

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**

**Kristian Yuiti Matsushita**

**RESISTÊNCIA DE SEÇÕES POLIGONAIS  
SUBMETIDAS À FLEXÃO COMPOSTA:  
IMPLEMENTAÇÃO DE UM ALGORITMO EM  
PYTHON**

Porto Alegre  
2022

KRISTIAN YUITI MATSUSHITA

**RESISTÊNCIA DE SEÇÕES POLIGONAIS SUBMETIDAS À  
FLEXÃO COMPOSTA: IMPLEMENTAÇÃO DE UM  
ALGORITMO EM PYTHON**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Comissão de Graduação do Curso de Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Civil.

**Orientador: Felipe Schaedler de Almeida**

**Coorientadora: Paula Manica Lazzari**

Porto Alegre  
2022

**KRISTIAN YUITI MATSUSHITA**

**RESISTÊNCIA DE SEÇÕES POLIGONAIS SUBMETIDAS  
À FLEXÃO COMPOSTA: IMPLEMENTAÇÃO DE UM  
ALGORITMO EM PYTHON**

Este Trabalho de Diplomação foi julgado adequado como pré-requisito para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL e aprovado em sua forma final pela Banca Examinadora, pelos Professores Orientadores e pela Comissão de Graduação do Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, outubro de 2022

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Felipe Schaedler de Almeida (UFRGS)**

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Jean Marie Désir (UFRGS)**

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Jorge Luis Palomino Tamayo (UFRGS)**

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Profa. Paula Manica Lazzari (UFRGS)**

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus pais, Elza Y. W. Matsushita e Kenzo Matsushita, e ao meu irmão, Kelvin T. Matsushita, por todo o apoio e pela ajuda, que me permitiram trilhar os meus estudos ao longo da minha formação.

Também agradeço aos professores da Universidade Federal do Rio Grande do Sul e da École Centrale de Lyon por todos os ensinamentos durante estes anos acadêmicos, auxiliando na formação profissional e também pessoal, assim como os demais professores que tive em minha vida que me incentivaram aos estudos.

Agradeço em especial ao meu orientador, Felipe Schaedler de Almeida que me acolheu para a iniciação científica e que me deu uma formação complementar sobre outros domínios de conhecimentos. Agradeço também à Paula Manica Lazzar por dar o suporte para este trabalho e estarem sempre disponíveis para me ajudar.

Agradeço também à Giliane por estar sempre comigo, assim como os meus amigos e colegas de faculdade, que fizeram parte dessa minha caminhada durante a faculdade,

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma ferramenta, desenvolvida em Python, que a partir de um perfil de deformações aplicada na seção transversal calcula os esforços resistentes (esforço axial e os momentos fletores orientados nos eixos cartesianos) são calculados. Esta seção é composta por elementos geométricos e propriedades dos materiais. A seção pode ser criada a partir de pontos e os materiais são lançados implementados pelas leis constitutivas, definidas por partes. O trabalho descreve as etapas para compor o programa, a fim de obter os esforços resistentes últimos. Implementa-se, inicialmente, um método que calcule os esforços resistentes a partir da seção definida e pela curvatura (gerada pela rotação em relação aos eixos globais, altura da linha neutra e curvatura). Posteriormente, dois métodos principais são implementados, o método  $N-\theta$  e o método  $N-\alpha$ . Ambas servem para gerar envoltória dos momentos fletores para um esforço axial fixo, o primeiro calcula os pontos variando o ângulo de rotação dos eixos locais, enquanto que o segundo varia o ângulo formado entre os momentos fletores. Algumas seções foram selecionadas para realizar exemplos e validar o programa, sendo os resultados obtidos satisfatórios.

Palavras-chave: Python. Seção composta. Teorema de Green. Método de Brent.

## ABSTRACT

This work presents a tool, developed in Python, that from a deformation applied in the composite section the resistant forces (axial force and the bending moments oriented in the cartesian axes) are calculated. This section is composed of geometric and material elements, the first can be created from points, line segments and polygons, the second is by the constitutive law, defined by parts. The work describes the steps to compose the program in order to obtain the last resistant efforts. Initially, a method is implemented that calculates the resistant efforts from the defined section and the curvature (generated by the rotation in relation to the global axes, height of the neutral line and curvature). Afterwards two main methods are implemented, the  $N-\theta$  method and the  $N-\alpha$  method. Both serve to generate the envelope of the bending moments for a fixed axial force, the first calculates the points by varying the angle of rotation of the local axes, while the second varies the angle formed between the bending moments.

Keywords: Python. Composite section. Green's theorem. Brent's method.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Etapas do trabalho . . . . .	14
Figura 4.1 – Lei constitutiva uniaxial definida por trechos. . . . .	19
Figura 4.2 – Componentes de uma seção. . . . .	20
Figura 4.3 – Parâmetros da seção. . . . .	21
Figura 4.4 – Parâmetro $\alpha$ da seção. . . . .	21
Figura 4.5 – Transformação de coordenadas. . . . .	22
Figura 4.6 – Superfície de ruptura. . . . .	27
Figura 4.7 – Diagrama de classe UML simplificado. . . . .	29
Figura 4.8 – Esquema simplificada para os cálculos dos esforços a partir da deformada. . . . .	31
Figura 4.9 – Esquema simplificada para o método <i>resist_d</i> . . . . .	31
Figura 4.10 – Esquema simplificado para o método N-d. . . . .	32
Figura 4.11 – Esquema simplificada para o método N- $\theta$ . . . . .	33
Figura 4.12 – Esquema simplificada para o método N- $\alpha$ . . . . .	34
Figura 5.1 – Retângulo. . . . .	36
Figura 5.2 – Casos com testes analíticos. . . . .	37
Figura 5.3 – Retângulo com furo retangular. . . . .	38
Figura 5.4 – Casos com testes analíticos. . . . .	39
Figura 5.5 – Casos com testes analíticos. . . . .	41
Figura 5.6 – Retângulo. . . . .	44
Figura 5.7 – Retângulo. . . . .	45
Figura 5.8 – Envoltória pelo método <i>resist_d</i> . . . . .	47

Figura 5.9 – Projeção das envoltórias, à esquerda pelo método <i>resist_d</i> e à direita pelo método $N-\theta$ . . . . .	48
Figura 5.10 – Metade das envoltórias, à esquerda pelo método $N-\theta$ e à direita pelo método $N-\alpha$ . . . . .	48
Figura 5.11 – Envoltória para $N = -1000 \text{ kN}$ , à esquerda pelo método $N-\theta$ e à direita pelo método $N-\alpha$ . . . . .	48
Figura 6.1 – Seção multicelular. . . . .	49
Figura 6.2 – Envoltórias para seção multicelular. . . . .	50
Figura 6.3 – Seção G. . . . .	51
Figura 6.4 – Envoltórias para seção G. . . . .	52
Figura 6.5 – Seção retangular. . . . .	52
Figura 6.6 – Concreto parábola-retangular. . . . .	54
Figura 6.7 – Concreto não linear com amolecimento. . . . .	54
Figura 6.8 – Envoltórias para seção retangular. . . . .	54
Figura 6.9 – Seção complexa. . . . .	55
Figura 6.10 – Envoltória para seção complexa. . . . .	56
Figura 7.1 – Seção quadrada . . . . .	57
Figura 7.2 – Seção transversal viga I . . . . .	59
Figura A.1 – Segmento de reta do elemento $i$ . . . . .	68



## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Tabela com os resultados para o material elástico linear. . . . .	38
Tabela 5.2 – Tabela com os resultados para o material elasto-plástico perfeito. . . . .	40
Tabela 5.3 – Tabela com os resultados para o material elasto-plástico perfeito. . . . .	43
Tabela 5.4 – Valores das propriedades para o concreto C40. . . . .	46
Tabela 5.5 – Valores das propriedades para o aço CA-50. . . . .	46
Tabela 5.6 – Tabela com os resultados para o concreto armado. . . . .	46
Tabela 6.1 – Valores das propriedades para o concreto. . . . .	49
Tabela 6.2 – Valores das propriedades para o aço. . . . .	50
Tabela 6.3 – Valores das propriedades para o concreto. . . . .	53
Tabela 6.4 – Valores das propriedades para o concreto. . . . .	53
Tabela 6.5 – Valores das propriedades para o aço. . . . .	53
Tabela 6.6 – Valores das propriedades para o concreto. . . . .	55
Tabela 6.7 – Valores das propriedades para o aço - barras. . . . .	55
Tabela 6.8 – Valores das propriedades para o aço - Perfil metálico. . . . .	56
Tabela 7.1 – Valores das propriedades para o concreto C16. . . . .	58
Tabela 7.2 – Valores das propriedades para o aço CA-50. . . . .	58
Tabela 7.3 – Valores das propriedades para o aço CA-60. . . . .	58
Tabela 7.4 – Valores das propriedades para o concreto C16. . . . .	59
Tabela 7.5 – Valores das propriedades para o concreto. . . . .	60
Tabela 7.6 – Valores das propriedades para a malha têxtil. . . . .	61

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>2 DIRETRIZES DA PESQUISA</b> . . . . .	<b>13</b>
2.1 OBJETIVOS DA PESQUISA . . . . .	13
2.1.1 Objetivo Principal . . . . .	13
2.1.2 Objetivos Secundários . . . . .	13
2.2 LIMITAÇÕES . . . . .	13
2.3 DELINEAMENTO . . . . .	14
<b>3 PESQUISA BIBLIOGRÁFICA</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>4 METODOLOGIA</b> . . . . .	<b>18</b>
4.1 DESCRIÇÃO DA SEÇÃO POLIGONAL ARBITRÁRIA . . . . .	18
4.2 INTEGRAÇÃO DE TENSÕES . . . . .	20
4.3 ESFORÇOS RESISTENTES . . . . .	26
4.4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL . . . . .	29
<b>5 EXEMPLOS</b> . . . . .	<b>36</b>
5.1 SEÇÃO RETANGULAR DE MATERIAL ELÁSTICO LINEAR . . . . .	36
5.1.1 Seção retangular maciça . . . . .	36
5.1.2 Seção retangular com furo . . . . .	38
5.2 SEÇÃO RETANGULAR DE MATERIAL ELASTO-PLÁSTICO PERFEITO . . . . .	40
5.3 SEÇÃO RETANGULAR DE CONCRETO . . . . .	43
5.3.1 Seção retangular . . . . .	44
5.3.2 Seção quadrada . . . . .	46
<b>6 EXEMPLOS: BENCHMARKS</b> . . . . .	<b>49</b>
6.1 SEÇÃO MULTICELULAR . . . . .	49
6.2 SEÇÃO G . . . . .	51
6.3 SEÇÃO RETANGULAR . . . . .	52
6.4 SEÇÃO COMPLEXA . . . . .	55
<b>7 EXEMPLOS: NOVAS APLICAÇÕES</b> . . . . .	<b>57</b>

7.1 APLICAÇÃO 1 . . . . .	57
7.2 APLICAÇÃO 2 . . . . .	59
<b>8 CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>62</b>
8.1 CONCLUSÃO . . . . .	62
8.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS . . . . .	62
<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>64</b>
<b>APÊNDICES . . . . .</b>	<b>66</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Cálculo estrutural é um ramo da engenharia civil que se preocupa em dimensionar e verificar se uma dada estrutura está conforme os critérios de projeto. Para este fim, surgiram diversos programas que auxiliam nos cálculos, desde de planilhas até *softwares* mais sofisticados. Diversas abordagens podem ser realizadas para o estudo, seja ele um estudo global da estrutura (como um prédio), ou por elementos (como vigas, lajes ou pilares) ou ainda uma seção do elemento.

O estudo de seções ganhou atenção quando estas estão submetidas à flexo compressão oblíqua, em destaque nos pilares. Neste caso, a linha neutra se encontra inclinada em relação aos eixos globais, gerando momentos fletores ortogonais entre si, diferentemente das vigas, que na maioria dos casos, estão submetidas a uma flexo compressão normal que tem a sua linha neutra paralela a um dos eixos globais. Com o interesse de estudar as seções transversais, surgiram programas que dimensionam, por métodos simplificados, ou verificam se os esforços resistentes são superiores aos esforços de cálculo.

Papanikolaou (2012) concentrou pesquisas concernentes aos cálculos dos esforços resistentes últimos da seção. Com base nestas pesquisas o mesmo apresentou, por meio da Programação Orientada a Objeto (POO), um programa que calcula estes esforços quando a seção é definida previamente, por meio de elementos geométricos e os materiais constituintes.

A Programação Orientada a Objeto, uma maneira de estruturar o código, também pode ser manipulada no Python (PEREZ; GRANGER, 2007), que é uma linguagem de programação simples, clara e objetiva (NETO; SILVA, 2010), sendo aplicada nos mais diversos domínios do conhecimento. O Python possui a vantagem de ser *Open Source*, ou seja, pode ser utilizada e distribuída gratuitamente, possuindo uma grande comunidade de usuários que contribuem com melhorias para o seu uso. Neste contexto, este trabalho propõe o uso da linguagem Python para implementar métodos que auxiliem no cálculo dos esforços resistentes últimos para uma seção transversal a partir de um perfil de deformações, sendo a mesma definida por meio da rotação dos eixos (em relação aos eixos globais)( $\theta$ ), curvatura ( $\varphi$ ) e deformação axial no centro dos eixos locais da seção ( $\epsilon_0$ ). A seção deve ser composta por elementos geométricos (pontos, segmentos de retas e polígonos) e de materiais (por meio das leis constitutivas). Existem diversas possibilidades para compor uma seção, no entanto, para isso é necessário conhecer o seu funcionamento e as suas limitações impostas neste trabalho.

O trabalho apresenta 8 capítulos, sendo este o primeiro capítulo destinado a apresentação do tema abordado. O capítulo 2 apresenta as diretrizes da pesquisa, expondo os objetivos e as limitações

do trabalho. O capítulo 3 refere a pesquisa bibliográfica que serve de base para o trabalho e apresenta principais referências dos trabalhos já realizados.

Os capítulos seguintes expõem o desenvolvimento do programa e posteriormente suas validações e aplicações. O capítulo 4 apresenta a metodologia, explicitando todas as definições e fórmulas pertinentes para o desenvolvimento da ferramenta, incluindo a sua implementação. Dois capítulos são dedicados à apresentação da ferramenta criada. O capítulo 5 destaca a comparação dos resultados obtidos da ferramenta computacional e os resultados a partir de formulação analítica, apresenta ainda comparações da envoltória e da superfície de ruptura entre os métodos. O capítulo 6 demonstra validação com exemplos já consolidados. O capítulo 7 consiste na aplicação da ferramenta em dois casos reais, discutindo-se os resultados obtidos. O último capítulo apresenta as conclusões e sugestões para trabalhos futuros e aprimoramento da ferramenta.

## 2 DIRETRIZES DA PESQUISA

As diretrizes para o desenvolvimento do trabalho são descritas nos próximos itens.

### 2.1 OBJETIVOS DA PESQUISA

Os objetivos da pesquisa são classificados como principal e secundário sendo melhores descritos a seguir.

#### 2.1.1 Objetivo Principal

O objetivo principal é a elaboração de um programa que permite calcular os esforços resistentes associadas às tensões normais na seção (força normal e momento fletor) para uma seção transversal descrita por uma poligonal qualquer, formada por materiais que podem ser com leis constitutivas distintas e implementar ferramentas auxiliares para tratar os resultados.

#### 2.1.2 Objetivos Secundários

O objetivo secundário é a sua aplicação em casos reais e de melhorias no programa para obter melhor eficiência computacional.

### 2.2 LIMITAÇÕES

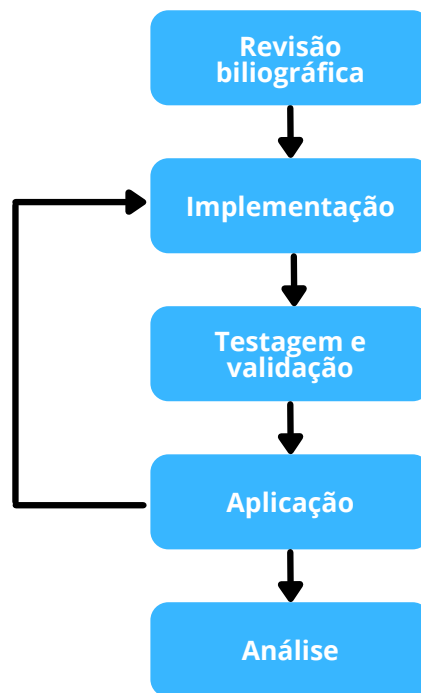
São limitações do trabalho:

- a) uso do Python como linguagem de programação por ser amplamente difundida;
- b) os esforços resistentes da seção transversal são determinados para o seção transversal considerando o Estado Limite Último (ELU) de dimensionamento;
- c) não são considerados esforços de corte e torção, associados às tensões de cisalhamento;
- d) O perfil de deformações é linear na seção em função da deformação axial e curvatura, seguindo as hipóteses cinemáticas da teoria clássica de vigas.

## 2.3 DELINEAMENTO

O trabalho foi realizado conforme a sequência de etapas apresentadas e descritas na Figura 2.1 a seguir.

Figura 2.1 – Etapas do trabalho



(fonte: elaborada pelo autor)

A etapa inicial da **revisão bibliográfica**, que perdurou ao longo de todo desenvolvimento do trabalho, consistiu na busca de dados que auxiliassem no desenvolvimento do programa.

A **implementação** foi a etapa que mais demandou tempo para o bom funcionamento do programa. Juntamente das etapas de **testagem e validação**, diversas correções e melhorias se fizeram necessárias a cada verificação.

As **aplicações e análise dos resultados** corroboram o bom funcionamento e a vasta utilidade do programa.

### 3 PESQUISA BIBLIOGRÁFICA

Elementos estruturais, submetidos simultaneamente a momento fletor e esforço axial, estão presentes nas mais diversas estruturas de engenharia desde pilares até grandes obras de artes. Para que se possa compreender o comportamento de uma seção composta de diferentes materiais e de diferentes formatos, diversas pesquisas sobre o assunto iniciaram na década de 60 (PAPANIKOLAOU, 2012). Andersen e Lee (1951) realizaram os estudos comparando os resultados obtidos por ensaios (aplicando esforços excêntricos para um corpo de prova de concreto armado) e os resultados obtidos por meio de equações de equilíbrio calculadas analiticamente. Pensando nos esforços resistentes últimos, Bresler (1960) propõe um método de obter a resistência última da seção de concreto armado com o uso da superfície de ruptura.

Com o advento de novas tecnologias no âmbito da computação e a disseminação da linguagem computacional, o número de pesquisas em torno da obtenção dos esforços com o auxílio computacional bem como o desenvolvimento de programas especificamente voltados a este âmbito cresceu exponencialmente, não só para seções de concreto armado, mas também para seções compostas dos mais distintos materiais. A seção de concreto armado mostrou-se recorrente em diversas pesquisas e diferentes estratégias foram utilizadas, visto que a lei constitutiva do concreto é empregado na forma de parábola-retângulo e do aço sendo considerado um material elasto-plástico. Contudo, Dundar e Sahin (1993) assumiram a lei constitutiva do concreto sendo uma tensão constante até a sua ruptura e o do aço como sendo um material elasto-plástico. Já o Pallarés, Miguel e Fernández-Prada (2009) estenderam a definição do concreto para a sua forma parábola-retângulo, conforme o Eurocode 2 (EC2) EN1992-1-1 (2004).

A lei constitutiva uniaxial tipo parábola-retângulo, empregada na descrição do comportamento do concreto armado em compressão, é definida por um trecho inicial parabólico, seguido de um patamar associado ao comportamento plástico-perfeito que se estende até uma deformação limite, de  $-3.5\%$ . A mesma abordagem pode ser adotada para o aço, tanto na compressão e na tração. Grande parte dos trabalhos encontrados na literatura técnica trata o problema em questão por duas abordagens: a primeira onde a seção era dividida em seções menores para a mesma tensão, apresentados por Alfano, Marmo e Rosati (2007) e Vivo e Rosati (1998). E a segunda realizando a integração por meio de expressões analíticas implementados computacionalmente, apresentado por Rodriguez e Aristizabal-Ochoa (1999). Para ambas as situações o método de Newton-Raphson foi utilizado para encontrar os esforços resistentes. Ainda, o mesmo método de Newton-Raphson foi utilizado pelos Dundar e Sahin (1993) e Pallarés, Miguel e Fernández-Prada (2009) para resolver outro problema, o dimensionamento de uma seção poligonal, onde os



esforços resistentes devem ser conhecidos, assim como os materiais e também uma estimativa inicial da linha neutra, para que se possa calcular a área de aço.

Ainda com a utilização do concreto armado, Fafitis (2001) usou o Teorema de Green para a integração, sendo utilizada apenas 3 pontos para quadratura de Gauss-Legendre, fornecendo a integral exata de linha para o concreto expresso pela parábola-retângulo. Bonet et al. (2004) mostraram que é possível obter um resultado rápido e preciso, dividindo em células, que juntamente com o Teorema de Gauss aplicado nessas células é possível obter resultados rápidos e precisos. Foi mostrado também que foram obtidas melhores resultados comparado ao método por linhas.

Além do concreto armado, existem seções compostas onde a lei constitutiva passa a ser limitada conforme o programa utilizado. Sousa e Muniz (2007) permitiram o uso de outros materiais, desde que as leis constitutivas sejam representadas por funções polinomiais. Juntamente com o Teorema de Green, a seção foi dividida em outras seções para que as integrações sejam otimizadas. O estudo apresentado por Rosati, Marmo e Serpieri (2008) limita-se ao uso de materiais cuja lei constitutiva seja na forma de parábola-retangular ou elasto-plástico e pelo uso do método de Newton-Raphson.

Chen, Teng e Chan (2001) mostraram que o método de quasi-Newton pode ser utilizado para obter resultados rápidos e precisos para o concreto armado. Mesmo usando a lei constitutiva do concreto, parábola-retangular, este método diferenciou-se dos demais por optar em transladar os eixos para o centro plástico da seção, e em seguida calcular o ângulo de rotação da seção e a altura da linha neutra. Por fim, realiza-se o processo iterativo até que se igualem os esforços resistentes calculados com as cargas fornecidas.

Diferentes métodos também foram utilizados para a integração das tensões. O método de linhas apresentado por Sfakianakis (2002), o qual não inclui processos iterativos e fornece resultados precisos. No entanto, para alguns casos apresentam resultados divergentes. Chiorean (2010) apresentou uma nova implementação, baseando-se no método do comprimento do arco, a qual retorna as resistências últimas da seção, mostrando-se eficiente.

Charalampakis e Koumoussis (2008) generalizaram as leis constitutivas para funções polinomiais. O programa foi desenvolvido a partir de uma curvatura do perfil de deformações, sendo os esforços correspondente a essa deformada. As integrais das tensões foram realizadas pelo método trapezoidal. Para obter a envoltória dos momentos fletores para um dado esforço axial e a inclinação da linha neutra em relação aos eixos cartesianos, a curvatura máxima para essa seção era calculada a partir da deformada máxima dos materiais e, posteriormente, com uso do método de Brent, a altura da linha neutra era calculada. Obtendo-se assim os dados de entrada para calcular os esforços últimos. Dados os esforços externos, pode-se também obter a condição da deformada.

Papanikolaou (2012) apresentou uma proposta bem detalhada da estrutura do programa, baseada em Programação Orientada a Objeto (POO), criando-se os elementos geométricos e os materiais para uma dada curvatura, calculando-se os esforços resistentes. Com este programa obteve-se as envoltórias dos momentos fletores, a superfície sob eixos axial e momentos fletores.

Guan, Zhang e Li (2013) propuseram um método robusto com eficiência computacional, convergência e resultados precisos. O trabalho baseia-se em criar uma seção poligonal, para diversos materiais, não só para concreto armado. A abordagem computacional consiste em definir a curvatura última da seção. A posição da linha neutra é obtida pelo método da bissetção modificado. A partir da posição da linha neutra, calculam-se os esforços últimos de resistência. Foi testado o uso do método de Newton-Raphson e do método da secante, mas foi constatado que existem situações que a procura da posição da linha neutra não converge.

## 4 METODOLOGIA

Este capítulo aborda as considerações para o desenvolvimento da ferramenta, incluindo a descrição da seção por meio de elementos geométricos e o material por meio da lei constitutiva uniaxial. As fórmulas que são utilizadas para o cálculo dos esforços resistentes também estão descritas, juntamente da estratégia adotada para obter os esforços resistentes últimos.

