



Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Programa de Pós-Graduação em Física
Tese de Doutorado

Efeitos de reação de radiação em partículas aceleradas por potenciais ponderomotivos

Felipe Russman

Tese¹ apresentada em cumprimento parcial do requisito para o grau de Doutor em Física na Universidade Federal do Rio Grande do Sul-UFRGS sob orientação do Prof. Dr. Felipe Rizzato.

Porto Alegre, RS, Brasil
Junho de 2022

¹Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq



Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Programa de Pós-Graduação em Física
Tese de Doutorado

Radiation reaction effects on accelerated particles by ponderomotive potentials

Felipe Russman

Advisor: Prof. Dr. Felipe Rizzato

Porto Alegre, RS, Brazil
July 2022

Resumo

Palavras-chave: onda eletromagnética, aceleradores, dinâmica não linear, potencial ponderomotivo, laser

Na presente tese estuda-se a aceleração de partículas por ondas eletrostáticas e pulsos eletromagnéticos lentamente modulados e de alta frequência. Os efeitos da Reação de Radiação foram considerados no estudo da dinâmica das partículas submetidas à ação das ondas eletrostáticas. Desenvolve-se um formalismo hamiltoniano médio capaz de descrever as particularidades da dinâmica correspondente, tanto para as ondas eletrostáticas considerando a reação de radiação quanto para os pulsos eletromagnéticos. Se pode prever satisfatoriamente medidas importantes da dinâmica, como o tempo de contato entre a onda e a partícula, o que é decisivo para a importância da consideração dos efeitos radiativos-dissipativos, bem como condições necessárias e suficientes para a aceleração eficiente.

Abstract

key-words: electromagnetic wave, accelerators, nonlinear dynamics, ponderomotive potential, laser

In the present thesis, we study the acceleration of particles by electrostatic waves and electromagnetic pulses spatially localized and of high frequency. The effects of the Radiation Reaction were considered in the study of the dynamics of particles under the action of electrostatic waves. A mean Hamiltonian formalism is developed capable of describing the particularities of the corresponding dynamics, both for electrostatic waves considering the radiation reaction and for the electromagnetic pulses. One can satisfactorily predict important dynamics measures, such as the contact time between the wave and the particle, which is decisive for the importance of considering radiative-dissipative effects, as well as necessary and sufficient conditions for efficient acceleration.

Agradecimentos

Agradeço

aos meus pais, pelo presente da vida;

ao meu orientador, Prof. Dr. Felipe Rizzato, pela excelente orientação, amigável atenção e dedicação, pela agradável convivência, amizade e pelos valiosos ensinamentos da vida profissional;

aos colegas de grupo de trabalho, em especial à Ivanessa Almansa, ao Samuel Marini e ao Eduardo Peter, pelas prolíferas conversas, ajuda sempre presente e amizade;

à Universidade Federal do Rio Grande do Sul, por ser há anos uma segunda casa;

ao CNPq, pelo fomento

e, finalmente, à sociedade brasileira, que financia o ensino público e de qualidade.

Sumário

Sumário	iv
Lista de Figuras	vi
1 Introdução	2
2 Considerações iniciais: um pouco da história da reação de radiação	5
2.1 A dinâmica de partículas carregadas	7
2.2 A autoforça e a reação de radiação	9
2.3 Equações de Lorentz-Abraham-Dirac	9
2.4 Equações de Landau-Lifshitz	10
2.5 São mesmo importantes?	12
3 Aceleração por ondas eletrostáticas, inclusa a reação de radiação	14
3.1 O modelo de potencial eletrostático	14
3.1.1 Potencial eletrostático unidimensional	14
3.1.2 Equações LL restritas a ondas eletrostáticas	15
3.1.3 Formalismo hamiltoniano inclusa a reação de radiação	17
3.1.4 Análise da dinâmica do modelo	23
3.1.5 Efeitos da RR no sistema ressonante	23
3.1.6 Efeitos da RR no sistema não ressonante	27
3.2 Aproximação ponderomotiva	32
3.2.1 Dinâmica ponderomotiva	33
3.2.2 Média temporal final das equações de movimento inclusa a reação de radiação	38
3.2.3 Ganho de energia cinética	44
3.2.4 Resultados Numéricos	49

4	Aceleração por pulsos eletromagnéticos, exclusiva a radiação	56
4.1	Sobre a aceleração por pulsos eletromagnéticos	56
4.1.1	O modelo de potencial vetor circularmente polarizado	58
4.1.2	O modelo de potencial vetor linearmente polarizado	63
4.2	Aproximação ponderomotiva para o caso do potencial vetor linearmente polarizado	64
4.2.1	Estudo analítico da aproximação ponderomotiva	67
4.2.2	Análise numérica da aproximação ponderomotiva	68
5	Considerações finais e perspectivas futuras	75
5.1	Modelo de aceleração por pulsos eletromagnéticos incluso a radiação	75
5.2	Conclusão	76
	Referências Bibliográficas	78
A		85

Lista de Figuras

3.1	Ganho de energia cinética normalizado. Parâmetros: $\sigma = 100$, $\alpha = 0.81$, $\varphi_0 = 1.0$ e $v_0 = 0.55443000\alpha^{-1/2}$	25
3.2	Velocidade final normalizada pela velocidade da luz <i>vs.</i> tempo. Parâmetros: $\sigma = 100$, $\alpha = 0.81$, $\varphi_0 = 1.0$ e $v_0 = 0.55443001\alpha^{-1/2}$	26
3.3	Velocidade final normalizada pela velocidade da luz <i>vs.</i> tempo. Parâmetros: $\sigma = 100$, $\alpha = 0.81$, $\varphi_0 = 1.0$ e $v_0 = 0.55443002\alpha^{-1/2}$	27
3.4	Mapa de parâmetros: velocidade final <i>vs.</i> τ <i>vs.</i> φ_0 . Demais parâmetros utilizados: $\sigma = 100$, $\alpha = 1.0$ e $v_0 = 0.3$	28
3.5	Mapa de parâmetros: velocidade final <i>vs.</i> τ <i>vs.</i> φ_0 . Demais parâmetros utilizados: $\sigma = 100$, $\alpha = 1.0$ e $v_0 = 0.4$	29
3.6	Mapa de parâmetros: velocidade final <i>vs.</i> τ <i>vs.</i> φ_0 . Demais parâmetros utilizados: $\sigma = 100$, $\alpha = 1.0$ e $v_0 = 0.5$	30
3.7	Mapa de parâmetros: ganho de energia cinética normalizada <i>vs.</i> τ <i>vs.</i> φ_0 . Demais parâmetros utilizados: $\sigma = 1000$, $\alpha = 1.0$ e $v_0 = 0.5$	31
3.8	Gráfico da energia potencial fictícia	47
3.9	Velocidade <i>versus</i> tempo: sistema original em azul, média calculada por janela móvel do sistema original em preto e o modelo teórico em vermelho. Parâmetros: $\varphi_0 = 0.5$, $\tau = 0.0025$, $v_0 = 0.2$ e $\sigma = 10^3$	50
3.10	Ganho de energia cinética <i>versus</i> amplitude máxima de potencial. A curva contínua em preto é a previsão do modelo teórico enquanto os pontos em cores (cada cor fazendo corresponder a uma velocidade diferente de injeção) são calculados pelo sistema original (3.27)&(3.28). Parâmetros: $\tau = 0.0025$ e $\sigma = 10^3$	51
3.11	Velocidade <i>versus</i> tempo: sistema original em azul, média calculada por janela móvel do sistema original em preto e o modelo teórico em vermelho. Parâmetros: $\varphi_0 = 0.5$, $\tau = 0.0025$, $v_0 = 0.2$ e $\sigma = 10^3$	52

3.12	Mapa de parâmetros do ganho de energia cinética normalizada <i>vs.</i> τ <i>vs.</i> φ_0 idêntico ao mapa da Figura 3.5, mas com o acréscimo das curvas em branco que são previsões teóricas de (3.111).	54
3.13	Mapa de parâmetros do ganho de energia cinética normalizada <i>vs.</i> τ <i>vs.</i> φ_0 idêntico ao mapa da Figura 3.6, mas com o acréscimo das curvas em branco que são previsões teóricas de (3.111).	55
4.1	Velocidade <i>versus</i> tempo. Duas curvas representando o regime passante ($A_0 = 2.064$, curva traço-pontilhada em marrom) e regime acelerado ($A_0 = 2.065$, curva sólida em ciano) para $v_g = 0.9$	62
4.2	Evolução da concordância entre a aproximação ponderomotiva e o sistema completo representada por gráficos de velocidade <i>versus</i> tempo para a partícula inicialmente em repouso. Consideramos $v_g = 0,9$ e $\sigma = 100$ em todos os casos, juntamente com $A_0 = 1.0$ no quadro (a), $A_0 = 1.9$ no quadro (b) e $A_0 = 2.064$ no quadro (c). As simulações dos sistema completo são representadas pela linha preta sólida. A linha vermelha tracejada representa a solução numérica do modelo ponderomotivo corrigido desenvolvido no presente capítulo. O modelo ponderomotivo usual não corrigido é representado pela linha azul pontilhada.	69
4.3	Evolução da concordância entre as soluções numéricas dos gráficos de velocidade <i>versus</i> tempo para uma partícula inicialmente estacionária. Considerou-se $v_g = 0.9$ e $A_0 = 2.064$ em ambos quadros, com $\sigma = 4$ no quadro (a) e $\sigma = 1000$ no quadro (b). A simulação do sistema completo está exibida pelo traço preto sólido, enquanto o traço vermelho tracejado representa o sistema ponderomotivo corrigido e o azul pontilhado o sistema ponderomotivo incorreto. Para diferentes escalas, σ 's muito diferentes, a concordância do modelo ponderomotivo corrigido com o sistema completo é mais satisfatória do que com o sistema ponderomotivo incorreto.	70
4.4	Tempo médio de interação <i>versus</i> A_0 para as simulações dos sistema completo (linha preta sólida), ponderomotivo corrigido (linha vermelha tracejada) e ponderomotivo incorreto (linha azul pontilhada). Considerou-se $v_g = 0.9$ e $\sigma = 100$ nas três simulações.	71

-
- 4.5 Tempo médio de interação *versus* A_0 para as simulações dos sistema completo (linha preta sólida), ponderomotivo corrigido (linha vermelha tracejada) e ponderomotivo incorreto (linha azul pontilhada). Considerou-se $v_g = 0.9$ e $\sigma = 100$ nas três simulações. Usou-se para o quadro (a) $v_g = 0.9$ e $v_0 = 0.6$, para o (b) $v_g = 0.99$ e $v_0 = 0$; enquanto que para o (c) $v_g = 0.99$ e $v_0 = 0.6$ 72
- 4.6 Amplitude crítica como função de v_g para as simulações do sistema completo (pontos em preto), ponderomotivo corrigido (linha vermelha tracejada) e ponderomotivo incorreto (linha azul pontilhada). 74

Capítulo 1

Introdução

A aceleração de partículas carregadas por ondas eletromagnéticas de alta frequência e espacialmente localizadas tem sido investigada por alguns trabalhos recentes e divulgados em: [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. Em tais sistemas, o mecanismo de aceleração envolve uma etapa inicial ponderomotiva capaz de acelerar partículas - inicialmente a baixas velocidades - até a velocidade de fase das ondas, quando esta é menor que a velocidade da luz. Neste ponto, as partículas ressonantes são confinadas entre os vales do campo e acabam sendo impulsionadas e ejetadas com energias muito maiores do que as suas iniciais [8, 9, 10, 11, 12].

A viabilidade de ressonância entre as ondas e as partículas, evidentemente, exige que a velocidade de fase das ondas seja ajustada para um valor inferior ao da velocidade da luz. Somente assim é possível as partículas alcançarem a velocidade de fase das ondas, a partir de onde se inicia o processo de aceleração [5, 3]. Tal ajuste é uma dificuldade técnica, entretanto, e de modo a evitá-lo é de grande importância que se investigue a aceleração quando se pode trabalhar com o mínimo possível de procedimentos no processamento dos modos das ondas.

Ao serem aceleradas, partículas carregadas emitem radiação. A ação dessa radiação nas partículas é chamada de Reação de Radiação, cuja intensidade, sobretudo, é determinada pela razão entre o raio clássico do elétron e o comprimento de onda das ondas que o aceleram [13, 14]. Nos últimos anos esse quociente tem sido encarado como uma quantidade pequena, desprezável a ponto de não serem realmente relevantes os efeitos da reação de radiação à dinâmica das partículas.

Em recentes experimentos, entretanto, a aplicação de campos eletromagnéticos intensos e de alta frequência amplia os efeitos da força de reação muito significativamente. A dinâmica, portanto, das partículas aceleradas por tais campos é afetada, o que torna a investigação de tais efeitos muito importante para uma descrição

acurada da aceleração. [15, 16, 17, 18, 19]

É natural esperar que a emissão de radiação pelas partículas aceleradas seja contraproducente para a sua aceleração, uma vez que o fazem às custas de sua energia cinética e momentum linear. Porém, a característica importante da reação à radiação na discussão presente no Capítulo 3 sustenta-se no fato de que, longe de degradar o processo de aceleração, é possível que a força de reação, na verdade, *ajude* o processo. Isso é muito bem-vindo, principalmente quando a aceleração por confinamento ressonante citada anteriormente não é mais possível.

Uma descrição analítica acurada do estágio ponderomotivo tem lugar em teorias de perturbação, onde a escala rápida de tempo das ondas é removida consistentemente por uma sequência de transformações canônicas. Procedimentos de tomadas de médias não canônicas ou técnicas lagrangianas de cálculo de médias não reproduzem exatamente o que é visto nas simulações.

Para extrair, então, informações acuradas da dinâmica completa dos sistemas em consideração, desenvolveu-se um formalismo canônico modificado a fim de tratar a reação de radiação incorporando-a canonicamente. Os bons resultados obtidos nos incentivam a adaptar tal procedimento a outros sistemas relevantes.

O formalismo envolve uma transformação canônica inicial, a qual cabe, e é apenas capaz de, suprimir a dependência temporal dos termos referentes à força externa proveniente dos campos da onda em consideração. Nesses, não há participação da reação de radiação. Àqueles em que há, os remanescentes e ainda explicitamente dependentes do tempo, os quais concernem à reação, é empregado um processo final de média temporal que obtém sucesso em substituí-los por termos que variam na escala lenta de tempo, na escala do movimento médio do sistema.

No Capítulo 2 são apresentadas algumas considerações iniciais sobre o contexto histórico da reação de radiação, o que se sabe até o presente.

Em seguida, no Capítulo 3, introduz-se o modelo de potencial para uma onda eletrostática viajando à velocidade da luz, o qual se quer mostrar os efeitos da reação de radiação via implementação da teoria mais aceita. Apresenta-se o formalismo canônico que trata de exibir a dinâmica média do modelo e através do qual se extrai informações importantes acerca da dinâmica completa das partículas radiativas. Mostramos, assim, o auxílio em acelerar partículas pela força de reação de radiação. O modelo proposto é simples o suficiente para ilustrar o método de análise, mas genérico o bastante para representar não somente a aceleração via ondas eletrostáticas mas também, por exemplo, a aceleração através de *beat waves* formadas por modos colineares de lasers.

No Capítulo 4 investigamos a dinâmica de partículas carregadas sob ação de pacotes de ondas eletromagnéticas (pulsos) de alta frequência, espacialmente modulados e livres dos efeitos da reação de radiação. Estabelecemos uma descrição ponderomotiva do processo de aceleração via transformações canônicas, de modo semelhante ao Capítulo 3 e em certo sentido superior às abordagens convencionais, donde se pode prever muitos comportamentos-chave. Visando o estudo futuro dos efeitos da reação de radiação em tais sistemas, mostramos que a abordagem ponderomotiva canônica proposta prevê com acurácia o tempo médio de interação das partículas com o pulso, o que é decisivo para a importância ou não da consideração da reação de radiação.

Por fim, no Capítulo 5, resumimos os principais resultados, apresentamos nossas conclusões e perspectivas futuras do nosso trabalho.

Capítulo 2

Considerações iniciais: um pouco da história da reação de radiação

O fato de partículas eletricamente carregadas emitirem radiação quando são aceleradas [20] é comprovado diariamente pelas telecomunicações. É lamentável que Maxwell não tenha vivido por tempo o suficiente para presenciar a construção dos primeiros protótipos das antenas. Apenas 8 anos após o seu prematuro falecimento, aos 48 anos de idade [21], dispositivos capazes de gerar e captar os fenômenos ondulatórios de natureza eletromagnética, previstos anos antes e apresentados em 1873 na sua formulação do eletromagnetismo, o famoso *Treatise* [22], tornaram-se realidade.

Os primeiros cálculos da energia eletromagnética radiada por correntes elétricas alternadas foram feitos por FitzGerald [23] no início da década de 80 do século XIX. Ao final dela, os experimentos com circuitos elétricos indutivos iniciados por Hertz [24, 25, 26] comprovaram, de uma vez por todas, a existência de tal radiação. Inaugurou-se, a partir de então, a maravilhosa era das torres de rádio e dos satélites artificiais.

Tão logo apareceram, os experimentos de Hertz tiveram grande impacto na comunidade científica. Atraíram a atenção de muitos visionários. Um dos pioneiros no desenvolvimento de transmissores e detectores de ondas de rádio, o físico e inventor inglês Lodge [27], concebe uma resistência associada aos circuitos elétricos radiativos [28]. O próprio Maxwell, é verdade, já discute nos arts. 792-793 do seu *Treatise* possíveis efeitos de uma espécie de pressão de radiação, mas não o faz para possíveis reações em resposta a esta. Foi Poincaré, outro grande nome que se interessou pelo assunto, quem considerou em seus trabalhos publicados em meados da década de 90 do séc. XIX a existência de um amortecimento ("*amortissement*") dos osciladores de Hertz devido a emissão de energia na forma de radiação [29, 30].

Atualmente, entende-se a reação de radiação como um fenômeno elementar, que concerne a partículas eletricamente carregadas em movimento acelerado. Mas as indicações neste sentido não foram diretas.

Dois anos antes à publicação do *Treatise*, Maxwell publica o livro *Theory of Heat* [31] onde há uma categórica defesa da natureza molecular da matéria¹. Tal visão não é compartilhada, entretanto, pela natureza da carga elétrica na sua eletrodinâmica. Como fica claro na fonte da eletricidade em suas Equações, para ele, a carga elétrica tratava-se de uma distribuição contínua. Estava associada a “tensões” no éter, ainda em consideração na época. A teoria original de Maxwell era uma teoria macroscópica. Em contraposição, é justo dizer, na eletrodinâmica de Weber [32, 27] as partículas elementares carregadas já tinham um papel central.

Mas logo o entendimento da carga elétrica enquanto propriedade elementar de partículas tomaria grande impulso. Ao final do século XIX, Thomson, quem teve acesso a uma melhor aparelhagem para produzir gases extremamente rarefeitos, mostrou que os assim chamados raios catódicos (experimentos iniciados há mais de 60 anos desta época por Faraday), além de serem defletidos por campos magnéticos, como havia mostrado Crookes alguns anos antes [33], eram também defletidos por campos elétricos. Defendeu-se a partir daí que tais raios, na verdade, tratavam-se de feixes de partículas eletricamente carregadas cuja massa era cerca de duas mil vezes menor do que a do átomo mais leve, o hidrogênio [34].

A presença do feixe ser independente dos materiais utilizados nos experimentos e a pequenez de sua constituição levaram à dedução de que tais partículas desconhecidas eram inerentes a toda a matéria conhecida. O “átomo da eletricidade” [35], o *elétron*, caiu, enfim, nas graças da comunidade científica e assim permanece até os dias de hoje.

A divergência presente no campo eletrostático de Coulomb [36], no entanto, já conhecida há mais de 100 anos à época do descobrimento do elétron, levada às últimas consequências, impede a existência de cargas exatamente pontuais, assim consideradas para fins práticos pela teoria clássica. E é aqui onde os problemas começam.

Considerando uma carga elétrica estendida, isto é, não pontualmente localizada, o campo eletromagnético gerado por ela ao mover-se deve poder agir sobre ela mesma. Esse tipo de autointeração não ser usualmente inclusa nas diversas hipóteses de formulações é, na visão de alguns [37], uma inconsistência da teoria

¹“*Todos os corpos consistem de um número finito de pequenas partes chamadas moléculas. Cada molécula consiste de uma quantidade definida de matéria, que é exatamente a mesma para todas as moléculas da mesma substância*”. Trecho da página 286 de [31]. Tradução do autor.

eletromagnética clássica.

Mas o fato é que o movimento de partículas carregadas imersas em campos de forças externas e daí aceleradas, necessariamente, envolve a emissão de radiação.

Além de o fazer às custas do consumo da energia cinética da partícula, tal fenômeno causa o surgimento de uma espécie de força de recuo, como o coice de uma arma, uma força de *reação* à radiação emitida. E para tal efeito é crucial a aceleração. Uma vez aceleradas, as diversas partes desta versão estendida do elétron exercem forças desiguais umas nas outras. O efeito combinado é uma força líquida, uma força que o elétron exerce *sobre si mesmo*. Sendo assim, a dinâmica dessas pequenas fontes de radiação é determinada, em parte, pela maneira como se dá a emissão de radiação e vice-versa. [38, 39, 40]

2.1 A dinâmica de partículas carregadas

Enquanto influenciadas pela reação de radiação começa com Lorentz, mesmo que fortuitamente. Ele tinha em mente uma teoria microscópica para a eletrodinâmica, em contraste à macroscópica de Maxwell. Ao que se sabe, ele é o primeiro a deduzir uma “autoforça”, uma força que é resultado dessa autointeração de partículas carregadas sobre si mesmas. Suas ideias são apresentado pela primeira vez no livro *La Théorie Électromagnétique de Maxwell et.* [41], de 1892, onde, assim como Weber, defendia a ideia da carga elétrica residir nas partículas.

Lorentz usa algumas aproximações dos potenciais retardados de Lorenz [42, 43] e Riemann [44, 45] e, considerando o movimento de uma partícula estendida de carga elétrica e , em regime não relativístico e segundo vibrações simples, obtém o resultado (equivalente, em notação mais atual e em unidades gaussianas)

$$\mathbf{F}_{auto} = m\tau_0\ddot{\mathbf{v}}, \quad \text{onde } \tau_0 = \frac{2e^2}{3mc^3}, \quad (2.1)$$

que tem lugar na equação de movimento

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{auto}, \quad (2.2)$$

sendo m a massa da partícula e \mathbf{F}_{ext} uma força externa a qual é submetida.

A quantidade indicada por τ_0 , surgida naturalmente na proposta, tem unidade de tempo. De fato, relaciona-se com o tempo que a luz demora para viajar a distância do raio clássico do elétron, $r_e = e^2/mc^2$, da ordem de 10^{-13} cm. Seu maior valor ocorre quando e e m referem-se, respectivamente, à carga elétrica e massa do

elétron, valendo aproximadamente $\tau_0 = 6.2 \times 10^{-24}$ s [55]. O fator $2/3$ é de natureza geométrica, decorre da consideração de um elétron esférico [40], e por essa razão é omissa da definição do raio clássico.

Ao exibir a expressão (2.1), Lorentz discorre: “*Se o movimento da partícula é uma vibração simples, o sinal das derivadas (aqui ele indica as componentes de $\ddot{\mathbf{v}}$) são opostos aos das velocidades (indica as componentes de \mathbf{v}). A força (menciona a eq. (2.1) em componentes) se opõe, portanto, ao movimento. É natural que exista tal “resistência”: sem ela, de fato, a partícula não poderia ceder energia ao éter.*”² Resistência, nada acerca de radiação é (ainda) mencionada por ele.

Outro grande nome surge na sequência. Inspirado pela discussão de Poincaré [29] e pelas análises feitas por Hertz [46], Planck, em meados de 1890, interessa-se pela relação entre o eletromagnetismo e os aspectos termodinâmicos da emissão e absorção de radiação. Ele publica um estudo [47] onde modela o circuito de Hertz (até então interpretado como um dipolo elétrico oscilante) como sendo um único elétron preso a uma mola elástica (fiel ao seu estilo...). Em regime estável, em equilíbrio térmico, argumenta, o trabalho feito pela força externa, o qual se presume ser de natureza eletromagnética, deve ser igual à energia irradiada pelo elétron. Pensa calcular daí tal energia e, em seguida, a força de reação responsável.

E assim ele o faz. Em regime ressonante, consideração feita por motivos evidentes, a frequência natural do sistema elétron-mola era, portanto, a mesma que a da força externa, considerada uma oscilação simples no modelo. Nessa caso, a amplitude da oscilação deveria crescer indefinidamente com o tempo. A fim de evitar tal situação julgada impossível, a equação de movimento, propõe ele, deveria incluir um termo extra, ao estilo de forças de atrito, que desse conta da perda de energia.

Através de uma (surpreendentemente simples) integração por partes, calcula o valor médio esperado ao longo de um período de oscilação para o trabalho realizado por essa força de amortecimento, ou “amortecimento radiativo” (*dämpfung durch strahlung*) como chamou³.

Comparando o resultado obtido com a expressão genérica do trabalho, conclui - embora não o cite - a mesma expressão (2.1) deduzida por Lorentz através de argumentos tão diferentes.

²Trecho de [41], p. 124-125. Tradução do autor.

³Planck utiliza da expressão que calcula a energia radiada continuamente pelo “ressonador” segundo o resultado de Hertz [46], mas é equivalente ao obtido por Larmor dois anos antes [48] conhecido atualmente como fórmula de Larmor.

2.2 A autoforça e a reação de radiação

Mostrar-se-iam conectadas não muito tempo depois. Os esforços em compreender a estrutura do elétron e a dinâmica subjacente a esta continuam após as contribuições de Planck.

No início do século XX, o físico Max Abraham segue os passos de Lorentz (mas com o adendo de um tratamento relativístico) e publica uma série de trabalhos onde se percebe estar deduzindo a relação entre a força de autointeração e a emissão de radiação decorrente do movimento acelerado do elétron [50, 51, 52]⁴.

Nesta mesma época, Lorentz parece estar desconfiando da relação entre a autoforça deduzida por ele anos atrás e radiação [49], assim como Abraham. A certeza de sua opinião vem em 1909 com a publicação de seu livro *The Theory of Electrons* [53]. Nesse trabalho, rededuz a expressão (2.1) considerando uma estrutura esférica para o elétron e, invertendo o argumento da integração por partes de Planck, o que também foi feito por Abraham, afirma:

*“Em muitos casos, a nova força representada por (2.1) pode ser denominada uma resistência ao movimento. (...) o trabalho realizado pela força é visto ser negativo, de modo que o nome resistência é então justificado. (...) Em todos os casos nos quais o trabalho da força (2.1) é negativo, a energia do elétron (se não mantida constante pela ação de outra causa) deve diminuir, e a do éter deve aumentar. Isso significa que existe uma radiação contínua da partícula para o exterior, como não se pode dizer que existe quando a velocidade é constante e o elétron simplesmente carrega seu campo junto com ela.”*⁵

2.3 Equações de Lorentz-Abraham-Dirac

Ou LAD *equations*, consagrou-se na literatura como nome oficial para referir-se a equação (2.1), tanto na presente versão não relativística quanto na relativística [55, 38]. Em 1938, Dirac publica um artigo [56] onde deriva o mesmo resultado de Lorentz e Abraham, donde seu nome é incluso, mas sem assumir uma estrutura para o elétron (o considera uma carga pontual, na verdade, conseguindo evitar as singularidades do campo coulombiano), sem fazer aproximações como as de Lorentz e de forma covariante.

