

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Matemática e Estatística  
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura

# **O Método Min-Max e Existência de Geodésicas com Fronteira Livre**

Dissertação de Mestrado

Alessandra Fabian Sostisso

Porto Alegre, julho de 2022.

Dissertação submetida por Alessandra Fabian Sostisso como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Prof. Dr. Francisco Vanderson Moreira de Lima (PPGMat-UFRGS)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Álvaro Krüger Ramos (PPGMat-UFRGS)

Prof. Dra. Miriam Telichevesky (PPGMat-UFRGS)

Prof. Dr. Pedro Henrique Gaspar da Silva (University of Chicago)

02 de julho de 2022

*Ao Matias, por sempre ter insistido para que eu seguisse em frente.*

## Agradecimentos

À minha mãe Vanice por todo o apoio e incentivo desde sempre. Te agradeço mãe por sempre acreditar em mim e nunca ter me deixado sozinha, pois mesmo distante sempre soube fazer-se presente.

À minha irmã e amiga Fabiana por sempre valorizar o caminho que escolhi seguir e me apoiar em cada escolha. Obrigada Fabi por sempre estar disposta a conversar, chorar e se alegrar comigo, nesse percurso, existem muitas contribuições suas.

À Marlúbia, minha segunda mãe, por tanto carinho e por insistir que eu nunca abandonasse essa jornada. Obrigada por estar ao meu lado em todos os momentos, principalmente naqueles em que achei que nada daria certo.

Aos meus "álgebras" favoritos Darchan e Wesley, duas pessoas sensacionais que a matemática me apresentou. Obrigada pelas discussões inesquecíveis sobre matemática, álgebra, vida, saúde mental e música.

Ao Vinícius, meu irmão de orientação e docência, pela jornada e amizade. Foi um imenso prazer ter conhecido você! Obrigada por todo o apoio e por lembrar que eu não estava sozinha. Nunca saberei como expressar a gratidão que tenho por você.

As professoras Thaísa e Adriana. Obrigada pelas contribuições à minha formação! Vocês trouxeram muitas inspirações durante essa jornada, além de conquistarem minha admiração. Foi uma imensa satisfação ser aluna de vocês.

Ao Luiz Eduardo, outro grande amigo que a matemática me trouxe. Obrigada pelas incansáveis discussões sobre matemática, em dias de semana e finais de semana, pois elas foram essenciais durante esse período.

As minhas queridas professoras da graduação Eliete e Tânia. Durante minha graduação foram as minhas maiores inspirações, tanto na matemática quanto no ensino, sou muito grata por todos os ensinamentos compartilhados e pela amizade de ambas.

Ao Jean Carlos por sempre ter me ajudado nos momentos difíceis. Obrigada pelo seu otimismo e tranquilidade, pois foram elementos essenciais durante a jornada. Enfim, obrigada por tanto em todos esses anos.

Ao Matias por estar sempre presente e insistir incansavelmente para que eu perseguisse esse sonho. Obrigada por tudo! Acho que nunca encontrarei palavras que permitam expressar tamanha gratidão por tudo que fez e faz por mim até hoje. Obrigada por ser essa pessoa incrível e por acreditar em mim.

Ao Vanderson, meu orientador, por toda a paciência, disponibilidade e ensinamentos durante esse período de mestrado. Muito obrigada por me aceitar como sua orientanda e por todo o suporte fornecido que possibilitou a escrita desse trabalho. Em muitos momentos as coisas ficaram difíceis e eu pensei em desistir, mas você sempre conseguiu me motivar a seguir, equilibrando descontração e exigência. Enfim, muito obrigada por me guiar nesta jornada!

*“Will we ever know what the answer to life really is?  
Can you really tell me what life is?  
Maybe all the things that you know that are precious to you  
Could be swept away by fate’s own hand.”  
(Blood Brothers - **Iron Maiden**)*

## Resumo

Este trabalho tem como objetivo demonstrar a existência de geodésicas não-triviais com fronteira livre, resultado apresentado por Xin Zhou no artigo "On the free boundary min-max geodesics" [16]. Mais precisamente, dada uma variedade Riemanniana  $M^m$  completa e homogeneamente regular, e  $S^k \subset M^m$  uma subvariedade fechada e mergulhada, onde  $k < m$ , podemos encontrar uma geodésica não-trivial de  $M$  com fronteira livre na subvariedade  $S^k$ .

**Palavras-chave:** Geodésicas com fronteira livre. Processo de Encurtamento Modificado. Método Min-Max.

## Abstract

This work aims to demonstrate the existence of non-trivial geodesics with free boundary, a result presented by Xin Zhou in the article "On the free boundary min-max geodesics"[16]. More precisely, given a completely and homogeneously regular Riemannian manifold  $M^m$  and  $S^k \subset M^m$  a closed and embedded submanifold, where  $k < m$ , we can find a non-trivial geodesic of  $M$  with a free boundary in the submanifold  $S^k$ .

**Keywords:** Free-boundary geodesics. Modified Shortening Process. Min-Max Method.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>11</b>
2.1	Homotopia . . . . .	11
2.2	Métricas, Conexões e Curvatura . . . . .	12
2.3	Geodésicas e a aplicação exponencial . . . . .	14
2.4	Caracterização Variacional de geodésicas . . . . .	17
2.5	Completude e homogeneidade regular . . . . .	21
2.6	Espaços de Hölder, $L^p$ , e de Sobolev . . . . .	22
<b>3</b>	<b>O Processo de Encurtamento de Curvas</b>	<b>27</b>
3.1	Preliminares da seção . . . . .	27
3.1.1	A Segunda Forma Fundamental . . . . .	27
3.1.2	Propriedades de $M$ e $S$ . . . . .	29
3.1.3	Alguns resultados sobre $W^{1,2}([0, 1], M)$ . . . . .	31
3.2	Processo de Encurtamento Modificado . . . . .	36
3.2.1	Definindo $\Psi$ . . . . .	38
3.2.2	Propriedades 1 e 2 . . . . .	40
3.2.3	Propriedade 3 . . . . .	45
3.2.4	Propriedade 4 . . . . .	53
3.2.5	Propriedade 5 . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Existência de Geodésicas com fronteira livre</b>	<b>57</b>
4.1	Existência de geodésicas minimizantes . . . . .	57
4.2	Varreduras e a largura . . . . .	59
4.3	Modificando Varreduras . . . . .	61
4.4	Teorema Min-Max e Existência de Geodésicas . . . . .	64
	<b>Referências</b>	<b>67</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Um tópico clássico em Geometria Diferencial é a questão da existência de geodésicas, possivelmente satisfazendo alguma propriedade adicional. O interesse no assunto se iniciou com o problema da existência de geodésicas fechadas. Por exemplo, em 1898, Hadamard [6] mostrou que em uma superfície fechada de curvatura negativa, qualquer curva fechada que não é homotópica a um ponto, pode ser deformada na curva de comprimento mínimo dentro de sua classe de homotopia livre. Esta curva minimizante é necessariamente uma geodésica fechada. Este resultado foi generalizado por Cartan para o caso de uma variedade Riemanniana compacta e sem bordo, cujo grupo fundamental é não trivial.

Em 1905, Poincaré [15] questionou sobre a existência de pelo menos três geodésicas simples fechadas sobre superfícies suaves convexas homeomorfas à esfera. Em seguida, Birkhoff introduziu o método min-max e provou a existência de uma geodésica em fechada em qualquer superfície de gênero zero em 1917, e em variedades homeomorfas à esfera euclidiana  $n$ -dimensional em 1927. Birkhoff desenvolveu e utilizou o mapa de encurtamento de curvas e o conceito de varreduras, que consiste numa família de curvas fechadas a 1-parâmetro que cobrem a 2-esfera, para encontrar geodésicas fechadas não triviais como o limite de fatias com comprimento máximo, [15].

No ano de 1929 Lusternik e Schnirelmann [11] demonstraram a existência de pelo menos três geodésicas sem auto-intersecções em qualquer superfície compacta e simplesmente conexa. Entretanto, somente em 1951, usando a técnica de Birkhoff, que Lusternik e Fet provaram a existência de ao menos uma geodésica fechada em toda variedade Riemanniana compacta e sem bordo [13]. Com isso, a teoria começou a desenvolver-se consideravelmente por meio de trabalhos como os de Fet, Gromoll e Meyer (veja por exemplo [8]).

Em 2008, Colding e Minicozzi introduziram um invariante geométrico para variedades Riemannianas fechadas o qual denominaram largura e provaram um resultado mais forte que os anteriores [4, 15]. Eles modificaram o processo de encurtamento de Birkhoff para uma curva com o objetivo de construir boas varreduras de tal modo que se uma curva nessas varreduras tem comprimento próximo à largura, então ela está próxima de uma

geodésica. Em particular, segue como corolário a existência de geodésicas fechadas em superfícies Riemannianas compactas.

Em geral, uma variedade Riemanniana não-compacta pode não conter nenhuma geodésica fechada, um exemplo é o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . No entanto, um problema natural neste caso é tentar encontrar segmentos geodésicos cujos extremos encontram alguma subvariedade do ambiente de maneira ortogonal. Neste caso, dizemos que uma tal curva é uma geodésica com fronteira livre. Este problema também atraiu a atenção da comunidade. Por exemplo, Lusternik e Schnirelmann provaram que todo domínio limitado e com fronteira convexa em  $\mathbb{R}^n$  contém pelo menos  $n$  geodésicas com fronteira livre no bordo [12]. Este resultado foi generalizado por Bos para o caso de uma variedade Riemanniana compacta homeomorfa à bola unitária de  $\mathbb{R}^n$ , e cujo bordo é convexo [1].

Com base no trabalho de Colding e Minicozzi, em [16] Xin Zhou considerou uma variedade Riemanniana  $M^m$  completa e homogeneamente regular, e  $S^k \subset M^m$  uma subvariedade fechada e mergulhada, onde  $k < m$ . Adaptando o processo de Birkhoff modificado e o conceito de varreduras para o caso com fronteira, ele obteve o resultado análogo de Colding e Minicozzi para o caso com fronteira livre. Em particular ele provou a existência de uma geodésica de  $M$  com fronteira livre em  $S$ . O objetivo deste trabalho é apresentar o trabalho de Zhou. Portanto, provaremos o seguinte resultado.

**Teorema 1.1.** *Sejam  $M$  e  $S$  como acima e satisfazendo a condição  $\pi_2(M, S) \neq 0$ . Então existe uma geodésica não-trivial  $\gamma : I \rightarrow M$  com fronteira livre em  $S$ .*

Entretanto, este teorema é uma consequência de um resultado mais forte, isto é,  $\pi_2(M, S) \neq 0$  implica que existe  $F^*$  tal que  $W[F^*] > 0$ . Para uma versão precisa veja o Capítulo 4.

**Teorema 1.2.** *Se  $F^*$  é uma varredura com cuja largura associada  $W$  é positiva, então existe uma sequência de varreduras  $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset [F^*]$  com*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{t \in [0,1]} E(F_j(t, \cdot)) = W,$$

*tal que cada curva nas varreduras com comprimento próximo a  $W$ , está próxima a uma geodésica de fronteira livre.*

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: No Capítulo 2 apresentamos os pré-requisitos necessários, fixando notações e resultados clássicos sobre Homotopia, Geometria Riemanniana e Espaços de Hölder,  $L^p$  e de Sobolev, tendo como foco resultados que serão úteis para a compreensão dos Teoremas 1.1 e 1.2. No Capítulo 3 discutimos o processo de encurtamento modificado e suas propriedades. Finalmente, no Capítulo 4 apresentamos a definição e exemplos de varreduras e o processo de modificá-las, tendo por base o processo de encurtamento modificado e, por fim apresentamos as demonstrações dos Teoremas 1.1 e 1.2.

# Capítulo 2

## Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições, notações e resultados técnicos necessários para a compreensão desse trabalho. Além disso, assumiremos que o leitor possui um conhecimento básico referente a teoria de variedades diferenciáveis, para a qual boas referências são [10] e [9].

### 2.1 Homotopia

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados relacionados à homotopia. O leitor que deseja aprofundar-se no assunto, pode consultar referências como [7].

Dados  $X$  e  $Y$  espaços topológicos definimos

$$C(X; Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ é contínua}\}.$$

**Definição 2.1.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos, e sejam  $f, g \in C(X; Y)$ . Diremos que  $f$  e  $g$  são homotópicas, e escreveremos  $f \simeq g$ , se existir uma função contínua  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ , tal que  $\forall x \in X$ ,  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$ . Nesse caso, dizemos que  $H$  é uma homotopia entre  $f$  e  $g$ .*

De forma intuitiva, duas aplicações são homotópicas quando uma pode ser deformada continuamente na outra. Além disso, se definirmos  $f_t(x) = H(x, t)$ , para todo  $0 \leq t \leq 1$ , podemos notar que  $H$  representa uma família de funções contínuas  $f_t : X \rightarrow Y$ , com  $0 \leq t \leq 1$ , tais que  $f_0 = f$  e  $f_1 = g$ .

**Exemplo 2.2.** *(Homotopia linear) Seja  $X$  um espaço topológico qualquer. Dadas as aplicações  $f, g \in C(X; Y)$  suponha que, para todo  $x \in X$ , o segmento de reta entre  $f(x)$  e  $g(x)$  esteja contido em  $Y$ . Então, a aplicação  $H : X \times I \rightarrow Y$  definida abaixo é uma homotopia entre  $f$  e  $g$ ,*

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x).$$

Em particular, toda função contínua  $f : X \rightarrow C$ , com  $C$  um domínio convexo  $C \subset E$ , contendo a origem, é homotópica a função identicamente nula. De fato, considere  $H : X \times I \rightarrow Y$  dada por  $H(x,t) = (1-t)f(x)$ . Então  $H$  é contínua,  $H(x,0) = f(x)$  e  $H(x,1) = 0$  para todo  $x \in X$ .  $\diamond$

**Proposição 2.3.** A relação  $f \simeq g$  é uma relação de equivalência em  $C(X;Y)$ .

As classes de equivalência, segundo a relação de homotopia, são chamadas classes de homotopia. A classe de homotopia da função contínua  $f : X \rightarrow Y$  será denotada por  $[f]$ .

Seja  $X$  um espaço topológico. Um caminho em  $X$  entre  $x_0$  e  $x_1$  é uma função contínua  $\gamma : [0,1] \rightarrow X$  tal que  $\gamma(0) = x_0$  e  $\gamma(1) = x_1$ . Em posse dessa definição, vamos apresentar um tipo especial de homotopia para o caso de caminhos.

**Definição 2.4.** Sejam  $X$  um espaço topológico, e  $S \subset X$  um subespaço. Dois caminhos  $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow X$  são caminhos homotópicos com extremos em  $S$ , se existe uma aplicação contínua  $H : I \times I \rightarrow X$  tal que  $H(0,t) = \gamma_1(t)$ ,  $H(1,t) = \gamma_2(t)$ , e  $H(s,0), H(s,1) \in S$  para todo  $s, t \in I$ .

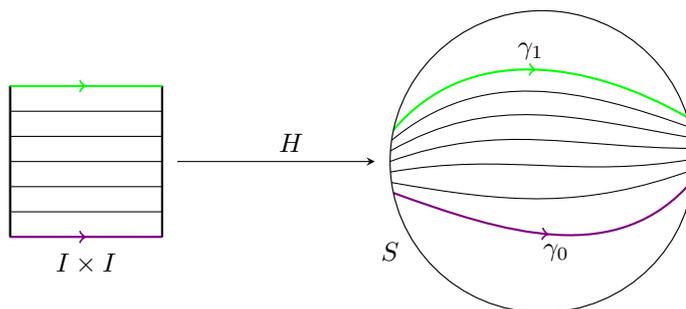


Figura 2.1: Caminhos homotópicos com extremos livres.

Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são caminhos homotópicos com extremos em  $S$ , denotamos  $\gamma_1 \simeq_S \gamma_2$ . Como no caso anterior, isto define uma relação de equivalência no espaço dos caminhos em  $X$  cujos extremos estão em  $S$ . É comum também dizer que  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são *livremente homotópicos com extremos em  $S$* . Dizemos que uma classe de homotopia é não trivial se ela não contém curvas constantes, e trivial caso contrário.

**Definição 2.5.** Um caminho  $\gamma : [0,1] \rightarrow X$  é dito fechado em  $x_0$ , se  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ .

Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são caminhos fechados homotópicos, sem restrição nos extremos, dizemos que eles são *livremente homotópicos*.

## 2.2 Métricas, Conexões e Curvatura

Com o objetivo discutir aspectos geométricos das variedades diferenciáveis recordamos a conceito de métrica Riemanniana. Esse conceito nos permite realizar medições

geométricas em uma variedade. Aliado ao conceito de métrica, temos o conceito de conexão, que permite falarmos sobre aceleração de uma curva, por exemplo. Em particular, consideraremos a conexão de Levi-Civita a qual pode ser vinculada a métrica Riemanniana.

**Definição 2.6.** *Uma métrica Riemanniana  $g$  numa variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação que a cada ponto  $p \in M$  associa um produto interno (forma bilinear, simétrica, positiva definida)*

$$g = \langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

*tal que, para qualquer que seja o par de campos de vetores diferenciáveis  $X, Y$  em  $M$ , a aplicação  $\langle X, Y \rangle : M \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável. Chamaremos de variedade Riemanniana toda variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana.*

Ao decorrer do texto, denotaremos por  $\mathfrak{X}(M)$  o conjunto dos campos vetoriais diferenciáveis em uma variedade diferenciável  $M$  e  $\mathcal{C}^\infty(M)$  o conjunto das funções suaves definidas em  $M$ .

Por meio da utilização da métrica podemos introduzir uma noção de como derivar um campo de vetores com relação a outro, conforme o seguinte resultado.

**Teorema 2.7.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana. Então, existe uma única aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

*chamada conexão de Levi-Civita tal que para quaisquer  $X, Y, W \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ,*

$$(i) \nabla_Y W \text{ é } \mathcal{C}^\infty(M)\text{-linear em } Y.$$

$$(ii) \nabla_Y W \text{ é } \mathbb{R}\text{-linear em } W.$$

$$(iii) \nabla_Y(fW) = f\nabla_Y(W) + Y(f)W.$$

$$(iv) [Y, Z] = \nabla_Y Z - \nabla_Z Y.$$

$$(v) X\langle Y, W \rangle = \langle \nabla_X Y, W \rangle + \langle Y, \nabla_X W \rangle.$$

*Além disso,  $\nabla$  é caracterizada pela fórmula de Koszul:*

$$2\langle \nabla_Y W, X \rangle = Y\langle W, X \rangle + W\langle X, Y \rangle - X\langle Y, W \rangle - \langle [W, X], Y \rangle - \langle [Y, W], X \rangle - \langle [X, Y], W \rangle. \quad (2.1)$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [5] página 61. □

**Definição 2.8.** *Seja  $(x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um sistema de coordenadas locais em  $\mathcal{U} \subset M$  aberto de uma variedade Riemanniana  $M$ . Neste sistema de coordenadas os*

símbolos de Christoffel são as funções reais  $\Gamma_{i,j}^k \in C^\infty(\mathcal{U})$ , expressas por:

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k, \quad \forall i, j, k \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.2)$$

Segue da Fórmula de Koszul que em termos dos coeficientes da métrica, os símbolos de Christoffel possuem a seguinte expressão:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n (\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}) g^{mk}.$$

O tensor de curvatura de  $M$  é o mapa  $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dado por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (2.3)$$

**Proposição 2.9.** *Seja  $\Pi \subset T_p M$  um plano, ou seja, um subespaço de dimensão 2. Considere  $v, w \in \Pi$  dois vetores linearmente independentes. Então*

$$\sec_M(v, w) = \frac{\langle R(v, w, w), v \rangle}{|v|^2 |w|^2 - \langle v, w \rangle^2} \quad (2.4)$$

não depende da escolha de  $v, w \in \Pi$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [5] página 105. □

A proposição anterior nos permite introduzir a seguinte definição. Dado um ponto  $p \in M$  e um plano  $\Pi \subset T_p M$ , o número real  $\sec_M(\pi) := \sec_M(v, w)$ , onde  $\{v, w\}$  é uma base qualquer de  $\Pi$ , é chamado de curvatura seccional de  $\Pi$ .

## 2.3 Geodésicas e a aplicação exponencial

Em Geometria, geodésicas são curvas de velocidade constante ou ainda, de aceleração nula, as quais possuem propriedades interessantes. Nesta seção, apresentaremos sua definição formal, bem como propriedades relacionadas.

**Definição 2.10.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\gamma : I \rightarrow M$  uma curva diferenciável. A curva  $\gamma$  é dita uma geodésica em  $t_0 \in I$  se  $\frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$  no ponto  $t_0$ ; se  $\gamma$  é geodésica em  $t$ , para todo  $t \in I$ , dizemos que  $\gamma$  é uma geodésica. Além disso, se  $[a, b] \subset I$ , a restrição de  $\gamma$  a  $[a, b]$  é chamado de segmento geodésico de  $\gamma(a)$  a  $\gamma(b)$ . Algumas vezes, por abuso de linguagem, nos referiremos à imagem  $\gamma(I)$  da geodésica  $\gamma$  como a própria geodésica  $\gamma$ .*

Se uma curva  $\gamma$  é uma geodésica então o comprimento do vetor tangente é preservado. De fato, se  $\gamma$  é uma geodésica então

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle + \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \cdot \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0.$$

Se  $\left| \frac{d\gamma}{dt} \right| = 0$  então a geodésica  $\gamma$  se reduz a um ponto. Assim, consideraremos  $\left| \frac{d\gamma}{dt} \right| \neq 0$ .

O comprimento de arco  $s$  de  $\gamma$ , começando num ponto  $t = t_0$ , é dado por:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = c \cdot (t - t_0).$$

Portanto, o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco. Se o parâmetro é o próprio comprimento de arco, isto é,  $c = 1$ , dizemos que a geodésica está normalizada.

Em termos de coordenadas locais,  $\gamma$  é uma geodésica em  $M$  se, e somente se,

$$0 = \frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) = \sum_k \left( \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Pelo fato de  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$  ser uma base, temos obrigatoriamente um sistema de  $n$  equações diferenciais de segunda ordem

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

**Exemplo 2.11.** (Geodésicas em  $\mathbb{R}^n$ ) Como em  $\mathbb{R}^n$  os coeficientes da métrica são dados por  $g_{ij} = \delta_{ij}$  então  $\Gamma_{ij} \equiv 0$ . Logo a equação das geodésicas é simplesmente

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

As soluções para esta equação diferencial são da forma

$$x(t) = x_0 + tv,$$

onde  $v$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  são vetores fixados. Logo, as geodésicas de  $\mathbb{R}^n$  são retas.  $\diamond$

Usando o Teorema de existência e unicidade de soluções de E.D.O's obtemos o seguinte resultado.

