

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

**Aspectos fenomenológicos
do espalhamento elástico
próton-próton a altas energias**

Thomas Ventura Iser

Dissertação de conclusão de Mestrado
em Física, sob orientação do Prof. Dr.
Emerson Gustavo de Souza Luna.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Phenomenological aspects
of the proton-proton
elastic scattering
at high energies

Thomas Ventura Iser

Dissertação de conclusão de Mestrado
em Física, sob orientação do Prof. Dr.
Emerson Gustavo de Souza Luna.

Porto Alegre, Brasil
Agosto de 2022

Agradecimentos

Meus primeiros agradecimentos vão a minha família, devido ao seu suporte mesmo em meus piores momentos durante a criação deste trabalho. Mesmo durante os piores anos da pandemia conseguiam achar esperança e confiança suficiente em si mesmos para poderem me ajudar com minhas dificuldades e medos. À minha mãe pela mão firme quando eu me mostrava averso a continuar, ao meu pai pela companhia diária e ensinamentos. Aos meus irmãos pela força e amizade.

Os principais agradecimentos vão ao meu orientador Prof. Dr. E. G. S. Luna. Sem ele eu não teria as forças para continuar este trabalho. Sua ideias e conhecimento foram a fonte primal da criação e construção de tudo que aparece nesta dissertação. Foi um orientador de extrema paciência para com todas as minhas dúvidas, não importando quão pequenas, e com meus temores sobre a conclusão deste trabalho. Foram muitas as noites em claro, trocando a saúde por um trabalho melhor. Não há agradecimentos suficientes que possa dar a ele. Utilizo as mesmas palavras que usei em meu trabalho de conclusão de curso, pois estas se fazem válidas novamente:

"Sua orientação e correção, em suas palavras, foi como o lapidar de um mármore, e eu gostaria muito de ter criado uma obra de arte a altura de suas orientações."

Muito Obrigado

Resumo Simplificado (Press Release)

A Física de partículas é a área da Física que estuda os constituintes últimos da matéria e suas interações. As descobertas realizadas ao longo dos séculos culminaram na construção do chamado "Modelo Padrão das Partículas Elementares", que estabelece que toda a matéria observada no universo é composta de 6 tipos de *quarks* (partículas que formam os prótons e nêutrons, por exemplo), 6 léptons (como o elétron), 4 bósons vetoriais (responsáveis pelas interações da Natureza) e um bóson de Higgs. O Modelo Padrão é um dos grandes sucessos da Física moderna. Sua estrutura revela que os quarks são ligados pelos glúons através da força forte, a interação mais intensa da Natureza. Os quarks apresentam-se sempre aos pares (formando os mésons) ou em um trio (formando os bárions). Os mésons e bárions são, por sua vez, coletivamente chamados de hádrons.

O método experimental empregado no estudo dos hádrons e suas interações consiste na análise sistemática das partículas geradas em uma colisão entre dois feixes de partículas. O LHC (do inglês *Large Hadron Collider*) é atualmente o maior acelerador de partículas do mundo, capaz de acelerar feixes de hádrons com velocidades próximas à da luz. Dentre todos os resultados possíveis de serem observados das colisões de hádrons no LHC, uma classe especial se destaca: a classe dos processos difrativos. Estes processos apresentam uma assinatura experimental precisa (a presença de lacunas de rapidez, ou seja, regiões nos detectores com ausência de partículas espalhadas) e representam quase metade das seções de choque hadrônicas medidas no LHC.

Nos processos difrativos estão incluídos os espalhamentos elásticos. Neste trabalho estudamos o espalhamento elástico próton-próton e antipróton-próton por meio de um modelo teórico inspirado na Cromodinâmica Quântica (do inglês *Quantum Chromodynamics*, QCD). A QCD é a teoria quântica de campos que descreve a interação forte entre quarks e glúons. No nosso modelo a ligação entre a dinâmica de quarks e glúons, descrita pela QCD, e os processos físicos envolvendo hádrons, observados experimentalmente, é estabelecida através do modelo a pártons da QCD. Nosso formalismo é compatível com vínculos de unitariedade e analiticidade, permitindo a previsão teórica de importantes quantidades frontais medidas no LHC, tais como a seção de choque total $\sigma_{tot}(s)$ e o parâmetro $\rho(s)$. Mais especificamente, na energia de centro de massa $\sqrt{s} = 14$ TeV, o modelo prevê os valores $\sigma_{tot} = 109.0^{+9.5}_{-8.3}$ mb e $\rho = 0.120^{+0.011}_{-0.009}$.

Resumo

Estudamos a aplicação de um modelo inspirado em QCD para o cálculo da seção de choque total $\sigma_{tot}(s)$ e do parâmetro $\rho(s)$ para o espalhamento elástico pp e $\bar{p}p$. Utilizamos uma representação eiconal para a amplitude de espalhamento elástica, onde as contribuições de processos suaves e semiduros são introduzidas no modelo através de uma função eiconal, $\chi(s, b)$, dependente da energia s e do parâmetro de impacto b . As partes real e imaginária da função eiconal são relacionadas por meio de relações de dispersão derivativas. No nosso modelo o crescimento da seção de choque total é devido exclusivamente à contribuição semidura, calculada a partir do modelo à pártons da QCD. As quantidades $\sigma_{tot}(s)$ e $\rho(s)$ foram calculadas utilizando alguns dos mais novos conjuntos de funções de distribuição partônicas disponíveis, CT14 e MSHT20, ambas pós-LHC. Em todos os ajustes globais realizados neste trabalho utilizamos um conjunto de dados experimentais resultante de um tratamento estatístico de correlações sistemática de incertezas. Em nossas análises fixamos a escala presente nas distribuições partônicas em $Q^2 = p_T^2$. Para os conjuntos CT14, CT14L e MSHT20 obtivemos a melhor escolha para o corte de momentum transversal em $p_{Tmin} = 1.12$ GeV, 1.14 GeV e 1.12 GeV, respectivamente. O conjunto MSHT20 apresentou o melhor ajuste em relação ao conjunto de dados utilizado, sendo a previsão teórica em $\sqrt{s} = 14$ TeV do modelo para este conjunto igual a $\sigma_{tot} = 109.0_{-8.3}^{+9.5}$ mb e $\rho = 0.120_{-0.009}^{+0.011}$.

Abstract

We study the application of a QCD inspired model to the calculation of the total cross section $\sigma_{tot}(s)$ and parameter $\rho(s)$ for the elastic scattering of pp and $\bar{p}p$. We use an eikonal representation for the elastic scattering amplitude, where the contributions stemming from the soft and semihard processes are introduced in model by an eikonal function $\chi(s, b)$, dependent on the energy s and impact parameter b . The real and imaginary parts are related by derivative dispersion relations. In our model the rising of the total cross section is exclusively due to the semihard contribution, calculated from the QCD parton model. The quantities $\sigma_{tot}(s)$ and $\rho(s)$ were calculated utilizing some of the newest sets of parton distribution functions, CT14 and MSHT20, both post-LHC. In all of the global fits done in this work we utilized a set experimental data resultant of a statistical treatment of systematic correlation of uncertainties. In our analyses we fix the scale present in the partonic distribution at $Q^2 = p_T^2$. For the sets CT14, CT14L and MSHT20 we obtained the best choice for the cut in transverse momentum at $p_{Tmin} = 1.12$ GeV, 1.14 GeV e 1.12 GeV, respectively. The MSHT20 set presented the best fit in relation to the data set utilized, being the theoretical prediction at $\sqrt{s} = 14$ TeV for our model given by $\sigma_{tot} = 109.0_{-8.3}^{+9.5}$ mb and $\rho = 0.120_{-0.009}^{+0.011}$.

Sumário

Introdução	10
1 Cinemática	13
1.1 Variáveis de Mandelstam e a Amplitude de espalhamento	13
1.2 Expansão em Ondas Parciais	17
1.2.1 Espaço do Parâmetro de Impacto e Representação Eiconal	19
2 Modelo à Pártons da QCD	22
2.1 A Cromodinâmica Quântica (QCD)	22
2.1.1 A Constante de Acoplamento da Força Forte α_s	23
2.2 O Modelo a Pártons da Cromodinâmica Quântica e a Introdução de Funções de Distribuição Partônicas	26
2.2.1 Modelo a Pártons Simples	26
2.2.2 O Modelo a Pártons Melhorado da QCD	30
3 Eiconalização do Modelo Inspirado em QCD	34
3.1 O Modelo	35
3.1.1 Fatores de forma	37
3.1.2 Relações de Dispersão Derivativas e Eiconal em Altas energias	38
3.2 Seções de Choque Partônicas e Diagramas de Feynman	39
4 Funções de distribuição partônicas pós-LHC	48
4.1 Funções de Distribuição Partônicas (PDF's)	48
4.1.1 Escolhas de conjunto de PDF's	49
4.1.2 Comparação entre as PDF's	51
5 Resultados, Conclusões e Perspectivas	53
5.1 Correlação Sistemáticas do Dados Experimentais	53
5.2 Análise fenomenológica	56
5.3 Resultados do Modelo	57

SUMÁRIO

5.4	Previsões Teóricas	63
5.5	Conclusões	64
5.6	Perspectivas	65
A	Regras de Feynmann para QCD	66
B	Relações de Dispersão	69
B.1	Relações de Dispersão Derivativas	70
C	A função $W(b, \mu)$	73
	Referências	75

Introdução

Estudos sobre espalhamentos hadrônicos em processos que envolvem pequeno momentum transferido t , conhecidos como processos suaves (*soft*), estão entre aqueles mais importantes e de mais difícil análise na área de Física de Altas Energias. Estes processos, chamados de difrativos suaves, englobam tanto espalhamentos elásticos entre hádrons, quanto dissociações simples e duplas, onde uma (duas) partícula(s) sofre(m) excitação, o que pode resultar em feixes de partículas ou em uma ressonância. Em contraste com o que ocorre em processos envolvendo grande momentum transferido, conhecidos como processos duros (*hard*), onde a aplicação de métodos perturbativos na análise é permitida pela propriedade de liberdade assintótica da Cromodinâmica Quântica (*Quantum Chromodynamics*, QCD), em processos suaves o fenômeno de confinamento se manifesta plenamente, não permitindo a utilização de métodos perturbativos, tornando pois, necessário, o desenvolvimento de novos esquemas de cálculo. A importância de estudos sobre espalhamentos hadrônicos que envolvam a região de pequeno momentum transferido não se deve apenas pelo fato do fenômeno de confinamento ser exclusivo das interações fortes, mas sobretudo pelo fato dos processos difrativos serem os dominantes em espalhamentos a altas energias. Os processos difrativos se caracterizam pela falta de troca de números quânticos entre as partículas interagentes, tendo sua principal marca experimental a presença de grandes lacunas de rapidez.

A QCD [1][2][3] é considerada a teoria quântica de campos padrão da interação forte. É uma teoria de campo local não-abeliana, baseada no grupo de simetria de calibre $SU(3)_C$. A teoria descreve as interações entre quarks e glúons, chamados coletivamente de pártons, sendo estes as partículas elementares que formam os hádrons. Logo se faz necessária uma ligação entre a dinâmica de quarks e glúons, descrita pela QCD, e os processos físicos envolvendo hádrons, acessados experimentalmente. Esta ligação pode ser realizada através do *modelo à pártons da QCD*, que descreve as interações hadrônicas como sendo mediadas pelas interações entre seus quarks e glúons constituintes. O modelo a pártons trata o espalhamento duro entre hádrons como resultante da soma de todas as contribuições possíveis de espalhamentos entre os pártons dos hádrons envolvidos na colisão. As seções de choque total de processos hadrônicos são então obtidas a partir da convolução entre as seções de choque elementares parton-parton $ij \rightarrow kl$ ($i, j, k, l = q, g$) e suas respectivas funções de distribuição partônicas (*Parton Distribution Function*, PDF), a partir de cortes cinemáticos que restringem os processos elementares partônicos aos de natureza semidura.

A utilização do modelo a pártons da QCD no estudo de processo suaves foi motivada pelo papel dos glúons na produção central de bósons (partículas de *spin* inteiro) pesados em colisão hádron-hádron [4][5], antes mesmo de serem observados os primeiros eventos de *mini-jatos* [6][7], que demonstraram definitivamente o papel de interações partônicas em espalhamentos núcleon-núcleon. Mini-jatos são definidos como jatos com momentum transversal pequeno (da ordem de 4 GeV) e no modelo a pártons são resultado de interações partônicas semiduras (*semihard*), definidas como interações entre pártons com momentum transversal $p_T > 1$ GeV e $x \ll 1$ [8], sendo x a fração de momentum do hádron carregada por cada párton constituinte. Desta forma o crescimento das seções de choque nucleon-nucleon pode ser associado ao crescimento da seção de choque de mini-jatos.

Estas ideias foram incorporados no que hoje são conhecidos como *modelos inspirados em QCD* ou *modelos de mini-jatos*. Nestes modelos o crescimento da seção de choque total em altas energias é associado principalmente a espalhamentos semiduros entre pártons dos hádrons envolvidos no espalhamento, especialmente glúons. Estes modelos tiveram sucesso na descrição de vários observáveis físicos relacionados ao espalhamento hadrônico, tais como a seção de choque total $pp \rightarrow X$, a seção de choque elástica $pp \rightarrow pp$ e o parâmetro ρ . Os modelos de mini-jatos adotam um formalismo fundamentado em aspectos gerais da teoria quântica de campos, tais como analiticidade, unitaridade e simetria de cruzamento. A partir da representação eiconal, que por construção respeita unitaridade, estes modelos utilizam o modelo à pártons da QCD na construção da contribuição semidura da função eiconal, responsável por toda a Física presente em altas energias. A região de baixas energias é descrita por uma componente suave da eiconal, que pode ser modelada a partir da teoria de Regge, válida para processos com $t = 0$.

O objetivo central desta dissertação foi a descrição de dados experimentais de seção de choque total σ_{tot} e parâmetro ρ dos espalhamentos pp e $\bar{p}p$ a partir de um modelo inspirado em QCD. O conjunto de dados experimentais utilizados inclui os dados mais recentes de σ_{tot} e ρ obtidos pela experimento TOTEM, do CERN[9], em $\sqrt{s} = 7, 8$ e 13 TeV. Utilizamos um conjunto de dados em que a parte proveniente do LHC foi tratada estatisticamente afim de incluir informação sobre correlação de incertezas [10]. Em nossos cálculos utilizamos 3 conjuntos de PDFs pós-LHC, ou seja, conjuntos de distribuição partônicas obtidas a partir de análises que incluem diversos processos já medidos nas energias do LHC.

A dissertação é dividida da seguinte forma: no capítulo 1 introduzimos o formalismo básico necessário para o tratamento teórico dos processos de espalhamento hádron-hádron, como o pp e $\bar{p}p$. Descrevemos a cinemática da colisão, introduzimos as variáveis de Mandelstam, descrevemos a expansão em ondas parciais da amplitude de espalhamento e terminamos por apresentar a representação eiconal.

No capítulo 2 discutimos características básicas da Cromodinâmica Quântica. Explicamos as ordens de grandeza e incertezas envolvidas no tratamento perturbativo da QCD, principalmente, através da definição da constante de

acoplamento da força forte em ordem dominante (*Leading Order*, LO) e ordem seguinte à dominante (*Next to Leading Order*, NLO). Introduzimos o modelo à pártons simples e seu aprimoramento com o modelo à pártons da QCD, passando pela inclusão de funções de distribuição partônicas e as equações de evolução partônicas.

No capítulo 3 introduzimos nosso modelo inspirado em QCD. Introduzimos as eiconais suaves e semiduras utilizadas, assim como sua ligação. Descrevemos uma formulação para seção de choque da QCD que respeite aspectos de simetria dos espalhamentos duros partônicos. Discorremos sobre as relações de dispersão que conectam as partes real e imaginária das eiconais. No final do capítulo apresentamos as seções de choque partônicas envolvidas na seção de choque da QCD.

No capítulo 4 realizamos uma discussão sobre a escolha das funções de distribuição partônicas escolhidas, sobre sua obtenção a partir dos dados recentes do LHC e melhor restrição do comportamento partônico. Ao final do capítulo realizamos uma comparação dos conjuntos utilizados.

No capítulo 5 apresentamos a parte realmente inédita do trabalho, onde obtemos as seções de choque total e o parâmetro ρ para os espalhamentos pp e $\bar{p}p$ para os melhores valores de corte p_{Tmin} dos conjuntos de PDF's CT14, CT14L [11] e MSHT20 [12]. Explicamos a análise fenomenológica utilizada, assim como o tratamento de correlação sistemática de erros sob os dados experimentais disponibilizados pelo *Particle Data Group* (PDG) [13] e os mais recentes dados obtidos para $\sqrt{s} = 7, 8$ e 13 TeV pela colaboração TOTEM [14]-[23]. Mostramos os melhores valores para os parâmetros livres escolhidos para cada conjunto de PDF. No final do capítulo colocamos as previsões teóricas do modelo para as energias do LHC, assim como para energias obtidas em experimentos de raios cósmicos. Relatamos nossas conclusões acerca dos resultados de nosso modelo em relação aos dados experimentais obtidos, assim como as perspectivas para continuação e aprimoramento do modelo utilizado.

Nesta dissertação foram utilizadas as unidades naturais $\hbar = c = 1$, comumente escolhidas para trabalhos na área de Física de Altas Energias. As relações dimensionais ficam, portanto: $[\text{comprimento}] = [\text{tempo}] = [\text{energia}]^{-1} = [\text{massa}]^{-1}$.

Capítulo 1

Cinemática

1.1 Variáveis de Mandelstam e a Amplitude de espalhamento

Em um espalhamento exclusivo de dois corpos,

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4, \quad (1.1)$$

o quadrimomentum das partículas envolvidas neste processo é escrito como

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad (1.2)$$

sendo E a energia da partícula e \mathbf{p} seu momentum linear. Podemos descrever completamente este sistema com duas variáveis independentes, geralmente escolhidas dentre as variáveis de Mandelstam s , t e u [24], definidas em relação ao 4-momentum das partículas iniciais e finais do espalhamento:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \quad (1.3)$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \quad (1.4)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2. \quad (1.5)$$

Estas variáveis, também conhecidas como invariantes de Mandelstam (por serem invariantes de Lorentz) [25], obedecem a seguinte igualdade em relação às massas das partículas

$$s + t + u = \sum_i m_i^2, \quad (1.6)$$

que resulta da lei de conservação de momentum entre os estados inicial e final, $p_1 + p_2 - p_3 - p_4 = 0$. As variáveis usualmente escolhidas são s e t que, no processo (1.1), representam, respectivamente, o quadrado da energia total no referencial de centro de massa (CM) e o quadrado do momentum transferido.

Para o caso mais específico de espalhamento de partículas de mesma massa m , as variáveis de Mandelstam ficam

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 4(k^2 + m^2), \quad (1.7)$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = -4k^2 \text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right), \quad (1.8)$$

sendo k e θ o módulo do momentum e ângulo de espalhamento das partículas no referencial CM, respectivamente. Podemos obter os domínios físicos das variáveis de Mandelstam através dos limites cinemáticos de k e θ

$$k^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad s \geq 4m^2, \quad (1.9)$$

$$0 \leq \text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \leq 1 \quad \rightarrow \quad t \leq 0. \quad (1.10)$$

Para um processo de espalhamento contendo apenas uma partícula virtual, é costume determinar esta partícula como estando em uma canal. O processo (1.1), por exemplo, pode ser definido no canal- s . A partir desta definição, o canal- t é obtido através da propriedade de simetria de cruzamento,

$$1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4, \quad (1.11)$$

onde a notação com barras define uma antipartícula com momentum oposto das partículas em (1.1). No canal- t o quadrado da energia no CM se torna $(p_1 + p_3)^2 = (p_1 - p_3)^2 = t$, enquanto o quadrado do momentum transferido se torna $(p_1 - p_2)^2 = (p_1 + p_2)^2 = s$. O canal- u pode ser obtido pelo mesmo procedimento, através do cruzamento

$$1 + \bar{4} \rightarrow \bar{2} + 3. \quad (1.12)$$

No caso de um espalhamento elástico de partículas idênticas temos

$$t = (p_1 + p_3)^2 = 4(k_t^2 + m^2), \quad (1.13)$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = -4k_t^2 \text{sen}^2 \left(\frac{\theta_t}{2} \right), \quad (1.14)$$

onde agora k_t e θ_t são o módulo do momentum e o ângulo de espalhamento no CM no canal- t , respectivamente. Os domínios físicos das variáveis de Mandelstam para o canal- t podem agora ser obtidos através dos limites cinemáticos das variáveis k_t e θ_t :

$$t \geq 4m^2 \quad \text{e} \quad s \leq 0. \quad (1.15)$$

Vemos que os canais s e t tratam de diferentes regiões físicas, desconectadas no espaço s e t . Porém, a simetria de cruzamento da matriz S nos permite descrever processos em diferentes canais através da mesma amplitude de espalhamento, de forma que

$$F_{1+2 \rightarrow 2+4}(s, t) = F_{1+\bar{3} \rightarrow \bar{2}+4}(t, s). \quad (1.16)$$

Portanto os processos (1.1) e (1.11) se relacionam entre si pela simples troca das variáveis s e t . No caso dos espalhamentos elásticos pp e $\bar{p}p$, podemos definir

$$\text{canal} - s : p + p \rightarrow p + p, \quad (1.17)$$

1.1 Variáveis de Mandelstam e a Amplitude de espalhamento

$$\text{canal } -t : p + \bar{p} \rightarrow \bar{p} + p. \quad (1.18)$$

No referencial de CM onde por definição $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2$ (ver Figura 1.1), no caso do processo (1.1) podemos escrever os 4-momenta das partículas na forma

$$p_1 = (E_1, \mathbf{p}) = (E_1, 0, 0, p_z), \quad (1.19)$$

$$p_2 = (E_2, -\mathbf{p}) = (E_2, 0, 0, -p_z), \quad (1.20)$$

$$p_3 = (E_3, \mathbf{p}') = (E_3, \mathbf{p}_T, p'_z), \quad (1.21)$$

$$p_4 = (E_4, -\mathbf{p}') = (E_4, -\mathbf{p}_T, -p'_z), \quad (1.22)$$

onde assumimos que as partículas 1 e 2 se deslocam ao longo do eixo z . Nas expressões acima \mathbf{p}_T , chamado de *momentum transversal*, é um vetor transversal 2-dimensional. A partir das equações (1.3-1.5) e (1.19-1.22) podemos obter as energias das partículas,

$$E_1 = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_1^2 - m_2^2), \quad (1.23)$$

$$E_2 = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_2^2 - m_1^2), \quad (1.24)$$

$$E_3 = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_3^2 - m_4^2), \quad (1.25)$$

$$E_4 = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_4^2 - m_3^2). \quad (1.26)$$

No limite $s \rightarrow \infty$ teremos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} E_1, E_2, E_3, E_4 \sim \frac{\sqrt{s}}{2}. \quad (1.27)$$

Apenas duas das variáveis aparecendo nas equações (1.23)-(1.26) são independentes. Podemos escolher então, por exemplo, o momentum $|\mathbf{p}| = p_z$ e o ângulo de espalhamento ϑ , definido como

$$p'_z = |\mathbf{p}'| \cos \vartheta, \quad (1.28)$$

$$|\mathbf{p}_T| = |\mathbf{p}'| \sin \vartheta. \quad (1.29)$$

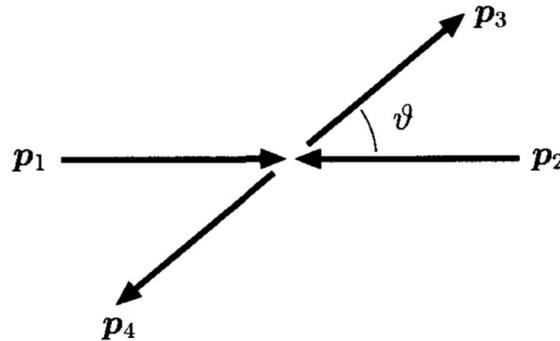


Figura 1.1: Referencial de centro de massa com partículas espalhadas em um ângulo θ [25]

Reescrevendo (1.28) e (1.29) em função das variáveis de Mandelstam, encontramos

$$\mathbf{p}^2 = \frac{1}{4s} \lambda(s, m_1^2, m_2^2), \quad (1.30)$$

$$\mathbf{p}'^2 = \frac{1}{4s} \lambda(s, m_1^2, m_4^2), \quad (1.31)$$

onde $\lambda(x, y, z)$ é a função triangular, definida como

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz. \quad (1.32)$$

Expressamos a variável t em termos destas novas definições de 4-momentum

$$\begin{aligned} t &= (p_1 - p_3)^2 \\ &= m_1^2 + m_3^2 - 2E_1 E_3 - 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}'| \cos \theta, \end{aligned} \quad (1.33)$$

Em outro formato, com dependência explícita em p_T e s , através de (1.4) e (1.21-1.22) e no limite onde as massas podem ser desprezadas, $s + t + u = 0$, temos

$$t = -\frac{s}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4p_T^2}{s}} \right). \quad (1.34)$$

Fazendo uso das equações apresentadas, reescrevemos o ângulo de espalhamento da partícula incidente, no referencial CM, em função das variáveis de Mandelstam s e t :

$$\cos \theta = \frac{s^2 + s(2t - \sum_i m_i^2) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_1^2, m_2^2) \lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_3^2, m_4^2)}. \quad (1.35)$$

Tomando novamente o limite $s \rightarrow \infty$, onde podemos desprezar as massas das partículas, das equações (1.33) e (1.35) obtemos:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \cos \theta \sim 1 + \frac{2t}{s}, \quad (1.36)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} t \sim -\mathbf{p}_T^2. \quad (1.37)$$

Para o espalhamento de partículas sem *spin* e de massas iguais a amplitude de espalhamento elástico f é uma função das variáveis de Mandelstam s e t . Desta amplitude tem-se a seção de choque diferencial

$$\frac{d\sigma_{el}}{dt}(s, t) = \frac{\pi}{k^2} |f(s, t)|^2 \quad (1.38)$$

e a seção de choque total

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{4\pi}{k} \text{Im}\{f(s, t=0)\}, \quad (1.39)$$

sendo a última equação conhecida como o *teorema óptico*. Podemos reescrever a relação anterior normalizando a amplitude de espalhamento, de forma que

$$\frac{d\sigma_{el}}{dt}(s, t) = \pi |F(s, t)|^2, \quad (1.40)$$

1.2 Expansão em Ondas Parciais

$$\sigma_{tot}(s) = 4\pi \operatorname{Im}\{F(s, t = 0)\}. \quad (1.41)$$

Esta normalização implica na relação $F = f/k$, resultando em uma amplitude de espalhamento $F(s, t)$ invariante de Lorentz [26].

