Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Estruturas Algébricas Parciais sobre uma Álgebra de Hopf de Multiplicadores

Tese de Doutorado

Eneilson Campos Fontes

Porto Alegre, 16 de novembro de 2017.

Tese submetida por Eneilson Campos Fontes como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Antonio Paques

Banca examinadora:
Prof. Dr. Antonio Paques (UFRGS - Orientador)
Prof. Dr. Eliezer Batista (UFSC)
Prof. Dr. Marcelo Muniz S. Alves (UFPR)
Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana (UFRGS)

CIP - Catalogação na Publicação

Fontes, Eneilson Campos
Estruturas Algébricas Parciais sobre uma Álgebra de Hopf de Multiplicadores / Eneilson Campos Fontes. -- 2017.
167 f.
Orientador: Antonio Paques.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2017.

1. Álgebras de Hopf de multiplicadores. 2. Globalização. 3. Comódulo coálgebra parcial. 4. Coproduto smash parcial. 5. Módulo coálgebra parcial. I. Paques, Antonio, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Aos meus pais

Agradecimentos

A Deus, por ter me dado força e toda a luz que vem guiando esta caminhada.

Aos meus pais Mario e Iara, meus irmãos Alisson e Anelize, pelo incentivo, compreensão, suporte emocional, carinho e por terem estado ao meu lado em todos os momentos.

Ao meu orientador Antonio Paques, por ter compartilhado o seu rico conhecimento e pelas lições profissionais e de vida ensinadas.

Às minhas colegas Grasiela, Graziela e Danielle, pela paciência, pelos ensinamentos e por toda a contribuição ao desenvolvimento deste trabalho.

Aos membros da banca, por todas as sugestões, críticas e comentários. Em especial, ao Professor Eliezer que me acompanha desde o mestrado e além do incentivo, também contribuiu ao longo do processo de pesquisa no doutorado.

Aos meus colegas do Instituto de Matemática, Estatística e Física (IMEF) da Furg, pelo apoio. Em especial à Professora Daiane Silva de Freitas, com quem apendi as noções básicas de álgebras de Hopf.

Ao Professor A. Van Daele, por ter atenciosamente esclarecido minhas dúvidas em relação a teoria de álgebras de Hopf de multiplicadores.

“Take the first step in faith.

You don’t have to see the whole staircase,

just take the first step.”

(Martin Luther King Jr)

Resumo

Neste trabalho apresentamos os teoremas de globalização para (co)ações parciais de álgebras de Hopf de multiplicadores sobre álgebras não necessariamente unitárias. Além disso, definimos (co)ações parciais sobre álgebras de Hopf de multiplicadores, apresentamos exemplos e propriedades. Para um comódulo coálgebra parcial, construímos um coproduto smash parcial generalizando as construções de L. Delvaux em [8] e E. Batista e J. Vercruysse em [4].

Palavras-chave: Álgebras de Hopf de multiplicadores, globalização, comódulo coálgebra parcial, coproduto smash parcial, módulo coálgebra global, módulo coálgebra parcial.

Abstract

In this work we present the globalization theorems for partial (co)actions of multiplier Hopf algebras on not necessarily unital algebras. In addition, we define partial (co)actions on multiplier Hopf algebras, present examples and properties. For a partial comodule coalgebra, we construct a partial smash coproduct generalizing the L. Delvaux in [8] and E. Batista and J. Vercruysse in [4] constructions.

Keywords: Multiplier Hopf algebras, globalization, partial comodule coalgebra, partial smash coproduct, global module coalgebra, partial module coalgebra.

índice

Introdução

A noção de ação parcial de grupos sobre álgebras em um contexto algébrico foi introduzida na literatura por R. Exel e M. Dockuchaev em [10]. Neste mesmo artigo, os autores apresentam um teorema de existência de ações envolventes para tais ações parciais. Alguns anos mais tarde, em [5], S. Caenepeel e K. Janssen estenderam a teoria de ações parciais a (co)ações parciais de álgebras de Hopf em álgebras. Posteriormente, ações envolventes também foram estendidas ao contexto de ações parciais de álgebras de Hopf por E. Batista e M. Muniz em [2].

Muitos resultados importantes envolvendo (co)ações parciais de álgebras de Hopf sobre álgebras, foram obtidos no caso em que as álgebras são unitárias e a álgebra de Hopf é de dimensão finita. Neste sentido, investigar a existência de alguma estrutura não necessariamente unitária, que estenda o conceito clássico de álgebra de Hopf e que possa (co)agir sobre álgebras sem unidade, se torna um problema extremamente relevante.