### 4.1 DESCRIÇÃO DA SEÇÃO POLIGONAL ARBITRÁRIA

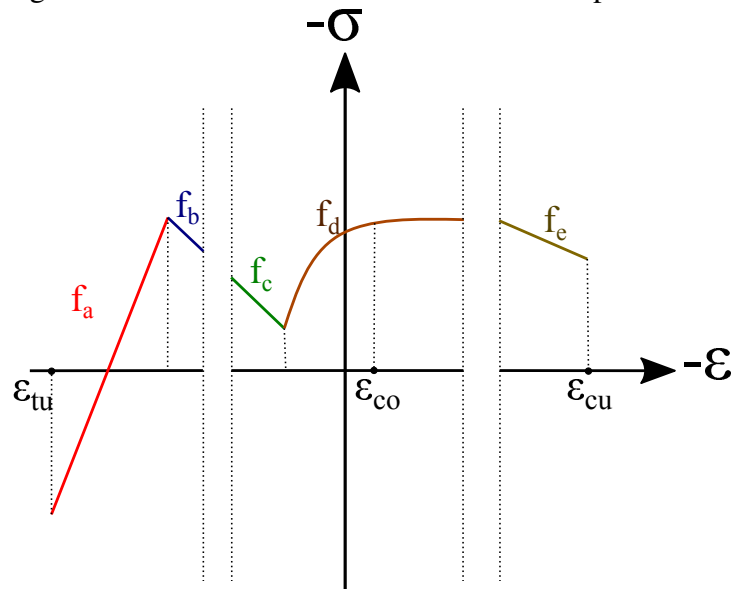
Dois referenciais são utilizados, um como sendo os eixos globais, com uma origem  $O$  e com os eixos  $X$  e  $Y$  e outro como sendo os eixos locais, com origem  $o$  e com os eixos  $x$  e  $y$ . O primeiro é definido conforme as coordenadas da seção, o segundo é definido a partir das transformadas das coordenadas que ao longo do trabalho estes eixos serão mais explorados.

Tratando-se da seção, ela pode ser composta por três tipos de elementos geométricos, um ponto, um segmento de reta e um polígono. O elemento mais simples é um *Ponto*, sendo definido por meio de coordenadas  $(x_p, y_p)$ . Um *Segmento de reta* é definido por meio de 2 *Pontos*, necessariamente por um ponto inicial  $(x_i, y_i)$  e por um ponto final  $(x_f, y_f)$ . Um *Polígono* é definido por meio de um conjunto de *Pontos*  $((x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$ . Esses pontos são unidos sequencialmente, formando segmentos de retas que definem uma poligonal fechada, percorrida no sentido anti-horário. O último lado da poligonal é definido do ponto final ao ponto inicial, que não devem coincidir, ou seja,  $(x_0, y_0) \neq (x_n, y_n)$ .

Em seguida, o *Material* deve ser definido por meio da sua lei constitutiva unidimensional que possui uma relação tensão por deformação,  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ . O *Material* é criado a partir de uma sequência de deformadas e cada duas deformadas em sequência forma um intervalo fechado de deformadas, onde para este intervalo deve existir uma função que relacione a tensão com a sua deformada, conforme apresentado por Bonet et al. (2004). Na ferramenta para cada material de interesse a lei constitutiva uniaxial por partes deve ser criada a partir das listas de deformada e de funções, sendo a lista de deformadas em ordem crescente  $[\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_k, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n]$  e a lista de funções  $[\sigma_{0,1}, \sigma_{1,2}, \dots, \sigma_{k-1,k}, \dots, \sigma_{n-1,n}]$ , na qual a função  $\sigma_{k-1,k}$  corresponde as deformadas limitadas por  $\varepsilon_{k-1}, \varepsilon_k$ . Ainda sobre a função, para cada função parcial, ela pode ser definida por meio de coeficientes polinomiais  $[a_0, a_1, \dots, a_k, \dots, a_n]$  que corresponde a uma função  $\sigma(\varepsilon) = a_0\varepsilon^0 + a_1\varepsilon^1 + \dots + a_k\varepsilon^k + \dots + a_n\varepsilon^n$  ou por meio de funções contínuas. Na Figura 4.1, é representada uma lei constitutiva genérica, onde cada trecho é representado por uma função ( $f_a$ ,

$f_b$ ,  $f_c$ ,  $f_d$  e  $f_e$ ), as deformações máximas para tração e compressão são representadas por  $\epsilon_{tu}$  e  $\epsilon_{cu}$ , respectivamente. Deve ser fornecida a deformação limite correspondente à compressão pura  $\epsilon_{co}$ , caso exista.

Figura 4.1 – Lei constitutiva uniaxial definida por trechos.



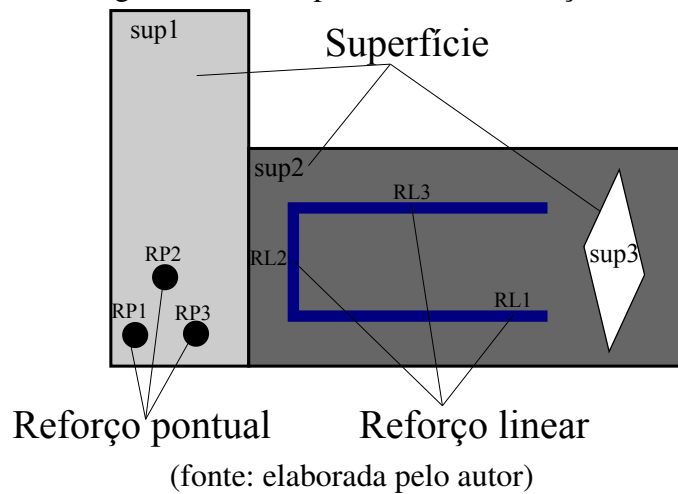
(fonte: elaborada pelo autor)

Os *Componentes* da seção consistem em elementos que associam uma geometria com um material. Os *Componentes* que podem ser criados dependem da geometria e do material, assim definem-se: um *Reforço Pontual* por meio da junção do *Ponto* com um *Material*; um *Reforço Linear* por meio da junção de um *Segmento de reta* com um *Material*; *Superfície* por meio da junção de um *polígono* com um *Material*.

Existem 3 possibilidades para cada componente. A primeira ocorre quando é adicionado um material, ou seja, o elemento é preenchido pelo mesmo. A segunda indica a adição de um material e retirada de um outro material (equivale ao caso onde um elemento se encontra dentro de um outro elemento). E o terceiro é quando existe a necessidade de criar um furo, para isso o material que se encontra sobre o local do furo é retirado.

Por fim, a *Seção* é a composição dos diversos *Reforços Pontuais*, dos *Reforços Lineares* e das *Superfícies*. Na Figura 4.2 um exemplo onde a seção é composta por *Superfícies* (sup1, sup2 e sup3 - um vazio), três *Reforços Pontuais* (RP1, RP2 e RP3) e 3 *Reforços lineares* (RL1, RL2 e RL3).

Figura 4.2 – Componentes de uma seção.



## 4.2 INTEGRAÇÃO DE TENSÕES

Os esforços resistentes são calculados a partir do perfil de deformações da seção transversal e pela consideração que a deformada é plana, existe um ângulo  $\theta$  presente na Figura 4.3, onde  $\theta > 0$  implica um giro no sistema local no sentido anti-horário e  $\theta < 0$  no sentido horário, que permite relacionar essa deformada em função da ordenada local ( $y$ ) pela Equação 4.1.

$$\varepsilon(y) = \varphi(d - y) \quad (4.1)$$

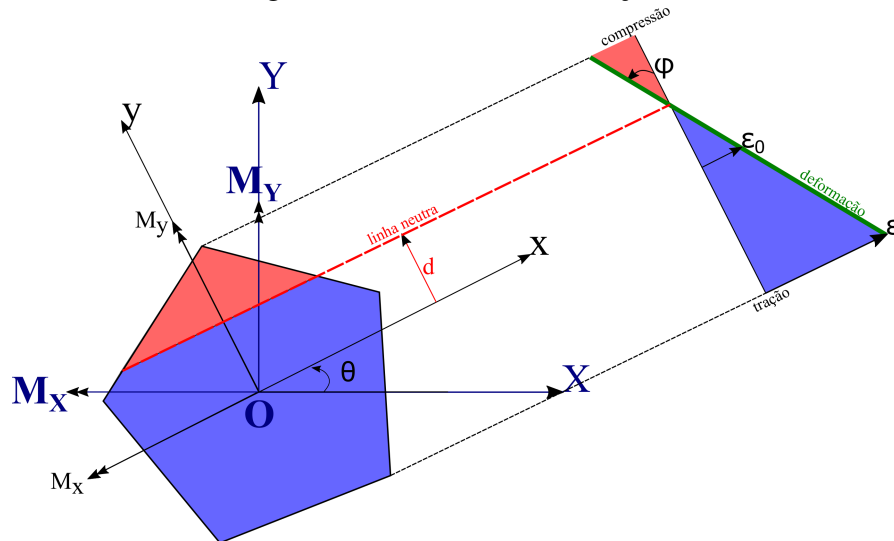
Sendo que, o  $\varphi$  é a curvatura, sempre maior ou igual a zero, relacionada com a inclinação do perfil de deformação que cruza a ordenada a uma altura  $d$ , sendo esta chamada de altura da linha neutra que pode ser tanto positivo ou negativo. A altura da linha neutra com a rotação ( $\theta$ ) se define a linha neutra, que é a linha na qual a deformação é nula e a zona da seção que se encontra acima da linha neutra, indica compressão, enquanto que a zona inferior dessa linha indica tração (da Figura 4.3, são respectivamente representados pelas cores vermelha e azul). Pode-se determinar a deformada na origem pelos eixos locais, ou seja, quando se aplica a Equação 4.2 na origem local ( $y = 0$ ) é obtida a deformada na origem, Equação 4.2.

$$\varepsilon_0 = d\varphi \quad (4.2)$$

Com os parâmetros apresentados, a deformada pode ser definida a partir dos conjuntos que incluem: a rotação ( $\theta$ ), a curvatura ( $\varphi$ ) e a deformada axial na origem dos eixos locais ( $\varepsilon_0$ ) ou pelos conjuntos: a rotação ( $\theta$ ), a curvatura ( $\varphi$ ) e a altura da linha neutra ( $d$ ), pois os últimos parâmetros dos conjuntos estão relacionados pela Equação 4.2. Esses parâmetros considerados

para os cálculos são apresentados na Figura 4.3 com a origem dos eixos globais coincidindo com a origem dos eixos locais.

Figura 4.3 – Parâmetros da seção.



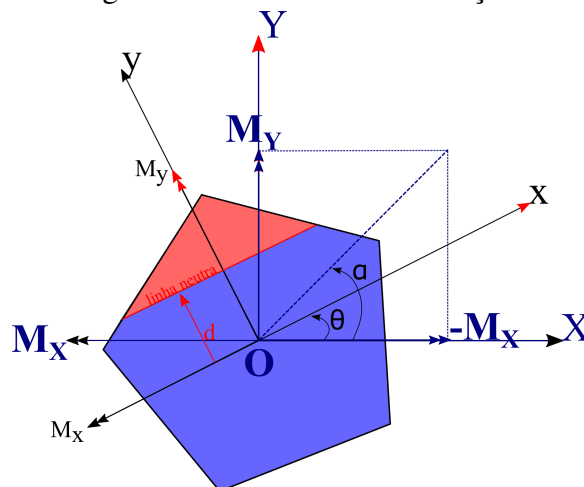
(fonte: elaborada pelo autor)

Outro parâmetro apresentado é o  $\alpha$ , na figura Figura 4.4, ele é o ângulo formado com relação a projeção dos momentos fletores aos eixos globais, com o negativo do momento fletor do eixo X. Ela pode ser relacionada por meio da Equação 4.3:

$$\alpha = \text{atan} \left( \frac{M_Y}{-M_X} \right) \quad (4.3)$$

Onde  $-\pi \leq \alpha \leq \pi$ .

Figura 4.4 – Parâmetro  $\alpha$  da seção.



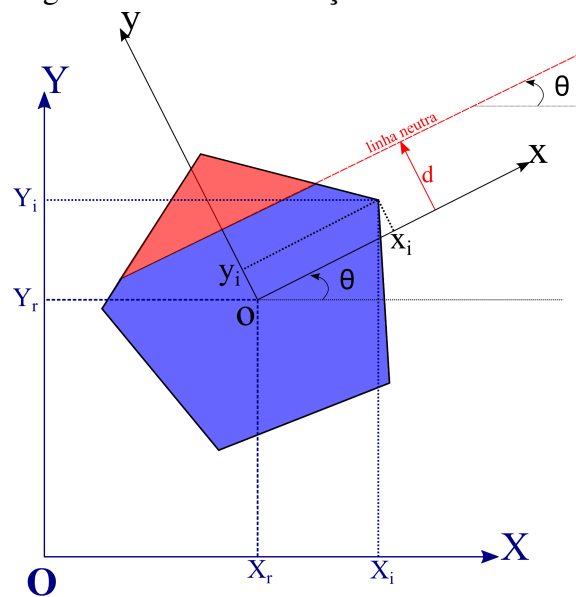
(fonte: elaborada pelo autor)

Apresentados os parâmetros que estão fortemente relacionados com a seção e a sua posição em relação a um referencial, a seção possui a possibilidade de ser transladada ou de ser rotacionada. Assim, esse movimento pode ser expressa pela Equação 4.4,

$$\begin{aligned}x_i &= (X_i - X_o)\cos(\theta) + (Y_i - Y_o)\sen(\theta) \\y_i &= -(X_i - X_o)\sen(\theta) + (Y_i - Y_o)\cos(\theta)\end{aligned}\quad (4.4)$$

possuindo como novo centro de referência pelas coordenadas  $(X_o, Y_o)$  e rotacionada conforme o ângulo  $\theta$ . O ângulo de rotação está fortemente relacionado ao ângulo que a linha neutra faz com a abcissa  $X$ . A linha neutra paralela ao eixo local  $x$ , além da rotação, pode ser definida pelos conjuntos curvatura ( $\varphi$ ) e altura da linha neutra ( $d$ ) ou curvatura ( $\varphi$ ) e a deformação na origem local ( $\epsilon_0$ ). Com isso, simplifica a função que relaciona a deformada com a curvatura por variar linearmente com o eixo local  $y$ , simplificando as integrações.

Figura 4.5 – Transformação de coordenadas.



(fonte: elaborada pelo autor)

É importante definir a origem dos eixos locais, pois os esforços resistentes calculados são influenciados pelo seu posicionamento. Alguns centros são calculados e podem ser referenciados como uma nova origem e os três centros calculados são: o centro geométrico, o centro elástico e o centro plástico apresentados por Roik e Bergmann (1990).

O centro geométrico é calculado com a expressão,

$$(x_{CG}, y_{CG}) = \left( \frac{\sum S_{Y,i}}{\sum A_i}, \frac{\sum S_{X,i}}{\sum A_i} \right) \quad (4.5)$$

depende das propriedades geométricas, como o momento estático em relação ao eixo  $Y$  e um elemento geométrico  $i$  ( $S_{Y,i}$ ), o momento estático em relação ao eixo  $X$  de um elemento geométrico  $i$  ( $S_{X,i}$ ) e área de cada elemento geométrico  $i$  ( $A_i$ ).

O centro elástico é calculado da expressão,

$$(x_{CE}, y_{CE}) = \left( \frac{\sum S_{Y,i} E_i}{\sum A_i E_i}, \frac{\sum S_{X,i} E_i}{\sum A_i E_i} \right) \quad (4.6)$$

além das propriedades já comentadas anteriormente, depende do módulo de elasticidade do material que compõe o elemento geométrico  $i$  ( $E_i$ ).

O centro plástico é calculado da expressão,

$$(x_{CP}, y_{CP}) = \left( \frac{\sum S_{Y,i} \sigma_i}{\sum A_i \sigma_i}, \frac{\sum S_{X,i} \sigma_i}{\sum A_i \sigma_i} \right) \quad (4.7)$$

com as mesmas propriedades geométricas apresentadas acrescido da tensão de plastificação do material que compõe o elemento geométrico  $i$  ( $\sigma_i$ )

A partir dos eixos locais e de um perfil de deformações impostas, o cálculo dos esforços são realizados em relação os eixos locais e são calculados por meio das seguintes expressões, para o esforço normal,

$$N = \int_A \sigma dA \quad (4.8)$$

considerando,  $N < 0$  para compressão e  $N > 0$  para tração.

Para o momento fletor no eixo  $x$ ,

$$M_x = - \int_A \sigma y dA \quad (4.9)$$

considerando,  $M_x > 0$  provoca compressão na região da seção com coordenada  $y$  positivo.

Para o momento fletor no eixo  $y$ ,

$$M_y = - \int_A \sigma x dA \quad (4.10)$$



considerando,  $M_y > 0$  para quando está no mesmo sentido da ordenada.

Os momentos fletores segundo os eixos globais  $X$ - $Y$  são obtidos por transformação de coordenadas dada pela seguinte rotação:

$$\begin{aligned} M_X &= M_x \cos(-\theta) - M_y \sin(-\theta) \\ M_Y &= M_x \sin(-\theta) + M_y \cos(-\theta) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Definida a origem da seção e os parâmetros envolvidos na deformação deve-se calcular os esforços resistentes. Estes esforços são calculados a partir da deformada definida anteriormente. Eles são calculadas separadamente, por segmentos de retas ou por pontos, e posteriormente somam-se os esforços obtidos individualmente para obter os esforços resistentes da seção.

A contribuição de cada superfície  $S_i$  da seção transversal aos esforços atuantes na seção (ver Equação 4.8, Equação 4.9 e Equação 4.10) pode ser expressa genericamente por Fafitis (2001) e Papanikolaou (2012):

$$R_{S_i} = \iint_{S_i} x^r y^s \sigma(y) dx dy \quad (4.12)$$

Sendo,  $R_{S_i}$  a sollicitação de uma superfície  $S_i$ ,  $(x,y)$  as coordenadas locais,  $\sigma(y)$  a função da tensão efetiva em função do  $y$  e  $(r,s)$  os expoentes que dependem de qual sollicitação de interesse na superfície  $S_i$ :  $(r,s) = (0,0)$  fornece:  $R_{S_i} = N$ ,  $(r,s) = (0,1)$ , fornece  $R_{S_i} = M_x$  e  $(r,s) = (1,0)$  fornece  $R_{S_i} = -M_y$ . A tensão se encontra em função de  $y$  pelo uso da Equação 4.1, que relaciona a deformada com a ordenada local. O uso da equação se torna verdade pela consideração que a linha neutra se encontra paralela ao eixo local  $x$ . Essa troca de variáveis simplifica as integrações em função da variável  $y$ .

Usando o teorema de Green, a Equação 4.12, passa a ser uma somatória de integrais de linha de uma superfície  $i$  ( $S_i$ ) que é composta por segmentos de reta, sendo  $L_i$  o contorno da superfície  $i$  e com  $nl_i$  segmentos de reta com comprimento  $l_i$ :

$$R_{S_i} = \frac{1}{1+r} \oint_{L_i} x^{r+1} y^s \sigma(y) dy = \frac{1}{1+r} \sum_{j=1}^{nl_i} \left[ \int_{l_i} x^{r+1} y^s \sigma(y) dy \right] = \frac{1}{1+r} \sum_{j=1}^{nl_i} I_j \quad (4.13)$$

Para um segmento de reta  $j$ , com pontos inicial  $(x_o, y_o)$  e ponto final  $(x_f, y_f)$ , na Equação 4.13, a abcissa pode ser expressa pela ordenada local, linearizando por meio de:

$$x = a_j y + b_j \quad (4.14)$$

e os coeficientes  $a_j$  e  $b_j$  são calculados respectivamente por:

$$a_j = (x_f - x_o)/(y_f - y_o) \quad (4.15)$$

$$b_j = x_o - y_o a_j \quad (4.16)$$

Com isso, a integral de cada segmento passa a ser em função de uma única variável. No entanto, mais de um trecho das tensões (definidas pelo material) pode compor o segmento de reta, para que seja definida as ordenadas limites a partir das deformadas, a Equação 4.17 é utilizada, dividindo o segmento de reta original em outras menores a partir das ordenadas locais do segmento de reta da seção. A segmentação é calculada a partir dos limites das deformadas das funções parciais da lei constitutiva.

$$y(\varepsilon) = (\varepsilon - \varepsilon_0) / \varphi \quad (4.17)$$

Assim, a integração de um segmento, pode ser expressa pela Equação 4.18, sendo calculada usando a integração da quadratura de Gauss-Legendre:

$$I_j = \oint_{L_i} F_j(y) dy \quad (4.18)$$

Analogamente para o reforço linear é utilizado a mesma lógica, apresentada por Papanikolaou (2012)

$$R_{L_i} = \oint_{L_i} t_j x^r y^s \sigma(y) dy = \sum_{j=1}^{n_{L_i}} \left[ t_j \oint_{L_i} x^r y^s \sigma(y) dy \right] = \sum_{j=1}^{n_{L_i}} I_j \quad (4.19)$$

A integral é expressa por, Equação 4.20:

$$I_j = t_j \oint_{L_i} F_j(y) dy \quad (4.20)$$

No entanto, para o segmento de reta na horizontal, os esforços devem ser calculados por meio das expressões Equação 4.21:

$$\begin{aligned} N_j &= A_j \sigma(y_{A,j}) \\ M_{x,j} &= A_j y_{A,j} \sigma(y_{A,j}) \\ M_{y,j} &= A_j \frac{x_{A,j} + x_{B,j}}{2} \sigma(y_{A,j}) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Nos reforços pontuais, as dimensões dos pontos são desprezados em relação a dimensão da seção como um todo, os esforços são calculados a partir da expressão Equação 4.22, apresentada por Papanikolaou (2012).

$$R_{RP} = \sum_{j=1}^{nRP} [A_j x_j^r y_j^s \sigma(\epsilon_0 - \varphi y_j)] \quad (4.22)$$

Onde,  $R_{RP}$  o somatório das solicitações de um reforço pontual  $R_i$  e  $nRP$  = número total dos reforços pontuais.

### 4.3 ESFORÇOS RESISTENTES

Os esforços resistentes dependem da deformada levando em conta as considerações apresentadas anteriormente. Pode-se obter os esforços resistentes últimos da seção desde que seja informada a curvatura última, curvatura mínima que representa a deformada última. Essa deformada, para cada elemento geométrico  $i$ , é calculada por meio da:

$$\varphi_{u,i} = \min \begin{cases} -\epsilon_{cu,i}/(y_{max,i} - d) & \text{se } d < y_{max,i} \\ -\epsilon_{co,i}/(y_{o,i} - d) & \text{se } d < y_{min} \\ -\epsilon_{tu,i}/(y_{min,i} - d) & \text{se } d > y_{min,i} \end{cases} \quad (4.23)$$

Ela depende dos valores máximos e mínimos da ordenada local do elemento geométrico  $i$ ,  $y_{max,i}$  e  $y_{min,i}$ , respectivamente, assim como da altura da linha neutra ( $d$ ) e das deformadas. Já o  $y_{o,i}$  é apresentada na Equação 4.24,

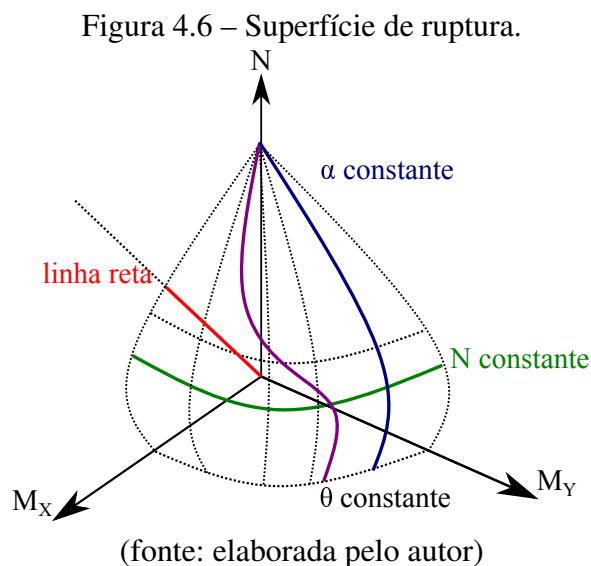
$$y_{o,i} = y_{min} + (y_{max} - y_{min}) \frac{\epsilon_{co,i}}{\epsilon_{cu,i}} \quad (4.24)$$

que depende das valores máximos e mínimos da coordenada  $y$  da seção,  $y_{max}$  e  $y_{min}$ , respectivamente.

