

Lucas de Oliveira Pereira

**Na busca de uma taxa de retirada sustentável:
um estudo sobre a aplicação de ALM para a
aposentadoria**

Brasil

19 de Outubro de 2022

Lucas de Oliveira Pereira

**Na busca de uma taxa de retirada sustentável: um estudo
sobre a aplicação de ALM para a aposentadoria**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Administração da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Administração.

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Escola de Administração

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Marcelo Perlin

Brasil

19 de Outubro de 2022

CIP - Catalogação na Publicação

de Oliveira Pereira, Lucas

Na busca de uma taxa de retirada sustentável: um estudo sobre a aplicação de ALM para a aposentadoria / Lucas de Oliveira Pereira. -- 2022.

60 f.

Orientador: Marcelo Marcelo Scherer Perlin.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Administração, Programa de Pós-Graduação em Administração, Porto Alegre, BR-RS, 2022.

1. ALM. 2. Aposentadoria. 3. Taxa de Retirada Sustentável. 4. Finanças Pessoais. I. Marcelo Scherer Perlin, Marcelo, orient. II. Título.

Lucas de Oliveira Pereira

Na busca de uma taxa de retirada sustentável: um estudo sobre a aplicação de ALM para a aposentadoria

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Administração da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Administração.

Trabalho aprovado. Brasil, 19 de Outubro de 2022:

Marcelo Perlin
Orientador

Marcelo Righi
Convidado 1

Guilherme Kirch
Convidado 2

Kelmara Vieira
Convidado 3

Brasil
19 de Outubro de 2022

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Universidade Federal do Rio Grande do Sul que é a Universidade responsável pela minha formação e aprendizado desde a graduação em administração. Por mais desafiador que tenham sido os últimos anos, forneceu estrutura para o aprendizado sem renunciar à excelência.

Gostaria de agradecer a minha família que sempre incentivou e disponibilizou todos os recursos para que eu pudesse obter cada vez mais estruturas para o bom aprendizado.

Agradecer ao Programa de Pós-Graduação em Administração que prestou suporte e foi sensível ao momento de dificuldades impostas pela pandemia.

Por fim, agradecer ao meu orientador que sempre incentivou, despertou a curiosidade sobre o tema e disponibilizou tempo e recursos para que tivéssemos sucesso na pesquisa.

Resumo

A situação previdenciária de inúmeros países tem se agravado nas últimas décadas. O principal motivo é a mudança demográfica das populações que estão envelhecendo sem que haja recomposição da população economicamente ativa, em virtude do baixo índice de natalidade de países urbanizados. Atualmente o modelo previdenciário utilizado é o modelo de solidariedade entre gerações, onde o trabalhador contribui para a aposentadoria, sustentando a geração aposentada, assim esperando que em sua vez a próxima geração faça o mesmo. Este estudo busca trazer ferramentas para uma sociedade que demandará, cada vez mais, soluções para planejar suas aposentadorias para depender menos de aposentadorias públicas deficitárias. Com base nisso, este trabalho se propõe, a partir da metodologia de ALM (Asset Liability Management) e programação estocástica, uma adaptação do modelo de [Cooley, Hubbard e Walz \(1998\)](#) para o mercado brasileiro. [Cooley, Hubbard e Walz \(1998\)](#) encontraram taxas de retiradas de até 4% como sustentáveis nos Estados Unidos para portfólios compostos majoritariamente por ativos de renda variável. Para revisão deste estudo, no Brasil, foram utilizadas séries temporais de índices de renda fixa, renda variável e inflacionários, além de carteiras pré-determinadas com composições que variam de um a três índices com ajuste mensal da taxa de retirada para que não haja comprometimento do poder de compra do investidor durante o período de usufruto de sua carteira. Para a estimação dos parâmetros e simulação das séries futuras, foi utilizado o DCC-Garch que é um modelo multivariado que detecta possíveis mudanças nas correlações condicionais dos ativos ao longo do tempo. Os resultados demonstram taxas de retiradas superiores às encontradas em outros países. As carteiras com melhores resultados foram as carteiras compostas majoritariamente por ativos de renda fixa. Portanto, ao contrário de estudos realizados em diversos países, no Brasil os portfólios majoritariamente compostos por ativos de renda fixa se sobressaem sobre os com prevalência de ativos de renda variável.

Palavras-chaves: ALM, aposentadoria, taxa de retirada, taxa de sucesso, DCC-GARCH.

Abstract

The social security situation of countries has worsened in recent decades. The main reason is the demographic change of the inferior populations that are aging, without a recomposition of the economically active population, due to the low birth rate of urbanized countries. Currently, the social security model used is the model of solidarity between generations, where the worker contributes to retirement, supporting the retired generation, thus hoping that the next generation will do the same. This study seeks to bring tools to a society that will increasingly demand solutions to plan their retirement to depend less on deficient public pensions. Based on this, this work proposes, from the methodology of ALM (Asset Liability Management) and stochastic programming, an adaptation of the [Cooley, Hubbard e Walz \(1998\)](#) model for the Brazilian market. [Cooley, Hubbard e Walz \(1998\)](#) found withdrawal rates of up to 4% to be sustainable in the United States for portfolios composed mostly of variable income assets. For the review of this study, in Brazil, temporal income series of rate, variable and inflationary indices were used, in addition to pre-determined portfolios with compositions that fix one of the three indices with monthly withdrawal rate adjustment so that the investor's purchasing power is not compromised during the period of usufruct of his portfolio. For the estimation of parameters and simulation of future series, the DCC-Garch was used, which is a multivariate model that detects possible changes in the conditional correlations of assets over time. The results guarantee withdrawal rates higher than those of other countries. The portfolios with the best results were the portfolios composed mostly of fixed income assets. Therefore, contrary to studies carried out in several countries, in Brazil, portfolios mostly composed of income assets stand out over those with a prevalence of variable income assets.

Key-words: ALM, retirement, withdrawal rate , success rate, DCC-GARCH

Lista de ilustrações

Figura 1 – Retorno Normalizado dos Índices	34
Figura 2 – Garch Univariado para cada Série Temporal	44
Figura 3 – Correlação dos Ativos DCC-Garch	47
Figura 4 – Carteira 100% Renda Fixa	48
Figura 5 – Carteira 50% Renda Variável e 50% Renda Fixa	49
Figura 6 – Carteira 75% Renda Variável e 25% Renda Fixa	50
Figura 7 – Carteira 25% Renda Variável e 75% Renda Fixa	50
Figura 8 – Carteira 50% S&P500 em Reais e 50% Renda Fixa	51
Figura 9 – Carteira Renda Variável, S&P500 em Reais e Renda Fixa com pesos iguais	51
Figura 10 – Carteira 100% de Renda Fixa com Resgate Variável	52
Figura 11 – Carteira 50% de Renda Fixa e 50% de Renda Variável com Resgate Variável	53
Figura 12 – Carteira Renda Variável, S&P500 em Reais e Renda Fixa com Pesos Iguais e Retirada Variável	53

Lista de tabelas

Tabela 1 – Tabela de Volatilidade Média, Retorno Total, Retorno Anual e Máximo Drawdown	35
Tabela 2 – Tabela de Parâmetros Estimados	45
Tabela 3 – Tabela de Volatilidade Média, Retorno Total Médio das Simulações, Taxa de Crescimento Anual e Máximo Drawdown Médio das Carteiras	47

Lista de abreviaturas e siglas

ALM	<i>Asset Liability Management</i>
Anbima	Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais
DCC	<i>Dynamic Conditional Correlation</i>
Dieese	Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos
Garch	<i>Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity</i>
IBOV	Ibovespa
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IMA	Índice de Mercado ANBIMA
MDD	Máximo <i>Drawdown</i>
OMS	Organização Mundial da Saúde
IPCA	Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo

Sumário

	Introdução	19
1	REFERENCIAL TEÓRICO	25
1.1	Sistema Previdenciário Brasileiro	25
1.2	ALM - Noções Básicas	25
1.3	Taxa de Retirada na Aposentadoria	29
2	METODOLOGIA	33
2.1	Fonte de Dados	33
2.2	Modelagem	35
2.3	Variáveis do Estudo	40
3	ANÁLISE DOS RESULTADOS	43
3.1	Estimação dos Parâmetros	43
3.2	Taxa de Sucesso	47
3.3	Taxa de Retirada Dinâmica	52
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	55
	REFERÊNCIAS	57

Introdução

A pensão por idade foi inicialmente criada para trabalhadores do setor privado industrial da Alemanha no século XIX, assim como a assistência por doenças e acidentes. As aposentadorias por idade contemplavam trabalhadores doentes e trabalhadores aposentados com mais de setenta anos (FELDSTEIN; LIEBMAN, 2002). O sistema previdenciário foi implementado pelo setor público como resposta às inúmeras greves dos trabalhadores industriais no governo do Chanceler Otto von Bismarck na Alemanha, e utilizado posteriormente como propaganda perante a outros países. No Brasil, foi a base para a primeira previdência implementada pelo governo federal em 1927, no modelo bismarckiano, denominada de "Estado social". Até então, as previdências no Brasil tinham principalmente contribuições religiosas e solidárias.

Com a experiência da depressão econômica ocorrida no século XX, período entre guerras, surgiram modelos universalizantes que contemplam benefícios sem que seja necessária contribuições prévias, ao contrário do modelo bismarckiano que as exigia, conforme relata Boschetti (2009). Para Leite, Jr e Klotzle (2010) os sistemas previdenciários ao redor do mundo se adequam conforme os consensos sociopolíticos e mudam conforme as demandas da própria sociedade.

Sistemas previdenciários existem em praticamente todas as civilizações modernas. É a principal ferramenta para proteger a população idosa da pobreza pela ausência de renda normal fornecida pelas atividades ativas. Entretanto, Feldstein e Liebman (2002) destacam que essa proteção depende de uma troca, dado que os benefícios são gerados através de taxas impostas a população economicamente ativa. Portanto, a otimização da previdência social é um desafio para os gestores públicos que enfrentam a situação de ter uma base de contribuição menor e uma demanda maior por benefícios na posição contrária.

Conforme Costanzi et al. (2018), os modelos de financiamento previdenciários se dividem, basicamente, em sistemas de repartição simples, sistemas de capitalização, ou ainda uma combinação entre os dois sistemas. O primeiro é geralmente operado por governos onde os trabalhadores ativos contribuem para o pagamento dos aposentados, existindo uma solidariedade entre gerações. Esse modelo tem-se demonstrado bastante desafiador, já que em caso de déficit desta relação a diferença do pagamento recai sobre a arrecadação tributária geral. Isso faz com que inúmeros países revejam suas regras de previdência, a fim de não sobrecarregar seus orçamentos públicos. O sistema de capitalização é composto por uma poupança que pertence ao trabalhador durante o período laboral. Esses valores acumulados são geridos por meio de uma gestão "semi-pública", dado que são geridos por instituições financeiras autorizadas pelo estado, sendo o Chile o maior exemplo desse

modelo na América Latina (PINHEIRO, 2007).

Os sistemas previdenciários têm sofrido em todos os países devido às mudanças demográficas constantes. Segundo dados do IBGE (2019), a pirâmide etária do Brasil continua com a tendência de inversão. Oliveira e Beltrão (2015) demonstram que a razão contribuintes por beneficiários da população brasileira está em constante queda desde 1939. Em 1999 a razão era de 1.7 contribuintes/beneficiários e que pelas perspectivas do autor devem chegar à razão de 1:1 em 2030. Portanto, tem-se cada vez menos contribuintes ativos para pagar as pensões da população aposentada, assim sobrecarregando os orçamentos públicos e forçando a realização de diversas reformas para suavizar e equacionar o sistema. Adicionalmente, Oliveira e Beltrão (2015) demonstram que a taxa cobrada de contribuição tem constantemente aumentado sobre os trabalhadores ativos durante as últimas décadas. Essa realidade traz a importância de estudos sobre como montar portfólios que consigam complementar ou ser a principal fonte de subsistência após a aposentadoria.

Uma solução para a independência da previdência pública é a gestão de patrimônio dos aposentados a fim de garantir sua subsistência. A gestão de carteiras e risco é reconhecida na literatura como ALM (*Asset and Liability Management*). Surgiu da necessidade de gestão de riscos bancários de liquidez e solvência nos Estados Unidos, sendo Chambers e Charnes (1961) os pioneiros nesta discussão. Entretanto, foi expandido para diversas outras áreas e necessidades como a gestão de portfólios, onde a gestão de ativos não é livre, ou seja, existem restrições que impedem as composições de alocação. A literatura acerca dos Modelos de ALM têm sido utilizadas em diversos ambientes, como por exemplo: bancos, seguros, fundos de pensão e finanças pessoais. O problema central do ALM é desenvolver estratégias que permitam cobrir suas obrigações (despesas) em um horizonte multi-periódico em que o balanço financeiro permaneça positivo. Portanto, é fundamentalmente a coordenação entre ativos e passivos (ZIEMBA et al., 1998).

Uma das aplicações do ALM no Brasil é demonstrada por Pinheiro (2007) por meio de fundos de pensões ligados a empresas públicas, como PREVI/BB (Banco do Brasil), PETROS (Petrobras) e ELETROS (Eletrobrás). Os fundos de pensões possuem como passivos as próprias aposentadorias que deverão ser pagas no futuro. Para que esses passivos possam ser cumpridos é necessário a gestão dos ativos e o acompanhamento do comportamento do passivo. Isso significa que as contribuições dos funcionários deverão ser investidas em diversas classes do mercado financeiro, sempre em linha com as expectativas de resgates futuros. Por meio do ALM, o gestor então define a diversificação da carteira de investimentos a fim de obter um portfólio ótimo. Portanto, o objetivo é a maximização do valor do patrimônio do fundo para garantir as futuras retiradas, ao mesmo tempo que monitora o comportamento do passivo. A indústria de fundos de previdência privada, por sua vez, também cresce de forma consistente. Conforme dados da Anbima (Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais) os fundos voltados para

previdência já representam 14% do montante em fundos de investimento em 2022, estando atrás somente de fundos de renda fixa e fundos multimercado.