**Teorema 2.12.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana. Então para todo  $p \in M$  e todo  $v \in T_p M$  existem um intervalo aberto  $I \ni 0$  e uma única geodésica maximal  $\gamma_{p,v} : I \rightarrow M$  tal que  $\gamma_{p,v}(0) = p$  e  $\gamma'_{p,v}(0) = v$ . Aqui, maximal significa que se  $\alpha : J \rightarrow M$  é uma geodésica com  $J \subset I$  e  $\gamma_{p,v}|_J = \alpha$ , então  $J = I$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [5] página 72.  $\square$

O teorema acima garante que uma geodésica definida no intervalo  $(-\delta, \delta)$  é única. Entretanto, é possível aumentar a velocidade da geodésica diminuindo o intervalo de

definição e vice-versa conforme o lema abaixo que também é conhecido como Lema de Reescalamiento.

**Lema 2.13.** (*Homogeneidade de uma geodésica*) Se a geodésica  $\gamma_{p,v}$  estiver definida no intervalo  $(-\delta, \delta)$ , então para todo  $a > 0$ , a geodésica  $\gamma_{p,av}$ , está definida no intervalo  $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$  e vale  $\gamma_{p,av}(t) = \gamma_{p,v}(at)$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [5] página 72. □

Isto nos permite introduzir a definição de aplicação exponencial da seguinte forma. Sejam  $p \in M$  e  $v \in T_p M$ . Segue do Teorema 2.12 que existe  $a > 0$  tal que  $\gamma_{p,v}$  está definida em um intervalo aberto contendo  $(-a, a)$ . Então, pelo Lema 2.13  $\gamma_{p, \frac{2v}{a}}$  está definida em um intervalo aberto contendo  $(-2, 2)$ . Logo o seguinte conjunto é não vazio

$$\mathfrak{D} := \{(p, v) \in TM; \gamma_{p,v} \text{ está definida em um intervalo contendo } [0, 1]\}.$$

Além disso, pelo Teorema 2.12 está bem definida a *aplicação exponencial* dada por

$$\exp : \mathfrak{D} \rightarrow M, \quad \exp(v) = \gamma_{p,v}(1).$$

Na maior parte das aplicações, utilizaremos a restrição da aplicação exponencial a um aberto do espaço tangente  $T_q M$ , isto é, definiremos  $\exp_q : T_q M \rightarrow M$ , por  $\exp_q(v) = \exp(q, v)$ . É fácil verificar que  $\exp_q$  é diferenciável e  $\exp_q(0) = q$ . Geometricamente,  $\exp_q(v)$  é o ponto de  $M$  obtido percorrendo um comprimento igual a  $|v|$ , a partir de  $q$ , sobre a geodésica que passa por  $q$  com velocidade igual a  $\frac{v}{|v|}$ .

**Proposição 2.14.** *Dado  $q \in M$ , existe um  $r > 0$  tal que  $\exp_q : \{v \in T_q M; |v| < r\} \rightarrow M$  é um difeomorfismo sobre um aberto de  $M$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [5], página 73. □

Na notação da proposição anterior dizemos que  $B_g(q, r) := \exp_q(\{v \in T_q M; |v| < r\})$  é a bola geodésica de centro  $q$  e raio  $r$ . Podemos assim definir as coordenadas normais.

**Definição 2.15.** *Sejam  $p \in M$ ,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  uma base ortonormal de  $T_p M$  e considere a transformação linear  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$  definida por  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_i x_i e_i$  então  $\phi = (\exp_p \circ f)^{-1}$  define uma carta local em uma vizinhança de  $p$ , e as coordenadas associadas são chamadas de coordenadas normais em torno de  $p$ .*

Temos ainda o seguinte resultado mais forte.

**Proposição 2.16.** (*Vizinhanças totalmente normais*) *Dado  $p \in M$ , existem uma vizinhança  $U$  de  $p$ , e um número  $\delta > 0$ , tais que para cada  $q \in U$  a aplicação  $(\exp_q)|_{\{v \in T_q M; |v| < \delta\}}$  é um difeomorfismo, e  $B_g(q, \delta) \subset U$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [5], página 81.  $\square$

Finalmente, dado  $U \subset M$ , dizemos que  $U$  é convexo se para quaisquer  $x, y$  no fecho de  $U$  existe uma geodésica minimizante ligando  $x$  a  $y$  cujo interior está contido em  $U$ . Vale o seguinte.

**Proposição 2.17.** *Para cada  $p \in M$  existe um número  $r_p > 0$  tal que a bola geodésica  $B_g(p, r_p)$  é convexa.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [5], página 86.  $\square$

## 2.4 Caracterização Variacional de geodésicas

Nesta seção, apresentaremos duas caracterizações das geodésicas sob um ponto de vista "variacional".

**Definição 2.18.** *Uma curva diferenciável por partes é uma aplicação contínua  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  de um intervalo fechado  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  em  $M$  satisfazendo a seguinte condição: existe uma partição  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$  de  $[a, b]$  tal que as restrições  $\sigma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  com  $i = 0, \dots, k-1$  são diferenciáveis. Além disso, definimos o comprimento de  $\sigma$  por*

$$\ell(\sigma) = \int_a^b |\sigma'(s)| ds.$$

Um segmento de geodésica  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  é chamado minimizante se  $\ell(\gamma) \leq \ell(\sigma)$ , para qualquer curva diferenciável por partes  $\sigma$  ligando  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$ .

**Proposição 2.19.** *Sejam  $p \in M$ ,  $U$  uma vizinhança normal de  $p$ , e  $B \subset U$  uma bola normal de centro  $p$ . Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$  um segmento geodésico com  $\gamma(0) = p$ . Se  $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$  é qualquer curva diferenciável por partes ligando  $\gamma(0)$  a  $\gamma(1)$  então  $\ell(\gamma) \leq \ell(\sigma)$  e se a igualdade vale então  $\gamma([0, 1]) = \sigma([0, 1])$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [5], páginas 79-80.  $\square$

Definimos a energia de uma curva diferenciável por partes  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  como sendo o número real  $E(\sigma)$  dado por

$$E(\sigma) = \int_a^b |\sigma'(s)|^2 ds.$$

**Observação 2.20.** *É importante notar que, diferentemente do que ocorre com o comprimento de uma curva  $\sigma$ , a energia  $E(\sigma)$  não é invariante por reparametrizações monótonas. O exemplo abaixo ilustra essa afirmação.*

**Exemplo 2.21.** *Sejam  $\sigma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\sigma_1(t) = (t, 0)$  e  $\sigma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\sigma_2(t) = (t^2, 0)$ . É fácil ver que  $\sigma_2$  é uma reparametrização de  $\sigma_1$ , portanto possuem o mesmo traço e o mesmo comprimento. Entretanto,  $E(\sigma_1) = \frac{1}{2}$  enquanto  $E(\sigma_2) = \frac{2}{3}$ .  $\diamond$*

Seja  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  uma curva diferenciável por partes. Usando a desigualdade de Schwarz em  $L^2([a, b], M)$  temos

$$\ell^2(\sigma) = \left( \int_a^b 1 \cdot \left| \frac{d\sigma}{ds} \right| ds \right)^2 \leq \int_a^b 1^2 \cdot \int_a^b \left| \frac{d\sigma}{ds} \right|^2 ds \leq (a - b) \cdot E(\sigma), \quad (2.6)$$

onde a igualdade somente ocorre se, e somente se,  $|\sigma'| = 1$ , ou seja, se a curva é parametrizada pelo comprimento de arco. Note que esta desigualdade implica que, dentro do conjunto das curvas parametrizadas pelo comprimento de arco, minimizar a energia é equivalente a minimizar o comprimento.

O lema abaixo mostra que as curvas que minimizam a energia são automaticamente parametrizadas por um parâmetro proporcional ao comprimento de arco. Esta é uma das vantagens de trabalhar com a função energia no lugar da função comprimento de arco.

**Lema 2.22.** *Sejam  $p, q \in M$  e  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica minimizante ligando  $p$  a  $q$ . Então, para toda curva  $\sigma : [0, a] \rightarrow M$  ligando  $p$  a  $q$ , temos que*

$$E(\gamma) \leq E(\sigma)$$

e vale a igualdade se e somente se  $\sigma$  é uma geodésica minimizante.

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [5], página 215.  $\square$

Passemos agora ao conceito de variação.

**Definição 2.23.** *Seja  $\sigma : [0, a] \rightarrow M$  uma curva diferenciável por partes. Uma variação de  $\sigma$  é uma aplicação contínua  $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  tal que,*

1.  $f(0, s) = \sigma(s)$  com  $s \in [0, a]$ ;
2. existe uma partição do intervalo  $[0, a]$  dada por  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{k+1} = a$ , tal que  $f|_{(-\epsilon, \epsilon) \times [s_i, s_{i+1}]}$  é diferenciável  $\forall i = 0, 1, \dots, k$ .

A curva parametrizada  $f_s : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ , com  $t$  fixado, dada por  $f_s(t) = f(t, s)$  é chamada curva transversal da variação.

Note que uma variação determina uma família  $f_s(t)$  de curvas vizinhas de  $f_0(t) = \sigma(t)$ . Finalmente, dizemos que  $f$  é uma variação geodésica se  $f$  é diferenciável, e todas as curvas  $f_s(t)$  são geodésicas de  $M$ .

**Definição 2.24.** *Seja a variação  $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  de uma curva diferenciável por partes  $\sigma : [0, a] \rightarrow M$ . Para cada  $s \in [0, a]$  onde a curva definida por  $t \in (-\epsilon, \epsilon) \mapsto f(t, s) \in M$ , é diferenciável, fica bem definido o campo vetorial ao longo de  $\sigma$ ,*

$$V(s) = \frac{\partial f}{\partial t}(0, s)$$

*chamado campo variacional de  $f$ . Note que  $V$  é diferenciável por partes ao longo de  $\sigma$ .*

Pela definição, observamos que para toda a variação de uma curva diferenciável por partes  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  está associado um campo vetorial  $V$  ao longo de  $\sigma$ . A proposição abaixo afirma que, em um sentido apropriado, a recíproca também é verdadeira.

**Proposição 2.25.** *Sejam  $\sigma : [0, a] \rightarrow M$  uma curva diferenciável por partes e  $V$  um campo diferenciável por partes ao longo de  $\sigma$ . Então, existem  $\epsilon > 0$  e uma variação  $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  de  $\sigma$  tal que  $V$  é o campo variacional de  $\sigma$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [5], página 213. □

**Definição 2.26.** *Dada uma variação  $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  de uma curva diferenciável por partes  $\sigma : [0, a] \rightarrow M$  o funcional energia de  $\gamma$  associado a  $f$  é a função  $E : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:*

$$E(t) = \int_0^a \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, s) \right|^2 ds.$$

Uma informação importante sobre o comportamento de  $E$  é dada pela de sua derivada primeira.

**Proposição 2.27.** *(Primeira Variação da Energia) Sejam  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  uma curva diferenciável por partes e  $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$  uma variação de  $\sigma$ . Se  $E : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  é a energia de  $f$  então*

$$\frac{1}{2}E'(0) = - \int_a^b \left\langle V(s), \frac{D\sigma'}{ds} \right\rangle ds - \sum_{i=1}^k \left\langle V(s_i), \frac{d\sigma}{ds}(s_i^+) - \frac{d\sigma}{ds}(s_i^-) \right\rangle + \left\langle V(s), \frac{d\sigma}{ds} \right\rangle \Big|_a^b \quad (2.7)$$

onde  $V(s)$  é o campo variacional de  $f$ , e

$$\frac{d\sigma}{ds}(s_i^+) = \lim_{s \rightarrow s_i^+} \frac{d\sigma}{ds} \quad e \quad \frac{d\sigma}{ds}(s_i^-) = \lim_{s \rightarrow s_i^-} \frac{d\sigma}{ds}.$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [5], página 216. □

Dada a importância do resultado seguinte, apresentaremos sua demonstração.

**Proposição 2.28** (Pontos críticos de  $E$ ). *Seja  $M$  uma variedade riemanniana,  $S \subset M$  uma subvariedade, e  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  uma curva diferenciável por partes com extremos em  $S$ . Se  $E'(0) = 0$  para toda variação cujos extremos das curvas estão em  $S$ , então  $\gamma$  é uma geodésica que encontra a subvariedade  $S$  de forma ortogonal.*

*Demonstração.* Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  uma curva diferenciável por partes com extremos em  $S$  e considere  $s_1, s_2, \dots, s_k \in (a, b)$ , os pontos onde  $\gamma$  não é diferenciável e  $s_0 = a$  e  $s_{k+1} = b$ .

Agora, vamos supor que  $E'(0) = 0$  para variações por curvas cujos extremos estão em  $S$ . Seja  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua diferenciável por partes com  $g(s) > 0$  se  $s \neq s_i$  e  $g(s_i) = 0$ , para todo  $i = 0, 1, 2, \dots, k+1$  e defina  $V(s) = g(s) \cdot \frac{D}{ds} \cdot \frac{d\gamma}{ds}$ . Então  $V$  é um campo de vetores suave por partes ao longo de  $\gamma$  e, além disso, observe que  $V$  é contínuo em  $s_i$ .

Note que se o campo  $V$  ao longo de  $\gamma$  é tangente a  $S$  nos extremos  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$ , então a variação  $H$  fornecida pela Proposição 2.25 pode ser escolhida de modo que os extremos de cada curva da variação também estão em  $S$ . Desse modo por (2.7) temos que

$$0 = \frac{1}{2}E'(0) = - \int_a^b g(s) \left| \frac{D}{ds} \cdot \frac{d\gamma}{ds} \right|^2 ds.$$

Portanto, devemos ter  $\frac{D}{ds} \cdot \frac{d\gamma}{ds} = 0$  para cada intervalo da forma  $(s_i, s_{i+1})$ , ou seja,  $\gamma$  é uma geodésica em cada intervalo  $(s_i, s_{i+1})$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ .

Agora, verificaremos o que ocorre nos pontos  $s_i$ . Fixe  $w_a \in T_{\gamma(a)}S$  e  $w_b \in T_{\gamma(b)}S$ . Considere outro campo variacional  $\tilde{V}$  de  $\gamma$ , tal que  $\tilde{V}(s_i) = \frac{d\gamma}{ds}(s_i^+) - \frac{d\gamma}{ds}(s_i^-)$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $V(a) = w_a$  e  $V(b) = w_a$ . Assim, substituindo em (2.7) e usando o fato de que  $\gamma$  é uma geodésica nos intervalos  $(s_i, s_{i+1})$  temos,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}E'(0) \\ &= - \int_b^a \left\langle \tilde{V}(s), \frac{D}{ds} \cdot \frac{d\gamma}{ds} \right\rangle ds - \sum_{i=1}^k \left\langle \tilde{V}(s_i), \frac{d\gamma}{ds}(s_i^+) - \frac{d\gamma}{ds}(s_i^-) \right\rangle - \left\langle \tilde{V}(s), \frac{d\gamma}{ds} \right\rangle \Big|_b^a \\ &= - \sum_{i=1}^k \left\langle \tilde{V}(s_i), \frac{d\gamma}{ds}(s_i^+) - \frac{d\gamma}{ds}(s_i^-) \right\rangle - \left\langle \tilde{V}(s), \frac{d\gamma}{ds} \right\rangle \Big|_b^a \\ &= - \sum_{i=1}^k \left| \frac{d\gamma}{ds}(s_i^+) - \frac{d\gamma}{ds}(s_i^-) \right|^2 - \left\langle \tilde{V}(s), \frac{d\gamma}{ds} \right\rangle \Big|_b^a. \end{aligned}$$

ou seja,  $\gamma$  é de classe  $C^1$  em cada  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , e  $\gamma'(a) \perp w_a$ ,  $\gamma'(b) \perp w_b$ . Como  $\gamma$  é  $C^1$ , segue da unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias, que  $\gamma|_{(s_i, s_{i+1})}$  é a continuação de  $\gamma|_{(s_{i-1}, s_i)}$ . Portanto  $\gamma \in C^\infty$ , e conseqüentemente é uma geodésica.

Finalmente, variando  $w_a$  e  $w_b$  entre todos os vetores nos respectivos espaços tangente, concluímos que  $\gamma'(a), \gamma'(b) \perp S$ .  $\square$

**Definição 2.29.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana e  $S$  uma subvariedade de  $M$ . Dizemos que uma geodésica  $\gamma : I \rightarrow M$  tem fronteira livre em  $S$  se  $\gamma(a), \gamma(b) \in S$  e  $\gamma'(a), \gamma'(b) \perp S$ .*

## 2.5 Completude e homogeneidade regular

**Definição 2.30.** *Sejam  $p$  e  $q$  pontos em  $M$ . A distância  $d(p, q)$  é definida por:*

$$d(p, q) = \inf \{ \ell(\sigma) \mid \sigma : [a, b] \rightarrow M \text{ é uma curva diferenciável por partes} \},$$

*de modo que  $\sigma(a) = p$  e  $\sigma(b) = q$ .*

Com a distância  $d$ , a variedade  $M$  é um espaço métrico. Além disso, a topologia induzida por  $d$  em  $M$  coincide com a topologia inicial de  $M$ . Um caso especial é quando este espaço métrico é completo.

Existe outra noção de completude associada a uma variedade Riemanniana.

**Definição 2.31.** *Uma variedade Riemanniana  $M$  é geodesicamente completa se para todo  $p \in M$ , a aplicação exponencial,  $\exp_p$ , está definida para todo  $v \in T_pM$ , isto é, se as geodésicas  $\gamma(t)$  que partem de  $p$  estão definidas para todos os valores do parâmetro  $t \in \mathbb{R}$ .*

O fato que torna relevante o conceito de completude geodésica é o teorema abaixo. A versão desse resultado com todas as equivalências pode ser encontrada em [5].

**Teorema 2.32.** *(Teorema de Hopf-Rinow) Uma variedade Riemanniana é geodesicamente completa se, e somente se, é completa como espaço métrico, com respeito à distância induzida pela métrica Riemanniana.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [5], página 165. □

Abaixo, temos um corolário importante do teorema acima.

**Corolário 2.33.** *Numa variedade Riemanniana completa quaisquer dois pontos podem ser ligados por uma geodésica minimizante.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [5], páginas 163-165. □

**Definição 2.34.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana e  $p \in M$ . O raio de injetividade de  $p$  é definido por*

$$i(p) = \{ \sup r > 0 : \exp_p \text{ está definida em } B_g(0, r) \subset T_pM \text{ e é injetiva} \},$$

*enquanto que o raio de injetividade de  $M$  é*

$$i(M) = \inf_{p \in M} i(p).$$

Seja  $M^n$  variedade Riemanniana completa. Dizemos que  $M^n$  é homogeneamente regular se  $i(M) > 0$ , e  $\sec_M(\Pi)$  é uniformemente limitada, independente do plano  $\Pi$ . Usando

teoremas de comparação de Geometria Riemanniana, pode-se mostrar que  $M$  é homogeneamente regular se, e somente se, existem constantes positivas  $r, \mu_1, \mu_2$  tais que para todo  $p \in M$  temos um sistema de coordenada normais  $\phi_p : B_g(p, r) \subset M \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  e valem as seguintes condições:

$$(a) \quad |(d\phi_p)_x| \leq 2, \forall x \in B_r(p), \text{ e } |(d\phi_p^{-1})_y| \leq 2, \forall y \in U;$$

$$(b) \quad \sup_U \left| \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right| \leq \mu_1, \text{ e } \sup_U \left| \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_k^2} \right| \leq \mu_2.$$

Intuitivamente, estas condições nos dizem que  $M$  está uniformemente próxima de  $\mathbb{R}^n$ . Esta segunda caracterização reflete o fato que a condição de homogeneidade regular é ideal para tratar problemas em  $M$  de caráter analítico, onde precisamos passar do local para o global.

Segue da definição que qualquer variedade Riemanniana compacta é homogeneamente regular. Além disso, é fácil ver que  $\mathbb{H}^n$  também é. Ainda, se  $M$  é homogeneamente regular, então  $M \times \mathbb{R}^k$  também é. Finalmente, uma variedade hiperbólica com volume finito não é homogeneamente regular pois  $i(M) = 0$ .

## 2.6 Espaços de Hölder, $L^p$ , e de Sobolev

Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto. Sabemos que a classe de funções contínuas de Lipschitz  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazem por definição a condição

$$|u(s) - u(r)| \leq C|s - r|, \quad \forall s, r \in I,$$

para alguma constante  $C$ . Agora, dado  $0 < \beta \leq 1$ , consideraremos também uma classe de funções  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfazem a seguinte condição,

$$|\sigma(s) - \sigma(r)| \leq C|s - r|^\beta, \quad \forall s, r \in I,$$

para alguma constante  $C$ . Tais funções são chamadas Funções de Hölder com expoente  $\beta$ . Desse modo, vamos definir os Espaços de Hölder.

**Definição 2.35.** *Seja  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua e limitada, definimos*

$$\|\sigma\|_{C(I)} = \sup_{s \in I} |\sigma(s)|.$$

*E ainda, definimos a seminorma de Hölder de expoente  $\beta$  como*

$$[u]_{C^{0,\beta}(I)} = \sup_{s,r \in I, s \neq r} \left\{ \frac{|\sigma(s) - \sigma(r)|}{|s - r|^\beta} \right\},$$

e a norma de Hölder de expoente  $\beta$  por,

$$\|\sigma\|_{C^{0,\beta}(I)} = \|\sigma\|_{C(I)} + [\sigma]_{C^{0,\beta}(I)}.$$

**Definição 2.36.** O espaço de Hölder  $C^{k,\beta}(I, \mathbb{R}^n)$  é o espaço de todas as funções  $\sigma \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$  para as quais a norma definida abaixo é finita,

$$\|\sigma\|_{C^{k,\beta}(I)} = \sum_{n=0}^k \left\| \frac{d^n \sigma}{ds^n} \right\|_{C(I)} + \left[ \frac{d^k \sigma}{ds^k} \right]_{C^{0,\beta}(I)}.$$

Portanto, o espaço  $C^{k,\beta}(I, \mathbb{R}^n)$  é formado por todas as funções  $\sigma$  que são  $k$ -vezes diferenciáveis e cuja derivada de ordem  $k$  é Hölder contínua com expoente  $\beta$ .

**Proposição 2.37.**  $C^{k,\beta}(I, \mathbb{R}^n)$  é um espaço de Banach.

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [2], página 200. □

Agora, apresentaremos o conceito de Derivada Fraca e os chamados Espaços de Sobolev. O leitor pode aprofundar-se no assunto consultando referências como [2].

Como motivação, consideremos  $u, \phi \in C^1([a, b])$ , tal que  $\phi(a) = \phi(b) = 0$ . Pela fórmula de integração por partes segue que,

$$\int_a^b u \frac{d\phi}{ds} ds = - \int_a^b \frac{du}{ds} \phi ds.$$

O conceito de derivada fraca surge de tentar generalizar a fórmula acima para uma função  $u$  não necessariamente diferenciável. Vamos inicialmente lembrar o que são espaços  $L^p$ . Abaixo as noções de mensurabilidade, integrabilidade, e medida nula, são sempre com respeito à medida de Lebesgue  $ds$  em  $\mathbb{R}$ .

