CURSO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

• MANOEL LUIZ LEÃO
• NERON ARRUDA LEONEL

PORTO ALEGRE
1979

CURSO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

• MANOEL LUIZ LEÃO
Doutor e Professor Titular, UFRGS

• NERON ARRUDA LEONEL
M.Sc., Ciências da Computação,
Analista de Sistemas, UFRGS

PORTO ALEGRE
1979

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Este texto surgiu, inicialmente, como notas de aula para um curso de extensão universitária que os autores ministraram, em 1978, na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em convênio com a Sociedade de Usuários de Computadores e Equipamentos Subsidiários - SUCESU, bem como de apontamentos oferecidos aos alunos de graduação, nos cursos de Engenharia, Matemática e Administração de Empresas.

A Pesquisa Operacional abrange toda a gama de técnicas e procedimentos de feição matemática e quantitativa, empregados na solução de problemas de otimização, sempre que se trate de optar entre diferentes formas de utilização de recursos escassos, para assegurar a "*maximização*" de resultados ou a "*minimização*" de dispêndios.

Entre as técnicas de Pesquisa Operacional, a Programação Linear ocupa posição destacada, seja porque, efetivamente, tem aplicações muito amplas e variadas, seja pela existência de métodos de solução absolutamente seguros, de natureza universal e de rápida convergência para o resultado final, o que, infelizmente, não é o caso em outros ramos da Pesquisa Operacional, onde, freqüentemente, cada problema demanda abordagem distinta, função de sua configuração e estrutura.

Estas características de universalidade e simplicidade, por sua vez, fizeram com que os algoritmos de Programação Linear se prestassem, desde logo e particularmente, às soluções por computador, mesmo porque, apesar da simplicidade, o vulto das operações de cálculo, para qualquer problema de porte razoável, logo ultrapassa os limites do que seria razoável enfrentar sem o recurso ao processamento eletrônico de dados.

Não é de admirar, portanto, que a difusão do emprego de computadores acompanhados de programas oferecidos pelos fabricantes, haja contribuido para popularizar a Programação Linear e outras técnicas de Pesquisa Operacional.

Impõe-se, pois, que a formação regular de um grande número de profissionais, como os engenheiros, os arquitetos, os economistas, os administradores de empresas e os matemáticos, para citar apenas alguns, não omita a abordagem do tema, para que possam motivar e provocar aplicações, conhecendo o suficiente, sobre o método, para mobilizar e interpretar os programas de computação, já disponíveis, ou, ainda, para que sejam capazes de contornar o emprego destes programas (em geral onerosos), adotando outra via de solução.

Daí a preocupação dos autores em salientar o "*método Simplex Revisado*", mediante o qual a solução dos problemas de Programação Linear pode ser alcançada com recurso apenas a operações elementares sobre matrizes. Surge, aqui, a unica exigência, para a compreensão do material, quanto ao conhecimento prévio de matemática - o leitor deverá ser capaz de inverter uma matriz, com conhecimento do papel que esta operação desempenha na solução de sistemas de equações lineares, além de, naturalmente, efetuar o produto e duas matrizes. Estes elementos de álgebra linear integram, já, os cursos universitários interessados em Programação Linear e, de resto, podem ser facilmente adicionados ao curso.

Não é, pois, objetivo desta obra apresentar a Programação Linear sob aspecto de rigor formal, mas, antes, de oferecer um instrumento de aprendizado para os que têm interesse na aplicação do método e precisam ter suficiente domínio conceitual para encaminhar soluções e discernir sobre os resultados.

Ao mesmo tempo, porém, procurou-se dar um tratamento suficientemente detalhado aos algoritmos voltados para as soluções em números inteiros, muitas vezes não abordados em cursos introdutórios.

Na apresentação dos problemas de transporte, além das soluções de partida usualmente mencionadas, é salientada a contribuição de uma pesquisadora brasileira, por oferecer soluções iniciais comprovadamente mais eficientes, em ampla variedade de configurações.

Tratando-se de primeira edição, os autores estão conscientes de que, não obstante os cuidados da revisão, há erros e imprecisões a assinalar, bem como senões a corrigir no plano didático e lacunas a preencher no tratamento dos tópicos. Contam, para tanto, com a valiosa apreciação dos leitores, dos estudantes e dos colegas,no magistério e no processamento eletrônico de dados.

Finalmente, expressam os autores seu agradecimento à Senhorita Diana Maria Marchi, pela paciente e cuidadosa datilografia do texto final.

Porto Alegre, janeiro de 1979.

1. A ESTRUTURA BÁSICA DO PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

O modelo básico de Programação Linear consiste em:

Determinar os valores de x_j (j=1, 2, 3...n), de forma a tornar o máximo o valor Z de uma função *linear* das variáveis x_j, respeitado que, simultaneamente, outras funções lineares das mesmas variáveis não ultrapassem certos valores-limites, previamente estabelecidos.

A formulação clássica é, pois:

Maximizar $Z = \sum_j c_j x_j$ (j=1, 2, 3....n), respeitado

que $\sum_j \alpha_{ij} x_j \leq b_i$ (j=1, 2, 3...n; i=1, 2, 3...m)

e que, ainda, os valores de x_j não sejam negativos, isto é, que

$$x_j \geq 0$$

Os coeficientes c_j, na função acima, podem assumir valores negativos, positivos ou nulos; os valores de b_i, no entanto, são supostos sempre como positivos, enquanto que α_{ij} são coeficientes negativos, nulos ou positivos.

Em que contexto pode surgir um problema concreto, representável pelo modelo acima?

Suponha-se uma fábrica que ofereça três produtos, A_1, A_2, e A_3, sobre os quais realize, *por unidade*, os lucros $c_1 = 7$, $c_2 = 8$, $c_3 = 9$, expressos em unidade monetária conveniente. Suponha-se, também, que a fábrica seja constituida de quatro departamentos, através dos quais flua a fabricação dos três produtos, demandando, cada um, *por unidade fabricada*, tempo de processamento α_{ij}, em que α_{ij} representa o tempo consumido para processar uma unidade do produto "j" no departamento "i". No caso, pois, j=1, 2, 3 e i=1, 2, 3, 4.

Admita-se, ainda, que as horas totais disponíveis para a produção, nos quatro departamentos, não sejam ilimitadas, havendo um limite superior que não possa ser ultrapassado, para cada um dos departamentos, seja em decorrência de fatores técnicos, seja por imposição trabalhista, ou por qualquer outra restrição econômica. Sejam estes limites, em unidades convenientes de tempo:

$b_1 = 230$; $b_2 = 340$; $b_3 = 270$; $b_4 = 300$.

Sejam, agora, x_1, x_2 e x_3 as quantidades que serão produzidas, digamos, num mês, respectivamente dos produtos A_1, A_2 e A_3.

Isto posto, o problema consiste, evidentemente, em determinar os valores a atribuir a x_1, x_2 e x_3(valores estes obviamente positivos ou, na pior das hipóteses, nulos, pois não tem sentido a produção de quantidades negativas), de forma a não ultrapassar os limites preestabelecidos de tempo disponível, assegurando, ao mesmo tempo, o maior valor possível para o lucro a obter da venda dos produtos, suposta assegurada.

Em outras palavras, resta determinar x_1, x_2 e x_3, tais que seja máximo o lucro total "Z", em que

$$Z = \sum_j c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 =$$

$$= 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 \qquad (\mathrm{I})$$

respeitado que não seja ultrapassado o tempo disponível em cada departamento. Ora, o tempo consumido na fabricação vai depender dos valores de x_1, x_2 e x_3, bem como dos valores dos coeficientes de consumo unitário α_{ij} .

Suponha-se, agora, que estes coeficientes, expressos na mesma unidade de tempo em que se acham os valores b_1, b_2, b_3 e b_4, formem a seguinte matriz retangular, contendo uma linha para cada departamento e uma coluna para cada produto:

PRODUTO

	A_1	A_2	A_3	
Depto. 1	3	4	0	i=1
Depto. 2	5	2	6	i=2
Depto. 3	1	2	4	i=3
Depto. 4	2	0	5	i=4
	j=1	j=2	j=3	

Pode-se dizer, então, que os valores de x_1, x_2 e x_3, *além de maximizar a função Z, acima,* devem satisfazer, ainda, as seguintes restrições, formuladas como desigualdades, a fim de garantir que não seja ultrapassada a capacidade de produção de cada departamento:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 &\leq 230 \\ 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 &\leq 340 \\ 1x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 270 \\ 2x_1 + 0x_2 + 5x_3 &\leq 300 \end{aligned} \qquad (\mathrm{II})$$

Sinteticamente, estas condições podem ser expressas como na formulação inicial:

$$\sum_j \alpha_{ij} x_j \leq b_i \quad (j=1,\ 2,\ 3;\quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

Resta, ainda, expressar a condição de "não-negatividade", que veda soluções negativas:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \qquad \text{(III)}$$

Tem-se, agora, um problema que reproduz, exatamente, a formulação clássica apresentada na página 9.

A função Z, identificada por(I), na página 10, é denominada "função-objetivo"; sobre ela se exerce a ação de maximização (ou minimização, como se verá adiante).

As desigualdades assinaladas por (II) são as restrições a que se devem sujeitar os valores das variáveis e se distinguem das desigualdades em (III) porque são específicas para cada problema, enquanto que as últimas são genéricas para todos os problemas de Programação linear. Por esta razão, alguns denominam as desigualdades (II)de "restrições explícitas", enquanto que, em (III), se achariam as "restrições implícitas".

No caso, há três variáveis originais no problema, respectivamente, a produção mensal de cada um dos tres produtos; há, também, quatro restrições explícitas, uma para cada departamento da empresa, limitando a disponibilidade de horas de trabalho. Os coeficientes α_{ij}, portanto, formam uma matriz retangular de 4 linhas e 3 colunas, isto é, m>n. Nada impediria, porém, que m e n fossem iguais, ou, mesmo, que o número de variáveis originais do problema (em outras palavras, o número de produtos da empresa) fosse *maior* que o de restrições explícitas (ou seja, de departamentos da empresa). Mesmo, porém, que m>n, o problema sempre recairá na solução de um sistema *em que o número de variáveis é maior que o de restrições, pois será necessário "criar" novas variáveis, ao menos uma para cada desigualdade, a fim de encaminhar a solução.*

A administração pode ser definida como a arte de maximizar resultados, com o emprego de recursos limitados. Sempre, pois que o objetivo a alcançar possa ser expresso por uma função linear das variáveis em jogo e que as restrições também possam ser enunciadas por desigualdades lineares, tem-se um problema suscetivel de tratamento por Programação Linear. É óbvio que os dados do problema nunca se apresentam "prontos", organizados sob forma de um modelo linear. É necessária uma certa dose de imaginação, para discernir, numa situação concreta, a possibilidade de "vestir" a realidade com um modelo linear e, também, para impor-lhe este modelo, quando, estritamente, não cabe, por não serem lineares as relações em jogo; mesmo assim, porém, a solução linear pode ser útil, como modelo suficientemente aproximado da realidade, capaz de oferecer, se não a solução exata, ao menos um balizamento do caminho a seguir. Não raro, também, um artifício pode transformar em lineares expressões e relações não-lineares.

Mas, com tudo isto, a Programação Linear não esgota o assunto, deixando sem solução uma variada gama de problemas essencialmente não-lineares, para os quais se impõe desenvolver soluções também não-lineares. Infelizmente, afora alguns casos particulares, não há, ainda, para estes problemas, algoritmos seguros e universais, comparáveis ao método Simplex, aplicável à Programação Linear.

2. O MÉTODO SIMPLEX

A solução dos problemas de Programação Linear segue um algoritmo desenvolvido por Dantzig e consiste em um procedimento iterativo que converge, passo a passo, para a solução ótima, oferecendo, ainda, uma indicação que permite interromper o processo quando alcançado o ótimo, ou, alternativamente, quando constatado que o problema foi mal formulado ou não tem solução.

Inicialmente, cabe manipular o sistema, para que assuma a configuração exigida para o início do procedimento iterativo. Esta configuração, denominada *forma canônica do sistema*, se caracteriza por *duas condições*:

a). *Todas as restrições explícitas são transformadas em igualdades, pela inclusão de variáveis novas, ditas "variáveis auxiliares" (ou "folgas");*

b). *é possível identificar um conjunto de "m" ("m" - número de restrições explícitas) variáveis, cujos coeficientes a_{ij} formem uma matriz identidade, isto é, que ocorram, cada uma, em uma das "m" equações, com coeficiente +1, com coeficiente zero nas demais.*

Voltemos às desigualdades assinaladas por (II), na página 10. A primeira delas define a restrição relativa à disponibilidade do primeiro departamento e impõe que, quaisquer que sejam os valores de x_1, x_2 e x_3, o valor da expressão à esquerda do sinal de desigualdade *não pode* superar 230, embora possa, se necessário, ficar aquém deste valor. Portanto, há uma quantidade, nula ou positiva (isto e, não-negativa, como as variáveis originais do problema), que, adicionada ao membro da esquerda, da primeira desigualdade, a transformará em igualdade. Esta quantidade exprimirá o resíduo não utilizado, da capacidade de produção do departamento, para uma determinada combinação de valores de x_1, x_2 e x_3; *por este motivo, é denominada de folga* e, graças à imposição de não-negatividade, recebe tratamento análogo ao atribuido às demais variáveis do problema.

O mesmo se aplica às tres outras restrições, comportando, cada uma delas, uma folga, ou *variável auxiliar*, cujo papel é o de transformar em igualdades as desigualdades originais.

Mas. se estas variáveis auxiliares passam a integrar o sistema original, que papel assumem na função-objetivo? Na realidade, nenhum, pois esta função exprime um resultado, a maximizar, dependente tão somente dos valores atribuidos às variáveis originais. Ora, as "folgas" representam, no caso, horas de produção não utilizadas; em outras palavras, "departamento ocioso", enquanto que a função-objetivo retrata lucros. Portanto, as variáveis de folga ou auxiliares em nada contribuem para a função-objetivo e devem, nela, figurar com *coeficiente nulo*.

Isto posto, podemos escrever o sistema, novamente, já incluidas as variáveis auxiliares x_4, x_5, x_6 e x_7, que transformam em igualdades, respectivamente, a primeira, a segunda, a terceira e a quarta restrição:

Função-objetivo: $Z=7x_1+8x_2+9x_3+0x_4+0x_5+0x_6+0x_7$

Restrições:

$$3x_1+4x_2+0x_3+1x_4+0x_5+0x_6+0x_7=230$$
$$5x_1+2x_2+6x_3+0x_4+1x_5+0x_6+0x_7=340$$
$$1x_1+2x_2+4x_3+0x_4+0x_5+1x_6+0x_7=270$$
$$2x_1+0x_2+5x_3+0x_4+0x_5+0x_6+1x_7=300$$

O simples exame da matriz de coeficientes das restrições permite identificar, para as variáveis x_4, x_5, x_6 e x_7, uma matriz quadrada, de 4x4, cujos elementos são zero ou um, havendo, em cada coluna ou linha apenas um "um", sendo nulos os demais elementos. Isto equivale a dizer que a matriz pode ser rearranjada, de forma a apresentar a diagonal principal com valores unitários e zero nas demais posições (esta, aliás, já é a forma em que se encontra).

Tem-se, agora, um sistema de quatro equações lineares e sete incógnitas. Qualquer solução a este sistema conterá, sempre, 4 variáveis não-nulas e três nulas, em decorrência de só haver quatro equações. Na forma em que se acha, o sistema satisfaz as duas condições da forma canônica, constantes da página 13. Uma solução óbvia, pois, seria considerar nulas as variáveis x_1, x_2 e x_3, o que eliminaria as três primeiras colunas das restrições, fornecendo a solução para x_4, x_5, x_6 e x_7.

Com efeito, as equações acima podem ser escritas como a seguir, por simples transposição:

$$x_4=230-3x_1-4x_2$$
$$x_5=340-5x_1-2x_2-6x_3$$
$$x_6=270-1x_1-2x_2-4x_3$$
$$x_7=300-2x_1-5x_3$$

(com omissão das variáveis afetas de coeficientes nulos).

Ora, se x_1, x_2 e x_3 forem iguais a zero, uma primeira solução do sistema seria $x_4=230$; $x_5=340$; $x_6=270$; $x_7=300$. Do ponto de vista econômico, seria uma solução desastrosa, pois equivaleria a deixar parada a fábrica, nada produzir, levando ao lucro nulo, como se conclui da função-objetivo. Do ponto de vista algebrico, porem, constitui um primeiro passo de procedimento iterativo que levará à completa solução do problema.

As quatro variáveis às quais corresponde, nas restrições, a matriz identidade, são denominadas "variáveis básicas". Elas se acham expressas em função das demais, ditas "não- básicas". "Mudar a base" do sistema significa permutar uma variável básica, por outra, não-básica. Isto equivale a tornar nula uma variável antes pertencente à base, para tornar, simultaneamente, não nula uma variável antes excluida da base, já que somente as variáveis básicas assumem valor diferente de zero.
No caso em tela, a "base" contém 4 variáveis e o sistema contém, ao todo, 7. Quantas soluções básicas diferentes, podem, então, ser encontradas? A resposta está nas combinações de 7 elementos 4 a 4, ou seja, 35. Uma solução, pois, seria resolver os 35 sistemas de 4x4, eliminando, desde logo, os que apresentassem soluções negativas, por infringirem as restrições implícitas, buscando, depois, aquele ou aqueles dentre eles que oferecessem o maior valor para a função-objetivo.

Felizmente, o método Simplex oferece um caminho mais curto, a partir da primeira solução, antes apontada. Ele permite identificar, a cada passo, qual a mudança de base que contribui para melhorar (no caso, fazer *maior*) o valor da função-objetivo; identificada esta mudança, o algoritmo efetua, de forma simples, a permuta das variáveis em questão, tornando não-básica uma básica e vice-versa. Finalmente, quando alcançada a solução ótima, o método aponta para este fato, permitindo cessar a busca.

Neste momento, convém dar ao sistema uma disposição mais adequada à visualização das iterações sucessivas. Para tanto, escrevem-se, acima das variáveis, os coeficientes que as afetam na função-objetivo e, sob elas, a matriz de coeficientes α_{ij}, das restrições. Por conveniência, o termo independente (b_i), é trazido para a esquerda, repetindo-se, também à esquerda, a designação das variáveis que formam a base (isto é, aquelas às quais correspondem coeficientes que formam uma matriz identidade) e os respectivos coeficientes na função-objetivo. Abaixo do quadro, é deixado espaço para duas linhas adicionais (ver Quadro I, página 16), denominadas Z_j e c_j-Z_j.

QUADRO I

$c_j \downarrow$	Vb	b_i	x_1 (7)	x_2 (8)	x_3 (9)	x_4 (0)	x_5 (0)	x_6 (0)	x_7 (0)
0	x_4	230	3	4	0	1	0	0	0
0	x_5	340	5	2	$\boxed{6}$	0	1	0	0
0	x_6	270	1	2	4	0	0	1	0
0	x_7	300	2	0	5	0	0	0	1
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0
$c_j - Z_j$			7	8	9	0	0	0	0

QUADRO II

$c_j \downarrow$	Vb	b_i	x_1 (7)	x_2 (8)	x_3 (9)	x_4 (0)	x_5 (0)	x_6 (0)	x_7 (0)
0	x_4	230	3	$\boxed{4}$	0	1	0	0	0
9	x_3	170/3	5/6	1/3	1	0	1/6	0	0
0	x_6	130/3	- 7/3	2/3	0	0	- 2/3	1	0
0	x_7	50/3	-13/6	- 5/3	0	0	- 5/6	0	1
Z_j		510	15/2	3	9	0	3/2	0	0
$c_j - Z_j$			- 1/2	5	0	0	- 3/2	0	0

QUADRO III

Solução Ótima

$c_j \downarrow$	Vb	b_i	x_1 (7)	x_2 (8)	x_3 (9)	x_4 (0)	x_5 (0)	x_6 (0)	x_7 (0)
8	x_2	115/2	3/4	1	0	1/4	0	0	0
9	x_3	225/6	7/12	0	1	- 1/12	1/6	0	0
0	x_6	5	-17/6	0	0	- 1/6	- 2/3	1	0
0	x_7	225/2	-11/12	0	0	5/12	- 5/6	0	1
Z_j		797,50	45/4	8	9	5/4	3/2	0	0
$c_j - Z_j$			-17/4	0	0	- 5/4	- 3/2	0	0

É evidente que a primeira solução não é satisfatória, pois a função-objetivo tem valor nulo (o valor da função-objetivo se acha na linha Z_j, na coluna b_i, a 3a., pois ali é registrada a soma dos produtos, linha a linha, dos valores da coluna c_j e da coluna b_i).

É indispensável efetuar uma mudança de base. Mas qual? Isto é, que variável deve ser tornada básica e que variável lhe deve ceder passo, de forma a melhorar (isto é, aumentar) o valor da função-objetivo?

Se a solução inicial for, como se espera, suscetível de melhora, ao menos uma das variáveis não-básicas, x_1, x_2 ou x_3, que, neste momento, têm valor zero, substituiria, com vantagem, uma das atuais variáveis básicas (x_4, x_5, x_6 e x_7).

Examine-se (ver Quadro I, página 16) a coluna da matriz, situada sob a variável x_1. Ela contém os valores 3, 5, 1 e 2. São os mesmos valores que aparecem na página 14, precedidos de sinal negativo, quando o sistema é escrito de forma a salientar a expressão das variáveis básicas em função das não-básicas. Que ocorrerá, então, se, mantidos x_2 e x_3 iguais a zero procurarmos atribuir a x_1 o valor 1 (um)? Basta introduzir este valor nas expressões da página 14, para ver que x_4, x_5, x_6 e x_7, respectivamente, se *reduzem* de 3, 5, 1 e 2. Isto é, a coluna existente sob uma variável não-básica indica quantas unidades, de cada uma das variáveis básicas, *é necessário sacrificar*, a fim de ingressar, na solução, com *uma unidade desta mesma variável não-básica*.

O produto, par a par, dos valores da coluna c_j pelos da coluna x_1, exprime este "sacrifício" em termos de lucro perdido, quando retiradas as quantidades assim assinaladas, das variáveis básicas, para abrir caminho à introdução de uma unidade da variável não-básica correspondente. A soma destes produtos figura na linha Z_j, sob x_1. Evidentemente, como, na primeira iteração, os lucros unitários c_j, das variáveis básicas, são nulos, nulo também é o valor Z_j; mas, nas iterações seguintes, à medida em que as variáveis auxiliares forem sendo substituidas, na base, pelas variáveis originais, este valor passa, também, a ser diferente de zero, impondo-se, sempre, calculá-lo.

Pode-se, agora, concluir que a inclusão de uma unidade da variável não-básica x_1 implica no aumento de 7 unidades no lucro (7 é o coeficiente de x_1 na função-objetivo) e no "prejuizo" (pelo sacrifício de diferentes quantidades nas variáveis básicas) de zero, levando a um *ganho líquido* de 7, valor que se consigna na linha inferior, $(c_j - Z_j)$.

O mesmo raciocínio é feito para as demais variáveis não básicas, resultando, na linha $(c_j - Z_j)$, os valores 7, 8 e 9, respectivamente para x_1, x_2 e x_3 (para as variáveis básicas, evidentemente, o valor é zero, pois a inclusão de uma unidade adicional implica na redução da mesma unidade, nada alterando no lucro).

> *"O algoritmo simplex elege, para ingressar na base, a variável não-básica que exiba o maior ganho líquido na inclusão unitária".*

Nestas condições, deve ingressar na base a variável x_3, por ser a que oferece o maior acréscimo à função-objetivo, ao ingressar com uma unidade na solução.

Resta resolver dois problemas - Quantas unidades de x_3 podem ser introduzidas na base? Qual a variável, dentre as que se acham, agora, na base, que será deslocada por x_3?

A coluna do Quadro 1, encimada por x_3, mostra que, a cada unidade de x_3, que ingressar na base, x_5 se reduz de 6 unidades, x_6 de 4 e x_7 de 5. À medida, portanto, que sucessivas unidades de x_3 forem introduzidas, x_5, x_6 e x_7 (mas não x_4) serão progressivamente exauridas. Dividindo-se o valor da coluna b_i pelo valor da coluna x_3, na mesma linha, tem-se o *número de unidades de* x_3 *que exaure completamente cada uma das três variáveis*, x_5, x_6 *e* x_7.

Ora, como nenhuma variável poderá assumir valores negativos, segue-se que o crescimento de x_3 cessará quando a *primeira das três outras variáveis se esgotar até zero.*

Daí a regra:

> *"O algoritmo Simplex determina a variável que sai da base, a cada iteração, pelo menor quociente $b_i/\alpha_{ij}{}^*$, em que $\alpha_{ij}{}^*$ são os elementos positivos da coluna da variável que ingressa na base".*

Identificadas as variáveis que permutam de posição, na base, resta saber como reestruturar a matriz, de forma a exprimir, então, as novas variáveis básicas em função das não-básicas, fazendo com que, agora, a matriz identidade corresponda ao novo elenco de variáveis básicas.