Para [Zenios e Ziemba \(2007\)](#) investidores institucionais e pessoas físicas enfrentam o mesmo problema de gerenciar seus ativos de forma a atingir determinados objetivos, levando em consideração suas responsabilidades. Atualmente, grande parte da literatura de ALM está voltada para fundos de pensão. [Dutta, Kapur e Orszag \(2000\)](#), [Cairns, Blake e Dowd \(2006\)](#), [Dupačová e Polívka \(2009\)](#), [Josa-Fombellida e Rincón-Zapatero \(2010\)](#), [Duarte, Valladão e Veiga \(2017\)](#). Entretanto, o problema é similar para as diversas aplicações. [Dempster e Medova \(2011\)](#) destacam a importância do planejamento financeiro e gestão de patrimônio, e que essa área necessita de inovação. Um trabalho inicial nesta área começou com [Mulvey e Vladimirov \(1992\)](#) e, posteriormente, com [Zenios e Ziemba \(2007\)](#), demonstrando demais aplicações do ALM. Entretanto, até agora existe pouca pesquisa de ALM dedicada ao indivíduo. O foco deste trabalho será aplicar o ALM para pessoa física. Para ser mais preciso, investigar diferentes tipos de ativos que o investidor pode investir para que consiga cumprir suas obrigações em um horizonte de investimento, sob a incerteza tanto do fluxo de ativos quanto de passivos.

Diversos estudos demonstram preocupações com o planejamento de renda para aposentadoria. [Cooley, Hubbard e Walz \(1998\)](#) publicaram um estudo que ficou conhecido como *Trinity Study*, com intuito verificar a taxa de retirada que é sustentável para horizontes de até 25 anos e virou uma das fontes da regra dos 4%. Apesar do artigo não tratar de aposentadoria precoce, mas da aposentadoria padrão, muitos movimentos têm utilizado os resultados por acreditar que a uma taxa de retirada de 4% é possível sustentar o estilo de vida. Um movimento que utiliza destes princípios é o F.I.R.E movement (Financial Independence, Retire Early) nos Estados Unidos. [Taylor e Davies \(2021\)](#) explica que essa comunidade surgiu nos anos 2000, em contraponto a literatura americana dos anos de 1990 que estava centrada em torno da identificação e paixão do indivíduo com o trabalho e carreira. Entretanto, esse movimento ganhou força depois da crise financeira de 2008. A liberdade para esses indivíduos passa não apenas pela independência do mercado de trabalho, mas também do materialismo, do consumismo e da dívida do consumidor. A liberdade é baseada no investimento passivo no mercado de ações, por isso a regra dos 4% é o pilar desse movimento.

Os resultados foram agregando hipóteses importantes que acabaram sendo testadas por vários estudos. [Bengen \(1994\)](#) iniciou a discussão demonstrando em seus primeiros resultados que o mercado acionário é essencial para o sucesso dos portfólios e que carteiras compostas com pelo menos 50% de ações poderiam suportar taxas de retiradas mensais de até 5,66% ao ano. Posteriormente, [Cooley, Hubbard e Walz \(2011\)](#) traz resultados mais completos, onde é possível verificar diferentes resultados, podendo, inclusive, ser possível realizar retiradas acima de 4% dependendo do tempo de retirada e da composição das

carteiras, reforçando que carteiras com 50% a 75% tem os melhores resultados. Entretanto, [Scott, Sharpe e Watson \(2009\)](#) alerta para que não seja discriminado o uso da regra dos 4%, demonstrando seus riscos como a volatilidade das carteiras. Porém, carteiras com alta concentração em renda fixa, apesar da sua previsibilidade e baixa volatilidade, tem alta probabilidade de fracassar mesmo com taxas de retiradas baixas. [Finke, Pfau e Blanchett \(2013\)](#) com sua última atualização demonstrou preocupação com os *bonds* abaixo da média histórica, o que pode influenciar os resultados dos estudos anteriores. Por fim, [Waring e Siegel \(2015\)](#) foi além e sugere que as taxas de retirada sejam revistas anualmente conforme o desempenho dos portfólios. Parte da literatura como [Pfau e Kitces \(2013\)](#) e [Waring e Siegel \(2015\)](#) sugerem a inclusão de diversas restrições e revisões para a obtenção de taxas de retiradas. Um dos objetivos é adaptar a carteira a situação de mercado que o portfólio enfrenta, a fim de garantir ou melhorar as taxas de retiradas possíveis. Por este motivo, é interessante verificar quais os efeitos desta adaptação também ao mercado brasileiro.

Isto posto, o objetivo geral deste trabalho foi adaptar o estudo de [Cooley, Hubbard e Walz \(2011\)](#) para verificar se existe uma taxa de retirada sustentável no Brasil, com o tema: **Na busca de uma taxa de retirada sustentável: um estudo sobre a aplicação de ALM para a aposentadoria**. A motivação para esse tema surgiu do desejo de tentar aplicar os conhecimentos adquiridos na parte curricular do mestrado em finanças a um problema latente no Brasil; o planejamento de renda na aposentadoria. O problema tratado consiste na otimização de ativos e passivos das pessoas físicas, com o intuito de maximizar as rentabilidades, por meio de investimentos em renda fixa e renda variável. Portanto, será definido o quanto o brasileiro pode sacar de seu portfólio sem a deterioração do mesmo, garantindo assim, sua aposentadoria.

Os objetivos específicos são:

- Verificar o impacto que a composição da carteira influência sobre a taxa de retirada sustentável;
- Construir e verificar a eficácia de uma taxa de retirada dinâmica sobre o fluxo de caixa para garantia da aposentadoria.
- Utilizar um método de estimação de volatilidade multivariado que considera a interação dos ativos como uma ferramenta que proporciona melhores decisões.

Um dos motivos da adaptação do estudo é que conforme [Schymura \(2018\)](#), os juros reais da economia brasileira são a décadas positivos e maiores que seus pares internacionais. Portanto, é possível gerar valor com baixa exposição de risco, dado que títulos públicos no Brasil são considerados ativos livres de risco em comparação a outras classes de ativos nacionais. É factível, entretanto, que esse cenário de juros reais positivos não sejam permanentes, percebe-se que ao longo dos anos que esse *spread* tem diminuído com o

tempo. Portanto, é necessário ao investidor incluir em seus portfólios outras classes de ativos. Essa anomalia brasileira é perceptível na estimação dos parâmetros deste trabalho. É possível observar nas simulações os retornos maiores com menos risco para os ativos de renda fixa. Então, apesar dos resultados superiores para portfólios de renda fixa, é importante que o investidor entenda que a dinâmica do mercado brasileiro pode mudar. Portanto, é importante não se concentrar apenas em uma classe de ativo.

A despeito da importância da discussão, não existe no Brasil nenhum trabalho científico que desenvolva métricas e resultados para definir uma taxa de retirada sustentável para aposentadoria no mercado brasileiro. Além disso, para a estimação dos parâmetros e simulação de séries temporais, foi utilizado o DCC-GARCH de [Engle \(2002\)](#) que, segundo [Celik \(2012\)](#) é um modelo multivariado que detecta possíveis mudanças nas correlações condicionais dos ativos ao longo do tempo e que capta o comportamento dos ativos financeiros. Nos estudos anteriores não foi utilizada essa ferramenta. Portanto, estou ampliando a literatura para que em trabalhos futuros seja utilizado simulações de séries temporais que considerem a correlação dos ativos, tanto para os retornos financeiros quanto para seleção de carteiras para resultados mais robustos.

Destaco novamente a importância deste estudo para o planejamento da aposentadoria de uma população que demandará crescentemente soluções financeiras para complemento das aposentadorias tradicionais e sustento de pessoas que têm optado por aposentadorias precoces. Um trabalho nessa área para o mercado nacional é de interesse da própria sociedade que poderá planejar melhor suas aposentadorias. A alocação dos brasileiros, tanto em títulos públicos que financiam as atividades do Governo Federal, quanto em ações que financiam as atividades privadas no país têm impacto positivo na economia do país como um todo.

1 Referencial Teórico

1.1 Sistema Previdenciário Brasileiro

Segundo dados da Organização Mundial da Saúde (OMS), a população mundial vem envelhecendo rapidamente em consequência da queda da taxa de fecundidade e elevação da expectativa de vida, salvo poucas exceções. Desde o início da transição demográfica do Brasil, que consta a partir da década de 1960, a taxa de fecundidade brasileira declinou de 6,0 filhos por mulher para 1,78 filhos por mulher. Uma redução de mais de 70% na taxa de fecundidade, uma das taxas de queda mais aceleradas da América Latina. Segundo as projeções do [Bonifácio e Guimarães \(2021\)](#), a população brasileira irá diminuir de tamanho, chegando ao final do período de projeção, em 2100, menor que o tamanho apresentado em 2010. Desta projeção obtemos também como vai ser o perfil da população brasileira. Dos atuais 9,8% da população com 65 anos ou mais para 21,9% já em 2050, e de 29,5% e 2100. A maior longevidade da população com a diminuição da fecundidade cria grandes problemas para a sustentação de programas de seguridade social.

Passando por diversas alterações desde sua promulgação da Constituição em 1988, o Regime de Previdência Social no Brasil sofreu sua última grande alteração por uma Emenda à constituição em 2019 (Emenda Constitucional nº103/2019). Nesta última atualização ficou disposto as novas idades mínimas de aposentadoria. Após o período de transição, a idade mínima de aposentadoria para mulher passa a ser 62 anos, para os homens a idade mínima passa a ser 65 anos, além da exigência de contribuir ao fundo por 15 anos e 20 anos, respectivamente. O valor do benefício mínimo é de um salário mínimo (R\$1212,00, atualmente) e o valor máximo é de 7087,22 reais. Para efeitos de comparação, a cesta básica no Brasil, segundo o Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese) que pesquisa os preços de varejo em 17 cidades brasileiras, foi de R\$669,03, ou 55,20% do salário mínimo (piso da aposentadoria). Portanto, somente para alimentação, é necessária a complementação da aposentadoria, dado que existem diversos outros gastos necessários além da alimentação. A mesma instituição ainda estima um valor teórico de R\$6527,67 que seria o valor necessário para suprir a alimentação, moradia, saúde, educação, vestuário, higiene, transporte e lazer de uma família de 4 pessoas.

1.2 ALM - Noções Básicas

A Gestão de Ativos e Passivos foi uma criação que evoluiu com os bancos e seguros, sendo impossível sua dissociação desses dois setores. Dos anos de 1929 até meados da década de sessenta, a taxa de juros da economia americana praticamente não se moveu,

diminuindo os riscos gerados por sua natureza estacionária. Apesar do período com menor risco, os bancos continuaram suscetíveis a diversos riscos, como: Risco de liquidez, Risco de Crédito, Risco de juros, Risco de inflação, Risco de moeda, Risco de mercado etc. Com o aumento da demanda por gestão de risco, surge então o modelo determinístico de [Chambers e Charnes \(1961\)](#), pioneiro no ALM, com o enfoque principalmente na gestão de riscos de liquidez e crédito. Todavia, o tema se desenvolveu para os demais tipos de riscos e para vários campos da economia.

Nos anos setenta, surgiram os primeiros modelos estocásticos. Esses modelos foram originários do modelo seminal de [Markowitz \(1952\)](#), conhecida como a teoria moderna de portfólio. Em 1952 Markowitz mostrou que investidores desejam obter o maior retorno esperado possível com um investimento, mas ao mesmo tempo desejam uma baixa variância desses retornos. O modelo, entretanto, é medido pela variação de um único período no horizonte de planejamento.

A programação estocástica com programação dinâmica tem discutido as aplicações do ALM por algum tempo, entre os quais os modelos propostos por [Bradley e Crane \(1972\)](#). [Bradley e Crane \(1972\)](#) apresenta um modelo dinâmico de carteira de títulos de vários períodos. O procedimento utiliza o algoritmo de decomposição de programação matemática e uma técnica eficiente desenvolvida para resolver subproblemas do modelo geral de portfólio. [Carino et al. \(1994\)](#) desenvolveu um modelo de gerenciamento de ativos e passivos usando programação estocástica de vários estágios, determinando uma estratégia de investimento ideal e considerando riscos tangíveis. O modelo para área de seguros tinha como objetivo produzir um retorno alto para pagar juros anuais sobre apólices de seguros do tipo poupança, sem sacrificar o patrimônio futuro da empresa. [Kusy e Ziemba \(1986\)](#) Por sua vez, desenvolveu um modelo de programação linear estocástica multiperíodo para bancos que têm que ao administrar seus ativos e passivos à luz das incertezas nos fluxos de caixa, custo dos fundos e retorno dos investimentos, e deve determinar seu trade-off ideal entre risco, retorno e liquidez. O autor também discute os resultados de [Bradley e Crane \(1972\)](#) sendo um modelo mais tratável se comparado com o modelo de árvore de decisão estocástica. Por fim, [Doumpos et al. \(2002\)](#) traz três novas abordagens que são aplicadas a problemas financeiros e bancários, como previsão de falência de negócios, avaliação de risco de crédito e seleção e gerenciamento de portfólio. Realizou uma comparação com análise discriminante linear e quadrática e análise logit. Todos são exemplos da evolução da discussão e significância do tema para gestão. A programação estocástica, pode então, ser utilizada em análises financeiras porque a maioria dos fenômenos em finanças varia de forma aleatória. [Zenios e Ziemba \(2007\)](#) trouxe diversas aplicações e metodologias aplicáveis no universo de ALM, com base em modelos estocásticos e otimização para lidar com as diversas restrições que a gestão pode ter nos diversos cenários e ambientes aplicáveis a literatura de ALM.