**Definição 2.38.** (Espaços e Norma  $L^p$ ) Considere  $\Omega \subset \mathbb{R}$  e  $p \in \mathbb{R}$  com  $1 \leq p < \infty$ , definimos

$$L^p(\Omega, \mathbb{R}^n) = \left\{ \sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \sigma \text{ é mensurável e } |\sigma|^p \text{ é integrável} \right\},$$

e a norma  $L^p$  é dada por,

$$\|\sigma\|_{L^p} = \left( \int_{\Omega} |\sigma(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definimos também,

$$L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) = \left\{ \sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} u \text{ é mensurável e existe uma constante } C \\ \text{tal que } |\sigma(s)| \leq C \text{ para quase todo } s \in \Omega \end{array} \right\},$$

e a norma  $L^\infty$ ,

$$\|\sigma\|_{L^\infty} = \inf\{C \text{ tais que } |\sigma(s)| \leq C \text{ para quase todo } s \in \Omega\}.$$

Finalmente,

$$L^p_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n) = \{\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \mid u \text{ é mensurável e } \sigma|_K \in L^p(K), \forall K \subset \Omega, K \text{ compacto}\}.$$

Além disso, a norma  $\|\cdot\|_{L^2}$ , vem do produto interno definido por

$$\langle \sigma, \gamma \rangle_{L^2} := \int_{\Omega} \langle \sigma, \gamma \rangle ds.$$

As considerações realizadas nos levam a seguinte definição.

**Definição 2.39.** (*Diferenciabilidade Fraca*) Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto, e considere  $u \in L^1_{loc}(I, \mathbb{R})$ . Dizemos que  $u$  é fracamente diferenciável, se existe uma função  $v \in L^1_{loc}(I, \mathbb{R})$ , tal que para toda função  $\phi \in C^\infty(I)$  com  $\phi(a) = \phi(b) = 0$ , temos

$$\int_0^1 u \phi' ds = - \int_0^1 v \phi ds. \quad (2.8)$$

**Observação 2.40.** Fixada  $u$ , se (2.8) vale com  $w$  no lugar de  $v$ , então  $v = w$  a menos de um conjunto de medida nula. Escreveremos então  $u' = \frac{du}{ds}$  para designar qualquer função que satisfaz (2.8), e dizemos que esta é a derivada fraca de  $u$ .

**Exemplo 2.41.** Seja  $\Omega = (0, 2)$  e  $u(s) = \begin{cases} s, & \text{se } 0 < s \leq 1 \\ 1, & \text{se } 1 \leq s < 2 \end{cases}$ . É fácil ver que  $u$  não é diferenciável no sentido clássico. Entretanto, sua derivada fraca é dada por:

$$v(s) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < s \leq 1 \\ 0, & \text{se } 1 \leq s < 2 \end{cases}.$$

◇

Uma função vetorial  $\sigma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  localmente integrável é dita fracamente diferenciável se suas funções componentes o são.

**Definição 2.42.** Considere  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto e  $p \in \mathbb{R}$  com  $1 \leq p \leq \infty$ . Definimos o Espaço de Sobolev  $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n)$  por,

$$W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n) = \left\{ \sigma \in L^p(I, \mathbb{R}^n) \mid \sigma \text{ é fracamente diferenciável e } \sigma' \in L^p(I, \mathbb{R}^n) \right\}.$$

Observe que se  $\sigma \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n)$  então  $\sigma \in L^p(I, \mathbb{R}^n)$ , de modo que toda função de  $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n)$  está em  $L^p(I, \mathbb{R}^n)$ . Se  $1 \leq p < \infty$ , o espaço  $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n)$  é equipado com a

norma

$$\|\sigma\|_{W^{1,p}} = (\|\sigma\|_{L^p}^p + \|\sigma'\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.9)$$

No caso do espaço  $W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n)$  esta última norma vem do produto interno

$$\langle \sigma, \gamma \rangle_{W^{1,2}} = \int_I (\langle \sigma, \gamma \rangle + \langle \sigma', \gamma' \rangle) ds.$$

**Proposição 2.43.** *O espaço  $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n)$ , para  $1 \leq p < \infty$  é um espaço de Banach. Além disso, o espaço  $W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n)$  é um espaço de Hilbert.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [2], página 203. □

**Observação 2.44.** *Da proposição anterior, ganhamos como corolário que se  $\sigma_n$  é uma sequência em  $W^{1,p}$  tal que  $\sigma_n \rightarrow \sigma$  em  $L^p$  e  $\sigma'_n$  converge para algum limite em  $L^p$  então  $\sigma \in W^{1,p}$  e  $\|\sigma_n - \sigma\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0$ . No caso  $1 < p < \infty$ , é possível mostrar que se  $\|\sigma_n\|_{W^{1,p}}$  é limitada então existe uma subsequência que converge em  $W^{1,p}$ . Para outros detalhes relacionados, o leitor pode consultar [2], página 204.*

**Teorema 2.45.** *Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto e limitado, e  $\sigma \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n)$ , com  $1 \leq p \leq \infty$ . Então existe  $\tilde{\sigma} \in C(\bar{I})$  tal que*

$$\sigma = \tilde{\sigma}\text{-q.t.p.} \quad e \quad \tilde{\sigma}(x) - \tilde{\sigma}(y) = \int_y^x \sigma'(s) ds, \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [2], página 206. □

**Observação 2.46.** *O teorema anterior garante que cada função  $\sigma \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n)$  admite um único representante contínuo em  $\bar{I}$ , isto é, existe uma função contínua  $\tilde{\sigma} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\tilde{\sigma}|_I \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n)$ , e  $\tilde{\sigma} = \sigma$ ,  $\frac{d\tilde{\sigma}}{ds} = \frac{d\sigma}{ds}$  em quase todo ponto. Assim, ao longo do texto sempre substituiremos  $\sigma$  pelo seu representante contínuo, e denotaremos  $\sigma \in W^{1,p}(\bar{I}, \mathbb{R}^n)$ . Isto dá sentido a espaços de Sobolev definidos em um intervalo fechado. Finalmente, observe que "σ ter um representante contínuo" é mais forte que "σ ser contínua em quase todo ponto".*

Podemos ainda "melhorar a regularidade" de uma função que admite derivada fraca. Mais precisamente, vale o seguinte.

**Teorema 2.47** (Desigualdade Sobolev/Morrey). *Seja  $I$  um intervalo limitado. Dado  $1 < p < \infty$ , existe uma constante  $C > 0$ , a qual depende apenas de  $p$  e  $|I|$ , tal que para toda  $\sigma \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n)$  temos*

$$\|\sigma\|_{C^{0, \frac{1}{q}}} \leq C \|\sigma\|_{W^{1,p}},$$

onde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Ao longo do texto faremos uso extensivo do seguinte resultado.

**Lema 2.48** (Desigualdade de Wirtinger). *Seja  $f \in W^{1,2}([0, L], \mathbb{R})$ , com  $f(0) = 0$ , então*

$$\int_0^L (f(s))^2 ds \leq \frac{L^2}{2} \int_0^L |f'(s)|^2 ds.$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.45 temos que  $f(t) = \int_0^t f'(s) ds$ . Assim, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$|f(t)|^2 = \left| \int_0^t f'(s) ds \right|^2 \leq \left( \int_0^t |f'(s)| ds \right)^2 \leq t \cdot \int_0^L |f'(s)|^2 ds.$$

Portanto,

$$\int_0^L |f(t)|^2 dt \leq \int_0^L t \cdot \left( \int_0^L |f'(s)|^2 ds \right) dt = \frac{L^2}{2} \int_0^L |f'(s)|^2 ds.$$

□

Finalmente, ao longo desse trabalho faremos uso do seguinte resultado.

**Teorema 2.49.** *(Teorema do Mergulho de Nash, [14]) Toda variedade Riemanniana  $(M, g)$  pode ser isometricamente mergulhada em algum espaço Euclidiano.*

Temos então o seguinte.

**Definição 2.50.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana mergulhada em  $\mathbb{R}^n$ , e  $I$  um intervalo aberto e limitado.*

- *O espaço de Hölder  $C^{k,\beta}(\bar{I}, M)$  é o conjunto das aplicações  $\sigma$  em  $C^{k,\beta}(\bar{I}, \mathbb{R}^n)$  tais que  $\sigma(s) \in M, \forall s \in I$ .*
- *O espaço de Sobolev  $W^{1,p}(I, M)$  é o conjunto das aplicações  $\sigma$  em  $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n)$  tais que  $\sigma(s) \in M$ , para quase todo  $s \in I$ .*

**Definição 2.51.** *Sejam  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  duas aplicações em  $W^{1,p}(I, M)$ . Definimos a distância de Sobolev como*

$$\text{dist}_{W^{1,p}}(\sigma_1, \sigma_2) = \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{W^{1,p}}$$

onde  $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$  é dada por 2.9.

# Capítulo 3

## O Processo de Encurtamento de Curvas

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados sobre o espaço  $W^{1,2}([0, 1], M)$  e o processo de encurtamento modificado de Birkhoff, introduzido em [16], para curvas em  $M$  cujos extremos estão na subvariedade  $S$ . Além disso, verificaremos algumas propriedades que o mapa de encurtamento satisfaz.

### 3.1 Preliminares da seção

Para uma melhor compreensão desse capítulo, algumas definições e resultados técnicos fazem-se necessários, e portanto os apresentaremos nesta seção.

#### 3.1.1 A Segunda Forma Fundamental

Seja  $(M, \bar{g})$  uma variedade Riemanniana de dimensão  $m$ . Se  $S$  é uma variedade diferenciável com dimensão  $n$  tal que existe um mergulho  $i : S \rightarrow M$  então  $(S, g)$ , onde  $g$  é a métrica induzida por este mergulho, então  $S$  é chamada uma subvariedade Riemanniana. No seguinte identificaremos  $S$  com sua imagem  $i(S)$ .

Para cada  $p \in S$  o produto interno em  $T_p M$  decompõe este espaço na soma direta

$$T_p M = T_p S \oplus T_p S^\perp$$

onde  $T_p S^\perp$  é o componente ortogonal de  $T_p S$  em  $T_p M$ . Desse modo, se  $v \in T_p M$  podemos expressá-lo como

$$v = v^T + v^\perp$$

onde  $v \in T_p M$  é chamada de componente tangencial de  $v$  e  $v^\perp \in T_p M^\perp$  é chamada de componente normal de  $v$ .

Desta maneira podemos definir,

$$\mathcal{N}(S) = \bigcup_{p \in S} T_p S^\perp,$$

onde a união é disjunta. A tripla  $(\mathcal{N}(S), \phi, S)$ , onde  $\phi : \mathcal{N}(S) \rightarrow S$  é a projeção dada por  $\phi(p, v) = p$ , é um fibrado vetorial sobre  $S$  denominado fibrado normal.

Para mais detalhes, o leitor pode consultar [5].

**Definição 3.1.** *Dada uma subvariedade  $S$  de uma variedade Riemanniana  $M$ . A aplicação exponencial normal é o mapa definido por*

$$\exp_S : \mathfrak{D} \cap \mathcal{N}(S) \rightarrow M, \quad \exp_S(p, v) = \exp_p(v).$$

Além disso, definimos o raio focal de  $S$  como

$$\inf \{ r > 0 \mid \exp_S \text{ é um difeomorfismo quando restrita } \{v \in \mathcal{N}(S) : |v| < r\} \}.$$

Se a variedade  $S$  é fechada, esse número é positivo.

As conexões Riemannianas de  $M$  e  $S$  serão denotadas respectivamente por  $\bar{\nabla}$  e  $\nabla$ . Assim, se  $X$  e  $Y$  são campos de vetores em  $S$ , é possível estendê-los a campos vetoriais sobre  $M$ , e vale o seguinte

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T + (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\perp = \nabla_X Y + (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\perp$$

de modo que

$$(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\perp = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y.$$

**Definição 3.2.** *Sejam  $S$  uma variedade Riemanniana a qual está isometricamente imersa em um variedade Riemanniana  $M$ . A segunda forma fundamental de  $S$  é a aplicação*

$$A_S : \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \rightarrow \mathcal{N}(S)$$

definida por

$$A_S(X, Y) = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\perp$$

onde  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  são quaisquer extensões locais de  $X$  e  $Y$  a  $S$ .

Note que a segunda forma fundamental é uma medida da diferença entre a conexão Riemanniana intrínseca de  $S$  e a conexão Riemanniana ambiente de  $M$ .

**Proposição 3.3.** *A segunda forma fundamental está bem definida e é uma aplicação bilinear simétrica.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [5], páginas 140-141.  $\square$

Observe que se  $\gamma$  é uma geodésica em  $M$ , temos que  $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$ . Portanto, pela segunda forma fundamental temos

$$\bar{\nabla}_{\gamma'}\gamma' = \nabla_{\gamma'}\gamma' + A_M(\gamma', \gamma') = A_M(\gamma', \gamma'). \quad (3.1)$$

### 3.1.2 Propriedades de $M$ e $S$

Considere uma variedade Riemanniana  $M^m$  completa e homogeneamente regular, a qual supomos estar isometricamente mergulhada num espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $S^k \subset M^m$  uma subvariedade fechada e mergulhada, não necessariamente conexa, onde  $k < m$ . Como  $M$  é homogeneamente regular temos  $i(M) > 0$ , e  $\text{sec}_M$  é uniformemente limitada. Consequentemente  $\|A_M\|$  é uniformemente limitada. O mesmo vale para  $\|A_S\|$ , pois  $S$  é compacta. Dessa forma, podemos supor que  $M$  e  $S$  cumprem as seguintes propriedades:

(M1)  $\sup_M \|A_M\| \leq \frac{1}{16}$  e  $\sup_S \|A_S\| \leq \frac{1}{16}$ , onde  $A_M$  e  $A_S$  são as respectivas segunda forma fundamental de  $M \subset \mathbb{R}^n$  e  $S \subset \mathbb{R}^n$ .

(M2) O raio de injetividade de  $M$  é no mínimo 8 e sua curvatura é no máximo  $\frac{1}{64}$ .

(S2) Os raios de injetividade e focal de  $S$  são no mínimo 4.

(M3) Para quaisquer  $x, y \in M$ , com  $|x - y| \leq 8$  temos  $\text{dist}_M(x, y) \leq 2|x - y|$ .

(S3) Para quaisquer  $x, y \in S$ , com  $|x - y| \leq 8$  temos  $\text{dist}_S(x, y) \leq 2|x - y|$ .

De fato, considere  $\tilde{g} := \lambda g$ , onde  $\lambda$  é uma constante positiva. Considere também, os campos de vetores  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Aplicando a fórmula de Koszul (2.1) obtemos:

$$\tilde{g}(Z, \tilde{\nabla}_X Y) = \lambda g(Z, \nabla_X Y) = \tilde{g}(Z, \nabla_X Y).$$

Assim podemos concluir que

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y. \quad (3.2)$$

Segue de (3.2) que as geodésicas de  $(M, \tilde{g})$  coincidem com as de  $(M, g)$ . Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  uma tal geodésica. Temos,

$$\ell_{\tilde{g}}(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\lambda} g(\gamma', \gamma') ds = \sqrt{\lambda} \cdot \ell_g(\gamma).$$

Logo,  $B_{\tilde{g}}(p, \sqrt{\lambda} r) = B_g(p, r)$ . Assim, pela definição do raio de injetividade isso implica que

$$i(M, \tilde{g}) = \sqrt{\lambda} \cdot i(M, g). \quad (3.3)$$

Analogamente vale a mesma transformação para o raio focal de uma subvariedade.

Segue também de (3.2) que  $\tilde{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z$ , e

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)Z, W) = \tilde{g}(R(X, Y)Z, W) = \lambda g(R(X, Y)Z, W).$$

Considerando  $\Pi \subset T_p M$  um plano e  $e_1, e_2 \in \Pi$  tais que  $g(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$ , a curvatura seccional (2.4) satisfaz

$$\tilde{\text{sec}}_M(e_1, e_2) = \frac{1}{\lambda^2} \tilde{g}(\tilde{R}(e_1, e_2, e_2), e_1) = \frac{1}{\lambda} g(R(e_1, e_2, e_2), e_1) = \frac{1}{\lambda} \text{sec}_M(e_1, e_2). \quad (3.4)$$

Além disso, a segunda forma fundamental de  $M$  como subvariedade de  $\mathbb{R}^n$  satisfaz

$$\tilde{A}_M(X, Y) = A_M(X, Y), \quad X, Y \in T_p M.$$

Portanto,

$$|\tilde{A}_M|_{\tilde{g}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot |A_M|_g. \quad (3.5)$$

O mesmo vale para a segunda forma fundamental de  $S$ .

Portanto, escolhendo  $\lambda$  suficientemente grande, segue de (3.3), (3.4) e (3.5) que as propriedades (M1), (M2) e (S2) são válidas na métrica  $\tilde{g}$ .

Como  $M$  é homogeneamente regular para todo  $p \in M$  existe um sistema de coordenadas normais  $\phi_p : B_g(p; r) \rightarrow B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m$ , onde  $r < 1$ , tal que

- (i)  $|(d\phi_p)_x| \leq 2, \forall x \in B_g(p; r)$ , e  $|(d\phi_p^{-1})_z| \leq 2, \forall z \in B(0, 1)$ ;
- (ii)  $\sup_{B(0,1)} \left| \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right| \leq \mu_1$ , e  $\sup_{B(0,1)} \left| \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_k^2} \right| \leq \mu_2$ .

Segue de (i) que

$$g_x(v, v) \leq 4|v|_g^2, \quad \forall x \in B_g(p; r), \forall v \in T_p M. \quad (3.6)$$

Reescalando a métrica como antes, estas estimativas valem na bola de raio  $\sqrt{\lambda}r$ .

Por outro lado, para raio pequeno a interseção de uma bola Euclidiana de  $\mathbb{R}^n$  com  $M$  está próxima de uma bola geodésica. Reescalando a métrica e tomando  $\lambda$  grande o suficiente temos que  $i(M, \tilde{g})$  é grande, e podemos garantir que  $|x - y| \leq 8$  implica que  $x$  está contido em uma bola geodésica de  $(M, \tilde{g})$  com centro  $y$ , onde vale (3.6). Um cálculo então mostra que vale (M3) e (S3).

**Lema 3.4.** *Se  $x, y \in M$ , então  $|(x - y)^\perp| \leq \frac{1}{8}|x - y|^2$  onde  $(x - y)^\perp$  é a componente de  $(x - y)$  em  $\mathbb{R}^n$  que é normal a  $M$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, suponhamos que  $|x - y| \geq 8$ . Fixe o ponto  $y \in M$  e considere o espaço tangente  $T_y M$ . Desse modo,  $(x - y)$  pode ser expresso como segue

$$(x - y) = (x - y)^T + (x - y)^\perp$$

onde  $(x - y)^T \in T_y M$  e  $(x - y)^\perp \in (T_y M)^\perp \subset \mathbb{R}^n$ . Logo pela desigualdade triangular,

$$|(x - y)| \leq |(x - y)^T| + |(x - y)^\perp|$$

além disso,

$$|(x - y)| \geq |(x - y)^\perp|.$$

Portanto,

$$8 \cdot |(x - y)^\perp| \leq |x - y| \cdot |(x - y)^\perp| \leq |x - y|^2.$$

Suponhamos agora que  $|x - y| \leq 8$ . Escolha  $\alpha : [0, l] \rightarrow M$  como uma geodésica minimizante em  $M$  ligando os pontos  $x$  e  $y$ , tal que  $|\alpha'| = 1$ . Como  $M$  é completa, essa geodésica existe. Além disso, pela propriedade (M3), para quaisquer  $x, y \in M$  com  $|x - y| \leq 8$  temos que  $l = \text{dist}_M(x, y) \leq 2|x - y|$ . Seja  $V$  o vetor normal unitário dado por,

$$V = \frac{(x - y)^\perp}{|(x - y)^\perp|}.$$

Então  $\langle \alpha'(0), V \rangle = 0$ . Portanto,

$$\begin{aligned} |(x - y)^\perp| &= \langle (x - y), V \rangle = \int_0^l \langle \alpha'(s), V \rangle ds = \int_0^l \left\langle \alpha'(0) + \int_0^s \alpha''(t) dt, V \right\rangle ds \\ &\leq \int_0^l \int_0^s |\alpha''(t)| dt ds \leq \int_0^l \int_0^s |A_M(\alpha(t))| |\alpha'(t)|^2 dt ds \leq \frac{1}{2} l^2 \sup_M |A_M| \\ &\leq \frac{1}{8} |x - y|^2 \end{aligned}$$

□

### 3.1.3 Alguns resultados sobre $W^{1,2}([0, 1], M)$

Nesta subseção apresentaremos uma série de resultados técnicos a serem utilizados posteriormente.

**Proposição 3.5.** *Se  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  estão próximas em  $W^{1,2}([0, 1], M)$ , então para todo  $t \in [0, 1]$ , os pontos  $\sigma_1(t)$  e  $\sigma_2(t)$  estão próximos. Mais precisamente, dado  $0 < \epsilon \leq 8, \exists \delta > 0$  tal que,*

$$\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{W^{1,2}} < \delta \Rightarrow d_M(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) < \epsilon.$$

*Demonstração.* Pela desigualdade de Sobolev/Morrey (Teorema 2.47) temos que

$$|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)| \leq C \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{W^{1,2}}.$$

Escolhendo  $\delta = \epsilon/C$ , concluímos que se  $\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{W^{1,2}} < \delta$ , então  $d_M(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \leq$

$$2|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)| \leq \epsilon. \quad \square$$

Seja  $\tilde{\Gamma} = \{x \in M : \text{dist}_M(x, S) \leq 2\}$ . Defina

$$\tilde{H} : \tilde{\Gamma} \rightarrow C^1 \left( \left[0, \frac{1}{L}\right], M \right) \quad (3.7)$$

como o mapa tal que  $\tilde{H}_x$  é uma geodésica minimizante de  $x$  para  $S$ . Afirmamos que  $\tilde{H}$  é contínua com respeito à distância de Sobolev  $\text{dist}_{W^{1,2}}$ . Note que tal aplicação não é contínua na norma  $C^1$ , a qual seria a norma mais natural no contradomínio. De forma mais precisa, vale o seguinte resultado.