Duas são as regras que sintetizam a manipulação da matriz, para alcançar este fim; a primeira dispõe sobre a reestruturação da linha da variável que deixa a base; a segunda diz respeito a todas as demais linhas.

Para fins desta operação, integram-se à matriz os valores da coluna b_i.

"Elemento pivotal", nos enunciados que seguem, é o coeficiente $\alpha_{i^*j^*}$, situado na intersecção da coluna da variável que ingressa na base, com a linha da variável que deixa a base. Este elemento se acha assinalado, em cada caso, nos Quadros da página 16, cercado por um retângulo.

Além do "elemento pivotal", as seguintes definições são necessárias:

α'_{ij} - Elemento homólogo, na nova matriz, do elemento α_{ij}.

α_{i^*j} - Elemento da coluna j, na linha da variável que deixa a base.

α_{ij^*} - Elemento da linha i, na coluna da variável que ingressa na base

Isto posto, tem-se:

a). Para a linha da variável que deixa a base, os novos elementos se obtêm por simples divisão pelo elemento pivotal:

$$\boxed{\alpha'_{i^*j} = \frac{\alpha_{i^*j}}{\alpha_{i^*j^*}}}$$

b). Para as demais linhas, o elemento da nova matriz é igual ao seu homólogo, na matriz anterior, menos o valor de uma fração cujo numerador é o produto dos elementos que se situam nas projeções deste homólogo sobre a linha da variável que deixa a base e sobre a coluna da variável que nela ingressa e cujo denominador é o elemento pivotal:

$$\boxed{\alpha'_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{i^*j} \cdot \alpha_{ij^*}}{\alpha_{i^*j^*}}}$$

O Quadro II, página 16, foi obtido com a aplicação destas regras. Em lugar de x_5, ingressa, na segunda linha, a variável x_3. O elemento pivotal é 6 e a segunda linha do Quadro II é o resultado da divisão dos elemento da segunda linha do Quadro I, por 6. Os elementos das demais linhas foram obtidos pela aplicação da segunda regra. Por exemplo: O valor 50/3, correspondente à variável x_7, na coluna b_i, foi obtido como segue:

Valor homólogo, no Quadro I - 300.
"Projeções" deste valor, sobre a linha e a coluna, respectivamente da variável que deixa a base e da variável que nela ingressa (ver Quadro I) 340 e 5,
Segue-se: $300 - (340 \cdot 5/6) = 50/3$.

Numerando as oito colunas da matriz, de 0 a 7 e fazendo $j=0$ para a coluna b_i, as demais conservam o número da respectiva variável; as linhas são numeradas de 1 a 4.

Nestas condições, $\alpha_{10} = 230$; $\alpha'_{10} = 230$, pois

$$\alpha'_{10} = \alpha_{10} - \frac{\alpha_{20} \cdot \alpha_{13}}{\alpha_{23}} = 230 - \frac{340 \cdot 0}{6} = 230$$

(lembrando que, no Quadro I, $i^*=2$, $j^*=3$).

Da mesma forma,

$$\alpha'_{41} = 2 - \frac{5 \cdot 5}{6} = 2 - 25/6 = -13/6$$

$\alpha'_{25} = \dfrac{\alpha_{25}}{\alpha_{23}} = 1/6$, por se achar na linha da variável que deixou a base, no Quadro I.

Obtido o Quadro II, vê-se, na linha $c_j - Z_j$, que a variável x_2 oferece ganho líquido positivo, indicando que sua entrada, na base, será vantajosa. O menor quociente, mencionado na regra da página 18, é 230/4, correspondente a x_4. Esta, portanto, deixa a base, resultando, em nova pivotação, o Quadro III, cuja linha $c_j - Z_j$ só apresenta valores nulos ou negativos, não havendo, pois, variável cujo ingresso na base traga melhoria para a função-objetivo. Assim sendo, a solução do Quadro III é ótima.

Por ela, verifica-se que, na atual conjuntura de produção e lucros, não é interessante fabricar o produto A_1; devem ser produzidas 57,5 unidades de A_2 e 37,5 (i. é, 225/6) unidades de A_3. Os departamentos 1 e 2 trabalharão no limite de sua capacidade (dado que x_4 e x_5 não figuram na base e, por conseguinte, são nulas as folgas destes departamentos). Mas restarão, não utilizadas, 5 e 112,5 horas de trabalho, respectivamente, nos departamentos 3 e 4. O lucro assim obtido, máximo, é de 797,5.

Se, no entanto, o produto não admitir fracionamento, devendo ser expresso em quantidades inteiras, a solução acima não serve, pois não se trataria, apenas, de "arredondá-la" para o inteiro mais próximo. A busca da melhor solução inteira constitui outro problema de Programação Linear, que demanda um algoritmo adicional, após encontrada a solução fracionária.

EXERCÍCIO

Seja o seguinte problema de Programação Linear:

Maximizar $Z=3x_1+2x_2$, respeitadas as seguintes restrições:

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &\leq 10 \\ x_1-x_2 &\leq 5 \\ 2x_1+3x_2 &\leq 23 \\ (x_1, x_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

Além da solução algébrica, que reproduz o algoritmo Simplex, poderia ser tentada, apenas para exemplificação, a solução exaustiva, de perquirir todos os sistemas de três equações e três incógnitas, que se podem gerar a partir do sistema dado. Com efeito, introduzidas as variáveis auxiliares, resultam cinco variáveis, que podem ser combinadas, três a três, de dez maneiras diferentes:

Sistema completo, com variáveis auxiliares:

$$\begin{aligned} 1x_1+1x_2+1x_3+0x_4+0x_5 &= 10 \\ 1x_1-1x_2+0x_3+1x_4+0x_5 &= 5 \\ 2x_1+3x_2+0x_3+0x_4+1x_5 &= 23 \end{aligned}$$

As dez combinações das cinco variáveis, três a três, são as seguintes, já com as respectivas soluções:

x_1, x_2, x_3 - Descartada;	contém solução negativa;				
x_1, x_2, x_4 - Resolve-se,	$x_1=7$,	$x_2=3$,	$x_4=1$;		Z=27
x_1, x_2, x_5 - Resolve-se,	$x_1=7,5$;	$x_2=2,5$;	$x_5=0,5$;		Z=27,5
x_2, x_3, x_4 - Resolve-se,	$x_2=23/3$;	$x_3=7/3$;	$x_4=38/3$;		Z=15,33
x_2, x_3, x_5 - Descartada;	contém solução negativa;				
x_3, x_4, x_5 - Resolve-se,	$x_3=10$;	$x_4=5$;	$x_5=23$;		Z=0
x_1, x_3, x_4 - Descartada;	contém solução negativa;				
x_1, x_3, x_5 - Resolve-se,	$x_1=5$;	$x_3=5$;	$x_5=13$;		Z=15
x_1, x_4, x_5 - Descartada;	contém solução negativa;				
x_2, x_4, x_5 - Idem.					

Portanto, após a exaustiva busca de todas as soluções, verifica-se que somente a metade é viável, em termos do problema de programação linear, para finalmente encontrar, no terceiro sistema, o resultado ótimo. O método Simplex leva à solução final em apenas duas iterações. Mas o importante é salientar que o método apenas acelera a busca da solução e que ela, em suma, consiste em tomar apenas tantas variáveis quantas são as restrições, descartando o excesso além deste número, para buscar a melhor solução.

2.1. VARIÁVEIS LIVRES

A natureza do problema poderá ditar que não prevaleça a restrição implícita, de não-negatividade, sobre uma ou mais das variáveis originais do problema. O modelo de otimização de uma carteira de títulos,por exemplo, poderá admitir soluções negativas, significando a venda do título em questão, permanecendo o significado positivo para a compra. Na tentativa de otimizar uma rede de reservatórios de água, poderá ser conveniente aceitar que a variável negativa signifique adução de água para o reservatório, ou vice-versa, o débito deste reservatório.

O modelo de programação linear não admite esta liberdade. Impõe-se contornar a dificuldade, neste caso, através de um artifício. Consiste este, simplesmente, em substituir, nas restrições, cada variável livre, por duas outras, estas últimas obedientes às restrições implícitas,de não-negatividade. A variável livre seria expressa pela diferença entre as duas novas variáveis, podendo, então, conforme os valores ótimos destas últimas, assumir, pela diferença entre elas, valores positivos, nulos ou negativos.

Assim, se x_r é variável livre, afeta do coeficiente K, faz-se sua substituição pela diferença $(x_s - x_t)$, em que x_s e x_t são variáveis não-negativas, afetas, respectivamente, dos coeficientes +K e -K.

2.2. MINIMIZAÇÃO DA FUNÇÃO-OBJETIVO

Se o procedimento de otimização exigir que o valor da função Z seja mínimo, em lugar de máximo, duas soluções podem ser empregadas:

a). Multiplicar por -1 a função-objetivo e passar a maximizá-la, pois MAX {-Z} equivale a MIN {Z}.

b). Minimizar diretamente, invertendo a regra da página 18. Em lugar de fazer ingressar na base a variável que apresente o maior valor positivo, na linha inferior da matriz, (c_j-Z_j), deve ser adotada a variável com o maior, em valor absoluto, dentre os valores *negativos* de (c_i-Z_j).

O sentido da otimização, em si, portanto, não oferece qualquer dificuldade. A solução ótima, no caso b), surge quando a linha final da matriz não mais apresentar valores negativos.

Mas, via de regra, a minimização está associada a um esquema de restrições onde há limites superiores para as combinações lineares das variáveis, isto é, restrições do tipo

$\sum_j \alpha_{ij}x_j \geq b_i$ ou, simplesmente, $\sum_j \alpha_{ij}x_j = b_i$

pois não teria sentido *minimizar* a função-objetivo, em presença, apenas, de restrições do tipo "$\leq$", quando positivos os valores de α_{ij}. Bastaria, neste caso, tornar nulas as variáveis.

O tratamento às restrições que impõem limites superiores não é tão imediato, pois não é válido, aqui, o artifício de multiplicar a restrição por -1, com o intuito de inverter o sentido da desigualdade, pois este procedimento violaria a regra que impõe sejam positivos os b_i.

Seja a restrição

$5x_1+2x_2-x_3 \geq 4$; a multiplicação por -1 daria

$-5x_1-2x_2+x_3 \leq -4$, resultando o termo independente negativo, o que não é aceitável no Simplex convencional.

Não basta, tampouco, transformar a desigualdade em igualdade, pela introdução da variável auxiliar x_4, afeta de coeficiente -1, já que se trata de *reduzir* o valor do membro esquerdo da desigualdade:

$5x_1+2x_2-x_3-x_4=4$ (A)

A expressão (A), embora satisfaça à primeira, não satisfaz à segunda condição da forma canônica, mencionada na página 13, pois não conta com uma variável, afeta de coeficiente +1, cujo coeficiente, nas demais restrições, seja zero.

Como contornar a dificuldade? Sem a presença de uma variável "canônica", o sistema não pode "arrancar", pois não apresenta a matriz identidade que identifica uma solução.

O remédio é impor, arbitrariamente, nova variável à equação, a qual, tal como as demais, será não-negativa, isto é, igual a zero ou maior que zero. Mas, contrariamente às variáveis auxiliares, esta variável não é uma "folga", algo que transforma uma desigualdade em igualdade. Esta, a igualdade, já está assegurada, pela inclusão de uma variável auxiliar, precedida de coeficiente -1. Portanto, a nova variável, enquanto permanecer na solução (isto é, "na base"), viola a restrição inicial, com sua presença espúria. Seja x_5 esta variável:

$$5x_1+2x_2-x_3-x_4+x_5=4.$$

Ora, se $x_5 \neq 0$, isto é, se esta variável figurar na base, evidentemente estará rompida a igualdade anterior, pois $5x_1+2x_2-x_3-x_4$ já não poderá ser *igual* a 4. Cumpre, pois, assegurar que seu papel seja efêmero e que, cumprida sua missão de oferecer uma solução de partida, ela seja, tão cedo quanto possível, expulsa da base, para assumir valor zero, tornando-se inócua.

Como assegurar este objetivo, fazendo com que, automaticamente, o algoritmo Simplex, em sua marcha, promova sua expulsão da base?

Há duas soluções.

A primeira consiste em construir uma função-objetivo preliminar, distinta da real, formada exclusivamente da soma das variáveis artificialmente impostas ao sistema (uma para cada restrição do tipo "≥" ou do tipo "=") A denominação, aliás, destas variáveis, para distingui-las das auxiliares, é, precisamente, de "variáveis artificiais". A função-objetivo assim construida será minimizada; quando atingir o valor zero, ter-se-á a eliminação das variáveis artificiais, pois, graças à sua não-negatividade, quando sua soma for nula, estará assegurada a nulidade de todas elas.

O segundo procedimento, denominado "método do M grande", simplesmente adiciona as variáveis artificiais à função-objetivo original, cuidando, porém, de lhes atribuir, nesta função, coeficientes que superem, em valor absoluto, por larga margem, todos os demais coeficientes, aplicados às outras variáveis.

Tais coeficientes, porém, devem ter sinal oposto ao sentido da otimização, isto é, negativo, em se tratando de maximização da função-objetivo; positivo, se o objetivo for a minimização.

Desta forma, o Simplex, ao procurar maximizar, afastará, automaticamente, todas as variáveis afetas de coeficientes negativos, de grande valor absoluto; inversamente, procurará descartar-se de variáveis dotadas de coeficientes positivos muito grandes, sempre que se tratar de minimização da função-objetivo.

Na sucessão de iterações, sempre que uma variável artificial for ejetada da base, a coluna que lhe corresponde, no quadro, pode ser inteiramente suprimida, pois não há hipótese de ocorrer que o processo inverta a convergência rumo à solução ótima, para repor na base esta variável. Assim, com o tempo, a matriz se reduz às dimensões originais, escoimada de todas as variáveis artificiais. Lembrar, porém, que esta faculdade só existe para as variáveis artificiais; as variáveis auxiliares devem permanecer até o fim e podem, mesmo, retornar à base, em iteração subseqüente, após haverem sido removidas.

Convém, à esta altura, recapitular a distinção entre variáveis auxiliares e artificiais:

Variável	Função	Coeficientes	
		na restrição	na função-obj.
Auxiliar	Transformar desigualdade em igualdade.	+1, se "≤" -1, se "≥"	sempre zero
Artificial	Completar solução básica de partida.	sempre +1; só ocorrem em "≥" e "=".	-M, se maximização; +M na minimização *

$* |M| >> Max |c_j|$.

2.3. RESULTADOS ANÔMALOS

Pode ocorrer que, em lugar de alcançar a solução óptima, o algoritmo chegue a um impasse, incapaz de prosseguir.

Há duas situações em que a condição de impasse pode surgir.

A primeira se caracteriza pela impossibilidade de selecionar a variável que *sai* da base, embora bem caracterizada a variável que deva entrar na base. Esta impossibilidade decorre de serem, todos, não-positivos os coeficientes α_{ij} que formam a coluna da variável que deve ingressar, tornando, destarte, impossível a formação dos quocientes discriminadores, mencionados na regra da página 18, que exigem denominadores positivos.

Com efeito, se todos os coeficientes da coluna pivotal forem nulos ou negativos, não há variável cujo valor caia para zero, à medida em que é incrementada a nova variável. Pelo contrário, algumas das variáveis da base *crescerão* com a nova inclusão, outras permanecerão inalteradas. Isto significa que não há, no caso, efetivamente, um problema de programação, pois este sempre pressupõe a limitação de recursos. Aqui, porém, uma das variáveis não é limitada, pode crescer indefinidamente. Ora, se esta variável tem, na função-objetivo, coeficiente positivo, e o problema é a maximização, é evidente que não haverá solução finita para o Simplex: Quanto mais crescer a variável, maior a função-objetivo.

Seja maximizar $Z=3x_1+2x_2$, dado que

$$x_1-2x_2\leq 10 \qquad \text{e}$$
$$2x_1+x_2\geq 15$$

A simples inspecção visual revela que o modelo está mal formulado: Quanto maior x_2, maior a função-objetivo, menor a primeira restrição e maior a segunda. O Simplex, se intentado, revelará esta condição: na primeira iteração, a variável artificial da segunda restrição é substituida por x_1; a seguir, a folga da primeira restrição cede passo à da segunda. Neste ponto, surge o impasse - é indicado o ingresso de x_2 na solução, mas os coeficientes da coluna correspondente são ambos negativos (-5 e -2)

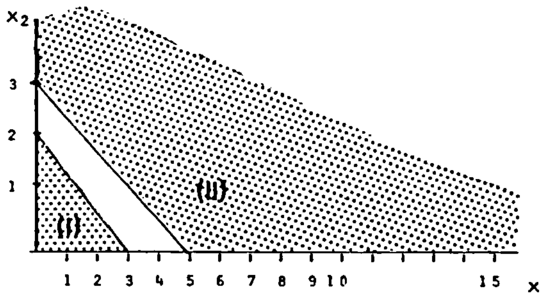
A segunda situação anômala surge quando o algoritmo chega ao fim, a solução é aparentemente ótima e não há como melhorá-la, mas uma variável artificial ainda perdura na base, não tendo sido expulsa. Este resultado exprime uma situação de insanável contradição na formulação inicial, impondo que uma variável seja, simultaneamente maior e menor que determinada quantidade, tornando inviável o problema.

Seja maximizar $2x_1+5x_2$, dado que

$$2x_1+3x_2 \leq 6 \quad \text{e}$$
$$3x_1+5x_2 \geq 15$$

O Simplex chegará a uma situação insuscetível de melhoria logo após a primeira iteração, mantendo, na base, a variável artificial.

Esta condição decorre da impossibilidade de atender à contradição expressa nas restrições, como se depreende da figura abaixo:



As restrições obrigam as variáveis a se situarem, simultaneamente, em duas regiões do plano, abaixo da reta (I) e acima da reta (II).

A degenerescência é uma anomalia adicional, que, no entanto, geralmente não afeta o resultado final. Consiste no surgimento do valor zero, para uma variável *da base*. Ora, tal não deveria ocorrer, pois as variáveis às quais corresponde o valor zero deveriam se achar, precisamente por esta razão, fora da base. Uma particular combinação de coeficientes pode, no entanto, fazer com que, ao ingressar nova variável na base, *duas* das antigas variáveis básicas sejam levadas a zero, em lugar de uma só. Uma das causas possíveis desta anomalia é a existência de restrições supérfluas, já contidas em outras e, portanto, redundantes. Ora, como o número de variáveis não-nulas deve corresponder ao de equações linearmente independentes, não é de admirar que, havendo uma restrição desnecessária, fruto da combinação de outras, já existentes, uma variável da base fique nula. É o que ocorre com o exemplo abaixo. Dadas as restrições

$$5x_1+2x_2 \leq 10, \quad x_1 \leq 2, \quad x_2 \leq 5, \quad x_1 \geq 0, \text{ e } x_2 \geq 0,$$

a segunda e a terceira são supérfluas, pois já se contêm na primeira, bastando, para comprová-lo, fazer, nesta última, sucessivamente, $x_1=0$ e $x_2=0$.

As degenerescências não são vícios essenciais e não impedem o prosseguimento do método iterativo, mas podem alongar consideravelmente o processo de convergência.

2.4. DUALIDADE

Seja o problema abaixo:

Minimizar $W=20y_1+33y_2+42y_3+58y_4$, dado que

$$\begin{aligned}4y_1+5y_2+6y_3+7y_4 &\geq 16\\3y_1+4y_2+5y_3+6y_4 &\geq 25\\2y_1+3y_2+4y_3+5y_4 &\geq 36\end{aligned}$$

A solução deste problema implica, pelo que já foi exposto, em criar tres variáveis auxiliares e tres variáveis artificiais. Sejam y_5, y_6 e y_7 as auxiliares, respectivamente para a primeira, segunda e terceira restrições, enquanto que y_8, y_9 e y_{10} são as variáveis artificiais, para as mesmas restrições.

A solução final, como o leitor pode verificar, surge após sete iterações, tendo o quadro final o seguinte aspecto, quando atingida a solução ótima:

c_j	Vb	b_i	20	33	42	58	0	0	0
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
20	y_1	18	1	1,5	2,0	2,5	0	0	-0,5
0	y_5	56	0	1,0	2,0	3,0	1	0	0,8
0	y_6	29	0	0,5	1,0	1,25	0	1	1,5
Z_j		360	20	30	40	50	0	0	-10
c_j-Z_j			0	3	2	8	0	0	10

Examine-se, agora, o seguinte sistema:

Maximizar $Z=16x_1+25x_2+36x_3$, dado que

$$\begin{aligned}4x_1+3x_2+2x_3 &\leq 20\\5x_1+4x_2+3x_3 &\leq 33\\6x_1+5x_2+4x_3 &\leq 42\\7x_1+6x_2+5x_3 &\leq 58\end{aligned}$$

Este modelo é o *dual* do anterior, que passa a ser chamado de *primal* A dualidade reside em que o dual visa a maximização, quando o primal objetiva a minimização (e vice-versa); o primal tem "n" variáveis e "m" restrições, enquanto que o dual tem "m" variáveis e "n" restrições; os coeficientes b_i do primal são os coeficientes c_j do dual e vice-versa; a matriz de coeficientes α_{ij}, das restrições do dual, é a transposta da matriz análoga, do primal.

Os modelos ligados por dualidade têm soluções afins e esta propriedade pode ser explorada para reduzir o trabalho na solução. Via de regra, é mais simples enfrentar um problema de maximização, com restrições do tipo "menor ou igual", que lidar com as variáveis artificiais, próprias dos modelos contendo restrições do tipo "maior ou igual".

O exame do quadro final do dual, já alcançado na primeira iteração (portanto, muito mais rapidamente que no primal), permite salientar a afinidade entre ambos:

c_j			16	25	36	0	0	0	0
	Vb	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
36	x_3	10	2	3/2	1	1/2	0	0	0
0	x_5	3	-1	-1/2	0	-1/2	1	0	0
0	x_6	2	-2	-1	0	-2	0	1	0
0	x_7	8	-8	-3/2	0	-5/2	0	0	1
Z_j		360	72	54	36	18	0	0	0
$c_j - Z_j$			-56	-29	0	-18	0	0	0

As duas soluções apresentam as seguintes peculiaridades:

a). O valor ótimo da função-objetivo, nos dois casos, é o mesmo (diz-se que, na solução óptima, Z^* e W^* formam um "ponto de sela").

b). Os valores das variáveis x_i, na solução ótima do primal, se acham, em valor absoluto, reproduzidos na linha $c_j - Z_j$ do dual, o mesmo ocorrendo para os valores ótimos das variáveis y_i do dual, que se acham, em valor absoluto, na última linha do quadro final do primal.

A ligação entre as variáveis do primal e do dual é obtida da seguinte forma:

> A folga da primeira restrição do primal é y_5; o termo independente desta restrição está associado, na função-objetivo do dual, à variável x_1.Logo, y_5 e x_1 são associadas, como se pode verificar na solução. Da mesma forma, y_6, folga da segunda restrição do primal, está ligada a x_2, através do termo indenpendente,25, desta restrição. Segue-se a ligação de y_7 com x_3, e por analogia, passando às variáveis auxiliares do dual, x_4, x_5, x_6 e x_7, determina-se sua associação, respectivamente, com y_1, y_2, y_3 e y_4.

Desta forma, pode-se obter a solução do primal pelo dual, ou vice-versa, deste por via daquele.

3. PROGRAMAÇÃO LINEAR EM NÚMEROS INTEIROS

Freqüentemente, os problemas de programação linear se apresentam com uma restrição adicional, segundo a qual uma ou mais variáveis devem ter solução em números inteiros, não sendo aceita a solução fracionária, seja porque não faz sentido, seja porque contraria frontalmente o significado físico da variável.

São exemplos típicos de tais problemas os modelos de determinação de quantidades a produzir, quando, por sua natureza, os produtos só podem ser expressos por números inteiros. Todos os problemas de desdobramento de peças inteiras, para gerar elementos menores, recaem, também, nesta categoria, como é o caso do exemplo abaixo:

"Como obter oito pedaços de cano, de 0,80m de comprimento, e nove pedaços de 1,20m, a partir de seis varas de 1,80m e cinco varas de 2,40m, de modo a minimizar o comprimento total das varas cortadas?"

Este tipo de problema exige a configuração prévia de todas as hipoteses de corte, constituindo cada hipótese uma variável:

Hipótese de corte	A partir da vara de 1,80	2,40
1 de 0,80	x_1	x_2
2 de 0,80	x_3	x_4
3 de 0,80	-	x_5
1 de 1,20	x_6	x_7
2 de 1,20	-	x_8
1 de 0,80 + 1 de 1,20	-	x_9

É fácil de ver que o problema se resume, agora, em:

Minimizar $Z=1,80(x_1+x_3+x_6)+2,40(x_2+x_4+x_5+x_7+x_8+x_9)$,

dado que

$$x_1+x_3+x_6 \leq 6$$
$$x_2+x_4+x_5+x_7+x_8+x_9 \leq 5$$
$$x_1+x_2+2x_3+2x_4+3x_5+x_9 \geq 8$$
$$x_6+x_7+2x_8+x_9 \geq 9$$

onde, além da não-negatividade, surge a imposição dos resultados inteiros, pois, para fins práticos, de pouco serviria saber que o resultado ótimo seria

$x_3=13/4$
$x_5=\ 1/2$
$x_8=\ 9/2$
$x_{10}=11/4$,

pois as varas não poderiam ser cortadas, proveitosamente, nas frações indicadas.