A curvatura última, que dependem da rotação ( $\theta$ ) e da altura da linha neutra ( $d$ ), é obtida pela:

$$\varphi_u = \min(\varphi_{u,i}) \quad (4.25)$$

Calculando os esforços resistentes últimos, a superfície de falha pode ser representada, e a sua construção pode ser dada por: uma curva para  $\alpha$  constante, uma curva para o esforço axial constante, uma curva isogônica (ou curvas 3D decorrente do  $\theta$  constante) (RODRIGUEZ; ARISTIZABAL-OCHOA, 1999) ou até por tripletos de resultantes de tensão que se estendem ao longo de uma linha reta orientada arbitrariamente (VIVO; ROSATI, 1998), estas estão representadas esquematicamente na Figura 4.6.



Em termos de superfície de ruptura, a linha reta fornece um ponto em relação a superfície, a curva obtida pelo  $\theta$  constante, é uma curva sobre a superfície que dificulta a obtenção de uma tendência da mesma. A curva obtida pelo  $\alpha$  constante permite uma melhor visualização para eixos  $N$  e  $M_X$  ou  $N$  e  $M_Y$ . Para  $N$  constante, uma envoltória é obtida para os eixos  $M_X$  e  $M_Y$ . Ainda para  $N$  constante, pode-se afirmar que a envoltória produzida com  $\theta$  igualmente espaçadas, vai gerar uma envoltória com pontos mal distribuídas radialmente do que pelo  $\alpha$  igualmente espaçadas.

Com a altura da linha neutra ( $d$ ) e a rotação ( $\theta$ ) a linha neutra é definida. A partir dela calcula-se a curvatura última e posteriormente os esforços resistentes últimos, variando-se os valores do  $d$  e  $\theta$  é gerada uma superfície que indica a falha da seção quando colocada nos eixos  $M_X$ ,  $M_Y$  e  $N$ .

No entanto, os esforços resistentes últimos obtidos pelo  $d$  e  $\theta$  não permitem realizar comparativo com os esforços de projeto, visto que não é possível fixar o esforço axial.

A curva obtida pelo  $N$  constante fornece uma envoltória  $M_X$  por  $M_Y$  podendo comparar se o ponto formado pelos valores dos momentos fletores em X e em Y se encontra dentro ou fora da envoltória. Caso situe-se dentro, este configura a favor da segurança, caso contrário não. Duas abordagens são apresentadas para obter os esforços resistentes últimos para força axial de interesse ( $N_t$ ): a primeira por meio da inclinação da linha neutra de interesse ( $\theta_t$ ) e a segunda pela inclinação dos momentos de interesse ( $\alpha_t$ ).

A primeira abordagem para o esforço axial de interesse ( $N_t$ ) e com a linha neutra de interesse ( $\theta_t$ ) é de encontrar a altura da linha neutra ( $d_t$ ) que configure a condição de equilíbrio, pois com a  $d_t$  e a  $\theta$  é possível definir a deformada e logo os esforços resistentes últimos.

A segunda abordagem, mais complexa e a mais importante, é com o esforço axial de interesse ( $N_t$ ) e com a inclinação dos momentos de interesse ( $\alpha_t$ ), onde deve-se encontrar tanto a altura da linha neutra e a rotação, ou seja, a linha neutra. A sua importância se deve na possibilidade de fazer uma relação entre os momentos fletores de resistência e de projeto e obter numericamente um coeficiente de segurança.

Para que se possa realizar os cálculos, o método de Brent foi utilizado, pois ele engloba três métodos, a bissecção, o método das secantes e a interpolação quadrática inversa, garantindo que convirja bem mais rápido do que métodos que dependem do intervalo de interesse, (CHAPRA; CANALE, 2014). Neste trabalho, o método de Brent será expressa em uma função de interesse ( $\kappa$ ) sob a variável ( $\psi$ ) dentro dos intervalos inicial e final ( $\psi_i$  e  $\psi_f$ ), tal que respeite a condição de obter um valor de interesse ( $\zeta_t$ ) para obter a variável de interesse ( $\psi_t$ ) pela Equação 4.26.

$$\psi_t = \text{Brent}_{\psi_i}^{\psi_f}[\kappa(\psi) = \zeta_t] \quad (4.26)$$

Uma das condições que garante a convergência é de definir os intervalos inicial e final de maneira que  $(\kappa(\psi_i) - \zeta_t)(\kappa(\psi_f) - \zeta_t) < 0$ , se o produto for igual a zero, ao menos um dos intervalos é a solução. A primeira abordagem será resolvida pela Equação 4.27 e a segunda abordagem por Equação 4.28.

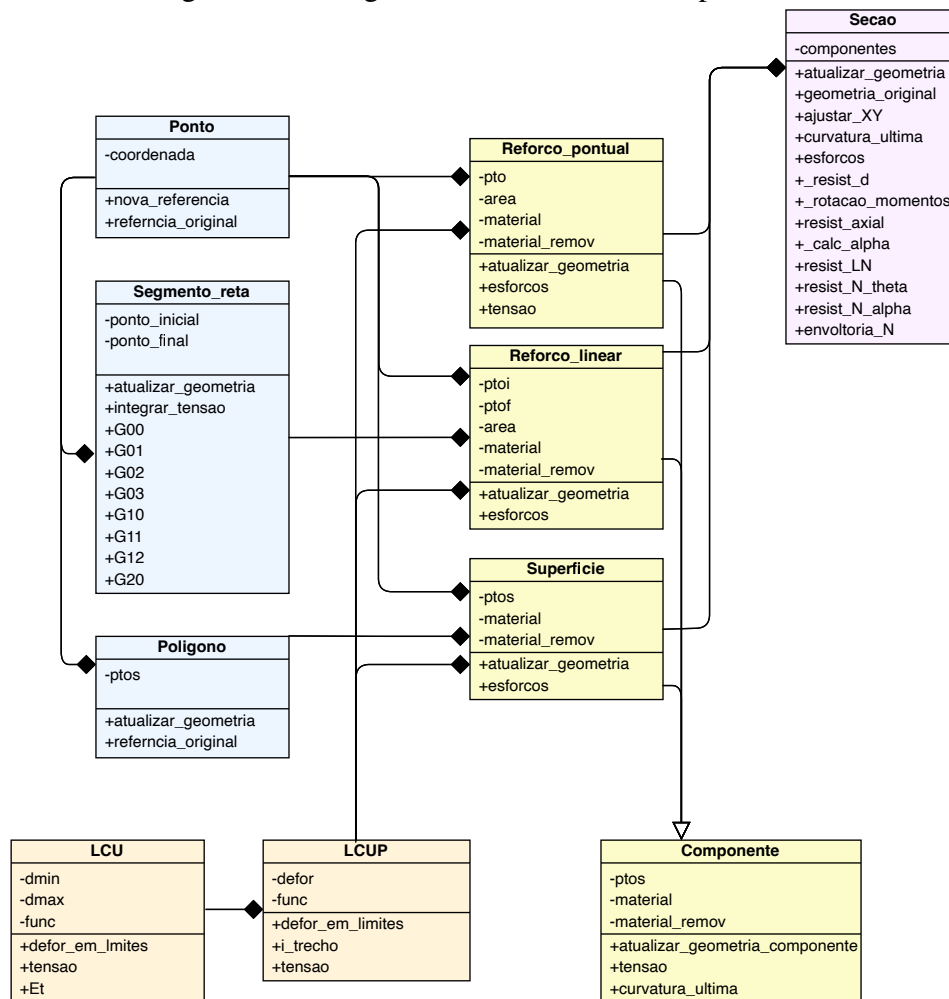
$$d_t = \text{Brent}_{d_i}^{d_f}[\kappa(d, \theta) = N_t] \quad (4.27)$$

$$\theta_t = \text{Brent}_{\theta_i}^{\theta_f}[\kappa(d = \text{Brent}_{d_i}^{d_f}[\kappa(d, \theta) = N_t], \theta) = \alpha_t] \quad (4.28)$$

#### 4.4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A implementação computacional utilizado é a linguagem de programação em Python. Os principais módulos criados foram: `geometria.py`, `lei_constitutiva_uniaxial.py`, `componentes.py` e `secao.py`. As suas relações e a apresentação dos atributos e dos métodos para as suas classes estão na Figura 4.7, onde em azul estão as classes do módulo `geometria.py`, em laranja o módulo `lei_constitutiva_uniaxial.py`, em amarelo o módulo `componentes.py` e em rosa o módulo `secao.py`.

Figura 4.7 – Diagrama de classe UML simplificado.



(fonte: elaborada pelo autor)

O módulo `geometria.py` inclui as classes `Ponto`, `Segmento_reta` e `Poligono`. O `Ponto` possui como métodos como `nova_referencia` que realiza a translação e a rotação dos pontos e o `referencia_original` que armazena os pontos originais. O `Segmento_reta` é criado a partir de dois pontos, o método `atualizar_geometria` calcula as propriedades obtidas a partir dos pontos (comprimento, variação no  $x$  e  $y$  e o ponto centro do segmento de reta), e o método `integrar_tensao` realiza a integração das tensões para o segmento de

reta e os coeficientes  $G_{00}$ ,  $G_{01}$ ,  $G_{02}$ ,  $G_{03}$ ,  $G_{10}$ ,  $G_{11}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{20}$  expostos do Anexo A. O Polígono com os mesmos métodos, sendo as propriedades geométricas calculadas a área, momento estático de primeira ordem em torno do eixo  $x$  e do eixo  $y$  e momento estático de segunda ordem em torno do eixo  $x$  e do eixo  $y$ .

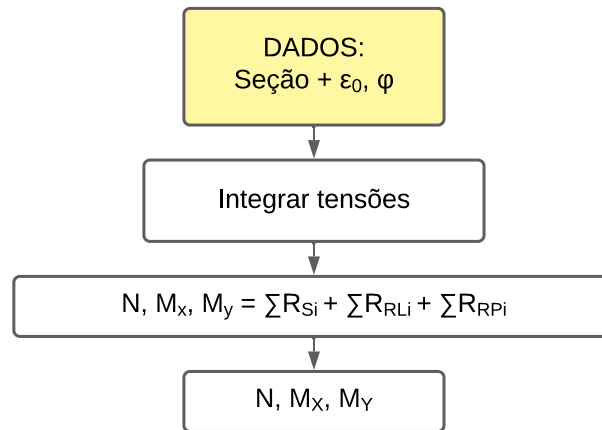
O módulo `lei_constitutiva_uniaxial.py`, com a classe `LUCP` (lei constitutiva uniaxial definida por trechos) cria o material a partir das deformadas e das funções parciais. Em seguida, dentro da classe, ela decompõe para cada função parcial com os seus intervalos em trechos com a classe `LCU` (lei constitutiva uniaxial), sendo que ela calcula pela `tensao` a tensão dada uma deformada após ser verificada pela `deformada_em_limites`. O módulo elástico tangente do material é calculada pelo `Et`. A classe `LUCP` também apresenta os mesmos métodos `tensao` e `deformada_em_limites` acrescido de `i_trecho`, que localiza o trecho dada uma deformada.

O módulo `componentes.py` possui classes `Reforco_pontual`, `Reforco_linear` e `Superficie` que herdam da classe `Componente` métodos como `tensao` que calcula a tensão efetiva de um ponto, considerando as contribuições do material adicionado e do material removido dada uma deformada, `atualizar_geometria_componente` que atualiza as propriedades geométricas e a `curvatura_ultima`, que calcula a curvatura última dado um material do componente. Tanto os reforços e a superfície possuem os mesmos métodos para atualizar as propriedades geométricas assim como os cálculos dos esforços.

O último módulo `secao.py`, que agrupa as classes anteriores para posicionar a origem pelo `ajustar_XY` e calcular os esforços resistentes. `curvatura_ultima` é um método que retorna a menor curvatura dentre todos os componentes (em função da altura da linha neutra definida na entrada). O método `esforco` calcula os esforços resistentes a partir da definição da seção (por meio da composição elementos geométricos e materiais) e a deformada ( $\epsilon_0$  e  $\varphi$ ). Assim, com os dados de entrada, cada componente, integram-se as tensões para obter os esforços, somam-se os esforços calculados que compõem a seção e retiram-se os esforços dos materiais que são removidos (furos), tanto para a superfície, para os reforços lineares e para os reforços pontuais. Para esse método, assume-se que a linha neutra situe-se paralela aos eixos globais, caso o interesse seja obter a altura da linha neutra defasada a um ângulo  $\theta$ , a seção deve ser rotacionada previamente a esse ângulo  $\theta$  e posteriormente obter os esforços, rotacionados no sentido oposto, ou seja,  $-\theta$ , visto que estes estão em relação aos eixos locais, por isso são rotacionados para estarem em relação aos eixos globais. A sua esquematização está apresentada na Figura 4.8.

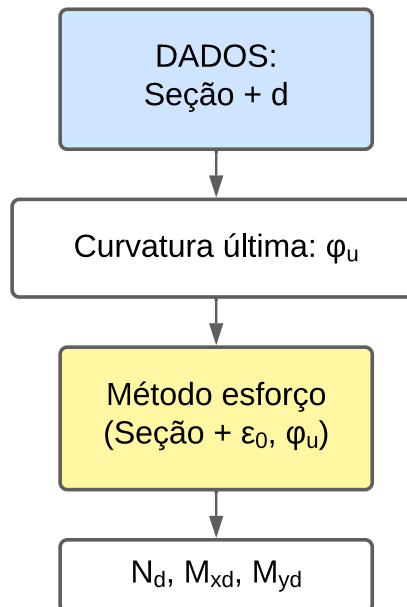
A Figura 4.9 representa o esquema simplificado do método `resist_d` que depende somente da seção e da altura da linha neutra, da mesma maneira do método `esforcos`, a rotação deve ser previamente realizada caso necessário de obter a linha neutra rotacionada dos eixos globais.

Figura 4.8 – Esquema simplificada para os cálculos dos esforços a partir da deformada.



(fonte: elaborada pelo autor)

Figura 4.9 – Esquema simplificada para o método *resist\_d*.



(fonte: elaborada pelo autor)

O princípio é o mesmo do método apresentado anteriormente, diferindo-se apenas pela introdução de uma etapa anterior, que é o cálculo da curvatura última. Obtendo a curvatura última, basta aplicar no método dos esforços para que os esforços resistentes sejam calculados.

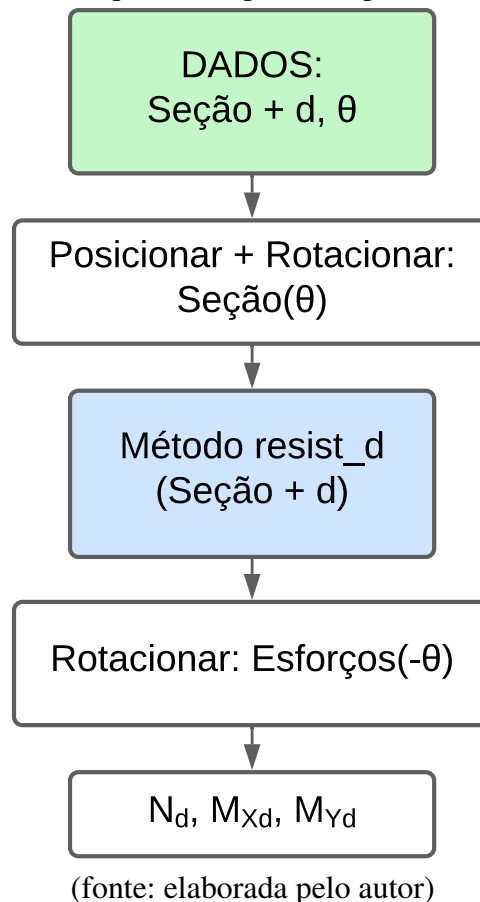
O método  $N-d$ , implementado como método `resist_LN` engloba os métodos anteriores e as observações a respeito da rotação da seção. Com a seção, a altura da linha neutra e a rotação definida os componentes são rotacionados ou posicionadas caso necessário. Como padrão, o centro dos eixos se encontram no centro geométrico. Após o reposicionamento dos elementos aplica-se o método `resist_d` que retorna os esforços resistentes. Esses esforços encontrados são obtidos com relação aos eixos locais, por isso deve-se rotacionar no sentido oposto do ângulo



$\theta$  os esforços e assim obter os esforços resistentes em relação aos eixos globais.

Na Figura 4.10 consta o esquema simplificado do método. O funcionamento do programa necessita da definição da seção e da rotação ( $\theta$ ), caso necessário, o centro da origem dos eixos locais.

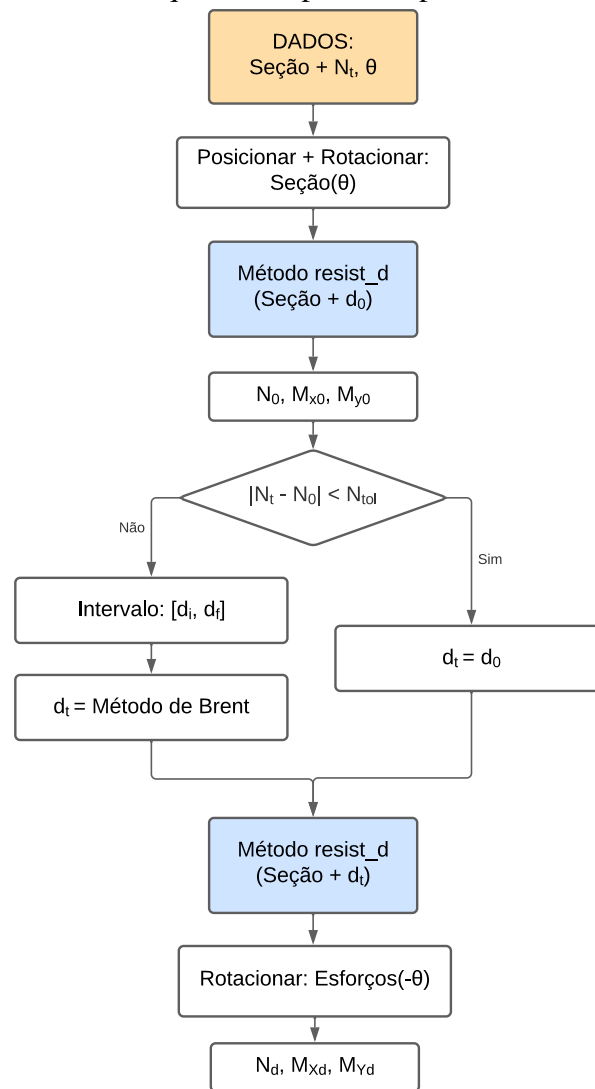
Figura 4.10 – Esquema simplificado para o método N-d.



O método N- $\theta$ , implementado como `resist_N_theta`, é um método que dada a força normal ( $N_t$ ) e o ângulo de inclinação da linha neutra ( $\theta$ ), permite:

1. Define as coordenadas seguindo os eixos  $x$ - $y$ ;
2. Determina a profundidade da linha neutra ( $d$ ) para a qual  $N = N_t$ . A solução é obtida pelo método de Brent, cuja aplicação requer a definição de um intervalo de busca  $[d_{min}, d_{max}]$ . Nesse trabalho a determinação do intervalo de busca segue a estratégia proposta por Papanikolaou (2012).

O seu esquema simplificado está na Figura 4.11.

Figura 4.11 – Esquema simplificada para o método N- $\theta$ .

(fonte: elaborada pelo autor)

O resultado permite que se obtenha a envoltória para um esforço axial de interesse, fazendo com que criem pontos com o  $\theta$  dentro do intervalo  $[0, 2\pi]$ .

O método N- $\alpha$ , implementado como `resist_N_alpha` se assemelha ao anterior e na Figura 4.12 consta o esquema deste método simplificado. O funcionamento do programa necessita da definição da seção e a rotação, caso necessário, o centro da origem.

- Define-se os dados de entrada: A seção (elementos geométricos + material), o esforço axial de interesse ( $N_t$ ) e a inclinação do momento fletor ( $\alpha_t$ );
- Chute inicial do  $\theta_0$ ;
- Aplica-se o método N- $\theta$  e obtêm os esforços resistentes ( $N_0, M_{x0}$  e  $M_{y0}$ ) e calcula-se o

$\alpha_0$ ;

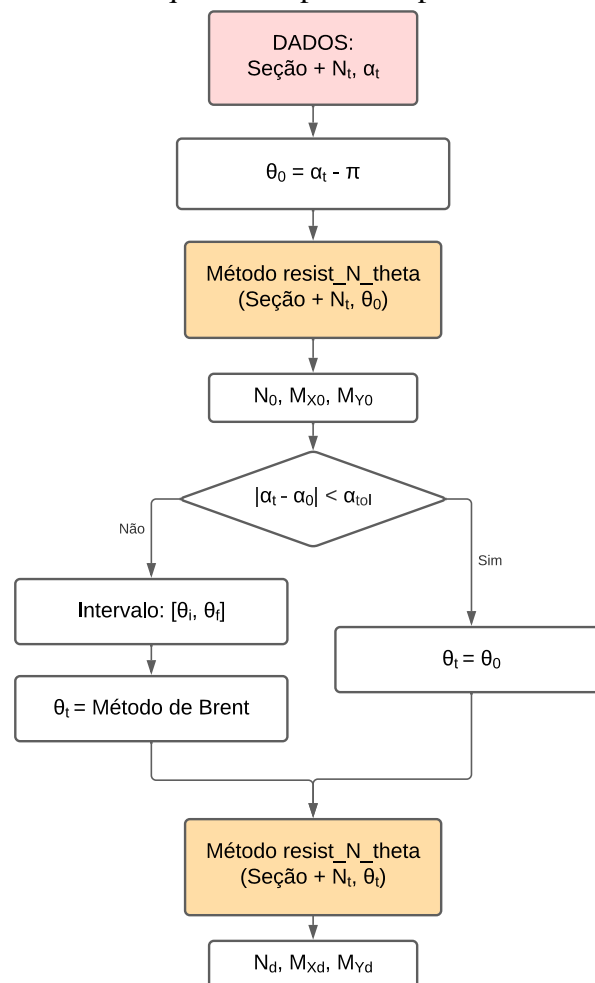
- Verifica-se se a diferença absoluta é inferior a  $\alpha_{tol}$ ;
- Se sim, o angulo de rotação de interesse ( $\theta_t$ ) é o próprio  $\theta_0$ .
- Caso contrário, calcula-se:

$$\Delta\theta = \frac{\alpha_t - \alpha_k}{|\alpha_t - \alpha_k|} \frac{\pi}{16} \quad (4.29)$$

E assim, incrementa-se a um laço  $k$ ,  $\theta_k = \theta_0 + \Delta\theta k$ . Calculam-se os novos esforços resistentes com o método *resist\_N\_theta*, obtendo-se  $N_k$ ,  $M_{xk}$  e  $M_{yk}$  e repete-se o processo até  $\Delta\theta < 0$ , pois isso implica que a função auxiliar (em função de um  $d_k$  que retorna a diferença entre  $\alpha_t$  e o  $\alpha_k$ ) possuem sinais opostos. Isso permite o uso do método de Brent para calcular o  $\theta_t$ .

- Com a rotação, calculam-se os esforços resistentes.

Figura 4.12 – Esquema simplificada para o método N- $\alpha$ .



(fonte: elaborada pelo autor)

E por fim, o método `envolv_N` que gera os pontos para um determinado esforço axial escolhido, havendo possibilidade de escolher o método para gerar os pontos para posteriormente gerar envoltória com os eixos  $M_X$  e  $M_Y$  ou uma envoltória com os eixos  $M_X$ ,  $M_Y$  e  $N$ .

Assim, na Figura 4.7 apresenta-se um diagrama de classe simplificado, onde se esquematiza os objetos que devem ser criados para gerar a seção. Inicialmente os *Pontos* para compor um *Segmento de reta* ou um *Polígono* para juntar com um *Material*, seja para adicionar ou retirar material. Com isso, obtêm os reforços (*Reforço pontual*, *Reforço linear*) e a *Superfície* para compor a *Seção*. A partir dela, escolher a origem e os métodos para calcular os esforços resistentes últimos.

## 5 EXEMPLOS

Neste capítulo serão apresentados alguns exemplos numéricos, a fim de validar o método de *esforço*. Nos exemplos, foram consideradas seções retangulares com e sem furos. São contempladas seções homogêneas de material elástico linear e elástico-plástico perfeito. Também são tratados casos de seções de concreto com e sem armaduras de reforço longitudinal.

### 5.1 SEÇÃO RETANGULAR DE MATERIAL ELÁSTICO LINEAR

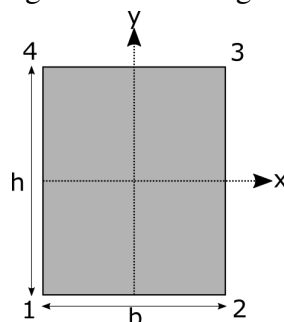
Essa seção apresenta a solução analítica e a aplicação da ferramenta computacional descrita nesse trabalho à integração de tensões em uma seção retangular constituída de material elástico linear. A lei constitutiva uniaxial que descrever o comportamento do material é escrita de forma genérica como

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon, \quad -\infty \leq \varepsilon \leq \infty \quad (5.1)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material. Nos casos apresentados a seguir, adota-se  $E = 100 \text{ kN/cm}^2$ .

