Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Filosofia
Curso de Pós-graduação em Filosofia

O Projeto Logicista de Frege

Ricardo Seara Rabenschlag
Orientador: Dr. Balthazar Barbosa Filho
Coorientadora: Dra. Cora Diamond

Tese submetida ao Curso de Pós-graduação em Filosofia como requisito para a obtenção do título de Doutor em Filosofia.

Porto Alegre - RS

Abril de 2002

“O Projeto Logicista de Frege” tese de Ricardo Seara Rabenschlag realizada sob a orientação do professor Dr. Balthazar Barbosa Filho e coorientação da professora Dra. Cora Diamond e submetida ao Curso de Pós-graduação do Instituto de Filosofia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul para a obtenção do título de Doutor em Filosofia.”

"Die Zeichen sind für das Denken von derselben Bedeutung wie für die Schiffahrt die Erfindung, den Wind zu gebrauchen, um gegen den Wind zu segeln. Deshalb verachte niemand die Zeichen. Von ihrer zweckmäßigen Wahl hängt nicht wenig ab."

Johann Gottlob Frege

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar sou infinitamente grato à minha esposa pela paciência e incentivo que nunca faltaram durante todos estes anos de estudos, tanto no Brasil como no exterior. Agradeço também aos meus pais, irmãos e irmãs que, desde o início, sempre me estimularam a seguir trabalhando nessa área tão menosprezada nos dias de hoje.

Ao professor Balthazar Barbosa Filho, sou imensamente grato não apenas pela sua orientação sempre precisa e cuidadosa, tanto no mestrado como no doutorado, mas sobretudo pela influência decisiva que os seus cursos na graduação exerceram sobre toda uma geração de estudantes de filosofia com a qual tive o prazer de conviver durante os meus anos de graduação e pós-graduação na UFRGS. À professora Cora Diamond, orientadora dos meus estudos junto à *University of Virginia*, devo a existência desta tese. Agradeço também aos professores Paulo Estrella Faria e Alexandre Durren Gerzoni, ambos da UFRGS, pelas estimulantes discussões havidas durante os encontros do grupo de estudos de lógica e ontologia. Sou igualmente grato a ambos pelos comentários, feitos durante o exame de qualificação, que resultaram em modificações substanciais no texto final da tese. Por fim, gostaria de agradecer ao governo brasileiro, por ter proporcionado o apoio financeiro sem o qual a realização do presente trabalho não teria sido possível.

À Laura

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Uma reação muito comum a que estão sujeitos aqueles que se dispõem a ler *Os Fundamentos da Aritmética*, é o sentimento de terem sido enganados por Frege. Quem já passou por esta experiência recorda-se nitidamente da promessa, feita no §3, de que as questões acerca da natureza *a priori* ou *a posteriori*, sintética ou analítica das verdades aritméticas encontrariam ali uma resposta; e lembra-se, com nitidez ainda maior, do desapontamento que sentiu ao ver sua esperança em alcançar a terra firme da certeza se transformar na certeza de continuar imerso no oceano da dúvida.

Tanto os intérpretes tradicionais, dos quais Dummett[1] é o mais influente, quanto os chamados revisionistas, como Weiner[2], cujo trabalho talvez seja o que melhor representa esta nova corrente, e também os que oscilam entre estes dois extremos, como é o caso de Beaney[3], procuram explicar esta postura aparentemente leviana, alegando que *Os Fundamentos da Aritmética* desempenha uma função puramente pedagógica, e que o não cumprimento do que fora inicialmente prometido, é perfeitamente desculpável, na medida em que serve à

---

[1] Cf. *Frege: Philosohy of Mathematics*, p.12.
[2] Cf. *Frege*, p. 70.
[3] Cf. *The Frege Reader*, p.5.

finalidade mais elevada de despertar no leitor a necessidade de uma investigação mais precisa dos fundamentos da aritmética.

Sem querer desmerecer a interpretação vigente, não podemos deixar de observar que ela não faz juz ao retrato que o próprio Frege apresenta de *Os Fundamentos da Aritmética*. Com efeito, no §4, Frege afirma que a tarefa principal do livro é dar uma resposta à questão "É o conceito de número definível?". O livro não tem, por conseguinte, uma função meramente pedagógica. Não se trata simplesmente, como afirma Beaney[4], de uma exposição informal do projeto a ser levado à cabo em *Leis Básicas da Aritmética*.

Ao contrário da promessa feita no §3, o compromisso firmado por Frege, no § 4, não é desrespeitado pelo fato de a tese logicista não ter sido demonstrada, mas apenas tornada verossímil. Muito pelo contrário, ele é uma condição necessária para sua verdade, pois, se algo é impossível, a probabilidade de que ocorra é nula. Em outras palavras, ao contrário de servir apenas como um estímulo ao projeto logicista, *Os Fundamentos da Aritmética* é parte integrante deste esforço, na medida em que uma condição necessária para a sua realização é ali estabelecida de forma definitiva.

Assim como Leibniz, nos *Novos Ensaios*, tem razão em criticar a prova ontológica das *Meditações*, uma vez que Descartes não elimina a possibilidade de que o conceito de "Deus" seja contraditório; Frege teria razão em apontar a existência de uma lacuna semelhante no argumento logicista dos *Novos Ensaios*[5], uma vez que Leibniz não descarta a possibilidade de que o conceito de "número"

---

[4] *Ibid*., p.83.
[5] Cf. Livro IV, Cap. VII.

seja indefinível, o que, segundo Frege, acarretaria a impossibilidade de redução da aritmética à lógica.

A julgar pela interpretação vigente, o projeto logicista de Frege esta sujeito a esta mesma crítica, pois, a menos que *Os Fundamentos da Aritmética* seja considerado como parte da argumentação fregiana em favor da tese logicista, esta importante lacuna não terá sido preenchida.

O objetivo principal do nosso trabalho, é oferecer uma interpretação de *Os Fundamentos da Aritmética* que resgate o papel fundacional que esta obra desempenha no projeto logicista de Frege. Sendo este um trabalho de natureza essencialmente exegética, afinal não pretendemos oferecer soluções próprias, mas tão somente mostrar como Frege pretendeu ter respondido à questão acerca da definibilidade do número, é bem provável que alguns leitores considerem nulo o seu valor filosófico, mesmo antes de terem iniciado a leitura do texto proporiamente dito. Embora críticas desta natureza sejam geralmente feitas por profissionais de outras áreas, também entre os filósofos há aqueles que consideram a história da filosofia uma disciplina meramente auxiliar. Para os partidários desta opinião, a utilidade do estudo das obras de Frege para a filosofia é similar à utilidade que o estudo da vida de Frege tem para a compreensão de suas obras.

Contra essa opinião, acreditamos que a exegese filosófica, sobretudo a de caráter histórico, é parte essencial da investigação filosófica. Se isso é correto e a nossa interpretação do pensamento de Frege for aceitável, estaremos dando uma contribuição relevante na medida em que algumas questões e posturas filosóficas atuais poderão ser examinadas sob uma nova perspectiva.

I. ANÁLISE FUNCIONAL

Ao final de uma carta enviada ao discípulo de Brentano, Anton Marty, Frege, após uma breve exposição de alguns dos pontos essenciais da sua conceitografia, faz o seguinte desabafo[6]:

[6] *Philosophical and Mathematical Correspondence*, p.99. As citações de *Os Fundamentos da Aritmética*, bem como do artigo *Sobre a Justificação Científica de uma Conceitografia*, serão feitas a partir da tradução de Luís Henrique Lopes dos Santos. As demais traduções, incluindo a da passagem citada, são de minha inteira responsabilidade.

> "Por favor, me desculpe por esta carta que resulta da minha necessidade insatisfeita de comunicação. Encontro-me num círculo vicioso: Antes de darem atenção à minha conceitografia, as pessoas querem saber do que ela é capaz, e eu, de minha parte, não posso mostrar isso sem pressupor uma certa familiaridade com a conceitografia."

Atentos à reclamação de Frege, iniciaremos nosso trabalho examinando a noção fregiana de análise lógica. Para não nos desviarmos do essencial, procuraremos, antes de mais nada, identificar a finalidade que orientou Frege na construção desta ferramenta simbólica revolucionária que é a conceitografia. A seguinte passagem do artigo *Sobre a Justificação Científica de uma Conceitografia*, é particularmente esclarecedora a este respeito:

> "A razão dos defeitos salientados [ambigüidade, etc.] está em uma certa maleabilidade e mutabilidade da linguagem [natural], que é por outro lado condição de sua capacidade de desenvolvimento e de sua aplicabilidade variada. Sob este aspecto, a linguagem [natural] pode comparar-se à mão, que, apesar de sua capacidade de se acomodar às mais diferentes tarefas, não nos basta. Criamo-nos mão artificiais, instrumentos para fins particulares que operam de maneira mais precisa do que a mão seria capaz. E o que torna possível a precisão? Justamente a rigidez, a imutabilidade das partes, cuja falta torna a mão tão diversamente hábil. Assim, também a linguagem verbal não basta. Carecemos de um conjunto de sinais do qual se expulse toda ambigüidade, e cuja forma rigorosamente lógica não deixe escapar o conteúdo."

A conceitografia, a exemplo das mãos artificiais da analogia

sugerida por Frege, é um instrumento criado pelo homem para cumprir a finalidade específica de estabelecer critérios objetivos para a avaliação da correção das demonstrações. Esta ferramenta, embora tenha sido forjada pelo lógico, é fundamental para todas as ciências. Com efeito, ao cientista não cabe apenas descrever o mundo, mas sobretudo explicá-lo e é, precisamente, à lógica que cumpre fornecer os critérios objetivos para a avaliação da correção formal das explicações científicas. Para explicar, por exemplo, porque a terra leva 365 dias para completar uma volta ao redor do Sol, e não 304, 457 ou outro número qualquer, o astrônomo lança mão de certas leis básicas da física, nesse caso, da leis do movimento de Newton, além de certas informações acerca da massa dos corpos envolvidos, da distância entre eles, etc. Por fim, tomando como premissas todas estas informações, ele se empenha em deduzir a proposição “A Terra leva 365 para dar uma volta completa em torno do Sol”, pela aplicação de regras válidas de inferência e de definições. Se for bem sucedido, terá explicado, satisfatoriamente, porque a Terra leva 365 para dar uma volta completa em torno do Sol.

Como se sabe, há mais de dois mil anos antes da invenção de Frege, a silogística de Aristóteles já pretendia cumprir essa importante tarefa de servir de *canon* para a explicação científica[7]. Entretanto, assim como um alicate não é apenas mais adequado do que a mão humana para realizar certos tipos de trabalho, mas permite a execução de tarefas impossíveis de serem realizadas manualmente, a conceitografia é capaz de distinguir formas lógicas impossíveis de serem reveladas num simbolismo atrelado à sintaxe da linguagem ordinária. Apesar dos enormes esforços dos escolásticos, a silogística nunca foi capaz de apresentar uma teoria geral das inferências onde ocorrem proposições contendo múltipla generalidade[8], como é o caso da inferência abaixo:

Todo corpo atrai todo corpo;
logo, todo corpo atrai algum corpo.

---

[7] Cf. Lear, Jonathan *Aristotle:The Desire to Understand*, p.219.

Como veremos ainda nesta seção, a análise funcional está na base da capacidade que a conceitografia tem de expressar adequadamente o conteúdo de proposições gerais onde ocorrem múltiplas generalizações, o que lhe permite a formalização de inferências como a que mencionamos acima.

Sem entrar no mérito da legitimidade gramatical da noção de proposição carente de sujeito, cumpre assinalar que todo discurso com pretensão de verdade é acerca de algo e, portanto, possui ao menos um sujeito lógico. Distinguir, nas proposições, a parte que designa aquilo de que se predica da parte que designa o que está sendo predicado é fundamental para qualquer tentativa de regimentação lógica do discurso com pretensão de verdade. Na silogística de Aristóteles, as categorias de *termo sujeito* e *termo predicado* desempenham esse papel[9]; na conceitografia de Frege, a análise tradicional que divide a proposição em um termo que se refere àquilo de que se fala e em um termo que expressa o que está sendo dito, não é de modo algum abandonada. Como dissemos anteriormente, sem uma tal divisão nenhuma lógica é possível. O que Frege descarta não é a divisão em si, mas sim o modo como tradicionalmente esta divisão é efetuada, e é a esse novo método de análise lógica das proposições que ele faz alusão ao se referir à substituição da distinção tradicional entre termo-sujeito e termo-predicado, oriunda da linguagem ordinária, pela distinção entre símbolo de argumento e símbolo funcional, inspirada na linguagem da matemática.

No §9 da *Conceitografia*, Frege, pela primeira vez, procura explicar esta importante distinção do seguinte modo:

---

[8] Cf. Kneale & Kneale, *O Desenvolvimento da Lógica*, p..251-80.

> "Se numa expressão (cujo conteúdo pode não ser ajuizável) um símbolo, simples ou composto, que ocorre uma ou mais vezes na expressão, for considerado como substituível por outro símbolo, em algumas ou todas as suas ocorrências (mas sempre pelo mesmo símbolo em todas as substituições), *chamamos a parte que permanece inalterada na expressão de função e a parte modificada, de argumento da função*."

Em primeiro lugar, cumpre observar que nessa passagem Frege não distingue claramente entre o símbolo e aquilo que é simbolizado. Ao contrário do que a leitura do texto poderia sugerir, a parte que permanece inalterada após a substituição não é aquilo que está sendo simbolizado e sim o próprio símbolo. A fim de evitar tais confusões, convém interpretar o trecho que aparece em itálico como afirmando que a parte que permanece inalterada será denominada de símbolo funcional e a parte modificada, de símbolo de argumento.

Vejamos, com base nos exemplos abaixo, em que consiste a distinção entre símbolo funcional e símbolo de argumento:

1) "O auto-retrato de Van Gogh",
2) "Van Gogh nasceu na Holanda",
3) "Van Gogh pintou Van Gogh".

Se nestas três expressões, das quais somente as duas últimas possuem conteúdos ajuizáveis, substituirmos o termo "Van Gogh" pelo termo "Rembrandt", em todas as suas ocorrências e colocarmos o termo substituto entre parênteses, para indicar o lugar onde foi feita a alteração, obteremos as seguintes expressões:

4) "O auto-retrato de (Rembrandt)",

---

[9] *Primeiros Analíticos* (26b20)

5) “(Rembrandt) nasceu na Holanda”,
6) “(Rembrandt) pintou (Rembrandt)”.

As partes inalteradas, isto é, as expressões “O auto-retrato de ( )”, “( ) nasceu na Holanda” e “( ) pintou ( )”, Frege denomina de símbolos funcionais, e as que sofreram modificação, a saber, “Van Gogh” e “Rembrandt”, ele chama de símbolos de argumento. O símbolo de argumento (que aparece entre parênteses) não é parte do símbolo funcional e sim aquilo que adicionado a ele dá origem a um símbolo saturado.

A localização dos parênteses em uma expressão, revela, pois, um determinado ponto de vista lógico; no presente caso, aquele que considera a palavra “Rembrandt” como substituível. É apenas sob um tal ponto de vista que faz sentido caracterizar uma palavra ou expressão como sendo um símbolo funcional ou um símbolo de argumento. Esse tipo de análise lógica, que consiste em dividir uma proposição, ou uma parte lógica de uma proposição[10], em um símbolo funcional e um ou mais símbolos de argumento, é o que se convencionou chamar de *análise funcional* e a afirmação de que toda proposição, ou parte lógica de proposição, pode ser assim decomposta, é o que denominaremos de *princípio da análise funcional*.

Em todos estes exemplos devemos, pois, ter o cuidado de não tomar o sinal (no presente caso, um conjunto de marcas impressas no papel) pelo símbolo (sinal com sentido): o sinal, por si só, não pertence a nenhuma categoria lógica. A análise funcional, como toda análise lógica, tem como objeto o símbolo e não o sinal. Da proposição “Van Gogh nasceu na Holanda”, enquanto sinal, pode-se dizer, por exemplo, que tem um certo comprimento, que está impressa em tinta preta, etc. Se, contudo, a considerarmos enquanto símbolo, nada disso é verdade. Apenas do símbolo "Van Gogh nasceu na Holanda", pode-se dizer que contém uma parte insaturada. Com base no que dissemos até aqui, podemos conceber três análises diferentes da proposição "Van Gogh nasceu na Holanda", na medida em que consideramos "Van Gogh" como substituível, "Holanda" ou ambas as expressões, conforme exemplificado abaixo:

2') "(Van Gogh) nasceu na (Holanda)"
2'') "(Van Gogh) nasceu na Holanda"
2''') "Van Gogh nasceu na (Holanda)"

Como dissemos anteriormente, a análise funcional não se aplica apenas às proposições, mas também às suas partes significativas. Longe de ser um mero detalhe, a constatação da possibilidade de aplicação da análise funcional a conteúdos não ajuizáveis é essencial para que possamos compreender a amplitude da revolução desencadeada pela conceitografia.

