 eram provenientes de escola pública e 4 de escola particular; 6 não tinham nenhuma familiaridade com computadores, 5 tinham alguma familiaridade e 2 eram bastante experientes.

Nos dois primeiros encontros foram estimados os conhecimentos prévios dos alunos e obtiveram-se resultados a confirmar as considerações feitas na análise preliminar: interpretações de desenho que não respeitam as restrições conceituais e até mesmo casos em que imperfeições de traçado são levadas em consideração (um aluno); imagens mentais inadequadas que comprometem a fusão dos componentes conceitual e figural (a grande maioria dos alunos); validações que não se apoiam em argumentos de natureza dedutiva (todos os alunos), proporcionando forte indicação de que o conheci-

---

[13] As hipóteses relativas a esta investigação estão formuladas na seção 4.3.2.2.

[14] A disciplina de Geometria I (MAT01341) tem como súmula: pontos, retas, ângulos; triângulos congruentes, construções com régua e compasso; triângulos semelhantes; funções trigonométricas de ângulos; círculos; lugares geométricos; decomposição de regiões poligonais de mesma área.

[15] Toma-se como conhecimento prévio dos alunos os tópicos de geometria tratados nos livros didáticos escolares. No geral, as propriedades geométricas são apresentadas como "fatos dados": triângulos e casos de congruência; paralelismo e perpendicularidade; teorema dos 180; pontos notáveis do triângulo; teorema de Tales; triângulos e semelhanças; relações métricas nos triângulos; teorema de Pitágoras; quadriláteros e polígonos regulares.

mento encontra-se no patamar da geometria empírica. As Figuras 4.12 a 4.14, a seguir, ilustram os dois primeiros pontos.

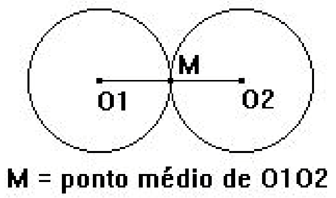


Figura 4.12
Interpretação inadequada do desenho de círculos tangentes
De desenho representando dois círculos tangentes, acompanhado de hipóteses esclarecedoras, foi depreendido que "os círculos podem se interceptar em um único ponto ou em um milhão de pontos, dependendo do tamanho dos círculos"
Fonte: autora

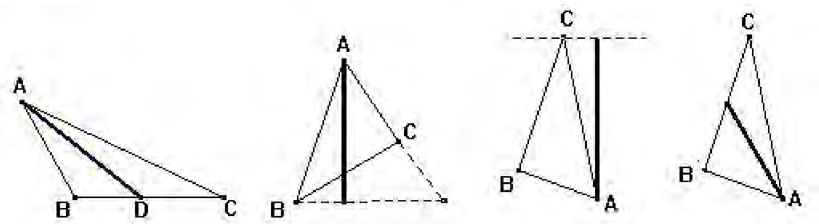


Figura 4.13
Dificuldade advinda de imagem mental prototípica do segmento altura de um triângulo
Tendo sido apresentada a definição de segmento altura de um triângulo ABC, ao desenhar a altura relativa ao lado BC, em triângulos não prototípicos, recorrentemente os alunos desconsideraram as condições de definição.
Fonte: autora

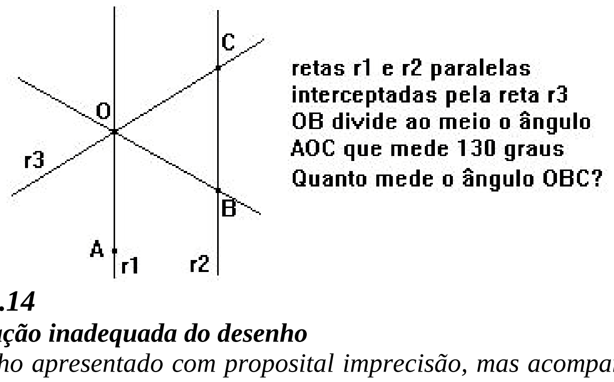


Figura 4.14
Interpretação inadequada do desenho
Em desenho apresentado com proposital imprecisão, mas acompanhado de informações esclarecedoras, observou-se reconstruções que fogem do controle conceitual : "os triângulos OCB e AOB são iguais" ; "os ângulos AOC e ABC tem a mesma medida"; "o ângulo OCB mede 60 graus"; o triângulo OBC tem todos os lados iguais". Chama a atenção, que no geral não foi identificada a subconfiguração "ângulos alternos internos em reta paralelas, o que resolveria imediatamente o problema; as soluções apresentadas envolvem muitos cálculos com ângulos.
Fonte: autora

Quanto à natureza das validações: solicitados a resolver impasse relativo a soma dos ângulos de um triângulo, decorrente da manipulação de triângulos de papelão e transferidor — algumas somas resultam em 180 graus, outras em 179 graus, outras em 180,5 (uma descrição fictícia de situação de sala de aula) — todos os alunos apresentaram respostas de natureza empírica. A argumentação dedutiva não foi considerada em nenhum destes raciocínios, o que ilustra-se com algumas das explicações apresentadas (*ipsis literis*):

> *"se os triângulos são perfeitos, a soma dos ângulos de um triângulo perfeito sempre dará 180";*
>
> *"houve dois problemas basicamente. Primeiro os triângulos feitos de papelão não possuíam forma precisa, ou seja, eram mal feitos. Segundo os transferidores também apresentavam pequenas diferenças entre si;"*
>
> *"há erros ao fazer os triângulos e as pequenas diferenças nos transferidores causaram uma distorção de valores na hora de somar;"*
>
> *"o transferidor usado não foi o mesmo e isso afetou a medição feita pelos alunos, por isso aconteceu essas margens de erro"*

Este perfil dos alunos evidenciou a pertinência da seqüência de atividades a ser implementada, bem como a importância das expectativas anunciadas na análise *a priori*.

B. Os recursos

Para realização da experiência utilizou-se o Laboratório de Informática A116 do Instituto de Matemática da UFRGS. Neste Laboratório tem-se: 18 computadores *Pentium*, conectados em rede, um canhão de projeção e um quadro branco, o que garantiu adequada realização da experiência.

C. A sistemática

Na fase de experimentação, foram realizadas vinte sessões de trabalho [16],

[16] Após a realização da seqüência de atividades, o que tomou aproximadamente a metade do semestre letivo, a disciplina de Geometria I prosseguiu com atividades de geometria dinâmica, com grau de complexidade similar às das atividades 6 e 7 da seqüência. Alguns encontros foram reservados para avaliações individuais.

cada uma com a duração de duas horas-aula[17], distribuídas em dois encontros por semana. Manteve-se para cada atividade uma média de duas à três sessões de trabalho.

Conforme já mencionado, dos 16 alunos que iniciaram a disciplina, três desistiram. Com isto, a organização inicial em duplas modificou-se e se manteve até o final da experiência da seguinte forma: dez alunos trabalhando em duplas (mantiveram-se fixas) e três alunos trabalhando individualmente (que assim se mantiveram por escolha própria), como mostra o quadro a seguir.

Grupo 1 (Cib/Gis)	manteve-se até o final da experiência
Grupo 2 (Gla/Mar)	manteve-se até o final da experiência
Grupo 3 (Ber/Fab)	manteve-se até o final da experiência
Grupo4 (Cam/Edu)	manteve-se até o final da experiência
Grupo 5 (She/Sab)	desistência de Sab, em torno da atividade 3
Grupo 6 (And/Cla)	desistência de Cla, em torno da atividade 3
Grupo 7 (Thi/Luc)	desistência de Luc, no início da experiência
Grupo 8 (Mat/Sil)	manteve-se até o final da experiência

Mesmo dentre as duplas, em duas delas (grupos 2, 3 e 8), em certos momentos e por opção própria, os alunos colocaram-se na situação de trabalho individual, mas retomando, no fechamento do trabalho, a condição de trabalho em dupla.

Na análise da produção, a título de uniformização de apresentação, a referência será sempre feita a “grupos”. Vale informar que após a solicitação de realização de trabalho em duplas, os alunos se organizaram de forma espontânea.

Aos grupos foram propostas as atividades delineadas na concepção da situação didática, sendo o maior tempo de trabalho alocado à *situação adidática*, o que está justificado nos pressupostos teóricos desta investigação. A pesquisadora também assumiu o papel de professora da disciplina, o que garantiu a implementação das atividades em sintonia com a proposta de Engenharia Didática.

Durante a *situação adidática*, os grupos foram observados nas suas *ações / formulações / validações*, de modo a obter-se indicadores da eficácia da situação didá-

[17] Um período de 110 minutos.

tica proposta. Conforme previsto na análise *a priori*, momentos de discussão e reflexão coletiva também fizeram parte da sistemática de trabalho.

D. A coleta de dados

A coleta de dados, material utilizado na análise *a posteriori*, constou de:

a) produção dos grupos ao longo de cada sessão, gravadas em disquete, com a orientação de salvar a produção em diferentes momentos, de forma a ter-se a história das tentativas e dificuldades;

b) produção dos grupos na forma de material escrito (construções e demonstrações);

c) observação dos comportamentos e diálogos das duplas e observação de diálogos entre duplas e professor, bem como das manifestações dos alunos nos momentos de discussão coletiva.

4.3.3.2 A análise *a posteriori*

Nesta seção é analisado o comportamento dos grupos ao longo das atividades, levando-se em consideração as expectativas anunciadas na análise *a priori* e as hipóteses formuladas, estas em função da situação didática proposta.

Quanto a produção gravada em disquete, utilizou-se ao longo da análise o recurso "Revisar Construção" disponibilizado pelo *software*, com o qual se podem repassar, passo a passo, os procedimentos de construção. Os alunos atenderam a solicitação de gravar diferentes momentos de trabalho, e assim tornou-se possível analisar uma média de quatro arquivos em cada atividade. Todas as atividades foram finalizadas com a redação de construção e/ou demonstração e este é o material escrito analisado. Observações feitas ao longo dos trabalhos, bem como registros de "falas" das duplas, diálogos entre professora e duplas e manifestações em discussão coletiva também dão suporte à análise. As "falas", na análise *a posteriori*, são transcrições *ipsis literis*.

Com o propósito de colocar em evidência os comportamentos e progressos, a análise das atividades 1, 2, 3 e 4 restringe-se à parte da produção dos grupos, a necessária e suficiente para fundamentação deste trabalho;[18] quanto as atividades 5, 6, e 7, dada a sua natureza (a ênfase não é a construção geométrica), julgou-se pertinente a análise de todo o seu desenrolar.

No decorrer da seqüência de atividades, registraram-se comportamentos diferentes das expectativas anunciadas na análise *a priori*, o que implicou a reformulação e reestruturação da engenharia didática proposta. Neste sentido, assinala-se a mudança na seqüência das atividades, justificada adiante, ficando elas nesta ordem: atividades 1, 2, 3, **7**, 4, 5 e 6.

Embora não faça parte da investigação a observação de *conflitos sócio-cognitivos* e de seus efeitos no processo de aprendizagem, tem-se — especialmente nos momentos de discussão coletiva, organizados em torno da dialética de "provas e refutações" — indicações de positivos efeitos (especialmente nas atividades 2 e 7).

Antes de iniciarem a seqüência de atividades, os grupos se familiarizaram com o *software*, sendo explorados os menus de construção e a característica de estabilidade dos "desenhos em movimento". Neste primeiro momento, eles também se dedicaram a construções livres, quando chamou a atenção o pouco uso de propriedades geométricas e de estabilidade do desenho, registrando-se, principalmente, desenhos de figuras "soltas" e desenhos "à mão livre" de caráter ingênuo (Figuras 4.15 e 4.16).

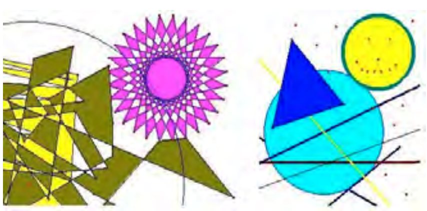


Figura 4.15
Desenho livre de formas geométricas
Fonte: trabalho de alunos

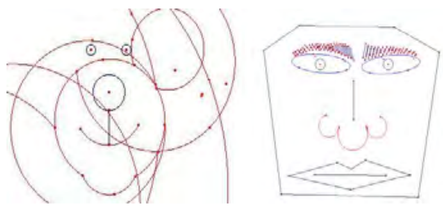


Figura 4.16
Desenho livre lúdico
Fonte: trabalho de alunos

Segue-se a análise *a posteriori*.

---

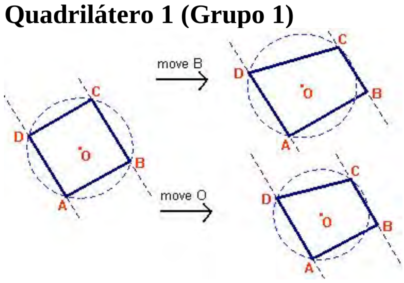
[18] O anexo 2 coleta a extensa produção dos alunos relativa a estas atividades.

Atividade 1

Em todos os grupos, exceto um (o grupo 7), constatam-se dificuldades na realização dessas primeiras construções.

O que transparece, nas tentativas iniciais, é que os alunos não dominam as relações geométricas encerradas no dinamismo da figura e que caracterizam as regularidades dos quadriláteros. As primeiras tentativas misturam construção geométrica e desenho do tipo “à mão livre”, fazendo com que o quadrilátero tenha, aparentemente, a forma desejada, mas que colapse sob a ação de movimento. Ver Figura 4.17.

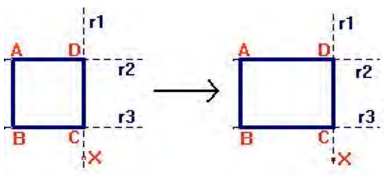
Quadrilátero 1 (Grupo 1)



Construção: segmento AB; retas perpendiculares pelos extremos do segmento; ponto O candidato a centro do quadrado, construído **aparentemente**; círculo de centro O passando por A, pontos C e D intersecções das retas perpendiculares com o círculo.

Dinamismo: movimentando B ou O, o quadrilátero **colapsa**. Evidenciam-se os desenhos à mão livre: o círculo deixa de passar por B, perde-se perpendicularidade e congruência entre lados.

Quadrilátero 1 (Grupo 3)



Construção: segmento AB; a reta r1 paralela à AB passando por X e tal que a distância de r1 à B é **aparentemente** igual à AB; retas r2 e r3 perpendiculares à AB passando, respectivamente, pelos pontos A e B, pontos D e C de intersecção dessas retas com a reta r1.

Dinamismo: movimentando A, B ou a reta r1 o quadrilátero **colapsa**, transformando-se em retângulo.

Figura 4.17
Análise* a posteriori*, Atividade 1, quadrilátero 1, grupos 1 e 3
Fonte: produção de grupo

Não é claro se o desenho à mão livre é um reflexo da predominância de *apreensões perceptivas*, o que significaria que os quadriláteros ainda não estão sendo tratados como objetos geométricos, ou se é resultado de comunicação inadequada com o *software*, isto é, as propriedades geométricas “pensadas”— *apreensões seqüenciais* — não são transmitidas por via de escolha de menus de construção. Uma forte indicação a favor da primeira alternativa é que, nas primeiras construções, os grupos consideram o paralelismo e a perpendicularidade, com o propósito de garantir os ângulos retos; mas não consideram a condição de congruência dos lados do quadrilátero, para o que o menu

"Círculo" resolveria o problema; no entanto a utilização deste recurso não foi imediata.

Embora o *software* explicite, mediante procedimento de construção, a existência de relação funcional entre os objetos geométricos, de início os grupos não utilizam tal informação. Nas primeiras explorações, o dinamismo serve tão somente para identificar as regularidades dos quadriláteros; os grupos não consideram que o dinamismo encerra uma relação funcional, subsídio importante ao entendimento das "caixas pretas": *objetos livres* são as variáveis independentes que dão inicio a construção; *relação funcional* é o procedimento de construção e produz, como variável dependente, a forma geométrica desejada.[19] Nas "caixas pretas" propostas, a primeira tem como variável independente um par de pontos ou, equivalentemente, um segmento, determinantes unívocos do lado do quadrado; na segunda, é o mesmo tipo de variável independente, só que agora correspondendo à diagonal que determina univocamente o quadrado; na terceira, as variáveis independentes são três pontos ou, equivalentemente, dois segmentos com origem em comum, elementos necessários e suficientes para aplicar a relação funcional — aqui resumindo-se à construção de paralelas, das quais resulta, como variável dependente, o paralelogramo. No entanto, na construção da primeira "caixa preta" registra-se escolha inadequada de variáveis independentes: excesso de vértices livres (grupos 1, 2 e 3); retas (grupos 4 e 5); círculo (grupo 6); pontos que não são vértices do quadrilátero (grupo 8).

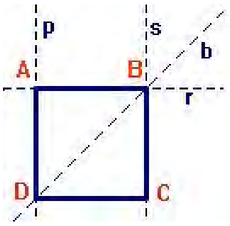
Mas, gradativamente, os "desenhos em movimento" provocam o acurado controle do processo de construção. Com exceção do grupo 1 (quadrilátero 3), todos os grupos apresentam, depois de algumas tentativas, construções satisfatórias para os três quadriláteros. Em quatro grupos (3, 4, 5 e 6) há decréscimo no número de tentativas da primeira "caixa preta" para a segunda; já na terceira "caixa preta" há aumento no número de tentativas, explicável pela surpresa dada pelo dinamismo do quadrilátero, bastante diferente dos outros dois.

É interessante observar-se a diversidade dos procedimentos de construção satisfatórios, o que significa que o desenho está sob o controle de distintas *apreensões sequênciais* (Ver Figura 4.18). Com a liberdade de escolha de imposições a serem feitas à construção, torna-se evidente, para os grupos, que diferentes podem ser as hipóteses a

[19] O conceito de função associado ao processo de construção geométrica é apresentado na seção 3.3, capítulo 3.

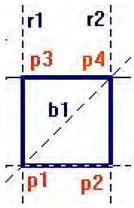
serem feitas sobre um desenho, sem que haja modificação na impressão perceptiva. E no dinamismo da figura revelam-se as diferentes regularidades decorrências da construção. Desta forma criam-se as condições para a *gênesis cognitiva da demonstração*.

Quadrilátero 1 (Grupo 2)



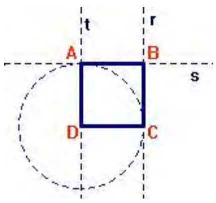
"segmento DC; reta perpendicular ao segmento DC (**sem explicitar o ponto pelo qual passa a reta, mas referindo-se a reta p**); *reta perpendicular ao segmento DC por C; bissetriz de C, D e ponto* (**sem explicitar este ponto auxiliar, na reta p)**; *ponto B de intersecção entre a bissetriz e a reta s; reta paralela ao DC passando pelo ponto B; ponto de intersecção entre a paralela e a reta perpendicular p; segmentos DA,AB e BC."*

Quadrilátero 1 (Grupo 7)



"segmento p1p2, duas perpendiculares ao segmento pelos pontos p1 e p2, traçamos a bissetriz b1 que corta o ângulo p3p1p2 (**mas ainda não foi construído o ponto p3**), *marcamos o ponto p4 da intersecção de r1 e b1, traçamos uma reta paralela à p1p2 passando por p4*."

Quadrilátero 1 (Grupo 8)



"*segmento DC, círculo com centro em D* **(sem explicitar ponto do círculo)**, *reta t perpendicular à DC* **(sem explicitar ponto por onde passa a reta t**), *reta s perpendicular à t* **(sem explicitar ponto por onde passa a reta s)**, *reta r perpendicular à s* (**sem explicitar os pontos A e B**)."

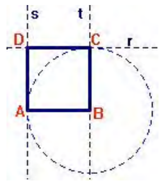
Figura 4.18
Análise* a posteriori, *Atividade 1*: *quadrilátero 1, grupos 2, 7 e 8
Fonte: produção de grupo

Na maioria do grupos (1, 2, 3, 5 ,7 e 8), a redação da construção apresenta linguagem geométrica bastante adequada — competência esta desenvolvida, em grande parte, no uso dos menus de construção — com apropriado controle de *fatos declarados.* Imprecisões de linguagem (indicadas com comentários em negrito nas situações ilustrativas) são explicáveis, já que desenho esclarecedor acompanha a redação. Ver Figura 4.18.

Em dois dos grupos registra-se, na descrição, a inclusão de *fatos estáveis implícitos* na seqüência de *fatos declarados*, numa indicação de ainda precário controle de implicações inferenciais. Estes grupos declaram, como imposição à construção: "*reta tangente à circunferência no ponto C e paralela à reta AB*" (Grupo 4) ou "*reta q para-*

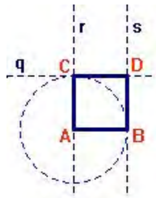
lela à AB e tangente a circunferência em C” (Grupo 6) — quando apenas uma das condições determina a reta em questão, sendo a outra uma decorrência. Ver Figura 4.19.

Quadrilátero 1 (Grupo 4)



“segmento AB, reta s perpendicular ao segmento AB, reta t paralela à s passando por B, circunferência de centro B e raio AB, reta t tangente à circunferência **(sem explicitar o ponto de tangência***)* *e paralela à reta AB* **(imposição excessiva***),* *segmento de A à D* (**sem explicitar os pontos**)*, segmento de C à D* **(sem explicitar o ponto C***), Segmento DC”*

Quadrilátero 1 (Grupo 6)



“segmento AB, reta s perpendicular à AB **(sem explicitar o ponto pela qual passa)**, *reta s perpendicular à AB* **(sem explicitar o ponto pela qual passa)**, *círculo de centro A e raio AB, reta q paralela à AB e tangente a circunferência em C, passando por s em D* (**imposição excessiva**)”

Figura 4.19
Análise* a posteriori*, Atividade 1, quadrilátero 1, grupos 1 e 3
Fonte: produção de grupo

Os “desenhos em movimento” são usados intensivamente, tanto na fase de *ação* sobre as “caixas pretas” como nas fases de *formulação (*no caso a construção) e *validação*, ainda que, aqui, de natureza empírica, já que tomada da estabilidade dos “desenhos em movimento”.

Resumo da análise

Como previsto na análise *a priori*, já nesta primeira atividade instalou-se *devolução* e processo espiral de *ação / formulação / validação / ação ...* , bem documentado nas diferentes tentativas de construção feitas pelos grupos.

O processo de construção manteve-se no patamar instrumental; tornar-se-á objeto de reflexão na próxima atividade. Todos os grupos progediram no controle gradativo da construção de réplicas das “caixas pretas”; nas primeiras tentativas desenhos à mão livre estiveram presentes, mas concluíram a atividade com réplicas sob acurado o controle geométrico.

.

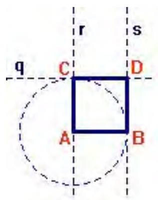
Os grupos avançaram, ainda que de forma não explícita, no domínio do funcionamento do modelo teórico objeto de construção. Criaram-se as condições para o entendimento do significado de demonstração; de que imposições de construção, a partir de um certo momento, necessariamente acarretavam relações geométricas que não dependiam mais de escolha — os *fatos estáveis implícitos* a serem explicados.

Esta primeira atividade revelou-se provocativa à ascensão de patamar de conhecimento — com as *apreensões seqüências* os desenhos passaram a ser interpretados no domínio de funcionamento da geometria hipotético-dedutiva.

Atividade 2

A primeira produção da Atividade 1 a ser compartilhada pelos grupos é escolhida, propositadamente, pelo professor: a construção do quadrilátero 1 apresentada pela maioria dos grupos (1, 4, 5, 6 e 8), sua descrição incluindo *fatos estáveis implícitos*. Ver Figura 4.20.

Quadrilátero 1 (Grupo 6)



"segmento AB, reta r perpendicular à AB, reta s perpendicular à AB, círculo de centro A e raio AB, reta q paralela à AB e tangente a circunferência em C, passando por s em D "

Figura 4.20
Análise* a posteriori*, Atividade 2, quadrilátero 1, grupo 6
Fonte: produção de grupo

Cuidadosa análise coletiva evidencia as imposições de construção (refeitas "passo a passo"), tornando-se transparente a excessiva declaração *"reta q paralela à AB e tangente à circunferência em C"*, o que foi bem explicitado pelos alunos: ou *"a reta q passando por C é paralela à AB e é fato estável implícito a tangência ao círculo em C"* ou *"a reta q é tangente à circunferência em C e é fato implícito o paralelismo de AB e q"*.

As hipóteses sobre o desenho, dadas na construção, são destacadas: segmento AB, retas r e s perpendiculares ao segmento AB passando pelos extremos, ponto C na reta r tal que AC=AB, reta q paralela à AB passando por C, ponto D intersecção das retas q e s. A atividade prossegue com a descrição dos *fatos estáveis implícitos*: a congruência dos segmentos AB, BD e DC, bem como a perpendicularidade nos vértices C e D — fatos a serem explicados para garantir-se ABDC quadrado.

Neste ponto, apresenta-se a questão crucial: como explicar que ABCD é um quadrado? Os grupos manifestam a pertinência de uma explicação, ao mesmo tempo questionando, veementemente: *“como explicar?(...) por onde começar?(...) é óbvio que a figura é um quadrado (...)”.*

Faz-se necessária a intervenção do professor na direção de meta-prendizagem, momento previsto na análise *a priori*. É colocado em discussão o modelo estrutural da geometria euclidiana: primeiro vem a “fundação” — as noções e relações primitivas, os axiomas; depois, os primeiros “pilares” — essencialmente os teoremas de congruência de triângulos, neste momento inicial tomados sem demonstração.

Discutido o modelo, retoma-se a pergunta: “como demonstrar que ABCD é quadrado?” Coletivamente, na dinâmica de “provas e refutações”, é feita a *extensão* de desenho — a diagonal AD, a *reconstrução* de subconfigurações “triângulos” e progressivamente a discussão converge à explicação dos *fatos estáveis implícitos.* Com segurança, os alunos engajam-se no processo de demonstração:

Prova (**precário controle dos fatos declarados**)	“construíndo o segmento AD temos dois triângulos, ACD e ABD. No vértice A os dois tem ân-gulo de 45 graus ... os lados AB e AC dos triângulos são iguais e eles tem em comum o lado AD. O caso de congruência ALA garante a congruência dos triângulos (considera 45 graus a medida do ângulo A nos dois triângulos) e assim as iguldades AB=AC e DB=DC bem como ângulo C = ângulo B, e C também é de 90 ”
Refutação (**pleno controle dos fatos declarados**)	*“quando é traçado o segmento AD, os pontos A e D já estão na figura ... não esta garantido que AD é bissetriz do ângulo A (...) é um fato implícito ”*
Prova (**precário controle dos fatos declarados**)	*“mas então é só trocar a condição sobre AD (...) AD é a bissetriz do ângulo A* **(considera que a bissetriz do ângulo A passa por D)***e agora com certeza o ângulo A nos dois triângulos vale 45 e o caso de congruência ALA resolve o problema ”*
Refutação (**pleno controle dos fatos declarados**)	*“isto não resolve o problema, agora tem um novo problema que é mostrar que a bissetriz do ângulo A no quadrilátero ABDC passa por D ”*

Prova (**precário controle dos fatos declarados**)	*"se em lugar do segmento AD a gente constroi o segmento BC ... o triângulo BAC é isósceles e com ângulo de 90 e 45, então no triângulo BDC o ângulo B vale 45 e a gente aplica o caso de congruência LAL nos triângulos BAC e BDC* **(considera congruentes os segmentos BD e AC)** *"*
Refutação (**pleno controle dos fatos declarados**)	*"mas ainda não está garantida a igualdade dos lados BD e AC então faltam elementos para usar o caso LAL"*
Prova (**pleno controle dos fatos declarados**)	*"mas também podemos olhar para os triângulos ACB e BDA, o primeiro é isósceles e assim tem ângulos de 90 e 45... com o segundo tem o lado comum BC e no segundo o ângulo B vale 45...mas ainda falta um ângulo de 45 no segundo, em C, para garantir a congruência dos dois triângulos"*

Nas tentativas de demonstração apresentadas, registradas acima, faltam elementos que garantam a congruência dos triângulos, o que é bem detectado pelos alunos. Cria-se o impasse para o avanço da argumentação e o professor intervém, redirecionando a discussão para as hipóteses do problema: em nenhum momento da argumentação é levada em consideração a condição de paralelismo da reta q. É colocada em discussão uma possível argumentação dedutiva:

> *Quanto aos ângulos retos: como a reta q é paralela ao segmento AB, olhando para reta t como transversal as duas retas temos que ângulos alternos internos são congruentes e portanto o ângulo em C é reto. Com raciocínio análogo aplicado as paralelas q e AB com transversal s tem-se que o ângulo em D também é reto.*
>
> *Quanto a igualdade de lados: como o Δ ABC é isósceles, os ângulos nos vértices B e C medem 45. Segue que no Δ BCD os ângulos B e C também medem 45 (porque já mostramos acima que no quadrilátero os ângulos C e D medem 90). Pelo critério ALA segue que Δ BAC é congruente ao Δ BDC , o que nos permite concluir que os segmentos BA e BD são congruentes, bem como os segmentos AC e DC, o que mostra a congruência dos lados do quadrilátero construído.*

Esta argumentação recorre a propriedades ainda não discutidas, a saber: congruência de ângulos alternos internos em retas paralelas, congruência de ângulos em triângulo isósceles, soma dos ângulos de um triângulo. Isto produz imediata reação dos alunos: "*ainda não foram demonstradas estas propriedades*"; "*quais as propriedades geométricas que podem ser usadas na argumentação?*". Os questionamentos são pertinentes e indicam que os alunos encontram-se em processo de transição de patamar de conhecimento.

Este é um ponto delicado na transição de patamar de conhecimento, de empírico para dedutivo: nos anos de formação escolar, as propriedades geométricas, no geral, são apresentadas como “fatos dados” (isto é, sem demonstração) e é sob essa forma que se incorporam ao conhecimento dos alunos. Mas tais “fatos”, bem conhecidos dos alunos mas por eles não questionados, tornam-se objeto de demonstração no modelo teórico. Como harmonizar o conhecimento prévio dos alunos com a necessidade de demonstração? Convenciona-se então que mesmo os “fatos” sobejamente conhecidos, se utilizados nas argumentações devem ser explicados / demonstrados (caso dos fatos usados na demonstração acima). Com auxílio de um livro-texto, [20] os “fatos” conhecidos, acompanhados de demonstração, são agregados ao modelo como novos teoremas.[21]

Assim expandido o modelo, os grupos retomam as demais construções da Atividade 1 e se engajam no processo de demonstração, validando com argumentações dedutivas as propriedades que definem um quadrado ou um paralelogramo.

Uma das construção relativa ao quadrilátero 1, acompanhada das demonstrações produzidas pelos grupos, permite analisar os comportamentos destes. Breves comentários sobre as demais construções e demonstrações só enriquecem a análise.

O processo de demonstração começa por segura explicitação dos fatos declarados na construção. Ver Figura 4.21.

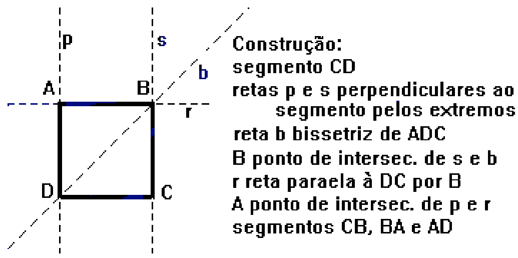


Figura 4.21
Análise* a posteriori, *Atividade 2.
Explicitação dos fatos declarados na construção.
Fonte: autora

Após a explicitação, os grupos procedem no controle dos *fatos estáveis implícitos* e, por último, com as demonstrações que os explicam. Os grupos apresentam diferentes níveis de controle de argumentos dedutivos:

[20] DOLCE, O . e POMPEO, J. **Geometria Plana**, Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, vol. 9, São Paulo : Editora Atual, 1993.

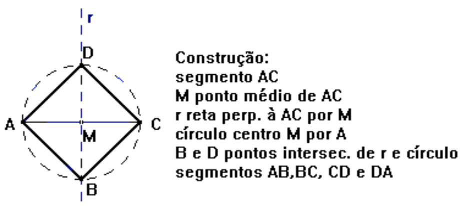
Nível de pleno controle, embora a demonstração da congruência entre os lados do quadrilátero restrinja-se à pares de lados (grupo 7).	*Pela construção são fatos explícitos: ângulos C e D retos e reta r paralela à DC.* *São fatos implícitos: ângulos A e B retos e todos os lados iguais.* *Como a reta r foi declarada paralela ao segmento DC, portanto se o ângulo é reto em D, concluímos que seu alterno interno também será. Sendo assim o ângulo A é 180 menos o alterno interno que é 90, dando 90 graus para A . O mesmo vale para o ângulo B.* *Pela definição de bissetriz, sabemos que o ângulo formado pela reta b e o segmento DC é 45 graus, formando BDC um triângulo retângulo. Neste triângulo tang D =1 e como tang D = cateto oposto/cateto adjacente concluímos que DC é igual à BC. Utilizando o mesmo método, no triângulo BAD verificamos que AB também é igual à AD*
Nível de argumentação que utiliza *fatos estáveis implícitos*, como paralelismo de AB e CD, ou b como bissetriz do ângulo B, ou ângulos retos em A ou B (grupos 1, 4 e 6).	*É fato implícito ângulos retos em A e B.* *Traçando a bissetriz de D, se originam dois ângulos de 45. Como as retas p e s são perpendiculares ao segmento CD, elas são paralelas. Logo a bissetriz funciona como transversal. Observe que a metade do ângulo em D e em B são ângulos alternos internos , ambos com 45* **(usa implícitamente DC paralelo à AB)**. *A reta r, paralela à CD é portanto perpendicular à s, logo tem ângulo de 90 em* B, *assim como o ângulo A.* *É fato implícito a congruência dos segmentos. Como b é bissetriz de D, o triângulo DBC é isoângulo* **(não é explicitada a razão)** *e assim os segmentos DC e CB são congruentes. O triângulo DAB tem ângulo de 90 em A e os ângulos da base são iguais* **(não é explicitada a razão**), *assim DAB é isósceles tendo DA e DB congruentes. O lado DB é comum aos dois triângulos e os ângulos da base são iguais e caímos então no caso ALA de congruência. Temos DA=AB=DC=BC o que afinal prova que os quatro lados do quadrilátero são congruentes” (Grupo1)*
Nível de argumentação insuficiente e com utilização de *fatos estáveis implícitos* (grupos 2 ,5 e 8)	*quanto aos ângulos, são retos já que formados por retas perpendiculares* **(explicação insuficiente)**. *Os lados: os dois triângulos DAB e BCD tem em comum o segmento BD. Como a reta b é bissetriz de D, os ângulos em D e B serão cortados ao ‘meio’* **(relativo à B, é fato implícito)**, *logo os dois ângulos terão em D um ângulo de 45. Além disso os ângulos em A e C são retos* **(não foi demonstrado que C é reto)** . *Assim pelo caso LAAo podemos concluir que os triângulos são congruentes e portanto os quatro lados também* **(de fato, é somente a congruência de pares de lados que está garantida; a congruência dos quatro decorre dos triângulos isósceles, o que não é mencionado)** *” (Grupo 5)*
Nível de falta de clareza quanto ao que deve ser demonstrado e com utilização de fatos estáveis implícitos (grupo 3)	*“CD=AB porque se duas retas p e s são perpendiculares a CD, então elas são paralelas entre si, portanto a distância AB é igual à CD* **(usa implícitamente que o ângulo é reto em A ou B e não demonstra a congruência entre os quatro lados)** . *Sabemos que os quatro ângulos são retos através da lei dos ângulos alternos internos, sendo p e s as transversais* **(vago, não explicita o paralelismo e a transversalidade)”** *(Grupo 3)*

[21] Neste momento foram incluídos os teoremas relativos à condição de paralelismo, triângulo isósceles e soma dos ângulos de um triângulo.

Sendo esta uma das primeiras demonstrações produzidas, ressalta o bom desempenho dos grupos: eles iniciam o tratamento de desenho com a *reconstrução* de subconfigurações "triângulos" e aplicam adequadamente os critérios de congruência de triângulos para garantir a congruência dos lados do quadrilátero (todos os grupos, exceto o grupo 3); seguem na identificação da subconfiguração "ângulos alternos internos internos em retas paralelas", necessária para garantir os ângulos retos, só não referida na argumentação de três dos grupos (grupos.5, 6 e 8), o que é explicável na menor evidência dos elementos geométricos a serem colocados em relação.

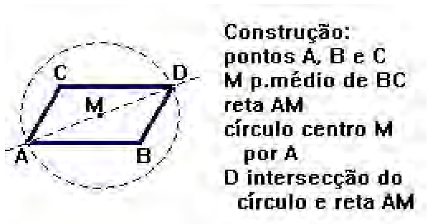
Na demonstração relativa ao quadrilátero 2, melhor é o desempenho. O tratamento de desenho exige a *reconstrução* de subconfigurações "triângulo". Sem maiores dificuldades, os grupos recorrem a critério de congruência LAL, às propriedades de triângulo isósceles e de soma dos ângulos de triângulo, e demonstram a congruência dos lados e dos ângulos do quadrilátero. Ver Figura 4.22.

Já no quadrilátero 3, a *reconstrução* da subconfiguração "ângulos alternos internos internos em retas paralelas" permanece motivo de dificuldade em alguns grupos. Também registra-se falta de compreensão da definição de paralelogramo: algumas demonstrações avançam além do necessário — bastando demonstrar o paralelismo dos lados opostos do quadrilátero, prosseguem com a congruência de ângulos opostos ou de lados opostos. Ver Figura 4.22.



A figura nos mostra 4 triângulos com um ângulo reto em cada. Isto porque foi declarado que passasse uma reta perpendicular a AC e passasse por M (ponto médio AC) o que implica na formação de ângulos retos. Esses triângulos têm em comum AM=MC e DM=MB pois como D é o ponto de intersecção da reta com a circunferência e M é o centro desta, a distância DM é o raio da circunferência logo DM=MB (para MB se aplica o mesmo caso). Logo concluímos que eles também são isósceles pois AM=MC=DM=MB (são todos raios da circunferência) e pelo teorema LAL concluímos AB=BC=CD=DA.

Sabendo que os triângulos isósceles têm ângulos internos de 90°, 45° e 45° e que os triângulos são iguais entre si, só podemos concluir que os ângulos nos vértices A, B, C e D medem 90° (gr.1)



Se M (ponto médio de CB) é centro da circunferência de raio AM, então AD é diâmetro e M é também ponto médio de AD.
Podemos provar que AB é paralelo a CD por LAL já que CMD e BMA formam 2 triângulos congruentes. Da mesma forma comprovamos o paralelismo de AC e BD (por LAL, CMA=BMD). (gr.4)

Figura 4.22
Análise a posteriori, Atividade 2.
Demonstrações relativas aos quadriláteros 2 e 3.
Fonte: autora

Resumo da análise

Ao serem retomados os procedimentos de construção da atividade 1, então sob pleno domínio dos alunos, decorrente de suas *ações / formulações / validações*, instalaram-se as condições para *gênesis cognitiva da demonstração*.

Tendo os alunos sob controle, nas construções, os fatos declarados e os fatos estáveis implícitos, o momento de meta-aprendizagem — reflexão sobre o modelo que caracteriza a geometria dedutiva — produziu o efeito esperado. Desencadeou-se, de imediato, o dialético processo de "prova e refutação", onde os alunos revelaram a compreensão do significado e o propósito de uma demonstração.

Neste novo patamar de conhecimento — o da geometria dedutiva —, os grupos se engajaram no processo de demonstração com bastante segurança.

Demonstrações dependentes de *reconstrução* de subcongfigurações "triângulo" foram produzidas sem maiores dificuldades; o mesmo não aconteceu no caso de argumentação envolvendo a reconstrução "ângulos alternos internos em retas paralelas. Disso infere-se que, uma vez compreendido o significado de uma demonstração, competências para tratamento do desenho suporte às argumentações dependem de aprendizado, no que os ambientes de geometria dinâmica podem muito contribuir.

Atividade 3, Parte 1.
A primeira "caixa preta"

Nesta atividade, três grupos (Grupos 2, 4 e 5), em sua primeira tentativa de construção escolhem inadequadamente o objeto inicial: o círculo, e não o triângulo. Não percebem, na movimentação dos vértices do triângulo, que o círculo se mantém sempre o mesmo — é um círculo diferente do apresentado na "caixa preta". Esses grupos não atentam à relação funcional entre os objetos geométricos, o que se pode interpretar como predomínio de *apreensões perceptivas* — o que importa é construir uma figura que seja perceptivelmente igual à "caixa-preta". Ver Figura 4.23.

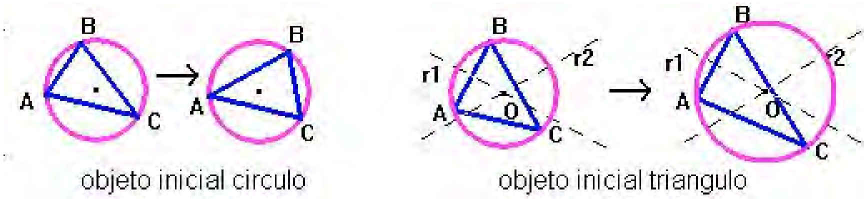


Figura 4.23
Análise* a posteriori*, Atividade 3: objeto inicial círculo e objeto inicial triângulo.
Fonte: autora

Já o Grupo 3 inicia a construção pelo triângulo ABC e vale-se do menu "Arco" para construir dois arcos de círculo, ABC e BCA, obtendo assim o dinamismo e a estabilidade desejados. Ver Figura 4.24. Este procedimento oculta o problema da existência do *círculo passando por três pontos* — propósito da "caixa-preta". Ou seja: o grupo constrói a réplica sem depreender, do processo, as relações geométricas que garantem a existência do círculo circunscrito. Isto alerta para a importância da configuração de menus, no caso seria desabilitar do menu "Arco" [22], para que a "caixa-preta" atenda ao objetivo antecipado.

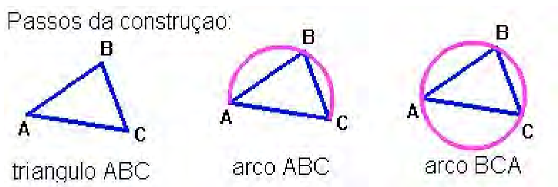


Figura 4.24
Análise* a posteriori*, Atividade 3. Construção usando arcos de círculo.
Fonte: produção de grupo

---

[22] O *software* possibilita a configuração de menus em que são excluídas primitivas de construção. Ao longo da experimentação trabalhou-se com a configuração *default.*

Em procedimento característico da dificuldade mencionada na análise preliminar — entender a generalidade que se encerra em um teorema[23], o Grupo 6 começa sua construção com um triângulo qualquer. Com movimentos de vértices e acréscimo de círculos e retas, o grupo dá ao triângulo aparência equilátera, explicando: "*é mais fácil achar o centro do triângulo se ele é equilátero*" . O grupo prossegue na construção: mediatrizes dos três lados do triângulo e círculo com centro na intersecção das mediatrizes passando por um dos vértices. Ao movimentar os vértices, a figura mantém a estabilidade desejada, donde o grupo comenta: "*parece que a construção feita vale para qualquer triângulo*". Ver Figura 4.25.

