

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Análise da Sincronização de
uma Metapopulação com
Acoplamento por Combinação
Convexa**

por

Sabrina Arsego

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Ph.D. Jacques Aveline Loureiro da Silva
Orientador

Porto Alegre, 07 de maio de 2010.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Arsego, Sabrina

Análise da Sincronização de uma Metapopulação com Acoplamento por Combinação Convexa / Sabrina Arsego.— Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2010.

120 p.: il.

Dissertação (Mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2010.

Orientador: Silva, Jacques Aveline Loureiro da

Dissertação: Matemática Aplicada
metapopulação, sincronização, migração, corredores, estabilidade, dinâmica.

Análise da Sincronização de uma Metapopulação com Acoplamento por Combinação Convexa

por

Sabrina Arsego

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Sistemas Não-Lineares e Ecologia

Orientador: Prof. Ph.D. Jacques Aveline Loureiro da Silva

Banca examinadora:

Prof. Dr. Augusto Vieira Cardona
PUC-RS

Profa. Dra. Flávia Tereza Giordani
UFSC

Prof. Dr. José Afonso Barrionuevo
PPGMAp/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
07 de maio de 2010.

Prof. Dr. Waldir Leite Roque, Ph. D.
Coordenador

AGRADECIMENTOS

Agradecer é uma maneira carinhosa de prestar uma homenagem a todas as pessoas que nos acompanham durante uma caminhada, que é cheia de lutas, vitórias e derrotas. São os familiares e amigos que não medem esforços para nos confortar, no momento em que o desânimo nos abate e as lágrimas rolam pelo rosto. São essas pessoas que buscamos para dividir nossa alegria, para que vibrem conosco a cada conquista, a cada disciplina concluída, a cada degrau subido, até atingir o mais alto deles, a obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada.

Porém, durante o caminho, as estradas são sinuosas e oferecem armadilhas que, por vezes, nos desviam do nosso objetivo final. Então são os familiares, amigos e professores que nos abordam com palavras duras, embora necessárias, para que recuperemos o foco e finalizemos a jornada. Muitas foram as pessoas que se fizeram presentes no percurso, cada qual com uma intensidade. Por isso citarei algumas em especial durante o texto, mesmo todas estando guardadas em meu coração.

Primeiramente, gostaria de citar a Deus. Ser este que me abençoou desde o meu nascimento, fazendo-me nascer numa família maravilhosa, com pessoas que possuem valores, lutam por seus objetivos e jamais esmorecem diante das dificuldades. Rodeou-me de professores capacitados e amigos muito companheiros. Deu-me luz e discernimento nos momentos de dúvida, mostrando-me o caminho a seguir.

Quero agradecer também ao pilar da minha vida, minha família. Meu pai, Angelo, minha mãe, Odete, e minha irmã Caroline, os quais fizeram parte da minha formação como pessoa, mostrando-me que, quando temos um sonho, a única maneira de alcançá-lo é batalhando por ele, independente dos impecilhos. Aproveito a oportunidade para agradecer pela ausência compreendida, pelos desabafos ouvidos, pelas palavras de incentivo e conforto.

Ao meu marido, Alexandre, o qual acompanhou desde o início a busca por este título, o meu carinho especial, pela paciência nos momentos de ansiedade, pelas

palavras de coragem diante das dificuldades, pela comemoração nas conquistas e pela compreensão da ausência.

Ao professor Ph.D. Oclide José Dotto, o meu muito obrigado não basta. Apesar de um exímio pesquisador e profundo conhecedor da matemática, mostrou-se humilde para retomar conteúdos matemáticos básicos, a fim de ajudar-me a construir uma base sólida para enfrentar com melhores condições este curso de mestrado. Pessoa esta que não poupou esforços para ajudar-me a vencer as barreiras impostas, muitas vezes pela própria matemática, para alcançar meu objetivo maior.

Ao professor Ph.D. Jacques Aveline Loureiro da Silva, o meu agradecimento, pela paciência e pela compreensão dispensada, mostrando-se uma pessoa flexível e bastante interessada no trabalho que realiza.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul que me acolheu e colocou a minha disposição excelentes professores, que contribuíram muito para a ampliação do meu conhecimento matemático, dando-me condições para seguir em frente em meus estudos nesta área.

Aos meus amigos, pessoas queridas, desejo muito sucesso. Gostaria que vocês se fortalecessem com a minha conquista, como eu me fortaleci com as de vocês. Busquemos uns nos outros o incentivo para atingir nossos objetivos. Aos meus amigos-irmãos o meu agradecimento fraterno.

Sumário

AGRADECIMENTOS	iv
LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE SÍMBOLOS	xii
RESUMO	xiii
ABSTRACT	xiv
1 INTRODUÇÃO	1
2 ESTUDO DO COMPORTAMENTO DE UMA METAPOPU- LAÇÃO	15
2.1 O modelo	15
2.2 Equilíbrio homogêneo	17
2.3 Análise da dinâmica metapopulacional com migração depen- dente ou independente da densidade	20
2.4 Simulações Numéricas	24
2.5 Um exemplo com variáveis contínuas	27
3 SINCRONIZAÇÃO	40
3.1 Sincronização aplicada à metapopulação com taxa de migração independente da densidade	40
3.2 Simulações Numéricas	48
3.3 Sincronização aplicada à metapopulação com taxa de migração dependente da densidade	54
3.4 Simulações Numéricas	63
4 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	74
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	76
5 APÊNDICE	81

Lista de Figuras

Figura 1.1	Vizinhança de um sítio k em uma rede unidimensional.	4
Figura 1.2	Vizinhança de Moore em rede bidimensional (a) $N=1$; (b) $N=2$.	6
Figura 1.3	Vizinhança de Von Neumann em rede bidimensional (a) $N=1$; (b) $N=2$	7
Figura 1.4	(a) Esquema de uma metapopulação apenas com alguns sítios conectados; (b) Esquema de uma metapopulação com a conexão entre os sítios ampliada por corredores.	8
Figura 2.1	A região clara indica a região de estabilidade e a sombreada, de instabilidade, provocada pela presença da migração.	20
Figura 2.2	(a) Gráfico da função exponencial logística para $r = 1$ e $r = 1,5$, gráfico construído com o algoritmo explog; (b) Gráfico do diagrama de bifurcação da função exponencial logística com $0 < r < 4$, gráfico construído com o algoritmo diagramabifurcacao. .	21
Figura 2.3	(a) Gráfico da função (2.15); (b) Gráfico da função (2.16). . . .	23
Figura 2.4	(a) Gráfico da função logística: $f(x) = rx(1 - x)$ para $r = 2,5$ e $r = 3,5$, construído pelo algoritmo logistica; (b) Gráfico do diagrama de bifurcação da função logística com $0 \leq r \leq 4$, construído pelo algoritmo diagramabifurcao1.	25
Figura 2.5	Gráficos espaço-tempo construídos pelo algoritmo metapopulacaomigraoete (a) $\mu = 0,2$; (b) $\mu = 0,5$; (c) $\mu = 0,9$	25
Figura 2.6	Gráficos espaço-tempo construídos pelo algoritmo metapopulacao (a) $\mu = 0,2$; (b) $\mu = 0,5$; (c) $\mu = 0,9$	26
Figura 2.7	Gráficos espaço-tempo construídos pelo algoritmo metapopulacao1 (a) $\mu = 0,2$; (b) $\mu = 0,5$; (c) $\mu = 0,9$	27
Figura 2.8	Presas \times Predadores com ausência de migração, gráficos construídos pelo algoritmo predadorpresa3: (a) sítio 1: $\alpha = 0,5$, $v(0) = 1,1$ e $\nu(0) = 1,1$; (b) sítio 2: $\alpha = 0,5$, $v(0) = 1,2$ e $\nu(0) = 1,6$ e (c) sítio 3: $\alpha = 0,5$, $v(0) = 1,3$ e $\nu(0) = 0,9$	30
Figura 2.9	Gráficos construídos pelo algoritmo predadorpresa3 (a) Presas \times Tempo do sítio 1 com ausência de migração, $\alpha = 0,5$, $v(0) = 1,1$ e $\nu(0) = 1,1$; (b) Predadores \times Tempo do sítio 1 com ausência de migração, $\alpha = 0,5$, $v(0) = 1,1$ e $\nu(0) = 1,1$	31

- Figura 2.10 Gráficos construídos pelo algoritmo predadorpresa3 (a) Presas \times Tempo do sítio 2 com ausência de migração, $\alpha = 0, 5$, $v(0) = 1, 2$ e $\nu(0) = 1, 6$; (b) Predadores \times Tempo do sítio 2 com ausência de migração, $\alpha = 0, 5$, $v(0) = 1, 2$ e $\nu(0) = 1, 6$ 31
- Figura 2.11 Gráficos construídos pelo algoritmo predadorpresa3 (a) Presas \times Tempo do sítio 3 com ausência de migração, $\alpha = 0, 5$, $v(0) = 1, 3$ e $\nu(0) = 0, 9$; (b) Predadores \times Tempo do sítio 3 com ausência de migração, $\alpha = 0, 5$, $v(0) = 1, 3$ e $\nu(0) = 0, 9$ 32
- Figura 2.12 Presas \times Predadores com migração dos predadores, conforme descrito pela matriz (2.27), gráficos construídos pelo algoritmo predadorpresa2 (a) sítio 1: $\alpha = 0, 5$, $v(0) = 1, 1$ e $\nu(0) = 1, 1$, (b) sítio 2: $\alpha = 0, 5$, $v(0) = 1, 2$ e $\nu(0) = 1, 6$ e (c) sítio 3: $\alpha = 0, 5$, $v(0) = 1, 3$ e $\nu(0) = 0, 9$ 33
- Figura 2.13 Gráficos construídos pelo algoritmo predadorpresa2 (a) Presas \times Tempo do sítio 1, com migração dos predadores conforme descrito pela matriz (2.27), $\alpha = 0, 5$, $v_1(0) = 1, 1$ e $\nu_1(0) = 1, 1$, $v_2(0) = 1, 2$, $\nu_2(0) = 1, 6$, $v_3(0) = 1, 3$, $\nu_3(0) = 0, 9$; (b) Predadores \times Tempo do sítio 1, com migração dos predadores conforme descrito pela matriz (2.27), $\alpha = 0, 5$, $v_1(0) = 1, 1$, $\nu_1(0) = 1, 1$, $v_2(0) = 1, 2$, $\nu_2(0) = 1, 6$, $v_3(0) = 1, 3$, $\nu_3(0) = 0, 9$ 34
- Figura 2.14 Gráficos construídos pelo algoritmo predadorpresa2 (a) Presas \times Tempo do sítio 2, com migração dos predadores conforme descrito pela matriz (2.27), $\alpha = 0, 5$, $v_1(0) = 1, 1$ e $\nu_1(0) = 1, 1$, $v_2(0) = 1, 2$, $\nu_2(0) = 1, 6$, $v_3(0) = 1, 3$, $\nu_3(0) = 0, 9$; (b) Predadores \times Tempo do sítio 2, com migração dos predadores conforme descrito pela matriz (2.27), $\alpha = 0, 5$, $v_1(0) = 1, 1$, $\nu_1(0) = 1, 1$, $v_2(0) = 1, 2$, $\nu_2(0) = 1, 6$, $v_3(0) = 1, 3$, $\nu_3(0) = 0, 9$ 34
- Figura 2.15 Gráficos construídos pelo algoritmo predadorpresa2 (a) Presas \times Tempo do sítio 3, com migração dos predadores conforme descrito pela matriz (2.27), $\alpha = 0, 5$, $v_1(0) = 1, 1$ e $\nu_1(0) = 1, 1$, $v_2(0) = 1, 2$, $\nu_2(0) = 1, 6$, $v_3(0) = 1, 3$, $\nu_3(0) = 0, 9$; (b) Predadores \times Tempo do sítio 3, com migração dos predadores conforme descrito pela matriz (2.27), $\alpha = 0, 5$, $v_1(0) = 1, 1$, $\nu_1(0) = 1, 1$, $v_2(0) = 1, 2$, $\nu_2(0) = 1, 6$, $v_3(0) = 1, 3$, $\nu_3(0) = 0, 9$ 35
- Figura 2.16 Presas \times Predadores com migração de presas, conforme descrito pela matriz (2.28), gráficos construídos pelo algoritmo predadorpresapresa (a) sítio 1: $\alpha = 0, 5$, $v(0) = 1, 1$ e $\nu(0) = 1, 1$; (b) sítio 2: $\alpha = 0, 5$, $v(0) = 1, 2$ e $\nu(0) = 1, 6$ e (c) sítio 3: $\alpha = 0, 5$, $v(0) = 1, 3$ e $\nu(0) = 0, 9$ 35

- Figura 2.17 Gráficos construídos pelo algoritmo predadorpresasapresa (a) Presas \times Tempo do sítio 1, com migração das presas conforme descrito pela matriz (2.28), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,1$ e $\nu_1(0) = 1,1$, $v_2(0) = 1,2$, $\nu_2(0) = 1,6$, $v_3(0) = 1,3$, $\nu_3(0) = 0,9$; (b) Predadores \times Tempo do sítio 1, com migração dos predadores conforme descrito pela matriz (2.27), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,1$, $\nu_1(0) = 1,1$, $v_2(0) = 1,2$, $\nu_2(0) = 1,6$, $v_3(0) = 1,3$, $\nu_3(0) = 0,9$ 36
- Figura 2.18 Gráficos construídos pelo algoritmo predadorpresasapresa (a) Presas \times Tempo do sítio 2, com migração das presas conforme descrito pela matriz (2.28), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,1$ e $\nu_1(0) = 1,1$, $v_2(0) = 1,2$, $\nu_2(0) = 1,6$, $v_3(0) = 1,3$, $\nu_3(0) = 0,9$; (b) Predadores \times Tempo do sítio 2, com migração dos predadores conforme descrito pela matriz (2.27), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,1$, $\nu_1(0) = 1,1$, $v_2(0) = 1,2$, $\nu_2(0) = 1,6$, $v_3(0) = 1,3$, $\nu_3(0) = 0,9$ 36
- Figura 2.19 Gráficos construídos pelo algoritmo predadorpresasapresa (a) Presas \times Tempo do sítio 3, com migração das presas conforme descrito pela matriz (2.28), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,1$ e $\nu_1(0) = 1,1$, $v_2(0) = 1,2$, $\nu_2(0) = 1,6$, $v_3(0) = 1,3$, $\nu_3(0) = 0,9$; (b) Predadores \times Tempo do sítio 3, com migração dos predadores conforme descrito pela matriz (2.27), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,1$, $\nu_1(0) = 1,1$, $v_2(0) = 1,2$, $\nu_2(0) = 1,6$, $v_3(0) = 1,3$, $\nu_3(0) = 0,9$ 37
- Figura 2.20 Atrator caótico de Lorenz 37
- Figura 2.21 Gráficos construídos pelo algoritmo condiniciais (a) Presas \times Tempo do sítio 1, com migração das presas conforme descrito pela matriz (2.28), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,1$, $v_1(0) = 1,11$, $\nu_1(0) = 1,1$ e $\nu_1(0) = 1,11$, $v_2(0) = 1,2$, $\nu_2(0) = 1,6$, $v_3(0) = 1,3$, $\nu_3(0) = 0,9$; (b) Predadores \times Tempo do sítio 1, com migração das presas conforme descrito pela matriz (2.28), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,1$, $v_1(0) = 1,11$, $\nu_1(0) = 1,1$ e $\nu_1(0) = 1,11$, $v_2(0) = 1,2$, $\nu_2(0) = 1,6$, $v_3(0) = 1,3$, $\nu_3(0) = 0,9$ Os gráficos pontilhados foram gerados com a população inicial de presas 1.1 e os gráficos com linha contínua foram gerados com a população inicial de presas 1.11. . 38

Figura 2.22	Gráficos construídos pelo algoritmo predadorpresaambos (a) Presas \times Predadores do sítio 1, com migração de presas e predadores conforme descrito pela matriz (2.29), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,2$, $\nu_1(0) = 1,6$, $v_2(0) = 1,206$, $\nu_2(0) = 1,61$, $v_3(0) = 1,205$, $\nu_3(0) = 1,559$ (b) Presas \times Predadores do sítio 2, com migração de presas e predadores conforme descrito pela matriz (2.29), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,2$, $\nu_1(0) = 1,6$, $v_2(0) = 1,206$, $\nu_2(0) = 1,61$, $v_3(0) = 1,205$, $\nu_3(0) = 1,559$; (c) Presas \times Predadores do sítio 3, com migração de presas e predadores conforme descrito pela matriz (2.29), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,2$, $\nu_1(0) = 1,6$, $v_2(0) = 1,206$, $\nu_2(0) = 1,61$, $v_3(0) = 1,205$, $\nu_3(0) = 1,559$	39
Figura 3.1	Número de Lyapunov $\times r$, $f(x) = x \exp(r(1 - x))$ com $0 \leq r \leq 4$ e $0 \leq t \leq 10000$, gráfico construído pelo algoritmo calcexpsinc1.	49
Figura 3.2	Medida de Dirac no ponto $\alpha = \alpha_0$	50
Figura 3.3	$\Lambda \times \mu$ para δ , medida de Dirac em α_0 , $0 \leq \mu \leq 1$, $n = 30$, gráficos construídos pelo algoritmo calclamb1mi1 (a) $\alpha_0 = 0,15$; (b) $\alpha_0 = 0,5$; (c) $\alpha_0 = 0,85$	51
Figura 3.4	Probabilidade concentrada em dois pontos p, q	52
Figura 3.5	$\Lambda \times \mu$ para probabilidade concentrada em dois pontos, $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1$, gráficos construídos pelo algoritmo calclamb2mi2 (a) $p = 0,05$, $q = 0,25$; (b) $p = 0,4$, $q = 0,6$; (c) $p = 0,75$, $q = 0,95$	53
Figura 3.6	Probabilidade concentrada em 4 pontos p, p_1, q, q_1	54
Figura 3.7	$\Lambda \times \mu$ para para probabilidade concentrada em quatro pontos, $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1$, $p_1 = (\frac{q-p}{3}) + p$, $q_1 = q - (\frac{q-p}{3})$, gráficos construídos pelo algoritmo calclamb3mi3 (a) $p = 0,05$, $q = 0,25$; (b) $p = 0,4$, $q = 0,6$; (c) $p = 0,75$, $q = 0,95$	55
Figura 3.8	Probabilidade distribuída contínua e uniformemente num intervalo $[p; q]$	56
Figura 3.9	$\Lambda \times \mu$ para probabilidade distribuída contínua e uniformemente num intervalo, $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1$, gráficos construídos pelo algoritmo calclamb4mi4 (a) $p = 0,05$, $q = 0,25$; (b) $p = 0,4$, $q = 0,6$ (c) $p = 0,75$, $q = 0,95$	57
Figura 3.10	$\Lambda \times \mu$ para $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1, \delta$, medida de Dirac em α_0 , $\phi'(x_t)$ dada por (2.17), $r = 3.8$, $x_0 = 0.1$, gráficos construídos pelo algoritmo lambdamd1 (a) $\alpha_0 = 0,15$; (b) $\alpha_0 = 0,5$; (c) $\alpha_0 = 0,85$	65

- Figura 3.11 $\Lambda \times \mu$ para $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1$, δ , medida de Dirac em α_0 , $\phi'(x_t)$ dada por (2.18), $r = 3.8$, $x_0 = 0.1$, gráficos construídos pelo algoritmo `lambdamd11` (a) $\alpha_0 = 0,15$; (b) $\alpha_0 = 0,5$; (c) $\alpha_0 = 0,85$ 66
- Figura 3.12 $\Lambda \times \mu$ para probabilidade concentrada em dois pontos, $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1$, $\phi'(x_t)$ dada por (2.17), $r = 3.8$, $x_0 = 0.1$, gráficos construídos pelo algoritmo `lambdamd2` (a) $p = 0,05$, $q = 0,25$; (b) $p = 0,4$, $q = 0,6$; (c) $p = 0,75$, $q = 0,95$ 67
- Figura 3.13 $\Lambda \times \mu$ para probabilidade concentrada em dois pontos, $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1$, $\phi'(x_t)$ dada por (2.18), $r = 3.8$, $x_0 = 0.1$, gráficos construídos pelo algoritmo `lambdamd21` (a) $p = 0,05$, $q = 0,25$; (b) $p = 0,4$, $q = 0,6$; (c) $p = 0,75$, $q = 0,95$ 68
- Figura 3.14 $\Lambda \times \mu$ para probabilidade concentrada em quatro pontos, $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1$, $\phi'(x_t)$ dada por (2.17), $p_1 = (\frac{q-p}{3}) + p$, $q_1 = q - (\frac{q-p}{3})$, $r = 3.8$, $x_0 = 0.1$, gráficos construídos pelo algoritmo `lambdamd3` (a) $p = 0,05$, $q = 0,25$; (b) $p = 0,4$, $q = 0,6$; (c) $p = 0,75$, $q = 0,95$ 69
- Figura 3.15 $\Lambda \times \mu$ para probabilidade concentrada em quatro pontos, $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1$, $\phi'(x_t)$ dada por (2.18), $p_1 = (\frac{q-p}{3}) + p$, $q_1 = q - (\frac{q-p}{3})$, $r = 3.8$, $x_0 = 0.1$, gráficos construídos pelo algoritmo `lambdamd31` (a) $p = 0,05$, $q = 0,25$; (b) $p = 0,4$, $q = 0,6$; (c) $p = 0,75$, $q = 0,95$ 70
- Figura 3.16 $\Lambda \times \mu$ para probabilidade distribuída contínua e uniformemente num intervalo, $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1$, $\phi'(x_t)$ dada por (2.17), $r = 3.8$, $x_0 = 0.1$, gráficos construídos pelo algoritmo `lambdamd4` (a) $p = 0,05$, $q = 0,25$; (b) $p = 0,4$, $q = 0,6$; (c) $p = 0,75$, $q = 0,95$. 71
- Figura 3.17 $\Lambda \times \mu$ para para probabilidade distribuída contínua e uniformemente num intervalo, $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1$, $\phi'(x_t)$ dada por (2.18), $r = 3.8$, $x_0 = 0.1$, gráficos construídos pelo algoritmo `lambdamd41` (a) $p = 0,05$, $q = 0,25$; (b) $p = 0,4$, $q = 0,6$; (c) $p = 0,75$, $q = 0,95$ 72
- Figura 3.18 $\Lambda \times \mu$ para $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1$, função migratória dada por (2.18), $r = 3.8$, $x_0 = 0.1$ (a) medida de Dirac em α_0 $\alpha = 0,15$; (b) medida de Dirac em α_0 $\alpha = 0,5$; (c) medida de Dirac em α_0 $\alpha = 0,85$; (d) Probabilidade distribuída em dois pontos $p = 0,75$ e $q = 0,95$; (e) Probabilidade distribuída em 4 pontos $p = 0,4$ e $q = 0,6$; (f) Probabilidade distribuída uniformemente contínua e uniformemente no intervalo $[0,05; 0,25]$ 73

LISTA DE SÍMBOLOS

x_t	população x no instante t
x_t^i	população x do sítio i no instante t
μ	taxa de migração
$C = [c_{ij}]$	matriz de acoplamento
n	número de sítios
$Viz(i)$	conjunto de vizinhos do sítio i
$Viz(k,l)$	conjunto de vizinhos do sítio (k,l) numa rede bidimensional
N	raio da vizinhança
L	Número de Lyapunov
$L\Lambda$	Número de Lyapunov Transversal
x^*	ponto fixo de um mapa
X^*	ponto de equilíbrio homogêneo
$\phi(x)$	quantidade atual de emigrantes em cada sítio

RESUMO

Este trabalho versará sobre dinâmicas populacionais. Nesse contexto, a população é dita metapopulação. Essa é descrita como um conjunto discreto de fragmentos de habitats, denominados sítios, os quais, supostamente, apresentam condições ideais para reprodução e sobrevivência dos indivíduos. Considere-se inicialmente uma única espécie, distribuída em n sítios, formando uma metapopulação. A cada geração, os indivíduos passam por dois processos distintos: a dinâmica local, composta pelos processos de reprodução e sobrevivência, e a migração. Tendo ocorrido a dinâmica local, dá-se início ao processo migratório. Desta forma, os indivíduos de um dado sítio j podem deslocar-se para outro sítio i , de acordo com a topologia da rede. Neste trabalho, optou-se por utilizar uma topologia obtida através de uma combinação convexa de dois anéis cíclicos, um de conexão global e outro de conexão local. Com esse aumento na conectividade entre os sítios, surge o que, biologicamente, é chamado de corredor. Os corredores são faixas de terra que facilitam a movimentação das espécies entre áreas fragmentadas, porém o seu uso e sua eficácia geram ainda muitas divergências entre os pesquisadores, pois não existem estudos totalmente conclusivos sobre seus resultados. Facilitando a viabilidade dos indivíduos entre os sítios, é possível aumentar a migração e com isso dar início ao processo de sincronização. A certificação desse fenômeno em uma metapopulação é feita através do cálculo do Número de Lyapunov Transversal, que está relacionado com movimentação das espécies entre os sítios. Neste trabalho, procurou-se analisar a influência da migração, sendo ela independente ou dependente da densidade populacional juntamente com a topologia da rede escolhida, na obtenção ou não da sincronização.

ABSTRACT

This work deals with dynamics of populations. In this context the population is named *metapopulation*. Metapopulation is a discrete set of habitat fragments, which we call *patches*, and we assume they present ideal conditions for the individuals to breed and survive. We will consider initially a unique species, distributed in n patches, which constitutes a metapopulation. In each generation the individuals pass through two different processes: one is the local dynamics, composed by the reproduction and the survival, and the other, migration process. When the local dynamics occurred, the migratory process begins, so that the individuals of a given patch can move to another patch, following the net topology. In this work we decided to use a topology obtained by a convex combination of two cyclic rings, one of them with global connection and the other with local one. Through this enlargement of connectivity between the patches, it appears what, biologically is named *corridor*. The corridors are land strips that facilitate species movimentation between fragmentated areas, but the researchers do not totally agree about corridors, since the studies of their availability are not conclusive. If we ease the passage of the individuals between the patches, it is possible to improve the migration, and then to start a synchronization process. The certification of that phenomenon in a metapopulation is performed by the computation of Transversal Liapunov Number, which is related to the movement of the species between the patches. In this work we also aim to analyze how the migration influences the synchronization when it is either density-dependent or density-independent of the population, taken into account the chosen net topology.

1 INTRODUÇÃO

As dinâmicas populacionais têm atraído cada vez mais a atenção de pesquisadores, principalmente no que diz respeito a modelos de metapopulações espacialmente explícitos. São exemplos disso os estudos de Giordani e Silva [18], Gonzales *et al.* [20] e Jansen e Lloyd [30]. Essa importante classe de modelos supõe que a população seja dividida em pequenos fragmentos, chamados sítios, e ao conjunto discreto deles dá-se o nome de *metapopulação*¹. Esses fragmentos são supostamente adequados para a reprodução e sobrevivência da espécie. Os sítios são cercados por um ambiente hostil e impróprio para permanência dos indivíduos.

A conexão entre os sítios é realizada através do processo migratório, que deve ser entendido como a movimentação dos indivíduos de um sítio para outro. No contexto deste trabalho, as palavras *dispersão* e *migração* serão utilizadas com o mesmo sentido.

O principal objetivo deste trabalho é analisar o processo de sincronização em uma metapopulação composta por n sítios, cujo acoplamento se dará através de uma combinação convexa de dois anéis cíclicos, um de conexão local e outro de conexão global.

Considere-se uma população de uma única espécie, espalhada por n sítios, formando uma metapopulação. A cada geração esses indivíduos passam por dois processos distintos: dinâmica local, composta pela reprodução e sobrevivência, e a migração. São feitas as seguintes hipóteses:

¹Uma **metapopulação** consiste num grupo de populações da mesma espécie separadas espacialmente e que podem interagir de algum modo. O termo **metapopulação** foi utilizado pela primeira vez por Richard Levins, [32] por volta de 1970, para descrever um modelo de dinâmica populacional de pragas e insetos em campos agrícolas. A idéia tem sido mais utilizada para descrever a dinâmica de espécies em habitats naturais ou artificialmente fragmentados e é objeto de estudo da sistemática.

- As populações não se sobrepõem, ou seja, os pais não vivem o suficiente para conhecer seus filhos. Exemplos da natureza que se enquadram nesta hipótese podem ser encontrados em [23].
- O processo migratório é 100% eficaz, uma vez que não há mortes de indivíduos durante essa movimentação, tendo em vista tratar-se de um processo de curta duração.
- Deve haver um ordenamento dos processos de dinâmica local e migração, caso contrário, poderão surgir resultados improváveis do ponto de vista biológico, segundo Hassel *et al.* [26].
- A população deve ser composta por fêmeas e machos, de forma que possa ocorrer a reprodução.
- É necessário estabelecer uma topologia para a rede, ou seja, definir quais são os vizinhos de cada sítio e para quais sítios seus indivíduos poderão migrar.

Supõe-se, inicialmente, que os sítios estejam isolados, ou seja, que não exista conexão entre eles. Assim, cada população cresce de forma independente e recursiva:

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i), \quad (1.1)$$

onde x_t^i indica o número de indivíduos do sítio i no instante t , para $i = 1, 2, \dots, n$. A função f é definida como suave e positiva e incorpora os processos de sobrevivência e reprodução.

Tendo ocorrido a dinâmica local, supõe-se que inicie o processo migratório entre os sítios, ou seja, uma fração μ de indivíduos deixa um dado sítio e migra para outros sítios mais próximos de acordo com a topologia da rede. Essa movimentação pode depender também, da densidade populacional do sítio de origem, da densidade populacional do sítio de chegada ou ainda ser independente da densidade.

A transferência de indivíduos de um sítio para outro, segundo Ims e Yoccoz [29], é um processo composto de três etapas: emigração, migração e imigração.

O processo é iniciado pela emigração, que consiste nos indivíduos deixarem seus sítios. A segunda etapa é a migração, que envolve o deslocamento dos indivíduos por locais impróprios para habitação. Por fim, o estágio da imigração que consiste no estabelecimento do indivíduo em um novo sítio.

No contexto deste trabalho, o estágio inicial estará sujeito a dois tipos de frações migratórias, uma dependente e outra independente da densidade populacional, em situações isoladas, o que permitirá uma discussão dos resultados influenciados por cada uma. No estágio dois, por tratar-se de uma processo de curta duração, supõe-se que não haja perda de indivíduos, ou seja, todo elemento que deixa seu sítio de origem, atingirá um novo sítio para estabelecer-se. Na última etapa, os indivíduos se estabelecerão em novos sítios, conforme descrito por uma matriz $n \times n$ não negativa, definida por uma combinação convexa de dois anéis cíclicos.

A dispersão tem uma grande importância nas dinâmicas populacionais. Alguns trabalhos, como os de Hastings [27], Doebeli [12] e Lloyd [34], destacam o seu efeito estabilizador. Isso significa que a migração pode simplificar órbitas caóticas, transformando-as em dinâmicas periódicas simples. Outros estudos, como os de Rohani e Hassell [41], destacam que a migração não tem efeito sobre a estabilidade do equilíbrio homogêneo, considerada uma metapopulação composta por uma única espécie sem estrutura etária, interação simétrica entre os sítios mais próximos e dispersão independente da densidade.

Por outro lado, Ruxton [42] tratou da migração com dependência da densidade da população local, mostrando que o movimento migratório pode gerar instabilidades no equilíbrio do sistema. Silva *et al.* [45] determinou uma região onde a migração dependente da densidade causa instabilidade para uma metapopulação composta por uma única espécie espalhada por n sítios. Rohani e Hassell [41] entende que a dispersão pode ser um mecanismo importante para persistência da espécie, quando as populações locais de uma metapopulação têm grande probabilidade de extinção.

Uma vez que existe a possibilidade de os sítios conectarem-se através da migração, é necessário que seja estabelecida a topologia da rede, isto é, definir, dado um sítio i , quais são seus vizinhos, para quais sítios poderá migrar e qual a origem dos indivíduos que chegam. Essas vizinhanças podem ser as clássicas da literatura, como os anéis cíclicos para as redes unidimensionais ou as vizinhanças de Moore e Von Neumann para as redes bidimensionais. Para todos esses casos, conta-se com um raio de vizinhança, representado por N , que indica o número de sítios aos quais um determinado sítio está conectado radialmente.