Dois algoritmos são oferecidos, para a solução em números inteiros, ambos partindo da solução no campo contínuo e procurando, depois, convergir para a solução discreta, mediante restrições adicionais, que vão progressivamente sacrificando o valor ótimo da solução contínua, até encontrar a solução inteira.

3.1. O ALGORITMO DE GOMORY (OU "DOS PLANOS SECANTES")

No exemplo anterior, sobre o corte de canos, a variável x_8, na solução ótima contínua, apresentou valor 9/2. A linha correspondente a ela, no quadro final, tinha os seguintes valores:

$0{,}5x_6+0{,}5x_7+x_8+0{,}5x_9-0{,}5x_{13}=9/2$ (em que x_{13} é a variável auxiliar da 4a. restrição).

Escrevendo, agora, cada fração como a soma de um inteiro e uma fração *menor que um e positiva*, tem-se:

$(0+0{,}5)x_6+(0+0{,}5)x_7+(1+0)x_8+(0+0{,}5)x_9+(-1+0{,}5)x_{13}=4+0{,}5$

Reunindo, agora, os termos inteiros no lado direito:

$0{,}5x_6+0{,}5x_7+0{,}5x_9+0{,}5x_{13}=0{,}5+(4-x_8+x_{13})$

Quando todas as variáveis forem inteiras, a expressão à direita, entre parênteses, será necessariamente um inteiro. A não-negatividade das variáveis, por outro lado, assegura que o membro esquerdo da igualdade seja positivo, pois só contém coeficientes positivos. Segue-se que o inteiro, à direita, é, também, não-negativo, pois, se fosse negativo faria todo o membro à direita negativo, já que este é um inteiro somado a uma fração menor que um (0,5), Mas, como já visto, pela não-negatividade do membro esquerdo, tem-se a não-negatividade também à direita.

Portanto, $(4-x_8+x_{13})\geq 0$, seguindo-se que

$0{,}5x_6+0{,}5x_7+0{,}5x_9+0{,}5x_{13}\geq 0{,}5$, se todas as variáveis forem inteiras. Esta expressão passa, pois, a constituir nova restrição, que é aditada ao sistema original. Se a solução ótima do novo problema não apresentar, ainda, valores inteiros, cumpre, pelo mesmo raciocínio, introduzir nova restrição, e assim sucessivamente, até alcançar o resultado desejado.

Para escolher qual a variável que fornecerá a nova restrição, adota-se a praxe de recorrer à que apresente o maior resíduo fracionário. No problema anterior, portanto, teria sido preferível eleger como equação de partida a linha de x_{10}, folga da primeira restrição, pois, no quadro final, exibe ela o valorde 11/4, com o resíduo fracionário, portanto, de 3/4, maior que o de x_8. Mas esta regra não é mais que uma recomendação puramente empírica.

Para escrever a nova restrição, pois, basta escolher a linha que lhe dará origem (b_i com maior resíduo fracionário) e substituir todos os coeficientes da linha pelos *menores* valores não-negativos, congruentes destes coeficientes; a expressão resultante deve ser feita maior ou igual à parte fracionária do valor de b_i, na linha considerada. Lembrar que dois números são congruentes se sua diferença é inteira, considerado zero como inteiro.

Assim, 22/17 é congruente de 5/17; -4/7 é congruente de 3/7.

Se a linha da variável x_3 for

$7,567 = 0,75x_1+4,67x_2+x_3-2,4x_4-3,45x_5$, a nova restrição seria:

$0,75x_1+0,67x_2+0,6x_4+0,55x_5 \geq 0,567$.

Para aditar a nova restrição, pode-se, com vantagem, recorrer a uma técnica ligeiramente modificada, no algoritmo Simplex, para evitar a geração de uma variável artificial. Trata-se do método Simplex-Dual, que aceita valores negativos de b_i. Enquanto houver b_i negativo, faz-se nova iteração, cessando quando todos os valores b_i forem positivos (ou nulos), indicação de haver sido alcançada a solução óptima.

Partindo-se do quadro final da solução contínua, acrescenta-se uma linha formada pela nova restrição, *após a introdução da variável auxiliar que a trasforma em igualdade e a multiplicação de toda a expressão por -1. Esta multiplicação por -1 torna negativo o valor de b_i e permite o emprego do Simplex-Dual.*

Tome-se o Quadro (III), página 16. Se imposto que as soluções sejam inteiras, qualquer uma das tres variáveis fracionárias pode dar origem à nova restrição. Seja x_3 a variável eleita. A nova restrição sera, então:

$7/12\ x_1+11/12\ x_4+1/6\ x_5 \geq 1/2$

Com a variável auxiliar, fica:

$7/12\ x_1+11/12\ x_4+1/6\ x_5-x_8=1/2$ e, multiplicada por -1:

$-7/12\ x_1-11/12\ x_4-1/6\ x_5+x_8=-1/2$

Assim ela é introduzida no quadro. Basta, agora, lembrar que, na técnica Simplex-Dual, primeiro *se determina a variável que sai da base, depois, a que nela ingressa*. Sai a que apresentar b_i "mais negativo" (no caso, a nova variável x_8, a única que tem $b_i<0$). Ingressa a que apresentar o menor quociente, em valor absoluto, dos valores da linha c_j-Z_j pelos valores *negativos* dos coeficientes a_{ij}, na linha da variável que deixa a base. No caso, o menor quociente surgirá na coluna da variável x_4, pois os valores obtidos são:

Para x_1 - $-17/4:-7/12=7,29$
Para x_4 - $-5/4:-11/12=1,35$
Para x_5 - $-3/2:1/6=9,00$

Portanto, ingressa na base, agora, a variável x_4. As regras de pivotação são idênticas às do Simplex.

O novo Quadro, com a simples adição da nova restrição fica como abaixo:

c_j			7	8	9	0	0	0	0	0
	Vb	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
8	x_2	115/2	3/4	1	0	1/4	0	0	0	0
9	x_3	225/6	7/12	0	1	-1/12	1/6	0	0	0
0	x_6	5	-17/6	0	0	-1/6	-2/3	1	0	0
0	x_7	225/2	-11/12	0	0	5/12	-5/6	0	1	0
0	x_8	- 1/2	-7/12	0	0	-11/12	-1/6	0	0	1
Z_j		797,59	45/4	8	9	5/4	3/2	0	0	0
c_j-Z_j			-17/4	0	0	-5/4	-3/2	0	0	0

E, após a pivotação:

c_j			7	8	9	0	0	0	0	0
	Vb	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
8	x_2	57,36	0,59	1	0	0	-0,05	0	0	0,27
9	x_3	37,55	0,64	0	1	0	0,18	0	0	-0,09
0	x_6	5,09	2,73	0	0	0	-0,64	1	0	-0,18
0	x_7	112,27	-1.18	0	0	0	-0,91	0	1	0,45
0	x_4	0,55	0,64	0	0	1	0,18	0	0	1,09
Z_j		796,82	10,48	8	9	0	1,22	0	0	1,35
c_j-Z_j			-3,48	0	0	0	-1,22	0	0	-1,35

Vê-se que a nova restrição apenas reduziu o valor da solução ótima inicial (a nova solução também é ótima, pois todos os b_i são maiores que zero) sem tornar inteiras as variáveis. Novo "corte" deveria ser feito, possivelmente tomando, agora, como referência, a linha da variável x_3, que, juntamente com x_4, tem o maior resíduo fracionário.

3.2. O ALGORITMO "BRANCH AND BOUND"

A melhor tradução para a denominação do algoritmo parece ser "Bifurca e limita"; a expressão descreve razoavelmente bem o procedimento seguido pelo algoritmo.

Seja um problema de programação linear cuja solução, para algumas ou todas as variáveis, deva ser inteira: seja x_m uma destas variáveis e seja K+r seu valor, na solução ótima do problema, alcançada sem o requisito da integralidade, em que K é um inteiro não-negativo (zero inclusive) e r o resíduo fracionário, também não-negativo. Se x_m, por exemplo, for igual 7,43, ter-se-á K igual a 7, r igual a 0,43.

Na busca da solução inteira de x_m, duas hipóteses podem ser feitas:

$$x_m \geq (K+1) \qquad \text{ou, alternativamente,}$$

$$x_m \leq K$$

Cada uma das duas hipóteses acima gera uma nova restrição e, por conseguinte, um novo problema de programação linear, criando uma bifurcação que deverá ser investigada (diferentemente do algoritmo anterior, estas novas restrições sempre são perpendiculares ao eixo de x_m). A investigação dos novos problemas, assim gerados, poderá levar a uma das situações seguintes:

a). Ambos são viáveis, isto é, nenhuma das restrições introduzidas no problema inicial provocou contradição insanável, diante das restrições preexistentes.

b). Um deles é inviável, precisamente porque surgiu tal situação, de insolúvel oposição, com o advento da nova restrição.

Na hipótese a), resolvidos os dois problemas, as novas soluções óptimas podem ser classificadas como segue:

a.1) ambas são inteiras.
a.2) Uma é inteira, para todas as variáveis que assim devam ser, enquanto que a outra não o é.
a.3) Nenhuma delas é inteira.

Na hipótese b), a alternativa em questão é abandonada, cessando toda e qualquer proliferação da busca, quanto a esta hipótese sobre o valor da variável.

Retornando a a.1), ter-se-á, como solução ótima, aquela, dentre as duas soluções inteiras, que apresentar o valor mais satisfatório (maior ou menor, segundo se trate de maximização ou minimização) para a função-objetivo.

Em a.2), a solução inteira será ótima, se mais satisfatório o valor de sua função-objetivo, em cotejo com a alternativa não-inteira. Se esta, porém, apresentar o melhor valor da função-objetivo, ainda não se poderá estar certo quanto a ser ótima a solução inteira alternativa, cumprindo criar, sobre a solução não-inteira, nova bifurcação, fazendo com que uma das variáveis não-inteiras, desta última solução, seja feita, alternativamente, maior que o inteiro imediatamente subseqüente ao seu valor ótimo, ou igual a ele, ou, ainda, menor que o inteiro imediatamente precedente a este mesmo valor (ou igual a ele), pois pode ocorrer que, numa das soluções, surjam os valores inteiros, com função - objetivo ainda maior que o da solução inteira da bifurcação anterior. Cessam as bifurcações quando todas as soluções não-inteiras oferecem, para a função-objetivo, valor menos satisfatório que o já obtido para uma solução inteira.

Em a.3), evidentemente, cumpre bifurcar, novamente, a solução que apresente o melhor valor para a função-objetivo, sobrestando-se, temporariamente, a investigação do ramo menos satisfatório. Tão logo, porém, na bifurcação, surjam soluções ótimas que comunicam valor menos satisfatório à função-objetivo, deve-se retomar o ramo temporariamente sustado.

Em suma, a regra é investigar todas as dicotomias, descontinuando definitivamente as soluções inviáveis e sustando temporariamente outras, prosseguindo, nas ramificações descendentes, sempre em busca dos valores mais satisfatórios da função-objetivo. Cabe lembrar, ainda, que, numa bifurcação, os dois problemas resultantes terão, fatalmente, na solução ótima, função-objetivo menos satisfatória que a do nó de onde provieram, pois são fruto de uma restrição adicional, limitadora, que inevitavelmente deprime a solução anterior.

O diagrama de blocos da página seguinte descreve o procedimento, em suas diferentes opções.

Veja-se, a seguir, a aplicação do algoritmo à solução do problema proposto por Claude McMillan Jr., em "Mathematical Programming", J. Wiley, N. York, 1975, pg. 472:

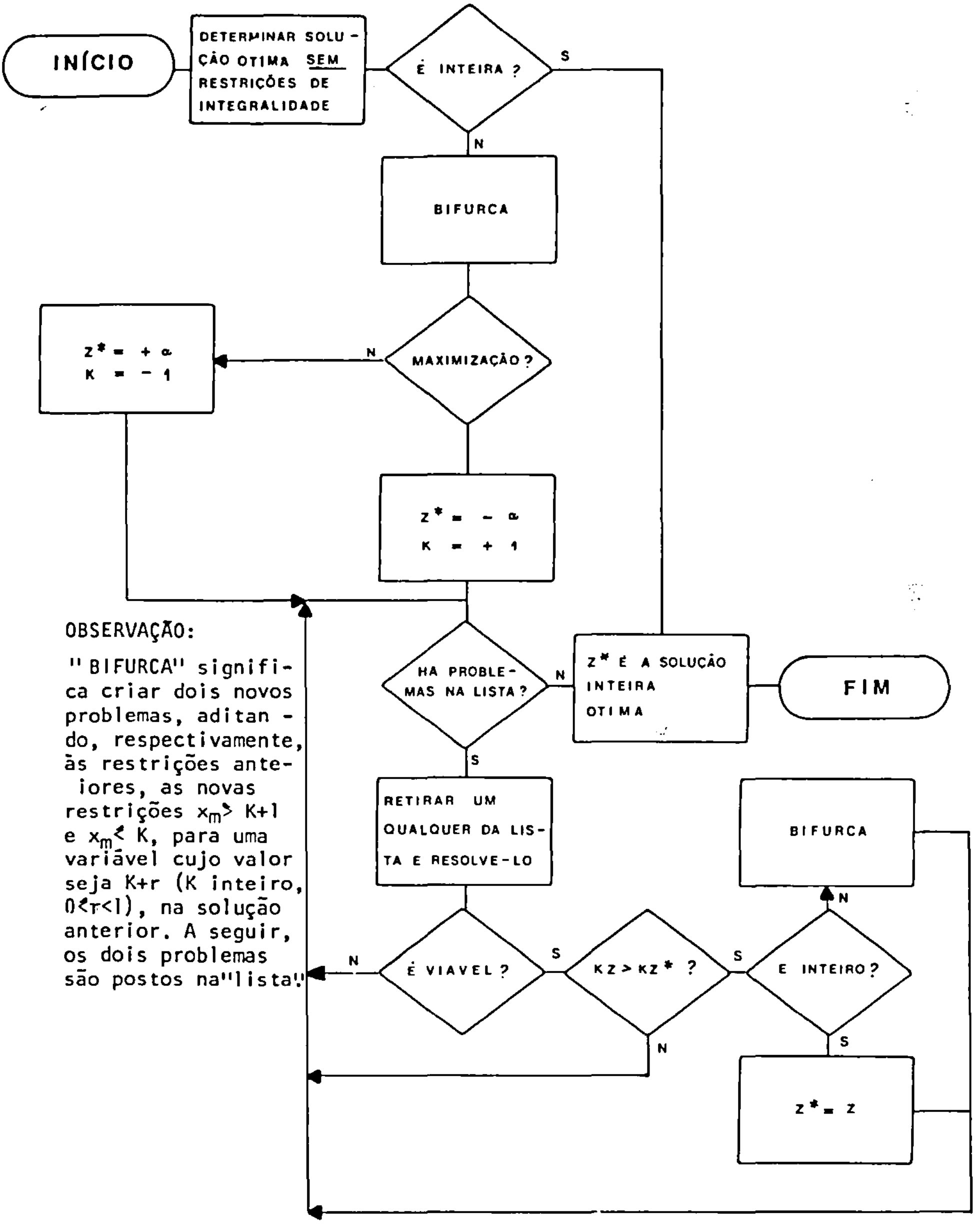
Maximizar $Z=3x_1+2x_2+4x_3$, dado que:

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 15 \\
x_1 + x_2 + x_3 &\leq 12 \\
4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &\leq 25 \\
2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\leq 30, \text{ e, ainda, } x_j \text{ inteiros.}
\end{aligned}
$$

Os Quadros I, II e III, da página 38, contêm a marcha, pelo algoritmo simplex, até a solução ótima, não-inteira, que se acha no último Quadro.

Esta solução constituirá o nó inicial (nó nº 1) do algoritmo que buscará a solução inteira. Qualquer uma das variáveis não-inteiras pode servir para a bifurca-

O ALGORITMO "BRANCH AND BOUND" - DIAGRAMA DE BLOCOS



OBSERVAÇÃO:

"BIFURCA" significa criar dois novos problemas, aditando, respectivamente, às restrições anteriores, as novas restrições $x_m \geq K+1$ e $x_m \leq K$, para uma variável cujo valor seja K+r (K inteiro, $0<r<1$), na solução anterior. A seguir, os dois problemas são postos na "lista".

QUADRO I

c_j → ↓	Vb	b_i	3 x_1	2 x_2	4 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6	0 x_7
0	x_4	15	1	-1	2	1	0	0	0
0	x_5	12	1	1	1	0	1	0	0
0	x_6	25	4	3	3	0	0	1	0
0	x_7	30	2	4	$\boxed{5}$	0	0	0	1
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0
$c_j - Z_j$			3	2	4	0	0	0	0

QUADRO II

c_j → ↓	Vb	b_i	3 x_1	2 x_2	4 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6	0 x_7
0	x_4	3	1/5	-13/5	0	1	0	0	-2/5
0	x_5	6	3/5	1/5	0	0	1	0	-1/5
0	x_6	7	$\boxed{14/5}$	3/5	0	0	0	1	-3/5
4	x_3	6	2/5	4/5	1	0	0	0	1/5
Z_j		24	8/5	16/5	4	0	0	0	4/5
$c_j - Z_j$			7/5	-6/5	0	0	0	0	-4/5

QUADRO III

c_j → ↓	Vb	b_i	3 x_1	2 x_2	4 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6	0 x_7
0	x_4	5/2	0	-37/14	0	1	0	-1/14	-5/14
0	x_5	9/2	0	1/14	0	0	1	-3/14	-1/14
3	x_1	5/2	1	3/14	0	0	0	5/14	-3/14
4	x_3	5	0	5/7	1	0	0	-1/7	2/7
Z_j		27,50	3	3,50	4	0	0	1/2	1/2
$c_j - Z_j$			0	-1,50	0	0	0	-1/2	-1/2

ção inicial. Tomando x_1, tem-se, no Nó nº2, $x_1 \geq 3$, e, no Nó nº3, $x_1 \leq 2$.

Para o primeiro caso, substituimos x_1 por seu valor, obtido no Quadro III da página 38:

$$x_1=5/2-3/14x_2-5/14x_6+3/14x_7$$

A razão desta substituição está em que é necessário, no algoritmo Simplex, exprimir as variáveis básicas em função das não-básicas.

A restrição adicional torna-se, então:

$$-3/14x_2-5/14x_6+3/14x_7 \geq (3-5/2)$$

Acrescentando a variável auxiliar x_8 e multiplicando por -1, tem-se:

$$3/14x_2+5/14x_6-3/14x_7+x_8=-0,5$$

Introduzida esta restrição ao pé do Quadro III(Nó nº1), determina-se, pelas regras do algoritmo Simplex-dual, que x_8 passa a ser substituida por x_7.

Feita a pivotação, tem-se o quadro denominado "Nó 2", na página 40. A solução é ótima, pois todos os b_i são positivos, mas não inteira. Registre-se o valor de $Z_2=26,33$. Para o nó nº 3, tem-se, para $x_1 \leq 2$.

$$-3/14x_2-5/14x_6+3/14x_7+x_9=-0,5,$$

em que x_9 é variável auxiliar. Acrescentada esta restrição ao Nó nº 1, verifica-se que x_6 substitui x_9. O quadro simplex assume o aspecto do "Nó 3", página 40. A solução é ótima ($b_i \geq 0$), mas ainda não inteira. Note-se, também, que $Z_3>Z_2$, já que $Z_3=26,80$.

Em virtude disto, o Nó 2 é temporariamente sobrestado, passando-se a explorar o nível mais conveniente do Nó 3, que é bifurcado, segundo, agora, a variável x_3, arbitrariamente escolhida.

Fazendo-se, no Nó 4, $x_3 \geq 6$ (em razão de $x_3=5,2$, no Nó 3), obtêm-se a restrição adicional:

$$4/5x_2+1/5x_7-2/5x_9+x_{10}=4/5,$$

levando a uma pivotação em que x_{10} é substituido por x_9, com o resultado seguinte, após a pivotação:

$x_4=3$; $x_5=6$; $x_1=0$; $x_3=6$; $x_6=7$; $x_9=2$; $Z_4=24$,

isto é ótima e inteira, em relação ao conjunto de restrições relativas ao Nó nº 4, mas não necessariamente um ótimo absoluto! Cumpre verificar se, partindo do mesmo Nó 3, não surge uma solução inteira, para $x_3 \leq 5$ (Nó 5), com $Z_5>Z_4$.

QUADRO IV (NÓ 2)

c_j	Vb	b_i	3 x_1	2 x_2	4 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6	0 x_7	0 x_8
0	x_4	10/3	0	-3	0	1	0	-2/3	0	-5/3
0	x_5	14/3	0	0	0	0	1	-1/3	0	-1/3
3	x_1	3	1	0	0	0	0	0	0	-1
4	x_3	13/3	0	1	1	0	0	1/3	0	4/3
0	x_7	7/3	0	-1	0	0	0	-5/3	1	-14/3
Z_j		26,33	3	4	4	0	0	4/3	0	7/3
c_j-Z_j			0	-2	0	0	0	-4/3	0	-7/3

QUADRO V (NÓ 3)

c_j	Vb	b_i	3 x_1	2 x_2	4 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6	0 x_7	0 x_9
0	x_4	13/5	0	-13/5	0	1	0	0	-2/5	-1/5
0	x_5	24/5	0	-1/5	0	0	1	0	-1/5	-3/5
3	x_1	2	1	0	0	0	0	0	0	1
4	x_3	26/5	0	4/5	1	0	0	0	1/5	-2/5
0	x_6	7/5	0	3/5	0	0	0	1	-3/5	-14/5
Z_j		26,80	3	16/5	4	0	0	0	4/5	7/5
c_j-Z_j			0	-6/5	0	0	0	0	-4/5	-7/5

A restrição a introduzir, neste caso, é

$$- 4/5\ x_2 - 1/5\ x_7 + 2/5\ x_9 + x_{11} = - 1/5$$

Na pivotação, x_7 substitui x_{11}, chegando-se ao seguinte resultado:

$x_4=3$; $x_5=5$; $x_1=2$; $x_3=5$; $x_6=2$ $x_7=1$; $Z_5=26$

Esta solução, por conseguinte, é inteira e *melhor* que a anterior.

Mas o problema não está, ainda,encerrado!

Havíamos deixado de lado, temporariamente, o Nó 2, pois o Nó 3 apresentava resultado mais encorajador. Mas, como a solução ótima inteira, derivada deste último Nó, tem valor 26, menor, portanto, que o valor de Z_2, cabe, ainda, verificar se, partindo deste Nó (2), não se alcança uma outra solução inteira,com valor superior a Z_5.

Cumpre, pois, bifurcar o Nó 2, gerando os Nós 6 e 7, fazendo, respectivamente,

$$x_3 \geq 5 \text{ (Nó 6)} \quad \text{e} \quad x_3 \leq 4 \text{ (Nó 7)}.$$

Para o primeiro, a nova restrição é:

$$- x_2 - 1/3\ x_6 - 4/3\ x_8 \geq 2/3$$

Vê-se, desde logo, que esta restrição torna inviável o problema, pois um conjunto de variáveis não-negativas, afetas de coeficientes negativos, não pode oferecer soma positiva. O problema é, pois descartado.

Para o Nó 7, a restrição será, já com a variável auxiliar:

$$- x_2 - 1/3\ x_6 - 4/3\ x_8 + x_{12} = -1/3$$

A pivotação decorre da permuta de x_{12} por x_8, resultando uma solução não-inteira, com valor, para a função-objetivo, inferior ao da soluçaõ inteira,já encontrada:

$x_4=3,75$; $x_5=4,75$; $x_1=3,25$; $x_3= 4,00$; $x_7=3,50$; $x_8=0,25$;

$Z_7=25,75$.