#### 5.1.1 Seção retangular maciça

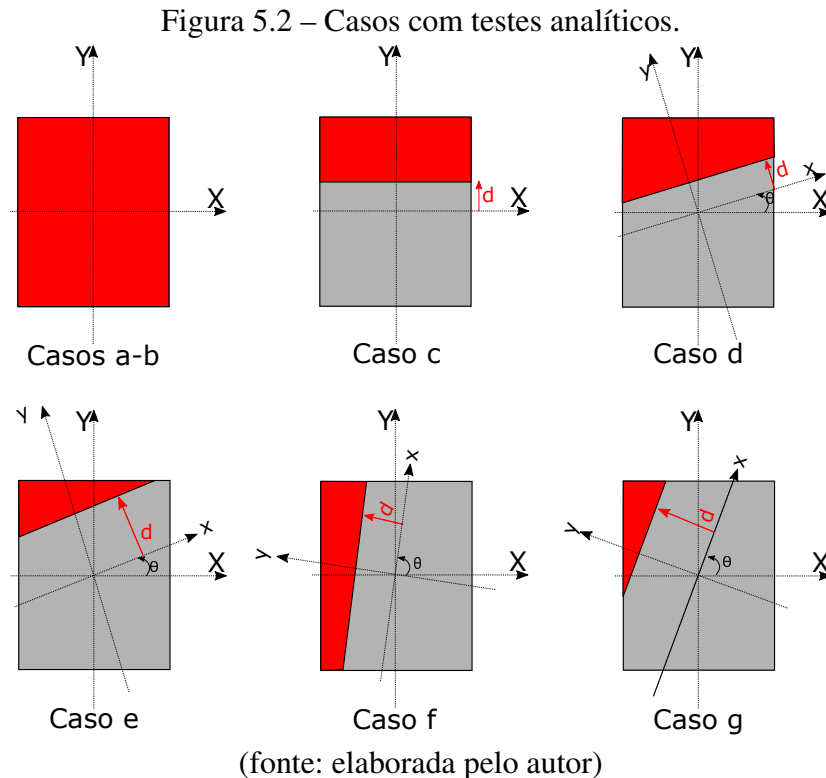
Figura 5.1 – Retângulo.



(fonte: elaborada pelo autor)

A primeira seção é a seção retangular, ilustrado na Figura 5.1. Os pontos criados são numerados no sentido anti horário e a origem se encontra no centro geométrico da seção. A formulação dos esforços resistentes calculados analiticamente encontram se no Anexo B.1.

Na Figura 5.2 estão indicados os casos estudados. A zona em vermelho indica a área comprimida, sendo que começa a partir da altura da linha neutra  $d$  é limitada até o extremo superior do retângulo. Os critérios dos casos serão detalhados a seguir.



- **Caso a:** Compressão pura:  $\theta = 0$ ,  $\varepsilon_0 < 0$  e  $\varphi = 0$ ;
- **Caso b:** Tração pura:  $\theta = 0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  e  $\varphi = 0$ ;
- **Caso c:** Flexo tração reta:  $\theta = 0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  e  $\varphi > 0$ ;
- **Caso d:** Flexo tração oblíqua:  $0 \leq \theta \leq \arctan\left(\frac{h}{b}\right)$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  e  $\varphi > 0$  e com compressão com a ordenada local do ponto 3 superior a altura da linha neutra;
- **Caso e:** Flexo tração oblíqua:  $0 \leq \theta \leq \arctan\left(\frac{h}{b}\right)$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  e  $\varphi > 0$  e com compressão com a ordenada local do ponto 3 inferior a altura da linha neutra;
- **Caso f:** Flexo tração oblíqua:  $\arctan\left(\frac{h}{b}\right) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  e  $\varphi > 0$  e com compressão com a ordenada local do ponto 1 superior a altura da linha neutra;
- **Caso g:** Flexo tração oblíqua:  $\arctan\left(\frac{h}{b}\right) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  e  $\varphi > 0$  e com compressão com a ordenada local do ponto 1 inferior a altura da linha neutra.

A Tabela 5.1 apresenta os resultados obtidos com o programa para os casos citados, onde as dimensões do retângulo são:  $b = 20 \text{ cm}$  e  $h = 30 \text{ cm}$ . Os esforços resistentes apresentados

calculados pelo programa e pelas fórmulas analíticas possuem uma diferença relativa na ordem de  $10^{-16}$ .

Tabela 5.1 – Tabela com os resultados para o material elástico linear.

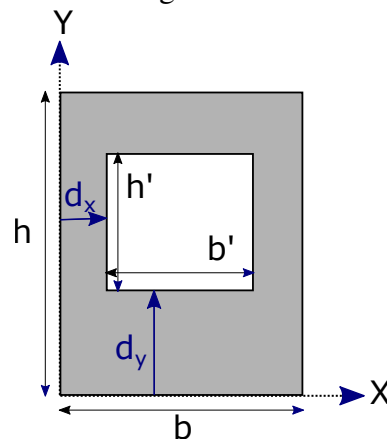
caso	$\theta$ ( $^{\circ}$ )	$\varepsilon_0$ (%)	$\varphi$ ( $10^{-3}/cm$ )	$N$ (kN)	$M_X$ (kNcm)	$M_Y$ (kNcm)
a	0.00	-2.000	0.000	-120.0	0.0	0.0
b	0.00	2.000	0.000	120.0	0.0	0.0
c	0.00	2.000	1.000	120.0	450.0	0.0
d	24.23	2.873	1.000	172.4	4103.6	-820.7
e	24.23	12.448	1.000	746.9	4103.6	-820.7
f	62.85	0.616	1.000	37.0	2053.4	-1779.6
g	62.85	2.259	1.000	135.5	2053.4	-1779.6

(fonte: elaborada pelo autor)

### 5.1.2 Seção retangular com furo

O caso tratado é uma seção com um furo retangular com o material elástico linear. A seção foi criada compondo duas seções, a primeira foi criada na forma de um retângulo com o material e a segunda na forma de um retângulo retirando o material. Ambas as superfícies estão posicionados em relação aos eixos globais conforme na Figura 5.3. A formulação analítica dos esforços resistentes encontram se no Anexo B.2.

Figura 5.3 – Retângulo com furo retangular.

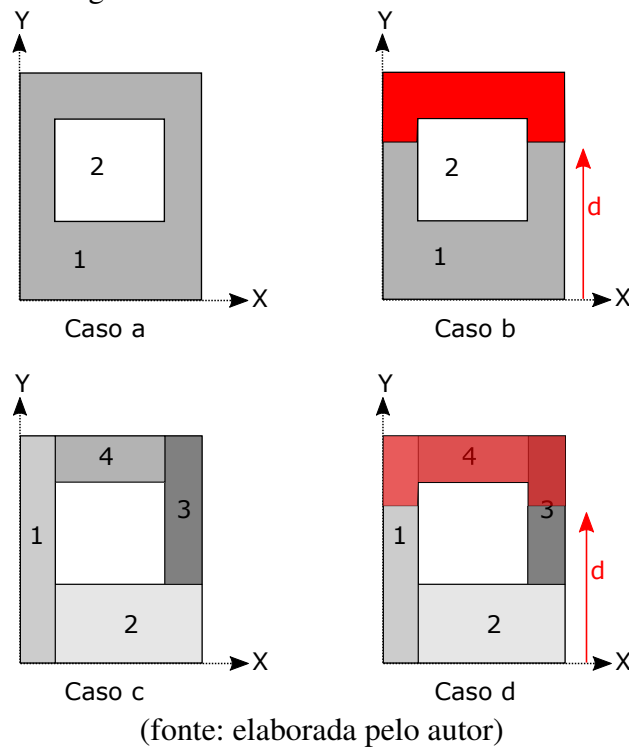


(fonte: elaborada pelo autor)

A Figura 5.4 indica os casos estudados, onde a zona em vermelho indica a área comprimida, sendo que começa a partir da altura da linha neutra  $d$  e é limitada até o extremo superior do retângulo. Os critérios dos casos serão detalhados a seguir.

- **Caso a:** Compressão simples:  $\theta = 0$ ,  $\varphi = 0$  e  $\varepsilon_0 < 0$ ;

Figura 5.4 – Casos com testes analíticos.



(fonte: elaborada pelo autor)

- **Caso b:** Flexo compressão oblíqua para um retângulo com furo:  $\theta = 0$ ,  $\varphi > 0$  e  $\varepsilon_0 > 0$ , onde a zona vermelha representa a zona compreendida acima da linha neutra;
- **Caso c:** No lugar de criar dois elementos geométricos, foram criadas quatro retângulos que formam a seção original, sob condição do **Caso a**;
- **Caso d:** No lugar de criar dois elementos geométricos, foram criadas quatro retângulos que formam a seção original, sob condição do **Caso b**.

A Tabela 5.2 apresenta os resultados obtidos com o programa para os casos citados, onde as dimensões consideradas para o retângulo externo:  $b = 15 \text{ cm}$  e  $h = 20 \text{ cm}$ , para o retângulo interno, que deve ser removido:  $b' = 7 \text{ cm}$ ,  $h' = 8 \text{ cm}$  e se encontram afastadas de  $d_x = 3 \text{ cm}$  e  $d_y = 7 \text{ cm}$ . Os esforços resistentes apresentados calculados pelo programa e pelas fórmulas analíticas possuem uma diferença relativa na ordem de  $10^{-16}$ . Mesmo entre os casos *a* e *c* ou entre os casos *b* e *d*, foram obtidas os mesmos resultados, o que indica o resultado independe dos componentes (no caso, superfícies) escolhidos para definir a seção.



Tabela 5.2 – Tabela com os resultados para o material elasto-plástico perfeito.

caso	$\theta$ ( $^{\circ}$ )	$\varepsilon_0$ (%)	$\varphi$ (1/cm)	$N$ (kN)	$M_X$ (kNcm)	$M_Y$ (kNcm)
a	0.00	-1.000	0.000	-24.4	238.4	188.6
b	0.00	1.000	0.100	-391.7	5508.2	3039.6
c	0.00	-1.000	0.000	-24.4	238.4	188.6
d	0.00	1.000	0.100	-391.7	5508.2	3039.6

(fonte: elaborada pelo autor)

## 5.2 SEÇÃO RETANGULAR DE MATERIAL ELASTO-PLÁSTICO PERFEITO

Esta seção trata da integração de tensões em uma seção retangular composta por material elasto-plástico perfeito, cuja lei constitutiva uniaxial é dada de forma genérica por:

$$\sigma(\varepsilon) \begin{cases} -\sigma_p & \text{se } \varepsilon \leq -\varepsilon_p \\ E\varepsilon & \text{se } -\varepsilon_p < \varepsilon \leq \varepsilon_p \\ \sigma_p & \text{se } \varepsilon_p < \varepsilon \end{cases} \quad (5.2)$$

A deformação que se encontra no limite do regime elástico para o regime plástico é calculada por:

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E} \quad (5.3)$$

A formulação dos esforços resistentes encontram se no Anexo C.

Com as deformadas limites entre o regime elástico e o regime plástico ( $|\varepsilon_p|$ ), aplica-se na Equação 4.1 para obter as ordenadas equivalentes das deformadas, Equação 5.4 e Equação 5.5.

Para  $\varepsilon = -\varepsilon_p$ :

$$y_p^+ = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_p}{\varphi} \quad (5.4)$$

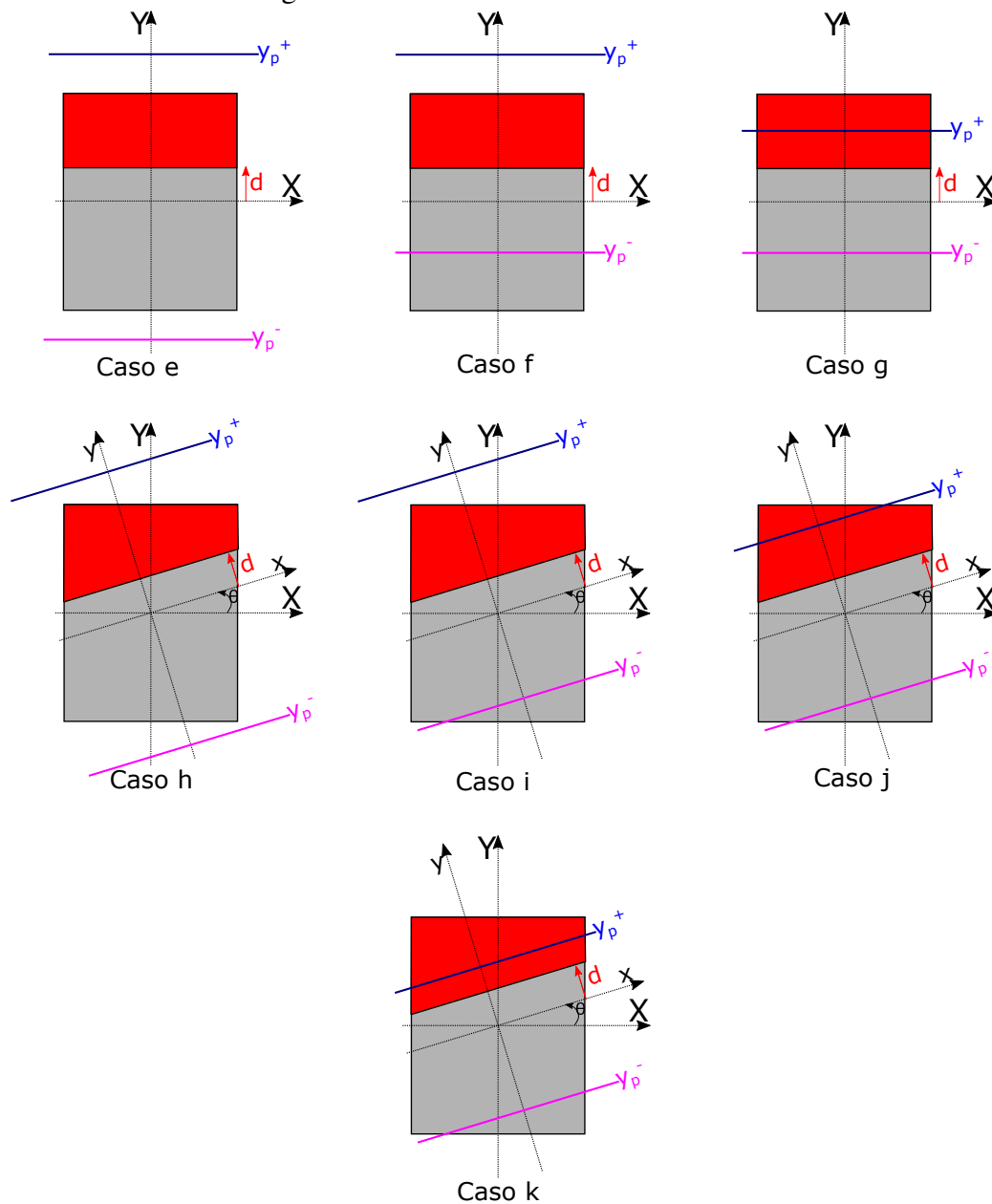
Para  $\varepsilon = \varepsilon_p$ :

$$y_p^- = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_p}{\varphi} \quad (5.5)$$

A ordenada local que se está entre os  $y_p^+$  e  $y_p^-$  se encontra no regime elástico, e fora dela no regime plástico. Os testes a seguir foram divididos conforme o posicionamento desses limites ao longo da seção, juntamente com as rotações.

Na Figura 5.5 indica os casos estudados, onde a zona em vermelho indica a área comprimida.

Figura 5.5 – Casos com testes analíticos.



(fonte: elaborada pelo autor)

- **Caso a:** Tração pura no regime plástico,  $\theta = 0$ ,  $\varepsilon_0 > \varepsilon_p$  e  $\varphi = 0$ ;

- **Caso b:** Tração pura no regime linear:  $\theta = 0$ ,  $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_p$  e  $\varphi = 0$ ;
- **Caso c:** Compressão pura no regime linear:  $\theta = 0$ ,  $0 > \varepsilon_0 > -\varepsilon_p$  e  $\varphi = 0$ ;
- **Caso d:** Compressão pura no regime plástico,  $\theta = 0$ ,  $\varepsilon_0 < -\varepsilon_p$  e  $\varphi = 0$ ;
- **Caso e:** Flexo compressão com a zona comprimida (em vermelho) da seção no regime elástico e a zona tracionada da seção no regime elástico:  $\theta = 0$ ,  $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_p$  e  $\varphi > 0$ ;
- **Caso f:** Flexo compressão com a zona comprimida (em vermelho) da seção no regime elástico e a zona tracionada da seção no regime elástico e no regime plástico, separados pelo  $y_p^-$ :  $\theta = 0$ ,  $\varepsilon_0 > \varepsilon_p$  e  $\varphi > 0$ ;
- **Caso g:** Flexo compressão com a zona comprimida (em vermelho) da seção no regime elástico e regime plástico e a zona tracionada da seção no regime elástico e no regime plástico, separados pelo  $y_p^-$ :  $\theta = 0$ ,  $\varepsilon_0 > \varepsilon_p$  e  $\varphi > 0$ ;
- **Caso h:** Flexo compressão oblíqua com a zona comprimida (em vermelho) da seção no regime elástico e a zona tracionada da seção no regime elástico:  $\theta > 0$ ,  $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_p$  e  $\varphi > 0$ ;
- **Caso i:** Flexo compressão oblíqua com a zona comprimida (em vermelho) da seção no regime elástico e a zona tracionada da seção no regime elástico e no regime plástico (separados pelo  $y_p^-$  que está entre as ordenadas locais dos pontos 1 e 2):  $\theta > 0$ ,  $\varepsilon_0 > \varepsilon_p$  e  $\varphi > 0$ ;
- **Caso j:** Flexo compressão oblíqua com a zona comprimida (em vermelho) da seção no regime elástico (separadas pelo  $y_p^+$  que está entre as ordenadas locais dos pontos 3 e 4) e regime plástico e a zona tracionada da seção no regime elástico e no regime plástico (separados pelo  $y_p^-$  que está entre as ordenadas locais dos pontos 1 e 2):  $\theta > 0$ ,  $\varepsilon_0 > \varepsilon_p$  e  $\varphi > 0$ ;
- **Caso k:** Flexo compressão oblíqua com a zona comprimida (em vermelho) da seção no regime elástico (separadas pelo  $y_p^+$  que está entre a ordenada local do ponto 3 e a altura da linha neutra) e regime plástico e a zona tracionada da seção no regime elástico e no regime plástico (separados pelo  $y_p^-$  que está entre as ordenadas locais dos pontos 1 e 2):  $\theta > 0$ ,  $\varepsilon_0 > \varepsilon_p$  e  $\varphi > 0$ .

A Tabela 5.3 apresenta os resultados obtidos com o programa para os casos citados, usando como material  $\sigma_p = 50 \text{ kN/cm}^2$  e  $E = 1000 \text{ kN/cm}^2$  e como dimensão de  $b = 10 \text{ cm}$  e  $h = 20 \text{ cm}$ . Os esforços resistentes apresentados calculados pelo programa e pelas fórmulas analíticas possuem uma diferença relativa na ordem de  $10^{-16}$ .

Tabela 5.3 – Tabela com os resultados para o material elasto-plástico perfeito.

caso	$\theta$ ( $^{\circ}$ )	$\varepsilon_0$ (‰)	$\varphi$ ( $10^{-3}/cm$ )	$N$ ( $kN$ )	$M_X$ ( $kNcm$ )	$M_Y$ ( $kNcm$ )
a	0.0	55	0.000	10000	0	0
b	0.0	25	0.000	5000	0	0
c	0.0	-25	0.000	-5000	0	0
d	0.0	-55	0.000	-10000	0	0
e	0.0	17	3.333	3333	22222	0
f	0.0	20	3.333	3983	22061	0
g	0.0	3	5.556	500	36375	0
h	30.0	13	2.987	2667	17244	-2489
i	30.0	9	4.073	1816	23494	-3384
j	30	6	5.600	1172	31573	-4384
k	30	13	11.209	1289	43352	-4811

(fonte: elaborada pelo autor)

### 5.3 SEÇÃO RETANGULAR DE CONCRETO

A seção retangular de concreto foi analisada usando o concreto com ou sem reforço pontual de aço.

A lei constitutiva do material do concreto é dada por Equação 5.6, conforme NBR 6118 (2014).

$$\sigma_c(\varepsilon) \begin{cases} -\sigma_{cd} & \text{se } \varepsilon_{cu} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{c2} \\ 1000\sigma_{cd}(\varepsilon + 250\varepsilon^2) & \text{se } \varepsilon_{c2} < \varepsilon \leq 0 \\ 0 & \text{se } \varepsilon > 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

Onde,

$$\sigma_{cd} = 0.85 \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$$

$f_{ck}$ : resistência característica à compressão do concreto, em  $kN/cm^2$ ;

$\gamma_c$ : coeficiente de ponderação da resistência do concreto;

$\varepsilon_{cu}$ : deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura;

$\varepsilon_{c2}$ : deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico.

A lei constitutiva do material do aço é dada por Equação 5.7, conforme NBR 6118 (2014).

$$\sigma_s(\varepsilon) \begin{cases} -f_{yd} & \text{se } -3.5\text{‰} \leq \varepsilon \leq -\varepsilon_{yd} \\ \varepsilon E_s & \text{se } -\varepsilon_{yd} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{se } \varepsilon_{yd} \leq \varepsilon \leq 10\text{‰} \end{cases} \quad (5.7)$$

Onde,

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s}$$

$f_{yk}$ : resistência característica ao escoamento do aço, em  $kN/cm^2$ ;

$\gamma_s$ : coeficiente de minoração da resistência do aço;

$f_{yk}$ : tensão de escoamento de cálculo;

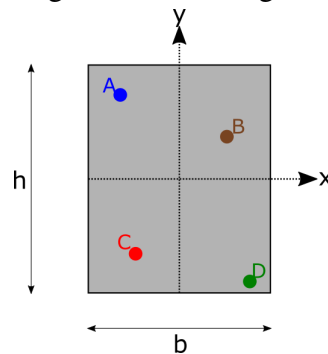
$E_s$ : módulo de elasticidade do aço de armadura passiva, em  $kN/cm^2$

$\varepsilon_{yd}$ : deformação do aço no início do escoamento.

### 5.3.1 Seção retangular

A primeira seção testada é a seção retangular, onde pode ter casos onde existem várias barras de reforço, ilustrado na Figura 5.6. Os pontos criados são numerados no sentido anti horário e a origem dos eixos locais se encontram no centro geométrico. A formulação analítica dos esforços resistentes se encontram no Anexo D.

Figura 5.6 – Retângulo.



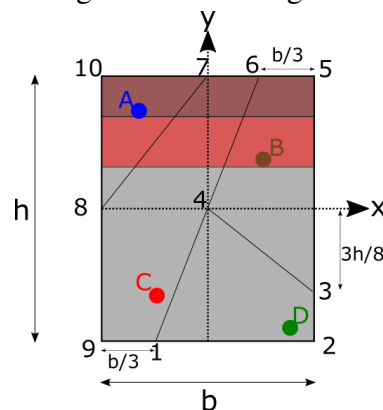
(fonte: elaborada pelo autor)

Os testes contemplam os casos nas duas zonas do concreto: Na região parabólica e na região com a tensão constante, no patamar; e também aborda na presença ou ausência da armadura.

- **Caso a:** Compressão com concreto na região parabólica sem armadura;
- **Caso b:** Compressão com concreto na região parabólica com armadura;
- **Caso c:** Compressão com concreto na região reta sem armadura;
- **Caso d:** Compressão com concreto na região reta com armadura;
- **Caso e:** Tração no concreto sem armadura;
- **Caso f:** Tração no concreto com armadura;
- **Caso g:** Flexo compressão no concreto na região parabólica sem armadura;
- **Caso h:** Flexo compressão no concreto na região parabólica com armadura;
- **Caso i:** Flexo compressão no concreto na região reta sem armadura;
- **Caso j:** Flexo compressão no concreto na região reta com armadura.

Com a validação da etapa anterior com a seção com furo, seja criada com furo ou composta por outros 4 retângulos, os resultados obtidos dos casos anteriores serão comparada também com a seção criada a partir de outras quatro seções, sendo que cada seção é composta por conjunto de pontos: (ponto 1, ponto 2, ponto 3 e ponto 4); (ponto 4, ponto 3, ponto 5 e ponto 6); (ponto 1, ponto 4, ponto 6, ponto 7, ponto 8 e ponto 9) e (ponto 8, ponto 7 e ponto 10), representado na Figura 5.7.