Para redes unidimensionais, utilizam-se os anéis cíclicos. Nessa estrutura o primeiro sítio está ligado ao n -ésimo, formando um anel. Essa vizinhança é definida por [45] e [44] como:

$$Viz(k) = \{1 + [(k + i - 1) \bmod n] : i = -N, \dots, N; i \neq 0\} \quad (1.2)$$

Dessa forma, a migração é permitida apenas para os $2N$ sítios mais próximos,



Figura 1.1: Vizinhança de um sítio k em uma rede unidimensional.

como ilustra a Figura 1.1. Assim, dado o sítio 1, seus vizinhos são o sítio 2 e o n -ésimo sítio. São apresentados dois tipos de anel cíclico, o de conexão local e o de conexão global. No primeiro os indivíduos podem migrar apenas para os dois sítios mais próximos, já no de conexão global, os indivíduos podem migrar para qualquer sítio da rede. Então, seguem duas matrizes que exibem as estruturas de um anel cíclico de conexão local e de um anel cíclico de conexão global de forma algébrica, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1/2 & 0 & 0 & \cdots & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Anel Cíclico de Conexão Local

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/(n-1) & \cdots & 1/(n-1) & 1/(n-1) \\ 1/(n-1) & 0 & \cdots & 1/(n-1) & 1/(n-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1/(n-1) & 1/(n-1) & \cdots & 1/(n-1) & 0 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Anel Cíclico de Conexão Global

Percebe-se que ambas as matrizes são circulantes, determinadas pelos vetores $(0, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2})$ e $(0, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1})$ do \mathbb{R}^n , respectivamente.

Em álgebra linear, uma matriz circulante é uma matriz da forma

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_0 & e_1 & \cdots & e_{n-2} & e_{n-1} \\ e_{n-1} & e_0 & e_1 & & e_{n-2} \\ \vdots & e_{n-1} & e_0 & \ddots & \vdots \\ e_2 & & \ddots & \ddots & e_1 \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-1} & e_0 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Note-se que cada linha avança um elemento para a direita relativamente à linha precedente, a partir da segunda linha. Uma matriz circulante é especificada completamente pelo vetor \mathbf{e} que forma a primeira linha. As matrizes circulantes são diagonalizáveis mediante uma transformada de Fourier discreta, e, conseqüentemente, um sistema linear, cuja matriz é circulante, pode ser resolvido facilmente usando uma transformada de Fourier rápida [7].

O conjunto das matrizes circulantes de ordem $n \times n$ é um espaço vetorial de dimensão n , que pode ser interpretado como o espaço das funções do grupo cíclico de ordem n , $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ou equivalentemente, o anel de grupo [16].

Matrizes circulantes formam uma álgebra comutativa, uma vez que, para quaisquer duas matrizes circulantes, \mathbf{A} e \mathbf{B} , a soma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ e o produto \mathbf{AB} são circulantes, e $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$ [19, 11].

Os autovetores de uma matriz circulante de ordem $n \times n$ são as colunas da matriz transformada de Fourier discreta da mesma ordem. Esta última matriz é denotada e definida por

$$\mathbf{F}_n = [f_{jk}], \quad (1.6)$$

com $f_{jk} = \exp^{2jki\pi/n}$, $j, k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Os correspondentes autovalores são as componentes do vetor $\mathbf{F}_n \mathbf{e}^T$, onde \mathbf{e}^T é o transposto do vetor que forma a primeira linha de \mathbf{E} [7].

Para redes bidimensionais, as vizinhanças mais utilizadas são as de Moore e de Von Neumann, que têm suas estruturas espaciais esquematizadas nas Figuras 1.2 e 1.3, respectivamente.



Figura 1.2: Vizinhança de Moore em rede bidimensional (a) $N=1$; (b) $N=2$.

A vizinhança de Von Neumann é definida por:

$$Viz(k, l) = \{(k + i, l + j) : 0 < |i| + |j| \leq N; (i, j) \neq (0, 0)\}, \quad (1.7)$$

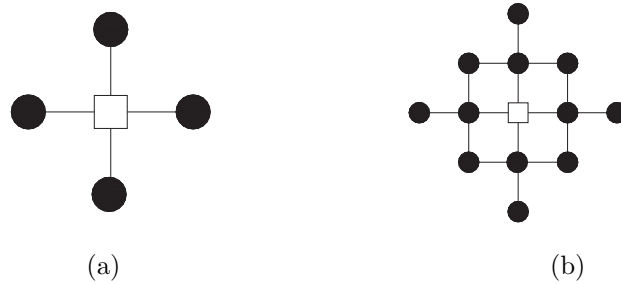


Figura 1.3: Vizinhança de Von Neumann em rede bidimensional (a) $N=1$; (b) $N=2$.

e o número de vizinhos de um dado sítio (k, l) fixo é $\# Viz(k, l) = 2N(N + 1)$. A vizinhança de Moore, por sua vez, é o conjunto:

$$Viz(k, l) = \{(k + i, l + j) : -N \leq i, j \leq N; (i, j) \neq (0, 0)\}, \quad (1.8)$$

e o número de vizinhos de um dado sítio (k, l) fixo é $\# Viz(k, l) = 4N(N + 1)$. Para indicar um dado sítio, quando se trata de vizinhanças de Moore e Von Neumann utiliza-se um par ordenado (k, l) , que indica a posição do sítio dentro de uma determinada metapopulação.

Neste trabalho, optou-se por uma topologia de rede dinâmica, que resulta da combinação convexa de duas matrizes circulantes, uma representando anéis cíclicos de conexão global e outra de conexão local. De acordo com essa configuração, existirão momentos em que os indivíduos terão uma movimentação mais restrita, concentrando-se, na sua maioria, nos sítios mais próximos e em outros em que a movimentação será permitida para qualquer sítio, dando mais possibilidades de deslocamento para os indivíduos. Com essa facilitação na comunicação entre os sítios, dá-se origem a um fenômeno, que, biologicamente, é denominado *criação de corredores*.

A Figura 1.4 (a) mostra uma metapopulação formada por 10 sítios, onde o sítio 9 tem conexão com os sítios 1, 8, 2, 10, 6 e o sítio 3 liga-se apenas com o sítio 10. Como o conceito de corredores está relacionado com a ampliação das conexões entre os sítios, apresenta-se a Figura 1.4 (b) que esquematiza esse fato estabelecendo ligações entre os sítios, previamente não existentes.

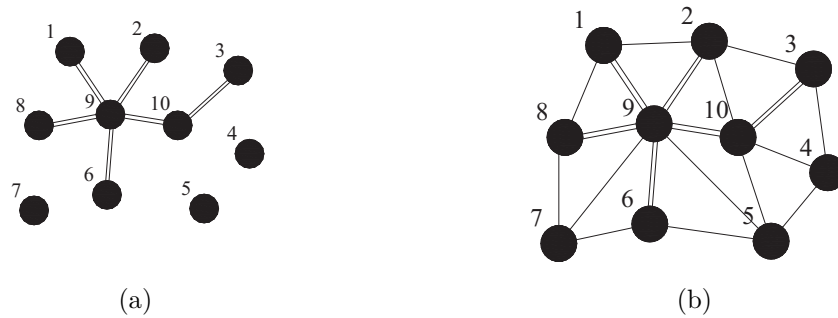


Figura 1.4: (a) Esquema de uma metapopulação apenas com alguns sítios conectados; (b) Esquema de uma metapopulação com a conexão entre os sítios ampliada por corredores.

Os corredores são faixas de habitat, que conectam regiões fragmentadas, com o objetivo de facilitar a movimentação das espécies entre os sítios isolados [1, 21, 4, 51, 10, 22]. Essas fragmentações podem ocorrer devido ao avanço da urbanização, outras atividades humanas [4], ou ainda por catástrofes naturais, como enchentes ou queimadas.

Com a quebra das conexões naturais, ocorre uma redução na mobilidade dos indivíduos, levando a uma diminuição na fluência dos genes [1], prejudicando a biodiversidade, causando, em casos mais graves, a extinção de algumas espécies [20]. Para minimizar esses efeitos, uma estratégia para conservação dessas populações tem sido a criação dos corredores [10, 4, 21].

Segundo Gonzales *et al.* [20], com a criação dessas faixas de habitat, ocorre um aumento na viabilidade de movimentação das espécies entre os sítios isolados, promovendo um efeito salvamento, ou seja, com o acréscimo da migração diminui a probabilidade da população local tornar-se extinta, aumentando também a abundância e distribuição das espécies, beneficiando a biodiversidade [22]. Além disso, Aars e Ims [1] e Damschen [10] afirmam que a criação de corredores favorece não só a transferência dos indivíduos, como também a transferência de genes e os níveis de heterozigosidade entre as áreas fragmentadas. Contudo, Haddad [21] comenta que os corredores ajudariam a encaminhar plantas e animais para habitats de melhor qualidade, reduzindo assim o risco de extinção.

Por outro lado, existem ecologistas e pesquisadores, que estão cautelosos quanto aos efeitos benéficos desses corredores. Existem divergências sobre para quais espécies essa estratégia é de fato viável, e quais os tipos de corredores adequados para cada espécie [1, 21, 51, 4, 10]. Além de ser uma estratégia cara de conservação [1, 4], existem poucos dados experimentais precisos, que retratem fielmente quais são os efeitos provocados pelos corredores e quais são resultados de outros fatores naturais [51]. Segundo Simberloff *et al.* [48], com esse aumento da conectividade entre as áreas, pode ser facilitado o espalhamento de doenças [15], de perturbações catastróficas ou levar ao surgimento de espécies exóticas.

Devido à complexidade dessa questão e ao grande número de variáveis envolvidas, não basta realizar experimentos onde as conclusões sejam obtidas apenas através de observações, pois estas não são suficientes para uma conclusão consistente sobre os efeitos dos corredores. Beier e Noss [4] trazem dois tratamentos essenciais nos experimentos para obtenção de dados mais precisos; são eles: a criação e a destruição de corredores, causando extinção local, podendo haver a recolonização. Por ser uma atitude eticamente questionável o processo de extinção, uma alternativa seria, então, estudar duas áreas com características semelhantes, uma com o uso dos corredores e outra sem eles, observando assim o comportamento das populações em cada uma das situações.

A criação ou não dos corredores é uma questão bastante polêmica, que requer muitos estudos experimentais adequados para sua melhor avaliação e discussão. Na falta desses, apresentaremos a seguir alguns resultados que abordam o uso dos corredores.

Gonzales *et al.* [20] analisaram a relação entre a abundância e a distribuição de indivíduos em uma comunidade animal, usando uma miniatura de ecossistema. Foram realizados dois experimentos, um com regiões fragmentadas e não fragmentadas, com ausência de corredores, e um segundo, no qual se optou por uma região fragmentada, porém com a presença de corredores e a criação de pseudocorredores. Em seus estudos, Gonzales *et al.* [20] observaram que, em regiões não fragmen-

tadas, a relação entre a abundância e a distribuição é bastante alta, porém nas regiões onde há fragmentação e pseudocorredores ocorre um declínio significativo entre a abundância e distribuição da espécie, culminando na extinção em alguns casos. Contudo, tem-se que a criação dos corredores, e não pseudocorredores, ameniza os efeitos da fragmentação.

Aars e Ims [1], por sua vez, fundamentaram seus estudos sobre um roedor herbívoro, ameaçado pela fragmentação de habitats em alguns locais da Europa, da espécie *Microtus oeconomus*. Os experimentos foram feitos durante dois verões, criando habitats com características semelhantes aos locais de origem dos animais, não sendo permitido o cruzamento dentro da mesma família. O objetivo desse estudo era verificar a relativa importância da transferência de gametas em populações com ou sem conexão por corredores.

Aars e Ims [1] podem concluir que os sexos respondem de forma diferente à presença ou não de corredores, pois, entre as fêmeas, a taxa de transferência, apesar de ter sido baixa, com os corredores foi possível ampliá-la; já entre os machos permaneceu inalterada. Além disso, esses estudos apresentaram um aumento na heterozigidade entre as proles, naqueles sítios conectados por corredores.

Haddad e Bowne [22] fizeram seus estudos em 27 sítios numa área de 1,64 ha, sendo que alguns sítios eram conectados por corredores de diferentes tamanhos e outros não. No seu primeiro experimento, fez uso de duas borboletas e um pequeno mamífero. Num segundo experimento, fez uso de quatro espécies de plantas, outro pequeno mamífero e uma espécie de abelha. As análises foram realizadas, utilizando blocos de três sítios, os quais foram distribuídos equidistantes, um sítio central e outros dois periféricos; desses apenas um era conectado ao central por corredor, enquanto o outro foi mantido isolado.

Haddad e Bowne [22] concluíram que das 10 espécies analisadas, ao menos 68% dos indivíduos moveram-se para sítios conectados e todas as espécies mostraram efeitos de corredor positivos. Estatisticamente, o efeito dos corredores foi significa-

tivo para 5 espécies, não foi significativo para 1 espécie e inconclusivo para 4 espécies. Os corredores não influenciaram no número de emigrantes de algumas espécies para as quais esta resposta foi medida, incluindo borboletas e pequenos mamíferos, exatamente o inverso do que ocorreu para as plantas. Contudo, Haddad e Bowne [22] consideram os resultados ainda inconclusivos sobre a preferência das espécies no uso de corredores.

Falcy e Estades [15] utilizaram um método denominado balanço de energia para fazer seus experimentos. Nesse método, a dinâmica é governada pela comida, sendo esta espalhada aleatoriamente pelos habitats, inclusive nos corredores. Essa dinâmica consiste em que, cada indivíduo consuma uma certa quantidade constante de energia, para que ele seja capaz de procurar comida e companheiro(a). Quando o nível de energia é muito baixo, o indivíduo morre e é retirado do programa. Por outro lado, se existe acúmulo de energia, então novos elementos são introduzidos no processo. Portanto, se o tamanho da população aumenta muito, é diminuída a comida, para que ela se reduza, e, caso a população tenha se reduzido muito, é fornecida mais comida para que a população cresça.

Falcy e Estades [15] propõem o aumento no tamanho dos sítios, ao invés da criação de corredores, como uma estratégia de conservação. Isso parece bastante viável quando a distância entre os sítios é muito grande. Porém, durante os seus experimentos os corredores ou aumento dos sítios foram necessários, mas não suficientes, para persistência da população em sítios pequenos.

Contudo, os corredores têm-se mostrado uma estratégia interessante de conservação, aplicada a determinadas espécies e de apropriados formatos e tamanhos. Porém, é uma técnica que gera ainda muitas controvérsias entre os pesquisadores, devido à falta de estudos consistentes sobre seus verdadeiros efeitos e quais suas consequências a longo prazo, tornando seu uso limitado.

Com a criação dos corredores, viabilizando a movimentação das espécies entre os sítios, pode-se dar início a um outro processo denominado *sincronização*. Este

fenômeno caracteriza-se por todas as populações dos sítios envolvidos no tempo terem a mesma amplitude e fase, o que é denominado sincronização total [47]. Além disso, a sincronização também pode ser entendida como o momento em que todos os sítios possuem a mesma densidade para todo tempo t [47].

Devido às características desse fenômeno, tornar uma população sincronizada pode levá-la a ser mais suscetível a "anos ruins", aleatoriedade demográfica e efeito Allee [13]. Por outro lado, a identificação de que osciladores caóticos acoplados podem sincronizar abriu novas perspectivas nas ciências físicas e biológicas, o que levou ao entendimento de importantes sistemas biológicos [43].

O sincronismo pode ter origem em três mecanismos: dispersão, efeito Moran ou interações tróficas com populações de outras espécies que são espacialmente sincronizadas ou móveis [33]. O sincronismo a partir da dispersão pode ser obtido com a movimentação de indivíduos de sítios onde há uma densidade populacional maior, aumentando a densidade daqueles onde ela é menor. O efeito Moran, por sua vez, é uma perturbação aleatória global que afeta populações que compartilham uma estrutura comum, dependente da densidade, que as levará em sincronia. O próprio efeito Moran pode ter uma estrutura espacial. Compõe-se de efeitos locais que atingem apenas uma população específica, e de efeitos autocorrelacionados espaciais, dependentes da distância. No limite, os últimos serão perfeitamente globais e correlacionados com perturbações [40]. Um exemplo do efeito Moran diz respeito aos estudos realizados com duas populações de carneiros que, vivendo em ilhas isoladas, exibiram um grande nível de sincronização em suas flutuações [35]. Então, por sofrerem as mesmas influências externas, apresentaram comportamentos semelhantes.

Silva *et al.* [43] verificaram que a coerência entre as flutuações das densidades populacionais pode levar à sincronização em um sistema de sítios. Esta pode ocorrer, por exemplo, em fase, e foi estudada em [5, 6]. Também podemos ter a sincronização total ou perfeita, que aparece nos estudos em [49, 46, 13, 9, 47]. Uma metapopulação, sofrendo o efeito da sincronização total, pode ser levada à extinção de forma

irreversível. Tendo em vista que, se a extinção ocorrer em apenas um sítio, ou seja, tem um efeito local, sendo que nos demais sítios existe uma número significativo de elementos, então, através do efeito salvamento, que é a capacidade de recolonizar os sítios onde ocorreram extinções locais, previne-se a extinção global [20]. Portanto, o efeito salvamento é visto como um mecanismo que permite a persistência da espécie [13].

Por outro lado, se a extinção ocorrer em todos os sítios, então o salvamento torna-se impossível, por isso, a sincronização pode ser perigosa para a preservação das espécies [13, 43, 23]. Uma maneira de minimizar os efeitos da sincronização são as oscilações caóticas, as quais possuem um efeito estabilizador, reduzindo a probabilidade de extinção [2]. Heino *et al.* [28], em um experimento numérico semelhante ao de Allen *et al.* [2], verificaram que a persistência da espécie está mais relacionada com a ausência de sincronização e que dinâmicas caóticas locais são uma maneira de levar à não sincronização.

Silva e Giordani [47] examinaram em detalhes um caso especial de migração dependente da densidade, em que a migração não ocorre se a densidade do sítio está abaixo de uma certa densidade crítica, enquanto a fração de indivíduos que migram para outros sítios é mantida constante, se a densidade do sítio está acima de um certo nível. Comparações com modelos independente da densidade indicam que este simples mecanismo de dispersão dependente da densidade reduz a estabilidade da dinâmica sincronizada.

No Capítulo 2 será feita uma pequena análise sobre equilíbrio homogêneo, definido para a metapopulação com taxa de migração dependente da densidade, mostrando inclusive as regiões de estabilidade. Além disso, serão apresentados gráficos, que mostrarão o comportamento da metapopulação, de acordo com a matriz responsável pela topologia da rede, formada por uma combinação convexa como descrita anteriormente. Além disso, apresentar-se-á um exemplo da dinâmica metapopulacional aplicado a variáveis contínuas.

Comparações entre a metapopulação com taxa de migração dependente e a metapopulação com taxa de migração independente da densidade serão o foco do Capítulo 3. Lá serão apresentadas simulações que mostrem o comportamento do Número de Lyapunov e o Número de Lyapunov Transversal, possibilitando analisar a influência das taxas de migrações diferentes e topologia da rede dinâmica, no comportamento da metapopulação. Todas as simulações numéricas deste trabalho foram realizadas com o software MATLAB[®] R2007a.

2 ESTUDO DO COMPORTAMENTO DE UMA METAPOPOPULAÇÃO

Até aqui, pôde-se observar que existe um crescente interesse nos tópicos que envolvem as dinâmicas populacionais, principalmente no que diz respeito à dispersão e seus efeitos sobre a estabilidade do sistema [12, 45], o estado síncrono e suas características [33], caos e suas propriedades para estabilizar a sincronização, evitando a extinção de populações [2].

Na Seção 2.1, deste capítulo, será apresentado o modelo que rege a dinâmica da metapopulação, descrevendo suas características. Na Seção 2.2 será demonstrada a existência e unicidade do ponto de equilíbrio homogêneo do sistema, aplicando esses conceitos a exemplos. Na Seção 2.3 será feita uma análise do comportamento de uma metapopulação com migração dependente da densidade, seguida da apresentação de exemplos. Por fim, na Seção 2.4 será apresentado um exemplo com variáveis contínuas.

2.1 O modelo

Considere-se uma metapopulação formada por n sítios enumerados de 1 a n . Os sítios são cercados por um ambiente hostil e impróprio para a permanência da espécie. Em cada sítio existe uma população de uma única espécie, denominada população local ou subpopulação. A cada geração, essas populações passam por dois processos distintos: a dinâmica local, composta pela reprodução e sobrevivência da espécie, e a migração.

Suponha-se, inicialmente, que os sítios estejam isolados. Então a população evolui de forma independente de acordo com dinâmica descrita assim:

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i), i = 1, 2, \dots, n, t \geq 0, \quad (2.1)$$

onde x_t^i indica o número de indivíduos do sítio i no instante t e f é uma função suave e positiva, que incorpora os processos de sobrevivência e reprodução. Observe-se que a função responsável pela dinâmica local é a mesma para todos os sítios. Portanto, as subpopulações são idênticas. Exemplos para a função f são apresentados em [24, 25].

Uma vez ocorrido o processo de dinâmica local, dá-se início ao processo de migração. É necessário determinar a ordem desses processos, pois, caso contrário, resultados improváveis do ponto de vista biológico poderão ocorrer [26]. Sendo assim, a cada tempo t , uma fração μ de indivíduos deixa um dado sítio e migra para outros sítios mais próximos. Neste capítulo tomar-se-á essa fração migratória dependente da densidade do sítio local na condição $0 \leq \mu(x) \leq 1, \forall x \geq 0$ e $\mu(0) = 0$.

O processo migratório é dito 100% eficaz. Por tratar-se de um processo de curta duração não ocorrem mortes de indivíduos durante essa movimentação, assim $\sum_{i=1}^n c_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n$, ou seja, todos os indivíduos que saem de um sítio j chegam a algum sítio i . Considerar-se-á a matriz de acoplamento $\mathbf{C} = [c_{ij}]$, cujos elementos c_{ij} indicam a proporção dos indivíduos que saem do sítio j e migram para o sítio i , além disso, verificam $0 \leq c_{ij} \leq 1, i, j = 1, \dots, n$. Como não haverá migração para o próprio sítio, ter-se-á $c_{ii} = 0, i = 1, 2, \dots, n$.

Uma vez que existe a possibilidade de os indivíduos movimentarem-se entre os sítios, é necessário definir a topologia da rede. Para evitar efeitos de fronteira, serão usadas redes unidimensionais em forma de anéis cíclicos, conforme definido em (1.3) e (1.4). Portanto, a dinâmica da metapopulação fica completamente definida por:

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i)(1 - \mu(f(x_t^i))) + \sum_{j=1}^n c_{ij} \mu(f(x_t^j)) f(x_t^j), i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

onde a primeira parcela da soma no 2º membro representa a densidade de indivíduos que permaneceram no sítio i no passo de tempo t , e o segundo termo indica o número de indivíduos que migraram e se estabeleceram nesse sítio i no próximo passo de tempo.

Seja $\phi(x) = x\mu(x)$, onde ϕ é uma função positiva, que representa a quantidade atual de emigrantes em cada sítio. Substituindo x por $f(x_t^i)$, tem-se que $\phi(f(x_t^i)) = \mu(f(x_t^i))f(x_t^i)$. Agora $\phi(f(x_t^i))$ é a densidade de indivíduos que partem do sítio i quando a densidade local é $f(x_t^i)$, em cada instante t [43]. Assim, a expressão (2.2) se torna:

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i) - \phi(f(x_t^i)) + \sum_{j=1}^n c_{ij}\phi(f(x_t^j)), i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

2.2 Equilíbrio homogêneo

Nesta seção deseja-se estudar a estabilidade do equilíbrio homogêneo positivo, dado por $\mathbf{X}^* = (x^*, x^*, \dots, x^*)^T$, onde $x^* > 0$ é tomado como o único ponto de equilíbrio positivo do sítio desacoplado de (2.1), que satisfaz $f(x^*) = x^*$. Esse conceito está baseado nos trabalhos realizados por Silva *et al.*[45], onde são determinadas as condições para que a fórmula (2.3) apresente apenas um ponto de equilíbrio homogêneo não trivial.

Suponha-se que $\mathbf{X}^* = (x^*, x^*, \dots, x^*)^T$ seja um ponto de equilíbrio não trivial e $x_t^i = x^*$. Então substituindo em (2.3) resulta:

$$x^* = f(x^*) + \phi(x^*)\left(\sum_{j=1}^n c_{ij} - 1\right), i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

Como $x^* = f(x^*)$, vem

$$\phi(x^*)\left(\sum_{j=1}^n c_{ij} - 1\right) = 0. \quad (2.5)$$

Mas, por hipótese, $\mu(x^*) > 0$, o que implica que $\phi(x^*) > 0$. Logo,

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.6)$$

Portanto, a igualdade estabelecida em (2.6) é vista como condição necessária para a existência do equilíbrio homogêneo positivo, conforme descrito em [45]. A unicidade deste ponto de equilíbrio positivo do sistema (2.3) é demonstrada no trabalho de Giordani [17], como segue.

Admita-se que $\mathbf{P} = (p, p, \dots, p)^T$, com $p > 0$, seja um possível ponto de equilíbrio homogêneo do sistema (2.3). E ainda, que a condição (2.6) esteja satisfeita. Então, para que \mathbf{P} seja ponto de equilíbrio do sistema (2.3) é necessário que

$$p = f(p) + \phi(p) \left(\sum_{j=1}^n c_{ij} - 1 \right), i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.7)$$

Como, por hipótese, se tem a condição (2.6) satisfeita, é preciso que $p = f(p)$. Mas x^* é o único ponto de equilíbrio de f . Desse modo $p = x^*$, e daí $\mathbf{P} = \mathbf{X}^* = (x^*, x^*, \dots, x^*)^T$. Assim, $\mathbf{X}^* = (x^*, x^*, \dots, x^*)^T$ é o único ponto de equilíbrio homogêneo com componentes positivas do sistema.

Dessa forma, requer-se que $\sum_{i=1}^n c_{ij} = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$, para que não haja perda de indivíduos durante a migração, e $\sum_{j=1}^n c_{ij} = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, para a existência de equilíbrio homogêneo não trivial. Assim, conclui-se que a matriz $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ é duplamente estocástica.

A estabilidade local de \mathbf{X}^* é estudada através do procedimento de linearização. Calculando a matriz jacobiana \mathbf{J} associada ao sistema (2.3) e aplicando-a no vetor de equilíbrio homogêneo \mathbf{X}^* , tem-se:

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}^*) = \begin{bmatrix} [1 - \phi'(f(x^*))] f'(x^*) & c_{12} \phi'(f(x^*)) f'(x^*) & \cdots & c_{1n} \phi'(f(x^*)) f'(x^*) \\ c_{21} \phi'(f(x^*)) f'(x^*) & [1 - \phi'(f(x^*))] f'(x^*) & \cdots & c_{2n} \phi'(f(x^*)) f'(x^*) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} \phi'(f(x^*)) f'(x^*) & c_{n2} \phi'(f(x^*)) f'(x^*) & \cdots & [1 - \phi'(f(x^*))] f'(x^*) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

A matriz (2.8), pode ser reescrita como:

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}^*) = f'(x^*) \mathbf{M}, \quad (2.9)$$

onde \mathbf{M} é uma matriz $n \times n$, cujos elementos são:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 - \phi'(x^*), & i = j \\ c_{ij} \phi'(x^*), & i \neq j. \end{cases}$$

A igualdade (2.9) permite observar que os autovalores de $\mathbf{J}(\mathbf{X}^*)$ são $f'(x^*)\lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, onde os λ_i são os autovalores de \mathbf{M} .

A matriz $\mathbf{J}(\mathbf{X}^*)$ ainda pode ser reescrita assim:

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}^*) = f'(x^*)(\mathbf{I} - \phi'(x^*)\mathbf{B}) \quad (2.10)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade $n \times n$ e

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -c_{12} & \cdots & -c_{1n} \\ -c_{21} & 1 & \cdots & -c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{n1} & -c_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Então essa matriz \mathbf{B} depende da topologia da rede. Assim, os autovalores λ_i da matriz jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{X}^*)$ do sistema acoplado serão da forma:

$$\lambda_i = f'(x^*)(1 - \beta_i \phi'(x^*)), i = 0, 1, \dots, n - 1,$$

onde β_i são os autovalores da matriz \mathbf{B} .

A partir dessas informações, Silva *et al.* [45] concluíram que \mathbf{X}^* é estável se:

$$\begin{aligned} |f'(x^*)| < 1, & \quad \text{se} \quad 0 < \phi'(x^*) < \frac{2}{\max\{\beta_i\}} \\ \phi'(x^*) > \frac{1}{\max\{\beta_i\}} \left(1 - \frac{1}{|f'(x^*)|}\right), & \quad \text{se} \quad \phi'(x^*) < 0 \\ \phi'(x^*) < \frac{1}{\max\{\beta_i\}} \left(1 + \frac{1}{|f'(x^*)|}\right), & \quad \text{se} \quad \phi'(x^*) > \frac{2}{\max\{\beta_i\}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Por outro lado, \mathbf{X}^* é instável se:

$$\begin{aligned} \phi'(x^*) < \frac{1}{\max\{\beta_i\}} \left(1 - \frac{1}{|f'(x^*)|}\right), & \quad \text{se} \quad \phi'(x^*) < 0 \\ \phi'(x^*) > \frac{1}{\max\{\beta_i\}} \left(1 + \frac{1}{|f'(x^*)|}\right), & \quad \text{se} \quad \phi'(x^*) > \frac{2}{\max\{\beta_i\}}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde $0 < |f'(x^*)| < 1$.

A Figura 2.1, retirada de [39], apresenta a região de estabilidade e de instabilidade do sistema em função dos parâmetros $f'(x^*)$ e $\phi'(x^*)$. Pode-se associar essas regiões de estabilidade com os estudos de Ylikarjula *et al.* [52], definindo critérios

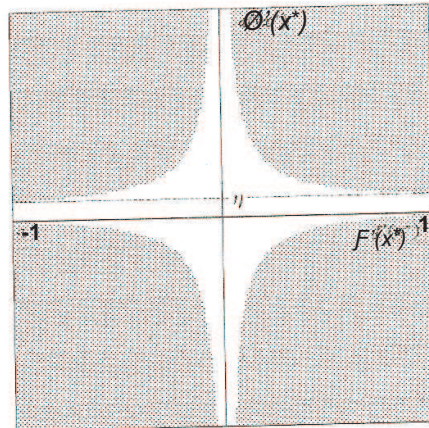


Figura 2.1: A região clara indica a região de estabilidade e a sombreada, de instabilidade, provocada pela presença da migração.

para a ocorrência da migração, de acordo com $\phi'(x)$. Os indivíduos podem dispersar-se pelo excesso deles, o que causa escassez de recursos para a sobrevivência. Nesse caso tem-se $\phi'(x^*)$ positivo. Por outro lado, quando se tem $\phi'(x)$ negativo, os indivíduos podem migrar pela escassez deles, o que dificulta o encontro de parceiros.

Em seus estudos, Silva *et al.* [45] verificou que $f(x^*)$ é o autovalor dominante da matriz jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{X}^*)$ e que este valor está associado com o ponto de equilíbrio positivo x^* de um sítio isolado, de acordo com (2.1). Assim, a estabilidade do ponto de equilíbrio homogêneo \mathbf{X}^* depende somente da estabilidade do modelo de um sítio desacoplado, e a dispersão é irrelevante para a estabilidade do estado homogêneo, desde que seja $\phi'(x^*) \leq 1$.

2.3 Análise da dinâmica metapopulacional com migração dependente ou independente da densidade

Nesta seção será analisada a dinâmica metapopulacional, expressa em (2.3), observando-se quais os comportamentos gerados de acordo com as condições propostas. A função responsável pela dinâmica local será a função exponencial logística

ou função de Ricker [38],

$$f(x) = xe^{r(1-x)}, \quad (2.14)$$

onde r indica a taxa de crescimento da população.

O diagrama de bifurcação da Função de Ricker, apresentado na Figura 2.2, traz três comportamentos bem distintos dessa função, de acordo com a variação do parâmetro r . Quando $0 < r < 2$, visualiza-se uma dinâmica caracterizada por um ponto fixo. A partir de $r = 2$, a função passa a apresentar oscilações periódicas de período 2, ou seja, a função passa a oscilar entre dois valores constantes x_1^* e x_2^* . Com o parâmetro r continuando a crescer, as oscilações periódicas de período 2 tornam-se instáveis e surgem oscilações periódicas de período 4 estáveis, e o processo continua repetindo-se. Observa-se que esse processo de bifurcação gera uma sequência de ciclos com período 2^n , $n \in \mathbb{N}$. Esse processo ocorre até que o parâmetro r assumira um valor, para o qual as bifurcações de período 2^n não ocorram mais. Esse estágio, que é denominado *caótico*, não apresenta regularidade, mas apresenta dependência sensível às condições iniciais.