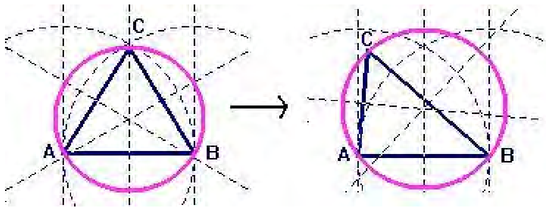
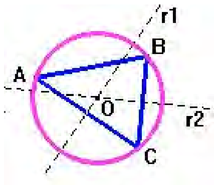


Figura 4.25
Análise* a posteriori, *Atividade 3.
Construção particularizando o triângulo
Fonte: produção de grupo

Chama a atenção que, mesmo tendo no "desenho em movimento" a evidência da generalidade da construção, o grupo imediatamente inicia nova construção: são excluídos os passos de construção desnecessários e refeitos os demais passos, ignorando a irrelevância da aparência equilátera tomada na construção inicial.

Em três grupos (2, 5 e 7), apenas, detecta-se satisfatória construção da "caixa preta" e clareza quanto aos *fatos declarados.* Quanto aos *fatos estáveis implícitos* indicam que o círculo passa pelos outros dois vértices do triângulo, mas não indicam a condição satisfeita pela terceira mediatriz. Quanto à argumentação, estes grupos simplesmente enunciam parcialmente o teorema objeto de demonstração. Ver Figura 4.26.

[23] Dificuldade registrada na análise preliminar, capítulo 3, seção 3.2.3



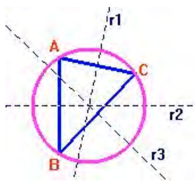
Fatos declarados
"triângulo ABC; retas r1 e r2 mediatrizes de, respectivamente, AC e BC; O ponto de intersecção de r1 e r2; o círculo de centro O passando por B. (gr.5)

Fatos estáveis implícitos
"Apesar de não ter sido declarado na construção, movendo-se qualquer um dos vértices, os pontos A e C também ficam sobre a circunferência" (gr.5)

Explicação
"isso se deve ao fato de o círculo ter sido construído com centro no ponto de intersecção das mediatrizes e portanto as distâncias aos três vértices são iguais" (gr.5)

Figura 4.26
Análise* a posteriori*, Atividade 3, "caixa preta" 1.
Construção satisfatória.
Fonte: produção de grupo

Nos demais grupos (grupos 1, 3, 4, 6 e 8) observa-se ainda tênue controle dos *fatos declarados* e dos *fatos estáveis implícitos*. Na construção final são impostas as três mediatrizes e não somente duas, ainda que duas mediatrizes fossem condição necessária e suficiente para determinar o centro do círculo. Vale ressaltar que, para construção do centro do círculo, o *software* exige a escolha de apenas duas das mediatrizes, o que não funciona como alerta aos grupos. Também não é considerado que a afirmação "a terceira mediatriz também passa pelo ponto de intersecção das outras duas" é passível de demonstração. A maioria desse grupos bem explicita como *fato estável implícito* que os outros dois vértices do triângulo pertencem ao círculo. Ver Figura 4.27.



Fatos declarados

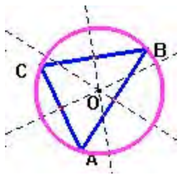
"triângulo, pontos médios do três lados, retas perpendiculares aos lados passando pelos pontos médios, circunferência com centro no encontro das retas e passando por um vértice do triângulo" (gr.1)

Fatos estáveis implícitos

"o triângulo fica sempre dentro do círculo" (gr.1)

Figura 4.27
Análise* a posteriori*, Atividade 3, "caixa preta" 1.
Construção insatisfatória.
Fonte: produção de grupo

Dois grupos dentre os grupos anteriores (4 e 6) declaram que, por construção, o círculo circunscrito passa pelos três vértices do triângulo, ainda que, novamente, o *software* aponte aos *fatos estáveis implícitos* ao exigir, no menu "Círculo", a escolha do centro do círculo e de *um* dos vértices do triângulo, à ele pertencente. Mesmo assim, os grupos desconsideram ser demonstrável que "o círculo passa pelos *outros dois* vértices do triângulo". Quanto a argumentação, apresentam como os demais grupos, simples enunciado do teorema objeto de demonstração. Ver Figura 4.28.



Fatos declarados

"triângulo ABC, mediatrizes dos lados do triângulo **(excessiva imposição)**, *circunferência com centro no ponto de intersecção das mediatrizes com raio até os pontos A, B e C* **(excessiva imposição)***"* (grupo 6)

Fatos estáveis implícitos

"o triângulo quando é movimentado continua inscrito na circunferência" (grupo 6)

Figura 4.28
Análise* a posteriori*, Atividade 3, "caixa-preta" 1.
Construção e fatos estáveis implícitos insatisfatórios.
Fonte: produção de grupo

Nesta "caixa-preta" o controle dos *fatos declarados* e dos fatos estáveis apresenta-se um tanto precário, quando compara-se com o trabalho realizado, pelos grupos, nas duas atividades anteriores. Com isto, o processo de demonstração fica comprometido — as argumentações se apoiam nos próprios *fatos estáveis implícitos* que deveriam ser demonstrados:

> *"a circunferência passa pelos outros dois vértices do triângulo* ***porque do centro a qualquer vértice temos o raio*** *"*. (Grupo 1)
>
> *"**OA e OB são raios**, por isso unindo A e B com O formamos um triângulo isósceles onde OA e OB são congruentes, assim como os ângulos em A e B.* ***Sendo OC um raio também AO = OB = OC****. Assim OC, OA e AC formam triângulos isósceles (...) onde AO e OC são congruentes"*. (Grupo 4)
>
> *"o triângulo é inscrito porque* ***os vértices são pontos da circunferência****"* (Grupo 6)

Atividade 3, Parte 2.
A segunda "caixa preta"

Em todos os grupos, exceto o Grupo 7, detectam-se dificuldades similares às enfrentadas na primeira "caixa preta" desta atividade. Eles iniciam sua construção pelo triângulo e pelas três bissetrizes de seus ângulos, mesmo que duas bissetrizes contivessem condição necessária e suficiente para determinar o centro do círculo inscrito. Como antes (na construção do centro do círculo), o *software* exige a escolha de apenas duas bissetrizes, exigência cuja presença não contribui para o controle da construção.

Todos os grupos escolhem, para tangência de círculo e triângulo, o ponto intersecção de uma das bissetrizes do triângulo com o seu lado oposto. Escolha inadequada: com o movimento dos vértices, o círculo deixa de ser tangente ao triângulo. No desenho inicial, a tangência círculo-triângulo acontece só porque o triângulo é tomado aparentemente equilátero. Ver Figura 4.29.

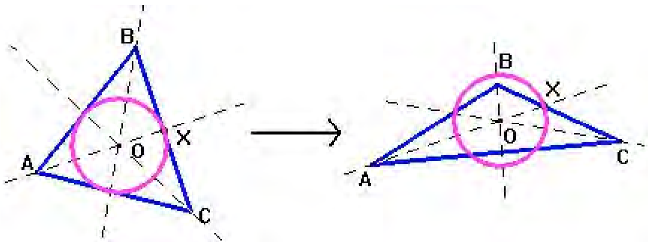


Figura 4.29
Análise* a posteriori, *Atividade 3.
Construção inadequada, revelada pelo dinamismo da figura.
Fonte: autora

Frente ao conflito de tangência, movimentam com atenção o desenho e procuram depreender a condição geométrica a ser satisfeita pelo ponto de tangência, a ser construído. Ver Figura 4.30.

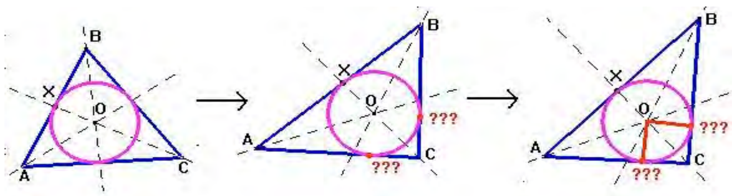
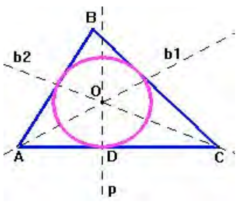


Figura 4.30
Análise* a posteriori, *Atividade 3.
Identificção da condição de tangência, por via de dinamismo da figura.
Fonte: autora

O conflito é bem resolvido em alguns grupos (grupos 2, 6 e 7) e a solução se dissemina nos demais grupos: o ponto de tangência é associado à perpendicularidade do raio com o lado do triângulo. Os grupos prosseguem na construção; a maioria apresenta na construção final somente duas das bissetrizes e explicitam, com pequenas diferenças de linguagem e notação, os passos de construção (grupos 2, 3, 4, 6, 7 e 8). Ver Figura 4.31.



"triângulo ABC; bissetrizes b1 e b2, respectivamente, dos ângulos A e C; ponto O intersecção de b1 e b2; reta p perpendicular à AC passando por O e D ponto de intersecção de p e AC; círculo de centro O passando pelo ponto D."

Figura 4.31
Análise* a posteriori*, Atividade 3.
Construção adequada da "caixa preta" 2
Fonte: autora

Nesta segunda "caixa-preta" melhor andou o controle dos *fatos declarados* e dos *fatos estáveis implícitos.* Todos os grupos, à exceção do grupo 2, mencionam como *fato estável implícito* a tangência à dois dos lados do triângulo. O grupo 2, por outro lado, não menciona este fato, mas declara que a "*terceira bissetriz também passa pelo centro do círculo*". Interpreta-se este controle, mais satisfatório, como uma decorrência de adequada construção da réplica da "caixa-preta":

> *"a circunferência se mantém inscrita no triângulo e os lados do triângulo são tangentes a circunferência".* (grupo 6)
>
> *"a bissetriz do terceiro ângulo está implícita, pois apenas com duas bissetrizes já conseguimos localizar o centro do círculo. Quando feita a terceira bissetriz ela também passará pelo centro".* (grupo 2)

Os grupos que mantém as três bissetrizes como condição para determinar o centro do círculo (grupos 1 e 5) apresentam descrição similar do *fato estável implícito:*

> *"a circunferência se mantém sempre tangente a todos os lados do triângulo".* (grupo 1)
>
> *"a circunferência também passa pelos outros dois lados do triângulo"* (grupo 6)

Quanto às explicações: em seis dos grupos (1, 4, 5, 6, 7 e 8) não se detecta argumentação dedutiva, pois não são feitas as *extensões* de desenho, necessárias a produção de demonstração. As explicações ou são de natureza empírica ou são simples enunciado da propriedade geométrica objeto de demonstração:

> *"a circunferência se mantém tangente porque o raio é perpendicular aos lados do triângulo".* (grupo 6)
>
> *"a circunferência é sempre inscrita pois está tangenciando o segmento AB, de maneira*

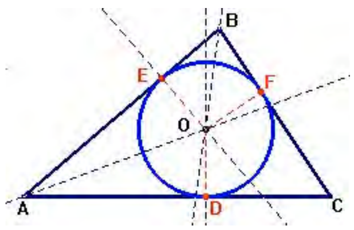
análoga ela tangencia AC e CB”. (grupo 8)

“é tangente porque o encontro das duas bissetrizes está a igual distância dos lados do triângulo... ” (grupo 1)

“o encontro das bissetrizes é o ponto que tem a mesma distância de todos os lados do triângulo”. (grupo 7)

Extensões de desenho, de forma a torná-lo suporte à argumentação, são consideradas em dois grupos. Um deles (grupo 3) conserva, ainda, explicação de natureza empírica. Ver Figura 4.32. O procedimento de extensão de desenho mostra hesitação na escolha de propriedades a serem impostas à construção: o ponto E é tomado como sendo a intersecção do lado AB com sua reta perpendicular; já o ponto F é visto como a intersecção do lado BC do triângulo com o círculo, sem que seja questionada a existência de tal ponto (aqui foi usado o recurso “Pontos de Intersecção”, diponibilizado pelo *software*). Esta mudança de critério indica que o grupo não teve clareza sobre o que deveria ser demonstrado. A explicação é uma descrição empírica do que o grupo estava “vendo”, fornecida pelo comportamento dos segmentos OD, OE e OF a partir do movimento aplicado aos vértices do triângulo.

Grupo 3



Extensão de desenho: retas perpendiculares aos lados AB e AC, passando por O; E ponto de intersecção de AB com a reta perpendicular; círculo de centro O passando por E; F e D pontos de intersecção do círculo com BC e AC, respectivamente; segmentos OD, OE e OF.

Fatos estáveis implícitos:

“devido a uma perpendicular um dos lados ficou fixo à circunferência. Os outros dois lados também ficaram fixos, mas sem a perpendicular”

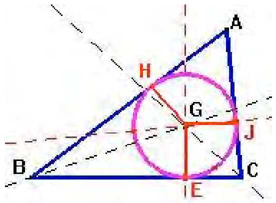
Explicação:

Usando movimento, os alunos constatam empíricamente que, *“com apenas uma perpendicular passando pelo centro, a circunferência já fica constantemente inscrita”*

Figura 4.32
Análise* a posteriori, *Atividade 3.
Explicação de natureza empírica
Fonte: autora

Já o grupo 2 avança na direção de argumentação dedutiva, mas ainda com falhas na utilização das hipóteses, explicável pela mesma hesitação de escolha de propriedades a serem impostas à construção, registrada no grupo 3. Ver Figura 4.33.

Grupo 2



Extensão do desenho: construção dos pontos H e J, intersecções do círculo com os lados AB e AC, respectivamente.

Fatos estáveis implícitos:

"ao fazer a circunferência de centro G passando por E, fizemos essa mesma circunferência passar pelo triângulo **(linguagem imprecisa**) *sendo que isto não foi declarado na construção"*

Explicação apresentada:

"O ângulo em E é igual ao ângulo em J devido que os dois foram construídos com perpendiculares **(usa fato não declarado- GJ perpendicular à AC**). *Os ângulos em C são iguais por causa da bissetriz e o segmento GC é comum aos dois triângulos* **(linguagem imprecisa**). *Por isso eles são congruentes, pertencendo dessa maneira na mesma circunferência* **(linguagem imprecisa)***"*

Figura 4.33
Análise* a posteriori, *Atividade 3.
Argumentação apoiada em fatos estáveis implícitos
Fonte: autora

Não está claro, para este grupo 2, que a existência dos pontos J e H é ainda questão a ser respondida, bem como a perpendicularidade dos segmentos GH e GJ em relação aos lados do triângulo. Os pontos J e H são construídos por via de menu "Pontos de Intersecção" aplicado a círculo e triângulo, o que oculta a questão da existência dos pontos de tangência. Na explicação apresentada, ao assumir que GJ e AC são perpendiculares, o grupo desconsidera as hipóteses de construção. Poderia ter modificado as imposições de construção, tomando GJ perpendicular à AC, mas isto também não é considerado. A explicação prossegue de forma tal que nela se identifica, embora não explicitada, a intenção de depreender a congruência dos triângulos retângulos CGE e CGJ.

Cabe registrar que o grupo consulta o "Oráculo",[24] perguntando-lhe: *"GJ e AC são perpendiculares, bem como GH e AB?"* para validar a perpendicularidade utilizada na argumentação. O "Oráculo" não responde satisfatoriamente, pois informa *"objetos não perpendiculares"*. Isto mostra o alcance e a limitação da tecnologia informática: por um lado, ela é um suporte para *experimentos de pensamento* mas, por outro, não se pode perder de vista que os *experimentos* lidam com idealizações teóricas

[24] O "Oráculo" é recurso do *software* que responde perguntas como: "retas paralelas?", "retas perpendiculares?", "pontos alinhados?"

e que, devido à limitações da própria tecnologia, podem ser incorretamente capturadas nas informações transmitidas ao *software por* via de seus menus de construção.

O desempenho dos grupos, no produção de demonstração, indica um retrocesso, ao comparar-se com produções apresentadas na atividade 2, o que pode ser explicado se considera-se que os dois teoremas propostos nas “caixas pretas” participam de seus conhecimentos prévios. Sem maior reflexão, reproduzem o algoritmo, que já bem conhecem, de construção do círculo circunscrito e o círculo inscrito ao triângulo, revivendo as atitudes arraigadas nos anos de vida escolar — o uso de “regras”. E assim não se lhes apresenta a necessidade de uma demonstração, mesmo tendo sido acordado que “fatos” conhecidos, no patamar da geometria dedutiva, são propriedades a serem demonstradas.

Isto provoca uma reformulação da Engenharia Didática: as conclusões dos grupos são colocadas em discussão. O professor questiona as “demonstrações”, simples enunciados de “fatos” conhecidos, e instala-se a dinâmica de “provas e refutações”: são feitas as *extensões / reconstruções* de desenho e são produzidas, com muitas “idas e vindas”, as demonstrações dos dois teoremas.

Para a primeira demonstração, a *extensão* de desenho bastante simples — segmentos com uma das extremidades no centro do círculo e a outra nos vértices do triângulo — e a *reconstrução* restringiram-se à subconfiguração “triângulo”, ao qual os grupos aplicam o critério de congruência LAL para garantir a congruência entre os segmentos e raio do círculo. Ver Figura 4.34.

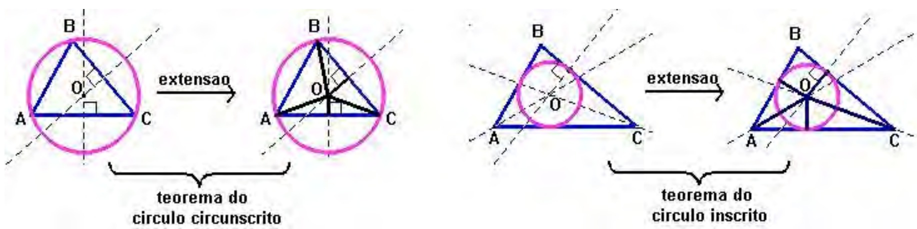


Figura 4.34
Análise* a posteriori*, Atividade 3.
Extensões e reconstruções de desenho suporte à demonstração dos teoremas do círculos circunscrito e inscrito ao triângulo
Fonte: autora

Na segunda demonstração, a *extensão* é feita com retas perpendiculares aos lados do triângulo e a *reconstrução,* dependente de elementos não tão imediatos, aponta também à subconfiguração “triângulo”, e os grupos identificam o critério LAAo para validar a congruência dos segmentos, de modo a tornarem-se eles raios do círculo atendendo à condição de tangência. Ver Figura 4.34.

Poder-se-ia pensar que a precisão na representação dos objeto geométricos, disponibilizada pelo *software*, incentivaria a permanência dos alunos no patamar empírico do conhecimento geométrico. As explicações registradas na presente atividade sugerem essa possibilidade, e são motivo de preocupação, já que o objetivo da atividade proposta é a ascensão a novo patamar de conhecimento. Mas observa-se, no andamento da experimentação, que a precisão do software gradativamente provoca atitudes de refinado controle sobre o que são *fatos declarados* e o que são *fatos estáveis implícitos*, e como conseqüência é realçada a necessidade e a pertinência de uma demonstração.

Mesmo tendo ficado o desempenho dos grupos, nesta atividade, aquém das expectativas anunciadas na análise *a priori*, isso não chega a invalidar a proposta das “caixas pretas”. Consultando-se um livro didático escolar, encontra-se o enunciado categórico *“o ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo é o centro do círculo inscrito”*, ao qual segue-se, eventualmente, uma demonstração. Ao propor-se as “caixas pretas” relativas aos teoremas, e tomando-se como pressuposto que *os alunos os desconhecem*, diferente pode ser o aprendizado, quando entram em cena diferentes tipos de apreensão cognitiva. Tome-se como exemplo a segunda “caixa preta”. De início, o olhar sobre a “caixa preta” é perceptivo — vêem-se um triângulo e um círculo que causam uma certa impressão, com duas leituras possíveis: um círculo e um triângulo circunscrito, ou um triângulo e um círculo inscrito. O dinamismo da figura encerra a leitura adequada ao evidenciar que os vértices do triângulo são os objetos livres que devem dar início à construção. A construção de réplica provoca apreensões seqüenciais: passo a passo, devem ser feitas as imposições de construção — as hipóteses dos teoremas. Da estabilidade da figura construída emergem os *fatos estáveis implícitos* — a tese dos teorema. E são as apreensões operativas — reinterpretações, reconstruções, extensões de desenho — que respondem pela emergência das subconfigurações, suporte à argumentação dedutiva.

Resumo da análise

Já tendo os grupos dado indicações, na atividade anterior, de controle do processo de demonstração, nesta atividade, a construção adequada de réplicas das “caixas pretas”, bem como a produção de demonstração, não foi satisfatória.

Como os alunos sabem, de antemão, que o centro do círculo circunscrito é a intersecção das três mediatrizes e que o centro do círculo inscrito é a intersecção das três bissetrizes — estas propriedades são apresentadas na escola — procedem à construção sem maior reflexão, desconsiderando a realimentação fornecida pelo *software* quanto à escolha de duas mediatrizes ou duas bissetrizes para construção do centro dos círculos, bem como à escolha de vértice pertencente ao círculo circunscrito.

Foram apresentadas explicações ou de caráter empírico — é afirmado o que é “visto”, sem que haja argumentação dedutiva — ou foram enunciadas as propriedades já conhecidas. Os grupos desconsideraram que, dentro do modelo teórico e como objetivo da atividade proposta nas “caixas pretas”, é pertinente uma demonstração.

Interpreta-se tal retrocesso como uma perturbação advinda dos conhecimentos prévios. Esta é uma questão delicada na transição de patamar de conhecimento: conciliar o conhecimento prévio e as necessárias argumentações dedutivas para que este conhecimento se organize em novo patamar.

Atividade 7

Visando maior apreensão da necessidade de demonstração, é feita nova reformulação da Engenharia Didática, alterando-se a ordem das atividades: a Atividade 7 é antecipada, esperando-se com isto uma provocação maior à demonstração, e não o simples enunciado de um "fato" já conhecido. Diferentemente das atividades trabalhadas até então, o problema a ser resolvido encerra propriedades geométricas que não emergem como "fatos" conhecidos previamente pelos alunos, contendo maiores exigências de *extensão* de desenho, o que implica em *apreensões operativas* mais complexas.

Momentos de discussão coletiva permeiam o trabalho em grupo, contemplando-se, novamente, a dialética de "prova e refutação".

A atividade começa com a construção da chamada "estratégia dos piratas", a ser colocada sob exploração: segmentos AP1 e AP2; pontos Q1 e Q2 tais que os segmentos Q1P1 e Q2P2 são perpendiculares e congruentes à AP1 e AP2, respectivamente. No movimento aplicado aos pontos livres, os grupos revelam, de início, confuso tratamento da figura: movem A, movem P1 e P2 e observam o comportamento do ponto T - mantém-se fixo quando A é deslocado ou desloca-se junto com P1 e P2. Ver Figura 4.35.

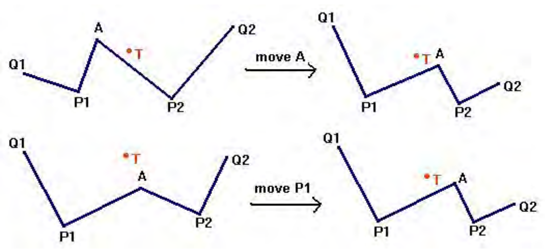


Figura 4.35
Análise a posteriori, Atividade 7.
Dinamismo na "estratégia dos piratas"
Fonte : produção de grupo

Os grupos questionam: *"os pontos Q1 e Q2 ainda estão marcados?"; "passado os anos, as pedras ainda estão no mesmo lugar?"*. De fato, no enunciado do problema isto não está de todo claro. Discussão rápida evidencia que, quantos aos pontos Q1 e Q2, uma resposta afirmativa tornaria o problema desinteressante. Já quanto aos pontos P1 e P2, é procedente o questionamento.

Estabelecido que P1 e P2 são, no problema, pontos fixos [25], imediatamente o grupo 6 apresenta uma estratégia: *"é simples, basta refazer o que foi feito, tomando uma outra árvore, cuidando para enxergar as pedras*". A estratégia funciona e mostra entendimento de que os pontos T e A são independentes; sob o ponto de vista prático, o problema está resolvido, mas longe disto está o objetivo da atividade. Enunciado mais cuidadoso se faz necessário: a estratégia a ser proposta deve ser diferente da "estratégia dos piratas".

Ajustadas as condições do problema, a movimentação do ponto A permite a observação de diversas instâncias de representação do problema; nelas o ponto T se mantém imóvel.. Ver Figura 4.36.

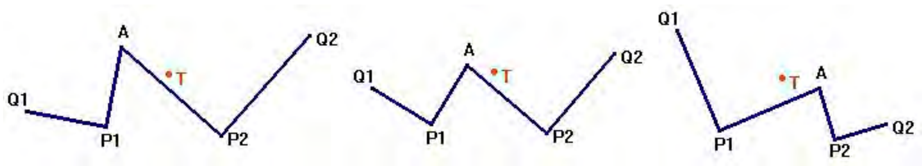


Figura 4.36
Análise a posteriori, Atividade 7.
Dinamismo evidenciando a independência dos pontos A e T
Fonte : produção de grupo

De imediato, os grupos estabelecem nova estratégia: *"caminhar até o ponto médio de P1P2, tomar direção perpendicular para o lado em que estava a árvore, e caminhar o mesmo que já se havia caminhado, a metade de P1P2."* Ver Figura 4.37.

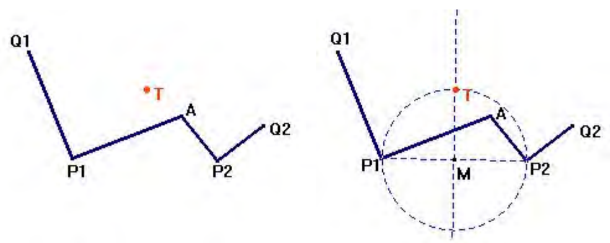


Figura 4.37
Análise a posteriori, Atividade 7.
Construção de nova estratégia.
Fonte : produção de grupo

---

[25] O que poderia ter sido indicado com a impossibilidade de movê-los no desenho dinâmico, usando-se aqui o menu "Fixo / Livre".

Feita a construção, eles colocam-se, de imediato a pergunta: *"por que as duas estratégias levam ao mesmo ponto?"* . Dificuldade inicial, para todos os grupos, é transformar esta pergunta em outra, equivalente e explicitada em função dos elementos geométricos dados na construção — uma competência necessária ao processo de demonstração.

São reconstruídas, coletivamente, e destacadas com cores diferentes, as duas estratégias. Cabe observar que o *software* sugere explicitamente a pertinência da pergunta: ao sobreporem-se as construções, a posição do tesouro é dada por dois pontos coincidentes, correspondentes a cada uma das estratégias. Ver Figura 4.38.

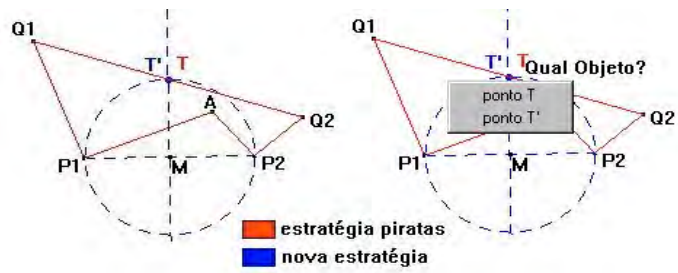


Figura 4.38
Análise a posteriori, Atividade 7.
Construção sobrepondo as duas estratégias
Fonte: autora

Este destaque dos pontos T e T' provoca reação do grupo 7: *"deve-se mostrar que TM = T'M "*, com o que concordam os demais. De imediato o grupo 1 apresenta uma explicação para esta igualdade, a qual segue-se reação dos colegas:

prova (revela perturbação advinda da precisão do desenho)	*"traçamos o círculo de centro M passando por T e então temos que MT = P1M* **(constatação empírica)**. *Como MT' = P1M segue que MT= MT' e portanto T' = T* **(a conclusão toma como pressuposto que T está na mediatriz de P1P2)**."
refutação (revela pleno controle dos fatos declarados)	*"mas não dá para garantir de imediato que o círculo passa por P1. Isto está no desenho, mas MT = P1M é um fato implícito"*
refutação (revela pleno controle dos fatos declarados)	*"(...) e mesmo que se mostre que MT'=MT ainda não dá para concluir que T' e T são iguais (...) foi declarado que T' está na reta mediatriz de P1P2 (...) no desenho T também está na mediatriz , mas isto não foi dito sobre T "*

Vêem-se no primeiro argumento apresentado perturbações advindas da precisão do desenho, mas nas refutações, revela-se o pleno controle de *fatos declarados* e *fatos estáveis implícitos.*

O professor registra num esboço “giz / quadro-negro” [26] as pertinentes refutações — intencionalmente desenha o círculo de forma que ele não passe por P1, bem como os pontos T e T’ à igual distância de M, mas não coincidentes. É retomado o trabalho em grupos, tendo como claro objetivo de demonstrar que T’M = TM e que T pertence à mediatriz de P1P2.

Vale ressaltar, novamente, que nesta atividade se tem um novo nível de exigência. Nas atividades anteriores, as argumentações apoiavam-se em *extensões e reconstruções de desenho* bastante simples; agora a figura relativa às duas estratégias é despojada e muitos elementos devem ser acrescidos para o fluir da argumentação. Esta maior exigência é detectada pelo grupo 1: “... *o problema é colocar aqui* (referindo-se a construção feita) *uma figura* (referindo-se a novos elementos*) em que a gente possa enxergar propriedades ... para explicar tenho que usar propriedades que já conheço”.*

Sem muita sistemática, os grupos fazem *extensões* de desenho e movimentam a figura buscando a emergência de subconfigurações que expliquem o bom funcionamento da nova estratégia (grupos1, 2, 3, 4, 5, 6 e 8). Ver Figura 4.39.

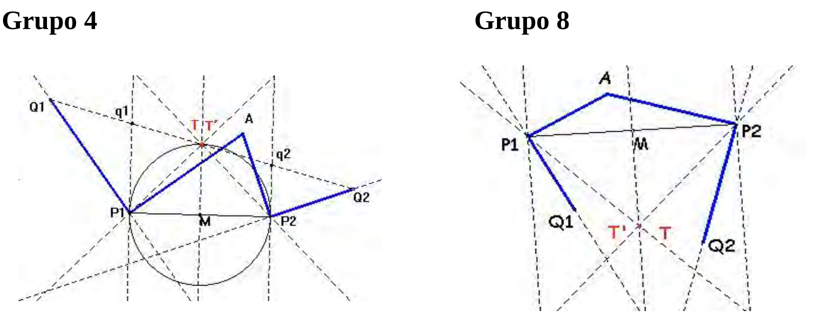
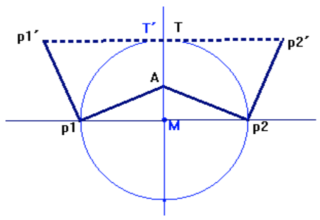


Figura 4.39
Análise a posteriori, Atividade 7.
Extensões de desenho visando a emergência de subconfigurações.
Fonte : produção de grupo

O grupo 8, colocado frente à dificuldade em avançar na argumentação, toma a interessante atitude de considerar o caso particular em que P1 e P2 estão à igual distância de A, atitude natural ao processo de investigação, e apresenta uma demonstração. Ver Figura 4.40.



"o quadrilátero p1p2p2'p1' é um trapézio (toma como certo que p1'p2' é paralelo à p1p2)... *a reta perpendicular à um dos lados (referindo-se à p1p2) passando pelo ponto médio M passa pelo ponto médio do outro e assim T está na reta MT* ...(toma como certo que o trapézio é isósceles)" (Grupo 8)

Figura 4.40
Análise a posteriori, Atividade 7.
Tentativa de demonstração em caso particular.
Fonte : produção de grupo

É posta em discussão a demonstração do grupo e surgem os questionamentos: "*como saber que é trapézio?*"; "*esta propriedade dos pontos médios só é verdadeira se o trapézio é isósceles*". Na tentativa de avançar na argumentação, novas extensões de desenho são feitas, a saber, segmentos AP1' e AP2', retas perpendiculares à P1P2, passando por P1, P2, P1' e P2', respectivamente. Ver Figura 4.41 - primeira construção.

.

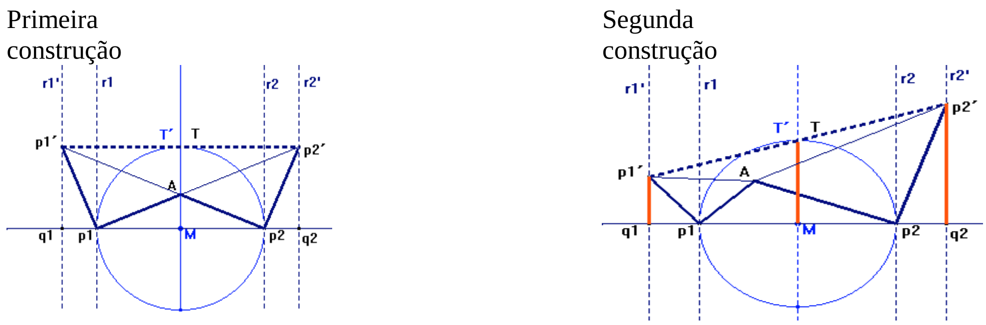


Figura 4.41
Análise a posteriori, Atividade 7.
Novas extensões de desenho com destaque à subconfigurações
Fonte : produção de grupo

[26] Ao fazer-se uso dos ambiente em geometria dinâmica, uma questão delicada é quando torna-se importante o desenho propositadamente impreciso.

Na figura estendida, o grupo 4 movimenta o ponto A e observa experimentalmente, usando o recurso “Calculadora”, que a média aritmética de P1’Q1 e P2’Q2 é igual à MT’. Ver Figura 4.41 - segunda construção.

Tal fato é compartilhado e os grupos movimentam o desenho, atendo-se a instâncias de representação onde não se tem mais o trapézio isósceles P1P2P2’P1’. Isto provoca a *reconstrução* de nova subconfiguração — o quadrilátero Q1Q2P2’P1’. Os grupos abandonam a instância particular de representação e novo tratamento para a situação geral entra em cena. Neste ponto, tem-se uma figura bastante rica, pronta para a emergência das subconfigurações que podem dar suporte à argumentação, o que depende de *apreensões operativas*.

O grupo1 trata a figura com nova *apreensão discursiva*: as retas r1’ e r2’ agora são tomadas como paralelas a reta T’M e com isto a subconfiguração trapézio de bases P1’Q1 e P2’Q2 emerge, e ele então explica: *“no trapézio, como M é ponto médio do lado Q1Q2 e a reta T’M é paralela às bases do trapézio, ela também passa pelo ponto médio do outro lado P1’P2’ , e assim passa por T , então T’ = T”* . Ver Figura 4.42 - primeira construção.

A argumentação tem falhas: o grupo toma como certo que M é ponto médio de Q1Q2 e isto não foi declarado na construção; também perde o controle da condição que define o ponto T’, ao concluir que T’=T , quando o lícito seria concluir, no máximo, que ambos os pontos estão na reta T’M.

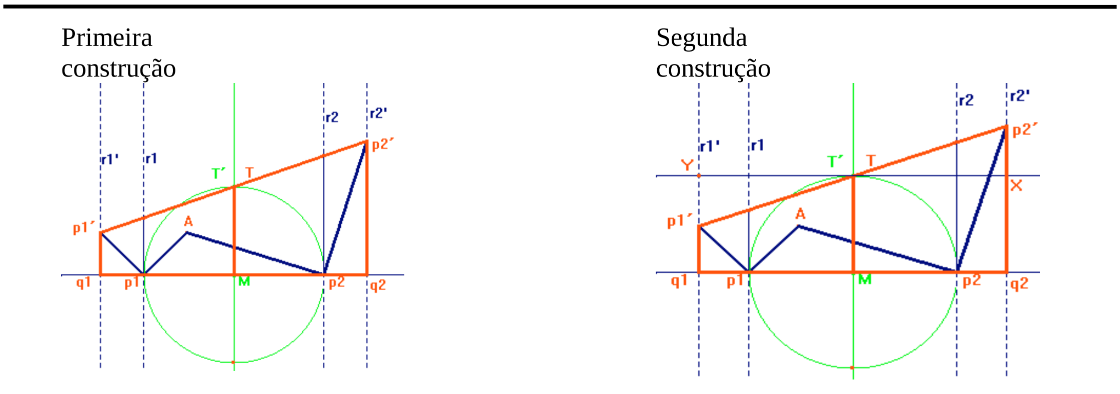
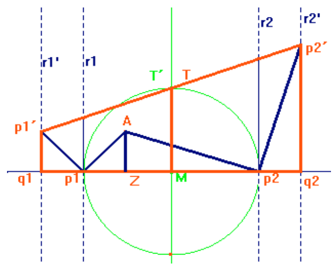


Figura 4.42
Análise a posteriori, Atividade 7.
Subconfigurações trapézio e triângulo, suporte à argumentação .
Fonte : produção de grupo

O grupo coloca a demonstração em discussão, com reação dos colegas: *"por que M é ponto médio de Q1Q2, já que é dado na construção que é ponto médio de P1P2?"; "como explicar a propriedade de trapézio que está sendo usada?"*. Mas os colegas não chegam a questionar sobre a abrupta conclusão da igualdade T'= T.

Na discussão, volta à cena o dado empírico já observado: a média aritmética de Q1P1'e Q2P2' é igual à MT'. Com isto, balizam a questão a ser resolvida: *"temos que mostrar que MT é também é a média aritmética de P1'Q1 e P2'Q2"* (grupo 3) e concentram-se nesta questão, propondo a seguinte solução (grupo 8): traçam a reta perpendicular a MT passando por T e, de forma empírica, referem-se à congruência dos segmentos P2'X e P1'Y; e, observando que MT= Q1Y, concluem que MT é média aritmética de P1'Q1 e P2'Q2. Retomam a constatação empírica relativa a congruência dos segmentos e a demonstram, sem dificuldade, mediante o caso de congruência LAAo aplicado aos triângulos retângulos P1'TY e P2'TX. Ver Figura 4.42 - segunda construção.

Consideram o problema resolvido, embora ser MT' a média aritmética de P1'Q1e P2'Q2 ainda seja objeto de demonstração para, então, garantir-se a igualdade T'M = TM. O professor intervém novamente e após discussão coletiva, o grupo 7 apresenta segura argumentação. Ver Figura 4.43.

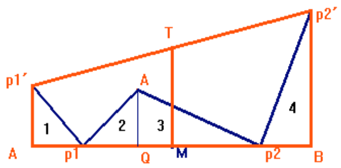


"construímos o segmento AZ, perpendicular à p1p2 e olhamos para os triângulos retângulos P1Q1P1'e AZP1. Eles são congruentes porque tem hipotenusas congruentes e nos dois os ângulos em P1 são congruentes e assim P1'Q1=P1Z. O mesmo vale nos triângulos P2Q2P2'e AZP2 o que dá P2'Q2 = P2Z. Então M é ponto médio de Q1Q2 e Q1Q2= P1'Q1+P2'Q2 o que dá MT'=MP1=média aritmética de P1'Q1+P2'Q2." (Grupo 7)

Figura 4.43
Análise a posteriori, Atividade 7.
Demonstração da pertinência da nova estratégia.
Fonte : produção de grupo

Finalmente o problema está resolvido. Os avanços e recuos ao longo do processo de investigação mostram não ter sido simples a produção da demonstração. Percebem-se, nas atitudes dos grupos, as "idas e vindas" do processo que deve culminar com a organização da argumentação dedutiva. Nas redações apresentadas ainda se detecta confusão entre *fatos declarados* e *fatos estáveis implícitos* e argumentos truncados, faltando-lhes concatenação lógica. Por exemplo, eles assumem que o círculo que define T’ passa por T (grupo 1), ou que o ponto T’ pertence ao segmento P1’P2’(grupos 2 e 4) ou que T’ é ponto médio de P1’P2’(grupo 3)”. Percebe-se ainda, nas argumentações, perturbações na linha de raciocínio advindas de impressões perceptivas tomadas do desenho — “*vemos que se T é o ponto médio de P1’P2’ ele também é cortado pela mediatriz de P1P2”* (grupo 8). Alguns destes grupos mencionam na argumentação a propriedade da base média do trapézio, necessária para garantir a igualdade dos pontos T e T’, mas sem bem aplicá-la; outros nem a mencionam.

Somente duas redações apresentam controle adequado, a do grupo 6 — com pequenos deslizes de linguagem e uso de um único fato estável implícito — e a do grupo 7, impecável. Ver Figura 4.44.



“Monta-se o trapézio ABP2’P1’...; tendo como fato sabido que as bases do trapézio possuem os seus pontos médios passando pela mediatriz de P1P2 vem : T e T’ estão na mesma reta, porém tem-se que provar que T = T’.Traçamos a perpendicular à p1p2 passando por A. **(assume , sem explicitar a razão, que M é ponto médio de AB, quando o que se tem declarado é ser ponto médio de P1P2)**.
Surgem os triângulos (1) e (2) congruentes , (3) e (4) congruentes .... **(são apresentados argumentos que garantem as congruências)** *Agora, sabendo que MT = média aritmética de P1’A e P2’B e que MT’ = P1M e que MT’ é a média aritmética de P1Q (congruente à P1’A) e P2Q (congruente à P2’B) , provamos que MT = MT’.”* (Grupo 6)

Figura 4.44
Análise a posteriori, Atividade 7.
Demonstração como um produto do processo.
Fonte : produção de grupo

Nesta atividade, o nível de exigência na argumentação dedutiva é, sem dúvida, superior àquele trabalhado nas atividades anteriores, exigindo em cada instante controle acurado *de fatos declarados* e *de fatos estáveis implícitos.* A diferença entre a figura inicial e a figura final, esta suporte à argumentação, bem ilustra a complexidade do processo de tratamento do desenho, nas necessárias *extensões e reconstruções* de subconfigurações. (Ver Figura 4.45 à página 153).

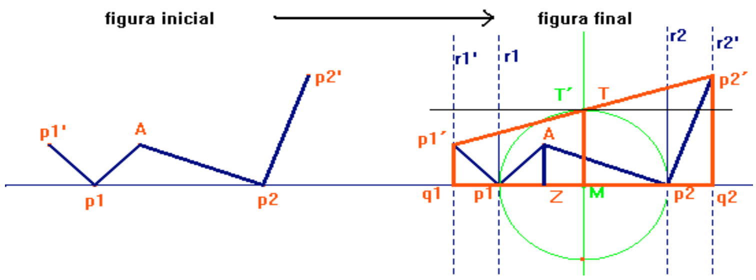


Figura 4.45
Análise a posteriori, Atividade 7.
Complexidade da extensão de desenho, suporte à demonstração.
Fonte: autora

Resumo da análise:

A atividade proposta foi provocativa. Seu desenrolar revelou, de forma muito mais contundente, o engajamento dos grupos no processo investigação; muitas são as “idas e vindas” no ajuste de *extensões* de desenho e na reconstrução de sub-configurações suporte a argumentação dedutiva.