Outra grandeza física, definida como a razão entre a parte real e imaginária da amplitude de espalhamento na região frontal ($t = 0$), chamada de parâmetro $\rho(s)$, também pode ser escrita em termos das variáveis de mandelstam:

$$\rho(s) = \frac{\operatorname{Re}\{F(s, t = 0)\}}{\operatorname{Im}\{F(s, t = 0)\}}. \quad (1.42)$$

1.2 Expansão em Ondas Parciais

Nos sistemas em que há uma invariância rotacional, a amplitude de espalhamento pode ser decomposta em uma expansão de ondas parciais $a_l(k)$ [27], com a dependência angular dada por

$$\begin{aligned} f(k, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(k) P_l(\cos \theta) \\ &= \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} [1 - e^{2i\delta_l(k)}] P_l(\cos \theta), \end{aligned} \quad (1.43)$$

onde P_l é o polinômio de Legendre de ordem l , $\delta_l(k)$ é uma fase associada à onda parcial com determinado momentum angular l , enquanto θ e k são o ângulo de espalhamento e o momentum no referencial de CM, respectivamente. Assim, após integrarmos sobre o ângulo sólido, $d\Omega = d\phi d\cos\theta$, a seção de choque diferencial elástica é dada por

$$\begin{aligned} \sigma_{el} &= \int d\Omega \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} |f(k, \theta)|^2 \\ &= \int d\Omega \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(k) P_l(\cos \theta) \right|^2 \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1) a_l(k) a_{l'}^*(k) 2\pi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta P_l(\cos\theta) P_{l'}^*(\cos\theta) \\ &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |a_l(k)|^2. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Na integração foi utilizada a relação $P_l(\cos\theta) = P_l^*(\cos\theta)$ e a propriedade de ortogonalidade dos polinômios de Legendre

$$\int_{-1}^{+1} d\cos\theta P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}. \quad (1.45)$$

Para obtermos a seção de choque total fazemos uso de (1.39), onde a con-

dição $t = 0$, da região frontal, implica $\theta = 0$:

$$\begin{aligned}\sigma_{tot} &= \frac{4\pi}{k} \text{Im} \{f(k, \theta = 0)\} \\ &= \frac{4\pi}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \text{Im}\{a_l(k)\}.\end{aligned}\quad (1.46)$$

A seção de choque inelástica pode ser obtida da relação $\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{inel}$. Nos caso em que não ocorrem colisões inelásticas, podemos igualar (1.46) e (1.44) e obter a condição de unitariedade elástica:

$$\text{Im}\{a_l(k)\} = k|a_l(k)|^2. \quad (1.47)$$

A condição (1.47) é obedecida automaticamente para os casos onde a fase das ondas parciais é real. Isto pode ser verificado através da condição de unitariedade da matriz S para espalhamentos elásticos, dada por $S_l(k) = e^{2i\delta_l(k)} = 1 + 2ik a_l(k)$ [28]. Para colisões onde há inelasticidade, a fase $\delta_l(k)$ é complexa, com $\text{Im}\{\delta_l(k)\} > 0$. Assim, na presença de ambos os canais elástico e inelástico, a matriz de espalhamento S em ondas parciais deve ser reescrita na forma $S_l = \eta_l(k)e^{2i\zeta_l(k)}$, onde $\eta_l(k) \equiv e^{-2\text{Im}\{\delta_l\}}$ e $\zeta_l(k) \equiv \text{Re}\{\delta_l\}$ são ambas quantidade reais. Neste caso a condição de unitariedade (1.47) pode ser reescrita na forma

$$\text{Im}\{a_l(k)\} \geq k|a_l(k)|^2. \quad (1.48)$$

A condição de unitariedade geral (1.48) pode, então, ser reescrita na forma [28]

$$\text{Im}\{a_l(k)\} - k|a_l(k)|^2 = \frac{1 - \eta_l^2(k)}{4k}, \quad (1.49)$$

onde $0 \leq \eta_l(k) \leq 1$. O coeficiente $\eta_l(k)$ é chamado *coeficiente de absorção* e o caso em que $\eta_l(k) = 1$ é conhecido como *limite elástico*. Destas relações fica claro que a condição de unitariedade elástica é, apenas, uma ocorrência particular da condição geral, onde $\eta_l(k) = 1$.

Reescrevendo as seções de choque total, elástica e inelástica em função dos coeficientes $\eta_l(k)$ e $\zeta_l(k)$, teremos

$$\sigma_{tot} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)[1 - \eta_l \cos 2\zeta_l], \quad (1.50)$$

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)[1 - 2\eta_l \cos 2\zeta_l + \eta_l^2], \quad (1.51)$$

$$\sigma_{inel} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)[1 - \eta_l^2], \quad (1.52)$$

1.2.1 Espaço do Parâmetro de Impacto e Representação Eiconal

Em altas energias, podemos construir uma nova representação para amplitude de espalhamento, a representação no espaço do parâmetro de impacto b , a representação eiconal, particularmente útil em casos onde a quantidade de ondas parciais contribuintes é muito grande. Na expansão em ondas parciais mencionamos que o somatório em momentum angular deve ser feito para todos os possíveis momenta, no caso da interação forte e de outros potenciais de alcance finito, os momenta apresentam um valor limite l_{MAX} por valor de energia. Este valor é dado, aproximadamente, por $\sqrt{l_{MAX}(l_{MAX} + 1)} \simeq kr_0$, onde r_0 é o alcance do potencial. Em um limite de altas energias, $kr_0 \gg 1$, resultando em $l_{MAX} \gg 1$. Este limite superior para l possibilita reescrever (1.43) da seguinte forma

$$f(k, \theta) = \frac{i}{2k} \int_0^\infty dl(2l + 1) [1 - e^{i\chi(k,l)}] P_l(\cos \theta), \quad (1.53)$$

onde a função $\chi(k, l)$, conhecida como *função eiconal*, é simplesmente a versão continua de $2\delta_l(k)$ [29]. Em altas energias, o limite $l \gg 1$ implica na aproximação do polinômios de Legendre por $P_l(\cos \theta) \approx J_0((2l + 1)\text{sen}(\frac{\theta}{2}))$, onde J_0 é a função de Bessel de ordem zero. Seguindo da aproximação semi-clássica $b = \frac{1}{k}(l + 1/2)$, onde geometricamente b é tido como a distância mínima de aproximação entre as partículas colidentes, a integral $\int dl$, em função do momentum l das ondas parciais, é substituída por $\int kdb$. Finalmente, podemos escrever a amplitude espalhamento em função do momentum transferido $q \equiv \sqrt{-t}$ e da energia s na forma

$$f(q, s) = ik \int_0^\infty b db J_0(qb) [1 - e^{i\chi(b,s)}], \quad (1.54)$$

onde $\Gamma(b, s) \equiv 1 - e^{i\chi(b,s)}$ é a chamada *função de perfil* na representação eiconal.

Todo o formalismo até então desenvolvido pode ser estendido para o tratamento de partículas com *spin*, campos centrais, colisões relativísticas, etc. Para isso devemos lidar diretamente com o formalismo da matriz S . Neste formalismo adotamos uma nova amplitude de espalhamento $A(s, t)$ relativística que também pode ser escrita em termos das variáveis de Mandelstam e expandida em ondas parciais, de forma que

$$A(s, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) A_l(s) P_l(\cos \theta) \quad (1.55)$$

sendo $A_l(s)$ as amplitudes das ondas parciais, que podem ser extraídas a partir da relação de ortogonalidade dos polinômios de Legendre (1.45):

$$A_l(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d \cos \theta P_l(\cos \theta) A(s, \theta). \quad (1.56)$$

É possível mostrar que a relação entre as amplitudes de ondas parciais da matriz- S , $A_l(s)$, e as amplitudes de ondas parciais da Mecânica Quântica, $a_l(k)$, é dada por [29]

$$\frac{1}{8\pi\sqrt{s}}A_l(s) \rightarrow a_l(k), \quad (1.57)$$

enquanto a relação entre as amplitudes de espalhamento é

$$\frac{1}{8\pi\sqrt{s}}A(s, t) \rightarrow f(k, \theta). \quad (1.58)$$

São justamente estas relações que estão por trás da normalização $A = f/k$ que, ao ser implementada na equação (1.54), nos dá

$$A(s, t) = i \int b db J_0(b\sqrt{-t})\Gamma(b, s), \quad (1.59)$$

onde $t = -q^2$. Neste caso a fórmula para a amplitude de espalhamento que a função de perfil $\Gamma(b, s)$ é simplesmente a transformada de Fourier-Bessel da amplitude $A(s, t)$,

$$\Gamma(b, s) = -i \int_0^\infty q dq A(s, t) J_0(bq). \quad (1.60)$$

A relação entre a parte real da função de perfil e a parte imaginária da amplitude de espalhamento, via contribuições de canais elástico e inelástico, provém da condição de unitaridade

$$2\text{Re}\{\Gamma(b, s)\} = |\Gamma(b, s)|^2 + G_{inel}(b, s), \quad (1.61)$$

onde a nova função que aparece ao lado direito da igualdade, $G_{inel}(b, s)$, é chamada de *função de recobrimento inelástica*. A condição de unitaridade nos mostra que não há como um processo de espalhamento receber somente contribuições de canais inelásticos. Um caso similar é observado, também, para o fenômeno de difração na óptica clássica, onde há uma relação de equivalência entre a difração de ondas planas por uma pequena abertura circular e a incidência de ondas planas em um disco absorvedor. Em altas energia, a amplitude de espalhamento elástica tende a se tornar puramente imaginária, recebendo maiores contribuições de processos puramente difrativos.

Novamente, as seções de choque total, elástica e inelástica podem ser obtidas através de (1.61), utilizando a nova representação eiconal e a condição de unitaridade:

$$\begin{aligned} \sigma_{tot}(s) &= 4\pi \int_0^\infty b db \text{Re}\{\Gamma(b, s)\} \\ &= 4\pi \int_0^\infty b db [1 - e^{-\chi_I(b,s)} \cos \chi_R(b, s)], \end{aligned} \quad (1.62)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{el}(s) &= 2\pi \int_0^\infty b db |\Gamma(b, s)|^2 \\ &= 2\pi \int_0^\infty b db |1 - e^{-\chi_I(b,s) + i\chi_R(b,s)}|^2, \end{aligned} \quad (1.63)$$

1.2 Expansão em Ondas Parciais

$$\begin{aligned}\sigma_{inel}(s) &= 2\pi \int_0^\infty b db G_{inel}(b, s) \\ &= 2\pi \int_0^\infty b db [1 - e^{-2\chi_I(b,s)}],\end{aligned}\tag{1.64}$$

onde $\chi_R(b, s) \equiv \text{Re}\{\chi(b, s)\}$ e $\chi_I \equiv \text{Im}\{\chi(b, s)\}$. O parâmetro ρ , definido como razão entre a parte real e imaginária da amplitude de espalhamento elástico, é dado por

$$\rho(s) = \frac{\text{Re}\{i \int b db [1 - e^{i\chi(b,s)}]\}}{\text{Im}\{i \int b db [1 - e^{i\chi(b,s)}]\}}.\tag{1.65}$$

Vemos portanto que o conhecimento da função eiconal $\chi(b, s) = \text{Re}\{\chi(b, s)\} + i\text{Im}\{\chi(b, s)\}$ nos permite conhecer o comportamento de $\sigma_{tot}(s)$, $\sigma_{el}(s)$, $\sigma_{inel}(s)$ e $\rho(s)$.

Capítulo 2

Modelo à Pártons da QCD

2.1 A Cromodinâmica Quântica (QCD)

Quando queremos analisar, nos grandes colisores, processos gerados por um espalhamento hádron-hádron de alta-energia, somos levados a estudar os subprocessos que dominam a colisão. Sabemos, hoje, que os constituintes do núcleo atômico, comumente chamados de núcleons, não são partículas elementares da matéria, estes são na verdade compostos por quarks e glúons, geralmente colocados em um mesmo grupo de partículas, os pártons. O termo pártons, cunhado inicialmente por Feynman em seu modelo partônico para descrição dos hádrons [30], são partículas que interagem entre si através da força forte.

A Cromodinâmica Quântica (QCD) se tornou a principal teoria quântica de campos a explicar a dinâmica por detrás das interações fortes e forma uma das bases do *Modelo Padrão* das partículas elementares e suas interações. Foi criada nos moldes de outra teoria já bem sucedida na descrição das interações eletromagnéticas à nível de teoria quântica de campos, a eletrodinâmica quântica (*Quantum Electrodynamics*, QED). A QCD, portanto, é uma teoria que descreve as interações entre as partículas elementares quarks e glúons, que compõe os hádrons (báryons e mésons), esta funciona através da definição de um calibre local com grupo de simetria $SU(3)_C$, onde C representa o número quântico *cor* [31]. Na QCD os campos de matéria, os quarks, se transformam de acordo com a representação fundamental de $SU(3)_C$, com cada tipo ou *sabor* de quark possuindo um dos três valores possíveis de carga de cor, historicamente cunhados de *red*, *blue* e *green*. Os campos de calibre da teoria correspondem a oito glúons vetoriais, sendo os hádrons combinações singleto-de-cor de quarks, antiquarks e glúons. A QCD diferentemente de sua antecessora QED apresenta, devido a característica não-abeliana de seu grupo de calibre $SU(3)_C$, intermediadores de sua interação que podem interagir entre si, os glúons. Os fótons, mediadores da força eletromagnética, tem a interação entre si proibida pelas regras de seu grupo de simetria $U(1)$ da QED. Esta auto-interação entre os glúons gera a propriedade de liberdade assintótica, principal propriedade da força forte, onde o acoplamento forte, calculado por

2.1 A Cromodinâmica Quântica (QCD)

meio de teoria de perturbação e grupo de renormalização, diminui monotonicamente em curtas distâncias ou grandes valores de momenta transferidos. É a propriedade de liberdade assintótica que permite a aplicação da QCD perturbativa na análise de fenômenos de curta distância. As regras gerais para o tratamento perturbativo da QCD podem ser retiradas de sua densidade Lagrangiana, maiores detalhes podem ser vistos no Apêndice A e na referência [1].

2.1.1 A Constante de Acoplamento da Força Forte α_s

Ao seguirmos a teoria e calcularmos os diagramas de Feynman, Apêndice A, que contém laços (*loops*), usualmente encontramos divergências que necessitam ser regularizadas de tal forma que se tornem finitas. Tais divergências podem posteriormente ser removidas absorvendo-as em diferentes redefinições de quantidades físicas através de um processo de renormalização. Há, porém, o caso específico das divergências no espectro ultravioleta de energia, onde a sua subtração sistemática gera a necessidade da introdução de uma escala de renormalização M na teoria, implicando na dependência explícita das quantidades renormalizadas, como o acoplamento forte g , em M . Por princípios físicos, os observáveis da teoria devem ser independentes da escolha de escala de renormalização (escala onde as subtrações das divergências ultravioletas acontecem), o que implica que uma mudança sob M deve ser compensada por uma mudança, correspondente, na constante de acoplamento efetiva α_s no ponto de subtração M , definida como

$$\alpha_s \equiv \alpha_s(M) = \frac{g^2}{4\pi}. \quad (2.1)$$

A forma como esta compensação é realizada pode ser deduzida através da equação de Callan-Symanzik [1]:

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + n\gamma \right] G^{(n)}(\{x_i\}; M, g) = 0; \quad (2.2)$$

onde M é a escala de grande momentum da qual α_s depende, $\beta(g)$ a taxa de mudança, ou variação, da nossa constante de acoplamento α_s em um determinado valor da escala M e em determinado g_0

$$\beta(g) = M \frac{\partial}{\partial M} g \Big|_{g_0}. \quad (2.3)$$

Podemos aplicar diretamente (2.2) em um observável, como a seção de choque, para que a equação perca a dependência em γ [1] ($\gamma = 0$ quando aplicada a um observável) e fique como

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right] \sigma(s, M, \alpha_s) = 0. \quad (2.4)$$

Por análise dimensional, a seção de choque pode ser escrita como

$$\sigma = \frac{c}{s} f\left(\frac{s}{M^2}, \alpha_s\right), \quad (2.5)$$

sendo c uma constante adimensional. A equação de Callan-Symanzik implica em uma dependência para f somente com a constante de acoplamento da força forte α_s , com $\alpha_s(M = s)$. Devido a isto, α_s deve obedecer a equação de renormalização de grupo

$$\frac{d}{d \ln(M/M_0)} g' = \beta(g'), \quad (2.6)$$

com condição inicial $\alpha_s(M_0) = \alpha_s$.

Para uma QCD perturbativa de três cores e com n_f , quantidade de sabores de quarks efetivos, em um limite em que a massa dos pártons é desprezível, $m_q \ll M$, a taxa $\beta(g)$ até segunda ordem de grandeza pode ser expandida na série [32] [33] [34]

$$\beta(g) = -\frac{b_0}{(4\pi)^2} g^3 - \frac{b_1}{(4\pi)^4} g^5 - \mathcal{O}(g^7) - \dots, \quad (2.7)$$

onde as constantes b_0 e b_1 são

$$b_0 = 11 - \frac{2n_f}{3}, \quad b_1 = 102 - \frac{38n_f}{3}. \quad (2.8)$$

$$\ln\left(\frac{M}{M_0}\right) = -\int_{\infty}^{g(\alpha_s(M))} dg' \left[\frac{b_0}{(4\pi)^2} g'^3 + \frac{b_1}{(4\pi)^4} g'^5 + \dots \right]^{-1}. \quad (2.9)$$

Resolvendo a integral em ordem dominante (*Leading Order*, LO), ou seja, ignorando os termos de b_1 em diante, temos:

$$\frac{1}{\alpha_s(M)} - \frac{1}{\alpha_s(M_0)} = b_0 \ln(M/M_0), \quad (2.10)$$

levando a

$$\alpha_s(M) = \frac{\alpha_s(M_0)}{1 + \alpha_s(M_0) b_0 \ln(M/M_0)}. \quad (2.11)$$

Agora, mantendo os termos até segunda ordem (*Next-to-leading order*, NLO), o resultado de nossa integral pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_s(M)} - b_0 \ln M - \frac{b_1}{b_0} \ln\left(\frac{1}{\alpha_s(M)} + \frac{b_1}{b_0}\right) = \\ \frac{1}{\alpha_s(M_0)} - b_0 \ln M_0 - \frac{b_1}{b_0} \ln\left(\frac{1}{\alpha_s(M_0)} + \frac{b_1}{b_0}\right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Esta é somente uma expressão implícita de $\alpha_s(M)$ em função de $\alpha_s(M_0)$ e $\ln(M/M_0)$ que pode ser resolvida numericamente.

Queremos colocar a constante de acoplamento para força forte em função de uma escala de energia arbitrária Q^2 em LO, aproximadamente arbitrária em NLO. Para esta troca de escala se faz útil a definição de outro parâmetro da QCD o Λ_{QCD} , a escolha deste valor é inerente aos criadores dos conjuntos de funções de distribuição partônicas na análise das seções de choque totais

2.1 A Cromodinâmica Quântica (QCD)

inclusivas observadas experimentalmente, os valores utilizados para cada conjunto aparecem em seus respectivos artigos [12] e [11]. Para realizar esta troca de escala, começando pela expressão da ordem dominante, fazemos a troca direta da escala de grande momentum M pela nova escala Q^2 e substituindo as componentes em (2.13) que envolvam M_0 por $b_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)$, resultando na seguinte equação em LO para constante de acoplamento

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{b_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)}. \quad (2.13)$$

Para NLO, realizamos a mesma troca de escalas e substituímos o lado direito de (2.12) por $b_0 \ln \Lambda^2 - b_1(\ln b_0)/b_0$. Com isto a constante de acoplamento para próxima ordem de grandeza resulta em

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{b_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)} \left[1 - \frac{b_1 \ln \ln(Q^2/\Lambda^2)}{b_0^2 \ln(Q^2/\Lambda^2)} \right]. \quad (2.14)$$

Assim como outras variáveis, Λ_{QCD} também é dependente do esquema de renormalização utilizado. Em ordem dominante, é possível obter uma relação entre os diferentes esquemas de renormalização para o parâmetro Λ_{QCD} através de

$$\Lambda_2 = \Lambda_1 e^{\frac{2d}{b_0}}, \quad (2.15)$$

onde d é a diferença, em LO, entre os $\alpha_s(Q^2)$ dos diferentes esquemas de renormalização.