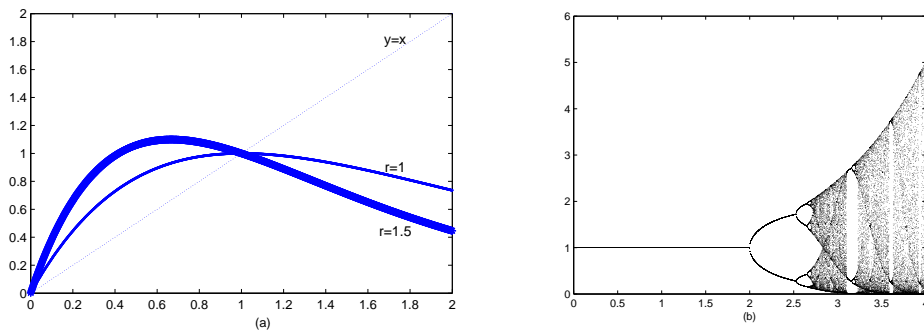


Figura 2.2: (a) Gráfico da função exponencial logística para $r = 1$ e $r = 1, 5$, gráfico construído com o algoritmo explog; (b) Gráfico do diagrama de bifurcação da função exponencial logística com $0 < r < 4$, gráfico construído com o algoritmo diagramabifurcacao.

A função exponencial logística tem um ponto fixo, $x^* = 1$, como mostram os cálculos:

$$x^* = x^* \exp(r(1 - x^*)) \Rightarrow 1 = \exp(r(1 - x^*)) \Rightarrow \ln(1) = \ln(\exp(r(1 - x^*))) \Rightarrow x^* = 1.$$

Pelo critério de estabilidade dado em [3],

$$|f'(x^*)| < 1 \Rightarrow x^* \text{ é estável.}$$

$$|f'(x^*)| > 1 \Rightarrow x^* \text{ é instável.}$$

Como $\left| \frac{d}{dx} x \exp(r(1-x)) \right|_{x=x^*=1} < 1 \Leftrightarrow |\exp(r(1-x))(1-rx)|_{x=x^*=1} < 1 \Leftrightarrow -1 < 1-r < 1 \Leftrightarrow 0 < r < 2$, $x^* = 1$ é estável para $0 < r < 2$, isto é, o sistema local desacoplado é estável para $0 < r < 2$.

O modelo local será dado pela função logística exponencial

$$x_{t+1} = x_t \exp(r(1-x_t)),$$

cuja solução, será obtida pelo seguinte processo de linearização na vizinhança de um ponto de equilíbrio x^* , tomando $\delta_t = x_t - x^*$, como uma pequena perturbação.

$$\delta_t = x_t - x^* \Rightarrow x_t = \delta_t + x^* \Rightarrow x_{t+1} = \delta_{t+1} + x^*$$

Como $x_{t+1} = f(x_t) = f(\delta_t + x^*)$ e utilizando a expansão em séries de Taylor sem considerar os termos não-lineares, temos: $\delta_{t+1} \approx f'(x^*)\delta_t$, onde $f'(x^*) = 1-r$ para $x^* = 1$. Fazendo,

$$\begin{aligned} \delta_1 &\approx f'(x^*)\delta_0 \\ \delta_2 &\approx f'(x^*)\delta_1 = f'(x^*)f'(x^*)\delta_0 \\ &\vdots \\ \delta_{t+1} &\approx f'(x^*)^{t+1}\delta_0. \end{aligned}$$

Tomando $\lambda = f'(x^*)$, segue que

$$\delta_{t+1} \approx \lambda^{t+1}\delta_0.$$

Quando $0 < \lambda < 1$, a perturbação δ_t decai de forma exponencial. E, portanto, o sistema se aproxima do ponto de equilíbrio estável monotonicamente, se $0 < r < 1$.

Se $1 < r < 2$ o sistema se aproxima do equilíbrio de forma oscilatória, pois a perturbação δ_t decai de forma exponencial, quando $-1 < \lambda < 0$. Acréscimos no parâmetro r , quando $r > 2$, fazem com que o ponto de equilíbrio $x^* = 1$ deixe de ser estável. Este ponto deixa de ser atrator e passa a ser repulsor. A função migratória será expressa de duas maneiras distintas (2.15) e (2.16), possibilitando uma melhor análise dos resultados:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \bar{x} \\ \bar{\mu}, & x > \bar{x}. \end{cases} \quad (2.15)$$

ou

$$\mu(x) = \begin{cases} \bar{\mu}, & 0 \leq x \leq \bar{x} \\ 0, & x > \bar{x}. \end{cases} \quad (2.16)$$

onde \bar{x} indica o ponto de equilíbrio da função de Ricker e $\bar{\mu}$ indica a fração migratória máxima.

Como $\phi(x) = x\mu(x)$, tem-se:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \bar{x} \\ x\bar{\mu}, & x > \bar{x} \end{cases} \quad (2.17)$$

ou

$$\phi(x) = \begin{cases} x\bar{\mu}, & 0 \leq x \leq \bar{x} \\ 0, & x > \bar{x} \end{cases} \quad (2.18)$$

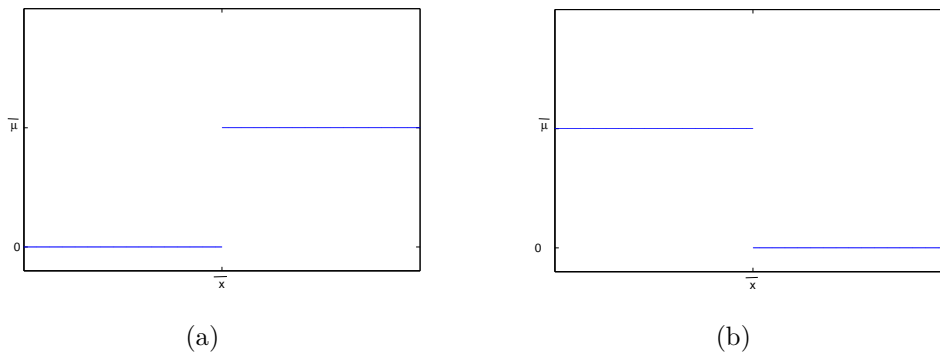


Figura 2.3: (a) Gráfico da função (2.15); (b) Gráfico da função (2.16).

O processo migratório depende da topologia da rede, ou seja, é preciso definir quais são os vizinhos de cada sítio e para quais é possível migrar. Para esse pro-

cesso, considera-se uma matriz \mathbf{C}_t , cujas características já foram apresentadas anteriormente. Essa matriz será gerada por uma combinação convexa de duas matrizes circulares, uma representando um anel cíclico de conexão local e outra, um anel cíclico de conexão global, definidos em (1.3) e (1.4), respectivamente. Assim, a matriz \mathbf{C}_t será expressa por:

$$\mathbf{C}_t = (1 - \alpha_t)\mathbf{C}_l + \alpha_t\mathbf{C}_g, \quad (2.19)$$

onde α_t é o coeficiente da combinação convexa, definido por $\alpha_{t+1} = g(\alpha_t)$, \mathbf{C}_l é uma matriz $n \times n$ de conexão local e \mathbf{C}_g é uma matriz $n \times n$ de conexão global.

Para determinação de α_t , será definida g como a função logística, que é dada por:

$$g(x) = rx(1 - x) \quad (2.20)$$

Através do diagrama de bifurcação da função logística apresentado na Figura 2.4 (b), observa-se que essa função apresenta três comportamentos distintos de acordo com a variação do parâmetro r : ponto-fixo, oscilações periódicas e caos. Inicialmente possui um ponto fixo trivial para r variando entre os valores 0 e 1. Para $1 < r < 3$ o digrama mostra um outro ponto fixo, $\frac{r-1}{r}$, que pelo critério de estabilidade dado por [3], prova-se que é estável para esse intervalo. A partir de $r = 3$ a função passa a apresentar oscilações periódicas de período 2, permanecendo assim até que essas oscilações tornem-se instáveis, então surgem oscilações de período 4 estáveis. Esse processo continua repetindo-se até que as oscilações não ocorram mais e surja um novo comportamento que não apresenta regularidade, denominado caótico.

2.4 Simulações Numéricas

Nessa seção, busca-se mostrar o comportamento de uma metapopulação composta por 30 sítios, no que diz respeito a densidade populacional de cada um. Para tanto, optou-se pela função de Ricker como a responsável pelos processos de repro-

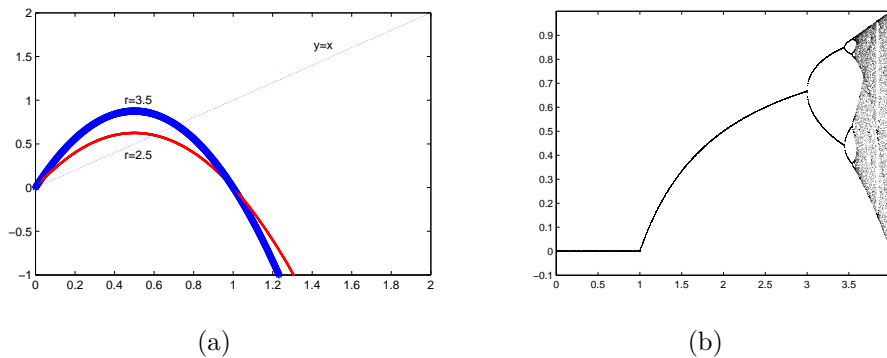


Figura 2.4: (a) Gráfico da função logística: $f(x) = rx(1 - x)$ para $r = 2,5$ e $r = 3,5$, construído pelo algoritmo `logistica`; (b) Gráfico do diagrama de bifurcação da função logística com $0 \leq r \leq 4$, construído pelo algoritmo `diagramabifurcao1`.

dução e sobrevivência, tomando seu parâmetro $r = 3.8$ e a função logística para o cálculo dos valores de α , obtidos através da expressão, $\alpha_{t+1} = 4\alpha_t(1 - \alpha_t)$. A matriz de acoplamento será expressa pela fórmula (2.19). Além disso, todos os gráficos dessa seção foram construídos a partir de 10000 interações, porém apresentadas apenas as últimas 100.

Na Figura 2.5 são apresentadas 3 visualizações, que mostram um panorama do comportamento dessa metapopulação, com taxa de migração constante, ou seja, independente da densidade.

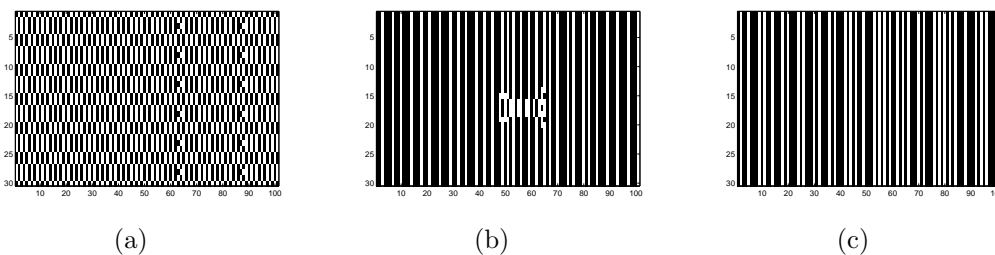


Figura 2.5: Gráficos espaço-tempo construídos pelo algoritmo `metapopulacaomigra-caocte` (a) $\mu = 0,2$; (b) $\mu = 0,5$; (c) $\mu = 0,9$.

Analisando o gráfico (a) da Figura 2.5, observa-se que a densidade populacional dos sítios alterna-se entre valores acima e abaixo do ponto de equilíbrio a cada instante de tempo. Já o gráfico (c) mostra que em todos os sítios as densidades

populacionais mantêm-se acima ou abaixo do ponto de equilíbrio por mais tempo. Já o sistema (b), por sua vez apresenta um comportamento semelhante ao do gráfico (c) para a maioria dos sítios, porém alguns deles apresentam um padrão totalmente irregular para alguns instantes de tempo.

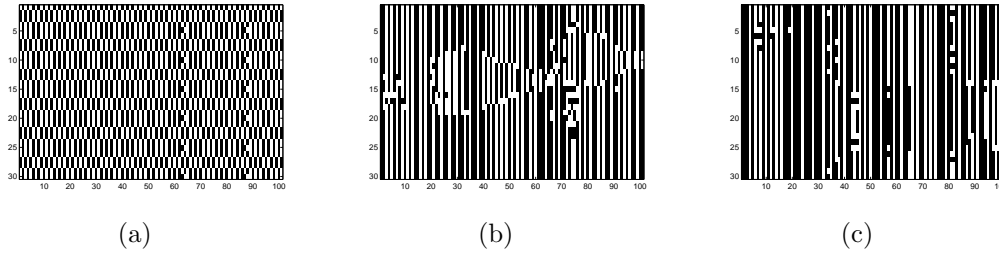


Figura 2.6: Gráficos espaço-tempo construídos pelo algoritmo metapopulacao (a) $\mu = 0, 2$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.

A Figura 2.6 mostra o comportamento dessa metapopulação, com a taxa de migração variando de acordo com ϕ dada em (2.17). Observou-se que os sítios do caso (a) dessa figura, apresentam densidades populacionais que oscilam ora acima, ora abaixo do ponto de equilíbrio a cada intervalo de tempo. Já parte dos sítios mostrados nos gráficos (b) e (c), apresentam alternância entre a densidade populacional estar acima ou abaixo do ponto de equilíbrio, porém essa troca ocorre em intervalos de tempo maiores, não-periódicos e em todos os sítios ao mesmo tempo. Além disso, tem-se sítios que apresentam um padrão totalmente irregular.

A Figura 2.7 mostra o comportamento dessa metapopulação, com a taxa de migração variando de acordo com ϕ dada em (2.18). Verifica-se nos gráficos (a) e (b) da Figura 2.7, que os sítios apresentam um padrão bastante irregular, no que diz respeito a densidade populacional estar acima ou abaixo do ponto de equilíbrio. Já no sistema (c) os sítios apresentam o mesmo comportamento a cada instante de tempo, porém alternando-se ora com densidade populacional acima e ora abaixo do ponto de equilíbrio, porém não evidenciando nenhum padrão para este fato.

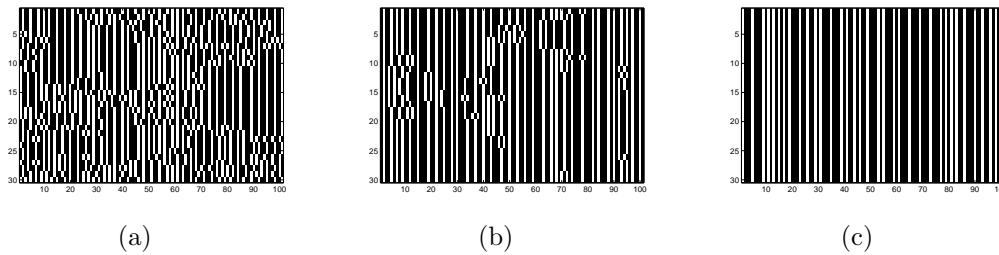


Figura 2.7: Gráficos espaço-tempo construídos pelo algoritmo `metapopulacao1` (a) $\mu = 0, 2$; (b) $\mu = 0, 5$; (c) $\mu = 0, 9$.

2.5 Um exemplo com variáveis contínuas

As estruturas espaciais podem ser incorporadas por modelos matemáticos de duas maneiras. Uma delas é através de variáveis contínuas e outra, de variáveis discretas [30]. No contexto deste trabalho utilizar-se-ão variáveis discretas, porém, este exemplo, com variáveis contínuas, é interessante de ser observado. Esta seção foi baseada nos estudos de Jansen e Lloyd [30] e Manica [36].

Considere-se uma metapopulação formada por três sítios, enumerados por 1, 2 e 3. Em cada sítio tem-se uma população formada por duas espécies, uma predadora e outra presa, que será chamada de população local. Supõe-se, inicialmente, ausência de migração entre os sítios; então a dinâmica local é definida pelo sistema de equações diferenciais:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\mathbf{x}_1) \\ f(\mathbf{x}_2) \\ f(\mathbf{x}_3) \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

onde a derivação é feita com respeito ao tempo, e \mathbf{x}_j é o vetor que indica a densidade populacional em cada sítio j : $\mathbf{x}_j = (x_1, x_2, x_3)^T$. A função f , que incorpora os processos de sobrevivência e reprodução, é dada pelo modelo predador-presa de *Lotka-Volterra*.

Após ter ocorrido a dinâmica local, dá-se início ao processo migratório. Assim, a cada geração uma fração de indivíduos deixa o sítio i para migrar para um sítio j .

Esse processo ocorre segundo a topologia da rede, e, nesse caso, optou-se por anéis cíclicos de conexão local, como apresentado em (1.3).

Portanto, a dinâmica populacional do sistema espacial fica completamente definida pela combinação da dinâmica local com a migração. Este é o modelo:

$$\mathbf{x}_j = f(\mathbf{x}_j) + \sum_{i=1}^n c_{ij} \mathbf{M} \mathbf{x}_i \quad (2.22)$$

onde \mathbf{M} é uma matriz diagonal, cujos elementos diagonais m_h , descrevem como a migração difere entre as espécies. Para este caso, a matriz \mathbf{M} tem ordem 2, pois tem-se duas espécies interagindo. A matriz $\mathbf{C} = [c_{ij}]$, $n \times n$, expressa a estrutura espacial do sistema, sendo a mesma para todas as espécies. A densidade da espécie h no sítio j muda através da migração do sítio i para o j à taxa de $m_h c_{ij}$. Então $c_{ii} < 0$, pois os elementos da diagonal principal de \mathbf{C} representam os indivíduos deixando um dado sítio, e $c_{ij} \geq 0$ para todo $i \neq j$, pois os elementos que estão fora da diagonal principal de \mathbf{C} representam os indivíduos chegando a um dado sítio, provenientes de outro sítio.

Sendo $N(t)$ a população de presas e $P(t)$ a população de predadores no tempo t , o modelo de *Lotka-Volterra* é escrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= N(a - bP) \\ \frac{dP}{dt} &= P(cN - d), \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde a , b , c , d são constantes. Para diminuir o número de parâmetros, será feita uma adimensionalização do sistema (2.23), definindo uma nova variável independente, o tempo adimensional τ , e, como novas variáveis dependentes, as populações adimensionais v (população de presas) e ν (população de predadores), e ainda um parâmetro adimensional α , como segue:

$$v(\tau) \equiv \frac{cN(t)}{d}, \nu(\tau) \equiv \frac{bP(t)}{a}, \tau \equiv at, \alpha \equiv \frac{d}{a}. \quad (2.24)$$

Assim, o sistema (2.23) será reescrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} &= R(v, \nu) \\ \frac{d\nu}{d\tau} &= S(v, \nu), \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde se define $R(v, \nu) \equiv v(1 - \nu)$ e $S(v, \nu) \equiv \alpha\nu(v - 1)$.

Nesse novo sistema de equações diferenciais, todas as quantidades envolvidas são adimensionais e, além disso, o número de parâmetros ficou reduzido de quatro (a, b, c, d) para um único parâmetro, igual à razão entre a taxa de morte dos predadores e a taxa de crescimento linear da população de presas.

A dinâmica populacional do sistema espacial é completamente definida pelo seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \\ \mathbf{x}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\mathbf{x}_1) + c_{11}\mathbf{M}\mathbf{x}_1 + c_{12}\mathbf{M}\mathbf{x}_2 + c_{13}\mathbf{M}\mathbf{x}_3 \\ f(\mathbf{x}_2) + c_{21}\mathbf{M}\mathbf{x}_1 + c_{22}\mathbf{M}\mathbf{x}_2 + c_{23}\mathbf{M}\mathbf{x}_3 \\ f(\mathbf{x}_3) + c_{31}\mathbf{M}\mathbf{x}_1 + c_{32}\mathbf{M}\mathbf{x}_2 + c_{33}\mathbf{M}\mathbf{x}_3 \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

onde

$$\mathbf{C} = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \nu_2 \\ \nu_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} \nu_3 \\ \nu_3 \end{bmatrix},$$

a matriz \mathbf{M} depende da taxa de migração em cada caso e f é a função que engloba os processos da dinâmica local.

A partir do sistema (2.26), realizaram-se quatro simulações, modificando de um caso para outro a matriz \mathbf{M} . As simulações foram realizadas utilizando o método numérico de Runge-Kutta 4. Cada sítio recebeu um número inicial de presas e predadores diferentes, porém esses valores mantiveram-se inalterados a cada nova simulação. As três primeiras simulações foram realizadas com 20000 interações e a última com 35000, sempre descartando os transientes.

A Figura 2.8 apresenta os gráficos de presas \times predadores, na ausência de migração, revelando um comportamento oval bastante similar nos três casos e típico do modelo de predador-presa. Já nas Figuras 2.9, 2.10 e 2.11 é possível observar que, na ausência de migração, o sistema predador-presa apresenta um comportamento oscilatório periódico, variando a sua amplitude entre dois valores constantes, os quais são distintos em cada caso.

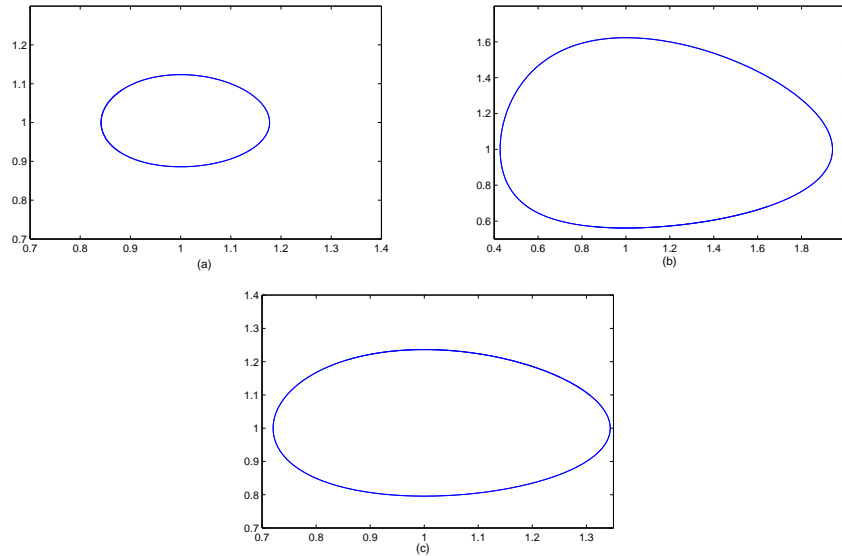


Figura 2.8: Presas \times Predadores com ausência de migração, gráficos construídos pelo algoritmo `predadorpresa3`: (a) sítio 1: $\alpha = 0,5$, $v(0) = 1,1$ e $\nu(0) = 1,1$; (b) sítio 2: $\alpha = 0,5$, $v(0) = 1,2$ e $\nu(0) = 1,6$ e (c) sítio 3: $\alpha = 0,5$, $v(0) = 1,3$ e $\nu(0) = 0,9$.

Na ausência de migração, cada sítio descreve o comportamento que ocorre de acordo com a dinâmica local. Para ampliar a análise dessa metapopulação, agregou-se à dinâmica local o processo migratório. Primeiramente, adicionou-se apenas a migração dos predadores, com a matriz \mathbf{M} dada por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Num segundo momento optou-se apenas pela migração das presas, sendo a matriz correspondente,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Ao introduzir a migração, seja ela dos predadores ou das presas, o padrão periódico que existe na ausência de migração, parece perder um pouco suas características, dando lugar à oscilações caóticas. Esse fenômeno pode ser observado nas Figuras 2.13, 2.14 e 2.15, porém torna-se mais acentuado nas Figuras 2.17, 2.18 e 2.19. As Figuras 2.12 e 2.16, como na situação sem migração, apresentam um com-

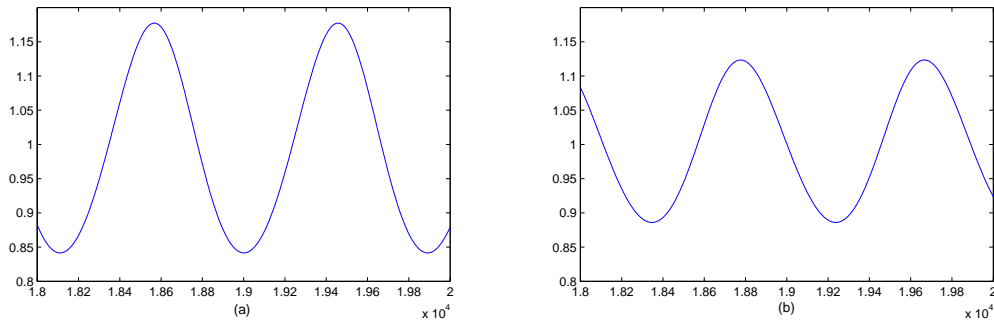


Figura 2.9: Gráficos construídos pelo algoritmo predadorpresa3 (a) Presas \times Tempo do sítio 1 com ausência de migração, $\alpha = 0,5$, $v(0) = 1,1$ e $\nu(0) = 1,1$; (b) Predadores \times Tempo do sítio 1 com ausência de migração, $\alpha = 0,5$, $v(0) = 1,1$ e $\nu(0) = 1,1$.

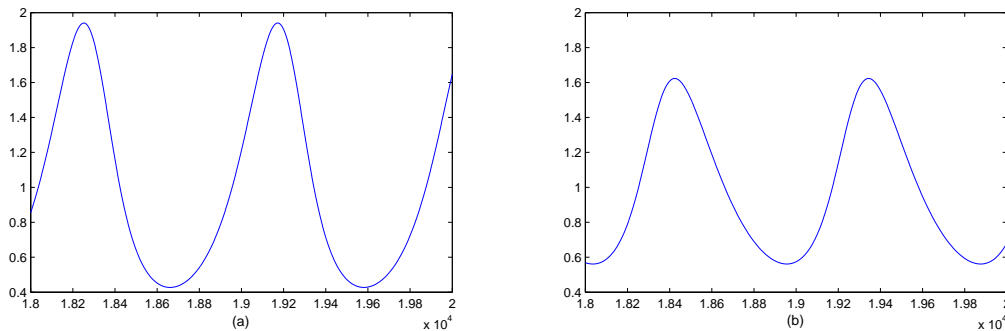


Figura 2.10: Gráficos construídos pelo algoritmo predadorpresa3 (a) Presas \times Tempo do sítio 2 com ausência de migração, $\alpha = 0,5$, $v(0) = 1,2$ e $\nu(0) = 1,6$; (b) Predadores \times Tempo do sítio 2 com ausência de migração, $\alpha = 0,5$, $v(0) = 1,2$ e $\nu(0) = 1,6$.

portamento oval, porém no seu interior existem linhas desordenadas, mostrando que não há mais um comportamento periódico e sim um comportamento aparentemente caótico. Não se pode afirmar tratar-se de caos, uma vez que não foi calculado o expoente de Lyapunov que garantiria esse resultado. Porém pode-se observar que o atrator caótico de Lorenz, apresentado na Figura 2.20 mostra um comportamento semelhante aos desse trabalho. Esses gráficos são apenas ilustrativos, por isso não foram analisados com maior precisão.

Essa visualização geométrica de algumas características de certo tipo de equações diferenciais é denominada plano de fase. Planos de fase são úteis na visualização do comportamento físico de sistemas físicos, particularmente de sistemas oscilatórios,

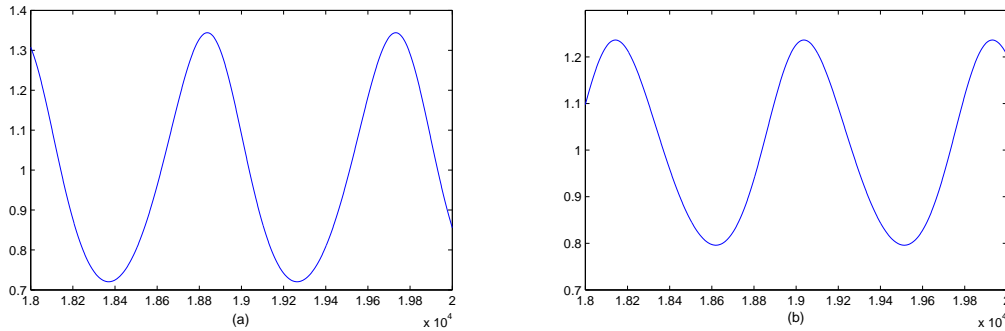


Figura 2.11: Gráficos construídos pelo algoritmo `predadorpresa3` (a) Presas \times Tempo do sítio 3 com ausência de migração, $\alpha = 0,5$, $v(0) = 1,3$ e $\nu(0) = 0,9$; (b) Predadores \times Tempo do sítio 3 com ausência de migração, $\alpha = 0,5$, $v(0) = 1,3$ e $\nu(0) = 0,9$.

como os modelos de predador-presa (equações de Lotka-Volterra). Esses modelos podem encaracolar para dentro em direção à origem, encaracolar para fora em direção ao infinito, ou alcançar situações neutras estáveis, chamadas de *centros*, onde o caminho traçado pode ser circular, elíptico ou ovóide, ou ainda alguma variante desses tipos. Uma das utilidades dessas configurações é determinar se as dinâmicas são estáveis ou não.

A Figura 2.21 mostra que pequenas alterações nas populações iniciais de presas e predadores geram um comportamento semelhante, porém com valores distintos. Esse fenômeno é próprio das oscilações caóticas, por serem sensíveis a pequenas modificações nos valores iniciadores da variável. Por fim, verificou-se o comportamento da metapopulação com a matriz

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Aqui a taxa de migração das presas e dos predadores é a mesma. Além disso, ampliou-se o número de iterações para 35000.

Através da Figura 2.22, é possível observar que nas três situações, temos a representação presas \times predadores de forma oval, porém sem as linhas desordenadas encontradas nas Figuras 2.12 e 2.16, onde se tinha apenas migração de predadores e presas, respectivamente. Então, mesmo tomando condições iniciais muito próximas,

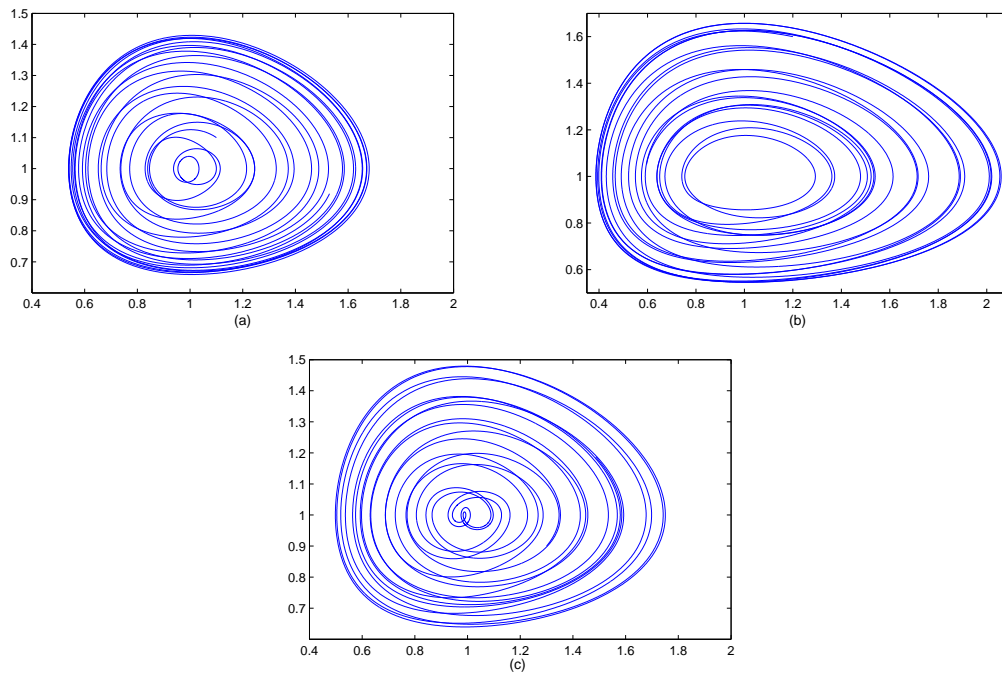


Figura 2.12: Presas \times Predadores com migração dos predadores, conforme descrito pela matriz (2.27), gráficos construídos pelo algoritmo `predadorpresa2` (a) sítio 1: $\alpha = 0,5$, $v(0) = 1,1$ e $\nu(0) = 1,1$, (b) sítio 2: $\alpha = 0,5$, $v(0) = 1,2$ e $\nu(0) = 1,6$ e (c) sítio 3: $\alpha = 0,5$, $v(0) = 1,3$ e $\nu(0) = 0,9$

porém diferentes, e tomando uma matriz \mathbf{M} apropriada, produziu-se um comportamento semelhante nos três sítios, que vai ao encontro da definição de sincronização.