Acertada foi a reestruturação da engenharia didática — a antecipação desta atividade. O nível de exigência da atividade quanto a apreensões seqüenciais e operativas colocou os alunos em intenso processo de investigação. O entendimento do significado e do propósito de uma demonstração revelou-se de forma muito clara na discussão organizada em torno da dialética de “prova e refutação”. A precisão dos desenhos concorreu para o acurado controle dos fatos declarados e dos fatos estáveis implícitos, e o dinamismo das figuras contribuiu para a construção de sucessivas extensões de desenho e à emergência das subconfigurações.

Do comportamento dos grupos nesta atividade, depreende-se que o processo de demonstração tornou-se muito mais rico e interessante, ao serem os alunos colocados frente a problema não relacionado, de imediato, com seus conhecimentos prévios (compare-se com o desenrolar da atividade 3, esta relativa aos teoremas dos círculos circunscrito e inscrito ao triângulo).

Atividade 4, parte 1

Os grupos iniciam a atividade movimentando os vértices do quadrilátero ABCD e observando o comportamento de MNPQ [27], a maioria usando recursos de medição (grupos 1, 2, 4, 6 e 8) e também usam o "Oráculo". Eles anunciam empiricamente: *"o quadrilátero MNPQ é sempre paralelogramo"*. Como procedimento de validação da conjetura observa-se a construção de reta paralela à PQ passando por M e sob movimento do quadrilátero ABCD, e o grupo 1 constata que esta reta passa sempre por N, disso inferindo, novamente, o paralelismo dos lados opostos do quadrilátero MNPQ. Ver Figura 4.46.

Os grupos não constróem, de imediato, *extensões* adequadas do desenho, alguns (grupos 2, 3 e 8) iniciando por segmentos a unir pontos médios de lados opostos do quadrilátero ABCD e outro, o grupo 6, buscando relações entre as subconfiguração "triângulos" para garantir a congruência dos lados opostos de MNPQ.

Grupo 1 **Grupo 2**

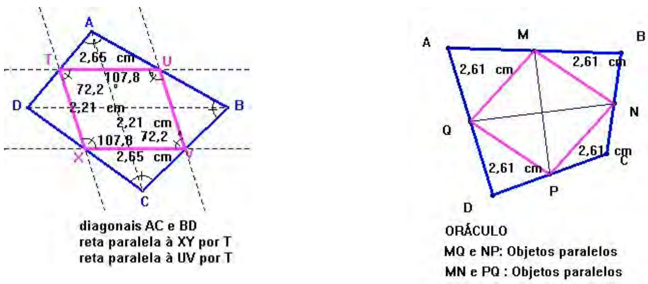


Figura 4.46
Análise a posteriori, Atividade 4, parte 1.
Validações de natureza empírica.
Fonte : produção de grupo

O grupo 8 transforma o quadrilátero ABCD em triângulo no qual emerge a subconfiguração "teorema da base média" e comenta: "*sabemos resolver MN paralelo a PQ quando é triângulo mas não sabemos resolver quando é quadrilátero*". Ao mover novamente os vértices, o grupo identifica no quadrilátero, sem maior dificuldade, a mesma subconfiguração. (Ver Figura 4.47 à página 155).

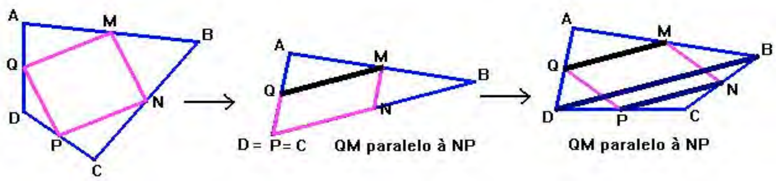
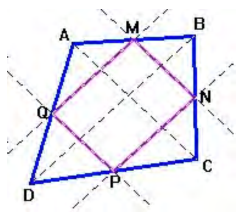


Figura 4.47
Análise a posteriori, Atividade 4, parte 1.
Subconfiguração emergente em situação particular.
Fonte : produção de grupo

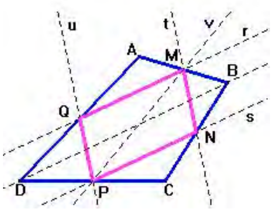
Apenas o grupo 7 constrói, de imediato, as diagonais do quadrilátero ABCD, *extensão* de desenho que coloca em evidência a adequada subconfiguração do "teorema da base média".

A idéia de construir as diagonais do quadrilátero ABCD dissemina-se na maioria dos grupos. Mediante esta extensão do componente figural os alunos, individualmente,[28] engajam-se no processo de demonstração, apresentando níveis variados de argumentações que vão do pleno controle dedutivo (um total de sete alunos) argumentos ainda de natureza empírica ou sem nexo (um total de seis alunos). Ver Figura 4.48.



(a) Argumentação dedutivas dotadas de pleno controle:

"considere o triângulo DAB; sendo M ponto médio de AB, a reta paralela à BD passando por M cortará AD no seu ponto médio ***Q*** **(é utilizado a unicidade de reta paralela e o teorema da base média, quando bastaria este último**) . *Assim MQ é paralelo à BD. Considere o triângulo BCD, temos raciocínio análogo. Raciocínios análogos são feitos para os triângulos ABC e ADC. Disto concluímos que os lados opostos de MNPQ são paralelos."* (Grupo1, Gis)



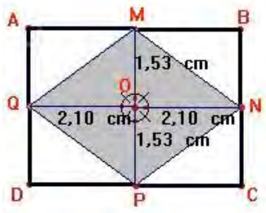
(b) Novos objetos são acrescentados à construção e a falta de controle de *fatos estáveis implícitos* perturba a argumentação — "paralelismo" e "passar pelos pontos médios" não são relacionados:
(construção acrescida de retas u e r passando, respectivamente, por P e Q e por M e Q, reta t paralela à u por M, reta s paralela à r por P, reta v passando por M e P. A argumentação que segue tem como objetivo mostrar que as retas t e s passam por N)

"*como retas t e u são paralelas e v é reta transversal tem-se a congruência dos ângulos QPM e NMP* (**empiricamente é tomado que a reta t passa por N)**; *como as retas r e s são paralelas e v é transversal tem-se a congruência dos ângulos NPM e QMP* (**empiricamente é tomado**

[27] Cabe observar que, nesta atividade, é importante o "teorema da base média", já inserido no modelo teórico.

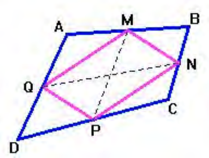
[28] Isto é solicitação do professor , com o intuito de bem observar os progressos individuais.

que a reta s passa por N). *Como MP é lado comum aos triângulos PMN e PMQ segue que os triângulos são congruentes e assim as retas t e s passam por N* (**inferência imprópria, além do que este fato já foi tomado de forma empírica anteriormente**)" (Grupo 2, Gla)



(c) Explicação de natureza empírica baseada em medidas e uso de propriedade equivalente aquela a ser demonstrada
(construção acrescida de diagonais de MNPQ e não considera as diagonais de ABCD).

"*sabendo que OM=OP e que ON=OQ* **(empírico)** *teremos ângulos alternos internos congruentes entre si na figura MNPQ* **(inferência imprópria)**. *Tendo como fato sabido a congruência dos ângulos alternos internos* (**fato geométrico objeto de demonstração**) *temos a igualdade de ângulos: QPO = NMO e PQO = MNO e assim temos a congruência dos triângulos MON e POQ. Teremos MN=PQ. A mesma coisa se faz com os outros dois triângulos de MNPQ, obtendo MQ=NP. Um quadrilátero com lados opostos congruentes terá também lados opostos paralelos*" (Grupo 2, Mar)



(d) Caso de inferências sem nexo, confusão entre definição e demonstração.
(construção acrescida de diagonais de MNPQ e não considera as diagonais de ABCD).

"*o polígono MNPQ é um paralelogramo, por isso as retas são paralelas. Porque as suas diagonais se cruzam no ponto médio delas*" (Grupo 4, Edu)

Figura 4.48
Análise a posteriori, Atividade 4, parte 1.
Diferentes níveis de controle de argumentação dedutiva
Fonte : produção de grupo

A demonstração **(b)** ainda revela perturbação advinda da precisão do desenho — *fatos estáveis implícitos* são utilizados na argumentação. Mas também se observa que esta mesma precisão provoca cuidadoso controle dos *fatos declarados* e dos *fatos estáveis implícitos*, o caso da demonstração **(a).**

Quanto às particularidades de ABCD que garantem particularidade em MNPQ, neste primeiro momento elas se restringem às situações prototípicas: ABCD quadrado garante MNPQ quadrado; ABCD losango garante MNPQ; retângulo ABCD retângulo garante MNPQ losango. Somente o grupo 7, apoiando-se no dinamismo dos desenhos, apresenta situações não prototípicas, mas ainda sem identificar particularidades de ABCD. Ver Figura 4.49 à página 157.

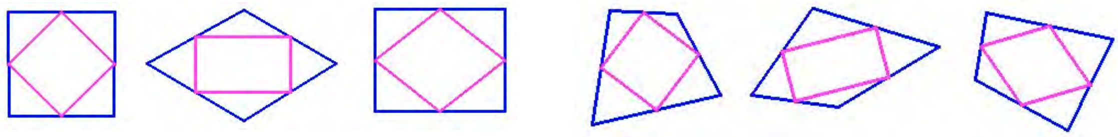
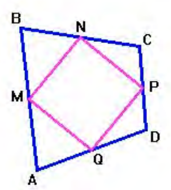


Figura 4.49
Análise a posteriori, Atividade 4, parte 1.
Situações prototípicas e não prototípicas
Fonte : produção de grupo

Atividade 7, parte II : as "caixas pretas"

As "caixas pretas" criam conflitos: quadriláteros MNPQ — que não são quadrado, retângulo, losango — emergem no quadrilátero ABCD, aparentemente qualquer. Os grupos recorrem decididamente ao dinamismo da figura. Movendo os vértices de ABCD procuram, com atenção, identificar propriedades desse quadrilátero que garantam as formas particulares de MNPQ. Com exceção do grupo 7, os demais não identificam de imediato o grau de liberdade dos vértices de ABCD. Algumas das manifestações dos grupos são registradas na Figura 4.50.



A "caixa preta" tem como objetos totalmente livres os pontos A e C e parcialmente livre o ponto B.

"*...deve ter um círculo , porque movendo B, a distância de B à D não muda*"

"*... tem segmento que manda na construção* (referindo-se à BD) ... *o outro é sempre perpendicular* (referindo-se à AC)..."

"*o vértice D está preso à B* (referindo-se a distância entre B e C que não muda)... *não sabemos como fazer isto*"

Figura 4.50
Análise a posteriori, Atividade 4, parte 1.
Exploração dinâmica de propriedade do quadrilátero ABCD
Fonte : produção de grupo

Quanto ao grupo 7: movimentando os vértices dos quadriláteros externos, ele imediatamente faz *extensão* de figura por via das diagonais de ABCD e valida empiricamente as propriedades das diagonais. Com segurança, constrói as réplicas e produz demonstração. Ver Figura 4.51.

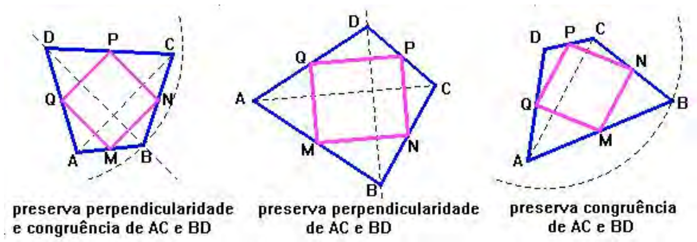


Figura 4.51
Análise a posteriori, Atividade 4, parte 1.
Construção das réplicas das "caixa -pretas" por via das diagonais de ABCD
Fonte : produção de grupo

Em quatro grupos (1, 4, 5 e 8) houve gradativo controle do quadrilátero ABCD: sob ação de movimento, no primeiro momento eles controlam a perpendicularidade das diagonais de ABCD; ao movimentarem os vértices de ABCD, obtêm MNPQ retângulo e fazem novos ajustes na construção, visando garantir a congruência das diagonais. Ver Figura 4.52.

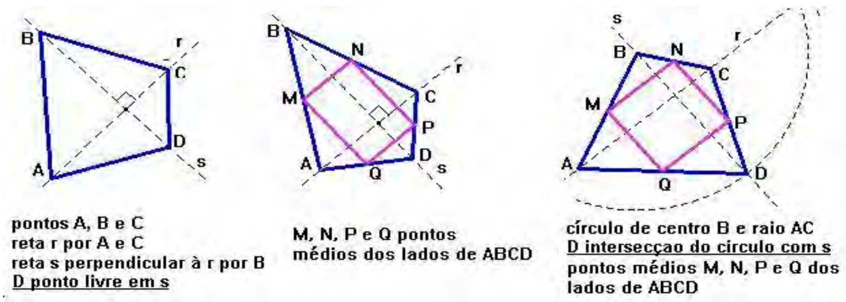


Figura 4.52
Análise a posteriori, Atividade 4, parte 1.
Gradativa emergência de propriedade do quadrilátero ABCD
Fonte : produção de grupo

Impondo, no processo de construção da réplica da "caixa preta", a perpendicularidade e congruência das diagonais, estes quatro grupos mantêm sob controle as hipóteses que devem ser feitas sobre o quadrilátero ABCD; no movimento aplicado à figura, eles obtêm, como *fato estável implícito*, que “MNPQ é quadrado”, tese objeto de demonstração. A próxima etapa é a produção de demonstração, com resultados que indicam pleno controle do processo — os argumentos são bem concatenados. Mas algumas das demonstrações ainda restam incompletas por não explicarem ou a congruência ou a perpendicularidade dos lados de MNPQ.

Três grupos (2, 3 e 6) recorrem à diferente estratégia de construção: iniciando por dois lados consecutivos do quadrilátero externo, eles constróem o quadrado MNPQ e então completam o quadrilátero externo. Ver Figura 4.53.

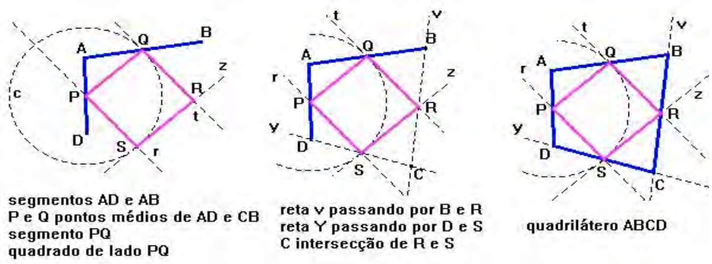


Figura 4.53
Análise a posteriori, Atividade 4, parte 1.
Construção da réplica da “caixa preta” sem emergência de propriedade do quadrilátero ABCD
Fonte : produção de grupo

A réplica da “caixa preta” apresenta o mesmo dinamismo e estabilidade mas, no seu processo de construção, não emergiu a particularidade de ABCD.

Não é detectado pelos grupos que este procedimento garante, de imediato, que MNPQ é quadrado — fato já demonstrado na atividade 2 — e que “serem R e S os pontos médios, respectivamente, dos lados BC e CD do quadrilátero ABCD” é o *fato estável implícito* agora relevante. Isto compromete o processo de demonstração: ou não é apresentada nenhuma demonstração (grupo 3), ou a argumentação tem como propósito, de menor importância, demonstrar que MNPQ é quadrado, mas de qualquer forma refletindo pleno controle de argumentos. Mediante a necessária discussão com o professor, os grupos compreendem o que cabe demonstrar e não prosseguem neste caminho de demonstração. Abandonam a construção feita e, com a disseminação da *extensão* de desenho por via das diagonais de ABCD, dão inicio a nova construção; sem maiores dificuldades, produzem a demonstração pertinente.

Quanto às outras duas “caixas pretas”, o procedimento utilizado na primeira “caixa preta” fornece subsídios para construções imediatas. Estando toda a informação presente nas diagonais, é natural considerar o relaxamento de restrições sobre as diagonais: perpendiculares em ABCD para obter MNPQ retângulo e congruentes em ABCD para obter MNPQ losango. Quanto à demonstração: os grupos retomam ou os argumentos relativos aos ângulos retos ou os argumentos relativos à congruência dos lados, apresentados na primeira “caixa preta”.

O procedimento inicial de construção da “caixa preta” 1, apresentado pelo grupo 6, alerta para cuidados que devem ser tomados quanto às condições de construção de réplicas, quando se tem como objetivo a emergência de determinada propriedade geométrica. Na “caixa preta” proposta o objetivo era a identificação de propriedade do quadrilátero ABCD que garantisse MNPQ quadrado. No, entanto tal objetivo não foi atingido de imediato, conforme o atesta a solução apresentada. Como exigência de construção deveria ter-se incluído “o quadrilátero MNPQ deve ser o último passo da construção”, o que provocaria a investigação de particularidade do quadrilátero ABCD. Esta necessária adequação da “caixa preta” não foi antecipada na analise *a priori*.

Pouco se tem investigado sobre as atividades com “caixas pretas”. A única referência encontrada sobre este assunto foi um sucinto ‘documento de trabalho’ de CAPPONI, [29] não publicado. O documento esboça critérios para elaboração de tipologia de “caixas pretas”: maior ou menor evidência de indícios perceptivos — invariantes de direção, de forma, de posição, de comprimento e de ângulo; relação entre percepção e reconstrução de réplica; intenções de aprendizagem. Tal tipologia visa classificar as “caixas pretas” de modo a antecipar à intenção de aprendizagem.

[29] CAPPONI, B. **Boites-noires**, IMAG-Université Joseph Fourier, Grenoble, França. 2001

Resumo da análise

Com a alteração na ordem da ordem da seqüência de atividades e com a provocativa investigação desencadeada pelo "problema dos piratas" que antecedeu esta atividade, tornou-se ela bastante elementar.

Na primeira parte da atividade, validações empíricas deram suporte inicial à conjetura; feita a extensão adequada de desenho, nela emergindo a subconfiguração "teorema da base média de um triângulo", demonstrações foram produzidas sem maiores hesitações por boa parte dos alunos (produções individuais). Em alguns casos, perturbações advindas da precisão do desenho ainda se fizeram presentes — argumentações que utilizam *fatos estáveis implícitos*; somente dois alunos se mantiveram no patamar de validações de natureza empírica

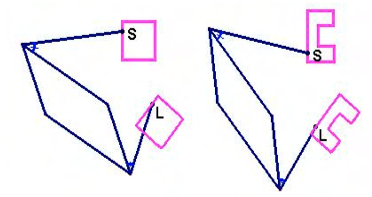
Na segunda parte da atividade manteve-se o desafio de "abrir" as "caixas pretas". De início os grupos, exceto um, foram surpreendidos pelo tipo dinamismo nelas presente. Na construção das réplicas emergiram as hipóteses do teorema de Varignon e, no dinamismo da figura, a sua tese, aos quais seguiu-se demonstração, tendo como suporte, novamente, a subconfiguração "teorema da base média de um triângulo". O dinamismo das figuras foi importante para a emergência das particularidades do quadrilátero ABCD que deram inicio à construção das réplicas das "caixas-pretas"

Atividade 5, instrumento 1 [30]

Nesta atividade, conforme anunciado na análise *a priori*, é maior a exigência quanto a funcionamentos cognitivos. Em relação a dois instrumentos, solicita-se: identificar seu funcionamento, determinar as propriedades geométricas que definem a sua construção (física) e explicar porque tais propriedades asseguram o seu funcionamento. Os instrumentos são construídos utilizando-se relações geométricas que vão garantir, respectivamente, as transformações de rotação e semelhança homotética.

[30] O instrumento proposto é ligeiramente diferente do previsto. A título de simplificação, todas as "varetas" são de mesmo tamanho, o que não altera o propósito da atividade.

Inicialmente, são apresentados recursos do *software* que podem ajudar na exploração: “Rastro On/Off” e “Lugar Geométrico”. Os grupos analisam o instrumento movimentando S e, através do rastro dos pontos S e L. procuram colocar em relação os desenhos que vão se formando com o movimentos desses pontos. No primeiro momento, a descrição do funcionamento do instrumento é bastante vaga. Ver Figura 4.54.



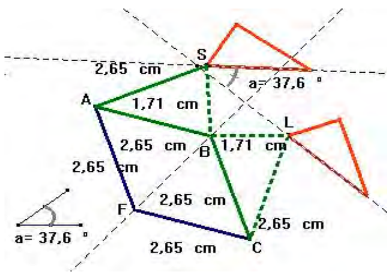
“o instrumento reproduz desenhos” (Grupo 2)

“o instrumento copia figuras com um giro ” (Grupo 3)

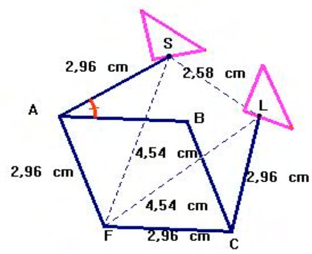
“o instrumento produz figuras congruentes... quando aumentamos o ângulo ‘a’ as figuras se afastam, quando diminuímos chega uma hora que elas coincidem”(G rupo6)

Figura 4.54
Análise a posteriori, Atividade 5, parte 1.
Descrição empírica de funcionamento do instrumento
Fonte : produção de grupo

Extensões de desenho e o uso de medidas provocam maior precisão na descrição, mas a definição geométrica da transformação “rotação”, que tem como domínio conjunto de pontos, ainda não é considerada. Ver Figura 4.55.



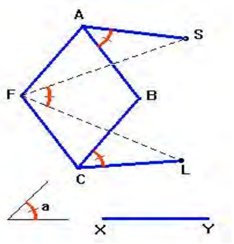
“ (...) serve para copiar figuras girando-as em torno do ponto F, de acordo com um certo ângulo” (Grupo 4)



“ (...) copia as figuras com uma determinada inclinação, sendo este ângulo determinado por SAB, sendo que copia as figuras em torno de F” (Grupo 8)

Figura 4.55
Análise a posteriori, Atividade 5, parte 1.
Descrição ainda vaga de funcionamento do instrumento
Fonte : produção de grupo

Os grupos avançam na determinação das propriedades que garantem o funcionamento do instrumento (i.é., propriedades que devem ser consideradas na sua construção física) e para isso usam o dinamismo do desenho. Mas ainda detecta-se controle inadequado das propriedades: ou os fatos declarados são insuficientes (grupos1, 3 e 5) ou incluem *fatos estáveis implícitos* (grupos 4, 6, 7 e 8) [31]. Ver Figura 4.56.



" a base do instrumento é um paralelogramo (**insuficiente**)" (Grupo 1)

"AB=AF=CB=CF=AS=CL=XY, são iguais os ângulos SAB=LCB=a e *SAF=LCF*, (**fato estável implícito**), *o ponto F é fixo*" (Grupo 7)

"os lados do paralelogramo (**fato estável implícito**) *são todos de mesmo tamanho, AS=AB=BC=CL, são iguais os ângulos SAB=BCL=a*," (Grupo 8)

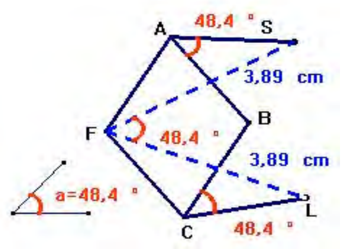
Figura 4.56
Análise a posteriori, Atividade 5, parte 1.
Descrição dos fatos a serem impostos ao instrumento
Fonte : produção de grupo

No processo de demonstração, apresentam-se dificuldades. Inicialmente, os grupos não conseguem explicitar o que deve ser demonstrado, a indicar o quanto o conceito de rotação ainda está sendo tratado de forma empírica.

Finalmente um dos grupos, o grupo 4, se manifesta com entusiasmo: *"SF é igual a LF e o ângulo SFL é igual ao ângulo 'a'..."* . A figura na tela do computador mostra exploração com medidas. Quando questionado sobre a explicação de natureza empírica — o uso de medida — , reage: "*SF é igual a LF e o ângulo SFL é igual ao ângulo 'a'* *porque o instrumento faz uma rotação.*" Na exploração emerge a definição de rotação, mas o grupo utiliza esta própria definição para validar o funcionamento do instrumento, não inferindo que para "demonstrar a funcionalidade" é preciso mostrar que o instrumento atende a condição de definição, uma decorrência dos fatos impostos à construção; ou, de outra forma, confunde hipótese e tese da propriedade objeto de de-

[31] Em JAHN tem-se estudo de dificuldades enfrentadas pelos alunos quanto a mudança de tratamento a ser dado a uma transformação — de transformação de figuras para transformação como função que age sobre pontos do plano. A dificuldade decorre de uma necessária ruptura de conceitos, porque estão em cena diferentes concepções do plano: de uma parte o plano que contém um conjunto de figuras; de outra parte o plano como conjunto de pontos.. JAHN, A. P. **Des transformations de figures aux transformations ponctuelles**, Thèse de Doctorat, Institut des Matématiques Apliquées de Grenoble, Université Joseph Fourier, 1998.

monstração. Já o grupo 1, ao manifestar-se, indica atenção à argumentação dedutiva: *“traçamos círculo de centro F passando por S e L ...não! precisamos mostrar que o círculo passa por L...isso demonstra o funcionamento do instrumento...”* Ver Figura 4.57.



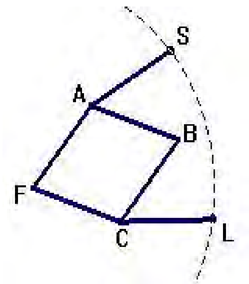


Figura 4.57
Análise a posteriori, Atividade 5, parte 1.
Exploração dos grupos 4 e 1.
Fonte : produção de grupo

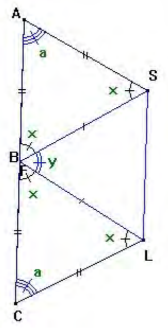
Observe-se que as propriedades características da transformação de rotação, a saber SF = LF e ângulo SFL = ângulo ‘a’, até então não explicitadas, emergem na própria tentativa de demonstração, proporcionando as *extensões de desenho* que colocam em evidência as *subconfigurações* “triângulo isósceles” e “paralelogramo” que suportam a argumentação.

No progresso dos grupos [32] registram-se diferentes níveis de domínio do processo de demonstração :

(a) demonstração particular e depois geral (grupo 6). Ver Figura 4.58 à página 165.

O grupo considera satisfatória a primeira demonstração — colocando-se aqui a questão delicada da distinção entre argumentos que apoiam-se em instância particular de representação da figura e argumentos que dela independem. Sob provocação do professor — “*a demonstração também se aplica à configuração mais geral do instrumento ?*”, — ele move o ponto S e constata não ser mais possível garantir a igualdade “*2x+y=180* ” e assim, após novas de *extensão de desenho*, produz demonstração geral da congruência dos ângulos.

[32] Os grupos 3 e 4 não apresentaram redação de demonstrações.

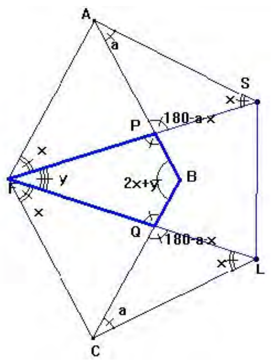


(Obs: a demonstração da congruência de FS=FL não é considerada).

"alinhamos o quadrilátero ABCF de modo que se torne um segmento AC de ponto médio B, isto é, o lado AB fique sobreposto ao AF.O mesmo faremos com os lados BC e CF. Agora temos três triângulos isósceles e os ângulos a, x (LAL$\Rightarrow$ dois Δisósceles, por isso os ângulos congruentes x) e y, o qual queremos provar que é congruente `a 'a' :

$$a+2x=180^\circ$$
$$a=180^\circ-2x$$
$$2x+y=180^\circ \Rightarrow y=180^\circ-2x \Rightarrow y = a$$

ou seja, de fato $y \equiv a$."



"O ΔSAF é isósceles (FA≡AS) e, por isso, possui dois ângulos iguais (x). Como o ΔSAF≡ΔFCL (LAL) então o ΔFCL possui também dois ângulos x. Analisando o ΔAPS temos os ângulos a, x e 180°-a-x (pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°). O mesmo vale para o ΔCQL (pois ΔCQL≡ΔAPS).
Analisando o quadrilátero ABCF descobrimos que o ângulo do vértice B é igual ao do vértice F, pois se trata de paralelogramo (ângulos opostos congruentes), ou seja, igual à 2x+y.
Por fim, averiguemos o quadrilátero FPBQ. Possui os ângulos y, 2x+y, 180°-a-x (OPV) e 180°-a-x (OPV). Sabendo que a soma dos ângulos internos de quadrilátero é igual à 360° temos:

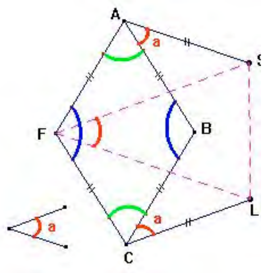
$$y+2x+y+180^\circ-a-x+180^\circ-a-x = 360^\circ$$
$$2y+2x-2x-2a = 360^\circ-180^\circ-180^\circ$$
$$2y-2a = 0$$
$$2y = 2a$$

$y = a$, ou seja, de fato $y \equiv a$"

Figura 4.58
Análise a posteriori, Atividade 5, parte 1.
Demonstrações particular e geral
Fonte : produção de grupo

(b) controle parcial do processo de demonstração (grupo1), onde é feita a demonstração da congruência dos segmentos FS e FL mas não é considerada a congruência dos ângulos SFL e 'a', embora o grupo estabeleça diversas relações entre ângulos. Ver Figura 4.59 à página 166.

(c) pleno controle do processo de demonstração (grupos 2, 5, 7 e 8). Quando diferentes argumentações são apresentadas, a demonstração mais simples é reflexo de uma maior base de conhecimento (grupo 8). Ver Figura 4.60 à página 166.

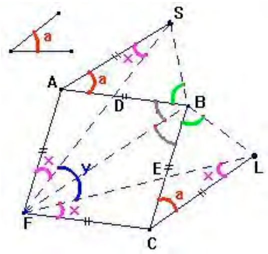


De inicio são assinaladas na figura as diversas congruências de segmentos e ângulos.

"Hipóteses: FA=FC=CB=AB=AS=CL Tese: FS=FL
Demonstração: "FABC tem os lados opostos congruentes, logo é um paralelogramo e os ângulos em A e C são congruentes. Adicionando a mesma medida 'a' aos dois ângulos, a congruência se mantém. Pelo caso LAL, os triângulos FAS e FCL são congruentes. Logo FS=FL. Como os ângulos AFS e ASF são congruentes, pois por construção o triângulo AFS é isósceles, e da mesma forma são congruentes os ângulos FLC e CFL, e sabendo que:
ângulo FCL= ângulo C+ 'a' ; 2. Ângulo AFS + Â + 'a' = 180 ;
FÂS =Â +'a'; 2. Ângulo CFL + ângulo C + 'a' = 180; ângulo C = ângulo A
segue que são congruentes os ângulos AFS e CFL (**o que poderia ser inferido de forma imediata da congruência dos triângulos AFS e CFL**)"

(Grupo1)

Figura 4.59
Análise a posteriori, Atividade 5, parte 1.
Controle parcial do processo de demonstração.
Fonte : produção de grupo

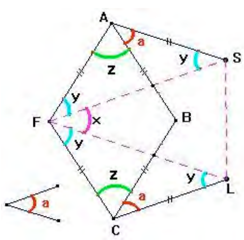


"Hipóteses: FA=FC=CL=AS=AB=BC e ângulos SAB, LCB e 'a' congruentes
Tese: FS=FL e ângulo SFL = ângulo SAB

Demonstração:Por LAL são congruentes os triângulos SAB e LCB e assim SB=LB. Olhando para os triângulos BSF e BLF, por LAL também são congruentes (usa o fato que sendo ABCF losango, a diagonal FB também é bissetriz) e assim FS = FL. Usando a congruência de ângulos indicadas na figura, dada pelos triângulos isósceles congruentes, no quadrilátero FDBE temos:

$$(2.x+y) + (180-(a+x)) + (2.x+y) +(180-(a+x)) = 360$$

donde vem y-a = 0 ou seja y = a"
(Grupo 2)



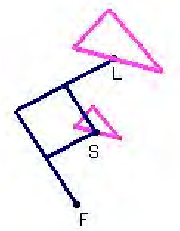
"por LAL (FA=FC, ângulo z+a, AS=CL) temos a congruência dos triângulos FAS e FCL e portanto FS=FL.
Como o triângulo FAZ é isósceles temos: 2.y+z+a = 180 .
Como FABC é paralelogramo (ângulos consecutivos somam 180) e como são congruentes os ângulos CFA e AFS temos: 2.y+x+z = 180
Das igualdade concluímos que: x = a "
(Grupo 8)

Figura 4.60
Análise a posteriori, Atividade 5, parte 1.
Controle do processo de demonstração.
Fonte : produção de grupo

Atividade 5, instrumento 2

Como na atividade com o instrumento anterior, cabe aos grupos explorar, por via do dinamismo do desenho, o funcionamento do instrumento e identificar os fatos a serem declarados — as hipóteses a serem tomadas — para assim explicar sua funcionalidade.

De início, novamente, a descrição do instrumento é ainda bastante imprecisa. Ver Figura 4.61.



“*o instrumento serve para fazer figuras idênticas as feitas pelo ponto S , pelo ponto L , com tamanhos que variam conforme aumentamos ou diminuímos os segmentos...amplia figuras geométricas*” (Grupo 2)

“*reproduz o desenho feito em S ampliado em L*” (Grupo 3)

“*o instrumento amplia figuras, fixando S na figura e reproduzindo ampliada em L . A figura é ampliada por projeção. O ponto F é o foco da projeção e projetamos a figura, sendo ela ampliada a uma distância em relação ao foco F*” (Grupo 6)

Figura 4.61.
Análise a posteriori, Atividade 5, parte 2.
Descrição vaga de funcionamento do instrumento
Fonte : produção de grupo

O grupo1, a partir dos desenhos feitos pelos pontos S e L, ajusta empiricamente o tamanho das “varetas” de modo a obter fator de ampliação específico, comportamento que se aproxima da *experiência crucial*: “e*ste instrumento aumenta a figura de fator dois (...)* q*uando B é ponto médio de AL (...)*”. Solicitado a dimensionar o instrumento de forma a obter fator de ampliação 5/3, o grupo, embora saiba que isto guarde relação com o tamanho das varetas, não consegue implementar tal razão no instrumento (Ver Figura 4.62 à página 168).

Comportamento similar registra-se no grupo 4: ele redimensiona o instrumento, controlando o tamanho das ‘varetas’ com o uso de medida e compara as medidas dos lados correspondentes nos dois polígonos desenhados por S e L com as medidas das varetas. O grupo apresenta suas razões para tal estratégia, empírica: “*temos* *muito pouco conhecimento de geometria para tentar descobrir no instrumento onde está o fator de ampliação. Vamos tentar descobrir usando medida e depois mostrar que de fato funciona”* .

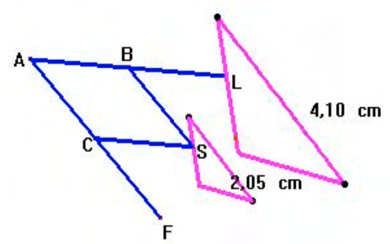
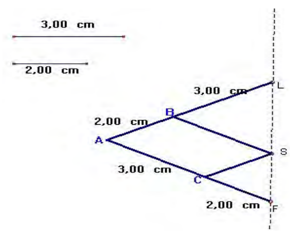


Figura 4.62
Análise a posteriori, Atividade 5, instrumento 2.
Fator de ampliação.
Fonte : produção de grupo

Aliás, o recurso de medição é recorrentemente utilizado na tentativa de estabelecer o fator de ampliação entre o polígonos descritos por S e L (grupos 1, 4, 5, e 8), mas equívocos são cometidos na explicitação deste fator. Ver Figura 4.63. Aí se refletem as clássicas dificuldades quanto às estruturas aditivas e multiplicativas. As primeiras são dominantes, o que explica muito dos erros cometidos pelos alunos na resolução de problemas multiplicativos. Aqui também, em lugar de considerar razão entre segmentos, eles tomam a média aritmética de seus comprimentos.



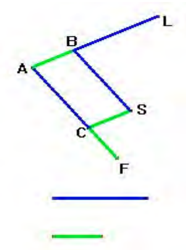
“serve para fazer cópias aumentadas, sem nenhuma rotação, de acordo com a média aritmética (CF+BL) / 2 (grau de aumento da cópia)” (Grupo4)

“o instrumento aumenta a figura da ponta seca na média aritmética das varetas CS e BS” (Grupo5)

Figura 4.63
Análise a posteriori, Atividade 5, instrumento 2.
Tentativa empírica de determinação do fator de ampliação do instrumento.
Fonte : produção de grupo

Chama a atenção o tratamento empírico dado ao problema. Somente em dois grupos observou-se exploração na direção de argumentação dedutiva: *“o desenho feito por S está relacionado com o triângulo FCS, enquanto que o desenho feito por L está relacionado com o triângulo SBL, e eles são semelhantes, um pequeno e outro maior”* (grupo 6). No grupo 8, a relação entre os comprimentos das varetas e o fator de ampliação foi abordada e ao modificar o comprimento de AL, ele observa a mudança na ampliação, sem o uso do recurso de medição: *"o instrumento copia figuras maiores que a figura original, sendo que o fator depende do segmento superior e inferior* (segmentos que dimensionam o instrumento)*; aumentando o segmento superior o fator de ampliação aumenta; aumentando o segmento inferior o fator diminui."*

Ao prosseguirem os grupos na determinação de propriedades a serem impostas ao instrumento, estas ora se revelam insuficientes (grupos 1 e 4), ora incluem *fatos estáveis implícitos* (grupos 1, 5, 6 e 8). Ver Figura 4.64.



"AB=CS, AL=AF, BS=AC (**insuficiente**) *, pontos F, L e S na mesma reta (fato estável implícito) "* (Grupo1)

"AL=AF, AB=CS, AC=BS, CS=CF, AB // CS e AC // CS (**fatos estáveis implícitos**)" (Grupo5)

"*BL=BS=AC, AB=CS=CF, AL // CS,BS // AC, ABCD é paralelogramo, são iguais os ângulos BAC=LBS=SCF* (**fatos estáveis implícitos**)" (Grupo 8)

Figura 4.64
Análise a posteriori, Atividade 5, instrumento 2.
Explicitação de fatos a serem declarados
Fonte : produção de grupo

A precariedade na descrição de propriedades a serem atribuídas ao instrumento dá origem a dificuldades no processo de demonstração e alguns grupos manifestam: "*Não sei o que devo demonstrar*", o que é explicável, já que o discernimento das propriedades a serem demonstradas depende de claro entendimento de imposições a serem tomadas na figura — as hipóteses da propriedade objeto de demonstração.

Dois dos grupos tomam simples descrições do instrumento como sendo uma demonstração. Segundo o grupo 5, *"FL é maior que FS conforme muda a média aritmética de CS e BS"*. Já para o grupo 4, "*O ponto L está na mesma semi-reta FS. A distância FS vezes* (multiplicada pelo) *o grau de aumento será igual à distância de FL, em cima da semi-reta*".

Na tentativa de melhor justificar o funcionamento do instrumento, os grupos 1 e 3 empenham-se na sua construção. Usam corretamente as condições de paralelismo, característica fundamental da homotetia presente no instrumento. Mas o dinamismo que cada grupo obtém é diferente: para o grupo 3, o instrumento construído reduz em L o desenho feito pela ponta seca S; e a escolha de ponto livre que dá início a construção, pelo grupo 1, compromete o dinamismo da ponta seca S. Em ambas as construções, o desenho estático do instrumento não difere do apresentado no início da atividade. Ver Figura 4.65. É o dinamismo da figura que revela diferentes propriedades geométricas a definir modelagens diversas, evidenciando o potencial dos "desenhos em movimento" como fonte de diferentes *apreensões seqüenciais*.

Grupo 3 Grupo 1

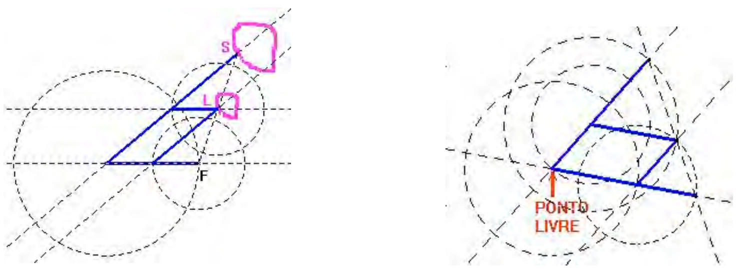
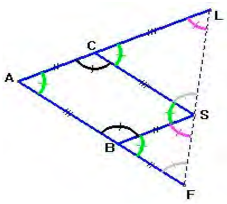


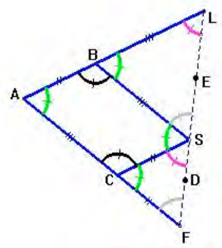
Figura 4.65
Análise a posteriori, Atividade 5, instrumento 2.
Dinamismo do desenho revelando diferentes apreensões sequênciais.
Fonte : produção de grupo

Sob provocação do professor é retomada, em discussão coletiva, descrição do instrumento, com o objetivo de torná-la mais precisa, ou seja, de explicitar-se o conceito de "transformação homotética". Usando a idéia de projeção apresentada pelo grupo 6 — *"o ponto F é o foco da projeção e projetamos a figura, sendo ela ampliada a uma distância em relação ao foco F"* — são colocados em relação *os* segmentos FS e FL e os grupos destacam que a razão FL / FS deve ser constante e igual à razão de ampliação; isto um *fato estável implícito.* O alinhamento dos pontos F,L e S — outro *fato estável implícito* — não é detectado pelos grupos e exige a provocação do professor.

Esclarecida a transformação produzida pelo instrumento, os grupos dão início ao processo de demonstração. As demonstrações apresentadas por quatro deles (grupos 1, 2, 4 e 8) não são satisfatórias porque se apoiam, com maior ou menor grau de sutileza, na colinearidade dos pontos S, F e L. Mas, por outro lado, chama a atenção o preciso controle pelo grupo 8 na primeira parte da argumentação; mas, a seguir, sua linha de raciocínio foge de controle hipotético-dedutivo, sendo utilizado *fato estável implícito*. Ver Figura 4.66.