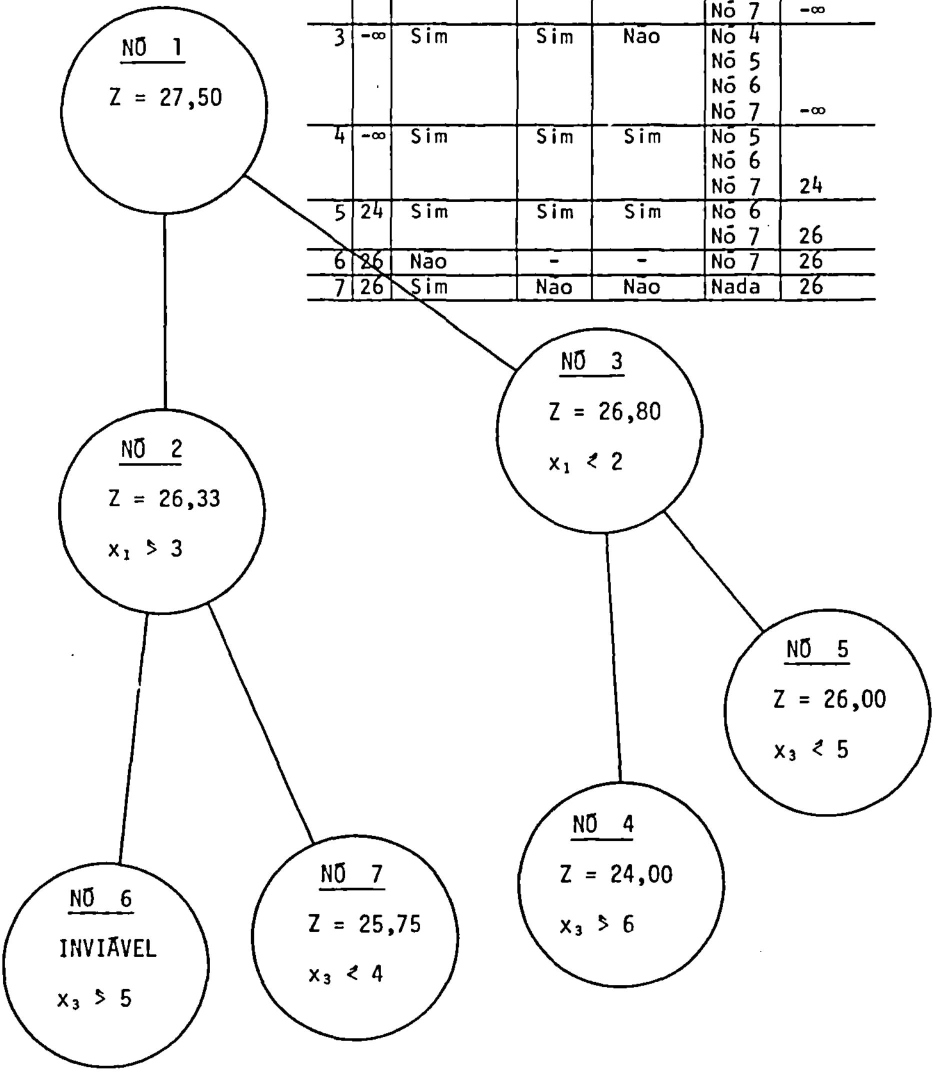
Esgotados, pois, todos os problemas resultantes de bifurcações, fica confirmada a superioridade da solução do Nó 5.

A página seguinte resume a marcha, do Nó 1 ao Nó 7.

À guisa de comparação, o mesmo problema é abordado pelo algoritmo de Gomory, exigindo 4 "cortes", para chegar à mesma solução (ver Quadros VI, VII, VIII e IX, a seguir).

ALGORITMO "BRANCH AND BOUND" - EXEMPLO

Nó	Z*	É viável?	Z>Z*?	Inteira?	Lista	Novo Z*
1	$-\infty$	Sim	Sim	Não	Nó 2 Nó 3	$-\infty$
2	$-\infty$	Sim	Sim	Não	Nó 3 Nó 6 Nó 7	$-\infty$
3	$-\infty$	Sim	Sim	Não	Nó 4 Nó 5 Nó 6 Nó 7	$-\infty$
4	$-\infty$	Sim	Sim	Sim	Nó 5 Nó 6 Nó 7	24
5	24	Sim	Sim	Sim	Nó 6 Nó 7	26
6	26	Não	-	-	Nó 7	26
7	26	Sim	Não	Não	Nada	26



QUADRO VI

Resultado da pivotação do Quadro III, com inclusão da restrição I:

c_j	Vb	b_i	3 x_1	2 x_2	4 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6	0 x_7	0 x_8
0	x_4	35/13	0	-34/13	0	1	0	3/13	0	-5/13
0	x_5	59/13	0	1/13	0	0	1	-2/13	0	-1/13
3	x_1	34/13	1	3/13	0	0	0	7/13	0	-3/13
4	x_3	63/13	0	9/13	1	0	0	-5/13	0	4/13
0	x_2	7/13	0	1/13	0	0	0	11/13	1	-14/13
Z_j		27,23	3	115/13	4	0	0	1/13	0	7/13
c_j-Z_j			0	-19/13	0	0	0	-1/13	0	-7/13

QUADRO VII

Pivotação do Quadro VI, após introduzida a restrição II:

c_j	Vb	b_i	3 x_1	2 x_2	4 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6	0 x_7	0 x_8	0 x_9
0	x_4	19/8	0	-23/8	0	1	0	0	0	-4/8	3/8
0	x_5	38/8	0	2/8	0	0	1	0	0	0	-2/8
3	x_1	15/8	1	-3/8	0	0	0	0	0	-4/8	7/8
4	x_3	43/8	0	9/8	1	0	0	0	0	4/8	-5/8
0	x_7	-5/8	0	-7/8	0	0	0	0	1	-12/8	11/8
0	x_6	11/8	0	9/8	0	0	0	1	0	1/2	-13/8
Z_j		27,13	3	27/8	4	0	0	0	0	4/8	1/8
c_j-Z_j			0	-11/8	0	0	0	0	0	-1/2	-1/8

QUADRO VIII

Pivotação do Quadro anterior, pois não é ótimo (b_i negativo). Resulta a seguinte solução ótima não-inteira:

$x_4= 31/12$; $x_5= 38/8$; $x_1=25/12$; $x_3=31/6$; $x_8=5/12$; $x_6=7/6$; $Z=26,92$

Gera-se a restrição III, dando origem ao QUADRO IX, que ainda não apresenta solução inteira:

$x_4=8/3$; $x_5=5$; $x_1=5/3$; $x_3=16/3$; $x_8=4/3$; $x_6=7/3$; $x_9=1$; $Z = 26,33$.

Finalmente, a restrição IV leva a nova pivotação, alcançando-se a solução ótima inteira:

$x_4=3$; $x_5=5$; $x_1=2$; $x_3=5$; $x_8=2$; $x_6=2$; $x_9=1$; $x_7=1$.

Recapitulação das restrições formuladas:

I - Oriunda da variável x_5, Quadro III:

$$-1/14\ x_2-11/14\ x_6-13/14\ x_7+ x_8 = -1/2$$

II - Oriunda da variável x_3, Quadro VI:

$$-9/13\ x_2 - 8/13\ x_6 - 4/13\ x_8 + x_9 = -\ 11/13$$

III - Oriunda da variável x_5, Quadro VIII:

$$-\ x_2 - 3x_9 + x_{10} = -3$$

IV - Oriunda da variável x_1, Quadro IX:

$$-7/3\ x_2 - 2x_7 - 5/12\ x_{10} + x_{11} = -2$$

3.3. UMA PALAVRA FINAL SOBRE O ESTADO DA ARTE:

Os algoritmos de programação linear em números inteiros ainda deixam a desejar(*).

Apesar dos progressos feitos, no aperfeiçoamento dos algoritmos existentes, ocorre, ainda, que alguns problemas relativamente pequenos exigem tempo desproporcionalmente dilatado, até encontrar-se a solução inteira, muito embora, para problemas de grande porte, os métodos existentes sejam, com freqüência, razoavelmente eficazes. Não há, de resto, como distinguir, previamente, os problemas que podem ser facilmente resolvidos, daqueles que irão oferecer considerável resistência, na busca da solução inteira. Tampouco é possível prever qual o método mais eficaz — ora o dos planos secantes predomina sobre o algoritmo "Branch and Bound", ora este último conduz à solução inteira de forma extraordinariamente mais eficiente que o primeiro.

(*) Ver McMillan Jr, op.cit., pg 467.

4. O SIMPLEX COMPACTO

No quadro simplex convencional, as colunas correspondentes às variáveis básicas são, sempre, formadas por valores "zero" ou "um", que compõem a matriz identidade que assinala a solução. A rigor, pois, não há razão para mantê-las no quadro, surgindo, logo, a idéia de compactar a matriz, pela supressão das colunas correspondentes às variáveis básicas.

Seja o problema:

Maximizar $Z = 20x_1+15{,}5x_2+10x_3$, dado que

$$5x_1+3x_2+x_3 \leq 1200$$
$$4x_1+3x_2+2x_3 \leq 1000$$
$$x_1+2x_2+2x_3 \leq 400$$

O quadro inicial, pelo Simplex convencional, tem o seguinte aspecto:

QUADRO I

c_j	Vb	b_i	20 x_1	15,5 x_2	10 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6
0	x_4	1200	5	3	1	1	0	0
0	x_5	1000	4	3	2	0	1	0
0	x_6	400	1	2	2	0	0	1
Z_j		0	0	0	0	0	0	0
c_j-Z_j			20	15,5	10	0	0	0

No quadro seguinte, x_1 substitui x_4, na base:

QUADRO II

c_j	Vb	b_i	20 x_1	15,5 x_2	10 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6
20	x_1	240	1	3/5	1/5	1/5	0	0
0	x_5	40	0	3/5	6/5	-4/5	1	0
0	x_6	160	0	7/5	9/5	-1/5	0	1
Z_j		4800	20	12	4	4	0	0
c_j-Z_j			0	3,5	6	-4	0	0

Agora, x_5 cede passo a x_3, fazendo com que a função-objetivo se eleve para 5000:

QUADRO III

c_j	Vb	b_i	20 x_1	15,5 x_2	10 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6
20	x_1	700/3	1	1/2	0	1/3	-1/6	0
10	x_3	100/3	0	1/2	1	-2/3	5/6	0
0	x_6	100	0	1/2	0	1	-3/2	1
Z_j		5000	20	15	10	0	5	0
c_j-Z_j			0	0,5	0	0	-5	0

Vê-se que x_2 pode substituir x_3, com vantagem:

QUADRO IV

c_j	Vb	b_i	20 x_1	15,5 x_2	10 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6
20	x_1	200	1	0	-1	1	-1	0
15,5	x_2	200/3	0	1	2	-4/3	5/3	0
0	x_6	200/3	0	0	-1	5/3	-7/3	1
Z_j		15100/3	20	15,5	11	-2/3	35/6	0
c_j-Z_j			0	0	-1	+2/3	-35/6	0

Vê-se, finalmente, que x_4, embora igualmente variável de"folga", pode, com vantagem, substituir x_6, levando à solução ótima, que aparece no Quadro V:

QUADRO V

c_j	Vb	b_i	20 x_1	15,5 x_2	10 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6
20	x_1	160	1	0	-2/5	0	2/5	-3/5
15,5	x_2	120	0	1	6/5	0	-1/5	4/5
0	x_4	40	0	0	-3/5	1	-7/5	3/5
Z_j		5060	20	15,5	53/5	0	49/10	2/5
c_j-Z_j			0	0	-3/5	0	-49/10	-2/5

Para resolver o mesmo problema pela técnica do Simplex compactado, escreve-se, preliminarmente, o sistema como segue:

$$Z = Z_0 - 20(-x_1) - 15{,}5(-x_2) - 10(-x_3)$$

$$x_4 = 1200 + 5(-x_1) + 3(-x_2) + 1(-x_3)$$
$$x_5 = 1000 + 4(-x_1) + 3(-x_2) + 2(-x_3)$$
$$x_6 = 400 + 1(-x_1) + 2(-x_2) + 2(-x_3); \qquad x_j \geq 0$$

Em que Z_0 é a contribuição, para a função-objetivo, das variáveis básicas, que , na forma canônica inicial, são x_4, x_5 e x_6.

O quadro abaixo dispõe os elementos nesta forma compactada:

QUADRO VI

	Z_0	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
Z	0	-20	-15,5	-10
x_4	1200	5	3	1
x_5	1000	4	3	2
x_6	400	1	2	2

Como, agora, na função-objetivo, as variáveis estão com o sinal invertido, a regra para determinar o ingresso de uma variável na base, em se tratando de maximização, é a de selecionar o maior valor *negativo*, entre os coeficientes da linha Z. Ingressa, pois, a variável x_1, que apresenta o coeficiente -20. Para a variável que deixa a base, como não poderia deixar de ser, não se altera a regra de selecionar o menor quociente dentre os tres seguintes: 1200/5, 1000/4 e 400/1, apontando para a variável x_4.

As regras de pivotação, agora, em lugar de duas, como no simplex convencional, são quatro:

> 1. *"No quadro resultante da pivotação, o elemento homólogo do pivotal é o inverso deste último."*
>
> 2. *"Os demais elementos da linha pivotal, no novo quadro, obtêm-se dividindo-se seus homólogos, no quadro anterior, pelo elemento pivotal."*
>
> 3. *"Os demais elementos da coluna pivotal, no novo quadro, obtêm-se por divisão, pelo elemento pivotal, de seus homólogos, no quadro anterior, tomados com sinal contrário."*
>
> 4. *"Os elementos das demais linhas e colunas são obtidos pela mesma regra a eles aplicável, no simplex convencional, isto é, são iguais aos seus homólogos, no quadro anterior, deduzidos do valor de uma fração, cujo numerador é o produto dos elementos situados nas projeções destes homólogos sobre a linha e coluna pivotais e cujo denominador é o próprio elemento pivotal."*

Note-se, ainda, que a linha Z, que identifica a função-objetivo, é sujeita à pivotação, como as demais, respeitada a regra relativa ao elemento integrante da coluna pivotal.

Estas regras, aplicadas sucessivamente, enquanto houver elemento negativo na linha Z, leva aos quadros seguintes, VII, VIII, IX e X, que reproduzem as colunas das variáveis não-básicas, respectivamente dos quadros II, III, IV e V, e chegam à solução ótima, com o mesmo número de iterações, com apreciável economia de operações e de espaço ocupado pela matriz. Assim, na programação em computador, num problema de "n" variáveis e "m" restrições (n>m), o simplex convencional exige o armazenamento de uma matriz de (m+2)x(n+1), apenas para os valores numéricos, enquanto que, no simplex compacto, esta dimensão cai para $(m+1)^2$.

QUADRO VII

	Z_0	$-x_4$	$-x_2$	$-x_3$
Z	4800	4	-3,5	-6
x_1	240	1/5	3/5	1/5
x_5	40	-4/5	3/5	6/5
x_6	160	-1/5	7/5	9/5

QUADRO VIII

	Z_0	$-x_4$	$-x_2$	$-x_5$
Z	5000	0	-1/2	5
x_1	700/3	1/3	1/2	-1/6
x_3	100/3	-2/3	1/2	5/6
x_6	100	1	1/2	-3/2

QUADRO IX

	Z_0	$-x_4$	$-x_3$	$-x_5$
Z	15100/3	-2/3	1	35/6
x_1	200	1	-1	-1
x_2	200/3	-4/3	2	5/3
x_6	200/3	5/3	-1	-7/3

QUADRO X

	Z_0	$-x_6$	$-x_3$	$-x_5$
Z	5060	2/5	3/5	49/10
x_1	160	-3/5	-2/5	2/5
x_2	120	4/5	6/5	-1/5
x_4	40	3/5	-3/5	-7/5

Solução ótima.

Cumpre observar que a aplicação do algoritmo compacto impõe a manipulação da função-objetivo, sempre que, na configuração inicial, a base não é formada exclusivamente por variáveis auxiliares, como é o caso quando surgem variáveis artificiais ou, mesmo, quando há uma ou mais variáveis originais na base inicial (isto é, variáveis que ocorrem em uma única restrição, com coeficiente +1, ausentes das demais restrições). Neste caso, é necessário, previamente, atribuir coeficiente zero, na função-objetivo, às variáveis básicas, o que se consegue substituindo-as, na função-objetivo, pelos respectivos valores, extraídos das próprias restrições, através das quais elas podem ser expressas em função das variáveis não-básicas.

Seja o problema seguinte:

Três fábricas, situadas, respectivamente nas cidades A, B e C, pertencem à mesma organização e produzem o mesmo produto, que é consumido em tres outros centros, D, E e F. A capacidade de produção das fábricas é, respectivamente, de 40, 180 e 230 unidades por mes. Toda esta produção pode ser colocada nos tres centros D, E e F, à razão de 100 unidades para D, 150 para E e as 200 restantes para F. Mas o custo de transporte de uma unidade do produto, de qualquer uma das fábricas até qualquer um dos centros consumidores, é diferente para cada uma das rotas; o problema consiste em determinar o esquema de distribuição, especificando quanto da produção de cada fábrica irá ter a cada centro, de forma a esgotar toda a produção, atender toda a demanda e, ao mesmo tempo, *minimizar o custo total do transporte*. Por esta razão, os problemas deste tipo recebem denominação própria ("Problemas de Transporte") e apresentam algoritmos especiais, que os solvem mais eficientemente que o Simplex. No entanto, nada impede que sejam abordados por este último, como se fará a seguir, para demonstrar a manipulação da função-objetivo, deixando-se para mais tarde a abordagem dos algoritmos específicos para esta categoria de problemas.

Chamando de x_1, x_2, x_3 a produção da fábrica A, a ser encaminhada, respectivamente, aos centros D, E e F; x_4, x_5, x_6 a da fábrica B, destinada, também, respectivamente, a

D, E e F; chamando, ainda, de x_7, x_8 e x_9 a produção da fábrica C, que vai ter aos destinos D, E e F, e supondo que os custos de transporte da unidade do produto, entre fábricas e centros de consumo, sejam os constantes na matriz abaixo, ter-se-iam todos os dados para a formulação do problema:

Custos Unitários de Transporte

		Destino		
		D	E	F
Fábrica	A	10	12	6
	B	15	7	4
	C	8	9	11

O problema consiste, então, em :

Minimizar $Z=10x_1+12x_2+6x_3+15x_4+7x_5+4x_6+ 8x_7+9x_8+11x_9$,

respeitado que:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 40 \\ x_4+x_5+x_6 &= 180 \\ x_7+x_8+x_9 &= 230 \\ x_1+x_4+x_7 &= 100 \\ x_2+x_5+x_8 &= 150 \end{aligned}$$

Observe-se que, embora haja *seis* condições a satisfazer, são formuladas apenas *cinco* restrições. Foi omitida a restrição relativa à demanda de 200 unidades, pelo centro F, que seria $x_3+x_6+x_9=200$ (em lugar desta, qualquer outra das seis condições poderia ser suprimida). A razão desta supressão está em que tal restrição seria supérflua e poderia, se presente, gerar degenerescência na solução, como já apontado. Ela é supérflua porque está contida, implicitamente, nas restrições já formuladas; a soma das três primeiras permite escrever:

$$(x_1+x_4+x_7)+(x_2+x_5+x_8)+x_3+x_6+x_9=450;$$

logo, pelas duas últimas restrições:

$$100+150+x_3+x_6+x_9=450 \quad \text{e}$$

$$x_3+x_6+x_9=200$$

Para dar início à solução, é necessário dar forma canônica ao sistema. Desde logo, verifica-se que não ha verá variáveis auxiliares, pois as restrições já se acham, todas, sob forma de igualdades; somente cabe, então, incluir variáveis artificiais. Todavia, não será necessário acrescentar uma variável artificial em todas as restrições, já que o exame atento das restrições revela que três das nove variáveis originais podem integrar a base de partida do simplex: x_3 só ocorre na primeira restrição, com coeficiente 1; x_6 só ocorre na segunda, também com coeficiente 1; finalmente, x_9 só ocorre na terceira restrição e seu coeficiente também é a unidade positiva. Portanto, estas três variáveis exibem coeficientes que fazem parte de uma matriz identidade e, por conseguinte, podem integrar a solução de partida do procedimento iterativo.

Nas duas outras restrições não há variáveis que satisfaçam esta condição e cumpre introduzir variáveis artificiais, que se denominarão, respectivamente, x_{10} e x_{11}.

Isto posto, para aplicar o simplex compacto, é necessário, antes, transformar linearmente a função-objetivo, de modo a expressar Z em função, tão somente, das variáveis não-básicas.

Com a adição das variáveis artificiais, a função objetiva assume o seguinte aspecto:

Minimizar

$$Z=10x_1+12x_2+6x_3+15x_4+7x_5+4x_6+8x_7+9x_8+11x_9+Mx_{10}+Mx_{11},$$

em que M representa um valor arbitrariamente grande.

As variáveis x_3, x_6, x_9, x_{10} e x_{11} formam a primeira base e cumpre, portanto, substituí-las na função-objetivo. Isto se faz utilizando o valor destas variáveis, extraído das restrições. Assim, da primeira restrição, tem-se:

$$x_3=40-x_1-x_2.$$

As demais restrições fornecem:

$$\begin{aligned} x_6 &=180-x_4-x_5;\\ x_9 &=230-x_7-x_8;\\ x_{10} &=100-x_1-x_4-x_7;\\ x_{11} &=150-x_2-x_5-x_8. \end{aligned}$$

Substituindo, em Z, os valores assim obtidos, tem-se, após a reunião dos termos semelhantes:

$$Z=3490+250M+(4-M)x_1+(6-M)x_2+(11-M)x_4+(3-M)x_5-(3+M)x_7-(2+M)x_8.$$

Ou, já na notação apropriada ao Simplex compacto:

$$Z=Z_0-(4-M)(-x_1)-(6-M)(-x_2)-(11-M)(-x_4)-(3-M)(-x_5)+(3+M)(-x_7)+(2+M)(-x_8),\text{ em que } Z_0=3490+250M.$$

O quadro inicial assume, então, o aspecto seguinte:

QUADRO I

	Z_0	$-x_1$	$-x_2$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_7$	$-x_8$
Z	$3490+250M$	$-(4-M)$	$-(6-M)$	$-(11-M)$	$-(3-M)$	$(3+M)$	$(2+M)$
x_3	40	1	1	0	0	0	0
x_6	180	0	0	1	1	0	0
x_9	230	0	0	0	0	1	1
x_{10}	100	1	0	1	0	1	0
x_{11}	150	0	1	0	1	0	1

No QUADRO II (não apresentado aqui), x_7 substitui a variável artificial x_{10} (cuja coluna pode ser suprimida, pois não há como possa esta variável retornar à base). A função-objetivo cai para $3190+150M$ e a base será formada por $x_3=40$, $x_6=180$, $x_9=130$, $x_7=100$ e $x_{11}=150$.

A solução ainda não é ótima, cabendo substituir x_9 por x_8. Resulta $Z_0=2930+20M$, $x_3=40$, $x_6=180$, $x_8=130$, $x_7=100$ e $x_{11}=20$. Finalmente, x_5 substitui x_{11}; a solução ótima é alcançada: $Z_0=2990$, $x_3=40$, $x_6=160$, $x_8=130$, $x_7=100$ e $x_5=20$.

Na segunda parte do curso, será apresentado um algoritmo especial para a solução deste tipo de problema.

A solução final, com os respectivos totais, por fábrica e por destino, figura na matriz abaixo:

		Destino D	Destino E	Destino F	
Fábrica	A	$x_1=0$	$x_2=0$	$x_3=40$	40
	B	$x_4=0$	$x_5=20$	$x_6=160$	180
	C	$x_7=100$	$x_8=130$	$x_9=0$	230
		100	150	200	450

5. ANÁLISE PÓS-OTIMIZAÇÃO E O SIMPLEX REVISADO

Raramente um problema de programação linear se encerra com a determinação da solução ótima. Com muita freqüência, após alcançada esta, surgem perquirições do tipo: "Que aconteceria se os termos independentes (isto é os valores b_i) sofressem alguma alteração? As variáveis básicas permaneceriam as mesmas, ou seriam substituidas? Qual a gama de variação que os termos independentes poderiam assumir, *sem* alterar a atual solução básica? Por sua vez, que efeitos, sobre as variáveis básicas da solução ótima, teriam eventuais alterações nos coeficientes c_j, da função-objetivo?"

É evidente que estas perguntas podem ser respondidas aplicando-se novamente o simplex, desde a origem, ao problema alterado pela modificação dos coeficientes. Para evitar este trabalho e para permitir que as respostas sejam buscadas a partir da solução já alcançada, recorre-se aos procedimentos da *análise pós-otimização*.

Para maior clareza, o assunto é dividido nos três títulos seguintes:

A Matriz β
Efeitos da mudança em b_i
Efeitos da mudança em c_j

5.1. A MATRIZ β

Num problema de programação linear, com "m" restrições e "n" variáveis, m<n, poderão surgir até C_n^m soluções diferentes, para cada uma havendo m variáveis não-nulas (isto é, "básicas") e (n-m) nulas (isto é, "não-básicas"); ao menos uma das soluções deverá ser ótima, se o problema não for ilimitado ou inviável. A enumeração das m variáveis básicas, em qualquer solução, constitui uma "seqüência básica". Assim, no problema resolvido na página 16, a seqüência básica inicial é (x_4, x_5, x_6 e x_7); a da primeira iteração é (x_4, x_3, x_6, x_7) e, finalmente, a seqüência básica ótima é (x_2, x_3, x_6 e x_7).

Dada uma seqüência básica, é possivel conhecer o aspecto do quadro simplex a ela pertinente, sem efetuar as pivotações intermediárias, isto é, partindo, apenas, dos valores do quadro inicial.