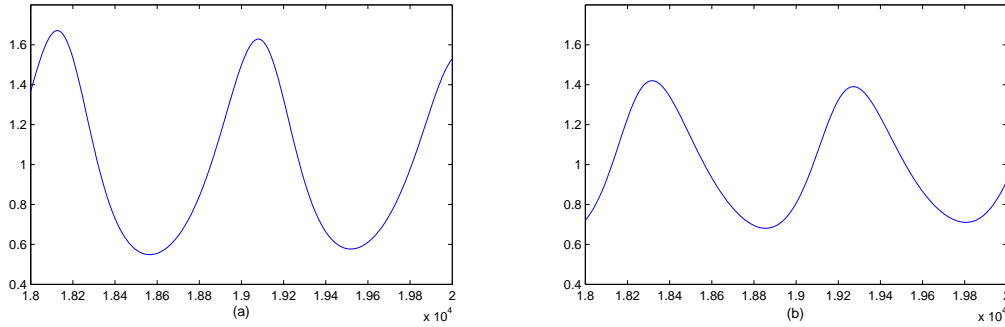


Figura 2.13: Gráficos construídos pelo algoritmo `predadorpresa2` (a) Presas \times Tempo do sítio 1, com migração dos predadores conforme descrito pela matriz (2.27), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,1$ e $\nu_1(0) = 1,1$, $v_2(0) = 1,2$, $\nu_2(0) = 1,6$, $v_3(0) = 1,3$, $\nu_3(0) = 0,9$; (b) Predadores \times Tempo do sítio 1, com migração dos predadores conforme descrito pela matriz (2.27), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,1$, $\nu_1(0) = 1,1$, $v_2(0) = 1,2$, $\nu_2(0) = 1,6$, $v_3(0) = 1,3$, $\nu_3(0) = 0,9$.

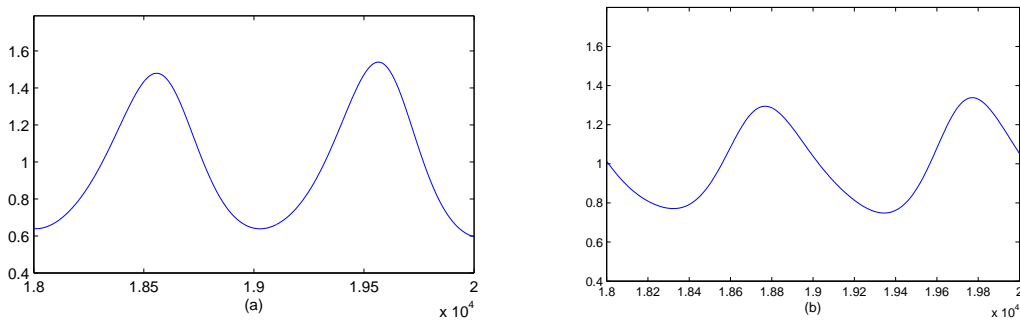


Figura 2.14: Gráficos construídos pelo algoritmo `predadorpresa2` (a) Presas \times Tempo do sítio 2, com migração dos predadores conforme descrito pela matriz (2.27), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,1$ e $\nu_1(0) = 1,1$, $v_2(0) = 1,2$, $\nu_2(0) = 1,6$, $v_3(0) = 1,3$, $\nu_3(0) = 0,9$; (b) Predadores \times Tempo do sítio 2, com migração dos predadores conforme descrito pela matriz (2.27), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,1$, $\nu_1(0) = 1,1$, $v_2(0) = 1,2$, $\nu_2(0) = 1,6$, $v_3(0) = 1,3$, $\nu_3(0) = 0,9$.

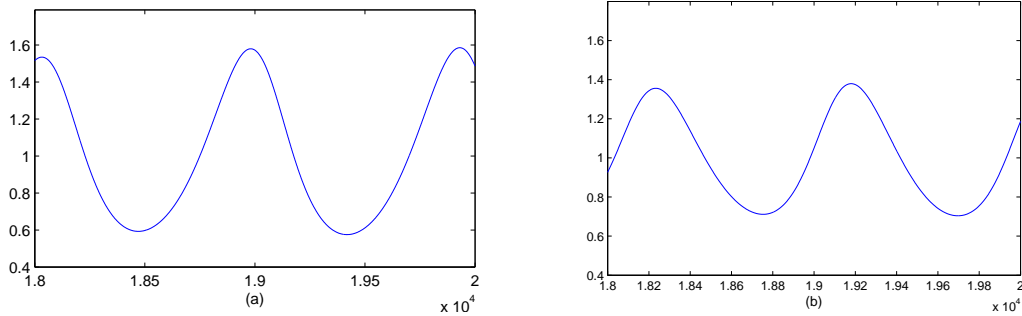


Figura 2.15: Gráficos construídos pelo algoritmo predadorpresa2 (a) Presas \times Tempo do sítio 3, com migração dos predadores conforme descrito pela matriz (2.27), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,1$ e $\nu_1(0) = 1,1$, $v_2(0) = 1,2$, $\nu_2(0) = 1,6$, $v_3(0) = 1,3$, $\nu_3(0) = 0,9$; (b) Predadores \times Tempo do sítio 3, com migração dos predadores conforme descrito pela matriz (2.27), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,1$, $\nu_1(0) = 1,1$, $v_2(0) = 1,2$, $\nu_2(0) = 1,6$, $v_3(0) = 1,3$, $\nu_3(0) = 0,9$.

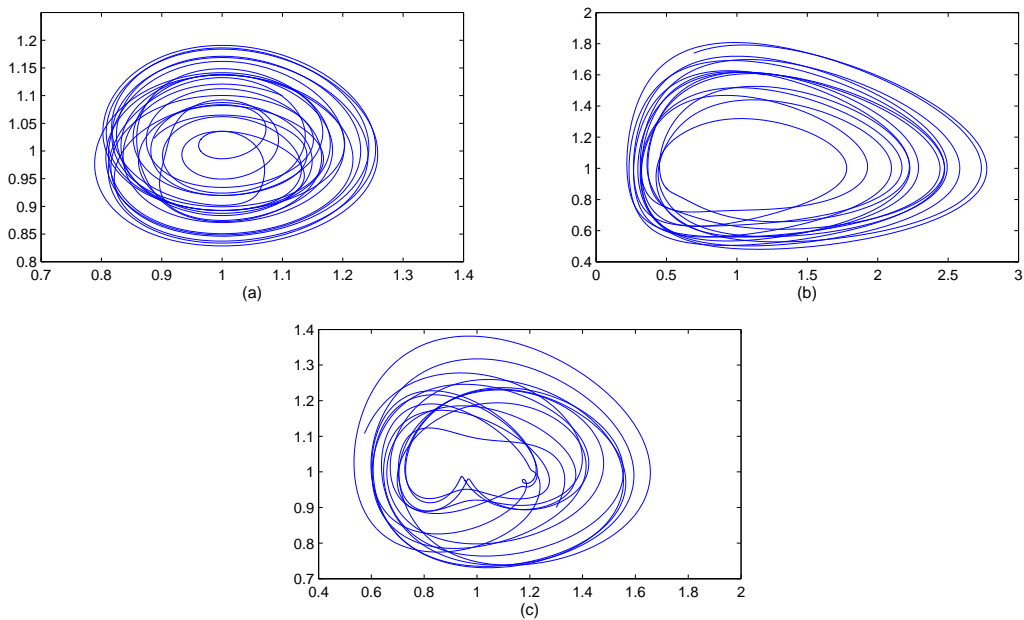


Figura 2.16: Presas \times Predadores com migração de presas, conforme descrito pela matriz (2.28), gráficos construídos pelo algoritmo predadorpresapresa (a) sítio 1: $\alpha = 0,5$, $v(0) = 1,1$ e $\nu(0) = 1,1$; (b) sítio 2: $\alpha = 0,5$, $v(0) = 1,2$ e $\nu(0) = 1,6$ e (c) sítio 3: $\alpha = 0,5$, $v(0) = 1,3$ e $\nu(0) = 0,9$.

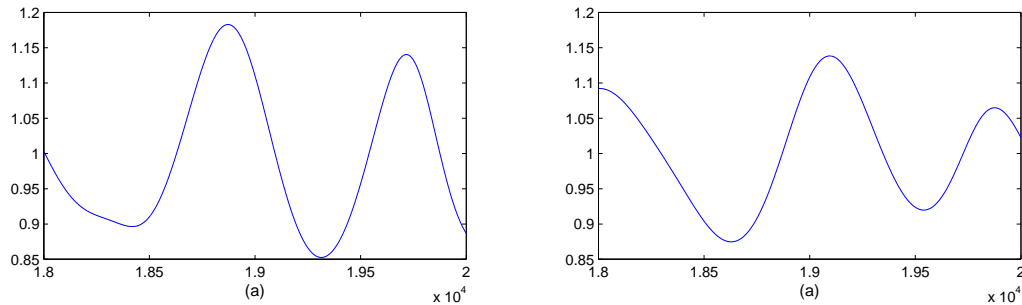


Figura 2.17: Gráficos construídos pelo algoritmo predadorpresapresa (a) Presas \times Tempo do sítio 1, com migração das presas conforme descrito pela matriz (2.28), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,1$ e $\nu_1(0) = 1,1$, $v_2(0) = 1,2$, $\nu_2(0) = 1,6$, $v_3(0) = 1,3$, $\nu_3(0) = 0,9$; (b) Predadores \times Tempo do sítio 1, com migração dos predadores conforme descrito pela matriz (2.27), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,1$, $\nu_1(0) = 1,1$, $v_2(0) = 1,2$, $\nu_2(0) = 1,6$, $v_3(0) = 1,3$, $\nu_3(0) = 0,9$.

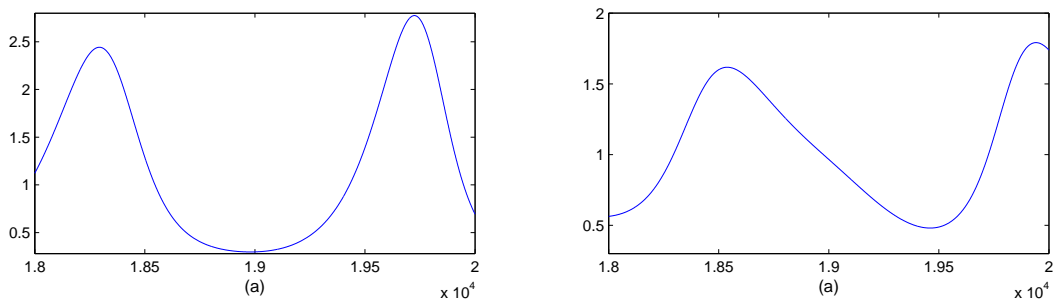


Figura 2.18: Gráficos construídos pelo algoritmo predadorpresapresa (a) Presas \times Tempo do sítio 2, com migração das presas conforme descrito pela matriz (2.28), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,1$ e $\nu_1(0) = 1,1$, $v_2(0) = 1,2$, $\nu_2(0) = 1,6$, $v_3(0) = 1,3$, $\nu_3(0) = 0,9$; (b) Predadores \times Tempo do sítio 2, com migração dos predadores conforme descrito pela matriz (2.27), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,1$, $\nu_1(0) = 1,1$, $v_2(0) = 1,2$, $\nu_2(0) = 1,6$, $v_3(0) = 1,3$, $\nu_3(0) = 0,9$.

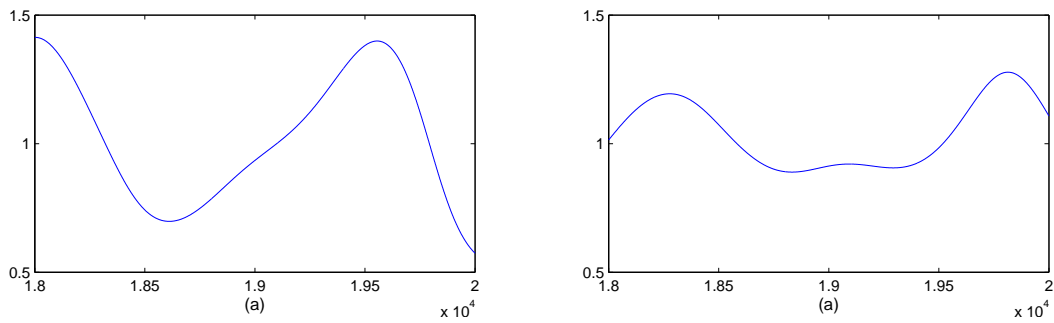


Figura 2.19: Gráficos construídos pelo algoritmo predadorpresapresa (a) Presas \times Tempo do sítio 3, com migração das presas conforme descrito pela matriz (2.28), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,1$ e $\nu_1(0) = 1,1$, $v_2(0) = 1,2$, $\nu_2(0) = 1,6$, $v_3(0) = 1,3$, $\nu_3(0) = 0,9$; (b) Predadores \times Tempo do sítio 3, com migração dos predadores conforme descrito pela matriz (2.27), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,1$, $\nu_1(0) = 1,1$, $v_2(0) = 1,2$, $\nu_2(0) = 1,6$, $v_3(0) = 1,3$, $\nu_3(0) = 0,9$.

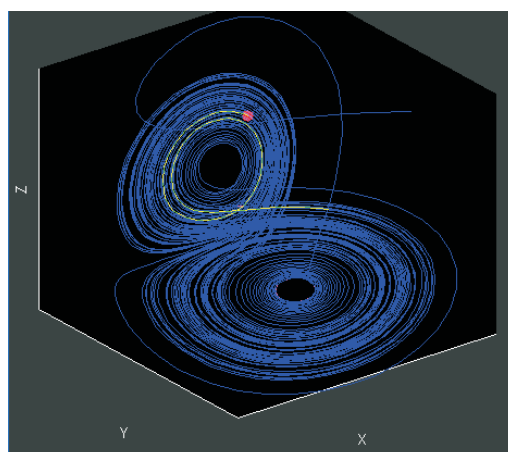


Figura 2.20: Atrator caótico de Lorenz

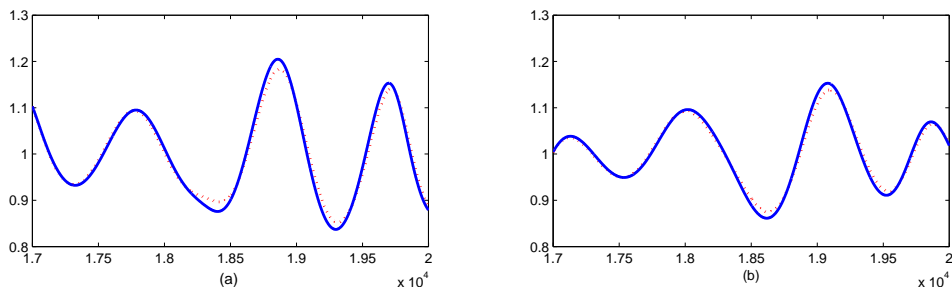


Figura 2.21: Gráficos construídos pelo algoritmo condiniciais (a) Presas \times Tempo do sítio 1, com migração das presas conforme descrito pela matriz (2.28), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,1$, $v_1(0) = 1,11$, $\nu_1(0) = 1,1$ e $\nu_1(0) = 1,11$, $v_2(0) = 1,2$, $v_2(0) = 1,6$, $v_3(0) = 1,3$, $\nu_3(0) = 0,9$; (b) Predadores \times Tempo do sítio 1, com migração das presas conforme descrito pela matriz (2.28), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,1$, $v_1(0) = 1,11$, $\nu_1(0) = 1,1$ e $\nu_1(0) = 1,11$, $v_2(0) = 1,2$, $v_2(0) = 1,6$, $v_3(0) = 1,3$, $\nu_3(0) = 0,9$. Os gráficos pontilhados foram gerados com a população inicial de presas 1.1 e os gráficos com linha contínua foram gerados com a população inicial de presas 1.11.

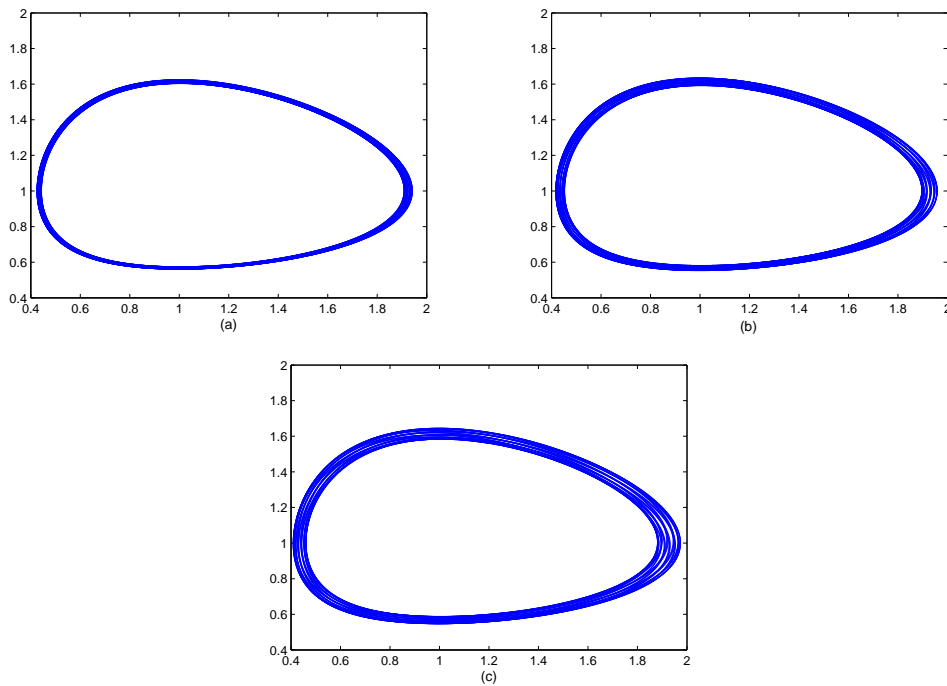


Figura 2.22: Gráficos construídos pelo algoritmo predadorpresaambos (a) Presas \times Predadores do sítio 1, com migração de presas e predadores conforme descrito pela matriz (2.29), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,2$, $\nu_1(0) = 1,6$, $v_2(0) = 1,206$, $\nu_2(0) = 1,61$, $v_3(0) = 1,205$, $\nu_3(0) = 1,559$ (b) Presas \times Predadores do sítio 2, com migração de presas e predadores conforme descrito pela matriz (2.29), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,2$, $\nu_1(0) = 1,6$, $v_2(0) = 1,206$, $\nu_2(0) = 1,61$, $v_3(0) = 1,205$, $\nu_3(0) = 1,559$; (c) Presas \times Predadores do sítio 3, com migração de presas e predadores conforme descrito pela matriz (2.29), $\alpha = 0,5$, $v_1(0) = 1,2$, $\nu_1(0) = 1,6$, $v_2(0) = 1,206$, $\nu_2(0) = 1,61$, $v_3(0) = 1,205$, $\nu_3(0) = 1,559$.

3 SINCRONIZAÇÃO

A sincronização é um fenômeno que tem despertado um grande interesse entre os estudiosos da área, como pode ser visto em [46, 33]. Esse processo caracteriza-se pelo comportamento similar de todos os sítios que compõem uma metapopulação, o que tem causado uma grande preocupação, por entender-se que, desta forma, uma população pode ser levada à extinção com maior facilidade [20]. Como citado na introdução, a sincronização está relacionada com o processo de migração, que, por sua vez está relacionado com a topologia da rede. Neste capítulo optou-se por desenvolver um estudo sobre uma metapopulação que terá a topologia da rede definida por uma combinação convexa de dois anéis cíclicos, um de conexão global e outro de conexão local. Na Seção 3.1, verificar-se-á a ocorrência da sincronização, analisando a metapopulação com taxa de migração independente da densidade. Já na Seção 3.2, serão apresentadas as simulações numéricas para exemplificar as conclusões teóricas obtidas na seção anterior. Na Seção 3.3, far-se-á a mesma análise da Seção 3.1, porém com a fração migratória dependente da densidade. Por fim, na Seção 3.4 serão apresentados exemplos que esclarecerão os resultados obtidos algebricamente na Seção 3.3.

3.1 Sincronização aplicada à metapopulação com taxa de migração independente da densidade

Considere-se o modelo apresentado em (2.2). Nesta seção toma-se a fração migratória independente da densidade. Então $\mu(x) = \mu$, onde $0 < \mu < 1$, pois essa variável passa a ser independente da densidade. Levando essa informação em (2.2), tem-se:

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t^i) + \sum_{j=1}^n c_{ij}(t)\mu f(x_t^j), i = 1, \dots, n, \forall t, \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{C}(t) = [c_{ij}(t)]$ é uma matriz $n \times n$ duplamente estocástica definida em (2.19).

Uma sincronização é dita total ou perfeita, quando todos os sítios apresentarem a mesma densidade populacional em cada tempo t , ou seja, quando $x_t^i = x_t$, $i = 1, \dots, n$. Usando essa informação em (3.1), tem-se:

$$x_{t+1}^i = f(x_t)(1 - \mu) + \sum_{j=1}^n c_{ij}(t)\mu f(x_t), i = 1, \dots, n, \forall t. \quad (3.2)$$

Sendo μ constante e $f(x_t)$ independente de j , podem ser retirados do somatório. Assim,

$$x_{t+1}^i = f(x_t)(1 - \mu) + \mu f(x_t) \sum_{j=1}^n c_{ij}(t), i = 1, \dots, n, \forall t. \quad (3.3)$$

Como a matriz $\mathbf{C}(t)$ é duplamente estocástica, $\sum_{j=1}^n c_{ij}(t) = 1$. Logo,

$$x_{t+1}^i = f(x_t), i = 1, \dots, n, \forall t \quad (3.4)$$

Portanto, pela conclusão (3.4), observa-se que, se uma solução é sincronizada, todos os sítios apresentarão um comportamento de sítio isolado, ou seja, todas as populações oscilarão conforme o modelo local $x_{t+1} = f(x_t)$.

O mesmo raciocínio pode ser feito para outros comportamentos da dinâmica local, como ciclos periódicos e órbitas caóticas, os quais garantirão existência de soluções periódicas e caóticas sincronizadas. No capítulo anterior, analisou-se a estabilidade da solução homogênea. Neste capítulo quer-se analisar a estabilidade da solução caótica sincronizada.

Matematicamente, sincronização significa que a dinâmica do sistema descrito em (3.1) está restrita a um subespaço invariante, que, nesse caso, é a diagonal do espaço de fase [47]. Por exemplo, no \mathbb{R}^2 , o subespaço invariante é a diagonal do diagrama de fase $x^1 = x^2$. Uma órbita iniciada sobre a diagonal do diagrama de fase, permanece ali ao longo do tempo. Então, tomando uma órbita sincronizada, quer-se analisar a estabilidade local assintótica das soluções sincronizadas, ou seja, verificar se as órbitas que iniciam próximas à diagonal de fase são atraídas para este estado [47]. Para tanto, é necessário linearizar o sistema dado em (3.1), calculando

sua matriz Jacobiana:

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}_t) = \begin{bmatrix} (1 - \mu)f'(x_t^1) & c_{12}(t)\mu f'(x_t^2) & \cdots & c_{1n}(t)\mu f'(x_t^n) \\ c_{21}(t)\mu f'(x_t^1) & (1 - \mu)f'(x_t^2) & \cdots & c_{2n}(t)\mu f'(x_t^n) \\ \vdots & \vdots & & \\ c_{n1}(t)\mu f'(x_t^1) & c_{n2}(t)\mu f'(x_t^2) & \cdots & (1 - \mu)f'(x_t^n) \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Aplicando a órbita sincronizada, dada por $\mathbf{X}_t = (x_t, \dots, x_t)$, em $\mathbf{J}(\mathbf{X}_t)$, tem-se:

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}_t) = f'(x_t) \begin{bmatrix} (1 - \mu) & c_{12}(t)\mu & \cdots & c_{1n}(t)\mu \\ c_{21}(t)\mu & (1 - \mu) & \cdots & c_{2n}(t)\mu \\ \vdots & \vdots & & \\ c_{n1}(t)\mu & c_{n2}(t)\mu & \cdots & (1 - \mu) \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Então os elementos a_{ij} da matriz (3.6), serão descritos assim:

$$a_{ij}(t) = f'(x_t) \times \begin{cases} (1 - \mu), & i = j \\ c_{ij}(t)\mu, & i \neq j. \end{cases}$$

É possível reescrever $\mathbf{J}(\mathbf{X}_t)$ da seguinte forma:

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}_t) = f'(x_t)(\mathbf{I} - \mu(\mathbf{I} - \mathbf{C}_t)), \quad (3.7)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade $n \times n$, ou ainda,

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}_t) = f'(x_t)((1 - \mu)\mathbf{I} + \mu\mathbf{C}_t). \quad (3.8)$$

Suponha-se, sem perda de generalidade, que na conexão entre os sítios não exista nenhum conglomerado isolado, ou seja, nenhum subconjunto de sítios desconectado do restante age como uma metapopulação em si mesma. Então a matriz \mathbf{C}_t será considerada irredutível¹. Caso contrário, a matriz \mathbf{C}_t seria uma soma direta de matrizes duplamente estocásticas, já que toda matriz redutível duplamente estocástica tem essa propriedade [37]. Em termos da metapopulação, a matriz de

¹Uma matriz não-negativa é dita redutível se existir uma partição do conjunto de índices $1, 2, \dots, n$ em conjuntos disjuntos não-vazios I_1 e I_2 tal que $a_{ij} = 0$ sempre que $i \in I_1$ e $j \in I_2$. Caso contrário, a matriz é dita irredutível.

acoplamento ser redutível significa que se poderia estudar cada conglomerado separadamente.

Uma matriz \mathbf{C}_t irredutível, pelo Teorema de Perron-Frobenius [31], tem seu autovalor dominante $\lambda = 1$ associado ao autovetor $\mathbf{v} = (1, \dots, 1)$. Dessa forma, pode-se decompor $\mathbb{R}^n = \mathbf{v} \oplus W$, onde W é um subespaço \mathbf{C}_t -invariante de dimensão $n - 1$. Nessas condições, a matriz \mathbf{C}_t assume a seguinte representação:

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \mathbf{A}_t & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \mathbf{Q}^{-1}, \quad (3.9)$$

onde \mathbf{A}_t é uma matriz $(n - 1) \times (n - 1)$ e \mathbf{Q} é uma matriz de mudança de base apropriada.

É possível observar que $\lambda = 1$ é um autovalor simples dominante de \mathbf{C}_t e o seu correspondente autovetor é a diagonal do diagrama de fase, que é exatamente o subespaço invariante que se restringe aos movimentos síncronos. Isso quer dizer que as perturbações nessa direção podem ocorrer livremente [39]. Porém quer-se que as perturbações transversais à diagonal de fase, dadas por $((1 - \mu)\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_t)$, tendam a zero, para ocorrência da estabilidade do estado síncrono.

Então, como o objetivo desse trabalho é verificar o crescimento das perturbações transversais à órbita sincronizada, basta considerar $\mathbf{J}(\mathbf{X}_t) = \mathbf{Q}(f'(x_t)((1 - \mu)\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_t))\mathbf{Q}^{-1}$ e analisar a evolução da equação de perturbação, dada por:

$$\mathbf{w}_{t+1} = f'(x_t)((1 - \mu)\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_t)\mathbf{w}_t, \quad (3.10)$$

onde $\mathbf{w}_t \in \mathbb{R}^{n-1}$. Definindo $\mathbf{K}_t = ((1 - \mu)\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_t)$, tem-se:

$$\mathbf{w}_{t+1} = f'(\mathbf{x}_t)\mathbf{K}_t\mathbf{w}_t. \quad (3.11)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= f'(x_0)\mathbf{K}_0\mathbf{w}_0 \\
\mathbf{w}_2 &= f'(x_1)\mathbf{K}_1\mathbf{w}_1 = f'(x_1)\mathbf{K}_1f'(x_0)\mathbf{K}_0\mathbf{w}_0 = f'(x_1)f'(x_0)\mathbf{K}_1\mathbf{K}_0\mathbf{w}_0 \\
&\vdots \\
\mathbf{w}_t &= f'(x_{t-1})\dots f'(x_1)f'(x_0)\mathbf{K}_{t-1}\dots\mathbf{K}_1\mathbf{K}_0\mathbf{w}_0.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Logo, $\{\mathbf{K}_t : t = 0, 1, \dots\}$ é uma família de matrizes simultaneamente diagonalizáveis, isto é, existe uma matriz \mathbf{P} inversível de ordem $(n-1) \times (n-1)$ tal que, $\mathbf{K}_t = \mathbf{P}\mathbf{D}_t\mathbf{P}^{-1}$, onde

$$\mathbf{D}_t = \begin{bmatrix} \sigma_1(t) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{n-1}(t) \end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

sendo $\sigma_j(t)$ autovalor de \mathbf{K}_t , $j = 1, \dots, n-1$. Assim, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_0 &= \mathbf{P}\mathbf{D}_0\mathbf{P}^{-1} \\
\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_0 &= \mathbf{P}\mathbf{D}_1\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{D}_0\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{D}_1\mathbf{D}_0\mathbf{P}^{-1} \\
&\vdots \\
\mathbf{K}_{t-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{K}_1\mathbf{K}_0 &= \mathbf{P}\mathbf{D}_{t-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{D}_{t-2}\mathbf{P}^{-1} \dots \mathbf{P}\mathbf{D}_0\mathbf{P}^{-1} \\
\mathbf{K}_{t-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{K}_1\mathbf{K}_0 &= \mathbf{P}\mathbf{D}_{t-1}\mathbf{D}_{t-2} \dots \mathbf{D}_1\mathbf{D}_0\mathbf{P}^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Portanto, a perturbação \mathbf{w}_t pode ser reescrita como:

$$\mathbf{w}_t = \mathbf{P}f'(x_{t-1})\dots f'(x_1)f'(x_0)\mathbf{D}_{t-1}\dots\mathbf{D}_1\mathbf{D}_0\mathbf{w}_0\mathbf{P}^{-1}. \tag{3.15}$$

Dessa forma, a perturbação $\mathbf{w}_t \rightarrow 0$ se, e somente se, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{S}_{\tau-1} \dots \mathbf{S}_1\mathbf{S}_0\|^{\frac{1}{\tau}} < 1$, onde $\mathbf{S}_\tau = f'(x_\tau)\mathbf{D}_\tau$ e todas as perturbações transversais ao subespaço invariante tenderão a zero. As perturbações paralelas ao subespaço invariante, por sua vez, podem ocorrer livremente, pois já estão no estado sincronizado.

Se ρ é a medida de probabilidade natural ² invariante, com suporte no atrator sincronizado, ρ será f-invariante. E, supondo sua ergodicidade, o Teorema Ergódico

²Medida de probabilidade natural pode ser definida como a distribuição uniforme da probabilidade em determinados pontos ou no caso contínuo, como sendo a área de retângulo valendo 1.

Multiplicativo de Oseledec [14] garante a existência e unicidade do limite que segue, a menos de um conjunto de medida de probabilidade natural nula:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\left\| \prod_{t=0}^{\tau-1} \mathbf{D}_t \right\| \right)^{\frac{1}{\tau}} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left| \max_{0 \leq j \leq n-1} \{ \sigma_j(\tau-1) \dots \sigma_j(0) \} \right|^{\frac{1}{\tau}}, \quad (3.16)$$

com $j = 1, \dots, n-1$. Então

$$\chi = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|S_{\tau-1} \dots S_1 S_0\|^{\frac{1}{\tau}} = L(x_0)\Lambda, \quad (3.17)$$

são os $n-1$ Números de Lyapunov Transversais, sendo

$$L(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} |f'(x_{\tau-1}) \dots f'(x_1) f'(x_0)|^{\frac{1}{\tau}}$$

denominado o Número de Lyapunov da órbita sincronizada começando em x_0 , e

$$\Lambda = \max_j \Lambda_j. \quad (3.18)$$

com $j = 1, \dots, n-1$, onde

$$\Lambda_j = \lim_{\tau \rightarrow \infty} |\sigma_j(\tau-1) \dots \sigma_j(0)|^{\frac{1}{\tau}}, j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.19)$$

Há estabilidade do atrator sincronizado quando $|\chi| < 1$, $j = 1, \dots, n-1$, $\forall x_0$ e $\tau \rightarrow \infty$.

Desconsiderando um conjunto com medida de probabilidade natural invariante nula, pode-se eliminar a dependência de x_0 na definição de L e estabelecer uma condição necessária para a estabilidade local assintótica do conjunto invariante sincronizado, como:

$$L\Lambda < 1.$$

O produto $L\Lambda$ é denominado Número de Lyapunov Transversal do conjunto invariante sincronizado. Earn et al. [13], em seus estudos com dispersão independente da densidade, verificou que, quando $L\Lambda < 1$, define-se uma região onde é possível

ocorrer sincronização, e quando $L\Lambda > 1$, tem-se uma região onde é impossível a ocorrência desse fenômeno.