Outro cuidado necessário ao trabalhar com esta definição da constante de acoplamento α_s é levar em conta seu comportamento perto das regiões de energia correspondentes às massas dos quarks, $Q^2 \approx m_q^2$. Este cuidado é devido a como formalizamos α_s , supondo trabalharmos em um limite onde estas massas são desprezíveis. Nestas regiões de energia, em que esperaríamos observar desvios em relação à (2.13) e (2.14), devido influência das massas dos quarks, a dependência se mostra explícita em n_f , a quantidade de sabores ativos de quarks na região de energia trabalhada. Supomos sabores de quarks como ativos quando a condição $Q^2 \gg m_q^2$ for válida. Para que a constante de acoplamento da força forte $\alpha_s(Q^2)$ tenha um comportamento contínuo em função da energia, ao invés de discreto, ao passar pelos limiares de energia correspondentes às massas dos quarks, necessitamos que Λ_{QCD} também tenha uma dependência explícita com n_f . Em LO a relação é dada por

$$\alpha_s^{(n_f-1)}(Q^2 = m_q^2) = \alpha_s^{(n_f)}(Q^2 = m_q^2), \quad (2.16)$$

resultando em

$$\Lambda^{(n_f)} = \Lambda^{(n_f-1)} \left(\frac{\Lambda^{n_f-1}}{m_q} \right)^{\frac{2}{(33-2n_f)}}. \quad (2.17)$$

2.2 O Modelo a Pártons da Cromodinâmica Quântica e a Introdução de Funções de Distribuição Partônicas

Nosso tratamento e explicações sobre a teoria quântica de campos da QCD até agora fez atribuições quanto a carga carregada pelas partículas elementares que compõe os hádrons, a cor. Mas, apesar desta característica ser muito importante para o tratamento teórico da força forte, a realidade é que, devido ao fenômeno de confinamento de cor, que impede a formação de estados livres de quarks e glúons coloridos, não conseguimos observar explicitamente a carga de cor, como conseguimos observar a carga elétrica das partículas por exemplo, detectamos somente hádrons sem cor. Necessitamos, então, de um método implícito de detecção desta característica, algo que realize uma conexão entre estes hádrons incolores observados experimentalmente e seus quarks e glúons coloridos previstos pela QCD. Um modelo de sucesso que estabelece esta correlação é o modelo a pártons, estabelecido originalmente por Richard Feynman, que supõe os hádrons como uma composição de partículas mais elementares e pontuais, os pártons (quarks e glúons). Sendo os hádrons agora considerados matéria composta, os processos de espalhamento entre hádrons seriam mediados pelas interações entre os seus constituintes. Em meados dos anos 60 fora obtida comprovação experimental da suposição feita pelo modelo, através dos resultados experimentais do acelerador linear de Stanford (SLAC)[35][36][37] em experimentos de espalhamento profundamente inelástico (*Deep Inelastic Scattering, DIS*).

2.2.1 Modelo a Pártons Simples

O problema ao qual o Modelo a Pártons original foi desenvolvido para resolver aparece na Figura (2.1). Esta ilustra o processo de espalhamento entre um lépton (elétron) e um hádron (próton) intermediado pela troca de um fóton virtual de virtualidade q . No caso da figura e o que foi o foco dos experimentos realizado no acelerador linear SLAC, temos um casos de espalhamento profundamente inelástico. Onde o termo, profundamente inelástico, significa somente que o processo acontece para uma grande virtualidade do fóton q e com conseqüente quebra do hádron interagente em suas componentes, os pártons (quarks e glúons). A decomposição do hádron levaria naturalmente a observação de pártons livre coloridos, mas como fora observado experimentalmente, isto não acontece, o que segue da quebra do hádron é a conseqüente recomposição destes pártons livres em novos hádrons incolores, fazendo uso da energia em excesso presente no sistema. Este processo de recomposição em um novo conjunto de hádrons é conhecido como processo de hadronização. X representa este conjunto de hádrons criados a partir da fragmentação do próton.

Sabemos que a seção de choque para o espalhamento representado em (2.1) pode ser expressa em termos de um produto entre um tensor leptônico $L_{\mu\nu}$ e

2.2 O Modelo a Pártons da Cromodinâmica Quântica e a Introdução de Funções de Distribuição Partônicas

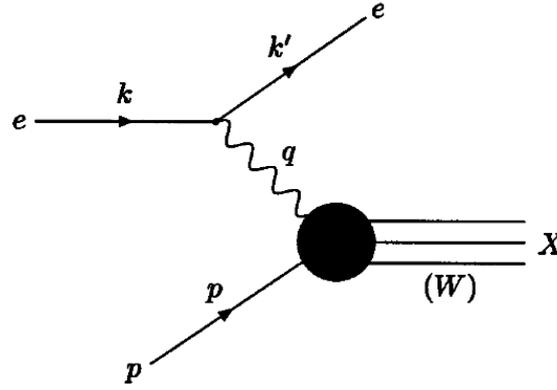


Figura 2.1: Espalhamento inelástico ($W^2 \gg m_p^2$) profundo ($Q^2 \gg m_p^2$) $ep \rightarrow eX$. As quantidades k^μ e k'^μ são os quadrimomenta do elétron, p^μ é o quadrimomentum do alvo (próton) e $q^\mu = k^\mu - k'^\mu$ é o quadrimomentum transferido ($-q^2 = Q^2$). W e m_p são as massas do sistema X e do próton, respectivamente.

um tensor hadrônico $W_{\mu\nu}$, que descrevem a interação nos vértices de interação que aparecem na figura, de forma que

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{2\pi y \alpha^2}{Q^4} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

onde

$$y = \frac{q \cdot p}{k \cdot p} = \frac{E - E'}{E}, \quad x = \frac{Q^2}{2p \cdot q} = \left(\frac{Q^2}{2m_p \nu} \right)_{lab}, \quad Q^2 = -q^2 \approx 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (2.19)$$

sendo E , E' e θ a energia inicial, a energia final e o ângulo de espalhamento do elétron medidos no sistema de repouso do próton, respectivamente. Onde α^2 é a constante de acoplamento eletromagnética e corresponde à força do acoplamento gerado pelo fóton virtual entre o elétron e o próton. A variável x , introduzida primeiramente por este modelo, é conhecida como x de Bjorken. Trabalhando em um limite de energia onde podemos desprezar as massas das partículas interagentes, o x de Bjorken é dado por $x = Q^2/sy$, sendo s o quadrado da energia de CM, já introduzida, e y a variável conhecida como rapidez.

Para começar a calcular (2.18) pode-se partir do cálculo explícito do tensor leptônico, que é bem conhecido. Para $W_{\mu\nu}$, porém, devemos escrever o tensor em função de duas *funções de estrutura* $F_1(x, Q^2)$ e $F_2(x, Q^2)$, que servem para parametrizar a estrutura interna do hádron alvo da colisão, neste caso o próton. Assim, a seção de choque diferencial para o espalhamento $ep \rightarrow eX$ em altas energias fica [38][39]

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{xQ^4} [y^2 x F_1(x, Q^2) + (1 - y) F_2(x, Q^2)], \quad (2.20)$$

onde $y = Q^2/xs$, invertendo a relação para o x -de Bjorken. Experimentalmente, pode-se obter x e Q^2 através de medidas de ângulo de espalhamento. É de se supor que medindo a seção de choque para diversos valores de y e s seria possível determinar as funções de estrutura $F_1(x, Q^2)$ e $F_2(x, Q^2)$. Todavia, sendo a contribuição de $F_1(x, Q^2)$ pequena para com a totalidade da seção de choque, as medidas experimentais tendem a se focar somente na obtenção de $F_2(x, Q^2)$, sendo $F_1(x, Q^2)$ estimada teoricamente a partir de F_2 .

O modelo a pártons apresenta uma interpretação simples para os espalhamentos profundamente inelásticos, como os lépton-hádron. Pela descrição do modelo, o espalhamento $ep \rightarrow eX$ se dá pela interação de um fóton virtual com um dos pártons (quarks) do próton. Esta interação ocorre em um referencial onde podemos supor que o próton se move muito rapidamente ¹, em que a escala de tempo onde interações quark-quark possíveis, intra-hádron, seria muito maior que a escala de tempo da interação fóton-quark. Sendo assim, estes quarks que compõe o hádron estariam essencialmente livres de quaisquer outras interações que pudessem interferir na fóton-quark que gera o espalhamento. Supondo eficaz este tratamento, o espalhamento elétron-próton poderia ser escrito como a soma incoerente, de probabilidades, de espalhamentos elétrons-quarks livres

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \sum_q \int_0^1 d\xi f_q(\xi) \left(\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} \right)_{eq}, \quad (2.21)$$

onde aqui aparecem pela primeira vez as *funções de distribuição partônicas* (PDF's) $f_q(\xi)$. Estas definem a probabilidade, $f_q(\xi)d\xi$, de encontrarmos um determinado quark, de sabor q , carregando uma fração de momentum $f_q(\xi)d\xi$ do próton, sendo $0 \leq \xi \leq 1$.

Assim, para a obtenção da função de estrutura $F_2(x, Q^2)$ temos de calcular a seção de choque para o processo mais elementar $eq \rightarrow eq$. Sendo dado por [38][39]

$$\left(\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} \right)_{eq} = \frac{2\pi\alpha^2 e_q^2}{Q^4} [1 + (1-y)^2] \delta(x - \xi), \quad (2.22)$$

onde e_q é a carga elétrica dos quarks. O quark, após a interação com o fóton, passa a ter um quadrimomentum $\xi p + q$ e, pela condição de camada de massa²,

$$m_q^2 = (\xi p + q)^2 \approx 2p \cdot q\xi - Q^2. \quad (2.23)$$

Diretamente de $x = Q^2/2p \cdot q$, trabalhando em um regime de altas energias, onde $Q^2 \gg m_q^2$, obtemos $\xi = x$. Deste resultado obtemos $\delta(x - \xi)$ na expressão (2.22). Realizando a substituição da expressão (2.22) em (2.21)

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \sum_q \int_0^1 d\xi f_q(\xi) \frac{2\pi\alpha^2 e_q^2}{Q^4} [1 + (1-y)^2] \delta(x - \xi). \quad (2.24)$$

¹ $p^\mu \approx (P, 0, 0, P), P \gg m_p$.

²Considera-se que uma partícula real de massa m está na sua camada de massa quando seu quadrimomentum $p = (E, \vec{p})$ satisfaz a relação $p^2 \equiv p \cdot p = E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2$. Para uma partícula virtual, $p^2 \neq m^2$. Para o caso de um fóton virtual, $q^2 \neq 0$.

2.2 O Modelo a Pártons da Cromodinâmica Quântica e a Introdução de Funções de Distribuição Partônicas

Destá última, obtemos a previsão do modelo à pártons simples para as funções de estrutura F_1 e F_2 :

$$\begin{aligned} F_2(x) &= 2xF_1(x) = x \sum_q e_q^2 \int_0^1 d\xi f_q(\xi) \delta(x - \xi) \\ &= \sum_q e_q^2 x f_q(x). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Uma consequência direta da última expressão é a previsão de uma invariância de escala das funções de estrutura. Este comportamento é conhecido como *invariância de escala de Bjorken*. A primeira igualdade em (2.25) é um resultado da natureza fermiônica dos quarks³, conhecida como *relação de Callan-Gross*.

Pode-se utilizar as medidas experimentais de $F_2(x)$ para desvendar a composição partônica dos núcleons, no caso quais os sabores de quarks de valência. No caso do próton, a equação (2.25) pode ser escrita como

$$\frac{1}{x} F_2^{ep}(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u(x) + \bar{u}(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d(x) + \bar{d}(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s(x) + \bar{s}(x)], \quad (2.26)$$

onde abreviamos a notação das funções de distribuição $f_q(x)$:

$$\begin{aligned} f_u &\simeq u(x) = u_V(x) + u_M(x) \\ f_{\bar{u}} &\simeq \bar{u}(x) = u_M(x) \\ f_d &\simeq d(x) = d_V(x) + d_M(x) \\ f_{\bar{d}} &\simeq \bar{d}(x) = d_M(x) \\ f_s &\simeq s(x) = s_M(x) = \bar{s}(x) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Em (2.27) utilizamos os índices V e M para separarmos as contribuições dos quarks de valência e quarks de mar, respectivamente. Os quarks de valência que servem para determinar os números quânticos dos hádrons, sua carga, número bariônico e assim por diante. Os quarks de mar são advindos da polarização do vácuo dos campos coloridos, sendo estes quarks virtuais criados em igual quantidade de partículas e antipartículas.

A propriedade conhecida como a invariância de isospin entre o próton e nêutron, permite equivalência entre a distribuição de um quark de valência d_V do próton e a distribuição de um quark de valência $u_V(x)$ do nêutron. Isto possibilita uma comparação direta entre as funções de estrutura do nêutron com as do próton (2.26):

$$\frac{1}{x} F_2^{en}(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 [d(x) + \bar{d}(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [u(x) + \bar{u}(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s(x) + \bar{s}(x)], \quad (2.28)$$

e a diferença

$$\frac{1}{x} [F_2^{ep}(x) - F_2^{en}(x)] = \frac{1}{3} [u_V(x) - d_V(x)] + \frac{2}{3} [u_M(x) - d_M(x)] \quad (2.29)$$

³spin= $n + 1/2$, $n \in \mathbb{Z}$.

foi utilizada, originalmente, para obtenção da distribuição de valência dos núcleons.

O modelo a pártons simples foi um sucesso, com sua ótima descrição dos processos de espalhamento profundamente inelásticos, como fora averiguado experimentalmente uma de suas mais fortes previsões, a invariância de Bjorken. Mas, apesar do sucesso aparente da teoria, algumas inconsistências levantadas na época, como a hipótese de que os quarks se comportariam como partículas livres em pequenas distâncias r , mas sem nenhuma observação direta como comprovação, e cujo confinamento sugeria um comportamento para as forças inter-quarks bem diferente do comportamento familiar $1/r^2$ da força eletromagnética e gravitacional, bem conhecidas na época. Além das inconsistências teóricas, experimentos profundamente inelásticos envolvendo elétrons e neutrinos sugeriam que a soma total das frações de momentum do próton carregadas por seus quarks constituintes não chegava a 1

$$\int_0^1 x dx [u(x) + \bar{u}(x) + d + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)] \approx 0.5, . \quad (2.30)$$

A igualdade (2.30) implicava de todo o momentum do próton espalhado, seus quarks constituintes carregavam somente 50%. Esta inconsistência teve solução com o advento da Cromodinâmica Quântica, onde a propriedade de liberdade assintótica de sua constante de acoplamento α_s no limite $\alpha_s(Q^2 \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ permitia a possibilidade de existirem quarks livres em distâncias pequenas, Q^{-1} , assim como a inclusão do glúon, no conjunto de partículas elementares que formam os núcleons, somava mais uma partícula que poderia estar carregando o momentum faltante do próton. Avanços teóricos na teoria da QCD, juntamente da observação experimental da quebra na invariância de escala de Bjorken em altas energias, implicou na construção de um *modelo a pártons da QCD*, como uma evolução direta do modelo a pártons original.

2.2.2 O Modelo a Pártons Melhorado da QCD

O aprimoramento do modelo a pártons original se deu com a introdução de ideias providas da, na época, nova teoria quântica de campos para a força forte, a cromodinâmica quântica. O avanço de técnicas experimentais, assim como a possibilidade de se estudar espalhamentos profundamente inelásticos em energias cada vez maiores, possibilitou a descoberta da quebra de invariância de escala de Bjorken. Este resultado experimental foi um dos maiores comprovantes teóricos da QCD perturbativa. No modelo a pártons da QCD, a invariância de escala de Bjorken é quebrada por logaritmos de Q^2 . Esta quebra por logaritmos ocorre devido a possibilidade de emissão de um glúon pelo quark antes deste interagir com o fóton, Figura 2.2.

2.2 O Modelo a Pártons da Cromodinâmica Quântica e a Introdução de Funções de Distribuição Partônicas

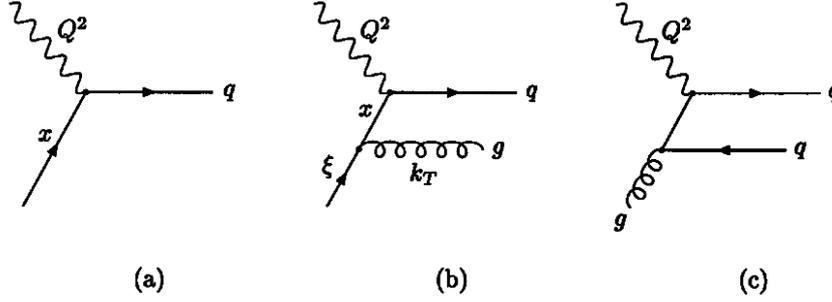


Figura 2.2: Processos partônicos que contribuem para o espalhamento inelástico profundo: (a) diagrama de ordem mais baixa, relacionado ao modelo a pártons simples e (b,c) diagramas de QCD de primeira ordem em α_s , relacionados ao modelo a pártons da QCD.

Esta nova possibilidade deve ser levada em conta no cálculo da função de estrutura $F_2(x, Q^2)$. Primeiramente, para a contribuição do diagrama (b) da Figura 2.2 devemos levar em conta todos os possíveis valores de ξ e k_T que definem o glúon emitido. Neste caso, logaritmos de Q^2 surgem a partir da integração sobre o espectro de emissão de momentum do glúon (*bremsstrahlung*), de tal forma que [40]

$$\frac{\alpha_s}{2\pi} \int_{\kappa^2}^{Q^2} \frac{dk_T^2}{k_T^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln \left(\frac{Q^2}{\kappa^2} \right). \quad (2.31)$$

A equação (2.31) apresenta pela primeira vez a constante de acoplamento da força forte, sendo a integração em k_T definida entre os limites Q^2 , virtualidade do fóton virtual, e κ , que serve como um parâmetro infravermelho arbitrário e regulariza a divergência no polo $k_T^2 = 0$. Sendo esta divergência resultante da emissão colinear de um glúon, no mesmo eixo do quark. Uma redefinição subsequente da função de estrutura permite absorção deste parâmetro arbitrário infravermelho. Através da expressão (2.31) é possível mostrar que a função de estrutura $F_2(x, Q^2)$ pode ser escrita na forma

$$F_2(x, Q^2) = x \sum_q e_q^2 \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} f_q(\xi) \left\{ \delta \left(1 - \frac{x}{\xi} \right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[P_{qq} \left(\frac{x}{\xi} \right) \ln \left(\frac{Q^2}{\kappa^2} \right) + R \left(\frac{x}{\xi} \right) \right] \right\}, \quad (2.32)$$

onde P_{qq} e R são funções conhecidas. O caso simples de ordem zero da equação (2.32) é a equação (2.31), resultado do modelo a pártons original, sendo $\xi = x$. Onde, pela equação (2.32), a fração de momentum ξ que o quark carrega antes de interagir é reduzida à x após a emissão do glúon, sendo agora o limite da integral dado por $x \leq \xi < 1$.

Sendo assim, devido à emissão de um glúon obtemos o fator $\alpha_s \ln(Q^2/\kappa^2)$, e conseqüentemente, a contribuição de diagramas de Feynman com a emissão de n glúons é proporcional a $[\alpha_s \ln(Q^2/\kappa^2)]^n$. Entretanto, a presença de logaritmos de Q^2 somado ao parâmetro infravermelho arbitrário κ levaria a uma não conversão da série perturbativa. Estas divergências colineares devem ser renormalizadas, assim como foi feito para as divergências ultravioletas. Podemos

absorver estas divergências em uma reformulação da função de distribuição em uma nova função renormalizada $f_q(x, \mu_f)$:

$$f_q(x, \mu_f) = f_q(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} f_q(\xi) P_{qq} \left(\frac{x}{\xi} \right) \ln \left(\frac{\mu_f^2}{\kappa^2} \right). \quad (2.33)$$

A equação (2.33) apresenta pela primeira vez a escala de fatorização μ_f . Assim como feito anteriormente para o modelo a pártons original, podemos reescrever a função de estrutura $F_2(x, Q^2)$ em função destas novas funções de distribuição renormalizadas

$$F_2(x, Q^2) = x \sum_q e_q^2 \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} f_q(\xi, Q^2) \left[\delta \left(1 - \frac{x}{\xi} \right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} R \left(\frac{x}{\xi} \right) \right]. \quad (2.34)$$

A última expressão restringe as novas funções de distribuição renormalizadas $f_q(x, Q^2)$, onde já trocamos μ_f por Q^2 , a serem finitas e bem comportadas, implicação direta das funções de estrutura serem observáveis físicos. Efetivamente, as divergências colineares são todas absorvidas na nova função de distribuição renormalizada. Voltando ao parâmetro κ , este pode ser eliminado ao considerarmos a dependência em Q^2 de $f_q(x, Q^2)$. É possível observar esta dependência ao diferenciar (2.33) em relação a $\ln Q^2$:

$$\frac{\partial f_q(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} f_q(\xi, Q^2) P_{qq} \left(\frac{x}{\xi} \right). \quad (2.35)$$

Esta é um exemplo de uma equação de evolução DGLAP[41][42][43][44] em ordem dominante. A equação acima define como as funções de distribuição $f_q(\xi, Q^2)$ evoluem com a escala Q^2 , sendo uma escala inicial Q_0 bem definida. Como consequência, podemos agora fatorizar um observável qualquer em função de uma densidade partônica $f_q(\xi, Q^2)$ que já tenha absorvido as divergências infravermelhas, e uma função R dependente de processo, que pode ser calculada perturbativamente.

Vamos agora calcular a contribuição do diagrama (c) da Figura 2.2, onde temos a criação de um par quark-antiquark por um glúon. A equação de evolução para f_q neste caso é

$$\frac{\partial f_q(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \left[f_q(\xi, Q^2) P_{qq} \left(\frac{x}{\xi} \right) + f_g(\xi, Q^2) P_{qg} \left(\frac{x}{\xi} \right) \right], \quad (2.36)$$

sendo esta última expressão a versão completa de (2.35). Nesta aparece a contribuição de $f_g(\xi, Q^2)$, a função de distribuição renormalizada dos glúon. Esta obedece a seguinte equação de evolução.

$$\frac{\partial f_g(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \left[f_q(\xi, Q^2) P_{gq} \left(\frac{x}{\xi} \right) + f_g(\xi, Q^2) P_{gg} \left(\frac{x}{\xi} \right) \right]. \quad (2.37)$$

As funções $P_{ij}(z \equiv x/\xi)$, conhecidas como *funções de desdobramento* (*splitting functions*) são dadas, em ordem dominante, por

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \left(\frac{1+z^2}{1-z} \right)_+, \quad (2.38)$$

2.2 O Modelo a Pártons da Cromodinâmica Quântica e a Introdução de Funções de Distribuição Partônicas

$$P_{qg}(z) = \frac{1}{2} [z^2 + (1-z)^2], \quad (2.39)$$

$$P_{gq}(z) = \frac{4}{3} \frac{[1 + (1-z)^2]}{z}, \quad (2.40)$$

$$P_{gg}(z) = 6 \left[\frac{1-z}{z} + z(1-z) + \frac{z}{(1-z)_+} + \left(\frac{11}{12} - \frac{n_f}{3} \right) \delta(1-z) \right], \quad (2.41)$$

onde n_f é a mesma variável já introduzida na definição da constante de acoplamento da força forte α_s , o número de sabores ativos na escala de energia Q^2 . As distribuições "+", para uma função suave, são definidas como

$$\int_0^1 dx \frac{f(x)}{(1-x)_+} = \int_0^1 dx \frac{f(x) - f(1)}{1-x} \quad (2.42)$$

e

$$\frac{1}{(1-x)_+} = \frac{1}{1-x}, \quad \text{para } 0 \leq x < 1. \quad (2.43)$$

As novas funções introduzidas pelo modelo a pártons da QCD, as funções de desdobramento, dão a probabilidade associada a cada tipo de interação possível da QCD, ligadas diretamente aos vértices elementares da interação.

Nesta dissertação trabalhamos com funções de distribuição partônicas (PDF's) criadas para o caso específico de espalhamentos pp e $\bar{p}p$. Porém, a definição destas PDF's é independente do tipo de espalhamento a qual são atribuídas, estas são universais no quesito de descrição do comportamento partônico do próton. Estas PDF's $f_q(x, Q^2)$ e $f_g(x, Q^2)$ são obtidas através de um ajuste global de todo e qualquer processo envolvendo prótons, sendo este espalhamento elástico, profundamente inelástico, difrativo, ressonante, etc. A prescrição comum à maioria dos grupos criadores destes conjunto de PDF's é a definição de uma parametrização inicial $f_i(x, Q_0^2)$ e sua dependência explícita com x , sendo esta escala Q_0 uma escala de grande momentum que permita a utilização de um tratamento perturbativo. Um exemplo é o do grupo criador do conjunto de funções MSHT20 [12], estes adotam uma escala inicial $Q_0 = 1\text{GeV}$ e a parametrização

$$xf(x, Q_0^2) = A(1-x)^\eta x^\delta \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i T_i^{Ch}(y(x)) \right), \quad (2.44)$$

onde $T_i^{Ch}(y)$ são polinômios de Chebyshev em y , sendo $y = 1 - 2x$ e $i = u, \bar{u}, d, \dots, g$. A partir desta parametrização, as equações DGLAP são então usadas para determinar $f_i(x, Q^2)$ em todos os valores de x e Q^2 em que existam dados experimentais para adequado ajuste dos parâmetros livres. Esta é a estratégia global seguida pela maioria dos grupos responsáveis pela extração das funções de distribuição partônicas $f_i(x, Q^2)$ em LO, NLO e NNLO. Nesta dissertação, escolhemos trabalhar com os conjuntos, em ordem dominante, CT14, CT14L e MSHT20, sendo suas características discutidas em maior detalhe no Capítulo 4.