Na proposição (2'') temos um exemplo de uma parte lógica de uma proposição, isto é, uma parte que cumpre uma função lógica, que pode ser funcionalmente analisada. Com efeito, na proposição "(Van Gogh) nasceu na Holanda", "( ) nasceu na Holanda", é um exemplo de símbolo funcional, que, não obstante o seu caráter insaturado, pode ser visto como resultando do preenchimento do segundo lugar vazio do símbolo relacional "( ) nasceu na (

[10] Por "parte lógica de uma proposição" entende-se uma expressão, ajuizável ou não, que cumpra uma determinada função lógica no contexto da proposição em que ela ocorre.

)” pelo símbolo de argumento “Holanda”; razão pela qual “(Van Gogh) nasceu na Holanda” não representa a única análise possível da proposição “Van Gogh nasceu na Holanda”. É perfeitamente legítimo atribuir a essa mesma proposição uma forma lógica relacional, analisando-a como “(Van Gogh) nasceu na (Holanda)”; ou ainda, uma forma predicativa distinta daquela que lhe foi atribuída em (2’’), analisando-a como “Van Gogh nasceu na (Holanda)”.

Entretanto, se por “análise”, compreendermos uma análise efetuada nos moldes tradicionais, ou seja, uma divisão da proposição em duas partes, uma das quais determina o termo-sujeito e a outra, o termo-predicado, torna-se evidente a impossibilidade de analisarmos expressões não proposicionais, já que por definição, só é possível distinguir sujeito e predicado em proposições; daí a importância do uso, por parte de Frege, das categorias mais abrangentes de símbolo de argumento e símbolo funcional.

Ainda nessa acepção tradicional do termo, fica igualmente descartada qualquer possibilidade de existir múltiplas análises de uma mesma proposição. Com efeito, se o que era sujeito for considerado predicado, ocorrerá, inevitavelmente, quer uma alteração do sentido da proposição original, o que fica evidente quando invertemos sujeito e predicado na proposição universal e verdadeira “Todos homens são mortais”, que se transforma então na proposição falsa “Todos mortais são homens”; quer um erro categorial, no caso de operarmos a mesma inversão na proposição singular “Sócrates é mortal”, o que resulta na expressão sem sentido “Mortal é Sócrates”. Em ambos os casos a análise não é legítima: no primeiro, porque altera o sentido, no segundo, porque o aniquila.

Não podemos esquecer, contudo, que a palavra "análise" foi originalmente empregada como sinônimo de "definição" e, por conseguinte, como um método de análise de expressões não proposicionais, mais especificamente, de conceitos. Nesse sentido, pode-se dizer que a tradição dispunha de duas ferramentas de análise: uma aplicada exclusivamente às proposições, que poderíamos chamar de análise predicativa, e que se inicia com Aristóteles; outra empregada unicamente para os conceitos, de caráter definicional, e que, a julgar pelo testemunho de Aristóteles, remonta à Sócrates.

Este outro tipo de análise, que poderíamos chamar de análise definicional, não diz respeito à forma lógica dos conceitos e sim ao seu conteúdo. A análise socrática, que os escolásticos chamaram de "definição real", é uma busca da essência. Quando no *Teeteto* de Platão, Sócrates pergunta à Teeteto "O que é o conhecimento?", ele não está pedindo uma definição puramente nominal da palavra "conhecimento", nem tampouco uma caracterização formal, no sentido de uma determinação da função lógica da palavra. Ainda que seja correto dizer que Sócrates está buscando uma forma, isto deve ser entendido no sentido de uma busca pela essência[11].

Após esta breve incursão no terreno da lógica tradicional, vejamos em que sentido podemos falar em termos conceituais no contexto do novo paradigma de análise lógica anunciado por Frege na *Conceitografia*.

Já vimos como os símbolos funcionais "( ) nasceu na Holanda", "Van Gogh nasceu na ( )" e "( ) nasceu na ( )" podem ser obtidos a partir da análise funcional da proposição “Van Gogh nasceu na Holanda”. Ora, estas partes insaturadas que, ao serem preenchidas por símbolos do tipo “Van Gogh” e “Holanda”, resultam em símbolos saturados de natureza proposicional, correspondem, na *Conceitografia*, àquilo que os lógicos tradicionais denominam de termos conceituais. Daí Frege dizer que a análise funcional leva naturalmente à formação de símbolos conceituais[12]. Esta concepção funcional dos símbolos conceituais, permite à Frege dar um tratamento homogêneo para os símbolos conceituais e relacionais, ao incluir ambos na categoria lógica dos símbolos funcionais[13]. O que diferencia os símbolos conceituais dos símbolos relacionais é, pois, a quantidade de lugares de argumento. Símbolos conceituais são símbolos funcionais com apenas um lugar vazio, símbolos relacionais binários, com dois; ternários, com três, e assim por diante.

Além dos símbolos conceituais e relacionais, existe ainda uma outra importante categoria de símbolos, que Frege caracteriza de saturados. Por definição, ao preenchermos todos o(s) lugar(es) de argumento de um símbolo conceitual ou relacional, geramos um símbolo sem lugares de argumento. A partir da proposição “Pedro Álvares Cabral descobriu o Brasil”, é possível formar o símbolo funcional “(   ) descobriu o Brasil”, que, naturalmente, resultará num símbolo saturado se o lugar de argumento indicado pelo uso de parênteses for preenchido. Se além disso considerarmos a expressão “o Brasil” como substituível, teremos o símbolo relacional “(   ) descobriu (   )”. Nesse caso, se apenas um dos lugares de argumento for preenchido, o símbolo

---

[11] Com isso não estamos dizendo que a busca da forma, no sentido de uma busca pela essência, não dependa de uma busca da forma, no sentido lógico do termo. Aliás, se Aristóteles tem razão, a teoria da formas de Platão erra justamente por desrespeitar princípios formais de natureza lógica.

[12] Cf. *Begriffsschrift*. VII. Como veremos na seção II, embora todo conceito, na acepção tradicional do termo, seja um conceito, na acepção fregiana do termo, o inverso não é verdadeiro.

resultante será de natureza conceitual e, portanto, ainda insaturado, mas se todos os lugares do símbolo funcional forem preenchidos, o símbolo resultante será saturado. Sendo assim, podemos dividir os símbolos em duas grandes categorias: a dos insaturados e a dos saturados[14].

Ainda que as proposições sejam o principal exemplo de símbolos saturados, nem todo símbolo saturado é uma proposição. A descrição definida "O auto-retrato de Van Gogh" é um exemplo de símbolo saturado não proposicional.

Outra característica que distingue o método fregiano de análise lógica daquele empregado pelo lógico tradicional, é que, ao contrário deste último, que toma como absoluta a classificação das proposições em singulares e gerais, particulares e universais, negativas e afirmativas, etc., Frege, por entender que tais distinções não dizem respeito ao ato judicativo – que é o fundamento real das distinções tradicionais – e sim ao conteúdo deste ato, as considera como expressando uma preferência em relação a determinada forma de simbolização.

A proposição "Cristo converteu alguns homens aos seus ensinamentos", dependendo de como for analisada, pode ser classificada seja como singular seja como geral[15], e mesmo nos casos em que há apenas uma análise possível, como na proposição "Existem planetas", não se pode dizer que o pensamento por ela expresso seja, em si mesmo, existencial, mas tão somente que, assim expresso, ele assume a forma existencial. Segundo Frege, as proposições "Existem planetas" e "O conceito de 'planeta' tem instâncias" exprimem o

---

[13] Cf. §70 de *Os Fundamentos da Aritmética*.

[14] O fato de Frege não empregar a terminologia tradicional, que divide os símbolos ou termos em singulares e gerais, se deve, entre outras coisas, ao fato de nem todo símbolo funcional ser um termo geral. A função "O autor de ( )", por exemplo, não é nem geral nem singular.

[15] Cf. Introduction to Logic. In: *Posthumous Writings*, p.187.

mesmo pensamento, embora tenham como sujeito lógico expressões categorialmente distintas: no primeiro caso, um símbolo insaturado; no segundo, um símbolo saturado. Por conseguinte, na lógica de Frege, não se pode falar em análise lógica de pensamentos, mas apenas em análise lógica de proposições[16].

Sendo assim, [illegible] perfeitamente coerente, no sentido fregiano do termo "análise lógica", considerarmos igualmente legítimas as diferentes análises da proposição "Van Gogh nasceu na Holanda", exemplificadas em (2'), (2'') e (2''').

Com base nos esclarecimentos feitos até aqui, podemos agora nos valer de alguns exemplos cruciais para a compreensão da análise fregiana das proposições existenciais; indiscutivelmente, um dos capítulos mais importante da história da lógica. Seja, pois, a seguinte proposição:

7) "Existem planetas"

Ao contrário do que ocorre nos exemplos anteriores, temos aqui uma proposição que não comporta múltiplas análises. Com efeito, está de antemão descartada a possibilidade de concebermos esta proposição como tendo a forma lógica "(Existem) planetas", já que nesse caso o símbolo de argumento seria "Existem", o que nos deixaria na "incômoda posição" de afirmar que a existência é um planeta. Pior do que isso, uma vez que não existem apenas planetas, mas também estrelas, seríamos obrigados a admitir que a existência além de ser um planeta é também uma estrela! Como algo não pode ser, simultaneamente, um planeta e uma estrela, sob pena de contradição, fica

[16] Cf. On Concept and Object, In: *The Frege Reader*, pp.188-89.

evidente que é totalmente inviável a sugestão de tomar “Existem” como sendo o símbolo de argumento.

Resta, portanto, uma única alternativa de análise, a saber:

7’) “Existem (planetas)”

Esta análise, por ser a única possível, obriga-nos a aceitar a tese de que os símbolos conceituais podem preencher o lugar de argumento de outros símbolos conceituais.

Dissemos anteriormente que Frege não abandona a divisão tradicional da proposição em uma parte que designa aquilo de que se predica e outra que designa o que está sendo predicado, mas apenas o modo como tradicionalmente esta divisão é efetuada. Podemos agora acrescentar a isto, a observação crucial de que o método de análise funcional proposto por Frege implica uma compreensão radicalmente distinta do modo como os termos conceituais desempenham o papel de sujeito lógico nas proposições; o que implica uma alteração igualmente radical da própria noção de “sujeito lógico”[17].

Para Frege, assim como para a tradição, a relação que vincula o sujeito lógico nominal, isto é, a expressão que indica aquilo de que se fala, ao sujeito lógico real, ou seja, aquilo de que se fala, é sempre determinada. Como lembra Frege, “quem quer que use a sentença “Todo homem é mortal” não está com isso querendo dizer algo sobre algum Chefe Akpanya, do qual talvez ele jamais tenha ouvido falar.”[18] Em relação às proposições singulares, p.ex. “Sócrates é mortal”, não há divergência entre Frege e a tradição com relação a resposta à

---

[17] Cf. Dialogue with Pünjer on Existence (23, 95 e 96). In: *Posthumous Writings*, p.53-67.
[18] *Translations from the Philosophical Writngs of Gottlob Frege*. 3ª ed., p.83.

pergunta “De que trata a proposição?”; contudo, uma vez que Frege separa e não apenas distingue o ato judicativo do conteúdo ajuizável, ele não pode aceitar a resposta tradicional àquela mesma pergunta, quando a proposição é universal.

De que trata a proposição “Todo homem é mortal”? De todo homem, respondem os lógicos tradicionais. Ora, essa resposta só é viável, na medida em que a relação de subordinação é entendida como uma operação lógica que caracteriza um certo ato judicativo. Ato este que, com a ajuda da matéria fornecida pelos conceitos subordinados, ao mesmo tempo que afirma algo sobre o mundo, delimita a parcela do mundo a qual se aplica o predicado.

Frege, como se sabe, rejeita esta relação constitutiva entre ato judicativo e conteúdo ajuizável. Para ele, devemos ser capazes de responder à pergunta “De que trata a proposição ‘Todo homem é mortal’?” sem apelar para considerações acerca do ato judicativo por meio do qual a proposição é afirmada. Aceitas as condições impostas por Frege, é legítimo descartar a solução tradicional, por razões puramente lógicas. Com efeito, se a expressão “todo homem” cumprisse o papel de sujeito lógico na proposição “Todo homem é mortal”, então a proposição “Todo homem não é mortal”, deveria ser a sua negação, o que não é o caso.

Para resolver o problema, Frege amplia o resultado anteriormente obtido no âmbito dos conceitos, a fim de garantir que símbolos conceituais possam preencher o lugar de argumento de certos tipos de símbolos relacionais, o que lhe permite considerar a proposição “Todo homem é mortal” como sendo o resultado do preenchimento do símbolo relacional “Todo (   ) é (   )” pelos símbolos conceituais “(   ) é homem” e “(   ) é mortal”. Sendo assim, Frege responde à pergunta “De que trata a proposição ‘Todo homem é mortal’?” com a afirmação, pouco ortodoxa, de que por meio dela estamos afirmando algo acerca dos conceitos de “homem” e de “mortal”.

A análise funcional da proposição implica, por conseguinte, que os símbolos conceituais e relacionais estejam por algo no mundo; razão pela qual Frege os classifica como “nomes funcionais”. Com efeito, para poder cumprir o papel de sujeito lógico de uma proposição, um símbolo deve ser capaz de indicar algo no mundo de forma determinada, do contrário não saberemos do que trata a proposição e, por conseguinte, será para nós impossível determinar, de forma objetiva, a sua verdade ou falsidade.

Voltando à análise da proposição “Existem planetas”, admitir que o símbolo funcional “existem (   )” possa tomar como símbolo de argumento o símbolo funcional “( ) planetas”, implica limitar o escopo de aplicação do símbolo funcional “existem ( )”, a símbolos funcionais do tipo “(   ) planetas”. Em razão disso, expressões como “Vênus existe”, muito comuns na linguagem natural e consideradas pelos lógicos tradicionais como expressando juízos existenciais, não tem contrapartida na conceitografia. Com isso, Frege não está sugerindo que a linguagem natural esteja repleta de absurdos, mas tão somente que o sentido de tais proposições não tem serventia para a lógica. Com efeito, a busca da verdade não é a única finalidade a orientar a ação humana e a linguagem natural, nem sempre é empregada para esse fim.

A análise funcional das proposições existenciais implica, portanto, a divisão dos símbolos funcionais em duas categorias, a saber, aqueles cujos lugares de argumento só podem ser preenchidos por símbolos saturados, que Frege denomina de símbolos funcionais de 1ª ordem, e aqueles cujos lugares só podem ser preenchidos por símbolos funcionais de 1ª ordem, os chamados símbolos funcionais de 2ª ordem. Em virtude desta estratificação dos símbolos funcionais em diferentes ordens, Frege se vê obrigado a dividir os símbolos relacionais (diádicos, triádicos, etc....) em duas categorias: a dos nivelados (*gleichstufige*), cujos símbolos de argumento pertencem a mesma categoria lógica, e a dos desnivelados (*ungleichstufige*), que contém símbolos de argumentos de categorias lógicas diferentes[19].

Até o momento, a notação que empregamos é insuficiente para expressar adequadamente estas diferentes categorias de símbolos funcionais. O uso de parênteses, no contexto do sistema lógico fregiano, ainda que aponte para uma diferença categorial (símbolo funcionais e de argumento cumprem funções lógicas distintas) não determina a categoria lógica particular a que pertencem os símbolos resultantes da análise funcional de uma proposição. Com efeito, a presença dos parênteses denuncia tão somente que o(s) símbolo(s) entre parêntese(s) está(ão) sendo tomado(s) como sujeito lógico. Isso, entretanto, longe de ser uma defeito é, de fato, uma virtude. Essa aparente deficiência é, justamente, o que habilita os parênteses a expressarem a distinção entre símbolos funcionais e símbolos de argumento, visto que cada uma destas rubricas engloba símbolos de diversas categorias lógicas.