Sabemos que para um grupo qualquer G, a álgebra de grupo correspondente é uma álgebra de Hopf. Além disso, somente no caso em que o grupo é finito, o dual de tal álgebra de Hopf também é uma álgebra de Hopf. No entanto, considerando-se o conjunto das funções com suporte finito sobre G (qualquer), obtemos uma álgebra não necessariamente unitária com um coproduto, counidade e antípoda generalizados e, tal que sob certas condições, é possível construir uma álgebra dual, independente da dimensão. De fato, este é o exemplo motivador para a teoria de álgebras de Hopf de multiplicadores, introduzida por A. Van Daele em [19] no ano de 1994. Desde então, esta teoria vem sendo desenvolvida em moldes similares aos da teoria clássica de álgebras de Hopf. Em particular, ações e coações globais de álgebras de Hopf de multiplicadores sobre álgebras não necessariamente unitárias foram introduzidas por A. Van Daele em [11] e [29], respectivamente.

A teoria de ações e coações parciais de álgebras de Hopf de multiplicadores em álgebras foi desenvolvida por G. Martini em [15], generalizando a teoria construída por S. Caenepeel e K. Jassen, em [5], e também a teoria desenvolvida por A. Van Daele em [11] e em [29]. Assim, definidas as estruturas parciais, a pergunta natural que surge é sobre a existência de (co)ações envolventes para tais objetos.

Outra questão natural a ser investigada é sobre as (co)ações de álgebras de Hopf de multiplicadores em coálgebras ou em estruturas que as generalizam. No contexto de álgebras de Hopf, (co)módulos coálgebra parciais foram introduzidos em [4].

A noção de comódulo coálgebra no contexto de álgebras de Hopf de multiplicadores foi inicialmente investigado por L. Delvaux em [8]. Para isso, são consideradas duas álgebras de Hopf de multiplicadores e isto é necessário pois supor apenas "coálgebra"não é suficiente, tendo em vista que o coproduto fica bem definido para álgebras com produto não degenerado e, o uso da notação de Sweedler só é possível se exigirmos mais propriedades sobre a álgebra, como veremos em 1.1.4.

Este trabalho está organizado como segue. No capítulo 1 apresentamos as noções preliminares da teoria de álgebras de Hopf de multiplicadores, (co)ações globais destas álgebras e os resultados pertinentes necessários a compreensão dos demais capítulos. Também recordamos as definições de (co)ações envolventes no caso Hopf usando como referência [1] e [3].

O capítulo 2 está dividido em duas partes, na primeira seção temos por objetivo apresentar o teorema de globalização para módulos álgebras parciais e na segunda seção, o teorema de globalização para comódulos álgebras parciais, em ambos casos sob condições especiais. Para isso, em cada seção, relembramos de acordo com [15] algumas definições, exemplos e resultados que serão indispensáveis às construções.

O capítulo 3 está dividido em três seções. Na primeira seção, para duas álgebras de Hopf de multiplicadores Y e A, definimos comódulo coálgebra parcial, apresentamos exemplos e alguns resultados tais como condições necessárias e suficientes para que um comódulo coálgebra parcial seja global. Mostramos que temos uma generalização do caso Hopf e que a definição global implica em parcial. Na segunda seção, construímos o coproduto smash parcial associado a um comódulo coálgebra parcial, generalizando a construção global apresentada por L. Delvaux em [8] e também o caso Hopf de E. Batista e J. Vercruysse construído em [4]. E, na última seção, induzimos via projeção uma estrutura de comódulo coálgebra parcial a partir de um comódulo coálgebra global.

O último capítulo está dividido em quatro seções. Na primeira seção, apresentamos uma definição de módulo coálgebra global a qual é dual ao comódulo coálgebra global definido por L. Delvaux em [8], além de exemplos e alguns resultados. Na seção 2, definimos módulo coálgebra parcial, apresentamos alguns exemplos e resultados. Na terceira seção induzimos um módulo coálgebra parcial a partir de um global. E finalmente, demonstramos um teorema de dualidade entre comódulos coálgebra parciais e módulos coálgebra parciais.

Convenções

Produtos tensoriais e espaços vetoriais sem identificação serão considerados sobre um corpo fixo $\Bbbk$ algebricamente fechado. Para não sobrecarregar a escrita, denotamos por 1 a unidade da álgebra de multiplicadores de A e a unidade da álgebra de multiplicadores de Y, ficando claro ao longo do texto a qual álgebra estamos nos referindo. Demais notações, serão fixadas ao longo do trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo abordamos alguns conceitos básicos que serão utilizados ao longo deste trabalho. Para facilitar a leitura, não vamos apresentar as demonstrações dos resultados enunciados, mas em cada seção indicamos as referência a serem consultadas caso o leitor julgue necessário.

1.1 Álgebra de Hopf de Multiplicadores

Iniciamos esta seção com a definição de álgebra dos multiplicadores e na sequência, introduzimos a noção e propriedades de uma álgebra de Hopf de multiplicadores. Apresentamos também alguns exemplos. No que segue, A será uma álgebra não necessariamente unitária. Para mais detalhes, indicamos [19], [21], [11] e [23].