A gestão não adequada da solvência entre ativos e passivos, segundo [Adam \(2008\)](#), se mostra em um cenário de risco real, onde agentes financeiros que não estão devidamente preparados com a gestão de risco de suas carteiras podem ter problemas de liquidez. Ainda, [Adam \(2008\)](#), cita como crise financeira dos anos 80 e 90 nos Estados Unidos provou importante a gestão de riscos na tomada de decisão. Para [Zenios e Ziemba \(2007\)](#) o ALM pode ser definido como um processo contínuo de definição, implementação e revisão de estratégias relativas a estes.

Um ALM para atividade bancária estuda um horizonte temporal menor que um ALM para fundos de pensão. Dado que, a estrutura de passivos é diferente para cada caso. Enquanto um trabalha com um histórico de comportamento de depósitos e volume de saques, o outro conta com as perspectivas de resgates e aplicações conforme regras específicas dos planos de benefícios. O primeiro passo do método tradicional de ALM para [Zenios e Ziemba \(2007\)](#) é o levantamento da exigibilidade e das principais classes de ativos a serem consideradas. O passo posterior, é realizar a otimização conforme as limitações das estratégias. Define-se uma estratégia que deve ser monitorada ao longo dos anos para otimizar os objetivos. No caso da pessoa física, o objetivo é construir um portfólio que consiga no futuro ser fonte de subsistência, mantendo sempre o risco da carteira em níveis aceitáveis. Ou seja, manter um balanço patrimonial positivo, ao mesmo tempo que faz o gerenciamento de risco da carteira, conforme suas restrições.

Para [Dempster e Medova \(2011\)](#) o ALM para indivíduos demonstra algumas limitações que não são consideradas por planejadores financeiros, até pela limitação da discussão ao investidor individual. O ALM reside, para qualquer aplicação, na alocação de uma certa quantidade de riqueza (aportes e patrimônio) em um número de ativos financeiros $1; \dots; n$, a fim de cobrir obrigações futuras. O modelo assume a forma de um modelo estocástico intertemporal de alocação devido à aleatoriedade dos preços dos ativos e da natureza da dependência das decisões de investimento.

[Dupačová e Polívka \(2009\)](#) estuda o ALM para fundos de pensão, o objetivo aqui é similar ao investidor individual. Deseja-se acumular patrimônio ou soma de pagamentos (*cash flow*) para que no futuro possa-se usufruir das aplicações financeiras que o fundo realizou no período de acúmulo acordado. Os pagamentos podem ser realizados em um montante fixo ou em um fluxo de caixa acordado. As regras para fundos de pensão são parecidas ao redor do mundo, mas variam de acordo com cada país. Deve-se realizar aplicações financeiras com retorno estável ao longo do tempo, conforme o perfil do passivo do fundo. Essas limitações acabam por criar, a investidores que não estão no mesmo período de acúmulo, uma distorção na utilidade do investidor. [Dupačová e Polívka \(2009\)](#) ressalta que o futuro dos benefícios são desconhecidos, dada a imprevisibilidade do mercado. A aplicação de programação estocástica se demonstra uma ferramenta eficaz, já que modelos que se sustentam em finitos horizontes e distribuições são escolha aceitável.

Han e Hung (2017) estuda a gestão de ativos. Trabalhou com um benefício mínimo como um mecanismo de proteção contra o risco da inflação ao longo do tempo, não apenas durante a fase de acumulação, mas também na fase de usufruto. Introduziu a função utiliza CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*) para orientar o processo de decisão. Demonstra que, quanto mais se aproxima da data de aposentadoria, mais privilegia ativos com menor risco, ao contrário do que acontece no período inicial de acumulação. O estudo fornece assim a dinâmica de um portfólio ótimo consistente com o conhecimento empírico. Guan e Liang (2015) também partem de um benefício mínimo garantido. A complexidade está na consideração de uma taxa de juro estocástica e de que as contribuições dos participantes são incertas, assim como o retorno das ações tem características de volatilidade estocástica. Também modelam a mortalidade, devido às regras dos fundos de pensão. Para maximizar a utilidade esperada do fundo é utilizada programação estocástica. Com as simulações de Monte Carlo, concluem que mesmo em cenários extremos conseguem soluções consensuais com a prática estabelecida.

Aouni, Colapinto e Torre (2014) utiliza a programação por metas e defendem que é a abordagem mais adequada para gestão otimizada de portfólios. Pois, permite agregar múltiplos objetivos e permite, assim, determinar portfólios que minimizam os desvios entre o que consegue se obter e a meta a alcançar, sendo um processo relativamente fácil. Existindo dois objetivos conflitantes, o portfólio ótimo deve realizar um *trade-off* para alcançar um equilíbrio global entre risco e retorno.

Hilli et al. (2007) utiliza programação estocástica como sendo a abordagem eficiente para a gestão otimizada de ativos e passivos, já que consegue tratar a complexidade inerente à dinâmica e às restrições neste tipo de problemas. Após várias experimentações do modelo, para obter um portfólio ótimo em uma gestora sediada na Finlândia, concluíram que conseguem fornecer estratégias com resultados superiores aos que seriam obtidos apenas com a gestão tradicional dos ativos e passivos. Observaram que a política ótima investe mais em ações quando o nível de solvência da companhia é bom, ou só em obrigações no caso oposto, o que é apropriado para fundos de pensão.

Por tanto, o ALM tem se desenvolvido, partindo da preocupação inicial com o risco da taxa de juros nos anos sessenta para os bancos e seguros. Diversos modelos trouxeram resultados e implementação de programação estocástica como os de Bradley e Crane (1972), Carino et al. (1994), Kusy e Ziemba (1986) e Doumpos et al. (2002). Zenios e Ziemba (2007) trás diversas aplicações e diversas soluções práticas de ALM para diversas áreas. A gestão, conforme Adam (2008) cita, precisa considerar os riscos de solvência dos ativos. No caso específico deste trabalho, não é possível admitir um cenário em que o portfólio não sobreviva ao período proposto. Isso acarreta o insucesso do portfólio que é a subsistência do indivíduo, sendo muitas vezes sua única ou principal fonte de renda. A discussão ALM, que apesar dos diversos campos econômicos, tem suas similaridades,

trata em todos os casos da gestão de risco em carteiras com o gerenciamento ativo do passivo, que neste trabalho é a aposentadoria do investidor. Entretanto, deve-se observar um benefício mínimo, como [Han e Hung \(2017\)](#) e [Guan e Liang \(2015\)](#) restringiram. A literatura de ALM para pessoa física, e para fundos de pensão, discute o que [Cooley, Hubbard e Walz \(1998\)](#) experimentou. A regra dos 4%, é para ótica do ALM, a gestão do ativo, patrimônio, que está sendo liquidado pela necessidade do passivo no presente (aposentadoria). Um portfólio que consiga em todos os cenários a sua solvência é uma otimização de ativos e passivos.

1.3 Taxa de Retirada na Aposentadoria

Primeiramente, [Bierwirth \(1994\)](#) analisou o impacto das taxas de retirada ajustadas à inflação em diversos portfólios de ações, títulos públicos americanos de curto e longo prazo e concluiu que historicamente taxas de 2,66% a 5,19% são perfeitamente sustentáveis quando diretamente relacionadas à alocação de ações. Destacando a importância das ações para o sucesso dos portfólios de aposentadoria.

Depois [Bengen \(1996\)](#) argumentou que, uma vez que os retornos reais dos ativos e as taxas de inflação eram historicamente bastante voláteis, planos de aposentadoria com base em suas médias eram irrealistas. Embora um aposentado queira a taxa de retirada mais alta possível, ele também quer sustentar seus gastos ao longo de seus anos de aposentadoria. Com isso, [Bengen \(1996\)](#) defendeu que todos os planos recomendados sejam sustentáveis historicamente. Assim, utilizando uma mistura de 50% e 75% ações concluiu que não se deve ter uma taxa de retirada maior que 4%. Aposentadorias mais longas exigem taxas de retiradas menores, enquanto aposentadorias mais curtas permitem taxas de retiradas mais altas. Ainda concluiu que, portfólios de ações que contêm entre 30% a 40% em *small caps* aumentavam a taxa de sucesso dos portfólios, porém a substituição desse peso por títulos americanos de longo prazo reduz a taxa de sucesso dos portfólios. Em seu artigo original, [Bengen \(1996\)](#) não tinha nível de confiança das suas análises, apenas considerava segura porque nunca tinha falhado historicamente.

Foi então que [Cooley, Hubbard e Walz \(1998\)](#) publicaram a série de artigos que ficou conhecido como "Trinity Study", relatando primeiramente uma taxa de sucesso histórico de 95% para um horizonte de 30 anos, uma 4% de taxa de retirada e 50% de mix de ações e títulos. Esta taxa de sucesso aumentou para 98% quando o percentual de ações foi aumentado para 75%. Os autores calcularam as taxas de sucesso das carteiras com base em retiradas periódicas constantes ajustadas continuamente pela inflação e rebalancearam a carteira de ações e títulos públicos para períodos específicos ou até o momento que essa carteira fizesse sentido. Os autores testaram para períodos de rolagem tradicionais de retornos carteiras de ações de grandes empresas e títulos corporativos, de alto grau de

investimento, bem como simulações de Monte Carlo para testar a sustentabilidade das taxas de retiradas ajustadas à inflação anual. A carteira inicial tinha o valor de \$1000 dólares e foram testadas taxas de 3% a 12%. Os períodos analisados foram 15, 20, 25 ou 30 anos de pagamento. A taxa de sucesso é quando resta pelo menos um dólar ao fim do período. Investimentos em ações estrangeiras não trouxeram efeitos significativos para o estudo. Inflação anual ajustada, pagamentos longos e baixas alocações para ações foram associados no estudo a taxas de sucesso de portfólio mais baixas. [Cooley, Hubbard e Walz \(1998\)](#) levam em consideração as variantes dos estudos de taxa de retirada para portfólios de aposentadoria, porém sem indicar qual é o melhor método para isso.

[Pye \(2000\)](#) reafirma que a taxa de 4% é sustentável, para isso simulou carteiras utilizando método Monte Carlo, cujos retornos reais foram distribuídos log-normalmente com um retorno médio de 8% e um desvio padrão de 18%. Assim, concluiu que sua modificação na regra de 4% seria segura para um horizonte de 35 anos. A estratégia de [Pye \(2000\)](#) acaba por aumentar a expectativa do portfólio fazendo o ajuste nas taxas de retiradas quando o mercado apresenta desempenho ruim.

[Scott, Sharpe e Watson \(2009\)](#) criticam a regra dos 4% e suas diversas variantes por estimularem um método de gastos constantes e não voláteis utilizando um método arriscado e de estratégia volátil de investimento. Demonstram pelos seus resultados que ou o aposentado não usufrui do portfólio superavitário, gerando excedentes não gastos, ou tende a ter um portfólio deficitário, pagando um preço alto por seguir a regra dos 4%. Os autores criticam a planagem recomendada por [Bengen \(1996\)](#) e oferecem outro modelo que demonstra que opções de venda de call e put reduzem os custos das taxas de retiradas.

[Finke, Pfau e Blanchett \(2013\)](#) destacam que a literatura tem seguido três caminhos para a construção dos estudos sobre regras de retirada. A primeira abordagem é baseada apenas em dados históricos para suportar a regra dos 4%. A segunda abordagem utiliza simulações de Monte Carlo que são parametrizadas com os mesmos dados históricos citados, construindo 30 anos de sequências de retornos que seguem distribuição normal ou lognormal. A terceira abordagem também utiliza as simulações de Monte Carlo, todavia utiliza os dados atuais de mercado diversamente dos métodos anteriores por entender que dados passados não tem capacidade de sustentarem carteiras, dado que existe uma diferença principalmente no mercado de renda fixa que experimenta taxas historicamente baixas. [Finke, Pfau e Blanchett \(2013\)](#) demonstra em seus resultados, seguindo a terceira abordagem, que o fracasso dos portfólios são mais altos do que o encontrado em estudos anteriores. "O estudo demonstra que quando recalibrado as suposições de Monte Carlo para as condições atuais de mercado em razão das retiradas, a regra dos 4% é qualquer coisa menos segura". O autor também mostra que a taxa segura para retirada no mercado americano não deveria passar de 2,5% para um período estimado de 30 anos, com taxa de insucesso de 10% e que poucos clientes estariam satisfeitos com essa baixa taxa de retirada

pelo montante que economizaram.

Complementando o que [Finke, Pfau e Blanchett \(2013\)](#) defende sobre a análise de dados atuais de mercado, [Pfau e Kitces \(2013\)](#) demonstra que se o investidor está em um início de *bullmarket* quando começa a realizar suas retiradas regulares, seu portfólio irá ser beneficiado e sofrerá pouco impacto negativo, mesmo que os outros 15 anos esteja em um ciclo de *bearmarket*. Entretanto, o oposto é totalmente prejudicial ao aposentado. Se os retornos forem ruins na primeira metade da aposentadoria, a carteira é tão estressada que é ideal não realizar retiradas e manter as ações.

[Waring e Siegel \(2015\)](#) traz que a anualização das retiradas tem que considerar o quanto os aposentados precisam por ano e dar importância ao risco da carteira que o investidor está predisposto a correr, visto que cada investidor tem níveis de risco aceitos. Defende que, se os ativos caírem 10% as retiradas tem que ser reduzidas em 10% e que isso fará com que as taxas de insucesso se reduzam no horizonte de tempo.

[Forsyth e Vetzal \(2019\)](#) realizou a comparação da alocação fixa contra a alocação adaptativa (variável). Em sua metodologia para estimação da simulação utilizou a ferramenta *Bootstrap*. Em seus resultados, encontrou valores levemente superior para os portfólios variáveis, contra os portfólios fixos. Portanto, o aumento da complexidade para o gerenciamento dos ativos não adiciona vantagens nítidas ao investidor. Manter a alocação fixa é simplificar para que o investidor pessoa física consiga aplicar o estudo, sem se preocupar com estratégias táticas de investimento.