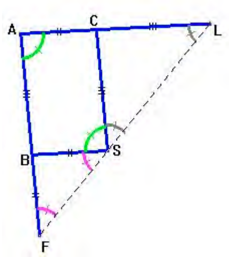
"ACSB é um paralelogramo porque os lados opostos são congruentes. Como CS e AB são paralelas temos os pares de ângulos congruentes: LCS=CAB, CSB=SBF. Sendo AL // BS traçando a transversal FS obtemos a igualdade de ângulos ALF = BSF" (Grupo 1)



"Por que F, S e L são colineares ? Considerando o paralelogramo ABSC, seus ângulos consecutivos são suplementares, logo são congruentes os ângulos CAB, SBL e FCS. Como BS // AF traçando a semireta transversal FS são congruentes os ângulos AFS e BSE, sendo E ponto oposto à F depois de S. Como CS // AL traçando a semireta transversal LS são congruentes os ângulos ALS e CSD, sendo D um ponto oposto à L depois de S (**seguro controle de semiretas e de congruência de ângulos**). Então são semelhantes os triângulos BLS e CSF (**usa os fatos estáveis implícitos: semireta FS passa por L e semireta LS passa por F**), *logo seus lados homólogos são paralelos e portanto os pontos F, S e L são colineares*." (Grupo 8)

Figura 4.66
Análise a posteriori, Atividade 5, instrumento 2.
Demonstrações com diferentes níveis de controle de argumentação.
Fonte : produção de grupo

Dois grupos , os grupos 5 e 6, apresentam argumento impecável quanto ao alinhamento dos pontos F, S e L. Ver Figura 4.67.

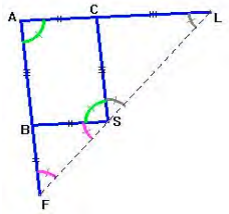


"Temos que são isósceles os triângulos SCL e FBS (**foi declarado na construção SC=CL e FB=BS**). *Logo, visto que os ângulos da base são congruentes em triângulos isósceles, CSL=CLS e BFS=BSF. No paralelogramo ACSB temos que os ângulos opostos são congruentes, assim BAC=BSC. Como a soma dos ângulos do triângulo é igual à 180 graus temos que os ângulos do triângulo FAL somam 180 e pelas congruências de ângulos já vistas BSC+CSL+BSF = 180 e portanto F, S e L estão alinhados.* (Grupo 5)

Figura 4.67
Análise a posteriori, Atividade 5, instrumento 2.
Demonstração da colinearidade dos pontos S, F e L.
Fonte : produção de grupo

Mas no grupo 5 surpreende que, na demonstração da razão constante FS/FL, o desenho instância de representação escapa do controle conceitual e os triângulos FAL e FBS são considerados retângulos, sendo então utilizado na argumentação o teorema de

Pitágoras — os triângulos tem esta aparência, mas tal condição implicaria FL e FS constantes, condição não detectada pelo grupo. Ver Figura 4.68.



“ Comparando os triângulos LAF e SBF, os ângulos são congruentes : F é comum, L e S, A e B são correspondentes em retas paralelas . Por construção AF=AL e BF=BS e portanto AF / BF = AL / BS. Visto que $(FL)^2 = 2.\ AF^2$ *e* $FS^2 = 2.BF^2$ (**na instância de representação o desenho escapa do controle conceitual e os triângulos FAL e FBS são considerados retângulos, o que implicaria FL e FS constantes**) *e portanto*

$$(AF / BF)^2 = (FL / FS)^2 \text{ ou seja } AF / BF = FL / FS\text{”.}$$

Figura 4.68
Análise a posteriori, Atividade 5, instrumento 2.
Demonstração apoiada em instância particular de representação do instrumento.
Fonte : produção de grupo

Resumo da análise

Foi produtivo o trabalho relativo ao instrumento 1, tendo sido depreendida, do dinamismo do instrumento, sua descrição precisa. Extensões de desenho, suporte à argumentação, foram feitas sem dificuldade. As argumentações apresentaram coerência lógica, embora desconsiderando, em alguns grupos, fatos que deveriam ser demonstrados.

Já com o instrumento 2 não se obteve o mesmo resultado. A descrição provocou dificuldades que comprometeram a evolução do processo de demonstração. Foi necessária discussão coletiva e, uma vez bem definida a transformação de homotetia, os grupos produziram demonstrações. Dois grupos apresentaram demonstração sob pleno controle; nos demais registrou-se, na argumentação relativa a razão de homotetia, o uso, com menor ou maior grau de sutileza, de fato estável implícito — o alinhamento de pontos.

As dificuldades talvez possam ser explicadas pelo inadequado encaminhamento da atividade em seu início (fato não antecipado na análise *a priori*). Com a formulação dada ao problema, os grupos afastaram-se do processo de investigação mais natural que seria identificar o funcionamento do instrumento e demonstrar este funcionamento. É na tentativa de explicar o seu bom funcionamento — o efeito de rotação ou de semelhança homotética de figuras — que se torna pertinente buscar as imposições de construção (do instrumento físico) — as hipótese a serem consideradas na argumentação dedutiva. .

Atividade 6

Neste problema, cabe à demonstração não só a função de *explicar* mas também a de *convencer*, já que a condição para o triângulo de área mínima não é de todo óbvia.

Sendo este um problema que contém diversos parâmetros, foi dificuldade inicial para alguns grupos (2, 5 e 8) entender com clareza qual era a questão a ser investigada, o que se revelou em confusa exploração inicial: *mover os lados do ângulo? mover os pontos A e P ?* Não lhes ocorreu, de imediato, aterem-se à família de triângulos dada por ângulo e ponto fixos.

A estratégia inicial empírica, de praticamente todos os grupos, foi a de, medindo lados, ângulos e áreas, e movimentando o ponto A, explorar a particularidade geométrica do triângulo de área mínima, assim identificando a condição: "o ponto A deve ser tal que P é ponto médio de AB".

Extensões de desenho foram utilizadas para reforçar esta conjetura, seja construindo o ponto médio M de AB e movendo A de forma que M coincidisse com P (grupo1), seja construindo círculo de centro P passando por A e movendo A de forma tal que este círculo passasse por B (grupo 5), confirmando, em ambos os casos, a condição a ser atendida pelo ponto A para ter-se o triângulo de área mínima. Ver Figura 4.69.

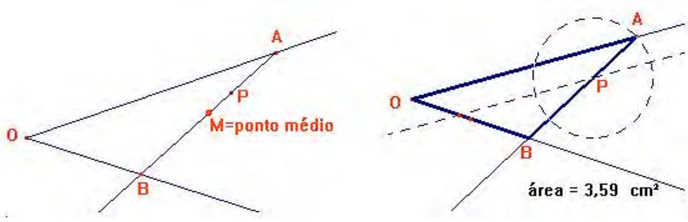


Figura 4.69
Análise a posteriori, Atividade 5, instrumento 2.
Validações de natureza empírica.
Fonte : produção de grupo

Enunciados depreendidos de instância particular de desenho — *"o ponto A deve ser tal que AP é perpendicular a bissetriz do ângulo"* — também surgiram quando, na instância de representação, o ponto P localizava-se próximo à bissetriz do ângulo; recorrendo ao “desenho em movimento”, o grupo 3 desqualificou esta conjetura.

Saliente-se que, uma vez identificada empiricamente a condição para área mínima do triângulo, todos os grupos partem imediatamente em busca de uma explicação, conscientes da pertinência de uma demonstração.

Os grupos prosseguem com *extensões de desenho,* buscando subconfigurações que lhes permitam melhor controlar a variação de área de AOB e o avanço no processo de demonstração. Ver Figura 4.70.

Grupo1 **Grupo 8**

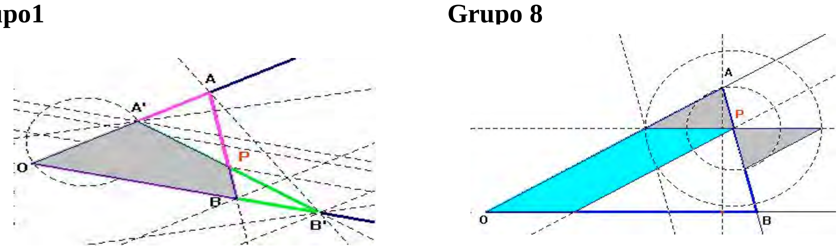


Figura 4.70
Análise a posteriori, Atividade 5, instrumento 2.
Extensões de desenho visandoa emergência de subconfigurações suporte à argumentação.
Fonte : produção de grupo

Como o controle de subconfigurações adequadas depende de *apreensões operativas*, novas dificuldades se apresentam aos grupos: “*o problema é encontrar as palavras que façam a explicação clara* (...) *sei que com este desenho dá para explicar, mas eu não sei como...*” (grupo1). O uso intensivo de “desenho em movimento” faz emergir as subconfigurações adequadas. Avanços e retrocessos conduzem os grupos a demonstrações cada vez mais acuradas.

Descrição mais detalhada dos ricos processos de demonstração dos grupos 1, 3 e 5 justifica-se por neles transparecer, claramente, o complexo processo de controle do desenho (componentes conceituais / proposicionais e figurais) e a argumentação dedutiva. Essa descrição também realça o quanto o ambiente dinâmico dá suporte aos *experimentos de pensamento,* especialmente quando ele envolve pensamentos de natureza visual.

O Grupo 1 começa **(1)** construindo retas paralelas de modo a fazer do triângulo AOB *“metade de um paralelogramo”*. **(2)** Abandona esta construção, e usando pontos médios dos lados do triângulo AOB, este grupo obtém paralelogramo com área igual ao dobro da área do triângulo Ver Figura 4.71.

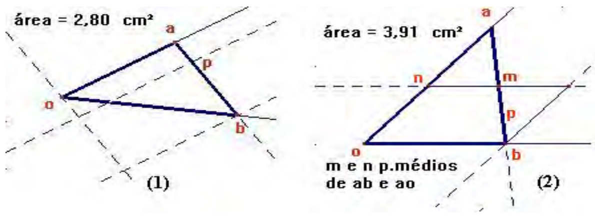


Figura 4.71
Análise a posteriori, Atividade 6, grupo 1. Diferentes extensões de desenho.
Fonte : produção de grupo

Essas estratégias sugerem uma exploração cega do problema, a extensão aleatória do desenho buscando a emergência de subconfigurações que suportem a argumentação do grupo. (**3**) Num segundo momento, a *extensão de desenho* já sob deliberado controle, o grupo constrói o triângulo A'OB', candidato a triângulo de área mínima (i.é., A' é tal que P é ponto médio de A'B'), cujas alturas são OX e OY nos triângulos OA'B' e OAB. Valendo-se da fórmula para cálculo de área do triângulo, o grupo tenta demonstrar a desigualdade de áreas — a área A'OB' é menor que a área AOB — sem sucesso, pois diferentes escolhas de base e altura resultam sempre em desigualdades contrárias entre os fatores que determinam a área. Ver Figura 4.72. (na figura, OB < OB' e OY> OX).

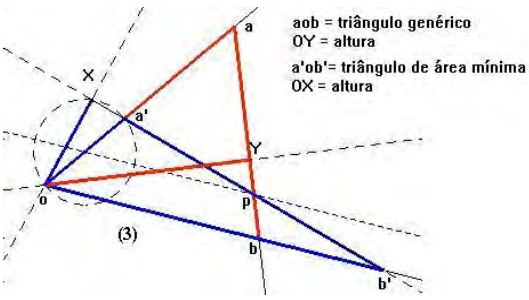
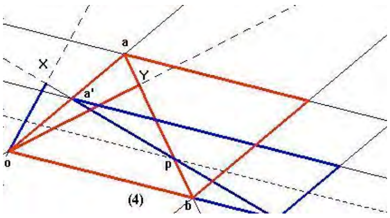


Figura 4.72
Análise a posteriori, Atividade 6, grupo 1.
Primeira tentativa de demonstração
Fonte : produção de grupo

(**4**) Valendo-se de novas *extensões de desenho*, o grupo constrói paralelogramos que são *"o dobro dos triângulos"* e considera o problema de minimização de área como equivalente ao de comparar as áreas dos paralelogramos. Este é o desenho, um tanto complicado, ao qual o grupo aplica movimento, com pleno controle de todos os seus elementos. Ver Figura 4.73 - primeira construção.

Primeira construção



Segunda construção

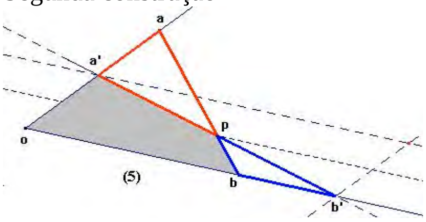


Figura 4.73
Análise a posteriori, Atividade 6, grupo 1.
Novas extensões de desenho
Fonte : produção de grupo

(5) Voltando à situação geométrica anterior, de construção do desenho (**3**), o grupo esconde alguns elementos do desenho para "limpá-lo". Movimentando o ponto A, o grupo observa que os dois triângulos têm parte de sua área em comum. A partir dessa área comum, o grupo imediatamente considera nova formulação para o problema proposto: comparar a área dos triângulos menores, que excedem a área comum aos triângulos iniciais AOB e A'OB'. Ver Figura 4.73 – segunda construção.

(**6**) São construídas as alturas A'X e B'Y dos dois triângulos menores, relativas aos lados AP e PB. Ao colocar este novo desenho em movimento, o grupo comenta que *"os segmentos alturas parecem ser congruentes"* e avança no processo de demonstração: *"como AP > PB quando P não é ponto médio de AB , o problema agora é mostrar que de fato os segmentos altura são congruentes, o que vai então garantir que área de AA'P > área de BB'P, já que as bases estão na relação AP > PB"*. Mas o grupo não sucede na demonstração da congruência dos segmentos A'X e BY'. Ver Figura 4.74 à página 178.

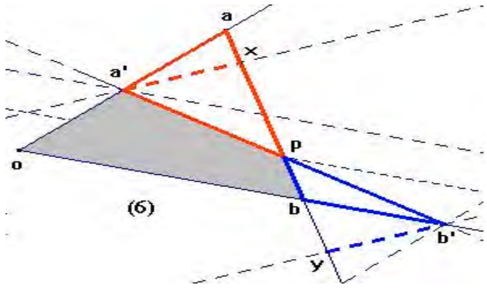
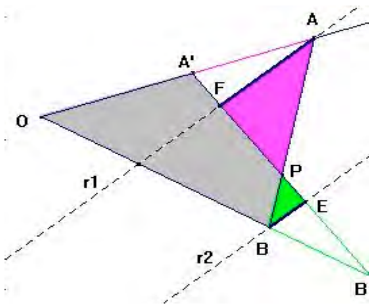


Figura 4.74
Análise a posteriori, Atividade 6, grupo 1.
Identificação de subconfigurações triângulos
Fonte: produção de grupo

(**7**) Com o desenho mais uma vez posto em movimento, a estratégia do grupo, delineada em (**6**), volta-se a PA’ e PB’ como *“bases de mesma medida”* dos triângulos AA’P e BB’P e são construídos os segmentos altura AF e BE relativos aos lados de mesma medida. Os triângulos retângulos AFP e BEP, obtidos a partir dos segmentos altura, sugerem a relação de semelhança. Sendo a razão de semelhança AP/BP maior do que 1, é resolvida a desigualdade entre as alturas AF e BE. O grupo redige, seguro, a demonstração. Ver Figura 4.75.



A diferença entre os triângulos OAB e AO’B’ é os triângulos A’AP e PBB’. Traçando as alturas relativas as bases obtemos os triângulos PAF e PBE que são semelhantes pois tem-se a congruência dos ângulos APF e BPE (o.p.v.), AFP e BEP (retos) e FAP e EBP (alternos internos nas retas paralelas r1 e r2 paralelas com transversal reta AB). No entanto a razão AF / BE é diferente de 1 pois AP não é congruente à BP. Daí obtemos dois casos :

a) AF > BE e como A’P = B’P consequentemente área de A’A P > área de B’BP

b) BE > AF então OA’B’ tem área maior do que OAB”

Figura 4.75
Análise a posteriori, Atividade 6, grupo 1.
Tratamento do desenho e demonstração, sob controle.
Fonte: produção de grupo

No final dessa argumentação (ítem b) há perturbação na linha de raciocínio: ao considerar a possibilidade BE > AF, o grupo automaticamente inverte a relação entre as áreas de OA’B’ e OAB, perdendo o controle da desigualdade sob demonstração, a área OA’B’ menor do que a área OAB.

Chama atenção, nesse grupo, seu gradativo avanço no processo de demonstração, de titubeante a capacitado em suas estratégias. O grupo recorreu, intensivamente, ao dinamismo da figura, tanto para as *extensões de desenho* quanto para a emergência, de início visual, das subconfigurações suportadoras da argumentação, reajustadas e subordinadas, gradativamente, à argumentação dedutiva.

O grupo 3 é o único que inicia sua a exploração sem o uso de medições.

(**1**) Constrói a altura do triângulo AOB relativa ao lado OB do triângulo, retas paralelas aos lados AB e BO, e faz sua primeira conjetura: “*a área é mínima quando a altura AC passa por* P”. Ver Figura 4.76.

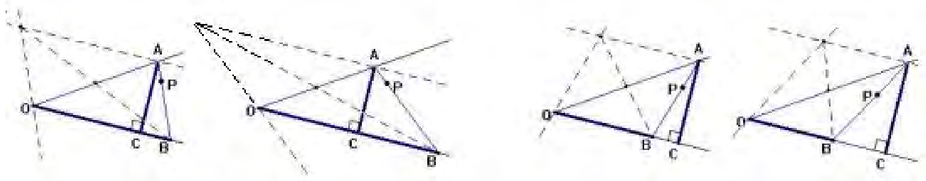


Figura 4.76
Análise a posteriori, Atividade 6, grupo3.
Inferência equivocada, tomada em instância particular de representação.
Fonte : produção de grupo

E explica que “*conforme a altura AC se afasta de AB de um lado* (referindo-se à esquerda de AB) *a base aumenta em proporção muito maior do que a altura diminui e então a área aumenta... do outro lado é o contrário* (referindo-se à direita de AB) *... a altura aumenta numa proporção muito maior do que a base diminui e então a área também aumenta...*” reconhecendo, porém, que “*a explicação não é muito boa... pode ser mais clara* ”

Essa tentativa de explicação descreve a variação da base e da altura, mas não permite concluir sobre a variação da área, [33] o que de certa forma está sendo antecipado no comentário do grupo. Recorrendo à medição da área, o grupo constata que sua primeira conjetura — “*a área é mínima quando a altura AC passa por* P” — é falsa e

[33] É o limite de um produto em que um dos fatores tende a zero e o outro tende a infinito. No caso, conforme o segmento altura se aproxima de P, a função área é localmente crescente ou decrescente, dependendo da posição de P e a conjetura do grupo só seria verdadeira para P ponto médio de cateto de triângulo retângulo.

ao mesmo tempo identifica a condição *“P deve ser ponto médio de AB quando a área é mínima*”.

(**2**) Abandonando o segmento altura, o grupo parte para nova extensão de desenho, um tanto complicada, [34] pela qual tenta comparar a área dos triângulos AOB e A’OB’, sendo este último obtido a partir da reta perpendicular à OB por P, triângulo, portanto, de área fixa. Tem-se aqui resquícios da primeira tentativa: não é o segmento altura que está sendo considerado, mas o triângulo retângulo A’OB’. Observando atentamente o dinamismo da figura, o grupo se manifesta: “*se P não é ponto médio de AB, a diferença entre os triângulos AOB e A’O B’ será a diferença entre os triângulos KA’L e ALM”* — aqui comparando os triângulos AOB e A’O B’. E avança, indicando nova escolha de triângulo a ser comparado com o triângulo AOB — agora o triângulo de área mínima OLR*: “quando A coincide com L tem-se o triângulo de área mínima”.* Ver Figura 4.77.

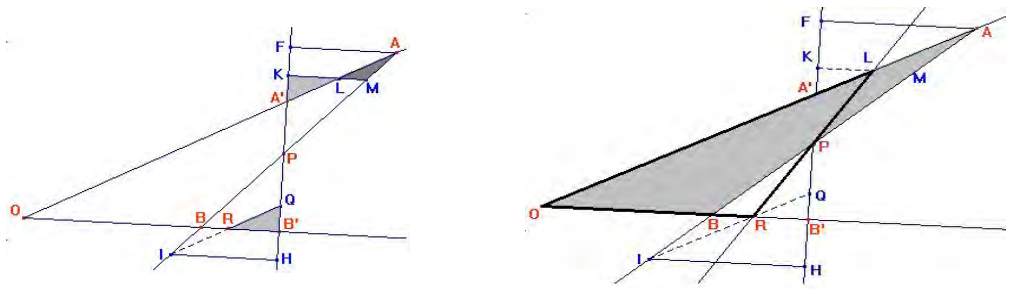
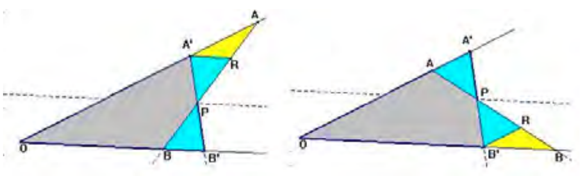


Figura 4.77
Análise a posteriori, Atividade 6, grupo 3.
Diferentes tentativas de extensão de desenho.
Fonte : produção de grupo

O destaque ao triângulo de área mínima OLR provoca manifestação segura: *“ao olhar para este triângulo temos uma nova idéia para fazer a comparação de áreas ... o triângulo OAB tem uma parte de área constante e tem uma parte variando”*. O grupo abandona o triângulo A’OB’ e inicia nova construção.

[34] Na extensão tem-se: K simétrico de B’ em relação à P, F intersecção da perpendicular à A’B’ por A, H simétrico de F em relação à P, I intersecção da perpendicular à A’B’ por H com a reta AB; Q intersecção da paralela à AO com A’B’.

(3) Construído o triângulo OA’B’ tal que P é ponto médio de A’B’, candidato a triângulo de área mínima, o triângulo OAB é decomposto em parte de área constante — dada pelo triângulo OA’B’, e parte variável — dada pelo triângulo AA’R ou pelo triângulo BB’R, dependendo da posição de P. O grupo usa a congruência dos triângulos A’PR e B’PB, AA’P e RB’P na argumentação. Ver Figura 4.78.



“a área do triângulo AA’R é o que tem a mais no triângulo AOB (...) movendo A esta área vai ficando cada vez menor e o triângulo vai se aproximando do triângulo que tem a menor área, quando A é igual à A’, o ponto B fica igual à B’ e P é ponto médio de AB. O mesmso vale na outra situação com o triângulo BB’R”

Figura 4.78
Análise a posteriori, Atividade 6, grupo 6.
Tratamento do desenho e demonstração, sob controle.
Fonte: produção de grupo

Como no grupo 1, também neste grupo 3, graças ao dinamismo das figuras, há um gradativo controle do processo de demonstração. Detectam-se pensamentos de natureza visual quando, com o movimento do desenho, o grupo identifica a decomposição do triângulo AOB em polígono de área constante e triângulo com área a ser minimizada — idéia que desencadeia a convergência à demonstração .

Já o grupo 5 (**1**), tendo identificado com o recurso de medição a condição que garante área mínima ao triângulo AOB, faz nova validação empírica: constrói os pontos M e N, médios de OB e AB, e as retas r1 e r2 paralelas a OA que passam, respectivamente, por P e B. Movimentando o ponto A, de forma a obter a área mínima (aqui usando medida da área), o grupo constata que isso acontece quando a reta r1 passa por M e N, ao mesmo tempo em que o ponto P coincide com o N, este ponto médio de AB. Ver Figura 4.79.

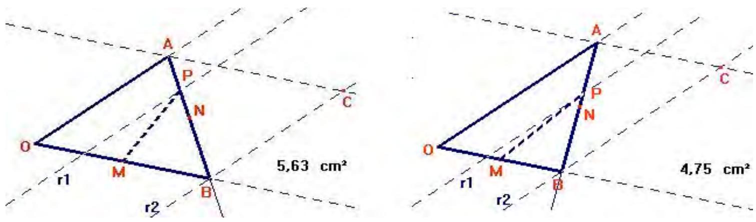


Figura 4.79
Análise a posteriori, Atividade 6, grupo5.
Validação empírica
Fonte: produção de grupo

(**2**) Tendo como propósito construir o triângulo de área mínima, o grupo perde o controle do problema e abandona as condições dadas no problema: faz construção em que o ponto P deixa de ser parâmetro livre do problema, tornando-se dependente do triângulo, ou seja, obtém uma família de triângulos AOB em que P é sempre ponto médio do lado AB. A movimentação do ponto B — ponto construído livremente sobre um dos lados do ângulo — surpreende o grupo: a área do triângulo AOB tende a zero quando B se aproxima de O. Sem entender o que está acontecendo, o grupo segue movimentando o ponto B, observa o efeito no dinamismo da figura e então conclui: *"o ponto P está movendo junto com o B e isto não acontecia antes"*, o que provoca adequada retomada do problema. Ver Figura 4.80 – primeira construção.

(**3**) O grupo volta à figura inicial e produz nova *extensão de desenho*: os pontos médios M1 e M2 dos segmentos OA e OB, e as retas PM1 e PM2. Identifica os triângulos AM1P e BM2P e enuncia nova conjetura: *"a área é mínima quando estes dois triângulos tem a mesma área"* mas não consegue avançar na argumentação. Ver Figura 4.80 – segunda construção.

Primeira construção | Segunda construção

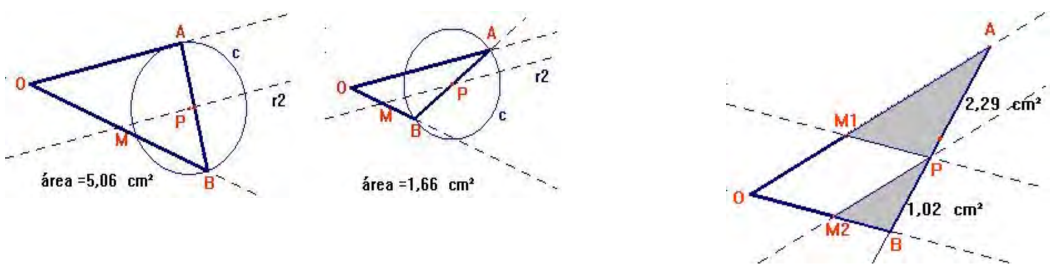
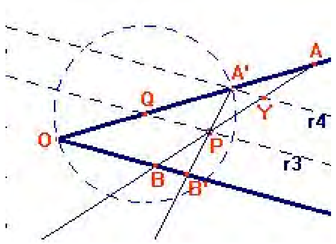


Figura 4.80
Análise a posteriori, Atividade 6, grupo5.
Primeiros tratamentos do desenho
Fonte: produção de grupo

(**4**) O grupo abandona a estratégia considerada em (**3**) e, com segurança, procede à construção do triângulo de área mínima OA'B'. Movimenta o ponto A e, informado pelo "desenho em movimento", constrói a reta r4 paralela à reta OB passando por A'; constrói o ponto Y, intersecção da reta r4 com o segmento AB e assim colocam em evidência o triângulo AA'Y, de área variável a ser minimizada. Em poucos instantes, e de forma surpreendente, o grupo apresenta argumentação plenamente controlada. Ver Figura 4.81.



"tri OAB = AO'PB + AA'P e tri OA'B' = OA'PB + BB'P. Como OA'PB é comum aos dois triângulos é preciso provar que tri A'AP > tri BB'P... construo a reta r4 paralela à r3 por A' e Y ponto de intersecção de r4 com AB e obtenho os triângulos A'PY e B'PB que são congruentes por ALA (já que P é ponto médio de A'B' , tem ângulos opostos pelo vértice e ângulos alternos internos congruentes por paralelismo)... disto tem-se que tri A'AP > tri BB'P e a área de AOB é maior que a de A'OB' ..."

Figura 4.81
Análise a posteriori, Atividade 6, grupo5.
Tratamento do desenho e demonstração, sob controle.
Fonte : produção de grupo

Chama a atenção que, a partir do momento (**4**), o grupo faz determinadamente a extensão de desenho correspondente ao triângulo de área mínima, alterna "movimentos de desenho" e novas extensões e coloca sob controle adequadas subconfigurações — comportamentos em que se detectam *experimentos de natureza visual* convergentes à demonstração.

O **grupo 7** revela, desde o primeiro momento, acuidade estratégica., adotando, de início, a exploração empírica para identificar a propriedade do ponto A que garante a área mínima. Prossegue com as *extensões de desenho* — reta paralela a OB passando por P, ponto W intersecção desta reta com AO, ponto X simétrico de Y em relação à W, paralelogramo BPXY. Após aplicar movimento ao ponto A e bem observar o dinamismo da figura, manifesta uma estratégia para a exploração do problema: *"usando o movimento tento decompor o triângulo OAB em parte constante e outra variável, que se torne zero com o movimento de A"*. Ver Figura 4.82.

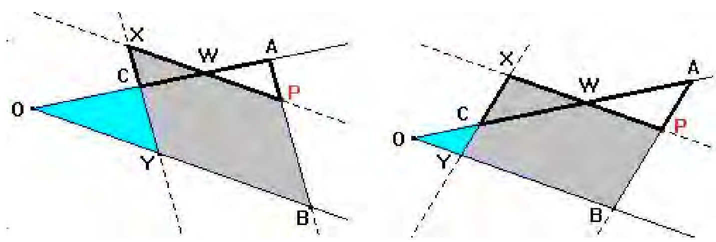


Figura 4.82
Análise a posteriori, Atividade 6, grupo7.
Dinamismo da figura na estratégia de investigação
Fonte : produção de grupo

Com o “desenho em movimento”, o grupo avança no processo de demonstração: *“quando move A o segmento XP não muda e também não muda a reta que passa pelo segmento (...) e assim não muda a área do paralelogramo XPBY”*. Desta forma o grupo obtém a *“parte constante”* procurada do triângulo AOB — o quadrilátero ACYB, nisso aplicando bem a congruência dos triângulos APW e CXW. O grupo prossegue com atenção na *“parte variável”* — o triângulo OCY — e sem maior dificuldade explicita a variação de sua área em função do movimento do ponto A . É redigida uma demonstração, e vale observar que, neste grupo, o tratamento dado ao desenho — a extensão via o paralelogramo XYBP — permite argumentação dedutiva em que não é necessário cuidado com a posição do ponto P (o que não acontece com o tratamento do desenho apresentado nos grupos anteriores). Ver Figura 4.83.

Sabemos então que a área do triângulo AOB é igual à soma das áreas do paralelogramo PXYB e do triângulo OCY. Como YB e XP são de mesmo tamanho e constante pois são lados opostos de um paralelogramo, e a distância entre o ponto P e o segmento YB também é constante, então a área do paralelogramo PXYB é constante.

Então a modificação da área do triângulo AOB só depende da área do triângulo OCY que varia de acordo como movemos o ponto A . Quando o ponto C coincide com o ponto O, este triângulo terá área zero, fazendo com que o triângulo AOB tenha a área igual à somente a área do paralelogramo PXYB, sendo este o ponto de menor área. Este ponto é quando OW é igual à AW, fazendo com que o ponto W seja o ponto médio do segmento OA, e como XP é paralela à OB e pela propriedade de base média em triângulos o ponto P é o ponto médio de AB (é omitida a unicidade da paralela passando por um ponto).

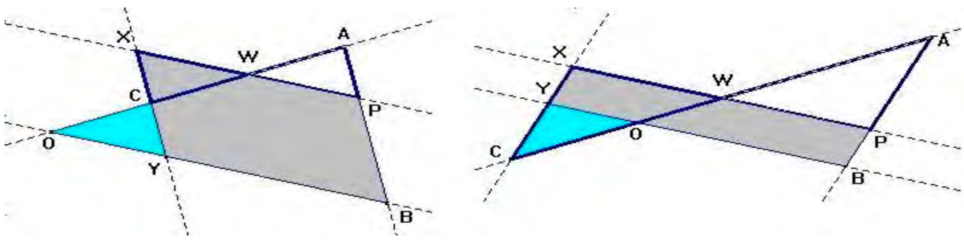


Figura 4.83
Análise a posteriori, Atividade 6, grupo7.
Tratamento do desenho e demonstração, sob controle.
Fonte : produção de grupo

Como nos demais grupos até aqui analisados, neste também se observa o “desenho em movimento” como fonte de emergência de subconfigurações, em processo no qual transparecem, no primeiro momento, os *experimentos de natureza visual*, a seguir submetidos ao controle de argumentação dedutiva.

Os demais grupos — 2, 4 e 8 [35] — também mostram claro engajamento no processo de investigação, embora sem a produção de uma demonstração final.

O **grupo 2** teve dificuldade inicial com o tratamento dos parâmetros do problema, movendo alternadamente o ângulo AOB, o ponto P e o ponto A . Uma vez entendidos os parâmetros do problema — um ângulo e um ponto fixo — , o grupo, como os demais, identifica a condição para área mínima, prossegue fazendo *extensões de desenho* (essencialmente reta paralelas aos lados do ângulo) e formula enunciados equivalentes à propriedade objeto de demonstração, como: "*a área é mínima é quando o triângulo RPB é congruente ao triângulo RQO*" . Ver Figura 4.84.

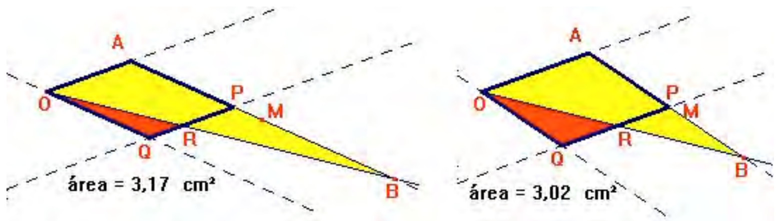


Figura 4.84
Análise a posteriori, Atividade 6, grupo2.
Extensões de desenho
Fonte : produção de grupo

Não avançando na argumentação, o grupo faz novas tentativas com *extensão de desenho*, movimenta a figura, observa a nova subconfiguração e enuncia: "*a área é mínima quando os paralelogramos OAPQ e QPBN tem a mesma área*". Ainda enunciando propriedades equivalentes, apresenta uma argumentação. Ver Figura 4.85.

"*... o triângulo AOB é formado pelo paralelogramo APMD e mais os triângulos ODM e MPB (...) dessa maneira quando o ponto P estiver na metade de AB a área de MPBE será a mesma de DAPM e os triângulos MPB, ODM e MEB serão congruentes. Assim a área do triângulo AOB será a menor possível porque ele será formado por duas partes de área constante do paralelogramo DAPM...*(inferência imprópria)"

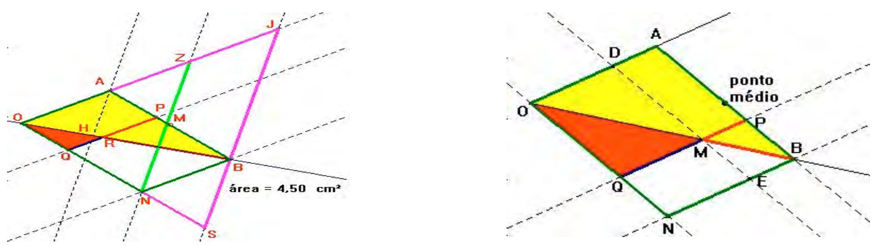


Figura 4.85
Análise a posteriori, Atividade 6, grupo2.
Tentativa de demonstração
Fonte : produção de grupo

[35] Do grupo 6 não se tem registro desta atividade

Trata-se de argumentação logicamente correta e que demonstra que “se P é ponto médio de AB então a área de AOB = 2 . área de DAPM”, mas não demonstra que a área de OAB é mínima. O grupo continua com dificuldades para avançar no processo de demonstração, reveladas por sua nova tentativa de explicação: *“a área de AOB é mínima quando a diferença entre as áreas do paralelogramos OAPQ e QPBN é zero...”*

O **grupo 4**, como os demais partindo de exploração empírica, identifica a condição *“P ser ponto médio de AB para que a área seja mínima”* e prossegue com *extensão de desenho,* usando paralelismo e construindo o triângulo de área mínima. Não chega a produzir uma demonstração, embora tentativas de explicação tenham sido perseguidas. O grupo mantém-se nas descrições de observações empíricas, advindas dos desenhos em movimento: “q*uando P for ponto médio o triângulo terá área mínima... Isto ocorre quando, ao traçarmos as retas paralelas r1, r2, r3 e r4 formando um paralelogramo, o temos dividido em exatamente quatro partes iguais...”* . Ver Figura 4.86.

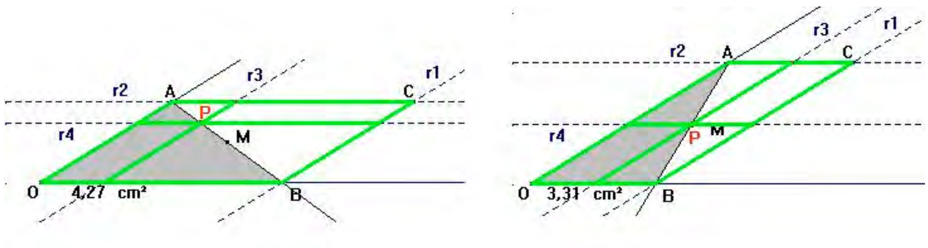


Figura 4.86
Análise a posteriori, Atividade 6, grupo 4.
Extensões de desenho e tentativa de demonstração
Fonte : produção de grupo

No **grupo 8**, feitas as constatações empíricas da condição para área mínima, registram-se diversas tentativas de *extensão de desenho,* sem emergência das subconfigurações que dão suporte à argumentação. Quando o grupo 8 apresenta solução ao problema, sua extensão de desenho está contaminada pela estratégia utilizada pelo grupo 7. O grupo identifica corretamente as subconfigurações que suportam a demonstração, redigindo-a de forma muito clara.

Resumo da análise

Aplica-se aqui o resumo relativo à atividade 7: foi uma atividade provocativa, com muitas "idas e vindas" no ajuste de extensões de desenho e reconstrução de subconfigurações suporte à demonstração, com papel importante do dinamismo da figura.

Quatro grupos produziram demonstrações com muita segurança. Suas atitudes revelaram autonomia no processo de investigação e experimentos de pensamento situados no patamar da geometria hipotético dedutiva. O dinamismo da figura foi suporte fundamental para o sucessivo ajuste de extensões / reconstruções de desenho, com concomitante avanço do processo de demonstração. Estes grupos vivenciaram o processo de criação matemática, nos seus contextos de descoberta e justificação.

Os demais grupos também evidenciaram entendimento da atividade proposta e atitude investigativa, engajando-se no processo de demonstração, só não tendo sucesso quanto ao produto final, pois as extensões de desenho e as subconfigurações por eles identificadas não foram suficientemente adequadas à produção de demonstração. Empenharam-se em resolver o problema proposto, fizerem diferentes tentativas e, como parte da investigação matemática, também vivenciaram dificuldades. Não mais quanto ao entendimento da geometria como um modelo teórico, mas sim dificuldades a serem transpostas com os *insights* que levam a solução de um problema — este é o processo de criação em matemática.

A análise *a posteriori* indica que, do conjunto de atividades proposto na experimentação, nem todas atenderam às expectativas anunciadas na *análise a priori*. Mas ela também mostra que, em especial, nas atividades 1, 2, 7, 4 e 6, os alunos muito progrediram. Depoimentos desses alunos antecipam os resultados que podem ser inferidos da experimentação e de sua análise *a posteriori*, objeto de apresentação no próximo capítulo.

Dizem os alunos , sujeito participantes desta investigação, que:

> *As aulas de geometria abriram caminho para 'busca dos por quês' (...) aprendi a buscar argumentações fundamentadas (...) desenvolvemos mais autonomia na busca de soluções, aprendi a raciocinar e a ter autonomia. (Gis)*

Nesta disciplina procuramos construir o pensamento, não nos preocupamos com fórmulas e expressões algébricas(...) o computador ajudou a visualizar situações que no lápis e papel dificilmente conseguiríamos, não ficamos apenas ouvindo e escrevendo, mas tentando criar e descobrir relações geométricas. (And)

A didática utilizada despertou o interesse do aluno (...) pensava 'horas' nos problemas propostos. (Ber)

No segundo grau nos estudávamos geometria sem entender as figuras geométricas, simplesmente aplicávamos as fórmulas (...) nas aulas de geometria fomos obrigados a entender as figuras, a trabalhar com elas (...) nos ensinou que para resolver um problema precisamos olhar as coisas de maneira diferente (...) foi diferente das outras disciplinas onde os professores apresentam a matéria, fazem provas e acabou. (Sil)

A maioria das disciplinas que cursei eram expositivas, ou seja, baseavam-se na explicação teórica do professor no quadro-negro e posteriores exercícios. Em geometria, em cada aula nos eram lançados novos problemas/desafios os quais resolvíamos através de tentativas/erros, discussões com colegas e 'dicas'da professora (...) consegui descobrir vários resultados geométricos que antes desconhecia. (She)

A cadeira de geometria teve muita preocupação em nos mostrar que devemos provar os 'porquês' da utilização de um ou outro método...isso é algo novo na cabeça de uma pessoa que vem do segundo grau, em que tudo se resumia em "exemplos" (...) o uso do computador foi de muita valia para nos familiarizar com este novo método de raciocínio, nos auxiliando muitas vezes a enxergar o que estava sendo pedido nas tarefas.(Tia)

Aprendi a questionar e a provar fatos, fatos estes que nunca havia questionado antes. Fatos simples: mostrar que uma figura que dizem ser quadrado é de fato um quadrado. (Fab)

As aulas de geometria não tem nada em comum com as aulas que tive no colégio, exigiam muitos insights, da parte dos alunos, para a resolução de 'exercícios desafios', com demonstração e construções (...) no colégio eram aulas extremamente tradicionais, do tipo que não incitavam, estimulavam os alunos, uma vez que se reduziam a definições, fórmulas e exercícios. (Mat)

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No delineamento da seqüência de atividades em geometria dinâmica, parte da engenharia didática implementada, teve-se sempre em mente uma nova proposta para o aprendizado da geometria. Um dos desafios foi encontrar novas formulações para as propriedades geométricas, de forma que o dinamismo e a estabilidade das figuras colocassem os alunos em processo de criação matemática.

As reflexões teóricas subsidiaram, e muito, a concepção da situação didática. Construiu-se um cenário com os seguintes componentes: realce ao processo de criação em matemática; destaque às estruturas e funcionamentos cognitivos necessários à construção de conhecimento; ponderações sobre o alcance das teorias que se inserem no contexto específico da psicologia, quando ela trata de problemas relativos a educação; considerações sobre o potencial da tecnologia informática no imbricado desenvolvimento de sociedade e indivíduo; relevância do modelo de situação didática que contemple de forma equilibrada os papéis de alunos e professor e a natureza do saber objeto de construção. Para compor este cenário, também, propositadamente recorreu-se à inserção de muitas citações de outros trabalhos de pesquisa, sempre que fontes de iluminação.