Definição 1.1.1. ([19]) A álgebra dos *multiplicadores* de A é o espaço vetorial dos pares ordenados

$$M(A) = \{(\lambda, \rho) \ ; \ \lambda, \rho : A \to A \ \Bbbk\text{-lineares}\},$$

tais que $\lambda(ab) = \lambda(a)b$, $\rho(ab) = a\rho(b)$ e $a\lambda(b) = \rho(a)b$, para todo $a, b \in A$, munido de uma multiplicação definida por

$$(\lambda, \rho) \cdot (\lambda', \rho') = (\lambda \circ \lambda', \rho' \circ \rho).$$

$M(A)$ é álgebra com unidade, denotamos $1_{M(A)} = (\imath_A, \imath_A)$ por 1, onde $\imath_A$ é a aplicação identidade de A.

A aplicação λ é chamada um *multiplicador à esquerda* e ρ um *multiplicador à direita*. Nessas condições, as composições acima, também definem a álgebra de multiplicadores à esquerda de A $(L(A))$ e a álgebra de multiplicadores à direita de A $(R(A))$.

A partir de agora, assumimos o produto em A *não degenerado* no seguinte sentido, se para todo $b \in A$, $ab = 0$, então $a = 0$ e similarmente se, para todo $a \in A$, $ab = 0$, então $b = 0$. Essa propriedade é automática para álgebras com unidade. Da mesma forma, podemos pensar no produto não degenerado unilateralmente.

Obtemos uma imersão natural, ou seja, um homomorfismo de álgebras injetor, de A em $L(A)$, $R(A)$ e $M(A)$, da seguinte forma:

$$\begin{array}{lll} A \longrightarrow L(A) \qquad\qquad & A \longrightarrow R(A) \qquad\qquad & A \longrightarrow M(A) \\ a \longmapsto L_a & a \longmapsto R_a & a \longmapsto (L_a, R_a) \end{array}$$

onde $L_a(b) = ab$, $R_a(b) = ba$, para todo $b \in A$. Se A tem unidade, então $A = L(A) = R(A) = M(A)$.

Dessa forma, $a \in A$ pode ser considerado como um elemento $(L_a, R_a) \in M(A)$ e, portanto, para $x = (\overline{x}, \overline{\overline{x}}) \in M(A)$, ax e xa podem ser interpretados como elementos em $M(A)$. Logo, pela definição do produto em $M(A)$, é natural escrevermos $\overline{x}(a) = xa$ e $\overline{\overline{x}}(a) = ax$, e assim, temos a seguinte relação: $a(xb) = (ax)b$, para todo $a, b \in A$.

A não degenerescência de A também implica que uma álgebra de multiplicadores pode ser definida apenas usando a relação

$$a\lambda(b) = \rho(a)b, \tag{1.1}$$

para todo $a, b \in A$. De fato,

$$a\lambda(bc) = \rho(a)bc = a\lambda(b)c,$$

para qualquer $a \in A$, assim $\lambda(bc) = \lambda(b)c$, para todo $b, c \in A$. Similarmente, $\rho(ab)c = ab\lambda(c) = a\rho(b)c$, para todo $c \in A$, ou seja, $\rho(ab) = a\rho(b)$, para qualquer $a, b \in A$ e dessa forma, λ e ρ são unicamente determinados.

Nesse contexto, apresentamos a seguinte definição.

Definição 1.1.2. ([19]) Sejam A e B duas álgebras com produto não degenerado e $\varphi : A \longrightarrow M(B)$ um homomorfismo de álgebras. A aplicação φ é dita *não degenerada* se, $B = \varphi(A)B$ e $B = B\varphi(A)$.

Tal homomorfismo tem uma única extensão.

Proposição 1.1.3. ([19]) *Se φ é um homomorfismo não degenerado de A para $M(B)$, então existe um único homomorfismo de $M(A)$ para $M(B)$ que estende φ.*

Demonstração. Definimos $\varphi(x) = (\overline{\varphi(x)}, \overline{\overline{\varphi(x)}}) \in M(B)$, para $x \in M(A)$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\overline{\varphi(x)}(\varphi(a)b) &= \varphi(xa)b,\\ \overline{\overline{\varphi(x)}}(b\varphi(a)) &= b\varphi(ax),\end{aligned}$$

para qualquer $b \in B$ e $a \in A$. $\square$

No que segue, consideramos o espaço vetorial $A \otimes A$, o qual é uma álgebra de maneira natural com produto não degenerado. Assim, temos as seguintes inclusões naturais de álgebras:

$$A \otimes A \hookrightarrow M(A) \otimes M(A) \hookrightarrow M(A \otimes A). \tag{1.2}$$

Nessas hipóteses, podemos introduzir a noção de uma comultiplicação em A.