Para tanto, é preciso recorrer a uma importante propriedade dos sistemas lineares, já invocada no método de Jordan-Gauss:

> *"Basta, para tanto, pré-multiplicar a matriz original, do sistema em forma canônica, pela matriz inversa daquela determinada, na mesma configuração original, pelas variáveis que integram a seqüência básica desejada."*

Suponha-se, então, que fôsse de alguma forma sabido que, no problema resolvido na página 16, a seqüência básica ótima seria dada por x_2, x_3, x_6 e x_7. Estas variáveis determinam, na configuração inicial (QUADRO I), a seguinte matriz de coeficientes:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A inversa desta matriz, denominada β, é a seguinte:

$$B^{-1} = \beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{5}{12} & -\frac{5}{6} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ver Apêndice II)

Denominando de **A** a matriz dos coeficientes α_{ij} originais e por **A'** a dos coeficientes α'_{ij}, do quadro final, tem-se:

$$\beta \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}'$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{5}{12} & -\frac{5}{6} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{12} & 0 & 1 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{17}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{11}{12} & 0 & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{5}{6} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

QUADRO I (ver pg. 16) QUADRO III

De mesmo passo, a pré-multiplicação do vetor **b**, do quadro original, pela matriz **β**, produzirá o vetor **b'**, da solução final:

$$\beta \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}'$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{5}{12} & -\frac{5}{6} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 230 \\ 340 \\ 270 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{115}{2} \\ \frac{225}{6} \\ 5 \\ \frac{225}{2} \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz **β** é um instrumento importante para a solução de problemas de programação linear - dada a formulação inicial do problema, ela permite obter, diretamente, a solução ótima, desde que identificada a *seqüência básica ótima*, isto é, o elenco de variáveis básicas da solução ótima.

5.2. EFEITOS DA MODIFICAÇÃO NOS TERMOS INDEPENDENTES

Suponha-se que, após resolvido o problema de programação linear, sobrevenha alteração nos termos independentes, das restrições, isto é, os valores b_i. Seria necessário refazer todo o caminho percorrido?

A matriz β permite avaliar o efeito desta alteração sobre a solução anterior, sem retomar as iterações desde a origem. A pré-multiplicação do novo vetor **b** pela matriz β fornece os novos valores ótimos das variáveis básicas (se algum dos valores do novo vetor **b'** resultar *negativo*, a razão está em que a variável correspondente, agora, deixou de ser básica - a alteração nos valores b_i foi demasiado profunda).

Se, por exemplo, o vetor **b**, no quadro original, em lugar de

$$\begin{bmatrix} 230 \\ 340 \\ 270 \\ 300 \end{bmatrix} \quad \text{fôsse} \quad \begin{bmatrix} 240 \\ 360 \\ 285 \\ 291 \end{bmatrix}$$

a nova solução ótima seria dada por $x_2=60$, $x_3=40$, $x_6=5$ e $x_7=91$, sendo os valores das variáveis diretamente obtidos da multiplicação da matriz β pelo novo vetor original **b**:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{5}{12} & -\frac{5}{6} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 240 \\ 360 \\ 285 \\ 291 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 40 \\ 5 \\ 91 \end{bmatrix}$$

É fácil ver-se que x_6 deixaria a base, se, em lugar de 285, o terceiro elemento do vetor **b** passasse a qualquer valor inferior a 280, pois o elemento correspondente no novo vetor **b'** se tornaria negativo.

Em linhas gerais, se o vetor **b**, original, se modificar para

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 230+y_1 \\ 340+y_2 \\ 270+y_3 \\ 300+y_4 \end{bmatrix}$$

As condições limitantes para y_1, y_2, y_3 e y_4, para que não se altere o elenco de variáveis básicas da solução ótima são as seguintes, derivadas de $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{b} \geq 0$:

$$\begin{aligned} &115/2 + y_1/4 \geq 0 \\ &225/6 - y_1/12 + y_2/6 \geq 0 \\ &5 - y_1/6 - 2y_2/3 + y_3 \geq 0 \qquad\qquad (1) \\ &225/2 + 5y_1/12 - 5y_2/6 + y_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Assim, se $y_2 = y_3 = y_4 = 0$ e somente $y_1 \neq 0$, quais os limites de variação de y_1, dentro dos quais não se altera a seqüência básica x_2, x_3, x_6 e x_7 ?

Evidentemente, estes limites são obtidos por

$$\begin{aligned} y_1 &\geq -230 \\ y_1 &\leq 450 \\ y_1 &\leq 30 \\ y_1 &\geq -270 \end{aligned}$$

As limitações extremas são a primeira e a terceira; logo,

$$-230 \leq y_1 \leq 30$$

Para medir o efeito das modificações em b_i sobre a função-objetivo, basta introduzir, nesta última, os novos valores das variáveis básicas, ou, alternativamente, calcular diretamente o efeito, através de um artifício que permite expressar a função-objetivo em função dos valores b_i

Retomando o problema resolvido na página 16, cuja formulação canônica foi apresentada na página 14, tem-se:

$$7x_1+8x_2+9x_3+0x_4+0x_5+0x_6+0x_7=Z \text{ (Maximizar)}$$
$$3x_1+4x_2+0x_3+1x_4+0x_5+0x_6+0x_7=b_1$$
$$5x_1+2x_2+6x_3+0x_4+1x_5+0x_6+0x_7=b_2$$
$$1x_1+2x_2+4x_3+0x_4+0x_5+1x_6+0x_7=b_3$$
$$2x_1+0x_2+5x_3+0x_4+0x_5+0x_6+1x_7=b_4$$

em que os termos independentes, nas restrições, supostos variáveis, para fins da análise pós-otimização, foram substituidos, respectivamente, por b_1, b_2, b_3 e b_4.

Suponham-se, agora, quatro constantes, π_1, π_2, π_3 e π_4, que multiplicarão, respectivamente, as quatro restrições. Estas constantes são denominadas "multiplicadores do Simplex" e servem ao propósito visado, de expressar a função - objetivo em função dos valores de b_1, b_2, b_3 e b_4.

Efetuadas as multiplicações, as restrições assumem o seguinte aspecto, lembrando que, na solução ótima, x_1, x_4 e x_5 são não-básicas e, portanto, iguais a zero, podendo os termos correspondentes a elas ser dispensados:

$$4\pi_1x_2+0\pi_1x_3+0\pi_1x_6+0\pi_1x_7=\pi_1b_1$$
$$2\pi_2x_2+6\pi_2x_3+0\pi_2x_6+0\pi_2x_7=\pi_2b_2$$
$$2\pi_3x_2+4\pi_3x_3+1\pi_3x_6+0\pi_3x_7=\pi_3b_3$$
$$0\pi_4x_2+5\pi_4x_3+0\pi_4x_6+1\pi_4x_7=\pi_4b_4$$

Somando, agora, as quatro restrições à função-objetivo, tem-se (já dispensando as variáveis não-básicas):

$$(8+4\pi_1+2\pi_2+2\pi_3+0\pi_4)x_2+(9+0\pi_1+6\pi_2+4\pi_3+5\pi_4)x_3+\pi_3x_6+\pi_4x_7 =$$
$$=Z+\pi_1b_1+\pi_2b_2+\pi_3b_3+\pi_4b_4$$

Basta, agora, determinar os valores de π_1, π_2, π_3 e π_4 que tornam nulos os coeficientes de x_2, x_3, x_6 e x_7, para que se tenha Z expressa em função de b_1, b_2, b_3 e b_4:

$$Z = -\pi_1b_1-\pi_2b_2-\pi_3b_3-\pi_4b_4 \qquad (2)$$

Para achar os valores convenientes dos multiplicadores, cumpre resolver o sistema obtido da anulação dos coeficientes das variáveis básicas:

$$8+4\pi_1+2\pi_2+2\pi_3=0$$
$$9+6\pi_2+4\pi_3+5\pi_4=0$$
$$\pi_3=0$$
$$\pi_4=0$$

Do que resulta: $\pi_1=-1,25$; $\pi_2=-1,5$; $\pi_3=0$; $\pi_4=0$.

Note-se que π_1, multiplicador da primeira restrição, é o valor, na linha c_j-Z_j, no quadro final, correspondente à variável não-básica x_4, folga desta mesma restrição; π_2, analogamente, é o valor, na mesma linha, correspondente à folga da segunda restrição, e assim por diante (ver pg. 16).

Portanto, $Z=-\pi^t \cdot b$, em que π^t é o vetor linha, transposto do vetor coluna, dos multiplicadores, e **b** é o vetor dos valores originais dos termos independentes, das restrições.

Assim, se tivermos um conjunto de alterações y_1, y_2, y_3 e y_4, aditadas, respectivamente, a b_1, b_2, b_3 e b_4, compatíveis com as condições enunciadas em ①, pg. 56, a repercussão destas alterações sobre o valor ótimo de Z pode ser obtida por

$$\Delta Z = -\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

Para $b_1=240$ e $b_2=360$, tem-se $y_1=10$ e $y_2=20$. Logo,

$$Z = -(-1{,}25 \cdot 10 - 1{,}5 \cdot 20) = 42{,}5$$

Como o valor óptimo de Z era (ver Quadro III, pg 16) 797,5, o novo valor, após a alteração do vetor **b**, será de

$$797{,}5 + 42{,}5 = 840$$

idênticc ao que se encontraria para $x_2=60$ e $x_3=40$, novos valores ótimos, encontrados pelo produto da matriz β pelo vetor **b**, alterado (ver produto matricial, pg. 56).

Lembrando, por outro lado, a identidade entre os valores do vetor π e os que formam a linha c_j-Z_j, para as folgas das correspondentes restrições, bem como a igualdade ②, segundo a qual

$$Z = -\pi^t \cdot b,$$

tem-se um meio prático de verificar os cálculos, quadro a quadro, cuidando que, em cada iteração, o valor de Z seja obtido *tanto* pela substituição dos novos valores das variáveis, na função-objetivo, *como* pela soma dos produtos dos valores c_j-Z_j, para as variáveis de folga, pelos b_i das respectivas restrições.

No problema da página 16, no Quadro I, os valores c_j-Z_j, para as quatro variáveis auxiliares, são, todos, nulos, e $Z=0$; no Quadro II, somente c_5-Z_5 é diferente de zero, igual a $-1{,}5$; x_5 é a folga da segunda restrição, para a qual o termo independente original, b_2, é 340. O produto $1{,}5 \cdot 340=510$ identifica o valor da função-objetivo, nesta iteração. No Quadro III, tem-se, analogamente:

$$-(-5/4 \cdot 230 - 3/2 \cdot 340)=797{,}5=Z \quad \text{ótimo}).$$

Outra importante conclusão a tirar de ② é o fato de ser possível obter diretamente os multiplicadores π, para cada iteração, a partir dos dados originais

Com efeito, em cada iteração, Z é a soma dos produtos dos coeficientes das variáveis básicas, na função-objetivo, pelos respectivos valores, dados pelo vetor $\mathbf{b}'$:

$$Z=\mathbf{c}_b \cdot \mathbf{b}'$$

em que $\mathbf{c}_b$ é o vetor linha, contendo os coeficientes das variáveis básicas, na função-objetivo, e $\mathbf{b}'$ é o vetor coluna, contendo os valores b_i da solução corrente.

Mas, $\mathbf{b}'=\beta \cdot \mathbf{b}$ (ver pg. 55), em que $\mathbf{b}$ é o vetor dos valores b_i do quadro inicial.

Logo, $Z=\mathbf{c}_b \cdot \beta \cdot \mathbf{b}$ e, por conseguinte, $\mathbf{c}_b \cdot \beta \cdot \mathbf{b}=-\pi^t \cdot \mathbf{b}$, ou,

$$-\pi^t=\mathbf{c}_b \cdot \beta \qquad (3)$$

Isto é, os multiplicadores, com o sinal invertido, podem ser obtidos pela multiplicação dos coeficientes das variáveis básicas, na função-objetivo, pela matriz β.

No quadro final do problema da página 16, tem-se $\mathbf{c}_b=\begin{bmatrix} 8 & 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; a multiplicação acima indicada fica:

$$-\pi^t=\begin{bmatrix} 8 & 9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{5}{12} & -\frac{5}{6} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,25 & 1,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.3. EFEITOS DA MODIFICAÇÃO NOS COEFICIENTES DA FUNÇÃO-OBJETIVO

Após a determinação da solução ótima, pode ser necessário investigar possiveis efeitos, sobre a mesma, de alterações nos coeficientes da função-objetivo, sem retomar, desde o início, a solução completa do problema.

Esta análise distingue dois casos: Alteração nos coeficientes das variáveis que, na solução ótima, são básicas, e alteração nos coeficientes das variáveis não-básicas, na solução ótima.

Iniciando pelo segundo caso, isto é, pela investigação dos efeitos da alteração dos coeficientes das variáveis que não são básicas, na solução ótima, a análise visa determinar o limite a que poderia chegar esta alteração, sem que se modificasse o *status* da variável, isto é, a condição de não-básica. Enquanto o valor correspondente a esta variável, na linha c_j-Z_j, permanecer nulo ou negativo, ela permanece fora da base e, no que tange a ela, a solução encontrada é ótima, não importa quão alterado tenha sido o seu coeficiente c_j.

Chamando de x_s uma variável não-básica na solução ótima, de c_s o seu coeficiente na função-objetivo; de $\mathbf{c}_b$ o vetor acima definido; de c'_s o valor correspondente a esta variável, na linha c_j-Z_j do quadro final, e de $\mathbf{a}'_s$ o vetor coluna, dos coeficientes da matriz, na coluna da variável x_s, tem-se:

$$c'_s=c_s-\mathbf{c}_b\cdot\mathbf{a}'_s$$

Mas, $\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{a}_s=\mathbf{a}'_s$, em que $\mathbf{a}_s$ é o vetor coluna, correspondente a x_s, no quadro original. Logo,

$$c'_s=c_s-\mathbf{c}_b\cdot\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{a}_s=c_s+\pi^t\cdot\mathbf{a}_s \quad \text{(ver ③)} \qquad ④$$

expressão que permite calcular o valor discriminante c'_s, a partir, exclusivamente, dos dados originais do problema. Vê-se que o termo subtrativo não depende de c_s. Portanto, qualquer alteração Δc_s, no valor original c_s, reproduzir-se-á, intacta, no valor c'_s. A condição, pois, para que x_s permaneça fora da base, é:

$$c_s+\Delta c_s+\pi^t\cdot\mathbf{a}_s \leqslant 0 \text{ , isto é,}$$

$$\Delta c_s \leqslant -\pi^t\cdot\mathbf{a}_s-c_s$$

Esta condição, aplicada aos coeficientes das variáveis não-básicas, na solução final do problema da página 16 oferece as seguintes conclusões:

Para x_1:

$$-\begin{bmatrix}-1{,}25 & -1{,}5 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\5\\1\\2\end{bmatrix}=45/4;\quad \Delta x_1 \leqslant \frac{45}{4}-7$$

Para x_4:

$$-\begin{bmatrix}-1{,}25 & -1{,}5 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=5/4;\quad \Delta x_4 \leqslant \frac{5}{4}-0$$

Finalmente, para x_5, tem-se $\Delta x_5 \leqslant 3/2-0$.

Segue-se que x_1 poderia ter seu coeficiente original, na função-objetivo, acrescido de $17/4$, isto é, poderia ele crescer até

$7+\frac{17}{4}=\frac{45}{4}$, sem que a solução ótima se alterasse. De mesmo passo, x_4 e x_5, embora variáveis de folga, que dificilmente assumiriam coeficientes não-nulos na função-objetivo, ainda assim poderiam ter, respectivamente, coeficientes $5/4$ e $3/2$, sem alteração da solução ótima.

Em suma, como regra prática, tem-se que a solução ótima não se altera, enquanto a alteração dos coeficientes das variáveis não-básicas *não ultrapasse* os valores da linha c_j-Z_j, sob as mencionadas variáveis, tomados com sinal contrário.

Se estes limites forem ultrapassados, será necessário efetuar novas pivotações, para introduzir na base as variáveis antes não-básicas mas agora mais vantajosas e, portanto, suscetíveis de aumentar o valor da função-objetivo.

Para analisar o efeito de alterações nos coeficientes da função-objetivo, relativos às variáveis que são básicas no quadro final, procede-se como segue:

Suponha-se que x_2, variável básica na solução final da página 16 (Quadro III), tenha por coeficiente, na função-objetivo, em lugar de 8, o valor $8+\delta$. Esta alteração afetará os valores da linha Z e, por conseguinte, da linha $c_j - Z_j$, para as variáveis não-básicas, x_1, x_4 e x_5. Enquanto, porém, tal alteração não afete o caracter não-negativo dos citados valores $c_j - Z_j$, a solução encontrada no Quadro III ainda será ótima, não obstante a modificação do coeficiente de x_2.

No caso em tela, como se trata de *maximizar* a função-objetivo, os valores *positivos* de δ só tornam x_2 mais *lucrativa* e, portanto, tendem a confirmar o caracter negativo de $c_j - Z_j$, para as variáveis não-básicas. Mas, se δ for negativo, chegará o momento em que uma das variáveis não-básicas passe, com vantagem, a ser básica. Também poderá ocorrer que valores positivos de δ determinem alteração da base, bastando que sejam negativos os coeficientes correspondentes à linha de x_2, nas variáveis não-básicas. Tal não ocorre, em relação a x_2, no Quadro III, mas, quanto a x_3, é fácil de ver que, por ser negativo o coeficiente de x_4, na linha de x_3, mesmo os valores positivos das alterações do coeficiente de x_3, poderão afetar a base, pela introdução eventual de x_4, cessando, pois, de ser ótima a solução encontrada.

Em suma, se uma variável básica, x_b, tem seu coeficiente, na função-objetivo, alterado de c_b para $c_b+\delta$, deve-se, para cada variável não-básica, multiplicar por δ o coeficiente α_{bs}, que se acha na intersecção da linha x_b com a coluna da variável não-básica x_s. Seja R_s o valor assim obtido e seja c_s' o valor da linha $c_j - Z_j$, na coluna de x_s. Para que não se altere a seqüência básica da solução ótima já encontrada, é preciso que, para todas as variáveis não-básicas,

$$c_s' - R_s \leq 0$$

Estas condições permitem determinar os limites em que se devem conter as alterações δ, para que não seja afetada a seqüência básica já determinada.

Assim, para x_2, tem-se:

Variável não-básica x_1: $R_1 = \frac{3}{4}\delta_2$; $-\frac{17}{4} - \frac{3}{4}\delta_2 \leq 0$; $\delta_2 \geq -\frac{17}{3}$

Variável não-básica x_4: $R_4 = \frac{1}{4}\delta_2$; $-\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\delta_2 \leq 0$; $\delta_2 \geq -5$

Variável não-básica x_5: $R_5 = 0\delta_2$; $-\frac{3}{2} - 0\delta_2 \leq 0$; $\delta_2 \geq -\infty$

Evidentemente, a condição mais exigente é a segunda, impondo que $\delta_2 \geq -5$, para que não se altere a seqüência básica.

Da mesma forma, para x_3, tem-se:

Variável não-básica x_1: $R_1 = \frac{7}{12}\delta_3$; $-\frac{17}{4} - \frac{7}{12}\delta_3 < 0$; $\delta_3 > -\frac{51}{7}$

Variável não-básica x_4: $R_4 = -\frac{1}{12}\delta_3$; $-\frac{5}{4} + \frac{1}{12}\delta_3 < 0$; $\delta_3 < 15$

Variável não-básica X_5: $R_5 = \frac{1}{6}\delta_3$; $-\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\delta_3 < 0$; $\delta_3 > -9$

Do que resulta, para que não se altere a seqüência básica, a condição:

$$-9 < \delta_3 < 15$$

Encerra-se aqui, com as discussões precedentes, a análise pós-otimização, que permite avaliar, na solução ótima, os efeitos na alteração dos coeficientes b_i e c_j.

5.4. O SIMPLEX REVISADO

Certas propriedades evidenciadas na discussão pós-otimização permitem revisar os procedimentos do Simplex, tornando-os mais expeditos.

Com efeito, de 6 pode-se obter o valor do elemento $c_j - Z_j$, no novo quadro, para qualquer uma das variáveis não-básicas, a partir, tão somente, dos dados do quadro original, lembrando que também os multiplicadores podem ser obtidos dos mesmos valores originais. Isto permitirá, então, identificar a variável a entrar na base, na seguinte iteração.

Identificada esta variável, é possivel obter, imediatamente, o vetor coluna desta variável, no novo quadro, a partir da matriz β e do vetor original, correspondente a esta mesma variável, bem como o vetor **b**, igualmente pela multiplicação dos coeficientes b_i, originais, pela matriz β. Tal fato, por sua vez, permitirá identificar a variável que deve sair da base, o que permite identificar nova seqüência básica. Seguem-se nova matriz β e novos multiplicadores π, que permitem reiniciar o processo, pesquisando os valores $c_j - Z_j$ das novas variáveis não-básicas, a fim de determinar se a solução pode ser aperfeiçoada, e assim sucessivamente.

Este procedimento, além de dispensar a morosa pivotação de todo o quadro, a cada iteração, permite trabalhar, sempre, com os valores originais, o que evita a propagação de erros de arredondamento nos valores fracionários.

Aplicada ao problema da página 16, esta técnica apresenta o seguinte desenvolvimento:

No quadro inicial, por simples inspecção, vê-se que a variável x_3 deve substituir x_5. A nova base será, pois, x_4, x_3, x_6 e x_7, tal como aparece no Quadro II. Este, porém, não precisa ser construido, para dar-se prosseguimento à solução.

A matriz B, dos coeficientes das variáveis básicas, nas restrições, formulação inicial, é, agora, dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(na ordem } x_4,\ x_3,\ x_6 \text{ e } x_7\text{)}$$

Sua inversa é:

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{6} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A nova solução, para as variáveis básicas, pois, será dada pela multiplicação do vetor **b**, original, pela matriz **β**, obtendo-se, destarte, o novo vetor **b**:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{6} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 230 \\ 340 \\ 270 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 230 \\ \frac{170}{3} \\ \frac{130}{3} \\ \frac{50}{3} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Os valores são os mesmos obtidos, por pivotação, no Quadro II, página 16.

Segue-se o cálculo do vetor π (ver (3)):

$$\pi^t = -\begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \beta = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\pi = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Agora, cumpre verificar se alguma variável não-básica deve ingressar na base, ou se, alternativamente, a solução é ótima. Isto se faz com recurso à relação (4) , com aqual são obtidos, diretamente, os valores da $c_j - Z_j$, necessários para esta verificação:

Para a variável x_1:

$$c_1 - Z_1 = c_1' = 7 + \begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Para a variável x_2:

$$c_2 - Z_2 = c_2' = 8 + \begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 5$$

Para a variável x_5:

$$c_5 - Z_5 = c_5' = 0 + \begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{3}{2}$$

Os mesmos resultados se acham no Quadro II, página 16. Verifica-se, assim, diretamente, sem a pivotação, a partir dos dados originais, que a variável a entrar, agora, na base, é x_2.

Para determinar a variável que deixará a base, impõe-se, antes, encontrar o vetor $\mathbf{a}_2^1$ que, no segundo quadro, corresponderia à variável x_2.

Basta recorrer à matriz β e ao vetor original $\mathbf{a}_2$, multiplicando-os:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{6} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Cumpre, agora, identificar a variável que sairá da base, através do *menor quociente positivo* entre os valores colineares do novo vetor $\mathbf{b}$, obtido em (5), e o vetor $\mathbf{a}_2^1$, acima. Os quocientes são:

230/4, (170/3)÷(1/3), (130/3)÷(2/3); note-se que o último, relativo a x_7, não figura, pois é *negativo*.

O menor quociente é 230/4, relativo à variável x_4, que será, portanto, substituída, na base, por x_2.

Surge, então, nova seqüência básica, formada por x_2, x_3, x_6 e x_7, as quais subentendem, na matriz original, a seguinte matriz B (de coeficientes das restrições), já exibida na página 54.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sua inversa, β, já foi determinada (ver página 54). Com ela, reinicia-se o ciclo, determinando-se, primeiro, o novo vetor **b**, prémultiplicando por ela o vetor **b** original. A seguir, determinam-se os novos multiplicadores π, prémultiplicando a matriz β pelo vetor formado pelos coeficientes das variáveis básicas, na função-objetivo (estas multiplicações foram feitas, respectivamente, nas páginas 55 e 59). De posse dos valores π, obtêm-se os discriminantes $c_s^!$, para as variáveis não-básicas x_1, x_4 e x_5, para verificar que a solução é ótima:

Para x_1:

$$7 - \begin{bmatrix} -1,25 & -1,5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{17}{4}$$

Para x_4:

$$0 - \begin{bmatrix} -1,25 & -1,5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{5}{4}$$

Para x_5:

$$0 - \begin{bmatrix} -1,25 & -1,5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{3}{2}$$

Não havendo discriminante positivo, a solução é ótima como já verificado, aliás, no Quadro III, página 16.

Pode-se, desta forma, resolver o problema de programação linear operando, sempre, a partir dos dados originais, sem recorrer às iterações sucessivas dos quadros do simplex convencional, o que representa, do ponto de vista da precisão, uma vantagem significativa. A técnica do simplex revisado pode, também, ser muito útil para quem deseje utilizar um computador digital, mas não possúa, nem possa construir, um programa para executar o simplex convencional, possuindo, no entanto, um bom programa de operações com matrizes. Simplesmente utilizando produtos matriciais e inversões, é possível.

encaminhar toda a solução do problema.