⁴A seção 15 de [52] tem o título *Die Ruckwirkung der Strahlung auf ein bewegtes Elektron*. Se traduzirmos *Ruckwirkung der Strahlung* para “reação de radiação”, este seria o primeiro uso do termo. [54]

⁵Trecho de [53], edição de 1916, p. 49-50. Tradução do autor.

A principal característica das equações LAD, entretanto, é que não podem estar certas, mesmo a versão relativística (que pode ser obtida, por exemplo, da generalização relativística de Liénard para a fórmula de Larmor [57]).

Embora coerentemente derivadas da conservação da energia, é sabido que tais equações sofrem de sérios defeitos.

Primeiramente, são equações diferenciais de terceira ordem no tempo ao invés de segunda, como requer o estilo da mecânica newtoniana. Acontece, portanto, que a apresentação convencional de uma posição e velocidade iniciais não determina univocamente a trajetória da partícula. Ainda pior, o princípio da inércia não é cumprido uma vez que, na ausência de forças externas, a equação apresenta as chamadas “*runaway solutions*”, da forma $\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{c} e^{t/\tau_0}$, onde a velocidade cresce exponencialmente no tempo⁶. Um fator integrante pode transformar (1.2) em uma equação integro-diferencial onde tais soluções *runaway* são evitadas, porém, outra peculiaridade indesejada surge: o conceito tradicional de causalidade é violado, a aceleração da partícula em um dado instante mostra-se dependente da força agindo sobre ela em instantes posteriores⁷.

Outra característica em um sentido mais qualitativo é observada. É necessário que a partícula seja acelerada por uma força externa para que haja radiação emitida. Entretanto, segundo as equações de LAD, se a força externa é nula, o termo de radiação ainda sobrevive de maneira que a ideia de a autoforça ser induzida na partícula pela força externa se perde.

As discussões acerca da equação de movimento correta para as partículas clássicas aceleradas voltam às atenções nas vizinhanças dos anos 1950 [63]. No seu famoso livro, Landau e Lifshitz [13] reexaminam a questão e derivam uma equação a partir das equações LAD que são livres das inconsistências anteriormente citadas. Tais equações são conhecidas na literatura por

2.4 Equações de Landau-Lifshitz

Ou LL *equations*. Uma certa confiança instalou-se acerca delas por, embora serem derivadas das problemáticas equações LAD, em 2000, Spohn [59] mostrar através de um argumento matemático sofisticado que existe uma superfície crítica

⁶Uma discussão detalhada encontra-se em [38], p. 784. Esta solução foi encontrada já por Planck quem se referiu a ela como *keine Bedeutung* em [47], isto é, “sem sentido físico”. Mesmo que possa ser evitada mediante a escolha óbvia da constante $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, a previsão de tais soluções pela teoria é, na opinião de alguns autores [39], repugnante.

⁷Uma discussão detalhada encontra-se em [38], p. 796-797.

associada às equações LAD onde, restritas a ela, as soluções não são do tipo *runaway*, a aceleração vai a zero assintoticamente, e coincidem com as equações LL. [60]

Alguns autores, como Rohrlich, defendem categoricamente que a equação obtida por Landau e Lifshitz (e também defendida mais tarde por Ford e O’Connell [58]) é a versão correta da equação de movimento para a partícula clássica e relativística considerando os efeitos da radiação. “As equações LAD com seus três defeitos sérios têm sido usadas há um século. É tempo de trocá-las pela equação correta.” afirma Rohrlich em um artigo publicado em 2001 intitulado “*The correct equation of motion of a classical point charge*” [60] (tradução do autor).

Rohrlich defende em [61] que, embora as cargas elétricas sejam espacialmente estendidas devido a divergência presente no campo de Coulomb, para haver uma equação diferencial que descreva corretamente o movimento da partícula é necessário que seja possível tratá-la como pontual. Nesse sentido, é preciso fazer algumas exigências sobre a força externa porque na eletrodinâmica as forças externas podem envolver radiação cujo comprimento de onda seja pequeno o suficiente de maneira a perceber o tamanho finito da carga, o que é um problema.

A fim de contornar a dificuldade, é exigido que a força externa varie lentamente o suficiente através da distribuição da carga, de modo que não seja possível distinguir uma pontual de uma pequena mas finita. Para o caso não relativístico, tal exigência se cumpre uma vez que

$$\left| \tau_0 \frac{d}{dt} \mathbf{F}(t) \right| \ll |\mathbf{F}(t)| \quad (2.3)$$

onde $\mathbf{F}(t)$ é a força externa. A condição (2.3) garante que a força muda de maneira desprezável em uma distância da ordem de $c\tau_0$, de modo que a força “não percebe” a carga como uma distribuição espacialmente estendida.

É necessário desconsiderar sistematicamente termos de potências mais altas do que τ_0 na teoria para, assim, permanecemos nos territórios da física clássica. Por τ_0 ser tão pequeno, a consideração de potências mais altas entraria no domínio da mecânica quântica.

Por essa razão, o resultado derivado por Spohn é equivalente a tomar a aproximação $\tau_0 m \dot{\mathbf{v}} = \tau_0 \dot{\mathbf{F}}$. A versão não relativística das equações LAD, derivada imediatamente desse simples mas bem fundamentado argumento, é

$$m \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + \tau_0 \dot{\mathbf{F}}. \quad (2.4)$$

A equação (2.4) é de segunda ordem no tempo, obedece à Lei da Inércia e não viola a causalidade. [54, 63] A versão relativística difere pouco da presente, há apenas o

adendo de um fator de Lorentz, na verdade, como será apresentado na presente tese.

Embora a usemos, dentre outras formulações competidoras, é preciso ter em mente que, até os dias atuais, não existe uma descrição amplamente satisfatória de tais fenômenos radiativos. A dificuldade do problema toca noutro maior e mais fundamental, a própria natureza da partícula elementar.

Por fim, façamos uma última discussão. É verdade que muitíssimas situações são bem entendidas pela eletrodinâmica clássica negligenciando por completo a reação de radiação. Com isso, levanta-se a pergunta: os efeitos da reação de radiação

2.5 São mesmo importantes?

Ou melhor dizendo, na intenção de estabelecer uma descrição acurada da dinâmica de partículas, quando será inevitável considerá-los? A resposta da pergunta pode ser pensada, numa primeira investida, através de um critério simples considerando a energia dos sistemas.

Segundo a fórmula de Larmor, se uma partícula de um sistema sofre a ação de uma força externa durante um período de tempo, digamos T , o que lhe confere uma aceleração da ordem de a , então a energia irradiada por ela é da ordem de

$$E_{\text{rad}} \sim m\tau_0 a^2 T. \quad (2.5)$$

É natural esperar, portanto, que se a energia típica do sistema é muito superior ao valor de (2.5) os efeitos da reação de radiação podem ser negligenciados sem detrimento à acurácia da descrição do sistema. Caso contrário, os efeitos devem ser importantes.

Examinemos duas situações a fim de explorar tal critério. Primeiramente, o caso de uma partícula inicialmente em repouso. Se de súbito é acelerada por uma força externa durante um intervalo de tempo T , a partícula ganha energia na forma cinética da ordem de

$$E_{\text{par}} \sim m(aT)^2, \quad (2.6)$$

sendo a a aceleração adquirida por ela no processo.

Supondo de magnitudes semelhantes, comparando as energias (2.5) e (2.6), conclui-se

$$T \sim \tau_0, \quad (2.7)$$

isto é, que o tempo de ação da força deve ser da ordem do tempo característico τ_0 para serem importantes os efeitos da reação de radiação. A reação de radiação

pode modificar significativamente o movimento da partícula somente quando a força externa é aplicada tão subitamente quanto é o intervalo de tempo τ_0 .

Outra situação interessante é o caso de uma partícula em movimento periódico de frequência ω e amplitude A . Neste caso, a sua energia típica é da ordem de

$$E_{\text{par}} \sim m(\omega A)^2 \quad (2.8)$$

enquanto sua aceleração é $a \sim \omega^2 A$ e o intervalo de ação da força é $T \sim \omega^{-1}$. Novamente supondo de magnitudes semelhantes, comparando as energias (2.5) e (2.8), conclui-se

$$\omega\tau_0 \sim 1, \quad (2.9)$$

o que não é diferente de (2.7). Se o tempo de ação da força (ω^{-1}) é da ordem do tempo característico τ_0 , então os efeitos da reação de radiação devem ser significativos.

Em resumo, segundo esse critério, sistemas onde agem forças não tão violentas podem ser descritos sem a preocupação com a reação de radiação. Caso contrário, a inclusão das autoforças se faz necessária. [38]

Na verdade, nos recentes anos, a criação de pulsos curtos e muito intensos de laser [62] traz a questão da força de auto-interação novamente à tona com muita atenção. A intensidade extrema de tais laser aplicadas em porções pequenas de espaço dão viabilidade a fenômenos relativísticos, como a dilatação temporal, onde emerge a preocupação com a reação de radiação.

Enquanto a reação de radiação manifesta-se claramente em circuitos de correntes alternadas, como nas resistências em antenas anteriormente citado, não há ainda evidência experimental da reação de radiação agindo individualmente em partículas carregadas. [54]

Capítulo 3

Aceleração por ondas eletrostáticas, inclusa a reação de radiação

Neste capítulo investigamos a dinâmica de partículas carregadas levando em conta, literalmente, a reação de radiação que estão sob ação de ondas eletrostáticas de alta frequência e espacialmente moduladas. Uma abordagem ponderomotiva via transformações canônicas nos permitirá incorporar naturalmente a reação de radiação ao formalismo.

3.1 O modelo de potencial eletrostático

3.1.1 Potencial eletrostático unidimensional

O presente capítulo examina a interação, em regime relativístico, de uma partícula eletricamente carregada com uma onda eletrostática espacialmente localizada, lentamente modulada e de alta frequência. A onda viaja longitudinalmente ao longo de um eixo nomeado de x e é representada pelo potencial

$$\varphi(x, t) = \varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \cos(kx - \omega t) \quad (3.1)$$

via a relação

$$\vec{E}(x, t) = -\nabla\varphi(x, t),$$

onde t é o instante de tempo. O fator de amplitude φ_0 é uma constante positiva e corresponde ao máximo valor possível de potencial experimentado pela partícula. Os parâmetros da onda são o número de onda k e a frequência angular ω . O parâmetro σ representa o comprimento característico da onda, ou de seu envelope, e assumimos

a condição $\sigma \gg 1/k$ para garantir a lenta modulação do potencial.

Estamos interessados em investigar os efeitos da reação de radiação (RR) na dinâmica de partículas que são aceleradas por ondas eletrostáticas segundo o perfil de potencial (3.1). Tais efeitos são inclusos na formulação via a consideração das equações de Landau & Lifshitz (LL).

3.1.2 Equações LL restritas a ondas eletrostáticas

As equações LL que regem a dinâmica de uma partícula sob a ação de um campo eletromagnético considerando a reação de radiação são, em notação 3-vetorial e no sistema SI,

$$\begin{aligned}
 mc \frac{d\gamma}{dt} &= q \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E} + q\tau\gamma \dot{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\beta} \\
 &+ \tau \mathbf{E} \cdot (\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) + \\
 &- \tau\gamma^2 [(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})^2 - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})^2]
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= q (\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) + q\tau\gamma(\dot{\mathbf{E}} + \boldsymbol{\beta} \times \dot{\mathbf{B}}) + \\
 &+ \tau[(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \mathbf{B} \times (\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})] + \\
 &- \tau\gamma^2 [(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})^2 - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})^2]\boldsymbol{\beta},
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde \mathbf{E} é o campo elétrico, \mathbf{B} é o campo magnético, m a massa da partícula, q sua carga elétrica, γ o fator de Lorentz, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$, \mathbf{v} a velocidade da partícula e \mathbf{p} o seu momentum linear. O ponto sobrescrito quer significar a derivada temporal total enquanto os símbolos \cdot e \times indicam, respectivamente, os produtos escalar e vetorial convencionais do \mathbb{R}^3 .

Tratando-se de uma onda eletrostática e de propagação unidimensional, as equações (3.2) e (3.3) são simplificadas. Denotaremos por $\hat{\mathbf{x}}$ o vetor unitário que dá a direção de crescimento do eixo x . Tomando $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\mathbf{E} = E \hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{p} = p \hat{\mathbf{x}}$,

onde $E = |\mathbf{E}|$, $v = |\mathbf{v}|$ e $p = |\mathbf{p}|$, temos em (3.2) e (3.3), respectivamente,¹

$$\begin{aligned} mc \frac{d\gamma}{dt} &= q \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E} + q\tau\gamma \dot{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\beta} + \tau \mathbf{E} \cdot (\mathbf{E}) - \tau\gamma^2 [(\mathbf{E})^2 - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})^2] \\ mc \frac{d\gamma}{dt} &= q \frac{v}{c} E + q\tau\gamma \dot{E} \frac{v}{c} + \tau E^2 - \tau\gamma^2 \left[E^2 - \left(\frac{v}{c} E \right)^2 \right] \\ mc \frac{d\gamma}{dt} &= q \frac{v}{c} E + q\tau\gamma \dot{E} \frac{v}{c} + \tau E^2 - \tau\gamma^2 E^2 (1 - v^2/c^2) \\ mc \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{q v}{c} \left(E + \tau\gamma\dot{E} \right) + \tau^2 E^2 (1 - \gamma^2(1 - v^2/c^2)) \\ mc \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{q v}{c} \left(E + \tau\gamma\dot{E} \right) + \tau^2 E^2 (1 - 1) \quad \Rightarrow \quad mc \frac{d\gamma}{dt} = \frac{q v}{c} \left(E + \tau\gamma\dot{E} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= q \mathbf{E} + q\tau\gamma\dot{\mathbf{E}} + \tau(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \tau\gamma^2 [(\mathbf{E})^2 - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})^2]\boldsymbol{\beta} \\ \frac{dp}{dt} &= q E + q \tau\gamma\dot{E} + \tau \frac{v}{c} E^2 - \tau E^2 \gamma^2 (1 - v^2/c^2) \frac{v}{c} \\ \frac{dp}{dt} &= q \left(E + \tau\gamma\dot{E} \right) + \tau \frac{v}{c} E^2 (1 - \gamma^2(1 - v^2/c^2)) \\ \frac{dp}{dt} &= q \left(E + \tau\gamma\dot{E} \right) + \tau \frac{v}{c} E^2 (1 - 1) \\ \frac{dp}{dt} &= q \left(E + \tau\gamma\dot{E} \right). \end{aligned}$$

O sistema de equações que rege a dinâmica da partícula sobre efeito do campo eletrostático unidimensional considerando os efeitos da reação de radiação é, portanto

$$mc \frac{d\gamma}{dt} = \frac{q v}{c} \left(E + \tau\gamma\dot{E} \right), \tag{3.4}$$

$$\frac{dp}{dt} = q \left(E + \tau\gamma\dot{E} \right). \tag{3.5}$$

Na verdade, o sistema (3.4)&(3.5) é super determinado. Valendo a equação (3.4) está automaticamente válida a (3.5). De fato, do momentum relativístico $p = m\gamma v$, segue $\dot{p} = m\dot{v}\gamma^3$. Ainda, da definição do fator de lorentz, vem $\dot{\gamma} = \frac{v\dot{v}}{c^2}\gamma^3$. Se dividirmos a equação (3.4) pela (3.5) obtemos $\frac{mc \dot{\gamma}}{\dot{p}} = \frac{v}{c}$, que é, exatamente, o esperado pela própria definição de γ e p citadas acima. É suficiente, portanto, considerar (3.5) a equação de movimento da partícula.

Obtemos claramente uma equação do tipo 2^a Lei de Newton (o que é muito bem-vindo), sendo o produto qE a força elétrica devido a interação com o campo

¹Note que $\gamma^{-2} = 1 - v^2/c^2 \Rightarrow \gamma^2(1 - v^2/c^2) = 1$.

da onda, a força externa de natureza elétrica, e a parcela $\gamma q \tau \dot{E}$ representa a força da reação de radiação.

De fato, a equação (3.5) é a versão relativística da equação (2.4). Em termos de comportamento funcional, a derivada \dot{E} é mais suave do que aquela derivada temporal da aceleração proposta pelas equações LAD. Espera-se obter daí um melhor tratamento numérico para a equação.

Visando o Capítulo 5, onde estudaremos a dinâmica média da partícula pela abordagem ponderomotiva, vamos adequar a equação do movimento (3.5) ao formalismo hamiltoniano fazendo alguns ajustes oportunos.

3.1.3 Formalismo hamiltoniano inclusa a reação de radiação

Nesta seção serão obtidas as equações de movimento do sistema via Princípio de Hamilton. Do formalismo lagrangiano unidimensional, qualquer que seja a força não conservativa¹ g_{nc} agindo sobre um sistema, dado o funcional lagrangiano da forma usual $L = L(x(t), \dot{x}(t), t)$ que incorpora todas as forças conservativas, a equação de movimento é

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = g_{nc}. \quad (3.6)$$

Mantendo a definição usual para o momentum conjugado, isto é,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \quad (3.7)$$

identificamos a força total agindo sobre o sistema como

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial x} + g_{nc}, \quad (3.8)$$

Da definição do hamiltoniano $H = H(p, x, t)$ na forma usual

$$H(p, x, t) = \dot{x}(x, p, t) p - L(x, \dot{x}(x, p, t), t). \quad (3.9)$$

¹A rigor, o que se incorpora à equação de movimento homogênea é a força não conservativa *generalizada*. Mas, para o caso em questão (1D), a força generalizada confunde-se com a própria força ativa.

tomamos o diferencial:

$$dH = d(\dot{x} p) - dL \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \dot{x} dp + p d\dot{x} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} d\dot{x} - \frac{\partial L}{\partial x} dx - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Agrupando os termos em dp e dt , substituindo a definição (3.7) e a equação de movimento (3.8), segue

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H}{\partial p} - \dot{x} \right) dp + \frac{\partial H}{\partial x} dx + \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial t} \right) dt &= p d\dot{x} - p d\dot{x} - (\dot{p} - g_{nc}) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial p} - \dot{x} \right) + \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{p} - g_{nc} \right) dx + \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial t} \right) dt &= 0 \end{aligned}$$

e, portanto, as equações de movimento são

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{3.10}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} + g_{nc} \tag{3.11}$$

e

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{3.12}$$

Vale notar ainda que, de

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial t} \\ \dot{H} &= \frac{\partial H}{\partial p} \left(-\frac{\partial H}{\partial x} + g_{nc} \right) + \frac{\partial H}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ \dot{H} &= -\frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial p} g_{nc} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t}, \end{aligned}$$

a variação temporal total da energia do sistema fica identificada como

$$\dot{H} = \dot{x} g_{nc} + \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{3.13}$$

No limite $g_{nc} \rightarrow 0$, as equações (3.10), (3.11), (3.12) e (3.13) recaem nas costumeiras para um sistema onde somente agem forças conservativas. A vantagem da presente formulação se manifesta na intenção de usar transformações canônicas para o tratamento da aproximação ponderomotiva inspirada em bons resultados anteriores. [5, 3]

Para obter o hamiltoniano, lembremos que o lagrangiano relativístico para o presente modelo é

$$L(x, \dot{x}, t) = -\frac{mc^2}{\gamma(\dot{x})} - q\varphi(x, t), \quad (3.14)$$

de onde o momentum conjugado é o usual:¹

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -mc^2 \frac{\partial \gamma^{-1}}{\partial \dot{x}} = -mc^2(-1) \frac{\dot{x}}{c^2} \gamma \Rightarrow p = m\dot{x}\gamma. \quad (3.15)$$

O fator de Lorentz é função da velocidade da partícula. Mas, a fim de obter o hamiltoniano, é necessário expressá-lo como função do momentum conjugado. Usando (3.15), podemos efetuar a inversão²

$$\begin{aligned} p^2 &= m^2 \dot{x}^2 \gamma^2 \\ p^2 &= m^2 c^2 (1 - \gamma^{-2}) \gamma^2 \\ p^2 &= m^2 c^2 (\gamma^2 - 1) \\ \frac{p^2}{m^2 c^2} + 1 &= \gamma^2 \Rightarrow \gamma(p) = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} \end{aligned}$$

e obter o desejado. E, disso, obtemos também a velocidade da partícula como função unicamente do momentum conjugado:

$$\dot{x} = \frac{p}{m\gamma(p)}. \quad (3.16)$$

Agora, levando as inversões na definição (3.9), temos

$$\begin{aligned} H &= \frac{p}{m\gamma(p)} p - \left(-\frac{mc^2}{\gamma(p)} - q\varphi(x, t) \right) \\ H &= \frac{p^2}{m\gamma(p)} + \frac{mc^2}{\gamma(p)} + q\varphi(x, t) \\ H &= \frac{p^2 + m^2 c^2}{m\gamma(p)} + q\varphi(x, t) \\ H &= mc^2 \frac{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}{\gamma(p)} + q\varphi(x, t) \\ H &= mc^2 \frac{\gamma(p)^2}{\gamma(p)} + q\varphi(x, t) \end{aligned}$$

¹ $\frac{\partial \gamma^n}{\partial \dot{x}} = n \frac{\dot{x}}{c^2} \gamma^{n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
² $\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{x}^2} = 1 - v^2/c^2 \Rightarrow v^2 = c^2(1 - \gamma^{-2})$

de onde, portanto, o hamiltoniano do sistema é

$$H(x, p, t) = mc^2\gamma(p) + q\varphi(x, t), \quad (3.17)$$

a energia total da partícula. A adesão da força não conservativa modifica, comparado ao formato clássico das equações de Hamilton, apenas a equação de movimento (3.11). O formato funcional clássico do hamiltoniano não é alterado.

Comparando a equação (3.5) com (3.11), reconhecemos, facilmente, que a força não conservativa responsável pelo efeito da reação de radiação na partícula no presente modelo é

$$g_{nc} = q\tau \gamma \frac{dE}{dt}. \quad (3.18)$$

A fim de explorar soluções numéricas do modelo, é tempo de tornar adimensionais as variáveis relevantes e os parâmetros físicos do problema. Faremos isso com a troca

$$kx = \bar{x}, \quad \omega t = \bar{t}, \quad H/mc^2 = \bar{H}, \quad L/mc^2 = \bar{L}, \quad q\varphi_0/mc^2 = \bar{\varphi}_0 \quad \text{e} \quad k\sigma = \bar{\sigma} \quad (3.19)$$

onde, por ora, a barra sobrescrita indica que a variável é adimensional. Da escolha, a velocidade da partícula adimensionaliza-se por

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d(\bar{x}/k)}{d(\bar{t}/\omega)} = \frac{\omega}{k} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{\omega}{k} \dot{\bar{x}} \Rightarrow \dot{x} = v_\phi \dot{\bar{x}} \quad (3.20)$$

i.e., adequadamente, pela velocidade de fase da onda eletrostática $v_\phi = \omega/k$. É conveniente definir um parâmetro adimensional que compare a velocidade de fase da onda com o a velocidade da luz no vácuo, c . Definamos, então,

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v_\phi^2}{c^2}. \quad (3.21)$$

As velocidades dimensional e normalizada da partícula passam a satisfazer

$$\frac{\dot{x}}{c} = \sqrt{\alpha} \dot{\bar{x}},$$

o que nos dá a ideia de expressar a velocidade adimensional em unidades de $\sqrt{\alpha}$. Fazê-lo é equivalente a expressar a própria velocidade dimensional em unidades de c .

O momentum conjugado por sua vez se adimensionaliza como

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial (mc^2 \bar{L})}{\partial (\frac{\omega}{k} \dot{\bar{x}})} = \frac{kmc^2}{\omega} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{x}}} \Rightarrow p = \frac{mc}{\sqrt{\alpha}} \bar{p}, \quad (3.22)$$

e, daí, o fator de lorentz se reescreve para

$$\gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} \Rightarrow \gamma = \sqrt{1 + \frac{\bar{p}^2}{\alpha}}. \quad (3.23)$$

Por fim, adimensionalizamos o campo elétrico através do fator kmc^2/q . De fato,

$$\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow E = -\frac{\partial (\frac{mc^2}{q} \bar{\varphi})}{\partial (\bar{x}/k)} = -\frac{kmc^2}{q} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} \Rightarrow E = \frac{kmc^2}{q} \bar{E}. \quad (3.24)$$

Esses fatores calculados acima permitem que calculemos o fator que adimensionaliza o parâmetro de tempo característico τ . A grandeza que introduz a unidade de medida de tempo no nosso modelo é ω , é verdade, e por essa razão é justo que o tempo adimensional $\bar{\tau}$ se obtenha por $\bar{\tau} = \omega\tau$. E, de fato, da equação de movimento (3.5), fazendo a manipulação

$$\begin{aligned} \dot{p} &= qE + q\tau\gamma\dot{E} \\ \frac{mc}{\sqrt{\alpha}} \omega \dot{\bar{p}} &= q \frac{kmc^2}{q} \bar{E} + q\tau\gamma \frac{kmc^2}{q} \omega \dot{\bar{E}} \\ \frac{kmc^2}{\omega} \omega \dot{\bar{p}} &= kmc^2 \bar{E} + \tau\gamma kmc^2 \omega \dot{\bar{E}} \\ \dot{\bar{p}} &= \bar{E} + (\omega\tau)\gamma\dot{\bar{E}}, \end{aligned}$$

chega-se em

$$\dot{\bar{p}} = \bar{E} + \bar{\tau}\gamma\dot{\bar{E}} \quad (3.25)$$

de onde resulta $\bar{\tau} = \omega\tau$. Por último, a força de reação de radiação assume a forma adimensional

$$g_{nc} = q\tau\gamma\dot{E} = q \frac{\bar{\tau}}{\omega} \gamma \frac{kmc^2}{q} \omega \dot{\bar{E}} = mc\omega \bar{\tau}\gamma \dot{\bar{E}} \Rightarrow g_{nc} = kmc^2 \bar{g}_{nc}. \quad (3.26)$$

Para não carregar a notação, a partir de agora omitiremos a barra sobrescrita. Todas as quantidades físicas e parâmetros do modelo serão as adimensionais, salvo menção em contrário.