Por sua vez, [Scruggs \(2019\)](#) sugere que exista uma espécie de alavanca, onde seja possível flexibilizar a taxa de retirada. O autor cita que existem três escolhas que o investidor ou planejador financeiro deve fazer. A primeira escolha seria a composição da carteira que encaixe com a expectativa de retirada do investidor e se o aposentado aceita retiradas menores para aumentar as chances de sucesso do portfólio, ou prefere manter taxas fixas. [Scruggs \(2019\)](#) encontrou evidências de melhoras quando a taxa de retirada é limitada em 2% para a preservação do portfólio. Também discute a flexibilização a fim de aumentar a taxa para idades mais avançadas como compensação aos poupadores pelo início da aposentadoria terem reduzido suas retiradas.

[Appel e Maré \(2022\)](#) trouxe recentemente a discussão para o cenário africano. O foco foi determinar a taxa segura de retirada para os aposentados sul-africanos, ao mesmo tempo que sugere alocações dinâmicas para diminuir o risco de falência dos portfólios com estratégia de derivativos, assim como [Bengen \(1996\)](#) sugere. As taxas sul-africanas demonstram certa similaridade com os resultados encontrados no Brasil. Diferentemente dos resultados americanos, os portfólios com menor percentual de renda-fixa apresentaram taxa de sucesso maior do que os portfólios com renda-variável para o período de 30 anos.

[Asebedo e Browning \(2020\)](#) extrapola a discussão do ponto técnico para o ponto

psicológico. Em estudo nos Estados Unidos, americanos com mais de 50 anos demonstraram que existem perfis que se adaptam melhor com as taxas de retirada. Os resultados do modelo de equações estruturais revelaram que aqueles com maior consciência, extroversão, afeto positivo e autoeficácia financeira têm menor taxa de retirada; enquanto aqueles com maior abertura, amabilidade, neuroticismo e afeto negativo têm maior taxa de retirada. No geral, demonstra que as atitudes de poupar antes da aposentadoria são refletidas posteriormente. Esta ferramenta pode trazer informações importantes para planejadores financeiros maximizarem a satisfação dos seus clientes, conforme a característica deles.

Os resultados foram agregando afirmações importantes que acabaram se confirmando na maioria os estudos. Inicialmente [Bengen \(1994\)](#) iniciou a discussão demonstrando em seus primeiros resultados que o mercado acionário é essencial para o sucesso dos portfólio, já sugeriu carteiras compostas com pelo menos 50% de ações para taxas de retiradas de até 5,66%. Posteriormente, [Cooley, Hubbard e Walz \(2011\)](#) traz resultados mais completos, onde é possível verificar diferentes resultados, podendo, inclusive, ser possível realizar retiradas acima de 4% dependendo do tempo de retirada e da composição das carteiras, reforçando que carteiras com 50% a 75% tem melhores resultados. Entretanto, [Scott, Sharpe e Watson \(2009\)](#) alerta para que não seja discriminado o uso da regra dos 4%, demonstrando seus riscos como a volatilidade das carteiras. Porém, carteiras com alta concentração em renda fixa, apesar da sua previsibilidade e baixa volatilidade, tem alta probabilidade de fracassar mesmo com taxas de retiradas baixas. [Finke, Pfau e Blanchett \(2013\)](#) com sua última atualização demonstrou preocupação com os títulos públicos abaixo da média histórica, o que pode influenciar os resultados dos estudos anteriores. Por fim, [Waring e Siegel \(2015\)](#) foi além e sugere que as taxas de retirada sejam revistas anualmente conforme o desempenho dos portfólios. [Forsyth e Vetzal \(2019\)](#) não encontrou vantagens em aplicar estratégias que mude o portfólio conforme alterações de mercado. É interessante observar que o estudo de [Appel e Maré \(2022\)](#) em um país em desenvolvimento têm resultados, enquanto a composição de portfólio similares a aplicação no Brasil.

2 Metodologia

2.1 Fonte de Dados

Para a análise, as principais características de uma implementação de programação estocástica dinâmica é a modelagem e a simulação de retornos estocásticos para ativos financeiros, fatores econômicos e passivos. Neste estudo foram utilizados dados do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), IPEA (Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada) e do SUS (Sistema Único de Saúde).

Segundo dados do PNAD (2022), o rendimento mensal dos brasileiros em 2019 foi de 2569 reais. A expectativa de vida no Brasil é de 76,6 anos (IBGE, 2019). Levando em consideração a última reforma da Previdência, a idade mínima para a aposentadoria no setor público e privado passou para 65 anos para homens e 62 anos para mulheres (Emenda Constitucional N°103, de 12 de Novembro de 2019). Portanto, a partir desses dados conseguimos definir o passivo que será necessário arcar com a aposentadoria. Essa diferença de 11,6 anos é importante como referência. Nos prazos propostos o menor prazo de aposentadoria será o de 10 anos.

O Índice de preços no consumidor amplo (IPCA) é calculado pelo IBGE e é o índice oficial para acompanhamento da inflação no Brasil. Os dados obtidos são mensais, período de cálculo do mesmo. O IPCA é constituído por nove categorias, conforme sua metodologia, sendo elas: alimentação e bebidas, habitação, artigos de residência, vestuário, transportes, saúde e cuidados pessoais, despesas pessoais, educação e comunicação.

Para composição da carteira, foram considerados alguns índices, conforme suas naturezas. Para renda fixa foi utilizada uma composição dos índices IMA-S, que representa a evolução, a preços de mercado, da carteira de títulos públicos remunerados pela Selic (LFT) e o IMA-B que se refere a uma categoria de índices que acompanham a carteira de títulos atrelados ao IPCA. Os dados do IMA-S e IMA-B foram obtidos pelo sistema SGS do Banco Central do Brasil (<https://www3.bcb.gov.br/sgspub/>), mas pode ser consultado no próprio site da Anbima (<https://www.anbima.com.br>).

As séries de inflação, dólar, IMA-S e IMA-B utilizadas foram obtidas através de consultas ao Banco Central do Brasil (<https://www3.bcb.gov.br/sgspub/>), mas os dois últimos podem ser consultados pelo próprio site da Anbima (<https://www.anbima.com.br>). Os códigos utilizados para consulta das séries temporais no SGS foram:

- Dólar - BCB/1
- IPCA - BCB/433

- IMA-S - BCB/12462
- IMA-B - BCB/12466

Para composição da carteira de renda variável foi utilizado o índice Ibovespa, que é o principal índice de referência da bolsa brasileira. Para ativos do exterior foi utilizado o índice S&P500 em reais, que é composto pelas 500 maiores empresas dos Estados Unidos, ajustado em reais. Ambos índices são facilmente investíveis por pessoas físicas por meio de ETFs (*Exchange Traded Fund* que tenham a mesma composição dos índices. Os retornos dos índices Ibovespa e S&P500, utilizados para compor o portfólio, foram obtidos através de dados dos repositórios Yahoo Finance (<https://br.financas.yahoo.com>) e Investing (<https://br.investing.com/>). A escolha se justifica pelo acesso gratuito e grande utilização destes bancos por agentes do mercado financeiro.¹

O primeiro passo do estudo foi baixar as séries temporais de preços diários dos índices citados para a posterior manipulação dos dados. As séries temporais das cotações históricas dos índices tem periodicidade diária. Entretanto, como os dados de IPCA são mensais, todos os dados são utilizados no mesmo espaço temporal. Portanto, todas as estimações de modelos se darão a partir dos valores mensais. O período da amostra é de 30/04/2004 a 30/08/2022.

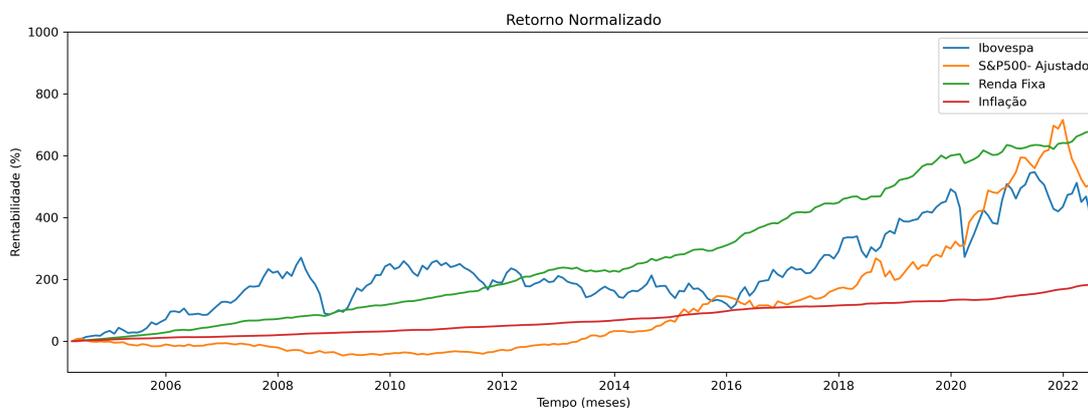


Figura 1 – Retorno Normalizado dos Índices

Na Figura 1 é possível verificar o retorno aritmético normalizado dos índices nos últimos 18 anos. Esta visualização demonstra o comportamento dos dados no período. A seleção do período se deu a partir da disponibilidade de todos os índices para a mesma data. Portanto, é utilizado a maior quantidade de dados possível no mesmo espaço amostral para todos os ativos.

¹ Os dados foram comparados entre si e com outros fornecedores de dados, como Google Finance (<https://www.google.com/finance/>). Não foram encontradas diferenças de preços significativas entre as séries.

Carteiras	Volatilidade	Retorno Total	Retorno Anual	MDD
Ibovespa	23,38%	458,59%	9,83%	-54,9%
S&P500 em reais	16,56%	528,18%	10,54%	-53,4%
Renda Fixa	3,85%	686,79%	11,90%	-4,3%
IPCA	1,15%	180,32%	5,78%	-1,00%

Tabela 1: Tabela de Volatilidade Média, Retorno Total, Retorno Anual e Máximo Drawdown

A tabela 1 demonstra algumas características dos ativos utilizados. Os ativos de renda variável são os mais voláteis e foram os que tiveram os maiores *drawdowns* registrados no período. O máximo *drawdown* (MDD) mede a perda máxima que um ativo financeiro ou carteira já sofreu historicamente. É a diferença percentual do ponto máximo (valor máximo) e o ponto mínimo (valor mínimo). Ao investidor, é interessante evitar os *drawdowns* por meio da diversificação, ou pelo menos avaliar o risco que está sendo submetido. A Renda Fixa teve a menor volatilidade e o maior retorno anual, inclusive maior que o S&P500 em reais. Isso demonstra uma característica do mercado brasileiro, onde a renda fixa entrega retorno com baixo risco.

2.2 Modelagem

Para modelagem de séries temporais utiliza-se modelos estocásticos para analisar a estrutura de uma série temporal. Um dos modelos amplamente utilizados para modelar séries temporais é o modelo ARMA (*auto-regressive moving average*). Para Hamilton (1994), um modelo ARMA(p,q) inclui dois processos. O processo auto-regressivo (AR) e o processo de médias móveis (MA). Nos modelos de séries temporais univariadas a modelagem tem como objetivo capturar a relação entre, $\{r_t\}_{t=1}^T$. De forma geral, um modelo auto-regressivo pode ser descrito como a equação abaixo 2.1:

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \phi_2 r_{t-2} + \phi_p r_{t-p} + \dots + \epsilon_t \quad (2.1)$$

onde:

ϵ é o ruído branco estacionário (média zero, variância constante e não auto-correlacionado);

p são as defasagens do retornos.

A classe de MA (moving average), por sua vez, pode ser obtida através da equação 2.2:

$$r_t = \mu + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q} \quad (2.2)$$

onde: q são as defasagens do termo de erro.

Dado que o processo de retorno é mostrado como estacionário, um modelo ARMA (p,q) pode ser utilizado. O termo autorregressivo é utilizado para mostrar como os retornos anteriores são correlacionados, o termo de média móvel representa o processo como a soma de suas defasagens. A equação ARMA(p,q) é, então, um modelo autorregressivo de média móvel obtido pela equação 2.3:

$$r_t = c + \epsilon_t + \sum_{i=1}^p \varphi_i r_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \epsilon_{t-i} \quad (2.3)$$

onde:

c é uma constante.

O processo de erro, ruído branco, é representado pela equação 2.4:

$$r_t \sim IN(0, \sigma_{\epsilon_t}^2) \quad (2.4)$$

Dado que as informações são compostas por valores observados, o erro é determinado. O erro, pode então ser interpretado como retorno inesperado, ou choques de mercado.

Conforme [Andreou e Ghysels \(2009\)](#), as séries econômicas não possuem variância constante. Grande parte dos retornos é concentrada ao redor de zero, levando a uma forma leptocúrtica com caldas relativamente pesadas nas pontas. Tem como característica de apresentarem momentos de baixa volatilidade seguidos por aumentos expressivos da mesma. Portanto, como a variância dos ativos financeiros não são constantes, estocásticos. É necessário, então, o uso de modelos heterocedásticos, que consideram que a variância não é constante.

O modelo Autoregressive Conditionally Heteroskedastic (ARCH) de [Engle \(1982\)](#) foi o primeiro artigo publicado a considerar um modelo paramétrico para volatilidade. O ARCH modela a volatilidade quadrática da variável no tempo como uma média móvel dos retornos quadráticos passados. Assim, pode-se trabalhar com modelo estacionário de séries temporais para os retornos. O modelo ARMA é utilizado em conjunto para filtrar a autocorrelação da série, ou seja, captar a dependência dessa série com o seu passado.