É possível reescrever os autovalores de $\mathbf{K}_t = (1 - \mu)\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_t$ como segue.

$$\sigma_j(t) = (1 - \mu) + \mu\eta_j(t), \quad (3.20)$$

onde η_j são os autovalores de \mathbf{A}_t para $j = 1, \dots, n - 1$. Note-se que os η_j são, de fato, todos os autovalores de \mathbf{C}_t , exceto o autovalor 1, ou seja, o espectro de \mathbf{C}_t é $\{1, \eta_1(t), \dots, \eta_{n-1}(t)\}$.

Retome-se a matriz \mathbf{C}_t descrita em (2.19), onde as matrizes \mathbf{C}_l e \mathbf{C}_g são circulares, o que implica serem simultaneamente diagonalizáveis. Uma vez que \mathbf{C}_t é a soma de duas matrizes circulares, também é circular. Existe um mecanismo para o cálculo de seus autovalores, descrito em Lancaster e Tismenetsky [31].

Para uma matriz circular \mathbf{C} , os autovalores λ_k são dados por:

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j (\in_k)^j, \quad (3.21)$$

onde $\in_k = \exp\left(\frac{2\pi k}{n}\right)^i$, com $k = 0, \dots, n - 1$, $i = \sqrt{-1}$ e (a_0, \dots, a_{n-1}) é a primeira linha da matriz \mathbf{C} . A matriz que representa a conexão local é a matriz circular $\mathbf{C}_l = \text{circ}(0, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2})$. De (3.21) obtêm-se seus autovalores:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \frac{1}{2}(\in_k^1 + \in_k^{n-1}) \\ &= \frac{1}{2}(\in_k + \overline{\in_k}) \\ &= \frac{1}{2}2\text{Re}(\in_k) \\ &= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$k = 1, \dots, n - 1$. O valor máximo assumido por $\lambda_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ é 1, que ocorre para $k = 0$ e $k = n$. Portanto, como o interesse está voltado para as perturbações transversais à diagonal de fase, e o autovalor 1 representa justamente a diagonal do espaço de fase, esses dois valores de k serão excluídos.

Para a matriz globalmente conectada, $\mathbf{C}_g = \text{circ}(0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1})$, os autovalores são da forma:

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \frac{1}{n-1} \epsilon_k^1 + \frac{1}{n-1} \epsilon_k^2 + \dots + \frac{1}{n-1} \epsilon_k^{n-1} \\ &= \frac{1}{n-1} (\epsilon_k + \epsilon_k^2 + \dots + \epsilon_k^{n-1}).\end{aligned}\tag{3.23}$$

Logo, se $k = 0$, então $\lambda_0 = 1$. Porém, se $k \neq 0$, pela fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, obtém-se que a expressão dentro do parênteses em (3.23) é igual a -1; então

$$\lambda_k = -\frac{1}{n-1}.$$

Logo, os autovalores, exceto o zero, fixado n , são iguais e independentes de k . Assim, os autovalores de \mathbf{C}_t assumirão a seguinte representação:

$$\eta_j(t) = (1 - \alpha_t) \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) - \frac{\alpha_t}{n-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad \forall t.$$

Portanto, os autovalores de \mathbf{K}_t serão da forma:

$$\sigma_j(t) = (1 - \mu) + \mu \left[(1 - \alpha_t) \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) - \frac{\alpha_t}{n-1} \right], \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad \forall t.$$

Retomando a definição do Número de Lyapunov, escreve-se:

$$\begin{aligned}L &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} |f'(x_{\tau-1}) \dots f'(x_1) f'(x_0)|^{\frac{1}{\tau}} \\ &= \exp \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sum_{t=0}^{\tau-1} \ln |f'(x_t)| \right).\end{aligned}$$

Seja ρ uma medida de probabilidade natural f-invariante, associada ao sistema $x_{t+1} = f(x_t)$. Supondo que $\ln^+ |f'(x)| \in L^1(\rho)$, pelo Teorema Ergódico de Birchoff tem-se:

$$L = \exp \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sum_{t=0}^{\tau-1} \ln |f'(x_t)| \right) = \exp \left(\int_0^\infty \ln |f'(x)| d\rho(x) \right).$$

O valor de Λ_j em (3.19) pode ser escrito:

$$\begin{aligned}\Lambda_j &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} |\sigma_j(\tau-1) \dots \sigma_j(0)|^{\frac{1}{\tau}} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} |\sigma_j(\alpha_{\tau-1}) \dots \sigma_j(\alpha_0)|^{\frac{1}{\tau}} \\ &= \exp \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sum_{t=0}^{\tau-1} \ln |\sigma_j(\alpha_t)| \right),\end{aligned}\tag{3.24}$$

para $j = 1, \dots, n$.

Denote-se com δ uma medida de probabilidade natural α -invariante, associada ao sistema $\alpha_{t+1} = g(\alpha_t)$. Supondo $\ln^+ |\sigma_j(\alpha_t)| \in L^1(\delta)$ e $\ln \|(1-\mu)\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_t\| \in L^1(\rho)$, pelo Teorema Ergódico de Birkhoff, tem-se:

$$\Lambda_j = \exp \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sum_{t=0}^{\tau-1} \ln |\sigma_j(\alpha_t)| \right) = \exp \left(\int_0^1 \ln |\sigma_j(\alpha)| d\delta(\alpha) \right)$$

para $j = 1, \dots, n-1$. Portanto,

$$\Lambda = \max_j \exp \left(\int_0^1 \ln \left| (1-\mu) + \mu \left[(1-\alpha) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{\alpha}{n-1} \right] \right| d\delta(\alpha) \right)\tag{3.25}$$

3.2 Simulações Numéricas

Nesta seção serão apresentadas algumas simulações numéricas, a fim de exemplificar os resultados algébricos obtidos na Seção 3.1, no que diz respeito ao cálculo do Número de Lyapunov e do Número de Lyapunov Transversal. Como função responsável pela dinâmica local, tem-se a função exponencial logística, também conhecida como função de Ricker, apresentada em (2.14). Inicialmente, calcular-se-á o valor do Número de Lyapunov, que será obtido de forma iterativa, utilizando a seguinte igualdade:

$$L = \exp \left[\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sum_{t=0}^{\tau-1} \ln |f'(x_t)| \right].\tag{3.26}$$

A Figura 3.1 apresenta o comportamento do Número de Lyapunov em função do parâmetro r , que varia entre 0 e 4. Relacionando este gráfico com o diagrama

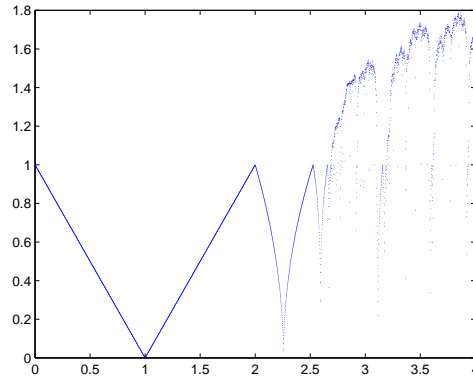


Figura 3.1: Número de Lyapunov $\times r$, $f(x) = x \exp(r(1-x))$ com $0 \leq r \leq 4$ e $0 \leq t \leq 10000$, gráfico construído pelo algoritmo `calcexpsinc1`.

de bifurcação da equação de Ricker apresentado em (2.2), percebe-se que o valor do Número de Lyapunov é maior que 1 justamente para valores de r , onde o diagrama de bifurcação apresenta caos. Contudo, quando os sítios são sincronizados, todos os sítios oscilam conforme a dinâmica local. Portanto, um sítio isolado apresentará caos quando $L > 1$. Então, para obter uma solução caótica sincronizada, precisa que seja

$$\Lambda < \frac{1}{L}.$$

Também faz-se necessário o cálculo de Λ , utilizando a expressão dada em (3.25). Essa inclui uma medida de probabilidade natural em sua formulação, que está relacionada com a variável α . Foram escolhidas quatro medidas como exemplos para a distribuição dos valores de α .

a) Medida de Dirac no ponto $\alpha = \alpha_0$

Para essa medida δ , (3.25) tem a forma:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \max_j \exp \left(\int_0^1 \ln \left| (1-\mu) + \mu \left[(1-\alpha) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{\alpha}{n-1} \right] \right| d\delta(\alpha) \right) \\ &= \max_j \exp \left(\ln \left| (1-\mu) + \mu \left[(1-\alpha_0) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{\alpha_0}{n-1} \right] \right| \right) \\ &= \max_j \left| (1-\mu) + \mu \left[(1-\alpha_0) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{\alpha_0}{n-1} \right] \right|. \end{aligned} \quad (3.27)$$

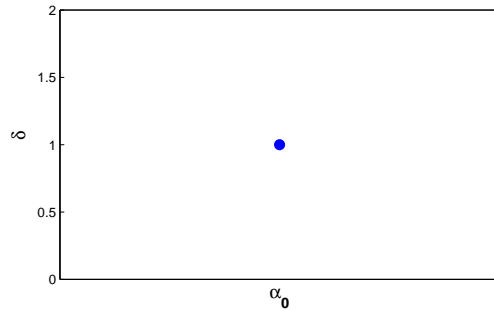


Figura 3.2: Medida de Dirac no ponto $\alpha = \alpha_0$

b) Probabilidade concentrada em dois pontos p, q (período 2)

Agora toma-se a medida δ partida em dois valores iguais a $\frac{1}{2}$ em pontos $\alpha = p$ e $\alpha = q$. Isso corresponde à solução de período 2. Aplicando essa situação em (3.25) tem-se:

$$\begin{aligned}
 \Lambda &= \max_j \exp \left(\int_0^1 \ln \left| (1 - \mu) + \mu \left[(1 - \alpha) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{\alpha}{n-1} \right] \right| d\delta(\alpha) \right) \\
 &= \max_j \exp \left(\ln \left| (1 - \mu) + \mu \left[(1 - p) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{p}{n-1} \right] \right|^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 &\quad \left. \ln \left| (1 - \mu) + \mu \left[(1 - q) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{q}{n-1} \right] \right|^{\frac{1}{2}} \right) \tag{3.28} \\
 &= \max_j \left(\left| (1 - \mu) + \mu \left[(1 - p) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{p}{n-1} \right] \right|^{\frac{1}{2}} \times \right. \\
 &\quad \left. \left| (1 - \mu) + \mu \left[(1 - q) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{q}{n-1} \right] \right|^{\frac{1}{2}} \right).
 \end{aligned}$$

c) Probabilidade concentrada em 4 pontos p, p_1, q, q_1 (período 4)

Ao invés de tomar um ou dois valores para α , toma-se aqui quatro, $\alpha = p$, $\alpha = p_1$, $\alpha = q_1$ e $\alpha = q$ e a medida unitária δ concentra-se em valores iguais nesses

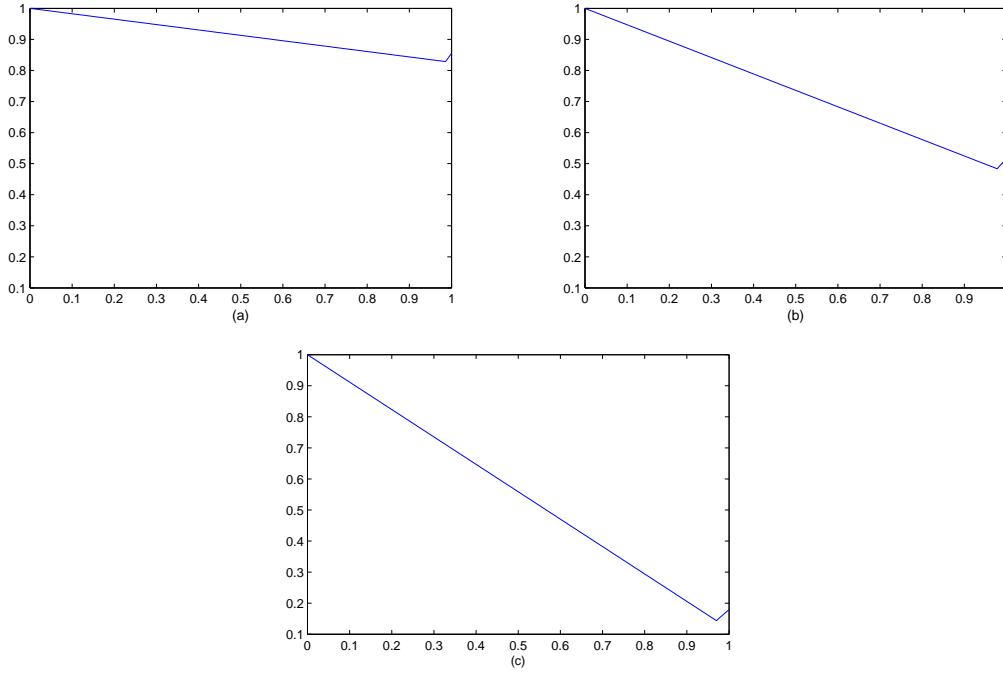


Figura 3.3: $\Lambda \times \mu$ para δ , medida de Dirac em α_0 , $0 \leq \mu \leq 1$, $n = 30$, gráficos construídos pelo algoritmo `calclamb1mi1` (a) $\alpha_0 = 0,15$; (b) $\alpha_0 = 0,5$; (c) $\alpha_0 = 0,85$.

pontos. O valor de Λ em (3.25) passa a ser:

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \max_j \exp \left(\int_0^1 \ln \left| (1 - \mu) + \mu \left[(1 - \alpha) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{\alpha}{n-1} \right] \right| d\delta(\alpha) \right) \\
&= \max_j \exp \left(\ln \left| (1 - \mu) + \mu \left[(1 - p) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{p}{n-1} \right] \right|^{\frac{1}{4}} + \right. \\
&\quad \ln \left| (1 - \mu) + \mu \left[(1 - p_1) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{p_1}{n-1} \right] \right|^{\frac{1}{4}} + \\
&\quad \ln \left| (1 - \mu) + \mu \left[(1 - q_1) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{q_1}{n-1} \right] \right|^{\frac{1}{4}} + \\
&\quad \left. \ln \left| (1 - \mu) + \mu \left[(1 - q) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{q}{n-1} \right] \right|^{\frac{1}{4}} \right) \tag{3.29} \\
&= \max_j \left(\left| (1 - \mu) + \mu \left[(1 - p) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{p}{n-1} \right] \right|^{\frac{1}{4}} \times \right. \\
&\quad \left| (1 - \mu) + \mu \left[(1 - p_1) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{p_1}{n-1} \right] \right|^{\frac{1}{4}} \times \\
&\quad \left| (1 - \mu) + \mu \left[(1 - q_1) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{q_1}{n-1} \right] \right|^{\frac{1}{4}} \times \\
&\quad \left. \left| (1 - \mu) + \mu \left[(1 - q) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{q}{n-1} \right] \right|^{\frac{1}{4}} \right).
\end{aligned}$$

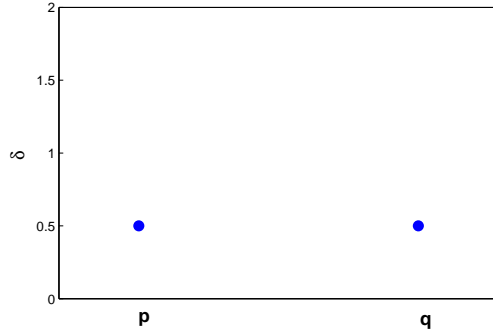


Figura 3.4: Probabilidade concentrada em dois pontos p, q

d) Probabilidade distribuída contínua e uniformemente num intervalo $[p; q]$:

Para um quarto exemplo, toma-se uma função constante $\alpha \mapsto \frac{1}{q-p}$, $\alpha \in [p; q]$, para exemplificar a distribuição contínua e uniforme de δ num intervalo $[p; q]$. Agora,

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \max_j \exp \left(\int_0^1 \ln \left| (1 - \mu) + \mu \left[(1 - \alpha) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{\alpha}{n-1} \right] \right| d\delta(\alpha) \right) \\
&= \max_j \exp \left(\int_p^q \ln \left| (1 - \mu) + \mu \left[(1 - \alpha) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{\alpha}{n-1} \right] \right| \left(\frac{1}{q-p} \right) d\alpha \right) \\
&= \max_j \exp \left(\left(\frac{1}{q-p} \right) \int_p^q \ln \left| (1 - \mu) + \mu \left[(1 - \alpha) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{\alpha}{n-1} \right] \right| d\alpha \right) \\
&= \max_j \exp \left(\left(\frac{1}{q-p} \right) \left(\frac{-1}{\mu \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) + \left(\frac{\mu}{n-1} \right)} \right) \times \right. \\
&\quad \left[\left(1 - \mu + \mu \left[(1 - q) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{q}{n-1} \right] \right) \times \right. \\
&\quad \ln \left| 1 - \mu + \mu \left[(1 - q) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{q}{n-1} \right] \right| - \right. \\
&\quad \left. \left(1 - \mu + \mu \left[(1 - p) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{p}{n-1} \right] \right) \times \right. \\
&\quad \ln \left| 1 - \mu + \mu \left[(1 - p) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{p}{n-1} \right] \right| + \right. \\
&\quad \left. \left. \left(1 - \mu + \mu \left[(1 - p) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{p}{n-1} \right] \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(1 - \mu + \mu \left[(1 - q) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{q}{n-1} \right] \right) \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.30}$$

As Figuras 3.3, 3.5, 3.7 e 3.9 apresentam o comportamento de Λ em função de μ para quatro exemplos distintos de distribuição de α . Observa-se que, nos

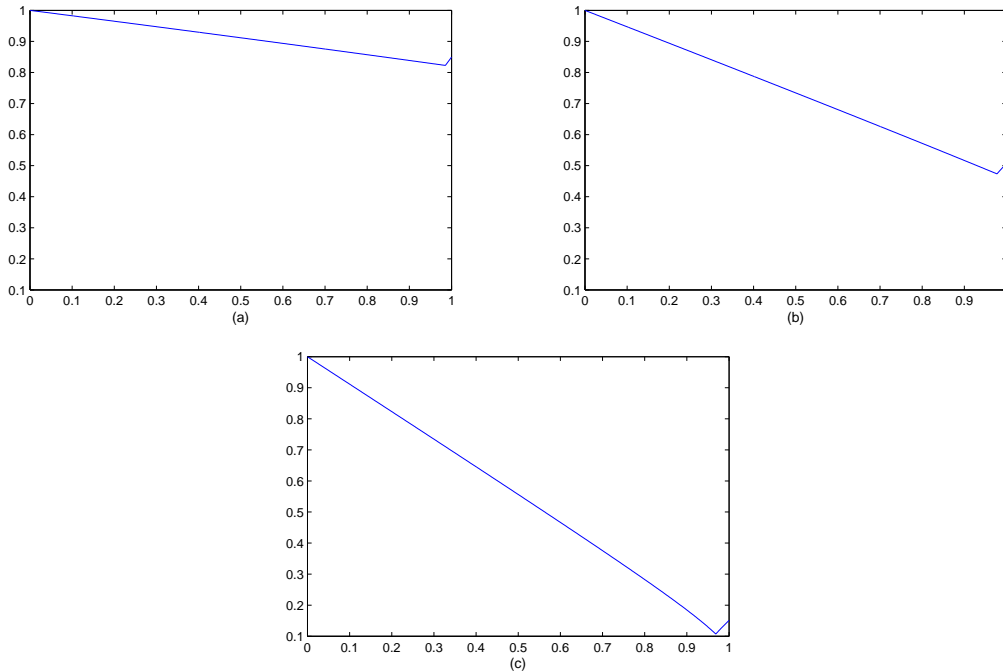


Figura 3.5: $\Lambda \times \mu$ para probabilidade concentrada em dois pontos, $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1$, gráficos construídos pelo algoritmo `calclamb2mi2` (a) $p = 0,05$, $q = 0,25$; (b) $p = 0,4$, $q = 0,6$; (c) $p = 0,75$, $q = 0,95$.

quatro casos, obteve-se como resultado gráficos decrescentes, isto é, de acordo com o aumento nos valores de μ ocorrem decréscimos nos valores de Λ , independente do valor escolhido para α ou de sua distribuição. Esse fato, vai ao encontro da teoria, pois, tem-se que, quanto maior a fração migratória, maior será a migração entre os sítios, o que favorece a sincronização, fato comprovado pelo decréscimo nos valores de Λ apresentado pelas figuras.

Sabe-se que o valor de Λ está relacionado com a migração, que, por sua vez, depende da topologia da rede, que resulta, nesse caso, de uma combinação convexa, cujo coeficiente é α . A Figura 3.3 representa o caso da medida de Dirac. Para produzir o item (a) dessa figura, tomou-se α próximo de zero, que implicou a formulação da matriz \mathbf{C}_t , propondo uma migração mais restrita. Com isso, obtiveram-se valores para Λ entre 0,8 e 1. No caso (b), quando $\alpha = 0.5$, compôs-se \mathbf{C}_t de 50% da matriz localmente e 50% da matriz globalmente conectada, favorecendo o aumento na comunicação entre os sítios, alterando os valores de Λ para o intervalo $[0,4, 1]$.

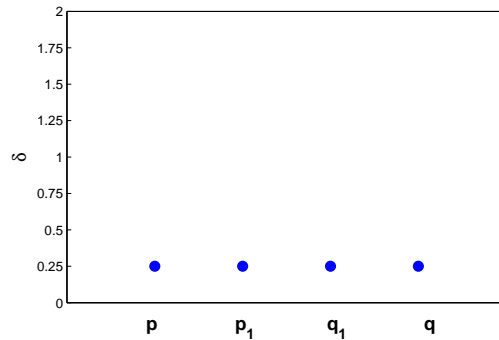


Figura 3.6: Probabilidade concentrada em 4 pontos p, p_1, q, q_1

No caso (c), amplia-se a participação da matriz globalmente conectada para 85%, aumentando ainda mais a possibilidade de movimentação entre os sítios, levando os valores de Λ a uma redução drástica de acordo com o aumento de μ , variando no intervalo $[0, 1, 1]$. Esse último caso, é o mais fácil de levar a sincronização. Isso porque, é o caso que apresenta menores valores Λ a medida que μ cresce.

Para as Figuras 3.5, 3.7 e 3.9, pode-se repetir o mesmo raciocínio para os valores de α , pois observa-se que os resultados obtidos são semelhantes. Contudo, conclui-se que migração tem grande participação quando se quer que uma população se torne sincronizada. Também, ligado à migração está a topologia da rede, provando que quanto mais conexões são estabelecidas entre os sítios, mais propensa a sincronização a metapopulação se torna.

3.3 Sincronização aplicada à metapopulação com taxa de migração dependente da densidade

Considere-se o modelo descrito em (2.3). Da mesma forma que na seção anterior, será utilizada uma matriz $\mathbf{C}_t = [c_{ij}]$ de ordem $n \times n$, duplamente estocástica, ou seja, $\sum_{i=1}^n c_{ij}(t) = \sum_{j=1}^n c_{ij}(t) = 1$ e $c_{ij} \geq 0$. Tendo em vista que não há migração para o próprio sítio, $c_{ii}(t) = 0, i = 1, \dots, n$. Como previamente, a matriz \mathbf{C}_t provirá de uma combinação convexa de duas matrizes circulantes, conforme descrito em (2.19).

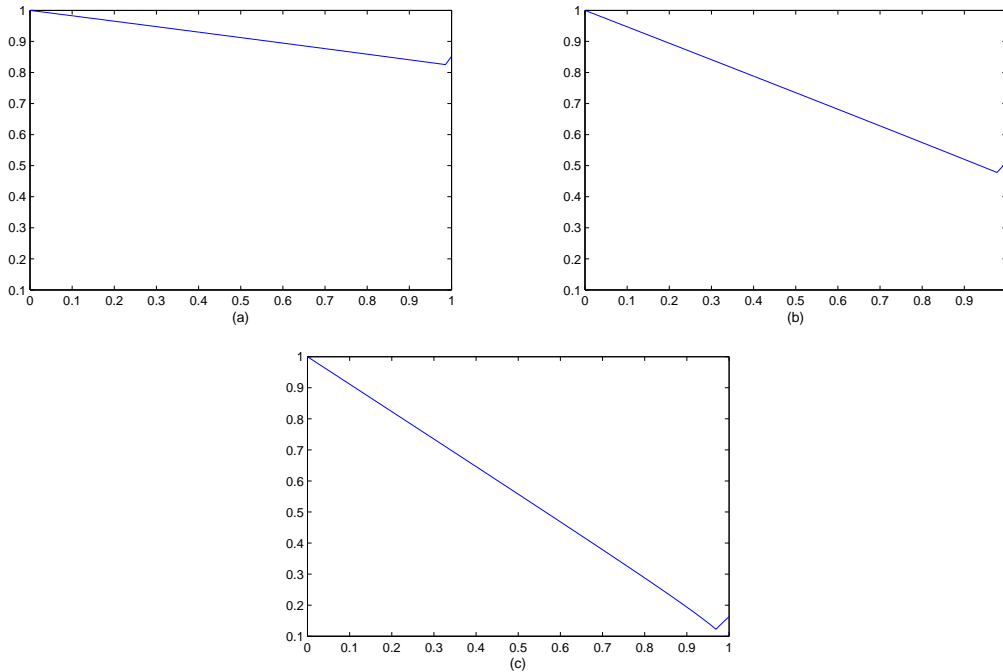


Figura 3.7: $\Lambda \times \mu$ para para probabilidade concentrada em quatro pontos, $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1$, $p_1 = (\frac{q-p}{3}) + p$, $q_1 = q - (\frac{q-p}{3})$, gráficos construídos pelo algoritmo `calclamb3mi3` (a) $p = 0,05$, $q = 0,25$; (b) $p = 0,4$, $q = 0,6$; (c) $p = 0,75$, $q = 0,95$.

Há sincronização quando todos os sítios apresentarem a mesma densidade populacional em cada tempo t , isto é, quando $x_t^i = x_t$, $i = 1, 2, \dots, n$. Levando isso em (2.3), vem:

$$x_{t+1}^i = f(x_t) - \phi(f(x_t)) + \sum_{j=1}^n c_{ij}(t)\phi(f(x_t)), i = 1, 2, \dots, n, t \geq 0. \quad (3.31)$$

Como $\phi(f(x_t))$ tornou-se independente de j , pode-se retirá-lo do somatório. Assim:

$$x_{t+1}^i = f(x_t) - \phi(f(x_t)) + \phi(f(x_t))\left(\sum_{j=1}^n c_{ij}(t)\right). \quad (3.32)$$

Sendo a matriz \mathbf{C}_t duplamente estocástica, $\sum_{j=1}^n c_{ij}(t) = 1$, do que resulta

$$x_{t+1}^i = f(x_t), i = 1, \dots, n. \quad (3.33)$$

Portanto, observa-se que, independente da taxa de migração ser dependente ou independente da densidade populacional, ao ter-se uma solução sincronizada, todas as populações oscilarão conforme o modelo local.



Figura 3.8: Probabilidade distribuída contínua e uniformemente num intervalo $[p; q]$

Na Seção 3.1, definiu-se sincronização matematicamente como sendo a dinâmica descrita pela fórmula (3.1), restrita a um subespaço invariante. Agora, continua a valer a mesma definição, porém aplicada em (2.3). O objetivo é analisar se as órbitas que iniciam próximas a esse subespaço invariante, que, nesse caso, é a diagonal do espaço de fase, são atraídas para esse estado. Para tanto, é necessário, inicialmente, linearizar o sistema (2.3), calculando a sua matriz jacobiana:

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}_t^i) = \begin{bmatrix} [1 - \phi'(f(x_t^1))] f'(x_t^1) & c_{12}(t) \phi'(f(x_t^2)) f'(x_t^2) & \cdots & c_{1n}(t) \phi'(f(x_t^n)) f'(x_t^n) \\ c_{21}(t) \phi'(f(x_t^1)) f'(x_t^1) & [1 - \phi'(f(x_t^2))] f'(x_t^2) & \cdots & c_{2n}(t) \phi'(f(x_t^n)) f'(x_t^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}(t) \phi'(f(x_t^1)) f'(x_t^1) & c_{n2}(t) \phi'(f(x_t^2)) f'(x_t^2) & \cdots & [1 - \phi'(f(x_t^n))] f'(x_t^n) \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

A aplicação da matriz jacobiana (3.34) na órbita sincronizada $\mathbf{X}_t = (x_t, \dots, x_t)$, fará com que seus elementos $a_{ij}(t)$ tenham a forma:

$$a_{ij}(t) = \begin{cases} (1 - \phi'(x_t)) f'(x_t), & i = j \\ c_{ij}(t) \phi'(x_t) f'(x_t), & i \neq j. \end{cases}$$

Assim, pode-se reescrever $\mathbf{J}(\mathbf{X}_t)$ como:

$$\mathbf{J}(X_t) = f'(x_t) \mathbf{H}_{t, \phi'(x_t)}, \quad (3.35)$$

onde

$$H_{t, \phi'(x_t)} = \mathbf{I} - \phi'(x_t) \mathbf{B}_t, \quad (3.36)$$

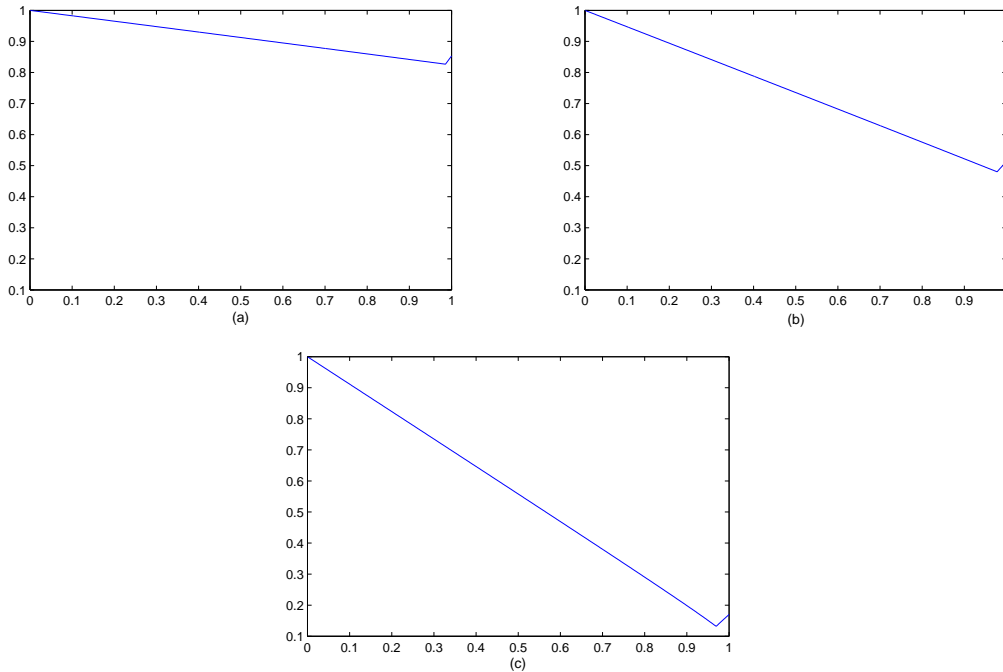


Figura 3.9: $\Lambda \times \mu$ para probabilidade distribuída contínua e uniformemente num intervalo, $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1$, gráficos construídos pelo algoritmo `calamb4mi4` (a) $p = 0,05$, $q = 0,25$; (b) $p = 0,4$, $q = 0,6$ (c) $p = 0,75$, $q = 0,95$.

\mathbf{I} é a matriz identidade $n \times n$ e \mathbf{B}_t é a matriz $n \times n$ definida em (2.11), porém neste momento dependente do tempo.