Definição 1.1.4. ([19]) Uma *comultiplicação (ou coproduto)* em A é um homomorfismo $\Delta : A \longrightarrow M(A \otimes A)$ tal que

(i) $\Delta(a)(1 \otimes b) \in A \otimes A$ e $(a \otimes 1)\Delta(b) \in A \otimes A$;

(ii) $(a \otimes 1 \otimes 1)((\Delta \otimes \imath)(\Delta(b)(1 \otimes c))) = ((\imath \otimes \Delta)((a \otimes 1)\Delta(b)))(1 \otimes 1 \otimes c)$,

para todo a, b e $c \in A$, sendo $\imath$ a aplicação identidade de A.

Se A tem unidade, podemos tomar $a = c = 1_A$ e com isso, obtemos a noção usual de coassociatividade.

Observação 1.1.5. Usando as imersões em 1.2, temos:

(i) $(1 \otimes a)$ e $(a \otimes 1) \in M(A \otimes A)$;

(ii) $(a \otimes y)(x \otimes b) = (ax \otimes yb) \in A \otimes A$;

(iii) $(a \otimes 1)(1 \otimes b) = (a \otimes b) = (1 \otimes b)(a \otimes 1)$,

para todo $a, b \in A$ e $x, y \in M(A)$.

Definição 1.1.6. ([19]) Um par (A, Δ), onde A é uma álgebra e Δ é uma comultiplicação é dito uma *álgebra de Hopf de multiplicadores* se as aplicações lineares

$$\begin{array}{rcl} T_1 : A \otimes A & \longrightarrow & A \otimes A \\ a \otimes b & \longmapsto & \Delta(a)(1 \otimes b) \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} T_2 : A \otimes A & \longrightarrow & A \otimes A \\ a \otimes b & \longmapsto & (a \otimes 1)\Delta(b) \end{array}$$

são bijetivas.

Semelhante a teoria de álgebras de Hopf, a definição acima implica o seguinte resultado:

Proposição 1.1.7. ([19]) *Seja* (A, Δ) *uma álgebra de Hopf de multiplicadores. Então, existe um único homomorfismo* $\varepsilon : A \longrightarrow \Bbbk$ *tal que*

$$\begin{aligned}(\varepsilon \otimes \imath)(\Delta(a)(1 \otimes b)) &= ab \\ (\imath \otimes \varepsilon)((a \otimes 1)\Delta(b)) &= ab,\end{aligned}$$

para todo $a, b \in A$. *Temos também a existência de um único anti-homomorfismo* $S : A \longrightarrow M(A)$ *tal que*

$$\begin{aligned}m(S \otimes \imath)(\Delta(a)(1 \otimes b)) &= \varepsilon(a)b \\ m(\imath \otimes S)((a \otimes 1)\Delta(b)) &= \varepsilon(b)a,\end{aligned}$$

para todo $a, b \in A$, *onde* m *denota a multiplicação em* A *e* $\imath$ *a aplicação identidade de* A. *As aplicações* ε *e* S *são chamadas de counidade e antípoda de* A, *respectivamente.*

Observação 1.1.8. O homomorfismo ε é não nulo, logo existe pelo menos um elemento $b \in A$ tal que $\varepsilon(b) = 1_{\Bbbk}$, ou seja, ε é um homomorfismo não degenerado, pois $\Bbbk = \varepsilon(A)\Bbbk$. Portanto, aplicando a Proposição 1.1.3, existe uma única extensão $\varepsilon : M(A) \longrightarrow \Bbbk$.

Nessas condições, se A tem unidade, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.1.9. ([21]) (A, Δ) *é uma álgebra de Hopf de multiplicadores com unidade se e somente se* A *é uma álgebra de Hopf.*

O exemplo motivador dessa álgebra de Hopf generalizada surgiu considerando o espaço das funções com suporte finito de um grupo G em $\Bbbk$, como segue abaixo.

Exemplo 1.1.10. ([21])Seja G um grupo qualquer e consideramos A_G o espaço das funções com suporte finito de G em $\Bbbk$. Esse espaço vetorial é uma álgebra com produto pontual e possui produto não degenerado. Uma base para tal álgebra é o conjunto $\{\delta_p\ ;\ p \in G\}$, onde $\delta_p : G \longrightarrow \Bbbk$ tal que $\delta_p(p) = 1_{\Bbbk}$ e $\delta_p(q) = 0$, se $q \neq p$. A álgebra de multiplicadores de A_G é o espaço de todas as funções de G em $\Bbbk$ e será denotado por B_G.