O modelo ARCH pode ser representado pela seguinte equação 2.5:

$$R = \sigma_t \epsilon_t, \sigma^2 = \alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1}^2 + \alpha_1 R_{t-1}^2 + \alpha_2 R_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q R_{t-q}^2 \quad (2.5)$$

[Bollerslev \(1986\)](#) notou que era necessário estimar modelos ARCH com ordens muito altas para captar a variância condicional dos modelos. A partir disso, criou uma forma mais geral do modelo ARCH, conhecida atualmente como GARCH. A modelagem Garch, portanto, complementa exatamente a dificuldade que o modelo ARCH apresenta. Os modelos da família GARCH, ARCH, utilizam a estimativa por máxima verossimilhança

que é um método para estimação dos parâmetros. A equação 2.6 demonstra claramente a adição da volatilidade na estimação:

$$R = \sigma_t \epsilon_t, \sigma^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i R_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (2.6)$$

O Modelo eGARCH(p,q) desenvolvido por Nelson (1991) relaxa as restrições do modelo original, dado que os coeficientes podem ser negativos e permite que o modelo reaja de forma diferente a variações negativas e positivas. O modelo EGARCH (Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) é obtido através:

$$R = \sigma_t \epsilon_t, \ln(\sigma|t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (|R_{t-i}| + \delta_i R_{t-i} \sigma_{t-i}) + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2) \quad (2.7)$$

E, por fim, o modelo GJR-GARCH de Glosten, Jagannathan e Runkle (1993) que também considera o impacto negativo maior em $t - 1$ do que impactos positivos. O modelo GJR-GARCH é obtido através:

$$R = \sigma_t \epsilon_t, \sigma^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \gamma_i N_{t-1} R^2 t - i + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma^2 t - j) \quad (2.8)$$

Andreou e Ghysels (2009) cita que há diversas formas para identificar os melhores modelos. Os critérios tradicionais de seleção de modelos são o critério de informação de Akaike (AIC) e o critério de informação Bayesiano (BIC), sendo o segundo o mais indicado para séries temporais longas ou curtas. O modelo que apresentar a menor estatística BIC é selecionado como melhor modelo. O BIC é dado pela equação 2.9:

$$BIC = -2 \log f(x_n | \theta) + p \log n, \quad (2.9)$$

Em que $f(x_n | \theta)$ é o modelo escolhido, p é o número de parâmetros estimados e n é o número de observações da amostra.

O primeiro modelo de GARCH multivariado foi introduzido por Bollerslev, Engle e Wooldridge (1988) e foi chamado de VEC model. No VEC model, toda variância condicional e covariância é uma função de todas as variâncias condicionais defasadas. o modelo pode ser expresso pela equação 2.10:

$$vech(H_t) = c + \sum_{j=1}^q A_j vech(\epsilon_{t-j}) + \sum_{j=1}^p B_j vech(H_{t-j}) \quad (2.10)$$

Entretanto, a modelagem necessita de um grande número de parâmetros na ordem de $(p+q) + (N(N+1)/2)2 + N(N+1)/2$, demandando uma grande potência computacional.

O modelo BEKK de [Bollerslev \(1990\)](#) criou uma nova definição com uma nova parametrização para matriz de covariância condicional H_t . É conhecida como uma versão restrita do modelo VEC. Ele define como positiva a covariância condicional, formulando de maneira que esta propriedade esteja implícita na estrutura do modelo. A equação 2.11 descreve o modelo:

$$H_t = CC' + \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^K A'_{kj} \epsilon_{t-j} \epsilon'_{t-j} A_{kj} + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^K B' H_{t-j} B_{kj} \quad (2.11)$$

onde, A_{kj} , B_{kj} e C são matrizes de parâmetro $N \times N$ e C é uma matriz triangular inferior. O objetivo de decompor o termo em um produto de duas matrizes é garantir a semi-definição positiva de H_t . Toda vez que $K > 1$ é gerado, um problema de identificação é causado pelo motivo de não existir apenas uma parametrização que pode representar o modelo. O modelo BEKK, apesar de ter menos parametrizações que o primeiro modelo multivariado, ainda conta com um grande número de parâmetros. o número de parâmetros está na ordem de $(p + q)KN^2 + N(N + 1)/2$.

Para [Dupačová e Polívka \(2009\)](#), os benefícios fornecidos por um modelo de estimação depende muito da qualidade e relevância que são gerados. Por esse motivo é importante utilizar um modelo que consiga simular retornos de forma adequada. Nesse trabalho foi escolhido GARCH e sua principal generalização multivariada, por meio do modelo Dynamic Conditional Correlation-GARCH (DCC-Garch) de [Engle \(2002\)](#). Com o objetivo de conseguir simular a volatilidade dos ativos financeiros para períodos futuros. Para os erros desse modelo são consideradas distribuições de probabilidade assimétricas e leptocúrticas, ou seja, com peso maior nas caudas, similar aos movimentos dos retornos no mercado acionário. Esse método de estimação é importante dado que modela a correlação condicional com a variação do tempo, o que é fundamental para criação de portfólios. Assim, como nos modelos univariados, a função densidade de probabilidade dos retornos pode ser obtida a partir dos erros. Dado que mais de um ativo é usado na simulação, devemos levar em consideração os erros correlacionados dos retornos entre os diferentes ativos [Dempster e Medova \(2011\)](#).

É aceito que a diversificação dos investimentos financeiros se traduz em benefícios ao portfólio desde [Markowitz \(1952\)](#). Retornos negativos em alguns ativos podem ser compensados por retornos positivos de outros ativos. Portanto, na gestão de carteiras é necessário estimativas precisas, não só de variâncias e retornos, mas também dos coeficientes de correlação entre os os ativos em uma carteira. Justificando assim, a necessidade da utilização do modelo DCC-GARCH para estimação.

[Engle \(2002\)](#) cita que as correlações são dados essenciais da gestão financeira. Os *hedges*, por exemplo, exigem estimativas da correlação entre os retornos dos ativos. Se as correlações e volatilidades estão mudando, então o *hedge* precisa ser ajustado conferindo

valores mais recentes. Assim, uma previsão de correlações e volatilidades futuras são a base de qualquer fórmula de precificação.

O modelo DCC-Garch tem a flexibilidade de um modelo univariado, mas é menos complexo que os demais GARCH multivariados. O número de parâmetros a serem estimados é na ordem de $(N + 1)x(N + 4)/2$, relativamente menor que o modelo BEKK. Quando o N é grande, a estimação pode ser realizada por um procedimento de duas etapas que diminui a complexidade. O primeiro passo é simplesmente a estimação com método univariado, onde a variância condicional é estimada para cada variável. O próximo passo é exatamente estimar os parâmetros para a correlação condicional.

$$r_t = \mu_t + H_t^{1/2} \epsilon_t = \ln(p_n/p_{n-1}) \quad (2.12)$$

O modelo DCC pode ser formulado conforme a matriz de correlação condicional, demonstrada na equação 2.13:

Onde r_t é um vetor das observações passadas e ϵ_t é o vetor de resíduos padronizados.

$$H_t = D_t R_t D_t \quad (2.13)$$

Onde H_t representa a matriz de covariância condicional e R_t a matriz de correlação condicional. D_t é visto como os modelos univariados de Garch, mas não restrito a isso. O modelo pode, também, incluir funções de outras variáveis.

$$D_t = \text{diag} \sqrt{h_{i,t}} \quad (2.14)$$

Os elementos D_t são escritos como modelos univariados de Garch:

$$h_{i,t} = \omega_i + \sum_{p=1}^p \alpha_{ip} r_{it-p}^2 + \sum_{Q_i}^{q=1} \beta_{it} h_{i,t-q} \quad (2.15)$$

r_t : o log-retorno do ativo no tempo t

$h_{i,t}$: A variância condicional no tempo t

p, q : ordem do modelo

ω : Parâmetros do modelo

α : Parâmetros do modelo

β : Parâmetros do modelo

A matriz de correlação condicional, R_t é dada pela equação 2.16:

$$R_t = \text{diag}(Q_t)^{-1/2} Q_t \text{diag}(Q_t)^{-1/2} \quad (2.16)$$

A estacionaridade do moledo é garantida pelas restrições de $a, b > 0$ e $a + b < 0$. O modelo DCC utilizado neste trabalho é representado pela equação

$$Q_t = (1 - a - b)R + a\xi_{t-1}\xi'_{t-1} + bQ_{t-1} \quad (2.17)$$

As vantagens do DCC-Garch para Celik (2012) é que o modelo estima os coeficientes de correlação dos resíduos padronizados, e por isso, explica diretamente a heterocedasticidade. É um modelo que detecta possíveis mudanças nas correlações condicionais ao longo do tempo. Outro ponto é que a volatilidade é ajustada, a correlação não tem viés de volatilidade.

Para Engle (2002) a principal vantagem dessa versão bivariada é que o modelo fornece um aproximação para uma variedade de processos de correlação com variação no tempo. Portanto, o modelo DCC é competitivo com as especificações Garch multivariadas e superiores aos métodos de médias móveis. Podemos com isso verificar a correlação dos ativos utilizados neste estudo para construção do portfólio e assumir que os ativos terão comportamento conforme suas correlações.

Portanto, após as estimações e simulação será realizado a verificação da hipótese do modelo de Trinity para o Brasil. A gestão por meio de portfólios pré-determinados e a simulações de ativos de renda fixa, renda variável e inflação, Por meio de processos estocásticos os portfólios garantem um modelo de aposentadoria real e que pode ser aplicado sem grandes dificuldades pelos investidores individuais que estão perto da aposentadoria, por planejadores financeiros e por aqueles que desejam ter uma aposentadoria precoce.

2.3 Variáveis do Estudo

A taxa de retirada é quanto é sacado percentualmente durante o prazo previsto, sendo obtido do valor inicial do patrimônio do investidor no período como valor de referência. Neste trabalho as retiradas são realizadas mensalmente por entender que este fluxo é o que se adapta melhor para grande parte dos aposentados. Nos resultados é apresentada a taxa anualizada por se tratar do padrão mais utilizado.

Onde:

$$ValorSacado_n = Patrimônio_{n0} \times TaxadeRetirada \times (1 + InflaçãoAcumulada_n) \quad (2.18)$$

A taxa de retirada de sucesso é quando o portfólio, ao final do período de saques, têm valor residual positivo. Isto indica que foi possível realizar retiradas durante todo o

período. Então, a taxa de retirada sustentável é quando em todas as simulações é possível realizar retiradas sem que isso acarrete risco de falência.

$$TaxadeSucesso = \frac{PortfóliosComResíduo}{Simulações} \quad (2.19)$$

Os prazos propostos para verificação das taxas de retiradas sustentáveis são de 10, 15, 20, 25 e 30 anos. Atualmente a diferença entre a expectativa de vida do brasileiro é de 76,6 anos, ou 11,6 ano superior a idade de aposentadoria da previdência brasileira. As taxas de retirada testadas vão de 0% (portfólio sem retirada) até 10% ao ano retiradas mensalmente. É realizado, para que não haja perda do poder de compras do aposentado, ajuste da retirada pelo Índice de preços no consumidor amplo (IPCA).

Foram testadas taxas de retiradas dinâmicas para os primeiros cinco anos de aposentadoria. As retiradas dinâmicas reduzem na metade a taxa de retirada sempre que o patrimônio em n for inferior ao patrimônio n_0 inicial. Isto serve para amenizar efeitos que o *bearmarket* pode ter nos primeiros anos de acumulação.

3 Análise dos Resultados

3.1 Estimação dos Parâmetros

A primeira etapa começa com a estimação das séries temporais para o modelo DCC-GARCH pode ser dado através da estimação de GARCH univariado. Para isso, são identificados os melhores modelos GARCH para cada uma das nossas séries temporais de retornos logarítmicos. Foram considerados três dos principais modelos univariados, através do uso do pacote rugarch de [Ghalanos, Ghalanos e Rcpp \(2018\)](#) pelo software R. Os Modelos univariados testados foram: o GARCH(p,q) original de [Bollerslev \(1986\)](#), o Modelo eGARCH(p,q) desenvolvido por [Nelson \(1991\)](#) que relaxa as restrições do modelo original; dado que os coeficientes podem ser negativos e permitem que o modelo reaja de forma diferente a variações negativas e positivas, e o modelo GJR-GARCH de [Glosten, Jagannathan e Runkle \(1993\)](#) que considera o impacto negativo maior em $t - 1$ do que impactos positivos.

Para as nossas séries foram testados os seguintes modelos conforme a figura 2, que também demonstra todos os testes e BICs para cada estimação dos parâmetros através das séries temporais. É uma visualização adaptada da original realizada por [Perlin et al. \(2020\)](#). Os pontos em asterisco demonstram o menor valor de BIC para cada série temporal. Ao todo 48 observações foram estimadas para definir o melhor modelo para os ativos. Os melhores modelos univariados de Garch para cada série, conforme a figura 2 foram:

- Ibovespa - ARMA(0,0)+sGARCH(1,1) com distribuição t-student.
- S&P500 em reais - ARMA(0,0)+sGARCH(1,1) com distribuição normal.
- Renda Fixa - ARMA(0,0) + eGARCH(1,1) com distribuição t-student.
- Inflação - ARMA(1,0)+sGARCH (1,1) com distribuição normal.