**Lema 3.6.** *Considere  $L \geq 2$ , e  $x_1, x_2 \in M$  tais que  $d_M(x_i, S) \leq 2$ ,  $i = 1, 2$ . Sejam  $\sigma_1, \sigma_2 : [0, \frac{1}{L}] \rightarrow M$  duas geodésicas minimizantes parametrizadas proporcionalmente pelo comprimento de arco e tais que  $\sigma_1(0) = x_1$  e  $\sigma_2(0) = x_2$ ,  $\sigma_1(\frac{1}{L})$  e  $\sigma_2(\frac{1}{L}) \in S$  encontrando  $S$  nestes pontos de forma ortogonal. Então, existe uma função contínua  $\tilde{\phi} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  com  $\tilde{\phi}(0) = 0$  tal que*

$$\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\sigma_1, \sigma_2) \leq \tilde{\phi}(d_M(x_1, x_2)).$$

*Demonstração.* Inicialmente observe que,

$$|\sigma'_1 - \sigma'_2|^2 = \langle \sigma'_1 - \sigma'_2, \sigma'_1 - \sigma'_2 \rangle = |\sigma'_1|^2 - 2\langle \sigma'_1, \sigma'_2 \rangle + |\sigma'_2|^2,$$

de onde obtemos,

$$2\langle \sigma'_1, \sigma'_2 \rangle = |\sigma'_1|^2 + |\sigma'_2|^2 - |\sigma'_1 - \sigma'_2|^2.$$

Conseqüentemente,

$$2\langle \sigma'_2, \sigma'_1 - \sigma'_2 \rangle = 2\langle \sigma'_2, \sigma'_1 \rangle - 2|\sigma'_2|^2 = |\sigma'_1|^2 - |\sigma'_2|^2 - |\sigma'_1 - \sigma'_2|^2.$$

Portanto

$$|\sigma'_1|^2 - |\sigma'_2|^2 - |\sigma'_1 - \sigma'_2|^2 = 2\langle \sigma'_2, (\sigma_1 - \sigma_2)' \rangle. \quad (3.8)$$

Por outro lado, para todo  $t$  temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(2\langle \sigma'_2, \sigma_1 - \sigma_2 \rangle) &= 2\langle \sigma'_2, (\sigma_1 - \sigma_2)' \rangle + 2\langle (\sigma_1 - \sigma_2), \sigma''_2 \rangle \\ \Rightarrow 2 \int_0^t \langle \sigma'_2, (\sigma_1 - \sigma_2)' \rangle ds &= 2\langle \sigma'_2, \sigma_1 - \sigma_2 \rangle \Big|_0^t - 2 \int_0^t \langle (\sigma_1 - \sigma_2), \sigma''_2 \rangle ds. \end{aligned}$$

Integrando ambos os lados da igualdade (3.8) e usando a equação acima segue que,

$$\int_0^t |\sigma'_1|^2 ds - \int_0^t |\sigma'_2|^2 ds - \int_0^t |\sigma'_1 - \sigma'_2|^2 ds = 2\langle \sigma'_2, \sigma_1 - \sigma_2 \rangle \Big|_0^t - 2 \int_0^t \langle \sigma_1 - \sigma_2, \sigma''_2 \rangle ds. \quad (3.9)$$

Fazendo  $t = \frac{1}{L}$  temos,

$$\int_0^{\frac{1}{L}} |\sigma_1'|^2 ds - \int_0^{\frac{1}{L}} |\sigma_2'|^2 ds - \int_0^{\frac{1}{L}} |\sigma_1' - \sigma_2'|^2 ds = 2 \underbrace{\left\langle \sigma_2' \left( \frac{1}{L} \right), \sigma_1 \left( \frac{1}{L} \right) - \sigma_2 \left( \frac{1}{L} \right) \right\rangle}_{r_1} \quad (3.10)$$

$$- 2 \underbrace{\langle \sigma_2'(0), \sigma_1(0) - \sigma_2(0) \rangle}_{r_2} - 2 \underbrace{\int_0^{\frac{1}{L}} \langle \sigma_1 - \sigma_2, \sigma_2'' \rangle ds}_{r_3}.$$

Desse modo, passamos a análise de cada um dos termos da equação. Como  $\sigma_2$  é uma geodésica, parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco, temos  $|\sigma_2'|$  é constante, e desse modo

$$\frac{1}{L} |\sigma_2'| = \int_0^{\frac{1}{L}} |\sigma_2'(s)| ds = \ell(\sigma_2) = d_M \left( \sigma_2(0), \sigma_2 \left( \frac{1}{L} \right) \right) = d_M(x_2, S) \leq 2.$$

Portanto, segue que,

$$|r_2| \leq |\sigma_2'(0)| \cdot |(\sigma_1 - \sigma_2)(0)| \leq 2L \cdot d_M(x_1, x_2).$$

Agora, utilizando o Lema 3.4 e o Teorema 2.45, analisaremos o termo  $r_1$ .

$$\begin{aligned} |r_1| &= \left| \left\langle \sigma_2' \left( \frac{1}{L} \right), \sigma_1 \left( \frac{1}{L} \right) - \sigma_2 \left( \frac{1}{L} \right) \right\rangle \right| \\ &\leq \frac{1}{8} \left| \sigma_2' \left( \frac{1}{L} \right) \right| \cdot \left| \sigma_1 \left( \frac{1}{L} \right) - \sigma_2 \left( \frac{1}{L} \right) \right|^2 \\ &\leq \frac{L}{8} d_M(x_2, S) \cdot \left| \sigma_1(0) - \sigma_2(0) + \int_0^{\frac{1}{L}} (\sigma_1' - \sigma_2') ds \right|^2 \\ &\leq \frac{L}{8} d_M(x_2, S) \cdot \left( |\sigma_1(0) - \sigma_2(0)| + \left| \int_0^{\frac{1}{L}} (\sigma_1' - \sigma_2') ds \right| \right)^2 \\ &\leq \frac{2L}{8} \cdot 2 \left( |x_1 - x_2|^2 + \frac{1}{L} \int_0^{\frac{1}{L}} |(\sigma_1' - \sigma_2')|^2 ds \right) \\ &\leq \frac{L}{2} d_M^2(x_1, x_2) + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{L}} |(\sigma_1' - \sigma_2')|^2 ds. \end{aligned}$$

Agora, para  $r_3$ , usando o Lema 3.4 e a propriedade (M3) temos,

$$\begin{aligned}
|r_3| &= \left| \int_0^{\frac{1}{L}} \langle \sigma_1 - \sigma_2, \sigma_2'' \rangle dt \right| \leq \int_0^{\frac{1}{L}} \frac{1}{8} |\sigma_2''| \cdot |\sigma_1 - \sigma_2|^2 dt \\
&\leq \frac{1}{8} \left( \sup_M |A_M| \right) \cdot |\sigma_2'|^2 \int_0^{\frac{1}{L}} |\sigma_1 - \sigma_2|^2 dt \\
&\leq \frac{L^2}{32} \int_0^{\frac{1}{L}} \left| (\sigma_1 - \sigma_2)(0) + \int_0^t (\sigma_1' - \sigma_2')(s) ds \right|^2 dt \\
&\leq \frac{L^2}{32} \int_0^{\frac{1}{L}} \left( |(\sigma_1 - \sigma_2)(0)| + \left| \int_0^t (\sigma_1' - \sigma_2')(s) ds \right| \right)^2 dt \\
&\leq \frac{L^2}{16} \int_0^{\frac{1}{L}} \left( |\sigma_1(0) - \sigma_2(0)|^2 + \left( \int_0^t |(\sigma_1' - \sigma_2')(s)| ds \right)^2 \right) dt \\
&\leq \frac{L^2}{16} \int_0^{\frac{1}{L}} \left( |\sigma_1(0) - \sigma_2(0)|^2 + t \int_0^t |(\sigma_1' - \sigma_2')|^2(s) ds \right) dt \\
&= \frac{L^2}{16} \left( \int_0^{\frac{1}{L}} |x_1 - x_2|^2 dt + \int_0^{\frac{1}{L}} \left( t \int_0^t |(\sigma_1' - \sigma_2')|^2(s) ds \right) dt \right) \\
&\leq \frac{L}{16} d_M^2(x_1, x_2) + \frac{L}{32} \int_0^{\frac{1}{L}} |(\sigma_1' - \sigma_2')|^2(t) dt.
\end{aligned}$$

Note que de (3.10) obtemos,

$$\begin{aligned}
E(\sigma_1) - E(\sigma_2) - \int_0^{\frac{1}{L}} |\sigma_1' - \sigma_2'|^2 ds + 2|r_1| &\geq -2|r_2| - 2|r_3| \\
&\geq -4Ld_M(x_1, x_2) - \frac{L}{8} d_M^2(x_1, x_2) - \frac{L}{16} \int_0^{\frac{1}{L}} |(\sigma_1' - \sigma_2')|^2 ds. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
&E(\sigma_1) - E(\sigma_2) - \int_0^{\frac{1}{L}} |\sigma_1' - \sigma_2'|^2 ds + 2|r_1| \\
&\leq E(\sigma_1) - E(\sigma_2) - \int_0^{\frac{1}{L}} |\sigma_1' - \sigma_2'|^2 ds + Ld_M^2(x_1, x_2) + \int_0^{\frac{1}{L}} |\sigma_1' - \sigma_2'|^2 ds \\
&= E(\sigma_1) - E(\sigma_2) + Ld_M^2(x_1, x_2). \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Segue de (3.11) e (3.12) que,

$$\underbrace{\left( -\frac{L}{16} \right)}_c \int_0^{\frac{1}{L}} |(\sigma_1' - \sigma_2')|^2 ds \leq E(\sigma_1) - E(\sigma_2) + 4Ld_M(x_1, x_2) + \left( \frac{L}{8} + L \right) d_M^2(x_1, x_2).$$

Como  $L \geq 2$  por hipótese, temos que  $c > 0$ . Analisando a dedução da desigualdade acima, podemos observar que ela continua válida trocando o papel de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Somando então

as duas desigualdades obtemos

$$\varphi(d_M(x_1, x_2)) \geq c \int_0^{\frac{1}{L}} |(\sigma'_1 - \sigma'_2)|^2 ds,$$

onde  $\varphi(x) = \left(L + \frac{L}{8}\right) x^2 + 4Lx$ .

Observe que pelo Teorema 2.45 e a propriedade (M3) temos,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{L}} |\sigma_1 - \sigma_2|^2 ds &\leq \int_0^{\frac{1}{L}} \left| \sigma_1(0) - \sigma_2(0) + \int_0^s (\sigma'_1 - \sigma'_2) dt \right|^2 ds \\ &\leq \frac{2}{L} d_M^2(x_1, x_2) + \frac{1}{L} \int_0^{\frac{1}{L}} |\sigma'_1 - \sigma'_2|^2 ds \\ &\leq \frac{2}{L} d_M^2(x_1, x_2) + \frac{1}{cL} \varphi(d_M(x_1, x_2)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{dist}_{W^{1,2}}^2(\sigma_1, \sigma_2) &= \int_0^{\frac{1}{L}} |\sigma_1 - \sigma_2|^2 + |\sigma'_1 - \sigma'_2|^2 ds \\ &\leq \frac{2}{L} d_M^2(x_1, x_2) + \frac{1}{cL} \varphi(d_M(x_1, x_2)) + \frac{1}{c} \varphi(d_M(x_1, x_2)) \\ &\leq \frac{2}{L} d_M^2(x_1, x_2) + \varphi(d_M(x_1, x_2)) \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{cL} \right) \\ &= \tilde{\phi}(d_M(x_1, x_2)), \end{aligned}$$

onde  $\tilde{\phi}(y) = \frac{2}{L} y^2 + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{cL}\right) \varphi(y)$ . Além disso, observe que  $\tilde{\phi}$  depende apenas da escolha de  $L \geq 2$  e não de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .  $\square$

Agora, considere  $\Gamma = \{(x, y) \in M \times M : \text{dist}_M(x, y) \leq 4\}$ , e defina

$$H : \Gamma \rightarrow C^1 \left( \left[0, \frac{1}{L}\right], M \right) \quad (3.13)$$

como o mapa tal que  $H_{x,y}$  é uma geodésica minimizante de  $x$  para  $y$ . Novamente,  $H$  é contínua com respeito a  $\text{dist}_{W^{1,2}}$  restrita a  $C^1 \left( \left[0, \frac{1}{L}\right], M \right)$ . Como antes o significado preciso desta afirmação é baseada em um lema.

**Lema 3.7.** *Considere  $L \geq 2$ , e  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in M$  tais que  $d_M(x_i, y_i) \leq 4$ ,  $i = 1, 2$ . Sejam  $\sigma_1, \sigma_2 : \left[0, \frac{1}{L}\right] \rightarrow M$  duas geodésicas minimizantes parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco e tais que  $\sigma_i(0) = x_i$  e  $\sigma_i(1/L) = y_i$ ,  $i = 1, 2$ . Então, existe uma função contínua  $\phi : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  com  $\phi(0, 0) = 0$  e tal que*

$$\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\sigma_1, \sigma_2) \leq \phi(d_M(x_1, x_2), d_M(y_1, y_2)).$$

*Demonstração.* A prova é análoga àquela do lema anterior, então apenas indicaremos as

modificações necessárias. A equação (3.10) ainda é válida, e novamente nomeamos os três termos no lado direito por  $r_1, r_2, r_3$ .

Para limitar  $r_1, r_2$  usamos o fato que para  $i = 1, 2$ , temos

$$\frac{1}{L}|\sigma'_i| = \int_0^{\frac{1}{L}} |\sigma'_i(s)| ds = \ell(\sigma_i) = d_M\left(\sigma_i(0), \sigma_i\left(\frac{1}{L}\right)\right) = d_M(x_i, y_i) \leq 4.$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} |r_1| &\leq \left|\sigma'_2\left(\frac{1}{L}\right)\right| \cdot \left|(\sigma_1 - \sigma_2)\left(\frac{1}{L}\right)\right| \leq 4L \cdot d_M(y_1, y_2), \\ |r_2| &\leq |\sigma'_2(0)| \cdot |(\sigma_1 - \sigma_2)(0)| \leq 4L \cdot d_M(x_1, x_2). \end{aligned}$$

O termo  $r_3$  é limitado da mesma forma.

Argumentando como na dedução das equações (3.11) e (3.12) obtemos,

$$\underbrace{\left(-\frac{L}{16}\right)}_{\kappa} \int_0^{\frac{1}{L}} |(\sigma'_1 - \sigma'_2)|^2 ds \leq E(\sigma_1) - E(\sigma_2) + 8L[d_M(x_1, x_2) + d_M(y_1, y_2)] + \frac{L}{8}d_M^2(x_1, x_2).$$

Trocando o papel de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  e somando as duas desigualdades segue que

$$f(d_M(x_1, x_2), d_M(y_1, y_2)) \geq \kappa \int_0^{\frac{1}{L}} |(\sigma'_1 - \sigma'_2)|^2 ds,$$

onde  $f(x, y) = \frac{L}{8}x^2 + 8L(x + y)$ .

Finalmente, argumentando como no fim da prova do lema anterior obtemos,

$$\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\sigma_1, \sigma_2) \leq \phi(d_M(x_1, x_2), d_M(y_1, y_2)),$$

onde  $\phi(x, y) = \frac{2}{L}x^2 + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{cL}\right)\varphi(y)$  depende apenas da escolha de  $L \geq 2$  e não de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .  $\square$

**Observação 3.8.** *Nos lemas 3.6 e 3.7 temos por hipótese que  $L \geq 2$ , o que permite afirmar  $c > 0$  e  $\kappa > 0$ . Segue da definição destas duas constantes que se os domínios de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  possuírem comprimento menor que  $\frac{1}{L} \leq \frac{1}{2}$  os dois lemas são válidos.*

## 3.2 Processo de Encurtamento Modificado

Nesta seção apresentaremos o processo de encurtamento modificado de Birkhoff, para uma curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ , introduzido em [16]. Para isso, considere inicialmente  $L \in \mathbb{N}$ , um inteiro grande e fixo, e seja  $U \subset M$  um domínio convexo e com fecho compacto, o qual contém  $S$ . Definimos  $\Lambda_L$  como o espaço das curvas  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  tais que as seguintes propriedades são válidas:

- $\gamma(0), \gamma(1) \in S$ ;
- existe uma partição  $\{0 = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_L = 1\}$  independente de  $\gamma$ , tal que  $\gamma|_{(\tau_i, \tau_{i+1})}$  é uma geodésica, para  $i = 0, \dots, L - 1$ ;
- Existem constantes  $c_i$  tais que  $|\gamma'(s)| = c_i$  em  $(\tau_i, \tau_{i+1})$ , e  $\ell(\gamma|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}) \leq 1$ ;
- $|\gamma(s) - \gamma(t)| \leq L|s - t|, \forall s, t \in [0, 1]$ .

Além disso, definimos

$$G = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow M \mid \gamma \text{ é uma geodésica com fronteira livre em } S\}.$$

Note que  $\Lambda_L$  é subconjunto de  $W^{1,2}([0, 1], M)$ , portanto  $\Lambda_L$  é munido da distância e topologia induzidas pela norma  $W^{1,2}$ . Além disso,  $G \subset \Lambda_L$ .

**Proposição 3.9.** *O espaço  $\Lambda_L$  é compacto.*

*Demonstração.* Seja  $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow M$  uma sequência de curvas em  $\Lambda_L$ . Pela definição do conjunto  $\Lambda_L$ , para todo  $s \in [0, 1]$ , cada curva  $\gamma_n$  cumpre a condição de Lipschitz para uma mesma constante  $L$ . Desse modo, segue que  $\gamma_n$  é uniformemente limitada, independente de  $n$ . Agora, vamos provar que  $\gamma_n$  é equicontínua. Dado  $\epsilon > 0$ , escolha  $\delta = \frac{\epsilon}{L}$ . Então, se  $|s - s_0| < \delta$  temos

$$|\gamma_n(s) - \gamma_n(s_0)| \leq L|s - s_0| \leq L \cdot \delta = \epsilon, \forall n.$$

Pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, existe uma subsequência, a qual ainda denotaremos por  $\{\gamma_n\}$ , a qual converge na norma  $C^0$  para  $\gamma : I \rightarrow M$ . É fácil ver que  $\gamma(0), \gamma(1) \in S$ , e que  $\gamma$  é Lipschitz com constante  $L$ .

Seja  $\gamma'_n$  um elemento da subsequência anterior. Já que  $\gamma'_n$  é suave por partes, dados  $r < t$  temos

$$|\gamma'_n(t) - \gamma'_n(r)| \leq \int_r^t |\gamma''(s)| ds \leq \left( \sup_M |A_M| \right) |t - r|.$$

Dessa forma, em cada subintervalo da forma  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  com  $i = 1, \dots, n$  temos que  $\gamma'_{i,k}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$  é equicontínua e uniformemente limitada. Logo por Arzelá-Ascoli existe uma subsequência de  $\{\gamma'_{i,k}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}\}$ , a qual ainda denotaremos por  $\{\gamma'_{i,k}\}$ , a qual converge na norma  $C^0$ . Considerando esta subsequência definida no intervalo  $[\tau_2, \tau_3]$  obtemos uma nova subsequência que converge na união de  $[\tau_1, \tau_2]$  e  $[\tau_2, \tau_3]$ . Repetindo este processo para todos os subintervalos obtemos uma subsequência que converge em  $I$  na norma  $C^0$  para  $\sigma : I \rightarrow M$ .

Observe que a desigualdade de Cauchy-Schwarz em  $L^2$  implica que

$$\int_0^1 |\gamma'_n(s) - \sigma(s)| ds \leq \|\gamma_n - \gamma\|_{C^0}, \quad \int_0^1 |\gamma'_n - \sigma| ds \leq \|\gamma'_n(s) - \sigma(s)\|_{C^0}.$$

Logo, pela observação 2.44, segue que  $\sigma$  é a derivada fraca de  $\gamma$  e que  $\gamma_n \rightarrow \gamma$  na norma  $W^{1,2}$  (a menos de subsequência).

Como para cada  $n$  temos que  $\gamma_n|_{(\tau_i, \tau_{i+1})}$  é suave, para  $i = 0, \dots, L-1$ , segue que  $\gamma$  é  $C^1$  em cada intervalo  $(\tau_i, \tau_{i+1})$ , com derivada igual a  $\sigma$ . Logo  $|\gamma'| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\gamma'_n| = 1$  fora dos pontos de quebra, e  $\ell(\gamma|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(\gamma_n|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}) \leq 1$ .

Finalmente, como o raio de injetividade de  $M$  é pelo menos 8 e  $\ell(\gamma_n|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}) \leq 1$ , temos que  $\gamma_n(\tau_{i+1})$  está numa bola geodésica em torno de  $\gamma(\tau_i)$ , e o segmento geodésico  $\gamma_n|_{(\tau_i, \tau_{i+1})}$  é minimizante. Portanto,

$$d_M(\gamma(\tau_i), \gamma(\tau_{i+1})) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_M(\gamma_n(\tau_i), \gamma_n(\tau_{i+1})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(\gamma_n|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}) = \ell(\gamma|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}) .$$

Logo,  $\gamma|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$  é minimizante, e portanto é uma geodésica.  $\square$

Após essas considerações, realizaremos a construção do mapa de encurtamento  $\Psi : \Lambda_L \rightarrow \Lambda_L$  o qual satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $\Psi(\gamma)$  depende continuamente de  $\gamma$ .
2.  $\Psi(\gamma)$  é homotópico a  $\gamma$  e  $\ell(\Psi(\gamma)) \leq \ell(\gamma)$ , onde  $\ell(\cdot)$  denotará o comprimento da curva.
3. Existe uma função contínua  $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  com  $\phi(0) = 0$  tal que,

$$\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\gamma, \Psi(\gamma)) \leq \phi \left( \frac{\ell^2(\gamma) - \ell^2(\Psi(\gamma))}{\ell^2(\Psi(\gamma))} \right) .$$

4. Se  $\Psi(\gamma) = \gamma$  então  $\gamma \in G$ , isto, pontos fixos de  $\Psi$  são geodésicas imersas com fronteira livre em  $S$ .
5. Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $\gamma \in \Lambda_L$  e  $\text{dist}(\gamma, G) \geq \epsilon$  então:

$$\ell(\Psi(\gamma)) \leq \ell(\gamma) - \delta .$$

### 3.2.1 Definindo $\Psi$

Inicialmente, fixe uma partição  $\mathcal{P}$  do intervalo  $I = [0, 1]$ ,

$$\mathcal{P} = \{0 = s_0, s_1, \dots, s_{2L} = 1\},$$

de modo que  $|s_{j+1} - s_j| = \frac{1}{2L}$  para  $j = 0, \dots, 2L-1$ . Assim,  $\Psi$  será definida nas seguintes etapas:

- **Etapa 1:** Substitua  $\gamma$  nos intervalos  $[0, s_2]$  e  $[s_{2L-2}, 1]$  por geodésicas minimizantes de  $\gamma(s_2)$  e  $\gamma(s_{2L-2})$  para  $S$ . Então, substitua  $\gamma$  no interior de cada intervalo de

extremos par  $[s_{2j}, s_{2j+2}]$  por uma geodésica minimizante com os mesmos pontos finais a fim de obter uma geodésica por partes  $\gamma_e : [0, 1] \rightarrow M$ .

- **Etapa 2:** Reparametrize  $\gamma_e$  para obter uma curva  $\tilde{\gamma}_e$  parametrizada proporcionalmente pelo comprimento de arco.
- **Etapa 3:** Denote por  $\tilde{s}_j$  a imagem de  $s_j$  pela reparametrização, isto é,  $\gamma_e(s_j) = \tilde{\gamma}_e(\tilde{s}_j)$ . Substitua  $\gamma_e$  em cada intervalo de extremos ímpares  $[\tilde{s}_{2j-1}, \tilde{s}_{2j+1}]$  por uma geodésica minimizante com os mesmos extremos para obter uma geodésica por partes  $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow M$ .
- **Etapa 4:** Reparametrize  $\gamma_0$  para obter uma curva de velocidade constante  $\tilde{\gamma}_0$ . Essa curva é então  $\Psi(\gamma)$ .