Cabe, ainda, uma observação: A cada troca de variável, na base, impõe-se calcular uma nova matriz β. Em lugar, porém, de inverter, a cada passo, a nova matriz B, correspondente à seqüência básica vigente, pode-se obter a nova matriz inversa a partir da anterior, tirando partido do fato de que a única diferença entre a matriz B atual e a anterior reside numa coluna, correspondente à substituição de uma variável básica por outra, não-básica.

Suponha-se que, alcançada a situação do segundo quadro, com a seqüência básica x_4, x_3, x_6 e x_7 (primeira iteração), chegou-se à conclusão de que a seguinte seqüência básica seria x_2, x_3, x_6 e x_7. A nova matriz B só diferirá da anterior pela coluna da variável substituida, isto é, a primeira.

Procede-se como segue, para obter a nova matriz inversa:

1. Tomar a coluna a, dos coeficientes, no quadro original, da variável que *entra* na base e obter, por prémultiplicação por β, a coluna que lhe corresponde no quadro atual (esta operação, de qualquer forma, é indispensável, para determinar, como vimos anteriormente, a variável que deixará a base - ver 6).

$$a' = \beta \cdot a = \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

2. Criar a matriz E', pela inclusão do vetor coluna assim obtido, numa matriz identidade, ocupando, nesta, a mesma posição que **a** ocupa na matriz original, B.

   Logo,

$$E' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Gerar a matriz E, a partir de E', operando sobre os elementos da coluna substituida, da forma seguinte: O elemento pivotal é o que se acha na diagonal principal da matriz; substitui-lo pelo seu inverso. Dividir os demais elementos da coluna pelo elemento pivotal, tomado este com sinal contrário.

   No caso, tem-se:

$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{12} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

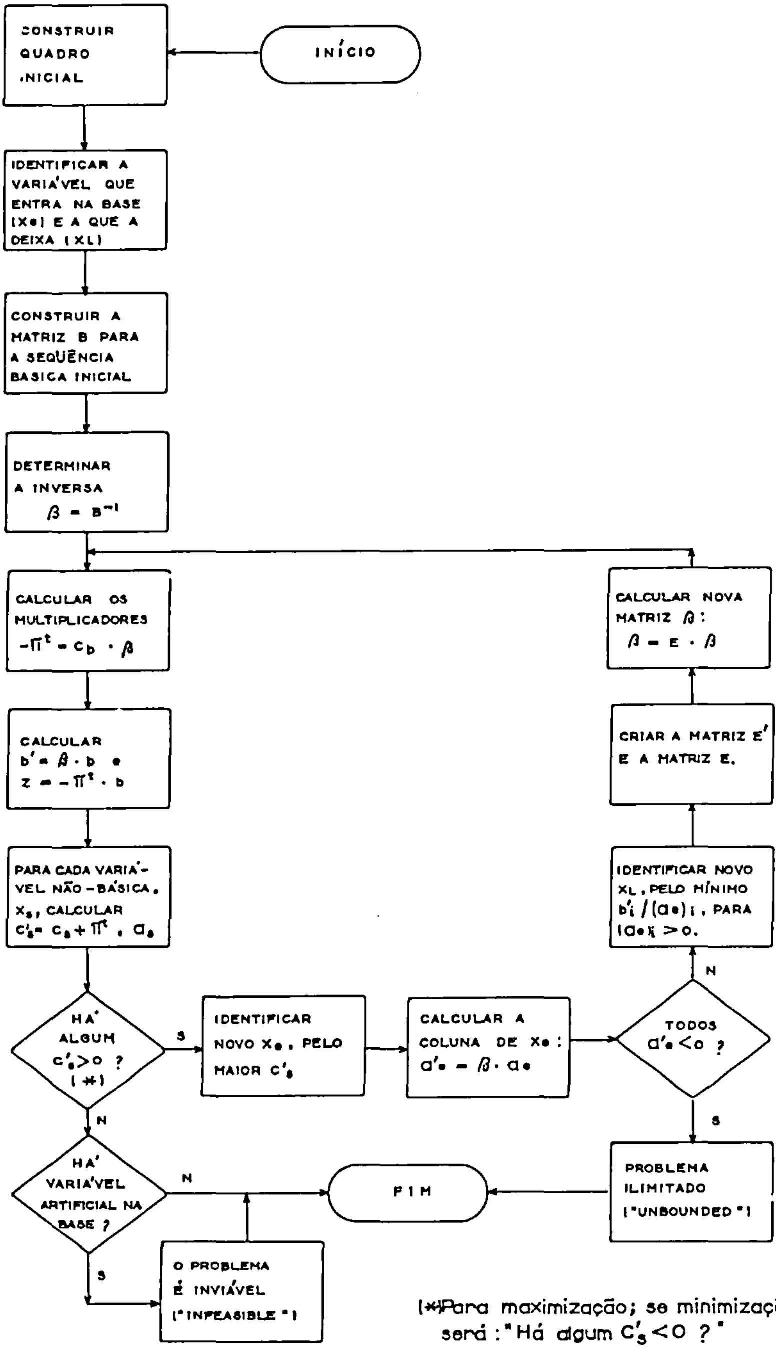
4. Finalmente, a nova matriz β, denominada β', será obtida por

$$\beta' = E \cdot \beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{12} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{6} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{5}{12} & -\frac{5}{6} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CONCLUSÃO

Um diagrama de blocos, descrevendo o encaminhamento do "Simplex Revisado", encerra este tratamento dos procedimentos gerais da programação linear. Seguem-se, no curso, os algoritmos especiais, para a solução de problemas de transporte e adjudicação. O instrumental aí está, à disposição do aluno. Mas ele de pouco lhe valerá, se não se dispuser ao esforço de desenvolver sua imaginação criadora, para discernir, na prática, situações suscetíveis de representação por um modelo de programação linear, bem como sua aptidão para, identificada a possibilidade de aplicação do método, dar forma à função-objetivo e às restrições aplicáveis ao problema. O simples domínio da metodologia de álgebra linear, contida no Simplex, não basta para tanto. É preciso exercitar-se na construção de modelos, para, através do esforço continuado, desenvolver estas aptidões.

SIMPLEX REVISADO



(*) Para maximização; se minimização, a pergunta será: "Há algum $c'_s < 0$?"

6. OS PROBLEMAS DE TRANSPORTE

Os problemas de transporte dizem respeito à distribuição de um produto por diversos pontos de destino, a partir de diferentes origens ou fontes de abastecimento.

As grandezas que surgem no problema referem-se à mesma unidade e cada fonte de suprimento é caracterizada por uma capadidade máxima de fornecimento, enquanto que cada ponto de destino é definido por sua demanda.

O transporte de uma unidade de produto, de uma determinada origem até o ponto de destino, faz-se sob determinado custo. O problema consiste em defínir uma tabela de distribuição que estabeleça quais as origens que fornecerão aos diferentes pontos de destino e as respectivas quantidades, de forma a que seja mínimo o custo total da operação.

6.1. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE TRANSPORTE

O problema de transporte, como atualmente é conhecido possui a seguinte formulação:

"DETERMINAR O PROGRAMA DE TRANSPORTE X_{ij} QUE MINIMIZE:

$$Z = \sum_{i,j} C_{ij} \times X_{ij}$$

SATISFEITAS AS RESTRIÇÕES

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \quad (i=1,\ldots,p)$$

$$\sum_{i=1}^{p} X_{ij} = b_j \quad (j=1,\ldots,n)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (i=1,\ldots,p;\ j=1,\ldots,n)$$

$$\sum_{i=1}^{p} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j".$$

Devido a suas características especiais, o problema pode ser abreviado na forma do quadro da figura 1.

DESTINOS / ORIGENS	1	. . .	n	CAP
1	X_{11} C_{11}	. . .	X_{1n} C_{1n}	a_1
. . .	. . .	. . . .	. . .	. . .
p	X_{p1} C_{p1}	. . .	X_{pn} C_{pn}	a_p
DEM	b_1	. . .	b_n	

Figura 1

6.2. SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

O primeiro passo, na resolução de um problema de transporte, consiste em determinar uma solução compatível básica inicial viável, isto é, que atenda às restrições marginais (demandas e capacidades), possua n+p-1 variáveis básicas e seja compatível, ou seja, a partir do quadro original, com as variáveis básicas determinadas, por reduções sucessivas de uma linha ou coluna que possua apenas uma variável básica se reduza o quadro original a um quadro 1x1, ou seja, uma célula com a última variável básica a ser eliminada.

Uma base é uma solução viável de um problema.

Variáveis não básicas são aquelas que não estão na base e portanto nulas; variáveis básicas são as que compõem a base e portanto podem ser não nulas.

Todos os métodos ou algoritmos que serão abordados neste livro tem a propriedade de fornecer uma solução básica compatível.

Des / Ori	1	2	3	CAP
1	10		10	20
2	5	10		15
3			25	25
DEM	15	10	35	60

Figura 2.

Exemplo de Solução Compatível Viável

Des / Ori	1	2	3	CAP
1		5	15	20
2	15			15
3		5	20	25
DEM	15	10	35	60

Figura 3.

Exemplo de Solução Não Compatível Viável

Obs.: Os custos C_{ij} foram omitidos propositadamente.

Uma solução não compatível não pode ser tratada pelos algoritmos de otimização conhecidos, mas poderá ser explorada nos casos de multiplas soluções ótimas de um problema. Esta situação será abordada oportunamente.

6.3. CAPACIDADES E DEMANDAS DESIGUAIS

Seja o problema formulado em 6.1:

Minimizar $Z = \sum_{i,j} C_{ij} \times X_{ij}$ 6.1

Sujeito a $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i, \; i=1,2,\ldots,p$ 6.2

$$e \sum_{i=1}^{p} X_{ij} = b_j, \; j = 1,2,\ldots,n \qquad 6.3$$

$$X_{ij} \geq 0 \qquad 6.4$$

Em muitos casos reais, não se verifica a condição

$$\sum_{i=1}^{p} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad 6.5$$

Basta para tanto, que a soma das capacidades das origens não seja igual à das demandas dos destinos.

Nestes casos, para se adaptar o problema real ao modelo de transportes, tal como descrito nas equações anteriores cria-se segundo o caso, um destino fictício ou uma origem fictícia, com, respectivamente, demanda ou capacidade capaz de satisfazer a condição 6.5. Os custos correspondentes são considerados nulos.

A condição 6.5 faz com que o problema sempre tenha solução viável e, conseqüentemente, tenha solução ótima.

6.4. DEGENERESCÊNCIA

Em qualquer fase de um problema de transporte, o número de células ocupadas deve ser p+n-1, onde p é o número de origens e n é o de destinos.

Se surgem mais de p+n-1 consignações, há um erro na solução; se surgem menos de p+n-1 consignações, está caracterizada uma solução defenerada, que pode decorrer de erros, mas freqüentemente emana das próprias condições do problema.

Uma degenerescência implica na impossibilidade de prosseguir nas iterações, pois surge uma descontinuidade no quadro, que impede o cálculo dos valores de U e V, ou, se tal não ocorre, a solução ingressa num ciclo de iterações sucessivas que não conduzem a progresso.

Degenerescência na solução de partida.

A igualdade entre os totais marginais, no momento de se fazer uma consignação a uma célula, na solução de partida, pode causar uma degenerescência.

Esta dificuldade pode ser contornada, fazendo-se uma consignação, de "Valor Zero", onde necessário para prosseguir no cálculo.

6.5. MÉTODOS DE OBTENÇÃO DE UMA SOLUÇÃO COMPATÍVEL BÁSICA INICIAL VIÁVEL

Nesta secção serão abordados três métodos de obtenção de uma solução compatível básica inicial viável. O primeiro deles, pela sua importância didática e simplicidade, trata-se do "Método do Canto Noroeste", o segundo por ser um método consagrado, apesar de novo pois foi desenvolvido em 1955, trata-se do "Método de Vogel", e o terceiro, por ser a mais recente conquista na obtenção de solução inicial, proposto por autores brasileiros, trata-se da "Solução Inicial de Rodrigues".

Existem ainda, vários outros métodos de obtenção de solução inicial que não serão abordados por se situarem, em eficiência e importância, abaixo dos aqui abordados, como por exemplo o "Método do Custo Mínimo", o "Método de Aproximação de Russel" e outros.

Todos os métodos aqui abordados sofreram modificações, em relação aos seus originais correspondentes, para se precaverem do possível surgimento de degenerescências na solução durante a sua utilização. Tais modificações não prejudicaram a sua heurística original, tornando-os apenas mais eficientes.

6.5.1. MÉTODO DO "CANTO NOROESTE"

Uma primeira solução pode ser obtida de forma prática através do "Método do Canto Noroeste". Esta denominação provém do fato de se iniciar o preenchimento do quadro de distribuição sempre pela interseção da primeira linha com a primeira coluna, no canto superior esquerdo do quadro (o "Canto Noroeste", se referido à disposição habitual, nas cartas, dos pontos cardiais).

Procedimento

Toma-se o menor dos valores marginais (restrições)da primeira linha e da primeira coluna e atribui-se este valor à célula situada no canto superior esquerdo do quadro (Canto Noroeste). Tal consignação irá esgotar a demanda do primeiro destino ou a capacidade da primeira origem ou, ainda, ambas, se os totais marginais forem iguais. Prossegue-se, sempre realizando deslocamentos para a direita ou para baixo, dependendo de qual restrição foi totalmente satisfeita, se foi a demanda de um destino o deslocamento será para a direita, se foi a capacidade de uma origem, o deslocamento será para baixo, se ambos, o deslocamento será para a direita com consignação nula para esta célula para previnir-se da ocorrência de uma degenerescência na solução de partida. O processo é encerrado quando se tiver esgotado a demanda de todos os destinos e a capacidade de todas as origens, obtendo-se, assim, um programa de transporte que constitui uma solução compatível básica inicial viável do problema proposto.

DESTINOS / ORIGENS	1	2	3	4	CAP
1	180 [17]	20 [13]	[24]	[54]	200
2	[8]	100 [30]	60 [36]	[26]	160
3	[20]	[42]	50 [28]	90 [45]	140
DEM	180	120	110	90	500

Figura 4

Quadro de exemplo, "Canto Noroeste".

DESTINOS / ORIGENS	1	2	3	4	CAP
1	15 [9]	5 [5]	[6]	[10]	20
2	[7]	15 [6]	0 [7]	[9]	15
3	[6]	[7]	10 [9]	25 [3]	35
DEM	15	20	10	25	70

Figura 5

Quadro de exemplo de degenerescência na solução de partida.

6.5.2. MÉTODO DE VOGEL MODIFICADO

Em 1955, W.R.Vogel desenvolveu um método que permite a determinação de uma solução de partida bastante aproximada da solução ótima e freqüentemente com ela coincidente. Este método tem, sobre o do "Canto Noroeste", a vantagem de economizar iterações subseqüentes. Em 1977, N.A.Leonel introduziu modificações no método original de Vogel, visando três objetivos:

1) Facilitar sua utilização em computadores.

2) Eliminar as degenerescências que porventura ocorram, forçando a ocupação das células mais apropriadas, com quantidade *zero*.

3) A possibilidade de estender o emprego do método aos problemas de adjudicação ("Assignment Problem" na literatura técnica norte-americana).

Procedimentos

a) Calcula-se a diferença entre os dois menores custos de cada linha e de cada coluna ainda não eliminada. Se apenas um custo restar a ser considerado, a diferença deverá ser igual a ele próprio.

b) Buscar a linha ou coluna com maior diferença e, nesta, a célula com o menor custo, dentre as que não pertençam a qualquer coluna ou linha já eliminadas.

c) Consignar a esta célula o maior número possível de unidades, isto é, o menor dentre os dois valores marginais, capacidade e demanda, subtraindo destes o valor consignado.

d) Eliminar a linha ou coluna cujo requisito marginal foi atendido. Se ambos os requisitos marginais foram atendidos, simultaneamente, surge uma degenerescência na solução de partida, a qual é resolvida eliminando-se apenas uma dentre as duas, linha ou coluna; a escolha se fará considerando-se o número de situações análogas já ocorridas, inclusive a presente, se este número for ímpar, a linha deve ser eliminada; se par a coluna. Se apenas uma linha ou coluna restar a ser eliminada, a solução está completa. Senão retorne ao passo a).

6.5.3. MÉTODO SIRO – SOLUÇÃO INICIAL DE RODRIGUES

Trata-se de solução recentemente proposta em periódi

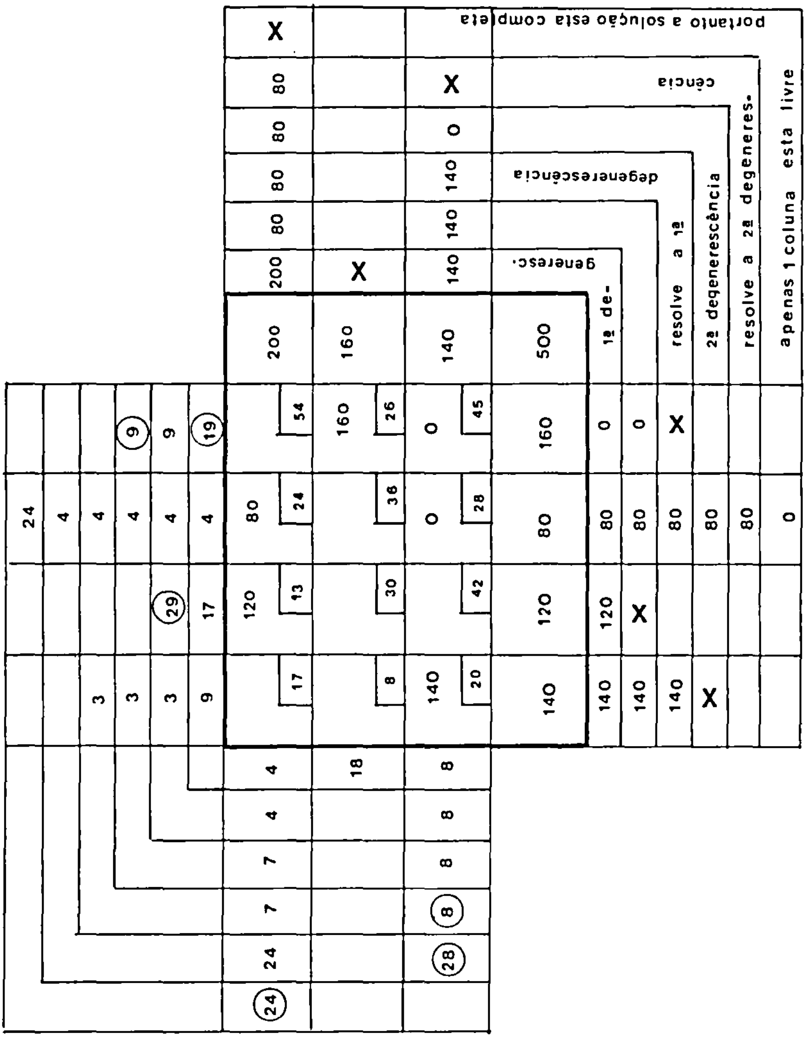


Figura 6

Quadro de exemplo do Algoritmo de Vogel Modificado.

Pode-se verificar que a solução encontrada é ótima.

co brasileiro, com o título "Desenvolvimento de uma nova solução inicial", comentada, posteriormente, em edição ulterior do mesmo periódico, por outro autor, que deu ao método a denominação de "Solução inicial de Duas Etapas" e que, no trabalho desenvolvido como dissertação de mestrado, com título SOPTA, recebe o título atual SIRO.

Procedimentos

a) Somar os custos unitários de cada linha.

b) A partir da linha de maior soma de custos, uma a uma, até a última linha, realizar as operações da alínea "c".

c) Para cada célula da linha, pertencente a coluna ainda não eliminada, calcular a diferença entre o custo unitário da célula e o menor custo dentre os das células da coluna correspondente, que não pertençam a linhas já eliminadas. A partir da célula que possuir a menor diferença, atribuir a cada uma o menor dentre os respectivos valores marginais, deduzindo destes o valor adjudicado, até que a linha seja totalmente satisfeita, eliminando-se as colunas cujo valor marginal tenha sido esgotado. Se ao esgotar-se o valor marginal da linha, o da coluna também o for, uma degenerescência surgiria na solução de partida, neste caso, para resolvê-la, a coluna deve ser eliminada e a linha não o deve ser, restando um valor marginal igual a *zero*, a inserir na próxima célula a preencher, da linha, obedecida a já mencionada ordem crescente das diferenças, quando, então, a linha será eliminada.

Considere-se o problema a maximizar, expresso pela Figura 7.

DEST / ORIG	1	2	3	CAP
1	30	52	71	40
2	18	40	65	30
3	18	-M	56	20
DEM	30	40	20	90

Figura 7
Problema (*) Exemplo de Aplicação da SIRO
* Este problema é de Maximização.

O valor M da célula (3,2) indica que não é possível o fornecimento da origem 3 para o destino 2. M deve ser uma valor muito grande comparado com os custos e é precedido do sinal menos (-) por se tratar de um problema de maximização, forçando a não utilização da célula na solução ótima.

Como o problema é de Maximização, os seus custos devem ser tratados com o sinal contrário aos da figura apresentada.

a) Soma dos custos das linhas:

Linha	Soma
1	-153
2	-123
3	M

Portanto a ordem será:

1º linha 3 soma = M
2º linha 2 soma = -123
3º linha 1 soma = -153

b) Linha 3:

c)

Célula	Diferença
(3,1)	-18 - (-30) = 12
(3,2)	M - (-52) = M'
(3,3)	-56 - (-71) = 15

Portanto, a ordem de preenchimento das células é:

1º célula (3,1)
2º célula (3,3)
3º célula (3,2)

A célula (3,1) é preenchida com 20 unidades, satisfazendo-se a linha 3 e restando 10 unidades, a serem distribuidas na coluna 1. A linha 3 é eliminada.

b) Linha 2:

c)

Célula	Diferença	
(2,1)	-18 - (-30) = 12*	empate entre diferenças
(2,2)	-40 - (-52) = 12*	
(2,3)	-65 - (-71) = 6	

Portanto, a ordem é : 1º célula (2,3),
2º célula (2,1),
3º célula (2,2).

A célula (2,3) é preenchida com 20 unidades, a coluna 3 é eliminada; a célula (2,1) é preenchida com 10 unidades. Neste ponto ocorre um empate entre as restrições marginais; portanto, só a coluna é eliminada, ficando a linha com capacidade *zero*, que é adjudicada à próxima célula, na ordem das diferenças, a célula (2,2), o que permite, finalmente, eliminar a linha.

b) Linha 1:

c)

Célula	Diferença
(1,1)	eliminada
(1,2)	-52 - (NADA) = -52
(1,3)	eliminada

Apenas a célula (1,2) pode ser utilizada; preenchida esta com 40 unidades, é eliminada a coluna 2, restando, como capacidade da linha, o valor *zero*, que deveria ser adjudicado à próxima célula. Como não há outra célula, pois todas as colunas já foram eliminadas, o método é encerrado com a solução inicial completa, pois foram feitos "n+p-1" lançamentos, correspondentes às variáveis básicas, o que equivale a eliminar "n" colunas e "p-1" linhas. A figura 8 mostra esta solução.

ORIG \ DEST	1	2	3	CAP
1	[30]	40 [52]	[71]	40
2	10 [18]	0 [40]	20 [65]	30
3	20 [18]	[FM]	[56]	20
DEM	30	40	20	90

Figura 8
Quadro resultante do problema

Pode-se verificar que a solução obtida é ótima e também que possui soluções ótimas alternativas, pois ao se aplicar o método da Dualidade, "$C_{ij}-U_i-V_j$" é *zero* para a célula (1,1). "Quando ocorre o empate entre diferenças, o método programado adota a ordem de menor para maior índice da coluna (poderia ser qualquer outro critério, desde que uma delas preceda a outra, na ordem de escolha das células)."

6.6. MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO DE SOLUÇÃO COMPATÍVEL BÁSICA

Os métodos que se seguem são métodos iterativos e tem por base avaliar se a solução apresentada é ótima ou se pode convergir para uma solução mais próxima do ótimo, caso em que a atual solução sofre uma modificação na base surgindo a nova solução, e assim sucessivamente até que se encontre a solução ótima.

Os métodos apresentam ainda a característica de, em presença da solução ótima, indicar se o problema apre senta soluções ótimas alternativas.

6.6.1. MÉTODO DAS ALPONDRAS

O método das alpondras consiste em avaliar sistematicamente, uma a uma, as possibilidades de modificar a solução, atribuindo-se uma unidade de produto às células vazias do quadro e verificando se esta modificação aumenta ou diminui o custo total. Se o *aumenta*, a hipótese é abandonada; se o *diminui*, a possibilidade é *explorada ao máximo*, consignando-se a esta célula o maior número possível de unidades, e assim sucessivamente, até que não haja mais possibilidade de qualquer mudança que reduza o custo, quando se terá chegado à solução ótima.