Figura 5.7 – Retângulo.



(fonte: elaborada pelo autor)

Com a presença do aço, foi adotado que a área presente do aço, remove a área do concreto.

A Tabela 5.6 apresenta os resultados obtidos com o programa para os casos citados usando para o concreto C40 e para o aço CA-50, com as suas propriedades na Tabela 5.4 e Tabela 5.5, respectivamente. A seção considerada possui:  $b = 20 \text{ cm}$  e  $h = 30 \text{ cm}$ . Os casos onde existem aços, possuem área de  $1 \text{ cm}^2$  e as coordenadas dos pontos são: Ponto A:  $(-b/4; 3h/8)$ , Ponto B:  $(b/4; 3h/8)$ , Ponto C:  $(-b/4; -3h/8)$  e Ponto D:  $(b/4; -3h/8)$ . Os esforços resistentes apresentados calculados pelo programa e pelas fórmulas analíticas possuem uma diferença relativa na ordem de  $10^{-16}$ , o programa apresentou os mesmos resultados para a seção retangular composta.

Tabela 5.4 – Valores das propriedades para o concreto C40.

Concreto	$f_{ck} [kN/cm^2]$	$\gamma_c$	$\epsilon_{cu} [‰]$	$\epsilon_{c2} [‰]$
C40	4.0	1.4	-3.5	-2.0

(fonte: elaborada pelo autor)

Tabela 5.5 – Valores das propriedades para o aço CA-50.

Aço	$f_{yk} [kN/cm^2]$	$\gamma_s$	$E_s [kN/cm^2]$
CA-50	50.0	1.15	21000

(fonte: elaborada pelo autor)

Tabela 5.6 – Tabela com os resultados para o concreto armado.

caso	$\theta$ ( $^\circ$ )	$\epsilon_0$ ( $‰$ )	$\varphi$ ( $10^{-3}/cm$ )	$N$ ( $kN$ )	$M_X$ ( $kNcm$ )	$M_Y$ ( $kNcm$ )
a	0.00	-1.5	0.000	-1366	0	0
b	0.00	-1.5	0.000	-1483	0	0
c	0.00	-2.5	0.000	-1457	0	0
d	0.00	-2.5	0.000	-1621	0	0
e	0.00	1.5	0.000	0	0	0
f	0.00	1.5	0.000	126	0	0
g	0.00	2	0.242	-195	2446	0
h	0.00	2	0.242	-136	3736	0
i	0.00	1	0.273	-432	4485	0
j	0.00	1	0.273	-427	6386	0

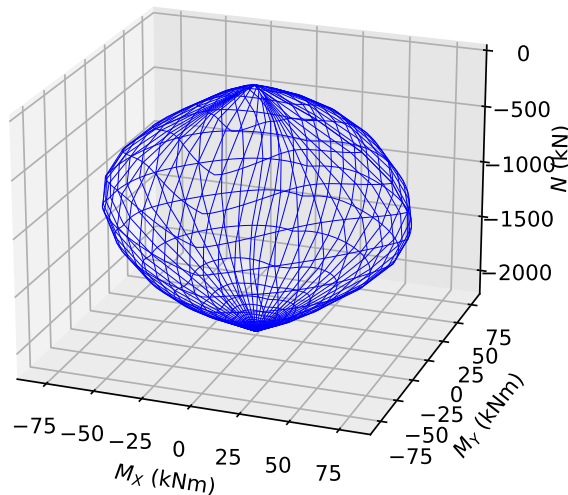
(fonte: elaborada pelo autor)

### 5.3.2 Seção quadrada

Nesta seção constam algumas ilustrações das envoltórias geradas a partir de uma seção maciça de C40 de  $30 \times 30 \text{ cm}$  com a lei constitutiva apresentada pela Equação 5.6.

Na Figura 5.8, a envoltória é gerada a partir do método *resist\_d*, onde adota as considerações apresentadas anteriormente em relação à rotação da seção e dos esforços. Pode-se visualizar que a envoltória não apresenta curvas constantes para um esforço axial constante.

Figura 5.8 – Envoltória pelo método *resist\_d*.



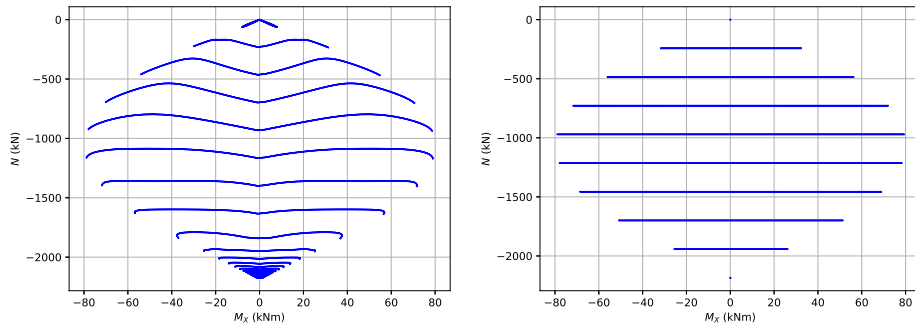
(fonte: elaborada pelo autor)

Em relação ao método  $N-\theta$ , é possível produzir uma envoltória dos momentos resistentes  $M_x$  -  $M_y$  para um esforço normal constante, como pode ser vista na Figura 5.9. Vale ressaltar que essa condição também se aplica ao método  $N-\alpha$ , pois ambos conseguem calcular os momentos fletores para um esforço axial fixo e um ângulo correspondente para os seus métodos.

Comparando-se o método  $N-\theta$  e o método  $N-\alpha$ , as envoltórias geradas para os ângulos  $0 \leq \theta, \alpha \leq \pi$  na Figura 5.10, pode ser observado que as curvas verticais, do método  $N-\theta$  se encontram relativamente defasadas, quando comparadas com as obtidas pelo método  $N-\alpha$ . Fica evidenciado na Figura 5.11 que para um esforço axial fixo, existem pontos concentrados nas suas extremidades para o método  $N-\theta$ , enquanto que para o método  $N-\alpha$ , os pontos se encontram uniformemente espaçados angularmente, com a mesma quantidade de pontos calculados.

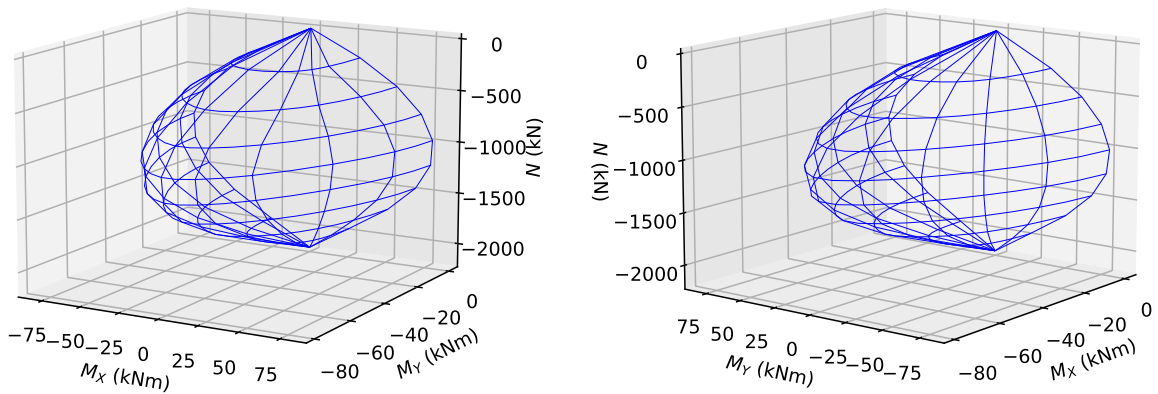


Figura 5.9 – Projeção das envoltórias, à esquerda pelo método *resist\_d* e à direita pelo método  $N-\theta$ .



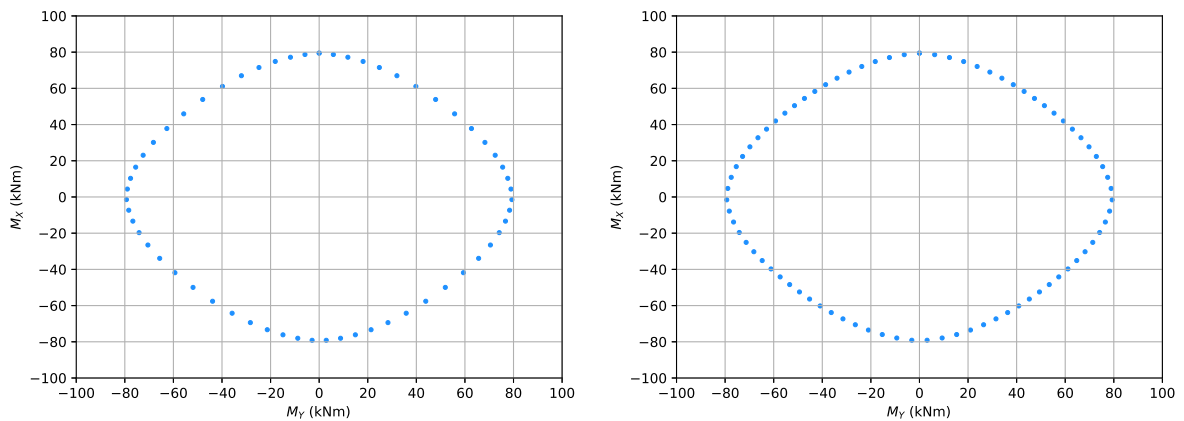
(fonte: elaborada pelo autor)

Figura 5.10 – Metade das envoltórias, à esquerda pelo método  $N-\theta$  e à direita pelo método  $N-\alpha$ .



(fonte: elaborada pelo autor)

Figura 5.11 – Envoltória para  $N = -1000 \text{ kN}$ , à esquerda pelo método  $N-\theta$  e à direita pelo método  $N-\alpha$ .



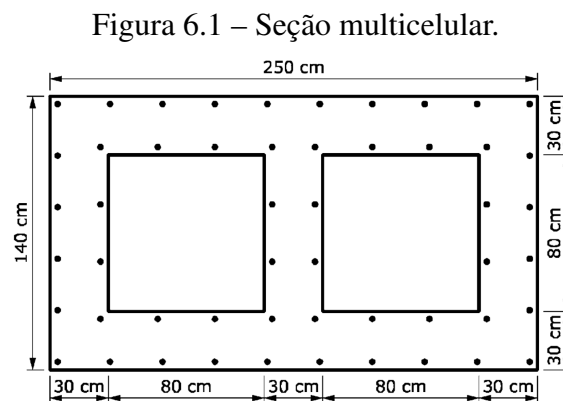
(fonte: elaborada pelo autor)

## 6 EXEMPLOS: BENCHMARKS

Neste capítulo expõe a comparação dos resultados obtidos com diferentes seções apresentadas na literatura técnica. As envoltórias foram geradas a partir de 360 pontos determinados pelo método  $N - \alpha$  para um esforço axial definido.

### 6.1 SEÇÃO MULTICELULAR

Este exemplo mostra a aplicação do algoritmo desenvolvido nesse trabalho à análise da seção multicelular de concreto armado definida em Rosati, Marmo e Serpieri (2008). As dimensões e distribuição das armaduras na seção com dois eixos de simetria são apresentadas na Figura 6.1. O comportamento do concreto é definido pela Equação 5.6 a partir das propriedades mecânicas dadas pela Tabela 6.1. Todas as barras de reforço têm diâmetro de  $32 \text{ mm}$ , estão regularmente espaçadas e deslocadas das faces por um cobrimento de  $3 \text{ cm}$ . O comportamento mecânico do aço das armaduras é definido pela Equação 5.7 e suas propriedades mecânicas são apresentadas na Tabela 6.2. Para reproduzir de forma mais fiel os resultados de Rosati, Marmo e Serpieri (2008), o concreto que ocupa a posição das armaduras não foi retirado da seção e a origem dos eixos é localizado no centro geométrico.



(fonte: Rosati, Marmo e Serpieri, 2008)

Tabela 6.1 – Valores das propriedades para o concreto.

$f_{ck} [kN/cm^2]$	$\gamma_c$	$\epsilon_{cu} [‰]$	$\epsilon_{c2} [‰]$
2.075	1.6	-3.5	-2.0

(fonte: elaborada pelo autor)

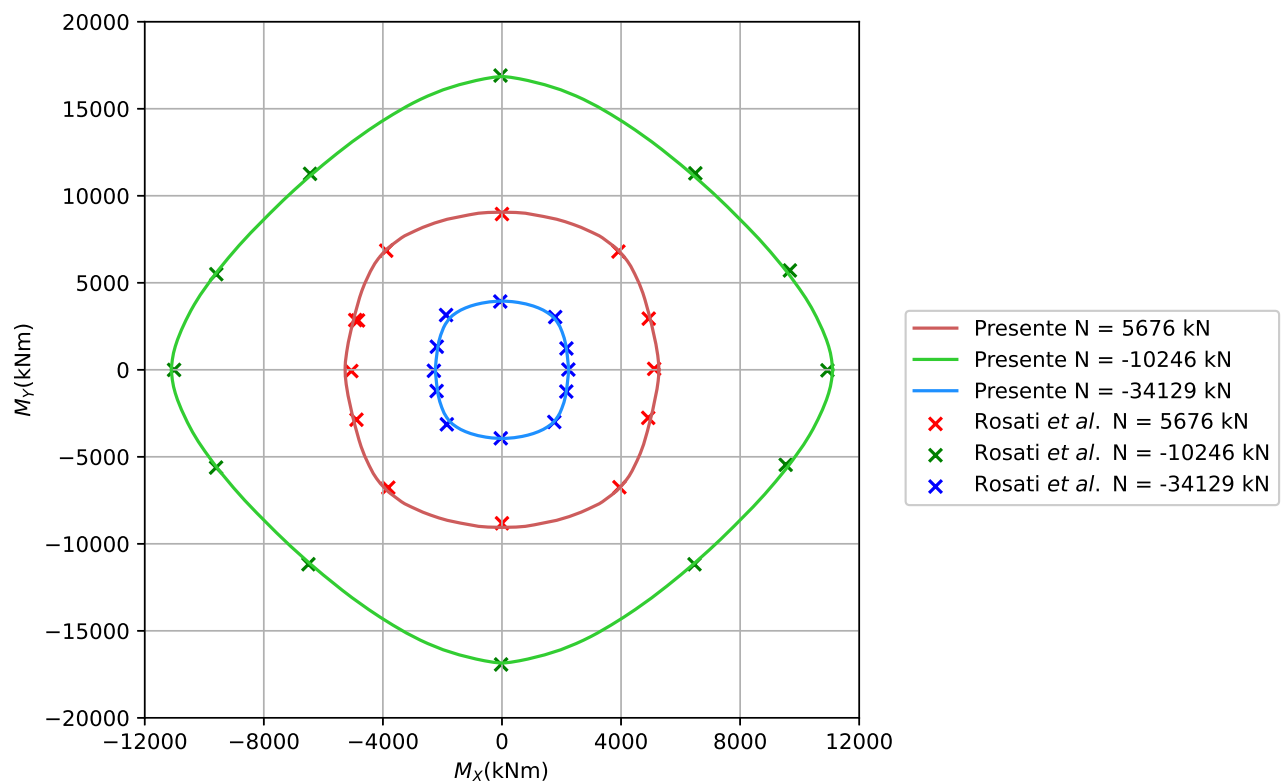
Tabela 6.2 – Valores das propriedades para o aço.

$f_{yk}$ [ $kN/cm^2$ ]	$\gamma_s$	$E_s$ [ $kN/cm^2$ ]
37.5	1.15	20000

(fonte: elaborada pelo autor)

O algoritmo foi aplicado na determinação da envoltória de falha para forças normais de tração e compressão com intensidades  $N = -34,129 \text{ kN}$ ,  $-10,246 \text{ kN}$  e  $5,676 \text{ kN}$ . As curvas obtidas a partir dos 360 pontos analisados para cada intensidade do esforço normal são apresentados na Figura 6.2 junto com os resultados obtidos por Rosati, Marmo e Serpieri (2008). Como esperado para uma seção com dois eixos de simetria, as envoltórias de falha são simétricas em relação aos eixos  $M_X$  e  $M_Y$  (o eixo  $X$  é tomado paralelo ao maior lado da seção). Observa-se excelente concordância entre os resultados obtidos nesse trabalho e os extraídos da referência. Isso demonstra a acurácia da ferramenta implementada em um caso com materiais de comportamento complexo, seção transversal com geometria complexa e um elevado número de elementos de reforço.

Figura 6.2 – Envoltórias para seção multicelular.

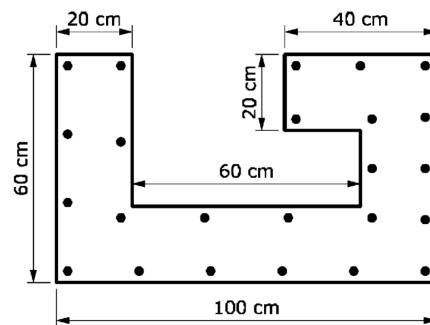


(fonte: elaborada pelo autor)

## 6.2 SEÇÃO G

Este exemplo mostra a aplicação do algoritmo desenvolvido nesse trabalho à análise da seção no formato em G de concreto armado definida em Rosati, Marmo e Serpieri (2008). As dimensões e distribuição das armaduras na seção com dois eixos de simetria são apresentadas na Figura 6.3. O comportamento do concreto é definido pela Equação 5.6 a partir das propriedades mecânicas dadas pela Tabela 6.1. Todas as barras de reforço têm diâmetro de 24 mm, estão regularmente espaçadas e deslocadas das faces por um cobrimento de 3 cm. O comportamento mecânico do aço das armaduras é definido pela Equação 5.7 e suas propriedades mecânicas são apresentadas na Tabela 6.2. Para reproduzir de forma mais fiel os resultados de Rosati, Marmo e Serpieri (2008), o concreto que ocupa a posição das armaduras não foi retirado da seção e a origem dos eixos localizado no centro geométrico.

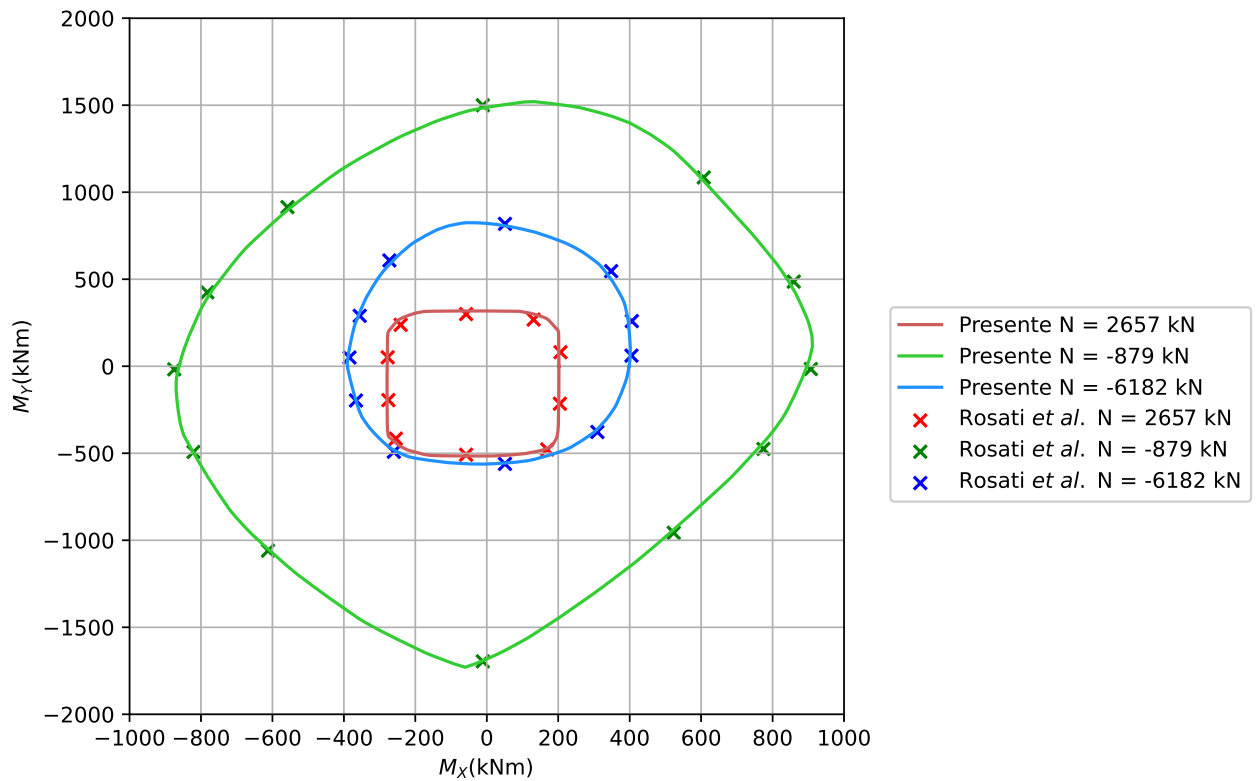
Figura 6.3 – Seção G.



(fonte: Rosati, Marmo e Serpieri, 2008)

O algoritmo foi aplicado na determinação da envoltória de falha para forças normais de tração e compressão com intensidades  $N = -6,182 \text{ kN}$ ,  $-879 \text{ kN}$  e  $2,657 \text{ kN}$ . As curvas obtidas a partir dos 360 pontos analisados para cada intensidade do esforço normal são apresentados na Figura 6.4 junto com os resultados obtidos por Rosati, Marmo e Serpieri (2008). A importância deste exemplo é de mostrar a sua eficiência para uma seção assimétrica, gerando as envoltórias assimétricas também. Elas apresentam maiores momentos absolutos em  $M_Y$  o que se torna interessante pois é uma seção que pode apresentar diversas aplicabilidades como em caixas de elevadores. Da mesma forma análoga ao exemplo anterior, observa-se a mesma concordância entre os resultados obtidos nesse trabalho e os extraídos da referência. Confirmando que além para o uso de materiais de comportamento complexo, a ferramenta computacional consegue resolver para seção transversal com elementos geométricos complexos.

Figura 6.4 – Envoltórias para seção G.

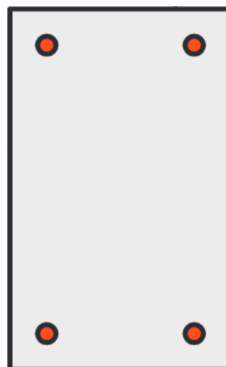


(fonte: elaborada pelo autor)

### 6.3 SEÇÃO RETANGULAR

Este exemplo mostra a aplicação do algoritmo desenvolvido nesse trabalho à análise da seção retangular de concreto armado definida em Papanikolaou (2012). A distribuição das armaduras na seção com dois eixos de simetria são apresentadas na Figura 6.5.

Figura 6.5 – Seção retangular.



(fonte: Papanikolaou, 2012)

As suas dimensões são com a base de 30 cm e a altura de 50 cm. Duas leis constitutivas foram escolhidas, um de comportamento parábola-retangular definida pela Equação 5.6 com

as propriedades mecânicas dadas pela Tabela 6.3 e outra de comportamento apresentada pela EC2 definida pela Equação 6.1 com as propriedades mecânicas dadas pela Tabela 6.4. Todas as barras de reforço têm diâmetro de 25 mm, estão regularmente espaçadas e deslocadas das faces por um cobrimento de 3 cm. O comportamento mecânico do aço das armaduras é definido pela Equação 5.7 e suas propriedades mecânicas são apresentadas na Tabela 6.5. Para Papanikolaou (2012) o concreto que ocupa a posição das armaduras foi retirado da seção e o centro da origem localizada no centro geométrico.

Tabela 6.3 – Valores das propriedades para o concreto.

$\sigma_{ck}$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$\epsilon_{cu}$ [%o]	$\epsilon_{c2}$ [%o]
2.00	-3.5	-2.0

(fonte: elaborada pelo autor)

$$\sigma_c(\epsilon) \begin{cases} -f_{cm} \frac{\left(k \frac{\epsilon}{\epsilon_{c1}} - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{c1}}\right)^2\right)}{1 + (k-2) \frac{\epsilon}{\epsilon_{c1}}} & \text{se } \epsilon_{cu} < \epsilon \leq 0 \\ 0 & \text{se } \epsilon > 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

Com as seguintes variáveis,

$$k = 1.05 E_{cm} \frac{|\epsilon_{cu}|}{f_{cm}}$$

$f_{cm}$ : resistência média à compressão do concreto, em kN/cm<sup>2</sup>;

$E_{cm}$ : módulo secante do concreto, em kN/cm<sup>2</sup>

$\epsilon_{c1}$ : deformação do concreto no momento que se atinge a tensão de  $f_{cm}$ ;

Tabela 6.4 – Valores das propriedades para o concreto.