Capítulo 3

Eiconalização do Modelo Inspirado em QCD

Uma grande variedade de modelos de espalhamento em altas energias pertencem à categoria de modelos inspirados em QCD [45]. Criados com a intenção de descrever processos hadrônicos ligados à região de transição entre os domínios perturbativos e não-perturbativos, utilizando, em grande parte, o formalismo do modelo à pártons da QCD [46].

Em modelos inspirados em QCD, o espalhamento elástico, como do pp e $\bar{p}p$ estudados nesta dissertação, é obtido ao se considerar o sombreamento (*shadowing*) do espalhamento inelástico. Este tratamento torna a aplicação da representação eiconal para a amplitude de espalhamento apropriada. Deste modo, as eiconais do modelo são tidas como a soma das contribuições suaves e semiduras. Esta metodologia serve o propósito de tentar realizar uma conexão entre os limites perturbativo e não-perturbativos. Nesta separação das eiconais, temos como dominante em altas energias uma amplitude par, resultado em nossos observáveis frontais ($t = 0$) $\sigma_{tot}(s)$ e parâmetro $\rho(s)$ para os espalhamentos pp e $\bar{p}p$ se igualarem assintoticamente. Neste tipo de modelos o crescimento da seção de choque total, em altas energias, é atribuído ao aumento brusco das funções de distribuição partônicas dos pártons em pequeno x , principalmente dos glúons.

Com dados experimentais de σ_{tot}^{pp} , ρ^{pp} e $d\sigma^{pp}/dt$ na região do ISR e subsequente análise realizada por Amaldi e Schubert, ficou demonstrado a incompatibilidade de ajustes empíricos com a utilização de modelos que fatorizem as eiconais $\chi(b, s)$ em energia e parâmetro de impacto da seguinte maneira $\chi(b, s) = f(s)w(b)$ [47]. Enquanto medidas no $Spp\bar{S}$ trouxeram evidências de violação da invariância de escala geométrica [48][49], impossibilitando a construção de eiconais da forma $\chi(b, s) = f(b/R(s))$. Assim, a procura por eiconais válidas para utilização em modelos inspirados em QCD levou a construção de eiconais híbridas, também conhecidas como *eiconais semi-fatorizadas*. Na falta métodos válidos para simplificar a construção das eiconais híbridas, a grande gama de modelos inspirados em QCD tornou a modelos a pártons da QCD.

Comum a variantes deste tipo de modelo é o processo de construção da

3.1 O Modelo

eiconal. Primeiramente se constrói uma eiconal puramente imaginária, enquanto a parte real é obtida através de relações de dispersão. Modelos que seguiram este método apresentaram grande sucesso em casos específicos onde $\text{Re}\{\chi\} \ll \text{Im}\{\chi\}$.

Neste capítulo introduzimos o modelo que foi foco desta dissertação. Explicamos as escolhas por detrás das definições das eiconais utilizadas para parte suave e semidura da seção de choque. Introduzimos uma seção de choque para *QCD* com princípios mais gerais e que leva em consideração as simetrias envolvidas na soma incoerente de seções de choque partônicas envolvidas no processo de espalhamento total. Consideramos um fator de forma para ambas as componentes suaves e semiduras das eiconais. Demonstramos a relação entre as partes imaginária e real das eiconais através de relações de dispersão derivativas. Ao final do capítulo apresentamos as seções de choque partônicas para todos os possíveis subprocessos de espalhamento duros entre os pártons de cada hádron, assim como seus diagramas de Feynman e o formalismo para sua obtenção em ordem dominante.

3.1 O Modelo

Como discutido, em modelos inspirados em QCD o crescimento da seção de choque total é associado, em grande parte, aos espalhamentos semiduros entre os pártons nos hádrons. Nosso modelo incorpora, através da eiconalização, processo suaves e semiduros de maneira compatível com as restrições de analiticidade e unitariedade. Nestes modelos as seções de choque e parâmetro ρ são dadas por

$$\sigma_{tot}(s) = 4\pi \int_0^\infty b db [1 - e^{-\chi_R(s,b)} \cos \chi_I(s,b)], \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{inel}(s) = \sigma_{tot}(s) - \sigma_{el}(s) &= 2\pi \int_0^\infty b db G_{inel}(s,b) \\ &= 2\pi \int_0^\infty b db [1 - e^{2\chi_R(s,b)}], \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\rho(s) = \frac{-\int_0^\infty b db e^{-\chi_R(s,b)} \text{sen} \chi_I(s,b)}{\int_0^\infty b db [1 - e^{-\chi_R(s,b)} \cos \chi_I(s,b)]}, \quad (3.3)$$

respectivamente, onde s é o quadrado da energia total de centro de massa, b é o parâmetro de impacto, G_{inel} é a função de recobrimento inelástica e $\chi(s,b) = \text{Re}\chi(s,b) + i\text{Im}\chi(s,b) \equiv \chi_R(s,b) + i\chi_I(s,b)$ é a função eiconal, complexa.

Assumimos que as funções eiconais para os espalhamentos pp e $\bar{p}p$ são aditivas com respeito as partes suaves e semiduras das interações partônicas:

$$\chi(s,b) = \chi_{suave}(s,b) + \chi_{SD}(s,b). \quad (3.4)$$

CAPÍTULO 3. EICONALIZAÇÃO DO MODELO INSPIRADO EM QCD

Como descrito anteriormente, no limite semiduro as interações fortes para colisões hádron-hádron podem ser tratadas como uma soma incoerente das interações duras entre os quarks e glúons que os compõem. Especificamente, a seção de choque da QCD, σ_{QCD} , é obtida através da convolução das seções de choque partônicas, $\hat{\sigma}$, com suas respectivas distribuições partônicas. Segue do modelo a pártons aprimorado da QCD que o termo semiduro da eiconal $\chi_{SD}(s, b)$ pode ser fatorizado da seguinte forma [50][51][52]

$$\text{Re}\chi_{SD}(s, b) = \frac{1}{2}W_{SD}(b)\sigma_{QCD}(s), \quad (3.5)$$

onde $W_{SD}(s, b)$ é a densidade de recobrimento para os pártons no espaço do parâmetro de impacto p ,

$$W_{SD}(b) = \int d^2b' \rho_A(|\mathbf{b} - \mathbf{b}'|) \rho_B(b'), \quad (3.6)$$

e σ_{QCD} é seção de choque da QCD

$$\begin{aligned} \sigma_{QCD}(s) &= \sum_{i,j,k,l} \int_{p_{Tmin}}^{s/4} dp_T^2 \int_{4p_T^2/s}^1 dx_1 \int_{4p_T^2/x_1s}^1 dx_2 \\ &\times [f_{i/A}(x_1, Q^2)f_{j/B}(x_2, Q^2) + f_{j/A}(x_1, Q^2)f_{i/B}(x_2, Q^2)] \\ &\times \left[\frac{d\hat{\sigma}_{ij \rightarrow kl}}{dp_T^2}(\hat{t}, \hat{u}) + \frac{d\hat{\sigma}_{ij \rightarrow kl}}{dp_T^2}(\hat{u}, \hat{t}) \right] (1 - \delta_{ij}/2)(1 - \delta_{kl}/2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

A equação (3.7) expressa a seção de choque total inclusiva da QCD como uma convolução de conjuntos de distribuições partônicas universais $f(x, Q^2)$ e as seções de choque partônicas $d\hat{\sigma}/dp_T^2$. Onde "A" e "B" são os hádrons que iniciam o processo de espalhamento, para este trabalho pp ou $\bar{p}p$. O somatório é realizado sobre todas as combinações possíveis de pártons iniciais (i, j) e finais (k, l), permitidas pela Lagrangeana da QCD, apêndice A. As seções de choque partônicas serão obtidas na próxima seção, enquanto as PDF's vamos definir no próximo capítulo. As variáveis de Mandelstam já introduzidas aparecem na equação em seu formato original, assim como, em um novo formato ($\hat{s}, \hat{t}, \hat{u}$) que identificam as variáveis como estando no referencial de centro de massa do processo de espalhamento duro entre os pártons de cada hádron, $ij \rightarrow kl$. As funções δ são necessárias para o tratamento das simetrias dos possíveis jatos e alvos dos feixes de pártons, quando temos pártons iguais nos estados inicial e final. As integrais são realizadas sob p_T^2, x_1 e x_2 , sendo x_1 e x_2 as frações de momentum total de "A" e "B" carregadas pelos pártons do estado inicial, seus limites vem diretamente das relações entre as variáveis do sistema que aparecem no tratamento do modelo a pártons da QCD [38]. O limite inferior para o momentum transversal vem da definição de um corte p_{Tmin} em que assumimos uma precisa aplicabilidade do tratamento perturbativo da seção de choque. A literatura sugere um corte mínimo em $p_{Tmin} > 1 \text{ GeV}$ [53][54][55] e é o que utilizamos nesta dissertação. Nesta integral foi utilizado a escolha comum de escala $Q^2 = p_T^2$, porém Q^2 foi mantido na escrita das funções de distribuição partônicas na equação.

3.1 O Modelo

A transformação necessária para ligarmos as seções de choque partônicas em \hat{t} e p_T é

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dp_T^2} = \frac{d\hat{\sigma}}{d(-\hat{t})} \frac{d(-\hat{t})}{dp_T^2} = \frac{d\hat{\sigma}}{d(-\hat{t})} \frac{1}{\sqrt{1 - 4\frac{p_T^2}{\hat{s}}}} = \frac{d\hat{\sigma}}{d|\hat{t}|} \frac{1}{\sqrt{1 - 4\frac{p_T^2}{\hat{s}}}}. \quad (3.8)$$

Voltando às funções eiconais, estas são escritas em termos de suas partes pares e ímpares conectadas por simetria de cruzamento. Para o caso pp e $\bar{p}p$, a combinação fica $\chi_{pp}^{p\bar{b}} = \chi^+ \pm \chi^-(s, b)$ com $\chi^+(s, b) = \chi_{suave}^+(s, b) + \chi_{SD}^+(s, b)$ e $\chi^-(s, b) = \chi_{suave}^-(s, b) + \chi_{SD}^-(s, b)$. Entretanto, para a o modelo a pártons da QCD, $\chi_{SD}^-(s, b)$ decresce rapidamente com o crescimento de s , já que a diferença entre as seções de choque pp e $\bar{p}p$ se deve somente a diferente contribuição das seções de choque de aniquilamento quark-antiquark, de valência, em dois canais. Assim, a eiconal de cruzamento ímpar $\chi^-(s, b)$ recebe nenhuma contribuição dos processo semiduros em altas energias. Como resultado, podemos tomar $\chi_{SD}(s, b) = \chi_{SD}^+(s, b)$ e conseqüentemente, $\chi^-(s, b) = \chi_{suave}^-(s, b)$. A conexão entre a parte real e imaginária destas eiconais são obtidas através de relações de dispersão, apêndice B.

3.1.1 Fatores de forma

Para as densidades de recobrimento, realizamos a hipótese simples, de que estas são iguais em formato para a região suave e semidura. A escolha comum para as densidades de recobrimento $W_{suave}^-(b)$ e $W_{suave}^+(b)$ vem da aproximação de dipolo de carga para os fatores de forma $G_A(k_\perp)$ e $G_B(k_\perp)$ dos hádrons colidentes A e B , onde

$$\begin{aligned} W(b) &= \int d^2b' \rho_A(|\mathbf{b} - \mathbf{b}'|) \rho(b') \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk_\perp k_\perp J_0(k_\perp b) G_A(k_\perp) G_B(k_\perp), \end{aligned} \quad (3.9)$$

e

$$G_A(k_\perp) = G_B(k_\perp) \equiv G_{dip}(k_\perp; \mu) = \left(\frac{\mu^2}{k_\perp^2 + \mu^2} \right)^2. \quad (3.10)$$

Aqui $\rho(b)$ é a densidade partônica, que da a densidade de probabilidade de se achar um párton na área d^2b no espaço do parâmetro de impacto b . Em termos do fator de forma

$$\rho(b) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk_\perp G(k_\perp) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{b}}. \quad (3.11)$$

Assim, usando o fator de forma de dipolo

$$\begin{aligned} W_{suave}^+(b; \mu_{suave}^+) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk_\perp k_\perp J_0(k_\perp b) G_{dip}^2(k_\perp; \mu_{suave}^+) \\ &= \frac{(\mu_{suave}^+)^2}{96\pi} (\mu_{suave}^+ b)^3 K_3(\mu_{suave}^+ b), \end{aligned} \quad (3.12)$$

CAPÍTULO 3. EICONALIZAÇÃO DO MODELO INSPIRADO EM QCD

onde K_3 é a função modificada de Bessel de segunda espécie e μ_{suave}^+ é um parâmetro livre ajustável que leva em conta a distribuição de massa, dos quarks de valência, dentro do hádron. A função $W(n; \mu)$ é normalizada para que $\int d^2W(b; \mu) = 1$. A parte ímpar segue

$$W_{suave}^-(b; \mu_{suave}^-) = \frac{(\mu_{suave}^-)^2}{96\pi} (\mu_{suave}^- b)^3 K_3(\mu_{suave}^- b) \quad (3.13)$$

onde $\mu_{suave}^- = 0.5 \text{ GeV}$, o valor é fixado já que a eiconal ímpar leva em conta somente a diferença entre os canais pp e $p\bar{p}$ em baixas energias.

No caso de glúons semiduros, que dominam em altas energias, Assumimos também um fator de forma dipolo

$$G_{SD}(k_{\perp}; \nu_{SD}) = \left(\frac{\nu_{SD}^2}{k_{\perp}^2 + \nu_{SD}^2} \right)^2, \quad (3.14)$$

onde ν_{SD} é outro parâmetro livre a ser ajustado. O fator de forma fica

$$W_{SD}(b; \nu_{SD}) = \frac{\nu_{SD}^2}{96\pi} (\nu_{SD} b)^3 K_3(\nu_{SD} b). \quad (3.15)$$

Estes resultados obtidos para os fatores de forma semiduro e suave aparecem em detalhe no apêndice C.

3.1.2 Relações de Dispersão Derivativas e Eiconal em Altas energias

A analiticidade da amplitude de espalhamento leva a relações de dispersão com condições de simetria de cruzamento. As relações de dispersão tem como resultado fundamental a conexão entre as partes real e imaginária de funções complexas analíticas. Comumente utilizadas são as relações de dispersão integrais devido ao crescimento suave das seções de choque totais pp e $p\bar{p}$, porém, o caráter não-local das relações integrais e o limitado número de funções que permitem integração analítica sugerem o uso de relações de dispersão derivativas. As relações seguidas nesta dissertação são

$$\frac{\text{Re}\{f_+\}(s)}{s} = \tan \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right] \frac{\text{Im}\{f_+\}(s)}{s}, \quad (3.16)$$

$$\frac{\text{Re}\{f_-\}(s)}{s} = -\cot \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right] \frac{\text{Im}\{f_-\}(s)}{s}, \quad (3.17)$$

Estas relações são obtidas em maior detalhe no apêndice B.

Assim, aplicando a relação de dispersão para $\text{Re}\chi_{SD} = \text{Re}\chi_{SD}^+ = \frac{1}{2}W_{SD}(s, b)\sigma_{QCD}(s)$ temos

$$\text{Im}\{\chi_{SD}\}(s, b) = -\tan \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right] \text{Re}\{\chi_{SD}\} \quad (3.18)$$

3.2 Seções de Choque Partônicas e Diagramas de Feynman

Por questão de precisão utilizamos até o termo derivada de 5^a ordem

$$\text{Im}\{\chi_{SD}\}(s, b) = - \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \frac{d}{d \ln s} \right)^3 + \frac{2}{5} \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right)^5 + \dots \right] \text{Re}\{\chi_{SD}\} \quad (3.19)$$

Este é o resultado utilizado para parte semidura da seção de choque total.

Com relação a parte suave, utilizamos uma parametrização com termos ditados pela fenomenologia de Regge [25]. Para a parte par da Eiconal suave utilizamos

$$\chi_{suave}^+(s, b) = \frac{1}{2} W_{suave}^+(b, \mu_{suave}) \left[A' + \frac{B'}{(s/s_0)^\gamma} e^{i\pi\gamma/2} \right], \quad (3.20)$$

onde $\sqrt{s_0} = 5 \text{ GeV}$ e A' , B' , γ e μ_{suave}^+ são parâmetros livres. O fator de fase $e^{i\pi\gamma/2}$, que certifica as propriedades analíticas da amplitude, é um resultado das relações de dispersão.

A parte ímpar da eiconal $\chi^-(s, b) = \chi_{suave}^-(s, b)$, responsável pela diferença entre os canais pp e $\bar{p}p$ e que desaparece em altas energias, é dada por

$$\chi^-(s, b) = \frac{1}{2} W_{suave}^-(b, \mu_{suave}^-) C' \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{s/s_0}}, \quad (3.21)$$

onde C' , a força do termo ímpar, também é um parâmetro livre. A expressão (3.21) foi escrita com a analiticidade correta, já que a fase $e^{-i\pi/4}$ é um resultado das relações de dispersão

$$\text{Im}\{F(s)\} = \cot \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right] \text{Re}\{F(s)\}. \quad (3.22)$$

3.2 Seções de Choque Partônicas e Diagramas de Feynman

Para obtenção das seção de choque $\sigma_{QCD}(s)$ necessitamos definir as seções de choque dos subprocessos envolvidos nos espalhamentos hádron-hádron semiduros.

Para começarmos a atacar o problema da obtenção de seções de choque para cada um dos subprocessos envolvidos

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dp_T^2}(ij \rightarrow kl), \quad (3.23)$$

em colisões do tipo $A + B \rightarrow A' + B'$, é intuitivo partir de processos análogos de outra teoria quântica de campos que descreva a interação entre os mesmos tipos de partículas, a Eletrodinâmica Quântica (*Quantum Electrodynamics*, QED). A QED apresenta boa descrição de processos de espalhamentos entre férmions de Dirac, elétrons, múons, etc. e bósons vetoriais como o fóton.

CAPÍTULO 3. EICONALIZAÇÃO DO MODELO INSPIRADO EM QCD

Os subprocessos de espalhamentos partônicos envolvem os mesmo tipos de partículas, sendo quarks férmions de Dirac e glúons bósons vetoriais [1]. Sendo o mais simples destes o espalhamento entre quarks de sabores diferentes $q + q' \rightarrow q + q'$. A QED apresenta o processo análogo $e^- \mu \rightarrow e^- \mu$, o qual podemos utilizar a seção de choque calculada via QED

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}} (e^- \mu \rightarrow e^- \mu) = \frac{2\pi\alpha^2}{\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} \right], \quad (3.24)$$

em um limite em que podemos desprezar as massas das partículas interagentes

$$\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = 0. \quad (3.25)$$

O próximo passo é converter este análogo para a seção de choque $q + q' \rightarrow q + q'$ da QCD. Para isto trocamos a constante de acoplamento da QED pela constante de acoplamento da força forte da QCD α_s e multiplicamos a seção de choque por um fator de simetria do grupo formador da QCD, o $SU(3)_C$. As regras para obtenção destes fatores aparece no Apêndice A. Sendo o diagrama de Feynman para o espalhamento $q + q' \rightarrow q + q'$ em ordem dominante o que aparece na Figura 3.1.

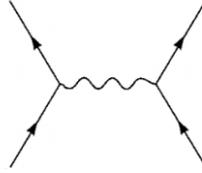


Figura 3.1: Diagrama de Feynman para um espalhamento $qq' \rightarrow qq'$.

Na figura as linhas retas significam férmions e linhas curvas bósons vetoriais, no caso da QCD glúons.

O fator de cor deste diagrama, como visto no apêndice A, é

$$(t^a)_{i'i} (t^a)_{j'j}, \quad (3.26)$$

onde i, i' são as cores iniciais e finais do quark q e j, j' são as cores iniciais e finais do quark q' . Queremos introduzir este fator na seção de choque do análogo da QED, para isto, tiramos o quadrado, somando sobre as cores finais e tirando a média das cores finais. Com isto o fator de cor se transforma

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{tr}[t^b t^a] \text{tr}[t^b t^a] = \frac{1}{9} [C(r)]^2 \delta^{ab} \delta^{ab} \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot 8 = \frac{2}{9}, \quad (3.27)$$

onde $C(r) = 1/2$, para a representação fundamental de $SU(3)_C$ apresentada no apêndice A. A seção de choque partônica para $qq' \rightarrow qq'$ fica

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}} (qq' \rightarrow qq') = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} \right]. \quad (3.28)$$

3.2 Seções de Choque Partônicas e Diagramas de Feynman

Como explicado no capítulo 1, a propriedade de simetria de cruzamento existente para as amplitudes de espalhamento, no formalismo que utilizamos, permite a obtenção da seção de choque partônica do processo $q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'$ realizando a troca dos canais $s \leftrightarrow t$. Utilizando esta propriedade obtemos a seção de choque para um processo de aniquilamento de par de um sabor indo em par de outro sabor

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}') = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2} \right]. \quad (3.29)$$

Para o processo de aniquilamento de par de mesmo sabor indo no mesmo par, analisamos a contribuição de dois diagramas de Feynman, Figura 3.2. Para este processo podemos utilizar o análogo da QED, o espalhamento Bhabha $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$. A seção de choque para este processo é dada por

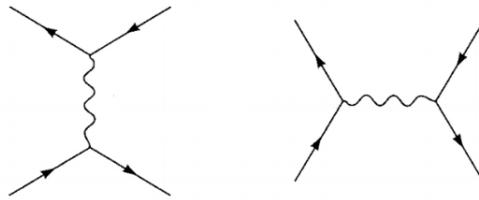


Figura 3.2: Diagramas de Feynman para um espalhamento $q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'$.

Para este processo podemos utilizar o análogo da QED, o espalhamento Bhabha $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$. A seção de choque para este processo é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(e^+e^- \rightarrow e^+e^-) = \frac{2\pi\alpha^2}{\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{s}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{t}^2}{\hat{s}^2} + \hat{u}^2 \left(\frac{1}{\hat{s}} + \frac{1}{\hat{t}} \right)^2 \right]. \quad (3.30)$$

Na transição para o processo análogo em QCD devemos levar em conta fatores de cor multiplicativos diferentes, assim como a helicidade das partículas envolvidas. Esta última implica que a reação $e_R^+e_L^- \rightarrow e_L^+e_R^-$ pode receber contribuições do diagrama do canal- s , enquanto $e_R^+e_R^- \rightarrow e_R^+e_R^-$ recebe contribuições somente do diagrama do canal- t . As seções de choque ficam

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\hat{t}}(e_R^+e_L^- \rightarrow e_L^+e_R^-) &= \frac{4\pi\alpha^2}{\hat{s}^2} \frac{\hat{t}^2}{\hat{s}^2}, \\ \frac{d\sigma}{d\hat{t}}(e_R^+e_R^- \rightarrow e_R^+e_R^-) &= \frac{4\pi\alpha^2}{\hat{s}^2} \frac{\hat{s}^2}{\hat{t}^2}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

A seção de choque de $e_R^+e_L^- \rightarrow e_L^+e_L^-$ deve ser nula. Enquanto, a última seção de choque $e_R^+e_L^- \rightarrow e_R^+e_L^-$ depende de ambos os diagramas, canal- s e canal- t . Esta fica

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(e_R^+e_L^- \rightarrow e_R^+e_L^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{\hat{s}^2} \hat{u}^2 \left(\frac{1}{\hat{t}} + \frac{1}{\hat{s}} \right)^2. \quad (3.32)$$

A característica de invariância de paridade da QED resulta em seções de choque invariantes quanto à reversão de helicidades.