É possível identificar a álgebra $A_G \otimes A_G$ com o espaço $A_{G\times G}$ e definir a aplicação $\Delta : A_G \longrightarrow M(A_{G\times G})$ por $\Delta(f)(p,q) = f(pq)$, para todo $f \in A_G$ e $p,q \in G$. Então, A_G é uma álgebra de Hopf de multiplicadores, pois para qualquer $g \in A_G$, pelas propriedades de grupo, segue que as funções

$$\begin{aligned} \Delta(f)(1 \otimes g) : (p,q) &\rightarrow f(pq)g(q) \\ (g \otimes 1)\Delta(f) : (p,q) &\rightarrow g(p)f(pq), \end{aligned}$$

também possuem suporte finito. Em outras palavras, vale o item (i) da Definição 1.1.4 e, consequentemente, Δ é uma comultiplicação. Note que, nas aplicações acima, estamos usando fortemente o isomorfismo entre as álgebras $A_G \otimes A_G$ e $A_{G\times G}$. Além do mais, as aplicações T_1 e T_2 da Definição 1.1.6, construídas a partir das funções acima, geram todo espaço $A_{G\times G}$.

A counidade é definida por $\varepsilon(f) = f(e)$, onde e é o elemento neutro de G e antípoda é dada por $(S(f))(p) = f(p^{-1})$, para todo $f \in A_G$ e $p \in G$.

Exemplo 1.1.11. ([28]) Sejam $\mathbb{C}$ o corpo dos números complexos e A o espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, gerado pelos elementos $\{e_p d^q; p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}\}$. Definimos o produto em A da seguinte forma

$$de_p = e_{p+1}d \quad \text{e} \quad e_p e_r = \delta_{p,r} e_p,$$

onde δ é o delta de Kronecker. Assim, A é uma álgebra sem unidade, mas com produto não degenerado. Seja $c_\lambda = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \lambda^r e_r \in M(A)$, para $\lambda \in \mathbb{C}$ não nulo, definido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} c_\lambda(e_p d^q) &= \lambda^p e_p d^q \\ (e_p d^q) c_\lambda &= \lambda^{p-q} e_p d^q, \end{aligned}$$

para todo $e_p d^q \in A$, logo c_λ é um elemento invertível em $M(A)$, cuja inversa é dada por $\sum_{r \in \mathbb{Z}} \lambda^{-r} e_r$ e, quando $\lambda = 1_{\mathbb{C}}$, c_λ é a unidade de $M(A)$.

O coproduto Δ_λ será dado por,

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda(e_p) &= \sum_{r \in \mathbb{Z}} e_r \otimes e_{p-r}, \quad p \in \mathbb{Z} \\ \Delta_\lambda(d) &= d \otimes c_\lambda + 1 \otimes d, \end{aligned}$$

assim $\Delta_\lambda(c_\lambda) = c_\lambda \otimes c_\lambda \in M(A \otimes A)$ e, portanto, (A, Δ_λ) é uma álgebra de Hopf de multiplicadores, com antípoda e counidade dadas por

$$\begin{aligned} S(e_p) &= e_{-p}, \qquad \varepsilon(e_p) = \delta_{0,p}, \quad p \in \mathbb{Z}, \\ S(d) &= -d c_\lambda^{-1}, \qquad \varepsilon(d) = 0. \end{aligned}$$

Observação 1.1.12. Se Δ é um homomorfismo não degenerado então, pelo Teorema 1.1.3, os homomorfismos $(\Delta \otimes \imath)$ e $(\imath \otimes \Delta)$ de $A \otimes A$ em $M(A \otimes A \otimes A)$ possuem uma única extensão para $M(A \otimes A)$. Portanto, a coassociatividade da Definição 1.1.4 pode ser expressa na forma $(\Delta \otimes \imath)\Delta = (\imath \otimes \Delta)\Delta$.

Para mostrar a não degenerescência do coproduto é necessário introduzir a noção de unidades locais bilaterais, conceito trivial no caso de álgebras com unidade.

Definição 1.1.13. ([11]) Dizemos que uma álgebra A possui *unidades locais bilaterais* se, dados $a_1, a_2, ..., a_n \in A$, existe um elemento $e \in A$ tal que $ea_i = a_i$ e $a_i e = a_i$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$.

Teorema 1.1.14. ([23]) *Seja (A, Δ) uma álgebra de Hopf de multiplicadores, então A tem unidades locais bilaterais.*

Algumas consequências importantes são geradas a partir desse resultado.

Corolário 1.1.15. *Toda álgebra de Hopf de multiplicadores* (A, Δ) *é idempotente, ou seja,* $A^2 = A$.

Corolário 1.1.16. *Se* (A, Δ) *é uma álgebra de Hopf de multiplicadores, então a aplicação* Δ *é um homomorfismo não degenerado.*

B. Drabant, A. Van Daele e Y. Zang, em [11], justificam o uso da notação de Sweedler para álgebra de Hopf de multiplicadores usando unidades locais bilaterais.

Observação 1.1.17. Se (A, Δ) é uma álgebra de Hopf de multiplicadores, seria útil obtermos uma expressão para $\Delta(a)$, quando $a \in A$ mas, o problema é que $\Delta(a)$ não pertence a $A \otimes A$, em geral. Sabemos, no entanto, que $\Delta(a)(1 \otimes b) \in A \otimes A$, para todo $a, b \in A$ e, portanto, podemos escrever $\Delta(a)(1 \otimes b) = \sum_a a_1 \otimes a_2 b$. De fato, pelo Teorema 1.1.14, existe $e \in A$ tal que $b = eb$ e, com isso, podemos pensar $\sum_a a_1 \otimes a_2$ para $\Delta(a)(1 \otimes e)$. Essa notação ainda depende de $b \in A$, mas para finitos elementos de A podemos usar a mesma unidade local $e \in A$. Similarmente, denotamos $(b \otimes 1)\Delta(a)$ por $\sum_a ba_1 \otimes a_2 \in A \otimes A$.

A notação de Sweedler é muito conveniente, pois podemos escrever as fórmulas de uma maneira mais clara, mas usá-la requer muita atenção. Para estar bem definida, precisamos cuidar para no máximo um fator a_k não estar *coberto* por um elemento de A. Em [23], A. Van Daele também justifica o uso da notação de Sweedler, não utilizando a existência de unidades locais bilaterais.

No que segue, omitimos o uso do somatório na notação de Sweedler, dessa maneira, a coassociatividade da Definição 1.1.4 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$ab_{11} \otimes b_{12} \otimes b_2 c = ab_1 \otimes b_{21} \otimes b_{22} c = ab_1 \otimes b_2 \otimes b_3 c,$$

para todos $a, b, c \in A$.

Uma condição importante é a regularidade pois nos fornece uma classe especial de álgebras de Hopf de multiplicadores. Para defini-la, denotamos τ a aplicação linear de $A \otimes A$ para $A \otimes A$ dada por $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$, a qual é um homomorfismo não degenerado. Portanto, pelo Teorema 1.1.3, τ pode ser estendida a um homomorfismo em $M(A \otimes A)$ e com isso, faz sentido compor as aplicações τ e Δ, denotando por $\tau\Delta$. Note que, essa noção em uma álgebra com unidade é trivialmente satisfeita.

Definição 1.1.18. ([19]) Uma álgebra de Hopf de multiplicadores (A, Δ) é chamada de *regular* se $(A, \tau\Delta)$ também for uma álgebra de Hopf de multiplicadores.

Um importante resultado segue dessa nova classe de álgebras.

Proposição 1.1.19. ([19]) *Uma álgebra de Hopf de multiplicadores* (A, Δ) *é regular se, e somente se,* S *é bijetiva e* $S(A) \subseteq A$.

Exemplo 1.1.20. As álgebras de Hopf de multiplicadores construídas nos Exemplos 1.1.10 e 1.1.11 são regulares.

Exemplo 1.1.21. Sejam (A, Δ_A) e (B, Δ_B) duas álgebras de Hopf de multiplicadores regulares. Então, $(A \otimes B, \Delta)$ é uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular com produto e coproduto definidos de maneira usual.

Observação 1.1.22. ([19]) Para álgebras de Hopf de multiplicadores regulares, temos que $\Delta(A)(A \otimes 1)$ e $(1 \otimes A)\Delta(A)$ também geram todo o espaço $A \otimes A$ e a coassociatividade é equivalente à

$$(\Delta \otimes \imath)((1 \otimes b)\Delta(a))(c \otimes 1 \otimes 1) = (1 \otimes 1 \otimes b)(\imath \otimes \Delta)(\Delta(a)(c \otimes 1)), \tag{1.3}$$

para todo a, b e $c \in A$. E, usando a notação de Sweedler, escrevemos $(1 \otimes b)\Delta(a) = a_1 \otimes ba_2$ e $\Delta(a)(b \otimes 1) = a_1 b \otimes a_2$, para $b, a \in A$.

Note que, analogamente ao caso usual de álgebras de Hopf, a inversa S^{-1} de S é a antípoda da álgebra de Hopf de multiplicadores $(A, \tau\Delta)$. Nessas condições, a aplicação S é um anti-homomorfismo não degenerado e, com isso, pode ser unicamente estendida.

Ao longo deste trabalho, usamos uma outra escrita para os elementos do espaço $A \otimes A$, conforme será observado abaixo.

Observação 1.1.23. Usando a sobrejetividade da aplicação T_1, da Definição 1.1.6, dados $a, b \in A$, escrevemos $a \otimes b = \sum_i \Delta(p_i)(1 \otimes q_i)$. Por outro lado, usando a notação de Sweedler e a regularidade da álgebra de Hopf de multiplicadores, temos as seguintes escritas:

$$\begin{aligned} a \otimes b &= \Delta(a_1)(1 \otimes S(a_2)b) \\ &= \Delta(b_2)(S^{-1}(b_1)a \otimes 1), \end{aligned} \tag{1.4}$$

para todo $a, b \in A$.

1.2 Grupos Quânticos Algébricos

Na teoria usual de álgebras de Hopf, a álgebra dual de uma álgebra de Hopf também será uma álgebra de Hopf, se sua dimensão for finita. Essa hipótese, no contexto de álgebras de Hopf de multiplicadores é muito forte, pois se A tiver dimensão finita, pelo Teorema 1.1.14, A tem unidade e, consequentemente, A é uma álgebra de Hopf. Nesta seção, introduzimos a noção de uma álgebra de Hopf de multiplicadores dual e, para isso, o conceito de integrais. Para mais detalhes, o leitor poderá consultar o artigo [21].

Para o que segue, (A, Δ) (ou simplesmente A) é uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular, A' seu espaço vetorial dual e denotamos por $\imath$ a aplicação identidade de A.

Sejam $a \in A$ e $\omega \in A'$ (um funcional linear em A), definimos um elemento $m \in M(A)$ por

$$\begin{aligned} mb &= (\omega \otimes \imath)(\Delta(a)(1 \otimes b)) \\ bm &= (\omega \otimes \imath)((1 \otimes b)\Delta(a)), \end{aligned} \tag{1.5}$$

para todo $b \in A$ e, escrevemos $m = (\omega \otimes \imath)\Delta(a)$. Similarmente, definimos $(\imath \otimes \omega)\Delta(a)$ em $M(A)$. Usando essa notação, segue abaixo, a noção de funcionais invariantes à esquerda e à direita.

Definição 1.2.1. Um funcional linear φ em A é chamado de *invariante à esquerda* se $(\imath \otimes \varphi)\Delta(a) = \varphi(a)1$, para todo $a \in A$. Analogamente, um funcional linear ψ em A é chamado *invariante à direita* se $(\psi \otimes \imath)\Delta(a) = \psi(a)1$, para todo $a \in A$.

Exemplo 1.2.2. No Exemplo 1.1.10, o funcional linear φ em A_G definido por $\varphi(f) = \sum_{p \in G} f(p)$ é invariante à esquerda e à direita.

Observação 1.2.3. Se φ é um funcional invariante à esquerda, então $\psi = \varphi \circ S$ é um funcional invariante à direita.

Funcionais invariantes nem sempre existem, basta considerar o Exemplo 1.1.11. Também sabemos da teoria clássica de álgebras de Hopf, que sua existência está atrelada à finitude da álgebra, mas como mencionamos anteriormente, este não é o caso que estamos interessados em estudar.

Definição 1.2.4. Um funcional invariante à esquerda é dito uma *integral à esquerda*, se este for não nulo. Da mesma forma, funcionais invariantes à direita, não nulos, são chamados de *integrais à direita*.

Se integrais à direita e à esquerda coincidem, chamamos a álgebra de Hopf de multiplicadores regular A de *unimodular*.

Proposição 1.2.5. *Sejam φ uma integral à esquerda em A e $a \in A$. Se $\varphi(ba) = 0$, para todo $b \in A$, então $a = 0$. Similarmente, se $\varphi(ab) = 0$, para todo $b \in A$, então $a = 0$.*

A propriedade acima, chamada de *fiel*, também é válida para integrais à direita. Outro fato, análogo ao caso de álgebras de Hopf, é a unicidade (a menos de um escalar) das integrais, caso elas existam. Para esse propósito, enunciamos alguns resultados básicos.

Lema 1.2.6. *Se φ é um funcional invariante à esquerda em A e ψ é uma integral à direita em A, então para cada $a \in A$, existe $b \in A$ tal que $\varphi(ca) = \psi(cb)$, para todo $c \in A$. Similarmente, se φ é não nulo, dado $b \in A$, existe $a \in A$ tal que $\varphi(ca) = \psi(cb)$, para todo $c \in A$.*

Lema 1.2.7. *Se φ_1 e φ_2 são duas integrais à esquerda em A, então os espaços dos funcionais*

$$\{\varphi_1(\_a); a \in A\} \quad e \quad \{\varphi_2(\_a); a \in A\}$$

são iguais.

Juntando esses fatos, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.2.8. *Seja (A, Δ) uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular. Se A admite uma integral à esquerda, então ela é única a menos de um escalar e, dessa forma, existe uma única integral à direita.*

Finalizando as propriedades necessárias para a construção da álgebra dual de uma álgebra de Hopf de multiplicadores, apresentamos a seguinte consequência.