Suponha-se, como na Seção 3.1, que a matriz \mathbf{C}_t seja irredutível. Então pelo Teorema de Perron-Frobenius [31], o autovalor simples dominante de \mathbf{C}_t é $\lambda = 1$, associado ao autovetor $\mathbf{v} = (1, \dots, 1)$. Assim é possível decompor $\mathbb{R}^n = v \oplus W$, onde W é subespaço \mathbf{C}_t -invariante de dimensão $n - 1$. Nessas condições, a matriz \mathbf{B}_t assume a seguinte representação:

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{G}_t & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \mathbf{Q}^{-1}, \quad (3.37)$$

onde \mathbf{G}_t é uma matriz $(n-1) \times (n-1)$ e \mathbf{Q} é uma matriz de mudança de base apropriada. Assim, a expressão dada em (3.36) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{H}_{t,\phi'(x_t)} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \mathbf{I} - \phi'(x_{t+1})\mathbf{G}_t & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \mathbf{Q}^{-1}. \quad (3.38)$$

É possível observar que $\lambda = 1$ é um autovalor simples dominante de $\mathbf{H}_{t,\phi'(x_t)}$ e o seu autoespaço é a diagonal do diagrama de fase, que é exatamente o subespaço invariante que se restringe aos movimentos síncronos [47]. Isso quer dizer que as perturbações nessa direção podem ocorrer livremente. Porém, quer-se que as perturbações transversais à diagonal de fase, dadas por $\mathbf{I} - \phi'(x_{t+1})\mathbf{G}_t$, tendam a zero, para verificar a estabilidade do estado síncrono. Vale lembrar que, se o autovalor $\lambda = 1$ tivesse multiplicidade maior que 1, haveria mais vetores linearmente independentes no subespaço invariante, isto é, a diagonal do espaço de fase poderia não atrair as órbitas [39]. Então, como o foco deste estudo é verificar o crescimento das perturbações transversais à órbita sincronizada, basta considerar $\mathbf{J}(\mathbf{X}_t) = \mathbf{Q}(f'(x_t)(\mathbf{I} - \phi'(x_{t+1})\mathbf{G}_t))\mathbf{Q}^{-1}$ e analisar a evolução da equação de perturbação dada por:

$$\mathbf{w}_{t+1} = f'(x_t)(\mathbf{I} - \phi'(x_{t+1})\mathbf{G}_t)\mathbf{w}_t, \quad (3.39)$$

onde $\mathbf{w}_t \in \mathbb{R}^{n-1}$ representa a perturbação transversal da órbita sincronizada.

Tomando $\mathbf{K}_t = \mathbf{I} - \phi'(x_{t+1})\mathbf{G}_t$, tem-se que $\mathbf{w}_{t+1} = f'(x_t)\mathbf{K}_t\mathbf{w}_t$. Assim

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= f'(x_0)K_0\mathbf{w}_0 \\ \mathbf{w}_2 &= f'(x_1)K_1\mathbf{w}_1 = f'(x_1)f'(x_0)K_1K_0\mathbf{w}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_t &= f'(x_{t-1})K_{t-1}\mathbf{w}_{t-1} = f'(x_{t-1})\cdots f'(x_1)f'(x_0)K_{t-1}\cdots K_1K_0\mathbf{w}_0. \end{aligned}$$

Logo $\{\mathbf{K}_t : t = 0, 1, \dots\}$ é uma família de matrizes simultaneamente diagonalizáveis, isto é, existe uma matriz \mathbf{P} inversível de ordem $(n-1) \times (n-1)$ tal que:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{K}_t\mathbf{P} = \mathbf{D}_t = \begin{bmatrix} \sigma_1(t) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{n-1}(t) \end{bmatrix},$$

onde $\sigma_j(t)$ são os autovalores de \mathbf{K}_t , $j = 1, \dots, n - 1$. Logo,

$$\mathbf{w}_t = \mathbf{P}f'(x_{t-1}) \dots f'(x_1)f'(x_0)\mathbf{D}_{t-1} \dots \mathbf{D}_1\mathbf{D}_0\mathbf{w}_0\mathbf{P}^{-1}.$$

Então a perturbação \mathbf{w}_t irá aproximar-se de zero se e somente se:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{S}_{\tau-1} \dots \mathbf{S}_1\mathbf{S}_0\|^{\frac{1}{\tau}} < 1, \quad (3.40)$$

onde $\mathbf{S}_\tau = f'(x_t)\mathbf{D}_\tau$. Dessa forma, todas as perturbações transversais ao subespaço invariante tendem a zero. E as perturbações paralelas ao subespaço invariante podem ocorrer livremente, pois já estão no estado síncrono. Note-se que o limite em (3.40) é completamente determinando por um ponto inicial x_0 no conjunto invariante sincronizado. Pode-se escrever:

$$\|\mathbf{S}_{\tau-1} \dots \mathbf{S}_1\mathbf{S}_0\| = \prod_{t=0}^{\tau-1} \|f'(x_t)\mathbf{D}_t\|. \quad (3.41)$$

Se ρ é a medida de probabilidade natural invariante, com suporte no atrator sincronizado, ρ será f -invariante. E, supondo sua ergodicidade, o Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledec [14] garante a existência e unicidade do limite que segue, a menos de um conjunto de medida natural nula:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\| \prod_{t=0}^{\tau-1} \mathbf{D}_t \right\|^{\frac{1}{\tau}} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left| \max_{0 \leq j \leq n-1} \{\sigma_j(\tau-1) \dots \sigma_j(0)\} \right|^{\frac{1}{\tau}}, \quad (3.42)$$

para $j = 1, \dots, n - 1$. Vale, então, escrever:

$$\chi = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{S}_{\tau-1} \dots \mathbf{S}_1\mathbf{S}_0\|^{\frac{1}{\tau}} = L(x_0)\Lambda(x_0), \quad (3.43)$$

que são os $n - 1$ Números de Lyapunov Transversais, sendo

$$L(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} |f'(x_{\tau-1}) \dots f'(x_1)f'(x_0)|^{\frac{1}{\tau}} \quad (3.44)$$

o Número de Lyapunov da órbita sincronizada começando em x_0 , e $\Lambda(x_0)$ dado por

$$\Lambda(x_0) = \max_j \Lambda_j(x_0), \quad (3.45)$$

onde

$$\begin{aligned} \Lambda_j(x_0) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} |(\sigma_j(\tau - 1)) \dots (\sigma_j(1))(\sigma_j(0))|^{\frac{1}{\tau}} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} |(\sigma_j(\alpha_{\tau-1})) \dots (\sigma_j(\alpha_1))(\sigma_j(\alpha_0))|^{\frac{1}{\tau}}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

para $j = 1, \dots, n - 1$. Portanto, as perturbações transversais à trajetória síncrona tenderão a zero quando $\tau \rightarrow \infty$, se e somente se,

$$L(x_0)\Lambda(x_0) < 1, \quad (3.47)$$

para todo ponto inicial x_0 .

Se for desconsiderado um conjunto de medida de probabilidade natural invariante nula, pode-se eliminar a dependência de x_0 , nas definições de L e Λ , e estabelecer uma condição necessária e suficiente para a estabilidade local assintótica do conjunto invariante sincronizado [39, 47]:

$$L\Lambda < 1. \quad (3.48)$$

Silva *et al.* [47] em seus estudos observam que a estabilidade do estado síncrono depende de dois quantificadores: a taxa de separação de duas órbitas em um sistema de um único sítio, medida pelo número de Lyapunov, e o número Λ , que depende de todo processo de migração, incluindo a topologia da rede, a função migratória μ e o mecanismo de migração, dependente ou não da densidade.

A estabilidade de algumas órbitas especiais, tais como pontos de equilíbrio e órbitas periódicas não podem ser aproximadas com o uso do critério dado em (3.48), pois tais órbitas pertencem a um conjunto excepcional, onde L e Λ dependem do ponto inicial x_0 . Exemplos podem ser encontrados em [47].

Assim, os autovalores de $\mathbf{K}_t = \mathbf{I} - \phi'(x_{t+1})\mathbf{G}_t$ assumem a seguinte representação:

$$\sigma_j(t) = 1 - \phi'(x_{t+1})\eta_j(t), \quad (3.49)$$

onde $\eta_j(t)$ são os autovalores de \mathbf{G}_t , para $j = 1, \dots, n-1$. Note-se que os η_j são, de fato, os autovalores não nulos de $\mathbf{B}_t = I - C_t$, portanto, da forma

$$\eta_j(t) = 1 - \lambda_j(t)$$

onde os λ_j , $j = 1, 2, \dots, n-1$, são os autovalores de C_t diferentes de 1. Retornando à matriz \mathbf{C}_t , descrita em (2.19), sabe-se que é uma combinação convexa de duas matrizes circulantes \mathbf{C}_l , cujos autovalores são $\cos(\frac{2\pi j}{n})$, para $j = 1, \dots, n-1$, e \mathbf{C}_g , cujos autovalores são todos iguais a $\frac{-1}{n-1}$. Logo os autovalores de \mathbf{C}_t são da forma:

$$\lambda_j(t) = (1 - \alpha_t) \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) - \frac{\alpha_t}{n-1}, \quad (3.50)$$

e os não nulos de B_t , da forma

$$\eta_j(t) = 1 - \left[(1 - \alpha_t) \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) - \frac{\alpha_t}{n-1} \right], \quad (3.51)$$

para $j = 1, \dots, n-1$. Portanto, substituindo em (3.49), resulta

$$\sigma_j(t) = 1 - \phi'(x_{t+1}) \left[1 - \left((1 - \alpha_t) \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) - \frac{\alpha_t}{n-1} \right) \right], \quad (3.52)$$

para $j = 1, \dots, n-1$.

Já foi dada a definição do Número de Lyapunov em (3.44):

$$L = \lim_{\tau \rightarrow \infty} |f'(x_{\tau-1}) \dots f'(x_1) f'(x_0)|^{\frac{1}{\tau}}.$$

Aplicando as funções logaritmo natural e exponencial, sendo uma a inversa da outra, na definição acima, tem-se: $L = \exp \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sum_{t=0}^{\tau-1} \ln |f'(x_t)|$.

Tomando ρ como uma medida de probabilidade natural f-invariante associada ao sistema $x_{t+1} = f(x_t)$, e supondo $\ln^+ |f'(x)| \in L^1(\rho)$, pelo Teorema Ergódico de Birchoff tem-se:

$$L = \exp \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sum_{t=0}^{\tau-1} \ln |f'(x_t)| \right) = \exp \left(\int_0^\infty \ln |f'(x)| d\rho(x) \right).$$

Relembre-se também Λ_j , definido em (3.46):

$$\Lambda_j = \lim_{\tau \rightarrow \infty} |\sigma_j(\tau - 1) \dots \sigma_j(0)|^{\frac{1}{\tau}},$$

ou

$$\Lambda_j = \lim_{\tau \rightarrow \infty} |\sigma_j(\alpha_{\tau-1}) \dots \sigma_j(\alpha_0)|^{\frac{1}{\tau}},$$

para $j = 1, \dots, n - 1$. Procedendo como acima com as funções exponencial e logarítmica, vem:

$$\begin{aligned} \Lambda_j &= \exp \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \ln |\sigma_j(\alpha_{\tau-1}) \dots \sigma_j(\alpha_0)| \right) \\ &= \exp \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sum_{t=0}^{\tau-1} \ln |\sigma_j(\alpha_t)| \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Lambda = \max_j \exp \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sum_{t=0}^{\tau-1} \ln |(1 - \phi'(x_t)\eta_j(\alpha_t))| \right). \quad (3.53)$$

Se δ é uma medida de probabilidade natural, α -invariante, associada ao sistema $\alpha_{t+1} = g(\alpha_t)$ e ρ , uma medida de probabilidade natural f -invariante, associada ao sistema $f(x_{t+1}) = f(x_t)$, e supondo $\ln^+ \|I - \phi'(x)\mathbf{G}_t\| \in L^1(\delta)$ e $\ln^+ |f'(x)| \in L^1(\rho)$, pelo Teorema Ergódico de Birkhoff, resulta:

$$\begin{aligned} \Lambda_j &= \exp \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sum_{t=0}^{\tau-1} \ln |1 - \phi'(x_t)\eta_j(\alpha_t)| \right) \\ &= \exp \left(\int_o^\infty \int_0^1 \ln |1 - \phi'(x)\eta_j(\alpha)| d\delta(\alpha)d\rho(x) \right), \end{aligned}$$

para $j = 1, \dots, n - 1$. Portanto,

$$\Lambda = \max_j \exp \left(\int_o^\infty \int_0^1 \ln \left| 1 - \phi'(x) \left[1 - \left((1 - \alpha) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{\alpha}{n-1} \right) \right] \right| d\delta(\alpha)d\rho(x) \right). \quad (3.54)$$

Os estudos de Silva *et al.* [46] generalizaram os resultados de Solé e Gamarra [49], estabelecendo uma condição necessária para a estabilidade do estado sincronizado, porém considerando também como parâmetro o número de populações locais, tendo em vista que Solé e Gamarra [49] haviam restringido seus resultados a uma metapopulação composta por apenas dois sítios.

3.4 Simulações Numéricas

Nesta seção serão apresentadas algumas simulações numéricas, a fim de exemplificar os resultados algébricos obtidos na Seção 3.3, no que diz respeito ao cálculo do Número de Lyapunov e do Número de Lyapunov Transversal. Como função responsável pela dinâmica local, tem-se a função exponencial logística, também conhecida como função de Ricker, apresentada em (2.14). Será usado o software MATLAB® R2007a para cálculos e plotagens.

Para verificar o comportamento do Número de Lyapunov utiliza-se a seguinte definição:

$$L = \lim_{\tau \rightarrow \infty} |f'(x_{\tau-1}) \dots f'(x_1) f'(x_0)|^{\frac{1}{\tau}}. \quad (3.55)$$

O Número de Lyapunov está relacionado apenas com a dinâmica local e não com a migração. Logo, o gráfico do Número de Lyapunov no caso de uma metapopulação, em que a fração migratória é dependente ou independente da densidade populacional, é o mesmo. Portanto, não é necessário apresentá-lo novamente, tendo em vista que se encontra na Figura 3.1.

O cálculo do valor de Λ , como expresso em (3.54), envolve uma integral dupla, que exige duas medidas de probabilidade naturais. Tendo em vista esse impecilho, o valor de Λ será aproximado utilizando a seguinte fórmula:

$$\Lambda = \max_j \exp \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sum_{t=0}^{\tau-1} \ln \left| 1 - \phi'(x_t) \left[1 - \left((1 - \alpha_t) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{\alpha_t}{n-1} \right) \right] \right| \right). \quad (3.56)$$

Utilizar-se-ão funções semelhantes às da Seção 3.2 para exemplificar as distribuições de α , possibilitando uma efetiva comparação entre os resultados obtidos para Λ , referentes aos casos da migração dependente da densidade e o da migração independente da densidade.

Para o cálculo do valor de Λ é necessário obter o valor de $\phi'(x_t)$, que será definido de duas formas, utilizadas separadamente em cada caso:

$$\phi'(x_t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x_t < \bar{x} \\ \bar{\mu}, & x_t > \bar{x} \end{cases} \quad (3.57)$$

e

$$\phi'(x_t) = \begin{cases} \bar{\mu}, & 0 \leq x_t < \bar{x} \\ 0, & x_t > \bar{x}. \end{cases} \quad (3.58)$$

Como se está utilizando a função de Ricker como a responsável pela dinâmica local, tomar-se-á seu ponto de equilíbrio como \bar{x} , ou seja, $\bar{x} = 1$.

a) Medida δ de Dirac no ponto $\alpha = \alpha_0$:

Para esse caso (3.54) tem a forma:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \max_j \exp \int_0^\infty \int_0^1 \ln \left| 1 - \phi'(x) \left[1 - \left((1 - \alpha) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{\alpha}{n-1} \right) \right] \right| d\delta(\alpha) d\rho(x) \\ &= \max_j \exp \int_0^\infty \int_0^1 \ln \left| 1 - \phi'(x) \left[1 - \left((1 - \alpha_0) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{\alpha_0}{n-1} \right) \right] \right| d\rho(x). \end{aligned} \quad (3.59)$$

b) Probabilidade concentrada em dois pontos p, q (período 2):

Agora toma-se a medida δ partida em dois valores iguais a $\frac{1}{2}$ nos pontos $\alpha = p$ e $\alpha = q$. Isso corresponde à solução de período 2. Aplicando essa situação em (3.54) tem-se:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \max_j \exp \left(\int_0^\infty \int_0^1 \ln \left| 1 - \phi'(x) \left[1 - \left((1 - \alpha) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{\alpha}{n-1} \right) \right] \right| d\delta(\alpha) d\rho(x) \right) \\ &= \max_j \exp \left(\int_0^\infty \ln \left| 1 - \phi'(x) \left[1 - \left((1 - p) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{p}{n-1} \right) \right] \right|^{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\quad \left. \ln \left| 1 - \phi'(x) \left[1 - \left((1 - q) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{q}{n-1} \right) \right] \right|^{\frac{1}{2}} d\rho(x) \right). \end{aligned} \quad (3.60)$$

c) Probabilidade concentrada em 4 pontos p, p_1, q_1, q (período 4):

Ao invés de tomar um ou dois valores para α , tomam-se aqui quatro, $\alpha = p$, $\alpha = p_1$, $\alpha = q_1$ e $\alpha = q$ e a medida unitária δ concentra-se em valores iguais nesses

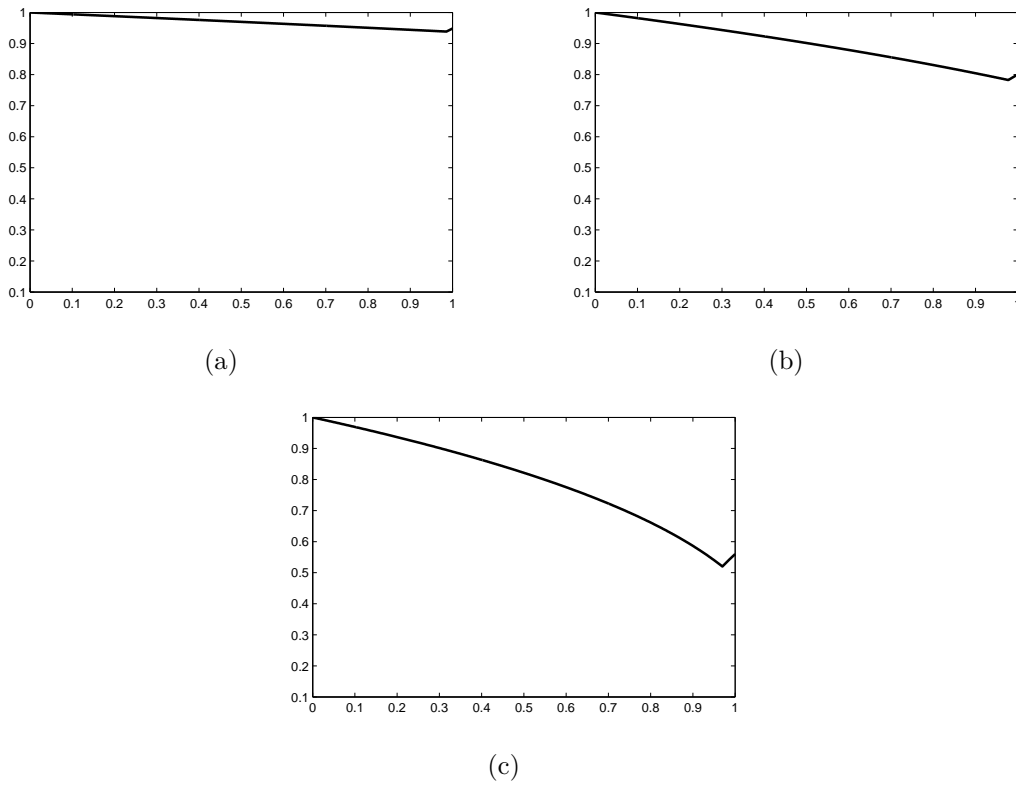


Figura 3.10: $\Lambda \times \mu$ para $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1, \delta$, medida de Dirac em α_0 , $\phi'(x_t)$ dada por (2.17), $r = 3.8$, $x_0 = 0.1$, gráficos construídos pelo algoritmo `lambdamd1` (a) $\alpha_0 = 0, 15$; (b) $\alpha_0 = 0, 5$; (c) $\alpha_0 = 0, 85$.

pontos. O valor de Λ em (3.54) passa a ser:

$$\begin{aligned}
 \Lambda &= \max_j \exp \int_0^\infty \int_0^1 \ln \left| 1 - \phi'(x) \left[1 - \left((1 - \alpha) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{\alpha}{n-1} \right) \right] \right| d\delta(\alpha) d\rho(x) \\
 &= \max_j \exp \left(\int_0^\infty \ln \left| 1 - \phi'(x) \left[1 - \left((1 - p) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{p}{n-1} \right) \right] \right|^{\frac{1}{4}} + \right. \\
 &\quad \ln \left| 1 - \phi'(x) \left[1 - \left((1 - p_1) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{p_1}{n-1} \right) \right] \right|^{\frac{1}{4}} + \\
 &\quad \ln \left| 1 - \phi'(x) \left[1 - \left((1 - q_1) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{q_1}{n-1} \right) \right] \right|^{\frac{1}{4}} + \\
 &\quad \left. \ln \left| 1 - \phi'(x) \left[1 - \left((1 - q) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{q}{n-1} \right) \right] \right|^{\frac{1}{4}} d\rho(x) \right).
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

d) Probabilidade distribuída contínua e uniformemente num intervalo $[p; q]$:

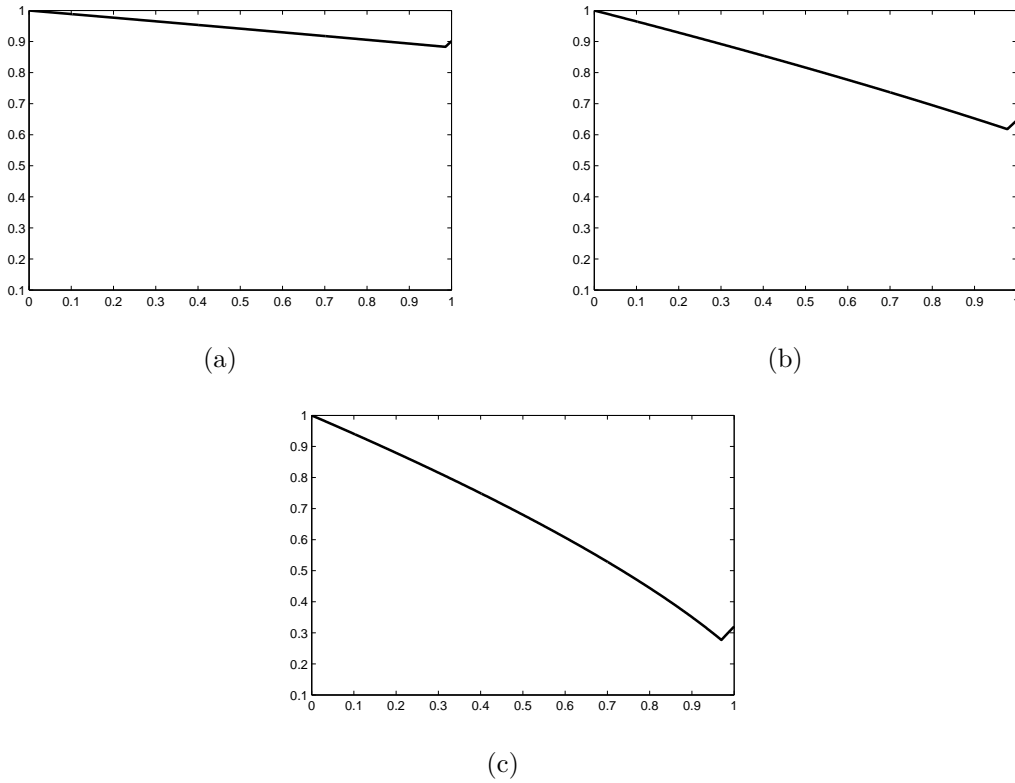


Figura 3.11: $\Lambda \times \mu$ para $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1$, δ , medida de Dirac em α_0 , $\phi'(x_t)$ dada por (2.18), $r = 3.8$, $x_0 = 0.1$, gráficos construídos pelo algoritmo `lambdamd11` (a) $\alpha_0 = 0,15$; (b) $\alpha_0 = 0,5$; (c) $\alpha_0 = 0,85$.

Para um quarto exemplo, toma-se uma função constante, $\alpha \mapsto \frac{1}{q-p}$, $\alpha \in [p; q]$, para exemplificar a distribuição contínua e uniforme de δ num intervalo $[p; q]$.

$$\Lambda = \max_j \exp \left(\int_0^\infty \int_0^1 \ln \left| 1 - \phi'(x) \left[1 - \left((1 - \alpha) \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - \frac{\alpha}{n-1} \right) \right] \right| d\delta(\alpha) d\rho(x) \right) \quad (3.62)$$

Observa-se nos gráficos das Figuras 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16 e 3.17 que o valor de Λ decresce à medida que μ cresce independentemente da função responsável pela migração ou do tipo de distribuição de valores atribuídos ao coeficiente α . Porém, as Figuras 3.10, 3.12, 3.14 e 3.16 foram construídas utilizando $\phi'(x_t)$ dada em (2.17), o que implicou uma dificuldade maior para a sincronização, pois verificam-se aí valores de Λ superiores em cada caso, em relação aos das Figuras 3.11, 3.13, 3.15 e 3.17.

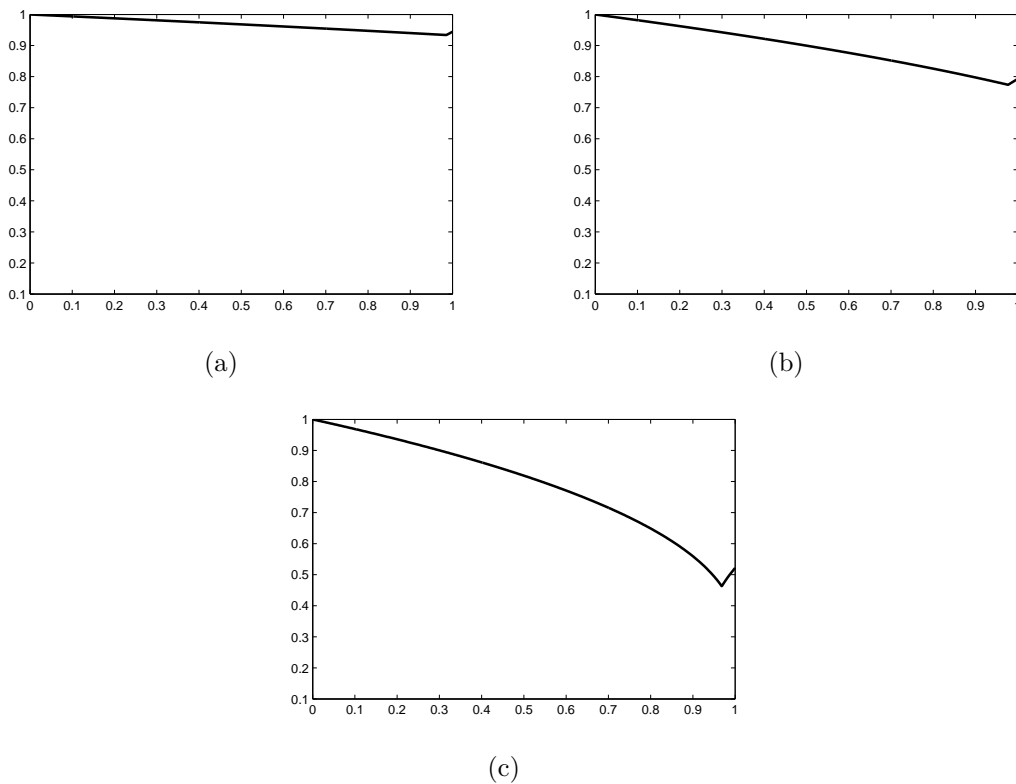


Figura 3.12: $\Lambda \times \mu$ para probabilidade concentrada em dois pontos, $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1$, $\phi'(x_t)$ dada por (2.17), $r = 3.8$, $x_0 = 0.1$, gráficos construídos pelo algoritmo `lambdamd2` (a) $p = 0,05$, $q = 0,25$; (b) $p = 0,4$, $q = 0,6$; (c) $p = 0,75$, $q = 0,95$.

Nota-se ainda que, na Figura 3.10 caso (a), os valores de Λ são mais elevados, devido a uma topologia da rede que restringe as conexões entre os sítios. À medida que essas conexões aumentam, como mostra o caso (b), Λ decresce, o que sinaliza maior chance de sincronização da metapopulação em questão. No caso (c), fica ainda mais evidente a influência da fração migratória e do número de sítios conectados para obter sincronização. Esse mesmo comportamento é observado nas Figuras 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16 e 3.17.

A Figura 3.18 apresenta os gráficos de $\Lambda \times \mu$, com dependência e independência da densidade populacional no mesmo sistema de eixos. Nos seis casos a linha contínua indica dependência da densidade e a pontilhada, a independência. Em todos os casos, observa-se que a sincronização se torna mais possível quando se tem independência da densidade populacional, o que é expresso pelo fato de as linhas

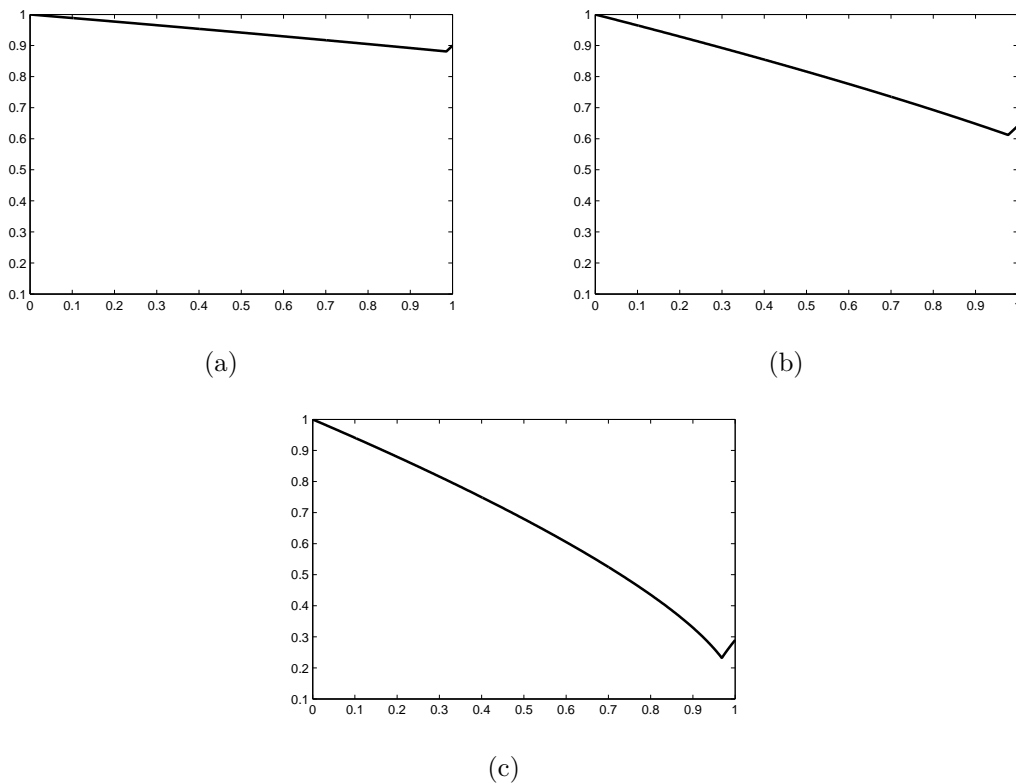


Figura 3.13: $\Lambda \times \mu$ para probabilidade concentrada em dois pontos, $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1$, $\phi'(x_t)$ dada por (2.18), $r = 3.8$, $x_0 = 0.1$, gráficos construídos pelo algoritmo `lambdamd21` (a) $p = 0,05$, $q = 0,25$; (b) $p = 0,4$, $q = 0,6$; (c) $p = 0,75$, $q = 0,95$.

pontilhadas se situarem abaixo das contínuas. Essas conclusões vão ao encontro dos estudos de Earn [13], que analisa o mecanismo de dispersão densidade dependente como um redutor do acoplamento em comparação com o mecanismo de densidade independente. Sendo assim natural esperar menos sincronização.