Embora a especificação destas diferenças categoriais seja incompatível com a expressão adequada da distinção entre símbolos funcionais e símbolos de argumento, ela é condição de possibilidade para a expressão adequada da

[19] Function and Concept. In: *Tranlations from the Philosophical Writngs of Gottlob Frege,* p.40.

distinção entre símbolos saturados e os diferentes tipos de símbolos funcionais. Uma alternativa para resolver esse problema seria grafar de forma distinta os símbolos que pertencem a diferentes categorias lógicas. Para tanto, poder-se-ia adotar a regra de grafar os símbolos saturados sempre em letras latinas maiúsculas. Dessa forma, "(KEPPLER) morreu na miséria" seria uma representação adequada da análise funcional da proposição "Keppler morreu na miséria."

Essa espécie de artifício notacional, embora eficaz para simbolizar diferenças categoriais, não está a altura da generalidade exigida pela lógica. As leis lógicas, valem para o domínio do pensável e são, consequentemente, universalmente válidas. Para preencher esta lacuna, Frege introduz, no §1 da *Conceitografia*, a idéia de indicador indeterminado de um conteúdo:

> "Os símbolos usados na teoria geral da magnitude são de dois tipos. O primeiro consiste em letras, cada uma das quais indica um número ou uma função indeterminadamente. Esta indeterminação torna possível expressar por meio de letras a validade geral de proposições, como, por exemplo, em $(a + b)c = ac + bc$. O outro tipo consiste em símbolos tais como +, –, √, 0, 1, 2, cada um dos quais tem um conteúdo particular.
> *Eu adoto esta idéia fundamental de distinguir dois tipos de símbolos*, que, infelizmente, não é estritamente observada na teoria das magnitudes [considere *l*, *log.*, *sin.*, *Lim.*], *a fim de torná-la aplicável no domínio mais vasto do pensamento puro*. Divido, portanto, todo símbolo em dois grupos: *aqueles pelos quais se pode compreender coisas diferentes* e *aqueles que tem um conteúdo absolutamente determinado*. Os primeiros são as *letras* e servirão principalmente para a expressão da *generalidade*. Tendo em vista a indeterminação relativa ao conteúdo de uma letra, devemos insistir que ela *retenha*, dentro de um mesmo contexto, o conteúdo que fora dado a ela."

Os símbolos usados na conceitografia se dividem, pois, em duas classes: os que nomeiam funções e objetos e os que indicam funções e objetos.

Os primeiros, apresentam algo de modo determinado e são chamados, respectivamente, de nomes funcionais e nomes próprios; os últimos, indicam algo de modo indeterminado, carecendo, pois, de referência, e são chamados, respectivamente, de indicadores funcionais e indicadores objetuais.

Vejamos, por meio de alguns exemplos, em que consiste a diferença entre indicar e referir:

8) Vênus é um planeta,
9) Marte é um planeta,
10) Júpiter é um planeta.

Usando parênteses é possível exibir aquilo que é comum a essas três proposições como segue:

8') (Vênus) é um planeta,
9') (Marte) é um planeta,
10') (Júpiter) é um planeta.

o que mostra que as proposições (8), (9) e (10) tem em comum o símbolo funcional "( ) é um planeta". Isso, contudo, não é uma descrição completa de tudo aquilo que elas tem em comum. Estamos longe de capturar a noção intuitiva de que o que estas três proposições tem em comum é que todas elas atribuem a mesma propriedade a um objeto. Como foi dito anteriormente, o uso dos parênteses é insuficiente para a determinação de tudo aquilo que é logicamente relevante numa proposição, uma vez que eles servem tão somente para indicar o lugar de argumento. Contudo, se nos valermos da notação anteriormente sugerida para a expressão dos nomes próprios, teremos o seguinte:

8'') (VÊNUS) é um planeta;
9'') (MARTE) é um planeta;
10'') (JÚPITER) é um planeta.

o que evidência que as proposições (8), (9) e (10) tem em comum o fato de todas elas serem o resultado do preenchimento do nome funcional "(   ) é um planeta" por um nome próprio.

Em que pese o avanço que uma tal notação representa em relação ao mero uso dos parênteses, falta-nos, ainda, uma ferramenta simbólica capaz de traduzir, numa única expressão, a forma lógica comum a estas três proposições. O uso de letras para indicar indeterminadamente objetos e funções pode suprir esta deficiência. Estendendo para o domínio do pensamento puro esse artifício notacional que Frege encontra na matemática, é possível simbolizar o que há de comum às proposições (8), (9) e (10) por meio da expressão abaixo:

11) (**a**) é um planeta

onde a letra "**a**" indica um objeto[20].

O indicador objetual "**a**", ao mesmo tempo que marca a categoria lógica do símbolo de argumento, nos possibilita abstrair o conteúdo particular dos nomes próprios, trazendo para o primeiro plano a estrutura lógica comum às proposições (8), (9) e (10). Embora Frege tenha

[20] É importante ressaltar que o uso de indicadores não elimina o uso dos parênteses; do contrário, a substituição dos indicadores por nomes resultaria numa expressão ambígua.

afirmado, nos seus *Comentários sobre Sentido e Referência*[21], que o lugar de argumento de um símbolo conceitual pode ser preenchido não apenas por um nome próprio mas também por um indicador objetual, não devemos confundir esta afirmação com a idéia de que os indicadores objetuais podem cumprir o papel de símbolo de argumento numa proposição.

Na expressão "(**a**) é um planeta", a letra "**a**" satura a função referida pelo símbolo funcional "(   ) é um planeta", razão pela qual a colocamos entre parênteses. Contudo, os indicadores, ao contrário dos nomes, não se referem a coisa alguma[22], muito menos a algo indeterminado ou variável[23]. Ao contrário do que ocorre ao preenchermos um nome funcional de 1ª ordem com um nome próprio, o preenchimento do nome funcional de 1ª ordem "(   ) é um planeta" por um indicador objetual não resulta numa proposição, e sim naquilo que Frege em seu comentário aos Fundamentos da Geometria de Hilbert, chama de pseudoproposição (*uneigentlicher Satz*)[24].

Com base mesma linha de raciocínio, poder-se-ia dizer que todo indicador é um pseudonome: os indicadores objetuais, seriam pseudonomes próprios, e os indicadores funcionais, pseudonomes funcionais.

Fazendo uso de indicadores funcionais, podemos chegar a um grau ainda maior de abstração. Com efeito, se usarmos a letra "`f`" para indicar um conceito de 1ª ordem, podemos exibir a forma lógica das proposições (8), (9) e (10), por meio da seguinte expressão:

---

[21] *Posthumous Writings*, p.121.
[22] *Ibid.*, p.188 e 190.
[23] A respeito da expressão "variável", ver a crítica de Frege na carta à Jourdain de 28.01.1914. In: *Philosophical and Mathematical Correspondence*, p.81.
[24] Cf. *Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy* p.308-, bem como em *Posthumous Writings*. pp.190-1.

12) (**a**)f

A pseudoproposição (12), a exemplo da expressão (11), não é um nome próprio de um valor de verdade, e sim o que poderíamos chamar de um indicador veritativo.

A comparação entre estes dois exemplos torna compreensível o uso, aparentemente espúrio, que Frege faz da noção de grau de indeterminação de um indicador. Com efeito, se tomarmos a proposição "Vênus é um planeta", que apresenta de modo determinado um objeto, a saber, o verdadeiro, e substituirmos o nome próprio "Vênus" pelo indicador objetual "**a**", teremos como resultado o indicador "(**a**) é um planeta" e, se além disso, substituirmos o nome funcional "( ) é um planeta" pelo indicador funcional "f", teremos como resultado o indicador "(**a**)f". No primeiro caso, o indicador é menos indeterminado que no segundo, uma vez que em "(**a**) é um planeta", apenas o argumento é indicado, enquanto que em "(**a**)f" também a função está sendo indicada e não referida.

Vejamos agora como o uso dos indicadores torna possível a expressão da generalidade. Como observamos anteriormente, o resultado da substituição, no contexto de uma proposição, de um nome por um indicador da mesma categoria não é outra proposição e sim algo que pode vir a ser uma proposição se o processo inverso for executado, isto é, se o indicador for substituído por um nome da mesma categoria[25]. Dissemos ainda que os indicadores são essencialmente indeterminados e, isso, em virtude do fato de servirem

[25] A rigor, somente no contexto da conceitografia, onde não há discrepância entre a sintaxe lógica e a sintaxe gramatical, podemos falar em construir uma proposição a partir de uma pseudoproposição, sem que com isso estejamos desrespeitando o princípio do contexto.

justamente para marcar apenas aquilo que é logicamente relevante no nome substituído, ou seja, a sua categoria lógica. Para transformar a pseudoproposição "(**a**) é um planeta" numa proposição basta substituir o indicador "**a**" por um nome próprio: Se a letra "**a**" for substituída pela palavra "Vênus", teremos como resultado a proposição (8), se for substituída pela palavra "Marte", a proposição (9), por "Júpiter", a (10), e assim por diante, para todo e qualquer nome próprio.

A partir de uma pseudoproposição podemos chegar a uma proposição geral, por meio da generalização dos indicadores nela presentes, o que é possível, justamente, em razão da indeterminação que lhes é inerente. Para usar o exemplo anterior, a partir da pseudoproposição "(**a**) é um planeta" podemos construir a seguinte proposição geral:

13) Para todo **a**, (**a**) é um planeta.

onde os parênteses servem para assinalar o lugar de argumento do símbolo funcional "( ) é um planeta", que é, por sua vez, o símbolo de argumento do conceito de 2ª ordem "Para todo **a**, (**a**) ( )". Usando a letra grega "*Φ*" para nomear o conceito de "planeta", esse juízo corresponde, na notação simbólica de Frege, à seguinte fórmula:

13') **a** *Φ*(**a**)

onde a letra "**a**" confere generalidade à proposição, ao indicar indeterminadamente o argumento do conceito de "planeta". A fim de demarcar o escopo da generalidade conferida à proposição pelo indicador objetual "**a**" —

o que é essencial em se tratando de juízos onde ocorrem múltiplas generalizações, como é o caso do juízo "Todo corpo atrai todo corpo" — Frege repete a letra "**a**", colocando-a agora dentro de uma concavidade inserida no traço horizontal, limitando a generalização apenas às ocorrências desta mesma letra que estiverem além desse traço[26]. A barra vertical "|" que antecede a expressão como um todo, é denominada por Frege de traço do juízo e serve para expressar que o conteúdo, indicado pelo que está à direita da barra, está sendo tomado como verdadeiro[27].

O símbolo conceitual de 1ª ordem "( ) é um planeta", ao saturar o símbolo conceitual de 2ª ordem "Para todo **a**, (**a**) ( )", satura-se a si mesmo, formando o todo que os lógicos denominam de proposição universal. Dizer da proposição "Para todo **a**, (**a**) é um planeta", que ela é geral, eqüivale, para Frege, a afirmar que a função referida pelo símbolo "( ) é um planeta" tem o valor verdadeiro para qualquer argumento.

Valendo-nos do símbolo conceitual da negação, podemos ainda expressar a generalização universal abaixo:

14) Para todo **a**, (**a**) não é um planeta.

que na notação de Frege, corresponde à formula:

14') **a** Φ(**a**)

onde o traço vertical em " " está pela negação.

[26] Cf. Introduction to Logic. In: *Posthumous Writings*, p.194-5 (Nota de rodapé).
[27] Cf. *Ibid*, p.185.

Por fim, chegamos a um modo de expressar adequadamente a forma lógica da proposição “Existem planetas”, com a qual iniciamos nossa exposição da concepção fregiana da generalidade. Por meio de um procedimento análogo, podemos expressar a generalização universal “Vênus tem todas as propriedades”, com o auxílio do indicador funcional “f”:

15) Para todo f, (Vênus)f

onde a letra “f”, desempenha o papel de conferir generalidade à proposição, ao indicar indeterminadamente uma função de 1ª ordem. Na notação conceitual de Frege, esse juízo é expresso como segue:

15’) f f(x)

onde a letra “f” é um indicador conceitual, a letra “*x*”, em itálico, está pelo nome próprio “Vênus” e os parênteses indicam o lugar de argumento do símbolo funcional indicado por “f”.

Ao afirmarmos a proposição geral (13), estamos dizendo algo acerca do conceito de “planeta”, a saber, que ele se aplica a todo e qualquer objeto; ao afirmarmos a proposição geral (15), estamos dizendo algo acerca do planeta Vênus, a saber, que ele cai sob todo e qualquer conceito.

Com o auxílio da negação, podemos ainda expressar o juízo universal negativo:

16) Para todo f, (Vênus) não f

que na conceitografia, assume a seguinte forma:

16’) f f(*x*)

Por fim, podemos empregar simultaneamente os indicadores objetuais e funcionais, a fim de expressar o juízo universal “Todo objeto tem todas as propriedades”, do seguinte modo:

16) Para todo f e para todo **a**, (**a**)f

que no simbolismo da conceitografia corresponde à seguinte fórmula:

17’) f **a** f(**a**)

Como dissemos anteriormente, os indicadores objetuais e funcionais carecem de referência em razão da sua indeterminação, o que os torna capazes de conferir generalidade às proposições. Com isso, não se está querendo dizer que a proposição geral seja, ela mesma, indeterminada. A famosa frase de Shakespeare “Há algo de podre no reino da Dinamarca” é um exemplo do uso de indicadores para a expressão da generalidade, e ninguém, com exceção talvez da rainha da Dinamarca, diria que ela carece de valor de verdade.

De posse destes esclarecimentos, pode-se ver que na lógica de Frege as proposições existenciais devem ser classificadas como proposições gerais. Com efeito, a partir das proposições universais (13), (14), (15) e (16), podemos obter as seguintes proposições gerais:

18) Para algum **a**, (**a**) é um planeta.

19) Para algum **a**, (**a**) não é um planeta.

20) Para algum f, Vênus(f) .

21) Para algum f, Vênus não(f).

já que a negação da proposição universal (13) eqüivale à proposição (19), a negação de (14), à (18), a negação de (15), à (21) e, por fim, a negação de (16), à (20), em virtude das seguintes equivalências:

22) Não se dá que para todo **a**, (**a**) não é um planeta ≡ Para algum **a**, (**a**) é um planeta.

23) Não se dá que para todo **a**, (**a**) é um planeta ≡ Para algum **a**, (**a**) não é um planeta.

24) Não se dá que para todo f, (Vênus) não f ≡ Para algum f, (Vênus)f.

25) Não se dá que para todo f, (Vênus)f ≡ Para algum f, (Vênus) não f.

Sendo assim, as proposições (18), (19), (20) e (21) correspondem às seguintes fórmulas da conceitografia:

18') **a** Φ(**a**)

19') **a** Φ(**a**)

20') f f(x)

21') f f(x)

Uma vez que " Δ " eqüivale à " Δ", as proposições (19') e (21') também podem ser expressas do seguinte modo:

19'') **a** Φ(**a**)

21’’) f f(x)

O uso de indicadores, possibilita ainda o tratamento de proposições gerais da forma “Todo A é B” e “Todo A não é B”, que os lógicos tradicionais denominam, respectivamente, de proposição categórica universal afirmativa e proposição categórica universal negativa.

A partir da proposição condicional “Se Vênus é um planeta então Vênus tem órbita elíptica”, por exemplo, podemos obter uma proposição categórica universal afirmativa, substituindo o nome próprio “Vênus” por um indicador objetual, obtendo assim a pseudoproposição “Se (**a**) é um planeta então (**a**) tem órbita elíptica” e, em seguida, ligando o indicador por meio do quantificador universal, transformando-a na proposição geral abaixo:

26) Para todo **a**, se (**a**) é um planeta então (**a**) tem órbita elíptica.

Na conceitografia, este juízo pode ser simbolizado com o auxílio do símbolo do condicional, pela seguinte fórmula:

26’) **a** Ψ(**a**)

Φ(**a**)

onde as letras “Φ” e “Ψ”, em itálico, estão, respectivamente, pelos conceitos de “planeta” e de “órbita elíptica”. Da mesma forma, a partir do condicional “Se Vênus é um planeta então Vênus não tem órbita elíptica”, podemos obter a seguinte proposição categórica universal negativa:

27) Para todo **a**, se (**a**) é um planeta então (**a**) não tem órbita elíptica.

que pode ser simbolizada, com o auxílio do condicional e da negação, como segue:

27’) **a** Ψ(**a**)

Φ(**a**)

A exemplo do que ocorre nas demais proposições gerais, os símbolos de argumento das proposições (26) e (27) são símbolos funcionais. Com a única diferença de que, nesse caso, o símbolo funcional de 2ª ordem é de natureza relacional, requerendo, portanto, dois símbolos de argumento para a sua saturação. A esta relação nivelada de 2ª ordem, Frege dá o nome de relação de subordinação. Entretanto, ao contrário dos lógicos tradicionais, Frege não considera esta relação como uma modalidade do juízo e sim como parte do conteúdo ajuizável. Como ele procura esclarecer no § 47, os conceitos subordinados não são as bases de uma operação lógica que resulta em um pensamento e sim aquilo de que trata o pensamento:

> “É certo que à primeira vista a proposição ‘Todas as baleias são mamíferos’ pareça tratar de animais; mas se perguntarmos de que animais se está falando, não se pode indicar nenhum em particular. Posta uma baleia diante de nós, nossa proposição não afirmará nada a seu respeito. Não se poderia deduzir que o animal em questão fosse mamífero sem admitir a proposição de que é uma baleia, o que nossa proposição não implica. De modo geral, é impossível falar de um objeto sem de alguma maneira designá-lo ou nomeá-lo. A palavra ‘baleia’, porém, não nomeia nenhum ser singular.”