Nele deu-se o desenrolar da investigação particular — os ambientes de geometria dinâmica e o processo de pensamento. Tornou-se possível acompanhar o progresso dos alunos, com certeza resultado do papel que lhes foi delegado na construção de conhecimento, bem preconizado na teoria piagetiana. Colocou-se sob a responsabilidade dos alunos as ações / formulações / validações, deles se exigindo ativos funcionamentos cognitivos. No início, esta exigência colidiu com os hábitos adquiridos ao longo dos anos de vida escolar. Mas não precisou muito para que os alunos se colocassem nesse papel ativo e, conforme avançava a experimentação, mais e mais as abstrações reflexionantes tornaram-se subordinadoras das abstrações empíricas — os alunos concentraram-se na busca de razões que explicassem suas constatações empíricas e mostraram autonomia na produção de demonstrações.

A utilização do modelo de situação didática proposto pela escola francesa de didática da matemática contemplou, de forma equilibrada, os papeis reservados a alunos e professor. Este modelo possibilitou uma realização didática em que se resolveu um dos dilemas da educação quando para ela se tomam-se pressupostos da teoria piagetiana — os alunos foram ativos construtores de conhecimento e tiveram no professor um mediador e um provocador —, e é assim que eles ascenderam ao saber matemático socialmente reconhecido, a geometria como um modelo teórico.

Nas observações e análises feitas ao longo do desenrolar da experimentação, detecta-se o progresso dos alunos, que:

— passaram a tratar o desenho como instância de representação de um objeto geométrico, desqualificando as imagens prototípicas advindas da fusão inadequada de componentes conceitual e figural, para o que muito contribuiu a recorrente subordinação do desenho às apreensões seqüências, característica do processo de construção;

— compreenderam o propósito e a necessidade da demonstração, entendendo que imposições de construção, a partir de um certo momento, necessariamente acarretam relações geométricas que não dependem mais de escolha e que se revelam nos "desenhos em movimento" — os *fatos estáveis implícitos,* a exigirem explicações;

— mostraram atitudes que caracterizam o "pensar matemático" — formular conjeturas, errar, realizar muitos experimentos de pensamento e então avançar no processo de demonstração; desenvolveram competências para o tratamento do desenho suporte à argumentação dedutiva: *reinterpretações / reconstruções / extensões* de desenho que, com crescente grau de exigência, foram bem trabalhadas na identificação das sub-configurações suporte às argumentações dedutivas. A variedade de soluções e demonstrações por eles apresentadas são indicadores de autonomia no processo de demonstração.

É verdade que nem sempre a produção final de demonstrações se apresentou satisfatória; mas tentativas e insucessos são aspectos que participam do processo de criação em matemática, o que também foi experimentado pelos alunos.

Ao observar-se o desenrolar do processo vivenciado pelos alunos — uma crescente desenvoltura na produção de demonstrações — e levando-se em conta o perfil que haviam apresentado antes de dar-se inicio à experimentação — alunos que chegaram à universidade sem as habilidades cognitivas indispensáveis ao processo de construção do saber matemático — , confirmaram-se as hipóteses levantadas neste estudo:

— a utilização do ambiente de geometria dinâmica favoreceu a ascensão de patamar de conhecimento geométrico; a partir do patamar de conhecimento ainda empírico, os alunos ascenderam àquele em que a geometria é entendida como um modelo teórico;

— neste novo patamar, com “os desenhos em movimento” os alunos desenvolveram progressivamente habilidades para construir suas próprias demonstrações; a utilização do ambiente também favoreceu os pensamentos de natureza visual, fonte de *insights* para a construção de demonstrações.

A experiência realizada trouxe à cena o potencial dos ambientes de geometria dinâmica quando instalou-se, naturalmente, o processo espiral de ação / formulação / validação. Com a constante *realimentação* proporcionada pelo ambiente através de seus “desenhos em movimento”, desencadearam-se as situações de investigação similares àquelas da criação matemática. Vale ressaltar que a escolha feita para a formulação das atividades tornou imprescindível a utilização dos “desenhos em movimento” e que este recurso permitiu que propriedades clássicas da geometria fossem apresentadas como problemas em “aberto”, diferentemente dos enunciados dos livros de geometria, sempre iniciados pelo “*demonstre que....*”.

As atividades do tipo “caixa preta” muito contribuíram para esse resultado, mas cabe reconhecer que, com elas, o processo de investigação torna-se específico: inicia com a identificação do tipo de dinamismo e de estabilidade da figura, prossegue com a construção da réplica e o controle dos *fatos declarados* e dos *fatos estáveis im-*

plícitos e finaliza com a produção de uma demonstração. No início da aprendizagem da geometria como modelo teórico, tal especificidade produziu resultados positivos — os alunos compreenderam o significado de uma demonstração e concomitantemente produziram suas primeiras demonstrações. Entretanto as atividades do tipo "caixa preta" não bastam para o avanço no aprendizado: problemas em que não são dados indícios de exploração também são necessários para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Em problemas como os propostos nas atividades 6 e 7, a própria estratégia de investigação ficou sob a responsabilidade dos alunos e especialmente nesses problemas registraram–se muitos dos avanços e recuos característicos do processo de criação em Matemática.

Por outro lado, é preciso estar-se atento: o uso do ambiente de geometria dinâmica apresenta seus próprios riscos. É fato que a *interface* dinâmica propicia o processo de investigação, mas não garante, de imediato, a busca de explicações de natureza dedutiva. A precisão dos desenhos pode favorecer as validações empíricas, isto porque a busca de explicação para *fatos estáveis implícitos,* revelados pelo dinamismo da figura, nem sempre é uma atitude espontânea — o que é explicável pela crucial e necessária ascensão de patamar de conhecimento. Para os alunos, ainda em fase de transição de patamar de conhecimento, é difícil diferenciar entre uma constatação empírica, proporcionada pelo dinamismo da figura, e uma argumentação dedutiva. Mas constatou-se neste estudo que gradativamente a precisão e o dinamismo dos desenhos funcionaram a favor do acurado controle de *fatos declarados* e *fatos estáveis implícitos,* condição primeira para o desenrolar do processo de demonstração, e também operaram como suporte às apreensões operativas, necessárias ao avanço do processo de demonstração.

Sendo recente o uso da tecnologia informática no cotidiano da sala de aula, mais investigações são necessárias para que se defina o adequado uso dos ambientes de geometria dinâmica. O presente estudo contribui com uma proposta didática que utiliza o dinamismo e estabilidade das figuras como fonte de explorações e de atitudes que próprias do "pensar matemático". Entretanto ainda tem-se desafios, dentre eles como enunciar os diferentes teoremas da geometria sob a forma de problemas em aberto, de modo a que se tornem, mediante os "desenhos em movimento", motivo de rica exploração de idéias matemáticas.

As "caixas pretas" apresentam-se como formulações interessantes para certos teoremas, mas as vezes inesperados desvirtuamentos da proposta podem acontecer na construção de suas réplicas. Conforme registrado na análise *a posteriori*, similares dinamismo e estabilidade podem ser obtidos sem que aconteça a emergência do teorema objeto de aprendizagem; isto não foi antecipado na análise *a priori*, tornando-se motivo de surpresa. Como pouco se tem investigado sobre as atividades com "caixas-pretas", os resultados da presente investigação antecipam que cuidados devem ser tomados para que, na construção das réplicas, sejam apreendidas as hipóteses do teorema e, na estabilidade do *componente figural*, a tese a ser demonstrada. Isto exige análise cuidadosa para que bem se esclareçam as condições a serem respeitadas na construção.

Ainda na direção de novas formulações para os clássicos enunciados "estáticos", vale relembrar a proposta, ainda que incipiente, já discutida neste trabalho.[1] Um teorema passaria a ser formulado como uma relação funcional, definida em classe mais ampla de figuras, tornando-se ele um caso particular de propriedade mais geral ao aplicar-se a função à domínio restrito. Esta é uma proposta condizente com os ambientes de geometria dinâmica em razão da compatibilidade que há entre o conceito de função e a idéia de movimento, embora ainda não esteja de todo claro como definir tais funções, bem como quais são os teoremas que podem ser tratados sob esta ótica generalizadora. Cabe, assim, o estudo de uma tipologia dinâmica para os teoremas clássicos da geometria, de forma a tirar-se o máximo proveito dos "desenhos em movimento" como suporte à exploração de idéias matemáticas generalizadoras.

Esta investigação aconteceu no contexto da educação presencial, mas não deixa de trazer contribuição à pertinente e necessária implementação de ambientes para educação à distância. Os ambientes de geometria dinâmica pertencem a classe dos *software* classificados na literatura como ambientes de expressão e exploração — são ferramentas que dão espaço para as ações dos alunos, para os experimentos de pensamento — , mas quando se pensa em ensino a distância, outros recursos precisam ser disponibilizados. Um protótipo para educação à distância vem sendo desenvolvido no Projeto BAGHERA [2], no Institut d'Informatique et Mathématiques Appliquées de Grenoble. A objetivo do projeto é o desenvolvimento de princípios teóricos e metodológicos de concepção de ambiente de aprendizagem em geometria, dando destaque à modelagem das necessidades e às dificuldades dos alunos. Mas, no momento atual, esse ambiente

[1] Proposta de GOLDENBERG, apresentada no Capítulo 3, página 92.

ainda está restrito ao contexto da justificativa: o aluno informa sua demonstração, em caixa de diálogo que convenciona a forma de redação, e recebe *realimentação* quando os argumentos são lógicamente inconsistentes, o que lhe exige reformulação da demonstração; quanto ao *contexto da descoberta,* o ambiente não oferece maior suporte. Nesta direção, o acompanhamento dos experimentos dos alunos ao longo do presente trabalho e os resultados nele obtidos trazem subsídios a melhores implementações de ambientes para educação à distância: para alunos em dificuldade, ambientes que sugiram *reinterpretações / reconstruções / extensões* de desenho podem ser auxílios importantes. Algumas das iniciativas poderiam ser: destacar subconfigurações relevantes à argumentação; acrescentar novos elementos à figura e destacar novas subconfigurações; sinalizar imposições excessivas à construção. Isto porque, no processo de demonstração em geometria, a competência para tratamento de desenhos suporte à argumentação é um aspecto fundamental.

Além de contribuição específica — no caso, à ciência da informática educativa no âmbito da educação matemática — esta investigação também se pretende partícipe de melhorias na educação, ao encurtar a distância entre o conhecimento advindo de pesquisas e a prática educativa. Em inúmeros momentos deste trabalho os professores de matemática, suas inquietações frente às dificuldades de aprendizagem dos alunos, e seus anseios de aprimoramento docente, estiveram presentes. Neste sentido, recorrentemente, fez-se presente a pergunta: de que forma os resultados de uma investigação tornam-se úteis ao professor de matemática, comprometido, em seu cotidiano, com tantas aulas e alunos? Integrar a tecnologia informática no dia à dia da sala de aula não é tarefa simples: concepções e hábitos constituídos na tecnologia do lápis e papel, do giz e quadro-negro, e nas próprias vivências dos professores enquanto alunos (o que tendem a replicar) erigem-se em obstáculos.

As ferramentas informáticas estão, cada vez mais, presentes nas práticas educativas. Quanto aos ambientes de geometria dinâmica, freqüente é a sua subutilização, mercê de propostas que simplesmente refletem a transposição acrítica das aulas tradicionais ao novo ambiente: os alunos recebem instruções do professor — “faça isto, depois aquilo...” — e procedem, passo à passo, na realização de uma construção geométrica sem bem entender o propósito da atividade. Sob novas solicitações, usam os recursos de me-

---

[2] BALACHEFF,N. : Projet Baghera, http://www-baghera. imag. fr/, 2001.

dição do *software* para validar, empiricamente, propriedades geométricas pretendidas pelo professor. E assim termina a atividade. Raramente se apresentam situações-problema que provoquem a exploração, a investigação, a argumentação dedutiva.

Os ambientes de geometria dinâmica proporcionam situações de aprendizagem que podem incorporar vivências de atitudes similares aos dos matemáticos nos seus processos de criação, valorizando a construção do conhecimento enquanto processo, valorizando as atitudes investigativas e — por que não? — o gosto e o prazer da descoberta. É nesta direção que este estudo traz sua maior contribuição.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1 ALEKSANDROV, A. et. al. **La matemática - su contenido, métodos y significado**. Madrid : Alianza Editiorial, 1976.

2 ALIBERT, D. e THOMAS, M. **Research on mathematical proof**, em Tall, D. (editor) Advanced Mathematical Thinking Kluwer, Dordrecht, The Nederlands : Academic Press, 1991, p. 220 - 230.

3 ARNOLD, V. I. **On teaching mathematics**. Russian Math.Surveys, 53:1, 1998, p. 229-236.

4 ARTIGUE, M. **Ingénierie Didactique**, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.9, no.31, Grenoble France : La Pensée Sauvage Éditions, 1988.

5 BALACHEFF, N. **Processus de Preuve et Situations de Validation**, Educational Studies in Mathematics, vol. 18, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1987.

6 BALACHEFF, N. Treatment of Refutations: aspects of the complexity of a constructivist approach of mathematics learning, em Von Glasersfeld, E. (editor) Radical construtivism in Mathematics Education, Dordrecht : Kluwer Academic Publisher, 1991

7 BALACHEFF, N. **Treatement of Refutations: Aspects of the Complexity of a Constructivist Aproach of Mathematics Learning**, em VON GLASESFELD (editor), **Radical Construtivism in Mathematics Education**, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1991

8 BALACHEFF, N. **Apprendre la preuve**, em Sallantin J., Szczeciniarz J.-J. (editores), Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle, Paris : PUF, 1999, p. 197-236.

9 BALACHEFF, N. **Projet Baghera**, http://www-baghera. imag. fr/

10 BERDNARZ, N. **Interações Sociais e a Construção de um Sistema de Escrita dos Números no Ensino Fundamental**, em GARNIER, C., BEDNARZ, N. e ULANOVSKAYA, I (editores) **Após Vygotsky e Piaget – perspectivas social e construtivista**. Porto Alegre RS : Editora Artes Médicas, 1996.

11 BKOUCHE, R. **De la Démonstration en Géométrie**, em Actes du Colloque de Géométrie, Institut de Recherche de l'Ensignement de Mathématiques, Lille, 1994, p. 218- 225.

12 BROUSSEAU, G. **Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques, Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble, France : Editions la Pensée Sauvage, vol 7.2, 1986, p. 33-115.

13 BROUSSEAU, G. **Theory of didactical situation**, Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1997

14 BROUSSEAU, G. **Os diferentes papéis do professor**, em Lerner,D. e outros, Didática da Matemática, Porto Alegre: Editora Artes Médicas, 1996.

15 BRUN, J. **Evolution de Rapports entre la Psychologie du Dévellopement Cognitif et la Didactique des Mathématiques**, em ARTIGUE, M., GRAS, R., LABORDE, C. e TAVIGNOT (editores), Vingt Ans de Didactique des Mathematiques en France, em Collection Recherches en Didactique des Mathématiques, Paris, France : La Pensée Sauvage Éditions, 1994, p. 66-96.

16 Cabri-Geometry II, software de geometria dinâmica, http://www-cabri.imag.fr

17 CAPPONI, B: **Boites-noires**, IMAG-Université Joseph Fourier, Grenoble, França, Document de travail, 2001.

18 CAROTENUTO, V. **Experience Sociale et Elaboration de Notions Logiques** em PERRET CLERMONT, A. N. e NICOLET, M (editores), Interagir e Connaître : enjeux et régulations sociales dans le développement cognitif, Suisse : DelVal, 1988.

19 CASTORINA, J. **O Debate Piaget-Vygotsky**, em CASTORINA, J., FERREIRO, E., LERNER, D. e OLIVEIRA, M. (editores), Piaget e Vygotsky — Novas Contribuições para o Debate. São Paulo : Editora Ática, 1995.

20 CASTORINA,J., FERREIRO,E., LERNER, D. e OLIVEIRA,M. **(editores) Piaget e Vygotsky - Novas Contribuições para o Debate,** São Paulo : Editora Ática, 1995.

21 CHAZAN, D. **High scholl geometry students'justification for their views of empirical evidence and mathematical proof**, Educational Studies in Mathematics, nº 24, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1993, p. 359-387.

22 CLAIRAUT, A. C. **Éléments de Géométrie**, vol.1. Paris, France : Gauthier-Villars et Cie Éditeurs, 1920.

23 COLL, C. 1993: **Constructivismo e Intervención Educativa: ¿Cómo Enseñar lo que as há de construir ?** Buenos Aires, Argentina : Flacso, 1993.

24 CORRY, L. **The Origins of Eternal Truth in Modern Mathematics: Hilbert to Bourbaki and Beyond**, http:// spinoza.tau.ac.il/hci /ins/ cohn/corry/download/ truth.htm , 1999.

25 CONNES, A. **Le Point de Vue de Alain Connes, Les Mathématicians**, **Pour la Science.** Paris : Édition Française de Scientific American, Dossier Hors-Série, 1994.

26 CONNES, A., LICHNEROWICZ, A., SCHÜTZENBERGER, M., 2000: **Triangle de pensées**. Paris : Editions Odile Jacob, 2000.

27 COURANT, R. e ROBBINS, H. **Qué es la matemática**. Madrid : Aguilar Ediciones, 1971.

28 CURY, H. N. **Análise de erros em demonstrações de geometria plana – um estudo com alunos do terceiro grau,** Dissertação de Mestrado, FACED / UFRGS, Porto Alegre RS, 1994.

29 CURY, H. N. **As concepções de matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos**. Porto Alegre : FACED / UFRGS, Tese de Doutorado, 1994.

30 DEHAENE, S. **The american PI versus the french PI ?**: EDGE 5,em http: // www. edge. Org / documents/archive/edge5.html, 1997

31 DAVIS, P. e HERSH, R. **The Mathematical Experience**. Boston, Great Britain :Pelican Books, 1983.

32 DENIS, L. **Relaciones entre la etapa de desarrolo cognoscitivo del adolescente y sus niveles Van Hiele de pensamiento geométrico**, em Revista de Didáctica de las matemáticas, nº 2. 1994, p. 5-13.

33 DE VILLIERS, M. **The Role of Proof in Investigative, Computer-based Geometry: Some Personal Reflections**, em King,J. e Schattschneider,D.(eds), Geometry Turned On, Washington : Mathematical Association of America Notes 41, 1997.

34 DE VILLIERS, M. **An alternative approach to proof in dynamic geometry,** em Lehrer, R. e Chazan, D. (editores) Designing Learning environments for developing understanding of geometry and space. London, England : Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 1998, 369-391.

35 DE VILLIERS, M. **Developing understanding of proof within the context of defining quadrilaterals**, em International News Letter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, http://www-cabri.imag.fr/Preuve, mai/juin 2000.

36 DE VILLIERS, M. **The Role of Proof in Investigative, Computer-based Geometry: Some Personal Reflections**, em KING, J. e SCHATTSCHNEIDER, D.(editores), **Geometry Turned On**. Washington USA : Mathematical Association of America Notes 41, 1997.

37 DE VILLIERS, M. **To teach definitions in geometry or teach to define?** Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education - PME , vol 2, Stellenbosch, South Africa, 1998.

38 DOLCE, O. e POMPEO, J. **Geometria Plana**, Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, vol. 9, São Paulo: Editora Atual, 1993.

39 DOSSIER — LES MATHÉMATICIENS **Pour la Science**, Paris: Édition Française de Scientific American, Dossier Hors-Série, 1994.

40 DUBINSKY, E. **Reflective Abstraction**, em TALL, D. (ed) Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht, The Nederlands : Kluwer Academic Press, 1991.

41 DUVAL, R. **Geometrical pictures — representation and specific processing**, em Sutherland, R. e Mason, J. (editores). Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematical Education, Nato ASI Serie F, vol 138, Berlin: Spring Verlag, 1995, p.142-157.

42 FISCHBEIN, E. **The theory of figural concepts**, Educational Studies in Mathematics, vol. 24/2, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1994. MOORE, R. 1994: **Making Transition to Formal Proof**, Educational Studies in Mathematics, vol. 27, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1994, p. 39-162.

43 FISCHBEIN, E. **The interaction betweeen the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity**, em Biehler, R. e outros (editores), Didactics of mathematics as a scientific discipline. Dordrecht, Netherlands : Kluwer Academic Publishers, 1994, p. 231-261.

44 FREUDHENTAL, H. **Revisiting mathematics education**, Dordrecht / Boston / London : Kluwer Academic Publishers, 1991.

45 FUYS, D. GEDDES, D. e TISHLER, R. (editores) **English translation of selected writings of D. Van Hiele and P. Van Hiele.** New York, Brooklin College : CUNY, 1984.

46 GARDNER, H. **The Mind's New Science — a history of the cognitive revolution**. New York : Basic Books, Inc., Publishers, 1987.

47 GARNICA, A .V. M. **Fascínio da técnica, declínio da crítica — um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática**. Rio Claro, SP : UNESP, tese de doutorado, 1995.

48 GARNIER, C., BEDNARZ, N. e ULANOVSKAYA, I.. (editores) **Após Vygotsky e Piaget – perspectivas social e construtivista**. Porto Alegre RS : Editora Artes Médicas, 1996.

49 GILLY, M. **Interaction entre Pairs et Constructions Cognitives: modeles explicatifs**, em Perret Clermont, A.N. & Nicolet,M. (eds), Interagir e Connaître : enjeux et régulations sociales dans le développement cognitif. DelVal, Suisse, 1988.

50 GLEISER, M. **O mistério gravitacional e as perguntas da ciência**. Jornal Folha de São Paulo, Caderno Mais, 28/02/98.

51 GRAVINA, M.A. **Geometria e informática: aprendendo com desenhos em movimento**, Anais do VII Congresso Internacional de Logo e I Congresso de Informática Educativa do Mercosul, Porto Alegre,1995.

52 GRAVINA, M.A. **Geometrical thinking in undergraduated preservice teachers**, Anais do VIII International Congress on Mathematical Education, Sevilha, Espanha, 1996.

53 GRAVINA, M. A. **Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria**, Anais do VII Congresso Brasileiro de Informática na Educação, Belo Horizonte MG, 1996.

54 GRAVINA, M.A. **Geometria dinâmica: que possibilidades para a aprendizagem de demonstração?** , Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, Curitiba, 1999.

55 GRAVINA, M.A. **A demonstração em geometria: possibilidades com o Cabri-Géometre**, Anais do I Congresso Internacional CabriWorld, São Paulo, 1999.

56 GRAVINA, M.A., MENNA BARRETO, M. e HOFFMANN, D. **Educação Matemática e Novas Tecnologias**, http: // www . mat. ufrgs .br / ~edumatec , 1999.

57 GRAVINA, M A. **The proof in geometry: essays in a dynamical environment**, International News Letter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, http://www-cabri.imag.fr/Preuve/, mai/juin 2000.

58 GRAVINA,M.A. **The proof in geometry: essays with Cabri-Géomètre**, to appear in Cabri-World Proceedings.

59 GOLDENBERG, E. P. **Ruminations about dynamic imagery**, em Sutherland, R e Mason, J. (editores), Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematical Education, Nato ASI Serie F, vol 138, Berlin: Spring Verlag, 1995, p. 202-224.

60 GROSSEN, M. e NICOLET, M. **Origine Social et Performances Cognitives: contribution psycho-sociologique a une redefinition de la problematique**, em PERRET CLERMONT, A. N. e NICOLET ,M. (eds), Interagir e Connaître : enjeux et régulations sociales dans le développement cognitif. DelVal, Suisse, 1988.

61 HADAMARD, J. **The Psychology of Invention in the Mathematical Field.** New York, NY : Dover Publications, Inc., 1945.

62 HAREL, G. e SOWDER, L. **Student’s proof schemas: results from exploratory studies**, em Schoenfeld, A. et alli (editores), Research in Collegiate Mathematics Education, vol III,Washington, American Mathematical Society, 1991, 234-283.

63 HENENSTREINT, J. **Simulation et Pédagogie, une rencontre du troisième Type.** Gif Sur Yvette, France : École Superieure d’Electricite, 1987.

64 HIRSH, M. **Theoretical, Speculative and Nonrigorous Mathematics**, Bulletin of the American Mathematical Society, vol.30, no.2, 1994.

65 HOYLES, C. e NOSS, R. **A pedagogy for mahematical microworlds**, Educational Studies in Mathematics, 23, nº 1, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1992, p. 31-57.

66 HOYLES, C. e JONES, K. **Proof in dynamic geometry contexts**, em Mammana,C. e Villani,V. (editores), Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century, ICMI Study Series, vol. 5. London, England : Kluwer Academic Publishers, 1998, p.121-128.

67 HOYLES ,C. e HEALY,L. **A framework for teaching proof**, submitido para publicação no Journal of Reasearch in Mathematics Education, 1999.

68 JAHN, A. P. **Des transformations de figures aux transformations ponctuelles**, Thèse de Doctorat, IMAG-Université Joseph Fourier, 1998.

69 JIANG, Z. e McCLINTOCK, E.: **Using The Geometer's Sketchpad with Preservice Teachers**, em King, J. e Schattschneider, D. (editores), Geometry Turned On, Mathematical Association of America Notes 41, Washington, USA : The Mathematical Association of America, 1997, 129-144.

70 JOHANNOT, L. 1947: **Le Raisonnement mathématique de l'adolescent**. Paris : Delachaux e Niestlé, 1947.

71 KABANOVA-MELLER,E.N., **The role of diagram in the application of geometric theorems**, em KILPATRICK, J. e I. WIRZUP, I, Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics / Problem solving in geometry, vol IV, 1970

72 KAPUT, J. **Technology and Mathematics Education,** em Grows, D. (editor), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, New York : MacmillanPublishing Company, 1992 .

73 KAPUT, J. **SimCalc,** em http:// www. simcalc. umassd. edu/

74 KEYTON, M. **Students Discovering Geometry Using Dynamic Geometry Software**, em King, J. e Schattschneider, D. (editores), Geometry Turned On, Mathematical Association of America Notes 41, Washington, USA, p. 63-68.

75 KILPATRICK, J. e WIRZUP, I. **Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, The learning of mathematical concepts**, vol I., Scholl Mathematics Study Group, Stanford University e Survey of Recent East European Mathematical Literature, University of Chicago, 1970.

76 KILPATRICK, J. e WIRZUP, I. **Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, Problem solving in geometry**, vol. IV, Scholl Mathematics Study Group, Stanford University e Survey of Recent East European Mathematical Literature, University of Chicago, 1970.

77 KILPATRICK, J. e WIRZUP, I. **Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, The development of spatial abilities**, vol. V, Scholl Mathematics Study Group, Stanford University e Survey of Recent East European Mathematical Literature, University of Chicago, 1970.

78 KING, J. e SCHATTSCHNEIDER, D. (editores) **Geometry turned on**. Washington, USA : Mathematical Association of America Notes 41, 1997.

79 KLEIN, F. **Le Programme d'Erlangen – considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes**. Paris : Gauthier-Villars Ëditeurs, 1974.

80 LABORDE, C. **L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques**, Recherche en didactique des Mathématiques, 9 (3) , Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions, 1990, p. 337-363.

81 LABORDE, C. **Ensigner la géométrie: permanences et révolutions.** Proceedings of the 7th International Congress on Mathematical Education, Montreal, 1992, p. 47-75.

82 LABORDE, C. e LABORDE, J. **What about a learning environment where euclidian concepts are manipulated with a mouse?** em diSessa, A . et alli

(editores), Computers and Exploratory Learning, NATO ASI Series, serie F, vol. 146, Berlin: Spring Verlag, 1993, p. 241-262.

83 LABORDE, C. e CAPPONI, B. **Cabri-géomètre constituant d'un Milieu pour l'Apprentissage de la notion de figure**, em Balacheff, N. e Vivet, M. (editores), Didactique et Intelligence Artificielle, Grenoble, France : La pensée Sauvage, 1994.

84 LABORDE, C., **Duas utilizações complementares da dimensão social nas situações de aprendizado da matemática**, em GARNIER, C., BEDNARZ, N. e ULANOVSKAYA ,I. (eds), Após Vygotsky e Piaget, perspectivas social e construtivista, Editora Artes Médicas, Porto Alegre, RS, 1996, p. 29-46.

85 LABORDE, C, **Conception et Évaluation de Scenários d 'Enseignement avec Cabri-Géomètre**. Grenoble, France : Équipe EIAH du Laboratoire Leibniz-IMAG et de l'IUFM de Grenoble, 1998.

86 LABORDE, C. **Visual phenomena in the teaching /learning of geometry in a computer based environment**, em Mammana, C. e Villani, V. (edutores), Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century, Dordrecht / Boston / London : Kluwer Academic Publishers, 1998, p. 113-121.

87 LEE, X. **Visual Dictionary of Special Plane Curves**, em http: // xahlee.org/ PageTwo_dir/ more.html

88 LEGENDRE, A . M. **Elementos de Geometria**. Rio de Janeiro RJ : Livraria Garnier Editores, 1915.

89 LEHRER,R. e CHAZAN,D. (eds) **Designing Learning environments for developing understanding of geometry and space**, London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 1998.

90 LAKATOS, I. **Proofs and Refutations**. New York : Cambridge University Press, 1976.

91 LERNER, D. **O Ensino e a Aprendizagem Escolar**, em CASTORINA, J., FERREIRO, E., LERNER, D. e OLIVEIRA, M. (eds), Piaget e Vygotsky - Novas Contribuições para o Debate, Editora Ática, São Paulo, 1995.

92 LEVY, P. **Tecnologias da Inteligência: o futuro do pensamento na era da informática**. São Paulo SP : Editora 34, 1993.

93 LEVY, P. **L'Idéographie Dynamique: vers une Imagination Artificielle?** Paris, França : Éditions La Découvert, 1991.

94 MAMMANA,C. e VILLANI,V. (eds) **Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century**, ICMI Study Series, vol. 5, London : Kluwer Academic Publishers, 1998.

95 MARIOTTI, M.A . **Figural and conceptual aspects in a defining process,** Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education – PME, Lisboa, 1994, p. 232-238.

96 MIGNE,J. **Les obstacles épistémologiques à la formation de concepts**, Education Permanente, no. 119, vol 2, 1994

97 MIGNE, J. **Les Obstacles Épistémologiques à la formation de concepts**, Education Permanente, no. 119, vol 2, 1994.

98 MOORE, R. **Making Transition to Formal Proof**, Educational Studies in Mathematics, vol. 27, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1994. 249-266.

99 MUSEO UNIVERSITTARIO di STORIA NATURALE e della STRUMENTAZIONE SCIENTIFICA, Università degli studi di Modena e Reggio Emilia, http: // www.museo.unimo.it/theatrum/inizio.htm

100 NASSER, L. **Using the Van Hiele Theory to improve secondary school geometry in Brasil**, PhD Thesis, King's College, University of London. London, England. 1992.

101 PAIS, L. C. e FREITAS, J. L. **Um estudo dos processos de provas no ensino e na aprendizagem da geometria no ensino fundamental**, Bolema, no. 13, Rio Claro, Editora UNESP, 1999, p. 62-70.

102 PALAIS, R. **The visualization of mathematics**. Notices of the MAS, vol. 46, nº 6, 1999.

103 PAPERT,S. **Logo — computadores e educação**. São Paulo SP : Editora Brasiliense, 1988.

104 PAPERT, S. **The Children Machine: Rethinking Scholl in the Age of the Computers.** New York USA : Harvester Wheatsheaf, 1993.

105 PARZYSZ, B. **Knowing vs seeing, problems of plane representation of space geometry figures**, Educational Studies in Mathematics, 19 (1), Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1988, p. 79-92.

106 PAVANELLO, R.M. 1993: **O abandono do ensino da geometria no Brasil, causas e conseqüências**, Revista Zetetiké, ano 1, vol. 1, Campinas: Editora UNICAMP, 1993, p. 7-17.

107 PENROSE, R. **The Emperor's New Mind.** New York USA **:** Penguin Books, 1989

108 PERRIN-GLORIAN, M .J. **Utilisation de la notion d'obstacle en didactique des mathématiques, Recherches en Didactique des Mathématiques**. Paris, France : La Pensée Sauvage Éditions, 1986.

109 PERRIN-GLORIAN, M. J. **Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives**, em ARTIGUE, M., GRAS, R., LABORDE, C. e TAVIGNOT (editores), **Vingt Ans de Didactique des Mathematiques en France,** Collection Recherches en Didactique des Mathématiques, Paris, France : La Pensée Sauvage Éditions, 1994, p. 95-147.

110 PERRET CLERMONT, A. N. **La Structuration des Échanges Symboliques**, em Perret Clermont, A.N. & Nicolet,M. (eds), Interagir e Connaître : enjeux et régulations sociales dans le développement cognitif, Suisse : DelVal, , 1988.

111 PERRET CLERMONT, A. N. e NICOLET, M. (editores) **Interagir e Connaître : enjeux et régulations sociales dans le développement cognitif**. Suisse : DelVal, 1988.

112 PERRET CLERMONT, A. N. e MUGNY, G. 1985**: Effets sociologiques et processus didactiques**, em MUGNY, G. (editor) **Psychologie Sociale du Dévelopement Cognitif**. Berne : Peter Lang, collection Exploration, 1985.

113 PIAGET, J. e BETH, E. **Mathematical Epistemology and Psychology**. Dordrecht, Holland : D.Reidel Publishing Company, 1966.

114 PIAGET, J. **Six Psychological Studies**. New York : Random House, Inc., 1968

115 PIAGET, J. **Estudos Sociológicos**. Rio de Janeiro RJ : Editora Forense, 1973.

116 PIAGET, J. e INHELDER, B. **Da Lógica da Criança à Lógica do Adolescente**. São Paulo SP : Livraria Pioneira Editora, 1976.

117 PIAGET, J. **Problemas de Psicologia Genética**, em Piaget - Os Pensadores. São Paulo SP : Editora Victor Civita, 1978.

118 PIAGET, J., 1 **Creativity**, em Gallagher, J. e Reid, D., The learning theory of Piaget and Inhelder, Monterey, California,: Brooks/Cole.

119 PIAGET, J.: Desenvolvimento da Inteligência, Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1983.

120 PIAGET, J. e GARCIA, R. **Psicogénese e História das Ciências**. Lisboa : Publicações Dom Quixote, 1987

121 PIAGET, J. **Epistemologia Genética**. São Paulo : Martins Fontes, 1990.

122 PIAGET, J. **Abstração Reflexionante**. Porto Alegre RS : Editora Artes Médicas, 1995

123 POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro RJ : Editora Interciencias, 1975.

124 RAMACHANDRAN,V..S. **Mirror neurons and imitation learning as the driving force behind "the great leap forward" in human evolution**, EDGE, http:// www.edge.org /documents/ archive/edge69.html , 2000

125 RAMOZZI-CHIAROTTINO, em seu livro **Psicologia e Epistemologia Genética de Jean Piaget**, São Paulo SP : Editora Pedagógica e Universitária, 1987.

126 ROBERT, A. **Problèmes méthodologiques en didactique des mathématiques**. Recherche en Didactique des Mathématiques, vol. 12, no. 1. Grenole, La Pensée Sauvage Éditions, 1992, p. 33-58.

127 ROBERT, A . e TENAUD, I. **Une expérience d'ensignement de la géométrie en terminal C**, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 9, nº 1, Grenoble, La Pensée Sauvage Éditions, 1988.

128 SANTAROSA, L. M. C. e GRAVINA, M. A. **Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados**. Anais do IV Congresso Iberoamericano de Informática Educativa, Brasília, 1998.

129 SANTAROSA, L. M. C. **A escola virtual na formação do professor**, Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 1996, p. 403-405.

130 SANTAROSA, L. M. C., ORTOLAN, A., BARRIONUEVO, L. O., PUHL, R., BURMEISTER, E. e PAUL, K. **Fábrica Fantástica: ambiente hipermídia lúdico para o desenvolvimento cognitivo**, Anais do III Congreso Iberoamericano de Informática Educativa, Barranquilla, Colômbia, 1996.

131 SANTAROSA, L. M. C. **Novos desafios para Educação na criação de ambientes de aprendizagem telemáticos**, Anais da I Conferência Internacional de Tecnologias da Informação e da Comunicação - Challenges´99, Portugal, Braga, 1999, 74-75.

132 SCHER, D. **Problem solving and proof in the age of dynamical geometry**, Micromath, vol. 15/1, 1999, p. 24-30.

133 SCHOENFELD, A. **Reflections on a course in mathematical problem solving**, em Schoenfeld, A.et alli (eds), Research in Collegiate Mathematics Education, Issues in Mathematics Education, vol. 7, Washinton, Mathematical Association of America, 1998.

134 SEMENOVA, M. **A Formação Teórica e Científica do Pensamento dos Escolares**. em GARNIER, C., BEDNARZ, N. e ULANOVSKAYA, I. (editores) **Após Vygotsky e Piaget – perspectivas social e construtivista**. Porto Alegre RS : Editora Artes Médicas, 1996.

135 SIMON, M. **Beyond inductive and deductive reasoning; the search for a sense of knowing**, Educational Studies in Mathematics 30, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1996, p. 197-210.

136 SINGH, S. **O último teorema de Fermat**. São Paulo : Editora Record, 1999.

137 STEVENSON, I. **Constructing Curvature: the iterative design of a computer-based microworlds for non-euclidian geometry**. Doctoral Dissertation, , London : Institute of Education, University of London, 1995.

138 STEWART, I.. **Bye-bye Bourbaki: paradigm shifts in mathematics,** The Mathematical Gazette, volume 80, nº 488. 1996, p. 267-277.

139 SCHWARTZ, L. **Le Point de Vue de Laurant Schwartz, Les Mathématicians, Pour la Science. Paris** : Édition Française de Scientific American, Dossier Hors-Série, 1994.

140 VERGNAUD, G. **Epistemology and Psychology of Mathematics Education, in Mathematics and Cognition** - ICMI Study Series, 1990.

141 VINNER, S. **The Role of Definition in the Teaching and Learning of Mathematics**, em D.Tall (editores.), Advanced Mathematical Thinking, Dordrecht – Boston - London : Kluwer Academic Publishers, 1991.

142 TEODORO, V. D. **From formulae to conceptual experiments: interactive modelling in the physical sciences and in mathematics**. Invited paper presented at the International CoLos Conference New Network-Based Media in Education, Maribor, Slovenia. 1998.

143 TEODORO, V., VIEIRA, J. e CLÉRIGO,F. **Modellus**, software, http:// phoenix.sce.fct. unl.pt/ modellus / index.htm

144 THE PROOF, **Last Fermat's Theorem**, fita de video, Nova&Public Broadcasting Television System, USA, 1997.

145 THUILLIER, P. **Les Mathématicians, Pour la Science.** Paris : Édition Française de Scientific American, Dossier Hors-Série.

146 THURSTON, W. **On Proof and Progress in Mathematics.** New York**:** Bulletin of The Americam Mathematical Society, vol. 30, nº 2, 1994, p. 161-177.

147 THURSTON, W. **Three manifold geometry and topology**. NJ, USA : Princeton Press, 1997

148 VERGNAUD, G. **Epistemology and Psychology of Mathematics Education, in Mathematics and Cognition.** ICMI Study Series, 1990.

149 VINNER,S. **The Role of Definition in the Teaching and Leraning of Mathematics em** D.Tall (ed.), Advanced Mathematical Thinking, London-Dordrecht-Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991, 65-81.

150 VYGOTSKY, S. Y. **Pensamento e Linguagem**. São Paulo SP : Martins Fontes, 1993.

151 VYGOTSKY, S. Y. **A Formação Social da Mente**. São Paulo SP : Martins Fontes, 1996.

152 YERUSHALMY, M. e CHAZAN, D. **Overcoming Visual Obstacles with the Aid of the Supposer**, Educational Studies in Mathematics, vol. 21/3, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher , 1990, p. 199-219.

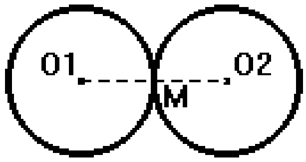
153 ZYKOVA, V. I. **Operating with concepts when solving geometry problems**, em Kilpatrick. J, e Wirzup, I. Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, vol 1, Scholl Mathematics Study Group, Stanford University e Survey of Recent East European Mathematical Literature, University of Chicago, 1969, p. 149-188.

Anexos

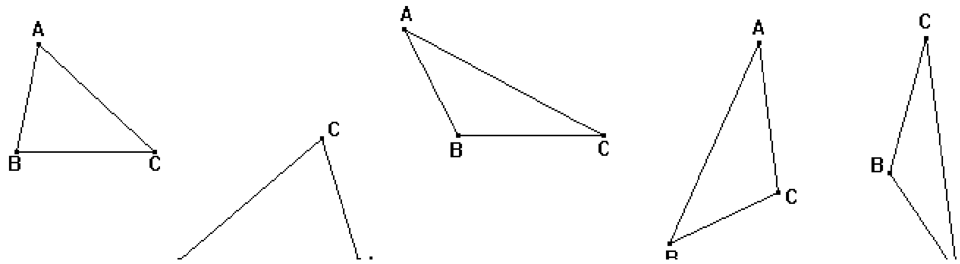
Anexo 1

I Sondagem sobre os conhecimentos prévios dos alunos

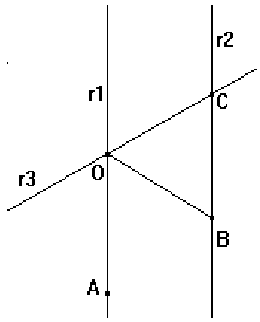
1. Na figura ao lado M é ponto médio do segmento de extremos O1 e O2, isto é, M divide o segmento ao meio. Os círculos tem como centro os pontos O1 e O2 e raios MO1 e MO2.
Quantos são os pontos na intersecção dos dois círculos ? Justifique sua resposta.



2. Define-se a altura de um triângulo ABC, relativa ao lado BC como sendo o segmento AD onde D é ponto na reta determinada pelos pontos B e C e é tal que AD é perpendicular a esta reta.
Para cada um dos triângulos abaixo desenhe a altura <u>relativa ao lado BC</u>.



3. Na figura ao lado as retas paralelas r1 e r2 são interceptadas pela reta r3. O segmento OB bissecta o ângulo AOC, isto é, divide-o ao meio. Sabendo que o ângulo AOC mede 130^0 quanto mede o ângulo OBC . Escreva o desenvolvimento do seu raciocínio.