Em síntese, exploraremos soluções numéricas do sistema representado pelas equações de movimento

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (3.27)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \tau \gamma \frac{dE}{dt} \quad (3.28)$$

onde o hamiltoniano é

$$H(x, p, t) = \sqrt{1 + \frac{p^2}{\alpha}} + \varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \cos(x - t). \quad (3.29)$$

É interessante, principalmente para referência na aproximação ponderomotiva, que estudemos o sistema de equações de movimento (3.27)&(3.28) explicitamente em termos do potencial (3.1). A velocidade da partícula é dada em cada instante por

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{\alpha \sqrt{\alpha + p^2}} \quad (3.30)$$

enquanto, em termos do potencial, a força não conservativa é

$$g_{nc} = -\tau \gamma \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (3.31)$$

Sendo o potencial uma função explícita tanto da posição quando do tempo, segue

$$g_{nc} = -\tau \gamma \left(\dot{x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \right) \quad (3.32)$$

de onde, já que

- (i) $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \left[\frac{2x}{\sigma^2} \cos(x - t) + \sin(x - t) \right];$
- (ii) $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \left[\left(1 + \frac{2x}{\sigma^2} - \frac{4x^2}{\sigma^4} \right) \cos(x - t) - \frac{4x}{\sigma^2} \sin(x - t) \right];$
- (iii) $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} = -\varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \left[\frac{2x}{\sigma^2} \sin(x - t) - \cos(x - t) \right];$
- (iv) $\alpha \gamma \dot{x} = p,$

se desenvolve para

$$g_{nc}(x, p, t) = \varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \tau \left[\cos(x - t) \left(\left(1 + \frac{2x}{\sigma^2} - \frac{4x^2}{\sigma^4} \right) \frac{p}{\alpha} - \gamma \right) + \frac{2x}{\sigma^2} \left(1 - \frac{2p}{\alpha} \right) \sin(x - t) \right]. \quad (3.33)$$

3.1.4 Análise da dinâmica do modelo

Sendo uma das peças centrais da discussão e por depender da frequência do campo elétrico, a escolha do parâmetro τ deve ser feita com atenção. Abaixo está uma tabela que mostra uma faixa de valores para o parâmetro τ de acordo com a região do espectro eletromagnético.

Região do spectrum	frequência (Hz)	$\tau = 2\pi f \tau_0$
Raio-X duro	$3 \times 10^{20} - 3 \times 10^{19}$	$1 \times 10^{-2} - 1 \times 10^{-3}$
Raio-X mole	$3 \times 10^{19} - 3 \times 10^{18}$	$1 \times 10^{-3} - 1 \times 10^{-4}$
Ultravioleta extremo	$3 \times 10^{18} - 3 \times 10^{17}$	$1 \times 10^{-4} - 1 \times 10^{-5}$
Ultravioleta próximo	$3 \times 10^{17} - 3 \times 10^{16}$	$1 \times 10^{-5} - 1 \times 10^{-6}$
Infravermelho próximo	$3 \times 10^{14} - 3 \times 10^{13}$	$1 \times 10^{-8} - 1 \times 10^{-9}$

Tabela 3.1: Intervalo de valores estimados para o parâmetro τ respectivamente aos intervalos de frequências da onda. Usou-se $\omega = 2\pi f$, onde f é a frequência em hertz, e $\tau_0 = 6.20 \times 10^{-24}$ s.

3.1.5 Efeitos da RR no sistema ressonante

O perfil de potencial considerado é, na prática, nulo nas extremidades. Tal característica possibilita que, em certo ponto, o movimento não possa mais ser influenciado por ele e, portanto, a partícula tem sua velocidade estabilizada, a qual chamamos de velocidade de ejeção (v_f). É sabido que o sistema em estudo, uma

vez desconsiderados os possíveis efeitos da reação de radiação, *i.e.*, tomando $\tau = 0$, e fixado $\alpha < 1$, apresenta três grandes cenários, ou regimes, classificados segundo a velocidade de ejeção. A partícula é injetada na região de choque com o potencial elétrico e , de acordo com sua velocidade inicial (v_0), fixados também os parâmetros σ e φ_0 , experimentará um dos regimes. [3]

Chamamos de **regime reflexivo** aquele onde a partícula encontra - em certo instante - uma barreira intransponível de potencial. Em seguida, é refletida pela onda e passa, portanto, a afastar-se indefinidamente da região de máximo potencial. A velocidade de ejeção nesse regime tem módulo igual ao da velocidade de injeção, mas sentido oposto.

Pode acontecer, entretanto, de a partícula ser injetada com uma dada velocidade inicial de modo que, nas proximidades da região de máximo potencial, atinge a velocidade de fase da onda. Na ocasião, dois regimes são observados.

No chamado **regime passante** a barreira intransponível não é encontrada e a partícula atravessa a região de máximo potencial afastando-se indefinidamente desta com velocidade de ejeção muito próxima a de injeção (mesmo módulo e mesmo sentido). Este regime pode ocorrer mesmo que não haja ressonância.

Caracterizamos o **regime acelerador**, no que estamos mais interessados, como aquele onde a partícula é ejetada com velocidade de mesma direção mas de módulo muito superior ao que foi injetada, facilmente mais de 99% da velocidade da luz. O mecanismo de aceleração eficiente (velocidade de ejeção superior a 90% da velocidade da luz), percebemos, é altamente dependente da possibilidade de a partícula entrar em ressonância com a onda. Isto é, desconsiderando possíveis efeitos da reação de radiação, a partícula somente será acelerada pela onda se $\alpha < 1$, o que oportuniza a ressonância.

Estamos interessados agora em estudar quais efeitos a consideração da reação de radiação pode trazer à dinâmica do sistema. A fim de comparar a dinâmica considerando a reação de radiação ($\tau \neq 0$) com aquela onde não há a consideração ($\tau = 0$), vamos explorar algumas simulações numéricas do sistema (3.27)&(3.28). As soluções são baseadas no algoritmo de solução de equações diferenciais ordinárias Runge-Kutta de 4^a ordem.

A posição inicial da partícula será tomada como sendo $x(0) = -4\sigma$ em todas as simulações. Garante-se, assim, que a partícula penetre na região de choque afastada o suficiente das vizinhanças da origem ($x = 0$), onde pode experimentar o máximo valor de potencial.

Para esta primeira discussão escolhemos $\sigma = 100$, $\varphi_0 = 1.0$, $\alpha = 0.81$ (a velocidade de fase da onda é 90% da velocidade da luz) e $\tau = 10^{-8}$ (radiação na região do infravermelho médio, com comprimento de onda na faixa de 1400 nm).

O pequeníssimo valor escolhido para τ pode sugerir que serão ignoráveis os efeitos da reação de radiação. Entretanto, não é o que acontece.

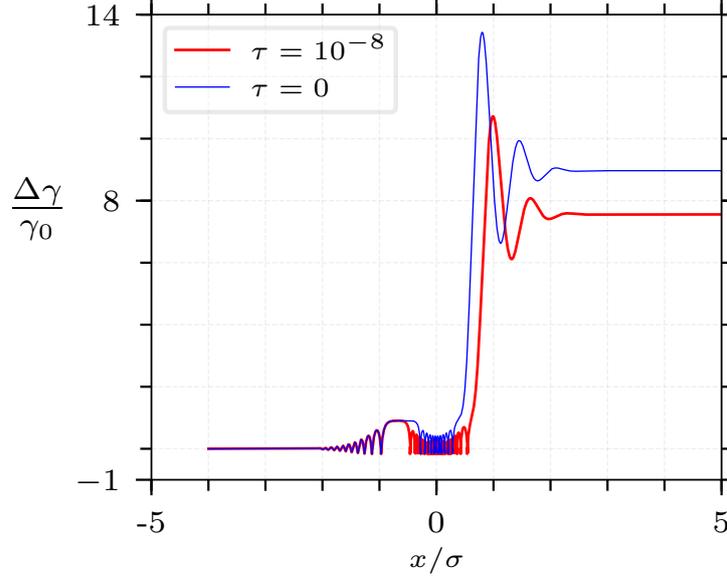


Figura 3.1: Ganho de energia cinética normalizado. Parâmetros: $\sigma = 100$, $\alpha = 0.81$, $\varphi_0 = 1.0$ e $v_0 = 0.55443000\alpha^{-1/2}$.

A Figura 3.1 mostra o ganho de energia cinética, em unidades da energia cinética inicial γ_0 , da partícula em função de sua posição quando é injetada com velocidade inicial de $v_0 = 0.55443000\alpha^{-1/2}$ para as duas situações de interesse: não considerando a reação de radiação (curva em azul) e considerando a reação de radiação (curva em vermelho).

Em ambas as situações a partícula encontra-se no regime acelerador. Considerando a RR, a velocidade de ejeção é cerca de $v_f = 0.99526c$ e a partícula ganha, de acordo com o gráfico, aproximadamente 7.56 vezes a sua energia cinética inicial. O ganho é maior quando desconsidera-se a RR. Neste caso, a velocidade de ejeção da partícula é $v_f = 0.99651c$ o que corresponde a um ganho de energia cinética da ordem de 8.97 vezes a sua energia cinética inicial.

Embora possamos facilmente aceitar o fato de a partícula perder energia pela RR, o resultado apresentado pela Figura 3.1 é um tanto surpreendente considerando a ordem de grandeza de τ . Mesmo para $\tau = 10^{-8}$, a partícula perde, graças à RR, cerca de 19% de seu ganho de energia cinética. Isto é, o efeito da RR neste caso,

mesmo para o pequeno valor de τ , é o de diminuir o ganho de energia cinética da partícula de uma parcela considerável.

Resultado também facilmente aceitável e igualmente notável é o mostrado abaixo. A Figura 3.2 exibe o gráfico da velocidade da partícula *vs.* tempo quando é injetada com velocidade inicial de $v_0 = 0.55443001 \alpha^{-1/2}$, ligeiramente superior à do caso anterior. A curva em azul, da dinâmica desconsiderando a RR, mostra que a partícula ainda encontra-se no regime acelerador. Mas no caso onde consideramos a RR (curva em vermelho) a partícula sofre uma mudança de regime, vai para o regime reflexivo.

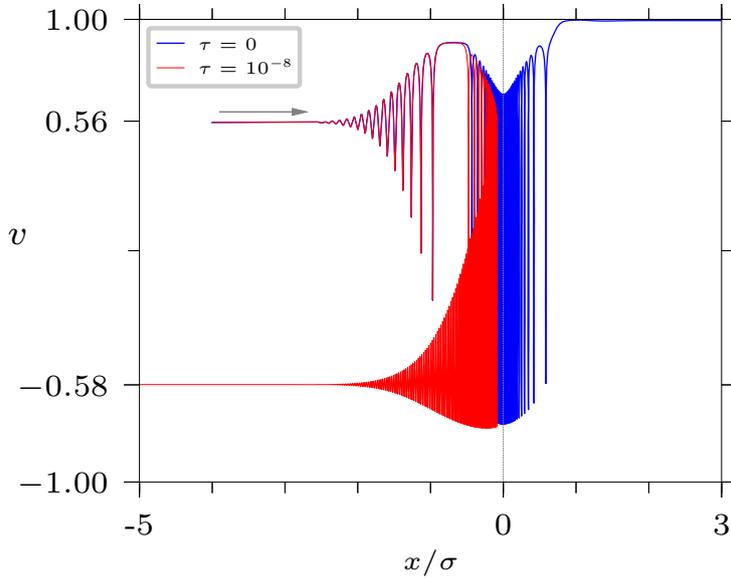


Figura 3.2: Velocidade final normalizada pela velocidade da luz *vs.* tempo. Parâmetros: $\sigma = 100$, $\alpha = 0.81$, $\varphi_0 = 1.0$ e $v_0 = 0.55443001\alpha^{-1/2}$.

Além de diminuir a eficiência da aceleração (caso mostrado na Figura 3.1), o pequeníssimo valor de τ também pode ser suficiente para extingui-la, notamos. Enquanto o sistema livre da RR foi capaz de impulsionar a partícula nas vizinhanças da origem para ser ejetada com alta velocidade, o sistema radiativo não foi. O impulso da força de reação à radiação faz com que a partícula abandone a boa posição para a sua aceleração e caia no regime reflexivo.

O que nos chama muito a atenção é que o resultado exatamente inverso ao apresentado na Figura 3.2 também pode acontecer.

A Figura 3.3 mostra o gráfico da velocidade da partícula *vs.* tempo para a velocidade inicial $v_0 = 0.55443002 \alpha^{-1/2}$, também ligeiramente superior à do caso

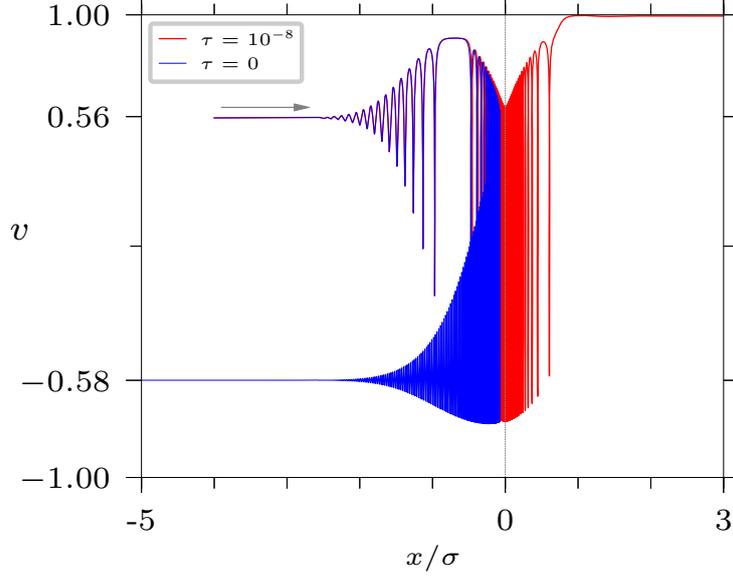


Figura 3.3: Velocidade final normalizada pela velocidade da luz v vs. tempo. Parâmetros: $\sigma = 100$, $\alpha = 0.81$, $\varphi_0 = 1.0$ e $v_0 = 0.55443002\alpha^{-1/2}$.

anterior. A partícula encontra-se no regime reflexivo se desconsiderarmos a RR (curva em azul). Entretanto, ao considerar os efeitos da RR (curva em vermelho) a partícula entra no regime acelerador, mesmo para τ da ordem que consideramos. Para este caso, é acelerada até a velocidade de ejeção de $0.994685c$.

Conclui-se, então, que não é regra a RR conduzir a partícula a perder energia cinética no modelo que estamos considerando. A partícula pode ganhar energia em função da RR, e muito.

Mas, quando é o caso, a aceleração ainda é devida à ressonância entre a partícula e a onda que a acelera, visto que a onda na região do infravermelho não é capaz de fazê-lo por si só. Propõe-se que o efeito acelerativo que vimos da RR acontece devido ao fato de, na iminência de ser refletida, a partícula sofrer um impulso provocado não pela força elétrica, mas pela força de reação à radiação emitida por ela. Este impulso a coloca, mesmo que ligeiramente (o que já é suficiente), em posição ideal para atingir a ressonância e é, então, acelerada.

3.1.6 Efeitos da RR no sistema não ressonante

Estamos interessados em estudar a viabilidade do cenário acelerador devido exclusivamente à RR. Para excluir, portanto, por completo a possibilidade de ressonância, fixamos $\alpha = 1$, isto é, consideramos a velocidade de fase da onda de potencial como

sendo a velocidade da luz no vácuo. Desse modo as partículas interagentes com o potencial podem aproximar-se indefinidamente da velocidade de fase da onda, mas nunca alcançá-la de fato e, então, qualquer aceleração observada não poderá ser de proveniência da ressonância anteriormente apontada.

A fim de procurar combinações de possíveis escolhas para os parâmetros τ e φ_0 de modo a conduzir a partícula para o regime acelerador, foram feitos três mapas de parâmetros, apresentados nas figuras Figura 3.4, Figura 3.5 e Figura 3.6, com respeito a três diferentes velocidades de injeção: $v_0 = 0.3$, $v_0 = 0.4$ e $v_0 = 0.5$, respectivamente. Cada ponto dos mapas é uma solução numérica do sistema (3.27)&(3.28) baseado no algoritmo Runge-Kutta de 4^a ordem.

$$v_0 = 0.3$$

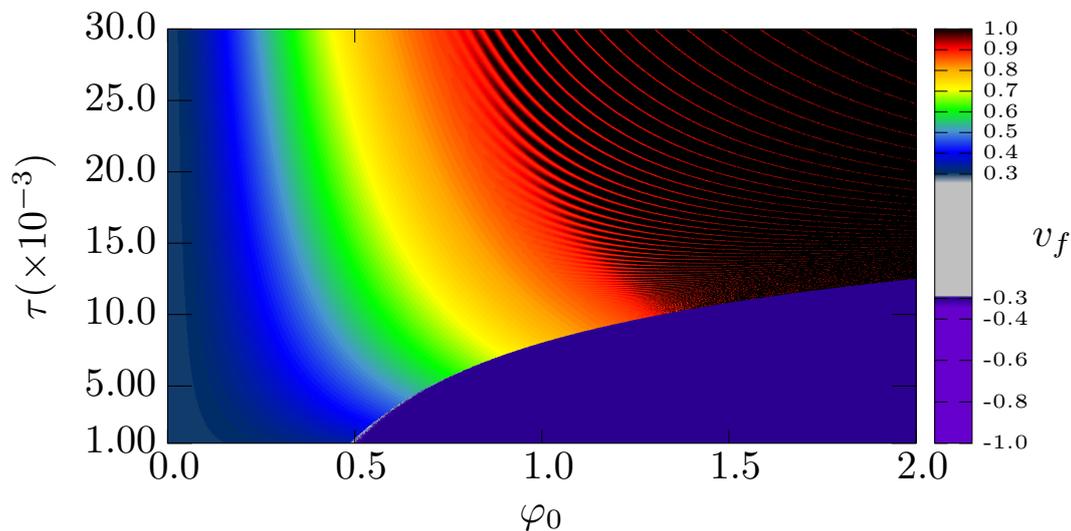


Figura 3.4: Mapa de parâmetros: velocidade final *vs.* τ *vs.* φ_0 . Demais parâmetros utilizados: $\sigma = 100$, $\alpha = 1.0$ e $v_0 = 0.3$.

A Figura 3.4 foi construída resolvendo numericamente o sistema (3.27)&(3.28) para a velocidade inicial $v_0 = 0.3$ e considerando o comprimento característico da onda de $\sigma = 10^2$. Cada ponto do mapa exibe a velocidade de ejeção v_f da partícula, cujo valor numérico corresponde às cores na graduação lateral, para uma escolha de τ , no intervalo $\tau \in [1.0 \times 10^{-3}, 30 \times 10^{-3}]$, e uma de φ_0 , no intervalo $\varphi_0 \in [0.0, 2.0]$.

O primeiro resultado que nos chama a atenção refere-se ao canto inferior direito da Figura 3.4, onde estão os maiores valores de φ_0 e os menores de τ . A cor roxa homogeneamente distribuída pela região corresponde a velocidades de ejeção próximas de $v_0 = -0.3$, como mostra a escala, de onde se entende a partícula estar no regime reflexivo.

As demais velocidades negativas menores do que $v_f = -0.3$ não são contempladas pela dinâmica para nenhuma escolha de τ e φ_0 , como denuncia a ausência no mapa da cor roxa mais clara correspondente a este intervalo. Tampouco velocidades negativas maiores do que -0.3 são atingidas por alguma combinação de τ e φ_0 , visto que a cor cinza, a qual corresponde a estas, não aparece no mapa.

O canto superior direito exhibe uma grande região onde a velocidade de ejeção da partícula está no intervalo $v_f \geq 0.9$, o que configura o regime acelerador. Concluímos, então, que existe uma vasta combinação de escolhas possíveis para τ e φ_0 , a partir de um certo limite estipulado pelo mapa, onde a partícula é acelerada apenas pelos efeitos da RR mesmo para uma velocidade de injeção relativamente pequena.

De fato, fixado o valor de τ a partir de, aproximadamente, $\tau = 13 \times 10^{-3}$, é possível que a partícula atinja uma velocidade de ejeção no intervalo $0.3 \leq v_f < 1.0$ desde que aumentemos gradativamente a amplitude máxima de potencial.

Muito à vista destacam-se, também, grandes faixas de cor fixa respectivas a velocidades de ejeção muito bem definidas. Tais faixas poderão ser justificadas quando estudarmos em mais detalhes o mecanismo de aceleração no Capítulo 5.

$$v_0 = 0.4$$

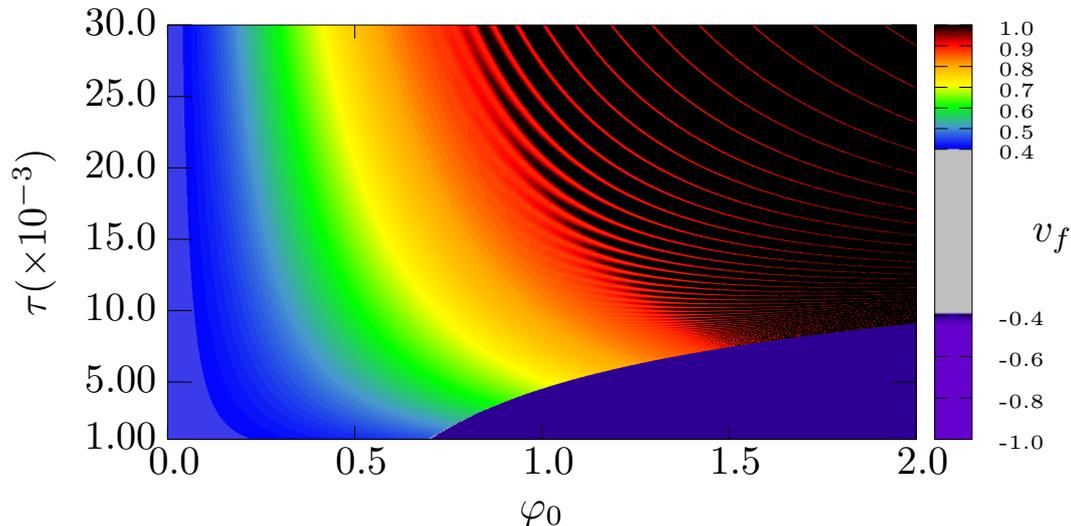


Figura 3.5: Mapa de parâmetros: velocidade final *vs.* τ *vs.* φ_0 . Demais parâmetros utilizados: $\sigma = 100$, $\alpha = 1.0$ e $v_0 = 0.4$.

Para entender a sensibilidade da dinâmica à velocidade de injeção, os mapas das Figuras 3.5 e 3.6 foram feitos na mesma estrutura que o exibido na Figura 3.4 e para a mesma escolha $\sigma = 10^2$, porém, variando a velocidade inicial da partícula para, respectivamente, $v_0 = 0.4$ e $v_0 = 0.5$.

Na Figura 3.5 observamos um comportamento semelhante ao da 3.4. Mais uma vez a região homogênea no canto inferior direito se faz presente, correspondendo ao regime reflexivo, mas agora tem menores domínios e a partícula é ejetada com velocidade próxima a $v_f = -0.4$. Velocidades negativas abaixo ou acima desse valor não são contempladas pela dinâmica para nenhuma escolha de τ e φ_0 , como denuncia novamente a ausência das cores roxo claro e cinza que, respectivamente, fazem correspondência a tais intervalos para este mapa também.

O valor fixo de τ a partir do qual a partícula pode ser ejetada com qualquer velocidade no intervalo $0.4 \leq v_f < 1$ se faz presente mais uma vez, e é menor para esta experiência. Conseqüentemente, a região correspondente ao regime acelerador, também existente para essa experiência, é maior. Com respeito ao limite vertical de seus domínios, a região de aceleração mantém-se inalterada quando comparada a do mapa anterior. As faixas com cores bem destacadas novamente são observadas.

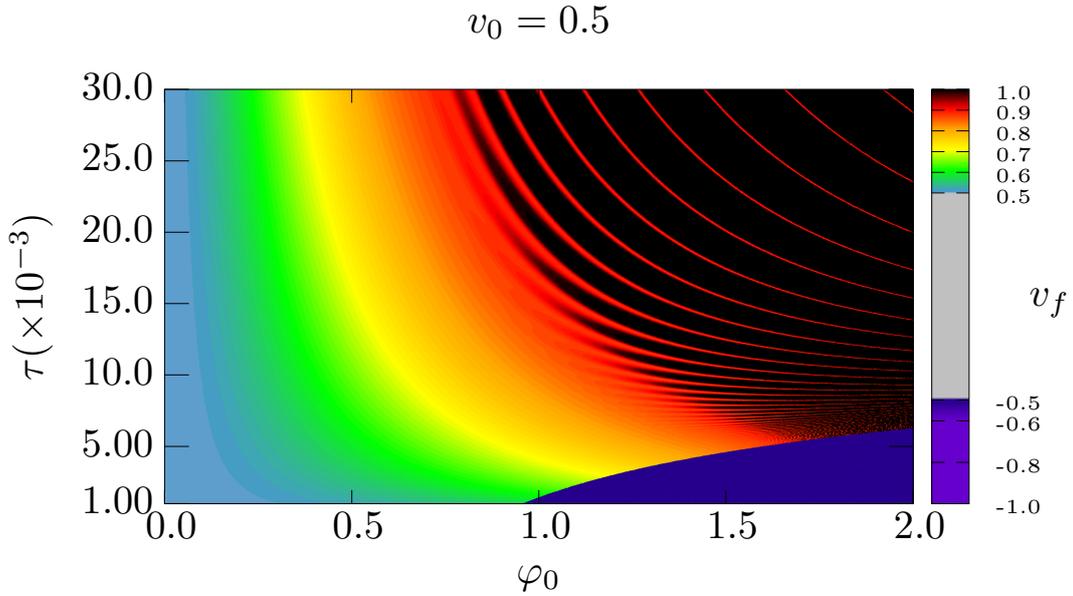


Figura 3.6: Mapa de parâmetros: velocidade final *vs.* τ *vs.* φ_0 . Demais parâmetros utilizados: $\sigma = 100$, $\alpha = 1.0$ e $v_0 = 0.5$.

Finalmente, vê-se na Figura 3.6 todas as características que chamamos a atenção nos outros mapas. Há uma diminuição da região do regime reflexivo comparado aos demais mapas. A região do regime acelerador é alargada e as faixas bem definidas de velocidade de ejeção são muito claras novamente.

Os mapas apresentados nos levam à conclusão de que há a contemplação do cenário de aceleração eficiente ($v_f > 0.9$) devido exclusivamente à força de recuo sofrida pela partícula ao ser acelerada pela onda eletrostática segundo a modulação considerada neste trabalho.

Tal comportamento foi observado para as três velocidades iniciais consideradas, mesmo para a menor delas. E esta é a característica importante da RR na presente discussão: longe de degradar o processo de aceleração, as forças da RR podem, por si só, produzir o processo. O recurso é bem-vindo nos casos em que se quer contornar a dificuldade técnica de possibilidade de ressonância.

O intervalo apresentado para τ nos mapas anteriores se refere largamente ao modo de onda na região do raio-X duro. Neste caso, a amplitude máxima de potencial até $\varphi_0 = 2.0$ é mais do que suficiente para que haja a aceleração eficiente.