$f_{cm}$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$E_{cm}$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$\epsilon_{c1}$ [%o]	$\epsilon_{cu}$ [%o]
2.00	3000	-2.0	-3.5

(fonte: elaborada pelo autor)

Tabela 6.5 – Valores das propriedades para o aço.

$f_{yk}$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$E_s$ [kN/cm <sup>2</sup> ]
50.0	20000

(fonte: elaborada pelo autor)

A diferença entre a forma parabólica e a forma não linear para a lei constitutiva do concreto estão representados na Figura 6.6 e Figura 6.7, respectivamente.

Figura 6.6 – Concreto parábola-retangular.

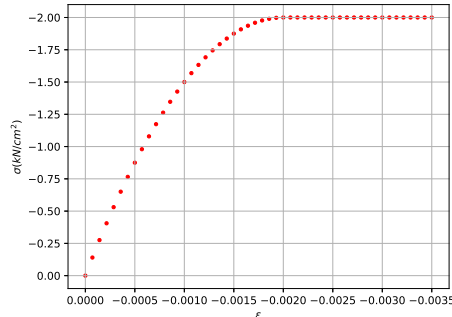
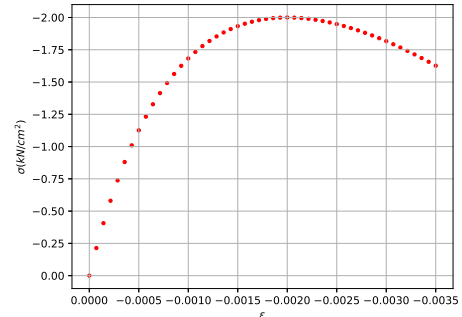


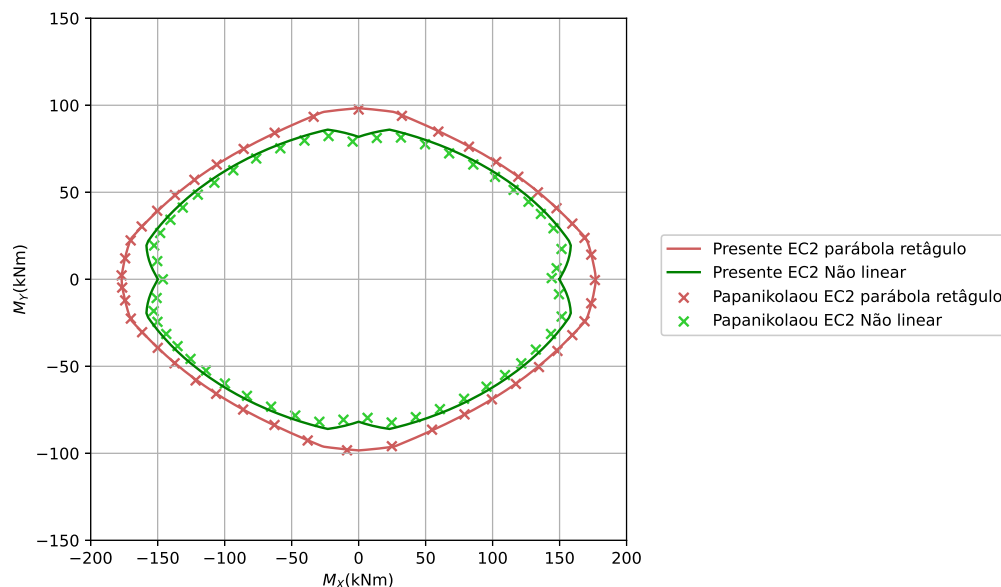
Figura 6.7 – Concreto não linear com amolecimento.



(fonte: elaborada pelo autor)

As curvas obtidas a partir dos 360 pontos analisados para  $N = -3,000 \text{ kN}$  nas duas leis constitutivas do concreto são apresentados na Figura 6.8 junto com os resultados obtidos por Papanikolaou (2012). Neste exemplo expõe que para uma mesma geometria com lei constitutiva diferente, a envoltória gerada possui comportamentos distintos. O concreto não linear, pela sua tensão diminuir com a deformação, não apresenta uma envoltória na sua forma elíptica e não atinge resistência última da outra lei constitutiva. A envoltória obtida pelo o concreto com a lei constitutiva parábola retângulo e aquela extraído da referência coincidem. Para o segundo caso, apresenta a mesma forma, no entanto foi gerado uma envoltória com alguns pontos externos da referência. Todavia, a ferramenta conseguiu resolver para a mesma seção com materiais diferentes.

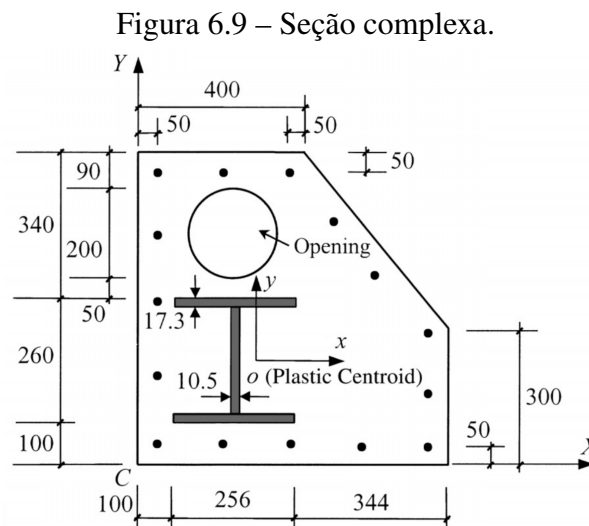
Figura 6.8 – Envoltórias para seção retangular.



(fonte: elaborada pelo autor)

## 6.4 SEÇÃO COMPLEXA

Este último exemplo mostra a aplicação do algoritmo desenvolvido nesse trabalho da análise da seção complexa de concreto definida em Chen, Teng e Chan (2001). As dimensões, abertura, distribuição das armaduras e o perfil metálico na seção são apresentadas na Figura 6.9. O comportamento do concreto é definido pela Equação 5.6 a partir das propriedades mecânicas dadas pela Tabela 6.6. Todas as barras de reforço têm diâmetro de 18 mm, estão regularmente espaçadas e deslocadas das faces por um cobrimento de 5 cm. O comportamento mecânico do aço das armaduras é definido pela Equação 5.7 e suas propriedades mecânicas são apresentadas na Tabela 6.7. O reforço metálico, composto como uma seção, possui a mesmo comportamento das barras de reforço, mas com as suas propriedades mecânicas definidas na Tabela 6.8. O furo representa a retirada do material de concreto com 10cm de raio. Chen, Teng e Chan (2001) retirou o concreto que ocupa a posição das barras de aço e do perfil metálico e a origem dos eixos está localizado no centro plástico.



(fonte: Chen, Teng e Chan, 2001)

Tabela 6.6 – Valores das propriedades para o concreto.

$f_{ck}$ [ $kN/cm^2$ ]	$\gamma_c$	$\epsilon_{cu}$ [%o]	$\epsilon_{c2}$ [%o]
3.00	1.5	-3.5	-2.0

(fonte: elaborada pelo autor)

Tabela 6.7 – Valores das propriedades para o aço - barras.

$f_{yk}$ [ $kN/cm^2$ ]	$\gamma_s$	$E_s$ [ $kN/cm^2$ ]
46.0	1.15	20000

(fonte: elaborada pelo autor)



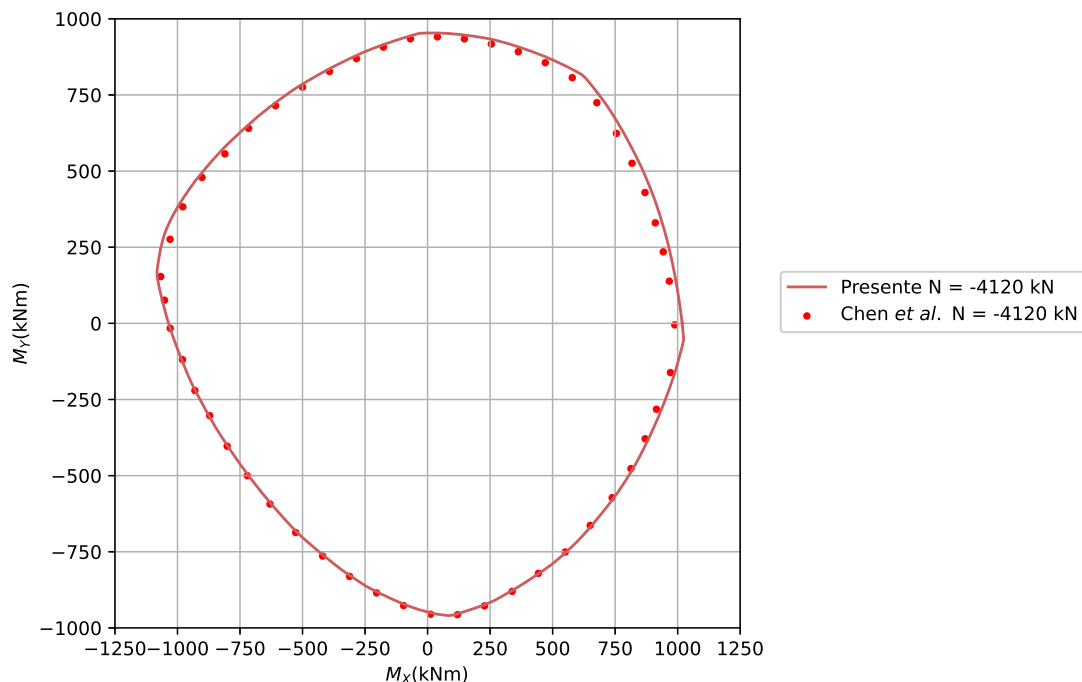
Tabela 6.8 – Valores das propriedades para o aço - Perfil metálico.

$f_{yk}$ [ $kN/cm^2$ ]	$\gamma_s$	$E_s$ [ $kN/cm^2$ ]
35.5	1.10	20000

(fonte: elaborada pelo autor)

O algoritmo foi aplicado na determinação da envoltória de falha para forças normais de compressão com intensidade  $N = -4,120 \text{ kN}$ . A curva obtida a partir dos 360 pontos analisados para a intensidade do esforço normal é apresentada na Figura 6.10 junto com os resultados obtidos por Chen, Teng e Chan (2001). Dada a seção com uma geometria de diferentes elementos, em relação aos exemplos anteriores, como a presença do furo, reforço com um perfil metálico e o posicionamento da origem dos eixos no centro plástico, não há tendência específica do formato da envoltória. Com essa complexidade, o foi apresentado uma grande concordância entre os resultados obtidos nesse trabalho e os extraídos da referência. Isso demonstra a acurácia da ferramenta implementada adicionado diferentes elementos com materiais de comportamento complexo na seção transversal.

Figura 6.10 – Envoltória para seção complexa.



(fonte: elaborada pelo autor)

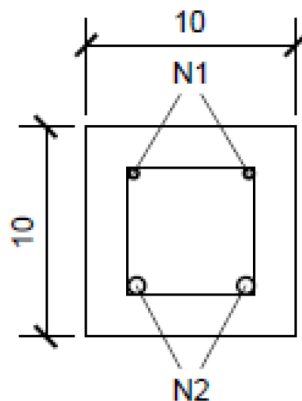
## 7 EXEMPLOS: NOVAS APLICAÇÕES

Neste capítulo, a ferramenta é aplicada a problemas originais, onde se comparam os resultados tanto analiticamente ou com valores obtidos experimentalmente.

### 7.1 APLICAÇÃO 1

A primeira aplicação consiste na análise da seção composta de concreto e de barras de aço como reforços. Cenci (2017) apresentou resultados dos esforços resistentes últimos por meio de cálculo analítico, cálculo computacional e experimental para um concreto convencional e de um concreto leve. A seção quadrada possui dimensões de 10x10 presente na Figura 7.1, com o concreto de classe C16. As barras de aço consideradas foram: barras superiores CA-60 (N1) de 5 mm e barras inferiores de CA50 (N2) de 8 mm.

Figura 7.1 – Seção quadrada



(fonte: elaborada pelo autor)

A primeira comparação, com o concreto convencional, é com o cálculo analítico utilizando a aproximação de um diagrama parábola retângulo, obtendo-se um esforço de ruptura de 19.37 kN, no entanto, com o ensaio, foi obtido um esforço de ruptura de 22.04 kN. Pelos ensaios de corpo de prova, foi obtida a curva tensão-deformação apresentada na Tabela 7.4, na qual os dados foram inseridos no ANSYS, e obteve um esforço de ruptura de 24.83 kN. Com a ferramenta desenvolvida ao longo deste trabalho é possível calcular para três casos:

- a) Utilizar a Equação 6.1 com as propriedades da Tabela 7.1 para o concreto e Equação 5.7

com as propriedades Tabela 7.2 e Tabela 7.3;

- b) Utilizar os dados experimentais do concreto Tabela 7.4 e dos aços, sendo para CA-50 e CA-60 utilizar as mesmas expressões com as tensões características de  $f_{yk} = 58.5 \text{ kN/cm}^2$  e  $f_{yk} = 71.7 \text{ kN/cm}^2$  respectivamente.

No primeiro caso, foi obtido um esforço de  $19.36 \text{ kN}$ , muito próximo do que foi considerado com a aproximação da curva parábola-retangular, porém ao comparar o valor com o experimento, foi notado uma diferença relativa de  $-12\%$  com relação ao valor experimental. Mas ao utilizar a curva da tensão-deformação e interpolar os pontos por um polinômio de grau 3, o esforço de ruptura foi de  $23.70 \text{ kN}$ , o que leva na diferença relativa de  $0.08\%$ , um valor mais próximo do que foi retornado pelo ANSYS.

Tabela 7.1 – Valores das propriedades para o concreto C16.

Concreto	$f_{ck} [\text{kN/cm}^2]$	$E_{ci} [\text{kN/cm}^2]$	$E_{c1} [\text{kN/cm}^2]$	$\epsilon_{c1} [\%]$	$\epsilon_{c,lim} [\%]$	k
16	1.6	2880	1220	-2.0	-3.5	2.36

(fonte: elaborada pelo autor)

Tabela 7.2 – Valores das propriedades para o aço CA-50.

$f_{yk} [\text{kN/cm}^2]$	$E_s [\text{kN/cm}^2]$
50.0	21000

(fonte: elaborada pelo autor)

Tabela 7.3 – Valores das propriedades para o aço CA-60.

$f_{yk} [\text{kN/cm}^2]$	$E_s [\text{kN/cm}^2]$
60.0	21000

(fonte: elaborada pelo autor)

Para o segundo tipo de material de concreto, o concreto leve, não foi possível obter a curva tensão-deformação, então a comparação foi realizado utilizado a Equação 6.1 com as mesmas propriedades, exceto a  $f_{cm} = 20.29 \text{ kN/cm}^2$ . Com isso, para o concreto leve, pelo ensaio, foi obtido o esforço de ruptura de  $24.31 \text{ kN}$ , e pelo ANSYS,  $25.06 \text{ kN}$ . Já com o programa, foi obtido um valor de  $25.94 \text{ kN}$ , um esforço que apresenta  $7\%$  superior em relação ao esforço obtido em laboratório e  $4\%$  superior em relação ao resultado numérico.

Tabela 7.4 – Valores das propriedades para o concreto C16.

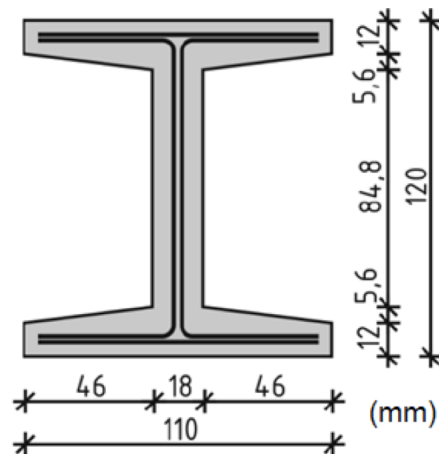
$f_{ck}$ [ $kN/cm^2$ ]	$\epsilon_{c1}$ [m/m]	$f_{ck}$ [ $kN/cm^2$ ]	$\epsilon_{c1}$ [m/m]	$f_{ck}$ [ $kN/cm^2$ ]	$\epsilon_{c1}$ [m/m]
0.18	0.0001	1.43	0.0013	1.51	0.0025
0.35	0.0002	1.47	0.0014	1.49	0.0026
0.50	0.0003	1.51	0.0015	1.45	0.0027
0.64	0.0004	1.53	0.0016	1.41	0.0028
0.77	0.0005	1.56	0.0017	1.37	0.0029
0.88	0.0006	1.57	0.0018	1.33	0.003
0.99	0.0007	1.58	0.0019	1.28	0.0031
1.08	0.0008	1.58	0.002	1.22	0.0032
1.17	0.0009	1.58	0.0021	1.16	0.0033
1.25	0.001	1.57	0.0022	1.10	0.0034
1.32	0.0011	1.56	0.0023	1.04	0.0035
1.37	0.0012	1.54	0.0024		

(fonte: elaborada pelo autor)

## 7.2 APLICAÇÃO 2

A segunda aplicação consiste na seção I, com as suas dimensões apresentadas na Figura 7.2, sendo composto por concreto e uma malha têxtil, apresentado por Araújo (2019). O concreto possui como sua lei constitutiva por meio da Equação 7.1, com as propriedades na Tabela 7.5. A malha têxtil, a sua lei constitutiva é dada pela Equação 7.2 e as suas propriedades no Tabela 7.6.

Figura 7.2 – Seção transversal viga I



(fonte: Araújo (2019))

$$\sigma_c(\varepsilon) \begin{cases} -f_{cm} \frac{\left(k \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c1}} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c1}}\right)^2\right)}{1 + (k-2) \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c1}}} & \text{se } \varepsilon_{cu} < \varepsilon \leq 0 \\ \frac{f_{ctm}}{|\varepsilon_{c1}|} \varepsilon & \text{se } 0 < \varepsilon \leq |\varepsilon_{c1}| \\ \alpha f_{ctm} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{tu}}\right) & \text{se } |\varepsilon_{c1}| < \varepsilon \leq \varepsilon_{tu} \end{cases} \quad (7.1)$$

Onde,  $k = 1.05 E_{cm} \frac{|\varepsilon_{cu}|}{f_{cm}}$

$f_{cm}$ : resistência média à compressão do concreto, em  $kN/cm^2$ ;

$f_{ctm}$ : resistência média à tração do concreto, em  $kN/cm^2$ ;

$E_{cm}$ : módulo secante do concreto, em  $kN/cm^2$

$\varepsilon_{cu}$ : deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura;

$\varepsilon_{c1}$ : deformação do concreto no momento que se atinge a tensão de  $f_{cm}$ ;

$\varepsilon_{ctu}$ : parâmetro que indica a deformação limite a partir da qual a colaboração do concreto entre fissuras não deve mais ser considerada.

Tabela 7.5 – Valores das propriedades para o concreto.

$f_{cm}$ [ $kN/cm^2$ ]	$E_{cm}$ [ $kN/cm^2$ ]	$\varepsilon_{c1}$ [%o]	$\varepsilon_{cu}$ [%o]	$f_{ctm}$ [ $kN/cm^2$ ]	$\varepsilon_{tu}$ [%o]	$\alpha$
8.7	4542	-2.4	-3.5	0.59	6	0.6

(fonte: elaborada pelo autor)

$$\sigma_{yk}(\varepsilon) = \varepsilon E_t \quad \text{se } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_t \quad (7.2)$$

Onde,

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E_t}$$

$\sigma_{yk}$ : resistência a tração da malha têxtil, em  $kN/cm^2$ ;

$E_t$ : módulo de elasticidade da malha têxtil, em  $kN/cm^2$

Tabela 7.6 – Valores das propriedades para a malha têxtil.

$\sigma_{yk}$ [ $kN/cm^2$ ]	$E_t$ [ $kN/cm^2$ ]
354.4	23854.9

(fonte: elaborada pelo autor)

Com estes valores, pode-se comparar os resultados obtidos por meio de experimentos: 482.00  $kNcm$ , por resultados numéricos: 468.00  $kNcm$ , por resultados analítico: 556.50  $kNcm$  e por fim, pelo programa: 474.09  $kNcm$ . Entre os resultados obtidos pelo programa com o experimental, numérico e analítico, as diferenças relativos são respectivamente: -1.64 %, 1.30% e -14.81%.

## 8 CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 8.1 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi desenvolvida uma ferramenta implementada em Python que permite calcular os esforços resistentes de uma seção.

Os elementos geométricos e os materiais devem ser criados separadamente e posteriormente unidos para compor a seção. Cabe ao usuário inserir dados de entrada coerentes para obter bons resultados. As seções apresentadas neste trabalho, tanto geometrias quanto materiais distintos, corroboraram com a validação do programa. Métodos auxiliares foram implementados e verificados para calcular os esforços últimos resistentes, garantindo que ao menos um material encontre-se na condição de deformada última, seja compressão ou tração.

Dois métodos distintos foram implementados para obter os esforços resistentes. O primeiro, *método  $N-\theta$*  passa a ser mais interessante, pois realizando os processos de cálculos de  $[0,2\pi]$  rad, é possível obter uma envoltória com o esforço axial de interesse. Porém dependendo da seção, a envoltória em relação aos momentos fletores, os pontos não se encontram igualmente espaçadas. Para resolver esse problema, o *método  $N-\alpha$*  consegue obter a inclinação dos momentos fletores, permitindo que se espaçar os ângulos  $\alpha$  igualmente, a envoltória dos momentos fletores passam a ser igualmente espaçadas angularmente. O *método resist-d*, também serve para calcular os esforços resistentes, no entanto ela serve mais como um método auxiliar, pois além da seção, a altura da linha neutra deve ser definida como dado de entrada. Este parâmetro faz parte da incógnita para encontrar os esforços, logo, não se tem o mesmo para que seja inserido na entrada.

Com alguns exemplos reais, foi obtido resultados satisfatórios, pois os mesmos se aproximam dos obtidos em ensaios ou por *software* mais sofisticados.

### 8.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Realizar outras avaliações mais rigorosas:

- A ferramenta focou mais na sua implementação das envoltórias para um esforço axial de interesse. Deve-se realizar testes complementares para obter as envoltórias e comparar com *Benchmarks* consolidados;

- Testar a sua eficiência com programas já consolidados e comparar a precisão da ferramenta computacional para seções com diversas geometrias e materiais.

Para as melhorias da ferramenta:

- implementar ferramentas gráficas para definição das seções e interpretação dos resultados;
- métodos para momento curvatura;
- método para determinar a configuração de deformação  $(\theta, d, \varphi)$  que equilibra esforços externos  $(N, M_X, M_Y)$  atuando na seção.



## REFERÊNCIAS

- ALFANO, G.; MARMO, F.; ROSATI, L. An unconditionally convergent algorithm for the evaluation of the ultimate limit state of RC sections subject to axial force and biaxial bending. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 72, n. 8, p. 924–963, 2007.
- ANDERSEN, P.; LEE, H.-N. A modified plastic theory of reinforced concrete. **University of Minnesota**, 1951.
- ARAÚJO, M. F. de S. B. **Simulação pelo método dos elementos finitos de peças em concreto têxtil**. 220 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.
- BONET, J.; ROMERO, M.; MIGUEL, P.; FERNANDEZ, M. A fast stress integration algorithm for reinforced concrete sections with axial loads and biaxial bending. **Computers & Structures**, v. 82, n. 2, p. 213–225, 2004.
- BRESLER, B. Design criteria for reinforced columns under axial load and biaxial bending. **ACI Journal Proceedings**, v. 57, n. 11, 1960.
- CENCI, S. **Estudo comparativo de vigas biapoiadas em concreto armado utilizando concreto leve e concreto convencional**. 72 p. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) — Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. **Numerical Methods for Engineers**. 7ª edição. ed. New York, NY: McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2014.
- CHARALAMPAKIS, A.; KOUMOUSIS, V. Ultimate strength analysis of composite sections under biaxial bending and axial load. **Advances in Engineering Software**, v. 39, n. 11, p. 923–936, 2008.
- CHEN, S. F.; TENG, J. G.; CHAN, S. L. Design of biaxially loaded short composite columns of arbitrary section. **Journal of Structural Engineering**, v. 127, n. 6, p. 678–685, 2001.
- CHIOREAN, C. Computerised interaction diagrams and moment capacity contours for composite steel–concrete cross-sections. **Engineering Structures**, v. 32, n. 11, p. 3734–3757, 2010.
- DUNDAR, C.; SAHIN, B. Arbitrarily shaped reinforced concrete members subject to biaxial bending and axial load. v. 49, n. 4, p. 643–662, 1993.
- EN1992-1-1. **Eurocode 2: design of concrete structures – Part 1-1: general rules and rules for buildings**. **European Committee for Standardization**. Brussels, 2004.
- FAFITIS, A. Interaction surfaces of reinforced-concrete sections in biaxial bending. **Journal of Structural Engineering**, v. 127, n. 7, p. 840–846, 2001.
- GUAN, Z.; ZHANG, J.; LI, J. A robust computational method for ultimate strength analysis of arbitrary reinforced concrete and composite sections subjected to axial force and biaxial bending. **Advances in Structural Engineering**, v. 17, n. 1, p. 83–96, 2013.