CAPÍTULO 3. EICONALIZAÇÃO DO MODELO INSPIRADO EM QCD

Para obtenção da seção de choque análoga para QCD, adicionamos os fatores de cor correspondentes a cada diagrama, como feito anteriormente. A única diferença esta na última expressão que irá receber um fator de cor diferente, devido sua dependência com o cruzamento dos dois diagramas. O Fator fica

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot (t^a)_{ii}(t^a)_{jj'} \cdot (t^b)_{j'i'}(t^b)_{ij} = \frac{1}{9} \text{tr}[t^a t^b t^a t^b], \quad (3.33)$$

sendo

$$t^a t^b t^a t^b = \left(C_2(r) - \frac{1}{2}C_2(G)\right) t^a t^a = \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right) \frac{4}{3} = -\frac{2}{9}, \quad (3.34)$$

implicando em

$$\frac{1}{9} \text{tr}[t^a t^b t^a t^b] = -\frac{2}{27}. \quad (3.35)$$

Somando todas as contribuições para seção de choque $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$ temos

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2} \right] - \frac{8\pi\alpha_s^2}{27\hat{s}^2} \frac{\hat{u}^2}{\hat{t}}. \quad (3.36)$$

Para este último processo, novamente, a propriedade de cruzamento possibilita a obtenção da seção de choque partônica de outro processo da QCD, o processo $qq \rightarrow qq$. Trocando $s \leftrightarrow u$ temos

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(qq \rightarrow qq) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{t}^2 + \hat{s}^2}{\hat{u}^2} \right] - \frac{8\pi\alpha_s^2}{27\hat{s}^2} \frac{\hat{s}^2}{\hat{u}\hat{t}}. \quad (3.37)$$

O processo $\bar{q}\bar{q} \rightarrow \bar{q}\bar{q}$ tem a mesma seção de choque do processo $qq \rightarrow qq$.

As próximas seções de choque partônicas a serem calculadas dominam o crescimento da seção de choque $\sigma_{QCD}(s)$, pois são as seções de choque partônicas de espalhamentos iniciados por pelo menos um glúon. Estes processos apresentam uma maior quantidade de diagramas de Feynman em ordem dominante que devem ser levados em conta. Para o primeiro não apresentamos a prescrição completa para sua obtenção, apresentamos somente os fatores de cor envolvidos e seus diagramas de Feynman. Enquanto para o último e mais importante, $gg \rightarrow gg$, apresentamos uma descrição completa de sua obtenção.

Podemos começar por $q\bar{q} \rightarrow gg$. Obtendo a seção de choque partônicas deste podemos obter, por simetria de cruzamento, seus processos correspondentes. O análogo da QED para este processo é a seção de choque de aniquilamento $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$.

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{2\pi\alpha^2}{\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{u}}{t} + \frac{t}{u} \right]. \quad (3.38)$$

Os diagramas de Feynman envolvidos no análogo da QCD aparecem na Figura 3.41.

3.2 Seções de Choque Partônicas e Diagramas de Feynman

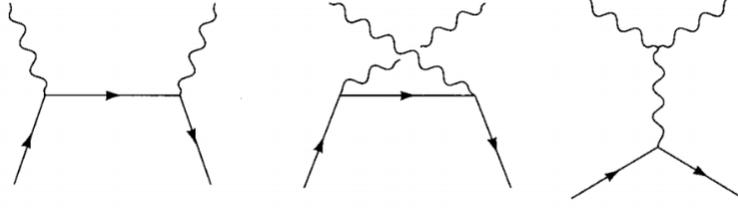


Figura 3.3: Diagramas de Feynman para um espalhamento $q\bar{q} \rightarrow gg$.

Sendo a contribuição de cada um destes diagramas somada aos estados de polarização transversos do glúon. Não entramos em detalhes neste processo, sendo o tratamento completo obtido na referência [1]. O fator de cor

$$(t^a)_{ij}(t^b)_{jk}, \quad (3.39)$$

deve ser somado sobre as cores do glúon a e b e tirado a média sobre as cores de q e \bar{q} , i, k . Este resulta em

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \text{tr} [t^a t^b t^b t^a] = \frac{1}{9} \cdot 3(C_2(r))^2 = \frac{16}{27}. \quad (3.40)$$

A aplicação deste fator de cor juntamente de outros passos omitidos gera a seção de choque partônica para o processo $q\bar{q} \rightarrow gg$

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(q\bar{q} \rightarrow gg) = \frac{32\pi\alpha_s^2}{27\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{u}}{\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{u}} \right] - \frac{8\pi\alpha_s^2}{3\hat{s}^2} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}. \quad (3.41)$$

Novamente, a propriedade de cruzamento possibilita a obtenção do processo $gg \rightarrow q\bar{q}$ a partir do anterior, trocando também a média sobre as cores dos quarks para a média sobre as cores dos glúons. Esta última troca gera o fator $(3/8)^2$ e assim a seção de choque para o processo $gg \rightarrow q\bar{q}$ fica

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(gg \rightarrow q\bar{q}) = \frac{\pi\alpha_s^2}{6\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{u}}{\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{u}} \right] - \frac{3\pi\alpha_s^2}{8\hat{s}^2} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}. \quad (3.42)$$

Para o próximo processo $gq \rightarrow gq$, realizamos o cruzamento $s \leftrightarrow t$ e multiplicamos pelo fator de cor $(3/8)$. A média é somente sobre as cores de um glúon, temos

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(gq \rightarrow gq) = -\frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{s}}{\hat{u}} + \frac{\hat{u}}{\hat{s}} \right] + \frac{\pi\alpha_s^2}{\hat{s}^2} \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2}. \quad (3.43)$$

Para seção de choque que mais contribui para seção de choque total σ_{QCD} , $gg \rightarrow gg$, este processo não apresenta um análogo da QED em que possamos nos apoiar para obtermos sua seção de choque. Na Figura 3.4 apresentamos os diagramas de Feynman que contribuem para seção de choque em ordem dominante. Partiremos das amplitudes destes diagramas contando com $g(k_1)g(k_2) \rightarrow g(p_1)g(p_2)$

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_1 = & g^2 f^{abc} f^{cde} \frac{-i}{s} [g^{\mu\nu}(k_1 - k_2)^\lambda + g^{\nu\lambda}(k_1 + 2k_2)^\mu - g^{\lambda\mu}(2k_1 + k_2)^\nu] \\ & \times [g^{\rho\sigma}(p_2 - p_1)_\lambda - g_\lambda^\sigma(p_1 + 2p_2)^\rho + g_\lambda^\rho(p_1 + 2p_2)^\rho] \epsilon_\mu(k_1)\epsilon_\nu(k_2)\epsilon_\rho^*(p_1)\epsilon_\sigma^*(p_2), \end{aligned} \quad (3.44)$$

**CAPÍTULO 3. EICONALIZAÇÃO DO MODELO INSPIRADO
EM QCD**

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_2 &= g^2 f^{ace} f^{bde} \frac{-i}{t} \left[g^{\mu\rho} (k_1 + p_1)^\lambda - g^{\rho\lambda} (2p_1 - k_1)^\mu - g^{\lambda\nu} (2k_1 - p_1)^\nu \right] \\
 &\quad \times \left[g^{\nu\rho} (k_2 + p_2)_\lambda - g_\lambda^\sigma (2p_2 - k_2)^\nu + g_\lambda^\nu (p_2 - 2k_2)^\sigma \right] \epsilon_\mu(k_1) \epsilon_\nu(k_2) \epsilon_\rho^*(p_1) \epsilon_\sigma^*(p_2),
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_3 &= g^2 f^{ade} f^{bce} \frac{-i}{u} \left[g^{\mu\sigma} (k_1 + p_2)^\lambda - g^{\rho\lambda} (2p_2 - k_1)^\mu - g^{\lambda\nu} (2k_1 - p_2)^\sigma \right] \\
 &\quad \times \left[g^{\nu\rho} (k_2 + p_1)_\lambda - g_\lambda^\rho (2p_1 - k_2)^\nu + g_\lambda^\nu (p_1 - 2k_2)^\sigma \right] \epsilon_\mu(k_1) \epsilon_\nu(k_2) \epsilon_\rho^*(p_1) \epsilon_\sigma^*(p_2),
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_4 &= -ig^2 \left[f^{abc} f^{cde} (\epsilon(k_1) \cdot \epsilon^*(p_1) \epsilon(k_2) \cdot \epsilon^*(p_2) - \epsilon(k_1) \cdot \epsilon^*(p_2) \epsilon(k_2) \cdot \epsilon^*(p_1)) \right. \\
 &\quad + f^{ace} f^{bde} (\epsilon(k_1) \cdot \epsilon(k_2) \epsilon^*(k_1) \cdot \epsilon^*(p_2) - \epsilon(k_1) \cdot \epsilon^*(p_2) \epsilon(k_2) \cdot \epsilon^*(p_1)) \\
 &\quad \left. + f^{adc} f^{bce} (\epsilon(k_1) \cdot \epsilon(k_2) \epsilon^*(p_1) \cdot \epsilon^*(p_2) - \epsilon(k_1) \cdot \epsilon^*(p_1) \epsilon(k_2) \cdot \epsilon^*(p_2)) \right].
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Onde estas são as 4 amplitudes, levando em conta todas as combinações de helicidade.

Começamos por avaliar a amplitude $g_R g_R \rightarrow g_R g_R$, onde necessitamos introduzir os estados iniciais de polarização

$$\epsilon_R^\mu(k_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0), \quad \epsilon_R^\mu(k_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, i, 0). \tag{3.48}$$

Utilizando (3.48) nas equações de amplitude temos

$$i\mathcal{M}_1 = -ig^2 g^{abc} f^{cde} \cos \theta, \tag{3.49}$$

$$i\mathcal{M}_2 = ig^2 f^{ace} f^{bde} \frac{19 + 7\cos \theta - 11\cos^2 \theta + \cos^3 \theta}{4(1 - \cos \theta)}, \tag{3.50}$$

$$i\mathcal{M}_3 = ig^2 f^{ade} f^{bce} \frac{19 - 7\cos \theta - 11\cos^2 \theta - \cos^3 \theta}{4(1 + \cos \theta)}, \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_4 &= -ig^2 \left[f^{abe} f^{cde} \cos \theta + \frac{1}{4} f^{ace} f^{bde} (3 + 2\cos \theta) - \cos^2 \theta \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} f^{ade} f^{bce} (3 - 2\cos \theta) - \cos^2 \theta \right].
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

A soma destas fica

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}(g_R g_R \rightarrow g_R g_R) &= -2ig^2 \left[f^{abc} f^{cde} \cos \theta - f^{ace} f^{bde} \left(\frac{2}{1 - \cos \theta} + \cos \theta \right) \right. \\
 &\quad \left. f^{ade} f^{bde} \left(\frac{2}{1 + \cos \theta} - \cos \theta \right) \right] \\
 &= 4ig^2 \left[f^{ace} f^{bde} \frac{1}{1 - \cos \theta} + f^{ade} f^{bce} \frac{1}{1 + \cos \theta} \right] \\
 &= -2ig^2 \left[f^{ace} f^{bde} \frac{s}{t} + f^{ade} f^{bce} \frac{s}{u} \right].
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

3.2 Seções de Choque Partônicas e Diagramas de Feynman

Podemos utilizar o mesmo mecanismo para $gLgR \rightarrow gLgR$ e $gLgR \rightarrow gRgL$ ou, através da simetria de cruzamento, trocar somente as variáveis $(s, b) \leftrightarrow (u, d)$ e $(s, b) \leftrightarrow (t, c)$ o que nos da

$$i\mathcal{M}(gLgR \rightarrow gLgR) = 2ig^2 \left[f^{ace} f^{bde} \frac{u}{t} + f^{abc} f^{cde} \frac{u}{s} \right], \quad (3.54)$$

$$i\mathcal{M}(gLgR \rightarrow gRgL) = -2ig^2 \left[f^{abe} f^{cde} \frac{t}{s} - f^{ade} f^{bce} \frac{t}{u} \right]. \quad (3.55)$$

As amplitudes de $gLgL \rightarrow gLgL$, $gRgL \rightarrow gRgL$ e $gRgL \rightarrow gLgR$ são idênticas as amplitude de $gRgR \rightarrow gRgR$, $gLgRgR$ e $gLgR \rightarrow gRgL$, respectivamente, devido a conservação de paridade da QCD. As outros amplitudes desaparecem devido a conservação de momentun angular. Para obter a seção de choque, enfim

$$\begin{aligned} & \sum |\mathcal{M}(gRgR \rightarrow gRgR)|^2 \\ & 4g^4 \left[f^{ace} f^{bde} f^{acf} f^{bdf} \frac{s^2}{t^2} + f^{adc} f^{bce} f^{adf} f^{bcf} \frac{s^2}{u^2} + 2f^{ace} f^{bde} f^{adf} f^{bcf} \frac{s^2}{tu} \right] \\ & 4g^4 \left[\text{Tr}(t^a t^a t^b t^b) \left(\frac{s^2}{t^2} + \frac{s^2}{u^2} + 2\text{Tr}(t^a t^b t^a t^b) \frac{s^2}{tu} \right) \right] \\ & = 288g^4 \left(\frac{s^2}{t^2} + \frac{s^2}{u^2} + \frac{s^2}{tu} \right), \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\sum |\mathcal{M}(gLgR \rightarrow gLgR)|^2 = 288g^4 \left(\frac{u^2}{t^2} + \frac{u^2}{s^2} + \frac{u^2}{st} \right), \quad (3.57)$$

$$\sum |\mathcal{M}(gLgR \rightarrow gRgL)|^2 = 288g^4 \left(\frac{t^2}{s^2} + \frac{t^2}{u^2} + \frac{t^2}{su} \right), \quad (3.58)$$

Assim, a amplitude quadrática média sob spin fica

$$\begin{aligned} \frac{1}{8^2} \cdot \frac{1}{2^2} \sum |\mathcal{M}^2| &= \frac{1}{8^2 \cdot 2^2} \cdot 2 \cdot 288g^4 \left(6 - \frac{2tu}{s^2} - \frac{2us}{t^2} - \frac{2st}{u^2} \right) \\ &= 72\pi^2 \alpha_s^2 \left(3 - \frac{tu}{s^2} - \frac{us}{t^2} - \frac{st}{u^2} \right). \end{aligned} \quad (3.59)$$

O resultado final

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(gg \rightarrow gg) = \frac{9\pi\alpha_s^2}{2\hat{s}^2} \left[3 - \frac{\hat{t}\hat{u}}{\hat{s}^2} - \frac{\hat{s}\hat{u}}{\hat{t}^2} - \frac{\hat{s}\hat{t}}{\hat{u}^2} \right]. \quad (3.60)$$

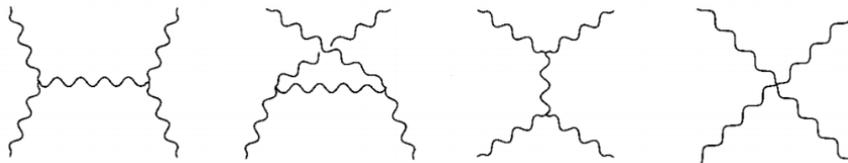


Figura 3.4: Diagramas de Feynman para um espalhamento $gg \rightarrow gg$.

CAPÍTULO 3. EICONALIZAÇÃO DO MODELO INSPIRADO EM QCD

Todas as transformações realizadas e relações entre as variáveis, como o momentum das partículas no referencial de CM e a transformação do resultado final em função das variáveis de Mandelstam aparecem explicadas na seção 1.1 do Capítulo 1. Ao final da seção, apresentamos um compilado das seções de choque partônicas calculadas para cada um dos subprocessos possíveis na colisão hadrônica, Tabela 3.1

3.2 Seções de Choque Partônicas e Diagramas de Feynman

Tabela 3.1: Expressões para as seções de choque diferenciais para os subprocessos de espalhamentos duros entre pártons, de dois corpos. Foi retirado das expressões um fator comum $\pi\alpha_s^2/\hat{s}^2$. Novamente, as variáveis de Mandelstam estão no referencial de CM párton-párton, identificadas pelo símbolo " \wedge ".

Subprocesso	Seção de choque partônicas
$qq' \rightarrow qq'$	$\frac{4}{9} \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2}$
$qq \rightarrow qq$	$\frac{4}{9} \left[\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{s}^2 + \hat{t}^2}{\hat{u}^2} \right] - \frac{8}{27} \frac{\hat{s}^2}{\hat{t}\hat{u}}$
$q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'$	$\frac{4}{9} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}$
$q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$	$\frac{4}{9} \left[\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{u}^2 + \hat{t}^2}{\hat{s}^2} \right] - \frac{8}{27} \frac{\hat{u}^2}{\hat{s}\hat{t}}$
$gq \rightarrow gq$	$-\frac{4}{9} \left[\frac{\hat{s}}{\hat{u}} + \frac{\hat{u}}{\hat{s}} \right] + \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2}$
$q\bar{q} \rightarrow gg$	$\frac{32}{27} \left[\frac{\hat{t}}{\hat{u}} + \frac{\hat{u}}{\hat{t}} \right] - \frac{8}{3} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}$
$gg \rightarrow q\bar{q}$	$\frac{1}{6} \left[\frac{\hat{t}}{\hat{u}} + \frac{\hat{u}}{\hat{t}} \right] - \frac{3}{8} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}$
$gg \rightarrow gg$	$\frac{9}{2} \left[3 - \frac{\hat{t}\hat{u}}{\hat{s}^2} - \frac{\hat{s}\hat{u}}{\hat{t}^2} - \frac{\hat{s}\hat{t}}{\hat{u}^2} \right]$

Capítulo 4

Funções de distribuição partônicas pós-LHC

4.1 Funções de Distribuição Partônicas (PDF's)

As funções de distribuição partônicas (*Parton Distribution Function*, PDF's) foram introduzidas, em seu formato atual, pelo modelo a pártons da QCD. Estas foram estabelecidas para um formalismo de fatorização colinear e definem a densidade de probabilidade de se encontrar certo párton carregando uma fração de momentum total x de um hádron para uma escala de fatorização, também conhecida como escala de resolução, escolhida Q^2 como a escala de renormalização para $\alpha_s \equiv \alpha_s(Q^2)$. As PDF's não podem ser obtidas através de um tratamento perturbativo da QCD, o fenômeno de confinamento proíbe a existência de estados livres dos pártons, impossibilitando cálculo explícito das PDF's. Porém, como explicado no modelo a pártons da QCD, podemos, a partir de uma parametrização inicial para o comportamento da PDF's, obter como estas se comportam devido à variação da Q^2 utilizando métodos perturbativos. Esta sondagem do comportamento das PDF's é feito geralmente por uma fonte externa, como um jato de partículas ou um fóton.

Juntamente do aprimoramento do modelo a pártons original para o modelo a pártons da QCD veio a dependência explícita das densidades de probabilidades das partículas com uma escala de fatorização. Um contraste em relação ao modelo anterior que apresentava uma dependência com somente a fração de momentum carregada [38]. O surgimento desta dependência com uma escala Q^2 provém diretamente das interações entre os quarks e glúons constituintes do hádron, como emissão de um glúon pelos quarks, $q \rightarrow qg$, emissão de um glúon por outros glúons, $g \rightarrow gg$, e a criação de par quark-antiquark, definidos como quarks de mar, por glúon, $g \rightarrow q\bar{q}$. Sendo em um processo de espalhamento estudado em laboratório, os pártons envolvidos no espalhamento podem, antes ou depois do espalhamento, irradiar glúons. Este tipo de fenômeno não é observado diretamente, sendo nossa ignorância sobre os pártons não interagentes necessária de ser integrada sob todo o espaço de fase remanescente. As correções realizadas, devido à este fenômeno de radiação de glúons, geram uma

4.1 Funções de Distribuição Partônicas (PDF's)

dependência logarítmica com a escala de fatorização Q^2 .

Como descrito no modelo a pártons da QCD, as relação entre as PDF's e a escala de fatorização podem ser obtidas pelas equações DGLAP [41][42][43][44], conjunto de equações integro-diferenciais conhecidas como equações de evolução partônicas.

Devido à impossibilidade de obtermos o comportamento inicial das PDF's, somente sua evolução com as equações DGLAP, somo obrigados à inferir sobre este estado inicial para determinado regime de energia. Como o comportamento em certos limites de x , $x = 0$ e $x = 1$, que pode ser aproximado através da teoria de Regge e análises específicas dos dados experimentais de colisores. Estas condições implicam em certa liberdade para definição do estado inicial das PDF's, $f(x, Q_0^2)$, onde dados experimentais podem validar o comportamento escolhido. Sendo assim, o grande diferencial entre os diferentes conjuntos de PDF's disponíveis é a escolha de parametrização inicial para a PDF, a quantidade de dados experimentais utilizados em sua construção e o método de análise dos dados experimentais na validação do comportamento inicial da PDF.

4.1.1 Escolhas de conjunto de PDF's

Neste trabalho fizemos uso de três conjuntos de PDF's diferentes, três conjuntos pós-LHC. Quando comentamos sobre os conjuntos serem pós-LHC, nos referimos exatamente aos dados experimentais levados em conta na construção do conjunto de PDF's. Utilizamos os conjuntos CT14, CT14L[11] e MSHT20 [12] em ordem dominante.

A ideia de se utilizar diferentes conjuntos de PDF para testar nosso modelo já foi explicada, esperamos que diferentes conjuntos, que levem em conta diferentes metodologias e conjuntos de dados experimentais, assim como diferentes parametrizações iniciais, apresentem resultados discordantes gerando assim um melhor teste de nosso modelo. O comportamento principal a ser observado para estes diferentes conjuntos é o de pequeno- x , sendo que este foi um grande problema a ser resolvido nas décadas de 80 e 90. Neste limite a PDF do glúon, por exemplo, era tomada ingenuamente como $g(x, Q^2) \approx x^{-J}$, onde $1 < J < 1.5$ [53]. Este comportamento "acentuado" da PDF do glúon e a pequena quantidade de dados para suportarem este tipo de escolha, na época, carregava uma incerteza às predições teóricas dos observáveis experimentais. O problema do comportamento assintótico das PDF's em pequeno- x foi resolvido, em grande parte, por Lipatov [56]. Este surge do rápido aumento da densidade partônica no limite $x \rightarrow 0$, havendo a ocorrência de uma saturação para determinado valor de x onde os pártons começam a interagir fortemente, mesmo que esperássemos o contrário devido o acoplamento efetivo ser fraco neste limite. Sendo assim, o comportamento mais importante a ser analisado é o da PDF do glúon, principalmente em pequeno- x . Nesta comparação entre os diferentes conjuntos, enfatizamos que a escala de fatorização deve ser a mesma que a de renormalização, para que os cancelamentos que permitem o tratamento perturbativo ocorram. Todos os conjuntos de PDF's escolhidos

estão no esquema de mínima subtração modificado, \overline{MS} .

Conjuntos de PDF's CT14 e CT14L

O conjuntos de PDF's CT14 e CT14L do grupo [11] tem como parametrização inicial:

$$xf_\alpha(x, Q_0) = x^{a_1}(1-x)^{a_2}P_\alpha, \quad (4.1)$$

onde o comportamento de x^{a_1} em $x \rightarrow 0$ é guiado pela teoria de Regge, e o comportamento de $(1-x)^{a_2}$ em $x \rightarrow 1$ é guiado pelas regras de contagem. O fator $P_\alpha(x)$ é assumido que varie paulatinamente, já que não razão para esperarmos estrutura fina neste mesmo em escala abaixo de Q_0 . Este fator é expresso neste conjunto por uma combinação linear de *polinômios de Bernsteins*:

$$P_{uv} = d_0p_0(y) + d_1p_1(y) + d_2p_2(y) + d_3p_3(y) + d_4p_4(y), \quad (4.2)$$

onde $y = \sqrt{x}$ e

$$\begin{aligned} p_0(y) &= (1-y)^4, \\ p_1(y) &= 4y(1-y)^3 \\ p_2(y) &= 6y^2(1-y)^2 \\ p_3(y) &= 4y^3(1-y) \\ p_4(y) &= y^4. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Já para o glúon, onde os dados experimentais provém poucas restrições para sua distribuição, foi utilizado um polinômio de ordem menor:

$$P_g(y) = g_0 [e_0q_0(y) + e_1q_1(y) + q_2], \quad (4.4)$$

onde

$$\begin{aligned} q_0(y) &= (1-y)^2, \\ q_1(y) &= 2y(1-y), \\ q_2(y) &= y^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Entretanto, no lugar de $y = \sqrt{x}$, é utilizado

$$y = 1 - (1 - \sqrt{s})^2 = 2\sqrt{x} - x. \quad (4.6)$$

A mesma parametrização é utilizada para CT14 e CT14L. A diferença única entre as PDF's CT14 e CT14L é a ordem de grandeza utilizada para $\alpha_s(Q^2)$. CT14 utiliza $\alpha_s(Q^2)$ em ordem dominante enquanto CT14L utiliza $\alpha_s(Q^2)$ em NLO. A comparação se faz importante devido à discussão realizada sobre a arbitrariedade das escolhas de parâmetros e escalas em ordem dominante realizada no Capítulo 2. As diferenças, se houverem, serão importantes para discussão sobre a necessidade de se trabalhar em ordens de grandeza no tratamento perturbativo da QCD cada vez maiores.