Os estudos de Sushchik *et al.* [50] trazem o conceito de bacia de atração, que consiste num conjunto de condições iniciais específicas para resolução de determinado problema. Pode-se aplicar essa definição na desigualdade (3.17), pois essa pode não ser válida para todo x_0 , então a estabilidade transversal será válida apenas para uma bacia de atração. Cazelles [8], por sua vez, trabalhou com múltiplos atratores, imprevisíveis e com bacias de atração do tipo de *Riddle*. As bacias de atração de Riddle são bacias com fronteiras de fractal, em que todo ponto numa bacia de atração está arbitrariamente próximo de um ponto de outra bacia. Quase todo ponto

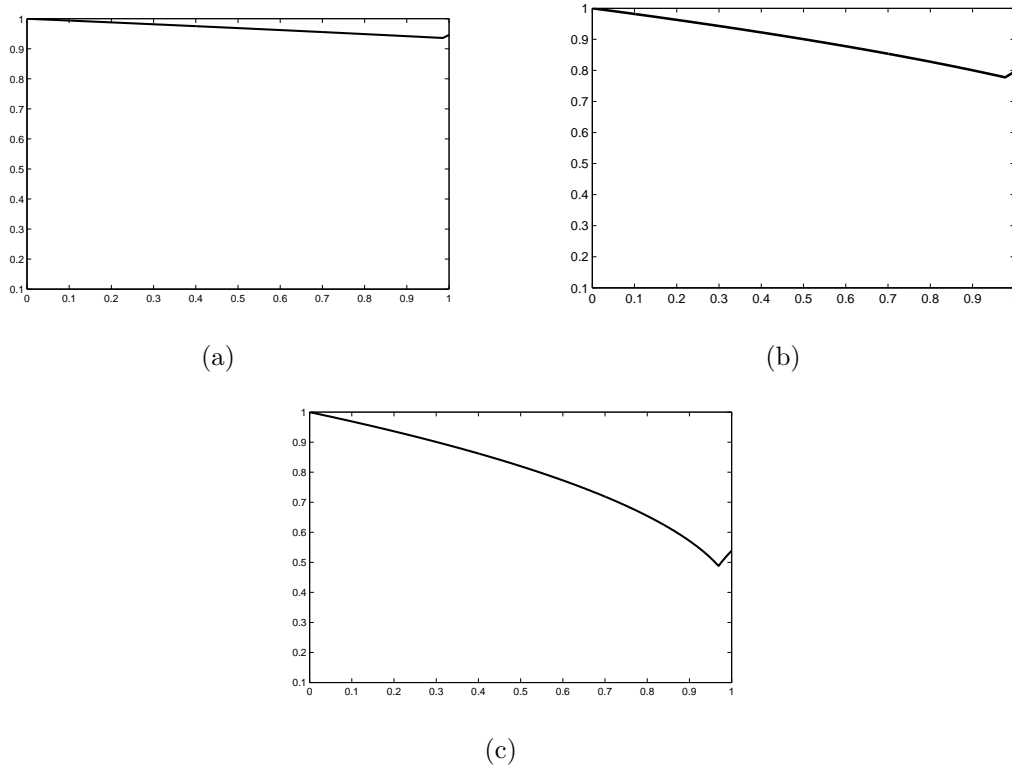
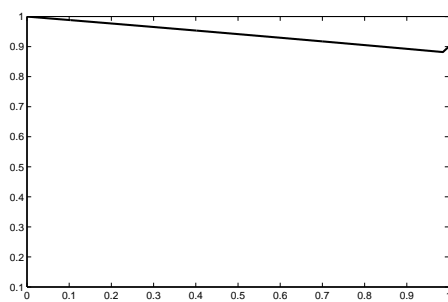
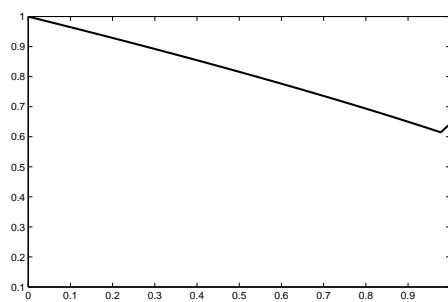


Figura 3.14: $\Lambda \times \mu$ para probabilidade concentrada em quatro pontos, $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1$, $\phi'(x_t)$ dada por (2.17), $p_1 = (\frac{q-p}{3}) + p$, $q_1 = q - (\frac{q-p}{3})$, $r = 3.8$, $x_0 = 0.1$, gráficos construídos pelo algoritmo `lambdamd3` (a) $p = 0,05$, $q = 0,25$; (b) $p = 0,4$, $q = 0,6$; (c) $p = 0,75$, $q = 0,95$.

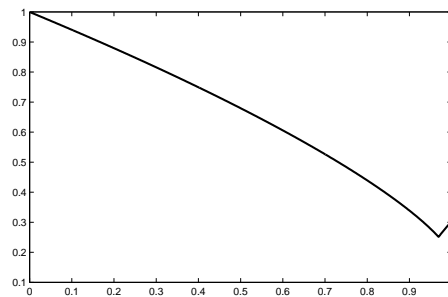
(condição inicial) numa bacia está sobre a fronteira de fractal, com a implicação de que pequenas perturbações nas condições iniciais podem alterar o atrator final da dinâmica. Como resultado, é impossível prever os atratores finais da dinâmica.



(a)

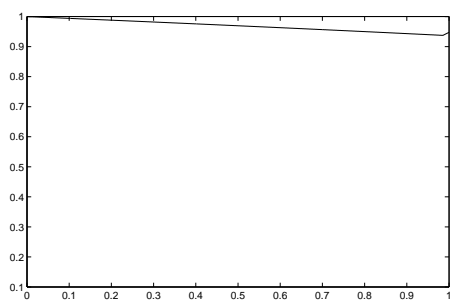


(b)

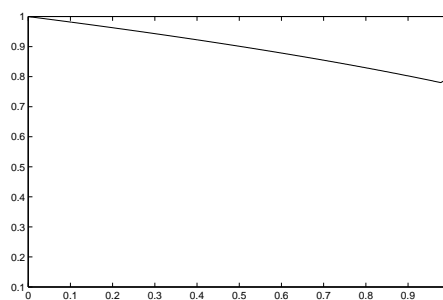


(c)

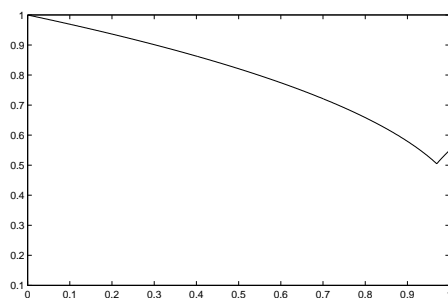
Figura 3.15: $\Lambda \times \mu$ para probabilidade concentrada em quatro pontos, $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1$, $\phi'(x_t)$ dada por (2.18), $p_1 = (\frac{q-p}{3}) + p$, $q_1 = q - (\frac{q-p}{3})$, $r = 3.8$, $x_0 = 0.1$, gráficos construídos pelo algoritmo `lambdamd31` (a) $p = 0,05$, $q = 0,25$; (b) $p = 0,4$, $q = 0,6$; (c) $p = 0,75$, $q = 0,95$.



(a)

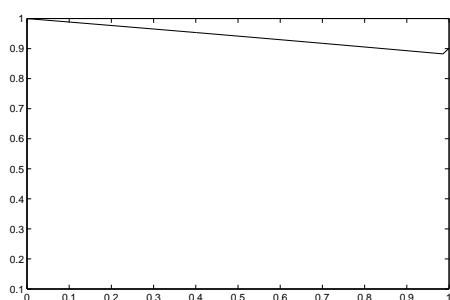


(b)

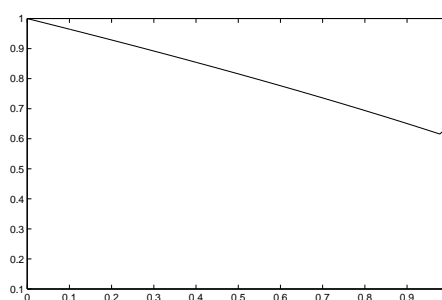


(c)

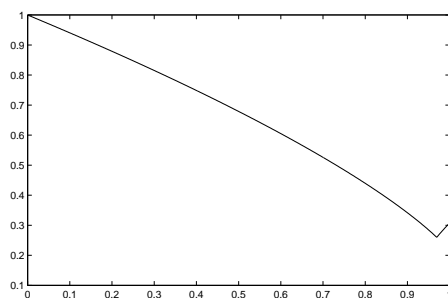
Figura 3.16: $\Lambda \times \mu$ para probabilidade distribuída contínua e uniformemente num intervalo, $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1$, $\phi'(x_t)$ dada por (2.17), $r = 3.8$, $x_0 = 0.1$, gráficos construídos pelo algoritmo `lambdamd4` (a) $p = 0,05$, $q = 0,25$; (b) $p = 0,4$, $q = 0,6$; (c) $p = 0,75$, $q = 0,95$.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.17: $\Lambda \times \mu$ para para probabilidade distribuída contínua e uniformemente num intervalo, $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1$, $\phi'(x_t)$ dada por (2.18), $r = 3.8$, $x_0 = 0.1$, gráficos construídos pelo algoritmo `lambdamd41` (a) $p = 0,05$, $q = 0,25$; (b) $p = 0,4$, $q = 0,6$; (c) $p = 0,75$, $q = 0,95$.

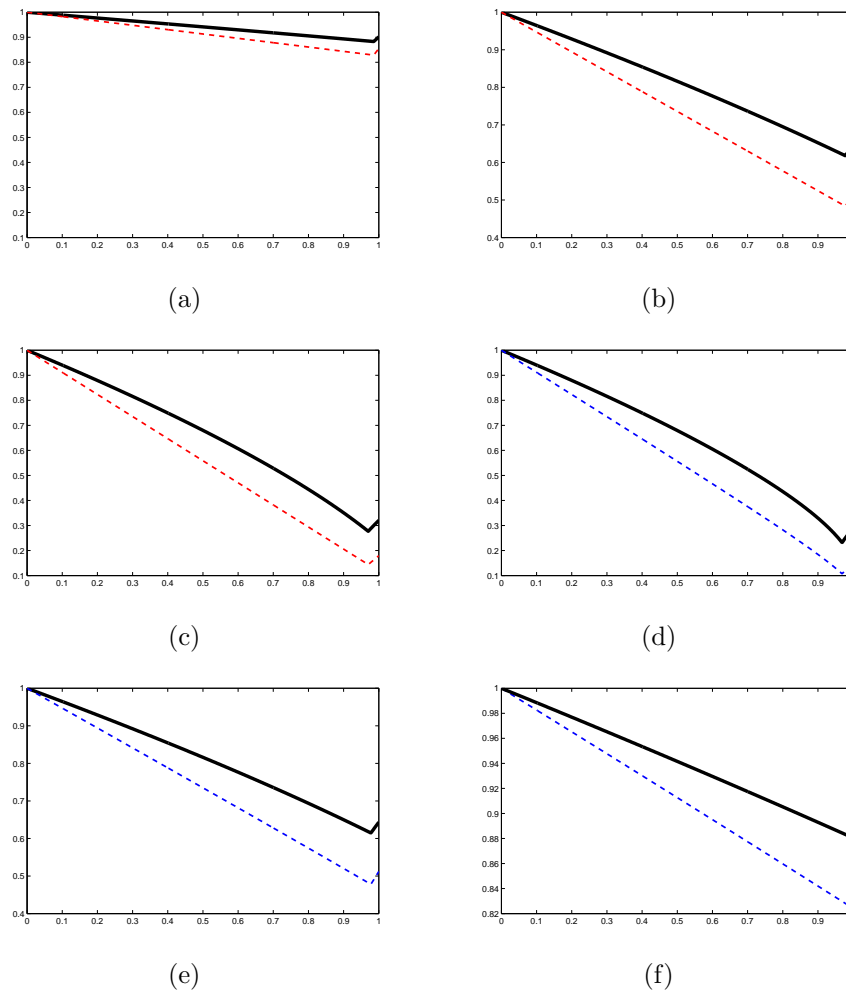


Figura 3.18: $\Lambda \times \mu$ para $n = 30$, $0 \leq \mu \leq 1$, função migratória dada por (2.18), $r = 3.8$, $x_0 = 0.1$ (a) medida de Dirac em α_0 $\alpha = 0,15$; (b) medida de Dirac em α_0 $\alpha = 0,5$; (c) medida de Dirac em α_0 $\alpha = 0,85$; (d) Probabilidade distribuída em dois pontos $p = 0,75$ e $q = 0,95$; (e) Probabilidade distribuída em 4 pontos $p = 0,4$ e $q = 0,6$; (f) Probabilidade distribuída uniformemente contínua e uniformemente no intervalo $[0,05; 0,25]$.

4 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Considere-se uma metapopulação composta por n sítios, que apresentam condições para sobrevivência e reprodução da espécie. A cada instante a população local passa por dois processos denominados dinâmica local e migração, nessa ordem para não ocorrerem resultados improváveis do ponto de vista biológico. Realizada a dinâmica local, dá-se início ao processo migratório, que está relacionado com a topologia da rede. Neste trabalho optou-se por definir os vizinhos de cada sítio através de uma combinação convexa de duas matrizes, uma que representa um anel cíclico de conexão local e outra, um anel cíclico de conexão global. Além disso, foi necessário definir o tipo de fração migratória, especificamente, se dependente ou independente da densidade populacional de cada sítio. Tendo definido todos esses parâmetros, chegou-se ao objetivo desse trabalho, observar, feitas as hipóteses iniciais, se há ou não sincronização, e, o mais importante, verificar quais as condições que favorecem esse processo.

No início do trabalho fez-se uma abordagem das características gerais da metapopulação de acordo com as condições propostas. Além disso, analisou-se as regiões de estabilidade do equilíbrio homogêneo. Ainda, nesse capítulo apresentou-se uma seção ilustrativa de um caso a variáveis contínuas envolvendo duas espécies, relacionadas pela função de Lotka-Volterra. Nesse caso, os gráficos resultantes deram a impressão de se ter sincronização, quando os sítios iniciaram com populações de presas e predadores bem próximos.

O foco desse trabalho estava voltado a análise da influência de ser a matriz de acoplamento obtida através da combinação convexa de duas matrizes circulantes, e de ser a fração migratória dependente ou não da densidade populacional na obtenção de sincronização em uma dada metapopulação. Observou-se que, quanto maior é o número de conexões entre os sítios e à medida que a fração migratória aumenta, tem-se maior probabilidade de haver sincronização. Outro fato importante é que, para as

funções escolhidas para gerenciar a migração, quando se tem migração dependente da densidade da população, a probabilidade de sincronização é menor do que quando não há essa dependência, como pode ser comprovado nas simulações numéricas.

Neste trabalho, usou-se como modelo uma metapopulação composta por apenas uma espécie, sem considerar faixa etária, morte durante o processo de migração ou estrutura etária. Esses fatores podem ser considerados em trabalhos futuros. Além disso, pode-se aprofundar os estudos sobre corredores, que de acordo com a bibliografia utilizada, ainda apresenta muitas divergências e causam dúvidas sobre a sua verdadeira eficácia.

Referências Bibliográficas

- [1] AARS, J., AND IMS, R. A. The effect of habitat corridors on rates of transfer and interbreeding between vole demes. *Ecology* (1999), 1648–1656.
- [2] ALLEN, J., SCHAFFER, W. M., AND ROSKO, D. Chaos reduces species extinction by amplifying local population noise. *Nature* (1993), 229–232.
- [3] ALLIGOOD, K., SAUER, T. D., AND YORKE, J. A. *Chaos An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, 1996.
- [4] BEIER, P., AND NOSS, R. F. Do habitat corridors provide connectivity? *Conservation Biology* (1998), 1241–1252.
- [5] BLASIUS, B., HUPPERT, A., AND STONE, L. Complex dynamics and phase synchronization in spatially extended ecological systems. *Nature* (1999), 354–359.
- [6] BLASIUS, B., AND STONE, L. Chaos and phase synchronization in ecological systems. *Int. J. Bif. Chaos* (2000), 2361–2380.
- [7] BRIGHAM, E. O. *The fast Fourier transform and its applications*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall., 1988.
- [8] CAZELLES, B. Dynamics with riddled basins of attraction in models of interacting populations. *Chaos, Solitons and Fractals* (2001), 301–311.
- [9] CAZELLES, B., BOTTANI, S., AND STONE, L. Unexpected coherence and conservation. *Proc. R. Soc. Lond. B268* (2001), 2595–2602.
- [10] DAMSCHEN, E. I., BRUDVIG, L. A., HADDAD, N. M., LEVEY, D. J., ORROCK, J. L., AND TEWKSBURY, J. J. The movement ecology and dynamics of plant communities in fragmented landscapes. *Proc National Academy of Sciences of the USA* (2008), 19078–19083.
- [11] DAVIS, P. J. *Circulant Matrices*. AMS Chelsea Publishing, 2009.

- [12] DOEBELI, M. Dispersal and dynamics. *Theoretical Population Biology* (1995), 82–106.
- [13] EARN, D. J. D., LEVIN, S. A., AND ROHANI, P. Coherence and conservation. *Science* (2000), 1360–1364.
- [14] ECKMANN, J. P., AND RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. Mod. Phys.* (1985), 617–656.
- [15] FALCY, M. R., AND ESTADES, C. F. Effectiveness of corridors relative to enlargement of habitat patches. *Conservation Biology* (2007), 1341–1346.
- [16] GALLIAN, J., AND MIFFLIN, H. *Contemporary Abstract Algebra*. 1998.
- [17] GIORDANI, F. T. A instabilidade causada pela migração dependente da densidade em metapopulações. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2003.
- [18] GIORDANI, F. T., AND DA SILVA, J. A. L. Sincronização em metapopulações com hierarquia na dinâmica local. *TEMA: Tend. Mat. Apl. Comput.* (2007), 249–258.
- [19] GOLUB, G. H., AND LOAN, C. F. V. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [20] GONZALEZ, A., LAWTON, J. H., GILBERT, F. S., BLACKBURN, T. M., AND EVANS-FREKE, I. Metapopulation dynamics, abundance, and distribution in a microecosystem. *Science* (1998), 2045–2047.
- [21] HADDAD, N. M. Finding the corridor more traveled. *Proc Natl Acad Sciences USA* (2008), 19569–19570.
- [22] HADDAD, N. M., BOWNE, D. R., CUNNINGHAM, A., DANIELSON, B. J., LEVEY, D. J., SARGENT, S., AND SPIRA, T. Corridor use by diverse taxa. *Ecology* (2003), 609–615.

- [23] HANSKI, I., AND GILPIN, M. E. Metapopulation biology: Ecology genetics and evolution. *London: Academic Press* (1997).
- [24] HASSELL, M. P. Density-dependence in single-species populations. *J. Anim. Ecology* (1975), 283–295.
- [25] HASSELL, M. P., LAWTON, J. H., AND MAY, R. M. Patterns of dynamical behavior in single species populations. *J. Anim. Ecology* (1976), 471–486.
- [26] HASSELL, M. P., MIRAMONTES, O., ROHANI, P., AND MAY, R. M. Appropriate formulations for dispersal in spatially structured models: comments on bascompté e solé. *J. Anim. Ecology* (1995), 662–664.
- [27] HASTINGS, A. Complex interactions between dispersal and dynamics: lessons from coupled logistic equations. *Ecology* (1993), 1362–1372.
- [28] HEINO, M., KAITALA, V., RANTA, E., AND LINDSTRÖM, J. Synchronous dynamics and rates of extinction in spatially structured populations. *Proc. R. Soc. Lond.* (1997), 481–486.
- [29] IMS, R. A., AND YOCCOZ, N. G. The study of transfer processes in metapopulations: emigration, dispersal and colonization. in: *Metapopulation dynamics: ecology, genetics and colonization*(ed. Hanski, I. A. and Gilpin, M. E.). *Academic Press, San Diego* (1997).
- [30] JANSEN, V. A. A., AND LLOYD, A. L. Local stability analysis of spatially homogeneous solutions of multi-patch systems. *J. Math. Biol.* (2000), 232–252.
- [31] LANCASTER, P., AND TISMENETSKY, M. *The Theory of Matrices*. Academic Press, 1985.
- [32] LEVINS, R. Some demographic and genetic consequences of environmental heterogeneity for biological control. *Bulletin of the Entomological Society of America* (1969), 237–240.

- [33] LIEBHOLD, A., KOENING, W. D., AND BJORNSTAD, O. N. Spatial synchrony in population dynamics. *Ecol. Evol. Syst.* (2004), 467–490.
- [34] LLOYD, A. L. The couple logistic map: A simple model for effects of spatial heterogeneity on population dynamics. *Theor. Pop. Biol.* (1995), 217–230.
- [35] LLOYD, A. L., AND MAY, R. M. Synchronicity, chaos and population cycles: spatial coherence in an uncertain world. *TREE* (1999), 417–418.
- [36] MANICA, E. Controle de caos em uma cadeia trófica de três espécies descrita através do modelo de hasting e powell. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2000.
- [37] MARCUS, M., AND MINC, H. *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*. Dover Publicações, 1992.
- [38] MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature* (1976), 459–467.
- [39] RAMPEL, A. L. Instabilidade de *Turing* e sincronismo em redes de populações acopladas. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2007.
- [40] RANTA, E., KAITALA, V., AND LUNDBERG, P. Synchronicity in population systems: cause and consequence mixed. *TREE* (1999), 400–401.
- [41] ROHANI, P., MAY, R. M., AND HASSELL, M. P. Metapopulations and equilibrium stability: The effects os spatial structure. *J. Theor. Biol.* (1996), 97–109.
- [42] RUXTON, G. D. Density-dependent migration and stability in a system of linked populations. *Bulletin of Mathematical Biology* (1996), 643–660.
- [43] SILVA, J. A. L., BARRIONUEVO, J. A., AND GIORDANI, F. T. Synchronism in population networks with non linear coupling. *Nonlinear Analysis - Real World Applications* (2009), 1005–1016.

- [44] SILVA, J. A. L., DE CASTRO, M. L., AND JUSTO, D. A. R. Estabilidade do estado homogêneo em redes de populações acopladas. *Tema 1* (2000), 475–484.
- [45] SILVA, J. A. L., DE CASTRO, M. L., AND JUSTO, D. A. R. Stability in a metapopulation model with density-dependent dispersal. *Bulletin of Mathematical Biology* (2001), 485–505.
- [46] SILVA, J. A. L., DE CASTRO, M. L., AND JUSTO, D. A. R. Synchronism in a metapopulation model. *Bulletin of Mathematical Biology* (2006), 337–349.
- [47] SILVA, J. A. L., AND GIORDANI, F. T. Density-dependent migration and synchronism in metapopulations. *Bulletin of Mathematical Biology* (2006), 451–465.
- [48] SIMBERLOFF, D., FARR, J. A., COX, J., AND MEHLMAN, D. W. Movement corridors: conservation bargains or poor investments? *Conservation Biology* (1992), 493–504.
- [49] SOLÉ, R. V., AND GAMARRA, J. G. P. Chaos, dispersal and extinction in coupled ecosystems. *J. Theor. Biol.* (1998), 539–541.
- [50] SUSHCHIK, M. M., RULKOV, N. F., AND ABARBANEL, H. D. I. Robustness and stability of synchronized chaos: An illustrative model. *IEEE Trans. on Circ. and Systems* (1997), 867–873.
- [51] SUTCLIFFE, O. L., AND THOMAS, C. D. Open corridors appear to facilitate dispersal by ringlet butterflies (*Aphantopus hyperantus*) between woodland clearing. *Conservation Biology* (1996), 1359–1365.
- [52] YLIKARJULA, J., ALAJA, S., LAARKSO, J., AND TESAR, D. Effects of patch number and dispersal patterns on population dynamics and synchrony. *J. Theor. Biol.* (2000), 377–387.

5 APÊNDICE

```

%*****
function explog(r1,r2)
%Este programa produz o gráfico da função exponencial logística para
%valores de r desejados.
%Entrada:
%r1 e r2, dois valores para esse parâmetro.
%Saída: Figura 2.2 (a)
%Janeiro/ 2010, Sabrina Arsego

for i=0:0.001:2
    aux=i*exp(r1*(1-i));
    aux1=i*exp(r2*(1-i));
    plot(i,aux,'.')
    plot(i,aux1,'*')
    hold on
end
for i=0:0.01:2
    plot(i,i,'-')
end
%*****

%*****
function diagramabifurcacao(x0)

%Este programa produz o diagrama de bifurcação da função de Ricker.
%Entrada:
%xo, valor inicial.
%Saída: Figura 2.2 (b)

```

```

%Janeiro/ 2010, Sabrina Arsego

x(1)=x0;
for a=0:0.01:4
    for n=2:10000
        x(n)=x(n-1)*exp(a*(1-x(n-1)));
    end
    plot(a,x(9950:10000))
    hold on
end
%*****

%*****

function logistica(r1,r2)

%Este programa produz o gráfico da função exponencial logística para
%valores de r desejados.
%Entrada:
%r1 e r2, dois valores para esse parâmetro.
%Saída: Figura 2.4 (a)
%Janeiro/ 2010, Sabrina Arsego

for i=0:0.001:2
    aux=i*r1*(1-i);
    aux1=i*r2*(1-i);
    plot(i,aux,'r.')
    plot(i,aux1,'*')
    hold on
end
for i=0:0.01:2
    plot(i,i,'-')

```



```

end
%*****

%*****

function diagramabifurcacao1(x0)

%Este programa produz o diagrama de bifurcação da função logística.
%Entrada:
%xo, valor inicial.
%Saída: Figura 2.4(b)
%Janeiro/ 2010, Sabrina Arsego

x(1)=x0;
for a=0:0.01:4
    for n=2:10000
        x(n)=(a*x(n-1))*(1-x(n-1));
    end
    plot(a,x(9950:10000))
    hold on
end
%*****

%*****

function metapopulacaomigracaocte(f,m,x0,r,N,n,a0,y,z,q)

%Este programa produz os gráficos da densidade populacional de uma metapopulação
%de acordo com um critério pré-estabelecido e taxa migratória independente
%da densidade populacional.
%Entradas:
%f, função responsável pela dinâmica local.
%m, fração migratória.

```

```

%x0, condição inicial para o número de indivíduos.
%r, é a taxa de reprodução utilizada na função de Ricker.
%N, é o número de iterações.
%n, é o número de sítios.
%a, coeficiente da combinação convexa.
%y, determina a regra para elaboração do gráfico
%z,q, parâmetros para o cálculo das populações iniciais de cada sítio.
%Saída: Figura 2.5
%Janeiro,2010/Sabrina Arsego.

%Gerando as populações iniciais de cada sítio.
rn=z+(q-z).*rand(1,n);
%Atribuindo a cada sítio a sua população inicial.
for i=1:n
    x(i,1)=x0+rn(i);
end
%Formação da matriz Cij: matriz de configuração ou de iteração.
%Modo de iteração total.
for i=1:n
    for j=1:n
        if i==j
            Cg(i,j)=0;
        else
            Cg(i,j)=1/(n-1);
        end
    end
end
end
%Gerando a matriz localmente conectada.
for i=1:n
    for j=1:n

```

```

        if (i==j)
            Cl(i,j)=0;
        elseif i==j+1
            Cl(i,j)=1/2;
        elseif i==j-1
            Cl(i,j)=1/2;
        end
    end
end
Cl(1,n)=1/2;
Cl(n,1)=1/2;
if n==2
    Cl(1,2)=1;
    Cl(2,1)=1;
end
%Gerando as novas populações a cada iteração.
a(1)=a0;
for j=2:N
    a(j)=a(j-1)*4*(1-a(j-1));
    for k=1:n
        for c=1:n
            C(k,c)=(1-a(j))*Cl(k,c)+a(j)*Cg(k,c);
        end
    end
end
%Primeira Etapa: Reprodução e Sobrevivência.
for i=1:n
    x(i,j)=feval(f,r,x(i,j-1));
end
%Segunda Etapa: Migração
for k=1:n

```

```

        s=0;
        for b=1:n
            s=s+(C(k,b)*m*x(b,j));
        end
        %Unindo as duas etapas
        aux2=(1-m)*x(k,j)+s;
        x1(k,j)=aux2;
    end
    for l=1:n
        x(l,j)=x1(l,j);
    end
end
for i=1:n
    h=1;
    for j=(N-100):N
        if (x(i,j))>=y
            p(i,h)=2;
        else
            p(i,h)=0;
        end
        h=h+1;
    end
end
end
image(p)
*****

%*****

function metapopulacao(f,m,x0,r,N,n,a0,y,z,q)

```

%Este programa produz os gráficos da densidade populacional de uma metapopulação
%de acordo com um critério pré-estabelecido e taxa migratória dependente

```

%da densidade populacional.
%Entrada:
%f, função responsável pela dinâmica local;
%m, fração migratória;
%x0, densidade populacional inicial;
%r, taxa de reprodução, parâmetro da função de Ricker;
%N, número de iterações;
%n, número de sítios;
%a, coeficiente da combinação convexa;
%y, determina a regra para elaboração do gráfico;
%z,q, parâmetros para o cálculo das populações iniciais de cada sítio;
%Saída: Figura 2.6
%Janeiro,2010/ Sabrina Arsego

%Gerando as populações iniciais de cada sítio.
rn=z+(q-z).*rand(1,n);
%Atribuindo a cada sítio a sua população inicial.
for i=1:n
    x(i,1)=x0+rn(i);
end
%Formação da matriz Cij: matriz de configuração ou de iteração.
%Modo de iteração total.
for i=1:n
    for j=1:n
        if i==j
            Cg(i,j)=0;
        else
            Cg(i,j)=1/(n-1);
        end
    end
end
end

```

```

end
%Gerando a matriz localmente conectada.
for i=1:n
    for j=1:n
        if (i==j)
            Cl(i,j)=0;
        elseif i==j+1
            Cl(i,j)=1/2;
        elseif i==j-1
            Cl(i,j)=1/2;
        end
    end
end
end
Cl(1,n)=1/2;
Cl(n,1)=1/2;
if n==2
    Cl(1,2)=1;
    Cl(2,1)=1;
end
%Gerando as novas populações a cada iteração.
a(1)=a0;
for j=2:N
    a(j)=a(j-1)*4*(1-a(j-1));
    for k=1:n
        for c=1:n
            C(k,c)=(1-a(j))*Cl(k,c)+a(j)*Cg(k,c);
        end
    end
end
%Primeira Etapa: Reprodução e Sobrevivência.
for i=1:n

```

```

        x(i,j)=feval(f,r,x(i,j-1));
    end
    %Segunda Etapa: Migração dependente da densidade
    for d=1:n
        if x(d,j)>1
            mi(d,j)=m;
        else
            mi(d,j)=0;
        end
    end
    for k=1:n
        s=0;
        for b=1:n
            s=s+(C(k,b)*mi(b,j)*x(b,j));
        end
        %Unindo as duas etapas
        aux2=(1-mi(k,j))*x(k,j)+s;
        x1(k,j)=aux2;
    end
    for l=1:n
        x(l,j)=x1(l,j);
    end
end
for i=1:n
    h=1;
    for j=N-100:N
        if (x(i,j))>=y
            p(i,h)=2;
        else
            p(i,h)=0;
        end
    end
end

```

```

        end
        h=h+1;
    end
end
image(p)
%*****
%*****
function metapopulacao1(f,m,x0,r,N,n,a0,y,z,q)

%Este programa produz os gráficos da densidade populacional de uma metapopulação
%de acordo com um critério pré-estabelecido e taxa migratória dependente
%da densidade populacional.
%Entrada:
%f, função responsável pela dinâmica local;
%m, fração migratória;
%x0, densidade populacional inicial;
%r, taxa de reprodução, parâmetro da função de Ricker;
%N, número de iterações;
%n, número de sítios;
%a, coeficiente da combinação convexa;
%y, determina a regra para elaboração do gráfico;
%z,q, parâmetros para o cálculo das populações iniciais de cada sítio;
%Saída: Figura 2.7
%Janeiro,2010/ Sabrina Arsego

%Gerando as populações iniciais de cada sítio.
rn=z+(q-z).*rand(1,n);
%Atribuindo a cada sítio a sua população inicial.
for i=1:n
    x(i,1)=x0+rn(i);

```



```
end
%Formação da matriz Cij: matriz de configuração ou de iteração.
%Modo de iteração total.
for i=1:n
    for j=1:n
        if i==j
            Cg(i,j)=0;
        else
            Cg(i,j)=1/(n-1);
        end
    end
end
end
%Gerando a matriz localmente conectada.
for i=1:n
    for j=1:n
        if (i==j)
            Cl(i,j)=0;
        elseif i==j+1
            Cl(i,j)=1/2;
        elseif i==j-1
            Cl(i,j)=1/2;
        end
    end
end
end
Cl(1,n)=1/2;
Cl(n,1)=1/2;
if n==2
    Cl(1,2)=1;
    Cl(2,1)=1;
end
```

```

%Gerando as novas populações a cada iteração.
a(1)=a0;
for j=2:N
    a(j)=a(j-1)*4*(1-a(j-1));
    for k=1:n
        for c=1:n
            C(k,c)=(1-a(j))*Cl(k,c)+a(j)*Cg(k,c);
        end
    end
    %Primeira Etapa: Reprodução e Sobrevivência.
    for i=1:n
        x(i,j)=feval(f,r,x(i,j-1));
    end
    %Segunda Etapa: Migração dependente da densidade
    for d=1:n
        if x(d,j)<1
            mi(d,j)=m;
        else
            mi(d,j)=0;
        end
    end
    end
    for k=1:n
        s=0;
        for b=1:n
            s=s+(C(k,b)*mi(b,j)*x(b,j));
        end
        %Unindo as duas etapas
        aux2=(1-mi(k,j))*x(k,j)+s;
        x1(k,j)=aux2;
    end
end

```

```

    for l=1:n
        x(l,j)=x1(l,j);
    end
end
for i=1:n
    h=1;
    for j=N-100:N
        if (x(i,j))>=y
            p(i,h)=2;
        else
            p(i,h)=0;
        end
        h=h+1;
    end
end
image(p)

%*****
function predadorpresa3(f1,f2,y1,y2,h,alfa,N)

%Este programa produz os gráficos de presas x predadores, tempo x presas,
%tempo x predadores, no caso onde não há migração.
%Entrada:
%f1, f2, funções escritas na forma de string 'f', definida em m-file, que
%regem o comportamento das presas e dos predadores respectivamente.
%h, passo.
%y1, população inicial das presas.
%y2, população inicial dos predadores.
%alfa, parâmetro da fórmula dos predadores.
%N, número de iterações desejadas.
%Saída: Figuras 2.8, 2.9, 2.10, 2.11.