4. Alunos de uma 7ª série estão usando transferidor para medir ângulos de triângulos e após calculam a soma dos ângulos de cada um dos triângulos. Fizeram isto para três diferentes triângulos feitos de papelão. A professora fez uma tabela com os valores obtidos pelos diferentes grupos de alunos:

	Soma ângulos Δ1	Soma ângulos Δ2	Soma ângulos Δ3
Grupo 1	180	181	180,5
Grupo 2	180	180	180
Grupo 3	180,5	179,3	181

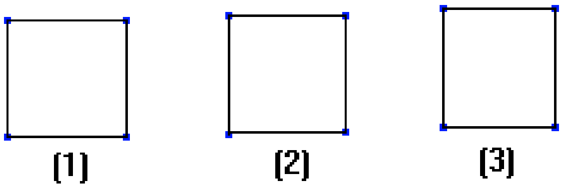
Imediatamente o Grupo 2 se manifesta dizendo que *“não importa qual o triângulo a soma dos ângulos vai dar sempre 180”*. Os grupos que obtiveram para soma dos ângulos valores diferentes de 180 contestam esta afirmação dizendo que *“nos nossos triângulos nem sempre a soma dá 180”*. Começa uma discussão que vai se tornando interminável porque ninguém consegue convencer ninguém até que a profeessora apresenta uma explicação que termina com o impasse motivo de discussão.

O que você pensa que pode ter sido a explicação dada pela professora ?

II Material com instruções sobre as atividades, utilizado pelos grupos.

Atividade 1

- Abra o arquivo **ativ1.fig**



- Movimente os três quadriláteros e observe no que eles são diferentes.
- Construa três quadriláteros que se comportem exatamente da mesma forma que os observados. Registre todas suas tentativas de construção do primeiro quadrilátero, gravando arquivos **ativ1a.fig**, **ativ1b.fig**, **ativ1c.fig**.......(tantos quantos necessários) e finalmente **ativ1s.fig** quando obtiver a solução satisfatória para o primeiro quadrilátero. Faça o mesmo para os outros quadriláteros.
- Escreva os passos da construção da solução considerada satisfatória, para cada um dos quadriláteros.

Atividade 2

Quando se faz uma construção geométrica, certos “fatos” são declarados/executados via os menus do Cabri. Sob ação de movimento, na construção feita, tem-se “fatos” que se mantém e que não foram declarados na construção – são os “fatos estáveis implícitos”. Estes podem e devem ser explicados através de argumentação dedutiva, que se baseia em outros fatos já sabidos. Vamos esclarecer estas considerações discutindo uma construção feita na atividade 1.

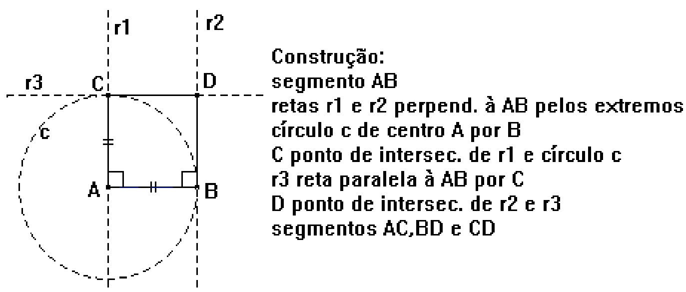
Construção no Cabri (figura abaixo):

Na construção temos como **“fatos estáveis implícitos”:**

* **ângulos C e D retos**

* **igualdade dos segmentos AB, BD e CD**

Como explicar tais fatos implícitos com argumentação dedutiva ?



Uma possível argumentação dedutiva seria (diferentes argumentações podem ser feitas):

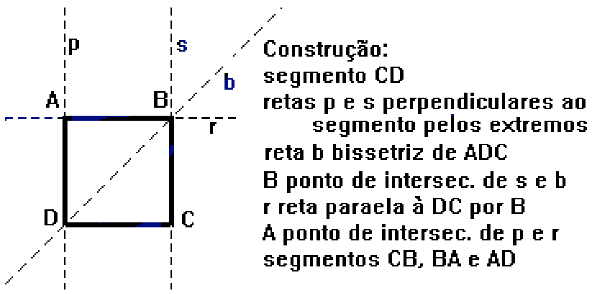
* <u>quanto aos ângulos retos</u>: como a reta r3 é paralela ao segmento AB, olhando para reta r1 como transversal as duas retas temos que ângulos alternos internos são congruentes e portanto o ângulo em C é reto. Com raciocínio análogo aplicado as paralelas r3 e AB com transversal r2 temos que o ângulo em D também é reto.

* <u>quanto a igualdade dos lados</u>: como o Δ ABC é isósceles, os ângulos nos vértices B e C medem 45 (estamos usando que num tri. isósceles os ângulos da base são congruentes e que num tri. os ângulos somam 180) . Segue no Δ BCD os ângulos B e C também medem 45 (porque já mostramos acima que no quadrilátero os ângulos C e D medem 90). Pelo critério ALA segue que Δ BAC é congruente ao Δ BDC , o que nos permite concluir que os segmentos BA e BD são congruentes, bem como os segmentos AC e DC, o que mostra a congruência entre os segmentos do quadrilátero construído

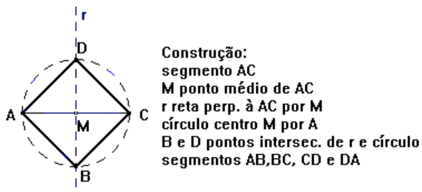
Com estes dois argumentos demonstramos que o quadrilátero construído no Cabri tem os 4 ângulos retos e os 4 lados congruentes entre si, ou seja , **é de fato um quadrado**.

I . Em cada uma das construções abaixo, escreva os fatos implícitos e faça argumentação dedutiva que explique o "por quê" desses fatos implícitos, mostrando assim que de fato o quadrilátero construído é um quadrado, <u>tomando como</u> definição de quadrado <u>um quadrilátero com 4 ângulos retos e quatro lados congruentes entre si.</u>

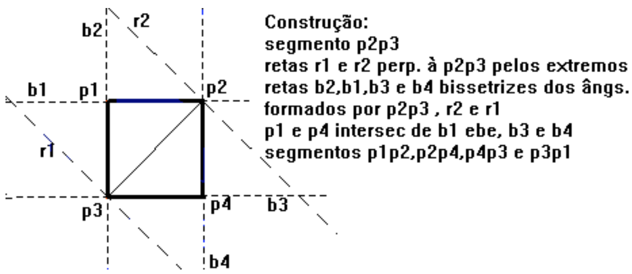
(1)



(2)

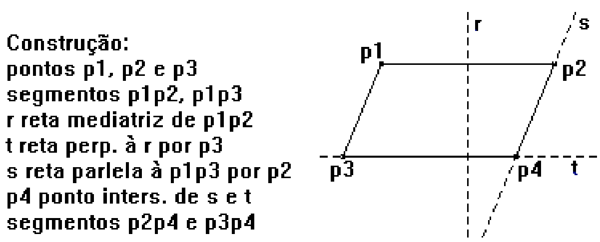


(3)

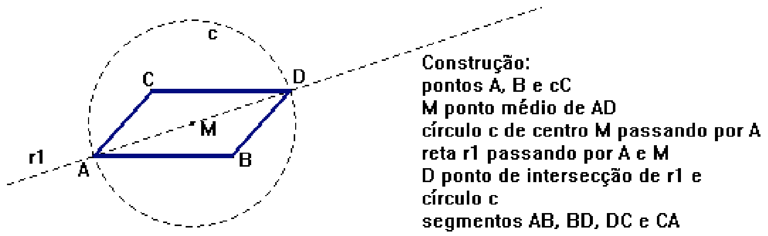


II. Em cada uma das construções a seguir, escreva os fatos implícitos e faça argumentação dedutiva que explique o "por quê" desses fatos implícitos, mostrando assim que de fato o quadrilátero construído é um paralelogramo, <u>tomando como</u> **definição de paralelogramo** <u>um quadrilátero com lados opostos paralelos.</u>

(1)



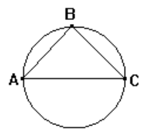
(2)



Atividade 3

Parte 1

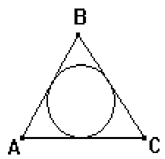
- Abra o arquivo **ativ3a.fig**



- Movimente a figura e observe suas propriedades. Construa uma figura que se comporte exatamente como a apresentada e **grave sua construção como ativ4sol**
- Escreva os passos da construção:
- Quais são os “fatos” geométricos que se mantém na figura quando aplicamos movimentos e **que não foram declarados na construção**, i.é. os **“fatos estáveis implícitos**” ?
- Que razões você daria para explicar este fatos ?

Parte 2

- Abra o arquivo **ativ3b.fig**

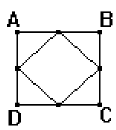


- Movimente a figura e observe suas propriedades. Construa uma figura que se comporte exatamente como a apresentada e **grave sua construção como ativ5sol**
- Faça o desenho correspondente a construção e escreva os passos da construção:
- Quais são os “fatos” geométricos que se mantém na figura quando aplicamos movimentos e **que não foram declarados na construção,** i.é. os **“fatos estáveis implícitos**” ?
- Que razões você daria para explicar este fatos ?

Atividade 4

Parte 1

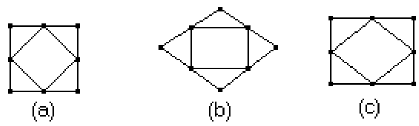
- Abra o arquivo **ativ4a.fig**



- Movimente a figura e observe suas propriedades. Construa uma figura que se comporte exatamente como a apresentada e **grave sua construção como ativ7sol.fig**
- Escreva os passos da construção, usando a notação da sua construção.
- Quais são os “fatos” geométricos que se mantém na figura quando aplicamos movimentos **e que não foram declarados na construção,** i.é. os **“fatos estáveis implícitos”** ?
- Explique (i.é., demonstre) este fatos, apoiando-se em propriedades já discutidas no nosso curso.
- Que formas particulares pode ter o quadrilátero MNPQ? Desenhe algumas das situações obtidas na tela do computador. Em cada um dos casos, o que se pode dizer sobre quadrilátero ABCD, isto é, que particularidade tem o quadrilátero ABCD ?

Parte 2

- Abra o arquivo ativ4b.fig



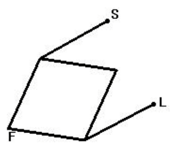
- Movimente as figuras e observe suas propriedades. Construa figuras que se comportem exatamente como as apresentadas e grave suas construções como ativ8asol.fig, ativ8bsol.fig e ativ8csol.fig
- Escreva os passos das construções:
- Quais são os “fatos” geométricos que se mantém nas figuras construídas quando aplica-se movimentos e que não foram declarados na construção, i.é. os “fatos estáveis implícitos” ?
- Explique (demonstre) o porque destes “fatos não declarados” .
- Enuncie as propriedades geométricas:

Se ABCD é tal que .... então MNPQ é quadrado
Se ABCD é tal que ....então MNPQ é retângulo.
Se ABCD é tal que ....então MNPQ é losango

Atividade 5

Parte 1

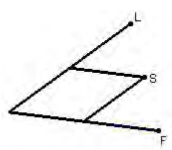
- Abrir o arquivo **instrumento1.fig**



- Identifique para que serve este instrumento, movimentando o ponto S. O recurso “rastro on/off”, aplicado aos pontos S e L pode ajudar a identificar a funcionalidade do instrumento.
- Identifique as propriedades geométricas que definem o instrumento.
- Mostre que de fato o instrumento tem a funcionalidade identificada em 2.

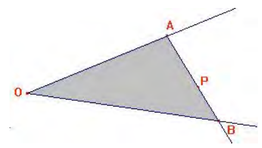
Parte 2

- Abrir o arquivo **instrumento2.fig**
- Proceder como na parte 1.



Atividade 6

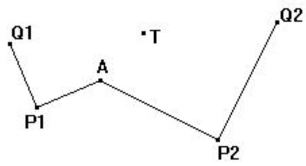
- Construa um ângulo de vértice O , para isto usando semi-retas; construa um ponto A em um dos lados do ângulo; construa um ponto P no interior do ângulo; construa semi-reta AP e o ponto B intersecção desta semireta com o outro lado do ângulo. Dentre todos os triângulos ABO construa aquele que tem área mínima.
- Demonstre que de fato o triângulo construído tem área mínima



Atividade 7

Um problema com enunciado lúdico:

“Dois piratas chegam numa ilha para esconder um tesouro. Discutem um procedimento e decidem escolher uma árvore A e duas grandes pedras P1 e P2 que estão à vista. Partindo da árvore, cada um deles caminha até uma das pedras e aí chegando tomam direções perpendiculares a que vinham, fazendo giros em sentidos contrários. Caminham o mesmo que já haviam caminhado chegando à Q1 e Q2. Olham-se, e começam a caminhar um em direção ao outro até que se encontram e neste ponto enterram o tesouro T (nesta última parte de caminhada eles tem velocidades iguais!). Passado alguns anos, voltam a ilha para recuperar o tesouro e... a árvore não está mais lá.” Como podem fazer para encontrar o tesouro ?



Ou seja:

- Determine uma nova estratégia
- Demonstre que está nova estratégia leva ao ponto T, onde foi enterrado o tesouro

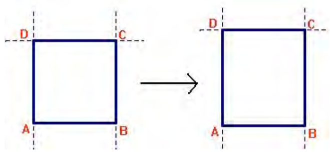
Anexo 2 Transcrição das produções dos grupos

Atividade 1

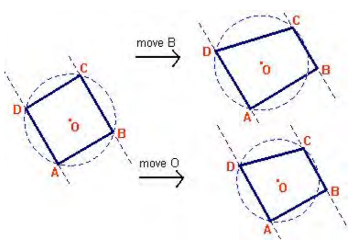
- **As tentativas de construção, com destaque em negrito da falta de controle geométrico.**

Quadrilátero 1

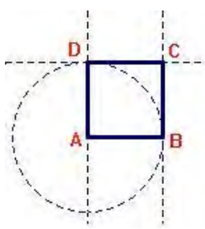
Grupo 1



A construção inicia com segmento AB; são construídas retas perpendiculares pelos extremos do segmento; o ponto D sobre uma das perpendiculares **aparentemente** de forma a guardar a relação AD=AB; a reta perpendicular à AD por D e o ponto C como a intersecção de duas retas já construídas. Como três são os pontos livres (A,B,D) sob ação de movimento, a figura **deixa de ter a estabilidade** “quadrado”, transformando-se em “retângulo”.



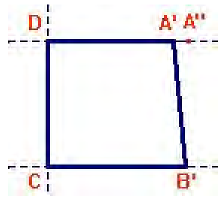
A construção inicia com o segmento AB; são construídas retas perpendiculares pelos extremos do segmento; o ponto O candidato a centro do quadrado é construído **aparentemente**; são construídos o círculo de centro O passando por A e os pontos C e D como intersecções das retas perpendiculares com o círculo. Novamente, três são os pontos livres (A,B,O). Movimentando-se B o círculo que **aparentemente** passava por este ponto **não guarda mais esta propriedade** e a figura colapsa; movimentando-se O a figura também colapsa, e mais quando círculo diminui de tamanho o ponto C deixa de existir.



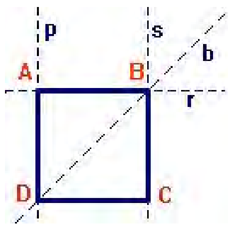
Na terceira tentativa o grupo sucede na construção, mas apresenta uma descrição dos passos um tanto precária**.** Vale informar que nas construções gravadas em disquete os objetos geométricos não são nomeados.

“segmento, retas perpendiculares às duas extremidades do segmento, circunferência com centro em um dos pontos do segmento passando pelo outro, reta perpendicular à reta que passa pelo centro da circunferência **(não é indicado o ponto pelo qual passa a reta perpendicular)**, *ligar os vértices* **(não é indicado como surge o quarto vértice) .”**

Grupo 2

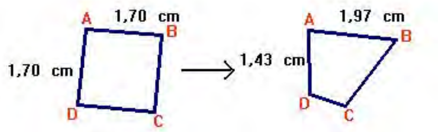


A construção inicia com ponto A’ e reta por A’; o ponto B’ é **aparentemente** construído de forma que o segmento B’A’ **pareça perpendicular** à reta inicial; o ponto C é construído **aparentemente** sobre esta segunda reta de forma a guardar a relação A’B’=B’C; é construída reta perpendicular à B’C passando por C e o ponto D como intersecção de retas. Neste ponto a figura **já não parece quadrado** e então é construído **aparentemente** o ponto A”, na tentativa de controlar a congruência de CD e DA”. Neste ponto a dupla dá-se conta da necessidade do controle geométrico e inicia nova construção.

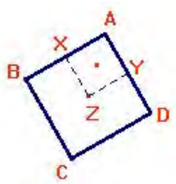


Apresentam a seguinte descrição dos passos de construção que resolve o problema:
“segmento DC; reta perpendicular ao segmento DC (**sem indicar o ponto pelo qual passa a reta, mas referindo-se a reta p**); *reta perpendicular ao segmento DC por C; bissetriz no ponto, C e D* (ponto auxiliar na reta p para construção da bissetriz); *ponto B de intersecção entre a bissetriz e a reta s; reta paralela ao DC passando pelo ponto B; ponto de intersecção entre a paralela e a reta perpendicular p; segmentos DA,AB e BC.”*

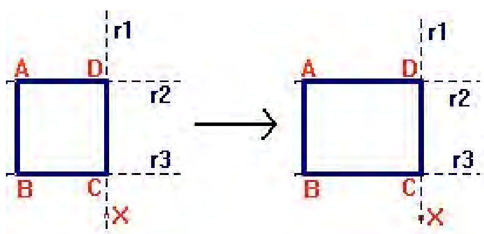
Grupo 3



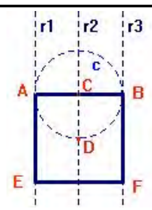
A primeira construção é do tipo “desenho a mão-livre”, em que a forma é **empíricamente** controlada através do recurso de medida.



A segunda construção inicia com o polígono regular AXZY e através do menu “Simetria Central” são construídos os pontos B,C,D que dão origem ao quadrado ABCD. Observamos que mesmo já tendo obtido de imediato o quadrado AXYZ, com o recurso “Polígono Regular”, a dupla continua na construção.

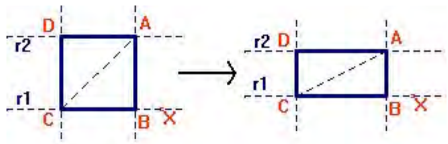


A construção inicia com o segmento AB e reta r1 paralela à AB passando por X de forma tal que a distância de r1 à B seja **aparentemente** igual à AB. São construídas as retas r2 e r3 perpendiculares à AB passando, respectivamente, pelos pontos A e B e os pontos D e C de intersecção destas retas com a reta r1. Sob ação de movimento o quadrilátero mantém a forma “retângulo”.

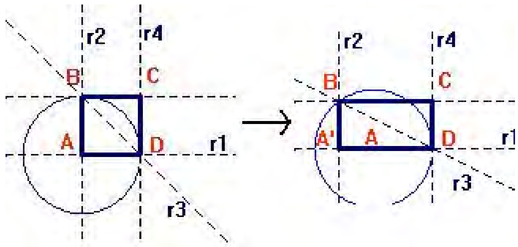


A solução final apresentada pela dupla se faz acompanhar da seguinte descrição dos passos de construção:
“segmento AB; C ponto médio de AB; r1, r2 e r3 retas perpendiculares à AB por A, B e C; círculo de centro C por A; D ponto de intersecção de c e r2; E e F pontos simétricos de B e A em relação à D”.

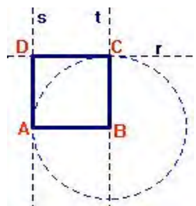
Grupo 4



A primeira tentativa mistura controle geométrico com impressões perceptivas. Inicia com reta r1 passando pelo ponto X; reta paralela à r1 passando pelo ponto A; ponto C **aparentemente** construído sobre a reta r1 de tal modo que CA corresponda a diagonal de quadrado com lados sobre as retas r1 e r2; segue a construção com perpendicularidade. Ao movimentar C o "quadrado" colapsa transformando-se em retângulo.

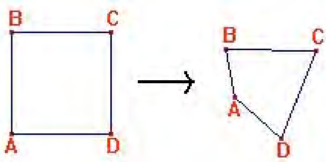


Segue-se nova tentativa, mas ainda sem pleno controle geométrico. Inicia com círculo de centro A; ponto B construído **aparentemente** sobre o círculo de modo a guardar verticalidade do segmento AB; reta r1 passando por A; D ponto de intersecção de r1 e círculo; reta r2 perpendicular à r1 por B; segue com paralelismo e perpendicularismo. Ao movimentar B o "quadrado" colapsa transformando-se em retângulo.

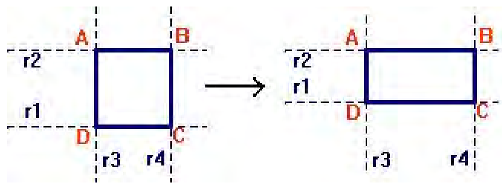


Na terceira tentativa a construção é satisfatória, embora a descrição apresente-se vaga em certos momentos e com deslize quanto as restrições possíveis (sublinhado no texto):
*"segmento AB, reta s perpendicular ao segmento AB, reta t paralela à s passando por B, circunferência de centro B e raio AB, **reta t tangente à circunferência e paralela à AB**, segmento de A à D (ponto de intersecção das retas r e s), segmento de C à D (ponto de intersecção de s e r), segmento DC."*

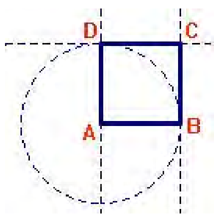
Grupo 5



A primeira construção é do tipo desenho "à mão livre"; é um desenho com **aparência** de quadrado**.**

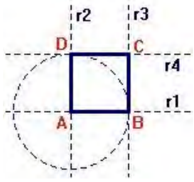


Construção que inicia com duas retas paralelas r1 e r2, e retas r3 e r4 perpendiculares à r2 e dispostas **aparentemente** de forma tal que os pontos de intersecção das quatro retas tenham a forma quadrado. Ao movimentar-se as retas o "quadrado" colapsa transformando-se em retângulo.

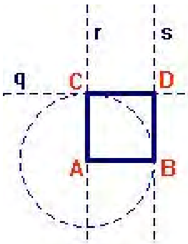


Finalmente a dupla sucede na construção e descreve os passos, ainda com pouca precisão de linguagem:
"*segmento AB, circunferência de centro em A passando por B, perpendiculares à reta AB passando por A e B, perpendicular à reta AD passando por D* **(faltou explicitar o ponto D, intersecção de uma das perpendiculares com o círculo***)"*

Grupo 6

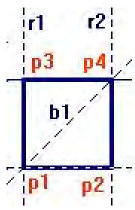


A primeira construção resulta em quadrado mas não tem o tipo de dinamismo solicitado, e nisso entra a falta de controle adequado das variáveis independentes: ponto A e reta r1 por A; reta r2 perpendicular à r1 por A; círculo de centro A; B ponto de intersecção do círculo com r1; reta r2 perpendicular à r1 por A e D ponto de intersecção de r2 com círculo; reta r3 perpendicular à AB por B; reta r4 perpendicular à r2 por B e C ponto de intersecção de r4 e r3.



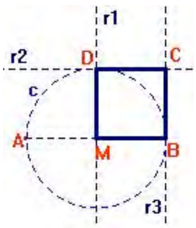
Na segunda construção dá-se o controle das variáveis independentes e dupla apresenta descrição dos passos ainda não adequada:
"*segmento AB, reta s perpendicular à AB* **(faltando indicar o ponto pela qual passa)**, *reta s perpendicular à AB* **(faltando indicar o ponto pela qual passa)**, *círculo de centro A e raio AB, reta q paralela à AB e tangente a circunferência em C e passando por s em D* (**imposição excessiva de condições**)".

Grupo 7

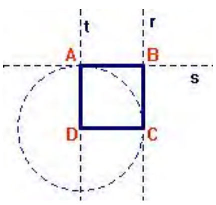


Passos da construção:
"*segmento p1p2, duas perpendiculares ao segmento pelos pontos p1 e p2, tracei a bissetriz b1 que corta o ângulo p3p1p2* (**mas ainda não foi construído o ponto p3**), *marquei o ponto p4 da intersecção de r1 e b1, tracei uma reta paralela à p1p2 passando por p4.*"

Grupo 8



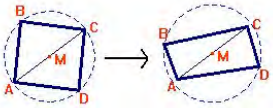
Nesta primeira tentativa de construção as variáveis independentes não são bem controladas, já que o ponto A que dá movimento a figura não é vértice do quadrado: segmento AB, ponto médio M de AB; círculo de centro M por A; reta r1 perpendicular à AB por M e D ponto de intersecção da reta com o círculo; reta r2 perpendicular à r1 por D; reta r3 perpendicular à AB por B e C ponto de intersecção de R2 e r3.



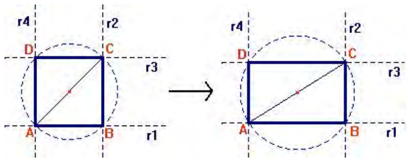
Na segunda tentativa a dupla sucede na construção e apresenta como descrição:
"*segmento DC, círculo com centro em D* **(sem especificar ponto por onde passa)**, *reta t perpendicular à DC* **(sem especificar ponto por onde passa)**, *reta s perpendicular à t* **(sem especificar ponto por onde passa)**, *reta r perpendicular à s* (**não são explicitados os pontos A e B**)."

Quadrilátero 2

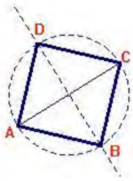
Grupo 1



A construção inicia com segmento AC; M ponto médio do segmento, círculo de centro M **aparentemente** passando por A; pontos B e D construídos **aparentemente** sobre o círculo de forma tal que ABCD **pareça** quadrado. Ao movimentar a figura o "quadrado" colapsa, o que se explica na liberdade de movimento dada aos pontos B e D.



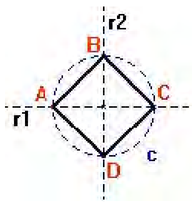
A construção inicia com o segmento AC; ponto médio do segmento; círculo com centro neste ponto passando por A; reta r1 passando por A de forma tal que **aparentemente** o ponto B de intersecção da reta com o círculo seja o segundo vértice do "quadrado". A construção segue com as retas r2, r4 e r3, onde é usada perpendicularidade. Ao mover o ponto A o "quadrado" colapsa, já que **não houve controle geométrico** na construção do ponto B.



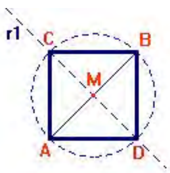
Agora com menos dificuldade o grupo sucede na construção e apresenta os passos da construção ainda de forma um tanto precária:

"segmento em diagonal, ponto médio do segmento, circunferência com centro no ponto médio, traçar o ponto médio, ligar os vértices..."

Grupo 3



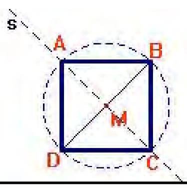
A construção inicia com círculo de centro O, reta r1 passando por O, reta r2 perpendicular à r1 por O, pontos A, B, C e D de intersecção das retas com o círculo, quadrilátero ABCD. Os alunos obtém quadrado estável, mas que **não tem o mesmo dinamismo do apresentado na atividade**, e de início não entendem "por quê" isto acontece; ou seja, não entendem a relação funcional que está implícita no processo de construção e tomam como variável independente o círculo.



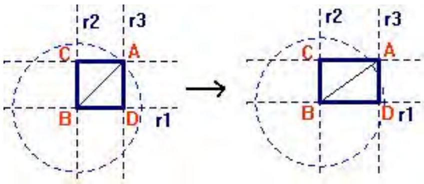
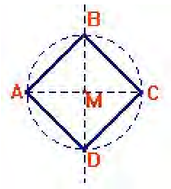
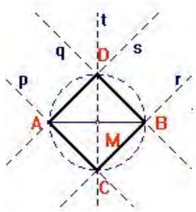
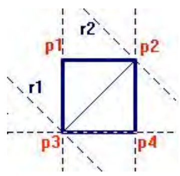
A dupla sucede quanto à estabilidade e tipo de dinamismo e apresenta a sequência de passos em descrição ainda precária:

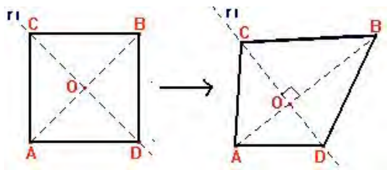
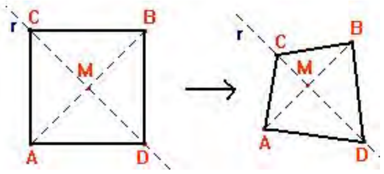
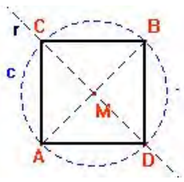
" segmento AB, mediatriz do segmento AB, círculo de centro no ponto M, pontos C e D de intersecção da mediatriz com a circunferência, segmentos CA, AD, DB e BC"

Grupo 4



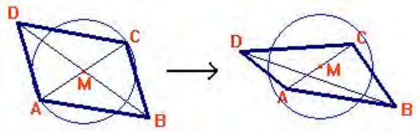
Apresentam de imediato construção satisfatória, embora a descrição ainda tenha alguma precariedade:
"segmento BD, ponto médio do segmento BD, reta perpendicular à BD passando por M (ponto médio), circunferência de centro M e raio MD, segmentos AB, BC, CD e DA"

Grupo 5 	A construção inicia com o segmento AB e círculo de centro B **aparentemente** passando por A; reta r1 passando por B; reta r2 perpendicular à r1 por B; reta r3 perpendicular à r1 por A; reta r4 perpendicular à r2 por A e ponto C intersecção de r2 e r4.
	É apresentada descrição incompleta dos passos de construção: *"segmento AC, ponto médio M de AC, círculo de centro M por C, perpendicular ao segmento AC por M, segmentos AB, BC, CD e DA* **(sem que tenha sido declarado quem são os pontos B e D**).”
Grupo 6 	No segundo quadrilátero, de imediato a dupla apresenta construção adequada, exceto pelo fato de incluir objetos geométricos desnecessários (as retas p, q, r e s), bem com descrição bastante adequada dos passos da construção: *"segmento AB, M ponto médio de AB, reta t perpendicular à AB por M, círculo de centro M por A, pontos C e D* (**sem maiores especificações**), *reta p unindo A e C, reta r unindo C e B, reta q unindo B e D, reta s unindo D e A".*
Grupo 7 	Passos da construção: *"segmento p2p3, retas perpendiculares à p2p3 que passam por p2 e p3, bissetrizes do segmento p3p2 com as retas perpendiculares para cima e para baixo* (**imprecisão de linguagem**), *marca os pontos de intersecção e traça os segmentos."*

Grupo 8 	Nesta primeira tentativa: segmento AB, ponto O **aparentemente** ponto médio de AB, reta perpendicular à AB por O, ponto C e D sobre a reta tais que segmento CD é **aparentemente** congruente à AB.
	Na segunda tentativa: segmento AB, M ponto médio de AB, reta perpendicular à AB por O, ponto C e D sobre a reta tais que segmento CD é **aparentemente** congruente à AB
	Na terceira tentativa a dupla sucede na construção e apresenta a seguinte descrição de passos: *"segmento AB, M ponto médio do segmento, círculo com centro no ponto médio* (**sem especificar o ponto pelo qual passa**), reta perpendicular ao segmento AB (**sem especificar o ponto por onde passa**), segmentos AD, DB,BC e CA (**sem explicitar quem são os pontos C e D**)."

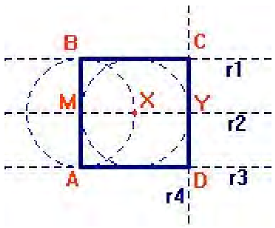
Quadrilátero 3

Grupo 1

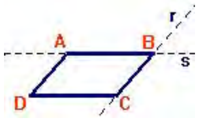


A construção inicia com segmento AC, **aparentemente** é construído o ponto médio M, círculo de centro M **aparentemente** passando por A, segmento BD **aparentemente** construídos como a segunda diagonal do "paralelogramo". Ao movimentar os quatro vértices o "paralelogramo" colapsa.
A dupla não chega a construção desejada do quadrilátero 3.

Grupo 2

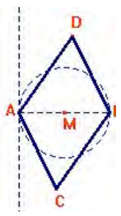


É feita a construção de quadrilátero muito particular, retângulo com lados na razão ½: segmento AB; M ponto médio de AB, círculo de centro M por A; retas r1, r2 e r3 perpendiculares à AB passando, respectivamente, pelos pontos A, M e B; X ponto de intersecção do círculo com r2; círculo de centro X por M e Y ponto de intersecção deste círculo com r2; reta r4 perpendicular à r3 por Y; C e D pontos de intersecção de r4 com, respectivamente r3 e r1.



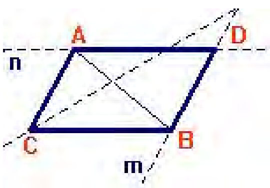
Descrição razoável dos passos de construção:
"segmento AD, segmento DC, reta paralela à AD por C, reta paralela à DC por A, colocar o ponto de intersecção entre ADC, nomear retas r e s."

Grupo 3



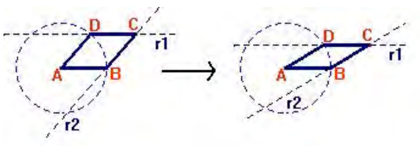
Para o terceiro quadrilátero fazem construções além do necessárias (sublinhadas na descrição), mas obtém paralelogramo estável:
"segmento AB, ponto médio, reta perpendicular ao ponto A, círculo com centro no ponto médio por B, simetria central de dois pontos aleatórios com centro no ponto médio, segmentos ligando CB, BD, DA e AC"

Grupo 4

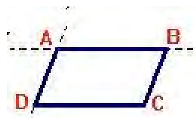


Na construção deste quadrilátero registram uma única tentativa. O quadrilátero é um paralelogramo estável e na descrição dos passos de construção apresentam linguagem adequada, embora com objeto geométrico desnecessário (sublinhado no texto):
"triângulo ABC, traçamos bissetriz do ângulo ACB, reta n paralela ao lado BC, reta m paralela ao lado AC, marcamos a intersecção das retas m e n com ponto D, fizemos os segmentos AD, DB, BC e CA"

Grupo 5

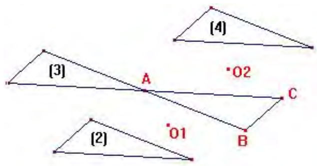


A primeira tentativa de construção dá origem ao quadrilátero particular losango: segmento AB, círculo de centro A passando por B, D ponto sobre o círculo, segmento AD, reta r1 paralela à AB por D, reta r2 paralela à AD por B, C ponto de intersecção de r1 e r2.

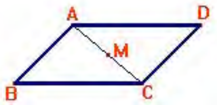


Na segunda tentativa a dupla sucede e apresenta os passos de construção, de forma incompleta:
"três pontos (B, C e D), segmentos BC e CD, paralela à BC por D, paralela à CD por B (**não é feita referência ao quarto vértice**)"

Grupo 6

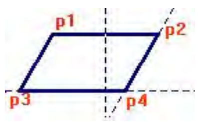


A primeira tentativa envolve a transformação simetria central: triângulo ABC, pontos O1 e O2, triângulo (2) simétrico de ABC em relação à O1, triângulo (3) simétrico de ABC em relação à A, triângulo (4) simétrico de ABC em relação à O2. Ao mover O2 a dupla percebe que os triângulos ABC e (4) se "encaixam" formando a figura desejada, quando O2 é ponto médio de AC. Com esta observação partem para a construção final.



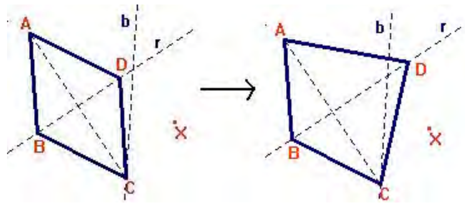
Descrição inadequada da construção:
"triângulo ABC, ponto médio do segmento AC, simétrico do triângulo ABC pelo ponto médio criando o triângulo ACD (**imprecisão de linguagem**)"

Grupo 7

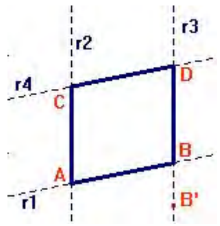


Passos da construção:
"segmento p1p2, mediatriz de p1p2, segmento p1p3, paralela à p1p3 que passa por p2 (**faltando explicitar quem é o ponto p4**)*."*

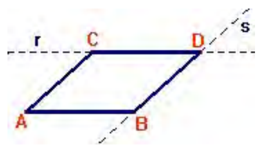
Grupo 8



Nesta primeira tentativa: segmento AC, reta r mediatriz de AC, ponto B sobre a reta r, segmentos AB e BC, ponto X **aparentemente** disposto de forma tal que ao construir a bissetriz b de BCX **aparentemente** ela é reta suporte do terceiro lado do quadrilátero. A construção muda de rumo e é construído ponto D sobre r de tal forma que **aparentemente** ABCD tem a regularidade desejada. Ao mover-se o ponto D o "paralelogramo" **colapsa** e transforma-se em pandorga.



A segunda tentativa revela falta de controle nas variáveis independentes: reta r1 ponto A sobre r1, reta r2 passando por A, reta r4 paralela à r1 e ponto B sobre r4, reta r3 paralela à r2 passando por B', ponto B intersecção de r1 e r3, ponto D intersecção de r3 e r4. São tomados como objetos livres as retas r1 e r2 e são estas retas que vão dar movimento à figura.



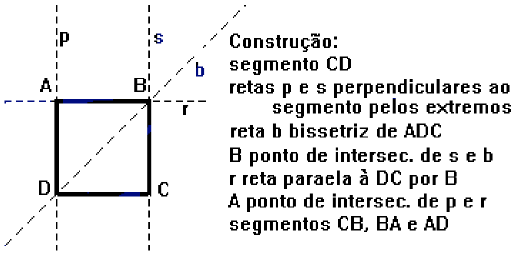
Na terceira tentativa a dupla obtém construção satisfatória :
"*três pontos aleatoriamente, traçar segmentos AB e AC, reta s paralelas à AB e AC* **(sem indicar os pontos pelos quais passam)**, *unir com segmentos DB e DC* **(sem especificar o ponto D)**".