Conjunto de PDF's MSHT20

O conjunto de PDF's do grupo MSHT20 [12] tem como parametrização inicial:

$$xf(x, Q_0) = A(1-x)^{\eta} x^{\delta} \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i T_i^{ch}(y(x)) \right), \quad (4.7)$$

onde $Q_0 = 1$ GeV é a escala inicial, $T_i^{Ch}(y)$ são polinômios de Chebyshev em y , com $y = 1 - 2x^k$, e escolhendo $k = 0.5$.

Em comparação direta com seu conjunto antecessor, MMHT14, que utilizava $n = 4$, número de sabores de quarks ativos, para maioria dos cálculos, e parametrizações mais simplistas para os quarks de mar, o novo conjunto MSHT20, equipado com uma quantidade substancial de dados do LHC, utiliza $n = 6$ possibilitando uma melhor precisão para maior parte da extensão de x . O novo conjunto de parametrizações é

$$u_V(x, Q_0) = A_u(1-x)^{\eta_u} x^{\delta_u} \left(1 + \sum_{i=1}^6 a_{u,i} T_i^{ch}(y(x)) \right), \quad (4.8)$$

$$d_V(x, Q_0) = A_d(1-x)^{\eta_d} x^{\delta_d} \left(1 + \sum_{i=1}^6 a_{d,i} T_i^{ch}(y(x)) \right), \quad (4.9)$$

$$S(x, Q_0) = A_S(1-x)^{\eta_S} x^{\delta_S} \left(1 + \sum_{i=1}^6 a_{S,i} T_i^{ch}(y(x)) \right), \quad (4.10)$$

$$xg(x, Q_0) = A_g(1-x)^{\eta_g} x^{\delta_g} \left(1 + \sum_{i=1}^4 a_{i,g} T_i^{ch}(y(x)) \right) + A_{g'}(1-x)^{\eta_{g'}} x^{\delta_{g'}}. \quad (4.11)$$

4.1.2 Comparação entre as PDF's

Como comentamos anteriormente, o crescimento da seção de choque total é tido como governado pelo crescimento das funções de distribuição partônicas em altas energias, principalmente pelo comportamento da PDF dos glúons em pequeno x . O objetivo atual da maioria dos grupos criadores destes conjuntos de PDF's é utilizar a grande variedade de dados experimentais disponíveis, com as novas *runs* do LHC, para restringir o comportamento da PDF do glúon em pequeno x . Diferentes grupos com diferentes metodologias iram apresentar comportamentos parecidos para a maioria das energias, principalmente em energias da ordem do [TeV], onde novos dados constroem adequadamente o comportamento das PDF's devido à ótima aplicabilidade da QCD perturbativa nestes limites. Já para baixas energias e pequeno x , perto da região de transição, o comportamento é pouco restrito e diferentes grupos irão apresentar PDF's para o glúon bem diferentes. A figura a seguir apresenta uma comparação direta das PDF's dos glúons para 3 escalas de energia diferentes.

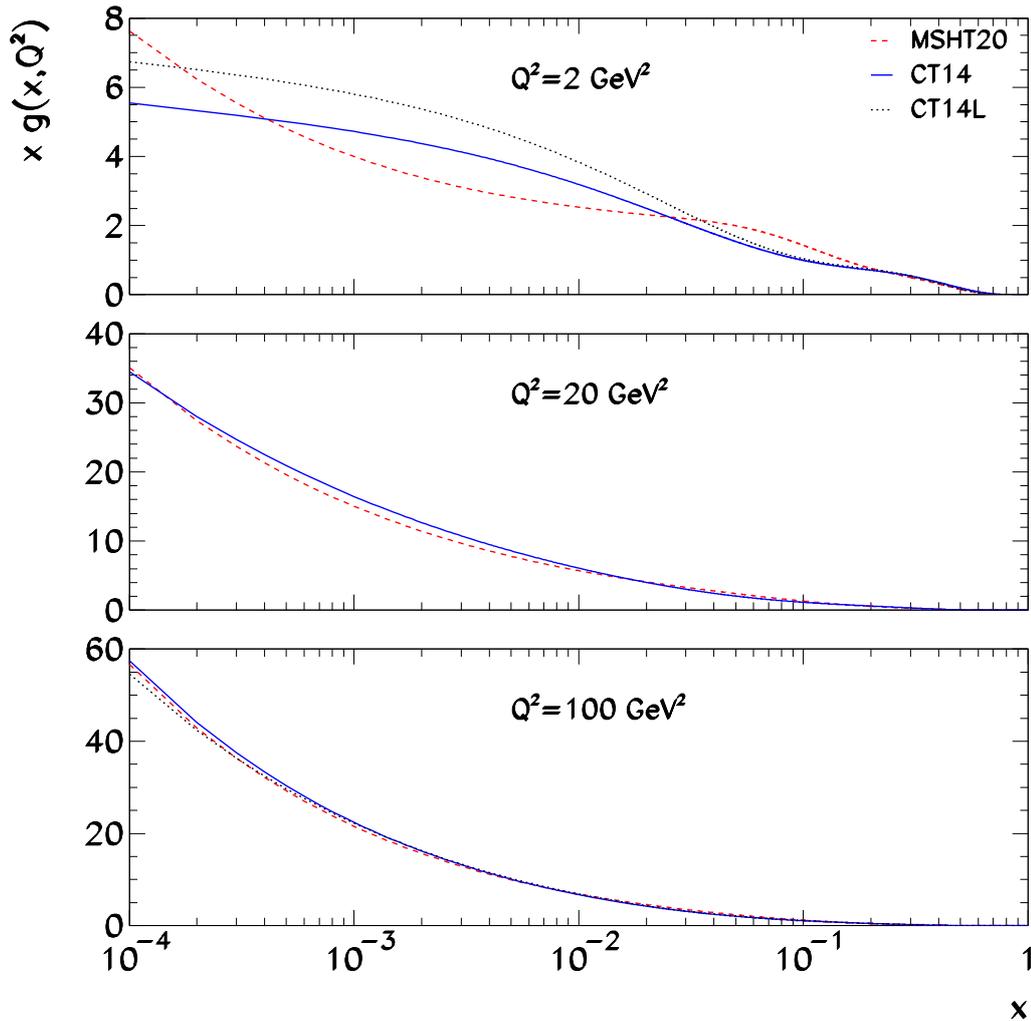


Figura 4.1: Comparação entre os dois conjuntos de PDF's para PDF do glúon em $Q^2 = 2, 20$ e 100 GeV^2 .

Os novos dados obtidos dos experimentos no LHC possibilitou um aproximação do comportamento em razoável baixa energia, como $Q^2 = 20 \text{ GeV}$, como mostra a figura 4.1. Porém o comportamento perto da região de transição, $Q^2 = 2 \text{ GeV}$, ainda é bem diferente e dependente de várias escolhas arbitrárias. A Figura 4.1 serve para demonstrar a importância de testarmos no nosso modelo com diferentes escolhas de conjuntos de PDF's, já que ainda não há um acordo sobre o comportamento da PDF do glúon em todas as regiões de energia e fração de momentum x .

Capítulo 5

Resultados, Conclusões e Perspectivas

5.1 Correlação Sistemáticas do Dados Experimentais

Nesta dissertação realizamos um ajuste global dos dados experimentais dos observáveis frontais de pp e $\bar{p}p$ para energias acima de $\sqrt{s} = 10$ GeV. Ao trabalhar com a grande quantidade de dados experimentais a disposição somos levados a considerar a importância, para um tratamento e análise correta de nosso modelo para com dados experimentais, de quais dados experimentais escolher, se podemos escolher, ou se podemos utilizar todos. Esta consideração se torna importante em vista dos diferentes resultados obtidos para os observáveis frontais de pp em 7, 8 e 13 TeV para um mesmo conjunto base de dados do colisor, mas levando em conta diferentes escolhas físicas e procedimentos em sua obtenção. Em razão disto, nesta dissertação trabalhamos com um método de correlação sistemática dos dados experimentais, utilizando os conjuntos de dados compilados e analisados pelo *Particle Data Group* (PDG) [13] assim como os dados mais novos do LHC obtidos pela colaboração TOTEM [14]-[23], onde os erros sistemáticos e estatísticos são somados em quadratura.

O conjunto de dados PDG se tornou a principal fonte dados experimentais utilizados por pesquisadores na área. Então, para tornar consistente o tratamento de informação utilizado pelo PDG e pelo TOTEM, adotamos um critério comum para a seleção e tratamento dos dados. Seguindo o tratamento utilizado pelo PDG para o tratamento de erros, os erros correlacionados são tratados explicitamente na presença de resultados na forma $A_i \pm \sigma_i \pm \Delta$ que tenham o mesmo erro sistemático Δ . É possível tirar a média de $A_i \pm \sigma_i$ e depois combinar em quadratura o erro estatístico resultante com respectivo Δ . Mesmo resultado pode ser obtido ao realizar a média de $A_i \pm (\sigma_i^2 + \Delta_i^2)^{1/2}$, onde aqui Δ_i são erros sistemáticos modificados dados por

$$\Delta_i = \sigma_i \Delta \left(\sum_j \frac{1}{\sigma_j^2} \right)^{1/2}. \quad (5.1)$$

CAPÍTULO 5. RESULTADOS, CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

O PDG descreve com esta análise alternativa que tem a vantagem de que cada medida experimental pode ser tratada como independente e como consequência pode ser utilizada normalmente junto de outros dados. Este processo tem a vantagem de aumentar a quantidade de dados disponíveis para um *fit* global em troca de um pequeno aumento nos erros sistemáticos dos dados experimentais. Seguindo a prescrição e o tratamento de dados em [10], as suposições realizadas levam a uma regra de contagem das correções sistemáticas $\sqrt{n}\delta_k$, $k = 1, \dots, n$, onde n é o número de resultados correlacionados e $\delta_k = \sqrt{\sigma_k^2 + \Delta^2}$. O resultado desta análise aparece na Tabela 5.1

5.1 Correlação Sistemáticas do Dados Experimentais

Tabela 5.1: Dados experimentais do LHC utilizados para o nossa análise de *fit* global. Para o caso de dados correlacionados, as incertezas são multiplicadas por um fator $f_n \equiv \sqrt{n}$, onde n é o número de quantidades correlacionadas.

\sqrt{s} (TeV)	$\sigma_{tot}(s)$ (mb)	ρ
13	$110.6 \pm (3.4 \times f_5)$ [14]	$0.100 \pm (0.010 \times f_4)$ [15]
	$109.5 \pm (3.4 \times f_5)$ [14]	$0.133 \pm (0.010 \times f_4)$ [16]
	$111.8 \pm (3.4 \times f_5)$ [16]	$0.134 \pm (0.010 \times f_4)$ [16]
	$112.9 \pm (3.4 \times f_5)$ [16]	$0.123 \pm (0.010 \times f_4)$ [17]
	$111.4 \pm (1.8 \times f_5)$ [17]	$0.90 \pm (0.010 \times f_3)$ [15]
	110 ± 3.5 [15]	$0.133 \pm (0.010 \times f_3)$ [16]
		$0.134 \pm (0.010 \times f_3)$ [16]
8	$102.9 \pm (2.3 \times f_4)$ [18]	$0.120 \pm (0.030 \times f_3)$ [18]
	$103.0 \pm (2.3 \times f_4)$ [18]	$0.137 \pm (0.030 \times f_3)$ [16]
	$101.6 \pm (2.3 \times f_4)$ [16]	$0.135 \pm (0.030 \times f_3)$ [16]
	$102.7 \pm (2.3 \times f_4)$ [16]	
	$101.5 \pm (2.1 \times f_2)$ [19]	
	$101.9 \pm (2.1 \times f_2)$ [19]	
	101.7 ± 2.9 [20]	
7	$99.1 \pm (4.3 \times f_3)$ [21]	0.145 ± 0.091 [21]
	$98.0 \pm (2.5 \times f_3)$ [21]	
	$98.6 \pm (2.2 \times f_3)$ [22]	
	98.3 ± 2.8 [23]	

5.2 Análise fenomenológica

Para realização do ajuste global de nosso modelo sob o dados experimentais apresentados na seção anterior, partimos da seção de choque da QCD, σ_{QCD} para o cálculo da contribuição semidura para com a eiconal total $\chi(s, b) = \chi_{suave(s,b)} + \chi_{SD}(s, b)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{QCD}(s) = & \sum_{i,j,k,l} \int_{p_{Tmin}}^{s/4} dp_T^2 \int_{4P_T^2/s}^1 dx_1 \int_{4P_T^2/x_1s}^1 dx_2 \\ & \times [f_{i/A}(x_1, Q^2) f_{j/B}(x_2, Q^2) + f_{j/A}(x_1, Q^2) f_{i/B}(x_2, Q^2)] \\ & \times \left[\frac{d\hat{\sigma}_{ij \rightarrow kl}}{dp_T^2}(\hat{t}, \hat{u}) + \frac{d\hat{\sigma}_{ij \rightarrow kl}}{dp_T^2}(\hat{u}, \hat{t}) \right] (1 - \delta_{ij}/2)(1 - \delta_{kl}/2), \end{aligned} \quad (5.2)$$

sendo a contribuição semidura para com a eiconal

$$\text{Re}\chi_{SD}(s, b) = \frac{1}{2} W_{SD}(b) \sigma_{QCD}(s). \quad (5.3)$$

No cálculo da seção de choque foi utilizado um programa de integração multidimensional conhecido como VEGAS, disponível pela biblioteca *cernlib* do CERN. O programa realiza as integrais através de um método de integração baseado em Monte Carlo. Calculamos, através da formalização de um programa em linguagem FORTRAN, uma quantidade razoável de pontos para um grande intervalo de energia de centro de massa \sqrt{s} , onde cada ponto faz 10 milhões de chamadas por integração para assegurar precisão dos valores obtidos. As PDF's em (5.2) são inseridas através da bibliotecas de PDF's do repositório LHAPDF [57]. Realizamos o cálculo de (5.2) para para valores de p_{Tmin} no intervalo $1.0 \text{ GeV} \leq p_{Tmin} \leq 1.3 \text{ GeV}$ onde podemos nos assegurar da aplicabilidade da QCD perturbativa e onde trabalhos passados, com modelos similares, fixaram o melhor p_{Tmin} para obtenção de $\sigma_{QCD}(s)$. Outra escolha feita foi a de respeitar os limites de aplicabilidade das PDF's em relação ao corte p_{Tmin} através do congelamento destas abaixo de seu limiar aplicação.

Para a obtenção da parametrização final da seção de choque eiconalizada, o mais lógico seria utilizar o programa de obtenção de σ_{QCD} dentro daquele que minimiza a seção de choque eiconalizada. Porém, o tempo computacional necessário para uma análise completa deste tipo levando em conta todos os pontos de $\sigma_{QCD}(s)$ em \sqrt{s} , o intervalo $1.0 \text{ GeV} \leq p_{Tmin} \leq 1.3 \text{ GeV}$, escolha de PDF's, a eiconalização da parte semidura do processo de espalhamento e subsequente minimização dos parâmetros livres da seção de choque eiconalizada seria enorme. Para tanto, e sem perda de precisão, trabalhamos em duas etapas, começando pela parametrização dos pontos obtidos de (5.2) através da seguinte função monotônica [58]:

$$\begin{aligned} G(s) = & b_1 + b_2 e^{b_3 [X(s)]^{1.01 b_4}} + \\ & b_5 e^{b_6 [X(s)]^{1.05 b_7}} + \\ & b_8 e^{b_9 [X(s)]^{1.09 b_{10}}} + \\ & b_{11} e^{b_{12} [X(s)]^{1.13 b_{13}}}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

5.3 Resultados do Modelo

Onde (b_1, b_2, \dots) são parâmetros livres da função $G(s)$ e $X(s) = \ln \ln(s)$. A função $G(s)$ em (5.4) equivale à (5.2).

Com $\sigma_{QCD}(s)$ agora parametrizada, inserimos as funções $G(s)$ para cada escolha de p_{Tmin} e conjunto de PDF's na equação (5.3) e utilizamos as relações de dispersão derivativas para obter a parte imaginária. Com a eiconal que representa a contribuição semidura completa, somamos sua contribuição à suave e realizamos um ajuste global para com os dados experimentais correlacionados sistematicamente nos erros. Este ajuste, assim como para $\sigma_{QCD}(s)$ se dá através de um processo de minimização da seção de choque total e parâmetro ρ através de um teste de χ^2 . Pretendemos com isto minimizar os parâmetros livres $A', B', C', \gamma, \nu_{SD}$ e μ_{suave}^+ das eiconais (5.3), (3.20) e (3.21) para os diferentes conjuntos de PDF e diferentes escolhas de corte de momentum. Com isto podemos obter os melhores parâmetros de nosso modelo para um ajuste global dos dados experimentais.

5.3 Resultados do Modelo

Os resultados obtidos através da análise fenomenológica, apresentada na seção 5.2, estão expostos nos gráficos das Figuras 5.1, 5.2 e 5.3. Estas curvas foram obtidas para a melhor escolha de p_{Tmin} para cada conjunto de PDF, através de uma comparação direta dos resultados de teste de χ^2 realizados no intervalo $1.0 \text{ GeV} < p_T < 1.3 \text{ GeV}$.

As figuras demonstram um ótimo ajuste de nosso modelo dos dados experimentais utilizados. O conjunto MSHT20 parece apresentar os melhores resultados, sendo este um conjunto mais novo que o CT14, o grupo CT14 não estendeu as análises em ordem dominante para seu conjunto mais novo CT18. O comportamento inicial na região $\sqrt{s} < 10 \text{ GeV}$ é simplesmente uma extrapolação do modelo e apresentado por completeza, não esperamos um ajuste adequado nem uma boa previsão do comportamento dos observáveis frontais σ_{tot} e parâmetro ρ utilizando nosso modelo nesta região.

As Tabelas 5.2 e 5.3 apresentam os valores para os parâmetros livres obtidos pelo melhor ajuste de nosso modelo. Primeiramente, para comparação os parâmetros são expostos para uma mesma escolha de corte $p_{Tmin} = 1.12 \text{ GeV}$, e depois expostos para a melhor escolha de corte de momentum transversal por conjunto de PDF.

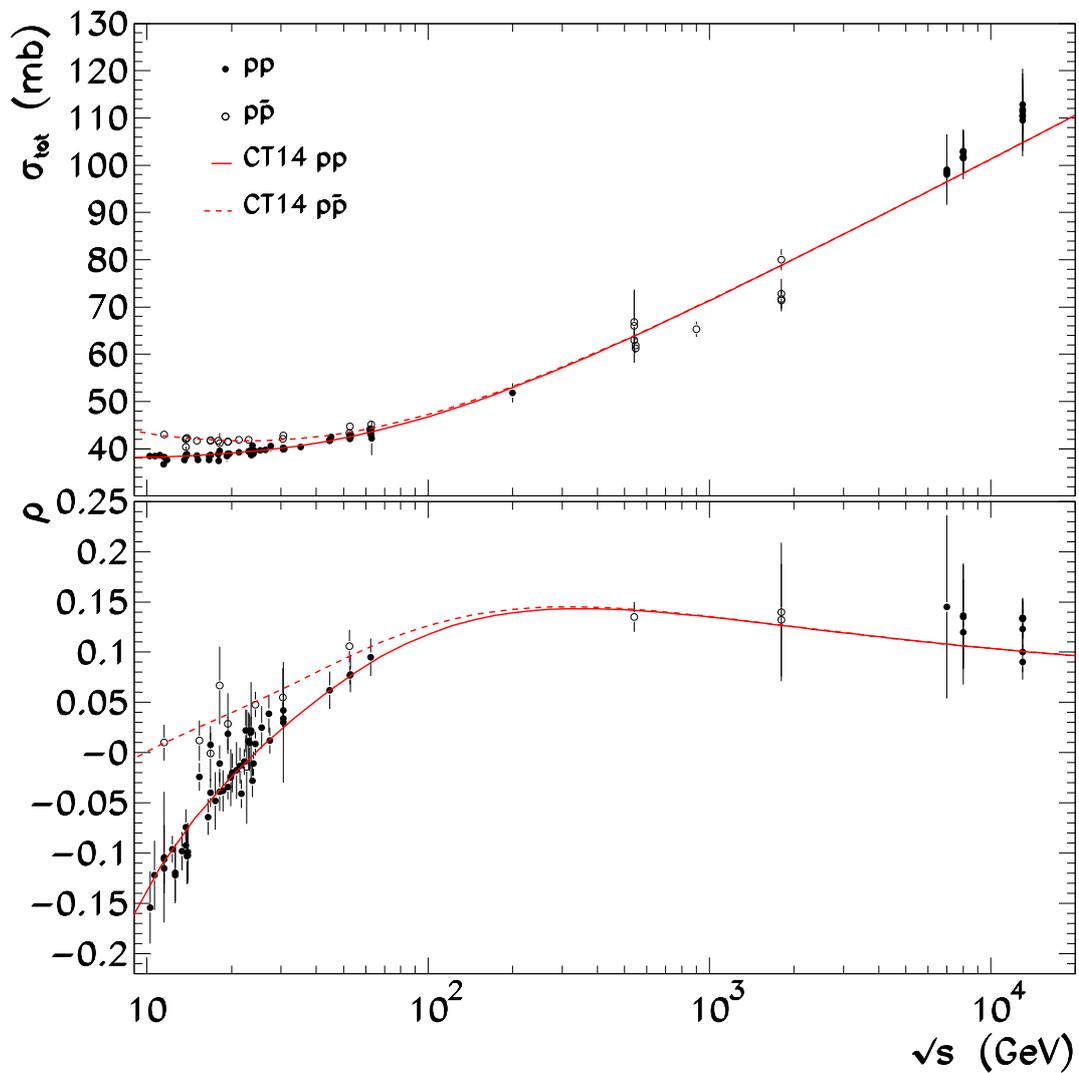


Figura 5.1: Seção de choque total e parâmetro ρ dos espalhamentos elásticos pp e $p\bar{p}$ obtidas pelo Modelo para uma escolha de PDF CT14 e corte de momentum transversal $p_{Tmin} = 1.14$ GeV.