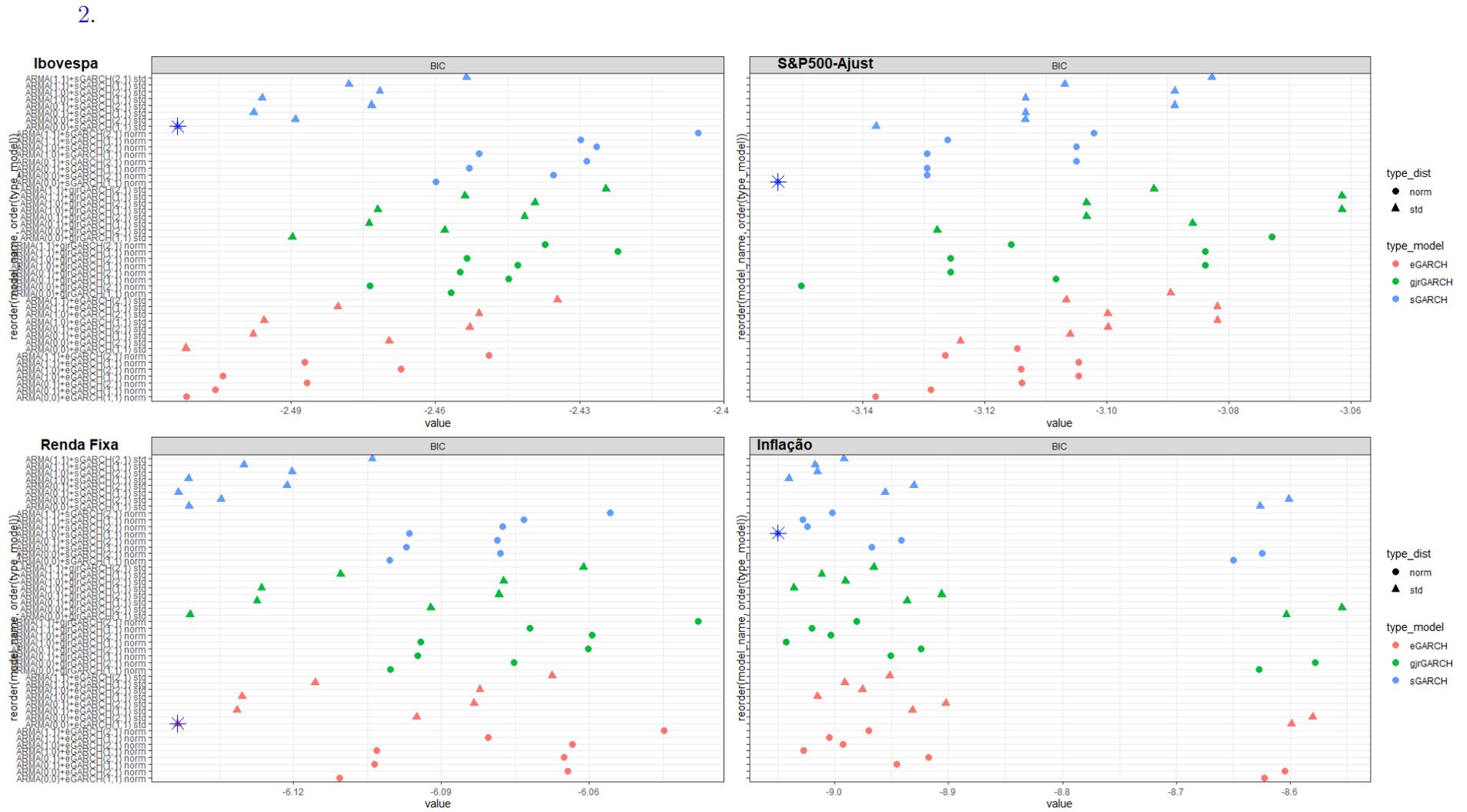


Figura 2 – Garch Univariado para cada Série Temporal

A partir da obtenção de nossos parâmetros univariados, conseguimos então seguir para a estimação DCC-GARCH. Foram testadas diversas ordens e distribuições para identificar o melhor modelo. O modelo que apresentou menor BIC foi o modelo DCC-Garch de ordem (1,1) com distribuição normal. A tabela abaixo demonstra os valores dos parâmetros estimados.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
[IBOV].mu	0.007884	0.004371	1.8037e+00	0.071275
[IBOV].omega	0.000006	0.000003	2.0585e+00	0.039539
[IBOV].alpha1	0.000000	0.002354	0.0000e+00	1.000000
[IBOV].beta1	0.999000	0.000183	5.4614e+03	0.000000
[SP500Ajust].mu	0.008039	0.002999	2.6806e+00	0.007349
[SP500Ajust].omega	0.000004	0.000000	1.5970e+01	0.000000
[SP500Ajust].alpha1	0.000000	0.001062	3.6000e-05	0.999971
[SP500Ajust].beta1	0.999000	0.000047	2.1333e+04	0.000000
[Renda Fixa].mu	0.010593	0.001449	7.3094e+00	0.000000
[Renda Fixa].omega	-0.692516	0.356466	-1.9427e+00	0.052049
[Renda Fixa].alpha1	-0.069648	0.082586	-8.4335e-01	0.399033
[Renda Fixa].beta1	0.922142	0.038585	2.3899e+01	0.000000
[Renda Fixa].gamma1	0.257631	0.214513	1.2010e+00	0.229749
[Renda Fixa].shape	4.228040	1.919628	2.2025e+00	0.027628
[IPCA].mu	0.004557	0.000402	1.1340e+01	0.000000
[IPCA].ar1	0.616285	0.055235	1.1158e+01	0.000000
[IPCA].omega	0.000000	0.000001	4.1165e-02	0.967164
[IPCA].alpha1	0.055874	0.036542	1.5290e+00	0.126260
[IPCA].beta1	0.942758	0.038600	2.4424e+01	0.000000
[Joint]dcc1	0.019890	0.011092	1.7932e+00	0.072942
[Joint]dcc1	0.901271	0.029721	3.0324e+01	0.000000
Bayes Information Criteria:	-20.983			

Tabela 2: Tabela de Parâmetros Estimados

Os resultados da estimação do modelo DCC-GARCH são expostos na Tabela 2. A tabela está ordenada por cada classe de ativo. Os coeficientes, AR1 e MA1 correspondem aos valores da equação da média; os valores de Omega (ω), alpha1 (α) e beta1 (β) representam a variância condicional da primeira diferença entre os ativos, que são modelados por modelos GARCH-univariados já demonstrados. Os valores de DCC α e dcc β representa a avaliação conjunta da heterocedasticidade condicional dos ativos.

Os parâmetros média (.mu ou μ) AR1 e MA1 são, respectivamente, coeficientes de intercepto, autoregressivo e de média móvel. Os valores de AR1 e MA1 (quando existente) são estatisticamente significativo ao nível de 5% a todas as séries, exceto a série do índice Ibovespa. Os coeficientes β dos modelos GARCHs univariados são estatisticamente significativos para todas as séries ao nível de 5%, Entretanto os coeficientes α não apresentaram significância nas estimações. Por fim, é verificada a significância das

estimativas do DCC-GARCH para o β ao nível de 5% e para α ao nível de α 10%. Ou seja, que a correlação condicional entre os dados de índice de renda variável brasileira, índice de renda variável americana em reais, índice de renda fixa remunerados pela Selic e o IPCA podem ser assumidos como altamente dinâmicos e que variam com o tempo.

O efeito de α e a na estrutura GARCH e DCC-GARCH, são entendidos como o impacto de um choque ocorrido no período anterior, sobre a volatilidade no período corrente. Por sua vez, o coeficiente β na estrutura GARCH e b na estrutura DCC, podem ser entendidos como o impacto da volatilidade do período anterior $H_{(t-1)}$, influi no período corrente H_t .

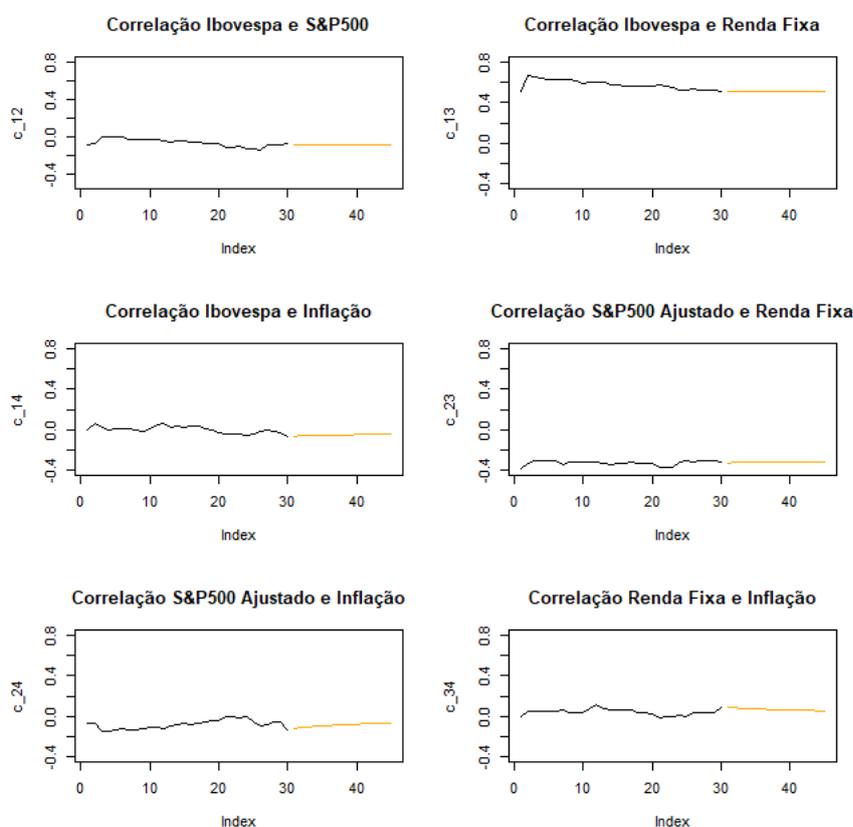
Os valores de α e β para correlação dinâmica dos ativos, apresentam valores de $a + b$ menores que um, uma condição necessária para que a variância seja finita. Isso permite considerar em nossa simulação uma persistência da volatilidade na inter-relação dos entre as séries analisadas, com o modelo GARCH-DCC(1,1) medindo as correlações condicionais variantes.

A partir disso, conseguimos então estimar a correlação dos nossos ativos. Conforme a Figura 3, é possível verificar como a correlação irá se comportar. Esse comportamento é levado em consideração na simulação dos retornos dos nossos ativos com o modelo DCC-GARCH. Pois entende-se, que a correlação dos ativos é um fator que deve ser levado em consideração na simulação de resultados futuros e para a construção de portfólios.

Como pode-se observar, apesar do aumento da correlação em alguns períodos de tempo, a correlação da renda fixa é alta, com o índice Ibovespa, e negativa com o S&P500 em reais (Ajustado). As correlações com inflação, apresentam valores muito próximos a zero, indicando assim, uma correlação praticamente inexistente entre as séries temporais analisadas. Ter um portfólio com ativos com baixa correlação é um dos principais objetivos dos investidores. Isso faz com que a carteira seja menos sujeita ao risco não sistemático, ou risco diversificável. O risco diversificável, é efetivamente, o risco que é possível diminuir, ficando expostos apenas ao risco sistemático, ou risco não diversificável.

Entretanto, por se tratar de dados mensais e não de dados diários, a correlação acaba sendo menor. Isso é perceptível dado que não temos valores esperados de correlação para a para a série de retorno de renda variável nacional e estrangeira. Outra observação é que temos uma correlação que é rapidamente ajustada, perdendo o efeito dinâmico que era esperado pela utilização do DCC-GARCH.

Figura 3 – Correlação dos Ativos DCC-Garch



3.2 Taxa de Sucesso

A taxa de sucesso é obtida quando o portfólio no final do período planejado tem pelo menos valor residual positivo após a realização de diversas retiradas (saques). Ou seja, o portfólio obtêm sucesso em seu objetivo de cumprir com o passivo. Em todos os testes foram consideradas retiradas mensais, com ajustes, também mensais, de inflação para manter o poder de compra do aposentado. Não foram adicionados custo de transação e tributações nos cenários para simplificação da análise.

Carteiras	Volatilidade Média	Retorno Total Médio	Retorno Anual Médio	MDD Médio
100% Renda Variável (Ibovespa)	26,52%	1587,38%	9,89%	66,37%
75% Renda Variável (Ibovespa) 25% Renda Fixa	20,53%	2038,90%	10,76%	50,03%
50% Renda Variável (Ibovespa) 50% Renda Fixa	14,64%	2612,55%	11,63%	31,79%
25% Renda Variável (Ibovespa) 75% Renda Fixa	9,05%	3348,17%	12,52%	15,49%
100% Renda Fixa	4,86%	4295,60%	13,44%	6,61%
33% Renda Variável (Ibovespa) 33% Renda Fixa 33% S&P500	11,44%	2238,64%	11,08%	22,64%
50% IMAS 25% Renda Variável (Ibovespa) 25% Renda Fixa	9,07%	2645,82%	11,67%	15,45%
50% Renda Fixa 50% S&P500	10,49%	2674,12%	11,71%	18,89%
IPCA	2,30%	425,27%	5,68%	7,39%

Tabela 3: Tabela de Volatilidade Média, Retorno Total Médio das Simulações, Taxa de Crescimento Anual e Máximo Drawdown Médio das Carteiras

É possível observar na Tabela 3 que os portfólios com menor volatilidade tem resultados melhores que portfólios com volatilidades elevadas. Isso corrobora com os resultados encontrados por Pfau e Kitces (2013) que mostrou que portfólios em *bear market*

no início da fase de resgates têm dificuldades de ter sucesso. Uma grande volatilidade e retornos negativos no início das retiradas pode ocasionar, então, em uma perda do poder futuro de acumulação, fazendo com que os resgates pesem cada vez mais nas retiradas do portfólio.

A taxa de retirada, percentual de consumo do ativo, ideal para o mercado brasileiro demonstra resultados similares aos encontrados por [Cooley, Hubbard e Walz \(2011\)](#). Entretanto, destaca-se que no Brasil, portfólios compostos somente por renda fixa têm resultados superiores e contrastantes com os encontrados nos estudos originais, como demonstrado pela Figura 4. O Brasil tem uma anomalia, que vem se reduzindo com o tempo, que é o prêmio de risco positivo para ativos livres de risco. Ou seja, investir em títulos soberanos no país gera retorno acima da inflação ao investidor. O investidor, por sua vez, sempre optará por minimizar a razão de risco e retorno de seu portfólio.