Número de tentativas de construção

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8
Quadrilátero 1	**3**	**2**	**4**	**3**	**3**	**2**	**1**	**2**
Construção final satisfatória	**sim**	**sim**	**sim**	**sim**	**sim**	**sim**	**sim**	**sim**
Quadrilátero 2	**3**	**2**	**2**	**2**	**2**	**1**	**1**	**3**
Construção final satisfatória	**sim**	**sim**	**sim**	**sim**	**sim**	**sim**	**sim**	**sim**
Quadrilátero 3	**3**	**2**	**1**	**1**	**2**	**2**	**1**	**3**
Construção final satisfatória	**não**	**sim**	**sim**	**sim**	**sim**	**sim**	**sim**	**sim**

Atividade 2

- **Demonstração relativa a caixa preta 1**



- **pleno controle**

"*pela construção são fatos explícitos: ângulos C e D retos e reta r paralela à DC. São fatos implícitos: ângulos A e B retos e todos os lados iguais. Como a reta r foi declarad paralela ao segmento DC, portanto se o ângulo é reto em D, concluímos que seu alterno interno também sera. Sendo assim o ângulo A é 180 menos o alterno interno que é 90, dando 90 graus para A . O mesmo vale para o ângulo B.*

Pela definição de bissetriz, sabemos que o ângulo formado pela reta b e o segmento DC é 45 graus, formando BDC um triângulo retângulo, como tang D = cateto oposto/cateto adjacente e tang D =1 concluímos que DC é igual à BC. Utilizando o mesmo método, verificamos que AB também é igual à AD **(não é demonstrada a congruência entre os quatro lados do quadrilátero ABCD)**" (Grupo 7)

- **com controle, mas incluíndo fatos implícitos**

"é fato implícito os ângulos retos em A e B. Traçando a bissetriz de D, se originam dois ângulos de 45. Como as retas p e s são perpendiculares ao segmento CD, elas são paralelas. Logo a bissetriz funciona como transversal. Observe que a metade do ângulo em D e em B são ângulos alternos internos , ambos com 45. A reta r, paralela à CD é portanto perpendicular à s tem logo ângulo de 90 **(usa implícitamente DC paralelo à AB)** *, assim como o ângulo A.*

É fato implícito a congruência dos segmentos. Como b é bissetriz de D, o triângulo DBC é isoângulo e assim os segmentos DC e CB são congruentes. O triângulo DAB tem ângulo de 90 em A e os ângulos da base são iguais, assim DAB é isósceles tendo DA e DB congruentes. O lado DB é comum aos dois triângulos e os ângulos da base são iguais e caímos então no caso ALA de congruência. Temos DA=AB=DC=BC o que afinal prova que os quatro lados do quadrilátero são congruentes" (Grupo 1)

"se p e s são perpendiculares à DC, logo p e s são paralelas e sendo assim sempre tem a mesma distância, o que garante AB=DC **(usa implicitamente perpendicularidade em A ou B)**. *Sendo b bissetriz de D é formado triângulo retângulo isósceles de ângulos congruentes de 45. Por ALA o triângulo DCB é congruente ao triângulo DAB. Com isso provamos também que BC=AB e DC=AD.*

Podemos provar que os ângulos A e B são retos por alternos internos. Prolongando DC temos b visivelmente uma transversal e se ADC é reto logo DAB também o é **(usa mal**

a transversal). *Para provar que A é reto, usamos alternos internos com base na divisão feita pela bissetriz. Se D é dividido em dois ângulos de 45, sBb e bBr serão ângulos de 45* **(no segundo ângulo usa implícitamente o paralelismo de AB e DC**)” (Grupo 4)

“*ao fazermos a bissetriz do ângulo reto D surge o triângulo DCB. Este possuirá o ângulo D de 45, C já sabido que é reto e B que será 45, pois a soma dos ângulos de um triângulo deve ser de 180. Por se tratar de um triângulo isósceles, pois possue dois ângulos iguais, concluímos que DC=CB.*

“*Sabemos que a reta r é paralela à DC e as retas p e s são perpendiculares à DC, portanto o ângulo formado é reto em ambas as intersecções dos pontos A e B* **(não é mencionada explicitamente a relação ângulos alternos internos)**. *O triângulo DAB é formado, e pela divisão de dois ângulos retos pela bissetriz b se trata de outro triângulo isósceles* **(usa fato implícito b bissetriz de B)** *e então DA=AB. Por fim usa-se ALA para provarmos que os dois triângulos são iguais e que juntos formam um quadrado*” (Grupo 6)

- **controle parcial**

“*com base no estudo de paralelismo, nas duas retas r e t paralelas cortadas pelas transversais p e s podemos concluir a congruência dos ângulos : 1=4 , 2=3, 5=8 e 6=7* (pares de ângulos alternos internos indicados no desenho, 2 e 5 correspondendo aos ângulos retos de vértices A e C e é usada a suplementaridade de ângulos)

“*t1 é o triângulo DCB e t2 é o triângulo DAB. O segmento DB é comum aos dois e divide o ângulo reto em dois ângulos de 45 por uma bissetriz. Por congruência de triângulos LAAo podemos provar que os lados dos triângulos são congruentes e assim provamos que a figura é um quadrado* **(de fato, é somente a congruência de pares de lados que está garantida; a congruência dos quatro decorre dos triângulos isósceles, não mencionados)**” (Grupo 2)

“*quanto aos ângulos, são retos já que formados por retas perpendiculares* **(explicação insuficiente)**. *Os lados: os dois triângulos DAB e BCD tem em comum o segmento BD. Como a reta b é bissetriz de D os ângulos em D e B serão cortados ao ‘meio’* **(relativo à B, é fato implícito)**, *logo os dois ângulos terão em D um ângulo de 45. Além disso os ângulos em A e C são retos* **(não foi demonstrado que C é reto)** . *Assim pelo caso LAAo podemos concluir que os triângulos são congruentes e portanto os quatro lados também* **(de fato, é somente a congruência de pares de lados que está garantida; a congruência dos quatro decorre dos triângulos isósceles, não mencionados)** ” (Grupo 5)

“*quanto aos ângulos retos, C e D são retos pois as respectivas retas p e s são perpendiculares. Como AD é paralelo à CD então são iguais e retos os ângulos A, B, C e D* **(não explicita a relação ângulos alternos internos)**. *Quanto aos lados, por ALA, sendo BD comum e iguais os ângulos A=C e DBC= BDA* **(não explicita a razão da última congruência)** *então são congruentes os triângulos BCD e BAD. Logo AB=BC=CD=DA* **(de fato, é somente a congruência de pares de lados que está garantida; a congruência dos quatro lados decorre dos triângulos isósceles, não mencionados)**” (Grupo 8)

- **bastante precária**

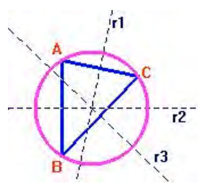
“*CD=AB porque se duas retas p e s são perpendiculares a CD, então elas são paralelas entre si, portanto a distância AB é igual à CD* **(usa implícitamente ângulo reto em A ou B)**

Sabemos que os quatro ângulos são retos através da lei dos ângulos alternos internos, sendo p e s as transversais **(muito vago)”** (Grupo 3)

Atividade 3

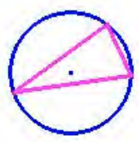
- **“Caixa preta” 1**
- **As diferentes tentativas de construção** (na descrição dos passos de construção destacamos em negrito a inclusão de fatos estáveis implícitos)

Grupo 1

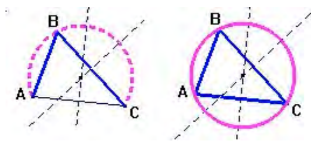


“triângulo, pontos médios do três lados, retas perpendiculares aos lados passando pelos pontos médios, ***circunferência com centro no encontro das retas*** *e passando por um vértice do triângulo”*

Grupo 2

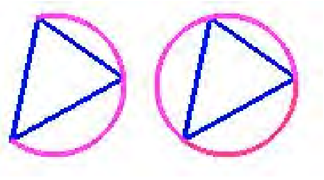


Círculo qualquer e triângulo com vértices sobre o círculo

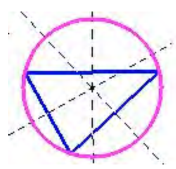


“arco ABC, cordas AB e BC, mediatizes das duas cordas, ponto de intersecção das mediatrizes, circunferência com centro neste ponto pasando por A, corda AC”

Grupo 3

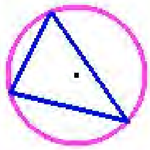


“triângulo qualquer e dois arcos passando pelos vértices, de forma alternada”

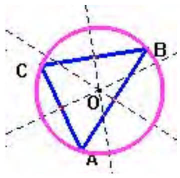


“triângulo qualquer; mediatrizes dos lados, ***circunferência com centro na intersecção das mediatrizes passando pelos vértices do triângulo****”*

Grupo 4

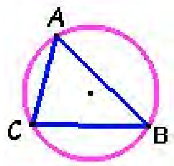


Círculo qualquer e triângulo com vértices sobre o círculo

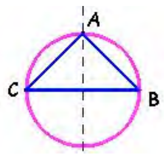


“triângulo ABC; pontos médios de AB, BC e CA; mediatrizes de AB, BC e CA; ***ponto de intersecção das mediatrizes; circunferência de centro neste ponto até os vértices do triângulo****”*

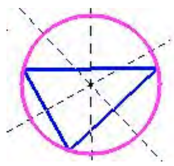
Grupo 5



Círculo e triângulo com vértices no círculo

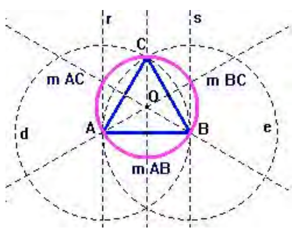


Segmento BC; ponto médio de BC; círculo com centro no ponto médio passando por B; reta perpendicular à BC passando pelo ponto médio; ponto A intersecção da reta com círculo; triângulo ABC

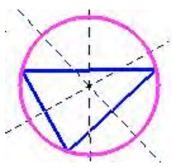


“triângulo de vértices ABC, mediatrizes de AC e AB, O ponto de intersecção das duas retas mediatrizes, circunferência com centro em O passando por B”

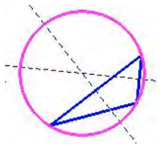
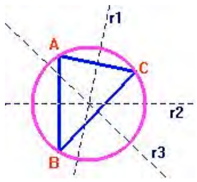
Grupo 6



Triângulo ABC, retas perpendiculares à AB passando por A e B, círculo de centro A e B passando, respectivamente pelos pontos B e C.
Neste ponto movimentam o triângulo de modo a Ter aparência de equilátero e prosseguem na construção: mediatrizes do três lados do triângulo, circunferência com centro na intersecção das mediatrizes com raio até os pontos A, B e C.



“triângulo ABC, mediatrizes dos lados do triângulo, ***circunferência com centro no ponto de intersecção das mediatrizes com raio até os pontos A, B e C****”*

Grupo 7		*"Desenho de um triângulo, mediatrizes de dois dos lados do triângulo, , círculo com centro na intersecção das mediatrizes e raio em um dos vértices do triângulo"*
Grupo 8		*"segmentos AB, BC e CA; pontos médios dos três segmentos; retas perpendiculares aos segmentos passando por seus pontos médios; **ponto de intersecção das retas e** circunferência com centro neste ponto"*

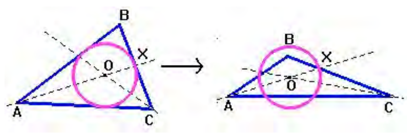
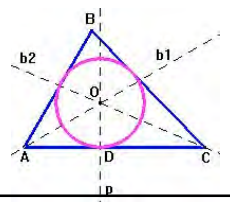
- **Os fatos estáveis implícitos e as explicações** (de natureza empírica ou simples enunciado da propriedade objeto de demonstração, em todos os grupos)

	Descrição de fatos estáveis implícitos, a serem demonstrados	Explicação	Satisfatória ?
Grupo 1	*"o triângulo fica sempre dentro do círculo"*	*"a circunferência passa pelos outros dois vértices do triângulo **porque do centro a qualquer vértice temos o raio**. A construção entende com certeza que **se a circunferência passa por um ponto marcado que dista do centro o raio então passa pelos pontos que tem esta distância**".*	Não, pois empírica
Grupo 2	*"ao criar a circunferência do ponto O até o ponto B , os pontos A e C também ficaram presos a circunferência"*	*"**ao fazer as três mediatrizes de um triângulo encontramos um ponto de intersecção delas que terá distâncias iguais aos pontos A, B e C**, sendo o centro de uma circunferência. Fazendo esta circunferência com centro na intersecção e passando pelo ponto A, passaria também pelos pontos B e C".*	Não, pois não explica.
Grupo 3	nenhuma clareza quanto a descrição dos fatos estáveis implícitos	nenhuma clareza de argumentos	
Grupo 4	*"o encontro das mediatrizes nos mostra onde será o centro da circunferência onde o triângulo está inscrito"*	*"**OA e OB são raios**, por isso unindo A e B formamos um triângulo isósceles onde OA e OB são congruentes, assim como os ângulos em A e B. **Sendo OC um raio também AO = OB = OC**. Assim OC, OA e AC formam um triângulo isósceles, onde os ângulos A e C são congruentes, bem como os lados OA e OC".*	Não, pois empírica

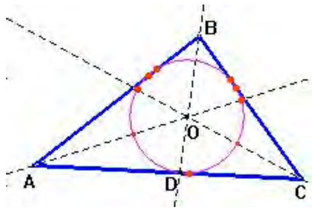
	Descrição de fatos estáveis implícitos, a serem demonstrados	Explicação	Satisfatória ?
Grupo 5	*"o triângulo quando é movimentado continua inscrito na circunferência"*	***"porque os vértices do triângulo são pontos da circunferência"***	Não, pois empírica
Grupo 7	*"os três vértices do triângulo estão sempre no círculo e só foi declarado que um está no círculo"*	***"o centro do círculo fica no encontro das mediatrizes do triângulo, ponto este que fica a uma distância igual de todos os vértices"***	Não, pois não explica
Grupo 8	*"o triângulo é sempre inscrito e conforme aumentamos os lados(cordas) a circunferência aumenta"*	***"o triângulo é sempre inscrito pois o baricentro (de fato incentro) é o ponto comum entre o triângulo e a circunferência"***	Não, pois não explica

- ## Caixa-preta 2

- **As diferentes tentativas de construção**

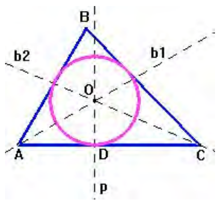
Grupo 7		Triângulo ABC; bissetrizes dos ângulos A e C; ponto X intersecção da bissetriz do ângulo A com o lado BC; círculo de centro no ponto O, interseecção de duas bissetrizes, passando por X.
		*"triângulo, encontro das duas bissetrizes dos ângulos internos do triângulo, perpendicular à um dos lados do triângulo que passa epelo encontro das bissetrizes, círculo com centro no encontro das bissetrizes e raio no encontro da reta perpendicular com seu respectivo lado do triângulo. (Grupo 7)*

Grupo 4



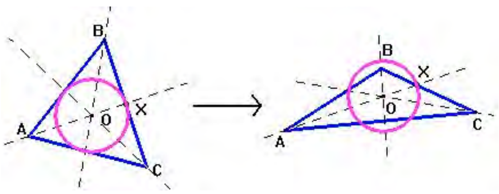
Triângulo ABC; bissetrizes dos ângulos A, B e C; ponto D intersecção da bissetriz do ângulo B com o lado AC; círculo de centro no ponto de interseção de duas bissetrizes e passando por D.

Sob ação de movimento a figura colapsa. O grupo volta a escolher instância de desenho tal que o círculo parece inscrito no triângulo, e empíricamente, mais uma vez desqualifica a construção feito, construíndo os pontos de intersecção do círculo com o triângulo e das bissetrizes (destacados em vermelho) e observa que são distintos.

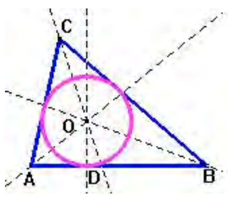


"triângulo ABC, bissetrizes dos ângulos A e C, perpendicular ao lado AC passando pela intersecção das bissetrizes, circunferência no ponto O e raio OD **(ponto D não é especificado)***"(Grupo 4)*

Grupos 1 e 5



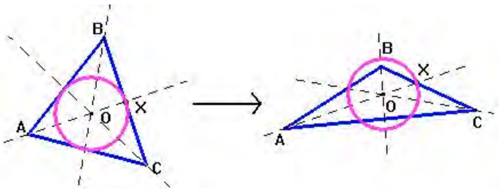
Triângulo ABC; bissetrizes dos ângulos A,B e C; ponto X intersecção da bissetriz do ângulo A com o lado BC; círculo de centro no ponto O, interseecção de duas bissetrizes, passando por X.



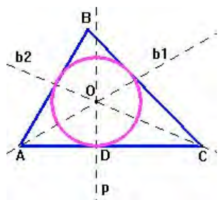
"traçar um triângulo, as bissetrizes dos vértices. Pelo encontro das bissetrizes **(excesso de imposição)** *traçar uma perpendicular à um lado qualquer, traçar círculo com centro no encontro das bissetrizes* **(excesso de imposição)** *passando pelo ponto de intersecção da reta perpendicular com o lado" (Grupo 1)*

"triângulo, as três bissetrizes, ponto O intersecção das três bissetrizes **(excesso de imposição**)*, perpendicular ao lado AC passando por O, circunferência com centro O passando no ponto de intersecção do lado AC com a perpendicular."(Grupo 5)*

Grupos 2, 3, 6 e 8



Triângulo ABC; bissetrizes dos ângulos A,B e C; ponto X intersecção da bissetriz do ângulo A com o lado BC; círculo de centro no ponto O, interseecção de duas bissetrizes, passando por X.



"triângulo ABC, bissetriz no vértice C e bissetriz no vértice A, marcar o ponto O de intersecção das bissetrizes, reta p perpendicular ao segmento AC passando por O e D ponto de intersecção com AC, círculo de centro O por D"(Grupo 2)

"triângulo ABC, bissetrizes dos ângulos A e C; ponto de intersecção O; reta p perpendicular ao lado AC passando por O; D ponto de intersecção da reta perpendicular com AC; círculo de centro O e raio OD" (Grupo 3)

"triângulo ABC, bissetrizes dos ângulos de vértices A e C com ponto de intersecção O, reta perpendicular à AC passando por O, ponto D na reta AC **(especificação imprecisa)** *circunferência com centro O e raio OP"(Grupo 6)*

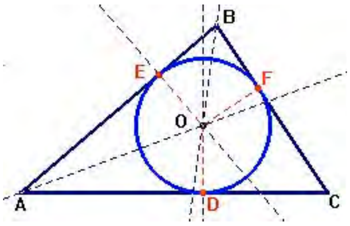
"segmentos AB, BC e CA, bissetrizes dos ângulos A e C, reta perpendicular à AC por intersecção das bissetrizes, circunferência com centro O por P **(ponto P não é especificado)***" (Grupo 8)*

- **Fatos estáveis implícitos e explicações de natureza empírica ou simples enunciado da propriedade objeto de demonstração, em seis dos grupos:**

	Descrição dos fatos estáveis implícitos	**Explicação**
Grupo 1	*"a circunferência é tangente aos outros dois lados do triângulo"*	*"é tangente porque o encontro das duas bissetrizes está a igual distância dos lados do triângulo... o encontro das bissetrizes ao lado do triângulo é a medida do raio, considerando o centro da circunferência o encontro dessas bissetrizes"*
Grupo 4	*"a bissetriz do terceiro ângulo está implícita, pois apenas com duas bissetrizes já conseguimos localizar o centro do círculo. Quando feita a terceira bissetriz ela também passará pelo centro"*	*"a terceira bissetriz também passará pelo incentro pois todas as bissetrizes se encontram no incentro"*
Grupo 5	*"a circunferência também passa pelos outros dois lados do triângulo"*	*"a distância entre O* (intersecção de duas das bissetrizes) *e I* (intersecção da perpendicular ao lado AC passando por O) *forma o raio da circunferência, assim como se houvessem sido traçadas perpendiculares aos lados AB e AC passando pelo centro O, os pontos de intersecção dessas perpendiculares com os respectivos lados ao centro O também seriam raios da circunferência"*
Grupo 6	*"a circunferência se mantém inscrita no triângulo e os lados do triângulo são tangentes a circunferência"*	*"a circunferência se mantém tangente porque o raio é perpendicular aos lados do triângulo. As três bissetrizes formam seis triângulos e a altura relativa desses triângulos é igual ao raio da circunferência"*
Grupo 7	*"a circunferência se mantém sempre tangente a todos os lados do triângulo"*	*"o encontro das bissetrizes é o ponto que tem a mesma distância de todos os lados do triângulo"*
Grupo 8	*"a circunferência é sempre inscrita"*	*"a circunferência é sempre inscrita pois está tangenciando o segmento AB, de maneira análoga ela tangencia AC e CB"*

- **Descrição de fatos estáveis implícitos, extensão de desenho e explicações na direção de argumentação dedutiva, em dois grupos:**

Grupo 3
Fatos estáveis implícitos:
"devido a uma perpendicular um dos lados ficou fixo à circunferência. Os outros dois lados também ficaram fixos, mas sem a perpendicular"

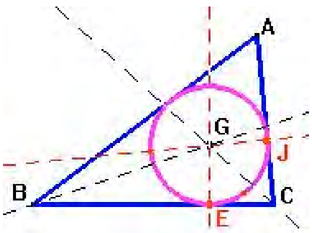


É feita extensão de desenho via reta perpendicular ao lado AB passando por O; é construído o ponto de intersecção da circunferência com o lado BC, e aqui não se coloca em questão a existência de tal ponto. Constroem os segmentos OD, OE e OF

Explicação apresentada:

aplicando movimento a figura constatam empíricamente "*com apenas uma perpendicular passando pelo centro a circunferência já fica constantemente inscrita"*

Grupo 2
Fatos estáveis implícitos:
"ao fazer a circunferência de centro G passando por E, fizemos essa mesma circunferência passar pelo triângulo sendo que isto não foi declarado na construção"



É feita extensão do desenho via construção do ponto J como intersecção do círculo com o segmento AC, aqui tendo sido utilizado o menu "Pontos de intersecção"; é construída a reta GJ.

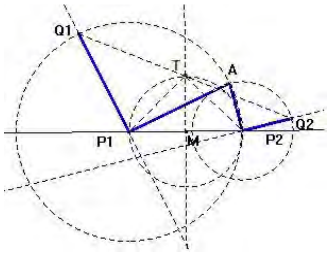
Explicação apresentada:

"O ângulo em E é igual ao ângulo em J devido que os dois foram construídos com perpendiculares (deslize quanto aos fatos declarados pois na construção não foi explicitado que GJ é perpendicular à AC). *Os ângulos em C são iguais por causa da bissetriz e o segmento GC é comum aos dois triângulos. Por isso eles são congruentes, pertencendo* (quem ?) *dessa maneira na mesma circunferência"*

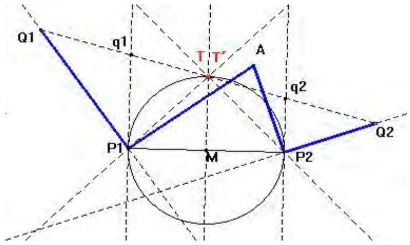
Atividade 7

- **Extensões de desenho**

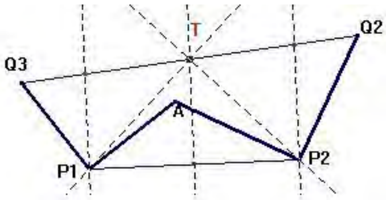
Grupo 1



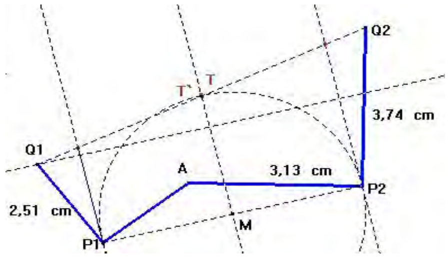
Grupo 4



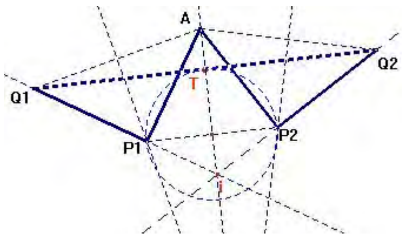
Grupo 2



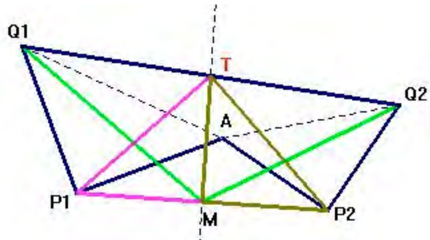
Grupo



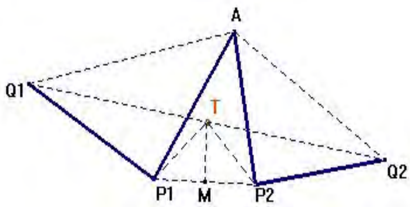
Grupo 3



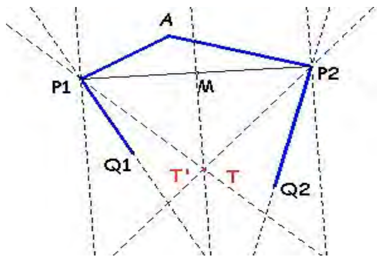
Grupo 6



Grupo 7



Grupo 8



- **Redação de demonstrações, ainda precária:** confusão entre *fatos declarados* e *fatos estáveis implícitos* e argumentos truncados, faltando concatenação lógica

Grupo 1

Fazendo a reta r1 por P1P2 e as retas r2 e r3 perpendiculares à r1 por P1'e P2'temos o trapézio P1"P2'Q2Q1. Então usando a propriedade do trapézio que diz que se uma reta paralela as bases passa pelo ponto médio de um dos lados também passará pelo ponto médio do outro lado. Então MT' é perpendicular à P1P2, assim como r2 e r3. Como a reta MT' também pasa pelo ponto médio de Q1Q2 ela passará pelo ponto médio de P1'P2' logo concluímos que T' e T estão na mesma reta .
M também é ponto médio de Q1Q2 porque levando em consideração a congruência dos triângulos P1'P1Q1 e P1AB pelo critério LAAo: o mesmoacontece com os triaângulos P1AB e AP2B e então Q1P1=AB=P2Q2.
Fazendo a reta r4 (**não é explicitado como**) *temos o retângulo YQ1Q2X de altura MT (infere-se que a reta passa por T) ou seja é o raio do círculo* C3 (**assume que o círculo passa por T**) . *Como a altura do retângulo é a mesma ao longo do polígono e sabendo que P1M = MT' e se P1M é o raio do círculo então P1M=MT ou seja T = T'*

Grupo 2

"formamos o trapézio Q1Q2P2'P1'. Sabemos que se um segmento MT' paralelo as bases tem uma extremidade no ponto médio a outra extremidade T'estará no ponto médio do lado oposto a extremidade origem **(toma como certo que T'pertence à P1'P2')**. *E que o segmento MT' é a semi-soma das bases.*
M é ponto médio de Q1Q2 porque os triângulos P1Q1P1'e AZ P1 são congruentes , P2Q2P2' e A Z P2 Também são congruentes e daí Q1P1=AZ=P2Q2
Como os triângulos TQ2'P2' e TQ1'P1'são congruentes por LAAo assim podemos observar a formação do retângulo Q1Q2Q2'Q1'e como T' tem origem em M que é ponto médio de Q1Q2 provamos que T'=T

Grupo 3

"*Tem uma propriedade dos trapézios que diz: quando uma reta paralela as bases corta o ponto médio de um dos lados irá cortar o ponto médio do outro lado. Então T' está no ponto médio de p1'p2'* (quando a conclusão deveria ser T está na reta mediatriz MT'; a conclusão do aluno, se correta, implicaria de imediato que T = T' e no entanto ele continua...). *Se MT = q2p2'+q1p1' / 2 então conseguimos provar que T = T'* (não é o que se pode concluir de imediato; é preciso mostrar que esta media é igual à p1p2/2). *Traçando uma perpendicular à MT por T e com congruência de triângulos eu provo isto*". (Grupo 3)

Grupo 4

"Unindo os pontos q1p1'p2'q2 obtivemos um trapézio <u>cuja base média era exatamente MT'</u>(fato visual; a base média é MT). Fizemos a média aritmética das bases e <u>obtivemos o comprimento de MT'</u>(de fato é o comprimento de MT). Passamos uma reta perpendicular à T' e por critério de congruência LAL o triângulo 1 congruente ao triângulo 2 (tal argumento com triângulos foi discutido em aula para demonstrar a propriedade da base média, e na argumentação do aluno fica "solto") . Imaginamos o triângulo 1 sobreposto ao 2, formando um retângulo...sendo MT' a altura do retângulo temos (***abruptamente***) *MT = MT' e logo T=T' "*

Grupo 8

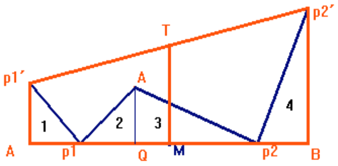
"*Analizamos toda a figura como um trapézio. Vemos que se T é o ponto médio de p1'p2' ele também é cortado por t* (reta mediatriz de p1p2) *juntamente com M. Portanto temos a figura dividida em vários*

---

triângulos e entre eles notamos as congruências dos triângulos p1MT e p2MT, p1XT e p2YT. Portanto deduzimos que T = T' uma vez que eles estão levados as mesmas retas"(Grupo 8)

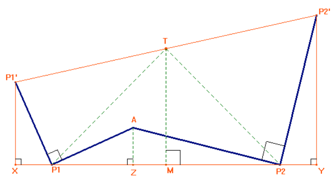
- **Redação satisfatória de demonstração:** pequenos deslizes de linguagem e uso de um único fato estável implícito sem explicação, a saber que M é ponto médio de AB (Grupo 6). Já a demonstração apresentada pelo Grupo 7 é impecável.

Grupo 6



*"Monta-se o trapézio ABp2'p1'...; tendo como fato sabido que as bases do trapézio possuem os seus pontos médios passando pela mediatriz de p1p2 (*aqui o aluno assume , sem explicitar oporque, que M é ponto médio de AB, quando o que se tem declarado é que é ponto médio de p1p2*)vem : T e T' estão na mesma reta, porém tem-se que provar que T = T'.Traçamos a perpendicular à p1p2 passando por A .*
Surgem os triângulos (1) e (2) congruentes , (3) e (4) congruentes .... (são apresentados argumentos que garantem as congruências) Agora, sabendo que MT = média aritmética de p1'A e p2'B e que MT' = p1M e que MT' é a média aritmética de p1Q (congruente à p1'A) e p2Q (congruente à p2'B) , provamos que MT = MT'."

Grupo 7

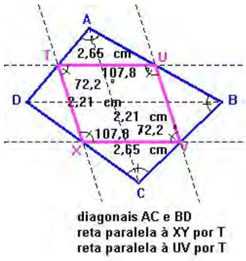


Para provar que o segundo trajeto é válido devemos provar que "TM" é paralelo a "P1`X", e que é igual a "P1M". Para isso vamos provar que "M" também é ponto médio de "XY", que é a altura do nosso trapézio. Vamos chamar o ângulo "XP1`P1" de alfa (α), olhando para o triângulo "XP1`P1" retângulo em "X", descobrimos que "XP1P1`" vale (90-α), então o ângulo "AP1Z" vale {180-[90+(90-α)]} que é o próprio α.. Sabendo que "P1P1`" é igual à "P1A", temos dois triângulos congruentes por LAA, então "P1`X" é igual "P1Z" e "XP1" igual à "AZ", e aplicando o mesmo raciocínio nos triângulos "P2`P2Y" e "AP2Z", também vemos que "P2Y" é igual a "AZ". Então se "M" é o ponto médio de "P1P2" ao somarmos a mesma quantidade de ambos os lados ("XP1" e "YP2") ele continuará a ser o ponto médio.
Pelas propriedades de um trapézio, o segmento que une os pontos médios dos lados, é paralelo à ambas as bases e tem comprimento igual à metade da soma das bases. Por isso que "MT" é paralelo à "YP2`" e vale metade da soma de "XP1`" com "YP2`".
Já sabendo que "P1Z" é igual à "P1`X" e "P2Z" é igual à "P2`Y", então "P1P2" vale a soma de "XP1`" com "YP2`" e "P1M" vale sua metade. Com isso provamos que "P1M" é igual a "TM", ambos valendo a média aritmética da soma das bases do nosso trapézio.

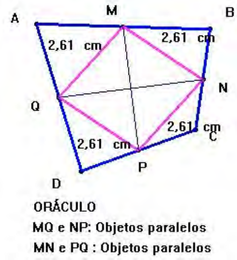
Atividade 4

- **Exploração empírica**

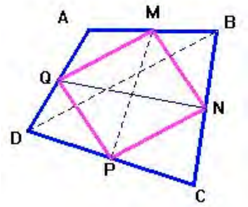
Grupo 1



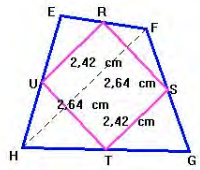
Grupo 2



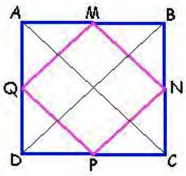
Grupo 3



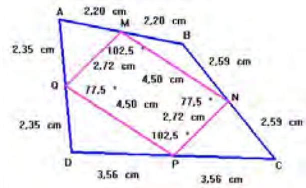
Grupo 4



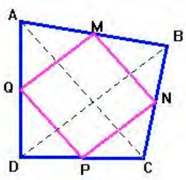
Grupo 5



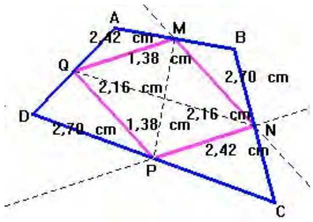
Grupo 6



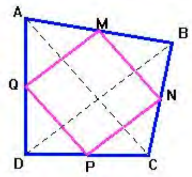
Grupo 7



Grupo 8



Argumentações dedutivas com pleno controle



Grupo 1 (Gis)

"considere o triângulo DAB; sendo M ponto médio de AB, a reta paralela à BD passando por M cortará AD no seu ponto médio Q (aqui é utilizado a unicidade de reta paralela e o teorema da base média, quando bastaria este último) . Assim MQ é paralelo à BD. Considere o triângulo BCD, temos raciocínio análogo. Raciocínios análogos são feitos para os triângulos ABC e ADC. Disto concluímos que os lados opostos de MNPQ são paralelos."

Grupo 3 (Ber)

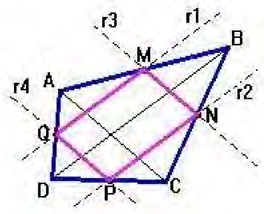
"um segmento formado pelos pontos médios de dois lados de um triângulo é sempre paralelo ao outro lado. Ao traçarmos a diagonal do polígono ABCD obtemos os triângulos ABD e BCD ou ACD e BCD. Como os dois triângulos tem um lado em comum, e seus dois outros lados tem seus pontos médios ligados por segmentos , estes segmentos são paralelos"

Grupo 5 (She)

"traçando o segmento BD temos os triângulos ABD e CBD. No triângulo ABD temos M e Q pontos médios dos lados AB e AD. Já sabemos que o segmento que une os dois pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado. Logo QM é paralelo à DB. O mesmo acontece com o triângulo CBD, portanto NP paralelo à DB. Como QM paralelo à DB e NP paralelo à DB segue que QM é paralelo à NP. Analogamente se prova o paralelismo de MN e PQ."

Falta de controle de fatos estáveis implícitos, perturbações na argumentação

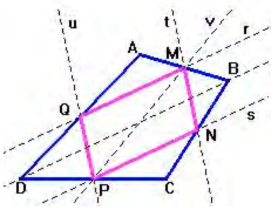
Grupo 1 (Cib)



Construção acrescida de retas r1 e r2 paralelas à BD passando, respectivamente, por M e N; retas r3 e r4 paralelas à AC passando, respectivamente, por M e Q.

"Se duas retas são paralelas à um segmento BD então são paralelas entre si. Pela definição de paralelogramo, se um quadrilátero tem lados opostos paralelos, ele é um paralelogramo" (Cib)

Grupo 2 (Gla)

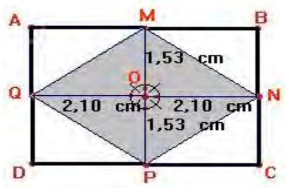


Construção acrescida de retas u e r passando, respectivamente, por P e Q e por M e Q, reta t paralela à u por M, reta s paralela à r por P, reta v passando por M e P. A argumentação que segue tem como objetivo mostrar que as retas t e s passam por N:

"como retas t e u são paralelas e v é reta transversal tem-se a congruência dos ângulos QPM e NMP (empiricamente é tomado que a reta t passa por N); como as retas r e s são paralelas e v é transversal tem-se a congruência dos ângulos NPM e QMP (empiricamente é tomado que a reta s passa por N). Como MP é lado comum aos triângulos PMN e PMQ segue que os triângulos são congruentes e assim as retas t e s passam por N (inferência imprópria, além do que este fato já foi tomado de forma empírica anteriormente)" (Gla)

Explicação de natureza empírica baseada em medidas

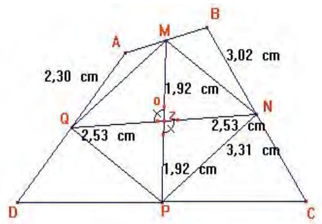
Grupo 2 (Mar)



Construção acrescida de diagonais de MNPQ e não considera as diagonais de ABCD e argumentação caso particular de ABCD retângulo)

"sabendo que OM=OP e que ON=OQ **(validação empírica)** *teremos ângulos alternos internos congruentes entre si na figura MNPQ* **(inferência sem nexo)**. *Tendo como fato sabido a congruência dos ângulos alternos internos* **(propriedade geométrica objeto de demonstração)** *temos a igualdade de ângulos: QPO = NMO e PQO = MNO e assim temos a congruência dos triângulos MON e POQ. Teremos MN=PQ. A mesma coisa se faz com os outros dois triângulos de MNPQ, obtendo MQ=NP. Um quadrilátero com lados opostos congruentes terá também lados opostos paralelos"*

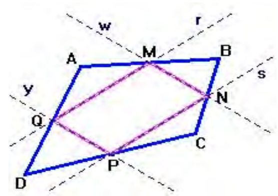
Grupo 8(Sil)



"MQ = PN pois são congruentes os triângulos PZN e MZQ por LAL: MZ=PZ e QZ=NZ **(validação empírica)**, *ângulo O congruente ao ângulo Z. Da mesma forma PQ = MN, porque são congruentes os triângulos QOP e* NOP **(validação empírica)**.*Como os lados opostos de MNPQ são congruentes, seus lados são paralelos, pois possuem o mesmo tamanho"*

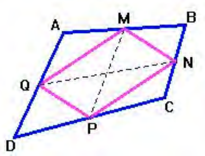
Explicações com inferências sem nexo, confusão entre definição e demonstração

Grupo 3 (Fab)



"se traçarmos as retas r, s, y e w por QM, MN, N e PQ veremos que os ângulos opostos são congruentes pela lei dos alternos internos, sendo r e s as transversais de y e w."

Grupo 4 (Edu)



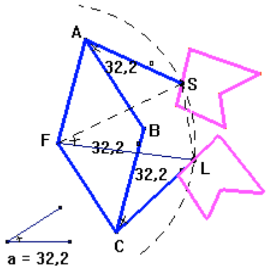
"o polígono MNPQ é um paralelogramo, por isso as retas são paralelas. Porque as suas diagonais se cruzam no ponto médio delas"

Atividade 5

INSTRUMENTO 1

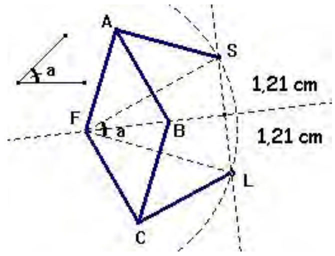
- **Exploração**

Grupo 1:



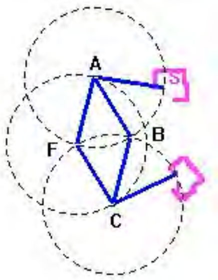
"o instrumento serve para desenhar figuras semelhantes, com inclinação de ângulos. Ou seja, faz figuras que giram em torno de F com ângulo a"

Grupo 2



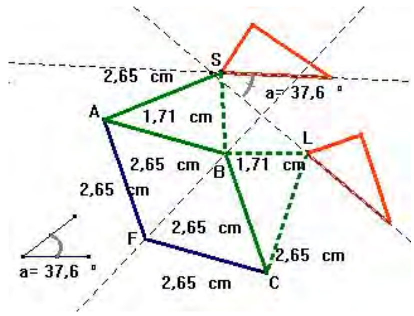
"através do ponto L em relação com S, mexendo-se o ponto S teremos o ponto L também se mexendo mas formando segmentos de ângulo coincidente com o do instrumento (referindo-se aos segmentos FS e FL) *"*

Grupo3



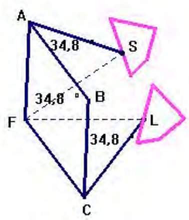
"copia figuras com um giro em torno do F com um ângulo a"

Grupo 4:



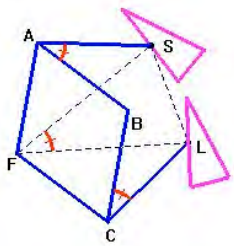
"serve para copiar figuras girando-as em torno do ponto F, de acordo com um certo ângulo" (Grupo4)

Grupo 5



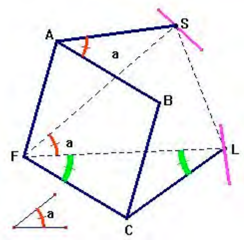
"o instrumento copia figuras com determinada inclinação, sendo este ângulo determinado por SAB (...) Gira a figura da ponta seca com ângulo "a" em relação ao ponto F"

Grupo 6:



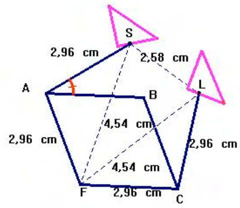
"o instrumento reproduz o triângulo (ou uma figura qualquer) com uma inclinação 'a' referente ao triângulo original"

Grupo 7:



"gira a figura em torno do ponto F com uma inclinação igual ao ângulo a"

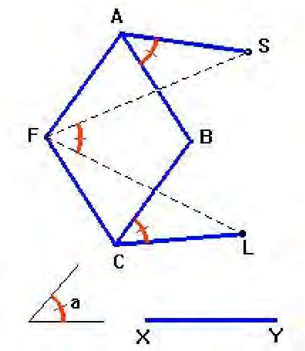
Grupo 8:



"copia as figuras com uma determinada inclinação, sendo este ângulo determinado por SAB, sendo que copia as figuras em torno de F"

- **Propriedades a serem impostas ao instrumento físico**

(Observação: o Grupo 2 não apresentou os fatos a serem declarados sobre o instrumento)



Fatos declarados insuficientes:

" a base do instrumento é um paralelogramo" (Grupo 1)

" tem um paralelogramo no instrumento" (Grupo 3)

" ABCF é um paralelogramo e tem dois segmentos, sendo que um de A à S e o outro de C à L, tendo os ângulos SAB e BCL a mesma inclinação" (Grupo 5)

Fatos declarados incluindo fatos estáveis implícitos (sublinhados):

"AB=BC=CF=FA=AS=CL=XY, os ângulos SAB, LCB e 'a' são iguais, <u>também são iguais os ângulos FAB=FCB e AFC=ABC, ou seja ABCF é um paralelogramo</u>" (Grupo 6)

"AB=AF=CB=CF=AS=CL=XY, são iguais os ângulos SAB=LCB=a <u>e SAF=LCF</u>, o ponto F é fixo" (Grupo 7)

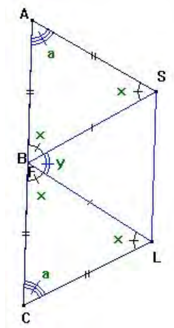
"todas as varetas são iguais, ângulos SAB e LCB são congruentes ao ângulo 'a', <u>ABCF é paralelogramo</u>" (Grupo 4)

"ABCF é paralelogramo, AS=AB=BC=CL, são iguais os ângulos SAB=BCL=a, <u>os lados do paralelogramo são todos de mesmo tamanho</u>" (Grupo 8)

- **Demonstrações** [1]

a) demonstração particular e depois geral

Grupo 6

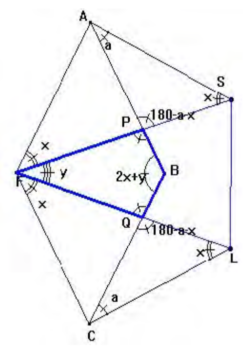


É feita a demonstração da congruência dos ângulo SFL e ‘a’ em caso particular. A demonstração de que FS=FL não é considerada.

“alinhamos o quadrilátero ABCF de modo que se torne um segmento AC de ponto médio B, isto é, o lado AB fique sobreposto ao AF.O mesmo faremos com os lados BC e CF. Agora temos três triângulos isósceles e os ângulos a, x (LAL$\Rightarrow$ dois Δisósceles, por isso os ângulos congruentes x) e y, o qual queremos provar que é congruente `a ‘a’ :

$$a+2x=180^{\circ}$$
$$a=180^{\circ}-2x$$
$$2x+y=180^{\circ} \Rightarrow y=180^{\circ}-2x \Rightarrow y = a$$

ou seja, de fato $y \equiv a$.”



“temos os seguintes dados:O ΔSAF é isósceles ($FA \equiv AS$) e, por isso, possui dois ângulos iguais (x). Como o $\Delta SAF \equiv \Delta FCL$ (LAL) então o ΔFCL possui também dois ângulos x. Analisando o ΔAPS temos os ângulos a, x e 180°-a-x (pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°). O mesmo vale para o ΔCQL (pois $\Delta CQL \equiv \Delta APS$).
Analisando o quadrilátero ABCF descobrimos que o ângulo do vértice B é igual ao do vértice A, pois se trata de paralelogramo (ângulos opostos congruentes), ou seja, igual à 2x+y.
Por fim, averiguemos o quadrilátero FPBQ. Esse possui os ângulos Y, 2x+y, 180°-a-x (OPV) e 180°-a-x (OPV). Sabendo que a soma dos ângulos internos de quadrilátero é igual à 360° temos:

$$y+2x+y+180^{\circ}-a-x+180^{\circ}-a-x = 360^{\circ}$$
$$2y+2x-2x-2a = 360^{\circ}-180^{\circ}-180^{\circ}$$
$$2y-2a = 0$$
$$2y = 2a$$
$$\boldsymbol{y = a}$$

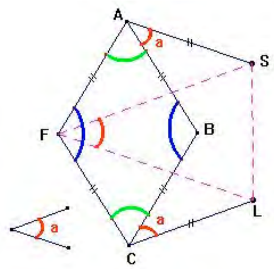
, ou seja, de fato $\boldsymbol{y \equiv a}$**”**

---

[1] Os grupos 3 e 4 não apresentaram produção na forma de material escrito.

b) controle parcial do processo de demonstração:

Grupo 1



É feita a demonstração da congruência dos segmentos FS e FL, mas não consideram a congruência dos ângulos SFL e 'a', embora sejam estabelecidas diversas relações entre ângulos.

"hipóteses: FA=FC=CB=AB=AS=CL

tese: FS=FL

Imediatamente são assinaladas na figura diversas congruências de segmentos e ângulos

"Demonstração: "FABC tem os lados opostos congruentes, logo é um paralelogramo, assim os ângulos em A e C são congruentes. Adicionando a mesma medida 'a' aos dois ângulos, a congruência se mantém . Pelo caso LAL, os triângulos FAS e FCL são congruentes. Logo FS=FL.