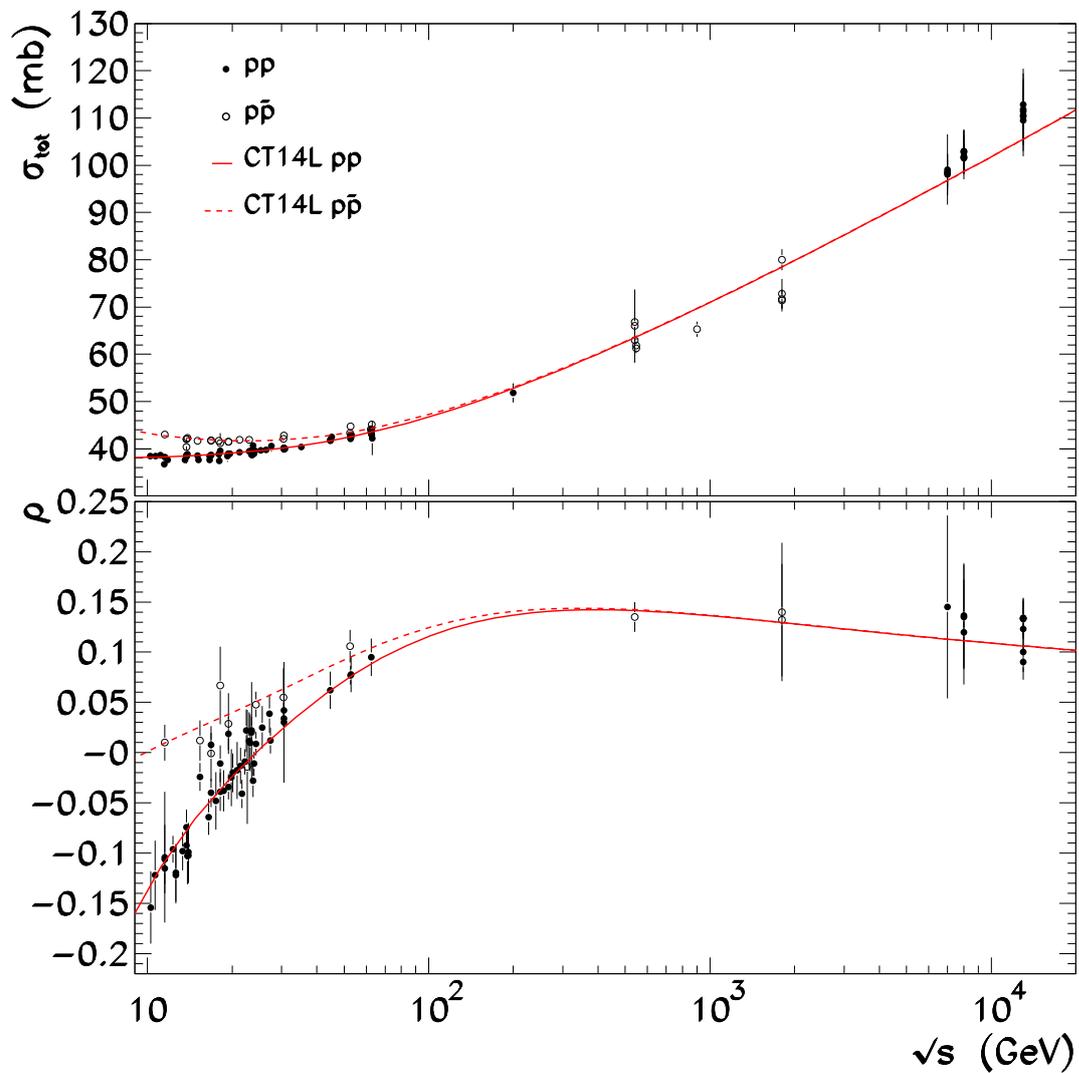


Figura 5.2: Seção de choque total e parâmetro ρ dos espalhamentos elásticos pp e $p\bar{p}$ obtidas pelo Modelo para uma escolha de PDF CT14L e corte de momento transversal $p_{Tmin} = 1.12$ GeV.

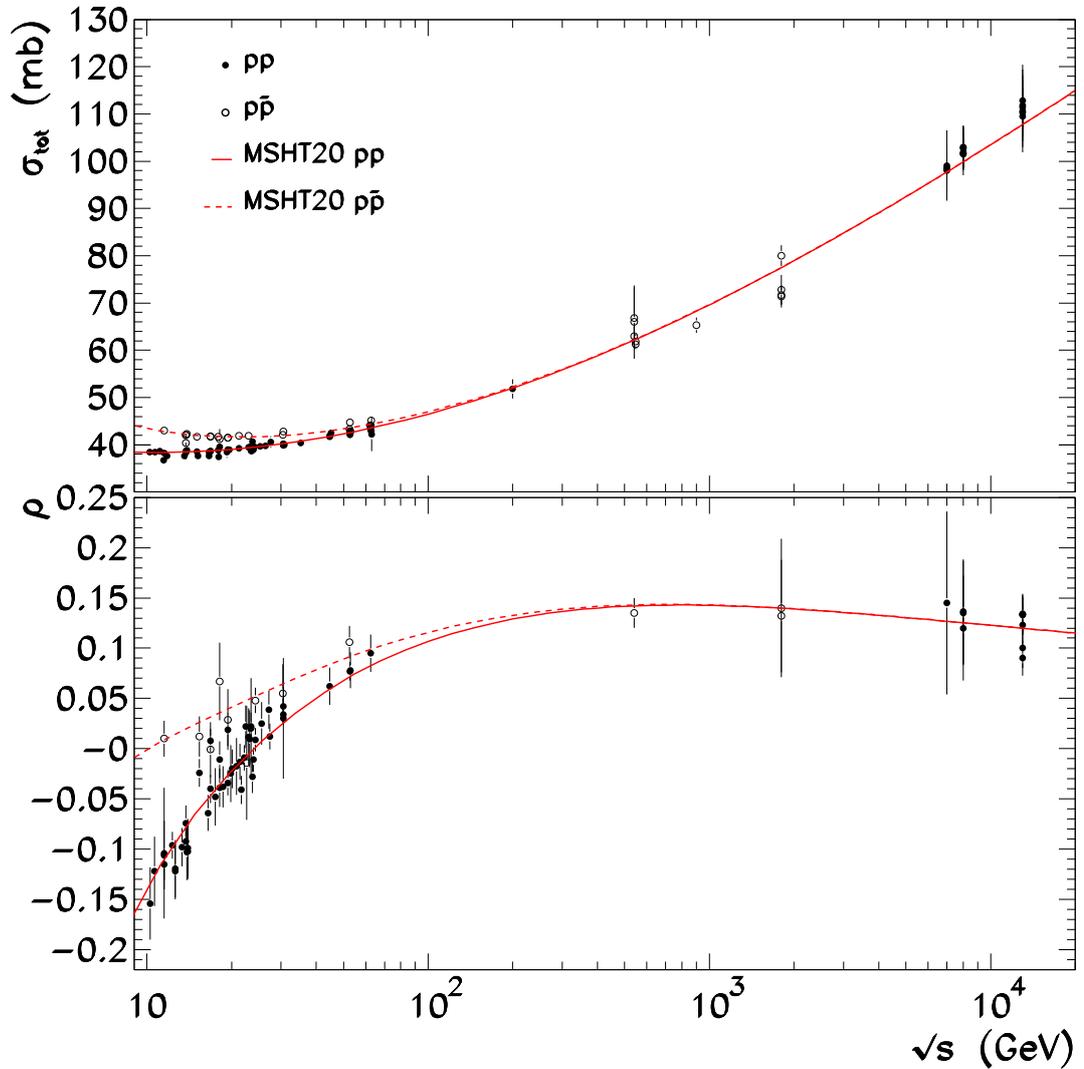


Figura 5.3: Seção de choque total e parâmetro ρ dos espalhamentos elásticos pp e $p\bar{p}$ obtidas pelo Modelo para uma escolha de PDF MSHT20 e corte de momentum transversal $p_{Tmin} = 1.12$ GeV..

5.3 Resultados do Modelo

Tabela 5.2: Valores para os parâmetros do modelo obtidos de um ajuste global dos dados de espalhamentos pp e $p\bar{p}$. Resultados obtidos para um valor de corte $p_{Tmin} = 1.12 \text{ GeV}$

	CT14	CT14L	MSHT
$\nu_{SD} [\text{GeV}]$	1.566 ± 0.036	1.557 ± 0.036	1.602 ± 0.040
$A' [\text{GeV}]^{-1}$	173.1 ± 20.51	167.1 ± 17.06	151.6 ± 24.13
$B' [\text{GeV}]^{-1}$	71.66 ± 32.34	66.50 ± 29.28	49.27 ± 20.92
γ	0.738 ± 0.154	0.761 ± 0.147	0.535 ± 0.255
$\mu_{suave}^+ [\text{GeV}]$	1.221 ± 0.091	1.181 ± 0.084	1.128 ± 0.116
$C' [\text{GeV}^{-1}]$	25.00 ± 1.708	24.87 ± 1.705	24.96 ± 1.692
χ^2/DOF	1.234	1.309	1.039

Dos resultados obtidos, fica claro na Tabela 5.3 que o conjunto MSHT20 apresenta o melhor ajuste, com um $\chi^2/DOF = 1.039$. As diferenças que esperávamos observar entre os conjuntos CT14 e CT14L ficam evidentes nestas tabelas. O melhor ajuste para ambos os conjuntos demonstra significativa diferença no teste de χ^2/DOF , sendo CT14 um ajuste um pouco melhor que CT14L para com os dados experimentais utilizados. De certa maneira, implicando que a escolha de um constante de acoplamento da força forte $\alpha_s(Q^2)$ e funções de distribuição partônicas $f(x, Q^2)$ ambas em ordem dominante é o caminho correto a se seguir em sua utilização em nosso modelo.

CAPÍTULO 5. RESULTADOS, CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Tabela 5.3: Valores para os parâmetros do modelo obtidos de um ajuste global dos dados de espalhamentos pp e $p\bar{p}$. Resultados obtidos para os p_{Tmin} 's que apresentam mais baixo χ^2/DOF para cada escolha de conjunto de PDF.

	CT14	CT14L	MSHT
	$p_{Tmin} =$ 1.14 GeV	$p_{Tmin} =$ 1.12 GeV	$p_{Tmin} =$ 1.12 GeV
ν_{SD} [GeV]	1.562 ± 0.036	1.557 ± 0.036	1.602 ± 0.040
A' [GeV] ⁻¹	166.1 ± 17.71	167.1 ± 17.06	151.6 ± 24.13
B' [GeV] ⁻¹	65.96 ± 28.97	66.50 ± 29.28	49.27 ± 20.92
γ	0.738 ± 0.153	0.761 ± 0.147	0.535 ± 0.255
μ_{suave}^+ [GeV]	1.181 ± 0.086	1.181 ± 0.084	1.128 ± 0.116
C' [GeV] ⁻¹	24.90 ± 1.704	24.87 ± 1.705	24.96 ± 1.692
χ^2/DOF	1.226	1.309	1.039

É interessante notar ao analisarmos os resultados apresentados nas tabelas e gráficos que a ótima descrição dos dados de $\sqrt{s} = 7, 8$ e 13 , assim como para regiões médias, dependem, em nosso modelo, de somente um parâmetro livre, em contraponto com a descrição da região suave que depende de 5 parâmetros livres. A pequena variação entre os diferentes conjuntos de PDF e incerteza presente para este parâmetro semiduro, implica em uma boa modelagem do comportamento das interações em altas energias através de nossas equações (5.2) e (5.3).

5.4 Previsões Teóricas

Obtemos as previsões teóricas do modelo para a seção de choque e parâmetro ρ dos espalhamentos pp e $\bar{p}p$ através da extrapolação do modelo para energias de centro massa da ordem de grandeza já obtidas pelo LHC, assim como em possíveis patamares futuros como $\sqrt{s} = 14$ TeV, e para energias obtidas em experimentos envolvendo raios cósmicos.

Tabela 5.4: Previsões teóricas do modelo para energias já e quase alcançadas no LHC, assim como para energias na escala estuda por experimentos com raios cósmicos.

PDF	\sqrt{s} (TeV)	$\sigma_{tot}(s)$ (mb)	ρ
CT14	8	$98.66^{+8.4}_{-7.1}$	$0.111^{+0.009}_{-0.007}$
	13	$105.5^{+8.7}_{-7.5}$	$0.106^{+0.009}_{-0.008}$
	14	$106.6^{+9.3}_{-8.1}$	$0.105^{+0.009}_{-0.008}$
	57	$127.1^{+12.9}_{-12.3}$	$0.093^{+0.009}_{-0.009}$
	95	$134.8^{+13.6}_{-13.1}$	$0.089^{+0.010}_{-0.010}$
CT14L	8	$98.30^{+8.6}_{-7.2}$	$0.106^{+0.09}_{-0.007}$
	13	$104.8^{+9.4}_{-8.1}$	$0.101^{+0.009}_{-0.008}$
	14	$105.8^{+9.5}_{-8.3}$	$0.100^{+0.009}_{-0.008}$
	57	$125.0^{+13.5}_{-12.9}$	$0.088^{+0.009}_{-0.009}$
	95	$132.1^{+14.3}_{-13.8}$	$0.085^{+0.010}_{-0.010}$
MSHT20	8	$99.89^{+8.6}_{-7.2}$	$0.125^{+0.011}_{-0.009}$
	13	$107.8^{+9.4}_{-8.1}$	$0.120^{+0.010}_{-0.008}$
	14	$109.0^{+9.5}_{-8.3}$	$0.120^{+0.011}_{-0.009}$
	57	$133.0^{+13.5}_{-12.9}$	$0.104^{+0.010}_{-0.010}$
	95	$142.1^{+14.3}_{-13.8}$	$0.099^{+0.011}_{-0.011}$

5.5 Conclusões

Neste trabalho utilizamos um modelo inspirado em QCD para o cálculo da seção de choque total e a razão entre as partes real e imaginária da seção de choque, parâmetro ρ , para os espalhamentos pp e $\bar{p}p$. Discutimos a importância de estudos de processos com pequeno momentum transferido (processos suaves) a altas energias, onde a aplicação da QCD perturbativa é impossibilitada pelo fenômeno de confinamento que se manifesta completamente nesta região, e a consequente necessidade da formulação de novos modelos fenomenológicos, tais como os inspirados em QCD.

O modelo estudado neste trabalho utiliza uma representação eiconal para a amplitude de espalhamento elástica, onde as contribuições dos processos suaves e semiduros advém das suas respectivas funções eiconais $\chi(s, b)$. Este tipo de representação tem a vantagem de respeitar a propriedade de unitaridade e permitir a consideração dos diferentes processos envolvidos através de uma soma de suas eiconais. Os processos suaves foram modelados a partir da fenomenologia de Regge[25], enquanto os processos duros foram modelados a partir do modelo a pártons da QCD, onde a seção de choque $\sigma_{QCD}(s)$ é tida como a soma de todas as contribuições de possíveis subprocessos de espalhamentos partônicos duros convoluídos com suas respectivas funções de distribuição partônicas, em ordem dominante. A parte imaginária da eiconal é obtida por meio de relações de dispersão derivativas. A distribuição de pártons no espaço de parâmetro de impacto é modelada com um fator de forma do tipo dipolo.

Para o cálculo de σ_{QCD} utilizamos dois dos conjuntos mais novos de funções de distribuição partônicas disponíveis, CT14[11] e MSHT20[12]. Estes conjuntos são ambos pós-LHC e, portanto, levam em consideração uma gama de dados experimentais muito maior na criação e parametrização destas PDF's em relação à conjuntos anteriores. Estes novos dados serviram para obter uma melhor constrição do comportamento da PDF do glúon em altas energias e pequeno x , sendo este um resultado importante, tendo em vista que espalhamentos partônicos duros envolvendo glúons em altas energias dominam o comportamento da seção de choque total.

Realizamos uma análise fenomenológica do nosso modelo utilizando os dados experimentais dos observáveis frontais ($t = 0$) $\sigma_{tot}(s)$ e parâmetro ρ para energias acima de $\sqrt{s} = 10$ GeV. Os dados utilizados foram aqueles disponibilizados pelo PDG [13] e os mais novos obtidos pela colaboração TOTEM [14]-[23]. Para a preparação do conjunto de dados nas energias do LHC que compõe o conjunto total de dados, utilizamos uma prescrição introduzida pelo PDG para o tratamento estatístico da correlação sistemática de incertezas. O tratamento das correlações permite que cada resultado experimental na região do LHC seja tratado como independente, possibilitando estes sejam utilizados normalmente junto de outros dados experimentais. Nosso ajuste dos dados experimentais de $\sigma_{tot}(s)$ e $\rho(s)$ foi realizada em duas partes: na primeira parametrizamos a seção de choque σ_{QCD} em uma função $G(s)$; na segunda a parametrização foi utilizada no ajuste global dos dados experimentais, a partir de uma análise de χ^2/DOF . Obtivemos com isto os melhores parâmetros de

5.6 Perspectivas

nosso modelo na descrição dos dados experimentais utilizados. Verificamos que para uma escolha de escala $Q^2 = p_T^2$, o melhor corte de p_{Tmin} para as PDF's MSHT20, CT14 e CT14L são 1.12 GeV, 1.14 GeV e 1.12 GeV, respectivamente.

O modelo apresenta uma ótima descrição dos dados experimentais em todo espectro de energia, para os dois conjuntos de PDF's. Vimos que a principal diferença entre as PDF's está refletida no comportamento de $\sigma_{tot}(s)$ e parâmetro ρ em energias acima de 7 TeV, onde o conjunto MSHT20 apresenta um crescimento para a PDF do glúon em pequeno x mais acentuado em relação ao comportamento do glúon no conjunto CT14. As diferenças possíveis que queríamos observar no diferente tratamento da constante de acoplamento da força forte α_s dentro o conjunto CT14, que denominamos de CT14 para o caso onde α_s está em LO e CT14L quando esta foi utilizada em NLO, foi mínima, mas presente, principalmente na região de médias energias observadas nos resultados para o parâmetro ρ .

As previsões de nosso modelo para a seção de choque total pp e $\bar{p}p$, levando em consideração o conjunto que apresentou menor χ^2/DOF , MSHT20, em energias do LHC 13 e 14 TeV, respectivamente, $\sigma_{tot} = 107.8_{-8.1}^{+9.4}$ mb e $\sigma_{tot} = 109.0_{-8.3}^{+9.5}$ mb. Para razão entre as partes real e imaginária da seção de choque total, parâmetro ρ , o modelo prevê para 13 e 14 TeV, respectivamente, $\rho = 0.120_{-0.008}^{+0.010}$ e $\rho = 0.120_{-0.009}^{+0.011}$. Deixamos, também, as previsões do modelo para energias de experimentos com raios cósmicos na Tabela 5.4

5.6 Perspectivas

Como perspectivas deste trabalho, pretendemos estender o tratamento utilizado no modelo para NLO, em razão da importância de estudos nesta ordem de perturbação devido à arbitrariedade das escolhas de escala nos esquemas de fatorização e renormalização em LO. Pretendemos, também, trabalhar com outros conjuntos de PDF's, a modo de verificar o comportamento da seção de choque total e parâmetro ρ para uma gama maior destes. Pretendemos ainda obter uma boa descrição de dados de seção de choque diferencial $d\sigma/dt$ e *slope* nuclear B . Neste caso será necessário o estudo de outros fatores de forma além do utilizado na dissertação, como por exemplo os fatores de forma de monopolo e outros que sejam combinações entre monopolos e dipolos. Por fim, um outro estudo possível é determinação de efeitos da partícula Odderon na amplitude de espalhamento.

Apêndice A

Regras de Feynmann para QCD

Teoria de Calibre não-abeliana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + g A_\mu^a \bar{\psi} \gamma^\mu t^a \psi \\ & - g f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A^{\mu b} A^{\nu c} - \frac{1}{4} g^2 (f^{eab} A_\mu^a A_\nu^b) (f^{ecd} A^{\mu c} A^{\nu d}) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

A lagrangiana para uma teoria de calibre não-abeliana depende diretamente das matrizes γ^μ e t^a , sendo t^a a matriz que representa o grupo $SU(3)$. As matrizes γ^μ na representação quiral fica:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma^\mu = (1, \sigma); \quad \bar{\sigma}^\mu = (-1, \sigma) \quad (\text{A.3})$$

sendo σ^μ as famosas matrizes de Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

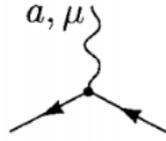
Já as matrizes que representam o grupo $SU(3)$ da QCD tem o seguinte formato:

$$\begin{aligned} t^1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ t^4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ t^7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad t^8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Regras de Feynmann:

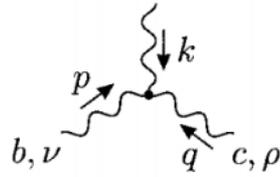
Linhas retas significam férmions e linhas curvas significam glúons.

Vértice Fermiônico:



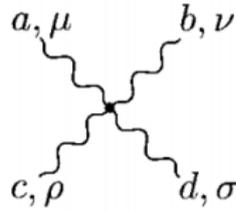
$$\doteq ig\gamma^\mu t^a \quad (\text{A.5})$$

Vértice de 3-bósons:



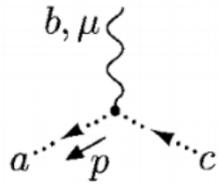
$$\doteq gf^{abc}[g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu] \quad (\text{A.6})$$

Vértice de 4-bósons:



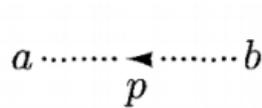
$$\doteq -ig^2[f^{abe}f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ace}f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ade}f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})] \quad (\text{A.7})$$

Vértice Fantasma:



$$\doteq -gf^{abc}p^\mu \quad (\text{A.8})$$

Propagador Fantasma:



$$\doteq \frac{i\delta^{ab}}{p^2 + i\epsilon} \quad (\text{A.9})$$

Relação entre as variáveis:

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c, \quad (\text{A.10})$$

onde f^{abc} são constantes de estrutura totalmente antisimétricas. A definição dos invariantes $C(r)$ e $C_2(r)$ de uma representação r é dada por:

$$\text{tr} [t^a t^b] = C(r)\delta^{ab}, \quad t^a t^a = C_2(r) \cdot \mathbf{1}. \quad (\text{A.11})$$

Algumas relações importantes, que podemos obter definições acima, são:

$$\begin{aligned} t^a t^b t^a &= [C_2(r) - \frac{1}{2}C_2(G)]t^b \\ f^{acd} f^{bcd} &= C_2(G)\delta^{ab} \\ f^{abc} t^b t^c &= \frac{i}{2}C_2(G)t^a \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Para grupos $SU(N)$ a representação é dada por N , e os invariantes podem ser obtidos por:

$$C(N) = \frac{1}{2}, \quad C_2(N) = \frac{N^2 - 1}{2N}, \quad C(G) = C_2(G) = N. \quad (\text{A.13})$$

Outra relação muito importante para obtenção dos fatores de cor é:

$$(t^a)_{ij}(t^b)_{kl} = \frac{1}{2} \left(\delta_{il}\delta_{kj} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{kl} \right). \quad (\text{A.14})$$

Apêndice B

Relações de Dispersão

As relações de dispersão são um método clássico de correlação entre as partes real e imaginária de uma função complexa. Seu emprego na física remonta ao trabalho de Kronig e Kramers sobre o espalhamento da luz por um meio dispersivo [59][60][61]. Na física moderna seu emprego recorrente tem sido na aplicação em física de partículas em altas energias, em conexão com partículas que interagem fortemente.

Funções complexas de variável real, como por exemplo amplitudes de espalhamento $F(\sqrt{s})$ e índices de refração $\eta(\omega)$, são comumente encontradas na análise de sistemas de interesse físico. Em muitos casos, informações sobre propriedades gerais do sistema, como analiticidade e unitariedade, podem ser obtidas se o argumento das funções é complexo; uma vez que dados experimentais são representados por argumentos reais, é importante verificarmos se, a partir de propriedades gerais do sistema, podemos deduzir relações que conectem quantidades com significado físico. Tal conexão pode ser implementada a partir de chamadas *Transformadas de Hilbert*.

Seja uma função $f(z)$ analítica no semiplano superior do plano complexo e sobre o eixo x ($\text{Im}z \geq 0$), tal que $|f(z)| \rightarrow 0$ quando $|z| \rightarrow \infty$. Com auxílio de um contorno apropriado, podemos calcular a expressão [62].

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - \alpha} dx = i\pi f(\alpha), \quad (\text{B.1})$$

onde α é um polo simples do integrando e P significa *valor principal de Cauchy*. Como $f(x)$ é uma função complexa de variável real, podemos escrever $f(x) \simeq \text{Re}\{f(x)\} + i\text{Im}\{f(x)\}$; igualando-se as partes real e imaginária de (B.1), teremos então

$$\text{Re}\{f(\alpha)\} = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}\{f(x)\}}{x - \alpha} dx, \quad (\text{B.2})$$

$$\text{Im}\{f(\alpha)\} = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}\{f(x)\}}{x - \alpha} dx. \quad (\text{B.3})$$

As relações de dispersão como *fórmulas de Plemelj* ou *transformadas de Hilbert*[63]. Devido ao fato de sistemas físicos exigirem o uso de transformadas

de Hilbert simétricas, os limites de integração $(-\infty, \infty)$ devem ser trocados pelos limites $(0, \infty)$. Isto pode ser feito por meio de relações de simetria.