Se na proposição “Baleias são mamíferos” tanto o sujeito como o predicado gramaticais são símbolos conceituais e se, além disso, não há aí nenhuma palavra que se refira a um objeto, a relação de subordinação que ela expressa só pode ser uma relação entre conceitos. Razão pela qual, devemos considerar os próprios conceitos de "baleia" e "mamífero", e não aquilo que cai sob eles, como sendo os argumentos da relação de subordinação. Pretender o contrário, isto é, negar que os conceitos sejam os argumentos da relação de subordinação, implica tomar a distinção entre "Todas as baleias são mamíferos" e "Algumas baleias são mamíferos" como sendo uma distinção entre juízos e não entre conteúdos ajuizáveis, como afirma Frege no §4 da *Conceitografia*. Nesse caso, o conteúdo ajuizável de "Todas as baleias são mamíferos" consistiria nos conceitos de "baleia" e "mamífero" e o quantificador universal, ao contrário de ser um símbolo conceitual de 2ª ordem, seria parte do ato de julgar necessário para unir estas duas representações; o que, segundo Frege, eqüivale a infringir o princípio do contexto, já que, nessa hipótese, deveríamos ser capazes de determinar a categoria lógica de uma palavra independentemente da apreensão da função lógica que ela desempenha no contexto da proposição[28].

Sendo assim, é procedente a tese fregiana de que os quantificadores, existencial e universal, são símbolos conceituais de 2ª ordem. Isso fica particularmente evidente no caso dos juízos existenciais. Se, por exemplo, na proposição "Existem cachalotes", considerarmos o quantificador como parte do ato judicativo e não do conteúdo julgado, restará apenas a palavra "cachalotes". Palavra esta que, considerada isoladamente, não se refere nem a um objeto nem a um conceito.

---

[28] Para uma defesa desta interpretação, ver os capítulos 2 e 3 do livro de Cora Diamond, *The Realistic Spirit*.

Com o auxílio de indicadores funcionais, podemos ainda expressar juízos universais do tipo “Toda propriedade que Vênus possui, Marte também possui”, ou seja:

28) Para todo f, se (Vênus)f então (Marte)f.

o que, no simbolismo da conceitografia, corresponde à fórmula:

28’) f $\mathtt{f}(y)$

$\mathtt{f}(x)$

onde as letras “x” e “y”, em itálico, estão, respectivamente, pelos planetas Vênus e Marte. Analogamente, podemos expressar o juízo “Toda propriedade que Vênus possui, Marte não possui”, isto é:

29) Para todo f, se (Vênus)f então (Marte) não f.

o que, no simbolismo da conceitografia, pode ser expresso com o auxílio do condicional e da negação como segue:

29’) f $\mathtt{f}(y)$

$\mathtt{f}(x)$

Os pensamentos expressos pelas proposições categóricas universais que apresentamos até aqui podem ser expressos por meio de proposições categóricas particulares, tendo em vista as seguintes equivalências:

30) Para todo **a**, se (**a**) é um planeta então (**a**) tem órbita elíptica ≡ Não se dá que para algum **a**, se (**a**) é um planeta então (**a**) não tem órbita elíptica.

31) Para todo **a**, se (**a**) é um planeta então (**a**) não tem órbita elíptica ≡ Não se dá que para algum **a**, se (**a**) é um planeta então (**a**) tem órbita elíptica.

32) Para todo f, se Vênus(f) então Marte(f) ≡ Não se dá que para algum f, se Vênus(f) então Marte não (f).

33) Para todo f, se Vênus(f) então Marte não (f) ≡ Não se dá que para algum f, se Vênus(f) então Marte(f).

Por conseguinte, as proposições categóricas universais (26), (27), (28) e (29) eqüivalem, respectivamente, às seguintes proposições categóricas particulares:

34) Não se dá que para algum **a**, se (**a**) é um planeta então (**a**) não tem órbita elíptica.

35) Não se dá que para algum **a**, se (**a**) é um planeta então (**a**) tem órbita elíptica.

36) Não se dá que para algum f, se Vênus(f) então Marte não (f).

37) Não se dá que para algum f, se Vênus(f) então Marte(f) .

Na conceitografia, estas proposições categóricas particulares correspondem, respectivamente, às seguintes fórmulas:

34’) **a** Σ(**a**)

Ψ(**a**)

35’) **a** Σ(**a**)

Ψ(**a**)

36’) f f(y)

f(x)

37’) f f(y)

f(x)

Tendo em vista que “ Δ” eqüivale à “ Δ”, podemos expressar estes mesmos pensamentos por meio das seguintes fórmulas:

34’’) **a** Σ(**a**)

Ψ(**a**)

35’’) **a** Σ(**a**)

Ψ(**a**)

36’’) f f(y)

f(x)

37’’) f f(y)

f(x)

o que leva Frege a afirmar que também as proposições categóricas, universais e particulares, são proposições existenciais[29], já que, cada uma destas fórmulas, é precedida seja pelo símbolo “ **a** Λ” seja pelo símbolo “ f Π” — onde “Λ” e “Π” são letras esquemáticas onde ocorrem os indicadores “**a**” e “f”, respectivamente. Sendo, pois, formalmente indistinguíveis das proposições existenciais não categóricas.

Desde os primórdios da filosofia, o conceito de “existência” inquieta os filósofos com seu aparente desprezo pelas fronteiras categoriais, não foi outra a razão que levou Kant a classificá-lo como predicado lógico em sua famosa refutação do argumento ontológico[30], situando-o, por assim dizer, fora do mundo. Aristóteles, na sua *Metafísica*[31], já havia recusado ao *ser* o estatuto

---

[29] Ver o exemplo que Frege apresenta na sua carta à Marty de 31.08.82.
[30] *Crítica da Razão Pura* (B628-7)
[31] *Metafísica* (998b19-32)

de gênero supremo, pela mesma razão. Platão, por outro lado, na sua teoria das idéias, equiparava o *ser* a conceitos como justiça, beleza, etc. Ao conceber o conceito de “existência” como uma função de 2ª ordem, Frege oferece uma resposta para o problema, que contempla às intuições tanto de Platão, na medida em que o quantificador existencial é considerado como parte do conteúdo ajuizável e não do ato de julgar, como as de Aristóteles e Kant, na medida em que ele o caracteriza como um predicado puramente lógico.

Com o auxílio do instrumental lógico introduzido acima, podemos agora expressar juízos universais onde um quantificador aparece sob o escopo de outro quantificador, o que nos permitirá exibir a relação de dependência lógica que existe entre as proposições “Todo corpo atrai todo corpo” e “Todo corpo atrai algum corpo”, e justificar objetivamente a validade da inferência “Todo corpo atrai todo corpo, logo Todo corpo atrai algum corpo”, mencionada logo no início do trabalho.

A proposição “Todo corpo atrai todo corpo”, corresponde, na conceitografia, à seguinte fórmula:

(38) $\mathbf{a}$ $\mathbf{e}$ $\Sigma(\mathbf{a},\mathbf{e})$

$K(\mathbf{e})$

$K(\mathbf{a})$

onde as letras “$\mathbf{a}$” e “$\mathbf{e}$”, são indicadores objetuais, a letra “K” esta pelo conceito de “corpo” e a letra “Σ”, também em itálico, pela relação de “atração gravitacional”.

Já a proposição “Todo corpo atrai algum corpo”, é expressa do seguinte modo:

(39) $\quad \mathfrak{a} \quad \mathfrak{e} \quad \Sigma(\mathfrak{a},\mathfrak{e})$

$K(\mathfrak{e})$

$K(\mathfrak{a})$

uma vez que as generalizações particulares podem ser definidas a partir das generalizações universais, por meio da negação, como vimos anteriormente.

Admitindo-se a legitimidade destas traduções, questão esta que, para Frege, antecede a construção de um sistema lógico[32], podemos formalizar a inferência “Todo corpo atrai todo corpo, logo todo corpo atrai algum corpo” como mostra o esquema abaixo:

(38) $\quad \mathfrak{a} \quad \mathfrak{e} \quad \Sigma(\mathfrak{a},\mathfrak{e})$

$K(\mathfrak{e})$

$K(\mathfrak{a})$

---

(39) $\quad \mathfrak{a} \quad \mathfrak{e} \quad \Sigma(\mathfrak{a},\mathfrak{e})$

$K(\mathfrak{e})$

$K(\mathfrak{a})$

Se agora abstrairmos em ambas as fórmulas o que nelas há de comum, obtemos a seguinte esquema, onde “F” e “g” são letras esquemáticas funcionais:

$\mathfrak{e} \quad g(\mathfrak{e})$

$F(\mathfrak{e})$

$\mathfrak{e} \quad g(\mathfrak{e})$

$F(\mathfrak{e})$

[32] Cf. Logic in Mathematics. In: *Posthumous Writngs*, p.211.

que parece corresponder à passagem do juízo universal categórico (Todo A é B) ao juízo particular categórico (Algum A é B), conhecida como subalternação[33] e tradicionalmente aceita como uma forma válida de silogismo. Esta, contudo, não pode ser a explicação correta, uma vez que, no contexto da lógica de Frege, este esquema inferencial não é válido, pois, na hipótese de não existirem F's, a falsidade da conclusão seria compatível com a verdade da premissa.

Esta diferença fundamental entre a lógica aristotélica e a lógica fregiana, cujo fundamento não poderíamos explicar sem nos desviarmos do objetivo principal do presente trabalho, é útil para mostrar a correção da regra de inferência abaixo, o que valida o argumento que estamos considerando desde o início. Com efeito, justamente, no único caso em que o esquema inferencial anterior não é respeitado, o antecedente do condicional, do qual a relação de subalternação aparece como conseqüente, é falso, o que torna verdadeira a conclusão e, por conseguinte, válida a regra de inferência.

Por fim, gostaríamos de ressaltar um aspecto essencial, raramente citado, em que a lógica de Frege difere do paradigma tradicional, a saber, a idéia de que só é possível *inferir* a partir de premissas verdadeiras[34]. Bocheński[35], Geach[36], Goldfarb[37] e Baker[38], são uns dos poucos comentadores a reconhecerem esta peculiaridade do conceito fregiano de inferência.

Aos olhos de um lógico tradicional, não há nenhuma outra tese de Frege que seja mais paradoxal do que esta. O caráter extemporâneo desta tese,

[33] Begriffsschrift, In: *Frege and Gödel: Two Fundamental Texts on Mathematical Logic*, p. 12.
[34] Cf. *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*. p.335 e *Posthumous Writings*, p.261.
[35] *Historia de La Lógica Formal*, p.303.
[36] Cf. Frege. In: *Three Philosophers*. p.133-34.
[37] Cf. *Logic in the Twenties: The nature of the Quantifier*, p.353 (nota 4).

levou Anscombe, bem como outros importantes comentadores, a confundi-la com a afirmação bem comportada de que só é possível *demonstrar* a partir de premissas verdadeiras, e, mais recentemente, fez com que Kenny acusasse Frege de ter cometido um erro lógico elementar[39].

Na seguinte passagem da sua *História da Lógica*, Blanché[40], além de reconhecer esta importante característica da lógica fregiana, procura justificá-la do seguinte modo:

> "Se as proposições da lógica se prestam, tal como as da matemática, a serem organizadas num sistema dedutivo axiomatizado, a axiomatização da lógica já não pode ser entendida da mesma maneira que a da matemática, isto é, como formando um sistema hipotético-dedutivo, porque isso não faria mais que recuar o problema do fundamento, sem resolvê-lo. Para que sejam definitivas as bases sobre as quais o lógico pretende assentar a matemática, é preciso que os termos primeiros da lógica tenham um sentido pleno, suscetível de fazer lastro aos da aritmética, é preciso que as suas proposições primeiras tenham uma verdade categórica, suscetível de se comunicar às da aritmética. O logicismo tem, pois, como condição uma concepção dogmática e absolutista da lógica."

Se a explicação dada por Blanché é correta, a tese fregiana de que só é possível *inferir* a partir de premissas verdadeiras, resulta de uma outra diferença fundamental entre a concepção fregiana da lógica e a concepção tradicional, a saber, o fato de que para Frege a lógica não é apenas o *canon* geral da razão[41], mas também uma fonte de conhecimento.

---

[38] *Wittgenstein, Frege and the Vienna Circle*. p.31.
[39] *Frege:An Introduction to the Founder of Modern Analitic Philosophy*, p.36
[40] *História da Lógica de Aristóteles à Bertrand Russell*, p.308.
[41] Sobre a caracterização essencialmente regulativa da lógica, ver o comentário de Sto Tomás à Boécio.

II. A UNIVERSALIDADE DA LÓGICA

Não há dúvida de que se a lógica, além de ser o *canon* geral da razão, é uma fonte de conhecimento, ela deve dispor de um simbolismo capaz de expressar não apenas a forma, mas também o conteúdo das proposições. Leibniz, como se sabe, foi o primeiro a sonhar com uma tal linguagem, e a dívida para com ele é reconhecida por Frege na seguinte passagem do prefácio da *Conceitografia*[42]:

> "Também Leibniz reconheceu — talvez superestimou — as vantagens de um simbolismo adequado. A sua concepção de uma característica universal, um *calculus philosophicus* ou *ratiocinator*, era demasiado grandiosa para que a tentativa de realizá-la fosse além dos prolegômenos. O entusiasmo que se apoderou do seu inventor ao considerar o imenso acréscimo no poder mental da humanidade que iria se originar de um simbolismo adequado às próprias coisas fez com que ele subestimasse as dificuldades a que uma tal empresa deve fazer face. Mas mesmo que este grande objetivo não possa ser atingido na primeira tentativa, não devemos perder a esperança numa abordagem lenta e gradual. Se um problema em toda a sua generalidade parece insolúvel, deve-se provisoriamente limitá-lo; talvez, então, ele possa ser tratado passo a passo. Símbolos aritméticos, geométricos e químicos podem ser encarados como realizações da concepção leibniziana em campos particulares. A conceitografia, aqui apresentada, vem acrescentar mais um novo simbolismo — de fato, aquele localizado no centro, interligando todos os outros. A partir daqui, com grande expectativa de sucesso, podemos então preencher as lacunas das linguagens de fórmulas já existentes, conectar os seus campos até então separados, incorporando-os ao domínio de uma única linguagem de fórmulas, e estender esta linguagem a campos que até então não dispõem de uma."

Em que pese o elogio à Leibniz, Frege não tentou forjar uma linguagem que fosse universal no sentido de que por meio dela se pudesse dizer tudo o que pode ser dito nas demais linguagens. Da mesma forma que não se pode derivar as leis da física a partir das leis básicas da lógica, posto que a física não é um ramo da lógica, não se pode tampouco expressar uma lei da física usando uma linguagem puramente lógica. É, pois, em outro sentido, que devemos entender a

[42] *Conceitografia*, pp.V-VI.

afirmação de Frege de que a conceitografia se constitui no passo mais importante no longo caminho em direção à *caracteristica universalis* vislumbrada por Leibniz. .

Assim como a *lingua characteristica* de Leibniz, a teoria geral das magnitudes é ao mesmo tempo uma *lingua* e um *calculus*, embora lhe falte a universalidade exigida pela lógica, posto que as leis básicas dessa teoria, ao contrário das leis básicas da lógica, valem tão somente para as grandezas mensuráveis. Mesmo sabendo desta importante diferença entre o simbolismo da teoria geral das magnitudes e a *lingua carateristica* idealizada por Leibniz, Frege notou que a distinção entre nomes e indicadores, adotada na teoria geral das magnitudes, poderia ser usada em favor do ideal leibniziano, bastando para isso que o domínio de aplicação dos indicadores fosse estendido até os limites do pensável. Este feito, aparentemente simples, é um marco na história da lógica e da filosofia, e representa o primeiro passo na caminhada que levou Frege, da concepção tradicional da lógica como *lingua universalis*, à concepção da lógica como *Scientia universalis*. Na seção precedente, tentamos indicar de maneira concisa as linhas principais do trajeto que inicia com este *insight* fundamental e termina com a invenção da conceitografia.