Contudo, se dispusermos de uma amplitude máxima até o dobro da anteriormente considerada, até $\varphi_0 = 4.0$, é possível diminuir o intervalo de valores do parâmetro τ de modo a estar na região do raio-X mole. Basta que aumentemos o tamanho característico do envelope da onda em dez vezes, façamos $\sigma = 10^3$.

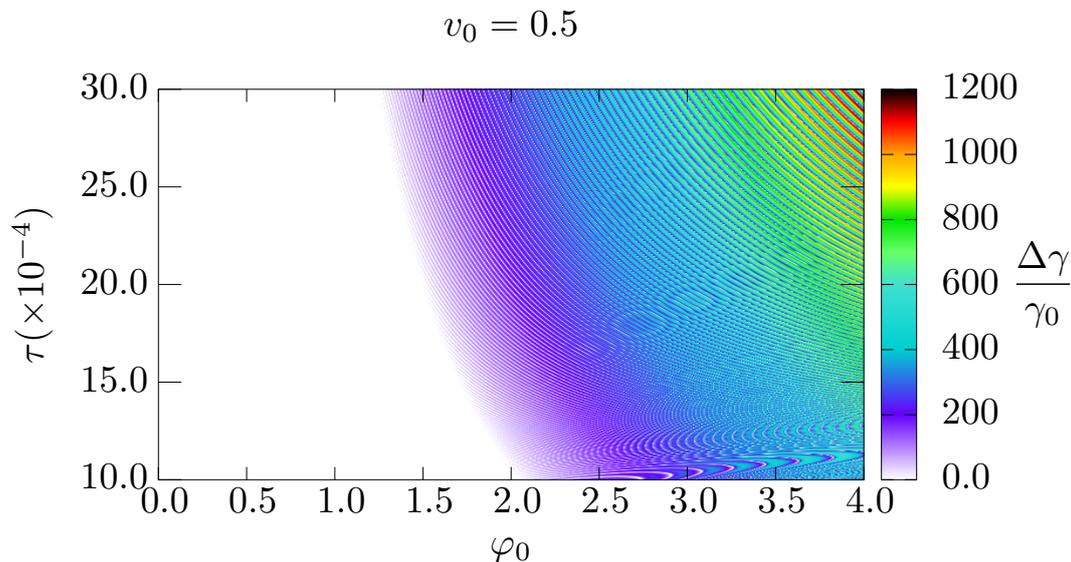


Figura 3.7: Mapa de parâmetros: ganho de energia cinética normalizada *vs.* τ *vs.* φ_0 . Demais parâmetros utilizados: $\sigma = 1000$, $\alpha = 1.0$ e $v_0 = 0.5$.

O mapa da Figura 3.7 mostra o ganho de energia em unidades da energia cinética inicial da partícula que foi injetada com velocidade $v_0 = 0.5c$. A partir de, aproximadamente, $\varphi_0 = 1.5$ o ganho de energia torna-se altamente significativo mesmo para valores de da ordem de $\tau \sim 10^{-3}$, o que não acontecia anteriormente. As faixas de cores destacadas estão presentes nesta experiência também.

3.2 Aproximação ponderomotiva

O movimento de partículas carregadas expostas a campos eletromagnéticos espacialmente inhomogêneos pode ser decomposto em duas escalas de tempo: uma escala de variação rápida, tipicamente devido às altas frequências dos campos, e uma lentamente variável. Identifica-se nessa última um centro de oscilação cuja dinâmica é descrita por uma força média, tomada pela escala rápida de tempo, tradicionalmente chamada de ponderomotiva, ou ponderomotriz. [18]

Embora o modelo relativístico apresentado neste trabalho seja puramente eletrostático, desde que a dinâmica das partículas seja paralela ao eixo do vetor de onda, a física subjacente é semelhante à de uma partícula submetida à ação combinada de campos eletromagnéticos e de *wiggler*, como discutido em [5, 6]. Tais arranjos propiciam a ação efetiva da força ponderomotiva, que tem lugar majoritário na aceleração das partículas nestes casos onde há a rápida variação da amplitude dos campos.

O presente capítulo pretende, então, estudar a aceleração das partículas segundo o modelo tratado até agora de maneira simplificada. A ideia é ter um melhor entendimento das propriedades mais relevantes do mecanismo de aceleração, o qual é resultante da ação combinada entre as forças ponderomotiva e de reação de radiação.

Em trabalhos anteriores [3] mostrou-se que, na ausência da RR, existe uma transformação canônica no espaço de fase capaz de descrever satisfatoriamente o comportamento do centro de oscilação de uma partícula carregada que é posta a interagir com a onda eletrostática proposta pelo presente modelo.

Desconsiderando os efeitos da RR, se o centro de oscilação da partícula é localizado pela coordenada $X = X(t)$, cujo momentum relativo a este centro é $P = P(t)$, a função

$$\mathcal{F}(x, P, t) = xP + f(x, P, t), \tag{3.34}$$

onde

$$f(x, P, t) = \varphi_0 \frac{e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \sin(x - t)}{1 - \frac{P}{\alpha\Gamma}} + \varphi_0^2 \frac{e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}} \sin(2x - 2t)}{8\alpha\Gamma^3 \left(1 - \frac{P}{\alpha\Gamma}\right)^3}, \tag{3.35}$$

sendo

$$\Gamma = \sqrt{1 + \frac{P^2}{\alpha}}, \tag{3.36}$$

é geratriz das transformações

$$X = x + \frac{\partial f}{\partial P} \tag{3.37}$$

e

$$P = p - \frac{\partial f}{\partial x} \quad (3.38)$$

que provê o hamiltoniano

$$\mathcal{K}(X, P) = \Gamma + \frac{\varphi_0^2}{4\alpha} \frac{e^{-\frac{2X^2}{\sigma^2}}}{\Gamma^3 \left(1 - \frac{P}{\alpha\Gamma}\right)^2} \quad (3.39)$$

via a transformação

$$\mathcal{K} = H + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (3.40)$$

Em contraste ao original (3.29), esta versão ponderomotiva do hamiltoniano é constante de movimento segundo as equações autônomas

$$\dot{X} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} \quad \text{e} \quad \dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} \quad (3.41)$$

que regem o movimento do centro de oscilação. Visto que a força ponderomotiva é um campo gradiente, a conservação do hamiltoniano (3.39) é um resultado esperado.

A consideração de somente termos até ordem quadrática na amplitude máxima de potencial mostrou-se suficiente para acompanhar acertadamente o feitiço da média temporal da velocidade da partícula longe do cenário ressonante.

É nossa intenção neste capítulo, inspirados nos bons resultados obtidos pela, dar proveito a transformação $(x, p) \xrightarrow{\mathcal{F}} (X, P)$ e simplificar as equações do sistema mesmo com a adesão da reação de radiação.

O processo de adaptação é proposto em duas partes. Primeiramente, usaremos as leis de transformação (3.37) e (3.38) de forma explícita nas equações (3.27) e (3.28) na esperança de obter um novo sistema de equações semelhantes ao (3.41). Em seguida, a fim de remover as sobreviventes dependências na escala rápida de tempo herdadas do comportamento da própria força de reação de radiação e da função geratriz, efetuamos uma média temporal que será esclarecida no tempo devido.

3.2.1 Dinâmica ponderomotiva

Obtenhamos primeiramente a versão transformada da equação de força (3.28). Usando as leis de transformação (3.37) e (3.38), começamos escrevendo

$$\frac{d}{dt} \left(P + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_P \right) = - \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_p + \tilde{g} \quad \Rightarrow \quad \dot{P} + \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_P = - \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_p + \tilde{g}, \quad (3.42)$$

onde

$$\tilde{g} = g_{nc} \left(X - \frac{\partial f}{\partial P}, P + \frac{\partial f}{\partial x}, t \right), \quad (3.43)$$

ou seja, da forma explícita da força $g_{nc}(x, p, t)$ tal qual mostrada em (3.33), substituímos na ordem devida as variáveis originais por suas versões transformadas.

O lado esquerdo de (3.42) tem uma derivada tomada à P constante enquanto o lado direito tem uma semelhante, mas tomada à p constante. Uma vez interessados em obter um sistema autônomo de equações somente envolvendo as variáveis X e P , queremos desfazer a confusão e manter todas as derivadas à P constante.

Sendo $f = f(x, P, t)$ e olhando com atenção para a transformação (3.38), percebemos que dela se define uma função $p = p(P, x, t)$ cuja forma explícita em termos de suas variáveis é conhecida. Podemos reescrever o hamiltoniano $H(x, p, t)$, portanto, como função unicamente de x , P e t fazendo a substituição: $H(x, p(x, P, t), t)$. Dessa maneira, ao efetuar a derivação $\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_p$, precisamos levar em conta a dependência explícita em x (que já existia) e agora a implícita via $p = p(x, P, t)$. E, assim, faremos surgir a desejada derivação à P constante no lugar da à p constante.

A aplicação da regra da cadeia na função $H(x, p(x, P, t), t)$ ao derivá-la com respeito à x mantendo P constante produz

$$\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_P = \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_p \left. \frac{\partial x}{\partial x} \right|_P + \left. \frac{\partial H}{\partial p} \right|_x \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_P, \quad (3.44)$$

de onde, já que $\left. \frac{\partial x}{\partial x} \right|_P = 1$ e $p = P + \frac{\partial f}{\partial x}$, segue

$$\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_P = \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_p + \dot{x} \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_P \left(P + \frac{\partial f}{\partial x} \right) \Rightarrow \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_P = \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_p - \dot{x} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_P. \quad (3.45)$$

Guardemos este resultado.

A regra da cadeia se fará útil novamente ao lidarmos com a derivada total com respeito ao tempo que aparece em (3.42). A derivada $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_P$ é função explícita de x , P e t sendo que x e P são funções de t . Podemos, então, decompor o operador diferencial na forma

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{P} \frac{\partial}{\partial P} \quad (3.46)$$

e substituir a derivada total por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} + \dot{x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dot{P} \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x}.$$

Levando este resultado e o da equação (3.45) em (3.42), ficamos com

$$\dot{P} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} + \dot{x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dot{P} \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x} = - \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_P + \dot{x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \tilde{g}$$

que se simplifica para

$$\left(1 + \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x}\right) \dot{P} = - \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_P - \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} + \tilde{g},$$

ou ainda, rearranjando as derivadas no lado direito e lembrando da transformação (3.40), para

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x}\right) \dot{P} &= - \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_P \left(H + \frac{\partial f}{\partial t} \right) + \tilde{g} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(1 + \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x}\right) \dot{P} &= - \left. \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} \right|_P + \tilde{g} \end{aligned} \quad (3.47)$$

O sistema autônomo menciona derivadas do hamiltoniano respectivamente a suas variáveis X e P . A fim de identificar, portanto, $\left. \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} \right|_P$ em termos de $\left. \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} \right|_P$ podemos olhar para a transformação (3.37). Dela obtém-se uma função $X = X(x, P, t)$ cuja forma explícita nos permite, novamente pela regra da cadeia, obter

$$\left. \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} \right|_P = \left. \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} \right|_P \cdot \left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_P \quad (3.48)$$

e identificar em seguida, substituindo $X = x + \frac{\partial f}{\partial P}$,

$$\left. \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} \right|_P = \left. \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} \right|_P \cdot \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_P \left(x + \frac{\partial f}{\partial P} \right) \Rightarrow \left. \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} \right|_P = \left. \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} \right|_P \left(1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial P} \right) \quad (3.49)$$

Levando este último resultado (3.49) em (3.47), obtemos

$$\left(1 + \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x}\right) \dot{P} = - \left. \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} \right|_P \left(1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial P} \right) + \tilde{g} \quad (3.50)$$

que oportunamente se simplifica para

$$\dot{P} = - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} + \frac{\tilde{g}}{1 + \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x}}, \quad (3.51)$$

contando com $\frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x} \neq -1$ para todos os pontos $(x(t), P(t), t)$ que são solução do sistema.

O processo apresentado reproduz “manualmente”, digamos, o que faz a transformação canônica caso tomássemos $\tilde{g} = 0$. Ao fazê-lo, a equação (3.51) resume-se a (3.41) como o esperado. E por isso tem-se fortes razões para acreditar que a última divisão pode ser feita sem maiores preocupações.

Porém, a equação (3.51) não é a versão autônoma da equação de força que queremos. Ainda há um último passo a ser tomado que removerá as dependências na escala rápida de tempo da equação, herdadas pela função f e \tilde{g} . Mas antes de fazê-lo, obtenhamos a versão transformada prévia da equação de velocidade (3.27) que faz par com (3.28).

Substituindo a transformação (3.37) na equação (3.27), partimos de

$$\frac{d}{dt} \left(X - \frac{\partial f}{\partial P} \Big|_x \right) = \frac{\partial H}{\partial p} \Big|_x \Rightarrow \dot{X} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial P} \Big|_x = \frac{\partial H}{\partial p} \Big|_x. \quad (3.52)$$

A mesma decomposição (3.46) pode ser aplicada a $\frac{\partial f}{\partial P}$ de modo a obter

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial P} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial P} + \dot{x} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial P} + \dot{P} \frac{\partial^2 f}{\partial P^2}$$

e de onde, lembrando que $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \Big|_x$ e substituindo a derivada acima em (3.52), progredimos para

$$\begin{aligned} \dot{X} - \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial P} - \frac{\partial H}{\partial p} \Big|_x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial P} - \dot{P} \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} &= \frac{\partial H}{\partial p} \Big|_x \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{X} - \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial P} - \dot{P} \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} &= \frac{\partial H}{\partial p} \Big|_x \cdot \left(1 + \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Analogamente ao feito em (3.48), podemos identificar

$$\frac{\partial H}{\partial P} \Big|_x = \frac{\partial H}{\partial p} \Big|_x \cdot \frac{\partial p}{\partial P} \Big|_x \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial P} \Big|_x = \frac{\partial H}{\partial p} \Big|_x \cdot \left(1 + \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x} \right) \quad (3.54)$$

que é exatamente o membro direito de (3.53). Dessa forma,

$$\dot{X} - \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial P} - \dot{P} \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} = \frac{\partial H}{\partial P} \Big|_x$$

ou ainda, da transformação (3.40) do hamiltoniano,

$$\begin{aligned} \dot{X} - \dot{P} \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} &= \frac{\partial}{\partial P} \Big|_x \left(H + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{X} - \dot{P} \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} \Big|_x. \end{aligned} \quad (3.55)$$

O lado direito de (3.55) está quase como gostaríamos, exceto por a derivação de \mathcal{K} com respeito à P ser tomada à x constante. A fim de substituí-la por uma à X constante, observamos que a transformação (5.4) define $X = X(x, P, t)$ cuja forma funcional é conhecida. Assim, fazendo a substituição $\mathcal{K} = \mathcal{K}(X(x, P, t), P)$, novamente podemos usar a regra da cadeia.

Reescrevendo

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} \Big|_x = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} \Big|_X \cdot \frac{\partial P}{\partial P} \Big|_x + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} \Big|_P \cdot \frac{\partial X}{\partial P} \Big|_x, \quad (3.56)$$

já que $\frac{\partial P}{\partial P} \Big|_x = 1$ e $X = x + \frac{\partial f}{\partial P} \Big|_x$, podemos identificar

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} \Big|_x = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} \Big|_X + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} \Big|_P \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial P^2}. \quad (3.57)$$

Levando (5.24) em (5.22), segue

$$\begin{aligned} \dot{X} - \dot{P} \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} \Big|_X + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} \Big|_P \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} \\ \dot{X} &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} \Big|_X + \left(\dot{P} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} \Big|_P \right) \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} \end{aligned} \quad (3.58)$$

que se simplificaria para $\dot{X} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} \Big|_X$ caso $\dot{P} = - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} \Big|_P$. Porém, com a consideração da força RR, usando o resultado (5.18), temos

$$\dot{X} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} \Big|_X + \left(\frac{\tilde{g}}{1 + \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x}} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial P^2}. \quad (3.59)$$

Em síntese, o sistema de equações transformadas que obtemos é

$$\dot{P} = - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} + \frac{\tilde{g}}{1 + \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x}} \quad (3.60)$$

e

$$\dot{X} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} + \left(\frac{\tilde{g}}{1 + \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x}} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial P^2}. \quad (3.61)$$

As duas equações (3.60) e (3.61) carregam a ação do termo adicional devido a RR nas variáveis ponderomotivas, cuja transformação é sempre legítima. Entretanto, a transformação pode somente remover a dependência na escala rápida de tempo da dinâmica quando o termo relacionado a RR é ausente, caso em que o sistema é autônomo.

Quando o termo da RR é incluso, as variáveis ponderomotivas X e P adquirem dependência na escala rápida de tempo devido ao comportamento da função f e da própria força \tilde{g} . Faz-se necessário, então, a procura de um passo a mais que aproxime as equações (3.60) e (3.61) da sua versão média. O procedimento proposto a fazê-lo é discutido na próxima seção, onde faremos a

3.2.2 Média temporal final das equações de movimento inclusa a reação de radiação

A expressão (3.33), que dá a força g completa em termos das variáveis originais, é extensa. A fim de lidar com uma versão mais facilmente tratável mas ainda acurada dela, descartaremos todas as parcelas das derivadas que envolvem alguma potência do fator x/σ^2 . E assim faremos todas as vezes que elas, eventualmente, aparecerem. Afinal, os processos que estamos interessados acontecem sempre a vizinhança de $x = 0$, onde tais termos são minúsculos comparados aos demais, e além do mais usamos $\sigma = 100$ ou $\sigma = 1000$, o que contribui para o descarte das respectivas parcelas. Procedendo assim, obtemos a forma simplificada

$$g = -\tau \varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \left(\gamma - \frac{p}{\alpha} \right) \cos(x - t) \quad (3.62)$$

que tomará o lugar da força RR.

Olhando para a força (3.62) e a função geratriz f , percebemos que a dependência temporal explícita surge combinada com a coordenada espacial x em um termo de fase $\theta(x, t) = x(t) - t$. Seguiremos, para tirar vantagem desse fato, uma técnica de cálculo de médias inspirada na proposta do Landau & Lifshitz³.

³Capítulo V de [14], p. 130

É útil reescrever as transformações (3.37) e (3.38) da forma

$$x = X + \delta x \tag{3.63}$$

e

$$p = P + \delta p, \tag{3.64}$$

onde as quantidades $\delta x = -\frac{\partial f}{\partial P}$ e $\delta p = \frac{\partial f}{\partial x}$, que serão encaradas do ponto de vista perturbativo, são conhecidas em termos da função geratriz e são as responsáveis por resguardar o comportamento na escala rápida de tempo das variáveis originais, respectivamente, x e p .

A precisão de nossa teoria é até ordem quadrática na amplitude máxima de potencial. Será suficiente, portanto, considerar a função geratriz até ordem primeira naquela. Ou seja, para os devidos fins, consideraremos a função geratriz como sendo

$$f(x, P, t) = \varphi_0 \frac{e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}}{1 - \frac{P}{\alpha\Gamma}} \sin(x - t) \tag{3.65}$$

de onde identificamos, portanto,⁴

$$\delta x = -\varphi_0 \frac{e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}}{\alpha\Gamma^3 \left(1 - \frac{P}{\alpha\Gamma}\right)^2} \sin(x - t) \tag{3.66}$$

e

$$\delta p = \varphi_0 \frac{e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}}{1 - \frac{P}{\alpha\Gamma}} \cos(x - t). \tag{3.67}$$

A média temporal que será empregada às equações (3.66) e (3.67) refere-se a um ciclo completo da variável $\theta(x(t), t)$. Dada uma função arbitrária $h = h(x - t)$, o seu valor médio, ou a sua média, será denotado por e calculado através de

$$\langle h \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta. \tag{3.68}$$

Começemos a obter a versão média da equação de força (3.60). O processo de tomar a média somente surte efeito nos termos em que há dependência na escala rápida de tempo, via a fase θ . Ao fazê-lo, queremos identificar uma função unicamente das variáveis transformadas, *i.e.*, alguma função $\Psi = \Psi(X, P)$ a princípio

⁴Repare na derivação (3.67) o descarte da parcela com o fator x/σ^2 .

desconhecida, de modo que

$$\dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} + \Psi(X, P) \quad (3.69)$$

sendo, então,

$$\Psi(X, P) = \left\langle \frac{\tilde{g}}{1 + \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x}} \right\rangle. \quad (3.70)$$

A forma altamente não linear do termo que se propõe tomar a média acima dificulta o processo. Se faz oportuno prepará-lo anteriormente à tomada da média. Primeiramente, o fator $\left(1 + \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x}\right)^{-1}$ lembra a soma de uma progressão geométrica. Supondo possível a sua expansão em uma série de potências da forma

$$\frac{1}{1 + \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x}} = 1 - \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x}\right)^2 + \dots,$$

podemos manter somente os dois primeiros termos já que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x} = \varphi_0 \frac{e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}}{\alpha \Gamma^3 \left(1 - \frac{P}{\alpha \Gamma}\right)^2} \cos(x - t), \quad (3.71)$$

isto é, é de primeira ordem na amplitude máxima de potencial assim como a força \tilde{g} . Consideramos, então,

$$\frac{1}{1 + \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x}} = 1 - \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x} \quad (3.72)$$

e fazemos o produto pela força g . A função que, portanto, devemos nos preocupar em obter a média é

$$\frac{\tilde{g}}{1 + \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x}} = \tilde{g} - \tilde{g} \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x}. \quad (3.73)$$

que acaba sendo de segunda ordem em φ_0 .

Pela linearidade da média, podemos efetuá-la através de duas separadamente:

$$\Psi(X, P) = \langle \tilde{g} \rangle - \left\langle \tilde{g} \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x} \right\rangle. \quad (3.74)$$

Tratemos primeiramente da média da força \tilde{g} . Sendo ela de primeira ordem em φ_0 , assim como as quantidades perturbativas (3.66) e (3.67), podemos tomar a expansão até primeira ordem em δx e δp dela:

$$g(X + \delta x, P + \delta p, t) = g(X, P, t) + \frac{\partial g}{\partial x} \delta x + \frac{\partial g}{\partial p} \delta p, \quad (3.75)$$

entendendo que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{x=X, p=P} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial p} = \frac{\partial g}{\partial p} \Big|_{x=X, p=P}. \quad (3.76)$$

De (3.62), as derivadas requeridas são facilmente obtidas, a saber

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \tau \varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \left(\gamma - \frac{p}{\alpha} \right) \sin(x - t) \quad (3.77)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial p} = \tau \varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{p}{\alpha \gamma} \right) \cos(x - t), \quad (3.78)$$

e, mais uma vez pela linearidade, a média de $\langle \tilde{g} \rangle$ pode ser escrita como a soma de três:

$$\langle \tilde{g} \rangle = \langle g(X, P, t) \rangle + \left\langle \frac{\partial g}{\partial x} \delta x \right\rangle + \left\langle \frac{\partial g}{\partial p} \delta p \right\rangle. \quad (3.79)$$

Calculamos cada uma delas separadamente. A primeira, $\langle g(X, P, t) \rangle$, é nula uma vez que depende explicitamente de $\cos(X - t)$ cuja valor médio é zero:

$$\langle g(X, P, t) \rangle = \tau \varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \left(\frac{P}{\alpha} - \Gamma \right) \langle \cos(X - t) \rangle = 0. \quad (3.80)$$

Para a segunda parcela, a fim de manter a ordem de expansão até φ_0^2 , podemos usar a expressão (3.66) trocando x por X e calcular

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial g}{\partial x} \delta x \right\rangle &= \left\langle \tau \varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \left(\Gamma - \frac{P}{\alpha} \right) \sin(X - t) \left(-\varphi_0 \frac{e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}}{\alpha \Gamma^3 \left(1 - \frac{P}{\alpha \Gamma} \right)^2} \sin(X - t) \right) \right\rangle \\ &= -\tau \varphi_0^2 \frac{\alpha^2 \Gamma^2 (\alpha \Gamma - P)}{\alpha^2 \Gamma^3 (\alpha \Gamma - P)^2} e^{-2\frac{x^2}{\sigma^2}} \langle \sin^2(X - t) \rangle \\ &= -\tau \varphi_0^2 \frac{e^{-2\frac{x^2}{\sigma^2}}}{\Gamma (\alpha \Gamma - P)} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

já que $\langle \sin^2(X - t) \rangle = 1/2$. Assim,

$$\left\langle \frac{\partial g}{\partial x} \delta x \right\rangle = -\frac{\tau \varphi_0^2}{2} \frac{e^{-2\frac{x^2}{\sigma^2}}}{\Gamma (\alpha \Gamma - P)}. \quad (3.81)$$

Para a terceira e última parcela de (3.79), com os mesmos argumentos usados no

cálculo anterior, calculamos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial g}{\partial p} \delta p \right\rangle &= \left\langle \tau \varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{P}{\alpha \Gamma} \right) \cos(X - t) \varphi_0 \frac{e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}}{1 - \frac{P}{\alpha \Gamma}} \cos(X - t) \right\rangle \\ &= \tau \varphi_0^2 \frac{\alpha \Gamma (\Gamma - P)}{\alpha \Gamma (\alpha \Gamma - P)} e^{-2\frac{x^2}{\sigma^2}} \langle \cos^2(X - t) \rangle \\ &= \tau \varphi_0^2 \frac{\Gamma - P}{\alpha \Gamma - P} e^{-2\frac{x^2}{\sigma^2}} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

porque $\langle \cos^2(X - t) \rangle$ também é $1/2$. Assim,

$$\left\langle \frac{\partial g}{\partial p} \delta p \right\rangle = \frac{\tau \varphi_0^2}{2} \frac{\Gamma - P}{\alpha \Gamma - P} e^{-2\frac{x^2}{\sigma^2}} \quad (3.82)$$

Antes de levar (3.80), (3.81) e (3.82) em (3.79), é vantajoso calcular primeiramente o valor médio da outra parcela de (3.74). Mais uma vez fazendo valer a expansão até ordem φ_0^2 , já que a derivada $\frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x}$ é linear em φ_0 , para o cálculo a seguir, substituiremos \tilde{g} por sua primeira parcela de expansão exibida em (3.75), também linear em φ_0 . Segue, então,

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{g} \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x} \right\rangle &= \left\langle \left(-\tau \varphi_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \left(\Gamma - \frac{P}{\alpha} \right) \cos(X - t) \right) \varphi_0 \frac{e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}}{\alpha \Gamma^3 \left(1 - \frac{P}{\alpha \Gamma} \right)^2} \cos(X - t) \right\rangle \\ &= -\tau \varphi_0 e^{-2\frac{x^2}{\sigma^2}} \frac{\alpha^2 \Gamma (\alpha \Gamma - P)}{\alpha^2 \Gamma^3 (\alpha \Gamma - P)} \langle \cos^2(X - t) \rangle \\ &= -\tau \varphi_0 e^{-2\frac{x^2}{\sigma^2}} \frac{(\alpha \Gamma - P)}{\Gamma (\alpha \Gamma - P)} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

que resulta

$$\left\langle \tilde{g} \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x} \right\rangle = -\frac{\tau \varphi_0^2}{2} \frac{e^{-2\frac{x^2}{\sigma^2}}}{\Gamma (\alpha \Gamma - P)}. \quad (3.83)$$

O valor médio (3.83) é idêntico ao (3.81). Portanto, agora sim, levando (3.80), (3.81) e (3.82) em (3.79) e, em seguida, juntando com (3.83) em (3.74), haverá um cancelamento:

$$\begin{aligned} \Psi(X, P) &= \langle \tilde{g} \rangle - \left\langle \tilde{g} \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x} \right\rangle \\ &= 0 - \frac{\tau \varphi_0^2}{2} \frac{e^{-2\frac{x^2}{\sigma^2}}}{\Gamma (\alpha \Gamma - P)} + \frac{\tau \varphi_0^2}{2} \frac{\Gamma - P}{\alpha \Gamma - P} e^{-2\frac{x^2}{\sigma^2}} + \frac{\tau \varphi_0^2}{2} \frac{e^{-2\frac{x^2}{\sigma^2}}}{\Gamma (\alpha \Gamma - P)} \\ &= \frac{\tau \varphi_0^2}{2} \frac{\Gamma - P}{\alpha \Gamma - P} e^{-2\frac{x^2}{\sigma^2}}. \end{aligned}$$

Portanto, a função expressa unicamente em termos das variáveis transformadas, de baixa frequência, que completa a equação de força de nosso modelo é

$$\Psi(X, P) = \frac{\tau\varphi_0^2}{2} \frac{\Gamma - P}{\alpha\Gamma - P} e^{-2\frac{X^2}{\sigma^2}} \quad (3.84)$$

de onde, levando em (3.70),

$$\dot{P} = -\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial X} + \frac{\tau\varphi_0^2}{2} \frac{\Gamma - P}{\alpha\Gamma - P} e^{-2\frac{X^2}{\sigma^2}}. \quad (3.85)$$

É vez de nos concentrarmos na obtenção da versão média da equação de velocidade (3.71). Para isto, precisaremos da relação de ortogonalidade entre as funções seno e cosseno. Em geral, vale o resultado: se m ou n é um inteiro ímpar, então ⁵

$$\langle \cos^m x \sin^n x \rangle = 0. \quad (3.86)$$

Como anteriormente, estamos interessados em identificar uma função $\Omega = \Omega(X, P)$ de modo que

$$\dot{X} = \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial P} + \Omega(X, P) \quad (3.87)$$

onde

$$\Omega(X, P) = \left\langle \left(\frac{\tilde{g}}{1 + \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x}} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} \right\rangle. \quad (3.88)$$

Mais uma vez empregaremos o tratamento que consiste em usar (3.71) para escrever

$$\begin{aligned} \Omega(X, P) &= \left\langle \tilde{g} \left(1 - \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} \right\rangle \\ &= \left\langle \tilde{g} \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} \right\rangle - \left\langle \tilde{g} \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.89)$$

mas ao invés de calcular a média referida em cada parcela vamos argumentar que seus valores são nulos.