- NETO, R. F. T.; SILVA, F. M. d. **Introdução à Programação para Engenharia - Usando a Linguagem Python**. 1ª edição. ed. Nova Iorque: LTC, 2010.
- PALLARÉS, L.; MIGUEL, P. F.; FERNÁNDEZ-PRADA, M. A. A numerical method to design reinforced concrete sections subjected to axial forces and biaxial bending based on ultimate strain limits. **Engineering Structures**, v. 31, n. 12, p. 3065–3071, 2009.
- PAPANIKOLAOU, V. K. Analysis of arbitrary composite sections in biaxial bending and axial load. **Computers & Structures**, v. 98-99, p. 33–54, 2012.
- PEREZ, F.; GRANGER, B. E. Ipython: A system for interactive scientific computing. **Computing in Science Engineering**, v. 9, n. 3, p. 21–29, 2007.
- RODRIGUEZ, J. A.; ARISTIZABAL-OCHOA, J. D. Biaxial interaction diagrams for short RC columns of any cross section. **Journal of Structural Engineering**, v. 125, n. 6, p. 672–683, 1999.
- ROIK, K.; BERGMANN, R. Design method for composite columns with unsymmetrical cross-sections. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 15, n. 1, p. 153–168, 1990.
- ROSATI, L.; MARMO, F.; SERPIERI, R. Enhanced solution strategies for the ultimate strength analysis of composite steel–concrete sections subject to axial force and biaxial bending. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, n. 9, p. 1033–1055, 2008.
- SFAKIANAKIS, M. G. Biaxial bending with axial force of reinforced, composite and repaired concrete sections of arbitrary shape by fiber model and computer graphics. **Advances in Engineering Software**, p. 16, 2002.
- SOUSA, J. B. M.; MUNIZ, C. F. Analytical integration of cross section properties for numerical analysis of reinforced concrete, steel and composite frames. **Engineering Structures**, v. 29, n. 4, p. 618–625, 2007.
- THOMAS, M. D. W. G. B.; HASS, J. **Cálculo volume 2**. 12ª edição. ed. São Paulo: Pearson, 2012.
- VIVO, L. D.; ROSATI, L. Ultimate strength analysis of reinforced concrete sections subject to axial force and biaxial bending. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 166, n. 3, p. 261–287, 1998.

## **APÊNDICES**

## APÊNDICE A – TEOREMA DE GREEN

O Teorema de Green definido por:

Sejam  $P$  e  $Q$  funções de duas variáveis  $x$  e  $y$ , de tal modo que tenham derivadas parciais primeiras contínuas em um disco aberto  $B$  em  $\mathbb{R}^2$ . Se  $C$  for uma curva fechada simples seccionalmente suave, contida inteiramente em  $B$ , e se  $R$  for a região limitada por  $C$ , então (THOMAS; HASS, 2012):

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (\text{A.1})$$

O caso de interesse para o estudo é quando a função  $P = 0$ . Aplicando isso na equação A.1, temos:

$$\int_C Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dA \quad (\text{A.2})$$

Podemos fazer mudança de variáveis chamando:

$$f(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (\text{A.3})$$

e

$$F(x,y) = Q = \int \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx \quad (\text{A.4})$$

Obtendo:

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_C F(x,y)dy \quad (\text{A.5})$$

Aplicando a equação para um caso onde,

$$f(x,y) = x^k y^m \quad (\text{A.6})$$

com  $n$  e  $m$  números inteiros, a sua integral passa a ser:

$$F(x, y) = \int f(x, y) dx = \frac{x^{k+1}y^m}{k+1} \quad (\text{A.7})$$

Logo,

$$\iint_D x^k y^m dA = \int_C \left( \frac{x^{k+1}y^m}{k+1} \right) dy \quad (\text{A.8})$$

### A.0.1 Propriedades geométricas

Campos Filho (2014) apresenta o desenvolvimento das expressões para os cálculos das propriedades geométricas para poligonais composta por segmentos de retas.

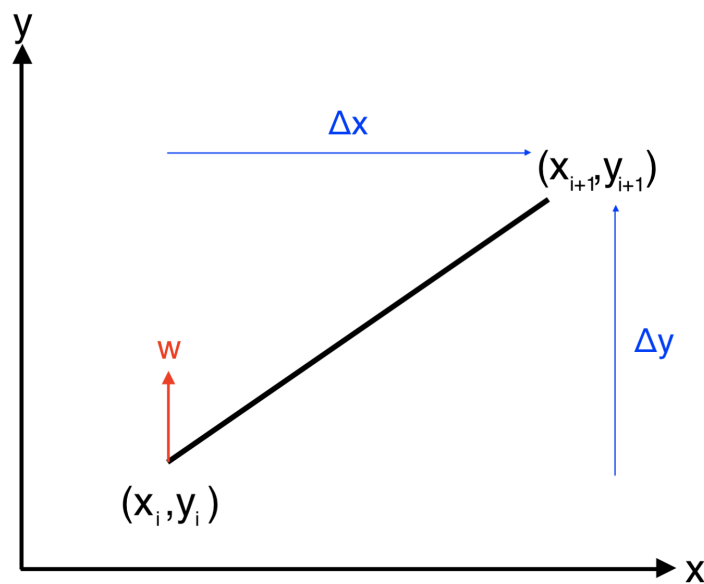


Figura A.1 – Segmento de reta do elemento  $i$ .

Considerando as notações definidas para um segmento de reta denotado por elemento  $i$ , pode definir outra variável,  $w$  paralela ao eixo  $y$ .

Para um elemento  $i$ :

$$\begin{aligned} y(w) &= y_i + w \\ x(w) &= x_i + \frac{\Delta x_i}{\Delta y_i} w \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Onde,

$$\begin{aligned}\Delta y_i &= y_{i+1} - y_i \\ \Delta x_i &= x_{i+1} - x_i\end{aligned}\tag{A.10}$$

Assim:

$$\iint_D x^k y^m dA = \int_C \left( \frac{x^{k+1} y^m}{k+1} \right) dy = \sum_{n=1}^n G_{km}\tag{A.11}$$

Onde,

$$G_{km} = \frac{1}{k+1} \int_{y_i}^{y_{i+1}} x^{k+1} y^m dy\tag{A.12}$$

Podendo ser reescrita como:

$$G_{km} = \frac{1}{k+1} \int_0^{\Delta y_i} \left( x_i + \frac{\Delta x_i}{\Delta y_i} w \right)^{k+1} (y_i + w)^m dw\tag{A.13}$$

As propriedades geométricas definidas abaixo são calculados em função das definições feitas previamente:

#### A.0.1.1 Área da seção

$$A = \int_A dA = \sum_{n=1}^n G_{00}\tag{A.14}$$

$$G_{00} = \left( x_i + \frac{\Delta x_i}{2} \right) \Delta y_i\tag{A.15}$$

#### A.0.1.2 Momento estático em relação ao eixo X

$$S_x = \int_A y dA = \sum_{n=1}^n G_{01}\tag{A.16}$$

$$G_{01} = \left[ x_i \left( y_i + \frac{\Delta y_i}{2} \right) + \Delta x_i \left( \frac{y_i}{2} + \frac{\Delta y_i}{3} \right) \right] \Delta y_i\tag{A.17}$$

## A.0.1.3 Momento estático em relação ao eixo Y

$$S_y = \int_A x dA = \sum_{n=1}^n G_{10} \quad (\text{A.18})$$

$$G_{10} = \left[ x_i (x_i + \Delta x_i) + \frac{\Delta x_i^2}{3} \right] \frac{\Delta y_i}{2} \quad (\text{A.19})$$

## A.0.1.4 Momento de inércia em relação ao eixo X

$$J_x = \int_A y^2 dA = \sum_{n=1}^n G_{02} \quad (\text{A.20})$$

$$G_{02} = \left\{ x_i \left[ y_i (\Delta y_i + y_i) + \frac{\Delta y_i^2}{3} \right] + \Delta x_i \left[ y_i \left( \frac{y_i}{2} + \frac{2\Delta y_i}{3} \right) + \frac{\Delta y_i^2}{4} \right] \right\} \Delta y_i \quad (\text{A.21})$$

## A.0.1.5 Momento de inércia em relação ao eixo Y

$$J_y = \int_A x^2 dA = \sum_{n=1}^n G_{20} \quad (\text{A.22})$$

$$G_{20} = \left\{ \frac{\Delta x_i^3}{4} + x_i \left[ \Delta x_i^2 + x_i \left( \frac{3\Delta x_i}{2} + x_i \right) \right] \right\} \frac{\Delta y_i}{3} \quad (\text{A.23})$$

## A.0.1.6 Momento de inércia em relação aos eixos X e Y

$$J_{xy} = \int_A xy dA = \sum_{n=1}^n G_{11} \quad (\text{A.24})$$

$$G_{11} = \left\{ x_i \left[ x_i \left( y_i + \frac{\Delta y_i}{2} \right) + \Delta x_i \left( y_i + \frac{2\Delta y_i}{3} \right) \right] + \Delta x_i^2 \left[ \frac{y_i}{3} + \frac{\Delta y_i}{4} \right] \right\} \frac{\Delta y_i}{2} \quad (\text{A.25})$$

## APÊNDICE B – MATERIAL ELÁSTICO PERFEITO

As fórmulas deduzidas analiticamente para uma seção retangular centrada na origem com o de material elástico perfeito para a seção maciça, enquanto para a seção com furo, a origem se encontra no lado inferior esquerdo.

Os esforços obtidos são com relação aos eixos locais  $x$  e  $y$ . Os esforços devem ser rotacionados para os eixos globais  $X$  e  $Y$ , pela Equação 4.11 para que os resultados sejam comparados. Estes são calculados a partir das expressões do Equação B.1.

$$\begin{aligned} N &= \int_{A_c} \sigma dA \\ M_x &= - \int_{A_c} \sigma y dA \\ M_y &= - \int_{A_c} \sigma x dA \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

O material elástico perfeito é definida na Equação 5.1.

Juntando Equação 5.1, Equação 4.2 e Equação 4.1:

$$\sigma(y) = E \varepsilon_0 - E \varphi y \quad (\text{B.2})$$

### B.1 SEÇÃO MACIÇA

#### B.1.1 Caso a e b

Caso de compressão ou tração simples, em que são considerados:  $\theta = 0$ ,  $\varepsilon_0 \neq 0$  e  $\varphi = 0$ , para ambos os casos, os esforços são calculados por:

$$N = \int_{A_c} \sigma dA = E \varepsilon_0 \int_{-h/2}^{h/2} b dy = E \varepsilon_0 b h \quad (\text{B.3})$$

$$M_x = - \int_{A_c} \sigma y dA = -E \varepsilon_0 \int_{-h/2}^{h/2} y b dy = 0 \quad (\text{B.4})$$



$$M_y = - \int_{A_c} \sigma x dA = -E \varepsilon_0 \int_{-h/2}^{h/2} x h dx = 0 \quad (\text{B.5})$$

Parâmetros que podem ser alterados:

- Dimensão do retângulo:  $b, h$
- Módulo de elasticidade:  $E$
- Deformação axial:  $\varepsilon_0 < 0$

### B.1.2 Caso c

Caso flexo tração reta em que são considerados:  $\theta = 0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  e  $\varphi > 0$  e os esforços são calculados por:

$$N = \int_{A_c} \sigma dA = \int_{-h/2}^{h/2} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) b dy = E \varepsilon_0 b h \quad (\text{B.6})$$

$$M_x = - \int_{A_c} \sigma y dA = - \int_{-h/2}^{h/2} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) y b dy = E \varphi b \frac{h^3}{12} \quad (\text{B.7})$$

$$M_y = - \int_{A_c} \sigma x dA = - \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) x dx dy = 0 \quad (\text{B.8})$$

Parâmetros que podem ser alterados:

- Dimensão do retângulo:  $b, h$
- Módulo de elasticidade:  $E$
- Deformação axial:  $\varepsilon_0 > 0$
- Curvatura:  $\varphi > 0$

### B.1.3 Caso d e Caso e:

Como o material é elástico perfeito, independe da posição da linha neutra, ou seja, tanto para esses casos passam a obter os mesmos resultados. Consideram-se para o caso flexo tração oblíqua, quando  $0 \leq \theta \leq \arctan\left(\frac{h}{b}\right)$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  e  $\varphi > 0$  e os esforços são calculados por:

$$\begin{aligned}
N &= \int_{A_c} \sigma dA \\
N &= \int_{-\frac{b}{2} \sin \theta - \frac{h}{2} \cos \theta}^{\frac{b}{2} \sin \theta - \frac{h}{2} \cos \theta} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) dx dy \\
&+ \int_{\frac{b}{2} \sin \theta - \frac{h}{2} \cos \theta}^{-\frac{b}{2} \sin \theta + \frac{h}{2} \cos \theta} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) dx dy \\
&+ \int_{-\frac{b}{2} \sin \theta + \frac{h}{2} \cos \theta}^{\frac{b}{2} \sin \theta + \frac{h}{2} \cos \theta} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) dx dy \\
N &= E \varepsilon_0 b h
\end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
M_x &= - \int_{A_c} \sigma y dA \\
M_x &= - \int_{-\frac{b}{2} \sin \theta - \frac{h}{2} \cos \theta}^{\frac{b}{2} \sin \theta - \frac{h}{2} \cos \theta} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) y dx dy \\
&- \int_{\frac{b}{2} \sin \theta - \frac{h}{2} \cos \theta}^{-\frac{b}{2} \sin \theta + \frac{h}{2} \cos \theta} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) y dx dy \\
&- \int_{-\frac{b}{2} \sin \theta + \frac{h}{2} \cos \theta}^{\frac{b}{2} \sin \theta + \frac{h}{2} \cos \theta} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) y dx dy \\
M_x &= \frac{E \varphi b h}{12} ((b \sin \theta)^2 + (h \cos \theta)^2)
\end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned}
M_y &= - \int_{A_c} \sigma x dA = \\
M_y &= - \int_{-\frac{b}{2} \sin \theta - \frac{h}{2} \cos \theta}^{\frac{b}{2} \sin \theta - \frac{h}{2} \cos \theta} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) x dx dy \\
M_y &= - \int_{\frac{b}{2} \sin \theta - \frac{h}{2} \cos \theta}^{-\frac{b}{2} \sin \theta + \frac{h}{2} \cos \theta} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) x dx dy \\
M_y &= - \int_{-\frac{b}{2} \sin \theta + \frac{h}{2} \cos \theta}^{\frac{b}{2} \sin \theta + \frac{h}{2} \cos \theta} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) x dx dy \\
M_y &= \frac{E \varphi b h}{12} (b^2 - h^2) \sin \theta \cos \theta
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Parâmetros que podem ser alterados:

- Dimensão do retângulo:  $b, h$
- Módulo de elasticidade:  $E$
- Deformação axial:  $\varepsilon_0 > 0$
- Curvatura:  $\varphi > 0$

- Rotação:  $0 \leq \theta \leq \arctan\left(\frac{h}{b}\right)$

#### B.1.4 Caso f e Caso g:

Como o material é elástico perfeito, independe da posição da linha neutra, ou seja, tanto para esses casos passam a obter os mesmos resultados. Consideram-se para o caso quando :  $\arctan\left(\frac{h}{b}\right) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  e  $\varphi > 0$  e os esforços são calculados por:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_{A_c} \sigma dA = \\
 N &= \int_{-\frac{b}{2} \sin \theta + \frac{h}{2} \cos \theta}^{-\frac{b}{2} \sin \theta + \frac{h}{2} \cos \theta} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \sin \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) dx dy \\
 &+ \int_{-\frac{b}{2} \sin \theta - \frac{h}{2} \cos \theta}^{\frac{b}{2} \sin \theta - \frac{h}{2} \cos \theta} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) dx dy \\
 &+ \int_{\frac{b}{2} \sin \theta + \frac{h}{2} \cos \theta}^{\frac{b}{2} \sin \theta + \frac{h}{2} \cos \theta} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) dx dy \\
 N &= E \varepsilon_0 b h
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= - \int_{A_c} \sigma y dA = \\
 M_x &= - \int_{-\frac{b}{2} \sin \theta + \frac{h}{2} \cos \theta}^{-\frac{b}{2} \sin \theta + \frac{h}{2} \cos \theta} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \sin \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) y dx dy \\
 &- \int_{-\frac{b}{2} \sin \theta - \frac{h}{2} \cos \theta}^{\frac{b}{2} \sin \theta - \frac{h}{2} \cos \theta} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) y dx dy \\
 &- \int_{\frac{b}{2} \sin \theta + \frac{h}{2} \cos \theta}^{\frac{b}{2} \sin \theta + \frac{h}{2} \cos \theta} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) y dx dy \\
 M_x &= \frac{E \varphi b h}{12} ((b \sin \theta)^2 + (h \cos \theta)^2)
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= - \int_{A_c} \sigma x dA = \\
 M_y &= - \int_{-\frac{b}{2} \sin \theta + \frac{h}{2} \cos \theta}^{-\frac{b}{2} \sin \theta + \frac{h}{2} \cos \theta} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \sin \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) x dx dy \\
 &- \int_{-\frac{b}{2} \sin \theta - \frac{h}{2} \cos \theta}^{\frac{b}{2} \sin \theta - \frac{h}{2} \cos \theta} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) x dx dy \\
 &- \int_{\frac{b}{2} \sin \theta + \frac{h}{2} \cos \theta}^{\frac{b}{2} \sin \theta + \frac{h}{2} \cos \theta} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) x dx dy \\
 M_y &= \frac{E \varphi b h}{12} (h^2 - b^2) \sin \theta \cos \theta
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

Parâmetros que podem ser alterados:

- Dimensão do retângulo:  $b, h$
- Módulo de elasticidade:  $E$
- Deformação axial:  $\varepsilon_0 > 0$
- Curvatura:  $\varphi > 0$
- Rotação:  $\arctan\left(\frac{h}{b}\right) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Porém os casos  $d, e, f$  e  $g$  possuem os mesmos esforços:

$$N = E\varepsilon_0bh$$

$$M_x = \frac{E\varphi bh}{12} \left( (b \sin \theta)^2 + (h \cos \theta)^2 \right)$$

$$M_y = \frac{E\varphi bh}{12} (h^2 - b^2) \sin \theta \cos \theta$$

## B.2 SEÇÃO COM FURO

### B.2.1 Caso a

Flexo Compressão Oblíqua:  $\theta = 0$ ,  $\varphi = 0$  e  $\varepsilon_0 < 0$ . O eixo se encontra no canto inferior esquerdo do retângulo, o seu eixo coincide com os eixos globais  $X$  e  $Y$ .

Para o retângulo externo, os esforços são calculados por:

$$N_e = \int_{A_c} \sigma dA = \int_0^h (E\varepsilon_0) b dy = E\varepsilon_0bh \quad (\text{B.15})$$

$$M_{xe} = - \int_{A_c} \sigma y dA = - \int_0^h (E\varepsilon_0) b y dy = -E\varepsilon_0 b \frac{h^2}{2} \quad (\text{B.16})$$

$$M_{ye} = - \int_{A_c} \sigma x dA = - \int_0^h \int_0^b (E\varepsilon_0) x dx dy = - \frac{E\varepsilon_0 h b^2}{2} \quad (\text{B.17})$$

Para o retângulo interno, os esforços são calculados por:

$$N_i = \int_{A_c} \sigma dA = \int_{d_y}^{d_y+h'} (E\varepsilon_0)b' dy = E\varepsilon_0 b' h' \quad (\text{B.18})$$

$$M_{xi} = - \int_{A_c} \sigma y dA = - \int_{d_y}^{d_y+h'} (E\varepsilon_0)b' y dy = -E\varepsilon_0 b' h' \frac{2d_y + h'}{2} \quad (\text{B.19})$$

$$M_{yi} = - \int_{A_c} \sigma y dA = - \int_{d_y}^{d_y+h'} \int_{d_x}^{d_x+b'} (E\varepsilon_0)x dx dy = -Eb'h' \frac{2d_x + b'}{2} \quad (\text{B.20})$$

Assim, para o caso que o retângulo interno esteja contido dentro do retângulo externo, ou seja,  $d_x \leq b - b'$  e  $d_y \leq h - h'$ , os esforços serão:

$$N = N_e - N_i$$

$$M_x = M_{xe} - M_{xi}$$

$$M_y = M_{ye} - M_{yi}$$

Parâmetros que podem ser alterados:

- Dimensão do retângulo externo:  $b, h$
- Dimensão do retângulo interno:  $b', h'$
- Dimensão dos afastamentos:  $d_x, d_y$
- Módulo de elasticidade:  $E$
- Deformação axial:  $\varepsilon_0 < 0$

### B.3 CASO B

Flexo compressão oblíqua para um retângulo com furo:  $\theta = 0$ ,  $\varphi > 0$  e  $\varepsilon_0 > 0$ . O eixo se encontra no canto inferior esquerdo do retângulo e o seu eixo coincide com os eixos globais  $X$  e  $Y$ . A zona em vermelho indica a área comprimida, sendo que começa a partir da altura da linha neutra  $d$  e limitada até o extremo superior do retângulo.

Para o retângulo externo, os esforços são calculados por:

$$N_e = \int_{A_c} \sigma dA = \int_0^h (E\varepsilon_0 - E\varphi y) b dy = Ebh \left( \varepsilon_0 - \varphi \frac{h}{2} \right) \quad (\text{B.21})$$

$$M_{xe} = - \int_{A_c} \sigma y dA = - \int_0^h (E\varepsilon_0 - E\varphi y) b y dy = -Ebh^2 \left( \frac{\varepsilon_0}{2} - \varphi \frac{h}{3} \right) \quad (\text{B.22})$$

$$M_{ye} = - \int_{A_c} \sigma y dA = - \int_0^h \int_0^b (E\varepsilon_0 - E\varphi y) x dx dy = - \frac{Ehb^2}{2} \left( \varepsilon_0 - \varphi \frac{h}{2} \right) \quad (\text{B.23})$$

Para o retângulo interno, os esforços são calculados por:

$$N_i = \int_{A_c} \sigma dA = \int_{d_y}^{d_y+h'} (E\varepsilon_0 - E\varphi y) b' dy = Eb'h' \left( \varepsilon_0 - \varphi \frac{2d_y+h'}{2} \right) \quad (\text{B.24})$$

$$M_{xi} = - \int_{A_c} \sigma y dA = - \int_{d_y}^{d_y+h'} (E\varepsilon_0 - E\varphi y) b' y dy \quad (\text{B.25})$$

$$M_{xi} = -Eb'h' \left( \varepsilon_0 \frac{2d_y+h'}{2} - \varphi \frac{3d_y^2 + 3d_y h' + h'^2}{3} \right)$$

$$M_{yi} = - \int_{A_c} \sigma y dA = - \int_{d_y}^{d_y+h'} \int_{d_x}^{d_x+b'} (E\varepsilon_0 - E\varphi y) x dx dy \quad (\text{B.26})$$

$$M_{yi} = -Eb'h' \left( \frac{2d_x+b'}{2} \right) \left( \varepsilon_0 - \varphi \frac{2d_y+h'}{2} \right)$$

Assim, para o caso que o retângulo interno esteja contido dentro do retângulo externo, ou seja,  $d_x \leq b - b'$  e  $d_y \leq h - h'$ , os esforços serão:

$$N = N_e - N_i$$

$$M_x = M_{xe} - M_{xi}$$

$$M_y = M_{ye} - M_{yi}$$

Parâmetros que podem ser alterados:

- Dimensão do retângulo externo:  $b, h$
- Dimensão do retângulo interno:  $b', h'$

- Dimensão dos afastamentos:  $d_x, d_y$
- Módulo de elasticidade:  $E$
- Deformação axial:  $\epsilon_0 < 0$

## APÊNDICE C – MATERIAL ELASTO-PÁSTICO PERFEITO

As fórmulas deduzidas analiticamente para uma seção retangular centrada na origem com o de material elasto-plástico perfeito para a seção maciça.