Como observou Van Heijenoort[43], e mais recentemente também Goldfarb[44] e Ricketts[45], as fórmulas da conceitografia não são universais na acepção contemporânea do termo. Tanto a universalidade como o caráter unificador da conceitografia não se devem ao fato de suas fórmulas serem esquemas, cujo domínio de aplicação varie conforme a interpretação que se dê

[43] Cf.*Logic as Calculus and Logic as Language*.
[44] Cf.*Frege's Conception of Logic*.

aos indicadores. A seguinte passagem da crítica de Frege a *Fundamentos da Geometria* de Hilbert é particularmente esclarecedora em relação a este ponto[46]:

> "O Sr. Korselt escreve: "a matemática 'aritmetizada', ou melhor, 'racionalizada' meramente arranja seus princípios de tal forma que certas interpretações que já conhecemos não são excluídas". Aqui os princípios serão, uma vez mais, pseudoproposições do teorema geral. A palavra 'interpretação' é questionável, pois, um pensamento, quando expresso adequadamente, não deixa lugar para diferentes interpretações. Vimos anteriormente que a ambigüidade deve simplesmente ser rejeitada e vimos também como ela pode parecer ser necessária por falta de *insight* lógico. Recordo apenas o que dissemos anteriormente sobre o uso das letras. Com base em nossa compreensão da natureza do sistema puramente formal do Sr. Korselt, é fácil adivinhar o que ele entende por 'interpretação'. Quando a partir do teorema geral 'Se a>1 então a^2>1' chegamos, por meio de uma inferência, ao teorema particular 'Se 2>1 então 2^2>1', a pseudoproposição 'a>1' corresponde à proposição legítima '2>1'. Nas palavras do Sr. Korselt, '2>1', ou o pensamento contido nesta proposição, será uma interpretação de 'a>1'. Como se a proposição geral fosse um nariz de cera que se poderia girar ora para um lado ora para o outro. Em realidade, o que temos aqui não é uma interpretação e sim uma inferência."

Ao contrário do que sugere Dummett[47], o que confere universalidade à conceitografia, não é a suposta variedade ilimitada de interpretações possíveis que as suas fórmulas admitiriam e sim a passagem inferencial do geral ao particular, consumada pela substituição dos indicadores por nomes. Com efeito, uma vez que o domínio dos indicadores é irrestrito, o que vale não apenas para os indicadores objetuais, mas também para os funcionais, toda proposição, seja ela singular ou geral, pode ser concebida como uma instância de uma proposição absolutamente geral. Por conseguinte, é também pela passagem do geral ao particular, que a conceitografia preenche as

[45] Cf.*Generality, Meaning, and Sense in Frege*.

lacunas das linguagens de fórmulas já existentes, incorporando-as ao domínio de uma única linguagem. É fundamentalmente nesse sentido que se deve compreender o caráter ao mesmo tempo universal e unificador da conceitografia[48].

Se, contudo, a lógica, além de ser o *canon* geral da razão, é uma fonte de conhecimento, podemos caracterizá-la como universal, não apenas no sentido de que ela dispõe de uma linguagem universal, mas também por ela estar fundada em leis lógicas gerais. É esse segundo sentido do termo "universal" que Frege tem em mente ao afirmar que a lógica é uma ciência universal. Wittgenstein, que tinha uma compreensão bastante apurada da lógica de Frege, se contrapôs veementemente à idéia de que a validade universal fosse a marca característica das proposições da lógica (6.1231-6.1233), observação esta que deve ser entendida como uma crítica à concepção fregiana da lógica como ciência universal (6.1-6.113). Vejamos, então, o que significa, no contexto da lógica fregiana, a afirmação de que as leis básicas da lógica são universalmente válidas.

Aparentemente, a pergunta não oferece maiores dificuldades: as leis básicas da lógica são universalmente válidas porque valem para absolutamente tudo, o que estaria garantido pelo caráter irrestrito do domínio dos indicadores. Que esta resposta, apesar de muito natural, não é fiel ao pensamento de Frege, é uma conseqüência daquilo que esperamos ter mostrado na seção precedente, a saber, que a concepção fregiana da lógica é radicalmente distinta da concepção tradicional.

---

[46] *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*. p. 315-16.
[47] *Frege:Philosophy of Language*, pp.89-90.

A uma diferença de grau de generalidade entre proposições corresponde uma diferença de domínio de aplicabilidade entre conceitos. Dizer que as proposições “Todo grego é mortal”, “Todo homem é mortal” e “Todo animal é mortal” formam uma série ascendente de generalidade, é o mesmo que dizer 1) que o domínio de aplicabilidade do conceito de “animal” é maior que o do conceito de “homem” que, por sua vez, é maior que o do conceito de “grego”, e 2) que estas proposições tratam, respectivamente, da totalidade de cada um destes domínios. Por razões análogas, diz-se que a proposição universal “Todo homem é mortal” é mais geral que a proposição particular “Alguns homens são mortais”, em razão de a primeira tratar de todo o domínio delimitado pelo conceito de “homem”, e a segunda tratar de apenas uma parte deste domínio.

Como veremos a seguir, não é possível aplicar esta mesma medida no caso de Frege. Em primeiro lugar, porque, segundo Frege, uma lei não trata daquilo a que se aplica o seu conceito-sujeito e sim daquilo a que se refere o conceito-sujeito; não fosse assim, Frege estaria obrigado a aceitar quer a existência de juízos sem sujeito lógico, uma vez que ele admite juízos verdadeiros em que o conceito-sujeito é contraditório, como, por exemplo, “Todo círculo-quadrado é círculo-quadrado”; quer a existência de juízos com sujeito lógico indeterminado, uma vez que, por esta mesma razão, Frege não pode aceitar a análise lógica tradicional, segundo a qual juízos da forma “Todo A é B” tratam de tudo que tenha a propriedade A, ou ainda, do universal no singular. Quanto a dizer que os juízos gerais tratam de todo e qualquer objeto, basta observar que, para Frege, “ser um objeto” não é um conceito, mas uma

---

[48] A respeito do papel unificador que a tradição atribui à lógica, ver os *Segundos Analíticos* (77ª25).

categoria lógica e, portanto, algo que deve estar implícito na própria notação. Em outras palavras, a categoria de objeto não determina um domínio do ser e sim um modo de ser[49].

Uma proposição geral é, para Frege, uma proposição que trata de um conceito, por oposição a uma proposição que trata de um objeto, dita singular. Uma proposição é logicamente geral se trata de um conceito universalmente aplicável. A universalidade da ciência da lógica deve-se, pois, à universalidade dos conceitos de que tratam as leis básicas da lógica: falar da validade universal das leis básicas da lógica é um modo oblíquo de falar da aplicabilidade universal dos conceitos de que elas tratam.

Evidentemente, a diferença entre a definição de Frege e a do lógico tradicional deve-se, sobretudo, ao modo como eles compreendem a expressão "conceito de que elas (as leis) tratam", ou ainda, às diferentes respostas que eles oferecem para a questão "De que tratam as leis lógicas gerais?". A esta questão, o lógico tradicional responde afirmando que os princípios lógicos tratam do ser enquanto ser, enquanto que Frege afirma que eles tratam das propriedades do ser enquanto ser. Em ambos os casos, podemos falar de numa concepção universalista da Lógica. Mas não podemos esquecer que estão em jogo duas concepções distintas de generalidade. Devemos, por conseguinte, ter muito cuidado ao afirmar que Frege é herdeiro da concepção universalista da lógica, pois, o divisor de águas entre a lógica tradicional e a lógica de Frege é justamente a compreensão da universalidade.

Mas o que vem a ser um conceito universalmente aplicável? Mais uma vez, a resposta de Frege parece ser idêntica a do lógico tradicional: um

[49] Em relação a este ponto, ver a primeira seção do capítulo VI do livro de Cora Diamond: *The Realistic Spirit*.

conceito universalmente aplicável (*summa genera*) é um conceito que se aplica a tudo. Se não esquecermos que Frege não é um lógico tradicional, veremos que as duas respostas são bem diferentes.

Conforme mostramos na seção I, Frege estende aos conceitos a capacidade de cumprir a função de sujeito lógico real. Por conseguinte, a palavra "tudo", na expressão "conceito que se aplica a tudo" não deve ser entendida como sinônimo de "todo objeto", uma vez que a palavra "conceito" deve ser entendida como englobando conceitos de diferentes ordens. Sendo assim, a definição como um todo deve ser compreendida no contexto da lógica de Frege, como sendo equivalente à "um conceito universalmente aplicável é um conceito que se aplica a tudo que possa cumprir o papel de argumento deste conceito".

Além disso, uma vez que a lógica de Frege dá um tratamento homogêneo aos conceitos e às relações, e admite, além disso que estas últimas podem ser desniveladas, a afirmação tradicional "um conceito universalmente aplicável é um conceito que se aplica a tudo" corresponde à afirmação "um conceito ou relação universalmente aplicável é um conceito ou relação que se aplica a tudo que possa cumprir o papel de argumento deste conceito ou relação". Se for um conceito ou relação de 1ª ordem, os argumentos serão sempre objetos, se for um conceito ou relação de 2ª ordem, conceitos de 1ª ordem, ou par de conceitos de 1ª ordem ou, no caso de a relação ser desnivelada, pares de conceitos de 1ª ordem e objetos, e assim por diante.

Embora Frege fale constantemente em leis lógicas gerais e, em pelo menos uma ocasião, as caracterize como proposições maximamente gerais[50], optamos pela expressão "lei universalmente válida", mais freqüente na obra de Frege, ao invés de "lei maximamente geral", a fim de podermos demarcar com maior precisão as fronteiras que separam a concepção fregiana da lógica da concepção tradicional. Com efeito, em sendo procedentes as observações que fizemos anteriormente, falar no grau de generalidade de um lei é, para Frege, apenas um modo oblíquo de falar no grau de generalidade de um conceito, o que pressupõe a caracterização tradicional do conceito como uma representação geral. Ocorre, entretanto, que um conceito não é para Frege uma representação geral, no sentido de uma representação que se *pode* aplicar a mais de um indivíduo ou que expressa um traço que *pode* ser comum a vários indivíduos. Se assim fosse, os conceitos contraditórios não mereceriam este nome, pois, como se sabe, nada *pode* cair sob um conceito contraditório.

Um termo conceitual não corresponde no vocabulário da *Conceitografia*, a um símbolo que *pode* ser saturado por um nome, e sim a um símbolo que *pode* ser saturado por um símbolo de argumento. Embora possa não parecer à primeira vista, há uma grande diferença entre estas duas definições, pois, como dissemos, na seção I, também os indicadores, apesar de sua indeterminação, *podem*, certos contextos, cumprir o papel de símbolo de argumento de um símbolo conceitual. O conceito contraditório de "círculo-quadrado" não pode ser saturado por um fantástico objeto ao mesmo tempo circular e quadrado! Ele pode ser saturado, contudo, por um indicador objetual

[50] *Collected Papers on Mathematics,Logic and Philosophy*, p.112.

ao saturar um símbolo conceitual de ordem superior, como ocorre em “Para todo **a**, (**a**) é um círculo-quadrado”.

Por outro lado, mesmo que o domínio de aplicabilidade de um conceito (ou extensão do conceito) seja vazio, não há problema algum em falar do domínio de validade da lei que trata deste conceito. Que o domínio de aplicabilidade de um conceito seja vazio não implica que ele seja contingentemente vazio, daí a ausência de contradição na expressão “domínio de aplicabilidade de um conceito contraditório”. O mesmo não se pode dizer da expressão “grau de generalidade de um conceito contraditório”, pois, dizer de um conceito que ele é geral não é dizer que ele se aplica a várias coisas, e sim dizer que ele *pode* se aplicar a várias coisas. A expressão “grau de generalidade de um conceito” implica um componente modal, o que não ocorre no caso da expressão “domínio de aplicabilidade de um conceito”.

Embora a diferença de domínio de validade das leis seja comumente apresentada como uma diferença quantitativa — o que corresponde a maneira tradicional de apresentação — no contexto da lógica de Frege, também é possível apresentá-la como um diferença qualitativa, posto que a aplicabilidade universal de um conceito não é uma nota característica sua e sim uma de suas propriedades. Em outras palavras, o domínio de aplicabilidade de uma lei é maior ou menor dependendo das propriedades (de 2ª ordem) do conceito de que ela trata.

Com base no que foi dito, pode-se ver que a universalidade da linguagem da lógica não pode ser caracterizada em termos puramente formais, posto que, em última instância, ela se fundamenta na validade universal das leis básicas da lógica. Se leis básicas da lógica não tratassem de conceitos e relações universalmente aplicáveis, a substituição de indicadores por nomes, em que pese o caráter irrestrito dos primeiros, não seria suficiente para garantir a passagem do geral ao particular em todos os domínios.

Ao contrário do que diz Dummett[51], Frege não define os conceitos lógicos como conceitos universalmente aplicáveis; e, por razões análogas, ao contrário do que afirmam Connant[52] e Goldfarb[53], Frege não define as leis lógicas como leis universalmente válidas. Com efeito, as leis básicas da aritmética, que Frege afirma serem analíticas, são parcialmente gerais, uma vez que tratam do conceito de número em geral; conceito este aplicável apenas aos números particulares. A validade universal ou máxima generalidade passa a ser uma condição não apenas suficiente, mas também necessária da logicidade de uma lei, somente no caso das leis básicas da lógica. pergunta "De que tratam as leis básicas da lógica?", Frege responde de maneira diferente dos lógicos tradicionais. Com efeito, a sua resposta não é "de tudo" e sim "de conceitos universalmente aplicáveis".

Há, portanto, um terceiro sentido em que se pode dizer que a lógica é universal: ela é universal porque suas normas são universais. Nesse sentido normativo do termo, a universalidade não é atribuída nem ao simbolismo da lógica nem às leis lógicas, mas às regras de inferência lógica.

Por fim, também em relação à ciência da lógica, podemos falar de um aspecto unificador, o que se deve ao fato de as leis lógicas gerais poderem ser tomadas como leis das leis da verdade. Que elas possam ser tomadas como leis

[51] *Frege: Philosophy of Mathematics*, p.44.
[52] Cf. *The Search for Logically Alien Thought*, p.138.

das leis da verdade, ou ainda, que elas possam ser vistas como leis gerais da razão, se deve também ao fato de toda lei verdadeira poder ser empregada como norma. No caso das leis lógicas gerais, como normas ou regras de inferência[54]. Ora, nesse sentido, não apenas a linguagem da lógica, mas também as leis lógicas gerais, tem uma função unificadora. A linguagem, como já dissemos, por que toda proposição pode ser compreendida como um caso particular de uma proposição absolutamente geral; a ciência, por que toda relação de conseqüência lógica entre dois juízos pode ser compreendida como um caso particular do uso normativo de uma lei lógica geral.

[53] Cf. *Frege's Conception of Logic*, p.5-6.
[54] Cf. Thought, In: *The Frege Reader*, p.325.

III. A UNIVERSALIDADE DO NÚMERO

Em *Frege: Philosophy of Mathematics*, Dummett afirma que é um engano muito comum pensar que a adesão de Frege ao logicismo tenha tido como base apenas a demonstração rigorosa das verdades aritméticas a partir das leis básicas da lógica[55]. Para justificar sua tese, Dummett cita a seguinte passagem do §14 de *Os Fundamentos da Aritmética*[56]:

> "Também a comparação das verdades com respeito ao domínio que governam testemunha contra a natureza empírica e sintética das leis da aritmética. As proposições de experiência valem para a realidade efetiva física ou psicológica, as verdades geométricas governam o domínio do intuível espacial, seja real ou produto da imaginação. (...) Apenas o pensamento conceitual pode, de certo modo, desembaraçar-se deles, admitindo, digamos, um espaço de quatro dimensões ou com medida positiva de curvatura. Tais considerações não são absolutamente inúteis; mas abandonam completamente o terreno da intuição. (...) Do ponto de vista do pensamento conceitual, pode-se sempre assumir o contrário deste ou daquele axioma geométrico, sem incorrer em contradições ao serem feitas deduções a partir de suposições conflitantes com a intuição. Esta possibilidade mostra que os axiomas geométricos são independentes entre si e em relação às leis lógicas primitivas, e, portanto, sintéticos. Pode-se dizer o mesmo dos princípios da ciência dos números? Não teríamos uma total confusão caso pretendêssemos

[55] Cf. Dummett, *Frege Philosophy of Mathematics*, p.45-6. A mesma interpretação é avalisada por Tait, em seu artigo Frege Versus Cantor and Dedekind. In: *Early Analytic Philosophy: Frege, Russell, Wittgenstein*. p.233-48.
[56] Daqui em diante, as referências a *Os Fundamentos da Aritmética* serão feitas apenas pelo parágrafo.