Com relação a parcela $\left\langle \tilde{g} \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} \right\rangle$, uma vez que tanto \tilde{g} como $\frac{\partial^2 f}{\partial P^2}$ são de primeira ordem em φ_0 , para efetuar a média, basta que substituamos x por X e p por P . Pois fazendo isso, a média deve surtir efeito em um fator $\cos(X - t) \sin(X - t)$ que aparecerá do produto, herdado o $\cos(X - t)$ de \tilde{g} e $\sin(X - t)$ de $\frac{\partial^2 f}{\partial P^2}$. Pelo resultado

⁵A demonstração do resultado encontra-se no Apêndice.

(3.86), tal média é nula e, portanto,

$$\left\langle \tilde{g} \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} \right\rangle = 0 \quad (3.90)$$

Argumento semelhante vale para a parcela $\left\langle \tilde{g} \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} \right\rangle$. Ao efetuar as trocas x por X e p por P , se produz um fator $\cos^2(X-t) \sin(X-t)$ que, novamente evocando (3.86), acaba por anular o valor da média. Assim,

$$\left\langle \tilde{g} \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} \right\rangle = 0 \quad (3.91)$$

e, então,

$$\Omega(X, P) = 0. \quad (3.92)$$

A equação que completa o sistema ao lado de (3.85) é, daí,

$$\dot{X} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P}.$$

Em resumo, após efetuar uma média temporal na equações (5.27) e (5.28), obtemos o sistema autônomo de equações

$$\dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} + \frac{\tau \varphi_0^2}{2} \frac{\Gamma - P}{\alpha \Gamma - P} e^{-2\frac{X^2}{\sigma^2}} \quad (3.93)$$

$$\dot{X} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} \quad (3.94)$$

onde

$$\mathcal{K}(X, P) = \Gamma + \frac{\varphi_0^2}{4\alpha} \frac{e^{-2\frac{X^2}{\sigma^2}}}{\Gamma^3 \left(1 - \frac{P}{\alpha \Gamma}\right)^2}. \quad (3.95)$$

3.2.3 Ganho de energia cinética

A fim de estudar os resultados provenientes do sistema (3.93)&(3.94) casando-os com os da Seção 4.2, devemos admitir $\alpha = 1$. Fazendo isso, uma simplificação muitíssimo bem-vinda ocorre. Tomando $\alpha = 1$, a equação (3.93) simplifica-se para

$$\dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} + \frac{\tau \varphi_0^2}{2} e^{-2\frac{X^2}{\sigma^2}} \quad (3.96)$$

e acabamos por ter em mãos uma equação do tipo $\dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} + F(X)$, isto é, em que o termo adicional que introduz os efeitos da RR à dinâmica se torna unicamente dependente explicitamente da posição X , não dependendo mais explicitamente do momentum P . Por comparação,

$$F(X) = \frac{\tau \varphi_0^2}{2} e^{-2\frac{X^2}{\sigma^2}}. \quad (3.97)$$

É possível, portanto, responsabilizar a proveniência de $F(X)$ a um potencial associado a \mathcal{H} definido da forma

$$\mathcal{H}(X, P) = \mathcal{K}(X, P) + U(X), \quad (3.98)$$

onde $U(X)$ é uma função de energia potencial do estilo *fictícia* devendo satisfazer a equação

$$\frac{dU}{dX} = -F(X). \quad (3.99)$$

De fato, para o hamiltoniano \mathcal{H} definido tal qual em (3.98), ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial X} \\ &= (-\dot{P} + F(X)) + \frac{dU}{dX} \\ &= (-\dot{P} + F(X)) - F(x) \\ &= -\dot{P} \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} + \frac{\partial U}{\partial P} \\ &= \dot{X} + 0 \\ &= \dot{X} \end{aligned}$$

de modo que, para ele, o sistema de equações incorporando os efeitos da RR é da forma hamiltoniana usual:

$$\dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} \quad (3.100)$$

$$\dot{X} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}. \quad (3.101)$$

Dotada de alguma condição extra adequada, como uma condição inicial, por exemplo, o fato de $F(X)$ ser contínua com derivada contínua em \mathbb{R} garante que

existe uma única solução $U(X)$ para a equação (3.99) [64]. Faz sentido, portanto, procurar por ela.

É importante que, ao ser injetada na região de choque, a partícula cujo movimento estamos investigando não experimente valor apreciável de energia potencial, que interaja lentamente com a onda. Assim, buscamos uma função $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que seja solução do problema

$$\begin{cases} \frac{dU}{dX} = -\frac{\tau\varphi_0^2}{2} e^{-2\frac{X^2}{\sigma^2}}, & \forall X \in (-\infty, \infty) \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} U(X) = 0, \end{cases} \quad (3.102)$$

Alguma primitiva de $F(X)$, claro, será a solução que buscamos. Assim, para começar a obtê-la, tomamos $a \in \mathbb{R}$, fazemos

$$\int_a^X \frac{dU}{dX'} dX' = -\frac{\tau\varphi_0^2}{2} \int_a^X e^{-2\frac{X'^2}{\sigma^2}} dX' \Rightarrow U(X) - U(a) = -\frac{\tau\varphi_0^2}{2} \int_a^X e^{-2\frac{X'^2}{\sigma^2}} dX'$$

e, em seguida, passamos ao limite $a \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow -\infty} [U(X) - U(a)] &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{\tau\varphi_0^2}{2} \int_a^X e^{-2\frac{X'^2}{\sigma^2}} dX' \right) \\ U(X) - 0 &= -\frac{\tau\varphi_0^2}{2} \int_{-\infty}^X e^{-2\frac{X'^2}{\sigma^2}} dX'. \end{aligned}$$

Uma mudança de variável $u(X') = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} X'$ nos fará chegar à função Erro. Fazendo a mudança, obtemos

$$\begin{aligned} U(X) &= -\frac{\tau\varphi_0^2}{2} \int_{u(-\infty)}^{u(X)} e^{-u^2} \frac{\sigma}{\sqrt{2}} du \\ &= -\frac{\tau\varphi_0^2}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{2}}{\sigma} X} e^{-u^2} du. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Definindo a função especial $\text{erf} : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, comumente chamada de função Erro, da forma

$$\text{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt, \quad (3.104)$$

ao separar a integral que define U em (3.103) como

$$U(X) = -\frac{\tau\sigma\varphi_0^2}{2\sqrt{2}} \left[\int_{-\infty}^0 e^{-u^2} du + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{\sigma}X} e^{-u^2} du \right]$$

podemos relacioná-la com a recém definida (3.104) tomando

$$\begin{aligned} U(X) &= -\frac{\tau\sigma\varphi_0^2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[-\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-\infty} e^{-u^2} du + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{\sigma}X} e^{-u^2} du \right] \\ &= -\frac{\tau\sigma\varphi_0^2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(X\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Assim, a solução que buscamos para o problema (3.102) é a função

$$U(X) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{8} \tau\sigma\varphi_0^2 \left[1 + \operatorname{erf}\left(X\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right) \right]. \quad (3.106)$$

Uma característica notável do potencial fictício obtido é que há limites finitos para ele quando $X \rightarrow \pm\infty$. Isso é importante porque, ao ser ejetada, a partícula atinge uma velocidade final, quer seja refletida ou quer atravesse a barreira máxima central de potencial ponderomotivo. Isto é, a partir de certo ponto não pode mais haver interação com nenhuma espécie de potencial e a identificação deste está de acordo com isto.

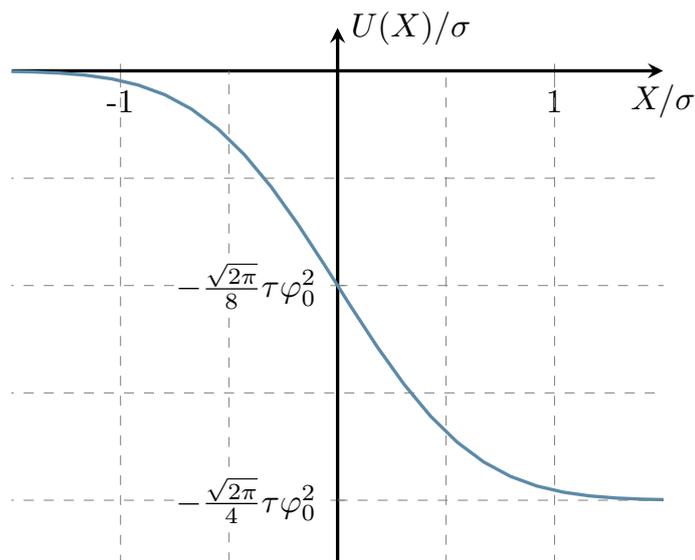


Figura 3.8: Gráfico da energia potencial fictícia (3.106).

Em resumo, a dinâmica do centro-guia de uma partícula posta a interagir com o

sistema proposto é regido pelas equações (3.100) e (3.101) segundo o hamiltoniano

$$\mathcal{H}(X, P) = \Gamma + \frac{\varphi_0^2}{4} \frac{e^{-\frac{2X^2}{\sigma^2}}}{\Gamma^3 \left(1 - \frac{P}{\Gamma}\right)^2} - \frac{\sqrt{2\pi}}{8} \tau \sigma \varphi_0^2 \left[1 + \operatorname{erf}\left(X \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right)\right]. \quad (3.107)$$

A principal previsão que o hamiltoniano (3.107) pode prover, no que estamos muito interessados, é a parcela de energia cinética ganha pela partícula ao ser ejetada da região de interação com o potencial efetivo (a combinação do ponderomotivo com o fictício responsável pela RR). Devido ao formato canônico das equações (3.100) e (3.101), o hamiltoniano autônomo ligado a elas, que é a energia total do sistema, é uma constante de movimento. Podemos, portanto, estabelecer uma conexão entre as condições iniciais e as finais da partícula. Que, se tem energia inicial suficiente para atravessar a barreira central de máximo potencial, então terá um incremento de energia cinética $\Delta\gamma$ providenciado pela RR. Tal incremento pode ser calculado da seguinte maneira.

Vamos identificar o valor fixo da energia total \mathcal{H} em termos das condições da partícula quando é injetada (situação a qual nos referimos pelo limite $X \rightarrow -\infty$), ejetada (analogamente, $X \rightarrow \infty$) e aplicar o resultado

$$\Delta\mathcal{H} = 0. \quad (3.108)$$

Quando injetada, por ser longe o suficiente da região central, onde os potenciais não têm valores apreciáveis, a posição e momentum linear transformados da partícula se confundem com os originais (não transformados). Assim, inicialmente, a energia total do sistema está concentrada na forma cinética, a inicial da partícula, e vale

$$\mathcal{H}(X \rightarrow -\infty) = \gamma_0, \quad (3.109)$$

onde γ_0 é a energia cinética inicial da partícula.

Uma vez ultrapassada a barreira de máximo potencial em $X = 0$ e passado tempo o suficiente para, a partícula adquire uma velocidade final, a de ejeção, e viaja indefinidamente no sentido de $X > 0$ com energia cinética fixa γ . Novamente, estamos usando a confusão das variáveis transformadas e originais no limite superior da dinâmica. Usando $X \rightarrow \infty$ como a condição de a partícula estar muito longe da

região central, temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}(X \rightarrow +\infty) &= \gamma + \lim_{X \rightarrow \infty} \left[\frac{\varphi_0^2}{4} \frac{e^{-\frac{2X^2}{\sigma^2}}}{\Gamma^3 \left(1 - \frac{P}{\Gamma}\right)^2} - \frac{\sqrt{2\pi}}{8} \tau \sigma \varphi_0^2 \left[1 + \operatorname{erf}\left(X \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right)\right] \right] \\
 &= \gamma + 0 - \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \tau \sigma \varphi_0^2 \\
 &= \gamma - \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \tau \sigma \varphi_0^2 \tag{3.110}
 \end{aligned}$$

Levando (3.110) e (3.109) em (3.108), ficamos com

$$\Delta\mathcal{H} = 0 \Rightarrow \mathcal{H}(X \rightarrow +\infty) = \mathcal{H}(X \rightarrow -\infty) \Rightarrow \gamma - \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \tau \sigma \varphi_0^2 = \gamma_0$$

donde

$$\Delta\gamma = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \tau \sigma \varphi_0^2 \tag{3.111}$$

A relação (3.111) mostra que a variação de energia cinética é não negativa, o que significa ganho. Além disso, os efeitos acelerativos de valores tipicamente pequenos de τ podem ser ampliados por valores suficientemente grandes do comprimento característico σ e da amplitude máxima de potencial φ_0 . A última ainda mais no sentido de o ganho de energia ser proporcional ao seu quadrado, mesmo que consideremos a ordem de grandeza de σ duas ou três vezes maior.

Percebemos também, segundo (3.111), a independência da velocidade inicial para o ganho de energia. Este resultado é outro muito bem-vindo. Para um ganho fixo de energia que se esteja interessado, basta uma velocidade inicial suficientemente grande para haver o cruzamento da barreira máxima de potencial. Nada além se requer para a aceleração, pelo menos dentro da região de validade das considerações que fizemos até chegar em (3.111).

3.2.4 Resultados Numéricos

A fim de fazer um primeiro teste e ilustrar o resultado que obtivemos, na Figura 3.9 exibem-se três curvas sobrepostas em função do tempo. As condições iniciais da partícula que foram usadas na simulação são $x_0 = -4\sigma$ (longe o bastante da região central) e $v_0 = 0.2$, isto é, a velocidade inicial é 20% da velocidade da luz no vácuo. Os parâmetros escolhidos são $\varphi_0 = 0.5$, $\tau = 0.0025$ (região do raio-X mole) e $\sigma = 10^3$. A curva em azul é a velocidade da partícula calculada pelo sistema original (3.27)&(3.28) tomando $\alpha = 1$. A curva em preto é a média da curva em azul

calculada numericamente por uma janela móvel. Já a curva em vermelho é a previsão da velocidade do centro-guia da partícula através do sistema (3.100)&(3.101).

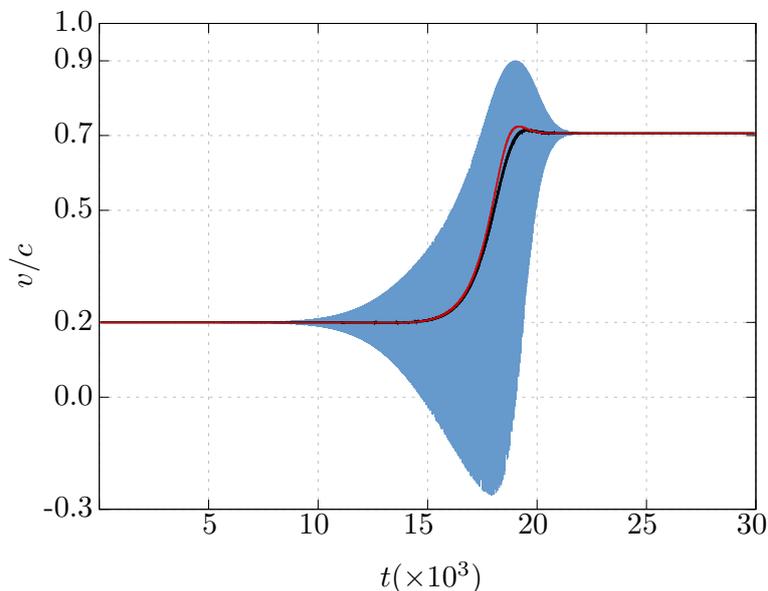


Figura 3.9: Velocidade *versus* tempo: sistema original em azul, média calculada por janela móvel do sistema original em preto e o modelo teórico em vermelho. Parâmetros: $\varphi_0 = 0.5$, $\tau = 0.0025$, $v_0 = 0.2$ e $\sigma = 10^3$.

Nota-se na Figura 3.9 uma boa concordância entre a curva obtida pela média de janela móvel (em preto) e a prevista pelo modelo teórico (em vermelho). A simulação também revela um importante resultado: a curva teórica prevê muito satisfatoriamente a velocidade final da partícula, $v_f \approx 0.72$.

Calculando diretamente o ganho de energia cinética simplesmente por $\delta\gamma$ pelos dados da simulação do sistema original, obtemos, com três casa decimais,

$$\Delta\gamma = \sqrt{1 + p^2(t_f)} - \sqrt{1 + p^2(0)} \approx 0.392 \quad (3.112)$$

enquanto através da expressão prevista pelo modelo teórico (3.111) calculamos, também com três casa decimais,⁶

$$\Delta\gamma = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \cdot 0.0025 \cdot 10^3 \cdot (0.5)^2 = 0.392. \quad (3.113)$$

É notável que a dependência temporal do problema original e a respectiva variação de energia se traduza bem em um potencial efetivo não localizado e assimétrico no modelo médio e autônomo que obtemos.

⁶Usamos a aproximação $\pi = 3.14159$.

A expressão (3.111) sugere ainda que o ganho de energia cinética é independente da velocidade inicial da partícula, como notamos antes. As Figuras 5.3 e 5.4 foram construídas para verificarmos este fato.

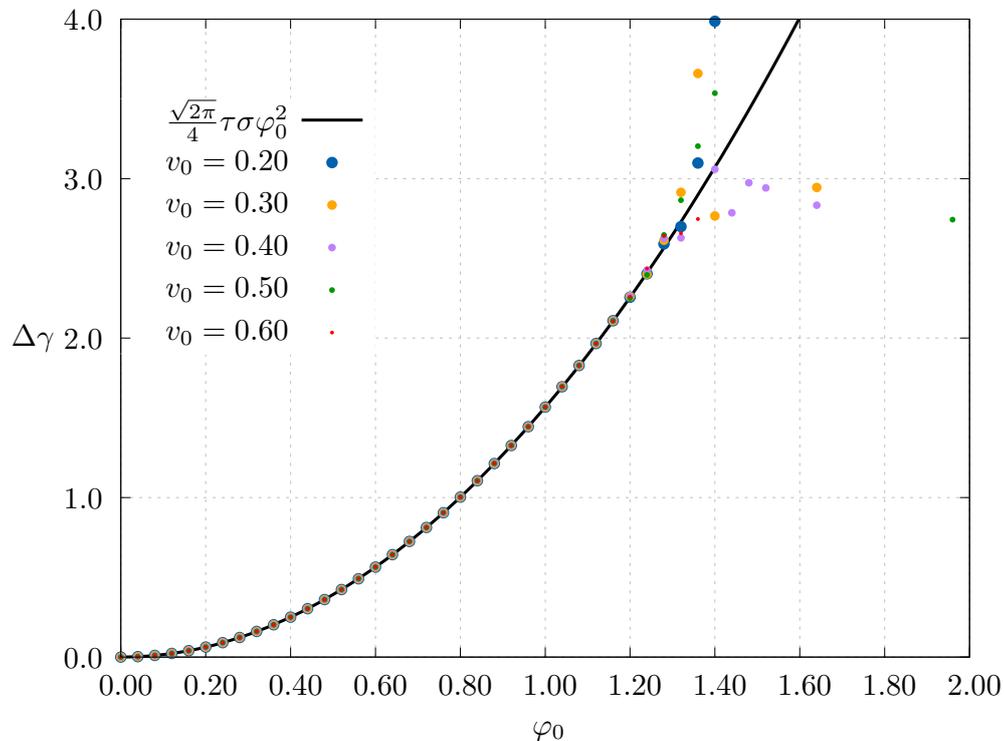


Figura 3.10: Ganho de energia cinética *versus* amplitude máxima de potencial. A curva contínua em preto é a previsão do modelo teórico enquanto os pontos em cores (cada cor fazendo corresponder a uma velocidade diferente de injeção) são calculados pelo sistema original (3.27)&(3.28). Parâmetros: $\tau = 0.0025$ e $\sigma = 10^3$.

Uma vez fixados os parâmetros τ e σ , a previsão teórica é de o ganho de energia cinética ser proporcional ao quadrado da amplitude máxima de potencial, o fator φ_0^2 . Assim, construímos a Figura 3.10 para comparar o ganho de energia cinética, dada a amplitude máxima de potencial φ_0 , para cinco valores diferentes da velocidade inicial da partícula a fim de testar a previsão.

Na Figura 3.10, a curva contínua em preto refere-se à previsão da expressão (3.111) fixados $\tau = 0.0025$ e $\sigma = 10^3$. Já os pontos coloridos (cada cor fazendo corresponder a uma velocidade diferente de injeção, conforme exibido na própria figura) são calculados pelo sistema original (3.27)&(3.28).

O cálculo consiste em, fixados $\tau = 0.0025$ e $\sigma = 10^3$, variar a amplitude φ_0 no sistema e guardar o ganho de energia cinética respectivo calculado para cada um dos valores de velocidade inicial exibidos na figura. Os pontos em azul, por exemplo,

correspondem ao ganho de energia previsto pelo sistema original quando a velocidade inicial é $v_0 = 0.2$. Da forma $(\Delta\gamma, \varphi_0)$, portanto, os pontos são colecionados e sobrepostos à curva prevista pelo modelo teórico a fim de comparação.

Percebemos que, para valores da amplitude φ_0 até as imediações de $\varphi_0 = 1.3$, há uma grande concordância. Todos os pontos estão sobre a curva teórica em preto até o referido limite. As diferentes cores correspondem às diferentes velocidades de injeção enquanto os tamanhos variados dos pontos, sendo cada tamanho também referente a uma velocidade inicial, buscam expor a posição concêntrica em que se encontram. Tal posição revela a independência da velocidade inicial no ganho de energia cinética como previsto pelo modelo teórico, mas até o limite de amplitude anteriormente citado.

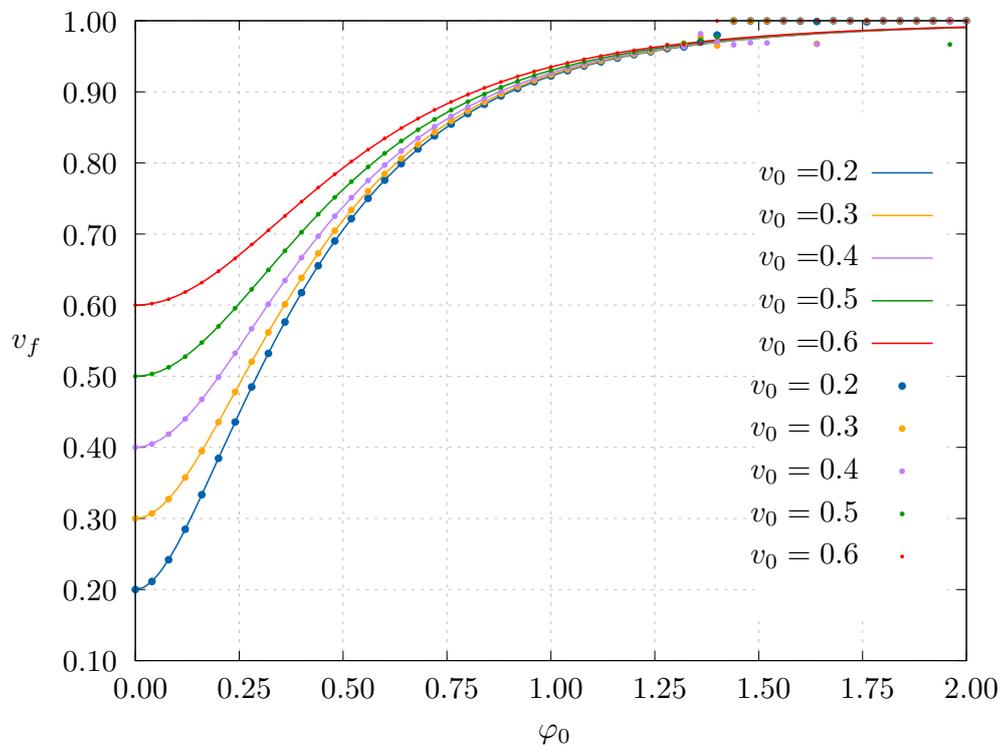


Figura 3.11: Velocidade *versus* tempo: sistema original em azul, média calculada por janela móvel do sistema original em preto e o modelo teórico em vermelho. Parâmetros: $\varphi_0 = 0.5$, $\tau = 0.0025$, $v_0 = 0.2$ e $\sigma = 10^3$.