Observe que o processo de encurtamento não aumenta comprimentos, ou seja,

$$\ell(\gamma) \geq \ell(\gamma_e) \geq \ell(\tilde{\gamma}_e) \geq \ell(\gamma_0) \geq \ell(\Psi(\gamma)). \quad (3.14)$$

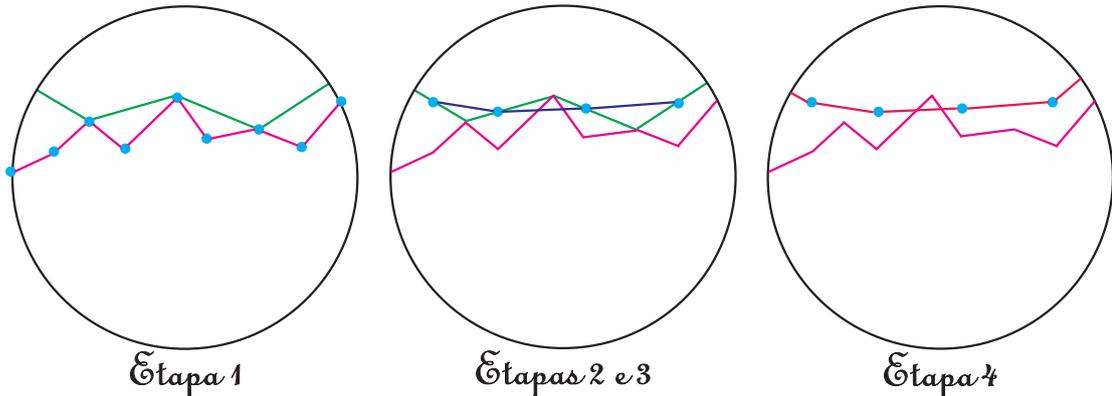


Figura 3.1: Processo de encurtamento modificado para a curva  $\gamma$  (em rosa), com traço na variedade  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ , e extremos em  $S = \partial M$ , com  $L = 4$ .

Além disso, temos por (2.6) que minimizar a energia é equivalente a minimizar o comprimento. Logo, vale a seguinte relação,

$$E(\gamma) \geq E(\gamma_e) \geq E(\tilde{\gamma}_e) \geq E(\gamma_0) \geq E(\Psi(\gamma))$$

sendo válida a igualdade nos casos em que a curva for uma geodésica minimizante.

### 3.2.2 Propriedades 1 e 2

A continuidade do mapa  $\Psi : \Lambda_L \rightarrow \Lambda_L$  será provada levando em consideração as etapas do processo de encurtamento da curva  $\gamma$  conforme o esquema abaixo:

$$\gamma \xrightarrow{(1)} \gamma_e \xrightarrow{(2)} \tilde{\gamma}_e \xrightarrow{(3)} \gamma_0 \xrightarrow{(4)} \tilde{\gamma}_0$$

Desse modo, a continuidade das duas primeiras etapas seguirão da proposição 3.10 enquanto as duas últimas da proposição 3.11.

Os pontos  $\{0 = s_0, s_2, \dots, s_{2L-2}, s_{2L} = 1\}$  são uniformemente espaçados e entre seus extremos realizamos substituições por geodésicas minimizantes. Desse modo, observe que,

$$|\gamma(s_{2j}) - \gamma(s_{2j+2})|^2 \leq \left( \int_{s_{2j}}^{s_{2j+2}} |\gamma'| ds \right)^2 \leq |s_{2j+2} - s_{2j}| \int_0^1 |\gamma'|^2 ds \leq \frac{1}{L} E(\gamma).$$

Portanto:

$$|\gamma(s_{2j}) - \gamma(s_{2j+2})| \leq \left( \frac{1}{L} E(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1.$$

Assim, temos pela propriedade (M3) que,

$$d_M(\gamma(s_{2j}), \gamma(s_{2j+2})) \leq 2 \cdot |\gamma(s_{2j}) - \gamma(s_{2j+2})| \leq 2$$

desse modo, pelas propriedades (M2) e (S2), podemos aplicar a primeira etapa do processo de encurtamento.

**Proposição 3.10.** *Dado um inteiro grande  $L$ , seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  um mapa  $W^{1,2}$  com  $\gamma(0), \gamma(1) \in S$  e  $E(\gamma) \leq L$ . Se  $\gamma_e, \tilde{\gamma}_e$  são as curvas obtidas após as duas primeiras etapas do processo de encurtamento por  $\Psi$ , então o mapa  $\gamma \rightarrow \tilde{\gamma}_e$  é contínuo de  $W^{1,2}$  para  $\Lambda_L$  com respeito à distância  $\text{dist}_{W^{1,2}}$  de  $\Lambda_L$ .*

*Demonstração.* A demonstração da proposição será apresentada em duas etapas.

**Etapa 1:** Continuidade do mapa  $\gamma \rightarrow \gamma_e$ .

Sejam  $\gamma^1$  e  $\gamma^2$  dois mapas  $W^{1,2}$  próximos, tais que  $\gamma^k(0), \gamma^k(1) \in S$  e  $E(\gamma^k) \leq L$ , com  $k = 1, 2$ . Observe que podemos assumir que  $\gamma^1$  não é uma curva constante, pois nesse caso a prova é trivial.

Usando os lemas 3.6 e 3.7 obtemos

$$\begin{aligned}
\|\gamma_e^1 - \gamma_e^2\|_{W^{1,2}} &= \sum_{j=0}^{L-1} \left\| (\gamma_e^1 - \gamma_e^2)|_{[s_{2j}, s_{2j+2}]} \right\|_{W^{1,2}} \\
&\leq \sum_{j=1}^{L-2} \phi\left(\text{dist}_M(\gamma^1(s_{2j}), \gamma^2(s_{2j})), \text{dist}_M(\gamma^1(s_{2j+2}), \gamma^2(s_{2j+2}))\right) \\
&\quad + \tilde{\phi}\left(\text{dist}_M(\gamma^1(s_1), \gamma^2(s_1))\right) + \tilde{\phi}\left(\text{dist}_M(\gamma^1(s_{2L-2}), \gamma^2(s_{2L-2}))\right). \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Por outro lado, pela proposição 3.5, para todo  $0 < \epsilon \leq 8$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $j \in \{1, \dots, L-2\}$  temos que  $\|\gamma^1 - \gamma^2\|_{W^{1,2}} < \delta \Rightarrow \text{dist}_M(\gamma^1(s_{2j}), \gamma^2(s_{2j})) \leq \epsilon$ . Além disso, as funções  $\phi$  e  $\tilde{\phi}$  são contínuas. Logo, se  $\gamma^1$  e  $\gamma^2$  estão próximas na norma  $W^{1,2}$ , então o lado direito de (3.15) é pequeno. Portanto, o mapa  $\gamma \rightarrow \gamma_e$  é contínuo.

**Etapa 2:** Continuidade do mapa  $\gamma_e \rightarrow \tilde{\gamma}_e$

Agora, vamos provar que  $\tilde{\gamma}_e^1$  e  $\tilde{\gamma}_e^2$  são  $W^{1,2}$  próximas em  $\Lambda_L$ . Observe que,

$$\begin{aligned}
\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\tilde{\gamma}_e^1, \tilde{\gamma}_e^2) &= \int_0^1 |\tilde{\gamma}_e^1 - \tilde{\gamma}_e^2|^2 ds + \int_0^1 |(\tilde{\gamma}_e^1 - \tilde{\gamma}_e^2)'|^2 ds \\
&\leq \left(\frac{L^2}{2} + 1\right) \cdot \int_0^1 |(\tilde{\gamma}_e^1 - \tilde{\gamma}_e^2)'|^2 ds.
\end{aligned}$$

Logo, basta mostrar que  $\int_0^1 |(\tilde{\gamma}_e^1 - \tilde{\gamma}_e^2)'|^2 ds$  é pequeno. Sejam  $a_0^k = d_M(\gamma^k(s_2), S)$ ,  $a_{L-1}^k = d_M(\gamma^k(s_{2L-2}), S)$  e  $a_j^k = d_M(\gamma^k(s_{2j}), \gamma^k(s_{2j+2}))$ , com  $j = 1, \dots, L-2$  e  $A^k = \sum_{j=0}^{L-1} a_j^k$ . Observe que  $A^k > 0$  e além disso,

$$A^k = \sum_{j=0}^{L-1} a_j^k = d_M(\gamma^k(s_2), S) + \dots + d_M(\gamma^k(s_{2L-2}), S) = \ell(\gamma_e^k) = \ell(\tilde{\gamma}_e^k) = |(\tilde{\gamma}_e^k)'|. \quad (3.16)$$

Sabemos que cada  $\tilde{\gamma}_e^k$  é uma reparametrização de cada  $\gamma_e^k$ . Já que essas reparametrizações fixam os pontos de fronteiras, então pela Proposição 3.5 os pontos  $\tilde{\gamma}_e^1(0)$  e  $\tilde{\gamma}_e^2(0)$  estão próximos. Além disso, cada  $\tilde{\gamma}_e^k$  possui velocidade constante e são segmentos geodésicos sobre intervalos da forma

$$I_j^k = \left[ \frac{1}{A^k} \sum_{l < j} a_l^k, \frac{1}{A^k} \sum_{l \leq j} a_l^k \right],$$

tais que cada  $I_j^k \subset I$  e possuem comprimento,

$$|I_j^k| = \left| \frac{1}{A^k} \sum_{l \leq j} a_l^k - \frac{1}{A^k} \sum_{l < j} a_l^k \right| = \frac{1}{A^k} a_j^k < 1.$$

Observe que cada curva  $\tilde{\gamma}_e^k$  pode ser expressa da forma  $\gamma_e^k \circ P_j^k$  em relação a cada

intervalo  $I_j^k$ , com  $a_j^k \neq 0$  e  $P_j^k : I_j^k \rightarrow [s_{2j}, s_{2j+2}]$  mapas afins. Dessa forma, verificaremos, inicialmente, que os intervalos  $I_j^k$  são próximos, assim como os mapas  $P_j^k$ .

Para que dois intervalos estejam próximos é necessário que as distâncias entre os extremos iniciais e os extremos finais seja pequena. Sem perda de generalidade e tomando  $c = \max \left\{ \frac{1}{A^1}, \frac{1}{A^2} \right\}$ , temos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{l \leq j} \left( \frac{1}{A^1} a_l^1 - \frac{1}{A^2} a_l^2 \right) \right| &\leq \sum_{l \leq j} \left| \frac{1}{A^1} a_l^1 - \frac{1}{A^2} a_l^2 \right| \\ &\leq \sum_{l \leq j} \frac{1}{A^1} |a_l^1 - a_l^2| + \sum_{l \leq j} \frac{|a_l^2|^2}{A^1 A^2} |A^1 - A^2| \\ &\leq c \cdot \sum_{l \leq j} |a_l^1 - a_l^2| + c \cdot \sum_{l \leq j} |A^1 - A^2|. \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.5 temos que  $|a_l^1 - a_l^2|$  é uma quantidade pequena. Assim, concluímos que os intervalos são próximos.

Agora, provaremos que as reparametrizações  $P_j^k : I_j^k \rightarrow [s_{2j}, s_{2j+2}]$  são próximas. Como demonstrado anteriormente, os intervalos  $I_j^k$  são intervalos próximos. Além disso, temos que as reparametrizações  $P_j^k$  são mapas afins da forma

$$P_j^k(s) = a_j^k s + b_j^k,$$

onde os coeficientes  $a_j^k$  e  $b_j^k$  dependem continuamente dos extremos dos intervalos  $I_j^k$  e dos pontos  $s_{2j}$  e  $s_{2j+2}$  que estão fixados. Portanto,

$$\begin{aligned} |P_j^1(s) - P_j^2(s)| &= |(a_j^1 s + b_j^1) - (a_j^2 s + b_j^2)| \\ &\leq |a_j^1 - a_j^2| |s| + |b_j^1 - b_j^2|. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Se  $s \in I_j^1 \cap I_j^2$  então a quantidade 3.17 é igual a  $|a_j^1 - a_j^2| |s|$  que é pequena pela Proposição 3.5 e, além disso,  $|s| \leq \ell(I)$ . Por outro lado, se  $s \in I_j^k \setminus (I_j^1 \cap I_j^2)$  então a quantidade 3.17 é igual a  $|a_j^k| |s|$ . Mas,  $|a_j^k|$  é uniformemente limitado independentemente de  $j$  e  $k$  e  $|s| \leq |I_j^k \setminus (I_j^1 \cap I_j^2)|$  que é pequeno pois os intervalos são próximos. Desse modo, concluímos que as reparametrizações são próximas.

Sejam  $I_j = I_j^1 \cap I_j^2$ . Como os intervalos  $I_j^k$  dependem continuamente de  $\gamma_e^k$  a medida do comprimento de  $I \setminus \bigcup_{j=0}^{L-1} I_j$  pode ser feita muito pequena. Observe que como  $I_j^1$  e  $I_j^2$  são intervalos próximos, onde  $I_j = I_j^1 \cap I_j^2 \neq \emptyset$  temos que  $\ell(I_j)$  está próximo de  $\ell(I_j^1)$  e  $\ell(I_j^2)$ , pois entre os extremos ocorre que  $I_j = I_j^1 \cap I_j^2 = \emptyset$ , mas como são intervalos próximos a distância entre seus extremos é pequena. Desse modo,  $\bigcup_{j=0}^{L-1} I_j = \sum_j^{L-1} \ell(I_j^1 \cap I_j^2)$  está

próxima de  $\ell(I) = 1$  quando  $I_j^1 \cap I_j^2 \neq \emptyset$ . Assim,

$$\ell\left(I \setminus \bigcup_{j=0}^{L-1} I_j\right) = \sum_{j < j'} \sum_{l \leq j} |a_j^1 - a_j^2|$$

que é uma quantidade pequena, conforme já discutido.

Além disso, como  $\tilde{\gamma}_e^k$  possui velocidade constante com energia menor que  $L$ , temos que  $|(\tilde{\gamma}_e^k)'| \leq L$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int_{I \setminus \bigcup I_j} |(\tilde{\gamma}_e^1 - \tilde{\gamma}_e^2)'|^2 ds &\leq \int_{I \setminus \bigcup I_j} (|(\tilde{\gamma}_e^1)'| + |(\tilde{\gamma}_e^2)'|)^2 ds \\ &\leq 2 \cdot \left( \int_{I \setminus \bigcup I_j} |(\tilde{\gamma}_e^1)'|^2 ds + \int_{I \setminus \bigcup I_j} |(\tilde{\gamma}_e^2)'|^2 ds \right) \\ &= 4 \cdot L^2 \int_{I \setminus \bigcup I_j} ds \\ &= 4 \cdot L^2 \cdot \ell\left(I \setminus \bigcup_{j=0}^{L-1} I_j\right) \end{aligned}$$

que é uma quantidade pequena.

Agora, dado  $\epsilon > 0$ , suficientemente pequeno, podemos dividir  $I_j$  em duas subclasses que dependerão do tamanho de  $a_j^1$ . Desse modo,

- Se  $a_j^1 < \epsilon$  por continuidade podemos assumir que  $a_j^2 < 2\epsilon$ . Além disso, utilizando a expressão de  $A^k$ , como descrita em (3.16), obtemos uma importante estimativa.

$$\int_{I_j^k} |(\tilde{\gamma}_e^k)'|^2 ds \leq \int_{I_j^k} (L \cdot A^k) ds = \ell(I_j^k) \cdot L \cdot A^k = \frac{a_j^k}{A^k} \cdot L \cdot A^k = L \cdot a_j^k.$$

Desse forma,

$$\begin{aligned} \int_{I_j} |(\tilde{\gamma}_e^1 - \tilde{\gamma}_e^2)'|^2 ds &\leq \int_{I_j} (|(\tilde{\gamma}_e^1)'| + |(\tilde{\gamma}_e^2)'|)^2 ds \\ &\leq 2 \cdot \int_{I_j^1} |(\tilde{\gamma}_e^1)'|^2 ds + 2 \cdot \int_{I_j^2} |(\tilde{\gamma}_e^2)'|^2 ds \\ &\leq 2 \cdot L \cdot a_j^1 + 2 \cdot L \cdot a_j^2 \\ &\leq 2 \cdot L \cdot \epsilon + 2 \cdot L \cdot 2\epsilon \\ &= 6 \cdot L^2 \cdot \epsilon. \end{aligned}$$

- Agora, se  $a_j^1 \geq \epsilon$ , podemos assumir por continuidade que  $a_j^2 \geq \frac{\epsilon}{2}$ . Inicialmente, observe que,  $P_j^k$  é uma bijeção entre os intervalos  $I_j^k$  e  $[s_{2j}, s_{2j+2}]$ , dessa forma sua

derivada é dada por

$$\frac{|s_{2j+2} - s_{2j}|}{|I_j^k|} \leq \frac{1}{|I_j^k|} = \frac{A^k}{a_j^k}.$$

Portanto segue que,

$$\begin{aligned} \int_{I_j} |(\tilde{\gamma}_e^1 - \tilde{\gamma}_e^2)'|^2 ds &= \int_{I_j} |(\gamma_e^1 \circ P_j^1)' - (\gamma_e^2 \circ P_j^2)'| ds \\ &= \int_{I_j} |[(\gamma_e^1)' \circ P_j^1] \cdot (P_j^1)' - (\gamma_e^2)' \circ P_j^2 \cdot (P_j^2)'|^2 ds \\ &\leq \int_{I_j} [ |(\gamma_e^1)' \circ P_j^1| \cdot (P_j^1)' + |(\gamma_e^2)' \circ P_j^2| \cdot (P_j^2)' ]^2 ds \\ &\leq 2 \cdot \left( \int_{I_j} |(\gamma_e^1)' \circ P_j^1| \cdot (P_j^1)'|^2 ds + \int_{I_j} |(\gamma_e^2)' \circ P_j^2| \cdot (P_j^2)'|^2 ds \right) \\ &= 2 \cdot \int_{I_j} |(\gamma_e^1)'|^2 \cdot \left( \frac{A^1}{a_j^1} \right)^2 ds + 2 \cdot \int_{I_j} |(\gamma_e^2)'|^2 \cdot \left( \frac{A^2}{a_j^2} \right)^2 ds. \end{aligned}$$

Ao analisar o segundo termo da desigualdade, observamos que este pode ser feito pequeno pois, conforme provado anteriormente,  $\gamma_e^k$  são próxima na norma  $C^1$ . Além disso,  $\gamma_e^k$  é limitada na norma  $C^2$  pois, de acordo com a propriedade (M1) e a equação das geodésicas, temos,

$$|\gamma_e''| \leq \sup |A_M| \cdot |\gamma_e'|^2 \leq \frac{1}{16} \cdot L^2$$

Além disso, note também que cada  $P_j^k$  e  $|(P_j^k)'|$  são próximos como mapas afins e números, respectivamente. Portanto,

$$\int_0^1 |(\tilde{\gamma}_e^1 - \tilde{\gamma}_e^2)'|^2 ds = \int_{I \setminus \cup I_j} |(\tilde{\gamma}_e^1 - \tilde{\gamma}_e^2)'|^2 ds + \int_{I_j} |(\tilde{\gamma}_e^1 - \tilde{\gamma}_e^2)'|^2 ds + \int_{I_j} |(\tilde{\gamma}_e^1 - \tilde{\gamma}_e^2)'|^2 ds$$

é limitada por uma quantidade pequena, pois o mesmo ocorre com cada uma das integrais do lado direito da igualdade, concluindo assim a demonstração.  $\square$

Para concluir que o mapa  $\Psi$  é contínuo precisamos ainda da seguinte proposição, cuja demonstração é análoga a da proposição anterior.

**Proposição 3.11.** *Dado um inteiro grande  $L$ , seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  um mapa  $W^{1,2}$  e  $E(\gamma) \leq L$ . Se  $\gamma_0, \tilde{\gamma}_0$  são as curvas obtidas após as duas últimas etapas do processo de encurtamento por  $\Psi$ , então o mapa  $\tilde{\gamma}_e \rightarrow \tilde{\gamma}_0$  é contínuo de  $W^{1,2}$  para  $\Lambda_L$ .*

Finalmente, quanto à propriedade 2, sua demonstração é análoga a do Lema 4.6, a qual apresentaremos no próximo capítulo.

### 3.2.3 Propriedade 3

Primeiramente, consideraremos os seguintes lemas que auxiliarão na demonstração da propriedade em questão.

**Lema 3.12.** *Considere  $L > 0$ , e um intervalo  $I = [0, l]$  tal que  $l \leq \frac{1}{L}$ . Então, existe  $C > 0$  tal que se  $\sigma_1 : I \rightarrow M$  é uma curva Lipschitz com  $|\sigma_1'| \leq L$ , e  $\sigma_2 : I \rightarrow M$  é uma geodésica minimizante com as mesmas extremidades de  $\sigma_1$ , então:*

$$\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\sigma_1, \sigma_2) \leq C(E(\sigma_1) - E(\sigma_2)). \quad (3.18)$$

*Demonstração.* Usando (3.9) e o fato que  $\sigma_1(0) = \sigma_2(0)$ ,  $\sigma_1(l) = \sigma_2(l)$ , obtemos,

$$\int_0^l |\sigma_1'|^2 ds - \int_0^l |\sigma_2'|^2 ds - \int_0^l |\sigma_1' - \sigma_2'|^2 ds = 2\langle \sigma_2', \sigma_1 - \sigma_2 \rangle \Big|_0^l - 2 \int_0^l \langle (\sigma_1 - \sigma_2), \sigma_2'' \rangle ds. \quad (3.19)$$

Analisando o lado direito da igualdade (3.19), como  $\sigma_2$  é uma geodésica em  $M$ , usando a equação das geodésicas (3.1) e pela propriedade (M1) temos,

$$|\sigma_2''| \leq (\sup_M |A_M|) |\sigma_2'|^2 \leq \frac{1}{16} |\sigma_2'|^2.$$

Como  $\sigma_2''$  é normal em relação a  $M$ , utilizando o Lema 3.4 para  $x = \sigma_1(s) \in M$  e  $y = \sigma_2(s) \in M$ ,  $s \in I$ , temos,

$$|\langle (\sigma_1 - \sigma_2), \sigma_2'' \rangle| \leq |(\sigma_1 - \sigma_2)^\perp| \cdot \frac{|\sigma_2''|^2}{16} \leq \frac{1}{8} |\sigma_1 - \sigma_2|^2 \cdot \frac{|\sigma_2'|^2}{16}. \quad (3.20)$$

Agora, integrando ambos os lados de (3.20), usando que  $|\sigma_2'|$  é constante com  $|\sigma_2'| \cdot \ell(I) \leq 1$ , pois  $\sigma_2$  é geodésica, e aplicando a desigualdade (2.48) temos,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^l \langle (\sigma_1 - \sigma_2), \sigma_2'' \rangle ds \right| &\leq \frac{1}{8} \cdot \frac{|\sigma_2'|^2}{16} \int_0^l |\sigma_1 - \sigma_2|^2 ds \\ &\leq \frac{1}{8} \cdot \frac{|\sigma_2'|^2}{16} \cdot (\ell(I))^2 \int_0^l |(\sigma_1 - \sigma_2)'|^2 ds \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^l |(\sigma_1 - \sigma_2)'|^2 ds. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Desse modo, substituindo (3.21) em (3.19) temos,

$$\int_0^l |\sigma_1' - \sigma_2'|^2 ds \leq 2 \cdot \left( \int_0^l |\sigma_1'|^2 ds - \int_0^l |\sigma_2'|^2 ds \right) \quad (3.22)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\sigma_1, \sigma_2) &= \int_0^l |(\sigma_1 - \sigma_2)|^2 ds + \int_0^l |(\sigma_1 - \sigma_2)'|^2 ds \\
&\leq \frac{l^2}{2} \cdot \int_0^l |(\sigma_1 - \sigma_2)'|^2 ds + \int_0^l |(\sigma_1 - \sigma_2)'|^2 ds \\
&\leq (l^2 + 2) \cdot \left( \int_0^l |\sigma_1'|^2 ds - \int_0^l |\sigma_2'|^2 ds \right) \\
&= C \cdot (E(\sigma_1) - E(\sigma_2)).
\end{aligned}$$

□

Agora, enunciaremos e demonstraremos um lema análogo ao anterior, mas para o caso de fronteira livre.