Figura 4 – Carteira 100% Renda Fixa

Pode-se dizer que uma taxa de 10% retirada para um portfólio composto totalmente por títulos de renda fixa, teriam o poder de sustentar aposentadorias por até 10 anos. Para aposentadorias mais longas, de 25 anos e de 30 anos, pode-se retirar mensalmente 6% e 5% respectivamente, sem que incorra o risco de fracasso ao investidor e com MDD muito baixos em comparações com as demais carteiras. Como esperado, tem-se uma redução com o passar do prazo da carteira, das taxas de retiradas que o investidor pode realizar da carteira. Portanto, planejamentos de aposentadorias mais longas necessitam de mais prudência, por parte do investidor, quanto a realização de resgates.

Pensando em diversificação de carteiras e que essa anomalia dos títulos públicos brasileiros possa diminuir com o tempo, tendendo a assemelhar-se com países desenvolvidos. É necessário compor portfólios com outras classes de ativos.

A Figura 5 demonstra uma carteira com 50% para renda fixa e 50% renda variável

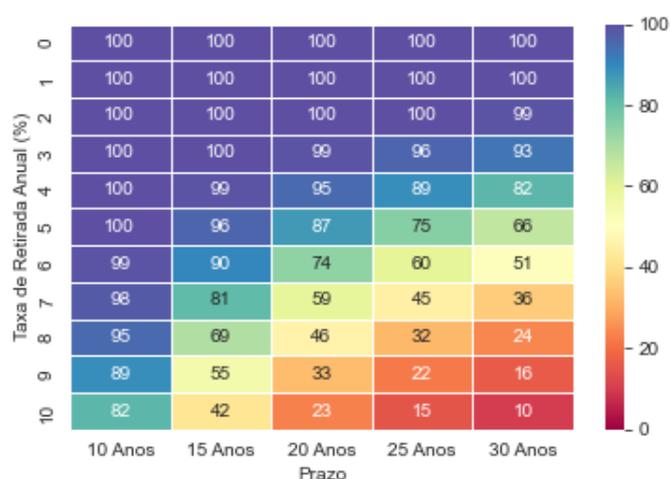


Figura 5 – Carteira 50% Renda Variável e 50% Renda Fixa

brasileira. Os resultados são bem inferiores aos resultados encontrados na 4. As taxas de retiradas possíveis se limitam a 5% para portfólios de até 10 anos, e de 1% para o prazo de 30 anos. Os resultados são inferiores aos resultados originais de [Cooley, Hubbard e Walz \(2011\)](#), onde carteiras compostas por renda variável tem resultados melhores que carteiras compostas apenas por renda fixa. Aqui, conforme o aumento de renda variável no portfólio, menor as taxas possíveis de retirada. Apesar da volatilidade menor e retorno anual maior que os citados por [Pye \(2000\)](#), não foi possível alcançar as taxas de retiradas maiores que 4% citados pelo autor.

Para uma das composições de portfólio, 75% de renda variável e 25% de renda fixa, com maiores taxas de retiradas com sucesso por [Cooley, Hubbard e Walz \(2011\)](#) e por grande parte da literatura apresentada na Figura 6. Têm-se que para o mercado brasileiro não suporta retirada para prazos longos. Apesar de ser possível realizar retiradas de até 3% para o prazo de 10 anos, os horizontes de 25 e 30 anos não estão sujeitos a retirada sem que isto incorra necessariamente em risco de falência.

O cenário com composição inversa, demonstrado pela Figura 7, continua trazendo resultados melhores conforme a concentração em ativos de renda fixa aumenta.

Neste cenário, obteve-se taxas de retirada sustentáveis de 8% para o horizonte de 10 anos de aposentadoria e de 4% para horizontes de 15 anos. Para horizontes de 20 e 25 anos a taxa de retirada diminui para 3%. Para 30 anos é possível retirar apenas 2% do portfólio, isso pode ser considerado insatisfatório para a maioria dos investidores, já que demanda um alto patrimônio para garantir um valor mensal bruto que seja satisfatório ou que consiga garantir a subsistência do aposentado.

Para o portfólio composto com índice S&P500 em reais e renda fixa brasileira, temos o resultado conforme a figura 8.



Figura 6 – Carteira 75% Renda Variável e 25% Renda Fixa

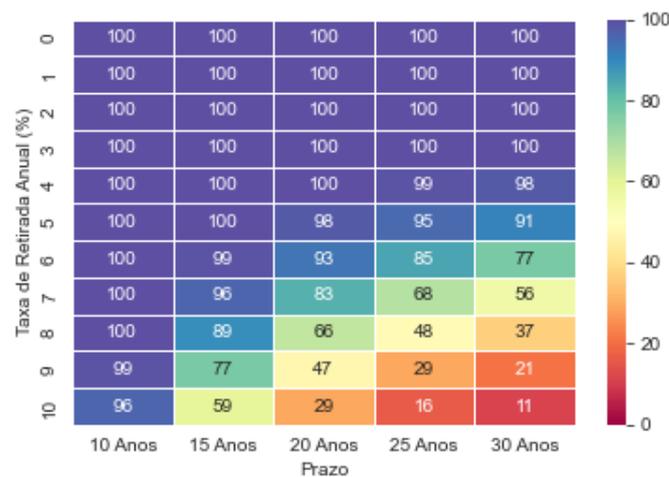


Figura 7 – Carteira 25% Renda Variável e 75% Renda Fixa

Percebe-se que as taxas de sucesso são maiores que o portfólio da Figura 5 e similares ao portfólio da Figura 7. Aqui é possível retirar até 7% do portfólio ao ano para um horizonte de 10 anos, enquanto o portfólio com mesma composição de renda variável brasileira, este percentual é de 5%. Para prazos de 20 anos e 25 anos é possível realizar retiradas de 3% para ambos cenários. Entretanto, o prazo mais longo a taxa de retirada limita-se em 2%.

A Figura 9 demonstra uma carteira composta pelos três ativos analisados com pesos iguais, temos como taxa de retirada o valor de 6% ao ano para o prazo de 10 anos e para prazos mais longos de 25 anos e 30 anos, a taxa de retirada limita-se a 2%. Portanto, não foi obtido ganhos em adicionar mais ativos na carteira.

Os resultados aqui favorecem os portfólios mais concentrados em renda fixa, ao



Figura 8 – Carteira 50% S&P500 em Reais e 50% Renda Fixa

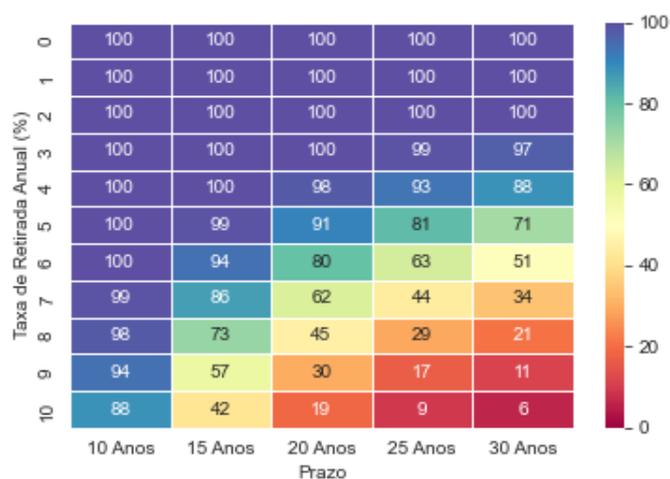


Figura 9 – Carteira Renda Variável, S&P500 em Reais e Renda Fixa com pesos iguais

contrário do discutido pela literatura acerca da regra de 4% que foi popularizada por Cooley, Hubbard e Walz (1998). Dado isso, não é necessário, no caso brasileiro, investir em portfólios com volatilidades mais altas para compensar retiradas futuras, e ter que observar como Scott, Sharpe e Watson (2009) se o estado de mercado é de *bear market*.

Portanto, é possível afirmar que existe uma taxa de retirada sustentável no Brasil, mas o portfólio, diferentemente da literatura americana, é composta essencialmente por ativos de renda fixa. Todos portfólios com exceção aos portfólios compostos total ou majoritariamente com ativos de renda fixa nacionais têm taxas de retiradas bem baixas, forçando ou ao investidor ter grande patrimônio para conseguir sobreviver com retiradas relativamente baixas, ou correr riscos de fracassar e ficar sem dinheiro até o final do período projetado. Portanto, uma gestão dos ativos aqui, passa necessariamente a investir

majoritariamente em renda fixa, e, calibrar as exposições em renda variável.

3.3 Taxa de Retirada Dinâmica

Alguns autores sugerem que a taxa de retirada deve ser revista devido às condições de mercado ou ao desempenho do portfólio. Como é o caso de [Scruggs \(2019\)](#) que limita as retiradas em 2% quando o portfólio não apresenta desempenho desejado. [Pfau e Kitces \(2013\)](#), por sua vez, demonstra preocupação com a acumulação de recursos quando a carteira do investidor por motivos de aposentadoria começa a receber resgates em momentos de *bearmarket*. [Waring e Siegel \(2015\)](#) também sugere que as taxas de retiradas sejam revistas anualmente conforme o desempenho dos portfólios. Destaca-se a importância da previsibilidade que o aposentado deve ter para que sua aposentadoria não dependa exclusivamente das oscilações de mercado.

Dado que no momento de definição de prazo e taxa, o investidor não deve mais ser surpreendido com retiradas menores do que planejadas no momento de sua aposentadoria. É importante a definição de regras claras para mudanças de resgates durante o período de usufruto. Como [Pfau e Kitces \(2013\)](#) demonstra os primeiros anos são importantes para acumulação e, portanto, é razoável no neste primeiro período haja certa flexibilização do investidor com suas retiradas iniciais, a fim de não prejudicar seu portfólio e poder, no futuro, retirar taxas maiores.



Figura 10 – Carteira 100% de Renda Fixa com Resgate Variável

Pode-se observar que para o portfólio da Figura 10 que é composto em sua totalidade por títulos públicos que não houve mudanças nas taxas possíveis de retiradas em nenhum prazos propostos. Uma hipótese desse fenômeno pode ser dar pela característica do ativo.

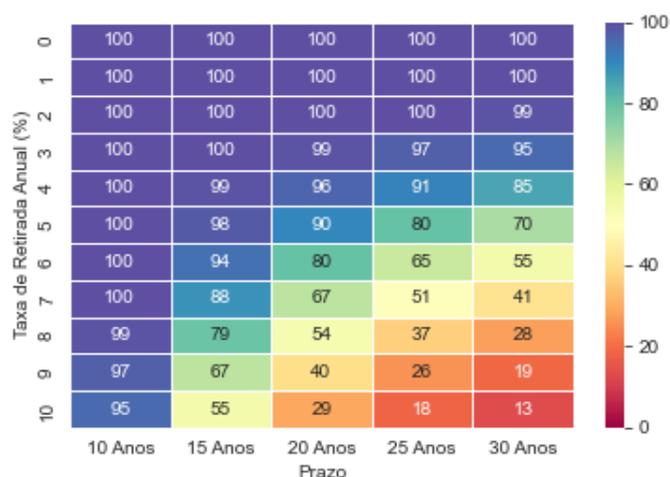


Figura 11 – Carteira 50% de Renda Fixa e 50% de Renda Variável com Resgate Variável

Já para uma carteira composta parcialmente por ativos de renda variável nacional (Figura 11) é possível ver melhora para o menor prazo de resgate, 10 anos. Com a taxa fixa de resgate o investidor poderia realizar retiradas de no máximo 5% ao ano. Enquanto, para o cenário de taxa de retirada variável o investidor pode aumentar sua taxa de retirada para até 7% ao ano. Entretanto, não foi identificado aumento da taxa de resgate em nenhum dos demais prazos propostos, apenas da diminuição significativa das taxas de fracassos observadas.



Figura 12 – Carteira Renda Variável, S&P500 em Reais e Renda Fixa com Pesos Iguais e Retirada Variável

Para a carteira com pesos iguais entre todos ativos testados, novamente apenas o vértice mais curto do prazo de pagamento teve melhoras significativas. A taxa de retirada aumentou de 6% para 8% ao ano. Todos os demais vértices não tiveram melhoras

significativas que justifiquem os investidores adotarem essa restrição.

Para todos os portfólios testados, não foi possível verificar melhoras que justifiquem a alteração da taxa fixa para taxa variável. As melhorias ficaram restritas, quando existente, em todos os cenários analisados aos vértices mais curtos. Portfólios compostos exclusivamente por títulos públicos não identificaram melhoras devido a sua característica de retornos com menor volatilidade.

Os resultados de [Scruggs \(2019\)](#) demonstraram melhora significativa nas taxas de sucesso dos portfólios com taxas de retiradas dinâmicas (flexíveis). Isto é em linha com a taxa de retirada dinâmica que foi aqui proposta. Onde se reduziu nos primeiros anos as taxas de retirada pela metade, caso o patrimônio inicial esteja inferior ao patrimônio atual, afim da preservação de capital. Entretanto, apesar de inserirmos restrições parecidas com o estudo de [Scruggs \(2019\)](#), que limitava a taxa de retirada em 2%, não foi obtidos aqui resultados que aumentem de forma impactante as taxas de sucessos.

Outras restrições podem ser propostas, como prazos maiores para regras, diminuição ainda maior da taxa de resgate, assim como verificação de retornos negativos para decidir a taxa de retirada no mês, sempre verificando a possibilidade de subsistência do aposentado.