> rejeitar um deles? Seria então ainda possível o pensamento? O fundamento da aritmética não é mais profundo que o de todo saber empírico, mais profundo mesmo que o da geometria? As verdades aritméticas governam o domínio do enumerável. Este é o mais inclusivo; pois não lhe pertence apenas o efetivamente real, não apenas o intuível, mas todo o pensável. Não deveriam, portanto, as leis dos números manter com as do pensamento a mais íntima das conexões?”

Em seu comentário, Dummett sugere que Frege estaria aqui defendendo duas teses distintas e independentes acerca da natureza das verdades aritméticas, a saber: 1º) que elas são analíticas e 2º) que elas estão escritas num vocabulário puramente lógico. Em ambos os casos, a justificação dar-se-ia por meio de argumentos baseados na validade universal das leis aritméticas. Ainda segundo Dummett, o domínio de validade de uma lei deve ser compreendido em duas acepções distintas. Num primeiro sentido, a extensão do domínio corresponde à abrangência da faculdade envolvida na determinação da verdade da lei: intuição sensível, intuição pura, ou entendimento. Num segundo sentido, relativo ao vocabulário necessário para a expressão da verdade, a extensão do domínio corresponde à região da realidade em que vale a lei: apenas objetos materiais, objetos espaciais e/ou temporais, ou todo e qualquer objeto.

O argumento de Frege relativo à dimensão epistemológica da validade universal das verdades aritméticas, que visaria estabelecer o seu caráter analítico e *a priori*, consistiria na alegação de que as leis aritméticas valem para tudo que pode ser apreendido pelo pensamento conceitual. Nossa incapacidade de pensar a negação de uma lei básica da aritmética, revelaria que a fonte da sua verdade está intimamente ligada às leis do pensamento em geral, ou seja, às leis da lógica.

O segundo argumento, relativo à dimensão ontológica da validade universal das verdades aritméticas, que visaria estabelecer o caráter puramente lógico das noções aritméticas, estaria fundamentado na idéia de que objetos de qualquer tipo podem ser enumerados.

O primeiro argumento, diz Dummett, tem uma eficácia meramente psicológica, uma vez que somente mediante a demonstração rigorosa das leis básicas da aritmética a partir das leis básicas da lógica e de definições, se poderia justificar a alegação de que a rejeição de uma lei básica da aritmética é, para nós, algo incompreensível. Quanto ao segundo, apesar de eficaz, ele não seria suficiente para estabelecer quer a analiticidade quer o caráter *a priori* das verdades aritméticas.

Por tudo quanto foi dito na seção II, é natural que discordemos radicalmente da interpretação de Dummett. Em primeiro lugar, não podemos concordar com a opinião de que a validade universal das leis aritméticas, em sentido ontológico, não é suficiente para demonstrar o caráter analítico das verdades aritméticas. Em segundo lugar, discordamos da idéia de que a argumentação de Frege visa estabelecer duas teses e não uma única. Em terceiro e último lugar, não concordamos com a afirmação de que é um engano pensar que a adesão de Frege ao logicismo tenha tido como base apenas a demonstração rigorosa das verdades aritméticas a partir das leis básicas da lógica.

Quanto ao primeiro ponto, uma vez que, na concepção fregiana da lógica, toda lei que trata de um conceito universalmente aplicável expressa, por definição, um juízo analítico, a tese de que o conceito de número é um conceito universalmente aplicável não pode ser dissociada da tese da analiticidade das leis do número. Além disso, ao contrário do que sugere Dummett, nem todo conceito universalmente aplicável pode ser expresso em termos puramente lógicos. O símbolo conceitual “(   ) é azul ou não é azul”, por exemplo, é universalmente aplicável, embora não possa ser parafraseado em termos puramente lógicos.

Em relação ao terceiro e último ponto, é surpreendente que Dummett negue que a adesão de Frege ao logicismo tenha tido como base apenas a demonstração rigorosa das verdades aritméticas a partir das leis básicas da lógica, já que o próprio Frege conclui sua obra afirmando que um resposta definitiva para a questão acerca da analiticidade das verdades aritméticas não pode prescindir de uma tal demonstração.

A julgar pela precariedade dos argumentos que Dummett apresenta como exemplos destas outras razões de Frege, pode-se dizer, no máximo, que a sua adesão foi motivada por certos indícios de caráter não demonstrativo, mas isso, evidentemente, diz respeito, unicamente, ao contexto da descoberta e não ao contexto da justificação.

Em que pese todas estas críticas à interpretação de Dummett, não pretendemos, de forma alguma, negar que Frege tenha se utilizado de argumentos baseados na validade universal das verdades aritméticas. O que está em questão, não é saber se ele se utilizou ou não de tais argumentos, e sim saber em que consistem tais argumentos e com que propósito eles foram utilizados por Frege.

A fim de elucidar o conteúdo da argumentação apresentada por Frege no §14 e o papel que os três primeiros parágrafos de *Os Fundamentos da Aritmética* desempenham no conjunto da obra, convém analisar o argumento que Frege apresenta na seguinte passagem da carta à Anton Marty, de 29 de agosto de 1882[57]:

> "Vejo como um dos grandes méritos de Kant o fato de ele ter reconhecido as proposições da geometria como sendo juízos sintéticos, mas não posso conceder o mesmo em se tratando da aritmética. Os dois casos são, de qualquer modo, bastante diferentes. O domínio da geometria é o domínio da intuição espacial possível; a aritmética desconhece tal limitação. Tudo é enumerável, não apenas o que está justaposto no espaço, não apenas o que é sucessivo no tempo, não apenas fenômenos externos, mas também processos mentais e eventos internos, e até mesmo conceitos, os quais não mantém entre si nem relações temporais nem espaciais, mas apenas relações lógicas. A única barreira à enumeração encontra-se na imperfeição dos conceitos. [...] Por conseguinte, o domínio do enumerável é tão vasto quanto o do pensamento conceitual e uma fonte de conhecimento de escopo mais restrito, como a intuição espacial ou a percepção sensorial, não seria suficiente para garantir a validade geral das proposições aritméticas."

Curiosamente, a justificativa de Frege para recusar a fundamentação kantiana da aritmética parece apoiar-se numa única premissa, a saber, a afirmação de que tudo é enumerável. O argumento, a julgar pelo que se lê na referida carta, é desenvolvido em duas etapas. Inicialmente, Frege afirma a validade geral das proposições aritméticas, com base na tese de que tudo é enumerável; para depois afirmar, com base na concepção universalista da lógica, a analiticidade das verdades aritméticas. Se assim é, o núcleo da argumentação de Frege pressupõe a existência de um vínculo necessário entre a enumerabilidade geral e a aplicabilidade universal do número.

Se essa é uma reconstituição fiel da estratégia argumentativa de Frege, cumpre observar, em primeiro lugar, que ela não tem eficácia alguma contra o empirismo de Stuart Mill. Com efeito, um dos pilares da concepção milliana da lógica é a tese de que todo juízo, incluindo os juízos aritméticos, é empírico[58]. No contexto da filosofia da matemática de Mill, não há, por conseguinte, nenhuma incompatibilidade entre a afirmação de que a aritmética é um ramo da lógica e a negação da tese logicista, isto é, a negação da tese de que as verdades aritméticas são analíticas. Sendo assim, de nada adiantaria convencer Mill de que a aritmética não passa de um ramo superior da lógica, já que para ele toda ciência, incluindo a lógica, é empírica[59]. Em outras palavras, Mill é imune à argumentação que Frege desenvolve na carta à Marty, por rejeitar as distinções entre juízos analíticos e sintéticos, *a priori* e *a posteriori*.

Ainda que Frege afirme em outras publicações deste mesmo período[60] que a comparação das verdades com respeito ao domínio que governam testemunha contra a natureza empírica das leis da aritmética, na carta à Marty, o alvo principal de sua crítica é a fundamentação idealista transcendental de Kant e não o empirismo radical de Mill. Vejamos então qual a eficácia do argumento de Frege em relação à fundamentação kantiana da aritmética.

Embora a concepção kantiana da aritmética difira radicalmente daquela de Mill, também Kant, ao caracterizar o número como sendo o esquema puro da

---

[57] *Philosophical and Mathematical Correspondence*, p.99-102.
[58] *A System of Logic*, p.225
[59] *A System of Logic*, p.168.
[60] Cf. §14 de *Os Fundamentos da Aritmética*, de 1884, e o parágrafo inicial do artigo de 1885, *Sobre as Teorias Formais da Aritmética*.

categoria da quantidade[61], rejeita a premissa fundamental do argumento da carta à Marty, uma vez que, ao contrário de Frege, ele restringe o domínio de aplicabilidade do número àquilo que pode ser intuído. Emquanto Mill afirma que tudo o que pode ser experienciado, pode ser enumerado, Kant afirma que tudo o que pode ser sensivelmente intuído, pode ser enumerado. A diferença entre ambos repousa, por conseguinte, na admissão, por parte de Kant, de intuições puras. Com efeito, é a divisão da faculdade da sensibilidade em duas partes, uma pura (sentido interno) e outra empírica (sentido externo), que dá suporte à distinção kantiana entre juízos sintéticos *a posteriori* e juízos sintéticos *a priori*.

Frege, por outro lado, sustenta que mesmo que algo só possa ser apreendido pela razão, é possível enumerá-lo. Como ele mesmo faz questão de enfatizar na carta à Marty, podemos enumerar "até mesmo os conceitos, os quais não mantém entre si nem relações temporais nem espaciais, mas apenas relações lógicas".

Ao nosso ver, é esta argumentação, e não aquela sugerida por Dummett, que Frege apresenta no §14 de *Os Fundamentos da Aritmética*. Mas se assim é, então, a menos que as críticas do pai da lógica moderna à Kant e Mill repousem sobre um argumento flagrantemente circular, deve existir na obra de Frege uma justificativa para a tese de que o domínio do enumerável é mais amplo do que o domínio do sensível (puro ou empírico).

[61] *Crítica da Razão Pura*, B186.

IV. TUDO É ENUMERÁVEL

No §45 Frege apresenta a seguinte relação dos resultados que ele acredita ter alcançado nos três primeiros capítulos de *Os Fundamentos da Aritmética*:

1º) O número não é, da mesma maneira que a cor, o peso e a dureza, abstraído das coisas.

2º) O número não é algo físico, mas tampouco algo subjetivo, uma representação.

3º) O número não surge por anexação de uma coisa a outra. Nem a doação de um nome após cada anexação faz alguma diferença.

4º) As expressões "pluralidade", "conjunto" e "multiplicidade" não são, por seu caráter indeterminado, apropriadas a colaborar na definição de número.

Esta lista, antes de mais nada, confere credibilidade à promessa feita por Frege, na introdução, de que mediante o exame prévio das opiniões formuladas por outros autores, ele pretendia preparar o terreno para sua própria concepção, a fim de mostrar que a sua tese não é uma entre muitas igualmente justificadas. Em que medida as razões de Frege são conclusivas não é algo que iremos discutir; no presente trabalho, nos contentaremos com o fato de que ele acreditava estar fornecendo soluções definitivas.

A julgar pela interpretação de Dummett, é, no mínimo, estranho que a lista de Frege não contenha nenhum resultado relativo às questões levantadas no primeiro capítulo — do qual faz parte o §14 — acerca da natureza analítica analítica, sintética *a posteriori* ou sintética *a priori* das verdades aritméticas. Por outro lado, se são corretas as críticas que fizemos à Dummett, é compreensível que a solução destas questões não conste na lista de Frege, pois, a menos que pudéssemos encontrar nos três primeiros capítulos de *Os Fundamentos da Aritmética*, uma justificação para a tese da aplicabilidade universal do número, a argumentação ali desenvolvida não seria suficiente para fornecer uma resposta definitiva a esta questão.

Que não há nem pode haver uma justificativa para esta tese em *Os Fundamentos da Aritmética*, depreende-se da resposta que Frege dá no § 46 à questão acerca de que tratam as atribuições numéricas, que ele próprio admite não ter respondido nos três primeiros capítulos. Antes, porém, de examinarmos a resposta de Frege a esta importante questão, vejamos o que ele entende por "atribuições numéricas".

Uma atribuição numérica (*Zahlangabe*), é um juízo do tipo "Há *n* F's", “Isto são *n* F’s”, “Ao conceito F convém o número *n*”, etc.[62] — onde “*n*” está por um número inteiro positivo, finito ou infinito, e “F” por um conceito — e serve, geralmente, para registrar o resultado de enumerações. Que nem toda atribuição numérica corresponda a uma enumeração, depreende-se do fato de que atribuições numéricas da forma “há zero F´s” não podem ser usados para registrar o resultado de enumerações, uma vez que enumeramos as instâncias dos conceitos a que atribuímos número, e não os próprios conceitos.

Feitos estes esclarecimentos, vejamos o que Frege afirma, no §24, acerca da nossa capacidade de atribuir números:

> “Chegamos assim a uma outra razão pela qual o número não pode ser classificado juntamente com a cor e a solidez: a aplicabilidade muito maior. Mill considera como verdade válida para todos os fenômenos naturais que tudo que é composto de partes é composto de partes destas partes, visto que todos poderiam ser enumerados. Mas não é possível enumerar ainda muitas outras coisas? Locke diz: ‘O número aplica-se a homens, anjos, ações, pensamentos, a toda coisa que existe ou pode ser imaginada’. Leibniz rejeita a opinião dos escolásticos de que o número seja inaplicável a coisas incorpóreas, e diz ser o número uma espécie de figura incorpórea, surgida da reunião de coisas quaisquer, por exemplo, Deus, um anjo, um homem e um movimento, que juntas são quatro. Por isso considera que o número é absolutamente geral e pertence à metafísica. (...) Seria de fato admirável que uma propriedade abstraída de coisas exteriores pudesse ser transportada a acontecimentos, representações e conceitos sem alteração de sentido. Seria precisamente o mesmo que pretender falar de um acontecimento fusível, de uma representação azul, de um conceito salgado e de um juízo espesso. É absurdo que no não-sensível apareça algo que por natureza seja sensível. Quando vemos uma superfície azul temos uma impressão peculiar, que corresponde à palavra “azul”; e reconhecemos esta impressão novamente quando avistamos outra superfície azul. Se quiséssemos admitir que, do mesmo modo, à visão de um triângulo algo sensível correspondesse à palavra

[62] Cf.§46 e §57.

> “três”, deveríamos encontrá-lo novamente em três conceitos; algo não-sensível teria em si algo sensível.”

A julgar pelo que se lê na passagem acima, poder-se-ía pensar que a rejeição de Frege às concepções empiristas da aritmética, que vêem no número a expressão de uma propriedade das coisas exteriores, deve-se à sua crença na aplicabilidade universal do número.

Entretanto, no §48, que contém um resumo dos três primeiros capítulos do livro, Frege, refletindo sobre a natureza das atribuições numéricas, nos informa que a aplicabilidade universal do número não passa de uma ilusão e que na realidade somente aos conceitos podemos atribuir números:

> “A aparência, surgida de alguns exemplos anteriores, de que à mesma coisa conviriam diferentes números explica-se por terem sido os objetos admitidos como os portadores de número. Tão logo o verdadeiro portador, o conceito, for investido de seus direitos, os números mostrar-se-ão tão exclusivos quanto as cores em seu domínio. Vemos também como se chega a pretender obter o número por abstração a partir das coisas. O que se obtém é o conceito, onde o número é então descoberto. Por isso a abstração de fato freqüentemente precede a formação de um juízo numérico. Seria a mesma confusão pretender dizer: obtém-se o conceito de risco de incêndio construindo-se uma casa de madeira com frontão de tábuas, telhado de palhas e chaminés vazantes. O poder coletante de um conceito supera amplamente o poder unificante da apercepção sintética. Por meio desta não seria possível combinar em um todo os habitantes do império alemão; mas pode-se subsumi-los sob o conceito “habitante do império alemão” e enumerá-los. Explica-se também a vasta aplicabilidade do número. É de fato enigmático como algo poderia ser enunciado ao mesmo tempo de fenômenos exteriores e interiores, do espacial e temporal e do não espacial e não temporal. Ora, também no que concerne à atribuição numérica isto absolutamente não ocorre. Apenas aos conceitos, sob os quais são subsumidos o exterior e o interior, o espacial e o temporal, o não espacial e o não temporal, atribuem-se números.”