```

```

%Janeiro/2010, Sabrina Arsego
%OBS: Utilizou-se o método de Runge-Kutta 2.

u1(1)=y1;
v1(1)=y2;
for j=1:N
    k1=feval(f1,u1(j),v1(j));
    l1=feval(f2,alfa,u1(j),v1(j));
    k2=feval(f1,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1);
    l2=feval(f2,alfa,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1);
    u1(j+1)=u1(j)+(h/2)*(k1+k2);
    v1(j+1)=v1(j)+(h/2)*(l1+l2);
end
t=N-2000:N;
plot(u1(t),v1(t))
figure
plot(t,u1(t))
figure
plot(t,v1(t))

%*****
function predadorpresa2(f1,f2,f3,f4,y1,y2,y3,y4,y5,y6,h,alfa,N)

%Este programa produz os gráficos de presas x predadores, tempo x presas,
%tempo x predadores, no caso onde há migração apenas dos predadores.
%Entrada:
%f1, rege o comportamento das presas
%f2, rege o comportamento dos predadores do sítio 1.
%f3, rege o comportamento dos predadores do sítio 2.
%f4, rege o comportamento dos predadores do sítio 3.
%h, passo.

```

```

%y1, população inicial de presas no sítio 1.
%y2, população inicial de predadores no sítio 1.
%y3, população inicial de presas no sítio 2.
%y4, população inicial de predadores no sítio 2.
%y5, população inicial de presas no sítio 3.
%y6, população inicial de predadores do sítio 3.
%alfa, parâmetro da fórmula dos predadores.
%N, número de iterações desejadas.
%Saída: Figuras 2.12, 2.13, 2.14, 2.15.
%Janeiro/2010, Sabrina Arsego
%OBS: Utilizou-se o método de Runge-Kutta 2.

u1(1)=y1;
v1(1)=y2;
u2(1)=y3;
v2(1)=y4;
u3(1)=y5;
v3(1)=y6;
for j=1:N
    k1=feval(f1,u1(j),v1(j));
    l1=feval(f2,alfa,u1(j),v1(j),u2(j),v2(j),u3(j),v3(j));
    m1=feval(f1,u2(j),v2(j));
    n1=feval(f3,alfa,u1(j),v1(j),u2(j),v2(j),u3(j),v3(j));
    p1=feval(f1,u3(j),v3(j));
    q1=feval(f4,alfa,u1(j),v1(j),u2(j),v2(j),u3(j),v3(j));
    k2=feval(f1,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1);
    l2=feval(f2,alfa,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1,u2(j)+h*m1,v2(j)+h*n1,
    u3(j)+h*p1,v3(j)+h*q1);
    m2=feval(f1,u2(j)+h*m1,v2(j)+h*n1);
    n2=feval(f3,alfa,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1,u2(j)+h*m1,v2(j)+h*n1,

```

```

u3(j)+h*p1,v3(j)+h*q1);
p2=feval(f1,u3(j)+h*p1,v3(j)+h*q1);
q2=feval(f4,alfa,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1,u2(j)+h*m1,v2(j)+h*n1,
u3(j)+h*p1,v3(j)+h*q1);
u1(j+1)=u1(j)+(h/2)*(k1+k2);
v1(j+1)=v1(j)+(h/2)*(l1+l2);
u2(j+1)=u2(j)+(h/2)*(m1+m2);
v2(j+1)=v2(j)+(h/2)*(n1+n2);
u3(j+1)=u3(j)+(h/2)*(p1+p2);
v3(j+1)=v3(j)+(h/2)*(q1+q2);
end
t=1:N;
plot(u1(t),v1(t))
figure
plot(u2(t),v2(t))
figure
plot(u3(t),v3(t))
figure
t=N-2000:N;
plot(t,u1(t))
figure
plot(t,v1(t))
figure
plot(t,u2(t))
figure
plot(t,v2(t))
figure
plot(t,u3(t))
figure
plot(t,v3(t))

```

```

%*****

%*****

function predadorpresapresa(f1,f2,f3,f4,y1,y2,y3,y4,y5,y6,h,alfa,N)

%Este programa produz os gráficos de presas x predadores, tempo x presas,
%tempo x predadores, no caso onde há migração apenas das presas.

%Entrada:
%f1, rege o comportamento das presas no sítio 1
%f2, rege o comportamento dos predadores do sítio 1.
%f3, rege o comportamento dos presas do sítio 2.
%f4, rege o comportamento dos presas do sítio 3.
%h, passo.
%y1, população inicial de presas no sítio 1.
%y2, população inicial de predadores no sítio 1.
%y3, população inicial de presas no sítio 2.
%y4, população inicial de predadores no sítio 2.
%y5, população inicial de presas no sítio 3.
%y6, população inicial de predadores do sítio 3.
%alfa, parâmetro da fórmula dos predadores.
%N, número de iterações desejadas.
%Saída: Figuras 2.16, 2.17, 2.18, 2.19.
%Janeiro/2010, Sabrina Arsego
%OBS: Utilizou-se o método de Runge-Kutta 2.

u1(1)=y1;
v1(1)=y2;
u2(1)=y3;
v2(1)=y4;
u3(1)=y5;
v3(1)=y6;

```

```

for j=1:N
    k1=feval(f1,u1(j),v1(j),u2(j),v2(j),u3(j),v3(j));
    l1=feval(f2,alfa,u1(j),v1(j));
    m1=feval(f3,u1(j),v1(j),u2(j),v2(j),u3(j),v3(j));
    n1=feval(f2,alfa,u1(j),v1(j));
    p1=feval(f4,u1(j),v1(j),u2(j),v2(j),u3(j),v3(j));
    q1=feval(f2,alfa,u1(j),v1(j));
    k2=feval(f1,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1,u2(j)+h*m1,v2(j)+h*n1,
    u3(j)+h*p1,v3(j)+h*q1);
    l2=feval(f2,alfa,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1);
    m2=feval(f3,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1,u2(j)+h*m1,v2(j)+h*n1,
    u3(j)+h*p1,v3(j)+h*q1);
    n2=feval(f2,alfa,u2(j)+h*m1,v2(j)+h*n1);
    p2=feval(f4,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1,u2(j)+h*m1,v2(j)+h*n1,
    u3(j)+h*p1,v3(j)+h*q1);
    q2=feval(f2,alfa,u3(j)+h*p1,v3(j)+h*q1);
    u1(j+1)=u1(j)+(h/2)*(k1+k2);
    v1(j+1)=v1(j)+(h/2)*(l1+l2);
    u2(j+1)=u2(j)+(h/2)*(m1+m2);
    v2(j+1)=v2(j)+(h/2)*(n1+n2);
    u3(j+1)=u3(j)+(h/2)*(p1+p2);
    v3(j+1)=v3(j)+(h/2)*(q1+q2);
end
t=1:j;
plot(u1(t),v1(t))
figure
plot(u2(t),v2(t))
figure
plot(u3(t),v3(t))
figure

```



```

t=N-2000:N;
plot(t,u1(t))
figure
plot(t,v1(t))
figure
plot(t,u2(t))
figure
plot(t,v2(t))
figure
plot(t,u3(t))
figure
plot(t,v3(t))
%*****

%*****

function condiniciais(f1,f2,f3,f4,y1,y2,y3,y4,y5,y6,h,y11,y21,alfa,N)

%Este programa produz os gráficos de tempo x presas,
%tempo x predadores, no caso onde há migração apenas das presas, para
%análise da sensibilidade as condições iniciais.
%Entrada:
%f1, rege o comportamento das presas no sítio 1
%f2, rege o comportamento dos predadores do sítio 1.
%f3, rege o comportamento dos presas do sítio 2.
%f4, rege o comportamento dos presas do sítio 3.
%h, passo.
%y1, população inicial de presas no sítio 1.
%y2, população inicial de predadores no sítio 1.
%y3, população inicial de presas no sítio 2.
%y4, população inicial de predadores no sítio 2.
%y5, população inicial de presas no sítio 3.

```

```

%y6, população inicial de predadores do sítio 3.
%alfa, parâmetro da fórmula dos predadores.
%N, número de iterações desejadas.
%Saída: Figura 2.21
%Janeiro/2010, Sabrina Arsego
%OBS: Utilizou-se o método de Runge-Kutta 2.

for i=1:2
    if i==1
        u1(1)=y1;
        v1(1)=y2;
        u2(1)=y3;
        v2(1)=y4;
        u3(1)=y5;
        v3(1)=y6;
        for j=1:N
            k1=feval(f1,u1(j),v1(j),u2(j),v2(j),u3(j),v3(j));
            l1=feval(f2,alfa,u1(j),v1(j));
            m1=feval(f3,u1(j),v1(j),u2(j),v2(j),u3(j),v3(j));
            n1=feval(f2,alfa,u1(j),v1(j));
            p1=feval(f4,u1(j),v1(j),u2(j),v2(j),u3(j),v3(j));
            q1=feval(f2,alfa,u1(j),v1(j));
            k2=feval(f1,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1,u2(j)+h*m1,v2(j)+h*n1,
            u3(j)+h*p1,v3(j)+h*q1);
            l2=feval(f2,alfa,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1);
            m2=feval(f3,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1,u2(j)+h*m1,v2(j)+h*n1,
            u3(j)+h*p1,v3(j)+h*q1);
            n2=feval(f2,alfa,u2(j)+h*m1,v2(j)+h*n1);
            p2=feval(f4,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1,u2(j)+h*m1,v2(j)+h*n1,
            u3(j)+h*p1,v3(j)+h*q1);

```

```

    q2=feval(f2,alfa,u3(j)+h*p1,v3(j)+h*q1);
    u1(j+1)=u1(j)+(h/2)*(k1+k2);
    v1(j+1)=v1(j)+(h/2)*(l1+l2);
    u2(j+1)=u2(j)+(h/2)*(m1+m2);
    v2(j+1)=v2(j)+(h/2)*(n1+n2);
    u3(j+1)=u3(j)+(h/2)*(p1+p2);
    v3(j+1)=v3(j)+(h/2)*(q1+q2);

end

t=N-3000:N;
plot(t,v1(t),'r')
hold on
else
    u1(1)=y11;
    v1(1)=y21;
    u2(1)=y3;
    v2(1)=y4;
    u3(1)=y5;
    v3(1)=y6;
    for j=1:N
        k1=feval(f1,u1(j),v1(j),u2(j),v2(j),u3(j),v3(j));
        l1=feval(f2,alfa,u1(j),v1(j));
        m1=feval(f3,u1(j),v1(j),u2(j),v2(j),u3(j),v3(j));
        n1=feval(f2,alfa,u1(j),v1(j));
        p1=feval(f4,u1(j),v1(j),u2(j),v2(j),u3(j),v3(j));
        q1=feval(f2,alfa,u1(j),v1(j));
        k2=feval(f1,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1,u2(j)+h*m1,v2(j)+h*n1,
        u3(j)+h*p1,v3(j)+h*q1);
        l2=feval(f2,alfa,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1);
        m2=feval(f3,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1,u2(j)+h*m1,v2(j)+h*n1,
        u3(j)+h*p1,v3(j)+h*q1);

```

```

n2=feval(f2,alfa,u2(j)+h*m1,v2(j)+h*n1);
p2=feval(f4,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1,u2(j)+h*m1,v2(j)+h*n1,
u3(j)+h*p1,v3(j)+h*q1);
q2=feval(f2,alfa,u3(j)+h*p1,v3(j)+h*q1);
u1(j+1)=u1(j)+(h/2)*(k1+k2);
v1(j+1)=v1(j)+(h/2)*(l1+l2);
u2(j+1)=u2(j)+(h/2)*(m1+m2);
v2(j+1)=v2(j)+(h/2)*(n1+n2);
u3(j+1)=u3(j)+(h/2)*(p1+p2);
v3(j+1)=v3(j)+(h/2)*(q1+q2);
end
end
end
t=N-3000:N;
plot(t,v1(t))
hold on
%*****
%*****
function predadorpresaambos(f1,f2,f3,f4,f5,f6,y1,y2,y3,y4,y5,y6,h,alfa,N)

%Este programa produz os gráficos de presas x predadores, tempo x presas,
%tempo x predadores, no caso onde há migração de ambos.
%Entrada:
%f1, rege a população de presas do sítio 1.
%f2, rege a população de predadores do sítio 1.
%f3 rege a população de presas do sítio 2.
%f4, rege a população de predadores do sítio 2.
%f5, rege a população de presas do sítio 3.
%f6, rege a população de predadores do sítio 3.
%h, passo.

```

```

%y1, população inicial das presas do sítio 1.
%y2, população inicial dos predadores do sítio 1.
%y3, população inicial das presas do sítio 2.
%y4, população inicial dos predadores do sítio 2.
%y5, população inicial das presas do sítio 3.
%y6, população inicial dos predadores do sítio 3.
%alfa, parâmetro da fórmula dos predadores.
%N, número de iterações desejadas.
%Saída: Figura 2.22
%Janeiro/2010, Sabrina Arsego
%OBS: Utilizou-se o método de Runge-Kutta 2.

u1(1)=y1;
v1(1)=y2;
u2(1)=y3;
v2(1)=y4;
u3(1)=y5;
v3(1)=y6;
for j=1:N
    k1=feval(f1,u1(j),v1(j),u2(j),v2(j),u3(j),v3(j));
    l1=feval(f2,alfa,u1(j),v1(j),u2(j),v2(j),u3(j),v3(j));
    m1=feval(f3,u1(j),v1(j),u2(j),v2(j),u3(j),v3(j));
    n1=feval(f4,alfa,u1(j),v1(j),u2(j),v2(j),u3(j),v3(j));
    p1=feval(f5,u1(j),v1(j),u2(j),v2(j),u3(j),v3(j));
    q1=feval(f6,alfa,u1(j),v1(j),u2(j),v2(j),u3(j),v3(j));
    k2=feval(f1,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1,u2(j)+h*m1,v2(j)+h*n1,
    u3(j)+h*p1,v3(j)+h*q1);
    l2=feval(f2,alfa,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1,u2(j)+h*m1,v2(j)+h*n1,
    u3(j)+h*p1,v3(j)+h*q1);
    m2=feval(f3,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1,u2(j)+h*m1,v2(j)+h*n1,

```

```

u3(j)+h*p1,v3(j)+h*q1);
n2=feval(f4,alfa,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1,u2(j)+h*m1,v2(j)+h*n1,
u3(j)+h*p1,v3(j)+h*q1);
p2=feval(f5,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1,u2(j)+h*m1,v2(j)+h*n1,
u3(j)+h*p1,v3(j)+h*q1);
q2=feval(f6,alfa,u1(j)+h*k1,v1(j)+h*l1,u2(j)+h*m1,v2(j)+h*n1,
u3(j)+h*p1,v3(j)+h*q1);
u1(j+1)=u1(j)+(h/2)*(k1+k2);
v1(j+1)=v1(j)+(h/2)*(l1+l2);
u2(j+1)=u2(j)+(h/2)*(m1+m2);
v2(j+1)=v2(j)+(h/2)*(n1+n2);
u3(j+1)=u3(j)+(h/2)*(p1+p2);
v3(j+1)=v3(j)+(h/2)*(q1+q2);
end
j
t=1:j;
plot(u1(t),v1(t))
figure
plot(u2(t),v2(t))
figure
plot(u3(t),v3(t))
%*****

%*****

function L=calcxpsinc1(x0,n,a,b)

%Este programa produz o gráfico do Número de Lyapunov em função do
%parâmetro r, pertencente a função de Ricker.
%Entrada:
%xo, população inicial do sítio.
%n, número de iterações desejadas.

```

```

%a, b, intervalo de variação do parâmetro r.
%Saída: Figura 3.1
%Janeiro, 2010/ Sabrina Arsego

x(1)=x0;
for r=a:0.001:b
    for i=2:n
        x(i)=x(i-1)*exp(r*(1-x(i-1)));
    end
    for j=1:n
        x1(j)=exp(r*(1-x(j)))-r*x(j)*exp(r*(1-x(j)));
    end
    for i=1:n
        aux(i)=abs(x1(i));
    end
    for k=1:n
        aux2(k)=log(aux(k));
    end
    L=sum(aux2);
    E=L/n;
    R=exp(E);
    r;
    R;
    plot(r,R)
    hold on
end
%*****

%*****

function calclamb1mi1(a,n)

```

```

%Este programa produz o gráfico de Lambda x mi, utilizando
%a medida delta de Dirac (medida concentrada em apenas um ponto)
%concentrado no ponto a (alfazero).
%Entrada:
%a, valor de alfa;
%n, número de sítios;
%Saída: Figura 3.3
%Janeiro de 2010, Sabrina Arsego

Y = [ ];
for m=0:0.001:1,
    for j=1:n-1,
        lambda(j)=abs(1-m+m*((1-a)*cos(2*pi*j/n) - a/(n-1)));
    end
    maximo=max(lambda);
Y = [Y,maximo];
end
m=0:0.001:1;
plot(m,Y)
%*****

%*****

function calclamb2mi2(p,q,n)

%Este programa produz o gráfico de Lambda x mi, usando uma
%medida unitária partida em dois valores iguais a 1/2, concen-
%trados nos pontos p e q.
%%Entrada:
%p, q, valores de alfa
%n, número de sítios.
%Saída: Figura 3.5

```



```
%Janeiro/2010, Sabrina Arsego
```

```

Y = [ ];
for m=0:0.001:1,
    for j=1:n-1,
        up = sqrt(abs(1-m+m*((1-p)*cos(2*pi*j/n) - p/(n-1))));
        uq = sqrt(abs(1-m+m*((1-q)*cos(2*pi*j/n) - q/(n-1))));
        lambda(j) = up*uq;
    end
    maximo=max(lambda);
    Y = [Y,maximo];
end
m=0:0.001:1;
plot(m,Y)
%*****

%*****
function calclamb3mi3(p,q,n)

%Este programa produz o gráfico de Lambda x mi, usando uma
%medida unitária distribuída em quatro pontos equidistantes no
%intervalo [0, 1].
%Entrada:
%p, q, valores extremos de alfa;
%n, número de sítios.
%Saída: Figura 3.7
%Janeiro/2010, Sabrina Arsego

Y = [ ];
p1 = p + (q-p)/3;
q1 = q - (q-p)/3;

```

```

for m=0:0.001:1,
    for j=1:(n-1),
        up = abs(1-m+m*((1-p)*cos(2*pi*j/n) - p/(n-1)))^(1/4);
        up1 = abs(1-m+m*((1-p1)*cos(2*pi*j/n) - p1/(n-1)))^(1/4);
        uq1 = abs(1-m+m*((1-q1)*cos(2*pi*j/n) - q1/(n-1)))^(1/4);
        uq = abs(1-m+m*((1-q)*cos(2*pi*j/n) - q/(n-1)))^(1/4);
        lambda(j) = up*up1*uq1*uq;
    end
    maximo=max(lambda);
    Y = [Y,maximo];
end
m=0:0.001:1;
plot(m,Y)
%*****

%*****
function calclamb4mi4(p,q,n)

%Este programa produz o gráfico de Lambda x mi, usando uma
%função constante alfa ->1/(p-q), e a medida distribuída unifor-
%mente no intervalo [0, 1]
%Entrada:
%p, q, valores extremos de alfa
%n, número de sítios.
%Saída: Figura 3.9
%Janeiro/2010, Sabrina Arsego

Y = [ ];
for m=0:0.001:1
    for j=1:n-1,
        a = -m*cos(2*pi*j/n) - m/(n-1);

```

```

    uq = 1 - m + m*((1-q)*cos(2*pi*j/n) - q/(n-1));
    up = 1 - m + m*((1-p)*cos(2*pi*j/n) - p/(n-1));
    lq = log(abs(uq));
    lp = log(abs(up));
    A = uq*lq-up*lp + up - uq;
    E(j) = exp(A/((q-p)*a));
end
maximo = max(E);
Y = [Y, maximo];
end
m = 0:.001:1;
plot(m,Y)
%*****

%*****

function lambdamd1(x0,n,r,a)

%Este programa produz o gráfico de Lambda x mi, utilizando
%a medida delta de Dirac (medida concentrada em apenas um ponto)
%concentrado no ponto a (alfazero) e a função mi como degrau crescente.
% Entrada:
% a, valor de alfa;
% n, número de sítios;
% Saída: Figura 3.10.
% Março de 2010, Sabrina Aresego

% Cálculo dos autovalores:
for j=1:n-1
    aut(j)=1-((1-a)*cos(2*pi*j/n)-(a/(n-1)));
end
% Inicialização dos valores de x e do armazenamento dos valores de lambda:

```

```

x(1)=x0;
Y=[ ];
% Cálculo do valor de lambda para cada valor da taxa de migração:
for m=0:0.001:1
    s = zeros(1,n-1);
    for t=1:10000 % Tempo discreto que garante a convergência
        if x(t)>1, ml(t)=m; else ml(t)=0; end
        x(t+1)=x(t)*exp(r*(1-x(t))); % Modelo de Ricker
        for j=1:n-1
            s(j)=s(j)+log(abs(1-ml(t)*aut(j)));
        end
    end
    lambda=exp(max(s/t));
    Y=[Y,lambda];
end
m=0:0.001:1;
plot(m,Y,'k', 'linewidth',2)
%*****

%*****

function lambdamd11(x0,n,r,a)

%Este programa produz o gráfico de Lambda x mi, utilizando
%a medida delta de Dirac (medida concentrada em apenas um ponto)
%concentrado no ponto a (alfazero) e a função mi como degrau decrescente.
% Entrada:
% a, valor de alfa;
% n, número de sítios;
% Saída: Figura 3.11.
% Março de 2010, Sabrina Arsego

```

```

% Cálculo dos autovalores:
for j=1:n-1
    aut(j)=1-((1-a)*cos(2*pi*j/n)-(a/(n-1)));
end
% Inicialização dos valores de x e do armazenamento dos valores de lambda:
x(1)=x0;
Y=[ ];
% Cálculo do valor de lambda para cada valor da taxa de migração:
for m=0:0.001:1
    s = zeros(1,n-1);
    for t=1:10000 % Tempo discreto que garante a convergência
        if x(t)>1, ml(t)=0; else ml(t)=m; end
        x(t+1)=x(t)*exp(r*(1-x(t))); % Modelo de Ricker
        for j=1:n-1
            s(j)=s(j)+log(abs(1-ml(t)*aut(j)));
        end
    end
    lambda=exp(max(s/t));
    Y=[Y,lambda];
end
m=0:0.001:1;
plot(m,Y,'k', 'linewidth',2)
%*****

%*****

function lambdamd2(x0,n,r,p,q)

%Este programa produz o gráfico de Lambda x mi, usando uma
%medida unitária partida em dois valores iguais a 1/2, concen-
%trados nos pontos p e q e a função mi como degrau crescente.
%%Entrada:

```

```

%p, q, valores de alfa
%n, número de sítios.
%r, parâmetro da função de Ricker.
%x0, população inicial dos sítios.
%Saída: Figura 3.12
%Março/2010, Sabrina Arsego

% Inicialização dos valores de x e do armazenamento dos valores de lambda:
x(1)=x0;
Y=[ ];
% Cálculo do valor de lambda para cada valor da taxa de migração:
for m=0:0.001:1,
    s = zeros(1,n-1);
    a=p;
    for t = 1:10000, % Tempo discreto que garante a convergência
        if x(t)>1, ml(t)=m; else ml(t)=0; end
        x(t+1)=x(t)*exp(r*(1-x(t))); % Modelo de Ricker
        for j=1:n-1
            aut(j)=1-((1-a)*cos(2*pi*j/n)-(a/(n-1)));
            s(j)=s(j)+log(abs(1-ml(t)*aut(j)));
        end
        if a==p
            a=q;
        elseif a==q
            a=p;
        end
    end
    lambda=exp(max(s/t));
    Y=[Y,lambda];
end

```

```

m=linspace(0,1, 1001);
plot(m,Y,'k', 'linewidth',2)
%*****

function lambdamd21(x0,n,r,p,q)

%Este programa produz o gráfico de Lambda x mi, usando uma
%medida unitária partida em dois valores iguais a 1/2, concen-
%trados nos pontos p e q e a função mi como degrau decrescente.
%%Entrada:
%p, q, valores de alfa
%n, número de sítios.
%r, parâmetro da função de Ricker.
%x0, população inicial dos sítios.
%Saída: Figura 3.13
%Março/2010, Sabrina Arsego

% Inicialização dos valores de x e do armazenamento dos valores de lambda:
x(1)=x0;
Y=[ ];
% Cálculo do valor de lambda para cada valor da taxa de migração:
for m=0:0.001:1,
    s = zeros(1,n-1);
    a=p;
    for t = 1:10000, % Tempo discreto que garante a convergência
        if x(t)>1, ml(t)=m; else ml(t)=0; end
        x(t+1)=x(t)*exp(r*(1-x(t))); % Modelo de Ricker
        for j=1:n-1
            aut(j)=1-(((1-a)*cos(2*pi*j/n)-(a/(n-1))));
            s(j)=s(j)+log(abs(1-ml(t)*aut(j)));
        end
    end
end

```

```

        if a==p
            a=q;
        elseif a==q
            a=p;
        end
    end

    end

    lambda=exp(max(s/t));
    Y=[Y,lambda];

end

m=linspace(0,1, 1001);
plot(m,Y,'k', 'linewidth',2)
%*****

%*****

function lambdamd3(x0,n,r,p,q)

%Este programa produz o gráfico de Lambda x mi, usando uma
%medida unitária distribuída em quatro pontos equidistantes no
%intervalo [0, 1] e função mi como degrau crescente.
%Entrada:
%p, q, valores extremos de alfa.
%n, número de sítios.
%x0, população inicial dos sítios.
%r, parâmetro da função de Ricker.
%Saída: Figura 3.14
%Março/2010, Sabrina Arsego

% Inicialização dos valores de x.
x(1)=x0;
Y=[ ];
p1 = p + (q-p)/3;

```



```

q1 = q - (q-p)/3;
% Cálculo do valor de lambda para cada valor da taxa de migração:
aux(1)=p;
aux(2)=p1;
aux(3)=q1;
aux(4)=q;
for m=0:0.001:1,
    s = zeros(1,n-1);
    for t = 1:10000, % Tempo discreto que garante a convergência
        a=aux(1);
        if x(t)>1, ml(t)=m; else ml(t)=0; end
        x(t+1)=x(t)*exp(r*(1-x(t))); % Modelo de Ricker
        for j=1:n-1
            aut(j)=1-((1-a)*cos(2*pi*j/n)-(a/(n-1)));
            s(j)=s(j)+log(abs(1-ml(t)*aut(j)));
        end
        aux1(1)=aux(4);
        aux1(2)=aux(1);
        aux1(3)=aux(2);
        aux1(4)=aux(3);
        aux(1)=aux1(1);
        aux(2)=aux1(2);
        aux(3)=aux1(3);
        aux(4)=aux1(4);
    end
    lambda=exp(max(s/t));
    Y=[Y,lambda];
end
m=linspace(0,1,1001);
plot(m,Y,'k', 'linewidth',2)

```

```

%*****

%*****

function lambdamd31(x0,n,r,p,q)

%Este programa produz o gráfico de Lambda x mi, usando uma
%medida unitária distribuída em quatro pontos equidistantes no
%intervalo [0, 1] e função mi como degrau decrescente.
%Entrada:
%p, q, valores extremos de alfa.
%n, número de sítios.
%x0, população inicial dos sítios.
%r, parâmetro da função de Ricker.
%Saída: Figura 3.15
%Março/2010, Sabrina Arsego

% Inicialização dos valores de x.
x(1)=x0;
Y=[ ];
p1 = p + (q-p)/3;
q1 = q - (q-p)/3;
% Cálculo do valor de lambda para cada valor da taxa de migração:
aux(1)=p;
aux(2)=p1;
aux(3)=q1;
aux(4)=q;
for m=0:0.001:1,
    s = zeros(1,n-1);
    for t = 1:10000, % Tempo discreto que garante a convergência
        a=aux(1);
        if x(t)>1, ml(t)=0; else ml(t)=m; end
    end
end

```

```

x(t+1)=x(t)*exp(r*(1-x(t))); % Modelo de Ricker
for j=1:n-1
    aut(j)=1-((1-a)*cos(2*pi*j/n)-(a/(n-1)));
    s(j)=s(j)+log(abs(1-m1(t)*aut(j)));
end
aux1(1)=aux(4);
aux1(2)=aux(1);
aux1(3)=aux(2);
aux1(4)=aux(3);
aux(1)=aux1(1);
aux(2)=aux1(2);
aux(3)=aux1(3);
aux(4)=aux1(4);
end
lambda=exp(max(s/t));
Y=[Y,lambda];
end
m=linspace(0,1,1001);
plot(m,Y,'k', 'linewidth',2)
%*****

%*****
function lambdamd4(x0, n, r, p, q)
%Este programa produz o gráfico de Lambda x mi, usando uma
%função constante alfa ->1/(p-q), e a medida distribuída unifor-
%mente no intervalo [0, 1] e a função mi como degrau crescente.
%Entrada:
%p, q, valores extremos de alfa.
%n, número de sítios.
%x0, população inicial dos sítios.
%r, parâmetro da função de Ricker.

```

```

%Saída: Figura 3.16
%Março/2010, Sabrina Arsego

%Cálculo dos autovalores:
for k=1:8000
    a=p+(q-p).*rand(1,1);
    for l=1:n-1
        aut(k,l)=1-((1-a)*cos(2*pi*l/n)-a/(n-1));
    end
end

% Inicialização dos valores de x
x(1)=x0;
Y=[ ];

% Cálculo do valor de lambda para cada valor da taxa de migração:
for m=0:0.001:1,
    s = zeros(1,n-1);
    for t = 1:8000,% Tempo discreto que garante a convergência
        if x(t)>1, ml(t)=m; else ml(t)=0; end
        x(t+1)=x(t)*exp(r*(1-x(t))); % Modelo de Ricker
        for j=1:n-1,
            s(j)=s(j)+(log(abs(1-ml(t)*aut(t,j))));
        end
    end
    lambda=exp(max(s/t));
    Y=[Y,lambda];
end

%m=linspace(0,1, 1001);
m=0:0.001:1;
%m=0:1;
plot(m,Y,'k', 'linewidth',1)

```

```

%*****

%*****

function lambdamd41(x0, n, r, p, q)
%Este programa produz o gráfico de Lambda x mi, usando uma
%função constante alfa ->1/(p-q), e a medida distribuída unifor-
%mente no intervalo [0, 1] e a função mi como degrau decrescente.
%Entrada:
%p, q, valores extremos de alfa.
%n, número de sítios.
%x0, população inicial dos sítios.
%r, parâmetro da função de Ricker.
%Saída: Figura 3.17
%Março/2010, Sabrina Arsego

%Cálculo dos autovalores:
for k=1:8000
    a=p+(q-p).*rand(1,1);
    for l=1:n-1
        aut(k,l)=1-((1-a)*cos(2*pi*l/n)-a/(n-1));
    end
end
% Inicialização dos valores de x
x(1)=x0;
Y=[ ];
% Cálculo do valor de lambda para cada valor da taxa de migração:
for m=0:0.001:1,
    s = zeros(1,n-1);
    for t = 1:8000,% Tempo discreto que garante a convergência
        if x(t)>1, ml(t)=0; else ml(t)=m; end
        x(t+1)=x(t)*exp(r*(1-x(t))); % Modelo de Ricker
    end
end

```

```
    for j=1:n-1,
        s(j)=s(j)+(log(abs(1-m1(t)*aut(t,j)))));
    end
end
lambda=exp(max(s/t));
Y=[Y,lambda];
end
m=0:0.001:1;
plot(m,Y,'k', 'linewidth',1)
%*****
```