4 Considerações Finais

Este trabalho teve como objetivo encontrar uma taxa de retirada sustentável, conforme os estudos de [Cooley, Hubbard e Walz \(2011\)](#) para o mercado brasileiro. A gestão dos ativos e passivos variam conforme as expectativas dos investidores quanto ao horizonte de tempo que gostariam de usufruir de seu patrimônio, ou o quanto gostariam de retirar mensalmente de seus portfólios, sendo uma relação inversa. Foram selecionadas três classes de ativos que são acessíveis para qualquer investidor, por meio de ETFs e Títulos Públicos para a construção dos portfólios e posterior verificação da taxa de sucesso dos portfólios conforme o tempo e taxa de retirada. Para ser considerada uma taxa de retirada sustentável, o portfólio não pode, a qualquer momento, ter valor negativo ou igual a zero para seu cenário de retiradas. Para todos os cenários a taxa de retirada foi ajustada pela inflação simulada do período, a fim de manter o poder de compra do investidor aposentado.

Foram realizadas 5000 mil simulações para cada classe de ativo, a fim de trazer robustez aos cenários hipotéticos. Para realizar as simulações foi utilizada a estimação dos parâmetros conforme o modelo multivariado DCC-GARCH de [Engle \(2002\)](#). Portanto, foi considerada a relação entre os ativos para modelar seus comportamentos futuros.

Os resultados no Brasil privilegiaram portfólios que eram compostos majoritariamente por ativos de renda fixa, em detrimento a ativos de renda variável. Resultados estes, inversos aos propostos por grande parte da literatura que testou a regra dos 4% de [Cooley, Hubbard e Walz \(1998\)](#). Carteiras com ativos de renda fixa no Brasil inclusive tem taxas de retiradas superiores, de até 5% para portfólios de 25 e 30 anos. Carteiras compostas por ativos offshore, aqui representados pelo S&P500 em reais, demonstraram resultados similares aos encontrados pelos autores, mostrando-se, diferentemente da análise feita em outros países que não viam vantagens na criação de portfólios com ativos estrangeiros, uma boa ferramenta para composição de portfólios com objetivo de aposentadoria.

As taxas de retiradas dinâmicas nos primeiros cinco anos de aposentadoria não obtiveram alterações significativas para portfólios mais longos, apenas para os portfólios mais curtos. Isto sugere que não existe um benefício significativo para adoção de tal restrição.

As contribuições deste estudo apresentam algumas restrições, principalmente em relação à série de dados disponível para modelagem dos ativos. Enquanto os estudos em outros países têm dados de mais de 70 anos de diversas classes de ativos, no Brasil esse valor diminui consideravelmente. Neste estudo foram utilizados dados mensais de 18 anos para a estimação dos parâmetros e posterior simulação de 30 anos.

Apesar da restrição destacada, a gestão de ativos e passivos para aposentadoria é

um assunto de extrema relevância, uma vez que influencia diretamente o bem estar de uma população que demandará, cada vez mais, soluções previdenciárias para conseguir sua subsistência com tranquilidade. Portanto, são necessários mais estudos aprofundados na área, que investiguem diversos comportamentos dos ativos e momentos de mercados, a fim de encontrar soluções e hipóteses para a discussão.

A principal contribuição deste estudo é a tentativa de verificar uma taxa de retirada para aposentadoria sustentável no Brasil, levando em consideração a gestão dos ativos e passivos. Um estudo nessa área é de interesse da própria população que poderá de forma acessível se planejar financeiramente para aposentadoria conforme sua individualidade. Todos ativos testados neste trabalho são facilmente adquiridos no mercado por meio de ETFs em mercados organizados para ativos de renda variável, ou via tesouro nacional para os ativos de renda fixa.

Apesar das metodologias e estatísticas impostas neste trabalho, é necessário o alerta que este tem limitações quanto ao período disponível para estimação dos parâmetros. A estimação foi realizada em um cenário onde a renda fixa brasileira teve desempenho superior aos ativos de risco. Não existia, portanto, a necessidade do investidor se expor a outros fatores de risco. No futuro, é necessária uma revisão deste trabalho para que, com o amadurecimento do mercado financeiro brasileiro, seja possível utilizar a taxa de retirada sustentável como ferramenta robusta para a aposentadoria. Serve atualmente como um estudo para discussão deste tema no Brasil.

Referências

- ADAM, A. *Handbook of asset and liability management: from models to optimal return strategies*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- ANDREOU, E.; GHYSELS, E. Structural breaks in financial time series. *Handbook of financial time series*, Springer, p. 839–870, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- AOUNI, B.; COLAPINTO, C.; TORRE, D. L. Financial portfolio management through the goal programming model: Current state-of-the-art. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 234, n. 2, p. 536–545, 2014. Citado na página 28.
- APPEL, V. V.; MARÉ, E. Determining safe retirement withdrawal rates using forward-looking distributions. *South African Journal of Science*, Academy of Science of South Africa, v. 118, n. 3-4, p. 1–7, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.
- ASEBEDO, S. D.; BROWNING, C. M. The psychology of portfolio withdrawal rates. *Psychology and aging*, American Psychological Association, v. 35, n. 1, p. 78, 2020. Citado na página 31.
- BENGEN, W. P. Determining withdrawal rates using historical data. *Journal of Financial planning*, v. 7, n. 4, p. 171–180, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 32.
- BENGEN, W. P. Asset allocation for a lifetime. *Journal of Financial planning*, Financial Planning Association, v. 9, n. 4, p. 58, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 31.
- BIERWIRTH, L. Investing for retirement: Using the past to model the future. *Journal of Financial Planning*, v. 7, n. 1, 1994. Citado na página 29.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 307–327, 1986. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 43.
- BOLLERSLEV, T. Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized arch model. *The review of economics and statistics*, JSTOR, p. 498–505, 1990. Citado na página 38.
- BOLLERSLEV, T.; ENGLE, R. F.; WOOLDRIDGE, J. M. A capital asset pricing model with time-varying covariances. *Journal of political Economy*, The University of Chicago Press, v. 96, n. 1, p. 116–131, 1988. Citado na página 37.
- BONIFÁCIO, G. M. d. O.; GUIMARÃES, R. R. d. M. *Projeções populacionais por idade e sexo para o Brasil até 2100*. [S.l.], 2021. Citado na página 25.
- BOSCHETTI, I. Seguridade social no brasil: conquistas e limites à sua efetivação. *CFESS. Conselho Federal de Serviço Social.(Org.). Serviço Social: direitos sociais e competências profissionais*. Brasília: CEAD/Ed. UnB, 2009. Citado na página 19.
- BRADLEY, S. P.; CRANE, D. B. A dynamic model for bond portfolio management. *Management Science*, v. 19, p. 139–151, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 28.

- CAIRNS, A. J.; BLAKE, D.; DOWD, K. A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: theory and calibration. *Journal of Risk and Insurance*, Wiley Online Library, v. 73, n. 4, p. 687–718, 2006. Citado na página 21.
- CARINO, D. R. et al. The russell-yasuda kasai model: An asset/liability model for a japanese insurance company using multistage stochastic programming. *Interfaces*, INFORMS, v. 24, n. 1, p. 29–49, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 28.
- CELIK, S. The more contagion effect on emerging markets: The evidence of dcc-garch model. *Economic Modelling*, Elsevier, v. 29, n. 5, p. 1946–1959, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 40.
- CHAMBERS, D.; CHARNES, A. Inter-temporal analysis and optimization of bank portfolios. *Management Science*, INFORMS, v. 7, n. 4, p. 393–410, 1961. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 26.
- COOLEY, P. L.; HUBBARD, C. M.; WALZ, D. T. Retirement savings: Choosing a withdrawal rate that is sustainable. *AJII Journal*, v. 20, n. 2, p. 16–21, 1998. Citado 7 vezes nas páginas 7, 9, 21, 29, 30, 51 e 55.
- COOLEY, P. L.; HUBBARD, C. M.; WALZ, D. T. Portfolio success rates: Where to draw the line. *Journal of Financial Planning*, v. 24, n. 4, p. 48–60, 2011. Citado 6 vezes nas páginas 21, 22, 32, 48, 49 e 55.
- COSTANZI, R. N. et al. Reforma da previdência social. Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea), 2018. Citado na página 19.
- DEMPSTER, M.; MEDOVA, E. Planning for retirement: Asset liability management for individuals. In: *Asset and Liability Management Handbook*. [S.l.]: Springer, 2011. p. 409–432. Citado 3 vezes nas páginas 21, 27 e 38.
- DOUMPOS, M. et al. Credit risk assessment using a multicriteria hierarchical discrimination approach: A comparative analysis. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 138, n. 2, p. 392–412, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 28.
- DUARTE, T. B.; VALLADÃO, D. M.; VEIGA, Á. Asset liability management for open pension schemes using multistage stochastic programming under solvency-ii-based regulatory constraints. *Insurance: Mathematics and Economics*, Elsevier, v. 77, p. 177–188, 2017. Citado na página 21.
- DUPAČOVÁ, J.; POLÍVKA, J. Asset-liability management for czech pension funds using stochastic programming. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 165, n. 1, p. 5–28, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 21, 27 e 38.
- DUTTA, J.; KAPUR, S.; ORSZAG, J. M. A portfolio approach to the optimal funding of pensions. *Economics Letters*, Elsevier, v. 69, n. 2, p. 201–206, 2000. Citado na página 21.
- ENGLE, R. Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 20, n. 3, p. 339–350, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 23, 38, 40 e 55.

- ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the econometric society*, JSTOR, p. 987–1007, 1982. Citado na página 36.
- FELDSTEIN, M.; LIEBMAN, J. B. Social security. *Handbook of public economics*, Elsevier, v. 4, p. 2245–2324, 2002. Citado na página 19.
- FINKE, M. S.; PFAU, W. D.; BLANCHETT, D. The 4 percent rule is not safe in a low-yield world. *Available at SSRN 2201323*, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 22, 30, 31 e 32.
- FORSYTH, P. A.; VETZAL, K. R. Optimal asset allocation for retirement saving: Deterministic vs. time consistent adaptive strategies. *Applied Mathematical Finance*, Taylor & Francis, v. 26, n. 1, p. 1–37, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.
- GHALANOS, A.; GHALANOS, M. A.; RCPP, L. Package ‘rugarch’. *R Team Cooperation*, 2018. Citado na página 43.
- GLOSTEN, L. R.; JAGANNATHAN, R.; RUNKLE, D. E. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 48, n. 5, p. 1779–1801, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 43.
- GUAN, G.; LIANG, Z. Mean–variance efficiency of dc pension plan under stochastic interest rate and mean-reverting returns. *Insurance: Mathematics and Economics*, Elsevier, v. 61, p. 99–109, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.
- HAN, N.-W.; HUNG, M.-W. Optimal consumption, portfolio, and life insurance policies under interest rate and inflation risks. *Insurance: Mathematics and Economics*, Elsevier, v. 73, p. 54–67, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.
- HILLI, P. et al. A stochastic programming model for asset liability management of a finnish pension company. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 152, n. 1, p. 115–139, 2007. Citado na página 28.
- JOSA-FOMBELLIDA, R.; RINCÓN-ZAPATERO, J. P. Optimal asset allocation for aggregated defined benefit pension funds with stochastic interest rates. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 201, n. 1, p. 211–221, 2010. Citado na página 21.
- KUSY, M. I.; ZIEMBA, W. T. A bank asset and liability management model. *Operations research*, INFORMS, v. 34, n. 3, p. 356–376, 1986. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 28.
- LEITE, A. R.; JR, W. L. N.; KLOTZLE, M. C. Previdência social: fatores que explicam os resultados financeiros. *Revista de Administração Pública*, SciELO Brasil, v. 44, n. 2, p. 437–457, 2010. Citado na página 19.
- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, v. 7, n. 1, p. 77–91, mar. 1952. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/2975974>>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 38.
- MULVEY, J. M.; VLADIMIROU, H. Stochastic network programming for financial planning problems. *Management science*, INFORMS, v. 38, n. 11, p. 1642–1664, 1992. Citado na página 21.

- NELSON, D. B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica: Journal of the econometric society*, JSTOR, p. 347–370, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 43.
- OLIVEIRA, F. E. Barreto de; BELTRÃO, K. I. *Brazilian social security system*. [S.l.], 2015. Citado na página 20.
- PERLIN, M. S. et al. A garch tutorial with r. *Revista de Administração Contemporânea*, SciELO Brasil, v. 25, 2020. Citado na página 43.
- PFAU, W. D.; KITCES, M. Reducing retirement risk with a rising equity glide-path. *Available at SSRN 2324930*, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 22, 31, 47 e 52.
- PINHEIRO, R. P. *A demografia dos fundos de pensão*. [S.l.]: Ministério da Previdência Social Brasília, DF, 2007. v. 24. Citado na página 20.
- PYE, G. B. Sustainable investment withdrawals. *The Journal of Portfolio Management*, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 26, n. 4, p. 73–83, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 49.
- SCHYMURA, L. G. O que esperar da economia em 2018. *Revista Conjuntura Econômica*, v. 72, n. 1, p. 6–9, 2018. Citado na página 22.
- SCOTT, J. S.; SHARPE, W. F.; WATSON, J. G. The 4% rule—at what price? *Journal of Investment Management*, v. 3, p. 31, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 22, 30, 32 e 51.
- SCRUGGS, J. T. Asset allocation and withdrawal strategies: Three levers for managing retirement outcomes. *Journal of Financial Planning*, v. 32, n. 6, p. 39–49, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 31, 52 e 54.
- TAYLOR, N.; DAVIES, W. The financialization of anti-capitalism? the case of the ‘financial independence retire early’ community. *Journal of Cultural Economy*, Taylor & Francis, p. 1–17, 2021. Citado na página 21.
- WARING, M. B.; SIEGEL, L. B. The only spending rule article you will ever need. *Financial Analysts Journal*, Taylor & Francis, v. 71, n. 1, p. 91–107, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 22, 31, 32 e 52.
- ZENIOS, S. A.; ZIEMBA, W. T. *Handbook of Asset and Liability Management: Applications and case studies*. [S.l.]: Elsevier, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 21, 26, 27 e 28.
- ZIEMBA, W. T. et al. *Worldwide asset and liability modeling*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1998. v. 10. Citado na página 20.