Ora, se é verdade que o número se aplica apenas aos conceitos, os quais, como enfatiza Frege na carta à Marty, “não mantém entre si nem relações temporais nem espaciais, mas apenas relações lógicas”, o domínio de aplicação do número não está restrito aos objetos sensíveis e, sendo assim, Kant e Mill estão errados ao identificarem a intuição sensível — pura no primeiro caso, empírica, no segundo — como sendo a fonte do conhecimento aritmético.

Pareceria, a final de contas, que Frege dispõe de uma justificação, por assim dizer, lógico-filosófica capaz de estabelecer a analiticidade das verdades aritméticas. Entretanto, a tese de que tudo é enumerável não é suficiente para refutar as tentativas de fundamentação sintética da aritmética. De acordo com a nossa interpretação, o ponto central do raciocínio de Frege é a suposição da existência de um vínculo entre a enumerabilidade geral e a aplicabilidade universal do conceito de “número”. Ora, não é a aplicabilidade universal do conceito de “número” — este, segundo Frege, se aplica apenas a objetos — mas a aplicabilidade universal do conceito de “convir um número”, que garante a enumerabilidade geral. Para Frege, o número é universalmente aplicável não no sentido de se aplicar a todo e qualquer objeto, como supõe Dummett, e sim no sentido de se aplicar a todo e qualquer conceito, pois o conceito de “convir um número” é um conceito de 2ª ordem, e em relação a conceitos dessa natureza, ser universalmente aplicável significa aplicar-se a todo e qualquer conceito de uma determinada ordem.

Por conseguinte, é apenas na acepção tradicional de “universalidade” que a universalidade do número não passa de uma ilusão. Em outras palavras, da mesma forma que é uma ilusão pensar que "convir um número" é uma propriedade de objetos[63], é igualmente ilusório pensar que "convir um número" se aplica a todo e qualquer objeto. Sendo assim, uma vez que enumeramos os argumentos de um conceito e não o próprio conceito[64], tudo que pode ser argumento de um conceito é enumerável; o que, no contexto da lógica fregiana, inclui não apenas todo e qualquer objeto, mas também todo e qualquer conceito.

Vejamos, então, que justificativa Frege apresenta em *Os Fundamentos da Aritmética* para sustentar a tese de que as atribuições numéricas tratam de conceitos.

[63] A menos, é claro que a palavra "objeto" seja entendido como equivalente à "sujeito de predicação". Mas nesse caso, todo símbolo onceitual, por definição, expressaria uma propriedade de objetos.
[64] Cf. §54.

V. DE QUE TRATAM AS ATRIBUIÇÕES NUMÉRICAS?

Quase ao final da introdução de *Os Fundamentos da Aritmética*, Frege enuncia três princípios que devem ser observados na sua investigação sobre o conceito de número, a saber: a) separar o psicológico do lógico, b) perguntar pelo significado das palavras no contexto da proposição e c) não perder de vista a distinção entre conceito e objeto. Esses princípios estão intimamente conectados. Nas palavras do próprio Frege, “se não se observa o segundo princípio, fica-se quase obrigado a tomar imagens internas e atos da alma individual como sendo o significado das palavras, e deste modo a infringir também o primeiro.” Quanto ao terceiro princípio, convém atentarmos para a seguinte passagem da carta à Marty[65]:

> “Um conceito é insaturado no sentido de que requer que algo caia sob ele, não podendo, portanto, existir por conta própria. Que um indivíduo caia sob ele, é um conteúdo ajuizável, e aqui o conceito aparece como predicado e é sempre predicativo. Nesse caso, onde o sujeito é um indivíduo, a relação do sujeito com o predicado não é uma terceira coisa adicionada as outras duas, mas pertence ao conteúdo do predicado, o que faz com que o predicado seja insaturado. Não acredito que a formação dos conceitos possa preceder o juízo, pois isto pressupõe a existência independente dos conceitos, mas penso num conceito como tendo surgido da decomposição de um conteúdo ajuizável.”

Embora o princípio do contexto não apareça em momento algum na demonstração efetiva das leis da aritmética a partir das leis básicas da lógica, ele é um instrumento indispensável para a elucidação do conceito de número, uma vez que a linguagem ordinária oculta sob uma mesma forma gramatical formas lógicas absolutamente distintas. Um exemplo disso, segundo Frege, é a análise gramatical das proposições "Alemães são europeus" e "Frege é europeu" que, ao identificar, em ambos os casos, o conceito de "europeu" como sendo o predicado, suprime por completo a diferença lógica fundamental que há entre a subordinação de conceitos e a subsunção de um objeto a um conceito. Analogamente, a palavra "Frege", que na proposição anterior supomos referir-se a um indivíduo, na proposição "Boole não é nenhum Frege" refere-se a um conceito. Daí o princípio metodológico fregiano que nos proíbe perguntar pelo significado das palavras fora do contexto da proposição.

Os objetos ou indivíduos são distintos dos conceitos. No jargão fregiano: os primeiros são saturados, os últimos insaturados. Esta analogia, longe de introduzir uma ontologia platônica, onde os universais não são apenas distintos mas também separados dos indivíduos, procura tão somente ressaltar a diferença lógica que há entre conceitos e objetos. Entre a proposição "Alemães são europeus" e a sua conversa "Europeus são alemães", obtida pela inversão do sujeito e do predicado, existe apenas uma diferença de valor de verdade. Se, contudo, efetuarmos esta mesma operação sobre a proposição "Frege é europeu" produziremos a expressão "Europeu é Frege", que não é nem verdadeira nem falsa mas sem sentido.

A razão dessa assimetria, repousa no fato de que, no primeiro caso, a

[65] *The Frege Reader*. p.81.

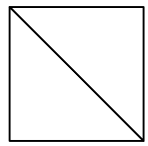
cópula expressa a relação de subordinação e, por conseguinte, tanto o sujeito como o predicado gramaticais pertencem a mesma categoria lógica, o que não ocorre no segundo caso, já que a cópula expressa a subsunção de um objeto a um conceito, o que torna impossível a inversão do sujeito e do predicado gramaticais. Com efeito, uma vez que é válida a inferência "Todo alemão é europeu e Frege é alemão, logo Frege é europeu", as palavras "alemão" e "europeu" pertencem necessariamente à mesma categoria lógica, a saber, a dos símbolos conceituais; o que para Frege, implica a tese de que o sujeito e o predicado gramaticais da proposição "Alemães são europeus" não coincidem como o seu sujeito e predicado lógicos[66].

Como Frege procura mostrar na seguinte passagem do §46, esta falta de sintonia entre a forma gramatical e a forma lógica das proposições se manifesta também em relação às atribuições numéricas:

> "A fim de iluminar a questão, será conveniente examinar o número no contexto de um juízo onde se evidencia sua espécie original de aplicação. Se observando o mesmo fenômeno exterior posso dizer de modo igualmente verdadeiro: 'Isto é um grupo de árvores' e 'Isto são cinco árvores', ou 'Aqui há quatro companhias' e 'aqui há 500 homens', o que varia não é o objeto singular nem o todo, o agregado, mas sim minha maneira de denominar. No entanto, isso é apenas índice da substituição de um conceito por outro. Impõe-se assim, como resposta à primeira questão do parágrafo anterior, que a atribuição numérica contém um enunciado sobre um conceito. É o que fica talvez mais claro no caso do número 0. Se digo: 'Vênus tem 0 luas', não há absolutamente nenhuma lua ou agregado de luas sobre o que algo se pudesse enunciar; mas ao conceito de 'lua de Vênus' atribui-se deste modo uma propriedade, a saber, a de não subsumir nada. Se digo 'a carruagem do imperador é puxada por quatro cavalos', atribuo o número quatro ao conceito 'cavalo que puxa a carruagem do imperador'"

[66]Com isso não estamos, de forma alguma, pretendendo sugerir que esta seja uma inovação da parte de Frege. Como se sabe, desde o nascimento da lógica, as diferenças entre a forma gramatical e a forma lógica das proposições tem sido objeto de investição dos lógicos.

Seja a atribuição numérica "Isto é 1 quadrado", que descreve a figura desenhada abaixo:



Em sendo correta a tese de que o número não se aplica a conceitos e sim a objetos, é igualmente correta a afirmação de que, por meio da proposição "Isto é 1 quadrado", atribuímos duas propriedades à figura desenhada acima, a exemplo do que ocorre com o enunciado "Isto são pequenos triângulos ", que a qualifica não apenas em relação à sua forma, mas também com respeito às suas dimensões. Frente a uma tal concepção acerca da natureza das atribuições numéricas, surge de imediato a questão de saber que objeto é este que está sendo caracterizado pela suposta propriedade referida pelo numeral "1". Naturalmente, não há maiores problemas em relação ao exemplo escolhido, uma vez que se dirá que o objeto em questão é, justamente, aquele caracterizado pelo conceito de "quadrado desenhado acima". Mas o que diríamos se, ao invés do juízo "Isto é 1 quadrado", estivéssemos nos referirmos ao juízo "Isto são 2 triângulos"? Nesse caso, seríamos obrigados a admitir que o objeto em questão não pode ser cada um dos triângulos, já que cada um deles não é 2 mas apenas 1, donde se conclui que o sujeito desta atribuição numérica não pode ser cada uma das instâncias do conceito "triângulo desenhado acima". Entretanto, uma vez que o quadrado desenhado acima é formado pelos dois triângulos, não poderíamos tampouco afirmar que o numeral esta qualificando o agregado formado pelos dois triângulos, pois, nessa hipótese, o número deveria ser o mesmo em ambas as atribuições, o que não ocorre. Por fim, uma vez que estas duas atribuições numéricas, além de serem diferentes são também verdadeiras, seríamos obrigados a admitir que o sujeito lógico das mesmas só pode ser o conceito com o qual apreendemos a figura desenhada acima, ora como 1 quadrado, ora como 2 triângulos.

Evidentemente que, por si só, a descoberta de que as atribuições numéricas tratam de conceitos, não é suficiente para provar a tese logicista; aliás, o fato de elas tratarem de conceitos não garante sequer o seu caráter *a priori*, do contrário, a proposição "Existem 249 palavras nesta página" expressaria um juízo sintético *a priori*, o que não é verdadeiro. A relação que Frege estabelece no § 47 dos *Grundlagen* entre a possibilidade de juízos sintéticos *a posteriori* tratarem de conceitos e o preceito metodológico de nunca misturar o lógico e o psicológico nos ajuda a compreender esta afirmação:

> "Que uma atribuição numérica exprima algo fatual, independente de nossa apreensão, pode surpreender apenas quem tome o conceito por algo subjetivo, como a representação. Mas esta concepção é falsa. Se subordinamos, por exemplo, o conceito de corpo ao de pesado, ou de baleia ao de mamífero, afirmamos algo objetivo. Ora se os conceitos fossem subjetivos, também a subordinação de um a outro, enquanto relação entre eles, seria subjetiva, como o é uma relação entre representações"

A tese de que as atribuições numéricas tratam de conceitos, pressupõe a correção de duas outras teses: 1) é possível falar de conceitos e 2) os conceitos são objetivos. Ora, estas duas teses correspondem, justamente, às duas primeiras teses da lista de resultados que Frege acredita ter alcançado nos três primeiros capítulos de *Os Fundamentos da Aritmética*, que reproduzimos logo no início desta seção. Com efeito, se o conceito de “convir um número” não é uma propriedade de objetos, então só pode ser uma propriedade de conceitos; donde se segue que os conceitos podem ser sujeito de predicação. Da mesma forma, se o conceito de “convir um número” não é algo subjetivo, uma afecção da alma ou uma imagem mental, então só pode ser algo objetivo.

O domínio do enumerável é, pois, muito mais vasto do que imagina Dummett. Dizer que tudo é enumerável não é o mesmo que dizer que podemos perguntar, em relação a *objetos* de qualquer tipo, quantos há que satisfazem uma certa condição. Aliás, se esta paráfrase fosse legítima, seria impossível enumerar *conceitos*, possibilidade esta que Frege admite, explicitamente, na passagem do §24 repoduzida na seção anterior. Como vimos na seção I, uma das características fundamentais da conceitografia é que também os símbolos conceituais podem cumprir o papel de símbolo de argumento de uma proposição. Por conseguinte, para Frege, dizer que tudo é enumerável é o mesmo que dizer que podemos perguntar, em relação a *seres* de qualquer tipo, quantos há que satisfazem uma certa condição. Assim compreendida a enumeração, a tese de que tudo é enumerável aparece como um corolário imediato da tese de que é possível atribuir número a todo e qualquer conceito.

Com efeito, Frege não concebe os numerais como nomes de espécies do gênero “número”, relação esta que vincula, por exemplo, os nomes das cores particulares como “verde”, “azul”, “amarelo”, etc., ao conceito de “cor”. O numerais são para Frege, nomes próprios e se referem, portanto, a objetos que caem sob o conceito de “número” e não a conceitos a ele subordinados. Não é, por conseguinte, o conceito de “número”, mas o conceito de “convir um número”, que esta na base da tese fregiana de que tudo é enumerável. Em outras palavras, a enumerabilidade universal é um corolário da aplicabilidade universal do conceito de “convir um número”. Compreende-se, assim, que Frege não seja capaz de responder a questão acerca da natureza das verdades aritméticas como base nos argumentos formulados no primeiro capítulo de *Os Fundamentos da Aritmética*; razão pela qual a solução deste importante problema não consta na lista de resultados do §45.

VI. A DEFINIBILIDADE DO NÚMERO

Muito provavelmente, uma das motivações subjacentes à interpretação de Dummett dos três primeiros capítulos de *Os Fundamentos da Aritmética*, encontra-se na seguinte passagem do §4:

> "Antes de abordar propriamente estas questões, desejo adiantar algo que pode fornecer uma indicação para sua resposta. Se de outros pontos de vista e de maneira fundamentada concluirmos que os princípios da aritmética são analíticos, isto testemunhará em favor da sua demonstrabilidade e da definibilidade do conceito de número. As razões em favor do caráter a posteriori destas verdades terão um efeito contrário. Por isso, cabe inicialmente submeter estes pontos de disputa a um rápido exame."

À primeira vista, a passagem acima confirma a idéia de que Frege pensava poder estabelecer o caráter analítico das verdades aritméticas, mesmo antes de proceder à demonstração rigorosa das verdades aritméticas a partir das leis básicas da lógica. Contudo, se observarmos que a afirmação de Frege é hipotética, veremos que o texto não nos obriga a endossar uma tal leitura.

Se Frege, de fato, acreditava dispor de argumentos capazes de estabelecer de maneira fundamentada a analiticidade das verdades aritméticas, como explicar que, ao concluir sua obra, ele afirme não dispor de argumentos capazes de decidir a questão acerca da analiticidade das verdades aritméticas? Frente a esta objeção, Dummett poderia alegar que Frege tinha consiciência do caráter provisório dos seus argumentos; mas isto, certamente, enfraquece sua afirmação de que Frege acreditava dispor de outras razões para justificar a tese logicista. Além disso, se Frege sabia que os argumentos apresentados nos três primeiros capítulos de *Os Fundamentos da Aritmética* eram insuficientes para estabelecer de maneira fundamentada o caráter analítico das verdades aritméticas, ele não poderia ter se utilizado da estratégia sugerida no final §4.

Dummett, ao dividir a argumentação de Frege em duas partes, sugere uma saída para este impasse. Como vimos na seção III, embora ele diga que os argumentos de Frege são insuficientes para demonstrar a analiticidade das verdades aritméticas – o que o livra de entrar em contradição com as afirmações feitas por Frege na conclusão – ele admite que estes mesmos argumentos são bons o bastante para estabelecer a tese mais fraca de que o conceito de número pode ser definido a partir dos conceitos primitivos da lógica; o que é um forte indício de que é igualmente possível demonstrar as leis básicas da aritmética.

Entretando, a interpretação de Dummett peca por conceder que da enumerabilidade geral se possa inferir a aplicabilidade universal do conceito de número; o que seria válido caso os objetos fossem o sujeito real das atribuições numéricas, tese que Frege rejeita veementemente no final do terceiro capítulo. Sendo assim, a interpretação de Dummett é incapaz de oferecer uma explicação plausível para a alegação feita pelo próprio Frege de o objetivo principal de *Os fundamentos da Arimtética* é a justificação da definibilidade do número.