Para enfatizar a comparação sob outro ponto de vista, a Figura 3.11 mostra curvas contínuas as quais se referem à expressão obtida isolando-se a velocidade final de ejeção da partícula segundo prevista pela expressão (3.111). A expressão se

exibe em função da amplitude φ_0 e da velocidade inicial v_0 . Fizemos

$$\Delta\gamma = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \tau\sigma\varphi_0^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-v_f^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v_0^2}} + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \tau\sigma\varphi_0^2$$

de onde se obtém

$$v_f^2 = 1 - \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{4} \tau\sigma\varphi_0^2 + \frac{1}{\sqrt{1-v_0^2}}\right)^2} \tag{3.114}$$

que estabelece uma função $v_f = v_f(\varphi_0)$ para cada velocidade inicial v_0 fixada.

Os pontos sobrepostos às curvas contínuas na Figura 3.11, da forma (v_f, φ_0) , indicam a velocidade final calculada pela simulação do sistema original (3.27)&(3.28) para cada uma das cinco escolhas de velocidade inicial em destaque e amplitude φ_0 correspondente ao eixo horizontal. Percebe-se novamente que, até a vizinhança de $\varphi_0 = 1.3$, a previsão da expressão (3.111) casa muito bem com a simulação do sistema original. Os pontos calculados pela simulação do sistema original estão exatamente sobrepostos às curvas teóricas que os correspondem até o limite referido.

As Figuras 3.11 e 3.10 indicam, em geral, que a curva analítica prevista por (3.111) é válida apenas para menores valores de φ_0 . Uma possível explicação é a seguinte. A medida que φ_0 cresce, a velocidade de ejeção aproxima-se mais da unidade e conseqüentemente o momentum P assume valores próximos de Γ . O denominador da função geratriz (5.32) torna-se pequeno e, então, a função passa a assumir valores maiores. Uma série de aproximações baseadas no descarte de altas potências da função geratriz e de suas derivadas que usamos para obter (3.111) deixam de ser válidas a partir daí.

De qualquer maneira, mesmo com a pequena discrepância observada entre a previsão da velocidade final segundo o sistema original e a obtida via comportamento médio segundo o modelo teórico, a proposta analítica provê uma descrição confiável em termos gerais.

Outra observação, que fizemos anteriormente, acerca das visíveis faixas bem definidas de velocidades de ejeção exibidas nos mapas de parâmetros das Figuras 3.4, 3.5 e 3.6 e 3.7 pode ser explicada pela previsão teórica concentrada na expressão (3.111).

Uma vez fixada a velocidade de ejeção a qual se está interessado, para uma mesma velocidade inicial, o ganho de energia cinética é igualmente fixo (porque depende, por um lado, unicamente da velocidade inicial e da final). Assim, fixada

uma escolha de ganho de energia, a expressão (3.111) se comporta tal qual

$$\tau\varphi_0^2 = \text{cte} \tag{3.115}$$

onde cte é uma constante que depende linearmente do ganho de energia que foi fixado.

$$v_0 = 0.4$$

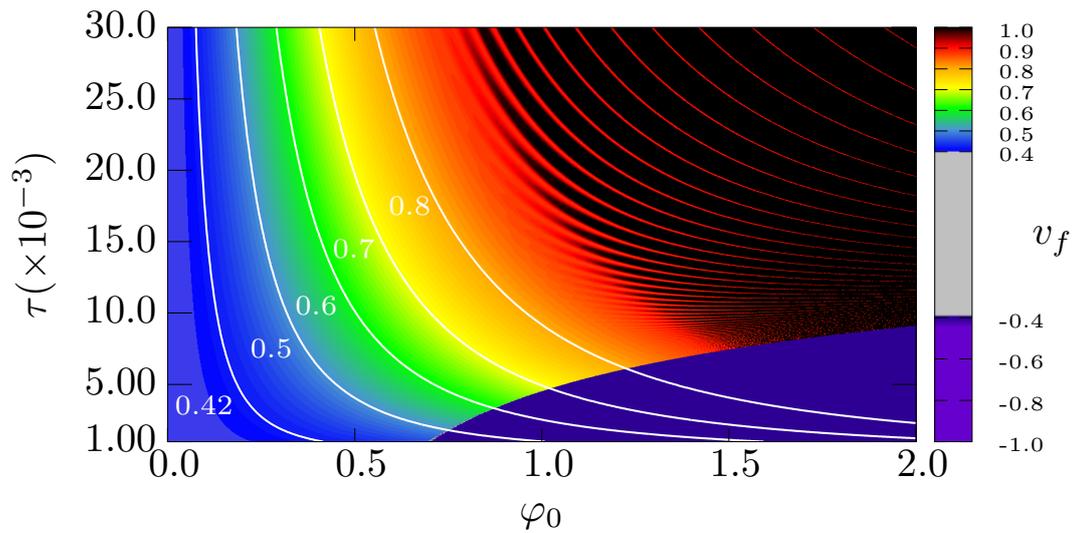


Figura 3.12: Mapa de parâmetros do ganho de energia cinética normalizada *vs.* τ *vs.* φ_0 idêntico ao mapa da Figura 3.5, mas com o acréscimo das curvas em branco que são previsões teóricas de (3.111).

A equação (3.115), notamos, define, para cada escolha de cte, uma curva de nível no plano $\tau \times \varphi_0$. Isolando τ , conseguimos identificar a curva como uma função de φ_0 . Tais funções são traçadas na cor branca nos mapas das Figuras 3.12 e 3.13.

Os números próximos às curvas na cor branca dos mapas das Figuras 5.5 e 5.6 são as velocidades de ejeção que fazem corresponder aos valores da constante c em (3.115). Percebemos que as faixas bem definidas de cores se revelam ser fruto da relação entre τ , φ_0 e o ganho de energia previstos por (3.111).

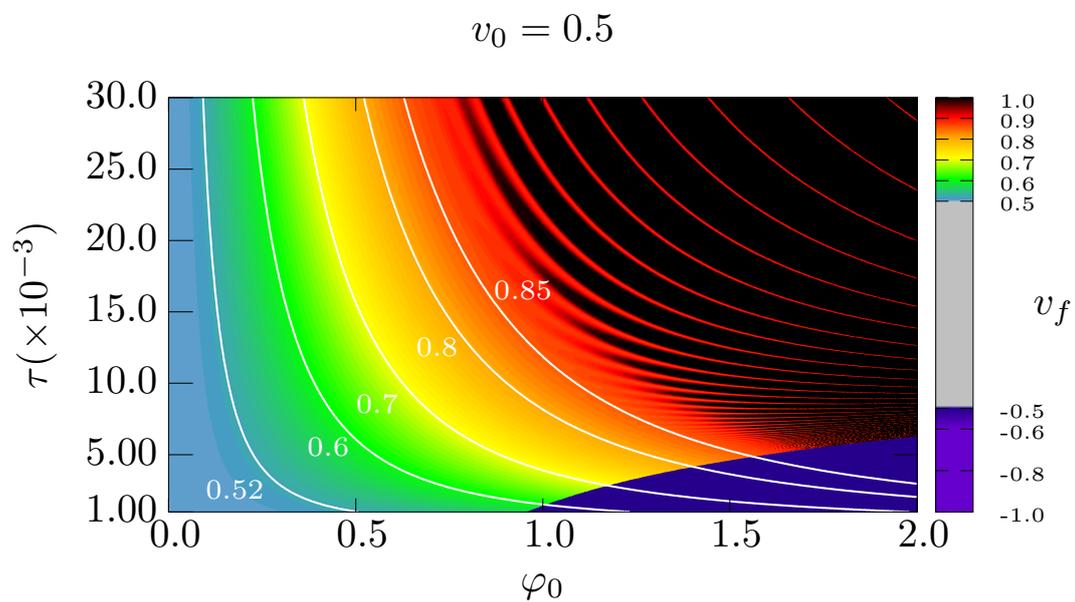


Figura 3.13: Mapa de parâmetros do ganho de energia cinética normalizada *vs.* τ *vs.* φ_0 idêntico ao mapa da Figura 3.6, mas com o acréscimo das curvas em branco que são previsões teóricas de (3.111).

Capítulo 4

Aceleração por pulsos eletromagnéticos, exclusiva a reação de radiação

Neste capítulo investigaremos a dinâmica de elétrons sob ação de pacotes de ondas eletromagnéticas moduladas e de alta frequência (pulsos) ignorando a reação de radiação. Mostraremos que, nessas condições, quando as velocidades de grupo dos pacotes são subluminais, os elétrons podem ser acelerados de forma eficiente, *i. e.*, até velocidades muito próximas à velocidade da luz. Mostraremos ainda que todo o processo pode ser descrito por um formalismo canônico ponderomotivo, como no capítulo anterior. Simulações numéricas são feitas de modo a validar a abordagem analítica apresentada e convencer que os métodos canônicos fornecem uma excelente concordância.

4.1 Sobre a aceleração por pulsos eletromagnéticos

O uso de pacotes de ondas eletromagnéticas de alta frequência, tanto luminiais quanto subluminais, para acelerar e/ou desacelerar partículas carregadas foi proposto há alguns anos [65, 66, 67].

No caso luminal, uma vez ignorados efeitos dissipativos, como a Reação de Radiação (RR), não é possível que haja aceleração líquida [68] das partículas. As capturadas pelo pulso, candidatas a serem aceleradas, são simplesmente ejetadas (regime passante).

A aceleração eficiente pode acontecer no caso subluminal, entretanto. Tudo se passa como se o pulso curto e de alta intensidade fosse uma barreira transponível de

potencial, móvel, que colide com a partícula-alvo. Como as partículas podem ultrapassar a velocidade do pulso, tem lugar a aceleração conservativa. Se a amplitude do pulso e a velocidade relativa entre o pulso e a partícula alvo forem escolhidas corretamente, as partículas são espalhadas pelo pulso e aceleradas para altas velocidades (ou desaceleradas para velocidades mínimas). Por outro lado, se as condições de espalhamento não forem atendidas e efeitos dissipativos como a RR forem ignorados, as partículas atravessam o pulso e são ejetadas na outra extremidade sem aceleração líquida, de forma semelhante ao caso luminal.

Em muitos casos, pulsos levemente subluminais requerem velocidades de fase do pulso acima da velocidade da luz, como, por exemplo, em sistemas de guias de ondas [69]. Isso introduz duas dependências de tempo diferentes na dinâmica onda-partícula: a associada ao movimento do pulso e a associada ao comportamento de alta frequência da fase dele. A largura do pulso é, em geral, muito maior que o comprimento de onda e, desse modo, a amplitude do pulso pode ser vista como de lenta modulação.

Aproximações ponderomotivas via tomada de médias fornecem a ferramenta apropriada para lidar com tais dinâmicas de duas escalas de tempo. Têm sido usadas na investigação de pulsos linear ou circularmente polarizados [67, 74, 75, 76, 77, 78, 79]. A abordagem ponderomotiva usual, baseada na média das equações dinâmicas no tempo, permite identificar como os parâmetros de controle relevantes se correlacionam com os vários regimes dinâmicos onda-partícula. Em particular, a relação explícita entre a amplitude e a velocidade do pulso pode ser encontrada para localizar, estabelecer um critério de decisão acerca da, transição entre os regimes de aceleração ou reflexão e o passante. Estimativas do intervalo de tempo em que a partícula permanece sob a influência do pulso, tão crucial para esses propósitos [80, 81, 82], puderam ser obtidas a partir de uma abordagem ponderomotiva modificada da usual.

A abordagem ponderomotiva pode ser escrita em termos de um formalismo canônico próprio. No caso eletromagnético, para ondas de alta frequência movendo-se à velocidade da luz, o Hamiltoniano ponderomotivo unidimensional é simplesmente o Hamiltoniano original com o momento e o termo dependente do campo substituídos por suas médias de tempo rápido [73, 74], como iremos reexaminar no Capítulo. No nosso caso, entretanto, nem a velocidade de grupo nem a velocidade de fase coincidem com c ; a primeiro é menor e a último é maior. Portanto, é preciso estender o formalismo original, uma extensão que trará alguns novos termos e efeitos observáveis para o formalismo hamiltoniano ponderomotivo correspondente.

4.1.1 O modelo de potencial vetor circularmente polarizado

O presente capítulo investiga a dinâmica unidimensional de uma partícula posta a viajar ao longo do eixo x e a interagir com um potencial vetor transversal e circularmente polarizado dado por

$$\mathbf{A}_{\text{circ}} = A_0 e^{-\frac{(x-v_g t)^2}{\sigma^2}} (\hat{\mathbf{y}} \sin \theta + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta), \quad (4.1)$$

onde A_0 é a amplitude máxima de potencial, σ é o comprimento típico do pacote, v_g a velocidade de grupo da onda e $\theta = kx - \omega t$, sendo k o vetor de onda (valendo $k\sigma \gg 1$ para garantir a modulação lenta) e ω a frequência.

Estabelecido o modelo de potencial, o hamiltoniano relativístico e as equações de movimento que regem a dinâmica do sistema são, portanto,

$$H_{\text{circ}} = \sqrt{1 + p^2 + A_0^2 e^{-\frac{2(x-v_g t)^2}{\sigma^2}}}, \quad (4.2)$$

$$\dot{x} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + A_0^2 e^{-\frac{2(x-v_g t)^2}{\sigma^2}}}} \quad (4.3)$$

e

$$\dot{p} = \frac{2A_0^2}{\sigma^2} \frac{(x - v_g t) e^{-\frac{2(x-v_g t)^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{1 + p^2 + A_0^2 e^{-\frac{2(x-v_g t)^2}{\sigma^2}}}} \quad (4.4)$$

sendo p o momento canônico conjugado à coordenada x . Aqui, indicando por m e q , respectivamente, a massa e carga da partícula, todas as variáveis foram adimensionalizadas: $kx \rightarrow x$, $k\sigma \rightarrow \sigma$, $kct \rightarrow t$, $p/mc \rightarrow p$, $H_{\text{circ}}/mc^2 \rightarrow H_{\text{circ}}$, $v_g/c \rightarrow v_g$, e $qA_0/mc^2 \rightarrow A_0$.

A parcela de potencial presente no hamiltoniano (4.2) já é a do ponderomotivo efetivo e, assim, ele está pronto para ser usado em um estudo analítico do movimento. A dependência especial em x e t torna o sistema integrável, o que nos permitirá conectar analiticamente as condições iniciais da partícula-alvo com o seu destino, se passante ou acelerado, por meio de uma constante de movimento.

Primeiramente, notemos que, imediatamente de (4.2),

$$\frac{\partial H_{\text{circ}}^2}{\partial t} = A_0^2 e^{-\frac{2(x-v_g t)^2}{\sigma^2}} \frac{4v_g}{\sigma^2} (x - v_g t) = -v_g \frac{\partial H_{\text{circ}}^2}{\partial x}. \quad (4.5)$$

O resultado sugere a criação da função

$$K_{\text{circ}}(x, p, t) = H_{\text{circ}} - v_g p \quad (4.6)$$

que, tomando sua derivada total em relação ao tempo, vem

$$\frac{dK_{\text{circ}}}{dt} = \frac{dH_{\text{circ}}}{dt} - v_g \frac{dp}{dt}$$

donde, pelas equações de hamilton e usando, então, (4.5),

$$\begin{aligned} \frac{dK_{\text{circ}}}{dt} &= \frac{dH_{\text{circ}}}{dt} - v_g \frac{dp}{dt} \\ &= \frac{\partial H_{\text{circ}}}{\partial t} + v_g \frac{\partial H_{\text{circ}}}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2H_{\text{circ}}} \left[\frac{\partial H_{\text{circ}}^2}{\partial t} + v_g \frac{\partial H_{\text{circ}}^2}{\partial x} \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, (4.6) é uma constante de movimento. Podemos usá-la para investigar o destino da partícula, como intentamos, mediante uma escolha de condições iniciais, como posição x_0 e momento (velocidade, afinal) p_0 iniciais.

A ideia é posicionar a partícula longe da origem por algumas unidades de σ , por exemplo, e observar o que lhe acontece depois que o pulso a atinge. Estamos interessados, é claro, em conectar imediatamente dois instantes relativamente opostos da dinâmica: quando a partícula e o pulso estão muito distantes um do outro, mas *antes* e *depois* da interação, ao estilo de uma colisão.

Tomando como x_f e p_f , respectivamente, a posição e momentum após um longo tempo t_f depois da interação, pela conservação, segue

$$K_{\text{circ}}(x_0, p_0, 0) = K_{\text{circ}}(x_f, p_f, t_f) \Rightarrow v_g p_0 + \sqrt{1 + p_0^2} = -v_g p_f + \sqrt{1 + p_f^2}. \quad (4.7)$$

Pudemos desprezar a contribuição de energia potencial em ambos os instantes, repare, porque ora a partícula está muito longe da origem e ora o tempo de dinâmica é muito longo, *i.e.*, $e^{-\frac{2(x-v_g t)^2}{\sigma^2}} \rightarrow 0$ em ambos os casos.

A equação (4.7) tem duas soluções:

$$p_f = p_0 \quad (4.8)$$

$$\text{ou } p_f = \frac{2v_g \sqrt{1 + p_0^2} - (1 + v_g^2)p_0}{1 - v_g^2}. \quad (4.9)$$

A solução (4.8) representa tanto a situação em que a onda não alcança a partícula quanto o regime passante. Já a solução (4.9) prevê o caso em que a onda atinge

Aceleração por pulsos eletromagnéticos, exclusiva a reação de radiação 60

a partícula em dado instante e, com amplitude de potencial suficiente, consegue modificar sua energia cinética.

A situação que nos interessa é a segunda, acrescentando que a partícula seja eficientemente acelerada, *i.e.*, que a modificação na sua energia cinética, após cessar sua interação com a onda, seja de largo ganho. Fixando v_g menor do que 1 (obviamente) e olhando a solução (4.9) como uma função de p_0 , é possível conseguir uma condição necessária para que isso possa acontecer.

Tal função é contínua e estritamente decrescente. De fato,

$$\frac{\partial p_f}{\partial p_0} = \frac{1}{1 - v_g^2} \left[\frac{2v_g p_0}{\sqrt{1 + p_0^2}} - (1 + v_g^2) \right] = -\frac{v_g^2 - 2v_g \frac{p_0}{\sqrt{1 + p_0^2}} + 1}{1 - v_g^2} < -\frac{\left(v_g - \frac{p_0}{\sqrt{1 + p_0^2}} \right)^2}{1 - v_g^2} < 0$$

uma vez que

$$v_g < 1 \Rightarrow v_g^2 < 1 \Rightarrow 1 - v_g^2 > 0$$

e $\left| \frac{p_0}{\sqrt{1 + p_0^2}} \right| < 1$ implicar diretamente em

$$1 > \left(\frac{p_0}{\sqrt{1 + p_0^2}} \right)^2 \Rightarrow v_g^2 - 2v_0 v_g + 1 > v_g^2 - 2v_0 v_g + \left(\frac{p_0}{\sqrt{1 + p_0^2}} \right)^2 = \left(v_g - \frac{p_0}{\sqrt{1 + p_0^2}} \right)^2.$$

Assim, p_f como função de p_0 tem um ponto fixo, a saber, $p_0^* = \frac{v_g}{\sqrt{1 - v_g^2}}$. De fato,

$$p_f(p_0 = p_0^*) = \frac{2v_g \sqrt{1 + \left(\frac{v_g}{\sqrt{1 - v_g^2}} \right)^2} - (1 + v_g^2) \frac{v_g}{\sqrt{1 - v_g^2}}}{1 - v_g^2} = \frac{v_g}{\sqrt{1 - v_g^2}} = p_0^*.$$

Se ajustarmos, então, a velocidade inicial da partícula de modo que $p_0 < p_0^*$, sendo decrescente o momentum final como função de p_0 ,

$$p_0 < p_0^* \Rightarrow p_f > p_f(p_0^*) = p_0^* > p_0 \Rightarrow p_f > p_0$$

indicando aceleração. Caso contrário,

$$p_0 > p_0^* \Rightarrow p_f < p_f(p_0^*) = p_0^* < p_0 \Rightarrow p_f < p_0$$

há desaceleração. Uma condição necessária para que possa haver a aceleração que nos interessa, portanto, é que a velocidade inicial da partícula seja tal que seu momento inicial é menor do que p_0^* .

Olhando agora (4.9) como função de v_g , para p_0 fixo, temos

$$\frac{\partial p_f}{\partial v_g} = \frac{2\sqrt{1+p_0^2}}{(1-v_g^2)^2}(1-2v_0v_g+v_g^2) > 0$$

donde quanto mais próximo de 1 estiver v_g mais eficientemente acelerada será a partícula. Mas a condição suficiente para a aceleração eficiente, uma vez garantido que é possível havê-la, se relaciona, na verdade, com a amplitude máxima A_0 de potencial .

Podemos procurar um valor mínimo dela para que, quando a partícula for atingida pelo máximo de potencial da onda, aconteça a aceleração eficiente. Para tanto, é suficiente impor que no instante de encontro da partícula com o máximo de potencial, ou seja, em t^* tal que $x(t^*) - v_g t^* = 0$, ela esteja, localmente, em fase com a onda, *i.e.*, com momento p^* tal que sua velocidade seja $\dot{x}(t^*) = v_g$.

Tal imposição, mediada pela conservação de (4.6), é simples de ser feita. Supondo que inicialmente a partícula está em repouso, *i.e.*, $p_0 = 0$ (o que é menor do que p_0^*) e muito longe da origem ($x_0 \gg 0$), temos

$$K_{\text{circ}}(x_0, 0, 0) = K_{\text{circ}}(x(t^*), p^*, t^*) \Rightarrow 1 = -v_g p^* + \sqrt{1 + p^{*2} + A_{0,\text{min}}^2} . \quad (4.10)$$

e também, de (4.3),

$$v_g = \frac{p^*}{\sqrt{1 + p^{*2} + A_{0,\text{min}}^2}} . \quad (4.11)$$

Resolvendo o sistema (4.10)&(4.11) para p^* , temos

$$1 = -v_g p^* + \frac{p^*}{v_g} \Rightarrow p^* = \frac{v_g}{1 - v_g^2}$$

donde, substituindo este valor em, por exemplo, (4.11), segue

$$A_{0,\text{min}}^2 = \left(\frac{1 - v_g^2}{v_g^2}\right) p^{*2} - 1 = \left(\frac{1 - v_g^2}{v_g^2}\right) \frac{v_g^2}{(1 - v_g^2)^2} - 1 = \frac{1}{1 - v_g^2} - 1$$

donde a amplitude máxima de potencial mínima para que haja aceleração eficiente da partícula é, portanto,

$$A_{0,\text{min}} = \frac{v_g}{\sqrt{1 - v_g^2}} . \quad (4.12)$$

Qualquer amplitude maior do que (4.12) acelerará a partícula, mas amplitudes menores permitirão que a partícula atravesse a onda terminando sem ganho de energia.

A amplitude mínima calculada também pode ser vista como um limiar, um valor crítico que distingue entre os regimes passante e acelerado. Por essa razão, definiremos como **amplitude crítica** a mínima necessária e suficiente para que haja aceleração eficiente.

Uma onda, por exemplo, viajando a 90% da velocidade da luz, *i.e.*, $v_g = 0.9$, poderá acelerar partículas desde que sua amplitude máxima de potencial seja de, aproximadamente,

$$A_{0,\min} = \frac{0.9}{\sqrt{1 - 0.9^2}} \approx 2.0647.$$

A Figura 4.1 ilustra o caso. Considerando $\sigma = 100$ (escolha que satisfaz a condição de modulação lenta e é coerente com o valor observado nos pulsos de laser atuais [70]) e $v_g = 0.9$, integramos numericamente as equações de movimento (4.3) e (4.4) para partículas com condições iniciais $x_0 = 6\sigma$ e $p_0 = 0$ em dois casos: para uma onda com $A_0 = 2.065$ (a curva ciano sólida) e para outra com $A_0 = 2.064$ (a curva marrom traço-pontilhada). Vemos que ambas as curvas se comportam de acordo

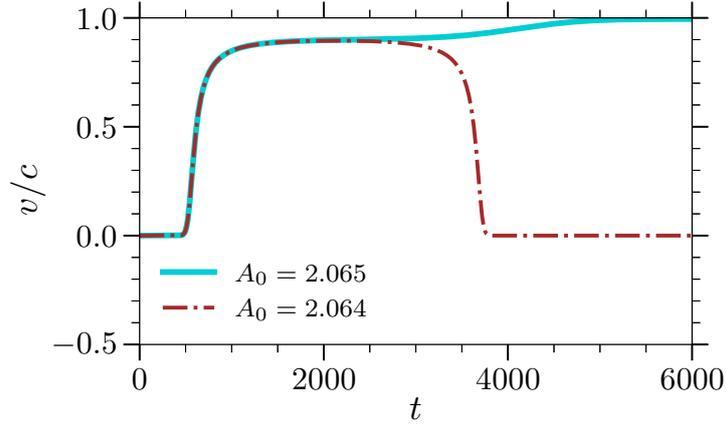


Figura 4.1: Velocidade *versus* tempo. Duas curvas representando o regime passante ($A_0 = 2.064$, curva traço-pontilhada em marrom) e regime acelerado ($A_0 = 2.065$, curva sólida em ciano) para $v_g = 0.9$.

com o esperado: partículas são aceleradas para o maior valor de A_0 , mas acabam com velocidade nula para o menor valor.

Além disso, segundo a previsão de (4.9), o momentum terminal da partícula inicialmente em repouso é $p_f = \frac{2v_g}{1 - v_g^2}$ donde sua velocidade terminal, portanto, de (4.3), é

$$v_f = \frac{p_f}{\sqrt{1 + p_f^2}} = \frac{2v_g}{1 + v_g^2}.$$

Usando $v_g = 0.9$, a previsão é de, aproximadamente,

$$v_f = \frac{2 \cdot 0.9}{1 + 0.9^2} \approx 0.994475.$$

A velocidade assintótica final associada à curva ciano na Figura 4.1 mostra, aproximadamente, $v_f = 0.994475$, o que coincide com o valor previsto.

De modo geral, a formulação canônica integrável associada a pulsos de ondas eletromagnéticas circularmente polarizadas descreve com precisão simples e diretamente as características críticas do sistema.

4.1.2 O modelo de potencial vetor linearmente polarizado

Passemos, então, ao caso da polarização linear. Veremos que a abordagem ponderomotiva canônica desempenha um papel crucial, pois é capaz de prever resultados que a abordagem ponderomotiva usual não é.