Para avaliar uma hipótese de alteração da distribuição, é fundamental conhecer o "*circuito de alpondras*" por onde passar para, partindo da célula vazia, voltar a ela, "*pisando*" sempre sobre células já ocupadas. Os vértices deste circuito indicam as células onde deverá haver adição ou redução de uma unidade, a fim de que, respeitadas as condições marginais, se possa atribuir uma unidade à referida célula vazia. Para cada célula vazia, há *um* e somente um circuito possível e qualquer circuito terá número par de vértices, entre eles a própria célula vazia. Quer percorrendo o circuito no sentido horário, quer no sentido anti-horário, a partir da célula vazia, numerando-se os seus vértices, ter-se-á metade do circuito com vértices de numeração impar e metade com numeração par.

Somando-se, de um lado, os custos unitários dos vértices impares, que sofrerão acréscimos de uma unidade, e, de outro, os dos vértices pares, que sofrerão redução de uma unidade, ter-se-á a avaliação da hipótese: se predominar a soma dos vértices ímpares, haverá acréscimo de custo e a modificação será desvantajosa, caso contrário, será vantajosa e convém explorá-la ao máximo.

Neste método, apenas se introduz procedimento preventivo para as degenerescências que surgem quando mais de uma célula par, no circuito, contém a mesma consignação mínima. A providência consiste em liberar apenas a primeira (*) das células de valor mínimo ficando as demais ocupadas com valor *zero*.

(*) Não importa em que sentido for percorrido o circuito. *Alpondras - "Pedras que atravessam um rio ou um ribeiro de uma para outra margem"*. Denominação proposta, em português, ao método "Stepping-Stone", do inglês, pelo Prof. Manoel Luiz Leão, titular de Pesquisa Operacional da UFRGS, Diretor do Centro de Processamento de Dados da UFRGS.

DEST / ORIG	1	2	3	4	CAP
1	9	3 10 5	4 5 6	10	15
2	6 5 7	6	5 20 7	9	25
3	1 6	2 5 7	9	10 3	15
DEM	5	15	25	10	55

Figura 9

Quadro de exemplo do algoritmo das *Alpondras* modificado.

6.6.2. MÉTODO DE DISTRIBUIÇÃO MODIFICADO (TAMBÉM CONHECIDO COMO MÉTODO DE DANTZIG OU MÉTODO MODI)

Para a descrição deste método é necessário que se defina antes o Problema DUAL do problema de transporte, que é:

O Problema Dual do Problema de Transportes.

	X_{11}	X_{12}	...	X_{1n}	X_{21}	X_{22}	...	X_{2n}	...	X_{p1}	X_{p2}	...	X_{pn}	
U_1	1	1	...	1										a_1
U_2					1	1	...	1						a_2
⋮	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	⋮
U_p										1	1	...	1	a_p
V_1	1				1				...	1				b_1
V_2		1				1			...		1			b_2
⋮	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	⋮
V_n				1				1	...				1	b_n
	C_{11}	C_{12}	...	C_{1n}	C_{21}	C_{22}	...	C_{2n}	...	C_{p1}	C_{p2}	...	C_{pn}	

"Maximizar $Z' = a_1U_1 + a_2U_2 + \ldots + a_pU_p + b_1V_1 + \ldots + b_nV_n$

Satisfeitas as restrições:

$$
\begin{aligned}
&U_1 + V_1 \le C_{11}\\
&U_1 + V_2 \le C_{12}\\
&\ldots\\
&U_1 + V_n \le C_{1n}\\
&U_2 + V_1 \le C_{21}\\
&U_2 + V_2 \le C_{22}\\
&\ldots\\
&U_2 + V_n \le C_{2n}\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

. . . .
. . . .

$$U_p + V_1 \qquad\qquad\qquad\qquad \leq C_{p1}$$

$$U_p \qquad +V_2 \qquad\qquad\qquad \leq C_{p2}$$

. . . .

$$U_p \qquad\qquad\qquad\qquad +V_n \leq C_{pn}$$

e U_i e V_j livres"

ou resumidamente:

"MAXIMIZAR $Z' = \sum_i a_i U_i + \sum_i b_j V_j$

Satisfeitas as restrições:

U_i é uma variável livre ($i = 1, \ldots, p$),

V_j é uma variável livre ($j = 1, \ldots, n$),

$U_i + V_j \leq C_{ij}$ ($i = 1,\ldots,p;\ \ j = 1,\ldots, n$)."

Representando por $X = (X_{ij})$ uma solução do primal e por $U = (U_i)$ e $V = (V_j)$ uma solução possível do DUAL, pode-se, então escrever:

$$Z - Z' = \sum_{i,j} C_{ij} X_{ij} - \sum_i a_i U_i - \sum_j b_j V_j$$

$$Z - Z' = \sum_{i,j} C_{ij} X_{ij} - \sum_i U_i . \sum_j X_{ij} - \sum_j V_j . \sum_i X_{ij}$$

$$Z - Z' = \sum_{i,j} C_{ij} X_{ij} - \sum_{i,j} U_i . X_{ij} - \sum_{i,j} V_j . X_{ij}$$

$$Z - Z' = \sum_{i,j} (C_{ij} - U_i - V_j) \, . \, X_{ij} \geq 0$$

pois $Z \geq Z'$.

Z'(max) ⟶ | ⟵ Z(min)

Para a solução ótima do PRIMAL e do DUAL, $Z = Z'$, isto é, a cada par "ij", deverá ser nulo um dos dois valores, X_{ij} ou $(C_{ij} - U_i - V_j)$, para que se anule o somátorio de produtos cujos fatores são necessariamente positivos.

Procedimentos do Método de Distribuição

O método de distribuição modificado atribui valores específicos para U_i e V_j, de modo a ter $C_{ij} - U_i - V_j = \emptyset$ nas células para as quais $X_{ij} > 0$, isto é, para as variáveis básicas. Nas células restantes estão as variáveis não-básicas e, portanto, nulas. Logo, a soma

$$\sum_{i,j} (C_{ij} - U_i - V_j) \times X_{ij} \text{ é nula}$$

Entretanto, devem ser verificados os valores de $C_{ij}-U_i-V_j$ resultantes para as variáveis não-básicas, pois deve-se ter $C_{ij}-U_i-V_j \geq 0$ para todas as células.

Um valor de $C_{ij}-U_i-V_j<0$ implica na violação de uma restrição e a solução correspondente não é viável para o dual.

O valor de Z pode ser expresso como abaixo:

$$Z = Z' + \sum_{i,j} (C_{ij} - U_i - V_j) . X_{ij}$$

Lembrando que o valor de Z' corresponde a uma solução inviável para o dual, conclui-se que a variável não-básica X_{ij}, que corresponde ao coeficiente mais negativo $C_{ij} - U_i - V_j$, deve ser incluída na base. Isto é feito com auxílio do circuito de alpondras. A seguir, determinam-se os novos valores de U e V, e assim sucessivamente até obter-se:

$$\sum_{i,j} (C_{ij}-U_i-V_j).X_{ij}=0 \quad \text{e} \quad C_{ij}-U_i-V \geq 0$$

Para $i = 1,..., p$ e $j = 1, ..., n$

Exemplo de Aplicação do Método de Distribuição

Considere-se o programa obtido anteriormente, pela aplicação do processo do canto noroeste, onde foram preenchidas as células 1,1; 1,2; 2,2; 2,3; 3,3 e 3,4.

O primeiro passo consiste em determinar os valores de U_i e V_j tais que $C_{ij} - U_i - V_j = 0$ para as células onde $X_{ij}>0$. Como o problema tem n+p-1 restrições independentes e como há n+p variáveis U_i e V_j, uma delas pode ser arbitrada.

Habitualmente, começa-se por fazer $U_1 = 0$.

A partir desta adjudicação pode-se determinar os demais valores de U_i e V_j, utilizando as células preenchidas, pois, para elas, $C_{ij} - U_i - V_j = 0$.

$C_{11} - U_1 - V_1 = 0$ ou $17 - 0 - V_1 = 0$, onde $V_1 = 17$.

$C_{12} - U_1 - V_2 = 0$ ou $13 - 0 - V_2 = 0$, onde $V_2 = 13$.

$C_{22} - U_2 - V_2 = 0$ ou $30 - U_2 - 13 = 0$, onde $U_2 = 17$.

$C_{23} - U_2 - V_3 = 0$ ou $36 - 17 - V_3 = 0$, onde $V_3 = 19$.

$C_{33} - U_3 - V_3 = 0$ ou $28 - U_3 - 19 = 0$, onde $U_3 = 9$.

$C_{34} - U_3 - V_4 = 0$ ou $45 - 9 - V_4 = 0$, onde $V_4 = 36$.

A Figura 10 mostra os valores de U e V resultantes.

DEST / ORIG	$V_1=17$ 1	$V_2=13$ 2	$V_3=19$ 3	$V_4=36$ 4	CAP
$U_1=0$ 1	180 [17]	20 [13]	[24]	[54]	200
$U_2=17$ 2	[8]	100 [30]	60 [36]	[26]	160
$U_3=9$ 3	[20]	[42]	50 [28]	90 [45]	140
DEM	130	120	110	90	500

Figura 10
Quadro de exemplo Método de Distribuição Modificado.

Após todos os valores de U_i e V_j serem determinados, procede-se ao cálculo de $C_{ij} - U_i - V_j$ para as células não ocupadas. Este valor fornece a repercussão sobre o custo total da transferência de uma unidade para a referida célula. Se o resultado for positivo, não há vantagem em a utilizar; se negativo, é conveniente sua utilização.

Avaliação das células vazias:

Célula	$C_{ij} - U_i - V_j$	Vantagem na utilização
(1,3)	24 - 0 - 19 = 5	Não
(1,4)	54 - 0 - 36 = 18	Não
(2,1)	8 - 17 - 17 = -26	Sim
(2,4)	26 - 17 - 36 = -27	Sim
(3,1)	20 - 9 - 17 = -6	Sim
(3,2)	42 - 9 - 13 = 20	Não

Em geral opta-se pela utilização da célula para a qual o valor de $C_{ij} - U_i - V_j$ seja "o mais negativo", isto é, MAX $|(C_{ij}-U_i-V_j)| / (C_{ij}-U_i-V_j)<0$

Opta-se, assim, pela célula (2,4), para a obtenção da primeira solução melhorada, figura 11, aplicando-se o método das alpondras.

Para prosseguir, é preciso recalcular os valores de U_i V_j, pois a modificação feita alterou a base.

DEST / ORIG	$V_1=17$ 1	$V_2=13$ 2	$V_3=-8$ 3	$V_4=9$ 4	CAP
$U_1=0$ 1	180 / 17	20 / 13	(+32) / 24	(+45) / 54	200
$U_2=17$ 2	(-26) / 8	100 / 30	(+27) / 36	60 / 26	160
$U_3=36$ 3	(-33) / 20	(-7) / 42	110 / 28	30 / 45	140
DEM	180	120	110	90	500

Figura 11

Quadro de exemplo, primeira solução melhorada pelo Método de Distribuição.

OBS: Os valores de $C_{ij} - U_i - V_j$ para as células vazias aparecem no quadro dentro dos círculos pontilhados.
A célula (3,1) cujo valor $C_{ij} - U_i - V_j$ é -33, é escolhida, obtendo-se o quadro da figura 12.

DEST / ORIG	$V_1=17$ 1	$V_2=13$ 2	$V_3=25$ 3	$V_4=9$ 4	CAP
$U_1=0$ 1	(4) 150 17	(3) 50 13	(-1) 24	(+45) 54	200
$U_2=17$ 2	(1) (-26) 8	(2) 70 30	(-6) 36	90 26	150
$U_3=3$ 3	30 20	(+26) 42	110 28	(+33) 45	140
DEM	180	120	110	90	500

Figura 12

Segunda solução melhorada.

A célula (2,1) é escolhida, obtendo-se o quadro da figura 13.

DEST / ORIG	$V_1=17$ 1	$V_2=13$ 2	$V_3=25$ 3	$V_4=35$ 4	CAP
$U_1=0$ 1	(2) 80 17	120 13	(1) (-1) 24	(+19) 54	200
$U_2=-9$ 2	70 8	(+26) 30	(+20) 36	90 26	160
$U_3=3$ 3	(3) 30 20	(+26) 42	(4) 110 28	(+7) 45	140
DEM	180	120	110	90	500

Figura 13

Terceira solução melhorada.

A célula (1,3), (única com $C_{ij}-U_i-V_j$ negativo, -1) é escolhida, obtendo-se o quadro da figura 14.

DEST / ORIG	$V_1=16$ 1	$V_2=13$ 2	$V_3=24$ 3	$V_4=34$ 4	CAP
$U_1=0$ 1	(+1) 17	120 13	80 24	(+20) 54	200
$U_2=-8$ 2	70 8	(+25) 30	(+20) 36	90 26	160
$U_3=4$ 3	110 20	(+25) 42	30 28	(+7) 45	140
DEM	180	120	110	90	500

Figura 14

Quarta solução melhorada (é ótima).

Que é a solução ótima do programa, pois, aqui, $C_{ij}-U_i-V_j \geq 0$ para todas as células.

O retrospecto do custo total em cada etapa é:

Solução "Noroeste" - 13.930
1ª Solução melhorada - 12.310
2ª Soluçao melhorada - 11.320
3ª Solução melhorada - 9.500
4ª Solução melhorada - 9.420 (solução ótima)

6.6.3. OS PROBLEMAS DE ADJUDICAÇÃO ("ASSIGNMENT PROBLEM", DISTRIBUIÇÃO BI-UNÍVOCA OU ALOCAÇÃO)

Existe um conjunto de problemas de programação linear que devido as suas particularidades são tratados por algoritmos ou métodos de solução particulares, tais como o caso dos problemas de transporte, os problemas de adjudicação, também conhecidos como problemas de "distribuição bi-unívoca ou 'Alocação'" ou ainda, "Assignment Problem" na literatura técnica Norte-Americana, são tratados, na literatura conhecida, por método particular de resolução.

Os probelams de Adjudicação possuem a seguinte formulação:

$$\text{Min} \quad Z = \sum_{i,j} C_{ij} \times X_{ij} \qquad 6.6.3.1$$

sujeito A:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \quad (i=1,2,...,n) \qquad 6.6.3.2$$

$$\sum_{i=1}^{p} X_{ij} = b_j \quad (j=1,2,...,p) \qquad 6.6.3.3$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (\text{todo } i \text{ e todo } j) \qquad 6.6.3.4$$

$$\sum_{i=1}^{p} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad 6.6.3.5$$

$$a_i = 1 \quad (i=1,2,...,p) \qquad 6.6.3.6$$

$$b_j = 1 \quad (i=1,2,...,n) \qquad 6.6.3.7$$

$$p = n \qquad 6.6.3.8$$

As condições 6.6.3.6, 6.6.3.7 e 6.6.3.8 caracterizam os problemas de adjudicação como um caso particular dos problemas de transporte, como se pode verificar pelas equações que definem um problema de transporte, 6.1 a 6.5 e as equações 6.6.3.1 a 6.6.3.5 dos problemas de adjudicação.

Devido as condições 6.6.3.6 a 6.6.3.8, esta classe de problemas apresenta como solução n variáveis $X_{ij}=1$, ou seja, uma base degenerada, em relação a base correspondente do problema de transporte, do qual é caso particular, com n-1 degenerações. E, razão desta situação e como os algoritmos utilizados nos problemas de transporte não previam que as degenerações fossem resolvidas naturalmente pelos próprios, estes problemas são tratados por métodos particular de solução, "____________________". A partir das modificações realizadas nos métodos de solução dos problemas de transporte, apresentados, já modificados, neste livro, esses tipos de problemas podem ser resolvidos também pelos mesmos métodos, como mostra o exemploda figura 15, resolvido pelo método de Vogel Modificado.

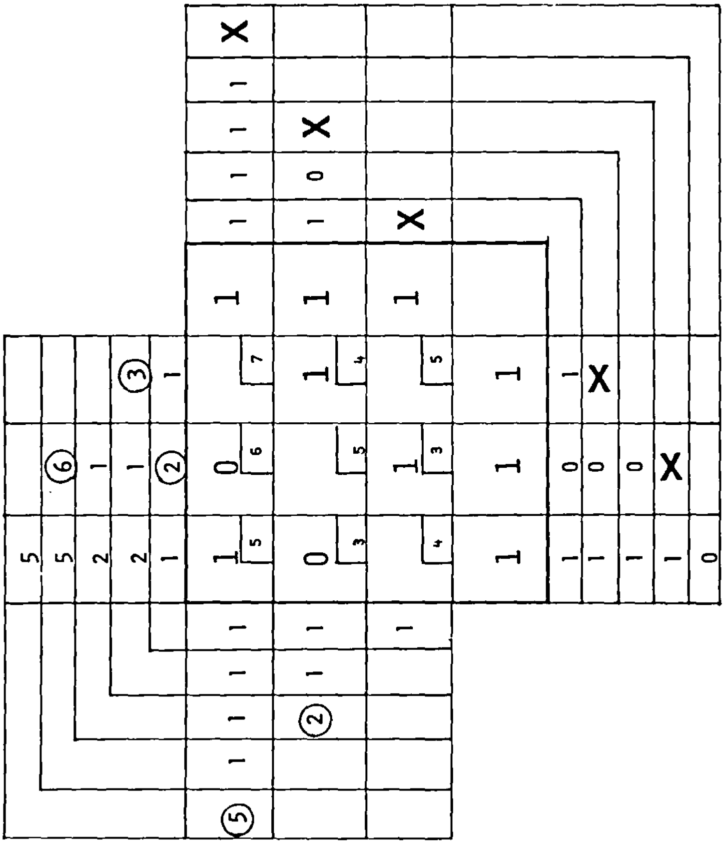


Figura 15
Quadro de exemplo de um problema de adjudicação.

Note-se que o método se adapta perfeitamente a este tipo de problema; pode-se comprovar, também que a solução é ótima, o que normalmente ocorre, pois esta é uma característica do método de Vogel, mesmo quando aplicado em problemas de adjudicação.

APÊNDICE I

UM SISTEMA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE TRANSPORTE E ADJUDICAÇÃO EM COMPUTADOR

O sistema foi programado na linguagem "ALGOL", Burroughs B-6700/B-7700, que oferece alguns recursos importantes neste tipo de aplicações.

Opções oferecidas o tornam utilizável tanto para fins didáticos como comerciais, oferecendo recursos importantes para ambas as situações, sob custo muito baixo.

Para a solução de partida

a) NOROESTE: Método do Canto Noroeste Modificado.
b) VOGELMODIF: Método de Vogel Modificado.
c) SIRO: Solução Inicial Rodrigues.

Para as otimizações:

a) MINIMIZAÇÃO ("Default")
b) MAXIMIZAÇÃO

Para o fornecimento dos dados ao sistema

a) Formato livre

O sostema pode resolver um ou mais problemas em cada execução, bastando, para tanto, fornecer os dados de cada problema logo após os dados do anterior. Pode-se, ainda, utilizar qualquer das opções em cada problema fornecido.

Para os resultados

Os resultados são fornecidos de acordo com o valor X.

a) X = -1: Somente a solução ótima é listada.

b) X = 0: A solução de partida e a ótima são listadas.

c) X > 0: A solução de partida, que recebe número 1 (UM), as soluções intermediárias cujo número é múltiplo de X e a solução ÓTIMA são listadas.

d) A cada iteração são fornecidos, ainda, se desejados: o número da solução, a célula utilizada para se obter esta solução, o custo da solução de partida e o custo da solução atual.

A impressão dos resultados é feita em formato "matricial expansível", que depende do tamanho da matriz e dos valores.

DADOS DE ENTRADA DO SISTEMA

As opções oferecidas pelo sistema, e, os dados de cada problema devem ser fornecidos na seguinte ordem:

Resultados desejados

O valor "X" da opção deve ser fornecido através do atributo "*value*" da ordem de execução do sistema e é usado para todos os problemas desta execução.
ex.: RUN SOPTA ; VALUE = X;

Dados de entrada e outras opções

Os demais dados e opções são fornecidos por um arquivo de cartões, de nome "*transporte*", na seguinte ordem e formato:

a) Número de origens e destinos, formato livre.

b) Opção de Partida, opção de otimização e opção (d) dos resultados; formato fixo, um cartão com 10(*dez*) posições contíguas para cada opção.

c) Capacidade de cada origem, formato livre.

d) Demanda de cada destino, formato livre.

e) Custos unitários de transporte de cada origem para cada um dos destinos, formato livre.

Ex.: (cada linha corresponde a um cartão).

```
RUN SOPTA ; VALUE = -1;
DATA TRANSPORTE
3, 4
NOROESTE..MINIMIZE..FALSE......
200, 160, 140
180, 120, 110, 90,
1700, 1300, 2400, 5400,
800, 3000, 3600, 2600,
2000, 2400, 2800, 4500,
END
```

O exemplo acima especifica um problema cujo resultado desejado é apenas a solução ótima, o problema consiste em três origens e quatro destinos sendo que as capacidades das origens são 200, 160 e 140 respectivamente e a demanda dos destinos 180, 120, 110 e 90; os custos unitários de transporte da origem 1 (um) para cada destino são, respectivamente, Cr$17,00, Cr$ 13,00, Cr$ 24,00 e Cr$ 54,00.

DEST *ORIG*	1	2	3	CAP
1	0 $30.00	40 $52.00	$71.00	40
2	10 $18.00	$40.00	20 $65.00	30
3	20 $18.00	$9.999.99	$56.00	20
DEM	30	40	20	90

PROBLEMA NRO: 1 A MAX.

CUSTO SOLUCAO INICIAL (SIRO)= $3.920,00

CUSTO SOLUCAO ATUAL (SOL.NRO. 1)= $3.920,00

DIFERENÇA CUSTO(SOL INICIAL-ATUAL) = $0,00

A SOLUCAO NUMERO 1 E' A SOLUCAO OTIMA DO PROBLEMA.

AS CELULAS A SEGUIR APRESENTAM CONDIÇÃO DE OBTENCAO DE SOLUCOES OTIMAS ALTERNATIVAS.:

(2 , 2) :

Figura 16

Exemplo de saída do sistema.

APÊNDICE II

INVERSÃO DE MATRIZES – O MÉTODO DA ELIMINAÇÃO

O algoritmo assenta-se na idéia de converter a matriz dada em matriz identidade, executando uma série de operações elementares sobre as linhas da matriz. O aspecto interessante é o de que as mesmas operações, executadas na matriz identidade que tem as dimensões (n x n) da matriz dada A, permitem chegar à inversão de A, isto é, a A^{-1}

Veja-se, a seguir, como certa matriz A, não-singular, pode ser reduzida à matriz identidade (I), por meio de uma seqüência de operações elementares como:

1. Multiplicação de uma linha por um escalar α,

$$(\text{linha})_i \leftarrow \alpha\ (\text{linha})_i.$$

2. Permuta de linhas,

$$(\text{linha})_i \rightleftarrows (\text{linha})_k.$$

3. Substituição de uma linha $[(\text{linha})_i]$, pela soma dessa linha, $(\text{linha})_i$, com outra linha $[(\text{linha})_k]$ que pode ser previamente multiplicada por um escalar,

$$(\text{linha})_i \leftarrow (\text{linha})_i + \alpha(\text{linha})_k.$$

Estas operações elementares podem ser caracterizadas pelas matrizes U_1, U_2 e U_3, respectivamente. A pré-multiplicação da matriz A por U_1 ou U_2 ou U_3 daria, em A, as operações elementares citadas.

Exemplo:

$$U_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ \alpha & 2\alpha & 3\alpha \end{bmatrix}$$

o que equivale à operação $(\text{linha})_3 \leftarrow \alpha(\text{linha})_3$.

$$U_2A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

o que equivale à operação $(\text{linha})_1 \rightleftarrows (\text{linha})_2$.

$$U_3A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

o que equivale à operação $(\text{linha})_1 \leftarrow (\text{linha})_1 + (\text{linha})_3$

As três operações elementares, com auxílio das matrizes U_i, podem ser usadas para converter a matriz (A) em matriz identidade (I). Se, ao mesmo tempo, ou em momento diverso, mas da mesma forma, as operações fossem aplicadas à matriz identidade I, o resultado seria a matriz inversa de A, isto é, A^{-1}.

Pois se:

$$U_{\beta 1} \cdots U_{\beta i} \cdots U_{\beta n} \cdot A = I$$

com $\beta_i = 1$ ou 2 ou 3, então, multiplicando-se cada membro da equação por A^{-1} chega-se a

$$U_{\beta 1} \cdots U_{\beta i} \cdots U_{\beta n} A A^{-1} = I A^{-1}$$

esta equação se simplifica e fornece

$$U_{\beta 1} \cdots U_{\beta i} \cdots U_{\beta n} I = A^{-1}$$

O algoritmo para computador pode ser formulado usando o que se chama de "matriz aumentada", que tem a forma [A|I], ou seja,

$$[A|I] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots\cdots & a_{1n} & 10\ldots.0 \\ a_{21} & \cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots & 01\ldots.0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ \ddots\ \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{nn} & 00\ldots.1 \end{bmatrix}$$

O processo principia com a "normalização da primeira linha da matriz aumentada, o que se consegue mediante a divisão de seus elementos por a_{11} (pivô). Esta operação pode ser indicada, por meio da fórmula recursiva, desta maneira:

$$a^1_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \qquad j = 1, \ldots, 2n,$$

em que o índice superior "1", de a^1_{1j}, identifica os novos elementos da primeira linha. Cabe notar que $a^1_{11} = 1$, o primeiro elemento da matriz identidade.