**Lema 3.13.** *Considere  $L > 0$ , e um intervalo  $I = [0, l]$  tal que  $l \leq \frac{1}{L}$ . Então, existe  $C' > 0$  tal que se  $\sigma_1 : I \rightarrow M$  é uma curva Lipschitz com  $|\sigma_1'| \leq L$ , com  $\sigma_1(l) \in S$  e  $\sigma_2 : I \rightarrow (M, S)$  é uma geodésica minimizante tal que  $\sigma_2(0) = \sigma_1(0)$ ,  $\sigma_2(l) \in S$  e  $\sigma_2'(l) \perp S$  então:*

$$\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\sigma_1, \sigma_2) \leq C'(E(\sigma_1) - E(\sigma_2)). \quad (3.23)$$

*Demonstração.* Integrando ambos os lados de (3.8) e usando que  $\sigma_1(0) = \sigma_2(0)$ , por hipótese, obtemos,

$$\int_0^l |\sigma_1'|^2 ds - \int_0^l |\sigma_2'|^2 ds - \int_0^l |\sigma_1' - \sigma_2'|^2 ds = 2 \langle \sigma_2', \sigma_1 - \sigma_2 \rangle \Big|_{s=l} - 2 \int_0^l \langle (\sigma_1 - \sigma_2), \sigma_2'' \rangle ds. \quad (3.24)$$

Ao analisar o primeiro termo do lado direito da igualdade (3.24), observe que,  $\sigma_2$  é uma geodésica minimizante parametrizada pelo comprimento de arco, cuja energia é menor ou igual ao comprimento de  $\sigma_1$ , logo  $|\sigma_2'| = E(\sigma_2) \leq E(\sigma_1) \leq L$ . Além disso, pelo Teorema 2.45,  $\sigma_1(0) = \sigma_2(0)$  por hipótese e, a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos,

$$\begin{aligned}
|(\sigma_1 - \sigma_2)(l)| &= |(\sigma_1 - \sigma_2)(l) - (\sigma_1 - \sigma_2)(0)| \\
&= \left| \int_0^l (\sigma_1 - \sigma_2)' ds \right| \\
&\leq \int_0^l |(\sigma_1 - \sigma_2)'| ds \\
&\leq l^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^l |(\sigma_1 - \sigma_2)'|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \quad (3.25)$$

Como  $\sigma_2'(l)$  é normal a  $S$ , podemos usar o Lema 3.4 para  $x = \sigma_1(l) \in S$  e  $y = \sigma_2(l) \in S$ ,

e a desigualdade (3.25). Portanto:

$$\begin{aligned}
|\langle \sigma_2', (\sigma_1 - \sigma_2) \rangle|_{s=l} &\leq \frac{1}{8} |\sigma_2'(l)| \cdot |(\sigma_1 - \sigma_2)(l)|^2 \\
&\leq \frac{1}{8} L \cdot l \left( \int_0^l |(\sigma_1 - \sigma_2)'|^2 ds \right) \\
&= \frac{1}{8} \left( \int_0^l |(\sigma_1 - \sigma_2)'|^2 ds \right). \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Passamos agora para a análise do segundo termo do lado direito da equação (3.24). Como  $\sigma_2$  é uma geodésica em  $M$ , usando a equação das geodésicas 3.1 e pela propriedade (M1) temos,

$$|\sigma_2''| \leq (\sup_M |A_M|) |\sigma_2'|^2 \leq \frac{1}{16} |\sigma_2'|^2 \leq \frac{1}{16} L^2.$$

Como  $\sigma_2''$  é normal em relação a  $M$ , utilizando o Lema 3.4 para  $x = \sigma_1(s) \in M$  e  $y = \sigma_2(s) \in M, s \in I$ , temos,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^l \langle (\sigma_1 - \sigma_2), \sigma_2'' \rangle ds \right| &\leq \int_0^l \frac{1}{8} |\sigma_2''(l)| \cdot |(\sigma_1 - \sigma_2)|^2 ds \\
&\leq \frac{1}{8} \cdot \frac{L^2}{16} \int_0^l |(\sigma_1 - \sigma_2)|^2 ds \\
&\leq \frac{1}{128} \cdot L^2 \cdot \frac{l^2}{2} \int_0^l |(\sigma_1' - \sigma_2')|^2 ds \\
&\leq \frac{1}{128} \cdot \left( \frac{1}{l} \right)^2 \cdot \frac{l^2}{2} \int_0^l |(\sigma_1' - \sigma_2')|^2 ds \\
&\leq \frac{1}{8} \int_0^l |(\sigma_1' - \sigma_2')|^2 ds. \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Desse modo, substituindo (3.26) e (3.27) na equação (3.24), obtemos,

$$\begin{aligned}
\int_0^l |\sigma_1' - \sigma_2'|^2 ds &= -2 \langle \sigma_2', \sigma_1 - \sigma_2 \rangle|_{s=l} + 2 \int_0^l \langle (\sigma_1 - \sigma_2), \sigma_2'' \rangle ds + \int_0^l |\sigma_1'|^2 ds - \int_0^l |\sigma_2'|^2 ds \\
&= \frac{1}{2} \int_0^l |(\sigma_1' - \sigma_2')|^2 ds + \int_0^l |\sigma_1'|^2 ds - \int_0^l |\sigma_2'|^2 ds
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^l |\sigma_1' - \sigma_2'|^2 ds \leq 2 \cdot \left( \int_0^l |\sigma_1'|^2 ds - \int_0^l |\sigma_2'|^2 ds \right). \tag{3.28}$$

Aplicando a desigualdade (2.48) em (3.28) temos,

$$\int_0^l |\sigma_1 - \sigma_2|^2 ds \leq \frac{l^2}{2} \cdot \int_0^l |\sigma_1' - \sigma_2'|^2 ds \leq l^2 \cdot \left( \int_0^l |\sigma_1'|^2 ds - \int_0^l |\sigma_2'|^2 ds \right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\sigma_1, \sigma_2) &= \int_0^l |(\sigma_1 - \sigma_2)|^2 ds + \int_0^l |(\sigma_1 - \sigma_2)'|^2 ds \\
&= (l^2 + 2) \cdot \left( \int_0^l |\sigma_1'|^2 ds - \int_0^l |\sigma_2'|^2 ds \right) \\
&= C' \cdot (E(\sigma_1) - E(\sigma_2)).
\end{aligned}$$

□

Passemos agora ao objetivo principal da seção.

**Propriedade 3:** Existe uma função contínua  $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  com  $\phi(0) = 0$  tal que,

$$\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\gamma, \Psi(\gamma)) \leq \phi \left( \frac{\ell^2(\gamma) - \ell^2(\Psi(\gamma))}{\ell^2(\Psi(\gamma))} \right).$$

*Demonstração.* A prova segue de estimar as distâncias entre cada curva obtida em cada etapa, ou seja,  $\text{dist}_{W^{1,2}}(\gamma, \gamma_e)$ ,  $\text{dist}_{W^{1,2}}(\gamma_e, \tilde{\gamma}_e)$ ,  $\text{dist}_{W^{1,2}}(\tilde{\gamma}_e, \gamma_0)$  e  $\text{dist}_{W^{1,2}}(\gamma_0, \Psi(\gamma))$ .

- $\text{dist}_{W^{1,2}}(\gamma, \gamma_e)$

O processo de encurtamento não aumenta o tamanho da curva, assim tem-se que  $\ell(\gamma_e) \leq \ell(\gamma) \leq L$ , conforme explicitado anteriormente. Além disso, da relação entre o comprimento da curva e sua energia, verifica-se que  $\ell^2(\gamma) \leq E(\gamma)$  e  $\ell^2(\gamma_e) \leq E(\gamma_e)$ , como também já discutido. Por fim, já que  $|\gamma'(s)| = c$  temos,

$$\ell^2(\gamma) = \left( \int_0^1 |\gamma'(s)| ds \right)^2 = c^2 = \left( \int_0^1 |\gamma'(s)|^2 ds \right) = E(\gamma).$$

Com tais considerações realizadas, vamos limitar  $\text{dist}_{W^{1,2}}(\gamma, \gamma_e)$ . Fixada uma partição para o intervalo  $I = [0, 1]$ , para etapa 1 que permite a obtenção de  $\gamma_e$ , aplicamos o Lema 3.13 nos intervalos limitados  $[0, s_2]$  e  $[s_{2L-2}, 1]$  e o Lema 3.12 nos intervalos  $[s_{2j}, s_{2j+2}]$ , com  $j = 1, 2, \dots, L - 2$ , obtendo assim que,

$$\begin{aligned}
\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\gamma, \gamma_e) &= \int_0^1 (|\gamma - \gamma_e|^2 + |(\gamma - \gamma_e)'|^2) ds \\
&= \sum_{j=0}^{L-1} \int_{s_{2j}}^{s_{2j+2}} (|\gamma - \gamma_e|^2 + |(\gamma - \gamma_e)'|^2) ds \\
&\leq \sum_{j=0}^{L-1} c_j (E(\gamma) - E(\gamma_e)) \Big|_{s_{2j}}^{s_{2j+2}} \\
&= C(E(\gamma) - E(\gamma_e)).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Note que a constante  $C$  é dada pelo somatório das constantes descritas nos Lemas Lema 3.12 e 3.13. Além disso, com as considerações iniciais, multiplicando e dividindo o segundo membro da desigualdade 3.29 por  $L^2$ , concluímos que,

$$\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\gamma, \gamma_e) \leq \frac{L^2}{L^2} C(E(\gamma) - E(\gamma_e)) \leq C_1 \left( \frac{\ell^2(\gamma) - \ell^2(\gamma_e)}{\ell^2(\gamma_e)} \right), \text{ com } L^2 C = C_1. \quad (3.30)$$

- $\text{dist}_{W^{1,2}}(\gamma_e, \tilde{\gamma}_e)$

Na segunda etapa do processo de encurtamento,  $\gamma_e$  pode ser vista como uma reparametrização de  $\tilde{\gamma}_e$ , ou seja,  $\gamma_e = \tilde{\gamma}_e \circ P$ , onde  $P : I \rightarrow I$  é um mapa afim por partes que cumpre a condição de Lipschitz. Assim, nos pontos onde  $P$  é diferenciável temos que  $|P'| \leq L$  e a velocidade de  $\gamma_e$  é dada por

$$|\gamma_e'| = |(\tilde{\gamma}_e \circ P)'| = |\tilde{\gamma}_e' \circ P| \cdot |P'|,$$

onde  $\tilde{\gamma}_e' \circ P$  denota a velocidade de  $\tilde{\gamma}_e$  no ponto  $P(x)$ . Como  $\tilde{\gamma}_e$  possui velocidade constante, temos que  $|\tilde{\gamma}_e'| = \ell(\tilde{\gamma}_e)$  e  $|\tilde{\gamma}_e' \circ P| = |\tilde{\gamma}_e'|$ . Além disso,  $\gamma_e$  é uma reparametrização de  $\tilde{\gamma}_e$ , logo  $\ell(\gamma_e) = \ell(\tilde{\gamma}_e)$ . Portanto,

$$|P'| = \frac{|\gamma_e'|}{|\tilde{\gamma}_e' \circ P|} = \frac{|\gamma_e'|}{|\tilde{\gamma}_e'|} = |\gamma_e'| \cdot \frac{1}{\ell(\tilde{\gamma}_e)}.$$

Da monotonicidade de  $P$  temos que  $|P'| = P'$ . Desse modo, integrando a igualdade acima no intervalo  $I = [0, 1]$  temos,

$$\int_0^1 P' ds = 1.$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (P' - 1)^2 ds &= \int_0^1 (P')^2 ds - 2 \cdot \int_0^1 P' ds + \int_0^1 1 ds \\
&= \int_0^1 |P'|^2 ds - 1 \\
&= \int_0^1 \left( \frac{|\gamma'_e|}{|\tilde{\gamma}'_e \circ P|} \right)^2 ds - 1 \\
&= \int_0^1 \frac{|\gamma'_e|^2}{|\tilde{\gamma}'_e|^2} ds - 1 \\
&= \frac{1}{\ell^2(\tilde{\gamma}_e)} \cdot \int_0^1 |\gamma'_e|^2 ds - 1 \\
&= \frac{E(\gamma_e) - \ell^2(\tilde{\gamma}_e)}{\ell^2(\tilde{\gamma}_e)} \\
&\leq \frac{\ell^2(\gamma) - \ell^2(\tilde{\gamma}_e)}{\ell^2(\tilde{\gamma}_e)} \tag{3.31}
\end{aligned}$$

onde usamos na última desigualdade que  $E(\gamma_e) \leq E(\gamma) = \ell^2(\gamma)$ , pois  $\gamma$  têm velocidade constante.

Desse modo, para limitar  $\text{dist}_{W^{1,2}}(\gamma_e, \tilde{\gamma}_e)$ , como  $\gamma_e(0) = \tilde{\gamma}_e(0)$  e  $\gamma_e(1) = \tilde{\gamma}_e(1)$ , combinaremos a desigualdade 2.48 com a seguinte estimativa.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |\gamma'_e - \tilde{\gamma}'_e|^2 ds &= \int_0^1 |(\tilde{\gamma}'_e \circ P) \cdot P' - \tilde{\gamma}'_e|^2 ds \\
&\leq \int_0^1 (|(\tilde{\gamma}'_e \circ P) \cdot P' - \tilde{\gamma}'_e \circ P| + |\tilde{\gamma}'_e \circ P - \tilde{\gamma}'_e|)^2 ds \\
&\leq 2 \cdot \left( \int_0^1 |(\tilde{\gamma}'_e \circ P) \cdot P' - \tilde{\gamma}'_e \circ P|^2 + |\tilde{\gamma}'_e \circ P - \tilde{\gamma}'_e|^2 ds \right). \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Agora, analisaremos cada um dos termos do lado direito de 3.32. Para o primeiro termo, observe que  $\tilde{\gamma}_e$  possui velocidade constante,  $|\tilde{\gamma}'_e| \leq L$ , com  $L > 1$ . Portanto:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |(\tilde{\gamma}'_e \circ P) \cdot P' - \tilde{\gamma}'_e \circ P|^2 ds &= \int_0^1 |(\tilde{\gamma}'_e \circ P) \cdot (P' - 1)|^2 ds \\
&= \int_0^1 |(\tilde{\gamma}'_e \circ P)|^2 \cdot |(P' - 1)|^2 ds \\
&\leq \sup_I |\tilde{\gamma}'_e|^2 \cdot \int_0^1 |(P' - 1)|^2 ds \\
&\leq L^2 \cdot \int_0^1 |(P' - 1)|^2 ds. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Em relação ao segundo termo de 3.32, usaremos o fato de que  $\tilde{\gamma}_e$  é uma geodésica

por partes. Desse modo, usando a propriedade (M1), fora dos pontos de quebra, temos  $|\tilde{\gamma}'_e| = |A_M(\tilde{\gamma}'_e, \tilde{\gamma}'_e)| \leq \frac{L^2}{16}$ . Se  $x, y \in I$  não são separados por pontos de quebra de  $\tilde{\gamma}_e$ , pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos,

$$|\tilde{\gamma}'_e(x) - \tilde{\gamma}'_e(y)| = \left| \int_y^x (\tilde{\gamma}'_e)' ds \right| \leq \int_y^x |A_M(\tilde{\gamma}'_e, \tilde{\gamma}'_e)| ds \leq \frac{L^2}{16} \cdot |x - y|. \quad (3.34)$$

Agora, se  $x, y \in I$  são separados por pontos de quebra de  $\tilde{\gamma}_e$  dividiremos o intervalo  $I = [0, 1]$  em dois conjuntos  $I_1$  e  $I_2$ . Defina  $I_1$  é o conjunto dos pontos cuja distância a um ponto de quebra de  $\tilde{\gamma}_e$  menor ou igual a  $(\int_0^1 |P' - 1|^2 ds)^{\frac{1}{2}}$ . Então

$$\ell(I_1) \leq 2L \cdot \left( \int_0^1 |P' - 1|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como  $P$  é um mapa afim, então  $P(0) = 0$ , de onde obtemos,

$$|P(x) - x| \leq \left| \int_0^x (P'(s) - 1) ds \right| \leq x^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_0^x |P'(s) - 1|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_0^x |P'(s) - 1|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim como  $|\tilde{\gamma}'_e| \leq L$ , então em  $I_1$  vale

$$\begin{aligned} \int_{I_1} |\tilde{\gamma}'_e \circ P - \tilde{\gamma}'_e|^2 ds &\leq \int_{I_1} (|\tilde{\gamma}'_e \circ P| + |\tilde{\gamma}'_e|)^2 ds \\ &\leq 2 \cdot \int_{I_1} (|\tilde{\gamma}'_e \circ P|^2 + |\tilde{\gamma}'_e|^2) ds \\ &\leq 2(L^2 + L^2) \int_{I_1} ds \\ &\leq 4L^2 \cdot \ell(I_1) \\ &\leq 8L^3 \cdot \left( \int_0^1 |P'(s) - 1|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Se  $(\int_0^1 |P'(s) - 1|^2 ds)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2L} = |s_i - s_{i+1}|$  então  $I_2 = \emptyset$ . Desse modo, suponhamos que  $(\int_0^1 |P'(s) - 1|^2 ds)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2L}$ . Dessa forma, se  $x \in I_2$  então  $P(x)$  e  $x$  não são separados por um ponto de quebra de  $\tilde{\gamma}_e$ , utilizando as desigualdades (3.34) e (2.48)

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{I_2} |\tilde{\gamma}'_e \circ P(x) - \tilde{\gamma}'_e(x)|^2 ds &\leq \int_{I_2} \left( \frac{L^2}{16} \cdot |P(x) - x| \right)^2 ds \\
&\leq \frac{L^4}{256} \int_{I_2} |P(x) - x|^2 ds \\
&\leq \frac{L^4}{256} \int_0^1 |P'(x) - 1|^2 ds. \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Assim, combinamos em (3.32) as desigualdades (3.33), (3.35) e (3.36), juntamente com (3.30) e (3.31) obtendo:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |\gamma'_e - \tilde{\gamma}'_e|^2 ds &\leq \int_0^1 2|(\tilde{\gamma}'_e \circ P) \cdot P' - \tilde{\gamma}'_e \circ P|^2 + 2|\tilde{\gamma}'_e \circ P - \tilde{\gamma}'_e|^2 ds \\
&\leq 2L^2 \cdot \int_0^1 |(P' - 1)|^2 ds + \frac{L^4}{128} \int_0^1 |P'(s) - 1|^2 ds \\
&\quad + 16L^3 \left( \int_0^1 |P'(s) - 1|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2L^2 \left( \frac{\ell^2(\gamma) - \ell^2(\tilde{\gamma}_e)}{\ell^2(\tilde{\gamma}_e)} \right) + \frac{L^4}{128} \left( \frac{\ell^2(\gamma) - \ell^2(\tilde{\gamma}_e)}{\ell^2(\tilde{\gamma}_e)} \right) \\
&\quad + 16L^3 \left( \frac{\ell^2(\gamma) - \ell^2(\tilde{\gamma}_e)}{\ell^2(\tilde{\gamma}_e)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \underbrace{\left( 2L^2 + \frac{L^4}{128} + 16L^3 \right)}_D \cdot \left( \frac{\ell^2(\gamma) - \ell^2(\tilde{\gamma}_e)}{\ell^2(\tilde{\gamma}_e)} \right). \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Portanto, pelas desigualdades (2.48) e (3.37)

$$\begin{aligned}
\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\gamma_e, \tilde{\gamma}_e) &= \int_0^1 (|\gamma_e - \tilde{\gamma}_e|^2 + |\gamma'_e - \tilde{\gamma}'_e|^2) ds \\
&\leq \frac{L^2}{2} \int_0^1 |\gamma'_e - \tilde{\gamma}'_e|^2 ds + \int_0^1 |\gamma'_e - \tilde{\gamma}'_e|^2 ds \\
&\leq \left( \frac{L^2}{2} + 1 \right) \cdot \int_0^1 |\gamma'_e - \tilde{\gamma}'_e|^2 ds \\
&\leq \underbrace{\left( \frac{L^2}{2} + 1 \right)}_{C_2} \cdot D \left( \frac{\ell^2(\gamma) - \ell^2(\tilde{\gamma}_e)}{\ell^2(\tilde{\gamma}_e)} \right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\gamma_e, \tilde{\gamma}_e) \leq C_2 \cdot \left( \frac{\ell^2(\gamma) - \ell^2(\tilde{\gamma}_e)}{\ell^2(\tilde{\gamma}_e)} \right). \tag{3.38}$$

- $\text{dist}_{W^{1,2}}(\tilde{\gamma}_e, \gamma_0)$

Para a etapa 3 de  $\Psi$ , basta aplicarmos o Lema 3.12 sobre os intervalos limitados  $[\tilde{s}_{2j-1}, \tilde{s}_{2j+1}]$  com  $j = 1, 2, \dots, L - 2$ , de onde obtemos,

$$\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\tilde{\gamma}_e, \gamma_0) \leq \frac{1}{L^2} L^2 D' [E(\tilde{\gamma}_e) - E(\gamma_0)] \leq C_3 \cdot \left( \frac{\ell^2(\tilde{\gamma}_e) - \ell^2(\gamma_0)}{\ell^2(\gamma_0)} \right), \text{ com } L^2 D' = C_3. \quad (3.39)$$

- $\text{dist}(\gamma_0, \Psi(\gamma))$

Como  $\gamma_0$  é uma geodésica por partes e  $\Psi(\gamma)$  é sua reparametrização, então pelo Lema 3.12 existe  $D''$  tal que  $C_4 = L^2 D''$  e assim

$$\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\gamma_0, \Psi(\gamma)) \leq \frac{1}{L^2} L^2 D'' [E(\gamma_0) - E(\Psi(\gamma))] \leq C_4 \left( \frac{\ell^2(\gamma_0) - \ell^2(\Psi(\gamma))}{\ell^2(\Psi(\gamma))} \right). \quad (3.40)$$

Finalmente, combinando (3.30), (3.38), (3.39) e (3.40), temos,

$$\begin{aligned} \text{dist}_{W^{1,2}}^2(\gamma, \Psi(\gamma)) &\leq C_1 \left( \frac{\ell^2(\gamma) - \ell^2(\gamma_e)}{\ell^2(\gamma_e)} \right) + C_2 \left( \frac{\ell^2(\gamma) - \ell^2(\tilde{\gamma}_e)}{\ell^2(\tilde{\gamma}_e)} \right) \\ &\quad + C_3 \left( \frac{\ell^2(\tilde{\gamma}_e) - \ell^2(\gamma_0)}{\ell^2(\gamma_0)} \right) + C_4 \left( \frac{\ell^2(\gamma_0) - \ell^2(\Psi(\gamma))}{\ell^2(\Psi(\gamma))} \right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Note que por (3.14), temos

$$\frac{1}{\ell(\gamma)} \leq \frac{1}{\ell(\gamma_e)} \leq \frac{1}{\ell(\tilde{\gamma}_e)} \leq \frac{1}{\ell(\gamma_0)} \leq \frac{1}{\ell(\Psi(\gamma))},$$

e valem as seguintes relações

$$\begin{aligned} \ell^2(\gamma) - \ell^2(\gamma_e) &> 0, & \ell^2(\gamma_e) - \ell^2(\tilde{\gamma}_e) &> 0, \\ \ell^2(\tilde{\gamma}_e) - \ell^2(\gamma_0) &> 0, & \ell^2(\gamma_0) - \ell^2(\Psi(\gamma)) &> 0. \end{aligned}$$

Assim, escolhendo  $C = \max\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$  e substituindo em (3.41)

$$\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\gamma, \Psi(\gamma)) \leq \frac{C}{\ell^2(\Psi(\gamma))} [\ell^2(\gamma) - \ell^2(\gamma_e) + \dots + \ell^2(\gamma_0) - \ell^2(\Psi(\gamma))].$$

Portanto,

$$\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\gamma, \Psi(\gamma)) \leq \phi \left( \frac{\ell^2(\gamma) - \ell^2(\Psi(\gamma))}{\ell^2(\Psi(\gamma))} \right).$$

□

### 3.2.4 Propriedade 4

Dada  $\gamma \in \Lambda_L$  se  $\Psi(\gamma) = \gamma$  então  $\gamma \in G$ , isto é, pontos fixos de  $\Psi$  são geodésicas com fronteira livre em  $S$ .

*Demonstração da Propriedade 4.* Observe que se  $\gamma$  é uma curva constante então o resultado é imediato, pois  $\gamma$  é geodésica por definição. Portanto, consideremos  $\gamma$  não constante.

Como o processo de encurtamento não aumenta o tamanho da curva em suas etapas temos que,

$$\ell(\gamma) \geq \ell(\gamma_e) \geq \ell(\tilde{\gamma}_e) \geq \ell(\gamma_0) \geq \ell(\Psi(\gamma)).$$

Além disso, o mesmo ocorre com a energia, isto é:

$$E(\gamma) \geq E(\gamma_e) \geq E(\tilde{\gamma}_e) \geq E(\gamma_0) \geq E(\Psi(\gamma)). \quad (3.42)$$

Por hipótese  $\Psi(\gamma) = \gamma$  então a energia de  $\Psi(\gamma)$  e  $\gamma$  deverá ser a mesma, ou seja,  $E(\Psi(\gamma)) = E(\gamma)$ . Desse modo, fazendo  $\gamma_e \mapsto \tilde{\gamma}_e$ , temos que  $E(\gamma_e) = E(\tilde{\gamma}_e) = \ell^2(\tilde{\gamma}_e)$ , onde  $E(\tilde{\gamma}_e) = \ell^2(\tilde{\gamma}_e)$ , pois  $\tilde{\gamma}_e$  é parametrizada proporcionalmente pelo comprimento de arco. E agora aplicando (3.31) obtemos,

$$\int_0^1 (P'_{\gamma_e} - 1)^2 ds = \frac{E(\gamma_e) - \ell^2(\tilde{\gamma}_e)}{\ell^2(\tilde{\gamma}_e)} = \frac{\ell^2(\tilde{\gamma}_e) - \ell^2(\tilde{\gamma}_e)}{\ell^2(\tilde{\gamma}_e)} = 0.$$

Portanto,

$$\int_0^1 (P'_{\gamma_e} - 1)^2 ds = 0.$$

Por outro lado,  $P_{\gamma_e}$  é um mapa afim monótono por partes, ou seja,

$$P_{\gamma_e}(s) = a_j s + b_j.$$

Deste modo,  $\int_0^1 (P'_{\gamma_e} - 1)^2 ds = 0$  se, e somente se,  $(P'_{\gamma_e} - 1)^2 = 0$ , o que nos garante que  $P_{\gamma_e} \equiv \text{Id}$  e assim podemos concluir que  $\gamma_e = \tilde{\gamma}_e$ .

O raciocínio análogo se aplica para  $\gamma_0 \mapsto \tilde{\gamma}_0$ , lembrando que  $\tilde{\gamma}_0 = \Psi(\gamma)$  e assim  $P_{\gamma_0} \equiv \text{Id}$ , da mesma forma, temos  $\gamma_0 = \tilde{\gamma}_0$ .

Combinando (3.42) com  $E(\Psi(\gamma)) = E(\gamma)$  temos que  $E(\gamma) = E(\gamma_e) = E(\gamma_0)$ . Assim, pelos Lemas 3.12 e 3.13 temos,

$$\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\gamma, \gamma_e) \leq C_1(E(\gamma) - E(\gamma_e)) = 0 \Rightarrow \gamma = \gamma_e, \quad (3.43)$$

$$\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\gamma_e, \gamma_0) \leq C_2(E(\gamma_e) - E(\gamma_0)) = 0 \Rightarrow \gamma_e = \gamma_0. \quad (3.44)$$

Logo, por (3.43) e (3.44) concluímos que  $\gamma = \gamma_e = \gamma_0$ .

O fato de  $\gamma = \gamma_e$  implica que os pontos de quebra de  $\gamma$  só podem aparecer em  $\gamma(s_{2j})$  com  $j = 1, 2, \dots, L-1$ , e  $\gamma$  é perpendicular a  $S$  nos pontos de fronteira. Além disso, como os pontos  $\gamma(s_{2j})$  são pontos suaves de  $\gamma_0$ , portanto  $\gamma$  não tem pontos de quebra.  $\square$

### 3.2.5 Propriedade 5

Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $\gamma \in \Lambda_L$  e  $\text{dist}(\gamma, G) \geq \epsilon$  então  $\ell(\Psi(\gamma)) \leq \ell(\gamma) - \delta$ .

*Demonstração da Propriedade 5.* Suponha por contradição que existe um  $\epsilon > 0$  e uma sequência de  $\gamma_j \in \Lambda_L$  (geodésicas por partes) tais que,

$$\ell(\Psi(\gamma_j)) \geq \ell(\gamma_j) - \frac{1}{j} \quad \text{e} \quad \text{dist}(\gamma_j, G) \geq \epsilon > 0.$$

Note que a segunda condição implica que o comprimento  $\ell(\gamma_j)$  é limitado inferiormente por uma constante positiva que independe de  $j$ . Em relação a primeira condição temos que, elevando ambos os membros da desigualdade ao quadrado e multiplicando-a por  $(-1)$ , obtemos,

$$-\ell^2(\Psi(\gamma_j)) \leq -\ell^2(\gamma_j) + 2\ell(\gamma_j)\frac{1}{j} - \frac{1}{j^2}.$$

Pela propriedade (3), existe uma função contínua  $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , com  $\phi(0) = 0$ , tal que,

$$\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\gamma_j, \Psi(\gamma_j)) \leq \phi\left(\frac{\ell^2(\gamma_j) - \ell^2(\Psi(\gamma_j))}{\ell^2(\Psi(\gamma_j))}\right).$$

Assim, passemos a análise do quociente do segundo membro da desigualdade acima.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\ell^2(\gamma_j) - \ell^2(\Psi(\gamma_j))}{\ell^2(\Psi(\gamma_j))}\right) &\leq \left(\frac{\ell^2(\gamma_j) - \ell^2(\gamma_j) + 2\ell(\gamma_j)\frac{1}{j} - \frac{1}{j^2}}{\ell^2(\Psi(\gamma_j))}\right) \\ &= \left[\left(\frac{2\ell(\gamma_j)}{j} - \frac{1}{j^2}\right) \cdot \frac{1}{\ell^2(\Psi(\gamma_j))}\right] \\ &\leq \left[\left(\frac{2\ell(\gamma_j)}{j} - \frac{1}{j^2}\right) \cdot \frac{1}{\ell^2(\gamma_j) - 2\ell(\gamma_j)\frac{1}{j} + \frac{1}{j^2}}\right] \\ &= \left[\left(\frac{2j\ell(\gamma_j) - 1}{j^2}\right) \cdot \frac{1}{\ell^2(\gamma_j) - 2\ell(\gamma_j)\frac{1}{j} + \frac{1}{j^2}}\right]. \end{aligned}$$

Como  $\ell(\gamma_j)$  é limitado inferiormente por uma constante positiva que independe de  $j$ , conforme já mencionado, então  $\ell^2(\gamma_j)$  também satisfaz essa propriedade. Portanto, podemos concluir que o numerador da expressão converge para zero, mas seu denominador não. Logo,

$$\left(\frac{\ell^2(\gamma_j) - \ell^2(\Psi(\gamma_j))}{\ell^2(\Psi(\gamma_j))}\right) \leq \frac{2j\ell(\gamma_j) - 1}{j^2 \cdot \left(\ell^2(\gamma_j) - 2\ell(\gamma_j)\frac{1}{j} + \frac{1}{j^2}\right)} \rightarrow 0.$$

Desse modo, temos que,

$$\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\gamma_j, \Psi(\gamma_j)) \leq \phi\left(\frac{\ell^2(\gamma_j) - \ell^2(\Psi(\gamma_j))}{\ell^2(\Psi(\gamma_j))}\right) \rightarrow 0.$$

Logo,

$$\text{dist}_{W^{1,2}}^2(\gamma_j, \Psi(\gamma_j)) \rightarrow 0.$$

Pela Proposição 3.9  $\Lambda_L$  é compacto, então a sequência  $\gamma_j$  possui uma subsequência que irá convergir para alguma  $\gamma \in \Lambda_L$ , e o mesmo vale para a sequência  $\Psi(\gamma_j)$ . Pela propriedade 1,  $\Psi$  é contínua em  $\Lambda_L$ , o que implica que  $\Psi(\gamma) = \gamma$ , que pela propriedade 4, implica que  $\gamma \in G$ , o que contradiz o fato de  $\text{dist}(\gamma, G) = \lim_{j \rightarrow \infty} \text{dist}(\gamma_j, G) \geq \epsilon$ .  $\square$

# Capítulo 4

## Existência de Geodésicas com fronteira livre

Neste capítulo, discutiremos a aplicação do processo de encurtamento modificado de Birkhoff para as varreduras (veja Definição 4.2 abaixo), além de apresentarmos a demonstração do Teorema 4.9, que é uma consequência do Teorema 4.8.

Ao longo do capítulo  $M^m$  denota uma variedade Riemanniana homogeneamente regular, enquanto  $S^k \subset M^m$  é uma subvariedade fechada e mergulhada,  $k < m$ , as quais satisfazem as propriedades da seção 3.1.2.

### 4.1 Existência de geodésicas minimizantes

Antes de provar a existência de geodésicas com fronteira livre no caso geral, trataremos nesta seção do caso onde podemos obter uma geodésica minimizante.

**Teorema 4.1.** *Suponha que  $\mathcal{L}$  é uma classe de homotopia livre não-trivial, de curvas com extremos em  $S$ . Então  $\mathcal{L}$  contém uma geodésica minimizante  $\gamma : I \rightarrow M$  com fronteira livre em  $S$ .*

*Demonstração.* Seja  $U$  um domínio convexo e com fecho compacto, o qual contém  $S$ , e tal que toda curva em  $\mathcal{L}$  é homotópica na mesma classe a uma curva contida em  $U$ . Defina

$$d = \inf\{\ell(\gamma) : \gamma \in \mathcal{L}\}.$$

Afirmamos que  $d > 0$ . Suponha o contrário. Então existe uma sequência de curvas  $\{\sigma_j\}$  na classe  $\mathcal{L}$  tais que  $\lim_{j \rightarrow \infty} \ell(\sigma_j) = 0$ , e  $\sigma_j(I) \subset U$ . Como  $U$  é compacto, podemos cobri-lo com um número finito de bolas geodésicas convexas, logo a propriedade anterior implica que para  $j$  grande o suficiente temos que  $\sigma_j(I)$  está contido em uma das bolas, a qual necessariamente intersecta  $S$ . Consequentemente a curva  $\sigma_j$  é homotópica a um ponto via curvas com extremos em  $S$ , no entanto isto contradiz o fato que  $\mathcal{L}$  é não trivial.

Seja  $\{\gamma_j\}$  uma seqüência de curvas diferenciáveis por partes em  $\mathcal{L}$  tais que  $\ell(\gamma_j) \rightarrow d$ , e  $\gamma_j(I) \subset U$ . Construindo homotopias localmente, podemos supor que cada  $\gamma_k$  é uma geodésica quebrada definida no intervalo  $[0, 1]$  e parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco. Seja  $L = \sup \ell(\gamma_j)$ . Como

$$\text{dist}(\gamma_j(s_1), \gamma_j(s_2)) \leq \int_{s_1}^{s_2} |\gamma_j'(s)| ds \leq L(s_2 - s_1)$$

para todo  $s_1 \leq s_2 \in [0, 1]$ , segue que a seqüência  $\gamma_j$  é equicontínua.

Como o fecho de  $U$  é compacto, existe uma subsequência de  $\{\gamma_j\}$ , que continuaremos a denotar  $\{\gamma_j\}$  para não carregar a notação, que converge uniformemente para uma curva contínua  $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow M$  com extremos em  $S$ .

Seja agora  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k < s_{k+1} = 1$  uma partição do intervalo  $[0, 1]$  de modo que  $\gamma_0|_{[s_i, s_{i+1}]}$  está contida em uma vizinhança totalmente normal, com  $i = 0, 1, \dots, k$  e  $\gamma_0(0)$  e  $\gamma_0(1) \in S$ . Defina  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  como sendo a curva diferenciável por partes tal que  $\gamma|_{[s_i, s_{i+1}]}$  é o único segmento geodésico que liga os pontos  $\gamma_0(s_i)$  e  $\gamma_0(s_{i+1})$ , para  $i = 1, \dots, k - 1$ . É fácil ver que  $\gamma \in \mathcal{L}$ , construindo homotopias locais dentro das vizinhanças uniformemente normais.

Afirmamos que  $\ell(\gamma) = d$ . De fato, suponha por absurdo que  $\ell(\gamma) > d$  e seja

$$\epsilon = \frac{\ell(\gamma) - d}{2k + 3}.$$

Seja  $j$  um inteiro tal que

$$\ell(\gamma_j) - d < \epsilon$$

$$\text{dist}(\gamma_j(s), \gamma_0(s)) < \epsilon, \forall s \in [0, 1]$$

Denotando por  $\gamma^i = \gamma|_{[s_i, s_{i+1}]}$  e  $\gamma_j^i = \gamma_j|_{[s_i, s_{i+1}]}$ , temos

$$\sum_{i=0}^k [\ell(\gamma_j^i) + 2\epsilon] = \ell(\gamma_j) + 2(k+1)\epsilon < d + (2k+3)\epsilon = \ell(\gamma) = \sum_{i=0}^k \ell(\gamma^i),$$

de modo que existe um inteiro  $0 \leq i \leq k$  tal que

$$\ell(\gamma_j^i) + 2\epsilon < \ell(\gamma^i)$$

contradizendo o fato que  $\gamma^i$  é minimizante.

Parametrizando  $\gamma$  pelo comprimento de arco, temos que  $\gamma : [0, d] \rightarrow M$  é uma geodésica quebrada que tem comprimento mínimo na classe  $\mathcal{L}$ . Mostraremos agora que  $\gamma$  é uma geodésica com fronteira livre. Para isso, basta mostrar que  $\gamma$  é regular nos pontos  $p_i = \gamma(s_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Suponha por absurdo o contrário e seja  $B$  uma bola convexa centrada em  $p_i$ . Escolha pontos  $q_1, q_2 \in \gamma([0, 1]) \cap B$  de modo que o triângulo geodésico  $p_i q_1 q_2$  seja

homotópico a um ponto. Considere a curva constituída pela geodésica minimizante  $q_1q_2$  e pelos dois arcos de  $\gamma$  cujos extremos são respectivamente  $\gamma(s_0)$ ,  $q_1$ , e  $\gamma(s_{k+1})$ ,  $q_2$ . Essa curva está na classe  $\mathcal{L}$  e tem comprimento menor que  $\gamma$ , uma contradição. Além disso, como a curva é minimizante, segue da Proposição 2.28 que seus extremos encontram  $S$  ortogonalmente.  $\square$

## 4.2 Varreduras e a largura

**Definição 4.2.** Um mapa contínuo  $F : [0, 1] \times I \rightarrow M$ , com coordenadas  $(t, s) \in [0, 1] \times I$ , é chamado de varredura se cumpre as seguintes condições:

- $F(t, \cdot) \in W^{1,2}(I, M)$  e  $F(t, 0), F(t, 1) \in S$ , para todo  $t \in [0, 1]$ .
- $t \rightarrow F(t, \cdot)$  é um mapa contínuo de  $[0, 1]$  para  $W^{1,2}(I, M)$ .
- $F(0, \cdot)$  e  $F(1, \cdot)$  são mapas constantes.

A nomenclatura varredura vem do seguinte caso especial. Suponha que  $M$  é uma superfície compacta e  $S = \partial M$ . Então intuitivamente uma varredura é uma família de curvas que varre toda a superfície  $M$ .

**Exemplo 4.3.** Considere

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad S = \partial M,$$

e o mapa contínuo  $F : [0, 1] \times I \rightarrow M$  definido por

$$F(t, s) = \left( \sqrt{1 - (2t - 1)^2} (2s - 1), 2t - 1 \right).$$

É fácil ver que todas as propriedades da definição anterior são válidas, logo este mapa é uma varredura.  $\diamond$

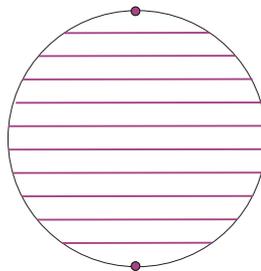


Figura 4.1: Varredura do disco

**Exemplo 4.4.** Considere  $M = \mathbb{R}^3$  e  $S = \gamma$  uma curva fechada como na figura a seguir. Note que a família de curvas representada na figura é uma varredura por curvas com extremos em  $S$ . Neste caso, a codimensão de  $S$  é maior que 1.  $\diamond$

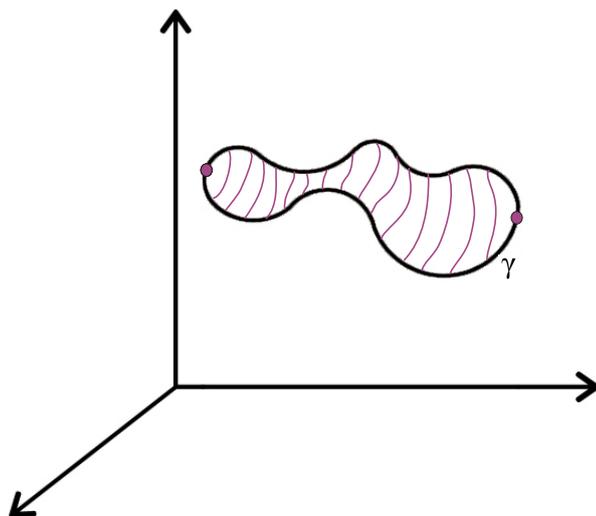


Figura 4.2: Varredura com extremos em uma curva fechada de  $\mathbb{R}^3$

Denotaremos por  $\Omega$  o conjunto de todas as varreduras (no contexto da definição 4.2). Duas varreduras são ditas homotópicas, se os mapas são homotópicos como mapas de  $[0, 1] \times I$  para  $M$  por mapas que também são varreduras no espaço  $\Omega$ . A cada varredura, associamos um invariante min-max básico chamado largura.

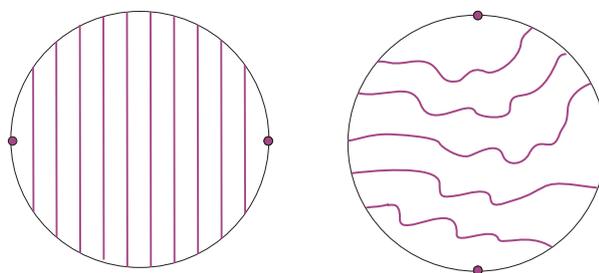


Figura 4.3: Varreduras homotópicas à varredura do disco

**Definição 4.5.** Dada  $F^* \in \Omega$ , definimos  $[F^*]$  como o conjunto de todos mapas  $F \in \Omega$  que são homotópicos a  $F^* \in \Omega$ . Assim, definimos a largura de  $[F^*]$  como

$$W = W([F^*]) = \inf_{F \in [F^*]} \max_{t \in [0,1]} E(F(t, \cdot)),$$

onde  $E(F(t, \cdot)) = \int_0^1 \left| \frac{\partial F}{\partial s}(t, s) \right|^2 ds$ .

Observe que a largura é sempre não-negativa e afirmamos que  $W > 0$  se  $F^*$  representa uma classe de homotopia não trivial em  $\Omega$ . De fato, suponha por contradição que a largura  $W = 0$ . Então existe uma varredura  $F$  homotópica a  $F^*$  e a energia de cada  $F(t, \cdot)$  é suficientemente pequena, portanto  $F(t, \cdot)$  está em uma vizinhança geodésica convexa de

$S$ . Assim, pela propriedade (S2) podemos deformar  $F(t, \cdot)$  continuamente num ponto por curvas cujos extremos estão em  $S$ , o que contradiz o fato de  $F^*$  ser homotopicamente não trivial.

### 4.3 Modificando Varreduras

A ideia para mostrar que existe uma geodésica com fronteira livre é considerar uma varredura  $F^*$  com a largura associada satisfazendo  $W > 0$ , e então considerar uma sequência de varreduras  $\{F_j\}$  com  $F_j \in [F^*]$ ,  $\forall j$ , tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{t \in [0,1]} E(F_j(t, \cdot)) = W.$$

Ingenuamente, se espera então que uma subsequência de fatias nessas varreduras converge para uma geodésica com fronteira livre  $\gamma : I \rightarrow M$ , tal que  $\ell(\gamma) = E(\gamma) = W$ . No entanto, pode acontecer que as fatias com energia próxima de  $W$  não estejam próximas de nenhuma geodésica. A ideia é então modificar as varreduras através do processo de encurtamento, de modo a obter a propriedade desejada.

Conforme apresentado no capítulo anterior, o processo de encurtamento foi definido para curvas no espaço  $\Lambda_L$ . Nessa seção, vamos aplicar um processo similar para curvas quaisquer, mais especificamente, para as curvas que compõem uma varredura  $\hat{F} \in \Omega$ , de modo que as novas curvas pertencem ao espaço  $\Lambda_L$ .

Inicialmente, vamos assumir que a energia máxima das fatias  $\hat{F}(t)(\cdot) = \hat{F}(t, \cdot)$  é limitada por um número  $W$ , ou seja,  $\max_{t \in [0,1]} E(\hat{F}(t, \cdot)) \leq W$ . Desse modo,

$$\begin{aligned} d_M(\hat{F}(t, u), \hat{F}(t, v)) &\leq \ell(\hat{F}(t, s)|_{[u,v]}) \\ &= \int_u^v |\partial_s \hat{F}(t, s)| ds \\ &\leq |v - u|^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_u^v |\partial_s \hat{F}(t, s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |v - u|^{\frac{1}{2}} \cdot (E(\hat{F}(t, s)))^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |v - u|^{\frac{1}{2}} \cdot W^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Agora, iremos deformar  $\hat{F}$  em  $\tilde{F}_e$  de forma similar as etapas 1 e 2 do processo de encurtamento modificado, descritas na seção 3.2.1, embora as curvas originais não estejam no espaço  $\Lambda_L$ .

Por (4.1), observamos que cada  $\hat{F}(t, \cdot)$  é uma função de Hölder uniformemente contínua com expoente igual a  $\frac{1}{2}$ . Desse modo, escolhendo uma partição  $\mathcal{P} = \{0 = s_0, s_1, \dots, s_n = 1\}$  do intervalo  $I = [0, 1]$  tal que  $\mathcal{P}$  é uniformemente espaçada e  $|s_j - s_{j+1}| \leq \frac{4}{W}$ , para todo

$j$  temos

$$d_M(\hat{F}(t, s_j), \hat{F}(t, s_{j+1})) \leq |s_j - s_{j+1}|^{\frac{1}{2}} \cdot W^{\frac{1}{2}} = 2. \quad (4.2)$$

Note que, além disso, por 4.1 e 4.2, para todo  $t \in [0, 1]$  e  $j = 1, 2, \dots, N - 1$

$$\ell \left( \hat{F}(t, \cdot) \Big|_{[s_j, s_{j+1}]} \right) \leq 2.$$

Portanto, podemos aplicar o equivalente a etapa 1 do processo de encurtamento em  $\hat{F}(t, \cdot)$  pelas propriedades (M2) e (S2) e assim obter  $F_e(t, \cdot)$ . E por fim, pela etapa 2, ao reparametrizar  $F_e(t, \cdot)$  obtemos uma curva de velocidade constante  $\tilde{F}_e(t, \cdot)$ . Pela proposição 3.10, o mapa  $t \mapsto \tilde{F}_e(t, \cdot)$  é um mapa contínuo de  $[0, 1]$  para  $W^{1,2}(I, M)$  e, além disso,  $\tilde{F}_e(t, \cdot) \in \Omega$ .

Para provar a condição de Lipschitz para  $\tilde{F}_e(t, \cdot)$ , observe que tais curvas possuem velocidade constante, logo

$$|\partial_s \tilde{F}_e(t, \cdot)| = \int_0^1 |\partial_s \tilde{F}_e(t, s)| ds = \ell(\tilde{F}_e(t, \cdot)) \leq \ell(\hat{F}(t, \cdot)) \leq W^{\frac{1}{2}},$$

onde utilizamos (4.1) para a obtenção da última desigualdade. Observe que essa estimativa ocorre fora dos pontos de quebra. Dessa forma, pelo Teorema 2.45 onde  $\partial_s \tilde{F}_e(t, \cdot)$  é diferenciável, obtemos

$$d_M(\tilde{F}_e(t, u), \tilde{F}_e(t, v)) \leq \ell \left( \tilde{F}_e(t, \cdot) \Big|_{[u, v]} \right) \leq |v - u| \cdot W^{\frac{1}{2}}$$

Portanto,  $\tilde{F}_e(t, \cdot)$  é limitado com constante de Lipschitz  $W^{\frac{1}{2}}$ . E assim, podemos concluir que  $\tilde{F}_e(t, \cdot) \in \Lambda_L$  para algum  $L \in \mathbb{N}$ , com  $L$  maior que  $n$  e  $W^{\frac{1}{2}}$ .

**Lema 4.6.** *Considere  $\hat{F}(t, \cdot) \in \Omega$  e  $F_e(t, \cdot), \tilde{F}_e(t, \cdot)$ , conforme descritas acima. Então  $\hat{F}(t, \cdot), F_e(t, \cdot), \tilde{F}_e(t, \cdot)$ , são todas homotópicas em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, provaremos que  $\hat{F}$  é homotópica a  $F_e$  no espaço  $\Omega$ . Desse modo, levando em consideração os  $L$  pontos de quebra,  $0 = s_0, s_1, \dots, s_L = 1$ , que determinam a sequência de intervalos,  $[0, s_1], [s_1, s_2], \dots, [s_{L-1}, 1]$ , deformaremos  $\hat{F}$  em  $L$  etapas de maneira indutiva.

Assim, para  $r \in [0, s_1]$ , definimos o mapa  $B : [0, 1] \times I \times [0, s_1] \rightarrow M$  tal que,

$$B(t, s, r) = \begin{cases} \tilde{H}(\hat{F}(t, r))(s), & \text{se } 0 \leq s \leq r \\ \hat{F}(t, s), & \text{se } r \leq s \leq 1 \end{cases}$$

onde  $\tilde{H}$  é dada por (3.7) e está definida no intervalo  $[0, r]$  com  $0 \leq r \leq s_1$ . Para concluirmos que  $B(\cdot, \cdot, r) \in \Omega$ , para todo  $r \in [0, s_1]$ , utilizamos a continuidade de  $B$ , a continuidade e definição de  $\tilde{H}$  e que  $\tilde{H}(\hat{F}(t, r))(s) = \hat{F}(t, r)$ . Isso garante que  $B(t, \cdot, r)|_{[0, r]} = \tilde{H}(\hat{F}(t, r))$  está em  $W^{1,2}([0, r], M)$  e que, colando tal função com  $\hat{F}(t, \cdot)|_{[r, 1]}$ , obtemos uma função em

$W^{1,2}([0, 1], M)$ . Portanto,  $B(\cdot, \cdot, r) \in \Omega$  e define uma homotopia entre  $B(t, s, 0) = \hat{F}(t, s)$  com  $B(t, s, s_1) = F_1(t, s) \in \Omega$ .

Agora definiremos, de forma indutiva, a aplicação  $B(t, s, r)$  como uma homotopia entre  $F_j(t, s)$  e  $F_{j+1}(t, s)$  quando  $r \in [s_j, s_{j+1}]$ , com  $1 \leq j \leq L - 2$ . Portanto, assumamos que  $F_1, \dots, F_j$  e  $B(\cdot, \cdot, r)$  estão bem definidas para  $r \in [0, s_j]$  onde  $B(\cdot, \cdot, r) : [s_l, s_{l+1}] \rightarrow \Omega$  é uma homotopia entre  $F_l$  e  $F_{l+1}$  com  $1 \leq l \leq j - 1$ . Desse modo, para  $r \in [s_j, s_{j+1}]$ , definimos  $B : [0, 1] \times I \times [s_j, s_{j+1}] \rightarrow M$  por:

$$B(t, s, r) = \begin{cases} H(F_j(t, s_j), F_j(t, r))(s), & \text{se } s_j \leq s \leq r \\ F_j(t, s), & \text{se } 0 \leq s \leq s_j \text{ ou } r \leq s \leq 1 \end{cases}$$

onde  $H$  é definida por (3.13). Onde o intervalo em que  $H(\cdot, \cdot)$  está definida é  $[s_j, r]$  com  $s_j \leq r \leq s_{j+1}$ .

Para concluirmos que  $B(\cdot, \cdot, r) \in \Omega$ , para todo  $r \in [s_j, s_{j+1}]$ , utilizamos a continuidade de  $B$ , a continuidade e definição de  $H$  e que  $H(F_j(t, s_j), F_j(t, r))(s) = (F_j(t, s_j), F_j(t, r))$ . Isso garante que  $B(t, \cdot, r)|_{[s_j, s_{j+1}]} = H(F_j(t, s_j), F_j(t, r))$  está em  $W^{1,2}([0, r], M)$  e que, colando tal função com  $F_j(t, \cdot)|_{[r, 1]}$ , obtemos uma função em  $W^{1,2}([0, 1], M)$ . Portanto,  $B(\cdot, \cdot, r) \in \Omega$  e define uma homotopia entre  $B(t, s, s_j) = F_j(t, s)$  e  $B(t, s, s_{j+1}) = F_{j+1}(t, s)$ .

Da mesma maneira, utilizando argumentos similares, podemos definir, por meio de  $\tilde{H}$ , uma homotopia entre  $F_{L-1}$  e  $F_e$  por:

$$B(t, s, r) = \begin{cases} \tilde{H}(F_{L-1}(t, r))(s), & \text{se } s_{L-1} + 1 - r \leq s \leq 1 \\ F_{L-1}(t, s), & \text{se } 0 \leq s \leq s_{L-1} + 1 - r \end{cases}$$

Agora, provaremos que  $F_e$  é homotópica a  $\tilde{F}_e$  no espaço  $\Omega$ . Como  $\tilde{F}_e(t, \cdot)$  é uma reparametrização de  $F_e(t, \cdot)$ , temos que  $F_e(t, \cdot) = \tilde{F}_e(t, \cdot) \circ P_t$ , onde  $P_t : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é um mapa afim monótono por partes. Conforme demonstrado anteriormente, na Proposição 3.10,  $P_t$  depende continuamente de  $t$ . Assim, vamos definir o mapa  $J : [0, 1] \times I \times [0, 1] \rightarrow M$  por

$$J(t, s, r) = \tilde{F}_e(t, (1 - r)P_t(s) + rs)$$

que é uma homotopia entre  $J(\cdot, \cdot, 0) = F_e$  e  $J(\cdot, \cdot, 1) = \tilde{F}_e$ . Além disso,  $J(\cdot, \cdot, r) \in \Omega$  para todo  $r \in [0, 1]$ . Por fim, observe que se  $\ell(F_e(t, \cdot)) = 0$  podemos considerar  $P_t = \text{Id}$  e a aplicação  $J$  ainda permanece bem definida.  $\square$

Para concluirmos o processo de encurtamento, resta aplicarmos as etapas 3 e 4. Desse modo, deformamos  $\tilde{F}_e(t, \cdot)$  em  $F_0(t, \cdot)$ , ou seja, em cada intervalo da forma  $[\tilde{s}_{2j-1}, \tilde{s}_{2j+1}]$  substituímos  $\tilde{F}_e(t, \cdot)$  por geodésicas minimizantes de modo a obter o mapa  $F_0(t, \cdot)$ . Por fim, reparametrizando  $F_0(t, \cdot)$  obtemos um mapa de velocidade constante  $\tilde{F}_0(t, \cdot)$  tal que  $\tilde{F}_0(t, \cdot) \in \Lambda_L$  para todo  $t$ . Além disso, observe que pela propriedade 1 de  $\Psi$  e sua de-

monstração, os mapas  $F_0(t, \cdot)$  e  $\tilde{F}_0(t, \cdot)$  são mapas contínuos de  $[0, 1]$  para  $W^{1,2}(I, M)$ , e portanto  $\tilde{F}_0(t, \cdot) \in \Omega$ .

**Lema 4.7.** *Sejam  $\tilde{F}_e(t, \cdot) \in \Omega$ , e  $F_0(t, \cdot)$  e  $\tilde{F}_0(t, \cdot)$ . Então  $\tilde{F}_e(t, \cdot), F_0(t, \cdot), \tilde{F}_0(t, \cdot)$ , são todas homotópicas em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, provaremos que  $\tilde{F}_e$  é homotópica a  $F_0$  no espaço  $\Omega$ . Desse modo, definimos o mapa  $C : [0, 1] \times I \times [0, 1] \rightarrow M$  tal que

$$C(t, s, r) = H(\tilde{F}_e(t, r), F_0(t, r))(s)$$

onde  $H$  é a aplicação definida por (3.13). Observe que  $C$  é um mapa contínuo, pois  $H$  é uma aplicação contínua, e ainda  $C(\cdot, \cdot, 0) = \tilde{F}_e$  e  $C(\cdot, \cdot, 1) = \tilde{F}_0$ . Portanto,  $C$  é uma homotopia entre  $\tilde{F}_e$  e  $\tilde{F}_0$ .

E por fim, provaremos que  $F_0$  é homotópica a  $\tilde{F}_0$  no espaço  $\Omega$ . Sabemos que  $\tilde{F}_0(t, \cdot)$  é uma reparametrização de  $F_0(t, \cdot)$ , logo  $F_0(t, \cdot) = \tilde{F}_0(t, \cdot) \circ P_t$ , onde  $P_t : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é um mapa monótono afim por partes. Conforme demonstrado anteriormente, na demonstração da Proposição 3.10,  $P_t$  depende continuamente de  $t$ . Então, o mapa  $S : [0, 1] \times I \times [0, 1] \rightarrow M$  tal que

$$S(t, \tilde{s}, \tilde{r}) = \tilde{F}_0(t, (1 - \tilde{r})P_t(\tilde{s}) + \tilde{r}s)$$

é uma homotopia entre  $S(\cdot, \cdot, 0) = F_0(t, \cdot)$  e  $S(\cdot, \cdot, 1) = \tilde{F}_0$ .

□

## 4.4 Teorema Min-Max e Existência de Geodésicas

Antes de seguirmos para o objetivo principal desta seção, um questionamento natural que surge é: Sob quais condições podemos encontrar classes de homotopias de varreduras  $[F^*]$  que são não triviais implicando assim  $W([F^*]) > 0$ ? A seguinte condição topológica garante a não trivialidade da varredura: Se o grupo de homotopia relativo  $\pi_2(M, S)$  (veja Capítulo 4 em [7]), é não trivial, então existe um mapa do disco  $D$  em  $M$ , cujo bordo está contido em  $S$  que não é homotópico com extremos livres a um mapa constante. Isso permite tomar qualquer varredura não trivial do disco e "passar" para  $(M, S)$ .

Nesta seção, provaremos a existência de uma geodésica não trivial com fronteira livre em  $S$ . Para isso, consideraremos o seguinte teorema:

**Teorema 4.8.** *Dada  $F^* \in \Omega$  com  $W = W([F^*]) > 0$ , então existe uma sequência de varreduras  $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset [F^*]$  com*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, 1]} E(F_j(t, \cdot)) = W,$$

e tal que, para todo  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  satisfazendo o seguinte: se  $j > \frac{1}{\delta}$  e para algum  $t_0 \in [0, 1]$  temos  $E(F_j(t_0, \cdot)) > W - \delta$ , então  $\text{dist}(F_j(t_0, \cdot), G) \leq \epsilon$ .

*Demonstração.* Considere uma sequência de varreduras  $\{\hat{F}_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset [F^*]$  tal que

$$\max_{t \in [0, 1]} E(\hat{F}_j(t, \cdot)) \leq W + \frac{1}{j}$$

Conforme demonstrado nos Lemas 4.6 e 4.7, é possível deformar cada varredura  $\hat{F}_j$  em uma varredura  $\bar{F}_j$  de modo que  $E(\bar{F}_j(t, \cdot)) \leq E(\hat{F}_j(t, \cdot))$  para todo  $t \in [0, 1]$ , conforme já discutido anteriormente, e  $\bar{F}_j(t, \cdot)$  está em  $\Lambda_L$  para todo  $t$ . Além disso,  $\bar{F}_j$  é homotópica a  $\hat{F}_j$  em  $\Omega$  conforme o Lema 4.6, logo  $\bar{F}_j \in [F^*]$ . Portanto,

$$\max_{t \in [0, 1]} E(\bar{F}_j(t, \cdot)) \leq \max_{t \in [0, 1]} E(\hat{F}_j(t, \cdot)) \leq W + \frac{1}{j} \quad (4.3)$$

Agora, aplicaremos o processo do mapa de encurtamento modificado de Birkhoff em cada curva  $\bar{F}_j(t, \cdot)$  de modo que a obter uma nova curva  $F_j = \Psi(\bar{F}_j(t, \cdot)) \in \Lambda_L$ . Esse processo define uma aplicação contínua  $F_j : [0, 1] \times I \rightarrow M$  a qual, pelo Lema 4.6, é homotópica a  $F^*$ .

Além disso, como sabemos que os comprimentos não aumentam durante o processo, podemos inferir que  $E(F_j(t, \cdot)) = \ell^2(F_j(t, \cdot)) \leq \ell^2(\bar{F}_j(t, \cdot)) = E(\bar{F}_j(t, \cdot))$ . Assim,

$$\max_{t \in [0, 1]} E(F_j(t, \cdot)) \leq \max_{t \in [0, 1]} E(\bar{F}_j(t, \cdot)).$$

Por outro lado, pela relação estabelecida em (4.3) temos,

$$\max_{t \in [0, 1]} E(F_j(t, \cdot)) \leq \max_{t \in [0, 1]} E(\bar{F}_j(t, \cdot)) \leq \max_{t \in [0, 1]} E(\hat{F}_j(t, \cdot)) \leq W + \frac{1}{j}.$$

Fazendo  $j \rightarrow \infty$  obtemos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, 1]} E(F_j(t, \cdot)) = W = W([F^*]).$$

Agora provaremos que  $\{F_j\}$  satisfaz as condições do teorema. Vamos supor que  $\{F_j\}$  não satisfaz tais condições, desse modo existem  $\epsilon > 0$ , uma sequência  $\delta_i > 0$ , com  $\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i = 0$ , uma subsequência  $F_{j_i}$ , com  $j_i > \frac{1}{\delta_i}$  e uma sequência de  $t_i \in [0, 1]$ , tais que  $E(F_{j_i}(t_i, \cdot)) = \ell^2(F_{j_i}(t_i, \cdot)) > W - \delta_i$  mas  $\text{dist}(F_{j_i}(t_i, \cdot), G) \geq \epsilon$ .

Como  $E(F_{j_i}(t_i, \cdot)) \leq E(\bar{F}_{j_i}(t_i, \cdot)) \leq W + \frac{1}{j_i} \leq W + \delta_i$  e  $E(F_{j_i}(t_i, \cdot)) = \ell^2(F_{j_i}(t_i, \cdot)) \leq \ell^2(\bar{F}_{j_i}(t_i, \cdot)) = E(\bar{F}_{j_i}(t_i, \cdot))$ , temos,

$$W - \delta_i \leq \ell^2(F_{j_i}(t_i, \cdot)) \leq \ell^2(\bar{F}_{j_i}(t_i, \cdot)) \leq W + \delta_i$$

Agora, denote  $F_i = F_{j_i}(t_i, \cdot)$  e  $\bar{F}_i = \bar{F}_{j_i}(t_i, \cdot)$ . Já que  $W > 0$  então  $\ell(F_i) \geq \frac{\epsilon}{2}$  para  $i$  suficientemente grande. Então, pela propriedade 3 de  $\Psi$ , existe uma função contínua  $\phi$  tal que,

$$\text{dist}_{W^{1,2}}^2(F_i, \bar{F}_i) \leq \phi \left( \frac{\ell^2(F_i) - \ell^2(\bar{F}_i)}{\ell^2(\bar{F}_i)} \right) \leq \frac{\epsilon}{2},$$

para  $i$  suficientemente grande, com  $F_i = \Psi(\bar{F}_i)$ .

Portanto, pela desigualdade triangular, temos,

$$\text{dist}(\bar{F}_i, G) \geq \text{dist}(F_i, G) - \text{dist}(F_i, \bar{F}_i) \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}$$

mas isso contradiz a propriedade 5 de  $\Psi$ . □

**Teorema 4.9.** *Seja  $F^* \in \Omega$  tal que  $W = W([F^*]) > 0$ . Então existe uma geodésica não-trivial  $\gamma : I \rightarrow M$  com fronteira livre em  $S$ , tal que  $E(\gamma) = W$ .*

*Demonstração.* Suponha que não existe uma geodésica como no enunciado. Considere uma sequência de varreduras  $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset [F^*]$  como no Teorema anterior. Dado  $\epsilon > 0$ , temos que se  $j$  é suficientemente grande e  $F_j(t, \cdot)$  tem energia próxima de  $W$ , então  $\text{dist}(F_j(t, \cdot), G) \leq \epsilon$ . Segue da hipótese que os elementos de  $G$  próximos de  $F_j(t, \cdot)$  são necessariamente curvas constantes. No entanto curvas constantes tem energia nula, o contradiz o fato de que  $W$  é positivo. Portanto, existe uma geodésica não-trivial  $\gamma : I \rightarrow M$  com fronteira livre em  $S$ . □

# Referências Bibliográficas

- [1] W. Bos, *Kritische Sehnen auf Riemannschen Elementarraumstücke*, *Math. Ann.* 15 (1963), 431–451
- [2] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Space and Partial Differential Equations*. Springer, New York 18 (5 e 6), 1993.
- [3] T.H. Colding, W.P. Minicozzi II. *A Course in Minimal Surfaces*. Graduate Studies in Mathematics, volume 121, American Mathematical Society, 2011.
- [4] T.H. Colding, W.P. Minicozzi II, *Width and mean curvature flow*. *Geometry and Topology* 2008, no. 5, 2517–2535.
- [5] M.P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada. 1988.
- [6] J. Hadamard, *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésique*, *Journal Mathematic Pure*, 1898, no. 4, pp. 27-75.
- [7] A. Hatcher, *Algebraic topology*. Cambridge University , 2002.
- [8] W. Klingenberg. *Lectures on closed geodesics*. Springer, Verlag. 1978.
- [9] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 202. Springer, New York, 2011. xviii+433 pp. ISBN: 978-1-4419-7939-1.
- [10] E.L. Lima, *Variedades Diferenciáveis*. Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Quinta Edição. 2015.
- [11] L. A. Lusternik e L. G. Shnirelmann, *Sur le probleme de trois geodesique fermees sur les surfaces de genre 0*, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1929, 269-271.
- [12] L. Lusternik e L. Schnirelmann, *Methodes Topologiques dans les Problemes Variationnels*, Hermann, Paris, 1934.
- [13] L. Lusternik e A. I. Fet, *Variational problems on closed manifolds*. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)* 81, (1951). 17–18.

- [14] J. Nash, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*. Ann. of Math. (2) 63 (1956), 20–63.
- [15] H. Poincaré, *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes*, Trans. American Mathematics Society, 1904, pp. 237-274
- [16] X. Zhou, *On the Free Boundary Min–Max Geodesics*, International Mathematics Research Notices, Vol. 2016, N<sup>o</sup>. 5, pp. 1447–1466.