Seja a transformada de Fourier de $f(z)$ dada por

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{izt} dt; \quad (\text{B.4})$$

se $F(t)$ é real, $f^*(z) = f(-z^*)$. Logo, no eixo real ($z \rightarrow x$) teremos $\text{Re}\{f(x)\} = \text{Re}\{f(-x)\}$ e $\text{Im}\{f(x)\} = -\text{Im}\{f(-x)\}$. Separando-se os extremos de integração das relações (B.2) e (B.3) entre $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$, com auxílio das relações de simetria podemos deduzir facilmente as relações de dispersão

$$\text{Re}\{f(\alpha)\} = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{x \text{Im}\{f(x)\}}{x^2 - \alpha^2} dx, \quad (\text{B.5})$$

$$\text{Im}\{f(\alpha)\} = -\frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{x \text{Re}\{f(x)\}}{x^2 - \alpha^2} dx. \quad (\text{B.6})$$

Em muitos casos a condição $|f(z)| \rightarrow 0$ para $|z| \rightarrow \infty$, adotada na obtenção das relações de dispersão, não é obedecida. Este é o caso, por exemplo, de uma função limitada, onde $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \text{constante}$. Podemos contornar esta dificuldade por meio de uma regra de subtração [62][63], de forma que tenhamos uma nova função que satisfaça a condição correta. Desta forma, aplicando uma subtração e identificando $\alpha = s$, $x = s'$, podemos reescrever as expressões (B.5) e (B.6) como

$$\text{Re}\{f(s)\} = \text{Re}\{f(0)\} + \frac{2s^2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\text{Im}\{f(s')\}}{s'^2(s'^2 - s^2)} ds', \quad (\text{B.7})$$

$$\text{Im}\{f(s)\} = \text{Im}\{f(0)\} - \frac{2s}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\text{Re}\{f(s')\}}{s'^2 - s^2} ds', \quad (\text{B.8})$$

denominadas *relações de dispersão com uma subtração*, onde $\text{Re}\{f(0)\}$ e $\text{Im}\{f(0)\}$ são as chamadas constantes de subtração.

B.1 Relações de Dispersão Derivativas

Embora o crescimento suave das seções de choque totais pp e $\bar{p}p$ permita a aplicação de relações de dispersão com uma subtração, o caráter não-local das relações integrais e o limitado número de funções que admitem integração analítica sugerem o uso de relações derivativas. Uma dedução detalhada de como obter relações de dispersão derivativas a partir das relações integrais, para um número arbitrário de subtrações, pode ser encontrada na referência [64]. Para ilustrar a técnica, fazemos uma breve descrição da dedução da relação de dispersão derivativa com uma subtração, onde mais detalhes podem ser encontrados nas referências [65][66].

A relação de dispersão integral para um amplitude de espalhamento par $f_+(s, t=0)$, onde no nosso caso $f_{pp} = f_+ + f_-$ e $f_{\bar{p}p} = f_+ - f_-$ é dada por

$$\text{Re}\{f_+\}(s) = \frac{2s^2}{\pi} I, \quad I = P \int_0^{\infty} \frac{\text{Im}\{f_+\}(s')}{s'(s'^2 - s^2)} ds', \quad (\text{B.9})$$

B.1 Relações de Dispersão Derivativas

onde desprezamos a constante de subtração e cuja única diferença em relação à expressão (B.7) está no limite inferior de P . Através das mudanças de variáveis $s' = e^{\xi'}$, $s = e^{\xi}$ e $h(\xi') = \text{Im}\{f_+(e^{\xi'})\}/e^{\xi'}$, a expressão (B.9) pode ser escrita na forma

$$\text{Re}\{f_+\}(e^{\xi}) = \frac{2e^{2\xi}}{\pi} P \int_{\ln s_0}^{\infty} d\xi' \frac{h(\xi')e^{\xi'}}{e^{2\xi'} - e^{2\xi}} = \frac{e^{2\xi}}{\pi} P \int_{\ln s_0}^{\infty} d\xi' \frac{h(\xi')}{\sinh(\xi' - \xi)}. \quad (\text{B.10})$$

No caso em que h é uma função analítica do seu argumento, podemos expandi-la na forma

$$h(\xi') = \sum_0^{\infty} \frac{d^m}{d\xi^m} h(\xi') \Big|_{\xi'=\xi} \frac{(\xi' - \xi)^n}{n!}. \quad (\text{B.11})$$

Neste caso, substituindo-se a expansão (B.11) em (B.10), no limite de altas energias ($s_0 \rightarrow 0$)

$$\text{Re}\{f_+\}(e^{\xi}) = \frac{e^{\xi}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(\xi)}{n!} P \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \frac{(\xi' - \xi)^n}{\sinh(\xi' - \xi)}. \quad (\text{B.12})$$

Defidindo-se $y = \xi' - \xi$, a integral acima pode ser escrita na forma

$$\text{Re}\{f_+\}(e^{\xi}) = e^{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(\xi)}{n!} I_n, \quad \text{onde } I_n = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{y^n}{\sinh y}. \quad (\text{B.13})$$

Para n par, $I_n = 0$; para n ímpar, consideramos a integral

$$Z(a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d \frac{e^{ay}}{\sinh y} = \tan \left(\frac{a\pi}{2} \right), \quad (\text{B.14})$$

de tal forma que

$$I_n = \frac{d^n}{da^n} Z(a) \Big|_{a=0} = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{ay} y^n}{\sinh y} \Big|_{a=0}. \quad (\text{B.15})$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Re}f_+(e^{\xi}) &= e^{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{da^n} \tan \left(\frac{a\pi}{2} \right) \Big|_{a=0} \frac{d^n}{d\xi^n} h(\xi') \Big|_{\xi'=\xi} \\ &= e^{\xi} \tan \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d\xi} \right] h(\xi) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

e, portanto,

$$\frac{\text{Re}\{f_+\}(s)}{s} = \tan \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{\ln s} \right] \frac{\text{Im}\{f_+\}(s)}{s}, \quad (\text{B.17})$$

onde o operador tangente engloba a expansão em série. De forma análoga, é possível verificar que

$$\frac{\text{Re}\{f_-\}(s)}{s} = -\cot \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{\ln s} \right] \frac{\text{Im}\{f_-\}(s)}{s}. \quad (\text{B.18})$$

Considerando-se a amplitude par como dominante em altas energias, de forma que possamos usar a normalização $f_+(s)/s \equiv F(s)$ temos finalmente

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{F(s)\}(s) &= \tan \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{\ln s} \right] \operatorname{Im}\{F(s)\}(s) \\ &= \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{\ln s} + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{\ln s} \right)^3 + \frac{2}{5} \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{\ln s} \right)^5 + \dots \right] \operatorname{Im}\{F(s)\}. \end{aligned} \tag{B.19}$$

Apêndice C

A função $W(b, \mu)$

A função de densidade de sobreposição no parâmetro de impacto b adotada no nosso modelo $W(b, \mu)$, é relacionada à transformada de Hankel (transformada de Fourier bidimensional) $A(b, \mu)$ do fator de forma $G(k_{\perp}^2)$, dada por

$$A(b, \mu) = \int_0^{\infty} k_{\perp} dk_{\perp} J_0(k_{\perp} b) [G(k_{\perp}^2)]^2, \quad (\text{C.1})$$

onde $G(k_{\perp}^2)$ é um fator de forma do tipo dipolo, dado pela expressão:

$$G_{dip}(k_{\perp}^2) = \left(\frac{\mu^2}{k_{\perp}^2 + \mu^2} \right)^2. \quad (\text{C.2})$$

A partir da notação $\langle \langle \dots \rangle \rangle \equiv \int_0^{\infty} k_{\perp} dk_{\perp} J_0(k_{\perp} b) (\dots)$, temos:

$$\begin{aligned} A(b, \mu) &= \left\langle \left\langle \left(\frac{\mu^2}{k_{\perp}^2 + \mu^2} \right)^4 \right\rangle \right\rangle \\ &= \mu^8 \left\langle \left\langle \left(\frac{1}{k_{\perp}^2 + \mu^2} \right)^2 \left(\frac{1}{k_{\perp}^2 + \mu^2} \right)^2 \right\rangle \right\rangle \\ &= \frac{\mu^6}{4} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\langle \left\langle \left(\frac{1}{k_{\perp}^2 + \mu^2} \right) \right\rangle \right\rangle - \left\langle \left\langle \left(\frac{1}{k_{\perp}^2 + \mu^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \left(\frac{1}{k_{\perp}^2 + \mu^2} \right) \right\rangle \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Como:

$$\left\langle \left\langle \frac{1}{k_{\perp}^2 + \mu^2} \right\rangle \right\rangle = K_0(\mu b), \quad (\text{C.4})$$

a transformada de Hankel do primeiro termo da direita da expressão (C.3) pode ser calculada da forma [67]

$$\begin{aligned} \left\langle \left\langle \left(\frac{1}{k_{\perp}^2 + \mu^2} \right)^2 \right\rangle \right\rangle &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\langle \left\langle \frac{1}{k_{\perp}^2 + \mu^2} \right\rangle \right\rangle \\ &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} K_0(\mu b) \\ &= \frac{b}{2\mu} K_1(\mu b), \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

onde K_0 e K_1 são funções modificadas de Bessel de ordem 0 e 1, respectivamente. No cálculo acima utilizamos a fórmula de recorrência [67]

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}K_n(x)] = -x^{-n}K_{n+1}(x). \quad (C.6)$$

Desta forma, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\langle \left(\frac{1}{k_{\perp}^2 + \mu^2} \right)^2 \right\rangle &= \frac{b^2}{4} \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{b}{2\mu} K_1(\mu b) \right) \\ &= \frac{b^4}{4} \left[\frac{K_3(\mu b)}{\mu b} - \frac{K_2(\mu b)}{(\mu b)^2} \right]. \end{aligned} \quad (C.7)$$

A transformada de Hankel do do segundo termo da direita da expressão (C.3) pode ser calculada utilizando-se as mesmas técnicas. Neste caso:

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{1}{k_{\perp}^2 + \mu^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \left(\frac{1}{k_{\perp}^2 + \mu^2} \right) \right\rangle &= \left\langle \frac{8\mu^2}{(k_{\perp}^2 + \mu^2)^4} \right\rangle - \left\langle \frac{2}{(k_{\perp}^2 + \mu^2)^3} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{8\mu^2}{(k_{\perp}^2 + \mu^2)^4} \right\rangle - \frac{b^2}{4\mu^2} K_2(\mu b). \end{aligned} \quad (C.8)$$

Das expressões (C.3), (C.7) e (C.8) temos:

$$\mu^8 \left\langle \left(\frac{1}{k_{\perp}^2 + \mu^2} \right)^4 \right\rangle = \frac{\mu^5 b^3}{16} K_3(\mu b) - 2\mu^8 \left\langle \left(\frac{1}{k_{\perp}^2 + \mu^2} \right)^4 \right\rangle, \quad (C.9)$$

de forma que, finalmente,

$$A(b, \mu) = \left\langle \left(\frac{\mu^2}{k_{\perp}^2 + \mu^2} \right)^4 \right\rangle = \frac{\mu^2}{48} (\mu b)^3 K_3(\mu b). \quad (C.10)$$

No modelo discutido nesta dissertação a função $W(b, \mu)$ é normalizada na forma $\int d^2b W(b, \mu) = 1$. Neste caso, a expressão de $W(b, \mu)$ é finalmente dada por

$$W(b, \mu) = \frac{A(b, \mu)}{2} = \frac{\mu^2}{96\pi} (\mu b)^3 K_3(\mu b), \quad (C.11)$$

desde que a introdução do fator $1/2$ e em $A(b, \mu)$ é suficiente para normalizar a função da forma indicada. De fato:

$$\begin{aligned} \int d^2b W(b, \mu) &= \int_0^{\infty} b db \int_0^{2\pi} d\phi W(b, \mu) \\ &= \frac{\mu^5}{48} \int_0^{\infty} db b^4 K_3(\mu b) \\ &= \frac{1}{6} \Gamma(4) \Gamma(1) \\ &= 1. \end{aligned} \quad (C.12)$$

No cálculo acima usamos a relação:

$$\int_0^{\infty} dx x^{\mu} K_{\nu}(ax) = 2^{\mu-1} a^{-\mu-1} \Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right), \quad (C.13)$$

válida para $\text{Re}\{\mu + 1 \pm \nu\} > 0$ e $\text{Re}\{a\} > 0$.

Referências

- [1] Michael E. Peskin e Daniel V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*, Reading, USA: Addison-Wesley, 1995.
- [2] F. Halzen e Martin e Alan D., *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, 1984.
- [3] Taizo Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics: An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories, (3rd ed.)* 3rd, vol. 78, World scientific Lecture Notes in Physics, Hackensack, N.J.: World Scientific, 2010.
- [4] T. K. Gaisser, F. Halzen e E. A. Paschos, “Hadronic production of narrow vector mesons”, *Phys. Rev. D* 15 (1977), 2572.
- [5] Francis Halzen e Satoshi Matsuda, “Hadroproduction of quark flavors”, *Phys. Rev. D* 17 (1978), 1344.
- [6] C. Albajar et al., “Production of low transverse energy clusters in pp collisions at $\sqrt{s}=0.2-0.9$ TeV and their interpretation in terms of QCD jets”, *Nucl. Phys. B* 309 (1988), 405.
- [7] G. Pancheri e Y. N. Srivastava, “Low p_T Jets and the Rise With Energy of the Inelastic Cross-section”, *Phys. Lett. B* 182 (1986), 199.
- [8] L.V. Gribov, E.M. Levin e M.G. Ryskin, “Semihard processes in QCD”, *Phys. Rep.* 100 (1983), 1.
- [9] CERN website, *CERN - European Organization for Nuclear Research. The LHC experiments*. <http://lhc-machine-outreach.web.cern.ch/lhc-machine-outreach/>.
- [10] M. Broilo, D. A. Fagundes, E. G. S. Luna e M. Peláez, “Soft Pomeron in light of the LHC correlated data”, *Phys. Rev. D* 103 (2021), 014019.
- [11] Sayipjamal Dulat et al., “New parton distribution functions from a global analysis of quantum chromodynamics”, *Phys. Rev. D* 93 (2016), 033006.
- [12] S. Bailey, T. Cridge, L. A. Harland-Lang, A. D. Martin e R. S. Thorne, “Parton distributions from LHC, HERA, Tevatron and fixed target data: MSHT20 PDFs”, *The Eur. Phys. J. C* 81 (2021), 341.
- [13] Particle Data Group et al., “Review of Particle Physics”, *Prog. of Theor. and Exp. Phys.* 2020 (2020), 1.
- [14] G. et al. Antchev, “Elastic differential cross-section measurement at $\sqrt{s} = 13$ TeV by TOTEM”, *Eur. Phys. J. C* 79 (2019), 861.

-
- [15] Frigyes Janos Nemes, “*Elastic and Total Cross-section Measurements by Totem*”, *PoS DIS2019* (2019), 065.
- [16] Agnes Grau, Simone Pacetti, Giulia Pancheri e Yogendra Srivastava, “The elastic differential pp cross-section at 13 TeV: an empirical model analysis”, *EPJ Web of Conferences* 206 (2019), 06003.
- [17] V. V. Ezhela e N. P. Petrov V. A. e Tkachenko, *On the ρ and σ_{tot} measurement by the TOTEM Collaboration: in the wake of recent discoveries*, ArXiv:2003.03817.
- [18] A. K. Kohara, E. Ferreira, T. Kodama e M. Rangel, “*pp forward elastic scattering amplitudes at 7 and 8 TeV*”, *14th International Workshop on Hadron Physics*, 2018.
- [19] G. Antchev et al., “*Evidence for non-exponential elastic proton-proton differential cross-section at low $|t|$ and $\sqrt{s} = 8$ TeV by TOTEM*”, *Nucl. Phys. B* 899 (2015), 527.
- [20] G. Antchev et al., “*Luminosity-Independent Measurement of the Proton-Proton Total Cross Section at $\sqrt{s} = 8$ TeV*”, *Phys. Rev. Lett.* 111 (2013), 012001.
- [21] G. Antchev et al., “*Luminosity-independent measurements of total, elastic and inelastic cross-sections at $\sqrt{s} = 7$ TeV*”, *EPL (Europhys. Lett.)* 101 (2013), 21004.
- [22] G. Antchev et al., “*Measurement of proton-proton elastic scattering and total cross-section at $\sqrt{s} = 7$ TeV*”, *EPL (Europhys. Lett.)* 101 (2013), 21002.
- [23] G. Antchev et al., “*First measurement of the total proton-proton cross-section at the LHC energy of $\sqrt{s} = 7$ TeV*”, *EPL (Europhys. Lett.)* 96 (2011), 21002.
- [24] S. Mandelstam, “*Determination of the Pion-Nucleon Scattering Amplitude from Dispersion Relations and Unitarity. General Theory*”, *Phys. Rev.* 112 (1958), 1344.
- [25] Vincenzo Barone e Enrico Predazzi, *High-Energy Particle Diffraction*, vol. 565, Texts and Monographs in Physics, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.
- [26] M. M. Block e R. N. Cahn, “*High-energy $p\bar{p}$ and pp forward elastic scattering and total cross sections*”, *Rev. Mod. Phys.* 57 (1985), 563.
- [27] Cohen-Tannoudji, Claude, Diu, Bernard e Franck Laloë, *Quantum mechanics; 1st ed.* New York, NY: Wiley, 1977.
- [28] E. Predazzi, *Diffraction : past, present and future*, ArXiv:hep-ph/9809454.
- [29] Martin L. Perl, *High energy hadron physics; 1st ed.* New York, NY: Wiley, 1974.
- [30] Richard P. Feynman, “*Very High-Energy Collisions of Hadrons*”, *Phys. Rev. Lett.* 23 (1969), 1415.

REFERÊNCIAS

- [31] José María Filardo Bassalo e Mauro Sérgio Dorsa Cattani, *Teoria de Grupos*, Editora Livraria da Física, 2008.
- [32] H. David Politzer, “*Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?*”, *Phys. Rev. Lett.* 30 (1973), 1346.
- [33] David J. Gross e Frank Wilczek, “*Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories*”, *Phys. Rev. Lett.* 30 (1973), 1343.
- [34] William E. Caswell, “*Asymptotic Behavior of Non-Abelian Gauge Theories to Two-Loop Order*”, *Phys. Rev. Lett.* 33 (1974), 244.
- [35] Henry W. Kendall, “*Deep inelastic scattering: Experiments on the proton and the observation of scaling*”, *Rev. Mod. Phys.* 63 (1991), 597.
- [36] Richard E. Taylor, “*Deep inelastic scattering: The Early years*”, *Rev. Mod. Phys.* 63 (1991), 573.
- [37] Jerome I. Friedman, “*Deep inelastic scattering: Comparisons with the quark model*”, *Rev. Mod. Phys.* 63 (1991), 615.
- [38] R. K. Ellis, W. J. Stirling e B. R. Webber, *QCD and Collider Physics*, Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology, Cambridge University Press, 1996.
- [39] V.D. Barger e R.J.N. Phillips, *Collider Physics*, 1991.
- [40] Guido Altarelli, “*A QCD primer*”, *AIP Conf. Proc.* 631 (2002), 70.
- [41] V. N. Gribov e L. N. Lipatov, “*Deep inelastic e p scattering in perturbation theory*”, *Sov. J. Nucl. Phys.* (1972), 438.
- [42] L. N. Lipatov, “*The parton model and perturbation theory*”, *Yad. Fiz.* 20 (1974), 181.
- [43] G. Altarelli e G. Parisi, “*Asymptotic freedom in parton language*”, *Nucl. Phys. B* 126 (1977), 298.
- [44] Yuri L. Dokshitzer, “*Calculation of the Structure Functions for Deep Inelastic Scattering and e+ e- Annihilation by Perturbation Theory in Quantum Chromodynamics.*”, *Sov. Phys. JETP* 46 (1977), 641.
- [45] *Summary Talk - Proc. 5th Blois Workshop on Elastic and Diffractive Scattering*, World Scientific, Singapore: World Scientific, 1994.
- [46] G. Matthiae, “*Proton and antiproton cross sections at high energies*”, *Reports on Progress in Physics* 57 (1994), 743.
- [47] U. Amaldi e K.R. Schubert, “*Impact parameter interpretation of proton-proton scattering from a critical review of all ISR data*”, *Nucl. Phys. B* 166 (1980), 301.
- [48] A.J. Buras e J. Dias de Deus, “*Scaling law for the elastic differential cross section in pp scattering from geometric scaling*”, *Nucl. Phys. B* 71 (1974), 481.
- [49] J Dias De Deus, “*Geometric scaling, multiplicity distributions and cross sections*”, *Nucl. Phys. B* 59 (1973), 231.

- [50] Loyal Durand e Pi Hong, “*QCD and rising cross sections*”, *Phys. Rev. Lett.* 58 (1987), 303.
- [51] Loyal Durand e Hong Pi, “*High-energy nucleon-nucleus scattering and cosmic-ray cross sections*”, *Phys. Rev. D* 38 (1988), 78.
- [52] Loyal Durand e Hong Pi, “*Semihard QCD and high-energy pp and $\bar{p}p$ scattering*”, *Phys. Rev. D* 40 (1989), 1436.
- [53] J. R. Forshaw e J. K. Storrow, “*Photon-induced minijets*”, *Phys. Rev. D* 46 (1992), 4955.
- [54] J. F. Owens, “*Large-momentum-transfer production of direct photons, jets, and particles*”, *Rev. Mod. Phys.* 59 (1987), 465.
- [55] Stephen Ellis Ina Sarcevic e Peter Carruthers, “*QCD minijet cross sections*”, *Phys. Rev. D* 40 (1989), 1446.
- [56] Victor S. Fadin, EA Kuraev e LN Lipatov, “*On the Pomernanchuk singularity in asymptotically free theories*”, *Phys. Lett. B* 60 (1975), 50.
- [57] D. Bourilkov, R. C. Group e M. R. Whalley, *LHAPDF: PDF Use from the Tevatron to the LHC*, 2006.
- [58] M. Broilo, D.A. Fagundes, E.G.S. Luna e M.J. Menon, “*Proton-proton forward scattering at the LHC*”, *Phys. Lett. B* 799 (2019), 135047.
- [59] R. de L. Kronig, “*On the Theory of Dispersion of X-Rays*”, *J. Opt. Soc. Am.* 12 (1926), 547.
- [60] Kramers H. A., “*La diffusion de la lumiere par les atomes*”, *Atti Cong. Intern. Fisica (Transactions of Volta Centenary Congress)* 2 (1927), 545.
- [61] R. Kronig, “*A supplementary condition in Heisenberg’s theory of elementary particles*”, *Physica* 12 (1946), 543.
- [62] Frederick W. Byron e Robert W. Fuller, *Mathematics of classical and quantum physics*, 1992.
- [63] H. M. Nussenzveig, *Causality and dispersion relations*, vol. 95, New York, London: Academic Press, 1972.
- [64] M.J. Menon, A.E. Motter e B.M. Pimentel, “*Differential dispersion relations with an arbitrary number of subtractions: a recursive approach*”, *Phys. Lett. B* 451 (1999), 207.
- [65] R. F. Avila, E. G. S. Luna e M. J. Menon, “*High-energy proton-proton forward scattering and derivative analyticity relations*”, *Brazilian Journal of Physics* 31 (2001), 567.
- [66] R.F. Ávila e M.J. Menon, “*Critical analysis of derivative dispersion relations at high energies*”, *Nucl. Phys. A* 744 (2004), 249.
- [67] Abramowitz, Milton e Irene A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, ninth Dover printing, tenth GPO printing, New York: Dover, 1964.