O passo seguinte é reduzir os demais elementos da primeira coluna a zero, por meio de uma seqüência de operações executadas pelas matrizes U_1 e U_3. A implementação, no computador, de tal operação, faz uso da chamada "equação de redução".

$$a^1_{ij} = a_{ij} - a_{i1} \cdot a^1_{1j} \qquad \begin{array}{l} i = 2, 3, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, 2n \end{array}$$

Essa equação reduz a zero os elementos que se acham fora da diagonal, na primeira coluna; além disso, altera, é claro, os elementos restantes da matriz aumentada neste primeiro "ciclo". A matriz resultante tem, na coluna um, exatamente a coluna um da matriz identidade.

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & a^1_{12} & & a^1_{1n} & \frac{1}{a_{11}} & 0 \ldots 0 \ldots & 0 \\ 0 & a^1_{22} & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \frac{-a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \ldots \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & 0 & 1 \ldots \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a^1_{n2} & & a^1_{nn} & \frac{-a_{n1}}{a_{11}} & 0 & 0 \ldots 1 \end{array}\right]$$

O processo de "normalização" dos elementos da diagonal e de redução a zero dos elementos fora da diagonal, na metade esquerda da matriz aumentada, tem prosseguimento até que a matriz adquira a forma final

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 \ldots & 0 & a^n_{11} & a^n_{12} & \ldots\ldots\ldots & a^n_{1n} \\ 0 & 1 \ldots & 0 & a^n_{21} & \ldots\ldots\ldots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 \ldots & 1 & a^n_{n1} & \ldots\ldots\ldots & & a^n_{nn} \end{array}\right] = [I \mid A^{-1}]$$

com a matriz identidade à esquerda e a inversa à direita.

As fórmulas de recursão abaixo incorporam os n"ciclos" necessários para efetuar a conversão:

$$\left.\begin{array}{ll} a^k_{kj} = \dfrac{a^{k-1}_{kj}}{a^{k-1}_{kk}} & j=k,\ldots,2n \\ a^k_{ij} = a^{k-1}_{ij} - a^{k-1}_{ik} \cdot a^k_{kj} & \begin{array}{l} i=1,\ldots,n \\ (i \neq k) \end{array} \end{array}\right\} k=1,\ldots,n$$

Obs.: É possível que um pivô seja igual a zero. Neste caso é necessário uma pré-preparação da matriz original, realizando-se permutas de linhas com a finalidade de afastar os elementos zeros ou muito reduzidos da diagonal principal.

É importante salientar que o produto dos pivôs dos n "ciclos" fornece também o determinante da matriz original. Se uma permuta de linhas é realizada, o sinal do determinante se altera.

$$\det[A] = (-1)^p \cdot \prod_{k=1}^{n} a^{k-1}_{kk}$$, onde p é o número de

permutas realizadas.

Os recursos necessários para inversão de matriz pelo

método acima são:
- espaço de memória para a matriz aumentada - (nx2n)
- operações elementares (divisão, multiplicação e subtração) - $3n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$

MÉTODO REDUZIDO DE INVERSÃO DE MATRIZES POR ELIMINAÇÃO

Trata-se de uma versão simplificada do método anterior, onde se elimina a matriz indentidade da matriz aumentada, conservando-se as operações sobre ela realizadas, porém, realizadas sobre a matriz identidade que surgiria à esquerda da matriz aumentada.

Tais simplificações resultam no seguinte conjunto de fórmulas de recursão:

$$\overset{k}{\text{Pivo}} = a_{kk}^{k-1}$$

$$a_{kk}^{k-1} = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} a_{kj}^{k} = \dfrac{a_{kj}^{k-1}}{\overset{k}{\text{Pivô}}} & \\ a_{ij}^{k} = a_{ij}^{k-1} - a_{ik}^{k-1} \cdot a_{kj}^{k} & \end{array}\right\} \begin{array}{l} j = k+1, \ldots, n, 1, \ldots, k-1 \\ \\ i = 1, \ldots, n \, (i \neq k) \end{array} \end{array}\right\} k = 1, n$$

$$\left.a_{ik}^{k} = \frac{-a_{ik}^{k-1}}{\overset{k}{\text{Pivô}}}\right\} i = 1, \ldots, n$$

Os recursos necessários, para este método, são:
- espaço de memória para a matriz original: $(n\text{x}n)$
- número de operações elementares (divisão, multiplicação, subtração): $2n^3 - 2n^2 + n$

Comparando os dois métodos chega-se aos seguintes resultados:

Recursos Utilizados	Método Eliminação Matriz Aumentada	Método Eliminação Reduzido	Diferença Pró-Reduzido
MEMÓRIA OPERAÇÕES	$(n\text{x}2n)$ $3n^3 - \frac{1}{2}(n^2+n)$	$(n\text{x}n)$ $2n^3 - 2n^2 + n$	$(n\text{x}n)$ $n^3 - \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
Operações para			
N = 2	21	10	11
3	75	39	36
4	182	100	82
⋮	⋮	⋮	⋮
10	2940	1810	1130
...	...	...	...
100	2.994.950	1.980.100	1.014.85 0

Exemplo de aplicação do método reduzido.

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

o método deve conduzir, sucessivamente, às seguintes outras matrizes

$k=1$, PIVÔ=1 $\qquad$ $k=2$, PIVÔ=-1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & -2 & -7 \\ -3 & -2 & -8 & -10 \\ -4 & -7 & -10 & -13 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & -10 \\ 2 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & -4 & 4 \\ 10 & -7 & 4 & 36 \end{bmatrix} \blacktriangleright$$

$k=3$, PIVÔ=-4 $\qquad$ $k=4$, PIVÔ=40

$$\blacktriangleright \begin{bmatrix} -\frac{13}{4} & \frac{10}{4} & -\frac{1}{4} & -11 \\ \frac{10}{4} & -2 & \frac{2}{4} & 9 \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} & -1 \\ 11 & -9 & 1 & 40 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{11}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{11}{40} & -\frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{11}{40} & -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} \\ \frac{11}{40} & -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix}$$

a matriz resultante, após as quatro pivotações, deve ser a inversa da matriz original. Para comprovar, basta pré-multiplicar esta matriz pela matriz original e obter a matriz identidade.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{11}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{11}{40} & -\frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{11}{40} & -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} \\ \frac{11}{40} & -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

No conjunto de fórmulas de recursão, do método reduzido, não está previsto a ocorrência de pivôs iguais à zero, o que deve ser evitado. Uma forma de se resolver o problema do pivô igual a zero é permutar a linha do pivô com uma outra linha que ainda não tenha servido de linha pivotal e cujo elemento correspondente à coluna pivotal seja diferente de zero. No entanto, deve-se guardar os índices das linhas permutadas, em uma "pilha" de permutas realizadas durante a pivotação, pois, no método reduzido, para que se obtenha a matriz inversa da matriz original, é necessário que se realize, na ordem inversa das permutas realizadas sobre as linhas, as correspondentes permutas sobre as colunas de mesmo índice das linhas na matriz resultante das n pivotações.

Por exemplo, dada a matriz

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{permuta}\\ (\ell_1 \rightleftarrows \ell_3)}]{\substack{k=1\\ \text{Pivô}=\emptyset}} \begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{k=1\\ \text{Pivô}=3}} \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 3\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{k=2\\ \text{Pivô}=\frac{5}{3}}} \begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{9}{5}\\ \frac{2}{5} & -\frac{6}{5} & -\frac{13}{5}\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{k=3\\ \text{Pivô}=-\frac{13}{5}}} \begin{bmatrix}\frac{4}{13} & \frac{1}{13} & -\frac{3}{13}\\ \frac{1}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{9}{13}\\ -\frac{2}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{5}{13}\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{permuta}\\ (C_1 \rightleftarrows C_3)}]{\substack{\text{fim da}\\ \text{pivotação}}}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix}-\frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13}\\ \frac{9}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{1}{13}\\ -\frac{5}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{2}{13}\end{bmatrix} = A^{-1}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-\frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13}\\ \frac{9}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{1}{13}\\ -\frac{5}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{2}{13}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = I$$

Note-se que a permuta pode ser com qualquer outra linha que ainda não tenha servido como linha pivotal, como por exemplo a linha 2.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{permuta}\\ (\ell_1 \rightleftarrows \ell_2)}]{\substack{k=1\\ \text{Pivô}=\emptyset}} \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{k=1\\ \text{Pivô}=1}} \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ -3 & -5 & -9\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{k=2\\ \text{Pivô}=2}}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & \frac{5}{2} & -\frac{13}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Pivô}=-\frac{13}{2}]{k=3} \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{4}{13} \\ -\frac{3}{13} & \frac{9}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{6}{13} & -\frac{5}{13} & -\frac{2}{13} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Permuta }(C_1 \rightleftarrows C_2)]{\text{fim da pivotação}}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{9}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{2}{13} \end{bmatrix} \longrightarrow \equiv A^{-1}$$

Outra característica importantíssima, que pode ser explorada para eliminar passos de trocas de linhas, é que:

Qualquer que seja a ordem de aplicação das n pivotações - reduções realizadas com o método reduzido, sobre a matriz original, tem como resultado a inversa da matriz original, quando esta não for singular:

Exemplo:

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1º Pivotação-redução: $k=2$, $\text{PIVO}=a^{0}_{22}=2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & \boxed{2} & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{1^a} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

2º Pivotação-redução: $k=1$, $\text{PIVO}=a^{1}_{11}=-1$

3º Pivotação-redução: $k=3$, $\text{PIVO}=a^{2}_{33}=-\frac{13}{2}$

$$\begin{bmatrix} \boxed{-1} & -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{2^a} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -3 & \boxed{-\frac{13}{2}} \end{bmatrix} \xrightarrow{3^a} \begin{bmatrix} -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{9}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{2}{13} \end{bmatrix} = A^{-1}$$

ou, 2º Pivotação-redução: $k=3$, $\text{PIVO}=a^{1}_{33}=-\frac{3}{2}$

$k=1$, $\text{PIVO}=a^{2}_{11}=-\frac{13}{3}$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \boxed{-\frac{3}{2}} \end{bmatrix} \xrightarrow{2^a} \begin{bmatrix} \boxed{-\frac{13}{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{9}{3} & 0 & 1 \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{3^a} \begin{bmatrix} -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{9}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{2}{13} \end{bmatrix} = A^{-1}$$

Ora, esta propriedade permite que PIVÔS iguais a zero sejam evitados, sem a necessidade de pré-preparação da matriz original com trocas de linhas, etc, o que acelera e simplifica o método.

PROCEDIMENTO PARA INVERSÃO DE MATRIZES PELO MÉTODO REDUZIDO DE INVERSÃO POR ELIMINAÇÃO.

COMENTÁRIO:

Este procedimento tem como parâmetros de entrada a matriz original a ser invertida e a sua dimensão N(NxN). A matriz inversa é calculada sobre a mesma área da matriz original, portanto a matriz original é destruída, mesmo que esta seja singular, o que é determinado durante o processo e é indicado por um parâmetro de retorno que se for "verdadeiro" a inversa foi calculada, se for "falso" a matriz original era singular. O processo fornece ainda o determinante da matriz original, em outro parâmetro de retorno.

```
PROC:
        INVMA (A, N, DET, Ns);
        MATRIZ A, DE DIMENSÕES NxN, PARÂMETROS DE ENTRADA
        DET, DETERMINANTE DE A,
        Ns, INDICADOR DE NÃO SINGULARIDADE SÃO PARÂMETROS
        DE RETORNO.

   S1:  DEFINE-SE DOIS ARRAYS AUXILIARES, KK E IJ, DE
        UMA DIMENSÃO COM "N" POSIÇÕES.
        KK(I): SINALIZADOR DE PIVOTAÇÃO.
                 = ∅, SE A PIVOTAÇÃO DE ÍNDICE "I" JÁ SE
                        REALIZOU,
                 = 1, EM CASO CONTRÁRIO.
        IJ(TROCA): ARRAY QUE SERVE COMO PILHA DE SALVAMEN
                 TO DOS ÍNDICES DE TROCA DE LINHAS (ℓI≠ℓJ),
                 DURANTE O PROCESSO.
        DET ←1;
        K∅  ←N;
        KK(I) ←1; PARA  1 ≤ I ≤ N.
   S2:  SE K∅=∅  VÁ PARA FIM.
        K  ← N;
        K1 ← 1;

        IX ← 1;
   S3:  SE IX>N VA PARA → S4
        SENÃO CONTINUE;
        COMENTÁRIO: (K1 MOD N) É O MESMO QUE O RESTO DA
                    DIVISÃO DE K1 POR N.

        SE (KK(K1) =∅  OU  A(K1,K1)=∅) E K≠K1
        FAÇA: K1 ← (K1 MOD N)+1 E VA PARA S3
        SENÃO: CONTINUE;
        SE KK(K1)≠∅ E A(K1,K1)≠∅
```

```
      FAÇA:  | K ← K1,
             | KK(K) ← ø,
             | Kø ← Kø-1,
             | PIVO ← A(K,K),
             | A(K,K) ← -1,
             | PARA J ← K+1, K+2,...,N, 1, 2,...K-1.
             | FAÇA: | A(K,J)← A(K,J)/PIVO
             |       | PARA I← 1,2,...K-1,K+1,...,N.
             |       | FAÇA:  A(I,J)← A(I,J)-A(I,K)*A(K,J);
             | PARA I← 1,2,...,N.
             | FAÇA: | A(I,K) ←  -A(I,K)/PIVO;
             |
             | DET ← DET*PIVO;

      K1← (K1 MOD N)+1;
      IX← IX+1;
      VA PARA →S3;

S4:   SE Kø > ø
      FAÇA: | SE A(K,K1)≠ø  E KK(K)≠ø
            | FAÇA: | TROCA← TROCA+1,
            |       | IJ(TROCA)← K*100000+K1,
            |       | (PERMUTA LINHA K COM LINHA K1)
            |       | A(K,*)⇄A(K1,*),
            |       | VA PARA →S2
            | SENÃO
            | FAÇA: | K← (K1 MOD N)+1;
            |       | ENQUANTO (A(K,K1)=ø OU KK(K)=ø)E K≠K1
            |       | FAÇA:  K← (K MOD N)+1;
            |       | SE K≠K1 VA PARA →S4
            |       | SENÃO
            |       | FAÇA: | NS← "FALSO",
            |       |       | Kø← ø,
            |       |       | DET←ø;
            |       | SENÃO
            |       | FAÇA: | NS← "VERDADEIRO";
FIM:  ENQUANTO TROCA>ø
      FAÇA: | I← IJ(TROCA) DIV 100000,
            | J← IJ(TROCA) MOD 100000,
            | (PERMUTA COLUNA I COM COLUNA J)
            | A(*,I)⇄A(*,J),
            | TROCA← TROCA-1;
            | DET← -DET
```

COMENTÁRIO:

Neste ponto termina o processo.
Se NS for "verdadeiro", a inversa da matriz original foi determinada e ocupa a mesma área da matriz original.

Este procedimento encontra-se a seguir programado, em uma linguagem de computador dirigida para algoritmos e denominada "ALGOL", juntamente com um programa de teste que o utiliza para inverter algumas matrizes como exemplo.

BURROUGHS B-6700 ALGOL COMPILER, VERSION 2.9.190, WEDNESDAY, 01/17/79.

T E S T I N V M A T
= = = = = = = = = =

```
BEGIN INTEGER N, LABEL FIN;

  FILE RD(KIND=READER),SAL(KIND=PRINTER);


BOOLEAN PROCEDURE MULTIP(A,B,N,M,I,J,X);
       VALUE N,M,I,J, INTEGER N,M,I,J;
       ARRAY A[1,1],B[1,1],X[1,1];
       BEGIN INTEGER L,K,KL;

         IF I=M                                                       2
         THEN BEGIN
                FOR L:=1 STEP 1 UNTIL J DO                            3
                FOR K:=1 STEP 1 UNTIL N DO
                FOR KL:=1 STEP 1 UNTIL M DO
                X[K,L]:=X+ A[K,KL]*B[KL,L];
                MULTIP:=TRUE;
              END
         ELSE MULTIP:=FALSE;                                          3
       END;

BOOLEAN PROCEDURE INVMA(A,N,DET);                                     2
         ARRAY A[1,1]; INTEGER N; REAL DET;
       BEGIN
         ARRAY KK,IO[1:N];

         INTEGER I,J,K,KO,K1,TROCA;                                   2
         LABEL L1;
         REAL PIVOT;
         KO:=N; DET:=1;
         FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO         KK[I]:=1;
         WHILE KO > 0 DO
         BEGIN
           K:= N; K1:= 1;                                             3
           THRU N DO
           BEGIN
             WHILE (KK[K1]=0 OR A[K1,K1]=0) AND K¬=K1                 4
             DO K1:= (K1 MOD N) + 1;
             IF KK[K1] ¬= 0 AND A[K1,K1] ¬= 0
             THEN BEGIN
                    KK[K:=K1]:=0; KO:=*-1;                            5
                    A[K,K]:= -A[K,K]/PIVOT:=A[K,K];
                    DET:= DET*PIVOT;
                    FOR J:=K+1 STEP 1 UNTIL N,
                             1 STEP 1 UNTIL K-1 DO
                    BEGIN A[K,J]:= A[K,J]/PIVOT;
                      FOR I:=  1 STEP 1 UNTIL K-1,K+1 STEP 1 UNTIL N  6
                      DO A[I,J]:= A[I,J] - A[I,K]*A[K,J];
                    END;
                    FOR I:= 1 STEP 1 UNTIL N DO A[I,K]:=-A[I,K]/PIVOT; 6
                  END;
             K1:= (K1 MOD N) + 1;                                     5
           END;
           IF KO > 0                                                  4
           THEN BEGIN L1:
```

```
                IF A[K,K1] > 0 AND KK[K]  ¬= 0                                  4
                THEN BEGIN TROCA:=*+1; IJ[TROCA]:=K*100000+K1;
                        FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO                              5
                          A[K,I]:=READLOCK(A[K,I],A[K1,I]);
                       END
                ELSE BEGIN K:=(K1 MOD N)+1;                                     5
                        WHILE (A[K,K1]=0 OR KK[K]=0) AND                        5
                              K¬=K1 DO K:=(K MOD N) + 1;
                        IF K ¬= K1 THEN GO L1
                        ELSE INVMA  :=FALSE; K0:=0;
                       END;
             END                                                                5
          ELSE INVMA  :=TRUE;                                                   4
        END;
        WHILE TROCA > 0 DO                                                      3
        BEGIN I:= IJ[TROCA] DIV 100000; J:= IJ[TROCA] MOD 100000;
          FOR K:=1 STEP 1 UNTIL N DO A[K,I]:=READLOCK(A[K,I],A[K,J]);           3
          TROCA:=*-1; DET:= -DET;
        END;
      END DA PROCED;                                                            3

  WHILE NOT READ(ENT,/,N) DO                                                    2
  BEGIN INTEGER I,J;

    REAL A1;                                                                    2
    REAL DET;
    ARRAY A,A1,A2[1:N,1:N];
    READ(ENT,/,FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO A[I,*])[FIM];
    WRITE(SAI,</,"MATRIZ ORIGINAL = A ",/>);
    FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
    WRITE(SAI,< *F5.4>,IF N>10 THEN 10 ELSE N, FOR J:=1 STEP 1 UNTIL N
                          DO A1[I,J]:=A[I,J]);
    IF   INVMA(A1,N,DET)
    THEN BEGIN WRITE(SAI,<"DET[A] = ",R20.8>,DET);
               WRITE(SAI,< /,"MATRIZ INVERSA = A1 ",/>);                        3
          FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
     WRITE(SAI,<10R12.6>,A1[I,*]);
          MULTIP(A,N,N,A1,N,N,A2);
          WRITE(SAI,</"[A].[A1] = [I]",/>);
          FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
     WRITE(SAI,<10R12.5>,A2[I,*]);
        END
    ELSE WRITE(SAI,<//,"A MATRIZ ORIGINAL EH SINGULAR",//>);                    3

  END;

 FIM:                                                                           2
END.

==============================================================================
RORS DETECTED = 0.
GMENTS = 8.   TOTAL SEGMENT SIZE = 402 WORDS.   CORE ESTIMATE = 1237 WORDS.   STACK E
 = 93 CARDS, 838 SYNTACTIC ITEMS, 34 DISK SEGMENTS.
 NAME:   (00002004)TESTINVMAT.
TIME = 9.933 SECONDS ELAPSED;   2.139 SECONDS PROCESSING;   1.822 SECONDS I/O.
==============================================================================
```

```
MATRIZ ORIGINAL = X

   0.0000   1.0000   2.0000
   2.0000   0.0000   1.0000
   1.0000   2.0000   0.0000
DET[X] =              9.00000000

MATRIZ INVERSA = X1

    -0.222222      0.444444      0.111111
     0.111111     -0.222222      0.444444
     0.444444      0.111111     -0.222222

[X].[X1] = [I]

     1.000000      0.000000      0.000000
     0.000000      1.000000      0.000000
     0.000000      0.000000      1.000000

MATRIZ ORIGINAL = X

   0.0000   2.0000   1.0000
   1.0000   2.0000   3.0000
   3.0000   1.0000   0.0000
DET[X] =             13.00000000

MATRIZ INVERSA = X1

    -0.230769      0.076923      0.307692
     0.692308     -0.230769      0.076923
    -0.384615      0.461538     -0.153846

[X].[X1] = [I]

     1.000000     -0.0000005.456968E-12
1.455192E-11      1.000000     -0.000000
1.818989E-12     -0.000000      1.000000

MATRIZ ORIGINAL = X

   1.0000   2.0000   3.0000   4.0000
   2.0000   3.0000   4.0000   1.0000
   3.0000   4.0000   1.0000   2.0000
   4.0000   1.0000   2.0000   3.0000
DET[X] =            160.00000000

MATRIZ INVERSA = X1

    -0.225000      0.025000      0.025000      0.275000
     0.025000      0.025000      0.275000     -0.225000
     0.025000      0.275000     -0.225000      0.025000
     0.275000     -0.225000      0.025000      0.025000

[X].[X1] = [I]

     1.0000009.094947E-12      0.000000     -0.000000
1.273293E-11      1.0000004.547474E-13     -0.000000
1.637090E-111.637090E-11      1.000000     -0.000000
    -0.000000     -0.0000005.002221E-12      1.000000
```

BIBLIOGRAFIA

ELLENRIEDER, Albert von. *Pesquisa operacional.* Rio de Janeiro, Almeida Neves, 1971.

FERRETI, Getúlio Goes. Problemas de transportes; comentários sobre a solução inicial de duas etapas. *Revista de Administração de Empresas,* Rio de Janeiro, *16*(1):25-9. jan./fev. 1976.

GASS, Saul I. *Linear programming; methods and applications.* 4.ed. New York, McGraw-Hill, c1975.

GOELZER, Lúcio. *Programação linear; estatística, métodos quantitativos de produção.* Porto Alegre, CEUE, 1973.

HILLIER, F. S. & LIEBERMAN, G. J. *Introduction to operations research.* San Francisco, Holden-Day, c1967.

LEONEL, Neron Arruda. *SOPTA: Sistema de Otimização de Problemas de Transportes e de Adjudicação.* Porto Alegre, UFRGS-PGCC, 1977.

McMILLAN Jr, Claude. *Mathematical programming.* 2.ed. New York, John Wiley & Sons, Inc , c1970.

NOVAIS, Antonio G. *Pesquisa operacional e transportes: modelos probabilísticos.* São Paulo, McGraw-Hill, 1975.

PUCCINI, Abelardo de Lima. *Introdução à programação linear.* Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1972.

RODRIGUES, Maria Magdalena E. M. Método dos transportes; desenvolvimento de uma nova solução inicial. *Revista de Administração de Empresas,* Rio de Janeiro, *15*(2):40-6, mar./abr. 1975.

RUSSELL, Edward. *Operations Research Journal,* jan./fev. 1963 apud GOELZER, Lúcio, *Programação linear; estatística, métodos quantitativos de produção.* Porto Algre, CEUE, 1973. p.94.

SALTER, Sir James Arthur. Shipping control in world war II. In: *Encyclopaedia Britannica.* Chicago, 1963. v.23, p.344-8.

SERRA COSTA, J. de J. *Tópicos de pesquisa operacional.* 2.ed. Rio de Janeiro, Editora Rio-Sociedade Cultural, 1975.

WAGNER, Harvey M. *Principles of operations research with applications to managerial decisions.* London, Prentice-Hall, 1972.