Os esforços obtidos são com relação aos eixos locais  $x$  e  $y$ . Os esforços devem ser rotacionados para os eixos globais  $X$  e  $Y$ , pela Equação 4.11 para que os resultados sejam comparados. Estes são calculados a partir das expressões do Equação C.1.

$$\begin{aligned} N &= \int_{A_c} \sigma dA \\ M_x &= - \int_{A_c} \sigma y dA \\ M_y &= - \int_{A_c} \sigma x dA \end{aligned} \quad (C.1)$$

O material elasto-pástico perfeito é definida na Equação 5.2.

Juntando Equação 5.2 e Equação 4.1:

$$\sigma(y) \begin{cases} -\sigma_p, y \geq y_p^+ \\ E\varepsilon_0 - E\varphi y, y_p^+ > y \geq y_p^- \\ \sigma_p, y_p^- > y \end{cases} \quad (C.2)$$

### C.1 CASO A A D

Os casos se referem quando o corre uma compressão ou tração pura na seção retangular. Sendo assim, a tensão é constante para a deformada aplicada.

Os esforços são calculados por:

$$N = \int_{A_c} \sigma dA = \sigma \int_{-h/2}^{h/2} b dy = N = E\varepsilon_0 b h \quad (C.3)$$

$$M_x = - \int_{A_c} \sigma y dA = -\sigma \int_{-h/2}^{h/2} y b dy = 0 \quad (C.4)$$



$$M_y = - \int_{A_c} \sigma x dA = -\sigma \int_{-h/2}^{h/2} x h dx = 0 \quad (C.5)$$

## C.2 CASO E

Os esforços são calculados por:

$$N = \int_{A_c} \sigma dA = \int_{-h/2}^{h/2} (E\varepsilon_0 - E\varphi y) b dy = E\varepsilon_0 b h \quad (C.6)$$

$$M_x = - \int_{A_c} \sigma y dA = - \int_{-h/2}^{h/2} (E\varepsilon_0 - E\varphi y) y b dy = E\varphi b \frac{h^3}{12} \quad (C.7)$$

$$M_y = - \int_{A_c} \sigma x dA = - \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} (E\varepsilon_0 - E\varphi y) x dx dy = 0 \quad (C.8)$$

## C.3 CASO F

$$\begin{aligned} N &= \int_{A_c} \sigma dA = \\ N &= \int_{-h/2}^{y_{p-}} (\sigma_p) b dy + \int_{y_{p-}}^{h/2} (E\varepsilon_0 - E\varphi y) b dy \\ N &= \sigma_p b \left( y_{p-} + \frac{h}{2} \right) + E\varepsilon_0 b \left( \frac{h}{2} - y_{p-} \right) - \frac{E\varphi b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y_{p-}^2 \right) \end{aligned} \quad (C.9)$$

$$\begin{aligned} M_x &= - \int_{A_c} \sigma y dA = \\ M_x &= - \int_{-h/2}^{y_{p-}} (\sigma_p) b y dy - \int_{y_{p-}}^{h/2} (E\varepsilon_0 - E\varphi y) b y dy \\ M_x &= - \frac{\sigma_p b}{2} \left( y_{p-}^2 - \frac{h^2}{4} \right) - \frac{E\varepsilon_0 b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y_{p-}^2 \right) + \frac{E\varphi b}{3} \left( \frac{h^3}{8} - y_{p-}^3 \right) \end{aligned} \quad (C.10)$$

$$\begin{aligned} M_y &= - \int_{A_c} \sigma x dA \\ M_y &= - \int_{-h/2}^{y_{p-}} \int_{-b/2}^{b/2} (-\sigma_p) x dx dy - \int_{y_{p-}}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} (E\varepsilon_0 - E\varphi y) x dx dy \\ M_y &= 0 \end{aligned} \quad (C.11)$$

## C.4 CASO G

Os dois limites se encontram dentro da seção, tendo regime tanto elástico e plástico.

$$\begin{aligned}
 N &= \int_{A_c} \sigma dA \\
 N &= \int_{-h/2}^{y_{p-}} (-\sigma_p) b dy + \int_{y_{p-}}^{y_{p+}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) b dy \\
 &\quad + \int_{y_{p+}}^{h/2} (\sigma_p) b dy
 \end{aligned} \tag{C.12}$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= - \int_{A_c} \sigma y dA = \\
 M_x &= - \int_{-h/2}^{y_{p-}} (-\sigma_p) b y dy - \int_{y_{p-}}^{y_{p+}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) b y dy \\
 &\quad - \int_{y_{p+}}^{h/2} (\sigma_p) b y dy
 \end{aligned} \tag{C.13}$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= - \int_{A_c} \sigma x dA \\
 M_y &= - \int_{-h/2}^{y_{p-}} \int_{-b/2}^{b/2} (-\sigma_p) x dx dy - \int_{y_{p-}}^{y_{p+}} \int_{-b/2}^{b/2} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) x dx dy \\
 &\quad - \int_{y_{p+}}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} (\sigma_p) x dx dy
 \end{aligned} \tag{C.14}$$

Dos casos do \*h\* a \*k\*, para resolver as integrais, elas se encontram na forma de:

$$N_p = \int_{y_A}^{y_B} \int_{C_3 y + C_4}^{C_1 y + C_2} \sigma_p dx dy \tag{C.15}$$

$$N_l = \int_{y_A}^{y_B} \int_{C_3 y + C_4}^{C_1 y + C_2} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) dx dy \tag{C.16}$$

$$M_{xp} = - \int_{y_A}^{y_B} \int_{C_3 y + C_4}^{C_1 y + C_2} \sigma_p y dx dy \tag{C.17}$$

$$M_{xl} = - \int_{y_A}^{y_B} \int_{C_3 y + C_4}^{C_1 y + C_2} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) y dx dy \tag{C.18}$$

$$M_{yp} = - \int_{y_A}^{y_B} \int_{C_3y+C_4}^{C_1y+C_2} \sigma_p x dx dy \quad (C.19)$$

$$M_{yl} = - \int_{y_A}^{y_B} \int_{C_3y+C_4}^{C_1y+C_2} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) x dx dy \quad (C.20)$$

Onde, os  $y_A$  e  $y_B$  são os limites da ordenada, e os  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  são constantes.

Elas podem ser resolvidas genericamente e criar funções auxiliares para realizar os cálculos, sendo assim:

Para os esforços normais:

Para o regime plástico:

$$N_p = \int_{y_A}^{y_B} \int_{C_3y+C_4}^{C_1y+C_2} \sigma_p dx dy \quad (C.21)$$

$$N_p = \sigma_p \left[ \frac{C_1 - C_3}{2} (y_B^2 - y_A^2) + (C_2 - C_4) (y_B - y_A) \right]$$

Para o regime linear:

$$N_l = \int_{y_A}^{y_B} \int_{C_3y+C_4}^{C_1y+C_2} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) dx dy \quad (C.22)$$

$$N_l = - \frac{E \varphi (C_1 - C_3)}{3} (y_B^3 - y_A^3) + \frac{E \varepsilon_0 (C_1 - C_3) - E \varphi (C_2 - C_4)}{2} (y_B^2 - y_A^2) + E \varepsilon_0 (C_2 - C_4) (y_B - y_A)$$

Para os momentos fletores, no eixo x:

Para o regime plástico:

$$M_{xp} = - \int_{y_A}^{y_B} \int_{C_3y+C_4}^{C_1y+C_2} \sigma_p y dx dy \quad (C.23)$$

$$M_{xp} = - \sigma_p \left[ \frac{C_1 - C_3}{3} (y_B^3 - y_A^3) + \frac{C_2 - C_4}{2} (y_B^2 - y_A^2) \right]$$

Para o regime linear:

$$\begin{aligned}
M_{xl} &= - \int_{y_A}^{y_B} \int_{C_3y+C_4}^{C_1y+C_2} (E\varepsilon_0 - E\varphi y) y dx dy \\
M_{xl} &= \frac{E\varphi(C_1 - C_3)}{4} (y_B^4 - y_A^4) + \frac{E\varphi(C_2 - C_4) - E\varepsilon_0(C_1 - C_3)}{3} (y_B^3 - y_A^3) \\
&\quad + \frac{E\varepsilon_0(C_2 - C_4)}{2} (y_B^2 - y_A^2)
\end{aligned} \tag{C.24}$$

Para os momentos fletores, no eixo x:

Para o regime plástico:

$$\begin{aligned}
M_{yp} &= - \int_{y_A}^{y_B} \int_{C_3y+C_4}^{C_1y+C_2} \sigma_p x dx dy \\
M_{yp} &= -\sigma_p \left[ \frac{C_1^2 - C_3^2}{6} (y_B^3 - y_A^3) + \frac{C_1C_2 - C_3C_4}{2} (y_B^2 - y_A^2) + (C_2^2 - C_4^2) (y_B - y_A) \right]
\end{aligned} \tag{C.25}$$

Para o regime linear:

$$\begin{aligned}
M_{yl} &= - \int_{y_A}^{y_B} \int_{C_3y+C_4}^{C_1y+C_2} (E\varepsilon_0 - E\varphi y) x dx dy \\
M_{yl} &= \frac{E\varphi(C_1^2 - C_3^2)}{8} (y_B^4 - y_A^4) + \frac{2E\varphi(C_1C_2 - C_3C_4) - E\varepsilon_0(C_1^2 - C_3^2)}{6} (y_B^3 - y_A^3) \\
&\quad - \frac{2E\varepsilon_0(C_1C_2 - C_3C_4) - E\varphi(C_2^2 - C_4^2)}{4} (y_B^2 - y_A^2) - \frac{E\varepsilon_0(C_2^2 - C_4^2)}{2} (y_B - y_A)
\end{aligned} \tag{C.26}$$

Quando existe uma rotação ( $\theta \neq 0$ ), as ordenadas dos pontos podem ser escritas como:

$$y_1 = \frac{b}{2} \cos \theta - \frac{h}{2} \sin \theta$$

$$y_2 = -\frac{b}{2} \sin \theta - \frac{h}{2} \cos \theta$$

$$y_3 = -y_1$$

$$y_4 = -y_2$$

## C.5 CASO H

$$\begin{aligned}
N &= \int_{A_c} \sigma dA \\
N &= \int_{y_2}^{y_1} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) dx dy + \int_{y_1}^{y_3} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) dx dy \\
&+ \int_{y_3}^{y_4} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}} (-\sigma_p) dx dy
\end{aligned} \tag{C.27}$$

$$\begin{aligned}
M_x &= - \int_{A_c} \sigma y dA \\
M_x &= - \int_{y_2}^{y_1} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) y dx dy - \int_{y_1}^{y_3} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) y dx dy \\
&- \int_{y_3}^{y_4} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}} (-\sigma_p) y dx dy
\end{aligned} \tag{C.28}$$

$$\begin{aligned}
M_y &= - \int_{A_c} \sigma x dA \\
M_y &= - \int_{y_2}^{y_1} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) x dx dy - \int_{y_1}^{y_3} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) x dx dy \\
&- \int_{y_3}^{y_4} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}} (-\sigma_p) x dx dy
\end{aligned} \tag{C.29}$$

## C.6 CASO I

$$\begin{aligned}
N &= \int_{A_c} \sigma dA \\
N &= \int_{y_2}^{y_{p-}} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (\sigma_p) dx dy + \int_{y_{p-}}^{y_1} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) dx dy \\
&+ \int_{y_1}^{y_3} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) dx dy + \int_{y_3}^{y_4} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) dx dy
\end{aligned} \tag{C.30}$$

$$\begin{aligned}
M_x &= - \int_{A_c} \sigma y dA \\
M_x &= - \int_{y_2}^{y_{p-}} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (\sigma_p) y dx dy - \int_{y_{p-}}^{y_1} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) y dx dy \\
&- \int_{y_1}^{y_3} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) y dx dy - \int_{y_3}^{y_4} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) y dx dy
\end{aligned} \tag{C.31}$$

$$\begin{aligned}
M_y &= - \int_{A_c} \sigma x dA \\
M_y &= - \int_{y_2}^{y_{p-}} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (\sigma_p) x dx dy - \int_{y_{p-}}^{y_1} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) x dx dy \\
&\quad - \int_{y_1}^{y_3} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) x dx dy - \int_{y_3}^{y_4} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) x dx dy
\end{aligned} \tag{C.32}$$

## C.7 CASO J

$$\begin{aligned}
N &= \int_{A_c} \sigma dA \\
N &= \int_{y_2}^{y_{p-}} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (\sigma_p) dx dy + \int_{y_{p-}}^{y_1} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) dx dy \\
&\quad + \int_{y_1}^{y_3} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) dx dy + \int_{y_3}^{y_{p+}} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) dx dy \\
&\quad + \int_{y_{p+}}^{y_4} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}} (-\sigma_p) dx dy
\end{aligned} \tag{C.33}$$

$$\begin{aligned}
M_x &= - \int_{A_c} \sigma y dA \\
M_x &= - \int_{y_2}^{y_{p-}} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (\sigma_p) y dx dy - \int_{y_{p-}}^{y_1} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) y dx dy \\
&\quad - \int_{y_1}^{y_3} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) y dx dy - \int_{y_3}^{y_{p+}} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) y dx dy \\
&\quad - \int_{y_{p+}}^{y_4} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}} (-\sigma_p) y dx dy
\end{aligned} \tag{C.34}$$

$$\begin{aligned}
M_y &= - \int_{A_c} \sigma x dA \\
M_y &= - \int_{y_2}^{y_{p-}} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (\sigma_p) x dx dy - \int_{y_{p-}}^{y_1} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) x dx dy \\
&\quad - \int_{y_1}^{y_3} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) x dx dy - \int_{y_3}^{y_{p+}} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) x dx dy \\
&\quad - \int_{y_{p+}}^{y_4} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}} (-\sigma_p) x dx dy
\end{aligned} \tag{C.35}$$

## C.8 CASO K

$$\begin{aligned}
N &= \int_{A_c} \sigma dA \\
N &= \int_{y_2}^{y_1} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (\sigma_p) dx dy + \int_{y_1}^{y_{p-}} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (\sigma_p) dx dy \\
&+ \int_{y_{p-}}^{y_{p+}} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) dx dy + \int_{y_{p+}}^{y_3} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (-\sigma_p) dx dy \\
&+ \int_{y_3}^{y_4} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}} (-\sigma_p) dx dy
\end{aligned} \tag{C.36}$$

$$\begin{aligned}
M_x &= - \int_{A_c} \sigma y dA \\
M_x &= - \int_{y_2}^{y_1} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (\sigma_p) y dx dy - \int_{y_1}^{y_{p-}} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (\sigma_p) y dx dy \\
&- \int_{y_{p-}}^{y_{p+}} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) y dx dy - \int_{y_{p+}}^{y_3} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (-\sigma_p) y dx dy \\
&- \int_{y_3}^{y_4} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}} (-\sigma_p) y dx dy
\end{aligned} \tag{C.37}$$

$$\begin{aligned}
M_y &= - \int_{A_c} \sigma x dA \\
M_y &= - \int_{y_2}^{y_1} \int_{-\frac{y}{\tan \theta} - \frac{h}{2 \sin \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (\sigma_p) x dx dy - \int_{y_1}^{y_{p-}} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (\sigma_p) x dx dy \\
&- \int_{y_{p-}}^{y_{p+}} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (E \varepsilon_0 - E \varphi y) x dx dy - \int_{y_{p+}}^{y_3} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{y \tan \theta + \frac{b}{2 \cos \theta}} (-\sigma_p) x dx dy \\
&- \int_{y_3}^{y_4} \int_{y \tan \theta - \frac{b}{2 \cos \theta}}^{-\frac{y}{\tan \theta} + \frac{h}{2 \sin \theta}} (-\sigma_p) x dx dy
\end{aligned} \tag{C.38}$$

## APÊNDICE D – MATERIAL CONCRETO

O concreto, pode ser reescrita juntando Equação 5.6 e Equação 4.1:

$$\sigma_c(y) \begin{cases} 0, y < d \\ -\sigma_{cd} \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{c2}} \left( 2 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{c2}} \right) + \frac{2\varphi}{\varepsilon_{c2}} \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{c2}} - 1 \right) y - \frac{\varphi^2}{\varepsilon_{c2}^2} y^2 \right), d \leq y \leq y_p \\ -\sigma_{cd}, y_p \leq y \leq \frac{h}{2} \end{cases} \quad (D.1)$$

Onde,

$$y_p = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{c2}}{\varphi} \quad (D.2)$$

### D.1 CASO A A F:

Para o concreto, os esforços são calculados por:

$$N = \int_{A_c} \sigma dA = \sigma_c \int_{-h/2}^{h/2} b dy = \sigma_c b h \quad (D.3)$$

$$M_x = - \int_{A_c} \sigma y dA = -\sigma_c \int_{-h/2}^{h/2} y b dy = 0 \quad (D.4)$$

$$M_y = - \int_{A_c} \sigma x dA = -\sigma_c \int_{-b/2}^{b/2} x h dx = 0 \quad (D.5)$$

Para os reforços pontuais, os esforços são calculados por:

$$N = N_{concreto} + N_{ao} = N = \sigma_c b h + \sum_i^4 A_i \sigma_{ef} \quad (D.6)$$

$$M_x = M_{x,concreto} + M_{x,ao} = M_x = 0 - \sum_i^4 A_i \sigma_{ef} y_i = M_x = - \sum_i^4 A_i \sigma_{ef} y_i \quad (D.7)$$



$$M_y = M_{y,concreto} + M_{y,ao} = M_x = 0 - \sum_i^4 A_i \sigma_{ef} x_i M_x = - \sum_i^4 A_i \sigma_{ef} x_i \quad (D.8)$$

## D.2 CASOS G A J:

Para o concreto, os esforços são calculados por:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_{A_c} \sigma dA \\
 N &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_c b dy \\
 &= \int_d^{y_1} -\sigma_{cd} \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} \left( 2 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} \right) + \frac{2\varphi}{\epsilon_{c2}} \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} - 1 \right) y - \frac{\varphi^2}{\epsilon_{c2}^2} y^2 \right) b dy \\
 &\quad + \int_{y_1}^{y_2} -\sigma_{cd} b dy \\
 &= -\sigma_{cd} b \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} \left( 2 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} \right) y + \frac{\varphi}{\epsilon_{c2}} \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} - 1 \right) y^2 - \frac{\varphi^2}{3\epsilon_{c2}^2} y^3 \right) \Big|_d^{y_1} \\
 &\quad - \sigma_{cd} b y \Big|_{y_1}^{y_2} \\
 N &= -\sigma_{cd} b \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} \left( 2 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} \right) (y_1 - d) + \frac{\varphi}{\epsilon_{c2}} \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} - 1 \right) (y_1^2 - d^2) - \frac{\varphi^2}{3\epsilon_{c2}^2} (y_1^3 - d^3) \right) \\
 &\quad - \sigma_{cd} b (y_2 - y_1)
 \end{aligned} \quad (D.9)$$

$$\begin{aligned}
M_x &= - \int_{A_c} \sigma_y dA \\
M_x &= - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_c y b dy \\
&= - \int_d^{y_1} -\sigma_{cd} \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} \left( 2 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} \right) + \frac{2\varphi}{\epsilon_{c2}} \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} - 1 \right) y - \frac{\varphi^2}{\epsilon_{c2}^2} y^2 \right) b y dy \\
&= - \int_{y_1}^{y_2} -\sigma_{cd} b y dy \\
&= \sigma_{cd} b \left( \frac{\epsilon_0}{2\epsilon_{c2}} \left( 2 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} \right) y^2 + \frac{2\varphi}{3\epsilon_{c2}} \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} - 1 \right) y^3 - \frac{\varphi^2}{4\epsilon_{c2}^2} y^4 \right) \Big|_d^{y_1} \\
&+ \frac{1}{2} \sigma_{cd} b y^2 \Big|_{y_1}^{y_2} \\
M_x &= \sigma_{cd} b \left( \frac{\epsilon_0}{2\epsilon_{c2}} \left( 2 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} \right) (y_1^2 - d^2) + \frac{2\varphi}{3\epsilon_{c2}} \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} - 1 \right) (y_1^3 - d^3) - \frac{\varphi^2}{4\epsilon_{c2}^2} (y_1^4 - d^4) \right) \\
&+ \frac{1}{2} \sigma_{cd} b (y_2^2 - y_1^2)
\end{aligned} \tag{D.10}$$

$$\begin{aligned}
M_y &= - \int_{A_c} \sigma_x dA \\
M_y &= - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_c x dy \\
&= - \int_d^{y_1} \int_{-b/2}^{b/2} -\sigma_{cd} \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} \left( 2 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} \right) + \frac{2\varphi}{\epsilon_{c2}} \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} - 1 \right) y - \frac{\varphi^2}{\epsilon_{c2}^2} y^2 \right) x dx dy \\
&= - \int_{y_1}^{y_2} \int_{-b/2}^{b/2} -\sigma_{cd} x dx dy \\
&= - \left( \int_{-b/2}^{b/2} x dx \right) \left( \int_d^{y_1} -\sigma_{cd} \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} \left( 2 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} \right) + \frac{2\varphi}{\epsilon_{c2}} \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} - 1 \right) y - \frac{\varphi^2}{\epsilon_{c2}^2} y^2 \right) dy \right) \\
&+ \sigma_{cd} \left( \int_{-b/2}^{b/2} x dx \right) \left( \int_{y_1}^{y_2} dy \right) \\
&= - \left( \int_{-b/2}^{b/2} x dx \right) \left( \int_d^{y_1} -\sigma_{cd} \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} \left( 2 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} \right) + \frac{2\varphi}{\epsilon_{c2}} \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} - 1 \right) y - \frac{\varphi^2}{\epsilon_{c2}^2} y^2 \right) dy \right) \\
&+ \sigma_{cd} \left( \int_{-b/2}^{b/2} x dx \right) \left( \int_{y_1}^{y_2} dy \right) \\
&= - \left( \frac{x^2}{2} \Big|_{-b/2}^{b/2} \right) \left( \int_d^{y_1} -\sigma_{cd} \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} \left( 2 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} \right) + \frac{2\varphi}{\epsilon_{c2}} \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{c2}} - 1 \right) y - \frac{\varphi^2}{\epsilon_{c2}^2} y^2 \right) dy \right) \\
&+ \sigma_{cd} \left( \frac{x^2}{2} \Big|_{-b/2}^{b/2} \right) \left( \int_{y_1}^{y_2} dy \right) \\
M_y &= 0
\end{aligned} \tag{D.11}$$

Onde,

$y_1$  e  $y_2$  vão depender da posição da linha neutra e do  $y_p$  e  $y_c$

Somente o comportamento parabólico:

Se  $y_p \geq h/2$ :  $y_1 = y_2 = h/2$

Comportamento parabólico junto com a constante:

Se  $y_p < h/2$ :  $y_1 = y_p$  e  $y_2 = y_c$

Analogamente aos testes anteriores, para os 2 casos anteriores, pode adicionar 4 barras de aço, assim das expressões anteriores, é adicionado para cada esforço os termos correspondentes do reforço pontual:

$$\begin{aligned}
 N &= N_{concreto} + N_{ao} \\
 N &= -\sigma_{cd}b \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{c2}} \left( 2 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{c2}} \right) (y_1 - d) + \frac{\varphi}{\varepsilon_{c2}} \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{c2}} - 1 \right) (y_1^2 - d^2) \right) \\
 &\quad - \sigma_{cd}b \left( \frac{\varphi^2}{3\varepsilon_{c2}^2} (y_1^3 - d^3) \right) - \sigma_{cd}b (y_2 - y_1) + \sum_i^n A_i \sigma_{ef}
 \end{aligned} \tag{D.12}$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= M_{x,concreto} + M_{x,ao} \\
 M_x &= \sigma_{cd}b \left( \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon_{c2}} \left( 2 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{c2}} \right) (y_1^2 - d^2) + \frac{2\varphi}{3\varepsilon_{c2}} \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{c2}} - 1 \right) (y_1^3 - d^3) \right) \\
 &\quad \sigma_{cd}b \left( -\frac{\varphi^2}{4\varepsilon_{c2}^2} (y_1^4 - d^4) \right) + \frac{1}{2} \sigma_{cd}b (y_2^2 - y_1^2) - \sum_i^n A_i \sigma_{ef} y_i
 \end{aligned} \tag{D.13}$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= M_{y,concreto} + M_{y,ao} \\
 M_y &= -\sum_i^n A_i \sigma_{ef} x_i
 \end{aligned} \tag{D.14}$$