A partícula que viaja ao longo do eixo x será agora posta a interagir com um potencial vetor da forma

$$\mathbf{A}_{lin} = \sqrt{2} A_0 e^{-\frac{(x-v_g t)^2}{\sigma^2}} \sin \theta \hat{\mathbf{y}}, \quad (4.13)$$

cujas variáveis são idênticas ao do caso circularmente polarizado. Introduzimos um fator $\sqrt{2}$ na amplitude máxima a título de futura comparação entre os casos. O hamiltoniano e as equações de movimento para a partícula que interage com o potencial (4.13) são

$$H_{lin} = \sqrt{1 + p^2 + A_0^2 e^{-\frac{2(x-v_g t)^2}{\sigma^2}} (1 - \cos 2\theta)}, \quad (4.14)$$

$$\dot{x} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + A_0^2 e^{-\frac{2(x-v_g t)^2}{\sigma^2}} (1 - \cos 2\theta)}} \quad (4.15)$$

e

$$\dot{p} = \frac{A_0^2 e^{-\frac{2(x-v_g t)^2}{\sigma^2}} \left[\frac{2}{\sigma^2} (x - v_g t) (1 - \cos 2\theta) + \sin 2\theta \right]}{\sqrt{1 + p^2 + A_0^2 e^{-\frac{2(x-v_g t)^2}{\sigma^2}} (1 - \cos 2\theta)}}. \quad (4.16)$$

Estamos interessados novamente em calcular a amplitude máxima de potencial crítica que separa os regimes passante e acelerado. Aqui, em comparação ao caso circularmente polarizado, o processo é mais difícil. O hamiltoniano do potencial linearmente polarizado tem duas escalas de tempo envolvidas: uma lenta, presente

na modulação do potencial, e uma rápida, que tem lugar na fase $\theta(x, t) = x - v_\phi t$. A combinação diferente entre as variáveis x e t em cada escala impossibilita a integrabilidade e, por isso, não podemos tratar do presente caso como fizemos anteriormente.

A estratégia, então, dado o sucesso de ocasiões semelhantes anteriores [5], é buscar uma versão integrável do hamiltoniano (4.14) através de uma transformação canônica que elimine a dependência na fase rápida [71, 72]. Fazendo isso poderemos, como anteriormente, estudar a amplitude de potencial crítica que divide os regimes passante e acelerado.

Usualmente, a dependência na fase rápida é simplesmente ignorada e toma-se

$$\overline{H}_0 = \sqrt{1 + \overline{p}^2 + \overline{A}^2}, \quad \text{com} \quad \overline{A}^2 = A_0^2 e^{-\frac{2(\overline{x} - v_g t)^2}{\sigma^2}}, \quad (4.17)$$

como versão média do hamiltoniano [74]. Aqui, \overline{p} e \overline{x} são, respectivamente, o momentum e posição médias. Este caso coincide identicamente com o modelo circularmente polarizado. Também coincide com o linearmente polarizado, mas somente quando $v_g = v_\phi = 1$, o caso luminal [73]. Como estamos lidando com e interessados em ondas superluminais ($v_\phi > 1$), espera-se que a forma final do hamiltoniano médio seja diferente.

4.2 Aproximação ponderomotiva para o caso do potencial vetor linearmente polarizado

Tomando como X e P as versões médias, respectivamente, da posição e momentum da partícula (ou como a posição e momentum do seu centro-guia), a função geradora

$$F(x, P, t) = x P + f(x, P, t) \quad (4.18)$$

define uma transformação canônica. Construiremos a função $f = f(x, P, t)$ de modo que a versão média do hamiltoniano, o transformado $\mathcal{K}(X, P, t)$, seja livre da dependência na escala rápida de tempo e integrável.

Da função geradora, as equações de transformação são

$$p = P + \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (4.19)$$

$$X = x + \frac{\partial f}{\partial P}, \quad (4.20)$$

e

$$\mathcal{K} = H_{\text{lin}} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (4.21)$$

Buscaremos f de modo que o hamiltoniano transformado tenha a forma

$$\mathcal{K}(X, P, t) = \sqrt{1 + P^2 + A_0^2 e^{-\frac{2(X-v_g t)^2}{\sigma^2}} + h(X, P, t)}, \quad (4.22)$$

onde a parcela $h(X, P, t)$ inclui à dinâmica os efeitos caso $v_\phi > 1$, ou seja, representa a correção da forma usualmente tratada.

Levando as equações (4.19), (4.20) e (4.21) em (4.22), temos

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 + \left(P + \frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + A_0^2 e^{-\frac{2(x-v_g t)^2}{\sigma^2}} (1 - \cos 2\theta)} \\ & + \frac{\partial f}{\partial t} = \sqrt{1 + P^2 + A_0^2 e^{-\frac{2(X-v_g t)^2}{\sigma^2}} + h(X, P, t)}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde, elevando ambos membros ao quadrado e efetuando alguns cancelamentos,

$$\begin{aligned} 2\mathcal{K} \frac{\partial f}{\partial t} + 2P \frac{\partial f}{\partial x} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \\ &+ A_0^2 e^{-\frac{2(x-v_g t)^2}{\sigma^2}} \cos 2\theta + h(X, P, t). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Definindo a função f tal que

$$2\mathcal{K} \frac{\partial f}{\partial t} + 2P \frac{\partial f}{\partial x} = A_0^2 e^{(-2(x-v_g t)^2/\sigma^2)} \cos 2\theta, \quad (4.25)$$

o que cumpre o seu papel, *i.e.*, absorve a parcela que contém os termos de variação rápida, podemos calcular a correção que buscamos por

$$h(X, P, t) = - \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \right\rangle_\theta. \quad (4.26)$$

A notação $\langle \cdot \rangle_\theta$ significa a média para um ciclo de variação na escala rápida: para uma função genérica f , $\langle f \rangle_\theta \equiv (2\pi)^{-1} \oint f(\theta) d\theta$.

Podemos simplificar (4.25) tomando \mathcal{K} no produto com $\frac{\partial f}{\partial t}$ por $\mathcal{K} \approx K(h=0) \equiv \Gamma$ e também, já que f depende da fase rápida, escolher que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -v_\phi \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (4.27)$$

Assim, calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{A_0^2 e^{-\frac{2(x-v_g t)^2}{\sigma^2}}}{2(\Gamma - P/v_\phi)} \cos 2\theta \quad (4.28)$$

donde, levando em (4.26),

$$\begin{aligned} h(X, P, t) &= - \left(1 - \frac{1}{v_\phi^2}\right) \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 \right\rangle_\theta \\ &= - \left(1 - \frac{1}{v_\phi^2}\right) \left\langle \frac{A_0^4 e^{-\frac{4(x-v_g t)^2}{\sigma^2}}}{4(\Gamma - P/v_\phi)^2} \cos^2 2\theta \right\rangle_\theta \\ &= - \left(1 - \frac{1}{v_\phi^2}\right) \frac{A_0^4 e^{-\frac{4(X-v_g t)^2}{\sigma^2}}}{4(\Gamma - P/v_\phi)^2} \langle \cos^2 2\theta \rangle_\theta \\ &= - \left(1 - \frac{1}{v_\phi^2}\right) \frac{A_0^4 e^{-\frac{4(X-v_g t)^2}{\sigma^2}}}{8(\Gamma - P/v_\phi)^2}, \end{aligned}$$

já que é suficiente supor que a média atua na modulação lenta do potencial apenas fazendo troca $x \rightarrow X$ e a média do $\cos^2 2\theta$ é $\frac{1}{2}$.

A versão, portanto, média integrável do hamiltoniano (4.14) é

$$\mathcal{K}(X, P, t) = \sqrt{\Gamma^2 - (v_\phi^2 - 1) \frac{A_0^4 e^{-\frac{4(X-v_g t)^2}{\sigma^2}}}{8(v_\phi \Gamma - P)^2}}, \quad (4.29)$$

onde

$$\Gamma^2 = 1 + P^2 + A_0^2 e^{-\frac{2(X-v_g t)^2}{\sigma^2}}. \quad (4.30)$$

Notamos que, caso $v_\phi = 1$, o hamiltoniano obtido se confunde com o usual (4.17). Mas caso contrário, se $v_\phi > 1$ (que é o único outro possível, já que $v_\phi v_g = 1$ e $v_g < 1$), a correção diminui o valor máximo do potencial ponderomotivo efetivo. Com isso, espera-se observar um aumento na amplitude de potencial crítica em relação ao resultado (4.12) anterior.

As equações de movimento que regem a dinâmica do centro-guia da partícula são

$$\dot{X} = \frac{P}{\mathcal{K}} + \frac{(v_\phi^2 - 1)A_0^4 e^{-\frac{4(X-v_g t)^2}{\sigma^2}}}{8(v_\phi \Gamma - P)^3 \mathcal{K}} \left(\frac{v_\phi P}{\Gamma} - 1 \right) \quad (4.31)$$

e

$$\dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} \quad (4.32)$$

4.2.1 Estudo analítico da aproximação ponderomotiva

A versão ponderomotiva (4.29) do hamiltoniano original (4.14) representa um sistema integrável: a quantidade

$$K_{\text{lin}}(X, P, t) = \mathcal{K}(X, P, t) - v_g P \quad (4.33)$$

é constante de movimento. De fato, semelhantemente ao argumentado no caso circularmente polarizado, diretamente de (4.30), temos

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + v_g \frac{\partial \Gamma}{\partial X} = 0.$$

Como

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{A_0^2(1 - v_\phi^2)}{8(v_\phi \Gamma - P)^4} \left[(v_\phi \Gamma - P)^2 \frac{\partial}{\partial t} e^{-\frac{2(X - v_g t)^2}{\sigma^2}} - e^{-\frac{2(X - v_g t)^2}{\sigma^2}} 2(v_\phi \Gamma - P) \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right],$$

$$v_g \frac{\partial h}{\partial X} = \frac{A_0^2(1 - v_\phi^2)}{8(v_\phi \Gamma - P)^4} \left[(v_\phi \Gamma - P)^2 v_g \frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{2(X - v_g t)^2}{\sigma^2}} - e^{-\frac{2(X - v_g t)^2}{\sigma^2}} 2(v_\phi \Gamma - P) v_g \frac{\partial \Gamma}{\partial X} \right]$$

e $\frac{\partial}{\partial t} e^{-\frac{2(X - v_g t)^2}{\sigma^2}} + v_g \frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{2(X - v_g t)^2}{\sigma^2}} = 0$, então

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v_g \frac{\partial h}{\partial X} = -\frac{A_0^2(1 - v_\phi^2)}{4(v_\phi \Gamma - P)^3} e^{-\frac{2(X - v_g t)^2}{\sigma^2}} \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + v_g \frac{\partial \Gamma}{\partial X} \right] = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{dK_{\text{lin}}}{dt} &= \frac{d\mathcal{K}}{dt} - v_g \dot{P} \\ &= \frac{1}{2\mathcal{K}} \left[\frac{\partial \mathcal{K}^2}{\partial t} + v_g \frac{\partial \mathcal{K}^2}{\partial X} \right] \\ &= \frac{1}{2\mathcal{K}} \left[2\Gamma \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} + v_g \left(2\Gamma \frac{\partial \Gamma}{\partial X} + \frac{\partial h}{\partial X} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\mathcal{K}} \left[2\Gamma \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + v_g \frac{\partial \Gamma}{\partial X} \right) + \left(\frac{\partial h}{\partial t} + v_g \frac{\partial h}{\partial X} \right) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde segue o resultado.

Em mãos de (4.33), podemos voltar nossa atenção à amplitude de potencial crítica para o presente caso. Ela pode ser identificada impondo, mais uma vez, que quando encontrar o máximo de potencial, em t^* tal que $X(t^*) - v_g t^* = 0$, a partícula

esteja, localmente, com a velocidade da onda: $\dot{X}(t^*) = v_g$.

Colocando a partícula inicialmente em repouso ($\dot{X}(0) = 0$) e muito distante da origem – de modo que $e^{-\frac{2(X(0)-v_g \cdot 0)^2}{\sigma^2}} \approx 0$ implica em $P(0) = 0$ segundo (4.31) – podemos conectar o instante inicial com o instante $t = t^*$ por meio da conservação de (4.33):

$$1 = -v_g P + \sqrt{1 + P^2 + A_{0,\min}^2 - \frac{(v_\phi^2 - 1)A_{0,\min}^4}{8(v_\phi \sqrt{1 + P^2} - P)}}. \quad (4.34)$$

Aqui, $P = P(t^*)$. Adicionalmente, impondo que em $t = t^*$ a velocidade da partícula seja v_g , temos, de (4.31),

$$v_g = \frac{P + \frac{(v_\phi^2 - 1)A_0^4}{8(v_\phi \Gamma - P)^3} \left(\frac{v_\phi P}{\Gamma} - 1 \right)}{\sqrt{1 + P^2 + A_{0,\min}^2 - \frac{(v_\phi^2 - 1)A_{0,\min}^4}{8(v_\phi \sqrt{1 + P^2} - P)}}}. \quad (4.35)$$

As equações (4.34) e (4.35) formam um sistema de duas equações cujas incógnitas são $P(t^*)$ e $A_{0,\min}$. Resolvendo-o, teremos a amplitude crítica desejada. Em comparação ao sistema (4.10)&(4.11), notamos, no sistema (4.34)&(4.35) há a inclusão de termos de ordem 4 na amplitude crítica. Assim, esperamos que a amplitude crítica do caso linearmente polarizado, em comparação ao circular (4.12), seja algo do tipo $A_{0,\min,\text{lin}} = \frac{v_g}{\sqrt{1 - v_g^2}} + \varepsilon(v_g)$, com $\varepsilon(v_g)$ uma (provavelmente, em algum sentido, pequena) correção.

Uma solução analítica não é interessante nesse caso, devido a relação algébrica intrincada. Abordaremos, portanto, a sua solução numericamente.

4.2.2 Análise numérica da aproximação ponderomotiva

Mas antes, estudemos como a aproximação ponderomotiva deduzida se comporta em geral. A Figura 4.2 traz uma comparação dos resultados numéricos entre três sistemas: o sistema regido pelo hamiltoniano (4.14), o qual chamaremos de **sistema completo**; o ponderomotivo usual, o qual chamaremos de **incorreto**, regido pelo hamiltoniano (4.17), e o sistema ponderomotivo deduzido há pouco, o qual chamaremos de ponderomotivo corrigido. Nos quadros, o gráfico de velocidade *versus* tempo de cada sistema é representado por uma cor e traço: preto sólido para o sistema completo, azul pontilhado para o ponderomotivo incorreto e vermelho tracejado para o ponderomotivo corrigido.

A partícula foi posta inicialmente em repouso na posição $x_0 = 6\sigma$ para todas

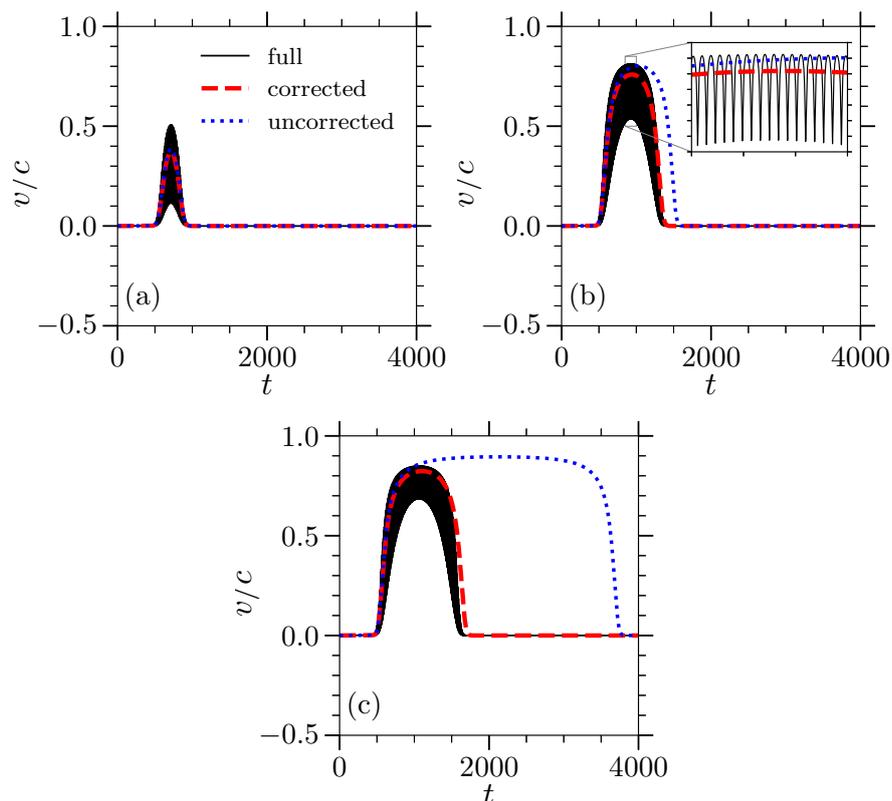


Figura 4.2: Evolução da concordância entre a aproximação ponderomotiva e o sistema completo representada por gráficos de velocidade *versus* tempo para a partícula inicialmente em repouso. Consideramos $v_g = 0,9$ e $\sigma = 100$ em todos os casos, juntamente com $A_0 = 1.0$ no quadro (a), $A_0 = 1.9$ no quadro (b) e $A_0 = 2.064$ no quadro (c). As simulações dos sistema completo são representadas pela linha preta sólida. A linha vermelha tracejada representa a solução numérica do modelo ponderomotivo corrigido desenvolvido no presente capítulo. O modelo ponderomotivo usual não corrigido é representado pela linha azul pontilhada.

as simulações exibidas na Figura 4.2. Os parâmetros $\sigma = 100$ e $v_g = 0.9$ foram mantidos em todos os quadros, exceto a amplitude de potencial, a qual foi usada $A_0 = 1.0$ no quadro (a), $A_0 = 1.9$ no quadro (b) e $A_0 = 2.064$ no quadro (c).

Percebe-se do quadro (a) que, para valores baixos da amplitude de potencial, os sistemas ponderomotivo incorreto e corrigido concordam muito bem entre si – o que era esperado dado que a correção $h(X, P, t)$ depende da potência 4 da amplitude de potencial, o que a torna menos significativa nesse caso – e com o sistema completo. À medida que aumentamos a amplitude de potencial, quadro (b), notamos uma diferença significativa entre os sistemas ponderomotivo incorreto e corrigido: o corrigido concorda melhor com o sistema completo. E tal concordância se estende até mesmo para valores maiores da amplitude de potencial, mais próximos do crítico (circular),

como mostra o quadro (c). Nessa caso, o sistema ponderomotivo incorreto exibe um comportamento drasticamente divergente do sistema completo.

Tais comparações, como mostrado na Figura 4.3, permanecem idênticas mesmo para pulsos mais curtos (quadro(a)) como para mais longos (quadro (b)), à exceção da escala de tempo das interações. Isso mostra que a correção do modelo ponderomotivo proposta aqui, embora formalmente construída para pulsos de alta frequência, concorda, portanto, com o sistema completo, na prática, para uma ampla faixa de comprimentos típicos do envelope de onda.

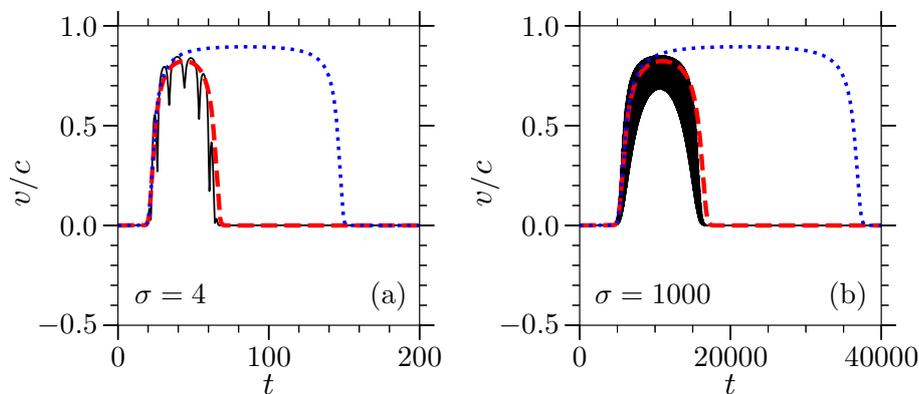


Figura 4.3: Evolução da concordância entre as soluções numéricas dos gráficos de velocidade *versus* tempo para uma partícula inicialmente estacionária. Considerou-se $v_g = 0.9$ e $A_0 = 2.064$ em ambos quadros, com $\sigma = 4$ no quadro (a) e $\sigma = 1000$ no quadro (b). A simulação do sistema completo está exibida pelo traço preto sólido, enquanto o traço vermelho tracejado representa o sistema ponderomotivo corrigido e o azul pontilhado o sistema ponderomotivo incorreto. Para diferentes escalas, σ 's muito diferentes, a concordância do modelo ponderomotivo corrigido com o sistema completo é mais satisfatória do que com o sistema ponderomotivo incorreto.

As Figuras 4.2 e 4.3 mostram mais: a aproximação ponderomotiva corrigida prevê com mais acurácia o **tempo médio durante o qual a partícula interage com a onda**, o qual depende da amplitude de potencial. A importância, em geral, dos efeitos da Reação de Radiação é medida, justamente, por esse tempo, o de aplicação da força externa. A previsão acurada deste dado, pensando na inclusão futura dos efeitos da Reação de Radiação à dinâmica da partícula, é absolutamente relevante.

A importância do tempo médio de interação exige um estudo. Chamando tal

tempo de $\langle t \rangle$, podemos deduzir que

$$\langle t \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x(t)-v_g t)^2}{\sigma^2}} dt, \quad (4.36)$$

onde os valores de $x(t)$ devem vir das simulações numéricas, *i.e.*, são as sucessivas posições da partícula durante a dinâmica. O limite superior infinito, a rigor, representa um tempo suficientemente longo para o qual a partícula adquire velocidade constante, e assim permanece, após a interação com a onda.

Como os valores de $x(t)$ devem ser obtidos via as simulações numéricas, adicionando $\langle t \rangle$ como uma espécie de nova variável às simulações, pudemos calculá-lo para diferentes valores da amplitude de potencial no sistema completo, no ponderomotivo incorreto e no ponderomotivo corrigido. Um resultado obtido nas simulações é mostrado na Figura 4.4.

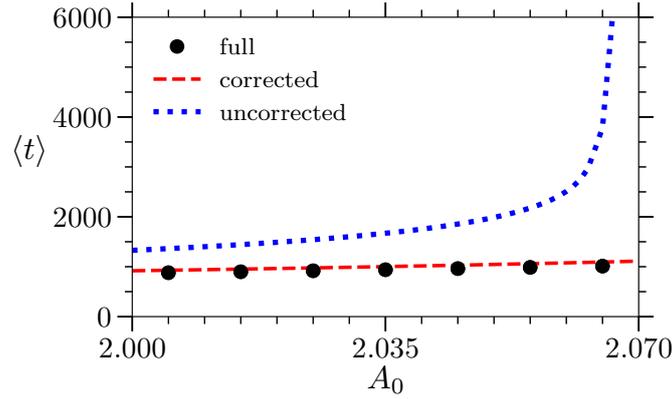


Figura 4.4: Tempo médio de interação *versus* A_0 para as simulações dos sistema completo (linha preta sólida), ponderomotivo corrigido (linha vermelha tracejada) e ponderomotivo incorreto (linha azul pontilhada). Considerou-se $v_g = 0.9$ e $\sigma = 100$ nas três simulações.

Na Figura 4.4, a curva em vermelho tracejado representa o tempo médio de interação da onda com a partícula segundo a previsão do sistema ponderomotivo corrigido para diferentes valores da amplitude máxima de potencial. A curva em azul pontilhada representa o mesmo tempo, mas previsto pelo sistema ponderomotivo incorreto. Os pontos em preto são valores do tempo médio de interação previstos pelo sistema completo. Vemos que, enquanto a previsão do sistema ponderomotivo corrigido concorda muito bem com a do sistema completo, a previsão do sistema ponderomotivo incorreto é divergente à medida que a amplitude cresce em direção à crítica.

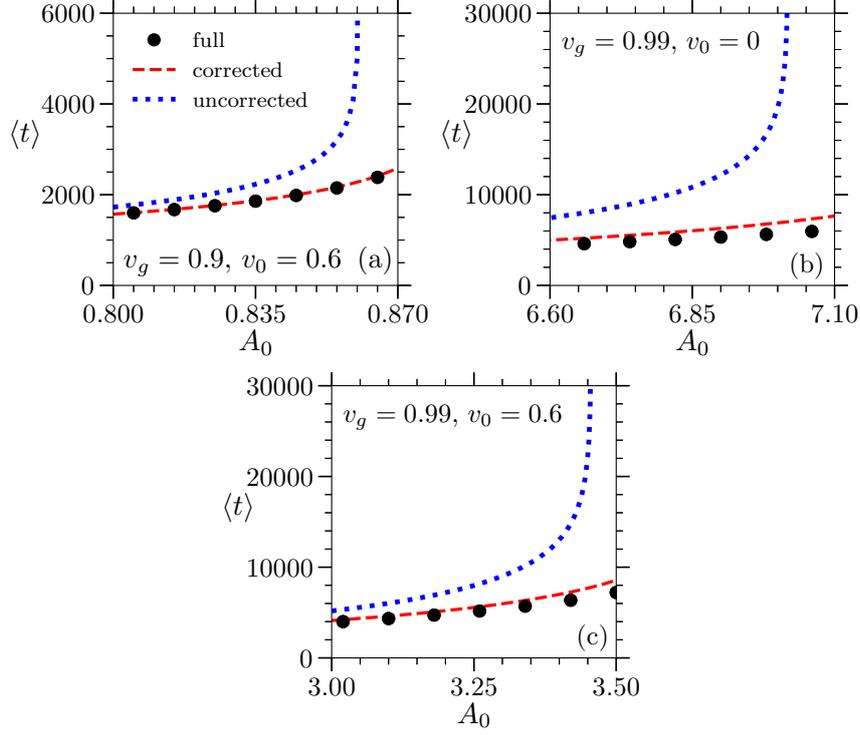


Figura 4.5: Tempo médio de interação *versus* A_0 para as simulações dos sistema completo (linha preta sólida), ponderomotivo corrigido (linha vermelha tracejada) e ponderomotivo incorreto (linha azul pontilhada). Considerou-se $v_g = 0.9$ e $\sigma = 100$ nas três simulações. Usou-se para o quadro (a) $v_g = 0.9$ e $v_0 = 0.6$, para o (b) $v_g = 0.99$ e $v_0 = 0$; enquanto que para o (c) $v_g = 0.99$ e $v_0 = 0.6$.

A boa previsão do tempo médio de interação pelo sistema ponderomotivo corrigido se mantém mesmo para diferentes velocidades iniciais e de grupo, como mostra a Figura 4.5. Exibimos no quadro (a) a comparação entre as previsões dos sistemas para a onda com $v_g = 0.9$ e partícula com velocidade inicial $v_0 = 0.6$. O intervalo de valores de amplitude máxima de potencial foi escolhido diferente porque, para velocidade inicial diferente de zero, a amplitude de potencial crítica (4.12) se modifica para

$$A_{0,\text{min,circ}}(v_0 \neq 0) = \frac{|v_g - v_0|}{\sqrt{(1 - v_g^2)(1 - v_0^2)}}. \quad (4.37)$$

Para obtê-lo, basta refazer a conta que fizemos para obter (4.12) mas com um momento inicial p_0 equivalente a $v_0 \neq 0$.¹ Aplicando $v_g = 0.9$ e $v_0 = 0.6$ em (4.37) temos $A_{0,\text{min,circ}} \approx 0.860$.