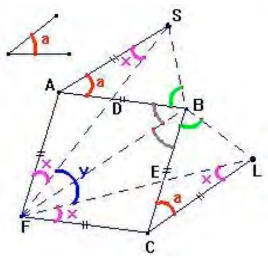
Como os ângulos AFS e ASF são congruentes, pois por construção o triângulo AFS é isósceles, e da mesma forma são congruentes os ângulos FLC e CFL, e sabendo que:

ângulo FCL= ângulo C+ 'a' ; 2. ângulo AFS + Â + 'a' = 180 ; FÂS =Â +'a'; 2. ângulo CFL + ângulo C + 'a' = 180; ângulo C = ângulo A

segue que são congruentes os ângulos AFS e CFL **(o que poderia ser inferido de forma imediata da congruência dos triângulos AFS e CFL)"**

c) pleno controle do processo de demonstração

Grupo 2



"Hipóteses: FA=FC=CL=AS=AB=BC e ângulos SAB, LCB e 'a' congruentes

Tese: FS=FL e ângulo SFL = ângulo SAB

Demonstração:

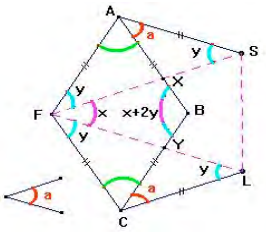
Por LAL são congruentes os triângulos SAB e LCB e assim SB=LB. Olhando para os triângulos BSF e BLF, por LAL também são congruentes (usa o fato que sendo ABCF losango, a diagonal FB também é bissetriz) e assim FS = FL.

Usando a congruência de ângulos indicadas na figura, dada pelos triângulos isósceles congruentes, no quadrilátero FDBE temos:

$$(2.x+y) + (180-(a+x)) + (2.x+y) +(180-(a+x)) = 360$$

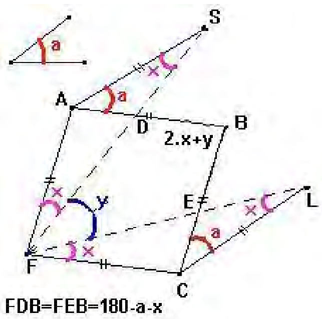
donde vem y-a = 0 ou seja y = a"

Grupo 5



"são congruentes os ângulos SAB e BCL, por construção e são congruentes os ângulos FAB e FCB por serem ângulos opostos de um losango. Logo são congruentes os ângulo SAF e LCF. Também temos por construção FA=FC e AS=CL, logo por LAL concluímos que são congruentes os triângulos FAZ e FCL e portanto FS=FL.
Por LLL são congruentes e isósceles os triângulos FAS e FCL temos a congruência dos ângulos representados por 'y' na figura. Sendo X o ponto de intersecção de FS e AB e Y o ponto de interseção de FL e CB, e tomando os triângulos SAX e LCY temos a congruência dos ângulos SAX e LCY, por construção, representados por 'a' na figura. Como a soma dos ângulos de um triângulo é 180, temos a igualdade de ângulos: SXA=LYC=180-y-a **(é usada de forma implícita a congruência dos triângulos**) *Olhando para o quadrilátero FXBY temos a igualdade de ângulos FXB=FYB=180-y-a, por serem ângulos opostos pelo vértice à SXA e LYC. Os ângulos internos de um quadrilátero somam 360, assim:*
x+(2x+y)+2(180-y-a)=360, o que nos dá x = a "

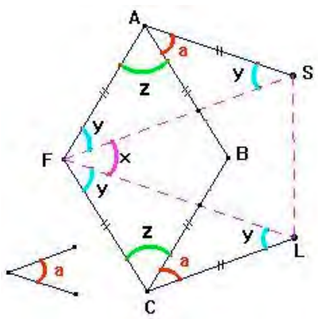
Grupo 7



"para comprovar o funcionamento do instrumento, devemos provar que de fato a ponta L constrói uma imagem de S rotacionada de acordo com o ângulo SAB, em torno de F. Em miúdos, provar que são iguais os ângulos SAB e SFL e que FS=FL.
Olhando para o triângulo AFB, como é isósceles temos são iguais os ângulos AFB e ABC; da mesma forma no triângulo FCB temos a igualdade dos ângulos CFB e FBC. Assim segue que são iguais os ângulos AFC e ABC. Usando LAL temos a congruência dos triângulos FAS e FCL e portanto FS=FL.
Quanto a igualdade de LFS e SAB , da congruência de ângulos em triângulos isósceles, da propriedade de ângulos opostos pelo vértice e do teorema de 180 podemos escrever quanto ao quadrilátero FDBE, com soma de ângulos igual à 360:

y+(2x+y)+2(180-a-x) = 360
y+2x+y+360+2a-2x=360
2y-2a=0 ou seja y=a"

Grupo 8

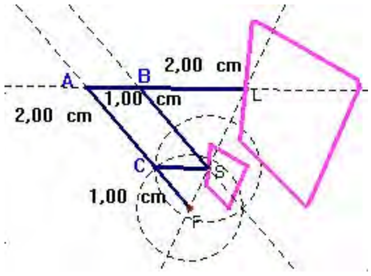


"por LAL (FA=FC, ângulo z+a, AS=CL) temos a congruência dos triângulos FAS e FCL e portanto FS=FL.
Como o triângulo FAZ é isósceles temos:
2.y+z+a = 180 .
Como FABC é paralelogramo (ângulos consecutivos somam 180) e como são congruentes os ângulos CFA e AFS temos:
2.y+x+z = 180
Das igualdade concluímos que:
x = a "

INSTRUMENTO 2

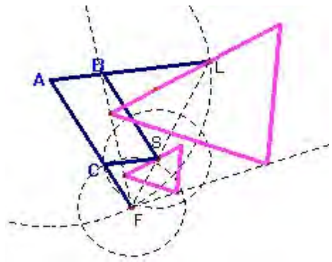
- **Exploração inicial**

Grupo 1



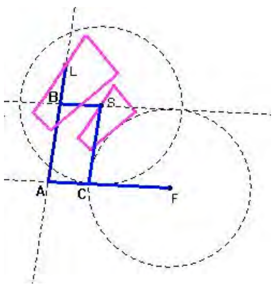
"o instrumento amplia objetos"

Grupo 2



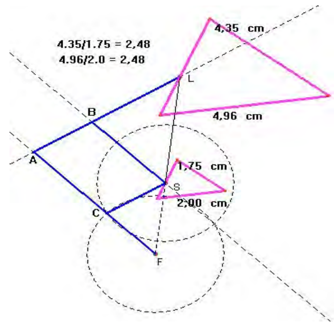
"o instrumento serve para fazer figuras idênticas as feitas pelo ponto S, pelo ponto L, com tamanhos que variam conforme aumentamos ou diminuímos os segmentos"

Grupo 3



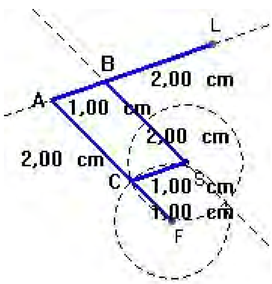
"reproduz desenho feito em S ampliado em L"

Grupo 4



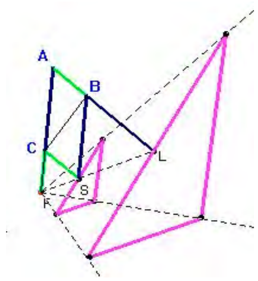
"serve para fazer cópias aumentadas, sem nenhuma rotação, de acordo com a média aritmética (CF+BL) / 2 (grau de aumento da cópia)"

Grupo 5

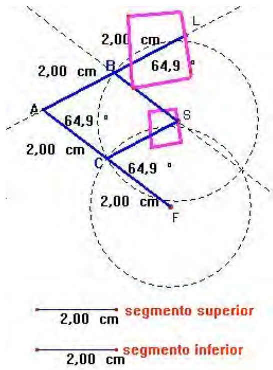


"o instrumento aumenta a figura da ponta seca na média aritmética das varetas CS e BS"

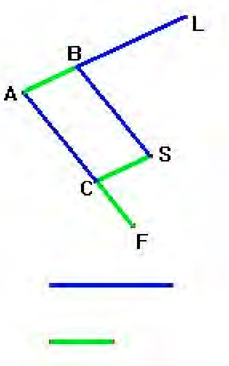
Grupo 6



"o instrumento amplia figuras, reproduzindo a ampliada em L. A figura é ampliada por projeção. O ponto F é o foco e projetamos a figura, sendo ela ampliada a uma distância d em relação ao foco"

Grupo 7	**Grupo 8**
Não participou da atividade relativa ao instrumento 2.	 *"O instrumento copia figuras maiores que a figura original. O fator depende do segmento superior e inferior; aumentando o superior a ampliação aumenta linearmente"*

- **Propriedades a serem impostas ao instrumento físico** [2]



Fatos declarados insuficientes:

AB=CS, AL=AF, BS=AC (insuficiente) , pontos F, L e S na mesma reta (Grupo 1)

"AL=AF, AB=CS, AC=BS" (Grupo 4)

Fatos declarados incluindo fatos estáveis implícitos (sublinhados):

"AB=CS, AL=AF, BS=AC (insuficiente) , <u>pontos F, L e S na mesma reta"</u> (Grupo 1)

"AL=AF, AB=CS, AC=BS, CS=CF, <u>AB // CS e AC // CS</u>" (Grupo 5)

"FA=AL, CA=SB=BL, FC=CS=AB, <u>CS // AL e FA // BS</u>" (Grupo 6)

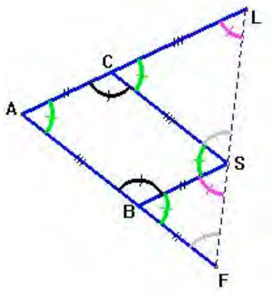
"BL=BS=AC, AB=CS=CF, <u>AL // CS,BS // AC, ABCD é paralelogramo, são iguais os ângulos BAC=LBS=SCF</u>" (Grupo 8)

[2] Do grupo 2 não se tem registro das propriedades.

- **Demonstrações** [3]

a) controle parcial, uso de *fatos estáveis implícitos*

Grupo 1



"Hipótese: CA=SB=BF , CL= CS=AB e AL=AF **(desnecessário)**

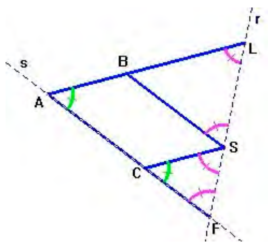
Tese: L,S e F estão alinhados e FL/FS=AF/BF

Demonstração: ACSB é um paralelogramo porque os lados opostos são congruentes. Como CS e AB são paralelas temos os pares de ângulos congruentes: LCS=CAB, CSB=SBF. Sendo AL // BS traçando a transversal FS obtemos a igualdade de ângulos ALF = BSF **(usa o alinhamento de F,S e L)**. *Donde são semelhantes os triângulos ALF, BSF e CLF. Daí vem que por ser a transversal FL a reta que determina os ângulos nas paralelas, concluímos que os pontos L,S e F estão na mesma reta* **(inferência imprópria)**

Da semelhança dos triângulos ALF e BSF concluímos que AF/BF =FL/FS"

Traçando uma reta perpendicular à LF passando por S teremos dois ângulos de 90 graus que somados serão igual à 180, logo F, S e L estão alinhado"

Grupo 2



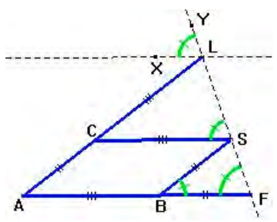
"Hipóteses: BS=AC, BA=CS (insuficiente)

Tese: F,S e L alinhados e AF/BF=FL/FS

Demonstração: se mostrarmos que os ângulos LFA e LSC são congruentes então mostramos que L,S e F estão alinhados **(inferência imprópria)**. *Como CS //AB e a reta FL é transversal segue a igualdade dos ângulos* **(usa o alinhamento de F,S e L)**

De AC//BS e reta s=AB transversal então são congruentes os ângulos SBF e CAF. O triângulo ALF é isósceles então são congruentes os ângulos AFL e ALF. O triângulo BSF é isósceles então são congruentes os ângulos BFS e BSF. Usando a relação de congruência dos ângulosdos triângulos ALF e BSF provamos a razão de proporcionalidade AF/BF =FL/FS."

Grupo 4



Grupo 4

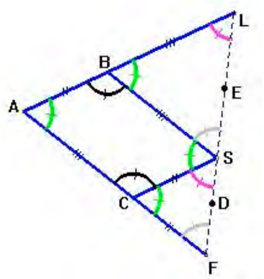
Sendo ACSB paralelogramo, CS // AB e CA//SB. Como F está no segmento AB **(linguagem imprória)** *AF//CS. Passando uma transversal que corte CS e AF e que passe por L* **(imposição de fato estável implícito)**, *temos por alternos internos a congruência dos ângulos AFL, CSL e XLY* **(usa o alinhamento de F,S e L)** . *Assim provamos que L,S e F estão alinhados* **(inferência imprópria)**

Por alternos internos **(linguagem imprória)** *mostramos que são iguais os ângulos AFL=CSL, LAF=LCS, LFA=LSC ...* **(não conclui)"**

---

[3] Dos grupos 3 e 7 não se tem registro da demonstração.

Grupo 8

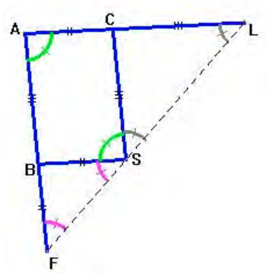


"Por que F, S e L são colineares ? Considerando o paralelogramo ABSC, seus ângulos consecutivos são suplementares, logo são congruentes os ângulos CAB, SBL e FCS. Como BS // AF traçando a semireta transversal FS são congruentes os ângulos AFS e BSE, sendo E ponto oposto à F depois de S. Como CS // AL traçando a semireta transversal LS são congruentes os ângulos ALS e CSD, sendo D um ponto oposto à L depois de S. Então são semelhantes os triângulos BLS e CSF **(usa os fatos estáveis implícitos: semireta FS passa por L e semireta LS passa por F)** *, logo seus lados homólogos são paralelos e portanto os pontos F, S e L são colineares.*

Por que FS / SL = AB / BL ? (a razão considerada não é a mais apropriada para descrever Como são semelhantes os triângulos BLS e CSF então: FS/SL= CS/BL= AB/BL"

b) controle parcial, perturbação de instância de desenho na argumentação

Grupo 5

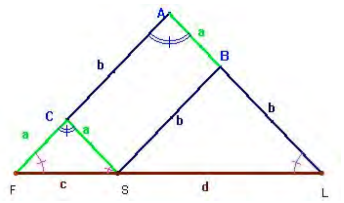


"Temos que são isósceles os triângulos SCL e FBS (foi declarado na construção SC=CL e FB=BS). Logo, visto que os ângulos da base são congruentes em triângulos isósceles, CSL=CLS e BFS=BSF. No paralelogramo ACSB temos que os ângulos opostos são congruentes, assim BAC=BSC. Como a soma dos ângulos do triângulo é igual à 180 graus temos que os ângulos do triângulo FAL somam 180 e pelas congruências de ângulos já vistas BSC+CSL+BSF = 180 e portanto F, S e L estão alinhados.

Comparando os triângulos LAF e SBF, os ângulos são congruentes : F é comum, L e S, A e B são correspondentes em retas paralelas . Por construção AF=AL e BF=BS e portanto AF / BF = AL / BS. Visto que $(FL)^2 = 2.\ AF^2$ *e* $FS^2 = 2.BF^2$ **(na instância de representação o desenho escapa do controle conceitual e os triângulos FAL e FBS são considerados retângulos, o que implicaria FL e FS constantes)** *e portanto* $(AF / BF)^2 = (FL / FS)^2$ *ou seja AF / BF = FL / FS*

c) pleno controle

Grupo 6



O quadrilátero ABSC possui lados opostos congruentes temos que esse quadrilátero é um paralelogramo. Prolongando os segmentos CS, AB e SB descobrimos através dos ângulos alternos e internos que FCS≡CAB≡SBL. Agora ligamos os pontos FS, SL e FL e visualizamos três triângulos que são respectivamente ΔFCS, ΔSBL eΔFAL. Sabemos que o ponto S é comum aos segmentos FS e SL e temos que provar que S pertence ao segmento FL, para que desse modo concluirmos que FS, SL e FL são colineares e podermos usar a relação entre triângulos.

Sabendo que cada triângulo possui dois lados congruentes temos que os três são isósceles.Também já provamos que todos possuem um ângulo em comum, que vou chamar de α, e estão entre os lados que são congruentes, portanto, temos por LAL que $\Delta FCS \sim \Delta SBL \sim \Delta FAL$. Como se trata de triângulos isósceles teremos em cada um o um ângulo α e dois ângulos β tais que $\alpha+2\beta=180^o$.

O quadrilátero ABSC é um losângulo e seu ângulo CAB=α logo CSB=α, pois é oposto. No ΔFCS temos que o ângulo FCS=α logo CFS≡FSC=β. No ΔSBL temos que o ângulo SBL=α logo LSB≡SLB=β. Por fim examinemos os ângulos em que o ponto S partcipa e teremos:

FSC+CSB+BSL =β+ α+β = α+2β = 180^o . Então concluímos que os pontos F, S e L são colineares e podemos enfim usar o teorema fundamental da proporcionalidade relacionada com a semelhanças entre os triângulos.

Quanto a ampliação:

$(a + b)/a = (c + d)/c \Rightarrow (a + b)/a = f/c$, *com* $f = c + d$.

$c(f/c) = c[(a + b)/a] \Rightarrow f = ca/a + cb/a$

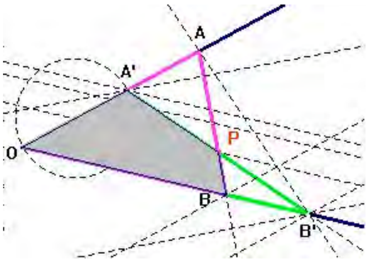
$f = c + cb/a \Rightarrow f = c(1 + b/a)$

Logo FL é (CA/FC) vezes maior que FS **(linguagem imprecisa)**, *ou ainda, a figura fixada no ponto S é reproduzida pelo ponto L (CA/FC) vezes maior* **(linguagem imprecisa)**.

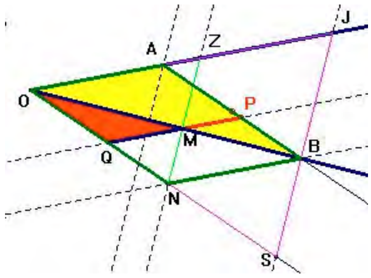
Atividade 6

- **Extensões de desenho**

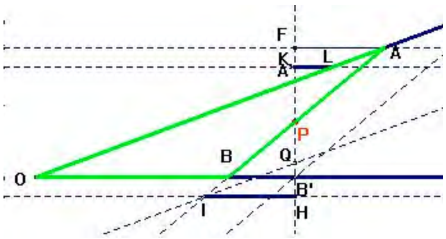
Grupo 1



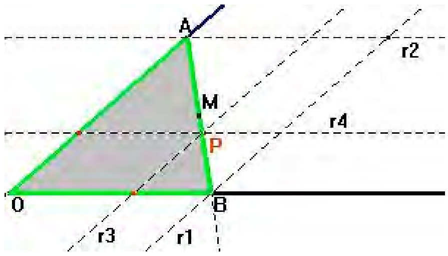
Grupo 2



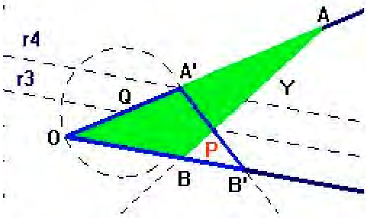
Grupo 3



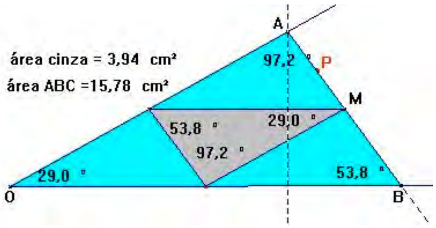
Grupo 4



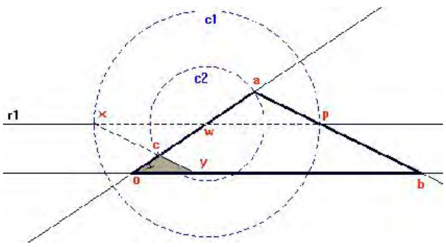
Grupo 5



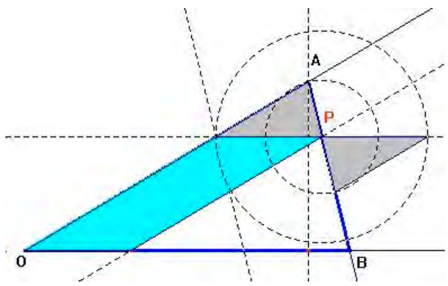
Grupo 6



Grupo 7



Grupo 8



Anexo 3 Transcrições de citações

- **Capítulo 1**

Nota de rodapé 5

"The most ancient of the SUPERB (colocado em maiúscula pelo autor*) theories is the Euclidian geometry that we learn something of at school. The ancients may not have regarded it as a physical theory at all, but that is indeed what it was: a sublime and superbly accurate theory of physical space (...) Why do I refer to Euclidian geometry as a physical theory rather than a branch of mathematics? Ironically, one of the clearest reasons for taking that view is that we now know that Euclidian geometry is not entirily accurate as a description of the physical space that we actually inhabit (...) But that fact does not detract from Euclidian geometry's characterization as SUPERB. Over a metre's range, deviations from Euclidian flatness are tiny indeeed, errors in treating the geometry as Euclidian amounting to less than the diameter of an atom of hydrogen!."*

- **Capítulo 2**

Citação 5

"... as a mathematician you can go to any place in the world and, given enough time, you can convince anyone that 3 is a prime number, or that the 3rd decimal of Pi is a 1, or that Fermat's last theorem is true. The point is, universal agreement is often easily reached about what constitutes a mathematical fact (...) mathematical objects are universal and effective, first, because our biological brains have evolved to progressive internalize universal regularities of the external world, and second, because our cultural mathematical constructions have also evolved to fit the physical world."

Citação 13

"Deductivist style hides the struggle, hides de adventure. The whole story vanishes, the sucessive tentative formulations of the theorem in the course of the proof procedure are doomed to oblivion (...)"

Citação 14

"(...) mathematics does not grow through a monotonous increase of the number of indubitably estabilished theorems but through the incessant improvement of guesses by speculation and criticism, by the logic of proffs and refutations."

Citação 15

The mathematician at work makes vague guesses, visualizes broad generalizations, and jump to unwarranted conclusions. He arranges and rearranges his ideas and becomes convinced of their truth long before he can write down a logical proof. The conviction is not likely to come early – it usually comes after many attempts, many failures, many discouragements, many false starts...experimental work is needed... thought-experiments."

Citação 16

"Une fois j'ai cherché à démonstrer un théorème et, pendant huit jours, je n'y suis pas parvenu.. Tous les soirs, la fatigue aidant, je croyais l'avoir démontré, et, au réveil, instantanément, je

voyais l'erreur dans mês résultats de la veille: au septième jour, les murailles tombèrent et je truvai un contre-exemple. Le théorème cherché était faux, et il suffisait de six lignes pour écrire le contre-exemple. J'ai alors rédigé l 'article ainsi: 'On pourrait se poser la question suivant...C'est manifestement faux, comme le montre tout de suite le contre-exemple suivant..."

Citação 17

"Je fasait régulièrement la même promenade sans progresser d'un millimètre dans mon problème, lorsqu'un jour j'eus l 'impression que tout pouvait se débloquer, ce que je vérifiai à ma table de travail ... des éléments chaotiques et incontrôlables s'organisaient en un tout cohérent. Le mois qui a suivi a eté assez pénible car je devais remplacer l'intuition par une démonstration rigoureuse et je naviguais d'épouvant en épouvant: ne me serais-je pas trompé?..."

Citação 18

"The schema of construction of a mathematical theory is exactly the same as that in any natural science. First we consider some objects and make some observations in special cases. Then we try and find the limits of application of our observations by seeking counter-examples to prevent unjustified extension of our observation to too wide a range of events (...) As a result we formulate the empirical discovery that we have made as clearly as possible. After this there comes the difficult period of checking the reliability of the conclusions obtained. At this point a special technique has been developed in mathematics (...) This technique is called modeling. When constructing a model, the following idealization is made: certain facts which are only known with a certain degree of probability or with a certain degree of accuracy, are considered to be 'absolutely' correct and are accepted as 'axioms'. The sense of this 'absoluteness' lies precisely in the fact that we allow ouserlves to operate with these 'facts' according to the rules of formal logic, in the process declaring 'theorems' all that can be derived from them."

Citação 22

Why is there such a big expansion from the informal discussion to the talk to the paper? One-on-one, people use wide channels of communication that goes far beyond formal mathematical language. They use gestures, they draw pictures and diagrams, they make sound effects and use body language...With these channels of communication, they are in a much better position to convey what's going on, not just their logical and linguistic facilities, but their other mental facilities as well...Mathematics in some sense has a common language: a language of symbols, technical definitions, computations and logic. This language efficiently conveys some, but not all, modes of mathematical thinking".

Citação 24

"The style of exposition in this book is somewhat experimental. The most efficient logical order for a subject is usually different from the best psychological order in which to learn it (...) In a formal and logically ordered approach to a subject, readers have little choice but to follow passivily behind the author. (..) As one reads mathematics, one needs to have na active mind (...) The style of exposition in this book is intended to encourage the reader to pause, to look around and to explore (...) to take the time to construct his own mental images."

Citação 43

"all acts of intellectual crativity are process of reflexive abstraction (...) There is a transposition from a lower level of intelectual construction to a high level of intellectual construction"

Citação 45

“from the psychological point of view new mathematical constructions proceed by reflective abstraction (which amounts to supposing that all mathematical creations extend mental developement itself at higher and higher levels)”

Citação 46

“*the body of mathematics is a model of creativity and rests on a process of reflexive abstraction (...) All of the history of mathematics is a history of reflexive abstraction*”

Citação 47

“*it (*reflective abstraction*) alone supports and animates the immense edifice of logico-mathematical constructions”*

Nota de rodapé 51

“The child does not built systems(...) he thinks concretely, he deals with each problem in isolation and does not integrate his solutions by means of any general theories from which he could abstract a common principle”

Citação 57

"On s'aperçoit que la psychologie de la pensée mathématique demeure bien différente des schémas logiques dont on se contente ordinairement (...) A lire M. Johannot, on est obligé de reconnaître sans cesse que, chez l'adolescent comme chez l'enfant, autre chose est de comprendre une opération effectuée sur des réalités et autre chose est la traduire en un langage abstrait ainsi que d'opérer sur les seuls signes propres à cettte langue spéciale. Et sourtout on s'aperçoit que même une fois ébauchée, la construction de la pensée 'formelle', c'est-à-dire justement de ce mode de raisonnement qui procède sur des 'proprositions' et non plus sur des réalités manipulables elles-mêmes, il reste à franchir de nombreuses étapes avant que le sujet puisse assimiler l'enseignement mathématiques (...) Il existe des paliers successifs d'abstraction, autrement dit des stades intermédiaires entre les premières opérations formelles et celles qui atteignent la généralisation vraie."

Citação 61

“Nous nous engagions, au sein d’une psychologie sociale génétique, en essayant de relever le défi d’une étude empirique de l’alternative: ‘developpement endògene ou transmission sociale?’ (...) avec le projet de mettre en évidence empirequement, par quels processus médiateurs les facteurs sociaux qu’invoquaint les conceptualisations théoriques, affectaint voire suscitaient ou construisaient les processus cognitifs”

Citação 64

“il faut que la déstabilisation porte sur la procédure de résolution elle-même (...) les perturbations doivent affecter les manières de faire et pas uniquement les résultats auxquels ces dernières conduisent”

Citação 65

“(...) le type de fonctionnement socio-cognitif mis en ouvre dans l’interaction de résolution, et que sont efficacité en termes de bénéfices individuels dépendent tous deux du type de fonctionnement cognitif induit par la situation-problème (...) pour obtenir des progrès individuels par interaction de résolution il faut se demander, pour chaque type de progrés cognitif recherché, quelle est la meilleure manière de construire la situation problèm de telle sorte qu’elle favorise conjointement la mise en ouvre

des fonctionnement cognitifs modifiables par l'interaction et le fonctionnement socio-cognitif le plus susceptible de remplir cet office."

Citação 67

"Le manque de généralisation (parmi les adultes analphabètes) constitue l'aspect le plus frappant de nos résultats (...) Le problème qui nous est maintenant posé est celui du passage de ce mode de pensée à celui observé chez la majorité des sujets scolarisés (...) L' hypothèse que nous avons formulée est que l'acquisition de notions logiques est determinée par des conditions qui concernent aussi bien l'expérience au sens strict (empirique) que l'expérience de relations vécues dans certains contextes sociaux particuliers. La scolarisation même est, soit en tant qu'exercice direct d'apprentissage, soit en tant que pratique de rapports sociaux extra-familiaux, un conditionnement en partie éxtérieur à l'individu, une discipline mentale spécifique (...)"

Citação 74

"D*e grands auteurs comme Vygotsky et Piaget ont fourni des élaborations théoriques susceptibles de rendre compte de l'intrication de ces processus (psychologiques et de régulation sociale). Mais chacun à sa façon , a tendence à privilégier une dimension particulière."*

Citação 80

"...we find ourselves examining on the machine a collection of special cases which is too large for human to handle by conventional means. The computer is encouraging us to practice unashamedly and in broad daylight, certain customs in which we indulge only in the privacy of ours offices, and which we never admitted to students: experimentation. To a degree which never appears in the courses we teach, mathematics is an experimental science...The computer has become the main vehicle for the experimental side of mathematics."

Citação 84

The traditional epistemology is based on the proposition , so closely linked to the meium of text — written and especially printed. Bricolage and concrete thinking always existed but werw marginalized in scholary contexts by the previleged position of text. As we move into the computer age and new and more dynamic media emerge, this will change (...)

Citação 88

"*Almost all my mathematical thinking is done visually and in terms of non-verbal thougths* (...) O*ften the reason is that there simply are not the words available to express the concepts that are required (...) I often calculate using specially designed diagrams (...) it would be a very cumbersome process indeed to have to translate such diagrams in words (...) I find words almost useless for mathematical thinkin."*

Citação 89

"*as mathematics gets ever more complex, it becomes increasingly important to have good tools to supplement our intuition and for communicating our intuitive ideas to others"*

Citação 95

"Students have to learn mathematics as a social knowledge. They are not free to choose the meanings they construct. These meanings must not only be efficient in solving problems, but they must also be coherent with those socially recognized."

Citação 107

“le champ de la didactique se rapproche bien de celui d’une science humaine, dont l’objet n’est pas d’établir des ‘théorèmes’ ni des lois, mais bien plutôt d’arriver à mettre en évidence certaines régularité”

Citação 113

“L’élève apprend en s’adaptant à un milieu qui est facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres (...) Ce savoir, fruit de l’adapatation, se manifeste par des réponses nouvelles qui son la preuve de l’apprentissage (...) La conception moderne de l’enseignement va donc demander au maître de provoquer chez l’élève les adaptations souhaitées, par une choix judicieux, des ‘problèmes’ qu’il lui propose . Ces problèmes (...) doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement. Entre le moment où l’élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maître se refuse à intervenir comme proposeur des conaissances qu’il veut voir apparaître (...) Les problèmes, choisis de façon à ce que l’élève piusse les accepter doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement (...) L’élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une conaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu’il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques.”

Citação 115

“La notion d’obstacle est centrale dans la théorie des situations d’une part parce que l’apprentissage par adaptation qui permet de donner du sens aux conceptes produit en général en même temps des conceptions erronées, des conaissances locales qu ‘il aura lieu de remettre en question, d’autre part parce que ces résistances que sont les obstacles vont nécessiter la construction de situations didactiques adaptées pour aider les élèves à les franchir(...)”

- **Capítulo 3**

Citação 1

“Axioms, definitions, theorems, and proofs have to penetrate as active components in the reasoning process. They have to be invented or learned, organized, checked, and used actively by student. Understanding what rigor means in a hypothetic-deductive construction, the feeling of coherence and consistency, the capacity to think propositionally, independently of practical constraints, are not spontaneous acquisitions of the adolescent. In Piagetian theory, all these capabilities are described as being related to age – the formal operational period (...) they are no more than open potentialities that only an adequate instructional process is able to shape and transform into active mental realities.”

Citação 2

“Une modélisation met en jeu une certain abstraction du domaine de realité concerné en ne retenant de ce dernier qu’un certain ensemble d’objets et de relations qui sont représentés dans le modèle. Le modèle ne rend compte que d’une partie du domaine de realité... À chaque modèle est donc attaché un domaine de fonctionnement dans le domaine de realité dépendant des objets et relations retenus pour la modélisation.”

Citação 4

“...Take the example of the rhomb! Before learning geometry children possess the ‘image’ of the rhomb. They are acquainted with rhombs that are special concrete objects. Now they will experience what ‘rhomb’ means in the geometrical context. They discover properties of this figure... The

pupil who has started at ‘level 0’ with undifferentiated visual structures, is now at the first level... The system of properties of geometrical figures will be organized... However, at this level relations are not a subject matter as are the properties of figures... At the second level the relations which have been devices of organizing at the first level will become a subject matter. Here the organizing devices are relations between relations, mainly of a logical character...the interrelatedness between relations by means of implications can be used at this level, but they can become a subject matter at the third only(...) Finally at the fourth level (hardly attainable in secondary teaching) logical thinking itself can become a subject matter”

Citação 11:

“Geometry is the science that deals with the properties of space. It differs essentially from pure mathematical domains such as the theory of numbers, algebra, or the theory of functions. The results of the latter are obtained through pure thinking (...) The situation is completely different in the case of geometry. I can never penetrate the properties of space by pure reflection(...). Space is not a product of my reflections. Rather, it is given to me through the senses.”

Citação 18

"(..) in the special case of geometrical reasoning, one has to do with a (...) type of mental objects which simultaneously posses both conceptual e figural properties. The reason for this profound symbiosis between symbolic, analytical constraints and figural properties in geometrical reasoning is that we deal in fact with axiomatic systems It is by resorting mainly to figures intrinsically controlled by conceptual constraints, that the process of invention in geometry can progress creatively”

Citação 19

“The difficulty in manipulating figural concepts, that is, the tendency to neglect the definition under the pressure of figural constraints, represents a major obstacle in geometrical reasoning (...)Very often the figural constraints may escape the conceptual control and impose, to the line of thought, interpretations which are figurally consistent but which are not subject any more to the conceptual constraints.”

Citação 23

“... in the special case of geometrical operations, the role of which is just to describe the spatial figures and their transformations, there is a homogeneity between the symbolized (le symbolisé) consisting in spatial operations and the representing symbol (le symbolisant imagé) which is itself of a spatial nature: it follows the privileged situation of the geometrical intuition, the double nature of which, both operational and imaginatory, reaches na intimate synthesis more than any other domain...The geometrical intuition reaches this adequate synthesis only by subordinating the imagined elements to its operational nucleus and this subordination implies a development.”

Citação 29

“C'est le discours démonstratif qui détermine le statut des objects en jeu (...) La démonstration participe ainsi de la construction de ce que l'on peut appeler l'intelligibilité des faits mathématiques.”

Citação 30

“It seems clear that we want a proof because (...) if something is true and we can't deduce it in this way, this is a sign of a lack of understanding on our part. We believe (...) that a proof would be a way of understanding why (...) the conjecture is true, which is something more than just knowing from

convincing heuristic reasoning that is is true"

Citação 33

If I did it on a bunch of triangles, and then if I would find it to be all true then I'd just accepted it... If you keep doing this like maybe ten more times and it just keeps on doing that, I'd just say it would just have to be that way..."

deductive proof could be for this triangle (in the associated diagram), but up here the satatement says in any triangle. I would have to think of all the other types of triangle, it would be true for. I coudn't just do it right now..."

"I would still try it with a lot of different triangles to make sure. After I had seen the deductive proof, I stil might want to try just to be reassured... I'm always doubting... With just the deductive proof and no other examples, I would still be kind of skeptical..."

Citação 35

"hypothéquée par la singularité de l'évènement qui la constitue...tributaire d'un contingente matérial: outil imprécicis, défaut de fonctionnement"

Citação 38

"L'élaboration de démonstrations requiert une organisation et un statut particulier des conaissances. Explicitées et acceptées par une communauté qui ne s'autorise plus à aller chercher où elle veut les arguments qu'elle utilize, les conaissances doivent constituer un ensemble fortement institutionnalisé de définitions, de théorèms, de règles de déduction, dont la validité est socialmente partegée. Ce principe est fondateur de la riguer mathématique"

Citação 39

"L'évolution des preuves pragmatiques vers le preuves intellectuelles et la démonstration, n'est pas seulement marquée par une évolution des caractéristiques langagières, mais aussi par celle du status et la nature de la conaissance. Les preuves pragmatiques s'appuient sur des savoirs pratiques essentiellement engagés dans l'action, les preuves intellectuelles demandent que ces conaissances puissent être prises comme objet de réflexion ou de débat. Cela correspond à une évolution classiquement décrite par la psychologie genevoise"

Nota rodapé 43

"I would be grateful if anyone who has understood this demonstration would explain it to me"

Citação 44

"(...) some day soon, maybe six months from now, maybe sixty years from now, somebody will write a proof of the four colou theorem that will take up sixty pages(...) Soon after that, perhaps six months or sixty years later, somebody will write a four page proof, based on concepts that in the meantime we will have developed and studied and understood. The result will belong to the grand, glorious, architectural structure of mathematics(...) Efficiency is meaningless. Understanding is what counts"

Relativo a nota de rodapé 48

"In the secondary school many geometry problems requiring computation assume an ability to operate not only with concepts taken separately, but with a system of conceptes. Such problems demand an awareness of the transition from one concept to another.(...) Such concepts had to be chosen on the basis of their connections which were given directly in the condition. Let us agree to call them inferential concepts. Figures corresponding to inferential concepts are formed on the drawings in two ways. In some problems the figures corresponding to the concepts given in the condition illustrate the inferential concepts simultaneously(...) Since solution of such problems requires reinterpretation of the figure in terms of the concept used, we shall call them problems of reinterpreting drawings. In other problems the figure corresponding to the inferential concept is formed on the drawing as a result of the interaction of elements of figures given in the condition. (...) Since analysis of the figure corresponding to the inferential concept demands mental reconstruction of the drawing in these problems, let us agree to call them problems of reconstructing the drawing", p.93 e p. 94.

Citação 51

"In any geometrical representation the perceptual recognition of geometrical properties must remain under the control of statements. It is the deductive dependence between statements which determines what the figure can represent. Here we can have a gap between what the figure <u>*shows*</u> *and what its* <u>*represents*</u>*. What the perceived figure shows is what is seen without conscious analysis."*

Citação 58

"*the student must see both the essential and the inessential, the general and the specific. He must consciously distinguish these aspects in mastering concepts and theorems*."

Citação 60

"The integration of conceptual and figural properties in unitary mental structures, with the predominance of the conceptual constraints over the figural ones, is not a natural process(..) One of the main reasons that geometry is such a difficult topic (...) is that figural concepts do not develop naturally towards their ideal form (...) Consequently, one of the main tasks of mathematical education (in the domain of geometry) is to create types of didatical situations which would systematically ask for a strict cooperation between the two aspects, up to their fusion in unitary mental objects"

Citação 67

"On en voit aisément la raison , si on se représente ce Qui arriverait, en supposant que les deux côtés AB, AC du triangle ABC, fussent d'abord couchés sur BD, et sur CE, prolongements de la base BC, et qu'ensuite on les relevât pour réunir leurs estrémités au point A; car allors l'égalité de ces deux côtés les emoêcherait de faire plus de chemin l'un que l'outre. Dons étant joints, ils pencheraient également sur la base BC. Donc l'angle ABC serait égal à l'angle ACB"

Citação 78

"Beyond the use of visual phenomena as a catalyst for generating mathematical questions, tasks must be set up which allow the learner to construct a link between visual and theoretical aspects of geometry"

Citação 81

"Although I have often achieved confidence in the general validity of a conjecture by seeing its truth displayed while objects undergo continous transformation across the screen (...) this provides no personally satisfactory explanation of ***why it may be true*** (grifado pelo autor) *(...). It merely confirms that*

it is true, and, even though the considerations of more and more examples may increase my confidence even more, it gives no psychological satisfactory sense of ilumination (...) It has been my experinece that the more convinced I become, the more motivated I also become to find out why it is true"

Citação 84

"To explain something, we have to explain it in terms of something else. Students may need to be guided to appropriate explanations (proofs), the production of alternative explanations and their comparison.(...) in our experience, only after considerable concerted exposure to work of this kind do students become proficient in constructing their own explanation and critically comparing them. What is significant, however, is that, when proof is seen as explanation, substantial improvement in students' <u>attitudes</u> toward proof appears to occur."

Citação 87

"(...) very often what the students are seeking is a sense of how the 'mathematical syste'm in question works. Such knowledge is often result of 'running' the system, not to accumulate outputs as in an inductive approach, but rather to develop a fell for the system. I call this transformational reasoning (...) Transformational reasoning is supported by transformational reproductive images or by anticipatory images. In either case, the problem solver is able to visualize the transformation resulting from an operation (...) Transformational reasoning involves envisioning the transformation of a mathematical situation and the results of that transformation (...) is often a sense of understanding how it works."

Texto da Figura 3.23

"(...) *the following proof which was originally offered by a preservice secondary teacher (Amy) taking a course in college geometry : Amy demonstrated to the whole class how she imagines the theorem, "The sum of the measures of the interior angles in a triangle is 180." Amy said something to the effect that she imagines the two sides AB and AC of a triangle ABC being rotated in opposite directions through the vertices B and C, respectively, until their angles with the segment BC are 90 (figs a,b) .This action transforms the triangle ABC into the figure A'BA'', where A'B and A''C are perpendicular to the segment BC. To recreate the original triangle, the segments A'B and A''C are tilted toward each other until the points A' and A'' merge back into the point A (fig c). Amy indicated that in doing so she "lost two pieces" from the 90 angles B and C (i.e., angles A'BA and A''CA) but at the same time "gained these pieces back" in creating the angle A. This can be better seen if we draw AO perpendicular to BC: angles A'BA and A''CA are congruent to angles BAO and OAC, respectively (fig d)."*

Citação 91

"*the challange is to construct new pieces of learnable mathematics (based firmly on the old) wich are learnable because they harness the potential of the new technology."*

- ## Capítulo 4

Citação 2

"L'ingénierie didactique , comme méthodologie de recherche, se caractérise en premier lieu par un schéma expérimental basé sur de 'réalisations didactiques' en classe, c'est-a-dire sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement."