

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**UM MODELO COMPUTACIONAL PARA A ANÁLISE  
GLOBAL TRIDIMENSIONAL DA ESTRUTURA DE  
EDIFÍCIOS ALTOS DE CONCRETO ARMADO COM A  
PRESENÇA DE PAREDES ESTRUTURAIS**

**Douglas Francescato Bernardi**

Porto Alegre  
maio 2010

**DOUGLAS FRANCESCATTO BERNARDI**

**UM MODELO COMPUTACIONAL PARA A ANÁLISE  
GLOBAL TRIDIMENSIONAL DA ESTRUTURA DE  
EDIFÍCIOS ALTOS DE CONCRETO ARMADO COM A  
PRESENÇA DE PAREDES ESTRUTURAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na modalidade Acadêmico.

**Orientadores: Américo Campos Filho  
Alexandre Rodrigues Pacheco**

Porto Alegre  
maio 2010

B523u Bernardi, Douglas Francescato

Um modelo computacional para a análise global tridimensional da estrutura de edifícios altos de concreto armado com a presença de paredes estruturais / Douglas Francescato Bernardi. – 2010.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Porto Alegre, BR-RS, 2010.

Orientação: Prof. Dr. Américo Campos Filho  
Prof. Dr. Alexandre Rodrigues Pacheco

1. Edifícios altos. 2. Elementos finitos. 3. Concreto armado. 4. Estruturas (Engenharia). I. Campos Filho, Américo, orient. II. Pacheco, Alexandre Rodrigues, orient. III. Título.

CDU-624.012.45(043)

**DOUGLAS FRANCESCATTO BERNARDI**

**UM MODELO COMPUTACIONAL PARA A ANÁLISE  
GLOBAL TRIDIMENSIONAL DA ESTRUTURA DE  
EDIFÍCIOS ALTOS DE CONCRETO ARMADO COM A  
PRESENÇA DE PAREDES ESTRUTURAIS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 24 de maio de 2010.

Prof. Américo Campos Filho  
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Orientador

Prof. Alexandre Rodrigues Pacheco  
Ph.D. pela Pennsylvania State University  
Orientador

Prof. Luiz Carlos Pinto da Silva Filho  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Inácio Benvegnu Morsch (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Profa. Mauren Aurich (PUC/RS)**  
Dra. pela Universidade de São Paulo

**Prof. Ronald José Ellwanger (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio de Janeiro

Dedico esta dissertação aos meus queridos  
pais, Susana e Vicente.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus, por sempre guiar meu caminho e iluminar minha vida.

Aos professores Américo Campos Filho e Alexandre Rodrigues Pacheco, pela orientação, compreensão e paciência em certos momentos, mas, principalmente, pela amizade durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Ao professor Inácio Benvegno Morsch pela colaboração na parte computacional.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC/UFRGS, pelos valiosos ensinamentos transmitidos.

Aos colegas de mestrado, Alexandre, Carlos Rodrigo, Fernanda, Leonardo, Luis Felipe e Ricardo, pela convivência, cooperação e amizade.

Aos demais colegas, amigos e funcionários que de uma forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho.

À Fernanda, pelo amor e compreensão constantes.

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

De forma muito especial, agradeço aos meus pais, Susana e Vicente, pelo apoio e incentivo em todos os momentos da minha vida, sempre me apoiando, dando segurança e estímulo para vencer os obstáculos e atingir meus objetivos.

Viver é como andar de bicicleta: é preciso avançar para  
não perder o equilíbrio.

*Albert Einstein*

## RESUMO

**BERNARDI, D. F. Um Modelo Computacional para a Análise Global Tridimensional da Estrutura de Edifícios Altos de Concreto Armado com a Presença de Paredes Estruturais.** 2010. 135 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

A crescente valorização das áreas disponíveis para a construção de edifícios nas grandes cidades tem constantemente elevado a altura das edificações. Nos edifícios altos, a consideração das ações horizontais na verificação da estabilidade da construção passa a ter um caráter essencial. As ações horizontais podem ser absorvidas, basicamente, por dois sistemas estruturais: por uma estrutura composta por pórticos de grande rigidez ou pela combinação de pórticos e paredes estruturais. Dentro deste contexto, esta dissertação trata da análise tridimensional de estruturas de edifícios altos de concreto armado, considerando a presença de paredes estruturais. Ao longo do trabalho é desenvolvido um modelo computacional em linguagem FORTRAN 90, baseado no Método dos Elementos Finitos, para realizar este tipo de análise. O modelo segue as recomendações da NBR6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007). Conforme esta norma, a não linearidade física é considerada de forma simplificada pela redução da rigidez dos elementos através de um fator fixo, função do nível de fissuração esperado. A não linearidade geométrica, por outro lado, pode ser considerada de maneira simplificada ou de forma exata a partir de uma formulação desenvolvida por Argyris et al. (1979). No modelo analisado, foram implementados elementos de pórtico espacial para a representação de vigas e pilares, e de casca poliédrica para as paredes e lajes. Com o objetivo de se obter um sistema computacional eficiente, são utilizados recursos como a hipótese de diafragma rígido nos pavimentos e a subestruturação. Tais recursos permitem diminuir o tamanho do problema a ser resolvido, sem, no entanto, perder precisão nos resultados. O desenvolvimento do modelo computacional permitiu uma análise crítica de casos, confrontando as duas alternativas de sistemas para edifícios altos, ou seja, de pórticos com e sem paredes estruturais.

Palavras-chave: edifícios altos; análise tridimensional; paredes estruturais; pórtico espacial; Método dos Elementos Finitos.



## ABSTRACT

BERNARDI, D. F. **Um Modelo Computacional para a Análise Global Tridimensional da Estrutura de Edifícios Altos de Concreto Armado com a Presença de Paredes Estruturais**. 2010. 135 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

### **A Computational Model for 3D Global Structure Analyses of High-rise Reinforced Concrete Buildings with the Consideration of Shear Walls.**

The ongoing increase in value of available construction sites in big cities has steadily pushing up the height of new buildings. In high-rise buildings, the consideration of lateral loads when stability is verified gains an essential role. Basically, lateral loads can be carried out by two types of structural systems: by a structure composed of high-stiffness frames or by a combination of these frames and shear walls. In this context, this work focuses on 3D analyses of high-rise reinforced concrete buildings with the consideration of shear walls. A computational model based on the Finite Element Method is developed for the analyses, being the model described in detail in the text. The model follows the recommendations given in the Brazilian code NBR6118:2007. According to this code, physical nonlinearities are considered in a simplified manner by decreasing stiffnesses by a fixed factor, which depends on the expected level of cracking. Geometrical nonlinearities, on the other hand, could be considered either in a simplified manner or in an exact approach from the formulation developed by Argyris et al. (1979). In the developed model, spatial frame elements were implemented to represent beams and columns, while polyedric shells would represent shear walls and slabs. Targeting an efficient computational system, the rigid diaphragm hypothesis for the slabs as well as substructuring procedures were demanded strategies. Such means allowed smaller problem sizes to be solved without putting in jeopardy the results' precision. It is also presented an analysis confronting the two alternatives of systems for high-rise building structures, i.e., frames with and without shear walls.

Keywords: high-rise building structures; 3D analysis; shear walls; spatial frame; Finite Element Method.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: verticalização das edificações .....	20
Figura 1.2: edifícios altos .....	21
Figura 2.1: exemplos típicos de sistemas aporticados .....	27
Figura 2.2: obra com utilização de sistema aporticado .....	28
Figura 2.3: resposta dos pórticos às cargas laterais .....	28
Figura 2.4: deformação: (a) devida à flexão do conjunto; (b) devida à flexão das vigas e pilares; (c) total .....	29
Figura 2.5: exemplos de sistemas formados por pórticos e paredes resistentes .....	30
Figura 2.6: obra com inclusão de parede resistente no sistema aporticado .....	31
Figura 2.7: deformação: (a) do pórtico; (b) das paredes resistentes; (c) total .....	32
Figura 2.8: modelo proposto por Yagui (1971): (a) núcleo estrutural; (b) segmento de parede .....	33
Figura 2.9: analogias propostas por Smith e Girgis: (a) coluna central; (b) pórtico com barras diagonais .....	34
Figura 2.10: analogias propostas por Smith e Coull: (a) lintél representado por elemento de membrana; (b) lintél representado por barra .....	35
Figura 2.11: núcleo pelo processo prático: (a) pilares-parede independentes; (b) núcleo real .....	37
Figura 2.12: núcleo pelo processo simplificado .....	37
Figura 3.1: sistema global de eixos do modelo adotado .....	40
Figura 3.2: elemento finito de casca estudado: (a) domínio real; (b) domínio computacional .....	41
Figura 3.3: sentidos positivos dos deslocamentos e das rotações do elemento de casca .	47
Figura 3.4: sistemas de coordenadas cartesianas: (a) global; (b) ao nível do elemento de casca .....	51
Figura 3.5: carga uniformemente distribuída no elemento de casca .....	53
Figura 3.6: sistema de referência local da barra de pórtico espacial .....	54
Figura 3.7: determinação do ângulo BETA .....	56
Figura 3.8: carga uniformemente distribuída no elemento de viga .....	60
Figura 4.1: deslocamentos nodais e distância entre os nós i e j .....	62
Figura 4.2: exemplo de subestruturação .....	66
Figura 4.3: estrutura: (a) indeformada; (b) deformada .....	72
Figura 4.4: viga-coluna de Holden (1972) .....	73
Figura 4.5: variação do deslocamento A devido à carga P .....	73
Figura 4.6: barra esbelta submetida à flexo-compressão .....	74

Figura 4.7: flexão composta de barras esbeltas no regime elástico .....	75
Figura 4.8: resposta obtida para a barra esbelta submetida à flexo-compressão .....	75
Figura 4.9: cálculo da rigidez do pilar equivalente .....	79
Figura 4.10: cálculo do coeficiente $\gamma_z$ .....	81
Figura 5.1: fluxograma do programa para a análise linear elástica .....	84
Figura 5.2: fluxograma do programa para a análise não linear geométrica .....	85
Figura 5.3: fluxograma do programa para a análise não linear geométrica e física .....	86
Figura 5.4: superelementos do tipo ‘painel’ .....	89
Figura 5.5: exemplo de visualização gráfica através do GiD <sup>®</sup> (versão 7.2) .....	91
Figura 5.6: exemplo de arquivos de entrada e saída de dados .....	92
Figura 6.1: planta baixa do pavimento tipo e corte esquemático – exemplo 1 .....	94
Figura 6.2: planta baixa do pavimento tipo – exemplo 2 .....	100
Figura 6.3: malha de elementos finitos do pavimento tipo – exemplo 2 .....	101
Figura 6.4: deslocamento do nó R (referência) na direção $Y_g$ de incidência do vento ...	103
Figura 6.5: esforço normal no pilar P13 .....	103
Figura 6.6: esforço cortante superior $V_{y_g}$ no pilar P8 .....	104
Figura 6.7: momento fletor esquerdo na viga V2 .....	104
Figura 6.8: momento fletor inferior $M_{y_g}$ no pilar P6 .....	105
Figura 6.9: estrutura deformada – exemplo 2 .....	106
Figura 6.10: planta baixa do pavimento tipo – exemplo 3 .....	108
Figura 6.11: malha de elementos finitos do pavimento tipo – exemplo 3: (a) malha do pavimento; (b) detalhe do núcleo; (c) estrutura discretizada .....	109
Figura 6.12: deslocamento do nó R (referência) na direção $Y_g$ de incidência do vento .	111
Figura 6.13: esforço normal total no núcleo N1 .....	111
Figura 6.14: momento fletor esquerdo na viga V2 .....	112
Figura 6.15: momento fletor inferior $M_{x_g}$ no pilar P4 .....	112
Figura 6.16: rotação do nó R (referência) em $Z_g$ para cada pavimento .....	113
Figura 6.17: estrutura deformada – exemplo 3 .....	114
Figura 6.18: planta baixa do pavimento tipo – exemplo 4 .....	118
Figura 6.19: malha de elementos finitos do pavimento tipo – exemplo 4 .....	119
Figura 6.20: estrutura discretizada – exemplo 4 .....	120
Figura 6.21: planta baixa do pavimento tipo com a presença de núcleos estruturais – exemplo 4 .....	121

Figura 6.22: deslocamento do nó R (referência) na direção $Y_g$ de incidência do vento .	122
Figura 6.23: rotação do nó R (referência) em $Z_g$ para cada pavimento .....	123
Figura 6.24: momento torçor inferior $Mz_g$ no pilar P7 .....	123
Figura 6.25: esforço cortante superior $Vy_g$ no pilar P7 .....	124
Figura 6.26: momento fletor inferior $Mx_g$ no pilar P7 .....	124
Figura 6.27: estrutura deformada – exemplo 4 .....	127
Figura A1: pontos de Gauss e nós do elemento .....	135

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1: rigidez dos elementos estruturais para a consideração da não linearidade física .....	77
Tabela 6.1: forças devidas ao vento na direção $X_g$ – exemplo 1 .....	95
Tabela 6.2: forças devidas ao vento na direção $Y_g$ – exemplo 1 .....	95
Tabela 6.3: características de cada modelo de discretização – exemplo 1 .....	97
Tabela 6.4: deslocamento do nó mestre – direção $X_g$ de incidência do vento .....	97
Tabela 6.5: deslocamento do nó mestre – direção $Y_g$ de incidência do vento .....	97
Tabela 6.6: esforço normal no pilar P2 – direção $X_g$ de incidência do vento .....	98
Tabela 6.7: esforço normal no pilar P2 – direção $Y_g$ de incidência do vento .....	98
Tabela 6.8: forças devidas ao vento – exemplo 2 .....	102
Tabela 6.9: forças devidas ao vento – exemplo 3 .....	110
Tabela 6.10: forças devidas ao vento – exemplo 4 .....	116
Tabela 6.11: porcentagem da carga absorvida pelos elementos na fundação – Aberto ...	126
Tabela 6.12: porcentagem da carga absorvida pelos elementos na fundação – Fechado .	126
Tabela A1: coordenadas dos pontos de Gauss e pesos de integração .....	135

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

CAPES: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CNPq: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

EPT: Estado Plano de Tensões

FORTTRAN: Formula Translation

NBR: Norma Brasileira Regulamentada

NLG: Não Linear Geométrica

NLGF: Não Linear Geométrica e Física

PPGEC: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

PUC/RS: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

SAP: Structural Analysis Program

UFRGS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Romanos

$a_i$  : deslocamento horizontal do pavimento  $i$  em relação à base

$A$  : área da seção transversal da barra de pórtico

$c$  : coeficiente de correção do cisalhamento lateral

$\det J$  : determinante da matriz Jacobiana

$dx, dy, dz$  : distâncias do nó  $i$  ao nó  $j$  em relação aos eixos genéricos  $x, y, z$ , respectivamente.

$E$  : módulo de elasticidade longitudinal do material

$E_{ci}$  : módulo de elasticidade tangente inicial do concreto

$E_{cs} I_c$  : somatório dos valores de rigidez de todos os pilares na direção considerada

$(EI)_{sec}$  : rigidez secante

$f$  : deslocamento do topo do edifício

$G$  : módulo de elasticidade transversal do material

$H_i$  : força horizontal no pavimento  $i$

$H_{tot}$  : altura total da estrutura

$I_c$  : momento de inércia da seção bruta de concreto

$I_{yp}$  : momento de inércia à flexão da barra de pórtico em relação ao eixo  $y_l$

$I_{zp}$  : momento de inércia à flexão da barra de pórtico em relação ao eixo  $z_l$

$_{-1}J^{-1}, _{-2}J^{-1}$  : primeira e segunda linha da inversa da matriz Jacobiana, respectivamente.

$L$  : comprimento da barra de pórtico

$L_v$  : comprimento da barra de viga

$M_{1,tot,d}$  : momento de tombamento

$\Delta M_{tot,d}$  : valor auxiliar na determinação de  $\gamma_z$

$M_x, M_y, M_z$  : momentos solicitantes nos extremos da barra de pórtico em torno dos eixos  $x_l, y_l, z_l$ , respectivamente.

$M_{X_g}^{viga}, M_{Y_g}^{viga}$  : momentos de engastamento perfeito do elemento de viga em torno dos eixos  $X_g, Y_g$ , respectivamente.

$M_{x_g}$ : momento fletor em relação ao eixo  $X_g$

$M_{y_g}$ : momento fletor em relação ao eixo  $Y_g$

$M_{z_g}$ : momento torçor em relação ao eixo  $Z_g$

$n$ : número de andares acima da fundação

$N$ : funções de interpolação de forma

$N_k$ : somatório de todas as cargas verticais atuantes na estrutura

$N_x$ : esforço normal nos extremos da barra

$p_v$ : força de engastamento perfeito nos nós do elemento de viga

$P_i$ : força vertical no pavimento  $i$

$P_{N1}, P_{N2}, P_{N3}, P_{N4}, P_{N5}, P_{N6}$ : auxiliares na determinação da matriz de rigidez geométrica da barra de pórtico

$P_x, P_y, P_z$ : projeções do comprimento  $L$  sobre os eixos  $X_g, Y_g, Z_g$ , respectivamente.

$q$ : carregamento uniformemente distribuído no elemento de casca

$q_v$ : carga uniformemente distribuída no elemento de viga

$Q$ : ação lateral uniformemente distribuída

$R_{x_g}, R_{y_g}, R_{z_g}$ : rotações em relação aos eixos  $X_g, Y_g, Z_g$ , respectivamente.

$R_x^e$ : rotação em relação ao eixo  $x^e$

$R_y^e$ : rotação em relação ao eixo  $y^e$

$t$ : espessura da placa

$T_{xp}$ : constante de torção da barra de pórtico em relação ao eixo  $x_i$

$u1_i, u2_i, u3_i$ : translações do nó  $i$  em relação aos eixos genéricos  $x, y, z$ , respectivamente.

$u4_i, u5_i, u6_i$ : rotações do nó  $i$  em relação aos eixos genéricos  $x, y, z$ , respectivamente.

$u1_j, u2_j, u3_j$ : translações do nó  $j$  em relação aos eixos genéricos  $x, y, z$ , respectivamente.

$u4_j, u5_j, u6_j$ : rotações do nó  $j$  em relação aos eixos genéricos  $x, y, z$ , respectivamente.

$U^e$ : deslocamentos nodais

$U_{x_g}, U_{y_g}, U_{z_g}$ : translações em relação aos eixos  $X_g, Y_g, Z_g$ , respectivamente.

$U_x^e$ : translação em relação ao eixo  $x^e$

$U_y^e$ : translação em relação ao eixo  $y^e$



$U_z^e$ : translação em relação ao eixo  $z^e$

$Vy_g$ : esforço cortante em relação ao eixo  $Y_g$

$w_i, w_j$ : pesos de integração

$x y z$ : sistema de referência genérico

$x^e y^e z^e$ : sistema de referência local do elemento de casca

$x_l, y_l, z_l$ : sistema de referência local da barra de pórtico

$X_g Y_g Z_g$ : eixos globais da estrutura

$y_i$ : altura do pavimento  $i$  em relação à base da edificação

## Gregos

$\alpha$ : parâmetro de instabilidade global

$\alpha_l$ : valor auxiliar no estudo do parâmetro  $\alpha$

$\beta$ : ângulo utilizado na rotação da barra de pórtico do sistema local para o global

$\gamma_z$ : coeficiente de instabilidade global

$\delta$ : ângulo definido entre o eixo  $X_g$  e o  $x_l$  do elemento de viga

$\xi, \eta$ : coordenadas computacionais

$\nu$ : coeficiente de Poisson

## Matrizes e vetores

$[B_{CORTE}]$ : matriz que relaciona deformações específicas com deslocamentos para o corte

$[B_{EPT}]$ : matriz que relaciona deformações específicas com deslocamentos para o EPT

$[B_{F-C}]$ : matriz que relaciona deformações específicas com deslocamentos para a flexão e o corte

$[B_{FLEXÃO}]$ : matriz que relaciona deformações específicas com deslocamentos para a flexão

$[D_{CORTE}]$ : matriz constitutiva para o corte

$[D_{EPT}]$ : matriz constitutiva para o EPT

$[D_{F-C}]$ : matriz constitutiva para a flexão e o corte

$[D_{FLEXÃO}]$ : matriz constitutiva para a flexão

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ : vetores de módulo unitário na direção dos eixos  $x^e, y^e, z^e$ , respectivamente.

$\{F\}$ : vetor de forças nodais

$F_e$ : vetor de forças do elemento em termos dos deslocamentos nodais do nó mestre

$\{F\}_{EQV}$ : vetor de forças nodais equivalentes

$^{viga-NÓ1}\{F\}_{EQV}, ^{viga-NÓ2}\{F\}_{EQV}$ : vetores de forças nodais equivalentes dos nós 1 e 2, respectivamente, para o elemento de viga.

$^{casca}\{F\}_{EQV}$ : vetor de cargas equivalentes de cada elemento de casca

$Fg_e$ : vetor de forças nodais do elemento no sistema global

$F_i$ : vetor de forças do nó  $i$

$F_j$ : vetor de forças do nó  $j$

$\{F\}_{NÓ}$ : vetor de forças concentradas aplicadas diretamente nos nós

$H$ : submatriz da matriz de rotação do elemento de casca

$[K]$  ou  $K$ : matriz de rigidez global da estrutura

$K_{aa}$ : partição da matriz de rigidez para os nós internos da subestrutura

$K_{ab}$ : partição da matriz de rigidez para o encontro dos nós internos e externos da subestrutura

$K_{bb}$ : partição da matriz de rigidez para os nós externos da subestrutura

$\bar{K}_{bb}$ : matriz de rigidez condensada para os nós externos da subestrutura

$K_e$ : matriz de rigidez do elemento em termos dos deslocamentos nodais do nó mestre

$[K_{EPT}^e]$ : matriz de rigidez do elemento para o EPT

$[K_{F-C}^e]$ : matriz de rigidez do elemento para a flexão e o corte

$Kg_e$ : matriz de rigidez do elemento no sistema global

$[K_{pl}]$ : matriz de rigidez local da barra de pórtico

$[K_{pl}]_1, [K_{pl}]_2, [K_{pl}]_3$ : submatrizes da matriz de rigidez local da barra de pórtico

$[K_{pl}^g]$ : matriz de rigidez global da barra de pórtico

$[K_{pl}^{geo}]$ : matriz de rigidez geométrica da barra de pórtico

$[K_{pl}^{geo}]_1, [K_{pl}^{geo}]_2, [K_{pl}^{geo}]_3$ : submatrizes da matriz de rigidez geométrica da barra de pórtico

$K_{NÓ}^e$ : componente da matriz de rigidez local do elemento de casca para um nó

$K_{NÓ-GLOBAL}^e$ : componente da matriz de rigidez global do elemento de casca para um nó

$\{P\}$  ou  $P$ : vetor global de cargas nodais da estrutura

$P_a$ : vetor de cargas para os nós internos da subestrutura

$P_b$ : vetor de cargas para os nós externos da subestrutura

$\bar{P}_b$ : vetor de cargas nodais equivalentes condensada para os nós externos da subestrutura

$[R]$ : matriz de rotação do elemento de casca

$[R_{PORT}]_1, [R_{PORT}]_2, r_1, r_2$ : matrizes utilizadas na rotação da barra de pórtico do sistema local para o global

$T_e$ : matriz de transformação do elemento

$T_{ij}$ : matriz de transformação entre os deslocamentos do nó dependente  $i$  e do nó mestre  $j$

$u$ : vetor de deslocamentos

$\{U\}$  ou  $U$ : vetor global de deslocamentos (translações e rotações) da estrutura

$U_a$ : vetor de deslocamentos para os nós internos da subestrutura

$U_b$ : vetor de deslocamentos para os nós externos da subestrutura

$U_e$ : vetor dos deslocamentos nodais do nó mestre no sistema global

$U_{g_e}$ : vetor dos deslocamentos nodais do elemento no sistema global

$U_i$ : vetor de deslocamentos do nó  $i$

$U_j$ : vetor de deslocamentos do nó  $j$

$X, Y$ : matrizes auxiliares utilizadas na subestruturação

$U_{g_e}$ : vetor dos deslocamentos nodais do elemento no sistema global

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	20
1.1 GENERALIDADES .....	20
1.2 OBJETIVOS .....	22
1.3 JUSTIFICATIVA .....	23
1.4 COMPOSIÇÃO DO TRABALHO .....	24
<b>2 MODELOS ESTRUTURAIS APLICADOS À ANÁLISE TRIDIMENSIONAL DE EDIFÍCIOS ALTOS</b> .....	25
2.1 INTRODUÇÃO .....	25
2.2 TÉCNICAS DE ANÁLISE .....	25
<b>2.2.1 Sistemas aporricados</b> .....	26
<b>2.2.2 Sistemas formados por pórticos e paredes resistentes</b> .....	30
2.3 TRABALHOS DESENVOLVIDOS .....	32
<b>3 MODELO ESTRUTURAL ADOTADO</b> .....	40
3.1 INTRODUÇÃO .....	40
3.2 ELEMENTO DE CASCA POLIÉDRICA .....	41
<b>3.2.1 Estado plano de tensões</b> .....	42
<b>3.2.2 Flexão e corte</b> .....	46
<b>3.2.3 Matriz de rigidez do elemento de casca</b> .....	49
<b>3.2.4 Matriz de rotação para o sistema global</b> .....	51
<b>3.2.5 Forças nodais</b> .....	52
3.3 ELEMENTO DE BARRA DE PÓRTICO ESPACIAL .....	53
<b>3.3.1 Matriz de rigidez do elemento de barra</b> .....	53
<b>3.3.2 Matriz de rotação para o sistema global</b> .....	56
<b>3.3.3 Cargas distribuídas nas vigas</b> .....	58
<b>4 ANÁLISE GLOBAL DA ESTRUTURA</b> .....	61
4.1 INTRODUÇÃO .....	61
4.2 DIAFRAGMA RÍGIDO .....	61
4.3 SUBESTRUTURAÇÃO .....	65
4.4 ANÁLISE NÃO LINEAR.....	68
<b>4.4.1 Não linearidade geométrica do elemento de barra de pórtico espacial pela formulação de Argyris et al. (1979)</b> .....	69
<b>4.4.2 Não linearidade geométrica a partir de um Método Simplificado</b> .....	71
<b>4.4.3 Considerações a respeito da não linearidade geométrica</b> .....	72

<b>4.4.4 Não linearidade física .....</b>	<b>76</b>
<b>4.5 PARÂMETROS DE INSTABILIDADE GLOBAL .....</b>	<b>77</b>
<b>4.5.1 Parâmetro de instabilidade <math>\alpha</math> .....</b>	<b>78</b>
<b>4.5.2 Coeficiente <math>\gamma_z</math> .....</b>	<b>80</b>
<b>5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL .....</b>	<b>83</b>
<b>5.1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>83</b>
<b>5.2 DIVISÕES INTERNAS DO PROGRAMA .....</b>	<b>87</b>
<b>5.2.1 Módulo Principal.f90 .....</b>	<b>87</b>
<b>5.2.2 Módulo Geral.f90 .....</b>	<b>87</b>
<b>5.2.3 Módulo Casca.f90 .....</b>	<b>88</b>
<b>5.2.4 Módulo Painel.f90 .....</b>	<b>89</b>
<b>5.2.5 Módulo Barra_Pórtico.f90 .....</b>	<b>90</b>
<b>5.2.6 Módulo Instabilidade.f90 .....</b>	<b>90</b>
<b>5.2.7 Módulo Dados.f90 .....</b>	<b>90</b>
<b>5.3 ENTRADA E SAÍDA DE DADOS .....</b>	<b>91</b>
<b>6 RESULTADOS OBTIDOS .....</b>	<b>93</b>
<b>6.1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>93</b>
<b>6.2 EXEMPLO 1 .....</b>	<b>93</b>
<b>6.3 EXEMPLO 2 .....</b>	<b>99</b>
<b>6.4 EXEMPLO 3 .....</b>	<b>107</b>
<b>6.5 EXEMPLO 4 .....</b>	<b>115</b>
<b>7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....</b>	<b>129</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>131</b>
<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>134</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 GENERALIDADES

A crescente valorização das áreas disponíveis para a construção de edifícios nas grandes cidades provocou um intenso processo de verticalização das edificações (figura 1.1). Com isso, tornou-se necessário o aprimoramento dos sistemas estruturais e das técnicas de análise de estruturas, de forma a proporcionar mais economia, rapidez e segurança. A demanda pela construção de edifícios altos (figura 1.2) tem sido importante para o progresso da engenharia estrutural, na medida em que instiga o aprimoramento de modelagens para o comportamento físico dos materiais existentes, e o surgimento de novos materiais; além de modelos de análise mais completos e robustos.



Figura 1.1: verticalização das edificações (PHOTOBUCKET, 2009)



Figura 1.2: edifícios altos (PHOTOBUCKET, 2009)

Os primeiros programas computacionais utilizados no cálculo de estruturas de edifícios faziam uso de modelos simplificados, limitando-se à análise separada dos elementos constituintes da estrutura, incorrendo, assim, em imprecisões principalmente no que diz respeito às cargas laterais. Com o avanço computacional, a estrutura passou a ser representada por uma associação de grelhas e elementos unidimensionais de pilares e, mais tarde, por modelos tridimensionais baseados no pórtico espacial.

As estruturas usuais de edifícios em concreto armado, embora geralmente consideradas reticuladas, apresentam paredes estruturais rígidas, como as caixas de elevadores e/ou escadas.

As lajes dos edifícios, muitas vezes, são consideradas como elementos com rigidez nula à flexão. Assim, despreza-se essa rigidez na verificação da estabilidade global da estrutura frente às ações laterais, apesar de não se descrever de forma correta a transferência de cargas entre lajes e vigas. A utilização de um modelo que descrevesse as lajes através do Método dos Elementos Finitos, associado a um modelo de pórtico espacial para os elementos de barra, simularia de forma mais precisa a interação desses elementos e o comportamento global do conjunto.

Em contrapartida, na solução de estruturas de grande porte, o Método dos Elementos Finitos aplicado aos elementos de casca e a análise matricial aos elementos de barra, leva a sistemas de equações com uma quantidade elevada de incógnitas. Isso ocorre quando todos os graus de

liberdade são considerados a nível global. Desse modo, a análise estrutural pode se tornar pesada computacionalmente, levando, dependendo do nível de refinamento da malha, a um elevado tempo de processamento.

Assim, faz-se necessária a utilização de técnicas matriciais como a subestruturação, que consiste na divisão da estrutura em regiões menores ou subestruturas. A consideração da hipótese de diafragma rígido também torna o processo mais eficiente, na medida em que permite a diminuição do sistema de equações a ser resolvido.

## 1.2 OBJETIVOS

O trabalho proposto tem como objetivo, basicamente, desenvolver um modelo para realizar a análise tridimensional de estruturas altas de concreto armado, comparando duas soluções geralmente propostas por projetistas para garantir a estabilidade global das edificações correntes: a adoção de pórticos de grande rigidez ou a combinação de pórticos com paredes estruturais.

A ferramenta computacional utilizada se baseia no Método dos Elementos Finitos, associando-o à análise matricial de estruturas. A análise estrutural é realizada considerando a interação de deslocamentos e esforços entre os elementos (vigas, lajes, pilares e paredes).

A implementação do modelo computacional é feita em linguagem FORTRAN 90, linguagem tradicionalmente utilizada em aplicações científicas. A teoria e formulação empregada são descritas ao longo do trabalho e alguns resultados obtidos são apresentados.



### 1.3 JUSTIFICATIVA

A definição do melhor modelo para assegurar a estabilidade de uma edificação, muitas vezes, é um critério pessoal do engenheiro ou é influenciado diretamente pelas imposições arquitetônicas.

A escolha de um sistema construtivo não deve ser apenas consequência de uma preferência pré-concebida, mas sim o resultado de um exame dos fatores econômicos envolvidos. Assim, dois ou mais métodos construtivos podem se adequar a uma determinada edificação, porém um deles geralmente será o de execução mais econômica (ELLWANGER, 2002).

A rigidez da estrutura de um edifício varia inversamente com sua relação altura/largura. Esta rigidez depende diretamente da rigidez dos elementos individuais e suas conexões, do número e da altura dos andares e do número e extensão dos vãos. Assim, o projetista deve escolher um sistema estrutural que possa, com as dimensões dos vãos e o número de andares desejados, absorver os esforços e conter as deformações de maneira econômica e segura.

Um pórtico consiste geralmente em malhas de elementos horizontais (vigas) e verticais (pilares) ligados por meio de nós rígidos. A eficiência do sistema aporticado é economicamente adequada para edifícios de até vinte andares para construções em concreto armado. Para mais de vinte andares, este sistema deixa de ser prático. Uma alternativa muito utilizada é o emprego de paredes resistentes em substituição a alguns pórticos. Elas podem assumir a forma de núcleos internos, delimitando poços de elevadores e caixas de escada, ou de paredes paralelas dentro do edifício (SCHUELLER, 1977).

Assim, este trabalho busca estudar estes dois sistemas, verificando a resposta de algumas estruturas quando projetadas por um ou outro sistema.

## 1.4 COMPOSIÇÃO DO TRABALHO

No próximo capítulo, é feita uma revisão bibliográfica sobre a análise de estruturas de edifícios altos e são apresentados alguns trabalhos importantes nesta área.

No terceiro capítulo, descrevem-se as características dos elementos estruturais componentes do modelo analisado neste trabalho. Apresentam-se as matrizes de rigidez ao nível local e global dos elementos de casca poliédrica e de barra de pórtico espacial. São definidos, também, os sistemas de referência locais de cada elemento.

No quarto capítulo são apresentadas as características da montagem da matriz de rigidez global da estrutura, levando em consideração a hipótese de diafragma rígido das lajes e a subestruturação. Além disso, são demonstrados procedimentos possíveis para a análise não linear geométrica e/ou física, bem como aqueles utilizados neste trabalho. Destaca-se que a obtenção de esforços e deslocamentos da estrutura utiliza as técnicas correntes de análise matricial.

O quinto capítulo apresenta a descrição do programa computacional elaborado. Explicam-se as tarefas realizadas pelas diferentes partes do programa, os tipos de análises possíveis e a formatação de entrada e saída de dados.

No sexto capítulo são analisados alguns exemplos e apresentados os resultados correspondentes na forma de gráficos e/ou figuras.

Por fim, no sétimo capítulo, encerra-se o trabalho, destacando-se as principais conclusões obtidas e possíveis sugestões para a sua continuidade.

## 2 MODELOS ESTRUTURAIS APLICADOS À ANÁLISE TRIDIMENSIONAL DE EDIFÍCIOS ALTOS

### 2.1 INTRODUÇÃO

Na área de estruturas de edifícios altos, inúmeros trabalhos já foram desenvolvidos, buscando-se cada vez mais a precisão e a eficiência das técnicas e hipóteses de cálculo, de forma a se aproximar ao máximo os modelos estudados do comportamento real das estruturas. Descrevem-se, a seguir, as técnicas adotadas para a resolução de cada tipo de estrutura e um breve histórico de trabalhos importantes.

### 2.2 TÉCNICAS DE ANÁLISE

Como em diversos problemas de análise estrutural, a análise de edifícios com a presença de paredes (ou núcleos) estruturais, pode ser feita diretamente sobre uma consideração de meio contínuo ou então através de processos que envolvam discretizações, como é feito, por exemplo, quando da aplicação do Método dos Elementos Finitos.

A vantagem de se trabalhar sobre um meio contínuo reside no reduzido número de parâmetros de entrada de dados. Nesta opção, a estrutura do edifício é substituída por um meio contínuo com rigidez equivalente, uniformemente distribuído ao longo da altura do edifício, com pavimentos considerados como diafragmas rígidos para compatibilizar os deslocamentos horizontais. Geralmente, o comportamento do modelo estrutural é expresso por meio de um conjunto de equações diferenciais que é resolvido por processos numéricos (BAKER et al., 1997).

Os processos discretos, tais como a análise matricial resultante da aplicação do Método dos Deslocamentos, consistem em subdividir a estrutura em elementos simples interligados entre si através de nós. A matriz de rigidez local de cada elemento é conhecida e, dessa forma, é possível montar a matriz de rigidez global da estrutura. Generalizando-se esta abordagem para

o Método dos Elementos Finitos, o comportamento de cada elemento é arbitrado de forma aproximada, com a condição de que a malha de elementos finitos se comporte de forma análoga ao contínuo original.

Independentemente da escolha do método de análise (contínuo ou discreto), à medida que aumenta a altura dos edifícios, cresce significativamente a importância da ação das forças laterais. Assim, a partir de certa altura, o movimento lateral do edifício se torna tão importante que o projeto estrutural passa a ser controlado mais por questões de rigidez do que pela resistência dos materiais empregados na estrutura. De sua parte, o grau de rigidez passa a depender principalmente do tipo de sistema estrutural adotado. Além disso, a eficiência de determinado sistema está diretamente relacionada à quantidade de material empregado. Dessa forma, a estrutura que melhor consegue atender a certas exigências em termos de otimização espacial, é aquela que conjuga máxima rigidez com peso mínimo (SCHUELLER, 1977).

Dentre os sistemas estruturais disponíveis atualmente, dois são os mais utilizados na concepção de edifícios altos em concreto armado: o sistema aporticado (pórticos de grande rigidez) e o sistema formado por pórticos e paredes (ou núcleos) resistentes. Isso ocorre porque estes modelos apresentam os menores custos e dispensam métodos mais sofisticados de construção.

### **2.2.1 Sistemas aporticados**

Os sistemas aporticados consistem geralmente em malhas de elementos horizontais (vigas) e verticais (pilares) ligados por meio de nós. Considerando-se pórticos planos, um pórtico pode estar no mesmo plano de uma parede interna do edifício, ou pode ocupar o plano de uma fachada. O princípio de funcionamento dos pórticos, sem o auxílio de paredes resistentes, é economicamente adequado para construções em concreto armado de até vinte andares (SCHUELLER, 1977). Alguns exemplos típicos de configurações de edifícios aporticados aparecem na figura 2.1, onde se considera que planos de pórticos formam as estruturas.

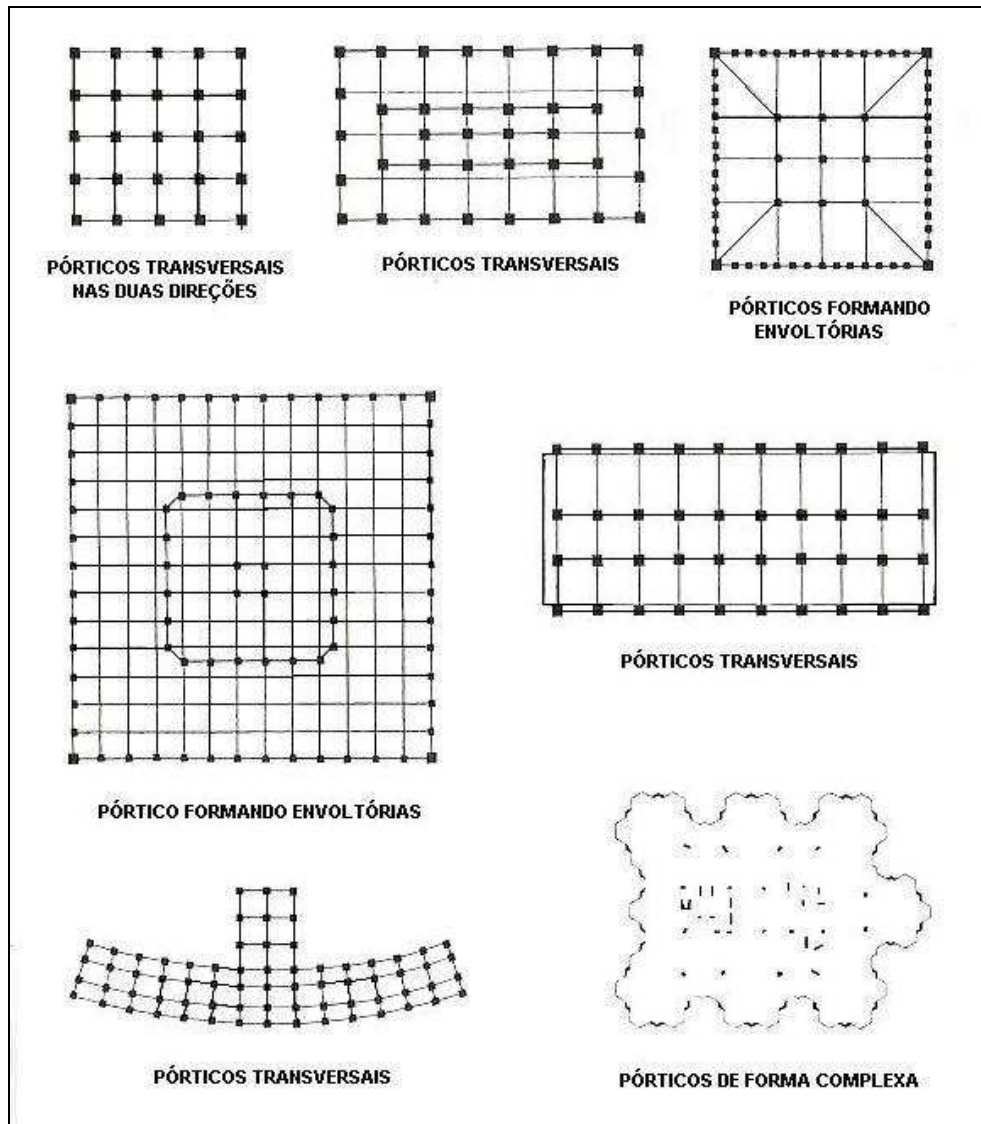


Figura 2.1: exemplos típicos de sistemas apontados  
(adaptada de SCHUELLER, 1977)

Na figura 2.2, observa-se uma obra que utiliza o sistema apontado.



Figura 2.2: obra com utilização de sistema aporticado (TECNISA, 2009)

Devido à sua continuidade, a resposta dos pórticos às cargas laterais ocorre principalmente na forma de flexão das vigas e pilares (figura 2.3). Este caráter de continuidade depende da rigidez rotacional das ligações, ou seja, da garantia de não ocorrer o mínimo deslizamento entre quaisquer barras ligadas entre si.

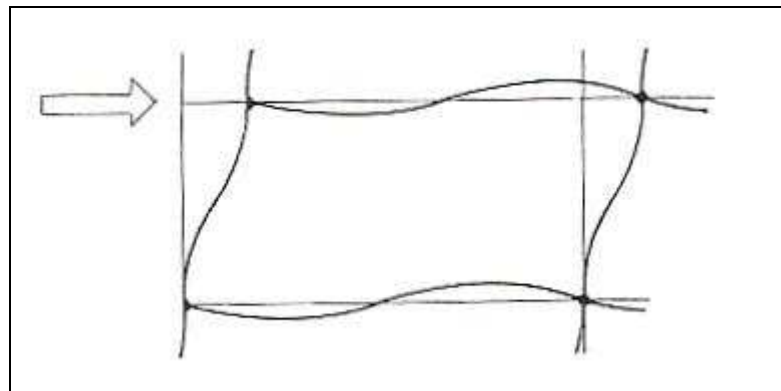


Figura 2.3: resposta dos pórticos às cargas laterais

Além disso, a capacidade de carga do pórtico depende fundamentalmente da resistência ou rigidez das barras individuais de vigas e pilares. Esta capacidade decresce com o aumento da altura dos andares e/ou do espaçamento dos pilares. Segundo Schueller (1977), a deformação lateral em um pórtico é causada por dois fatores:

- a) deformação devida à flexão do conjunto (figura 2.4-a). O pórtico funciona como uma viga vertical em balanço, cuja flexão provoca deformações longitudinais em suas fibras. Neste caso, o alongamento de alguns pilares e o encurtamento de outros é o que provoca uma componente de deformação da ordem de 20% da deformação lateral;
- b) deformação devida à flexão das vigas e pilares (figura 2.4-b). A atuação de esforços cortantes e momentos fletores, causando deformação por flexão em cada barra isolada, faz com que todo o pórtico fique distorcido. Este fator contribui com aproximadamente 80% da deformação lateral total da estrutura, sendo 65% devido à flexão das vigas e 15% devido à flexão dos pilares. A curvatura da deformada corresponde ao diagrama de esforços cortantes por andar; a declividade da deformada é máxima na base da estrutura, onde ocorre o máximo cortante.

Dessa forma, superpondo-se as configurações deformadas das figuras 2.4-a e 2.4-b, resulta na deformação total da estrutura (figura 2.4-c).

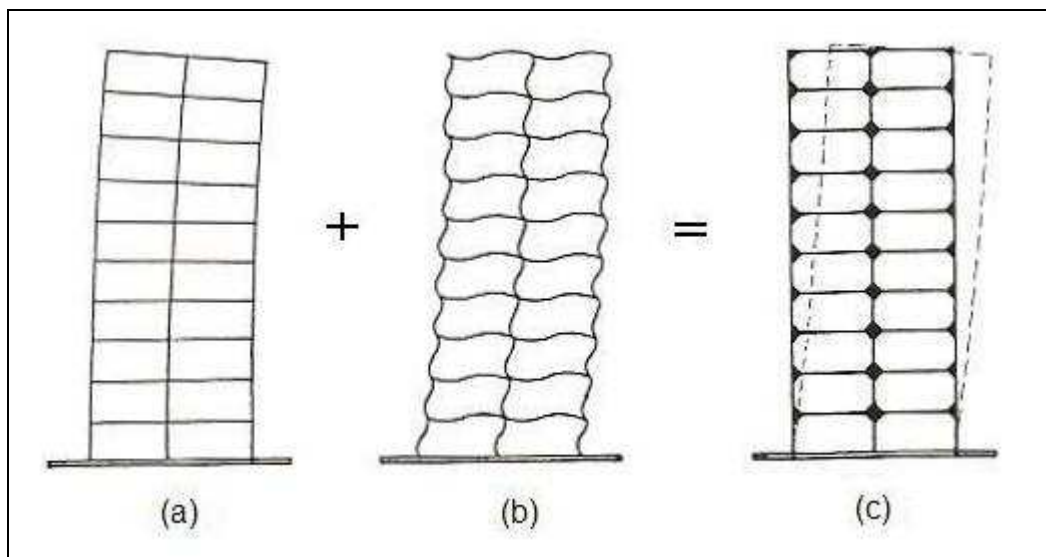


Figura 2.4: deformação: (a) devida à flexão do conjunto; (b) devida à flexão das vigas e pilares; (c) total (SCHUELLER, 1977)

### 2.2.2 Sistemas formados por pórticos e paredes resistentes

Os sistemas estruturais simplesmente aporticados deixam de ser práticos em edifícios com mais de vinte andares, quando construídos em concreto armado. Uma alternativa muito comum é o emprego de paredes resistentes em substituição a alguns pórticos. Tais paredes podem assumir a forma de núcleos internos fechados, delimitando poços de elevadores e caixas de escadas, ou de paredes paralelas dentro do edifício (SCHUELLER, 1977).

Neste contexto, a NBR6118: Projeto de estruturas de concreto – procedimento (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007) define pilares-parede como elementos de superfície plana ou casca cilíndrica, usualmente dispostos na vertical e submetidos preponderantemente à compressão. Podem ser compostos por uma ou mais superfícies associadas. A figura 2.5 apresenta alguns casos típicos desta tipologia.

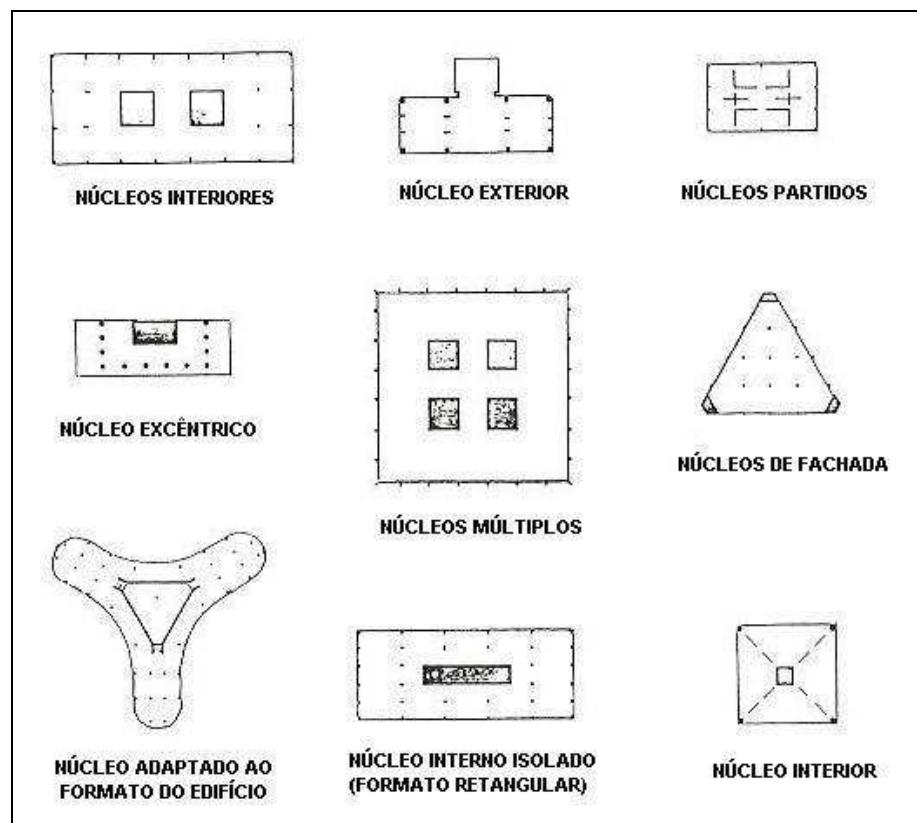


Figura 2.5: exemplos de sistemas formados por pórticos e paredes resistentes  
(adaptada de SCHUELLER, 1977)

Na figura 2.6, observa-se uma obra com inclusão de parede resistente no sistema aporticado.





Figura 2.6: obra com inclusão de parede resistente no sistema aporticado

A adição de paredes resistentes ao sistema de pórticos aumenta substancialmente a capacidade do edifício em absorver cargas laterais. A deformação total do conjunto pórticos-paredes resistentes é determinada pela superposição dos modos individuais de deformação (SCHUELLER, 1977):

- a) no pórtico (figura 2.7-a), a declividade da deformada aumenta do topo em relação à base da estrutura, onde ocorre o máximo esforço cortante do andar;
- b) nas paredes resistentes (figura 2.7-b), o sistema funciona como uma viga vertical em balanço, submetida à flexão. A declividade de sua deformada é maior junto ao topo, indicando que, nesta região, a contribuição das paredes para a rigidez do sistema é mínima. É preciso esclarecer que a parede mostrada na figura pode representar uma parede maciça, um núcleo interno, uma parede de fachada, bem como um sistema de paredes paralelas internas.

Assim, a interação pórtico-parede é representada pela superposição dos dois modos individuais, resultando na deformada em forma de um S achatado, mostrada na figura 2.7-c. Devido às diferentes características destas duas configurações, na região superior do edifício, a parede é puxada pelo pórtico contra a direção das cargas laterais, enquanto que, na região inferior, ela é empurrada na direção oposta. Consequentemente, as cargas de vento são predominantemente absorvidas pelo pórtico na região superior da estrutura e pela parede na região inferior.

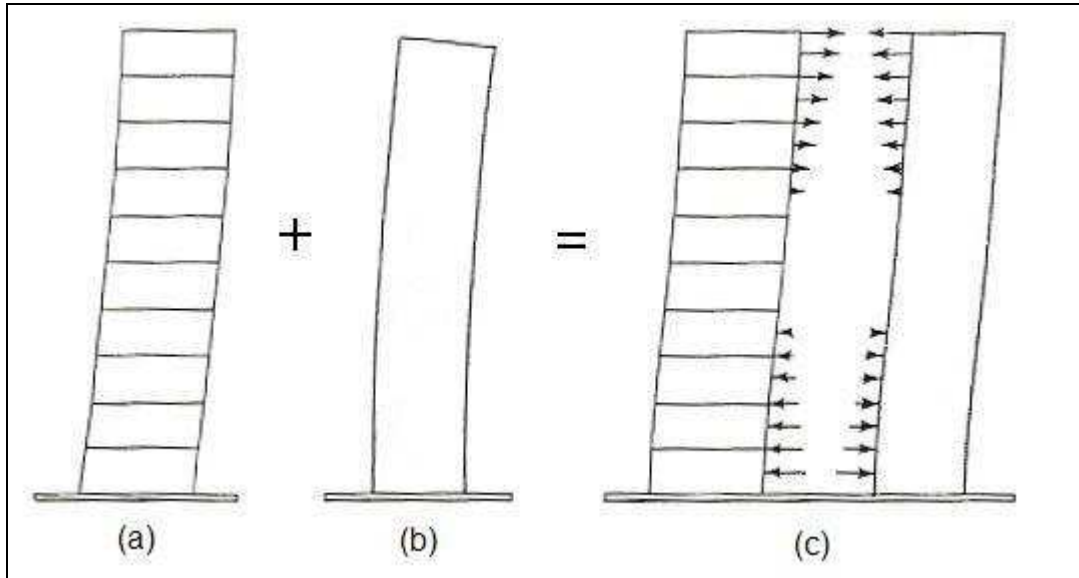


Figura 2.7: deformação: (a) do pórtico; (b) das paredes resistentes; (c) total  
(SCHUELLER, 1977)

### 2.3 TRABALHOS DESENVOLVIDOS

A revisão de alguns trabalhos relativos à análise tridimensional de estruturas é importante na medida em que permite analisar as diferentes técnicas, suas dificuldades e as soluções adotadas.

Conforme Timoshenko (1953), o estudo de fenômenos físicos voltados para a engenharia estrutural teve seu início no final do século XVII, porém sofreu seu maior desenvolvimento em meados do século XX com a introdução de novas técnicas de cálculo e o surgimento dos computadores digitais. Segundo o mesmo autor, engenheiros e cientistas que se dedicam ao estudo de fenômenos físicos estão empenhados em duas tarefas principais: a formulação matemática dos processos físicos e a análise numérica de modelos matemáticos.

Vlassov (1962) analisou estruturas constituídas de paredes delgadas, onde um novo tipo de esforço solicitante foi considerado, o bimomento, responsável pelas tensões normais suplementares às causadas pela força normal e momentos fletores nas seções transversais. Tal modelo permitiu a análise dos núcleos resistentes com a consideração do esforço solicitante de bimomento, tornando necessário o conhecimento da teoria de flexo-torção.

Zienkiewicz et al.(1971) modelaram uma estrutura de edifício considerando para as paredes um elemento de estado plano de tensões, para os lintéis (elementos que se conectam internamente aos núcleos) e pórticos, elementos de barra e, para as lajes, elementos finitos de placa. Para os núcleos estruturais, compararam elementos de casca e elementos de membrana para sua discretização. Ressalta-se que o autor principal deste estudo foi um dos pioneiros do Método dos Elementos Finitos.

Yagui (1971) pesquisou um processo de cálculo aproximado para núcleos resistentes com diafragmas transversais, usando técnicas de cálculo matricial. Neste processo, o núcleo estrutural é discretizado em segmentos de paredes. Cada segmento de parede situado entre duas lajes (consideradas diafragmas) é substituído por elementos formados por duas vigas de rigidez infinita unidas por uma coluna central, que conserva as mesmas características elásticas e geométricas do segmento de parede original (figura 2.8).

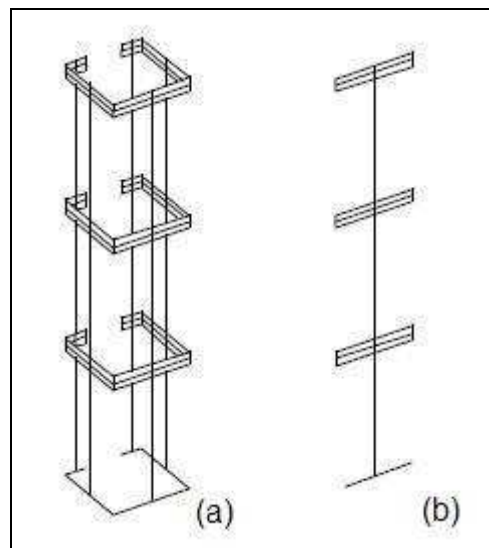


Figura 2.8: modelo proposto por Yagui (1971): (a) núcleo estrutural; (b) segmento de parede (adaptada de YAGUI, 1971)

Antunes (1978) se empenhou na determinação do carregamento crítico de instabilidade elástica geral. Foram analisadas as estruturas tridimensionais de edifícios altos constituídos por pilares isolados e pórticos planos. Por meio de equações diferenciais de equilíbrio do elemento em sua posição deformada, determinaram-se as matrizes de rigidez, em teoria de segunda ordem, para os pilares, cujas seções transversais possuíam um, dois ou nenhum eixo de simetria, sendo consideradas, em alguns casos, as propriedades setoriais. Para a determinação dos parâmetros de instabilidade foi considerado exclusivamente o esforço axial.

Smith e Girgis (1984) sugeriram dois modelos semelhantes para a análise de núcleos estruturais. O primeiro modelo consistia em vigas horizontais rígidas, de igual comprimento e largura do segmento de parede substituído, conectadas com uma coluna central e barras diagonais rotuladas às extremidades das vigas (figura 2.9-a). O segundo consistia em discretizar o núcleo estrutural em elementos compostos por vigas rígidas, colunas e barras diagonais rotuladas com a finalidade de contraventamento (figura 2.9-b). Os dois modelos poderiam simular a rigidez dos elementos à flexão, ao cisalhamento e ao esforço normal.

As respostas obtidas foram muito satisfatórias, pois o primeiro modelo obteve resultados praticamente iguais aos de um modelo de elementos finitos de casca, enquanto o outro obteve resultados também bem próximos. Os autores enfatizaram que o uso de modelos de pórtico traz vantagens por serem modelos mais simples e exigirem menor esforço computacional comparados aos modelos de elementos finitos de casca.

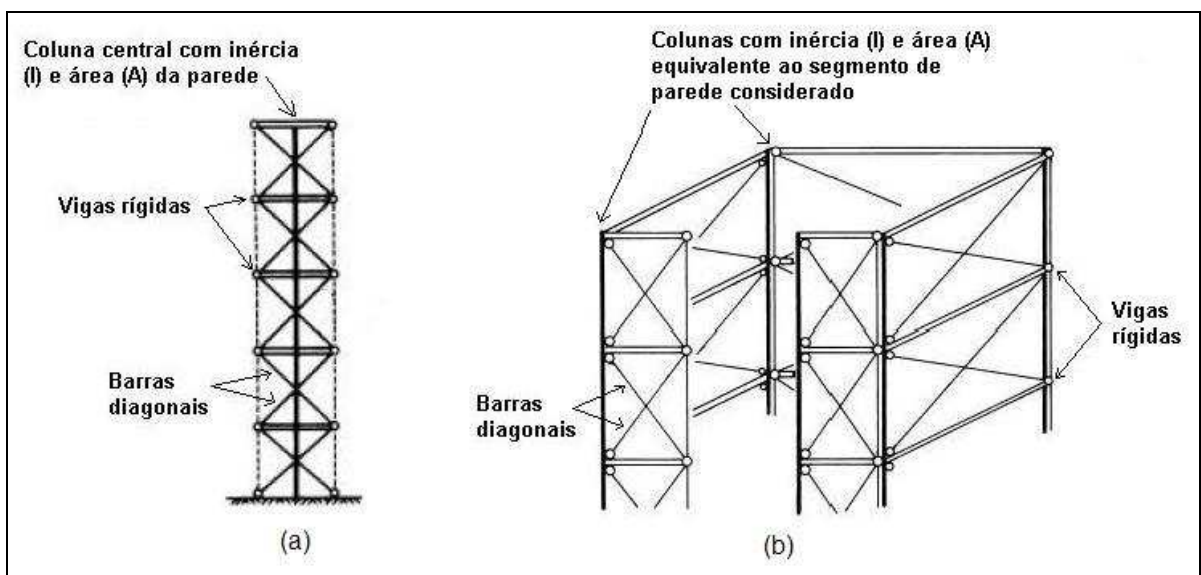


Figura 2.9: analogias propostas por Smith e Girgis: (a) coluna central; (b) pórtico com barras diagonais (adaptada de SMITH e GIRGIS, 1984)

Silva (1989) analisou o comportamento tridimensional de edifícios com núcleos resistentes, submetidos a forças verticais e horizontais, considerando a não linearidade geométrica através do efeito p-delta. Neste estudo foi usado o mesmo modelo de discretização do núcleo proposto por Yagui (1971). A estrutura composta por pórticos com ou sem diagonais de contraventamento e paredes de seção aberta (núcleo) foi analisada como uma associação em série de subestruturas tridimensionais, as quais constituíam um determinado número de andares. As lajes foram consideradas diafragmas rígidos em seu plano e completamente

flexíveis transversalmente. A análise da estrutura foi feita a partir da consideração dos esforços em teoria de segunda ordem, sendo necessário utilizar processos iterativos para sua resolução. Basicamente, este processo consistiu na utilização de um programa de análise em primeira ordem que simulava o efeito p-delta através de acréscimos de esforços cortantes e torções fictícios. Levou-se em consideração a existência de trechos rígidos entre elementos estruturais, bem como a influência das deformações por força cortante.

No trabalho de Smith e Coull (1991), foi apresentado um elemento finito de membrana para representar as paredes do núcleo. O modelo foi analisado através de elementos quadrangulares de membrana com elementos de estado plano de tensões em associação com elementos de barra. Os lintéis, elementos que se conectam internamente aos núcleos, foram representados por elementos de membrana (figura 2.10-a) ou por elementos de barra (figura 2.10-b). Segundo os autores, uma das vantagens deste modelo foi o de dispensar o conhecimento do efeito do empenamento do núcleo, bem como o cálculo das propriedades setoriais da teoria da flexo-torção, por vezes muito complexa. A presença de vigas auxiliares garantiu a forma da seção transversal do núcleo quando este era sujeito ao carregamento.

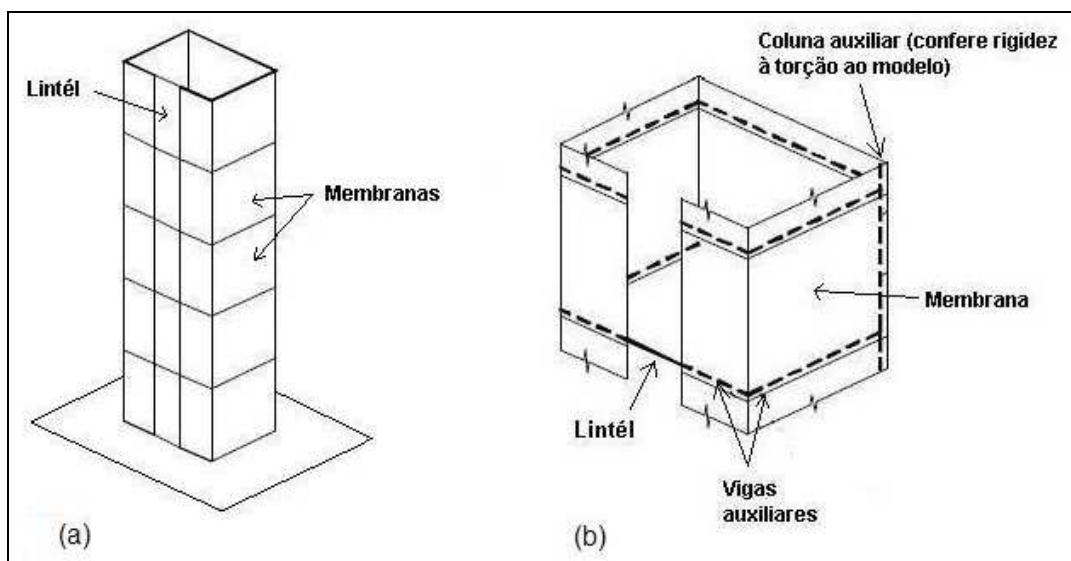


Figura 2.10: analogias propostas por Smith e Coull: (a) lintél representado por elemento de membrana; (b) lintél representado por barra (adaptada de SMITH e COULL, 1991)

Mori (1992) estudou o comportamento conjunto entre pórticos, pilares isolados, núcleos estruturais e vigas horizontais. A análise foi desenvolvida em regime elástico a partir de uma teoria de segunda ordem, ou seja, levando em conta o equilíbrio na posição deformada. A estrutura do edifício foi analisada pelo Método dos Deslocamentos, empregando-se uma

análise matricial por associação de subestruturas tridimensionais, correspondendo cada uma delas a um único andar do edifício. Para as lajes, foi considerado o mesmo comportamento utilizado no trabalho de Silva (1989).

Souto (1993) analisou os esforços em estruturas tridimensionais de edifícios altos, quando submetidos a carregamentos horizontais e verticais. A estrutura foi idealizada como um conjunto de pilares, paredes e vigas, podendo estes ser dispostos de uma maneira assimétrica no plano da laje e variarem suas propriedades geométricas ao longo da altura. A análise foi feita pelo Método dos Deslocamentos. Admitiu-se que as lajes em cada nível dos pavimentos tivessem o funcionamento de diafragma rígido. Ainda foram utilizados elementos de barra para a representação das vigas e pilares. Para a determinação dos esforços em paredes resistentes foram apresentados vários elementos obtidos pela analogia de pórticos. Tais elementos foram incorporados ao programa, possuindo uma formulação bastante simples.

Bianchi (1996) apresentou um sistema de análise estrutural para edifícios de concreto armado que utilizava o método da subestruturação. Através deste sistema, foram realizadas análises linear elástica e não linear geométrica, modelando os edifícios estudados exclusivamente por pórticos espaciais. O objetivo do autor foi implementar uma entrada de dados acessível aos profissionais da área de cálculo estrutural.

Pereira (1997) comparou a modelagem de núcleos do processo de Yagui (1971) com outros três procedimentos. Uma de suas conclusões é que o processo prático ou usual, muito utilizado nos escritórios de cálculo de estruturas à época do desenvolvimento do seu trabalho, despreza uma parte da inércia à flexão do núcleo estrutural, pois analisa este elemento discretizado em seções independentes, e não como um único elemento. Este processo consiste na modelagem dos pilares-parede independentemente, ou seja, não são consideradas as forças de cisalhamento nos vértices do núcleo (figura 2.11).



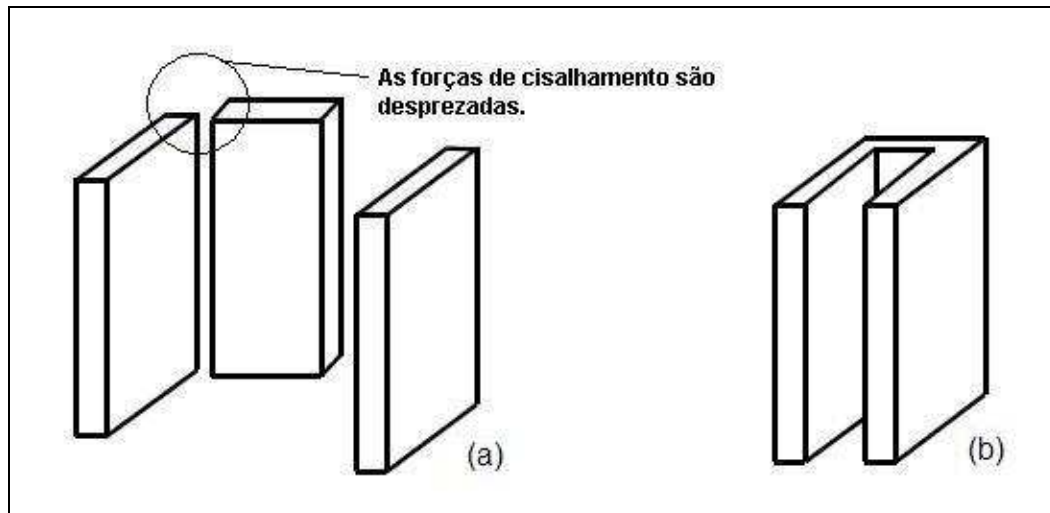


Figura 2.11: núcleo pelo processo prático: (a) pilares-parede independentes;  
(b) núcleo real (adaptada de PEREIRA, 1997)

O mesmo autor também comenta o processo simplificado (figura 2.12), que consiste na substituição dos tramos do núcleo estrutural entre duas lajes consecutivas por elementos de barra de pórtico espacial, localizados no centro de torção do núcleo e com rigidez equivalente. Segundo Pereira (1997), este processo não fornece bom desempenho para a torção, além de impossibilitar a modelagem das vigas que se conectam ao núcleo estrutural sendo, portanto, inadequado para representar este último.

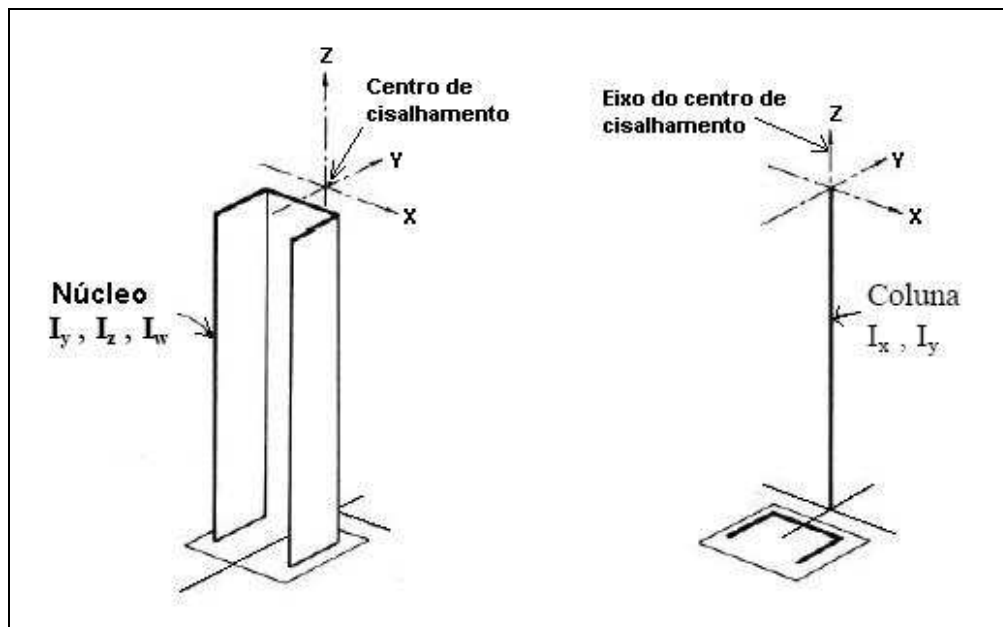


Figura 2.12: núcleo pelo processo simplificado (adaptada de SMITH e COULL, 1991)

Oliveira (1998), utilizando os recursos da subestruturação, realizou a análise tridimensional da estrutura combinando o modelo de pórtico espacial com elementos de flexão de placa. O autor estudou o comportamento das lajes e da estrutura frente à ação das cargas verticais e horizontais (vento), bem como o processo de transferência de esforços entre os elementos.

Martins (1998) verificou a importância da contribuição da rigidez à flexão das lajes na estabilidade global em teoria de segunda ordem. Por meio de análises em estruturas convencionais apertadas, foram encontradas diferenças sensíveis no comportamento da estrutura com e sem a consideração da laje. Além da diferença de esforços significativa nos elementos estruturais, os deslocamentos laterais diminuem sensivelmente quando se considera a rigidez à flexão das lajes. Verificou-se que, para alguns casos, a influência da rigidez da laje foi tão importante que, quando os efeitos de segunda ordem foram levados em conta considerando a rigidez da laje, os deslocamentos foram menores do que os de primeira ordem calculados sem a consideração dessa rigidez.

Martins (2001) analisou estruturas com a presença de núcleos rígidos, que foram discretizados através de elementos de barra segundo a teoria de flexo-torção de Vlassov (1962). Chegou à mesma conclusão do seu trabalho anterior, acerca da importância da rigidez à flexão das lajes para a estabilidade global de edifícios de andares múltiplos. Os resultados mostraram que, sem a consideração da laje, elementos estruturais podem estar tanto subdimensionados como superdimensionados, pois os esforços se distribuem de acordo com a rigidez dos elementos presentes no modelo; e a presença da laje tem influência direta nessa distribuição.

Rodrigues Júnior (2005) propôs uma formulação para o projeto ótimo de pilares de edifícios altos de concreto armado. Os edifícios foram modelados como pórticos espaciais e a não linearidade geométrica foi considerada na análise estrutural. A hipótese de diafragma rígido foi adotada para o comportamento das lajes e a rigidez à torção foi desprezada em todas as barras do pórtico. Cargas permanentes, acidentais e devidas ao vento foram aplicadas ao modelo. O autor concluiu que o projeto ótimo de edifícios altos de concreto armado pode levar a estruturas muito flexíveis, mesmo que o deslocamento horizontal no topo do edifício atenda aos limites estabelecidos por norma, apresentando elevados efeitos de segunda ordem.

Goulart (2008) analisou a contribuição da rigidez à flexão das lajes para três edifícios. Foram elaborados modelos estruturais tridimensionais através do programa SAP2000, baseados no Método dos Elementos Finitos. No modelo adotado, vigas e pilares foram discretizados



através de elementos de barra, e lajes e pilares-parede por meio de elementos de casca. Os resultados obtidos mostraram grande diferença entre as análises com e sem a contribuição da laje. Os esforços nas vigas e pilares podem apresentar reduções significativas com a inclusão da laje na estrutura de contraventamento. O autor ressalta, porém, que isto leva a consequências diretas no dimensionamento desses elementos. Além disso, a laje passa a ter esforços de flexão para forças horizontais de vento e deve obrigatoriamente ser armada à punção.

### 3 MODELO ESTRUTURAL ADOTADO

#### 3.1 INTRODUÇÃO

O modelo estrutural adotado neste trabalho permite realizar a análise tridimensional da estrutura de um edifício, ou seja, considerando a interação de esforços e deslocamentos entre os elementos nas três direções. O sistema global de referência adotado é do tipo triortogonal direto,  $X_g Y_g Z_g$ , com origem localizada no nível da base da estrutura, com eixo vertical  $Z_g$  orientado para cima e os eixos  $X_g$  e  $Y_g$  correspondendo às direções horizontais principais. O sentido positivo dos eixos é adotado de acordo com a figura 3.1.

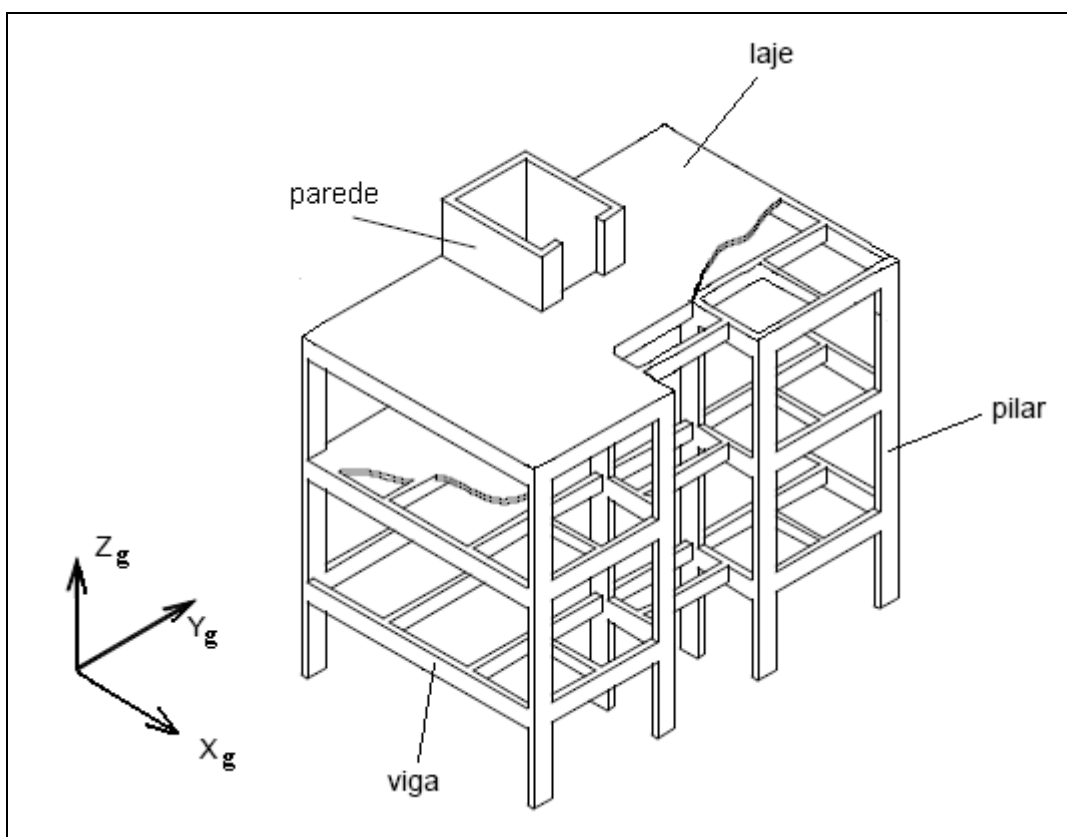


Figura 3.1: sistema global de eixos do modelo adotado

No modelo adotado, as lajes e as paredes estruturais são discretizadas através de elementos de casca poliédrica. Tal elemento é utilizado, em um processo de subestruturação, para gerar

superelementos do tipo painel. Por sua vez, as vigas e os pilares são analisados através de elementos de barra de pórtico espacial.

### 3.2 ELEMENTO DE CASCA POLIÉDRICA

O elemento de casca poliédrica implementado neste trabalho é um elemento isoparamétrico da família Serendipity, baseado na teoria de Mindlin; a qual exige continuidade apenas do tipo  $C_0$  (deslocamentos).

Deve-se atentar ao fato de que, mesmo que no problema real o elemento seja um quadrilátero qualquer, no domínio computacional ele é calculado na forma de um quadrado, com eixos auxiliares de origem no seu centroide e de coordenadas adimensionais extremas 1 ou -1, conforme a figura 3.2.

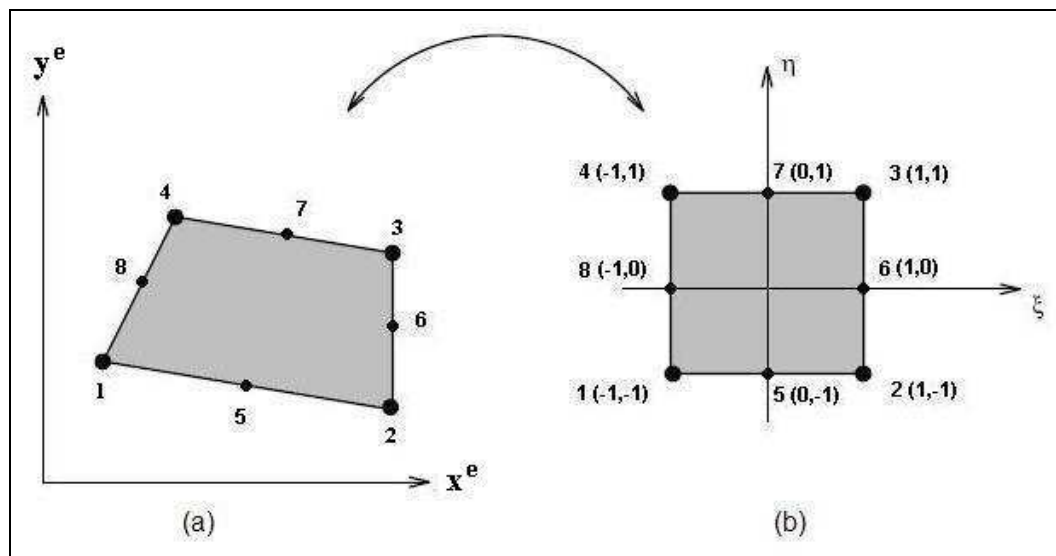


Figura 3.2: elemento finito de casca estudado: (a) domínio real; (b) domínio computacional

O elemento implementado é gerado através da associação de um elemento finito de estado plano de tensões e um elemento de placa, segundo a teoria de Mindlin; a qual exige continuidade apenas do tipo  $C_0$ . Considerando que o comportamento dos materiais é tomado como linear, as teorias do estado plano e da flexão de placas podem ser consideradas desacopladas. O elemento finito originalmente concebido possui oito nós, tendo seis graus de

liberdade por nó: dois oriundos do estado plano de tensões ( $U_{x_g}$  e  $U_{y_g}$ ), três da parte de flexão e corte ( $U_{z_g}$ ,  $R_{x_g}$  e  $R_{y_g}$ ) e um grau de liberdade adicional ( $R_{z_g}$ ) para permitir a análise de estruturas não coplanares. Define-se que  $U_{x_g}$ ,  $U_{y_g}$  e  $U_{z_g}$  correspondem às três translações em relação aos eixos globais  $X_g Y_g Z_g$  e, por sua vez,  $R_{x_g}$ ,  $R_{y_g}$  e  $R_{z_g}$  representam as três rotações em relação a este mesmo sistema de referência.

### 3.2.1 Estado plano de tensões

A matriz de rigidez do elemento finito para o estado plano de tensões é dada por:

$$K_{EPT}^e = t \cdot \left[ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_{EPT}]^T \cdot [D_{EPT}] \cdot [B_{EPT}] \cdot \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \right] \quad (3.1)$$

De acordo com Zienkiewicz e Taylor (1989), o vetor de deslocamentos,  $u$ , em qualquer ponto dentro dos limites do elemento pode ser encontrado por:

$$u = N \cdot U^e \quad (3.2)$$

onde  $N = [N_1, N_2, \dots, N_k]$  são as funções de interpolação de forma,  $U^e = [U_1, U_2, \dots, U_k]$  são os deslocamentos nodais e  $k$  é o número de nós do elemento.

Partindo da equação (3.2), tem-se, para o elemento estudado, que:

$$\underline{\tilde{u}} = \underline{\tilde{N}} \cdot \underline{\tilde{U}}^e \Rightarrow \begin{cases} x \\ y \end{cases} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & \cdots & N_8 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & \cdots & N_8 \end{bmatrix}_{2 \times 16} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_8 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_8 \end{bmatrix}_{16 \times 1} \quad (3.3)$$

e as funções de interpolação de forma são:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \\ N_5 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\ N_6 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\ N_7 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\ N_8 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Tais funções, por serem da família Serendipity, são montadas de forma a retornarem o valor 1 no seu nó e 0 nos outros. Para usar o domínio computacional ao invés do real, o que seria muito complicado, utiliza-se a matriz Jacobiana. Esta matriz vem da derivada total para

transformar as coordenadas do sistema no plano  $x^e y^e$  nas coordenadas computacionais  $\xi$  e  $\eta$ , conforme figura 3.2. Na forma matricial, ela é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \cdot x^e & \frac{\partial N}{\partial \xi} \cdot y^e \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \cdot x^e & \frac{\partial N}{\partial \eta} \cdot y^e \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad (3.5)$$

Então, tem-se que a matriz que relaciona deformações específicas com deslocamentos, para o estado plano de tensões é dada por:

$$B_{EPT} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial y} & \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix}_{3 \times 16} \quad (3.6)$$

cujos termos são:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = {}_{-1}J^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial N}{\partial y} = {}_{-2}J^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{bmatrix}; \quad (3.7)$$

onde  ${}_{-1}J^{-1}$  e  ${}_{-2}J^{-1}$  representam, respectivamente, a primeira e a segunda linha da inversa da matriz Jacobiana.

O domínio de integração é bidimensional, sendo que a espessura do elemento ( $t$ ) é considerada constante. O determinante da matriz Jacobiana representa fisicamente a relação entre a área real do elemento e a área computacional. O diferencial de área no cálculo da matriz de rigidez é dado por:  $dA = \det J \cdot d\xi \cdot d\eta$ . A matriz  $B_{EPT}$  tem dimensões 3x16, sendo o número de colunas igual ao número de graus de liberdade por nó (2), multiplicado pelo número de nós do elemento (8). Por sua vez, a matriz constitutiva  $D_{EPT}$ , para o caso de elasticidade linear, tem dimensões 3x3 e é dada por:

$$D_{EPT} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (3.8)$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

Portanto, vê-se que a matriz de rigidez do elemento para o estado plano de tensões ( $K^e_{EPT}$ ) resulta quadrada com dimensões 16x16. A integração deve usar um processo numérico que, neste trabalho, é a quadratura de Gauss-Legendre. A integral é feita com nove pontos de Gauss (integração 3x3), que possuem as coordenadas dadas pelas raízes do polinômio de Legendre de grau 3 (para interpolação quadrática). É importante dizer que a integral é um somatório das parcelas de cada um dos nove pontos, e estas parcelas devem vir multiplicadas pelos respectivos pesos dados pelo método da Quadratura Gaussiana. Assim, a expressão (3.1) se transforma em:

$$K^e_{EPT} = \sum_{i=1}^{ngauss} \sum_{j=1}^{ngauss} [B_{EPT}]^T \cdot [D_{EPT}] \cdot [B_{EPT}] \cdot \det J \cdot w_i \cdot w_j \cdot t \quad (3.9)$$

As coordenadas dos pontos de Gauss utilizadas, bem como os pesos de integração ( $w_i$  e  $w_j$ ) podem ser obtidos, por exemplo, em Zienkiewicz e Taylor (1989); e se encontram no Apêndice A.

### 3.2.2 Flexão e corte

A matriz de rigidez do elemento de placa, segundo a teoria de Mindlin, é dada por:

$$K_{F-C}^e = \left[ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_{F-C}]^T \cdot [D_{F-C}] \cdot [B_{F-C}] \cdot \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \right] \quad (3.10)$$

Para a flexão e corte, partindo-se da equação (3.2), tem-se que:

$$\underline{u} = \underline{N} \cdot \underline{U}^e \Rightarrow \begin{cases} u \\ v \\ w \end{cases} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_8 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & N_1 & N_2 & \dots & N_8 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N_1 & N_2 & \dots & N_8 \end{bmatrix}_{3 \times 24} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_8 \\ R_{x1} \\ R_{x2} \\ \vdots \\ R_{x8} \\ R_{y1} \\ R_{y2} \\ \vdots \\ R_{y8} \end{bmatrix}_{24 \times 1} \quad (3.11)$$

As funções de interpolação de forma e a matriz Jacobiana do elemento de placa de Mindlin são as mesmas do estado plano de tensões, sendo, portanto, dadas pelas expressões (3.4) e (3.5), respectivamente. Isso ocorre porque a teoria de Mindlin, conjugada ao estado plano de tensões, exige continuidade apenas dos deslocamentos (continuidade  $C_0$ ). Por outro lado, se fosse utilizada a teoria de placa de Kirchhoff, seria exigida a continuidade das primeiras derivadas (continuidade  $C_1$ ), impedindo a utilização das mesmas expressões.

As matrizes das derivadas das funções de interpolação de forma para a flexão e o corte da placa foram agrupadas em uma só matriz ( $B_{F-C}$ ), resultando em:



$$B_{F-C} = \begin{bmatrix} B_{FLEXÃO} \\ B_{CORTE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial N}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial N}{\partial x} & \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial x} & 0 & N \\ \frac{\partial N}{\partial y} & -N & 0 \end{bmatrix}_{5 \times 24} \quad (3.12)$$

É importante ressaltar que a matriz acima foi construída seguindo a convenção positiva de deslocamentos e rotações locais, conforme a figura 3.3.

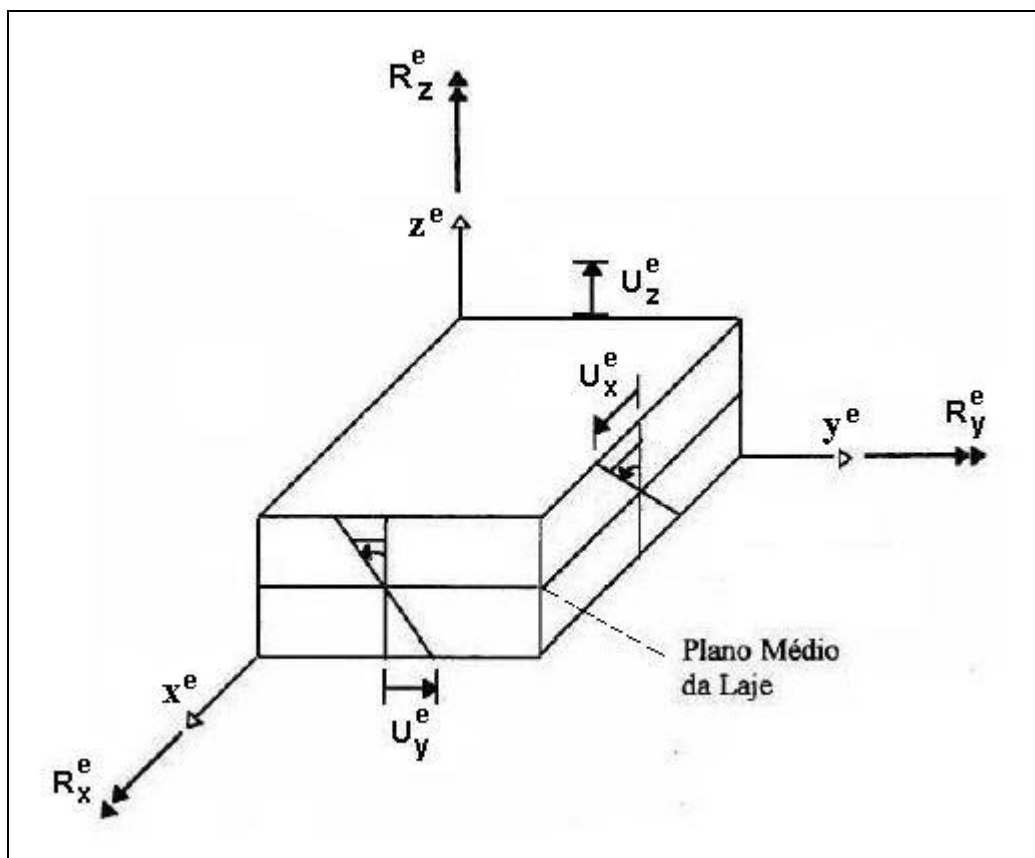


Figura 3.3: sentidos positivos dos deslocamentos e das rotações do elemento de casca

Nesta figura,  $U_z^e$  representa a translação na direção do eixo  $z$  local ( $z^e$ ),  $R_x^e$  o giro ao redor do eixo  $x^e$  e  $R_y^e$  o giro ao redor de  $y^e$ . Também estão presentes  $U_x^e$  (translação na direção  $x^e$ ) e  $U_y^e$  (translação na direção  $y^e$ ), que são oriundas do estado plano de tensões.

Os termos da matriz  $B_{F-C}$  são obtidos a partir do Jacobiano pelo mesmo procedimento expresso na equação (3.7). O domínio de integração é bidimensional, sendo que a espessura do elemento ( $t$ ) é considerada constante. O diferencial de área no cálculo da matriz de rigidez é dado por:  $dA = \det J \cdot d\xi \cdot d\eta$ . A matriz  $B_{F-C}$  tem dimensões  $3 \times 24$ , sendo o número de colunas igual ao número de graus de liberdade por nó (3), multiplicado pelo número de nós do elemento (8). Considerando que a placa seja isotrópica, as matrizes constitutivas para os casos de flexão e corte foram agrupadas em uma única matriz ( $D_{F-C}$ ), com dimensões  $5 \times 5$ , resultando em:

$$D_{F-C} = \begin{bmatrix} D_{FLEXÃO} & 0 \\ 0 & D_{CORTE} \end{bmatrix}_{5 \times 5} \quad (3.13)$$

onde as matrizes constitutivas para a flexão ( $D_{FLEXÃO}$ ) e o corte ( $D_{CORTE}$ ) são dadas, respectivamente, pelas seguintes expressões:

$$D_{FLEXÃO} = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)}{2} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (3.14)$$

$$D_{CORTE} = \frac{E \cdot t}{2 \cdot c \cdot (1 + \nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad (3.15)$$

Pela teoria de placas, as tensões de cisalhamento variam quadraticamente ao longo da espessura. Na formulação aqui utilizada, as deformações cisalhantes conduzem a tensões constantes ao longo da espessura. Para corrigir o erro na estimativa da energia de deformação decorrente dessa má distribuição de tensões, é introduzido um coeficiente de correção de cisalhamento transversal,  $c$ . Conforme os estudos de Timoshenko (1970), um valor razoável para  $c$  é 1,2; o qual é adotado neste trabalho.

É possível observar que a matriz de rigidez do elemento para a flexão e corte ( $K^e_{F-C}$ ) resulta quadrada com dimensões 24x24. A integração será feita pelo mesmo procedimento utilizado no estado plano de tensões. Assim, a expressão (3.10) se transforma em:

$$K^e_{F-C} = \sum_{i=1}^{ngauss} \sum_{j=1}^{ngauss} [B_{F-C}]^T \cdot [D_{F-C}] \cdot [B_{F-C}] \cdot \det J \cdot w_i \cdot w_j \quad (3.16)$$

### 3.2.3 Matriz de rigidez do elemento de casca

Como mencionado anteriormente, o elemento finito utilizado neste trabalho consiste na associação de um elemento de estado plano de tensões com um elemento de placa segundo a teoria de Mindlin. Após se obter as matrizes de rigidez destes elementos, se faz necessária a união dos mesmos. Como visto,  $K^e_{EPT}$  e  $K^e_{F-C}$  possuem dimensões 16x16 e 24x24, respectivamente. O novo elemento, que possui matriz de dimensões 40x40, apresenta a seguinte configuração de superlinhas e supercolunas (onde cada superlinha e supercoluna representa um nó) para a sua matriz de rigidez ao nível local do elemento:

$$K^e_{NÓ} = \begin{matrix} & U_x^e & U_y^e & U_z^e & R_x^e & R_y^e \\ \begin{matrix} U_x^e \\ U_y^e \\ U_z^e \\ R_x^e \\ R_y^e \end{matrix} & \begin{bmatrix} ept & ept & 0 & 0 & 0 \\ ept & ept & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Mindlin & Mindlin & Mindlin \\ 0 & 0 & Mindlin & Mindlin & Mindlin \\ 0 & 0 & Mindlin & Mindlin & Mindlin \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.17)$$

onde  $ept$  representa as partições ocupadas pela matriz de rigidez do estado plano de tensões e  $Mindlin$  representa as partições ocupadas pela matriz de rigidez da formulação de placa de Mindlin, mais o esforço de corte. Os zeros indicam que o estado plano e a flexão estão desacoplados.

Até aqui o elemento apresenta cinco graus de liberdade por nó ( $U_x^e, U_y^e, U_z^e, R_x^e$  e  $R_y^e$ ), adequados à análise de estruturas em que todos os elementos estão em um único plano. Todavia, nas estruturas que se quer analisar, os elementos podem estar em planos diferentes. Assim, após a rotação para o sistema global, cada nó passa a ter seis graus de liberdade: três deslocamentos e três rotações. Isto é obtido ao se acrescentar uma linha e uma coluna extras na matriz local da equação (3.17), que correspondem à rotação  $Rz_g$  (em torno do eixo global  $Z_g$ ), conforme mostra a equação (3.18).

Para evitar que ocorra singularidade na matriz de rigidez da estrutura, nos nós que pertençam exclusivamente a elementos coplanares, esta linha e coluna extras são formadas por valores nulos, a exceção do termo da diagonal, onde é colocada uma constante ( $C_{nó}$ ) de mesma ordem de grandeza dos demais termos da diagonal. Por sua vez, nos nós que pertençam a elementos não coplanares, também se deve acrescentar uma linha e coluna extras correspondente ao 6º grau de liberdade, porém todos estes valores podem ser nulos.

Finalmente, o novo elemento, que possui agora uma matriz de dimensões 48x48, apresenta a seguinte configuração de superlinhas e supercolunas (onde cada superlinha e supercoluna representa um nó) para a sua matriz de rigidez ao nível local do elemento:

$$K_{NÓ}^e = \begin{matrix} & U_x^e & U_y^e & U_z^e & R_x^e & R_y^e & Rz_g \\ \begin{matrix} U_x^e \\ U_y^e \\ U_z^e \\ R_x^e \\ R_y^e \\ Rz_g \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccc} ept & ept & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ept & ept & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Mindlin & Mindlin & Mindlin & 0 \\ 0 & 0 & Mindlin & Mindlin & Mindlin & 0 \\ 0 & 0 & Mindlin & Mindlin & Mindlin & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{nó} \end{array} \right] \end{matrix} \quad (3.18)$$

### 3.2.4 Matriz de rotação para o sistema global

Na figura 3.4, representam-se dois sistemas de coordenadas cartesianas. O sistema  $x^e y^e z^e$  é o sistema local do elemento de casca e o sistema  $X_g Y_g Z_g$  é o sistema global. O eixo  $x^e$  tem o sentido do nó  $i$  para o nó  $j$  (na ordem das conectividades). O eixo  $y^e$  está no plano do elemento e é perpendicular ao eixo  $x^e$ . O eixo  $z^e$  é normal ao plano do elemento, enquanto que  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$  são vetores de módulo unitário na direção dos eixos  $x^e$ ,  $y^e$  e  $z^e$ , respectivamente. Estes vetores são obtidos baseados em Bathe (1982).

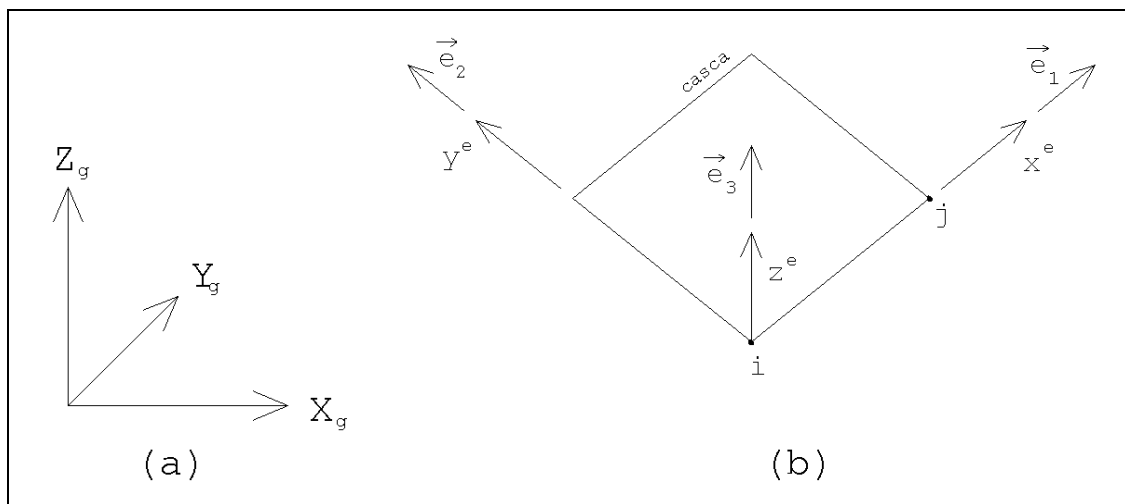


Figura 3.4: sistemas de coordenadas cartesianas: (a) global; (b) ao nível do elemento de casca

A submatriz  $H$  da matriz de rotação do sistema global para o sistema local, para cada elemento de casca, foi montada da seguinte forma:

$$H = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

onde  $\{x_1 \ y_1 \ z_1\}$ ,  $\{x_2 \ y_2 \ z_2\}$  e  $\{x_3 \ y_3 \ z_3\}$  representam as componentes dos vetores unitários  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$ , respectivamente, em relação ao sistema global. Logo, a transformação da matriz de rigidez para o sistema global é dada por:

$$K^e_{NÓ-GLOBAL} = [R] \cdot [K^e_{NÓ}] \cdot [R]^T \quad (3.20)$$

na qual  $K^e_{NÓ-GLOBAL}$  fica sendo a matriz de rigidez da expressão (3.18) no sistema global e a matriz de rotação  $R$  é dada por:

$$R = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & H \\ \sim & \sim \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (3.21)$$

### 3.2.5 Forças nodais

O vetor de forças nodais do sistema estrutural é obtido pela contribuição direta das forças concentradas nos nós, mais as possíveis forças nodais equivalentes, devido ao carregamento distribuído ao longo dos elementos, conforme a equação abaixo:

$$\{F\} = \{F\}_{NÓ} + \{F\}_{EQV} \quad (3.22)$$

na qual  $\{F\}$  é o vetor de forças nodais,  $\{F\}_{NÓ}$  é o vetor de forças concentradas aplicadas diretamente nos nós e  $\{F\}_{EQV}$  é o vetor de forças nodais equivalentes. Todos os vetores estão em coordenadas locais.

Para se obter o vetor de cargas nodais equivalentes do elemento de casca devido a um carregamento uniformemente distribuído  $q$  (figura 3.5), é utilizado o processo da matriz consistente. Este processo permite transferir as cargas de superfície para os nós do elemento através da resolução da seguinte integral de área:

$${}^{casca}\{F\}_{EQV} = \int_A N^T \cdot q \cdot dA \quad (3.23)$$

onde  ${}^{casca}\{F\}_{EQV}$  representa o vetor de cargas equivalentes de cada elemento de casca com 48 posições,  $N^T$  é a transposta do vetor contendo as funções de interpolação de forma e  $dA$  é o diferencial de área.

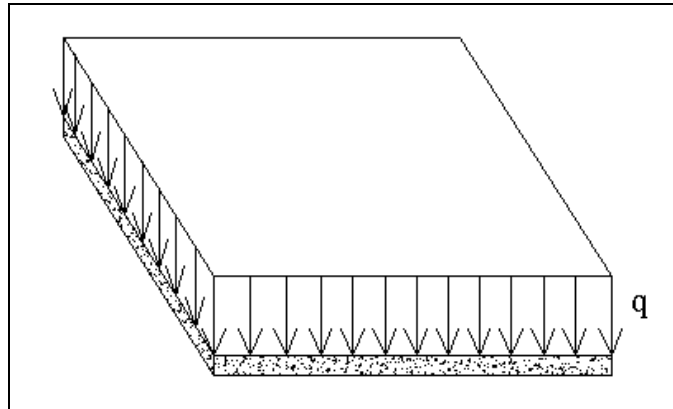


Figura 3.5: carga uniformemente distribuída no elemento de casca

Entretanto, para se resolver esta integral, é necessário, como já visto no desenvolvimento da matriz de rigidez do elemento de casca, utilizar o determinante do Jacobiano e a integração numérica de Gauss. Assim, a equação a ser resolvida computacionalmente é:

$${}^{casca} \{F\}_{EQV} = \sum_{i=1}^{ngauss} N^T \cdot q \cdot \det J \cdot w_i \cdot w_j \quad (3.24)$$

na qual  $\det J$  é o determinante de Jacobiano e,  $w_i$  e  $w_j$  representam os pesos dos pontos de integração de Gauss.

Ressalta-se que o vetor de cargas deve ser rotacionado para o sistema global, usando a matriz dada em (3.19).

### 3.3 ELEMENTO DE BARRA DE PÓRTICO ESPACIAL

#### 3.3.1 Matriz de rigidez do elemento de barra

Admite-se, para um elemento genérico de barra de pórtico espacial, um comportamento tridimensional com seis graus de liberdade por nó. Não é prevista a aplicação de carregamentos externos ao longo do eixo longitudinal de pilares, apenas nos elementos de vigas. O sistema de referência local da barra é mostrado na figura 3.6, sendo  $z_l$  e  $y_l$  os eixos

principais de inércia da seção e  $x_1$  o eixo longitudinal passando pelo centroide da seção transversal.

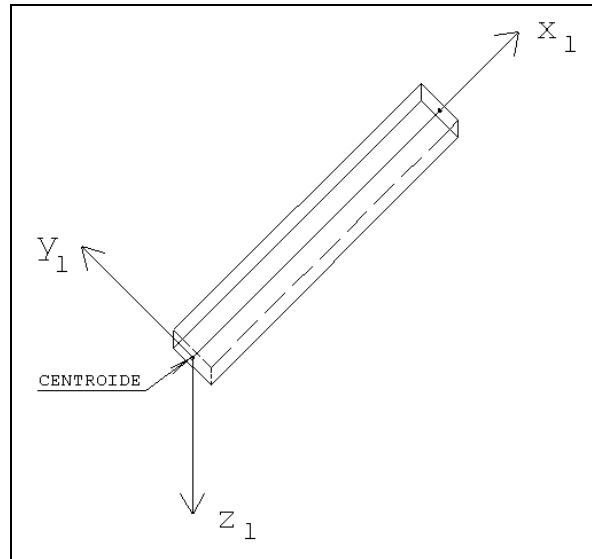


Figura 3.6: sistema de referência local da barra de pórtico espacial

A matriz de rigidez do elemento de pórtico espacial em coordenadas locais, considerando uma análise em teoria de primeira ordem, através das técnicas da análise matricial é dada pela seguinte matriz de dimensões 12x12:

$$[K_{pl}] = \begin{bmatrix} [K_{pl}]_1 & [K_{pl}]_2 \\ [K_{pl}]_2^T & [K_{pl}]_3 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

na qual

$$[K_{pl}]_1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{zp}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{zp}}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_{yp}}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_{yp}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GT_{xp}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_{yp}}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{yp}}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_{zp}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{zp}}{L} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$



$$\left[ K_{pl} \right]_2 = \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_{zp}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{zp}}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{-12EI_{yp}}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_{yp}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-GT_{xp}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_{yp}}{L^2} & 0 & \frac{2EI_{yp}}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-6EI_{zp}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{zp}}{L} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\left[ K_{pl} \right]_3 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{zp}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_{zp}}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_{yp}}{L^3} & 0 & \frac{6EI_{yp}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GT_{xp}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_{yp}}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{yp}}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-6EI_{zp}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{zp}}{L} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

sendo  $I_{zp}$  o momento de inércia à flexão em relação ao eixo z local;  $I_{yp}$  o momento de inércia à flexão em relação ao eixo y local;  $T_{xp}$  a constante de torção em relação ao eixo x local;  $A$  a área da seção transversal da barra;  $L$  o comprimento da barra;  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal e  $G$  o módulo de elasticidade transversal.

Salienta-se que o elemento de pórtico espacial é empregado na consideração dos pilares e vigas do modelo.

### 3.3.2 Matriz de rotação para o sistema global

Conforme mencionado no item (3.3.1), para o elemento de pórtico espacial, o eixo local  $x_l$  coincide com o centroide da barra, indo do nó  $i$  ao nó  $j$ . Para a determinação da direção e sentido dos eixos locais  $y_l$  e  $z_l$ , que estão contidos num plano perpendicular à  $x_l$ , é necessário o fornecimento de um parâmetro chamado ângulo BETA ( $\beta$ ). Este ângulo será o menor ângulo medido entre o plano definido pelos eixos  $x_l$  e  $Y_g$  e o eixo  $y_l$ . Ele será considerado positivo se o sentido de giro, do plano  $x_l Y_g$  para o eixo  $y_l$ , for anti-horário (MORSCH, 1991).

Se o eixo  $x_l$  e o eixo  $Y_g$  coincidirem, o ângulo  $\beta$  não pode ser determinado usando a regra acima. Neste caso,  $\beta$  será o menor ângulo medido entre o plano definido pelos eixos  $x_l$  e  $X_g$  e o eixo  $y_l$ .  $\beta$  será positivo se o giro do plano  $x_l Y_g$  para o eixo  $y_l$  for anti-horário, conforme a figura 3.7.

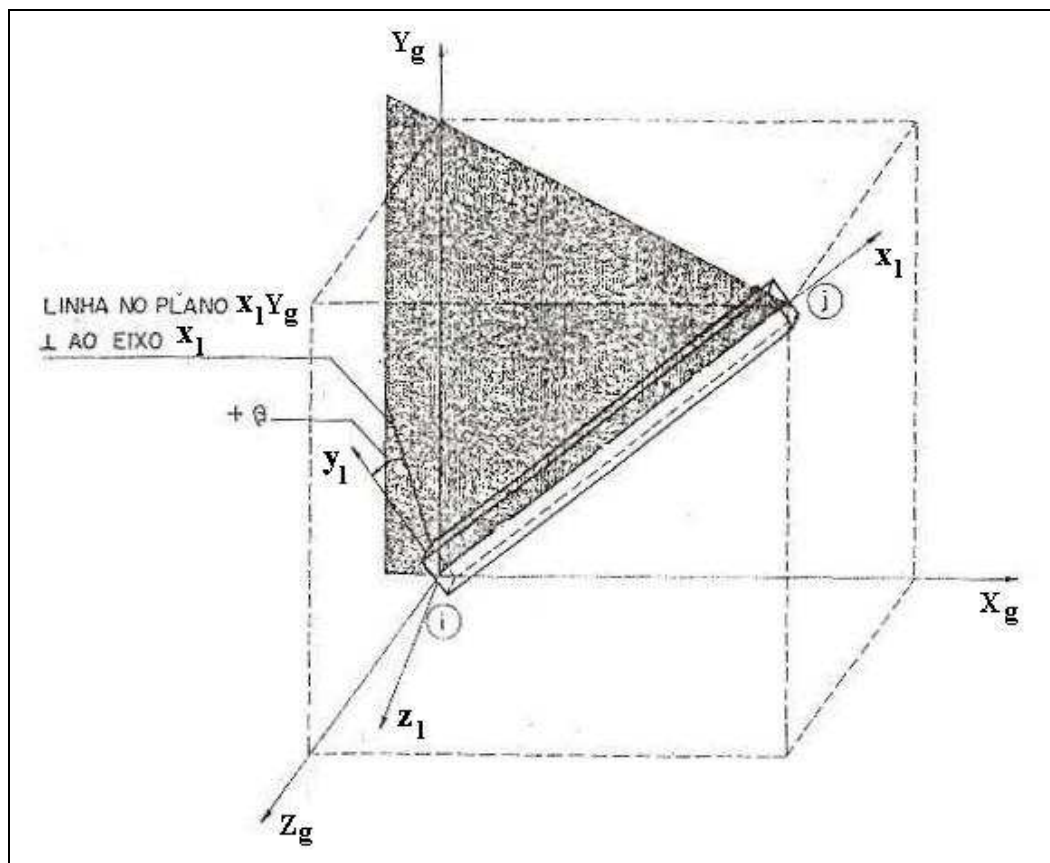


Figura 3.7: determinação do ângulo BETA (adaptada de MORSCH, 1991)

Assim, se o eixo  $y$  global ( $Y_g$ ) coincidir com o eixo baricêntrico da barra ( $x_l$ ), a matriz de rotação é dada por:

$$[R_{PORT}]_1 = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

na qual  $r_1$  é dado na expressão (3.30) e  $0$  representa uma matriz nula de dimensões  $3 \times 3$ .

$$r_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{P_y}{L} & 0 \\ -\cos(\beta) \cdot \frac{P_y}{L} & 0 & \text{sen}(\beta) \\ \text{sen}(\beta) \cdot \frac{P_y}{L} & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

sendo  $P_y$  a projeção do comprimento  $L$  da barra sobre o eixo  $Y_g$ .

Dessa forma, a matriz de rigidez da barra de pórtico espacial no sistema global é dada por:

$$[K_{pl}^g] = [R_{PORT}]_1^T \cdot [K_{pl}] \cdot [R_{PORT}]_1 \quad (3.31)$$

Em contrapartida, se a barra não estiver contida no eixo  $Y_g$ , então a matriz de rotação é dada por:

$$[R_{PORT}]_2 = \begin{bmatrix} r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_2 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

na qual  $r_2$  é dado na expressão (3.33) e  $0$  representa uma matriz nula de dimensões  $3 \times 3$ .

$$r_2 = \begin{bmatrix} \frac{P_x}{L} & \frac{P_y}{L} & \frac{P_z}{L} \\ -\cos(\beta) \cdot \frac{P_x}{L_b} \cdot \frac{P_y}{L} - \sin(\beta) \cdot \frac{P_z}{L_b} & \cos(\beta) \cdot \frac{L_b}{L} & -\cos(\beta) \cdot \frac{P_z}{L_b} \cdot \frac{P_y}{L} + \sin(\beta) \cdot \frac{P_x}{L_b} \\ \sin(\beta) \cdot \frac{P_x}{L_b} \cdot \frac{P_y}{L} - \cos(\beta) \cdot \frac{P_z}{L_b} & -\sin(\beta) \cdot \frac{L_b}{L} & \sin(\beta) \cdot \frac{P_z}{L_b} \cdot \frac{P_y}{L} + \cos(\beta) \cdot \frac{P_x}{L_b} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

sendo  $P_y$  a projeção do comprimento  $L$  da barra sobre o eixo  $Y_g$ ;  $P_z$  a projeção sobre o eixo  $Z_g$  e  $P_x$  a projeção sobre o eixo  $X_g$ . Além disso,  $L_b = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}$ .

Portanto, neste caso, a matriz de rigidez da barra de pórtico espacial no sistema global é dada por:

$$[K_{pl}^g] = [R_{PORT}]_2^T \cdot [K_{pl}] \cdot [R_{PORT}]_2 \quad (3.34)$$

### 3.3.3 Cargas distribuídas nas vigas

O programa permite a consideração de carga uniformemente distribuída nas vigas e este item explica como são calculadas as cargas nodais equivalentes. No caso das vigas, admite-se que o eixo  $Z_g$  coincide com o eixo  $z_l$ . Assim, as cargas nodais equivalentes de acordo com o

sistema global de coordenadas adotado, para os nós 1 e 2 do elemento de viga (figura 3.8), são dadas por:

$${}^{viga-NÓ1}\{F\}_{EQV} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_v \\ M_{X_g}^{viga} \\ M_{Y_g}^{viga} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$${}^{viga-NÓ2}\{F\}_{EQV} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_v \\ -M_{X_g}^{viga} \\ -M_{Y_g}^{viga} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

onde

$$p_v = \frac{q_v \cdot L_v}{2} \quad (3.37)$$

$$M_{X_g}^{viga} = \frac{q_v \cdot (L_v)^2}{12} \cdot \text{sen}(\delta) \quad (3.38)$$

$$M_{Y_g}^{viga} = \frac{q_v \cdot (L_v)^2}{12} \cdot \text{cos}(\delta) \quad (3.39)$$

$$L_v = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (3.40)$$

$$\text{cos}(\delta) = \frac{(x_2 - x_1)}{L_v} \quad (3.41)$$

$$\text{sen}(\delta) = \frac{(y_2 - y_1)}{L_v} \quad (3.42)$$

na qual  $\delta$  representa o ângulo definido entre o eixo  $X_g$  e o eixo  $x_l$  da viga,  $q_v$  é a carga uniformemente distribuída,  $p_v$  é a força de engastamento perfeito nos nós,  $M_{X_g}^{viga}$  e  $M_{Y_g}^{viga}$  são os momentos de engastamento perfeito em torno dos eixos  $X_g$  e  $Y_g$ , respectivamente, e  $L_v$  é o comprimento da barra de viga.

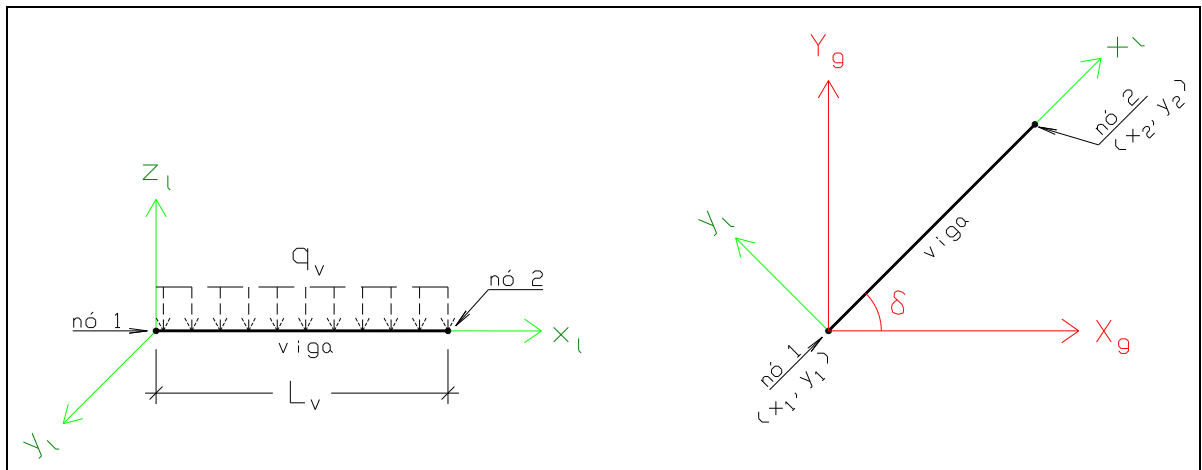


Figura 3.8: carga uniformemente distribuída no elemento de viga

Para os elementos de pórtico que constituem pilares, como mencionado anteriormente, são admitidas apenas forças nodais.

## 4 ANÁLISE GLOBAL DA ESTRUTURA

### 4.1 INTRODUÇÃO

A análise global da estrutura pressupõe a definição da matriz de rigidez global. Esta é obtida através da contribuição das rigidezes de todos os elementos estruturais componentes do modelo (elementos de casca e barras). Seria, portanto, computacionalmente pesada a análise considerando todos os graus de liberdade envolvidos, devido ao grande número de incógnitas presentes no sistema de equações correspondente.

Para que se tenha um sistema computacional eficiente na resolução de estruturas com um grande número de elementos, se faz necessário o uso de recursos como a hipótese de diafragma rígido dos pavimentos e a subestruturação, que permitem diminuir o tamanho do problema a ser resolvido, sem, no entanto, ocorrer perda de precisão nos resultados.

### 4.2 DIAFRAGMA RÍGIDO

A consideração de cada pavimento funcionando como diafragma rígido é bastante comum na análise de estruturas tridimensionais de edifícios. Assim, cada pavimento transmite, sem se deformar no próprio plano, todos os esforços para as demais partes da estrutura. Esta consideração leva a uma dependência linear entre os deslocamentos dos pontos nodais da estrutura que estão contidos no plano da laje. Esta dependência pode ser expressa por uma relação dos deslocamentos do nó "master" (mestre) e dos nós "slaves" (escravos). Neste caso, conforme Rodrigues Júnior (2005), é possível fazer com que os deslocamentos de um nó sejam dependentes, total ou parcialmente, dos deslocamentos nodais de outro nó.

Para tanto, considera-se que os deslocamentos do nó  $i$  sejam dependentes dos deslocamentos do nó  $j$  e que a distância entre eles seja representada por  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ , conforme mostra a figura 4.1. Dessa forma, expressando-se os deslocamentos do nó  $i$  em função do nó  $j$ , obtêm-se:

$$u1_i = u1_j - dz \cdot u5_j + dy \cdot u6_j \quad (4.1)$$

$$u2_i = u2_j + dz \cdot u4_j - dx \cdot u6_j \quad (4.2)$$

$$u3_i = u3_j - dy \cdot u4_j + dx \cdot u5_j \quad (4.3)$$

$$u4_i = u4_j \quad (4.4)$$

$$u5_i = u5_j \quad (4.5)$$

$$u6_i = u6_j \quad (4.6)$$

na qual

$$dx = X_j - X_i \quad (4.7)$$

$$dy = Y_j - Y_i \quad (4.8)$$

$$dz = Z_j - Z_i \quad (4.9)$$

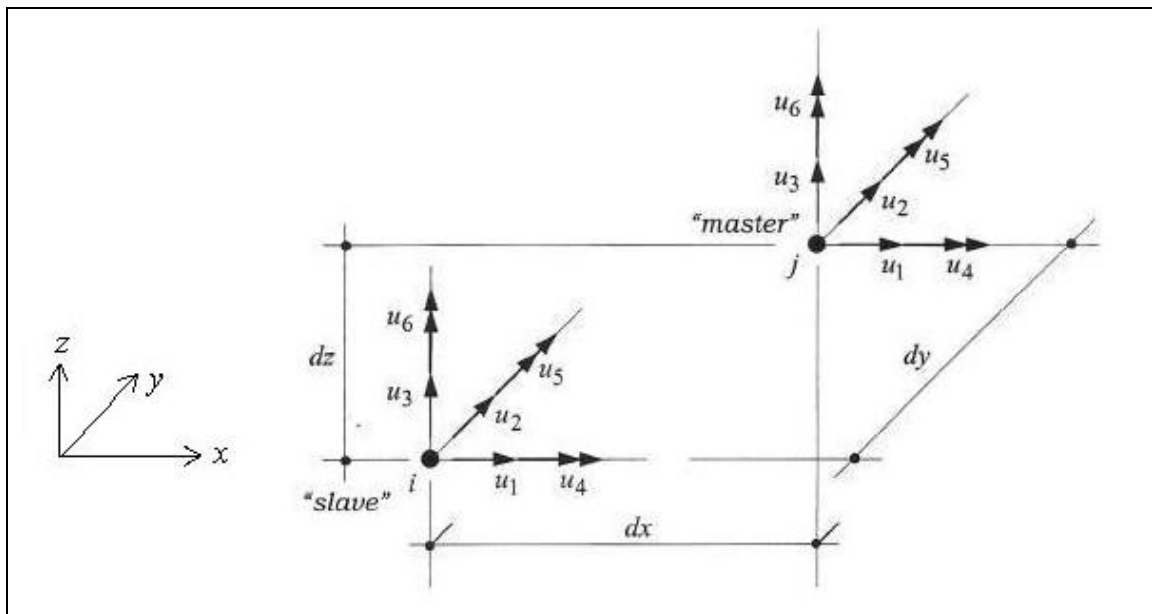


Figura 4.1: deslocamentos nodais e distância entre os nós i e j (adaptada de RODRIGUES JÚNIOR, 2005)



Através destas expressões, pode-se escrever:

$$U_i = T_{ij} \cdot U_j \quad (4.10)$$

sendo  $U_i$  o vetor de deslocamentos do nó  $i$  e  $U_j$  o vetor de deslocamentos do nó  $j$ . Por sua vez,  $T_{ij}$  representa a matriz de transformação, para dependência linear clássica, entre os deslocamentos do nó dependente  $i$  e do nó mestre  $j$ , sendo dada pela seguinte expressão:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -dz & dy \\ 0 & 1 & 0 & dz & 0 & -dx \\ 0 & 0 & 1 & -dy & dx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Procedendo-se de forma análoga para as forças, obtém-se:

$$F_j = T_{ij}^t \cdot F_i \quad (4.12)$$

Para um elemento de dois nós  $i$  e  $k$ , onde  $i$  é dependente de  $j$  e  $k$  é dependente de  $l$ , tem-se:

$$T_e = \begin{bmatrix} T_{ij} & 0 \\ 0 & T_{kl} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Através destas transformações, pode-se escrever:

$$Kg_e \cdot Ug_e = Fg_e \quad (4.14)$$

$$Kg_e \cdot T_e \cdot U_e = Fg_e \quad (4.15)$$

que, pré-multiplicando-se por  $T_e^t$ , fornece

$$\left[ T_e^t \cdot K g_e \cdot T_e \right] \cdot U_e = T_e^t \cdot F g_e \quad (4.16)$$

onde  $K g_e$  é a matriz de rigidez do elemento no sistema global;  $U g_e$  é o vetor dos deslocamentos nodais do elemento no sistema global;  $U_e$  é o vetor dos deslocamentos nodais do nó mestre no sistema global e  $F g_e$ , o vetor de forças nodais do elemento no sistema global.

Dessa forma, a matriz de rigidez ( $K_e$ ) e o vetor de forças ( $F_e$ ) do elemento, em termos dos deslocamentos nodais do nó mestre, são dados, respectivamente, pelas seguintes expressões:

$$K_e = T_e^t \cdot K g_e \cdot T_e \quad (4.17)$$

$$F_e = T_e^t \cdot F g_e \quad (4.18)$$

A matriz  $T_{ij}$ , apresentada na equação (4.11), foi estabelecida para um nó inteiramente dependente de outro. Admitindo-se, agora, como dependência para considerar o funcionamento da laje como diafragma rígido, apenas translações no plano xy ( $u1$  - translação em x,  $u2$  - translação em y) e rotações perpendiculares a este plano ( $u6$ ), obtêm-se as seguintes equações, para o nó dependente  $i$  e o nó mestre  $j$ :

$$u1_i = u1_j + dy \cdot u6_j \quad (4.19)$$

$$u2_i = u2_j - dx \cdot u6_j \quad (4.20)$$

$$u6_i = u6_j \quad (4.21)$$

Na forma matricial, as equações (4.19) a (4.21) são agrupadas da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} u1_i \\ u2_i \\ u3_i \\ u4_i \\ u5_i \\ u6_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & dy \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -dx \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u1_j \\ u2_j \\ u3_i \\ u4_i \\ u5_i \\ u6_j \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Assim, os termos da matriz de rigidez e do vetor de forças, associados aos graus de liberdade do nó  $i$  ( $u1_i$ ,  $u2_i$  e  $u6_i$ ), descritos em função dos graus de liberdade do nó mestre  $j$ , particularizados para o presente trabalho, são obtidos ao se empregar a matriz de transformação, apresentada pela equação (4.22), nas equações (4.17) e (4.18).

Outra maneira de se considerar a influência das lajes, admitidas como diafragmas rígidos dentro da estrutura, é enrijecer as vigas na direção axial e à flexão lateral. Este método apresenta uma implementação muito simples. Entretanto, o método da dependência linear, empregado neste trabalho, tem como grande vantagem a redução significativa do número de graus de liberdade e, conseqüentemente, redução na dimensão do problema a ser analisado.

### 4.3 SUBESTRUTURAÇÃO

A subestruturação é conceituada como sendo a divisão de uma estrutura em regiões menores ou subestruturas. Segundo Ellwanger (1987), esta técnica consiste em resolver, no lugar do sistema de equações original de toda a estrutura, vários sistemas menores, permitindo a análise de estruturas bastante complexas com maior rapidez e eficiência. Neste contexto, na análise estática de estruturas pelo método da rigidez, o sistema original a ser resolvido é dado pela expressão generalizada:

$$K \cdot U = P \quad (4.23)$$

na qual  $K$  é a matriz de rigidez global,  $U$  o vetor de deslocamentos e  $P$  o vetor de cargas. Na prática,  $K$  e  $P$  são obtidos a partir da soma das contribuições individuais das  $m$  partes (elementos ou super elementos) integrantes da estrutura:

$$K = \sum_{i=1}^m K_i \quad (4.24)$$

$$P = \sum_{i=1}^m P_i \quad (4.25)$$

Seja uma região da estrutura destinada a constituir um super elemento. A subestrutura 3 do pórtico plano da figura 4.2, por exemplo, isolada do restante da estrutura, terá o seu equilíbrio expresso pelo seguinte sistema de equações:

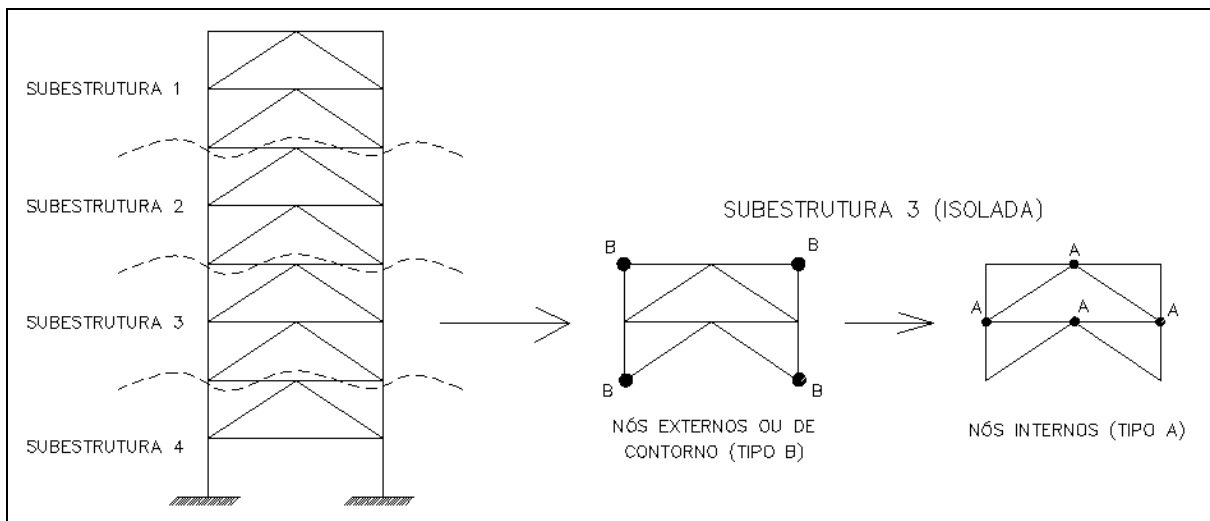


Figura 4.2: exemplo de subestruturação

$$K_{(3)} \cdot U_{(3)} = P_{(3)} \quad (4.26)$$

Esta equação pode ser ordenada de forma a separar graus de liberdade internos e externos (ou de contorno), assumindo a seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ab}^T & K_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_a \\ U_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_a \\ P_b \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

onde os subíndices  $a$  e  $b$  se referem, respectivamente, aos graus de liberdade internos e externos.  $K_{aa}$ ,  $K_{ab}$  e  $K_{bb}$  representam partições da matriz de rigidez da subestrutura, obtidas a partir dos elementos que a constituem.  $U_a$  e  $P_a$  são, respectivamente, vetores de deslocamentos e de cargas dos nós internos, tendo  $U_b$  e  $P_b$  o mesmo significado para os nós externos ou de contorno. É importante salientar que  $P_b$  não inclui as cargas nodais globais aplicadas nestes nós, que são inseridas diretamente no sistema global. O sistema representado pela equação (4.27) pode ser desdobrado em:

$$K_{aa} \cdot U_a + K_{ab} \cdot U_b = P_a \quad (4.28)$$

$$K_{ab}^T \cdot U_a + K_{bb} \cdot U_b = P_b \quad (4.29)$$

Isolando o termo  $U_a$  da expressão (4.28), obtém-se:

$$U_a = [K_{aa}^{-1} \cdot P_a] - [K_{aa}^{-1} \cdot K_{ab}] \cdot U_b \quad (4.30)$$

A equação (4.30) mostra que os deslocamentos dos nós internos só podem ser obtidos se estiverem previamente determinados os deslocamentos dos nós externos da subestrutura. Por outro lado, não há a necessidade da inversão da matriz  $K_{aa}$ , pois os produtos  $X = K_{aa}^{-1} \cdot P_a$  e  $Y = K_{aa}^{-1} \cdot K_{ab}$  podem ser obtidos diretamente através da solução dos sistemas de equações  $K_{aa} \cdot X = P_a$  e  $K_{aa} \cdot Y = K_{ab}$  (neste caso, um sistema de equações com vários vetores de termos independentes, ou seja, as colunas de  $K_{ab}$ ).

Substituindo-se a expressão (4.30) em (4.29) e reordenando os termos, obtém-se:

$$[K_{bb} - K_{ab}^T \cdot (K_{aa}^{-1} \cdot K_{ab})] \cdot U_b = P_b - K_{ab}^T \cdot [K_{aa}^{-1} \cdot P_a] \quad (4.31)$$

A equação (4.31) tem como incógnitas os deslocamentos somente dos nós externos e pode, assim, ser posta na forma:

$$\bar{K}_{bb} \cdot U_b = \bar{P}_b \quad (4.32)$$

onde

$$\bar{K}_{bb} = K_{bb} - K_{ab}^T \cdot [K_{aa}^{-1} \cdot K_{ab}] \quad (4.33)$$

$$\bar{P}_b = P_b - K_{ab}^T \cdot [K_{aa}^{-1} \cdot P_a] \quad (4.34)$$

Portanto,  $\bar{K}_{bb}$  e  $\bar{P}_b$ , dados pelas expressões (4.33) e (4.34) são, respectivamente, a matriz de rigidez e o vetor de cargas nodais equivalentes, condensados nos graus de liberdade externos da subestrutura. Quando esta subestrutura contribuir para a montagem da estrutura, serão estas expressões que irão desempenhar o papel dos termos  $K_i$  e  $P_i$  presentes nas equações (4.24) e (4.25), respectivamente.

Neste trabalho, a técnica da subestruturação foi empregada para gerar superelementos do tipo painel, a partir de elementos individuais de casca poliédrica, conforme está apresentado no item (5.2.4).

#### 4.4 ANÁLISE NÃO LINEAR

Nos edifícios altos a atuação simultânea das ações verticais e horizontais provoca, inevitavelmente, deslocamentos laterais dos nós da estrutura. Esse efeito se denomina não linearidade geométrica e pressupõe, a princípio, um equilíbrio na posição deslocada, o que implica no aparecimento de esforços solicitantes adicionais (ou de segunda ordem) nos elementos constituintes da estrutura.

Além disso, a curva tensão-deformação do concreto não é linear, o que faz o módulo de elasticidade ( $E_c$ ) não permanecer constante. Aliado a isso, os valores dos momentos de inércia ( $I_i$ ) – da seção homogeneizada de concreto – das seções transversais das barras variam com a intensidade das solicitações, em virtude do aparecimento de fissuras nos elementos estruturais. Vê-se, em suma, que os módulos de rigidez representados pelo produto

$E_c \cdot I_i$  não são constantes. Esse comportamento caracteriza a não linearidade física do material (GIONGO, 2007).

A seguir, apresentam-se duas formulações que permitem a consideração da não linearidade geométrica e uma referente à não linearidade física no estudo de estruturas de concreto armado.

#### 4.4.1 Não linearidade geométrica do elemento de barra de pórtico espacial pela formulação de Argyris et al. (1979)

Para o estudo, em teoria de segunda ordem, de estruturas elásticas de barras de pórticos espaciais com seção transversal sólida, sem empenamento, Argyris et al. (1979) propõem o uso da matriz de rigidez convencional, apresentada no item (3.3.1), somada à matriz de rigidez geométrica indicada abaixo:

$$\left[ K_{pl}^{geo} \right] = \begin{bmatrix} \left[ K_{pl}^{geo} \right]_1 & \left[ K_{pl}^{geo} \right]_2 \\ simetria & \left[ K_{pl}^{geo} \right]_3 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

na qual as submatrizes são dadas por:

$$\left[ K_{pl}^{geo} \right]_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{L^2} \cdot P_{N3} & \frac{2}{L^2} \cdot P_{N5} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{5L} \cdot P_{N1} & 0 & -\frac{1}{L} \cdot (P_{N4} + P_{N5}) & \frac{1}{L} \cdot P_{N6} & \frac{1}{10} \cdot P_{N1} & \\ & \frac{6}{5L} \cdot P_{N1} & \frac{1}{L} \cdot (P_{N2} + P_{N3}) & -\frac{1}{10} \cdot P_{N1} & \frac{1}{L} \cdot P_{N6} & \\ & & \frac{I_{pp}}{A \cdot L} \cdot P_{N1} & -\frac{1}{2} \cdot P_{N2} - \frac{1}{6} \cdot P_{N3} & -\frac{1}{2} \cdot P_{N4} - \frac{1}{6} \cdot P_{N5} & \\ & & & \frac{2L}{15} \cdot P_{N1} & 0 & \\ & & & & & \frac{2L}{15} \cdot P_{N1} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\left[ K_{pl}^{geo} \right]_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{L^2} \cdot P_{N3} & -\frac{2}{L^2} \cdot P_{N5} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{L^2} \cdot P_{N3} & -\frac{6}{5L} \cdot P_{N1} & 0 & \frac{1}{L} \cdot (P_{N4} - P_{N5}) & -\frac{1}{L} \cdot P_{N6} & \frac{1}{10} \cdot P_{N1} \\ -\frac{2}{L^2} \cdot P_{N5} & 0 & -\frac{6}{5L} \cdot P_{N1} & -\frac{1}{L} \cdot (P_{N2} - P_{N3}) & -\frac{1}{10} \cdot P_{N1} & -\frac{1}{L} \cdot P_{N6} \\ 0 & \frac{1}{L} \cdot (P_{N4} + P_{N5}) & -\frac{1}{L} \cdot (P_{N2} + P_{N3}) & -\frac{I_{pp}}{A \cdot L} \cdot P_{N1} & -\frac{1}{3} \cdot P_{N3} & -\frac{1}{3} \cdot P_{N5} \\ 0 & -\frac{1}{L} \cdot P_{N6} & \frac{1}{10} \cdot P_{N1} & -\frac{1}{3} \cdot P_{N3} & -\frac{L}{30} \cdot P_{N1} & \frac{1}{2} \cdot P_{N6} \\ 0 & -\frac{1}{10} \cdot P_{N1} & -\frac{1}{L} \cdot P_{N6} & -\frac{1}{3} \cdot P_{N5} & -\frac{1}{2} \cdot P_{N6} & -\frac{L}{30} \cdot P_{N1} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\left[ K_{pl}^{geo} \right]_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{L^2} \cdot P_{N3} & \frac{2}{L^2} \cdot P_{N5} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{5L} \cdot P_{N1} & 0 & -\frac{1}{L} \cdot (P_{N4} - P_{N5}) & -\frac{1}{L} \cdot P_{N6} & -\frac{1}{10} \cdot P_{N1} & -\frac{1}{10} \cdot P_{N1} \\ \frac{6}{5L} \cdot P_{N1} & \frac{1}{L} \cdot (P_{N2} - P_{N3}) & \frac{I_{pp}}{A \cdot L} \cdot P_{N1} & \frac{1}{10} \cdot P_{N1} & \frac{1}{L} \cdot P_{N6} & \frac{1}{L} \cdot P_{N6} \\ & & \frac{1}{2} \cdot P_{N2} - \frac{1}{6} \cdot P_{N3} & \frac{1}{2} \cdot P_{N2} - \frac{1}{6} \cdot P_{N3} & \frac{1}{2} \cdot P_{N4} - \frac{1}{6} \cdot P_{N5} & \frac{1}{2} \cdot P_{N4} - \frac{1}{6} \cdot P_{N5} \\ & & \frac{2L}{15} \cdot P_{N1} & \frac{2L}{15} \cdot P_{N1} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{2L}{15} \cdot P_{N1} & \frac{2L}{15} \cdot P_{N1} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

sendo:

$$I_{pp} = I_{yp} + I_{zp} \quad (4.39)$$

$P_{Ni}$  representa as forças nos extremos (subíndices 1 e 2) das barras, onde:

$$P_{N1} = \frac{(N_{x2} - N_{x1})}{2} \quad (4.40)$$



$$P_{N2} = \frac{(M_{z1} - M_{z2})}{2} \quad (4.41)$$

$$P_{N3} = \frac{(M_{z1} + M_{z2})}{2} \quad (4.42)$$

$$P_{N4} = \frac{(M_{y2} - M_{y1})}{2} \quad (4.43)$$

$$P_{N5} = \frac{(-M_{y2} - M_{y1})}{2} \quad (4.44)$$

$$P_{N6} = \frac{(M_{x2} - M_{x1})}{2} \quad (4.45)$$

sendo  $I_{zp}$  o momento de inércia em relação ao eixo  $z_l$  ( $z$  local);  $I_{yp}$  o momento de inércia em relação ao eixo  $y_l$ ;  $A$  a área da seção transversal da barra;  $L$  o comprimento da barra;  $M_x$  o momento torçor solicitante nos extremos (subíndices 1 e 2) da barra em torno do eixo  $x_l$ ,  $M_y$  o momento fletor solicitante em torno do eixo  $y_l$  e  $M_z$  o momento fletor solicitante em torno do eixo  $z_l$ ; e  $N_x$  o esforço normal nos extremos (subíndices 1 e 2) da barra.

#### 4.4.2 Não linearidade geométrica a partir de um Método Simplificado

Os efeitos de segunda ordem geométricos podem ser considerados em edifícios altos através de um Método Simplificado, onde a configuração de referência corresponde à última configuração de equilíbrio determinada. Simplificadamente, este processo pode ser desenvolvido ao se obedecer as seguintes etapas:

- a) primeiramente, o carregamento total na estrutura é dividido em um determinado número de incrementos;

- b) a partir dos carregamentos incrementais obtidos, deve ser realizada uma primeira análise na estrutura indeformada (figura 4.3-a), obtendo-se os deslocamentos nodais da estrutura em teoria de primeira ordem;
- c) estes deslocamentos devem, então, ser utilizados para calcular as novas coordenadas dos nós da estrutura;
- d) no passo seguinte, o cálculo dos esforços e dos deslocamentos da estrutura será realizado, considerando-se a sua posição deformada (figura 4.3-b) através da aplicação de uma novo incremento de carga, o que acarreta em esforços adicionais.

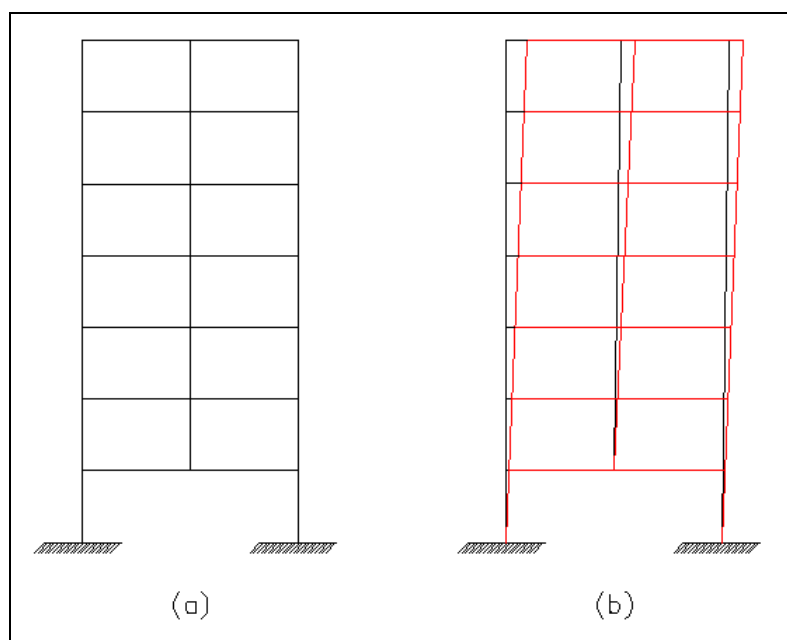


Figura 4.3: estrutura: (a) indeformada; (b) deformada

#### 4.4.3 Considerações a respeito da não linearidade geométrica

Com o intuito de validar as formulações implementadas para a análise não linear geométrica, dois testes foram realizados.

Ressalta-se que, no processo de análise não linear geométrica pelo Método Simplificado, utiliza-se um algoritmo incremental puro. Adotaram-se, arbitrariamente, para os testes e os demais exemplos desta dissertação, com incrementos de carga para a aplicação do carregamento.

O primeiro teste consistiu em uma viga-coluna submetida à carga uniformemente distribuída (figura 4.4). A resposta desta viga-coluna, engastada numa extremidade e livre na outra, pode ser obtida através da solução analítica de Holden (1972).

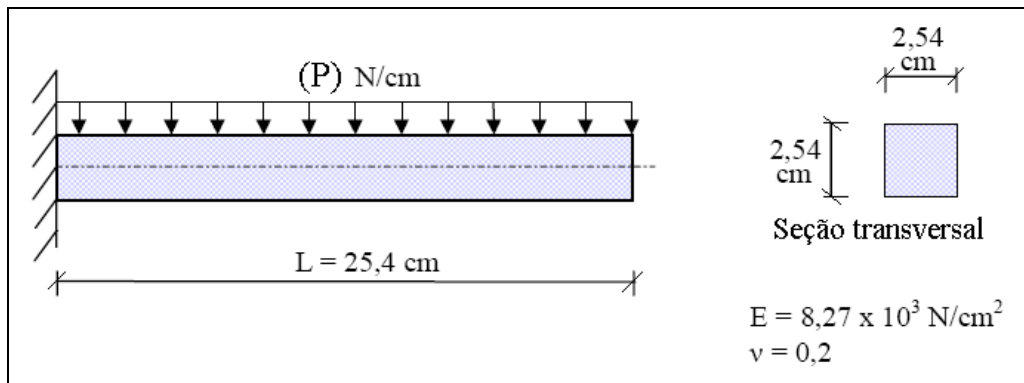


Figura 4.4: viga-coluna de Holden (1972)

A viga-coluna é constituída por um material elástico linear. Foi discretizada em dez elementos finitos de iguais dimensões ao longo de seu comprimento, e sua resposta, mostrada na figura 4.5, juntamente com a solução analítica de Holden (1972), foi obtida através da aplicação de incrementos de carga. Na mesma figura, encontra-se também a solução obtida pelo modelo, no caso de linearidade geométrica.

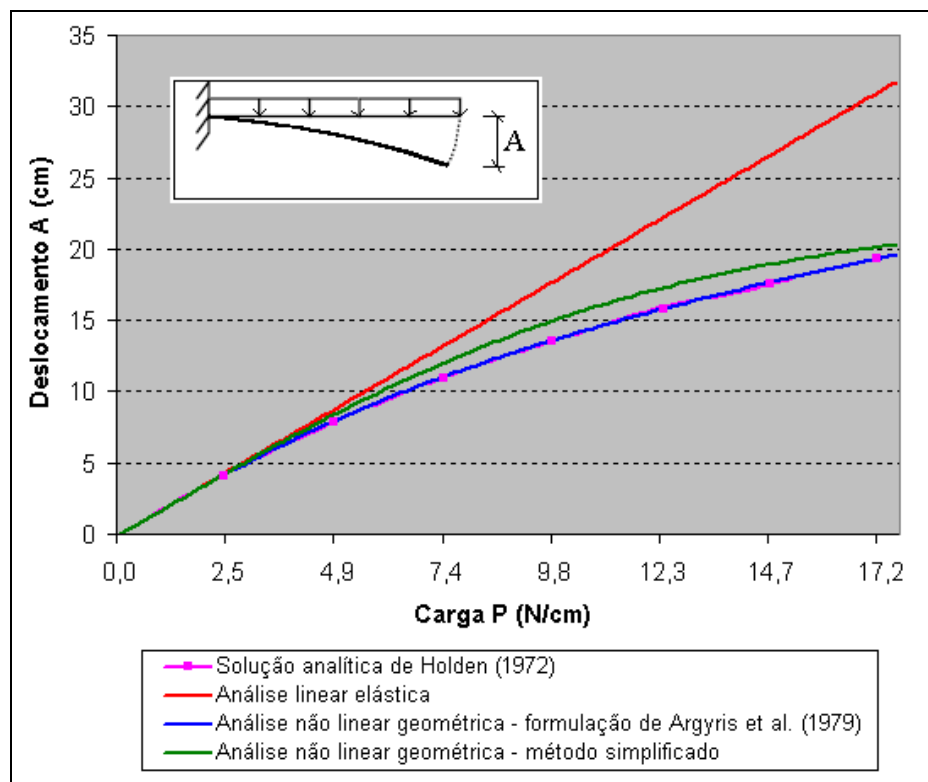


Figura 4.5: variação do deslocamento  $A$  devido à carga  $P$

Observa-se que as respostas obtidas pelas formulações implementadas foram muito próximas à solução analítica de Holden, diferindo bastante da resposta obtida pela análise linear elástica.

O segundo teste tratou de uma barra esbelta submetida à flexo-compressão, conforme a figura 4.6. Esta barra é constituída por um material elástico linear. Foi discretizada em vinte elementos finitos de iguais dimensões ao longo de seu comprimento, e sua resposta foi obtida através da aplicação de incrementos de carga.

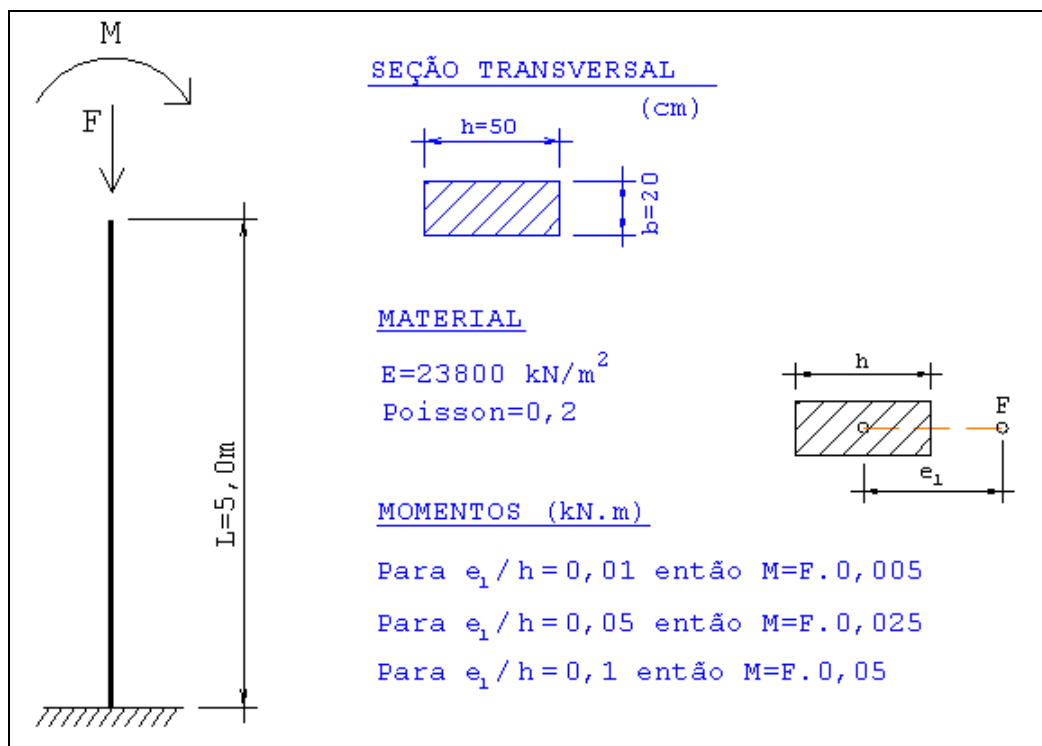


Figura 4.6: barra esbelta submetida à flexo-compressão

A forma analítica da solução pode ser observada através da figura 4.7, presente em Fusco (1981).

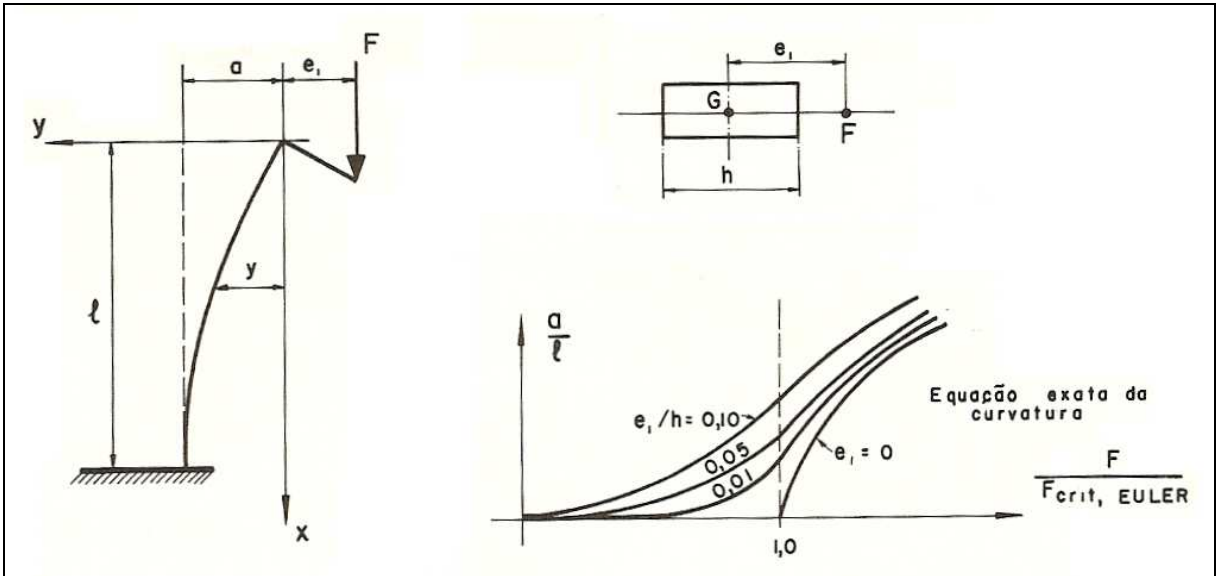


Figura 4.7: flexão composta de barras esbeltas no regime elástico (adaptada de FUSCO, 1981)

A resposta obtida para este teste pelas duas formulações de não linearidade geométrica implementadas se encontra na figura 4.8.

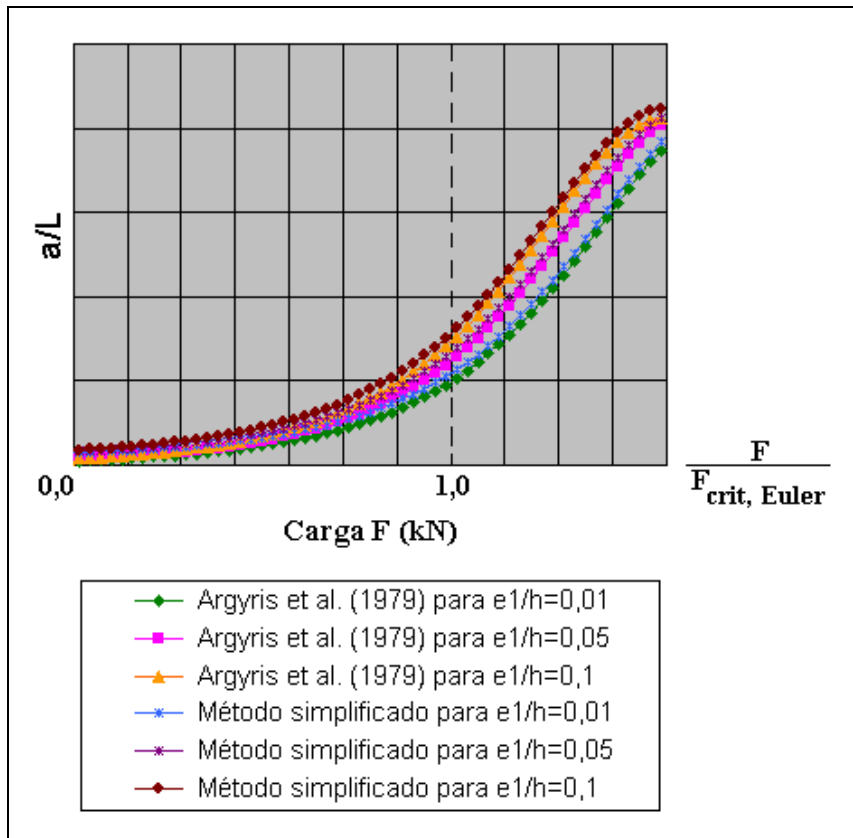


Figura 4.8: resposta obtida para a barra esbelta submetida à flexo-compressão

Nota-se, portanto, que a forma da solução obtida se assemelha à solução analítica dada pela figura 4.7.

Observa-se, pelos testes realizados, que nas situações com grandes deslocamentos e pequenas rotações, as respostas obtidas pelas duas formulações de não linearidade geométrica implementadas foram muito próximas. Assim, conclui-se que o Método Simplificado pode ser utilizado na avaliação dos efeitos globais de segunda ordem. Este método possibilita a análise de qualquer elemento estrutural, não apenas de barras de pórtico espacial; e apresenta uma fácil implementação computacional.

#### **4.4.4 Não linearidade física**

A não linearidade física se caracteriza pela ausência de proporcionalidade entre a tensão atuante e a deformação sofrida pelo material. Basicamente, este fenômeno ocorre quando a tensão na borda mais tracionada da seção transversal do elemento ultrapassa a tensão de tração no concreto, alterando o valor do produto  $E_c \cdot I_i$ , ou seja, da rigidez da seção. É importante observar que o módulo de rigidez  $E_c \cdot I_i$  deve refletir a ocorrência das fissuras ao longo do elemento, os efeitos da fluência, da retração e o comportamento inelástico do concreto e das armaduras.

A NBR6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007) prescreve que, para a análise dos esforços globais de segunda ordem, em estruturas reticuladas com no mínimo quatro andares, pode ser considerada a não linearidade física de maneira aproximada, tomando-se como rigidez dos elementos estruturais os valores presentes na tabela 4.1. Trata-se, portanto, da utilização de coeficientes redutores da rigidez dos elementos de concreto armado.

Tabela 4.1: rigidez dos elementos estruturais para a consideração da não linearidade física

Elemento estrutural	Rigidez
Lajes	$(EI)_{sec} = 0,3 \cdot E_{ci} I_c$
Vigas (armadura assimétrica)	$(EI)_{sec} = 0,4 \cdot E_{ci} I_c$
Vigas (armadura simétrica)	$(EI)_{sec} = 0,5 \cdot E_{ci} I_c$
Pilares	$(EI)_{sec} = 0,8 \cdot E_{ci} I_c$

(fonte: NBR6118/2007)

sendo  $I_c$  o momento de inércia da seção bruta de concreto, incluindo, quando for o caso, as mesas colaborantes; e  $E_{ci}$  o módulo de elasticidade tangente inicial do concreto.

Destaca-se que, neste trabalho, a rigidez das vigas para efeito da não linearidade física é obtida considerando armadura simétrica.

Quando a estrutura de contraventamento for composta exclusivamente por vigas e pilares, ou seja, sem a presença de núcleos (ou paredes estruturais) e a consideração das lajes, e o coeficiente  $\gamma_z$  for menor que 1,3, permite-se calcular a rigidez das vigas e pilares pela equação:

$$(EI)_{sec} = 0,7 \cdot E_{ci} I_c \quad (4.46)$$

Entretanto, como a formulação implementada no presente trabalho considera a contribuição da rigidez das lajes na estabilidade global da estrutura, a equação (4.46) não é utilizada.

#### 4.5 PARÂMETROS DE INSTABILIDADE GLOBAL

Sob a ação de cargas verticais e horizontais, os nós da estrutura de um edifício se deslocam lateralmente. Esses deslocamentos podem, em certos casos, causar o aparecimento de importantes efeitos de segunda ordem.

Segundo a NBR6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007), as estruturas podem ser classificadas como de nós fixos ou de nós móveis. Quando os deslocamentos dos nós da estrutura são pequenos e, por consequência, os esforços de segunda ordem são desprezíveis (inferiores a 10% dos esforços de primeira ordem), estas estruturas são ditas de nós fixos. E, quando os esforços de segunda ordem forem superiores a 10% dos de primeira ordem, estas estruturas são ditas de nós móveis. Assim, surgem os dois mais conhecidos parâmetros de instabilidade, o parâmetro  $\alpha$  e o coeficiente  $\gamma_z$ .

#### 4.5.1 Parâmetro de instabilidade $\alpha$

Este parâmetro surgiu com os estudos de Beck e König (1966). Ele indica se há necessidade de considerar os esforços adicionais na estrutura devido ao deslocamento lateral dos nós, mas não quantifica os esforços de segunda ordem, havendo, portanto, a necessidade da aplicação de outro método que forneça os esforços na estrutura devido à não linearidade geométrica.

Conforme a NBR6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007), uma estrutura reticulada simétrica pode ser considerada de nós fixos se seu parâmetro de instabilidade  $\alpha$  for menor que o valor  $\alpha_1$ , conforme a expressão:

$$\alpha = H_{tot} \cdot \sqrt{\frac{N_k}{E_{cs} I_c}} \quad (4.47)$$

onde:

$$\alpha_1 = 0,2 + 0,1 \cdot n \quad se: n \leq 3 \quad (4.48)$$

$$\alpha_1 = 0,6 \quad se: n \geq 4 \quad (4.49)$$

sendo  $n$  o número de andares acima da fundação ou de um nível pouco deslocável do subsolo;  $H_{tot}$  a altura total da estrutura, medida a partir da fundação ou de um nível pouco deslocável do subsolo;  $N_k$  o somatório de todas as cargas verticais atuantes na estrutura (a partir do nível considerado para o cálculo de  $H_{tot}$ ), com seu valor característico; e  $E_{cs} I_c$  o



somatório dos valores de rigidez de todos os pilares na direção considerada. No caso de estruturas de pórticos, de treliças ou mistas, ou com pilares de rigidez variável ao longo da altura, pode ser considerado o valor da expressão  $E_{cs}I_c$  de um pilar equivalente de seção constante. O valor de  $I_c$  deve ser calculado considerando as seções brutas dos pilares.

A rigidez do pilar equivalente deve ser determinada da seguinte forma:

- calcular o deslocamento do topo da estrutura de contraventamento, sob a ação do carregamento horizontal;
- calcular a rigidez de um pilar equivalente de seção constante, engastado na base e livre no topo, de mesma altura  $H_{tot}$ , tal que, sob a ação do mesmo carregamento, sofra o mesmo deslocamento no topo (figura 4.9).

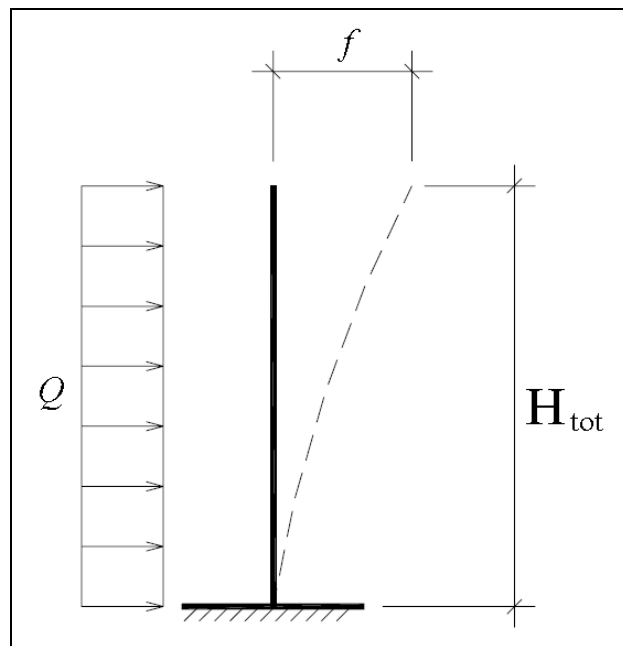


Figura 4.9: cálculo da rigidez do pilar equivalente

Assim, através da expressão da linha elástica correspondente a um pilar engastado na base com uma ação lateral uniformemente distribuída, pode-se avaliar a rigidez equivalente ( $E_{cs}I_c$ ) através da seguinte expressão:

$$E_{cs}I_c = Q \cdot \frac{(H_{tot})^4}{8 \cdot f} \quad (4.50)$$

na qual  $Q$  representa a ação lateral uniformemente distribuída e  $f$  o deslocamento do topo do edifício quando submetido à ação lateral de valor igual a  $Q$ .

O valor limite  $\alpha_1 = 0,6$  prescrito para  $n \geq 4$  é, em geral, aplicável a estruturas usuais de edifícios. Pode ser adotado para associações de pilares-parede e para pórticos associados a pilares-parede. Pode ser aumentado para  $\alpha_1 = 0,7$  no caso de contraventamento constituído exclusivamente por pilares-parede e deve ser reduzido para  $\alpha_1 = 0,5$  quando só houver pórticos.

#### 4.5.2 Coeficiente $\gamma_z$

O coeficiente  $\gamma_z$  teve origem nos estudos de Franco e Vasconcelos (1991), com o objetivo de levar em conta os efeitos de segunda ordem de forma simplificada e estimar os esforços oriundos da não linearidade geométrica, sem a necessidade de efetuar uma análise não linear da estrutura. Esse coeficiente representa um amplificador dos esforços de primeira ordem.

A grande vantagem deste método é a necessidade de uma única análise linear de primeira ordem da estrutura. Realizada esta análise, o coeficiente  $\gamma_z$  pode, segundo a NBR6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007), ser determinado para cada caso de carregamento através da seguinte expressão:

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \left( \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,tot,d}} \right)} \quad (4.51)$$

Na expressão acima,  $M_{1,tot,d}$  é o momento de tombamento, ou seja, a soma dos momentos de todas as forças horizontais da combinação considerada, com seus valores de cálculo, em relação à base da estrutura. Assim, tem-se que:

$$M_{1,tot,d} = \sum H_i \cdot y_i \quad (4.52)$$

sendo  $H_i$  a força horizontal no pavimento  $i$  devido ao vento e  $y_i$  a altura do pavimento  $i$  em relação à base da edificação (figura 4.10).

Por sua vez,  $\Delta M_{tot,d}$  é a soma dos produtos de todas as forças verticais atuantes na estrutura, na combinação considerada, com seus valores de cálculo, pelos deslocamentos horizontais de seus respectivos pontos de aplicação, obtidos da análise de primeira ordem. Assim, tem-se que:

$$\Delta M_{1,tot,d} = \sum P_i \cdot a_i \quad (4.53)$$

na qual  $P_i$  representa a força vertical no pavimento  $i$  e  $a_i$  é o deslocamento horizontal do pavimento  $i$  em relação à base.

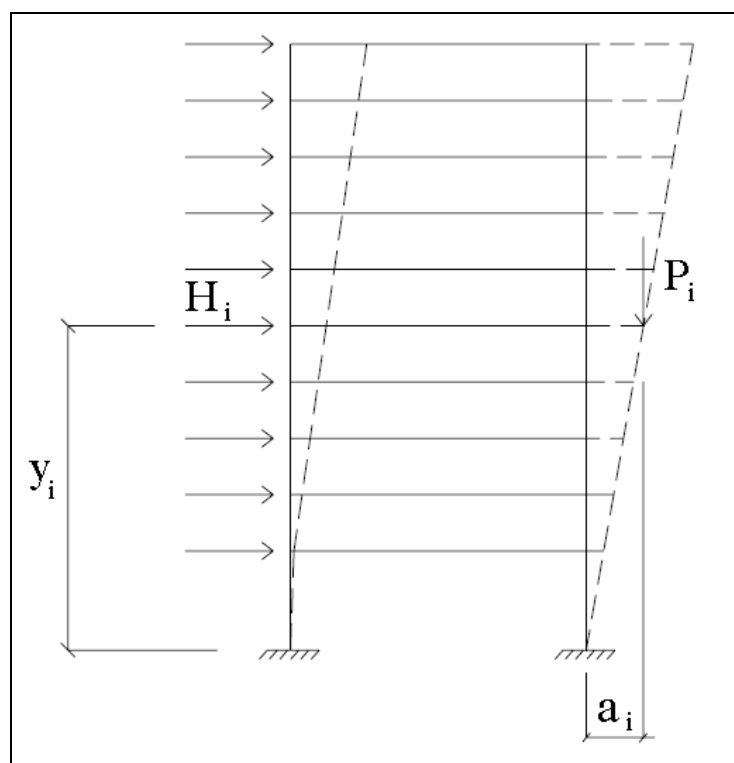


Figura 4.10: cálculo do coeficiente  $\gamma_z$

O item 15.7.2 da NBR6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007) permite a determinação dos esforços globais finais (primeira mais segunda ordem) a

partir da majoração adicional dos esforços horizontais da combinação de carregamento considerada por  $0,95 \cdot \gamma_z$ . Esse processo é válido para  $\gamma_z \leq 1,3$ .

Considera-se que a estrutura é de nós fixos se for verificada a condição  $\gamma_z \leq 1,1$ , independentemente do seu tipo de contraventamento, dispensando-se, dessa forma, a consideração dos efeitos de segunda ordem.

A principal vantagem do coeficiente  $\gamma_z$  sobre o parâmetro  $\alpha$  consiste no fato de que, enquanto este apenas indica a necessidade de se considerar, ou não, uma análise de segunda ordem para a estrutura, o primeiro fornece uma estimativa dos acréscimos dos esforços globais de segunda ordem.

## 5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

### 5.1 INTRODUÇÃO

O programa implementado permite três diferentes tipos de análise:

- a) linear elástica;
- b) não linear geométrica (NLG):
  - pela formulação de Argyris et al. (1979), quando o sistema de contraventamento for composto exclusivamente por pórticos;
  - pelo Método Simplificado, para qualquer tipo de contraventamento;
- c) não linear geométrica e física (NLGF).

Ressalta-se que a consideração da não linearidade física do material corresponde simplesmente à redução da rigidez integral da seção pelos fatores recomendados pela NBR6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007), conforme item (4.4.4) deste trabalho.

O fluxograma destas análises (figuras 5.1 a 5.3) possibilita observar os processos realizados e a evolução do programa desde a entrada de dados até a saída de resultados.

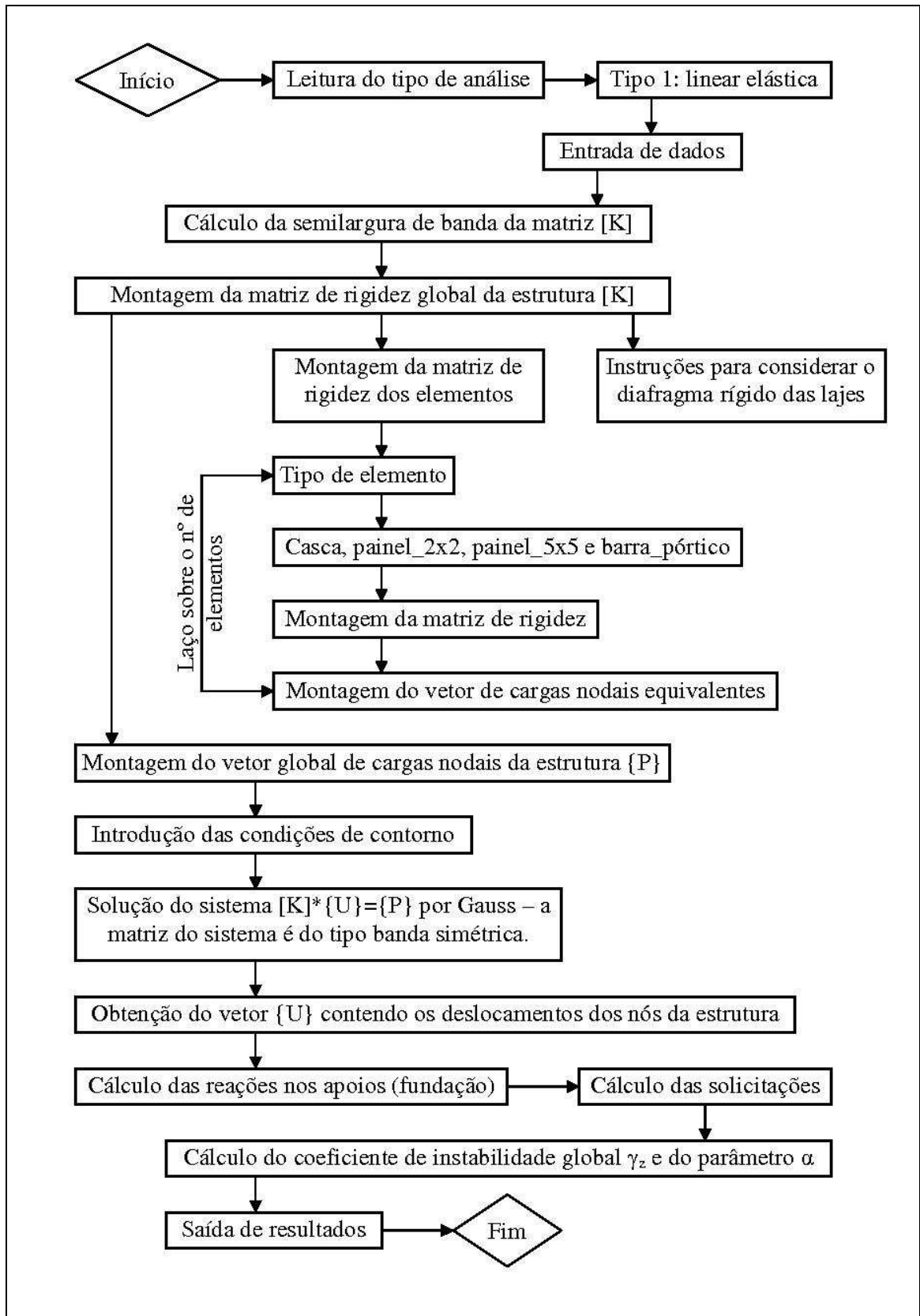


Figura 5.1: fluxograma do programa para a análise linear elástica

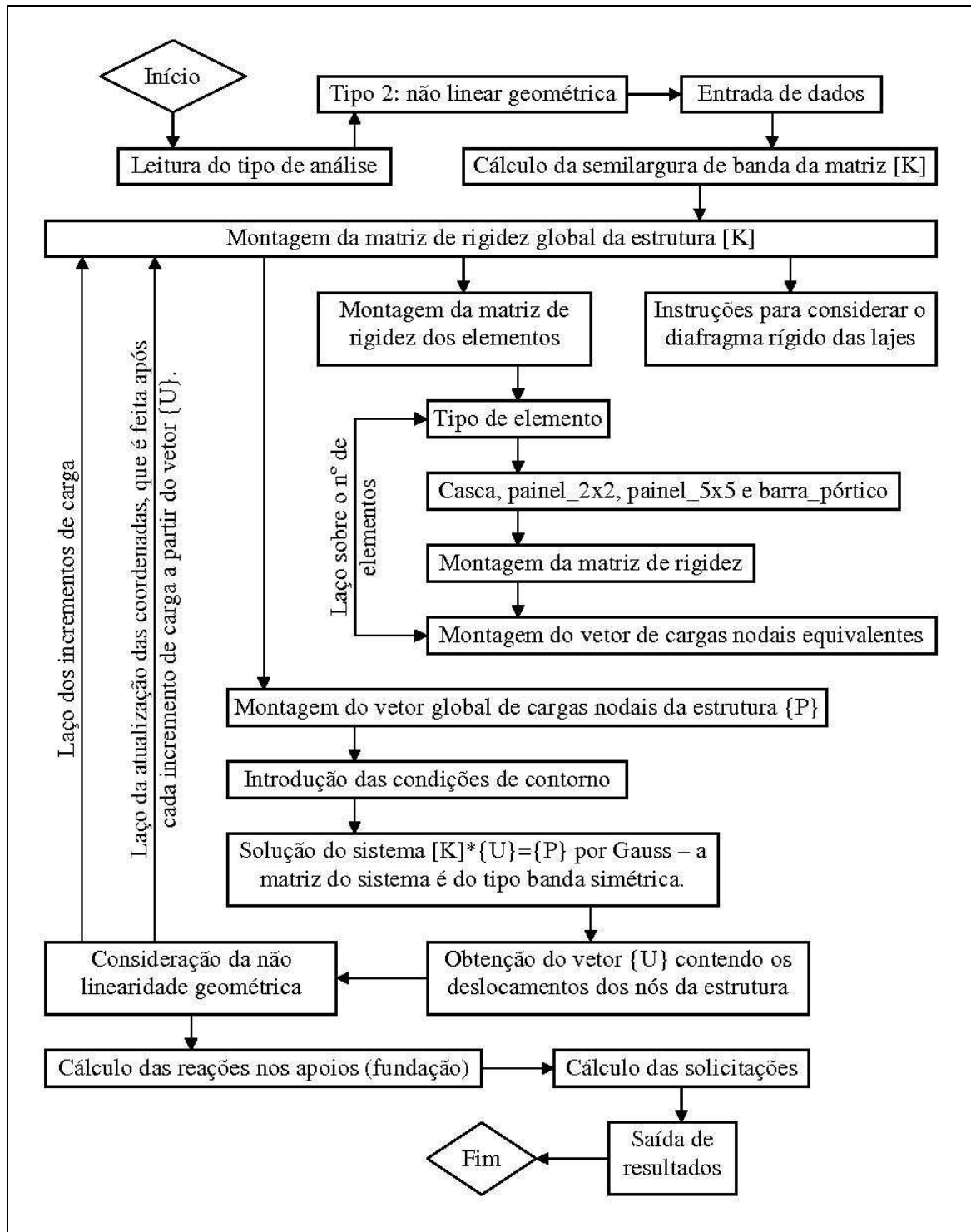


Figura 5.2: fluxograma do programa para a análise não linear geométrica

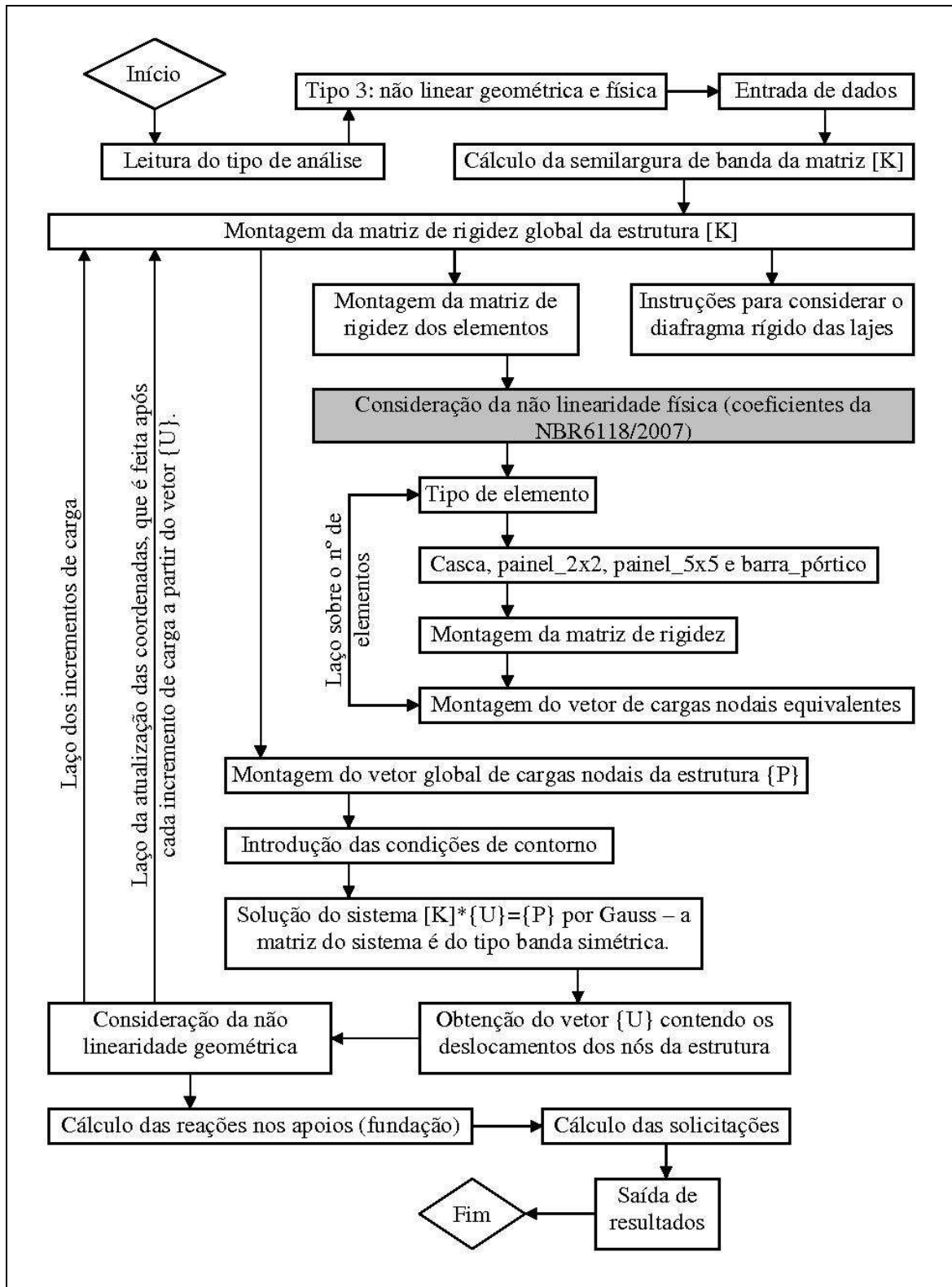


Figura 5.3: fluxograma do programa para a análise não linear geométrica e física



## 5.2 DIVISÕES INTERNAS DO PROGRAMA

Para a implementação do modelo estrutural adotado no presente trabalho, criou-se uma rotina computacional em linguagem FORTRAN 90 (Adams et al., 1992) composta por sete diferentes módulos: principal, geral, casca, painel, barra\_pórtico, instabilidade e dados. A seguir, é feita uma descrição das tarefas realizadas em cada um destes módulos.

### 5.2.1 Módulo Principal.f90

O módulo Principal.f90 é o responsável pela organização geral do programa. As tarefas realizadas são:

- a) leitura dos dados do problema a ser analisado por meio de um arquivo de texto (extensão “.txt”) feito através de linguagem orientada;
- b) alocação dinâmica do tamanho dos vetores e das matrizes utilizadas;
- c) chamada das diversas sub-rotinas do módulo geral;
- d) definir quais as sub-rotinas a serem chamadas, dependendo do tipo de análise escolhido;
- e) realizar, caso o tipo de análise seja não linear, o laço dos incrementos de carga. Basicamente, este processo consiste na divisão da carga total da estrutura em parcelas que são aplicadas sequencialmente;
- f) de forma análoga ao item anterior, caso o tipo de análise seja não linear, o módulo principal também é responsável por realizar o laço da atualização de coordenadas. Neste procedimento, após cada incremento de carga, uma nova configuração da estrutura é definida a partir dos deslocamentos nodais obtidos;
- g) escrever os resultados na tela e/ou nos arquivos de saída de dados.

### 5.2.2 Módulo Geral.f90

Este módulo é composto por diversas sub-rotinas que compõem a estrutura global a partir dos elementos finitos (casca, painel\_2x2, painel\_5x5 ou barra de pórtico) presentes no modelo a ser analisado. O módulo Geral.f90 realiza as seguintes tarefas:

- a) cálculo da semilargura de banda da estrutura, que é utilizada para o armazenamento da matriz de rigidez global. Basicamente, consiste em determinar a diferença absoluta entre todos os números dos nós dentro de um tipo de elemento. No caso de um superelemento, consideram-se apenas os nós de contorno;
- b) montagem da matriz de rigidez global da estrutura  $[K]$ , através da chamada das sub-rotinas referentes a cada elemento (casca, painel\_2x2, painel\_5x5 ou barra de pórtico) que contribui com sua rigidez individual;
- c) realizar, caso a análise contemple a não linearidade física dos materiais, a consideração dos coeficientes redutores da NBR 6118:2007 na determinação da matriz de rigidez individual dos elementos;
- d) realizar o procedimento para a consideração do diafragma rígido das lajes, conforme o item (4.2);
- e) montar o vetor global de cargas nodais da estrutura  $\{P\}$ ;
- f) introduzir, na matriz de rigidez global, as condições de contorno devido aos deslocamentos prescritos e a vinculação da estrutura;
- g) resolver o sistema de equações  $[K] \cdot \{U\} = \{P\}$  da estrutura, determinando o vetor global de deslocamentos (translações e rotações),  $\{U\}$ ;
- h) calcular as reações nos vínculos da estrutura; e
- i) calcular as solicitações nos elementos da estrutura.

### 5.2.3 Módulo Casca.f90

O módulo Casca.f90 é encarregado de:

- a) montar a matriz de rigidez de cada elemento de casca ao nível local, a partir das parcelas referentes ao estado plano de tensões e da flexão e corte, conforme descrito nos itens (3.2.1) a (3.2.3);
- b) realizar a rotação da matriz de rigidez local para o nível global, seguindo as prescrições presentes no item (3.2.4); e
- c) calcular o vetor de forças nodais equivalentes de cada elemento de casca a partir das cargas distribuídas em sua área, segundo o item (3.2.5).

### 5.2.4 Módulo Painel.f90

Através da utilização dos recursos da subestruturação, este módulo contém os procedimentos para gerar os superelementos do tipo 'painel', que podem ser de dois tipos: painel\_2x2 (formado por 4 elementos individuais de casca) ou painel\_5x5 (formado por 25 elementos). Na figura 5.4, os nós 'a' e 'b' se referem, respectivamente, aos graus de liberdade internos e externos. As seguintes tarefas são realizadas pelo módulo Painel.f90:

- cálculo das coordenadas e conectividades dos nós internos do superelemento do tipo 'painel';
- montagem da matriz de rigidez do superelemento;
- resolução dos sistemas de equações necessários para a obtenção de  $\bar{K}_{bb}$  e  $\bar{P}_b$ , conforme as equações (4.33) e (4.34), respectivamente; e
- cálculo do vetor de forças nodais equivalentes de cada superelemento a partir das cargas distribuídas em sua área.

Destaca-se que este trabalho está focado na análise global da estrutura. Assim, os nós internos do superelemento não têm seus deslocamentos calculados. Entretanto, caso o objetivo seja conhecer a distribuição de tensões dentro do superelemento, tal cálculo seria necessário.

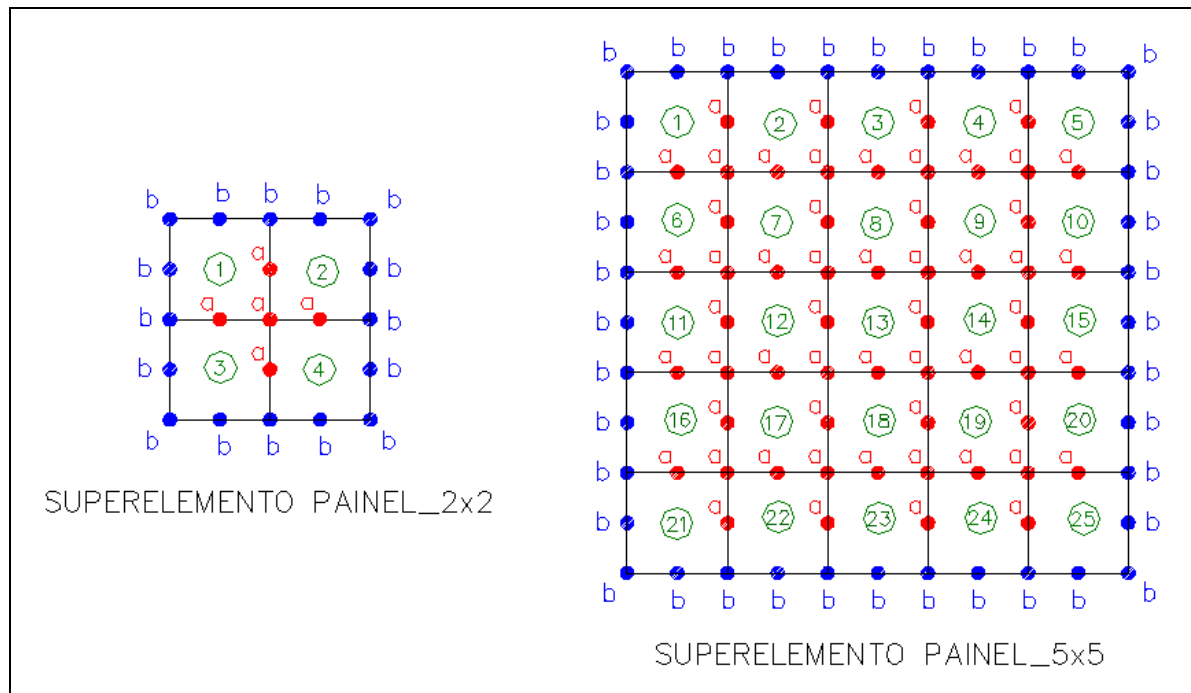


Figura 5.4: superelementos do tipo 'painel'

### 5.2.5 Módulo Barra\_Pórtico.f90

De forma análoga ao módulo Casca.f90, o presente módulo realiza as seguintes tarefas:

- a) montagem da matriz de rigidez de cada elemento de barra de pórtico espacial, conforme descrito no item (3.3.1);
- b) rotação da matriz de rigidez local para o nível global, seguindo as prescrições presentes no item (3.3.2); e
- c) cálculo do vetor de forças nodais equivalentes de cada elemento de barra que represente uma viga (item 3.3.3). Conforme mencionado anteriormente, não é prevista a aplicação de carregamentos externos ao longo do eixo longitudinal de pilares, apenas nos elementos de vigas.

### 5.2.6 Módulo Instabilidade.f90

Este módulo é responsável pelo cálculo do coeficiente de instabilidade  $\gamma_z$  e do parâmetro  $\alpha$ , que só tem sentido quando a análise da estrutura for linear elástica, sendo realizada neste caso.

Ressalta-se que, neste trabalho, o coeficiente  $\gamma_z$  será utilizado apenas como um índice para a estimativa da importância dos esforços de segunda ordem, não sendo utilizado nos exemplos como majorador de esforços.

### 5.2.7 Módulo Dados.f90

Este módulo possui as variáveis globais usadas no programa, usando o comando “save” para torná-las paramétricas e exportá-las para os demais módulos. Isso permite diminuir o número de variáveis internas às sub-rotinas, aumentando a eficiência de programação.

### 5.3 ENTRADA E SAÍDA DE DADOS

Em uma análise numérica, a visualização dos resultados é importante para a compreensão e interpretação do problema. Esforços e deslocamentos são itens que definem o comportamento de uma estrutura e que, sendo visualizados numa saída gráfica, tornam-se mais acessíveis. Sendo assim, optou-se por utilizar a ferramenta computacional de pré e pós-processamento GiD<sup>®</sup> (versão 7.2), que é disponibilizada gratuitamente pelos autores em sua versão educacional. Com o auxílio desta ferramenta (figura 5.5), é gerado um arquivo de entrada de dados do problema a ser analisado. Realizada a análise, os resultados são obtidos e, posteriormente, podem ser visualizados no mesmo programa.

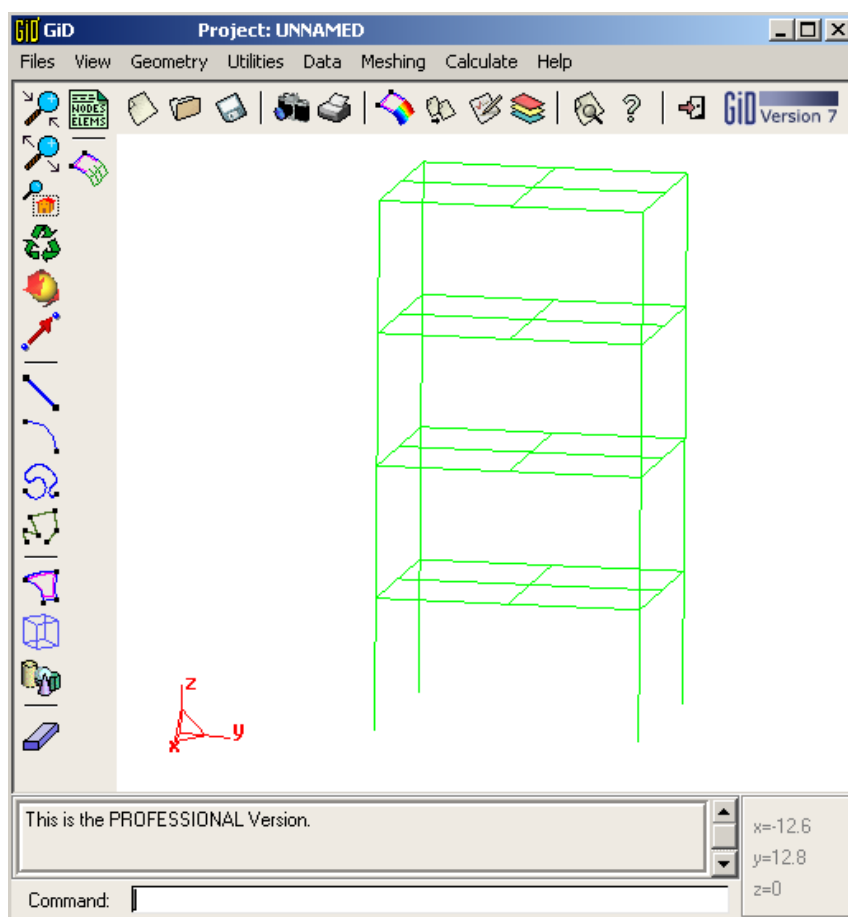


Figura 5.5: exemplo de visualização gráfica através do GiD<sup>®</sup> (versão 7.2)

O arquivo utilizado na entrada de dados possui o formato texto (arquivos com extensão “.txt”). Cada uma das linhas deste arquivo possui conjuntos de comandos, sendo lidas separadamente do início ao fim. Os comandos são formados por uma série de caracteres lidos

sequencialmente. Estas informações são identificadas computacionalmente, definindo-se uma ação a ser executada pelo programa. Por sua vez, o arquivo de saída de dados também possui o formato texto. Apresenta os seguintes resultados da análise: deslocamentos, esforços, solicitações. Algumas informações contidas neste arquivo são lidas pelo programa GiD® (versão 7.2) para visualização gráfica dos resultados. A figura 5.6 apresenta um exemplo de arquivos de entrada e saída de dados.

O sistema de unidades de saída está sempre de acordo com o sistema de unidades de entrada, dispensando, portanto, as transformações entre unidades.

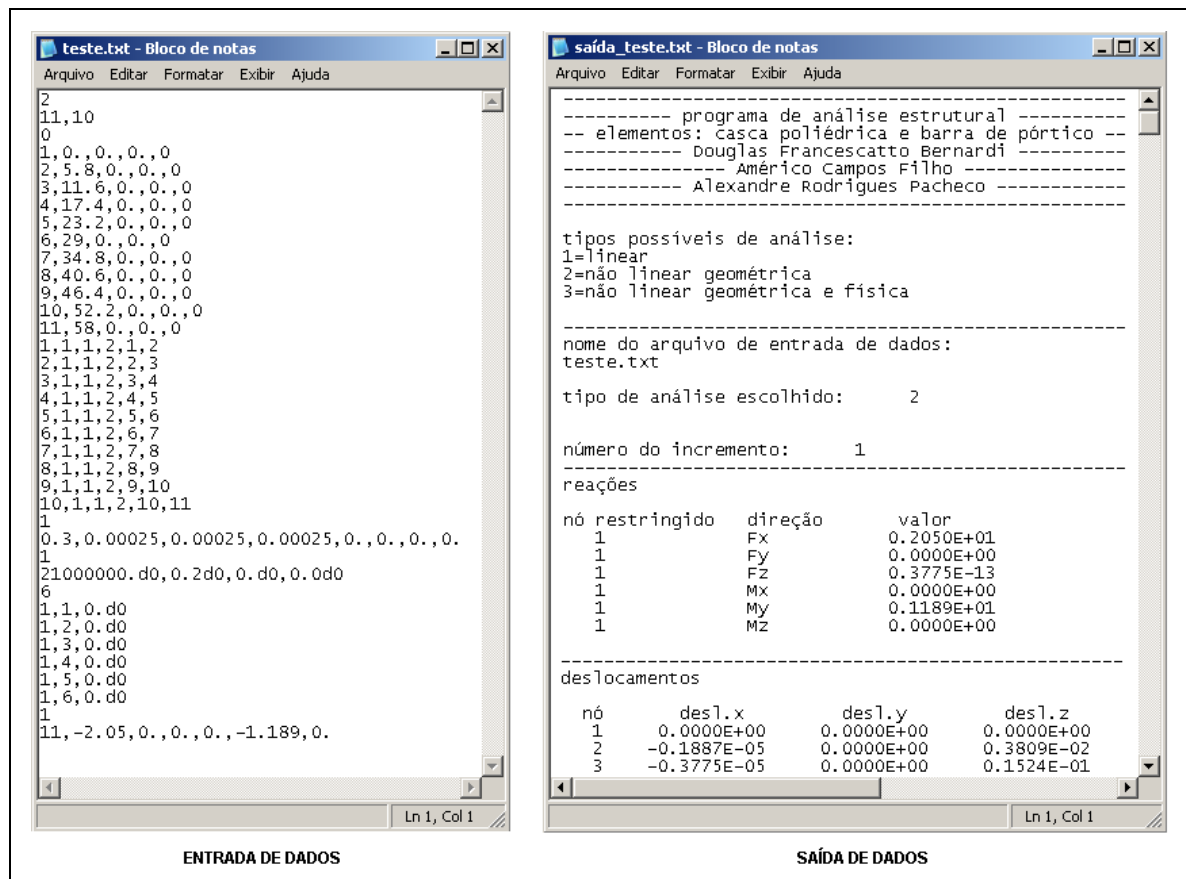


Figura 5.6: exemplo de arquivos de entrada e saída de dados

## 6 RESULTADOS OBTIDOS

### 6.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo estão apresentados alguns exemplos numéricos com o intuito de ilustrar a validade e a aplicabilidade dos procedimentos descritos nos capítulos anteriores. Inicialmente, apresenta-se um exemplo que demonstra as vantagens da utilização da hipótese de diafragma rígido dos pavimentos e da subestruturação em comparação a uma estrutura em que isso não acontece. Em seguida, duas diferentes estruturas analisadas por outros autores são estudadas e se comparam os deslocamentos e esforços obtidos. Por fim, faz-se um exemplo confrontando duas alternativas: um sistema de paredes estruturais isoladas e um sistema de paredes associadas (núcleos estruturais).

A apresentação integral dos resultados de cada exemplo seria interessante, porém, devido à grande quantidade de informações que se obtêm para cada situação quando se utiliza o Método dos Elementos Finitos, torna-se inviável a impressão de todos os valores. Assim, optou-se por apresentar alguns valores na forma de figuras e gráficos, o que permite uma melhor interpretação para os resultados obtidos.

### 6.2 EXEMPLO 1

Neste exemplo, estuda-se uma estrutura com todos os pavimentos iguais em planta, conforme a figura 6.1, tendo as seguintes características:

- a) constantes do material:
  - módulo de elasticidade longitudinal: 2800 kN/cm<sup>2</sup>;
  - coeficiente de Poisson: 0,2;
  - peso específico do concreto armado: 25 kN/m<sup>3</sup>;
- b) pé-direito dos pavimentos: 2,80 m;
- c) número de pavimentos: 5;

- d) estrutura considerada engastada na fundação;
- e) carga uniformemente distribuída nas vigas (incluído o peso próprio): 10,0 kN/m;
- f) carga uniformemente distribuída nas lajes (incluído o peso próprio): 7,5 kN/m<sup>2</sup>;
- g) espessura constante das lajes: 10 cm;
- h) as dimensões dos pilares e vigas se encontram na planta do pavimento tipo, com suas medidas em centímetros.

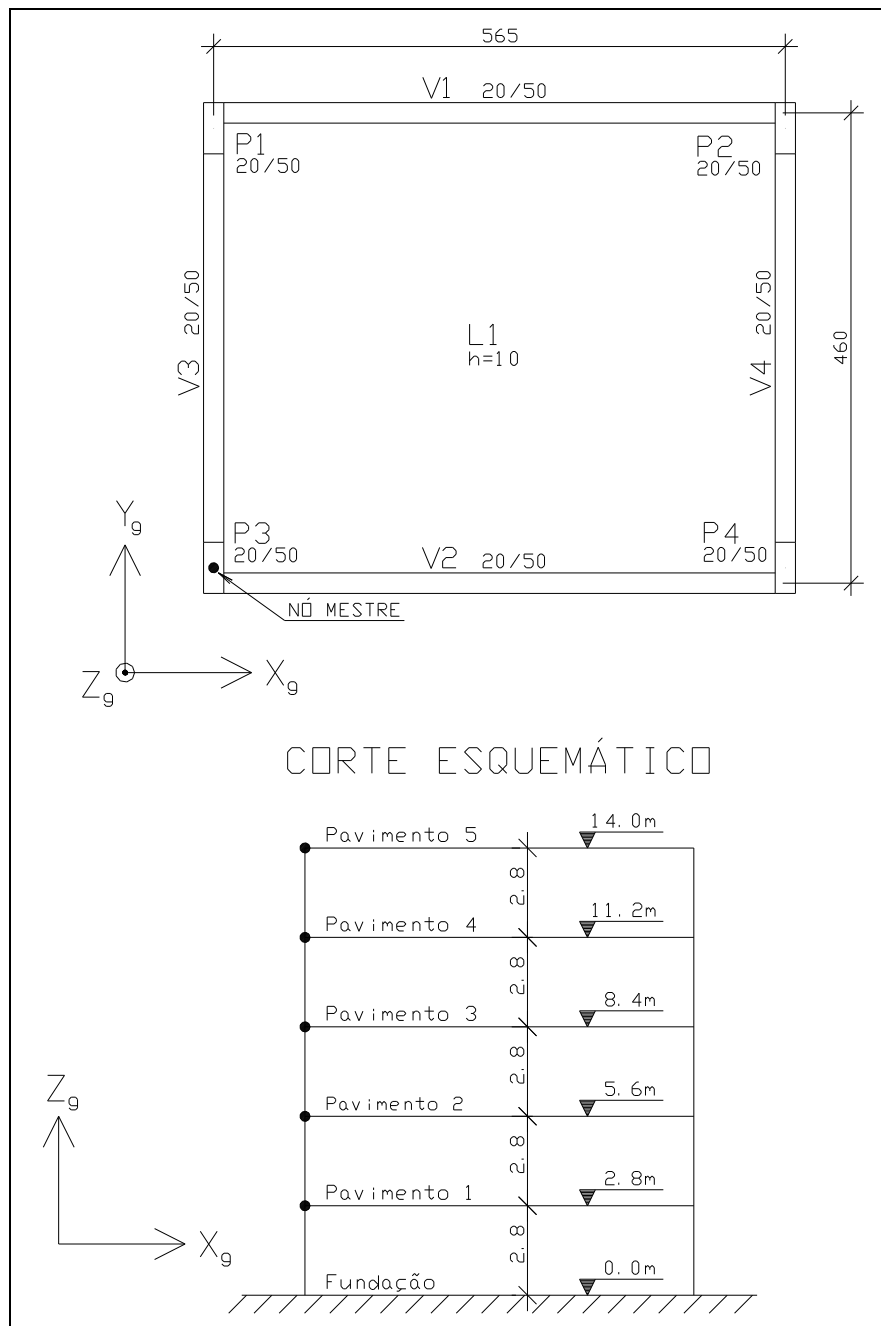


Figura 6.1: planta baixa do pavimento tipo e corte esquemático – exemplo 1



As forças horizontais devidas ao vento foram determinadas segundo a NBR6123: Forças devidas ao vento em edificações – procedimento (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 1988), utilizando-se os seguintes parâmetros:

- a) velocidade básica do vento ( $V_0$ ): 45 m/s;
- b) fator topográfico ( $S_1$ ): 1,0;
- c) fator  $S_2$ : calculado considerando a categoria de rugosidade IV e a classe da edificação A;
- d) fator estatístico ( $S_3$ ): 1,0;
- e) coeficientes de arrasto ( $C_a$ ):
  - direção  $X_g$  : 1,2;
  - direção  $Y_g$  : 1,3.

As tabelas 6.1 e 6.2 apresentam, respectivamente, as forças ao nível de cada pavimento para as direções  $X_g$  e  $Y_g$  de incidência do vento:

Tabela 6.1: forças devidas ao vento na direção  $X_g$  – exemplo 1

Pavimento	$Z_g$ (m)	$S_2$	$V_k$ (m/s)	$A_e$ (m <sup>2</sup> )	$q$ (N/m <sup>2</sup> )	F(kN)
1º	2,8	0,74	33,22	13,44	676,39	10,91
2º	5,6	0,80	36,10	13,44	798,82	12,88
3º	8,4	0,84	37,90	13,44	880,46	14,20
4º	11,2	0,87	39,23	13,44	943,40	15,22
5º	14,0	0,90	40,29	6,72	995,30	8,03

Tabela 6.2: forças devidas ao vento na direção  $Y_g$  – exemplo 1

Pavimento	$Z_g$ (m)	$S_2$	$V_k$ (m/s)	$A_e$ (m <sup>2</sup> )	$q$ (N/m <sup>2</sup> )	F(kN)
1º	2,8	0,74	33,22	16,38	676,39	14,40
2º	5,6	0,80	36,10	16,38	798,82	17,01
3º	8,4	0,84	37,90	16,38	880,46	18,75
4º	11,2	0,87	39,23	16,38	943,40	20,09
5º	14,0	0,90	40,29	8,19	995,30	10,60

Nestas tabelas,  $V_k$  representa a velocidade característica do vento,  $A_e$  a área frontal efetiva na direção do vento,  $q$  a pressão dinâmica do vento e  $F$  a força global do vento; conforme prescreve a norma citada anteriormente.

Para o cálculo do pórtico, supõe-se, neste trabalho, que a força total de vento aplicada em cada pavimento é uniformemente distribuída entre os pilares da fachada, isto é, dividida pelo número de pilares e aplicada na forma de cargas concentradas horizontais em cada pilar. Este critério é utilizado neste e nos demais exemplos.

Conforme mencionado acima, este primeiro exemplo tem como objetivo principal avaliar as vantagens da utilização do diafragma rígido das lajes e da subestruturação.

Avaliando-se a estrutura original, na qual as lajes são discretizadas arbitrariamente através de 25 elementos individuais de casca, obtém-se um total de 484 nós. Isto equivale a um sistema composto por 2904 equações a serem resolvidas, considerando seis graus de liberdade por nó. Utilizando-se a hipótese do diafragma rígido, apenas os quatro nós engastados da fundação e o nó mestre de cada pavimento apresentam seis graus de liberdade. Os demais nós apresentaram apenas três. Assim, o número total de equações é reduzido para 1479, o que equivale a aproximadamente 51 % do tamanho original.

Por sua vez, a utilização da subestruturação nesta estrutura permite que cada laje seja considerada como sendo um superelemento painel<sub>5x5</sub>. Isso faz com que o número de nós participante da estrutura global seja reduzido para 204, ao invés dos 484 originais. Assim, utilizando-se o diafragma rígido nestes 204 nós, a estrutura fica completamente discretizada através de 639 equações, uma redução de quase 78 % frente as 2904 iniciais.

A tabela 6.3 condensa estas informações e apresenta, em sua última coluna, o tempo de processamento (em segundos) do programa para cada um dos modelos. Considera-se, para tanto, um computador com processador AMD Athlon™ 64 X2 Dual Core 4000+ 2.11GHz, memória RAM 2x1 GBytes DDR2 333MHz e sistema operacional Microsoft Windows XP Professional Service Pack 3.

Tabela 6.3: características de cada modelo de discretização – exemplo 1

Modelo analisado	Nº de nós	Nº de equações	Diferença		Tempo de processamento (s)
Estrutura original	484	2904	-----		105,3
Com diafragma rígido	484	1479	-49,1%		42,54
Com diafragma e subestruturação	204	639	-78,0%		31,89

As tabelas 6.4 e 6.5 comparam, respectivamente, os deslocamentos do nó mestre obtidos nas direções  $X_g$  e  $Y_g$  de incidência do vento, considerando uma análise linear. Por sua vez, as tabelas 6.6 e 6.7 analisam o esforço normal no pilar P2, também para a análise linear.

Tabela 6.4: deslocamento do nó mestre – direção  $X_g$  de incidência do vento

Nível	Estrutura original	Com diafragma	Diferença		Com diafragma e subestruturação	Diferença x Com diafragma
	(cm)	(cm)	(%)		(cm)	(%)
5º pav.	1,351	1,346	-0,37%		1,346	-0,37%
4º pav.	1,283	1,279	-0,31%		1,279	-0,31%
3º pav.	1,092	1,089	-0,27%		1,089	-0,27%
2º pav.	0,785	0,784	-0,13%		0,784	-0,13%
1º pav.	0,394	0,393	-0,25%		0,393	-0,25%

Tabela 6.5: deslocamento do nó mestre – direção  $Y_g$  de incidência do vento

Nível	Estrutura original	Com diafragma	Diferença		Com diafragma e subestruturação	Diferença x Com diafragma
	(cm)	(cm)	(%)		(cm)	(%)
5º pav.	0,709	0,706	-0,42%		0,706	-0,42%
4º pav.	0,630	0,629	-0,16%		0,629	-0,16%
3º pav.	0,520	0,519	-0,19%		0,519	-0,19%
2º pav.	0,351	0,350	-0,28%		0,350	-0,28%
1º pav.	0,140	0,140	0,00%		0,140	0,00%

Tabela 6.6: esforço normal no pilar P2 – direção  $X_g$  de incidência do vento

Nível	Estrutura original	Com diafragma	Diferença		Com diafragma e subestruturação	Diferença x Com diafragma
	(kN)	(kN)	(%)		(kN)	(%)
5º pav.	97,94	98,15	0,21%		98,15	0,21%
4º pav.	204,43	204,57	0,07%		204,57	0,07%
3º pav.	314,40	314,70	0,10%		314,70	0,10%
2º pav.	428,02	428,35	0,08%		428,35	0,08%
1º pav.	543,60	543,80	0,04%		543,80	0,04%

Tabela 6.7: esforço normal no pilar P2 – direção  $Y_g$  de incidência do vento

Nível	Estrutura original	Com diafragma	Diferença		Com diafragma e subestruturação	Diferença x Com diafragma
	(kN)	(kN)	(%)		(kN)	(%)
5º pav.	99,57	99,63	0,06%		99,63	0,06%
4º pav.	208,52	208,67	0,07%		208,67	0,07%
3º pav.	322,80	322,93	0,04%		322,93	0,04%
2º pav.	441,70	441,63	-0,02%		441,63	-0,02%
1º pav.	561,51	561,45	-0,01%		561,45	-0,01%

Pode-se observar que os deslocamentos e os esforços normais são praticamente idênticos, independentemente do uso da hipótese de diafragma rígido e da subestruturação. Estes resultados demonstram que a utilização da hipótese de diafragma rígido associado à subestruturação constitui uma técnica eficiente, permitindo um ganho computacional expressivo, ao diminuir o tempo de resolução do problema sem apresentar perda de precisão nos resultados.

### 6.3 EXEMPLO 2

A estrutura do exemplo 2, estudada por Martins (1998), apresenta todos os pavimentos iguais em planta, conforme a figura 6.2, tendo as seguintes características:

- a) constantes do material:
  - módulo de elasticidade longitudinal: 2000 kN/cm<sup>2</sup>;
  - coeficiente de Poisson: 0,25;
  - peso específico do concreto armado: 25 kN/m<sup>3</sup>;
- b) pé-direito dos pavimentos: 2,90 m;
- c) número de pavimentos: 15;
- d) estrutura considerada engastada na fundação;
- e) carga uniformemente distribuída nas vigas (incluído o peso próprio): 10 kN/m;
- f) carga uniformemente distribuída nas lajes (incluído o peso próprio): 8 kN/m<sup>2</sup>;
- g) espessura constante das lajes: 15 cm;
- h) as dimensões dos pilares e vigas se encontram na planta do pavimento tipo, com seus valores em centímetros.

A malha de elementos finitos utilizada para discretizar cada pavimento é apresentada através da figura 6.3. Foram utilizados doze superelementos do tipo painel\_5x5, vinte e um superelementos painel\_2x2 e dois elementos individuais de casca; além das barras de pórtico espacial para representar as vigas e os pilares.

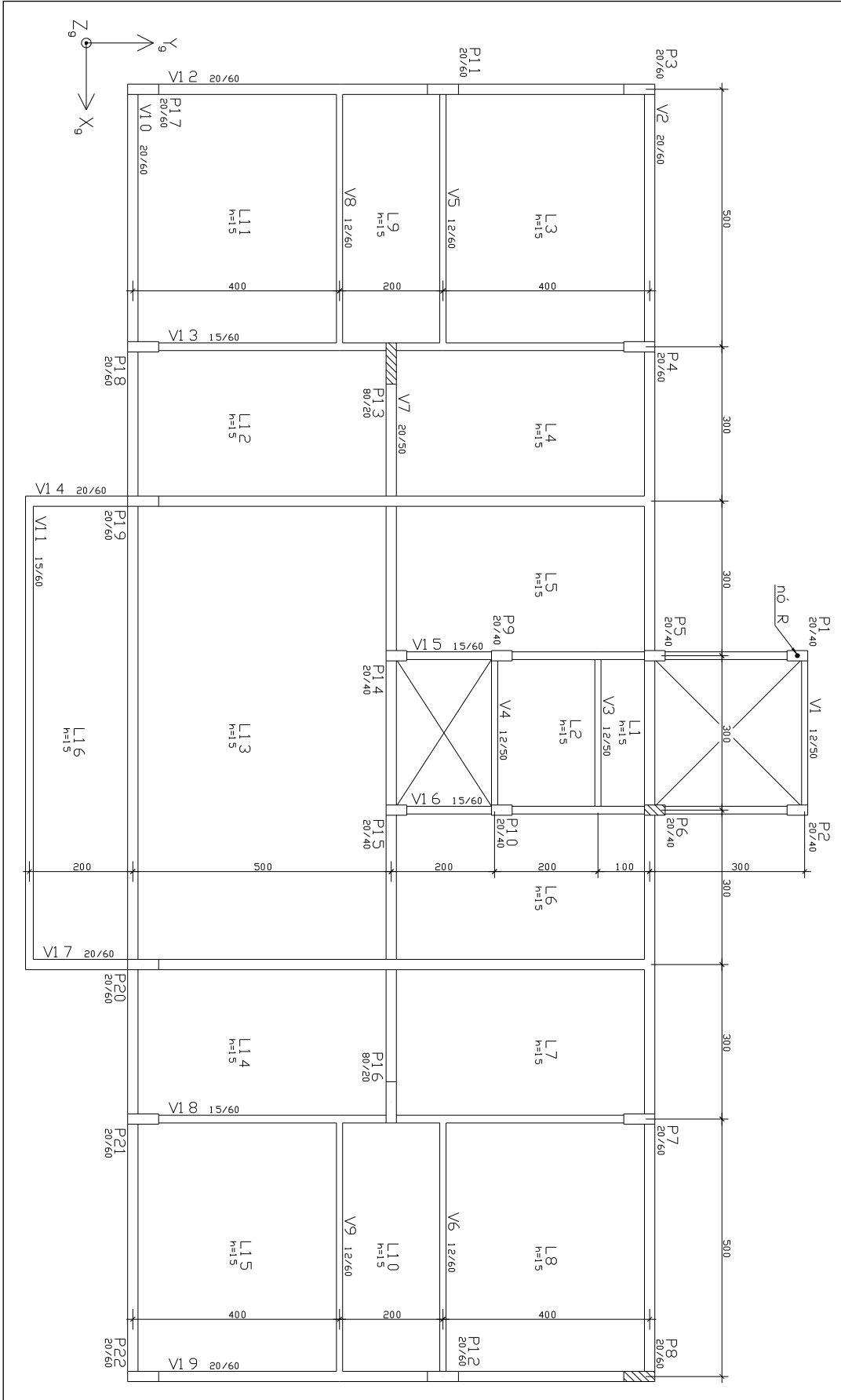


Figura 6.2: planta baixa do pavimento tipo – exemplo 2

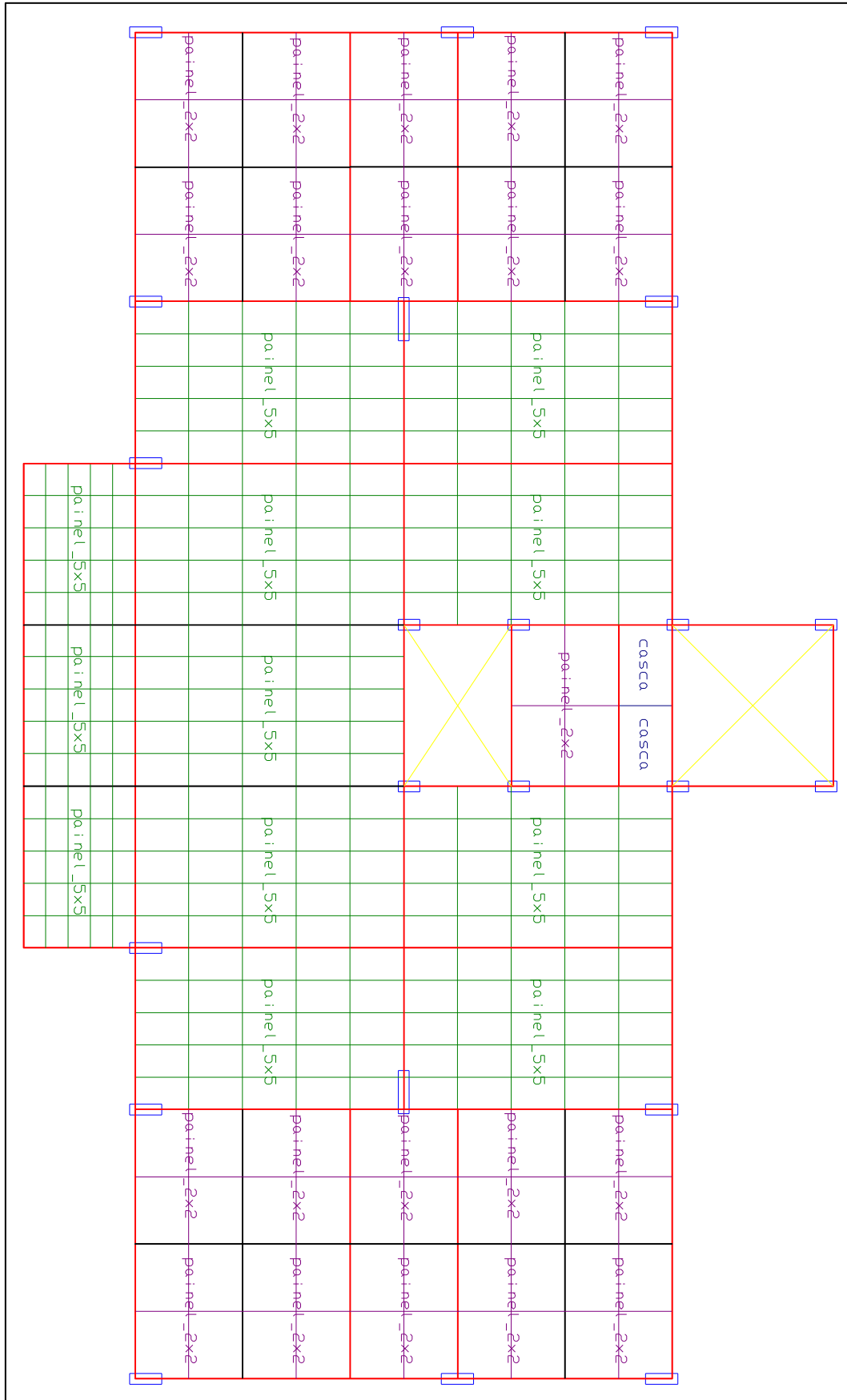


Figura 6.3: malha de elementos finitos do pavimento tipo – exemplo 2

Observa-se que o sistema de contraventamento desta estrutura não apresenta núcleos ou paredes estruturais. As forças horizontais devidas ao vento foram determinadas com base nos seguintes parâmetros, conforme o trabalho de Martins (1998):

- a) velocidade básica do vento ( $V_0$ ): 40 m/s;
- b) fator topográfico ( $S_1$ ): 1,0;
- c) fator  $S_2$ : calculado considerando a categoria de rugosidade V e a classe da edificação B;
- d) fator estatístico ( $S_3$ ): 1,0;

A tabela 6.8 apresenta, simplificada, as forças ao nível de cada pavimento para a direção  $Y_g$  de incidência do vento:

Tabela 6.8: forças devidas ao vento – exemplo 2

Pavimento	$Z_g$ (m)	F(kN)		Pavimento	$Z_g$ (m)	F(kN)
1	2,9	43,38		9	26,1	57,71
2	5,8	47,47		10	29	58,51
3	8,7	50,04		11	31,9	59,24
4	11,6	51,94		12	34,8	59,92
5	14,5	53,47		13	37,7	60,54
6	17,4	54,75		14	40,6	61,13
7	20,3	55,86		15	43,5	30,84
8	23,2	56,84				

(fonte: MARTINS, 1998)

No trabalho apresentado por Martins (1998), não foi estudada a não linearidade física do material. Por este motivo, são comparados apenas resultados inerentes às análises linear e não linear geométrica. As figuras 6.4 a 6.8 a seguir apresentam os resultados deste exemplo.



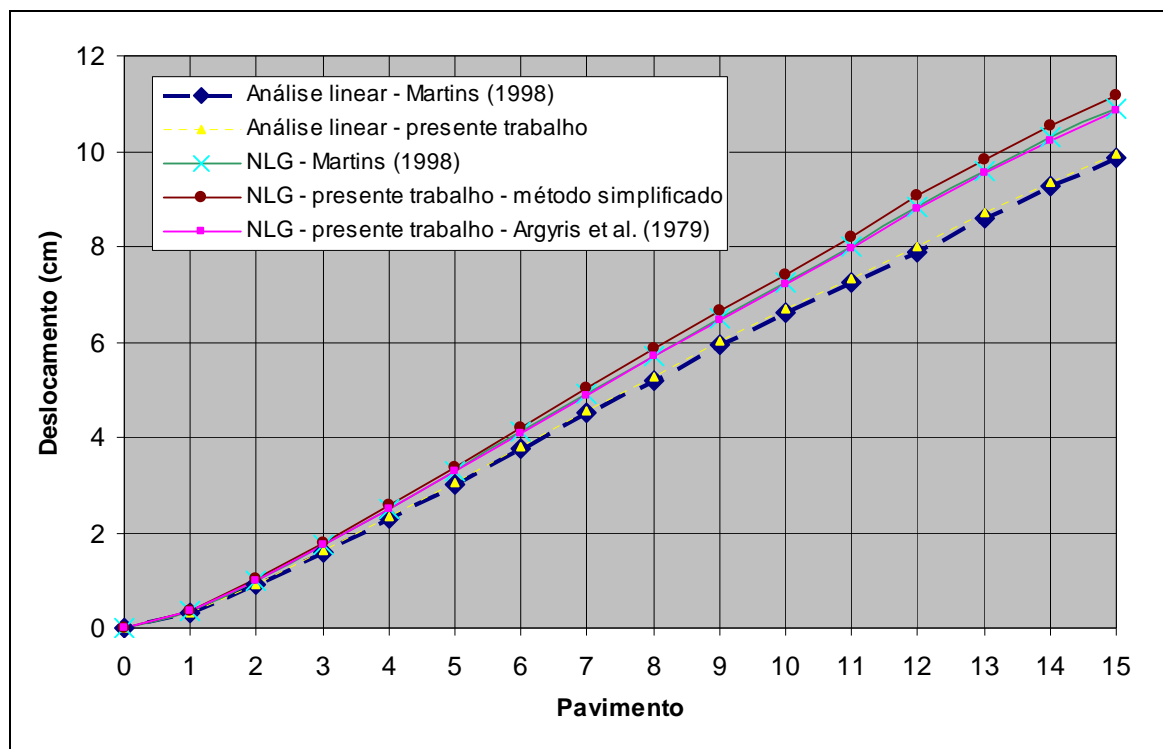


Figura 6.4: deslocamento do nó R (referência) na direção  $Y_g$  de incidência do vento

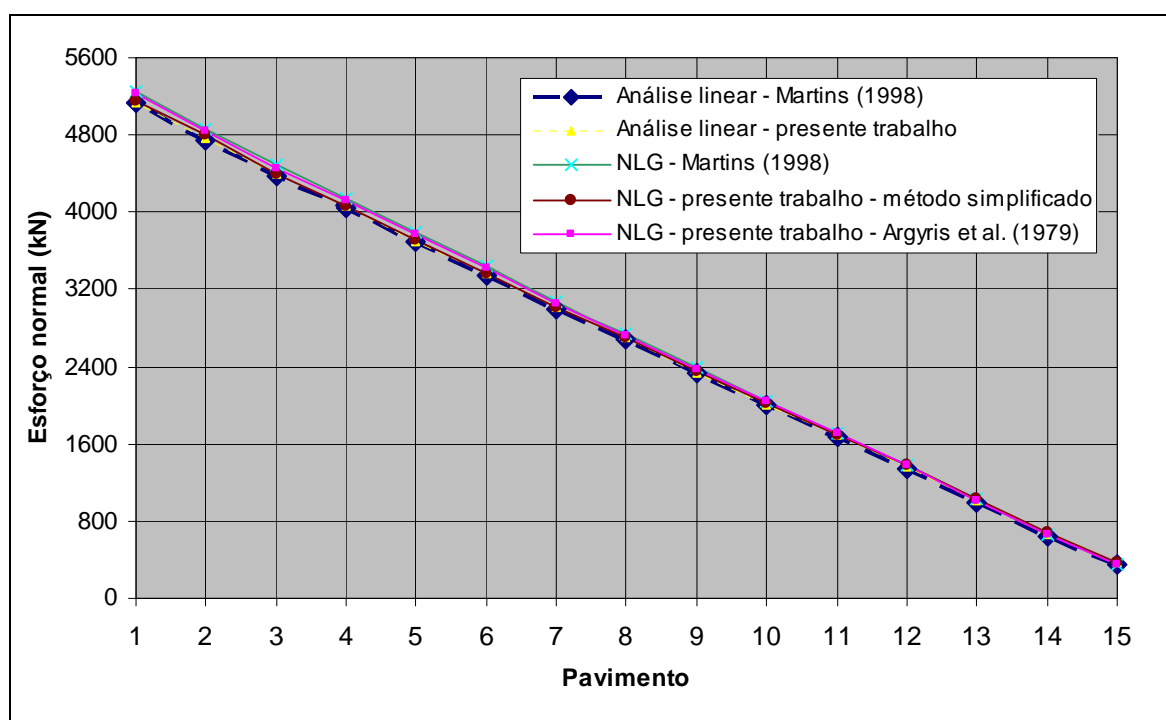


Figura 6.5: esforço normal no pilar P13

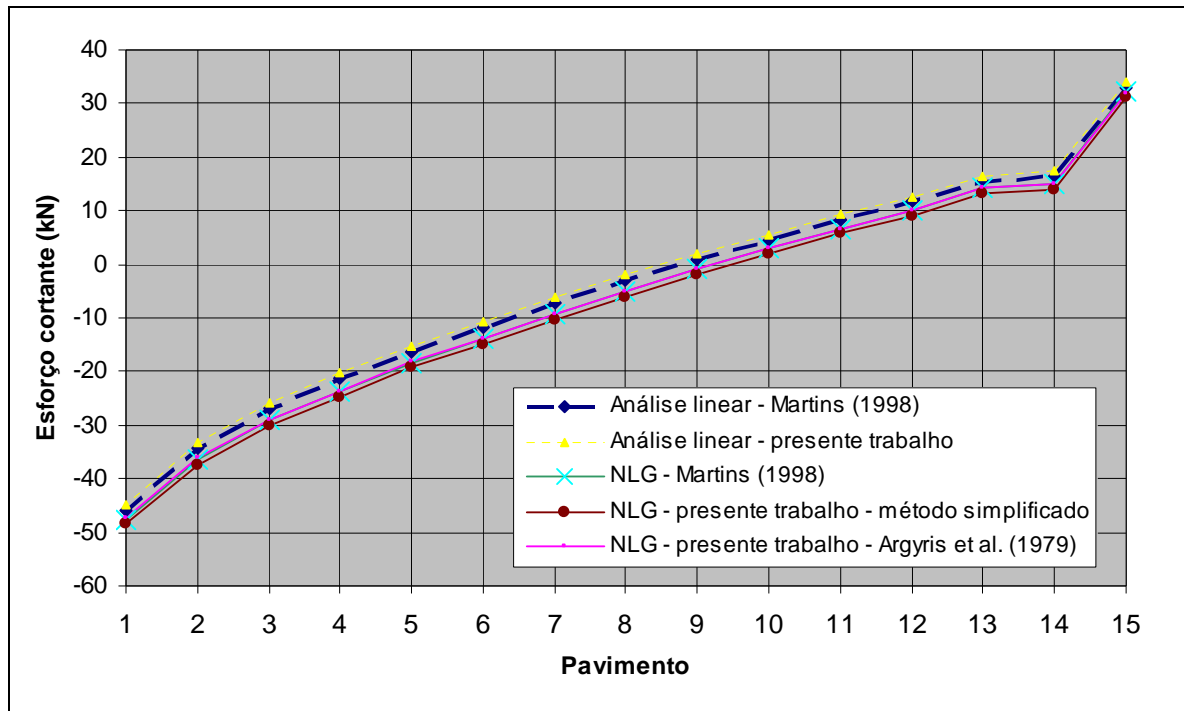


Figura 6.6: esforço cortante superior  $V_{y_g}$  no pilar P8

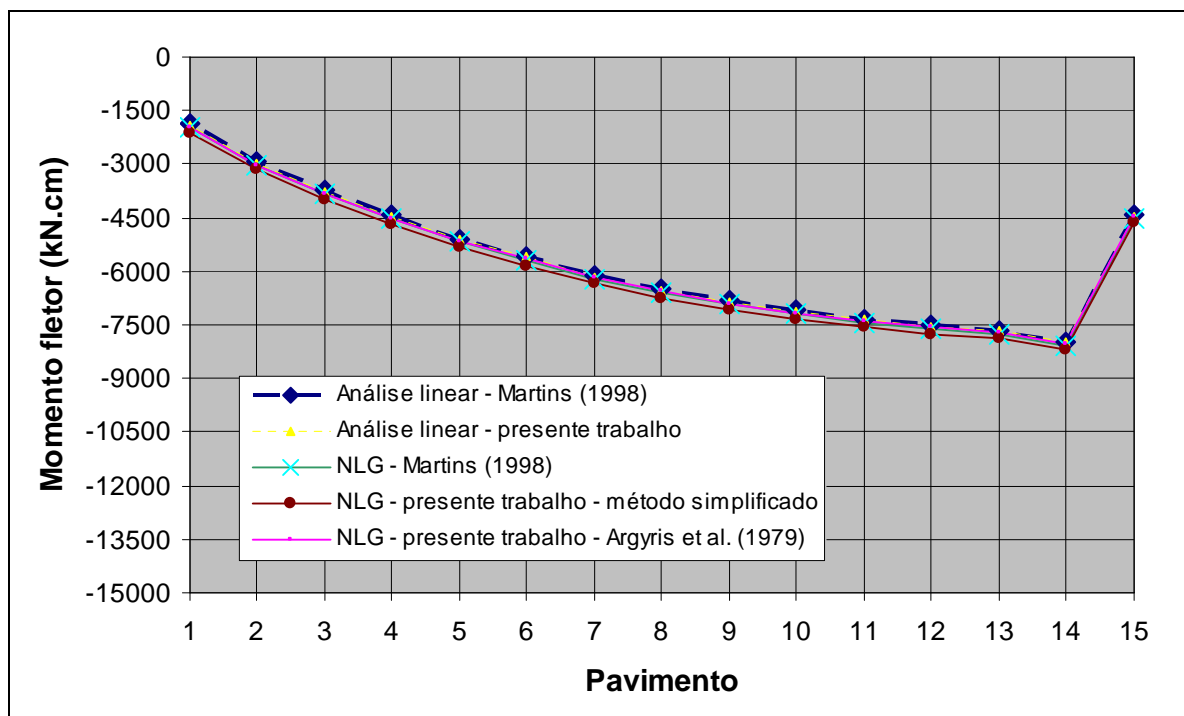


Figura 6.7: momento fletor esquerdo na viga V2

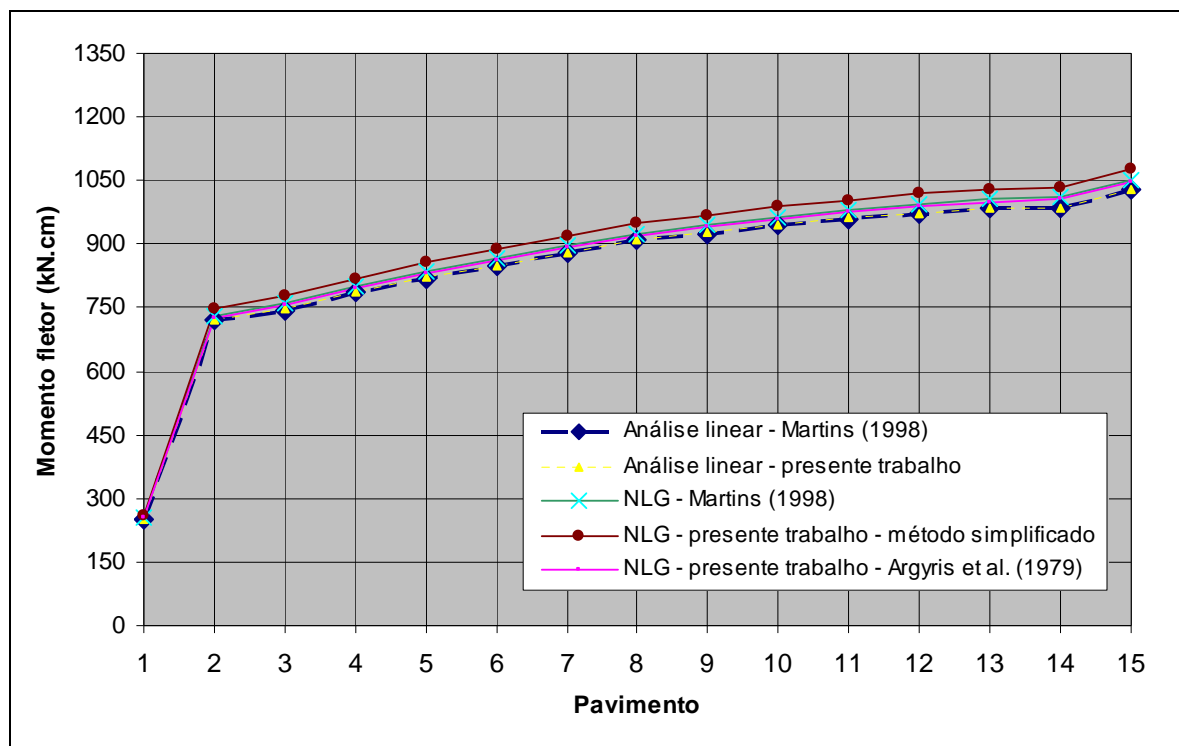


Figura 6.8: momento fletor inferior  $M_{y_g}$  no pilar P6

Analisando as figuras acima, observa-se que os resultados obtidos no presente trabalho são praticamente idênticos aos obtidos por Martins (1998), no caso de análise linear e não linear geométrica pela formulação de Argyris et al. (1979). Entretanto, comparando as duas análises não linear geométricas, os resultados do Método Simplificado apresentam pequena variação, com valores nunca diferindo mais do que 10%.

A figura 6.4 mostra que o deslocamento do nó R (referência) no topo da estrutura na direção  $Y_g$  de incidência do vento para a análise linear foi de aproximadamente 9,91 cm. Já para a análise não linear geométrica, este valor subiu para 11,03 cm, um aumento em torno de 11,1%. Este aumento de deslocamentos provoca, de maneira geral, um aumento dos esforços nos elementos, pois o equilíbrio da estrutura é admitido na posição deslocada.

As demais figuras evidenciam este aumento de esforços, exceto a figura 6.5, onde o esforço normal se manteve praticamente constante, independentemente dos deslocamentos. Entretanto, nota-se que o momento fletor esquerdo na viga V2 no primeiro pavimento (figura 6.7) para a análise linear foi de -1890 kN.cm. Já para a análise NLG, o valor foi de -2030 kN.cm, um aumento aproximado de 7,41%.

A estrutura deformada com os valores de deslocamentos na direção  $Y_g$  de incidência do vento é apresentada na figura 6.9. Percebe-se que esta deformada apresenta a mesma curvatura presente na figura 2.7-a. Isto era esperado, haja vista que o sistema de contraventamento desta estrutura é formado exclusivamente por pórticos.

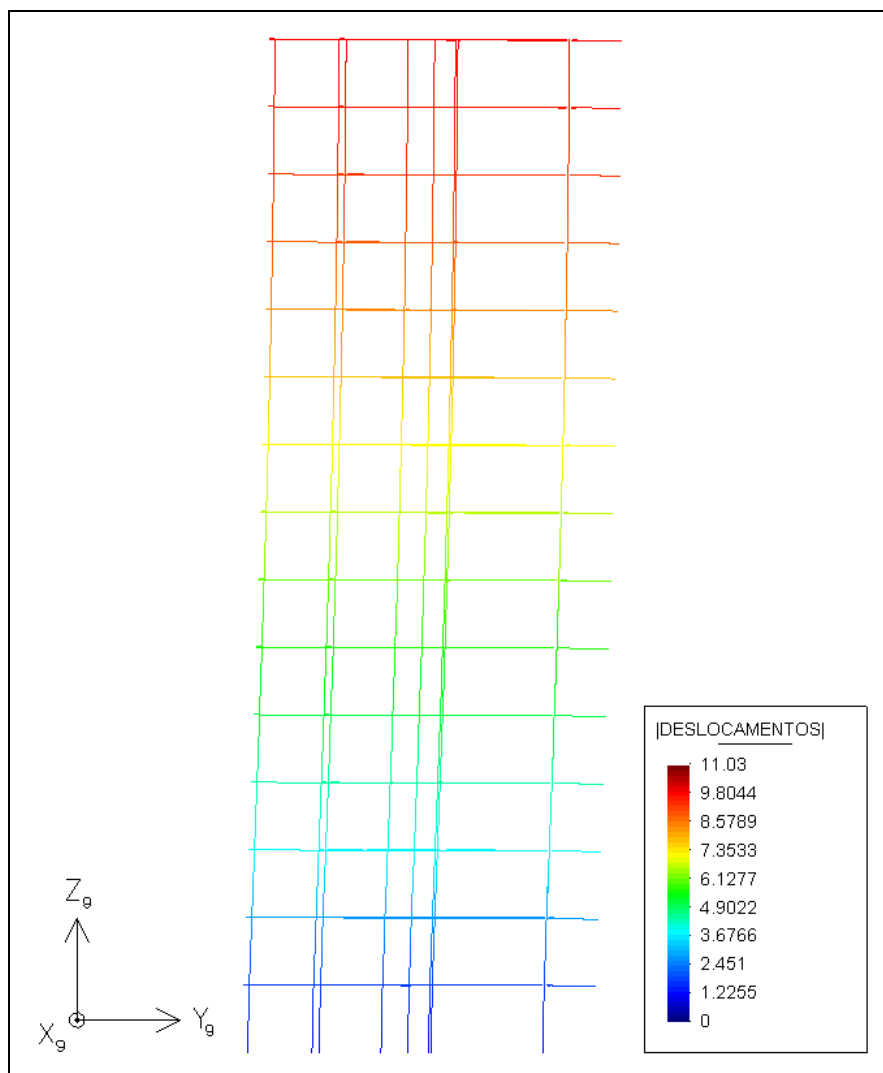


Figura 6.9: estrutura deformada – exemplo 2

O parâmetro de instabilidade global  $\alpha$  calculado para esta estrutura resultou em 1,09; valor superior ao limite para contraventamento feito exclusivamente por pórticos ( $\alpha_1=0,5$ ). Já o coeficiente  $\gamma_z$  resultou em 1,21; valor também superior ao limite ( $\gamma_z=1,10$ ). Isto evidencia uma estrutura de nós móveis e a necessidade da consideração dos efeitos globais de segunda ordem.

## 6.4 EXEMPLO 3

No exemplo 3, estuda-se uma estrutura, já analisada anteriormente por Martins (2001), que apresenta três núcleos estruturais. No trabalho deste autor, os núcleos foram modelados por elementos de barra segundo a teoria de flexo-torção de Vlassov (1962). Por sua vez, neste trabalho, tais núcleos são modelados através de elementos de casca poliédrica. De forma análoga aos exemplos anteriores, esta estrutura apresenta todos os pavimentos iguais em planta, conforme a figura 6.10, tendo as seguintes características:

- a) constantes do material:
  - módulo de elasticidade longitudinal:  $3800 \text{ kN/cm}^2$ ;
  - coeficiente de Poisson: 0,25;
  - peso específico do concreto armado:  $25 \text{ kN/m}^3$ ;
- b) pé-direito dos pavimentos: 3,00 m;
- c) número de pavimentos: 25;
- d) estrutura considerada engastada na fundação;
- e) carga uniformemente distribuída nas vigas (incluído o peso próprio):  $15 \text{ kN/m}$ ;
- f) carga uniformemente distribuída nas lajes (incluído o peso próprio):  $10 \text{ kN/m}^2$ ;
- g) espessura constante das lajes: 15 cm;
- h) espessura das paredes do núcleo: 20 cm;
- i) as dimensões dos pilares, núcleos estruturais e vigas se encontram na planta do pavimento tipo, com seus valores em centímetros.

A malha de elementos finitos utilizada é apresentada através da figura 6.11-a. Para discretizar cada pavimento foram necessários dezessete superelementos do tipo `painel_5x5`, dois superelementos `painel_2x2` e dois elementos individuais de casca; além das barras de pórtico espacial para representar as vigas e os pilares. Por sua vez, cada uma das três paredes que compõem os núcleos 1, 2 e 3 foi modelada através de um superelemento `painel_5x5`, conforme o detalhe na figura 6.11-b. A estrutura discretizada pode ser vista na figura 6.11-c.

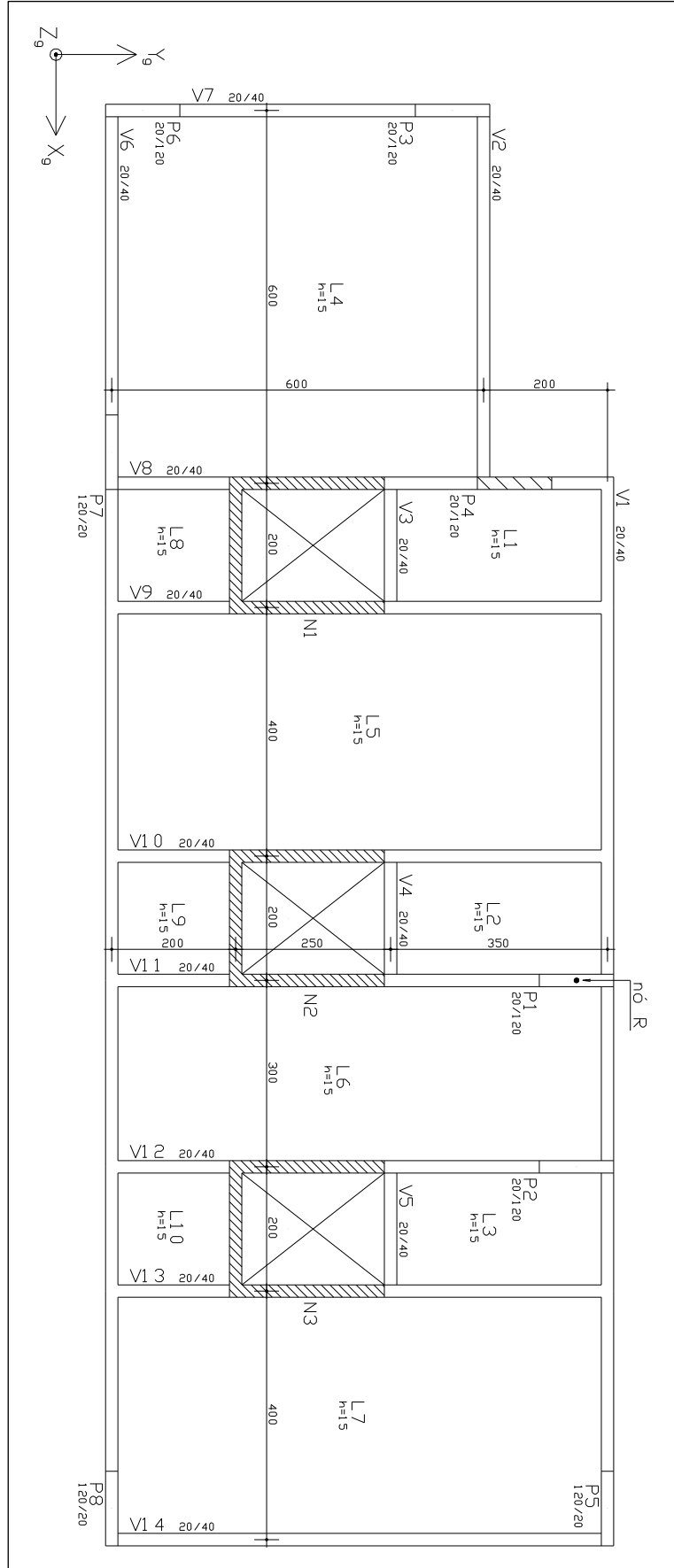


Figura 6.10: planta baixa do pavimento tipo – exemplo 3

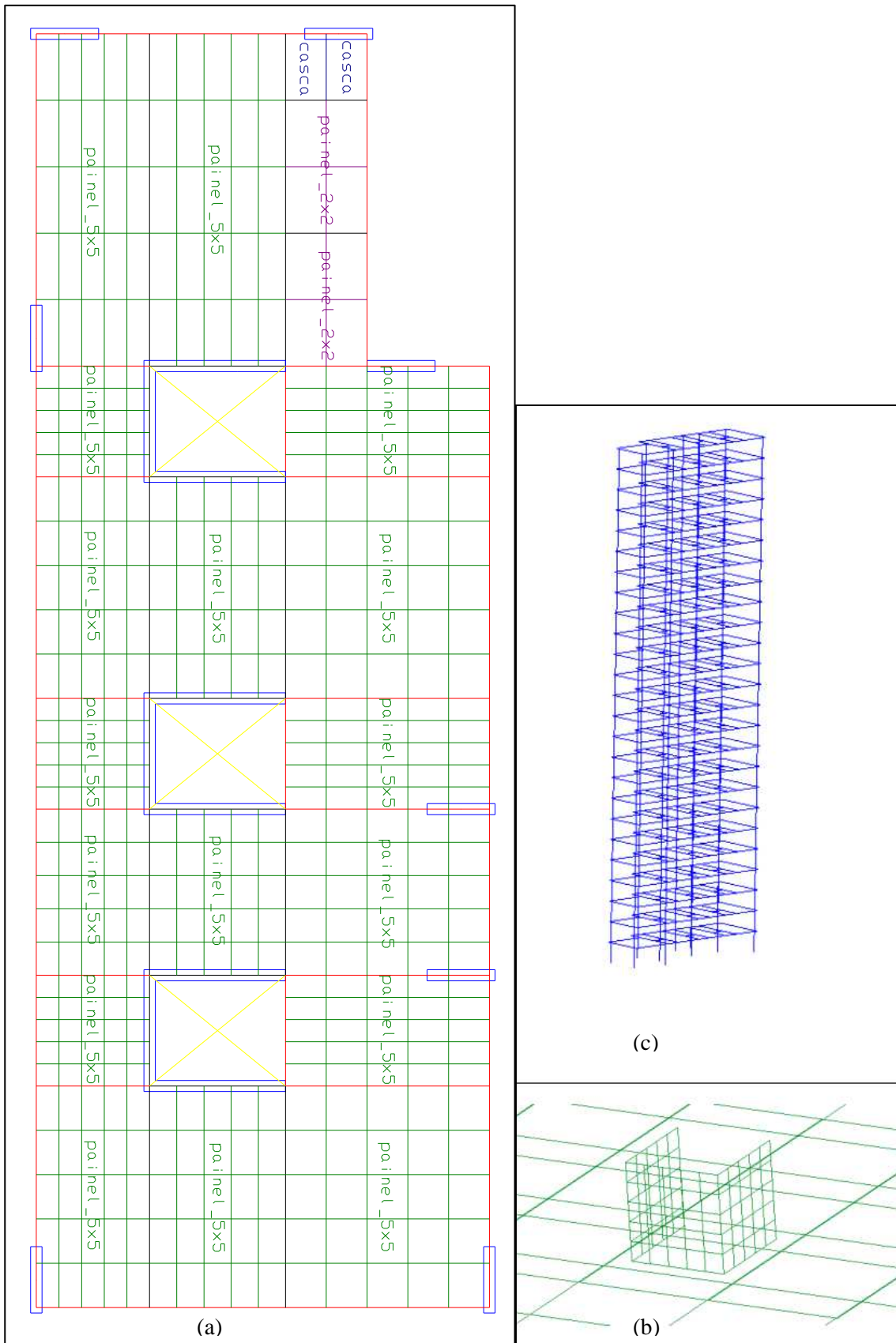


Figura 6.11: malha de elementos finitos do pavimento tipo – exemplo 3: (a) malha do pavimento; (b) detalhe do núcleo; (c) estrutura discretizada

As forças ao nível de cada pavimento para a direção  $Y_g$  de incidência do vento foram retiradas diretamente do trabalho de Martins (2001), sendo apresentadas pela tabela 6.9.

Tabela 6.9: forças devidas ao vento – exemplo 3

Pavimento	$Z_g$ (m)	F(kN)		Pavimento	$Z_g$ (m)	F(kN)
1	3,0	41,09		14	42,0	57,91
2	6,0	44,96		15	45,0	58,43
3	9,0	47,40		16	48,0	58,92
4	12,0	49,21		17	51,0	59,39
5	15,0	50,65		18	54,0	59,83
6	18,0	51,87		19	57,0	60,25
7	21,0	52,92		20	60,0	60,66
8	24,0	53,85		21	63,0	61,05
9	27,0	54,68		22	66,0	61,41
10	30,0	55,43		23	69,0	61,77
11	33,0	56,12		24	72,0	62,11
12	36,0	56,76		25	75,0	31,22
13	39,0	57,35				

(fonte: MARTINS, 2001)

Da mesma forma como no exemplo 2, o trabalho de Martins (2001) não estuda a não linearidade física do material. Por este motivo, são comparados apenas resultados inerentes às análises linear e não linear geométrica. As figuras 6.12 a 6.16, a seguir, apresentam alguns resultados deste exemplo.



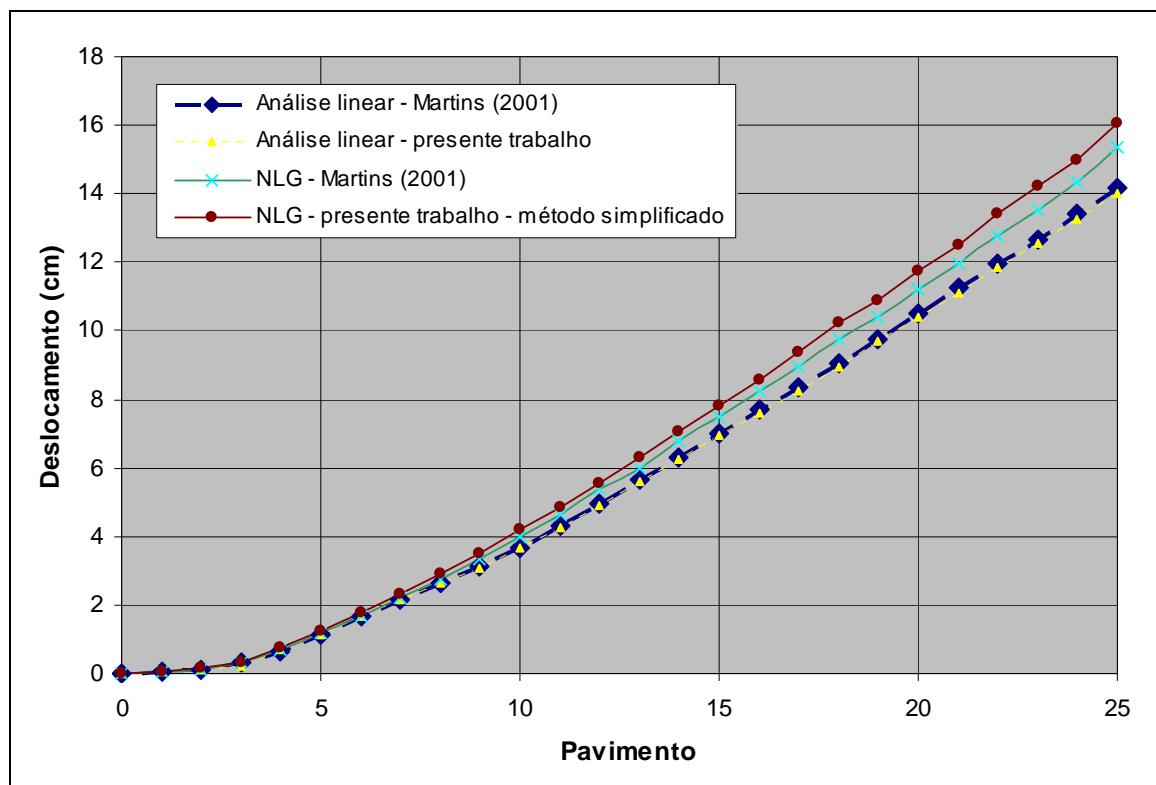


Figura 6.12: deslocamento do nó R (referência) na direção  $Y_g$  de incidência do vento

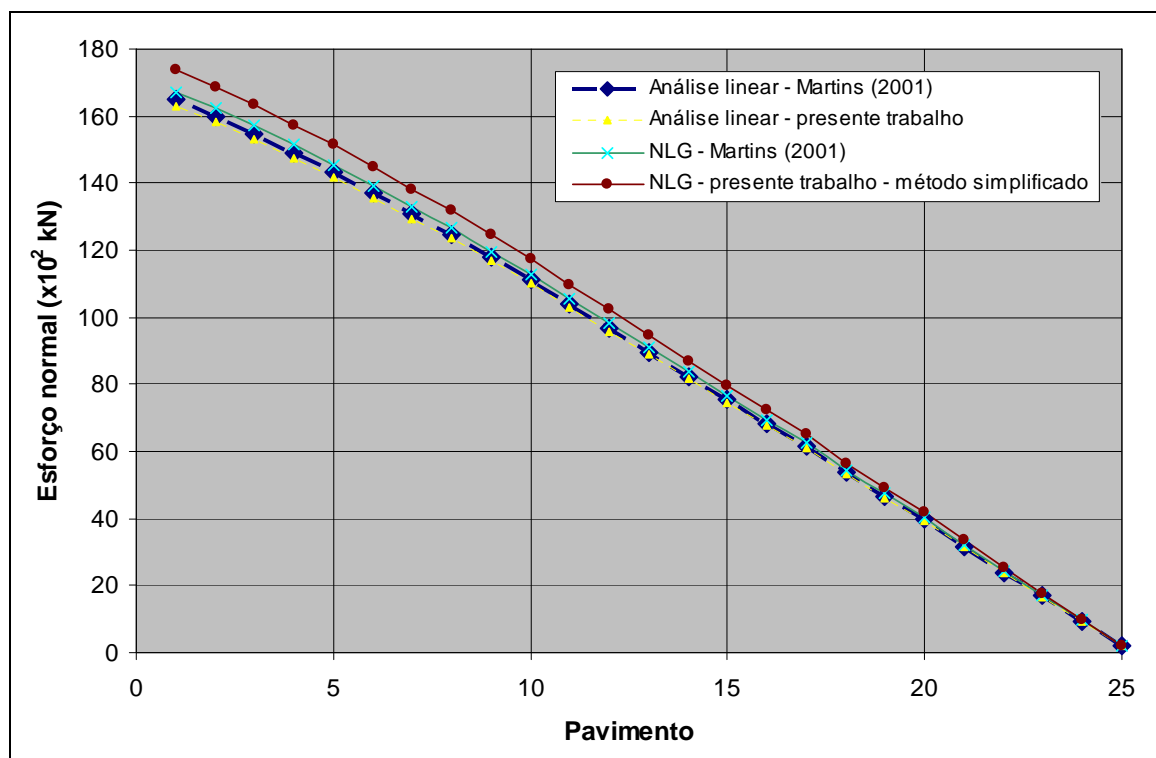


Figura 6.13: esforço normal total no núcleo N1

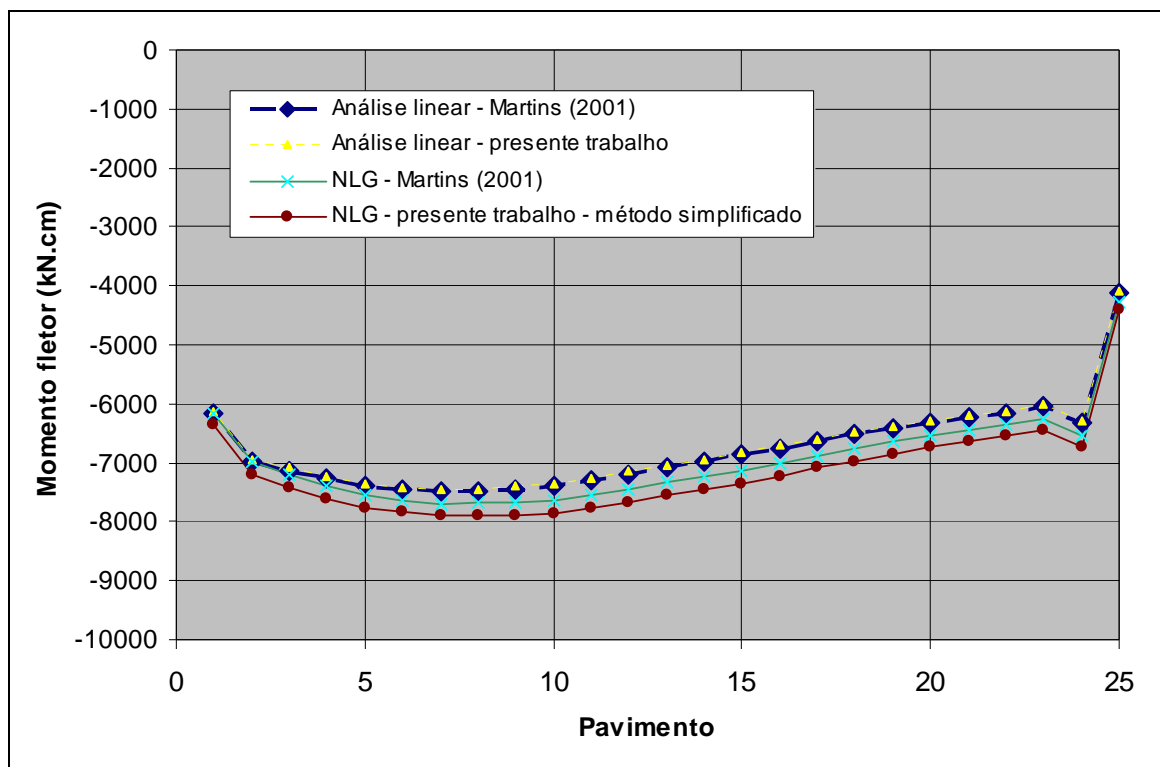


Figura 6.14: momento fletor esquerdo na viga V2

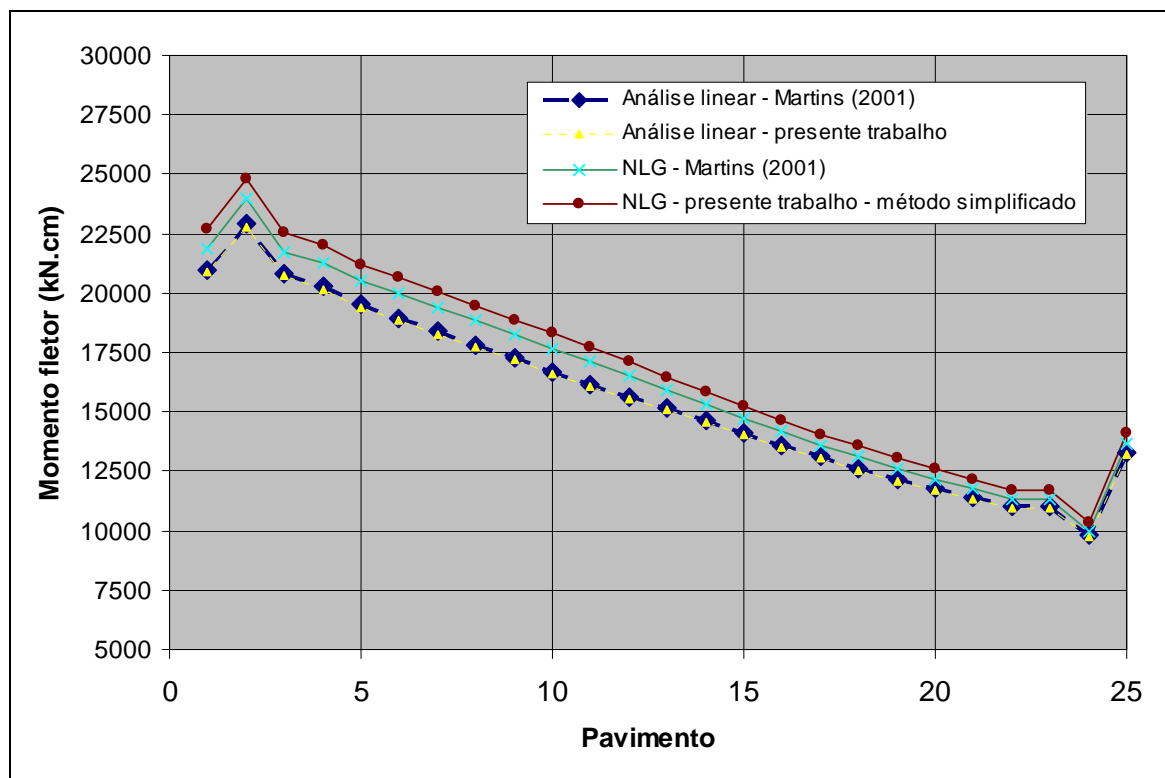


Figura 6.15: momento fletor inferior  $M_{xg}$  no pilar P4

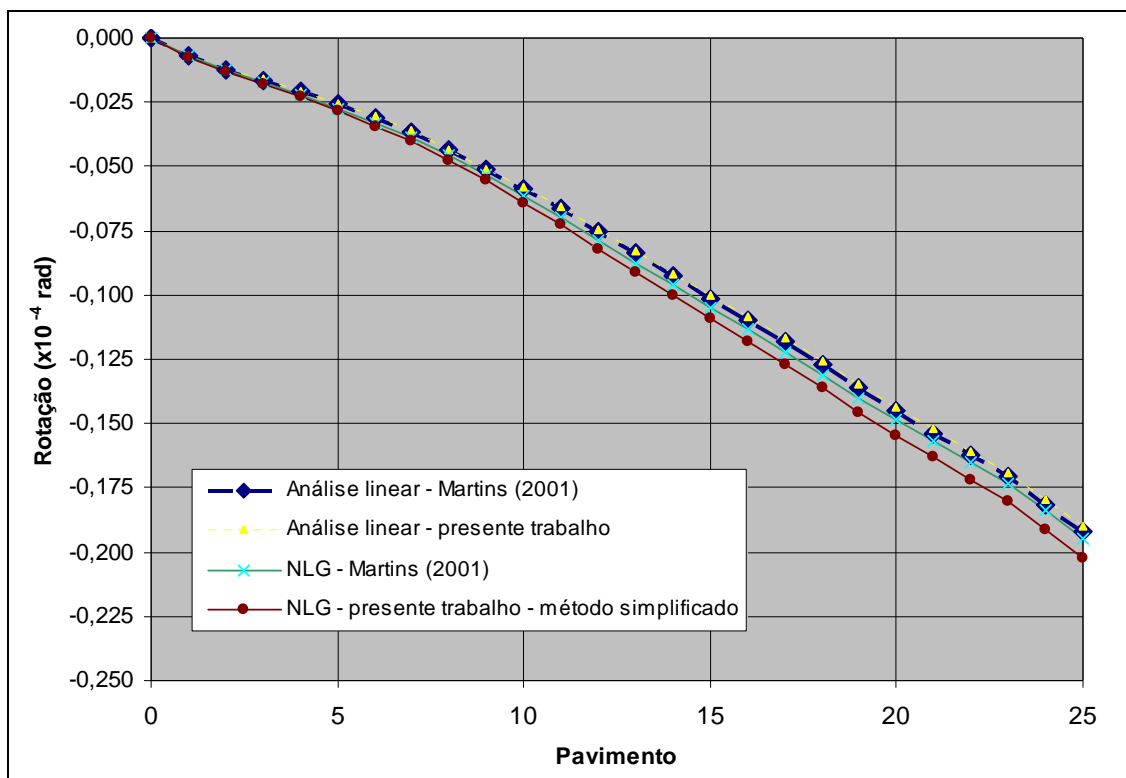


Figura 6.16: rotação do nó R (referência) em  $Z_g$  para cada pavimento

As figuras demonstram que os resultados obtidos pela teoria deste trabalho são praticamente idênticos aos obtidos por Martins (2001), no caso de análise linear. No entanto, comparando as duas análises não linear geométricas, os resultados do Método Simplificado apresentam pequena variação, com valores nunca diferindo mais do que 10%.

A figura 6.12 mostra que o deslocamento do nó R (referência) no topo da estrutura devido ao vento na direção  $Y_g$  para a análise linear foi de aproximadamente 14,15 cm. Já para a análise NLG, este valor subiu para 16,05 cm, um aumento em torno de 13,4%. Da mesma forma como ocorreu no exemplo 2, neste exemplo também houve, de maneira geral, um aumento dos esforços nos elementos.

As figuras 6.13 a 6.16 evidenciam este aumento dos esforços. Nota-se, por exemplo, que o momento fletor inferior  $Mx_g$  no pilar P4 para o primeiro pavimento (figura 6.15), no caso de análise linear, foi de 21050,0 kN.cm. Já para a análise NLG, o valor foi de 22626,5 kN.cm, um aumento aproximado de 7,5%.

A estrutura deformada devido ao vento na direção  $Y_g$  é apresentada através da figura 6.17. Observa-se que esta deformada apresenta a mesma curvatura presente na figura 2.7-b. Isto ocorre porque o sistema de contraventamento é predominantemente formado por paredes resistentes (no caso, núcleos estruturais).

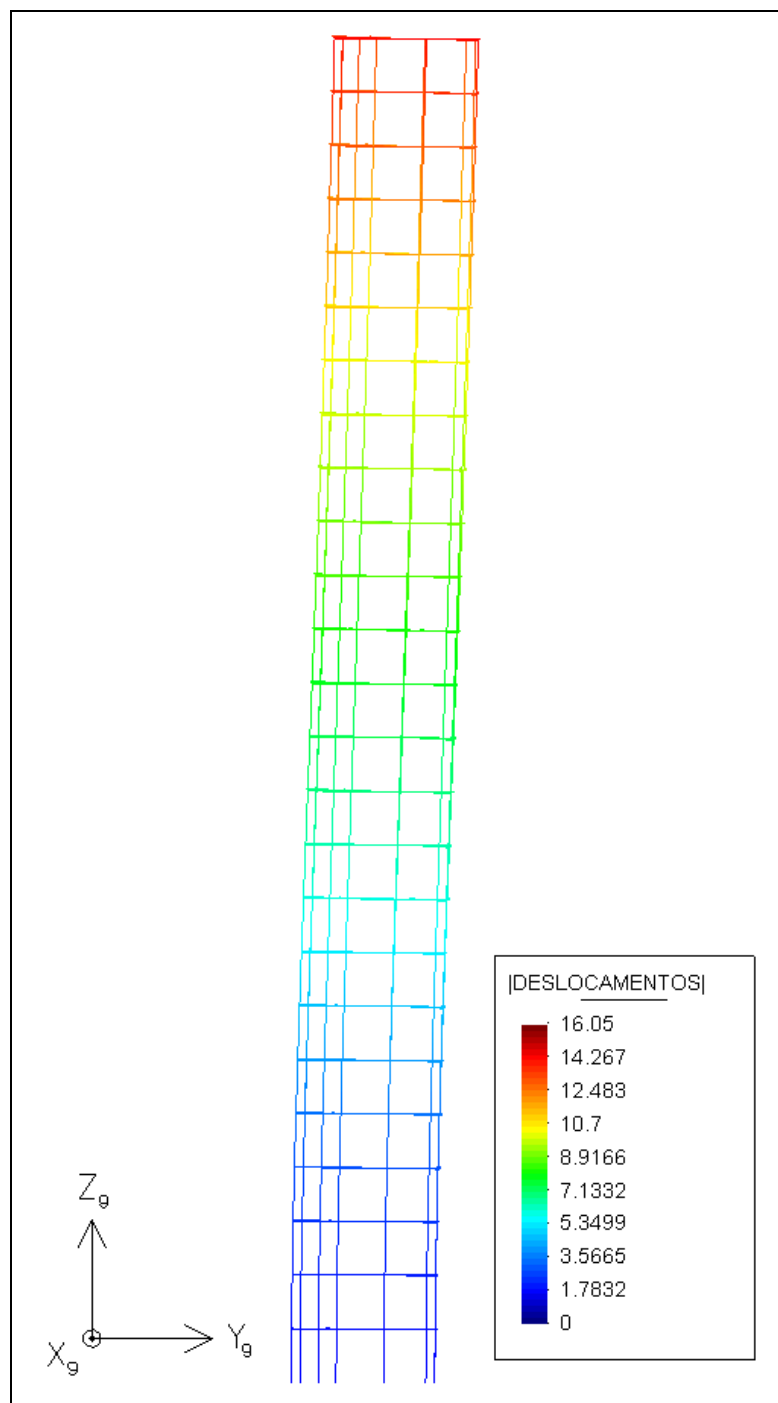


Figura 6.17: estrutura deformada – exemplo 3

Neste exemplo, o parâmetro de instabilidade global  $\alpha$  calculado resultou em 0,99; valor superior ao limite para contraventamento feito exclusivamente por pilares-parede ( $\alpha_1=0,7$ ). Já o coeficiente  $\gamma_z$  resultou em 1,18; valor também superior ao limite ( $\gamma_z=1,10$ ). Isto evidencia a necessidade da consideração dos efeitos globais de segunda ordem. Salienta-se que a validade da aplicação do parâmetro  $\alpha$  se limita a estruturas simétricas. Embora a estrutura analisada não seja perfeitamente simétrica, considerou-se interessante apresentar os resultados para este parâmetro.

## 6.5 EXEMPLO 4

O último exemplo trata de um edifício projetado e construído na cidade de Curitiba. Na planta do pavimento tipo, figura 6.18, são indicadas as dimensões das seções transversais dos elementos, com seus valores em centímetros. De maneira geral, a estrutura apresenta as seguintes características:

- a) constantes do material:
  - módulo de elasticidade longitudinal: 3067,25 kN/cm<sup>2</sup>;
  - coeficiente de Poisson: 0,2;
  - peso específico do concreto armado: 25 kN/m<sup>3</sup>;
- b) pé-direito dos pavimentos: 2,75 m;
- c) número de pavimentos: 30;
- d) estrutura considerada engastada na fundação;
- e) carga uniformemente distribuída nas vigas (sem o peso próprio): 6,0 kN/m;
- f) carga uniformemente distribuída nas lajes (sem o peso próprio): 4,0 kN/m<sup>2</sup>;
- g) neste exemplo, o peso próprio da estrutura é considerado automaticamente pelo programa;
- h) espessura constante das lajes: 12 cm.

Ressalta-se que, devido ao elevado grau de detalhamento existente em uma planta real, simplificações foram necessárias para facilitar a discretização da estrutura. Destaca-se como principal modificação a uniformização e arredondamento das dimensões de vigas, lajes e

pilares. Entretanto, tais alterações foram feitas com critério, buscando-se não descaracterizar a estrutura projetada.

As forças horizontais devidas ao vento em cada pavimento para a direção  $Y_g$  foram determinadas baseadas nos seguintes parâmetros:

- a) velocidade básica do vento ( $V_0$ ): 41 m/s;
- b) fator topográfico ( $S_1$ ): 1,0;
- c) fator  $S_2$ : calculado considerando a categoria de rugosidade V e a classe da edificação C;
- d) fator estatístico ( $S_3$ ): 1,0;
- e) coeficiente de arrasto ( $C_a$ ) na direção  $Y_g$  : 1,45.

A tabela 6.10 apresenta, simplificada, as forças obtidas:

Tabela 6.10: forças devidas ao vento – exemplo 4

Pavimento	$Z_g$ (m)	F(kN)		Pavimento	$Z_g$ (m)	F(kN)
1	2,75	30,93		16	44,00	81,63
2	5,50	39,43		17	46,75	83,39
3	8,25	45,44		18	49,50	85,07
4	11,00	50,25		19	52,25	86,70
5	13,75	54,33		20	55,00	88,27
6	16,50	57,91		21	57,75	89,79
7	19,25	61,12		22	60,50	91,26
8	22,00	64,05		23	63,25	92,69
9	24,75	66,74		24	66,00	94,08
10	27,50	69,25		25	68,75	95,44
11	30,25	71,60		26	71,50	96,75
12	33,00	73,82		27	74,25	98,04
13	35,75	75,91		28	77,00	99,30
14	38,50	77,91		29	79,75	100,52
15	41,25	79,81		30	82,50	50,86

A figura 6.19 apresenta a malha de elementos finitos utilizada neste exemplo. Para discretizar cada pavimento, foram necessários dezessete super elementos do tipo `painel_5x5`, dezoito super elementos `painel_2x2` e cinquenta e seis elementos individuais de casca; além das barras de pórtico espacial para representar as vigas e os pilares. Cada um dos lances de parede (PAR1 a PAR5) entre pavimentos foi modelado através de um super elemento `painel_5x5`. A estrutura discretizada pode ser vista na figura 6.20.

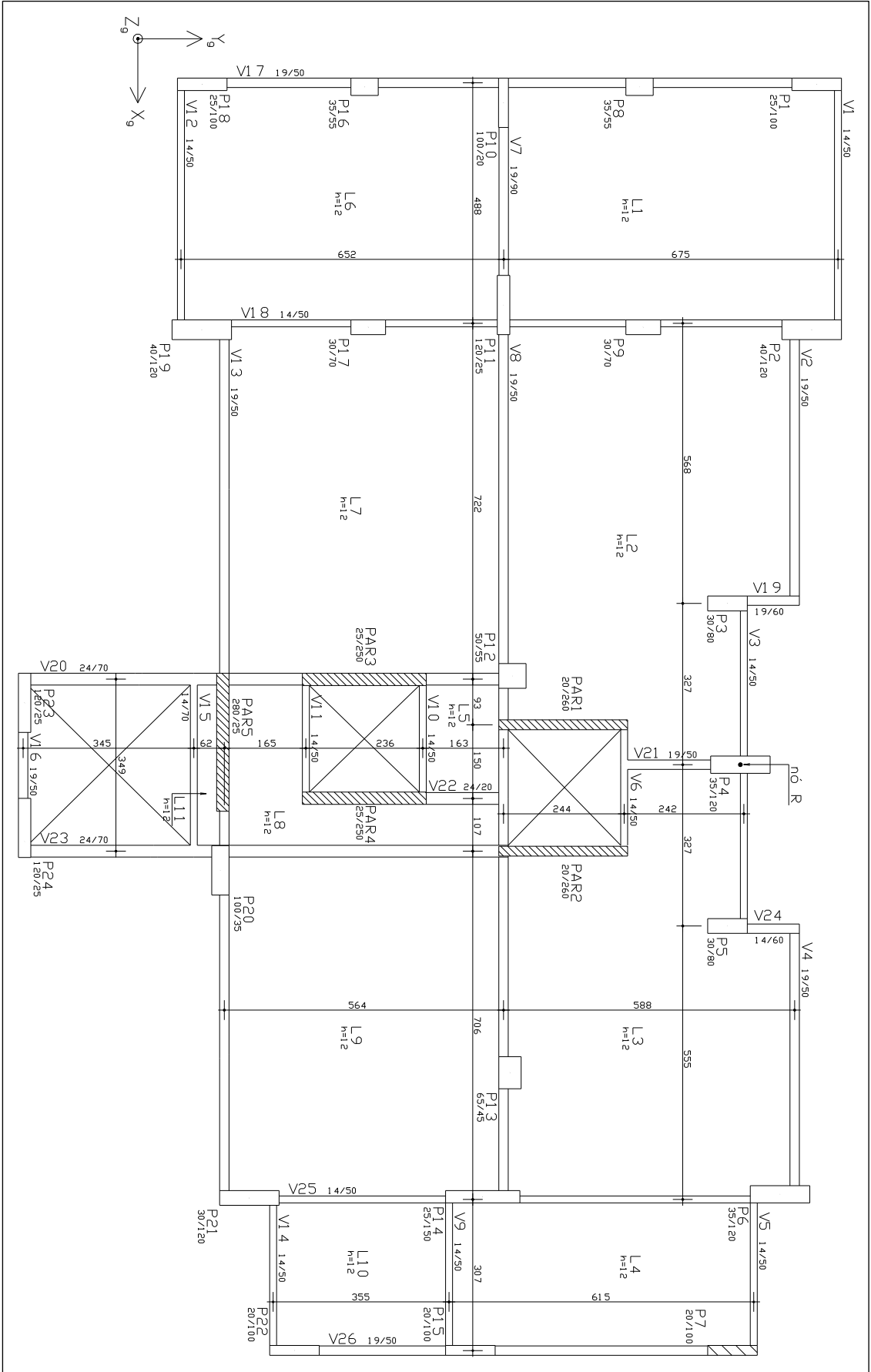


Figura 6.18: planta baixa do pavimento tipo – exemplo 4



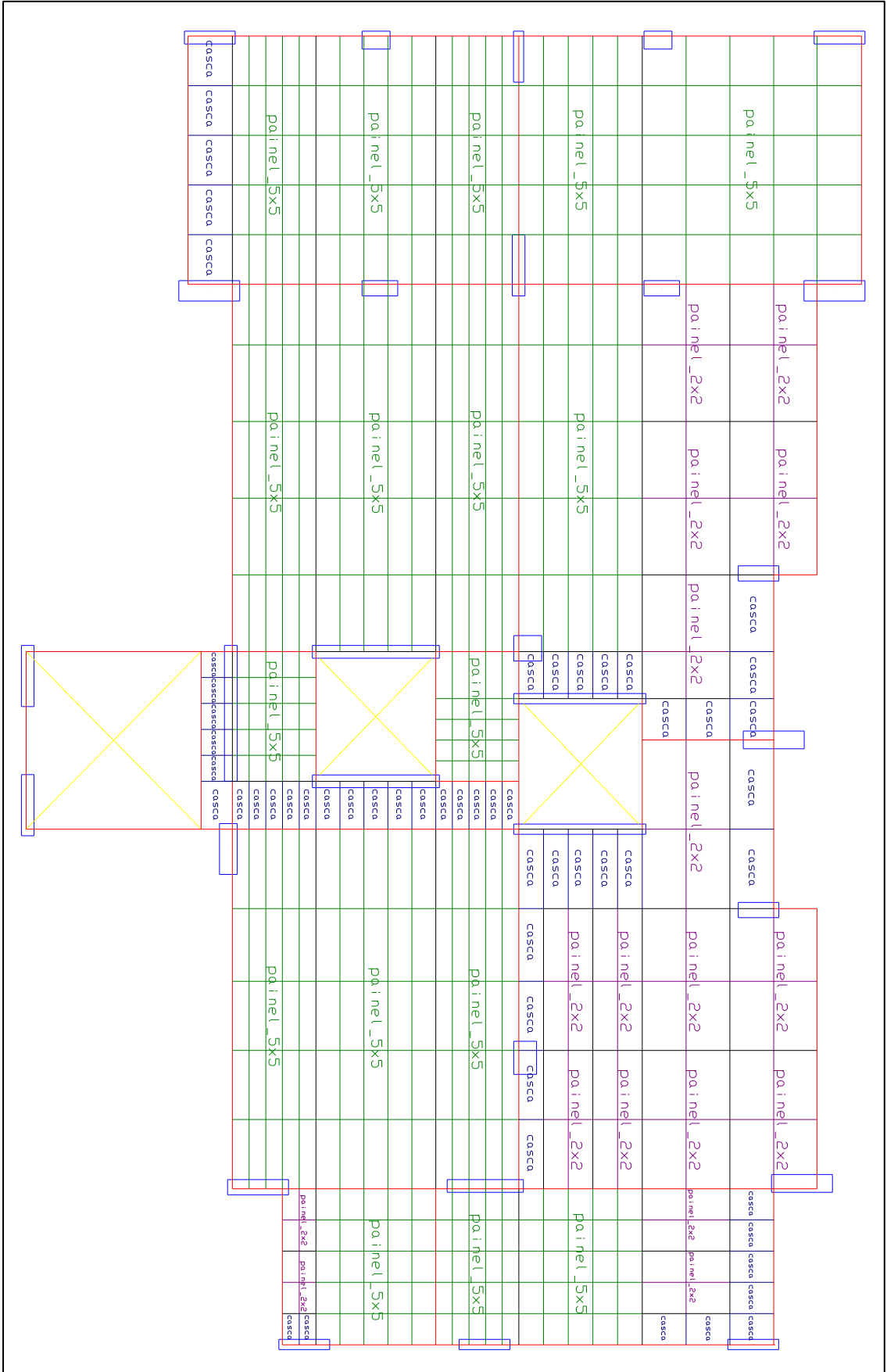


Figura 6.19: malha de elementos finitos do pavimento tipo – exemplo 4

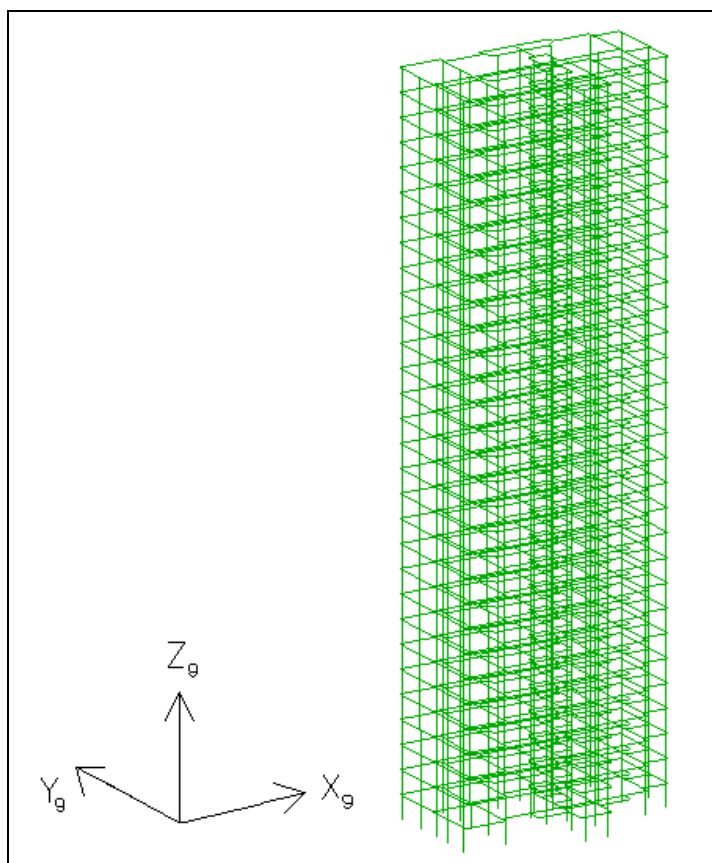


Figura 6.20: estrutura discretizada – exemplo 4

Com o objetivo de verificar a importância da rigidez relativa à utilização de paredes associadas, comparou-se a estrutura da figura 6.18 com a apresentada na figura 6.21. Observa-se que a diferença reside no fato da primeira apresentar paredes “abertas” na região dos elevadores, ao passo que a segunda apresenta tais elementos fechados, formando núcleos estruturais. As paredes do núcleo 1 (N1) apresentam espessura de 20 cm, ao passo que as do núcleo 2 (N2), 25 cm.

Ressalta-se que a malha de elementos finitos utilizada na estrutura da figura 6.21 é muito semelhante a presente na figura 6.19, exceto na região próxima aos núcleos, na qual foram necessárias pequenas mudanças. Assim, considerou-se desnecessário ilustrar tal malha.

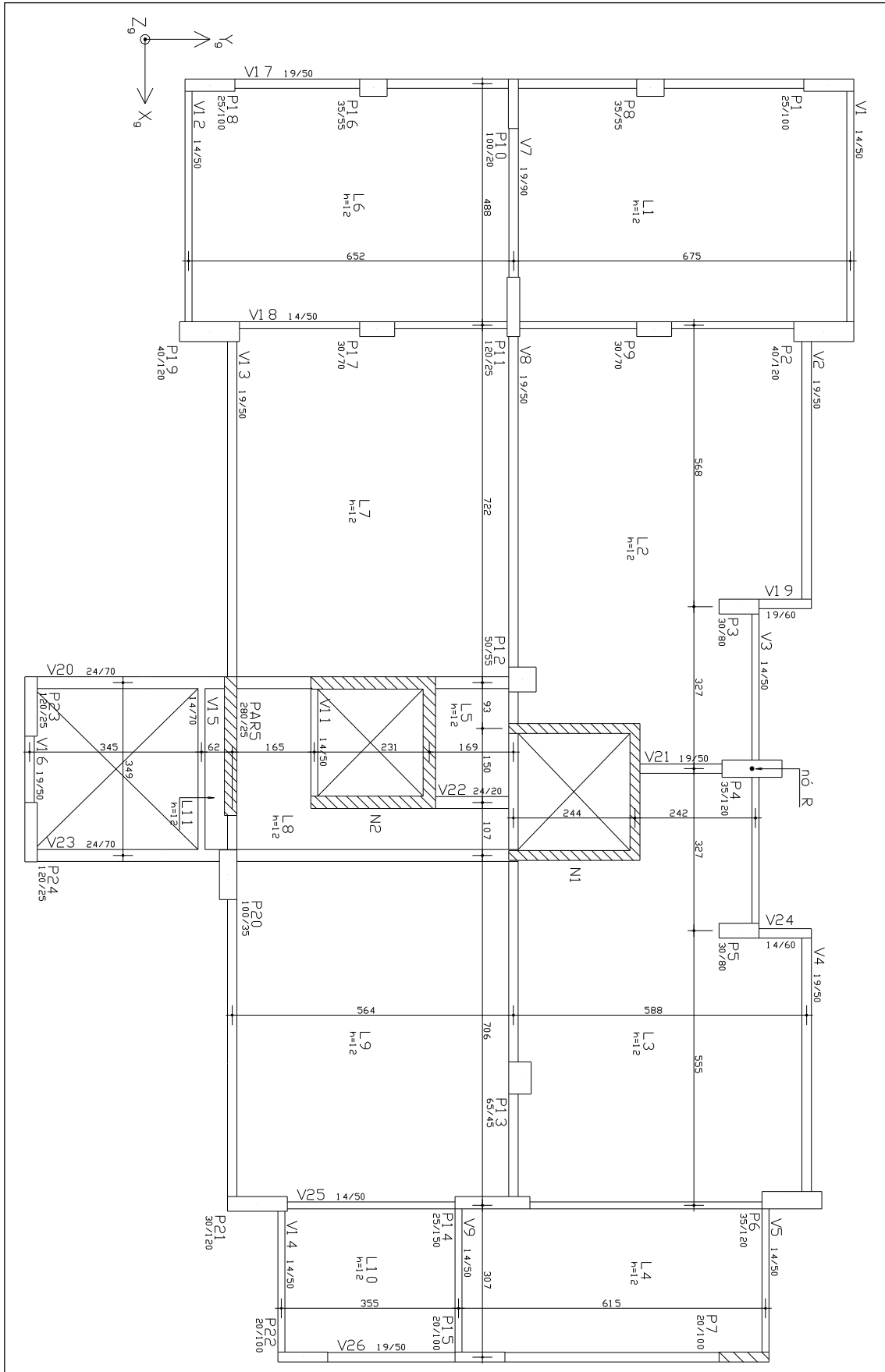


Figura 6.21: planta baixa do pavimento tipo com a presença de núcleos estruturais – exemplo 4

Um modelo computacional para a análise global tridimensional da estrutura de edifícios altos de concreto armado com a presença de paredes estruturais

As figuras e tabelas a seguir apresentam alguns resultados deste exemplo, onde os efeitos de segunda ordem são obtidos exclusivamente através do Método Simplificado. Para distinguir qual estrutura é analisada, definiu-se que:

- a) o termo “Aberto” se refere à estrutura presente na figura 6.18;
- b) o termo “Fechado” se refere à estrutura da figura 6.21.

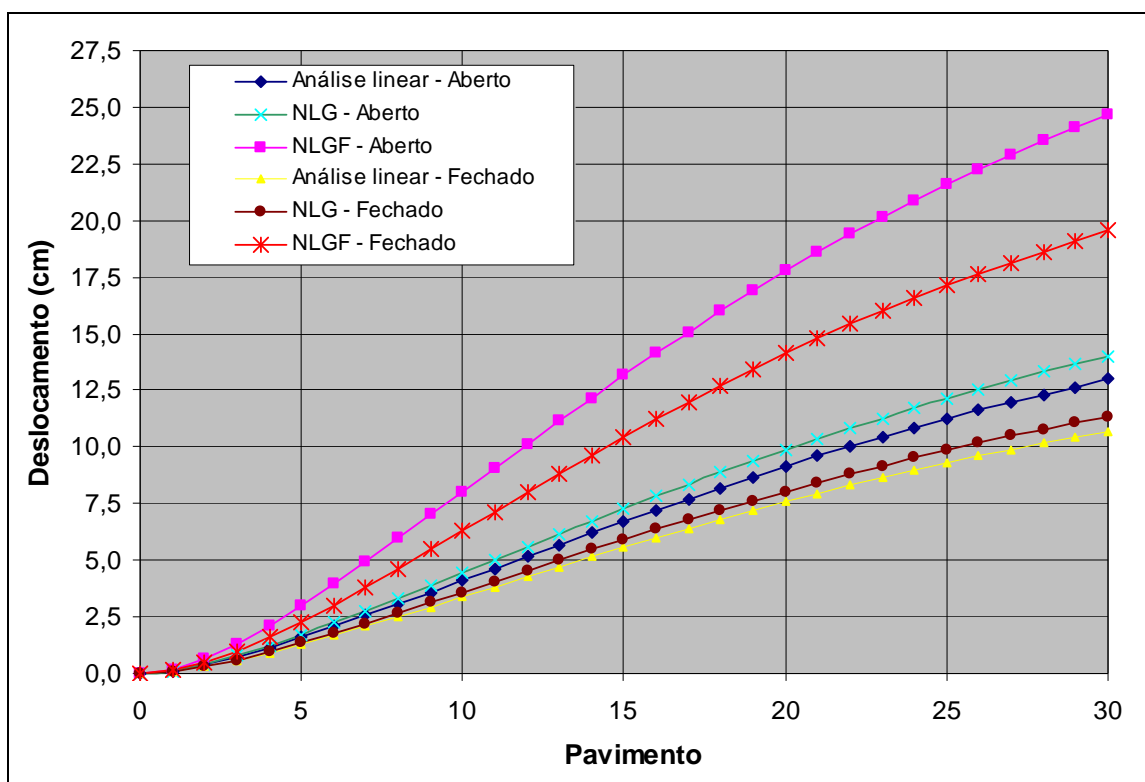


Figura 6.22: deslocamento do nó R (referência) na direção  $Y_g$  de incidência do vento

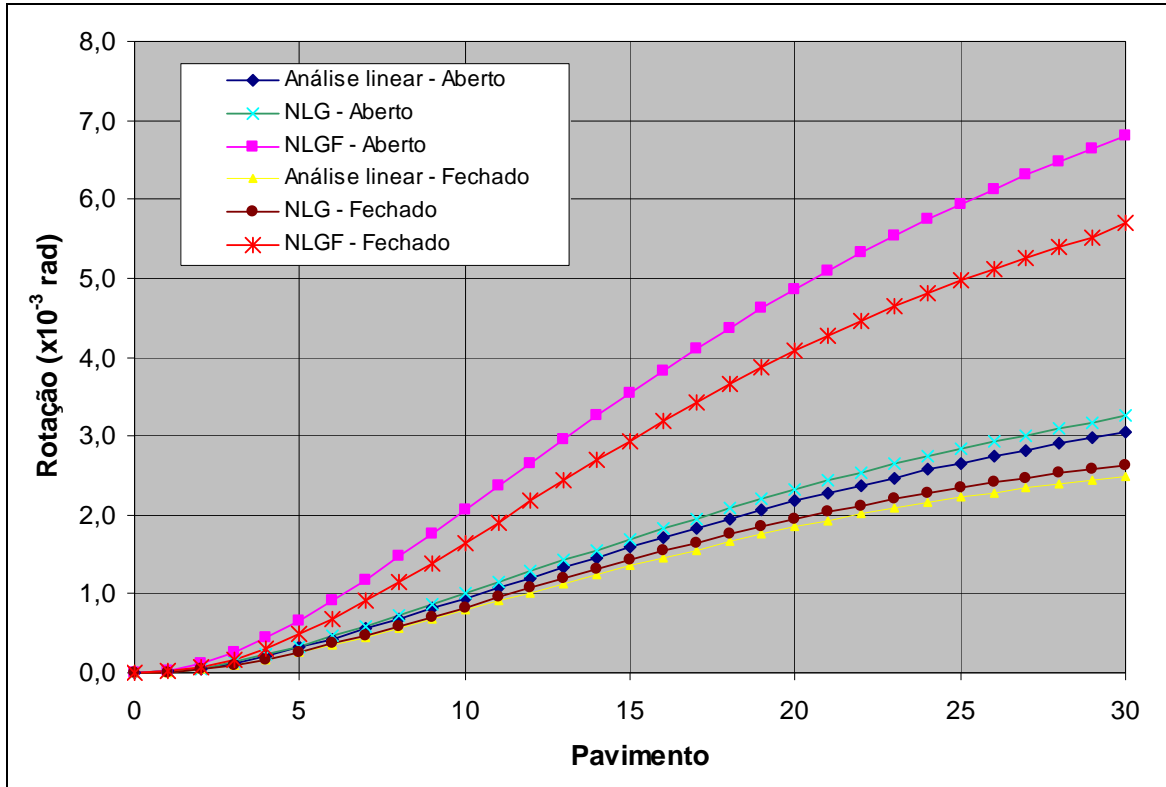


Figura 6.23: rotação do nó R (referência) em  $Z_g$  para cada pavimento

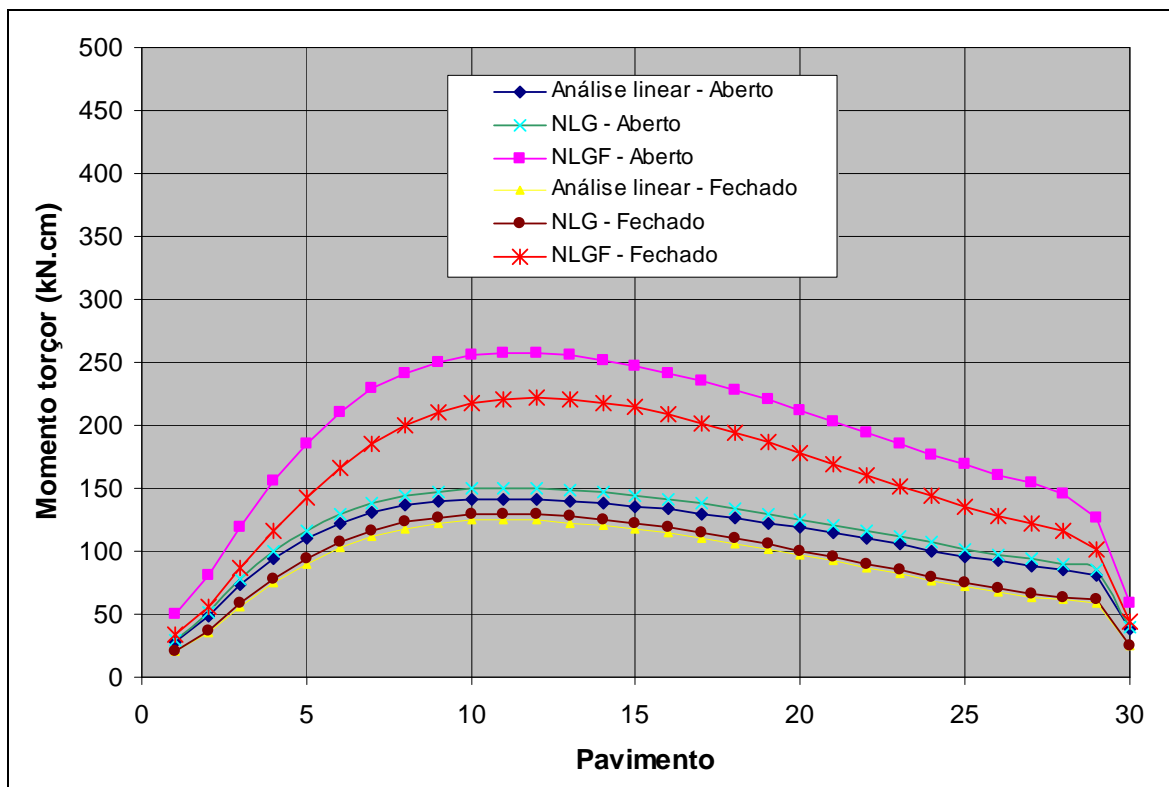


Figura 6.24: momento torçor inferior  $M_{z_g}$  no pilar P7

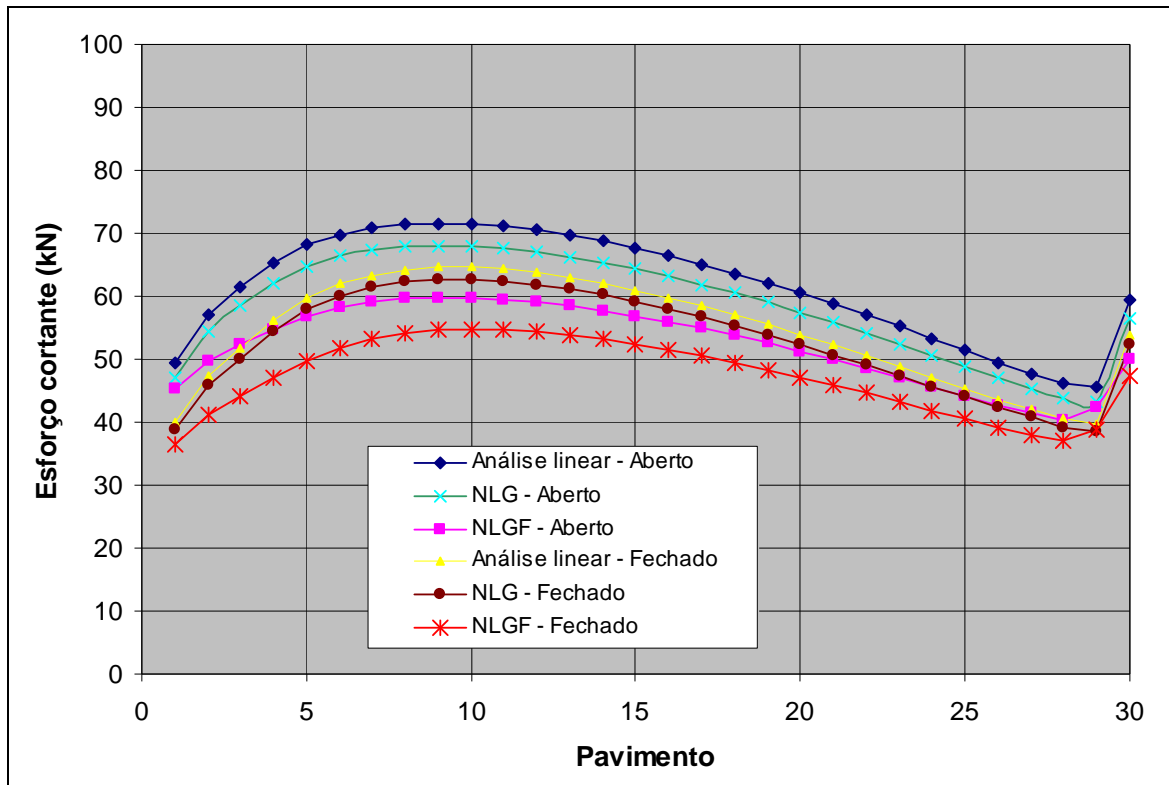


Figura 6.25: esforço cortante superior  $V_{yg}$  no pilar P7

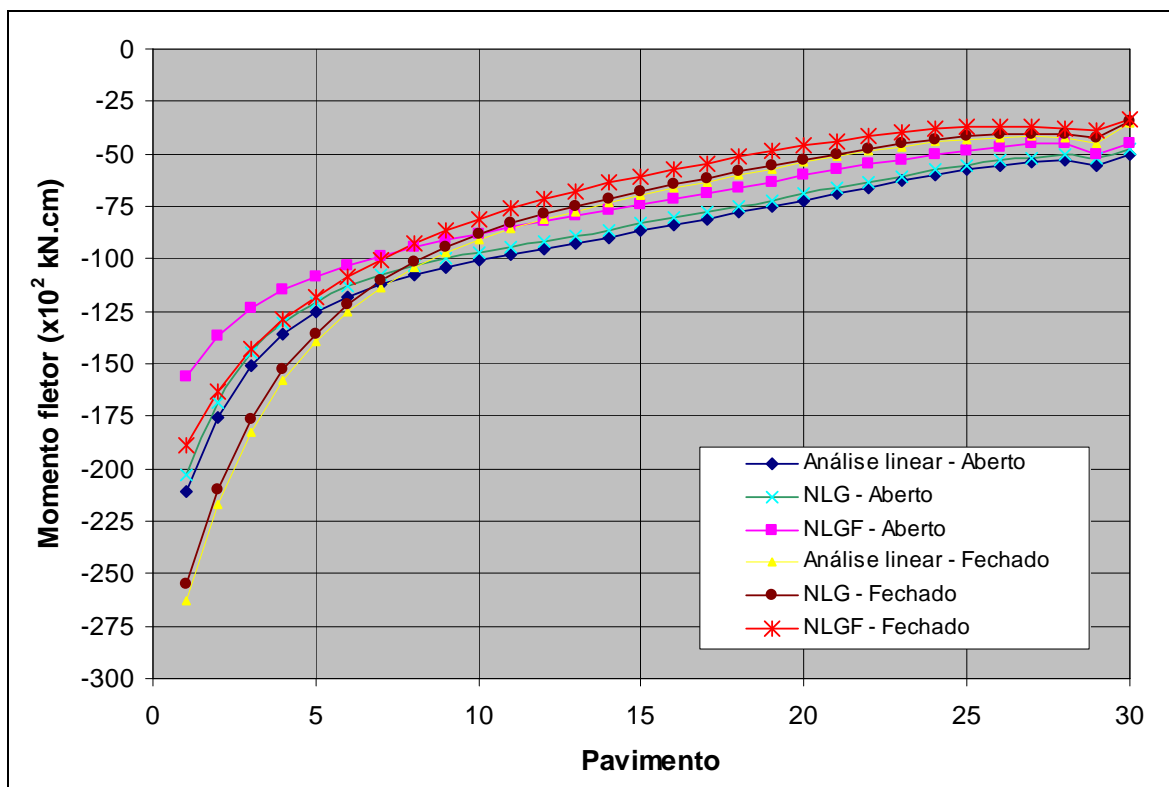


Figura 6.26: momento fletor inferior  $M_{xg}$  no pilar P7

Através da figura 6.22, percebe-se que o deslocamento do nó R (referência) no topo da estrutura “aberta” para a análise linear foi de 12,99 cm. Já para a estrutura “fechada” este valor se reduziu a 10,69 cm. Seguindo com as observações, para a análise NLG os valores são: 14,03 cm (aberto) e 11,34 cm (fechado). Finalmente, para a análise NLGF, confrontam-se os seguintes deslocamentos: 24,67 cm (aberto) e 19,54 cm (fechado). De maneira geral, para o caso estudado, fica evidenciada uma diminuição de deslocamentos, na faixa de 17% a 21%, quando se considera a estrutura formada por núcleos estruturais.

De modo semelhante aos deslocamentos, as rotações para o mesmo nó (figura 6.23) também diminuíram com a consideração dos núcleos estruturais. A rotação no topo da estrutura “aberta” para a análise linear foi de 0,00305 rad, ao passo que este valor se reduziu a 0,0025 rad para a estrutura “fechada”. Para a análise NLG os valores são: 0,00325 rad (aberto) e 0,00263 rad (fechado). Por último, para a análise NLGF, confrontam-se as seguintes rotações: 0,00679 rad (aberto) e 0,00569 rad (fechado). Evidencia-se, para o caso estudado, uma diminuição de rotações na ordem de 16% a 19%.

As figuras 6.24 e 6.25 mostram que o momento torçor inferior  $Mz_g$  e o esforço cortante superior  $Vy_g$  no pilar P7 para a estrutura fechada são, de maneira geral, menores do que para a estrutura aberta (considerando valores em módulo). Em contrapartida, acontece o oposto quando se estuda o momento fletor inferior  $Mx_g$  no mesmo pilar, conforme a figura 6.26.

As tabelas 6.11 e 6.12, a seguir, comparam a porcentagem de cargas absorvidas na fundação para a estrutura “aberta” e “fechada”, respectivamente.

Tabela 6.11: porcentagem da carga absorvida pelos elementos na fundação – Aberto

Elemento estrutural	Carga Horizontal (vento)				Carga Vertical		
	Tipo de análise				Tipo de análise		
	Linear	NLG	NLGF		Linear	NLG	NLGF
Conjunto de pilares	44,2%	43,1%	39,3%		75,2%	74,8%	74,7%
PAR1	14,2%	14,5%	15,1%		6,0%	6,1%	6,3%
PAR2	12,6%	12,8%	13,4%		5,7%	5,8%	5,8%
PAR3	16,7%	17,0%	18,9%		4,1%	4,2%	4,3%
PAR4	11,2%	11,4%	12,0%		4,1%	4,2%	4,0%
PAR5	1,1%	1,2%	1,3%		4,9%	4,9%	4,9%

Tabela 6.12: porcentagem da carga absorvida pelos elementos na fundação – Fechado

Elemento estrutural	Carga Horizontal (vento)				Carga Vertical		
	Tipo de análise				Tipo de análise		
	Linear	NLG	NLGF		Linear	NLG	NLGF
Conjunto de pilares	33,4%	32,1%	29,3%		72,0%	71,7%	71,9%
N1	31,9%	32,5%	33,1%		13,6%	13,8%	13,6%
N2	33,7%	34,4%	36,6%		10,1%	10,2%	10,1%
PAR5	1,0%	1,0%	1,0%		4,3%	4,3%	4,4%

Observando a tabela 6.11, nota-se que, para a análise linear, as paredes isoladas (PAR1 a PAR5) absorvem juntas 55,8% do carregamento horizontal. Já para as análises NLG e NLGF, este valor aumenta para 56,9% e 60,7%, respectivamente. Isso demonstra que quanto maior o deslocamento global da estrutura, maior é a importância da rigidez proporcionada pelas paredes para absorver as cargas de vento. Em contrapartida, para o carregamento vertical, as paredes não apresentam o mesmo comportamento, pois a porcentagem de carga absorvida se mantém aproximadamente constante, independentemente do tipo de análise.

A tabela 6.12 mostra que, para a análise linear, os núcleos estruturais (N1 e N2) absorvem juntos 65,6% das cargas de vento. Já para as análises NLG e NLGF, este valor aumenta para 66,9% e 69,7%, respectivamente. Fica evidente, portanto, que a elevada rigidez dos núcleos estruturais acaba por absorver grande parte do carregamento horizontal. Já para as cargas



verticais, de maneira análoga às paredes isoladas, os núcleos acabam absorvendo uma porcentagem de carga proporcional às suas áreas transversais no pavimento.

O núcleo N1 absorve, em média, 4,9% a mais de carga horizontal em comparação à porcentagem de carga absorvida conjuntamente pelas duas paredes isoladas (PAR1 e PAR2) das quais se originou. Paralelamente, o núcleo N2 absorve, em média, 5,9% a mais de carga que as paredes PAR3 e PAR4 juntas.

A deformada da estrutura “aberta”, devido ao vento na direção  $Y_g$ , é mostrada na figura 6.27. Percebe-se que esta deformada apresenta curvatura semelhante àquela da figura 2.7-c. Como é esperado, este fato ocorre porque o sistema de contraventamento é formado por paredes resistentes associadas a pórticos.

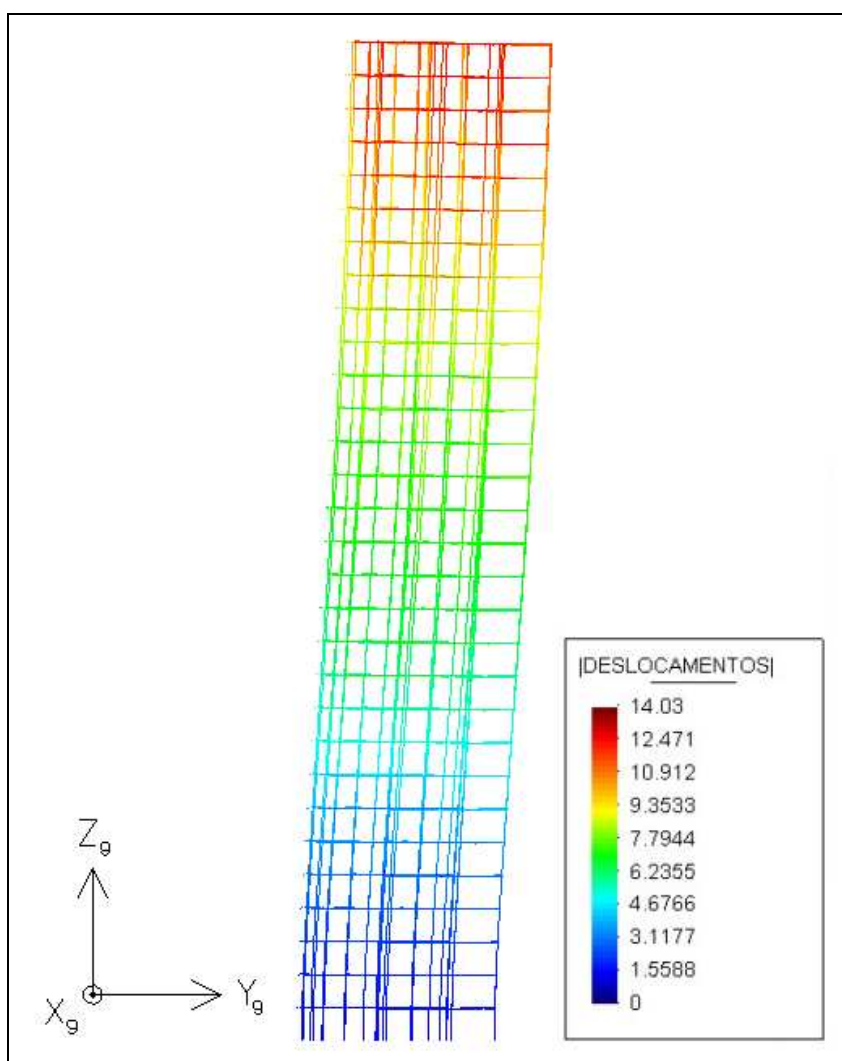


Figura 6.27: estrutura deformada – exemplo 4

O parâmetro de instabilidade global  $\alpha$  calculado para a estrutura aberta resultou em 0,95; valor superior ao limite para contraventamento feito por pórticos associados a pilares-parede ( $\alpha_1=0,6$ ). Já o coeficiente  $\gamma_z$  resultou em 1,19; valor também superior ao limite ( $\gamma_z=1,10$ ). Isto evidencia a necessidade da consideração dos efeitos globais de segunda ordem. Por sua vez,  $\alpha$  e  $\gamma_z$ , calculados para a estrutura fechada, resultaram em 0,87 e 1,14, respectivamente. Desse modo, nota-se uma diminuição de 8,4% para  $\alpha$  e de 4,2% para  $\gamma_z$  quando se considera a estrutura formada por núcleos estruturais.

De forma análoga ao exemplo 3, salienta-se que a validade da aplicação do parâmetro  $\alpha$  se limita a estruturas simétricas. Embora as estruturas analisadas neste exemplo não sejam perfeitamente simétricas, considerou-se interessante apresentar os resultados para este parâmetro.

## 7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Este trabalho tratou da análise tridimensional de estruturas de edifícios altos de concreto armado, considerando a presença de paredes estruturais. Foi desenvolvido um modelo computacional em linguagem FORTRAN 90, baseado no Método dos Elementos Finitos associado à análise matricial de estruturas. No modelo implementado, as lajes e as paredes estruturais foram discretizadas através de elementos de casca poliédrica. Já as vigas e os pilares foram analisados através de elementos de barra de pórtico espacial.

A não linearidade geométrica foi considerada de maneira simplificada e de forma exata a partir de uma formulação desenvolvida por Argyris et al. (1979). A não linearidade física foi considerada pela redução da rigidez dos elementos através de um fator fixo, função do nível de fissuração esperado, conforme prescreve a NBR6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007).

No primeiro exemplo, mostrou-se que a utilização da hipótese de diafragma rígido das lajes associada à subestruturação constitui uma técnica eficiente, permitindo um ganho computacional expressivo, sem perda de precisão nos resultados.

A finalidade do exemplo 2 foi mostrar o procedimento de implementação do programa para uma estrutura com sistema estrutural composto exclusivamente por pórticos. Comparando resultados obtidos por outro autor (Martins, 1998), verificou-se que as análises linear e não linear geométrica pela formulação de Argyris et al. (1979) apresentaram resultados bastante compatíveis. Não obstante, comparando as duas análises não linear geométricas, os resultados do Método Simplificado variaram um pouco mais, porém nunca além de 10%.

De modo semelhante, o exemplo 3 demonstrou a implementação do programa, mas desta vez para uma estrutura com sistema de contraventamento formado por paredes estruturais. Tal estrutura já havia sido estudada anteriormente por Martins (2001). Novamente, a análise NLG pelo Método Simplificado apresentou resultados diferindo no máximo em 10% aos obtidos pela formulação de Argyris et al. (1979).

Finalmente, o exemplo 4 mostrou uma estrutura projetada e construída na cidade de Curitiba. Compararam-se duas opções estruturais: um sistema de paredes isoladas e um sistema de

paredes associadas. De maneira geral, evidenciou-se uma diminuição na faixa de 17% a 21% para os deslocamentos e de 16% a 19% para as rotações, quando se considera a estrutura formada por paredes associadas (no caso, núcleos estruturais). Além disso, a importância da rigidez proporcionada pelos núcleos estruturais ficou evidenciada pelo fato destes elementos terem absorvido, em média, 9,6% a mais de cargas de vento na fundação, quando comparada à porcentagem de carga absorvida pelas paredes isoladas. Em relação aos parâmetros de instabilidade global, houve uma diminuição de 8,4% para  $\alpha$  e de 4,2% para  $\gamma_z$  quando se considera a estrutura composta por paredes associadas.

Assim, é possível afirmar que os objetivos do trabalho foram alcançados, deixando-se as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

- a) consideração de trechos rígidos horizontais nas ligações viga-pilar;
- b) consideração de trechos rígidos verticais nas ligações pilar-pilar;
- c) avaliação da não linearidade física dos materiais através de um método mais refinado, como, por exemplo, a formulação de Branson ou por meio dos diagramas momento-curvatura de cada seção;
- d) substituição do Método Simplificado de análise NLG por um método mais exato, que contemple de forma mais precisa a não linearidade de cascas poliédricas;
- e) implementação de uma entrada de dados mais eficiente, permitindo maior velocidade na modelagem das estruturas a serem analisadas;
- f) implementação de novos superelementos do tipo painel, facilitando a discretização das malhas de elementos finitos;
- g) consideração da flexibilização das ligações viga-pilar. É possível ao se considerar a barra como tendo duas "molas" à rotação nos seus extremos, que representam ligações semi-rígidas.

Como os tópicos citados acima são praticamente independentes, as sugestões podem ser abordadas em estudos individuais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADAMS, J. C.; BRAINERD, W. S.; MARTIN J. T.; SMITH, B. T.; WAGENER, J. L. **FORTRAN 90 handbook**. New York, McGraw-Hill Book Company, 1992.

ANTUNES, H.M.C.C. **Carregamento crítico de instabilidade geral para estruturas tridimensionais de edifícios altos**. 1978. 160 p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

ARGYRIS, J. H.; HILPERT, O.; MALEJANNAKIS, G.A.; SCHARPF, D.W. On the geometrical stiffness of a beam in space – a consistent v. w. approach. In: **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, n. 20, p. 105-131, 1979.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto: procedimento. Rio de Janeiro, 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6123**: Forças devidas ao vento em edificações: procedimento. Rio de Janeiro, 1988.

BAKER, W. F. et al. Structural analysis and design of the world's tallest reinforced concrete building. In: **Multi-purpose High-rise Towers and Tall Building**, E & FN Spon, London, 1997.

BATHE, K-J. **Finite element procedures in engineering analysis**. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall, 1982.

BECK, H.; KÖNIG, G. Restraining forces in the analysis of tall buildings. In: **Symposium on tall buildings**, Oxford. Proceedings. p. 513-536, 1966.

BIANCHI, A. J. **A subestruturação aplicada ao projeto de estruturas de edifícios altos**. 1996. 130 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

ELLWANGER, R. J. **Estruturas de edifícios altos**, 2002. 83 p. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

ELLWANGER, R. J. A utilização de superelementos na análise estrutural. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL. Anais. Porto Alegre: UFRGS/CPGEC, 1987. v.4, p.153-168: il.

FRANCO, M; VASCONCELOS, A.C. Practical assessment of second order effects in tall buildings. In: COLLOQUIUM ON THE CEB-FIP Model Code 90, Rio de Janeiro, Proceedings, p.307-324, 1991.

FUSCO, P. B. **Estruturas de concreto: solicitações normais. estados limites últimos: teoria e aplicações**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981, 464 p. : il.

GIONGO, J. S. **Concreto armado: projeto estrutural de edifícios**, 2007. 176 p. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

GOULART, M. dos S. S. **Contribuição da rigidez à flexão das lajes para a estabilidade global de edifícios**. 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro.

HOLDEN, J. T. On the finite deflections of thin beams. In: **International Journal of Solids and Structures**, vol. 8, p. 1051-1055, 1972.

MARTINS, C. H. **Contribuição da rigidez transversal à flexão das lajes na distribuição dos esforços em estruturas de edifícios de andares múltiplos, em teoria de segunda ordem**. 1998. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

MARTINS, C. H. **Análise não linear de estruturas tridimensionais de edifícios de andares múltiplos com núcleos resistentes, considerando a rigidez transversal à flexão das lajes**. 2001. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

MORI, D.D. **Os núcleos estruturais e a não-linearidade geométrica na análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos**. 1992. 196 p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

MORSCH, I. B. **Pós-processador de verificação estrutural para o sistema GAELI**. 1991. 151 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

OLIVEIRA, F. L. A. de **Consideração das lajes na análise de estruturas de edifícios altos**. 1998. 109 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

PEREIRA, G.S. **Contribuições à análise de estruturas de contraventamento de edifícios em concreto armado**. 1997. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

PHOTOBUCKET. **Image hosting, free photo sharing & video sharing**. Disponível em: <<http://photobucket.com>>. Acessado em: 04 set. 2009.

RODRIGUES JÚNIOR, S.J. **Otimização de Pilares de Edifícios Altos de Concreto Armado**. 2005. Tese (Doutorado em Engenharia) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

SCHUELLER, W. **High-Rise Building Structures**. New York, John Wiley & Sons, 1977.

SILVA, R.M. **Análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos com núcleos resistentes considerando o efeito p-delta**. 1989. 239 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

SMITH, B. S.; GIRGIS, A.M. Simple analogous frames for shear wall analysis. In: **Journal of Structural Engineering**, n. 11, p. 2655-2666, vol.110, nov. 1984.

SMITH, B. S.; COULL, A. **Tall Building Structures. Analysis and Design**. A Wiley – Interscience Publication, 1991.

SOUTO, A. K. **Análise de estruturas de edifícios altos submetidos a carregamentos horizontais e verticais**. 1993. 130 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

TECNISA. **Construtora Tecnisa**. Disponível em: < <http://tecnisa.com.br>>. Acessado em: 04 set. 2009.

TIMOSHENKO, S. P. **History of strength of materials: with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures**. New York: McGraw-Hill, 1953.

TIMOSHENKO, S. P. **Theory of elasticity**. 3. ed., New York: McGraw-Hill, 1970.

VLASSOV, B. Z. **Pièces longues en voiles minces**. Paris: Eyrolles, 1962.

YAGUI, T. **Estruturas constituídas de paredes delgadas com diafragmas transversais**. 1971. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method. Basic Formulation and Linear Problems**. 4.ed., London: McGraw-Hill, v.1, 1989.

ZIENKIEWICZ, O. C.; PAREKH, C. J.; TEPLY, B. Three-dimensional analysis of buildings composed of floor and wall panels. In: **Proc. Instn. Civ. Engrs**, v. 2, p. 316-332, jul. 1971.

**APÊNDICE A – Coordenadas dos pontos de Gauss e pesos de integração  
para o elemento finito implementado**



Os pontos de Gauss utilizados estão representados na figura A1, bem como os oito nós do elemento. As coordenadas dos pontos e os pesos de integração (utilizados com precisão computacional dupla) estão mostrados na tabela A1.

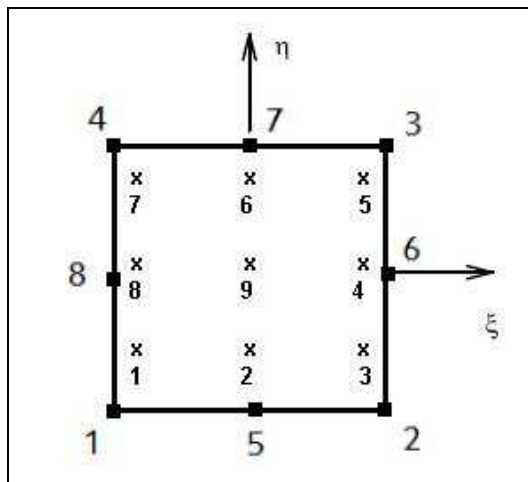


Figura A1: pontos de Gauss e nós do elemento

Tabela A1: coordenadas dos pontos de Gauss e pesos de integração

Ponto	$\xi$	$\eta$	$w_i$	$w_j$	$w_{total}$
1	$-\frac{\sqrt{15}}{5}$	$-\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{25}{81}$
2	0	$-\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{40}{81}$
3	$\frac{\sqrt{15}}{5}$	$-\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{25}{81}$
4	$\frac{\sqrt{15}}{5}$	0	$\frac{5}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{40}{81}$
5	$\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{25}{81}$
6	0	$\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{40}{81}$
7	$-\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{25}{81}$
8	$-\frac{\sqrt{15}}{5}$	0	$\frac{5}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{40}{81}$
9	0	0	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$