No quadro (b) da Figura 4.5 exibimos as diferentes previsões do tempo médio

¹Note que, caso $v_0 = 0$, recuperamos (4.12).

de interação para a partícula inicialmente em repouso, mas com a onda viajando a $v_g = 0.99$. Mas uma vez, a previsão do sistema ponderomotivo completo casa muito satisfatoriamente com a do sistema completo, ao contrário do sistema ponderomotivo incorreto, que diverge à medida que a amplitude de potencial se aproxima da crítica.² A mesma eficácia é observada no quadro (c), onde os parâmetros foram ajustados para $v_g = 0.99$ e $v_0 = 0.6$. Nesse caso, a amplitude crítica é aproximadamente 3.456.³

Como penúltima observação, notemos que a amplitude crítica para $v_0 > 0$ é sempre menor do que para a partícula inicialmente em repouso. De fato, olhando (4.37) como função, para v_g fixo, de v_0 , temos

$$\frac{\partial A_{0,\min}}{\partial v_0} = - \frac{1 - v_0 v_g}{\sqrt{(1 - v_0^2)(1 - v_g^2)}} \frac{v_g - v_0}{|v_g - v_0|},$$

donde, caso $v_0 < v_g$ – o que sempre deve acontecer para que a onda encontre a partícula afinal –, a função $A_{0,\min}$ é decrescente ($1 - v_0 v_g > 0$ pois $v_0 < 1$ e $v_g < 1$) e, portanto, $A_{0,\min}(v_0 > 0) < A_{0,\min}(v_0 = 0)$.

E como última observação, note que, caso $-1 < v_0 < 0$, *i.e.*, caso a partícula inicialmente esteja se movendo ao encontro da onda, os resultados obtidos sobre o tempo médio de contato valem igualmente [82].

Voltemos à atenção a amplitude crítica para o presente sistema linearmente polarizado. Como mencionado anteriormente, a solução do sistema de equações (4.34)&(4.35) calcula a amplitude crítica do sistema linearmente polarizado segundo a previsão do sistema ponderomotivo corrigido. Podemos resolvê-lo numericamente para um intervalo de valores de v_g e comparar suas soluções com a predição do sistema completo.

A predição do sistema completo, por sua vez, pode ser calculada por "tentativa e erro". Explico. Dada uma velocidade v_g , simulamos a evolução da velocidade da partícula para um dado A_0 . Se a partícula caiu no regime acelerado, sabemos que a amplitude crítica é menor do que ou igual ao valor escolhido. Caso contrário, é maior. Se no regime acelerado, diminuimos ligeiramente a amplitude e refazemos a simulação. Caso contrário, refazemos a simulação aumentando ligeiramente a amplitude. Iterando este processo, podemos calcular a amplitude crítica segundo a

²Para $v_g = 0.99$ e $v_0 = 0.0$, a amplitude crítica é aproximadamente 7.018.

³Vale lembrar que podemos usar a amplitude crítica do sistema circularmente polarizado para estabelecer a do linearmente polarizado porque, para esse, a amplitude crítica é ligeiramente (em algum sentido) maior do que àquela.

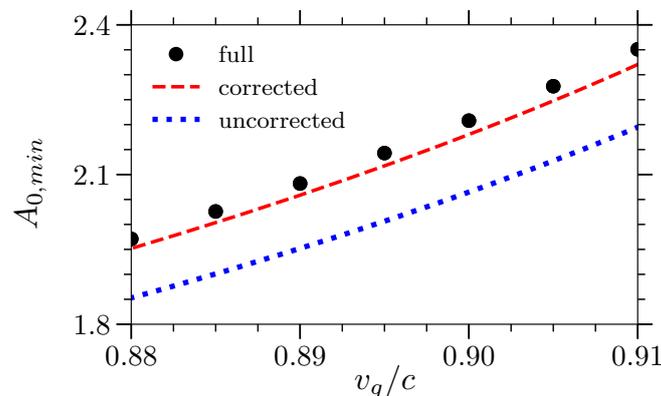


Figura 4.6: Amplitude crítica como função de v_g para as simulações do sistema completo (pontos em preto), ponderomotivo corrigido (linha vermelha tracejada) e ponderomotivo incorreto (linha azul pontilhada).

previsão do sistema completo com a precisão máxima suportada pelo computador que usamos. Tais dados são exibidos na Figura 4.6.

Na Figura 4.6, a curva em vermelho tracejado exhibe as soluções do sistema (4.34)&(4.35), *i.e.*, é a predição da amplitude crítica para diferentes valores de v_g do sistema ponderomotivo corrigido. Os pontos em preto representam a amplitude crítica prevista pelo sistema completo. Já a curva em azul pontilhada exhibe a predição de amplitude crítica segundo o sistema ponderomotivo incorreto. Para obtê-la, resolvemos numericamente um sistema semelhante ao (4.34)&(4.35), mas trocando o hamiltoniano ponderomotivo correto, o deduzido da aproximação ponderomotiva, pelo incorreto segundo (4.17). Mais uma vez o sistema ponderomotivo corrigido que deduzimos mostra melhor concordância com o sistema completo. E nossa conjectura se verifica para o intervalo de v_g exibido: a amplitude crítica para o caso linearmente polarizado é próxima (em algum sentido) da amplitude crítica do caso circularmente polarizado.

Capítulo 5

Considerações finais e perspectivas futuras

5.1 Modelo de aceleração por pulsos eletromagnéticos incluso a reação de radiação

Inspirados no bom resultado que tivemos no Capítulo 3, o da inclusão da força de reação de radiação ao formalismo canônica para a onda eletrostática, o seguimento natural do trabalho apresentado no Capítulo 4 é estudar uma possível adaptação do procedimento de inclusão de modo a contemplar a caso eletromagnético linearmente polarizado. As equações transformadas incluindo a reação de radiação serão

$$\dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{K}_{\text{lin}}}{\partial X} + \left\langle \frac{\tilde{g}}{1 + \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial X}} \right\rangle \quad (5.1)$$

e

$$\dot{X} = \frac{\partial \mathcal{K}_{\text{lin}}}{\partial P} + \left\langle \frac{\tilde{g}}{1 + \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial X}} \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} \right\rangle. \quad (5.2)$$

onde $f = f(x, P, t)$ é a função geratriz, tal qual definida em (4.28), e

$$\tilde{g} = g_{\text{nc}} \left(X - \frac{\partial f}{\partial P}, P + \frac{\partial f}{\partial X}, t \right) \quad (5.3)$$

é o ingrediente da força de reação de radiação, a força não conservativa que inclui os efeitos da RR à dinâmica. O procedimento, percebemos, é simples de ser adaptado: basta identificar a força de RR para o caso eletromagnético de potencial linearmente polarizado e repetir o procedimento proposto no Capítulo 3.

Para o caso eletromagnético, a força g_{nc} é identificada da mesma maneira que fizemos para o caso eletrostático: através da equação (devidamente normalizada)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_L + \tau \left(\gamma \frac{d\vec{F}_L}{dt} - \gamma^3 \left[\frac{d\vec{v}}{dt} \times (\vec{v} \times \vec{F}_L) \right] \right), \quad (5.4)$$

onde \vec{F}_L é a força de Lorentz. O fator que aparece multiplicando o parâmetro τ é, justamente, o que pretende considerar como a força g_{nc} .

Pretende-se, assim, no futuro, oferecer um modelo que leva em consideração a reação de radiação na interação em partículas carregadas e pulsos de ondas eletromagnéticas de modo a estudar a otimização dos parâmetros característicos dos sistema para extrair o máximo possível de energia das ondas e transformá-la em energia cinética das partículas.

Da superposição do campo de um laser com o de um equipamento *wiggler* espacialmente modulado, uma vez considerados os efeitos de radiação, facilmente se obtém grandes valores do parâmetro τ , tornando os efeitos da reação de radiação mais proeminentes. [6]

5.2 Conclusão

Propôs-se um formalismo hamiltoniano modificado que foi capaz de descrever o comportamento médio da dinâmica de partículas aceleradas tanto por campos eletrostáticos, incluindo os possíveis efeitos da Reação de Radiação, quanto por pulsos eletromagnéticos.

Os resultados e previsões dos modelos teóricos obtidos pela proposta concordam satisfatoriamente com as simulações do sistema original e mostram explicitamente como os efeitos da reação à radiação podem, substancialmente, colaborar para com o processo de aceleração das partículas.

Entendemos que à medida que os máximos e mínimos dos campos viajam em alta frequência pela partícula, a força de reação à radiação tende a arrastá-la e acelerá-la de modo a reduzir a velocidade relativa entre a onda e ela. Quanto mais longa for a onda, tão mais eficaz se mostra a aceleração, um recurso descrito pela forma assimétrica do potencial efetivo obtido no Capítulo 3.

Algumas questões não tratadas pela presente análise ficam para uma discussão futura. Uma delas diz respeito a velocidades de fase maiores do que a velocidade da luz no vácuo, as chamadas velocidades superluminais. A aceleração seria mais

efetiva ou menos efetiva se levarmos a velocidade de fase para níveis mais altos?

O futuro do trabalho se concentrará também na investigação dos efeitos da reação de radiação em sistemas eletromagnéticos. A mesma física subjacente dos potenciais ponderomotivos manifestados pelo sistema eletrostático pode ser obtida com a consideração de um arranjo de ondas eletromagnéticas. Pretende-se estudar em mais detalhes esta fenomenologia.

Por fim, como visto nos resultados, a introdução da reação de radiação pode mudar drasticamente a dinâmica da partícula de muitas maneiras, o que não deve, na intenção de estabelecer uma descrição acurada do seu movimento, ser ignorado para este tipo de sistema.

Referências Bibliográficas

- [1] P. Smorenburg, L. Kamp, G. Geloni and O. Luiten, *Coherently enhanced radiation reaction effects in laser-vacuum acceleration of electron bunches*. Laser and particle beams, **28** (4), 553 (2010)
- [2] P. Mulser and D. Bauer, *High power laser-matter interaction*. Springer. 2010
- [3] F. Russman, S. Marini, E. Peter, G. I. de Oliveira, and F. B. Rizzato, *Self focusing in a spatially modulated electrostatic field particle accelerator*. Phys. Plasmas, **25**, 023110 (2018).
- [4] D. E. Ruiz and I. Y. Dodin, *Ponderomotive dynamics of waves in quasiperiodically modulated media*. Physical Review A, **95** (3), 032114 (2017)
- [5] I. Almansa, F. B. Russman, S. Marini, E. Peter, G. I. de Oliveira, R. A. Cairns and F. B. Rizzato, *Ponderomotive and resonant effects in the acceleration of particles by electromagnetic modes*. Physics of Plasmas, **26** (3), 033105 (2019)
- [6] Almansa, I.; Russman, F.; Marini, S. ; Peter, E. ; Rizzato, F. B. . *Radiation Reaction in Spatially Modulated Fields Accelerators*. Brazilian Journal Of Physics, v. **52**, p. 122 (2022).
- [7] F. Russman, S. Marini and F. B. Rizzato, *A canonical view on particle acceleration by electromagnetic pulses*. Journal of Plasma Physics, v. **88**, p. 2 (2022)
- [8] P. K. Shukla, N. Rao, M. Yu and N. Tsintsadze, *Relativistic nonlinear effects in plasmas*. Physics Reports, v. **138** p. 1 (1986)
- [9] R. Bingham, *In the wake of success*. Nature, v. **424**, p. 258 (2003)
- [10] T. Tajima and J. M. Dawson, *Laser electron accelerator*. Physical Review Letters, v. **43** p. 267 (1979)

- [11] E. Esarey, C. Schroeder and W. Leemans, *Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators*. Reviews of modern physics, **81** (3), 1229 (2009)
- [12] X. Zhang, V. N. Khudik and G. Shvets, *Synergistic laser-wakefield and direct-laser acceleration in the plasma-bubble regime*. Physical Review Letters, v. **114**, p. 18 (2015)
- [13] L. D. Landau, E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Butterworth-Heinemann, 4^a ed. (1980). Este livro foi originalmente publicado em russo, no ano de 1947. Sua primeira tradução para o inglês foi publicada em 1951.
- [14] L. D. Landau, E.M. Lifshitz, *Méchanique*, Mir, 3^a ed. (1969).
- [15] M. Raynaud, J. Kupersztych, C. Riconda, J. Adam and A. Heron, *Strongly enhanced laser absorption and electron acceleration via resonant excitation of surface plasma waves*. Physics of Plasmas, v. **14**, p. 9 (2007)
- [16] X. Wang, R. Zgadaj, S. A. Yi, V. Khudik, W. Henderson, N. Fazel, Y. -Y. Chang, R. Korzekwa, H.-E. Tsai, C.-H. Pai and et al. *Self-injected petawatt laserdriven plasma electron acceleration in 10^{17} cm³ plasma*. Journal of Plasma Physics, v. **78**, p. 413 (2012)
- [17] A. Macchi, *A Superintense Laser-Plasma Interaction Theory Primer*. Springer (2013)
- [18] D. A. Burton, R. Cairns, B. Ersfeld, A. Noble, S. Yoffe and D. Jaroszynski, *Observations on the ponderomotive force*. (Relativistic Plasma Waves and Particle Beams as Coherent and Incoherent Radiation Sources II) International Society for Optics and Photonics. (2017)
- [19] L. Fedeli, A. Sgattoni, G. Cantono, D. Garzella, F. Réau, I. Prencipe, M. Passoni, M. Raynaud, M. Kveton, J. Proska et al., *Electron acceleration by relativistic surface plasmons in laser-grating interaction*. Physical Review Letters, v. **116**, p. 1 (2016)
- [20] J.H. Poynting, *On the Transfer of Energy in the Electromagnetic Field*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. **175**, 343-361 (1884)
- [21] R. Flood, M. McCartney and A. Whitaker, *James Clerk Maxwell: Perspective of his Life and Work*, Oxford, Uni. Press, 2014

- [22] J.C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Vol. 2, Clarendon Press, Oxford (1873)
- [23] G.F. FitzGerald, *On the Quantity of Energy Transferred to the Ether by a Variable Current*, Trans. Roy. Dublin Soc. **3** (1883)
- [24] H. Hertz, *Ueber sehr schnelle electrische Schwingungen*, Ann. d. Phys. **31**, 421 (1887)
- [25] H. Hertz, *Ueber electrodynamische Wellen im Luftraume und deren Reflexion*, Ann. d. Phys. **34**, 609 (1889)
- [26] H. Hertz, *Electric Waves*, Macmillan (1900)
- [27] W. A. Atherton, *From Compass to Computer*, Macmillan Education UK (1984)
- [28] O.J. Lodge and J.L. Howard, *On Electric Radiation and its Concentration by Lenses*, Proc. Phys. Soc. London 10, 143 (1889)
- [29] H. Poincaré, *Sur la théorie des oscillations hertziennes*, Compte Rendus Acad. Sci. 113, 515 (1891)
- [30] H. Poincaré, *Les Oscillations Électriques*, Paris (1894)
- [31] J.C. Maxwell, *Theory of Heat*, Longmans, Green & Co (1871)
- [32] W. Weber, *Electrodynamische Massbestimmungen über ein allgemeines Grundgesetz der elektrischen Wirkung*, Abh. König. Sächs. Gesell. Wiss., 209 (1846)
- [33] W. Crookes, *On Radiant Matter*, Pop. Sci. Mon. **16**, 13, 157 (1879)
- [34] J.J. Thomson, *Cathode Rays*, Phil. Mag. **44**, 293 (1897)
- [35] G.J. Stoney, *Of the "Electron," or Atom of Electricity*, Phil. Mag. 38, 418, 157 (1894)
- [36] C. A. Coulomb, *Premiere Memoire sur l'electricite et le Magnetisme*, Histoire de l'Academie Royale des Sciences, 578-611 (1785)
- [37] Peter Vickers, *Frisch, Muller, and Belot on an Inconsistency in Classical Electrodynamics*, Brit. J. Phil. Sci. 59 (2008), 767–792
- [38] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Second edition, John Wiley & Sons, Inc. (1975)

- [39] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd ed., Prentice Hall (1999)
- [40] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1965)
- [41] H.A. Lorentz, *La Théorie Electromagnétique de Maxwell et son Application aux Corps Mouvants*, Arch. Néerl. **25**, 363 (1892)
- [42] L. Lorenz, *Ueber die Identität der Schwingungen des Lichts mit den elektrischen Strömen*, Ann. d. Phys. **207**, 243 (1867)
- [43] L. Lorenz, *On the Identity of the Vibration of Light with Electrical Currents*, Phil. Mag. **34**, 287 (1867)
- [44] B. Riemann, *Ein Beitrag zur Elektrodynamik*, Ann. d. Phys. **207**, 237 (1867)
- [45] B. Riemann, *A Contribution to Electrodynamics*, Phil. Mag. **34**, 368 (1867),
- [46] H. Hertz, *Die Käräfte electrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwell'schen Theorie*, Ann. d. Phys. **36**, 1 (1889)
- [47] M. Planck, *Uber electrische Schwingungen, welche durch Resonanz erregt und durch Strahlung gedampft werden*, Sitz. K. P. Akad. Wiss. Berlin, 151 (1896)
- [48] J. Larmor, *On the Theory of the Magnetic Influence on Spectra; and on the Radiation from moving Ions*, Phil. Mag. **44**, 503 (1897)
- [49] H.A. Lorentz, *Ergebnisse und Probleme der Elektronentheorie*, Springer, Berlin, Leipzig (1905)
- [50] M. Abraham, *Dynamik des Electrons*, Gott. Nachr., 20 (1902)
- [51] M. Abraham, *Zur Theorie der Strahlung und des Strahlungsdruckes*, Ann. d. Phys. **14**, 236 (1904)
- [52] M. Abraham, *Theorie der Elektrizität. Zweiter Band: Elektromagnetische Theorie der Strahlung* (Teubner, Leipzig, 1905)
- [53] H.A. Lorentz, *The Theory of Electrons*, Teubner, Leipzig (1909)
- [54] Kirk T. McDonald, *On the History of the Radiation Reaction* (2018)
<http://www.physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/selfforce.pdf>

- [55] F. Rohrlich, *Classical Charged Particles*, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1965)
- [56] P.A.M. Dirac, *Classical Theory of Radiating Electrons*, Proc. Roy. Soc. A **167**, 148 (1938)
- [57] A. Liénard, *Champ électrique et magnétique produit par une charge électrique contentrée en un point et animée d'un mouvement quelconque*, L'Eclairage Élect. **16**, 5, 53, 106 (1898)
- [58] G. W. Ford, R.F. O'Connell, *Relativistic form of radiation reaction*, Phys. Lett. A **174**, 182-184 (1993).
- [59] H. Spohn, *The critical manifold of the Lorentz-Dirac equation*, Europhys. Lett., **50** (3), p. 287–292 (2000)
- [60] Fritz Rohrlich, *The correct equation of motion of a classical point charge*, Phys. Letters A **283**, 276–278 (2001)
- [61] Fritz Rohrlich, *The dynamics of a charged particle*, Phys. Rev. E **77** (2008)
- [62] G. A. Mourou, T. Tajima, and S. V. Bulanov, , *Optics in the relativistic regime*, Rev. Mod. Phys. **78**, 309 (2006).
- [63] Richard T. Hammond, *Relativistic Particle Motion And Radiation Reaction in Electrodynamics*, Eletronic Journal of Theoretical Physics, No. **23**, 221-258 (2010)
- [64] Arthur Lopes, *Tópicos de Mecânica Clássica*, IMPA, 2012
- [65] Startsev, E. A. McKinstrie, C. J. *Multiple scale derivation of the relativistic ponderomotive force*, Phys. Rev. E **55**, 7527 (1997)
- [66] Liu, C. S. Tripathi, V. K.. *Ponderomotive effect on electron acceleration by plasma wave and betatron resonance in short pulse laser*. Physics of Plasmas **12**, 043103 (2005)
- [67] Sazegari, V., Mirzaie, M. Shokri, B. *Ponderomotive acceleration of electrons in the interaction of arbitrarily polarized laser pulse with a tenuous plasma*. Physics of Plasmas **13**, 033102 (2006)
- [68] Landau, L. Lifschitz, E. *Théorie du champ*, Mir. (1965)

- [69] Elmore, W. C. Heald, M. A. *Physics of Waves*. Dover. (1985)
- [70] Papadopoulos, D.N., Zou, J.P., Le Blanc, C., Chériaux, G., Georges, P., Druon, F., Mennerat, G., Ramirez, P., Martin, L., Fréneaux, A. et al. *The apollon 10pw laser: experimental and theoretical investigation of the temporal characteristics*. High Power Laser Science and Engineering, 4, e34. (2016)
- [71] Mulser, P. Bauer, D. *High power laser-matter interaction*. Springer (2010)
- [72] Ruiz, D. E. Dodin, I. Y. *Ponderomotive dynamics of waves in quasiperiodically modulated media*. Phys. Rev. A **95**, 032114 (2017)
- [73] Macchi, A. *A Superintense Laser-Plasma Interaction Theory Primer*. Springer (1992)
- [74] Terzani, D., Benedetti, C., Schroeder, C. B. Esarey, E. *Accuracy of the time-averaged ponderomotive approximation for laser-plasma accelerator modeling*. Physics of Plasmas **28** (6), 063105 (2021)
- [75] Shukla, P. K., Rao, N. N., Yu, M. Y. L., Tsintsadze N. *Ponderomotive acceleration of electrons in the interaction of arbitrarily polarized laser pulse with a tenuous plasma*. Phys. Letts. **138**, 1 (1986)
- [76] Mendonça, J. T. *Theory of Photon Acceleration*, Series in Plasma Physics, vol. **218**. Bristol: IOP Publishing (2001)
- [77] Smorenburg, P. W., Kamp, L. P. J., Geloni, G. A. Luiten, O. J. *Coherently enhanced radiation reaction effects in laser-vacuum acceleration of electron bunches*. Laser and particle beams **28** (4), 553. (2010)
- [78] Burton, D. A., Cairns, R. A., Ersfeld, B., Noble, A., Yoffe, S. Jaroszynski, D. A. *Observations on the ponderomotive force in Relativistic Plasma Waves and Particle Beams as Coherent and Incoherent Radiation Sources*. II International Society for Optics and Photonics. (2017)
- [79] Peng, H., Riconda, C., Grech, M, Zhou, C.-T. Weber, S. *Dynamical aspects of plasma gratings driven by a static ponderomotive potential*. Plasma Physics and Controlled Fusion **62** (11), 115015. (2020)
- [80] Di Piazza, A. *Exact solution of the landau-lifshitz equation in a plane wave*. Letters in Mathematical Physics **83**, 305 (2008)

-
- [81] Harvey, C., Heinzl, T. Marklund, M. *Symmetry breaking from radiation reaction in ultra-intense laser fields*. Phys. Rev. D **84**, 116005 (2011)
- [82] Vranic, M., Martins, J. L., Vieira, J., Fonseca, R. A. Silva, L. O. *All-optical radiation reaction at 10^{21} W/cm²*. Phys. Rev. Lett. **113**, 134801. (2014)

Apêndice A

Mostra-se neste apêndice o seguinte resultado. Sejam $f_{mn} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ definidas por

$$f_{mn}(x) = \cos^m(x) \sin^n(x) \text{ e } I_{nm} = \int_0^{2\pi} f_{mn}(x) dx,$$

onde m e n são números naturais. Se m ou n é ímpar, então

$$I_{mn} = 0. \tag{A.1}$$

Primeiramente, notemos que a função f_{mn} é periódica. De fato, dado $k \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{aligned} f_{mn}(x + 2k\pi) &= \cos^m(x + 2k\pi) \sin^n(x + 2k\pi) \\ &= (\cos(x + 2k\pi))^m (\sin(x + 2k\pi))^n \\ &= (\cos(x))^m (\sin(x))^n \\ &= f_{mn}(x). \end{aligned} \tag{A.2}$$

O restante da demonstração será separada em dois casos. Começemos analisando o caso onde n é ímpar.

Sendo assim, como a função seno é uma função ímpar, vale que $\sin^n(x)$ também o é. Acontece, portanto, de a função f_{mn} ser ímpar visto que é o produto de funções de diferentes paridades (a função $\cos^m(x)$ é par para qualquer m inteiro não negativo).

Por ser ímpar, vale para f_{mn} que

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} f_{mn}(x) dx = 0.$$

Agora, separando o intervalo, vem

$$0 = \int_{-2\pi}^0 f_{mn}(x) dx + \int_0^{2\pi} f_{mn}(x) dx$$

donde, fazendo a mudança de variáveis $x = u - 2\pi$ na primeira integral, obtemos

$$0 = \int_0^{2\pi} f_{mn}(u - 2\pi) du + \int_0^{2\pi} f_{mn}(x) dx$$

que é, por (A.2),

$$0 = \int_0^{2\pi} f_{mn}(x) dx + \int_0^{2\pi} f_{mn}(x) dx = 2 \int_0^{2\pi} f_{mn}(x) dx \Rightarrow \int_0^{2\pi} f_{mn}(x) dx = 0.$$

Assim, segue (A.1).

Analisemos agora o caso onde m é fixado ser ímpar. Como a função cosseno é par, o resultado não segue tão diretamente como no caso anterior. Mas é possível mostrá-lo pelo Princípio da Indução (ver, por exemplo, Elon Lages Lima, Curso De Análise - Vol.1, SBM).

Para $m = 1$, vale o resultado (A.1). De fato,

$$I_{1n} = \int_0^{2\pi} \cos(x) \sin^n(x) dx = \int_0^{2\pi} \frac{d \sin^{n+1}(x)}{dx} \frac{1}{n+1} dx = \frac{\sin^{n+1}(x)}{n+1} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Se a validade, portanto, de (A.1) para m ímpar for suposta e, em decorrência, conseguirmos mostrá-la também para $m + 2$, mostraremos que vale (A.1).

Fazendo uma integração por partes, chega-se em

$$\int_0^{2\pi} \cos^{m+2}(x) \sin^n(x) dx = \frac{\sin^{n+1}(x)}{n+1} \cos^{m+1}(x) \Big|_0^{2\pi} + \frac{m+1}{n+1} \int_0^{2\pi} \cos^m(x) \sin^{n+2}(x) dx$$

de onde

$$\int_0^{2\pi} \cos^{m+2}(x) \sin^n(x) dx = \frac{m+1}{n+1} \int_0^{2\pi} \cos^m(x) \sin^{n+2}(x) dx.$$

Por hipótese, a integral do lado direito é nula. Daí, segue que a do lado esquerdo também, o que demonstra completamente o resultado.