Ao contrário do que supõe Dummett, a argumentação que Frege desenvolve nos três primeiros capítulos de *Os Fundamentos da Aritmética* dirige-se àqueles que ainda não se deram ao trabalho de estudar a Conceitografia, e que, em razão disso, continuam acreditando cegamente no caráter inabalável da antiga lógica. Trata-se, portanto, de uma argumentação de caráter hipotético, cuja estratégia é anunciada na passagem anteriormente citada do §4.

Como já ressaltamos em nosso comentário ao §14, a estratégia de Frege consiste em estabelecer, com base na compreensão tradicional da generalidade, um vínculo necessário entre a enumerabilidade geral e a aplicabilidade universal do conceito de número, para então inferir, legitimamente, a analiticidade das leis básicas do número.

O que Frege faz, nos três primeiros capítulos de *Os Fundamentos da Aritmética*, mais especificamente nos parágrafos 24 e 40, é monstrar, que, em sendo válido o paradigma logico tradicional, é possível estabelecer, a partir de outros pontos de vista e de naneira fundamentada, que as leis básicas da aritmética são analíticas.

Na seção intitulada "Solução da dificuldade", que encerra o terceiro capítulo, Frege mostra que a argumentação desenvolvida nos três primeiros capítulos tem uma falha, a saber, a pressuposição de que por meio das atribuições numéricas, atribuímos números a objetos. A retificação feita por Frege é, de fato, tripla: primeiro, não atribuimos números a nada, pois números não são conceitos e sim objetos; segundo, as atribuições numéricas não atribuem o conceito de "número" e sim o conceito de "convir um número";

terceiro, o termo-conceitual “convir um número” não se refere a uma propriedade de objetos e sim a um conceito de 2ª ordem.

Como dissemos anteriormente, a descoberta de que as atribuições numéricas tratam de conceitos, não é suficiente para provar a tese logicista. Contudo, se a isso adicionarmos a tese de que entre conceitos só podem existir relações lógicas[67], teremos a nossa disposição os ingredientes essenciais para a demonstração da definibilidade das noções aritméticas primitivas.

Como já deve ter ficado claro, a estratégia argumentativa adotada por Frege fundamenta-se numa reflexão acerca dos juízos aritméticos aplicados. A fim de compreender o raciocínio de Frege, vejamos primeiro o que ele entende por “relação lógica” e “símbolo escrito num vocabulário puramente lógico”.

Tendo em vista a concepção fregiana da lógica que apresentamos de forma panorâmica nas duas primeiras seções do nosso trabalho, dizer que uma relação entre conceitos, como p.ex. a relação de subordinação que há entre os conceitos de “baleia” e de “mamífero”, é de natureza lógica, é o mesmo que dizer que é possível expressá-la usando apenas o vocabulário da conceitografia[68]. Na lógica tradicional, dá-se essencialmente o mesmo. Ou seja, obtém-se o esquema “Todo A é B”, que, segundo o paradigma tradicional, expressa a forma lógica do juízo “Toda baleia é mamífero”, justamente abstraindo-se a matéria do mesmo, isto é, os conceitos de “baleia” e de “mamífero”, por meio da substituição dos nomes conceituais “baleia” e “mamífero”, na proposição categórica universal “Toda baleia é mamífero”, pelas letras esquemáticas conceituais “A” e “B”.

[67] Cf. trecho da carta à Marty reproduzido na seção III, p.57.

De posse desta idéia tão antiga quanto a própria lógica e do novo instrumental analítico modelado a partir da matemática, Frege é capaz de expressar a relação de subordinação por meio do seguinte símbolo relacional de 2ª ordem:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a} & (\quad)(\mathbf{a}) \\ & (\quad)(\mathbf{a}) \end{array}$$

que diferentemente do esquema "Todo A é B" não se refere a uma modalidade do ato judicativo (quantidade) e sim a algo objetivo, isto é, a algo que pode ser objeto de um tal ato. O símbolo relacional acima é um exemplo do que Frege entende por "relação lógica".

Feitos estes esclarecimentos, vejamos o que ocorre em relação às proposições aritméticas aplicadas. Ao afirmamos a proposição aritmética aplicada abaixo:

1) "2 tomates mais 2 tomates é igual a 4 tomates."

não estamos falando nem de agregados de tomates, supostamente referidos pelas expressões "2 tomates" e "4 tomates", nem tampouco estabelecendo uma relação lógica entre propriedades, supostamente referidas por estas mesmas expressões. A exemplo do que ocorre em toda e qualquer proposição aritmética aplicada, estamos tratando de conceitos; neste caso particular, do conceito de

[68]Evidentemente, com isso não estamos pretendendo que a proposição "Toda baleia é mamífero" expresse um juízo analítico, uma vez que os conceitos de "baleia" e de "mamífero" não são conceitos lógicos e sim zoológicos.

“tomate”. A partir deste ponto de vista, a proposição acima exibe a seguinte estrutura lógica:

1’) “2 (tomates) mais 2 (tomates) é igual a 4 (tomates).”

o que evidencia os aspectos formais responsáveis pela sua verdade, como pode ser facilmente percebido se atentarmos para a pseudoproposição correspondente à análise (1’), obtida com o auxílio do indicador funcional “f”:

2) “2 (f) mais 2 (f) é igual a 4 (f).”

Se, agora, generalizarmos todas as ocorrências do indicador funcional presente nesta pseudoproposição, o que é factível, pois, como vimos anteriormente, todo número pode ser atribuído a todo conceito, obteremos a seguinte proposição aritmética geral:

3) “Para todo f, 2 (f) mais 2 (f) é igual a 4 (f).”

que sabidamente expressa uma verdade aritmética. Além disso, não é difícil ver que a proposição particular (1) pode ser obtida a partir da proposição universal (3) pela substituição de todas as ocorrências do o indicador “f” pelo nome conceitual “tomates”, como vimos ao final da segunda seção. Sendo assim, há boas razões para acreditar que o ponto de vista lógico segundo o qual a proposição aritmética aplicada “2 tomates mais 2 tomates é igual a 4 tomates” trata do conceito de “tomate”, representa uma análise legítima da proposição (1).

Se, agora, acrescentarmos a esta possibilidade de análise lógica das proposições aritméticas aplicadas, a tese fregiana de que entre conceitos só há relações lógicas, podemos concluir que o símbolo relacional de 2ª ordem "2 ( ) mais 2 ( ) é igual a 4 ( )" pode ser expresso em termos puramente lógicos. Possibilidade esta que implica uma outra, a saber, a definibilidade em termos exclusivamente lógicos do conceito de "número em geral" e dos números particulares; tarefa que, não por acaso, Frege se propõe a realizar na IV e última parte de *Os Fundamentos da Aritmética*.

A partir da reconstituição daquilo que acreditamos ser a espinha dorsal da argumentação desenvolvida por Frege, esperamos ter mostrado, entre outras coisas, que não procede a afirmação de Dummett de que Frege dispõe de duas razões para afirmar o caráter analítico das verdades aritméticas, uma de natureza mais geral e que apela para o senso comum, e outra mais específica, de natureza estritamente lógica[69].

A redução da aritmética à lógica levada a cabo em *Leis Básicas da Aritmética* não é um outro argumento, e sim a parte final de um único argumento, cuja primeira parte encontra-se em *Os Fundamentos da Aritmética*. A seguinte passagem, do prefácio do primeiro volume de *Leis Básicas da Aritmética*, é crucial para a compreensão deste ponto:

> "Com este livro, levo adiante um projeto que eu tinha em mente desde a *Begriffsschrift* de 1879 e anunciei nos meus *Grundlagen* de 1884. Meu propósito aqui é justificar em detalhe a visão de número que expliquei neste segundo livro. O mais fundamental de meus resultados, expressei no §46 daquela obra ao dizer que uma atribuição numérica contém uma afirmação sobre um conceito; e a concepção aqui apresentada se baseia nisso."

[69]Cf. Dummett, *Frege Philosophy of Mathematics*, p.43. A mesma interpretação é avalisada por Tait, em seu artigo Frege Versus Cantor and Dedekind. In: *Early Analytic Philosophy: Frege, Russell, Wittgenstein*. p.233-48.

A tentativa de deduzir as leis da aritmética a partir das leis básicas da lógica não é independente do argumento apresentado em *Os Fundamentos da Aritmética*. Nas palavras do próprio Frege, todo o empreendimento logicista repousa sobre a tese de que as atribuições numéricas tratam de conceitos. Se a nossa interpretação é corrreta, isto se deve, fundamentalmente, ao fato de que a justificação da definibilidade do número e da demonstrabilidade das leis básica do número repousa sobre a tese de que as atribuições numéricas tratam de conceitos.

CONCLUSÃO

Ao contrário do que se constuma dizer, a importância de Frege para a filosofia não se deve ao tão alardeado *linguistic turn* — que aliás nunca existiu, já que a verdadeira filosofia jamais se furtou de uma reflexão sobre as relações entre a linguagem e o mundo — e sim o fato de Frege ter proposto um novo paradigma de análise lógica. Esta nova lógica é, contudo, muito diferente da lógica contemporânea que, sob alguns apectos importantes, está mais próxima da lógica de Aristóteles do que da lógica de Frege. Como pretendemos ter mostrado em nossa crítica à interpretação de Dummett, esta diferença se reflete sobretudo na apreciação das razões que levaram Frege a aderir ao logicismo.

A partir da reconstituição daquilo que acreditamos ser a espinha dorsal da argumentação desenvolvida por Frege em *Os Fundamentos da Aritmética*, esperamos ter mostrado que a redução da aritmética à lógica, levada a cabo em *As Leis Básicas da Aritmética*, não é mais um argumento em favor da tese logicista, e sim a etapa final de um único argumento, cuja primeira parte encontra-se em *Os Fundamentos da Aritmética*.

Frege não avança em parte alguma de *Os Fundamentos da Aritmética* argumentos para justificar a tese logicista. Como ele mesmo declara no §4, o objetivo do livro é demonstrar a definibilidade do conceito de número. Não é verdade, por conseguinte, que *Os Fundamentos da Aritmética* tenha sido concebido como uma apresentação informal do projeto a ser executado nas Leis Básicas da Aritmética. Ainda que o livro desempenhe um função pedagógica, na medida em que não se contenta em demonstrar que o logicismo é possível, mas procura, além disso, convencer o leitor de que se trata de uma hipótese muito provável, sua principal função não é de natureza prática e sim teórica.

Ao contrário de servir apenas de estímulo ao projeto logicista de redução da aritmética à lógica, *Os Fundamentos da Aritmética* é parte integrante deste esforço, na medida em que uma condição necessária para a sua realização é ali estabelecida de forma definitiva.

BIBLIOGRAFIA

Obras de Frege:

FREGE, G. Begriffsschrift. In: *Frege and Gödel: Two Fundamental Texts in Mathematical Logic*. Edição de van Heijenoort. Cambridge: Harvard, 1970.

———— Os Fundamentos da Aritmética. In: *Pensadores:Peirce e Frege*. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

———— *The Foundations of Arithmetic*. Tradução de J.L.Austin. 2° edição revisada. Evanston: Northwestern University Press, 1980.

———— *Die Grundlagen der Aritmetik*. Hildesheim, 1961.

———— *Funktion, Begriff, Bedeutung*. Göttingen: Vandenhoeck, 1969.

———— *Logische Untersuchungen*. Edição de Günther Patzig. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1966.

———— *The Basic Alaws of Arithmetic*. Tradução de Montgomery Furth. Berkeley: University of California Press, 1967.

———— *Collected Papers on Mathmatics, Logic, and Philosophy*. Edição de Brian McGuinness. Oxford: Blackwell, 1984.

———— *Translations From the Philosophical Writings of Gottlob Frege*. Edição de Peter Geach e Max Black. Totowa: Rowman & Littlefield, 1980.

———— *Posthumous Writings*. Edição de H. Hermes, F. Kambartel e F. Kaulbach. Chicago: Chicago Press, 1979.

———— *Philosophical and Mathematical Correspondence*. Edição de B. McGuinness. Chicago: University Press, 1980.

———— *The Frege Reader*. Edição de M. Beaney. Oxford: Blackwell, 1997

Outras Obras:

ANSCOMBE, G. *An Introduction to Wittgenstein's Tractatus*. Bristol: Thoemmes Press, 1971.

AQUINO, Sto Tomás *The Division and Methods of the Sciences: Questions V and VI*. Toronto: The Pontificial Institute of Mediaeval Studies, 1953.

ARISTÓTELES *The Complete Works of Aristotle*. Edição de Jonathan Barnes. Princenton: University Press, 1984.

BAKER, G. *Wittgenstein, Frege and the Vienna Circle*. Oxford: Blackwell, 1988.

BENACERRAF, P. Frege: The Last Logicist. In: *Frege's Philosophy of Mathematics*. Edição de William Demopoulos, Cambridge: Harvard University Press, 1995, pp.41-67.

BLANCHÉ, R. *História da Lógica de Aristóteles à Betrand Russell*. São Paulo: Edições 70, 1985.

BOCHEŃSKI, I. *Historia de la Lógica Formal*. Tradução espanhola de Millán Lozano. Madrid: Editorial Gredos, 1968.

BOOLE, G. *The Laws of Thought*. New York: Dover, 1958.

CONNANT, J. The Search for Logically Alien Thought: Descartes, Kant, Frege and the Tractatus. In: *Philosophical Topics*, Volume 20 (1991), p.115-180.

DIAMOND, C. *The Realistic Spirit*. Cambridge: MIT Press, 1991.

DUMMETT, M. *Frege: Philosophy of Language*. Segunda Edição. Cambridge: Harvard University Press, 1995.

———— *Frege:Philosophy of Mathematics*. Cambridge: University Press, 1995.

GEACH, Peter. Frege. In: *Three Philosophers*. Oxford: Basil Blackwell, 1973.

GOLDFARB, W. Logic in the Twenties: The Nature of the Quantifier. In: *The Journal of Symbolic Logic*, Volume 44 (1979), pp.351-68.

———— Frege's Conception of Logic. (A ser publicado) In: *Futures Past: Reflections on the History and Nature of Analitic Philosophy*. Harvard Press.

HOBBES, T. *Leviathan or The Matter, Forme and Power of a Commonwealth Ecclesiasticall and Civil.* Oxford: Blackwell, 1957.

HUME, D. *A Treatise of Human Nature*. Oxford: University Press, 1958.

———— *An Enquiry Concerning Human Understanding*. Oxford: Clarendon Press, 1989.

KANT, I. *Critique of Pure Reason*. Tradução de Kemp Smith. New York: St. Martin's Press, 1965.

———— *Logic*. Tradução de Robert Hartman e Wolfgang Schwarz. New York: Dover, 1988.

KENNY, A. *Frege*. London: Penguin Books, 1995.

KNEALE, W. & Martha KNEALE *O Desenvolvimento da Lógica*. Tradução de M. S. Lourenço. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1980.

LEAR, J. *Aristotle: The Desire to Understand*. Cambridge: University Press, 1988.

LEIBNIZ, G. *Die Philosophischen Schriften von G. W. Leibniz*. Edição de C.J.Gerhardt. Hildeschein, 1965.

LOCKE, J. *The Second Treatise on Civil Government*. Buffalo: Prometheus, 1986.

MILL, S. *A System of Logic*. Charlottesville: Ibis Publishing, 1992.

PLATÃO *The Collected Dialogues of Plato*. Edição de Edith Hamilton e H.Cairns. New York: Pantheon Books, 1966.

QUINE, W. *The Roots of Reference*. La Salle: Open Court, 1974.

RICKETTS, T. Generality, Meaning, and Sense in Frege. In: *Pacific Philosophical Quarterly*. Volume 67 (1986), pp.172-95.

TAIT, W. Frege versus Cantor and Dedekind: On the Concept of Number. In: *Early Analytic Philosophy*. Chicago: Open Court, 1997, pp. 213-48.

VAN HEIJENOORT, J. Logic as Calculus and Logic as Language. In: *Synthese*, Volume 17 (1967), pp.233-39.

WEINER, J. *Frege in Perspective*. Ithaca.: Cornell University Press, 1990.

———— *Frege*. Oxford: Oxford University Press, 1999.

WITTGENSTEIN, L. *Tractatus Logico-Philosophicus*. Tradução e introdução de Luiz Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: EDUSP, 1993.

———— *Philosophical Investigations*. Tradução de G.E.M. Ascombe. Oxford: Bassil Blackwell, 1958.