Proposição 1.2.9. *Se φ é uma integral à esquerda em A, então para cada $a \in A$, existe $b \in A$ tal que $\varphi(ca) = \varphi(bc)$, para todo $c \in A$.*

Aplicando S no resultado acima, obtemos uma propriedade análoga para integrais à direita ψ em A. Além disso, combinando a proposição acima e o Lema 1.2.6, obtemos a igualdade dos seguintes conjuntos de funcionais lineares:

$$\{\varphi(a\_); a \in A\}, \qquad \{\varphi(\_a); a \in A\}$$
$$\{\psi(a\_); a \in A\}, \qquad \{\psi(\_a); a \in A\}.$$

Para definir o dual de uma álgebra de Hopf de multiplicadores utilizamos os funcionais invariantes acima mas para isso, precisamos supor a existência de uma integral em A.

Definição 1.2.10. Um *grupo quântico algébrico* é uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular com integrais.

Notação 1.2.11. Se φ é uma integral à esquerda em A, então denotamos a álgebra dual de A por

$$\widehat{A} = \{\varphi(\_a); a \in A\}.$$

Note que, elementos em $\widehat{A}$ também podem ser escritos da forma $\varphi(b\_)$, $\psi(\_c)$ ou $\psi(d\_)$, para $b, c, d \in A$. Usamos ao longo deste trabalho essas diferentes fórmulas em situações apropriadas.

O espaço $\widehat{A}$ é uma álgebra com a seguinte estrutura.

Proposição 1.2.12. *Sejam $w, u \in \widehat{A}$. Definimos um funcional linear wu em A por*

$$(wu)(a) = (w \otimes u)\Delta(a), \tag{1.6}$$

para todo $a \in A$. Então, $wu \in \widehat{A}$ e, esse produto transforma $\widehat{A}$ em uma álgebra com produto não degenerado.

Observação 1.2.13. Se $w = \varphi(\_b)$ e $u = \varphi(\_c) \in \widehat{A}$, então

$$(wu)(a) = (w \otimes u)\Delta(a) = (\varphi \otimes \varphi)(\Delta(a)(b \otimes c)),$$

para todo $a \in A$, e escrevendo $b \otimes c = \sum_i \Delta(p_i)(q_i \otimes 1)$, encontramos o funcional $wu = \varphi(\_d)$, onde $d = \sum_i \varphi(q_i)p_i$.

No caso em que A possui unidade, o produto acima, coincide com o clássico *produto de convolução* da teoria de álgebras de Hopf. A seguir, consideramos uma comultiplicação $\widehat{\Delta}$ em $\widehat{A}$.

Definição 1.2.14. Dados $w, u \in \widehat{A}$, definimos a aplicação $\widehat{\Delta} : \widehat{A} \longrightarrow M(\widehat{A} \otimes \widehat{A})$ por

$$\begin{aligned} (\widehat{\Delta}(w)(1 \otimes u))(a \otimes b) &= (w \otimes u)((a \otimes 1)\Delta(b)) \\ ((v \otimes 1)\widehat{\Delta}(w))(a \otimes b) &= (v \otimes w)(\Delta(a)(1 \otimes b)), \end{aligned} \tag{1.7}$$

para todos $w, u, v \in \widehat{A}$ e $a, b \in A$.

As fórmulas acima, definem completamente $\widehat{\Delta}(w) = (\overline{\widehat{\Delta}(w)}, \overline{\overline{\widehat{\Delta}(w)}}) \in M(\widehat{A} \otimes \widehat{A})$, pois

$$\begin{aligned} \overline{\widehat{\Delta}(w)} : \widehat{A} \otimes \widehat{A} &\longrightarrow \widehat{A} \otimes \widehat{A} \\ v \otimes u &\longmapsto \widehat{\Delta}(w)(1 \otimes u)(v \otimes 1), \end{aligned}$$

e analogamente, $\overline{\overline{\widehat{\Delta}(w)}}(v \otimes u) = (1 \otimes u)(v \otimes 1)\widehat{\Delta}(w)$, para todo $u, v \in \widehat{A}$. Além disso, se $\varepsilon \in \widehat{A}$, as fórmulas 1.7, generalizam a comultiplicação usual em álgebras de Hopf, ou seja, $\widehat{\Delta}(w)(a \otimes b) = w(ab)$, para todo $a, b \in A$.

Proposição 1.2.15. *Sejam $\widehat{A}$ e $\widehat{\Delta}$, conforme definidos acima, então $(\widehat{A}, \widehat{\Delta})$ é uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular.*

Nesse caso, temos

$$
\begin{aligned}
((1 \otimes u)\widehat{\Delta}(w))(a \otimes b) &= (u \otimes w)((1 \otimes a)\Delta(b)), \\
(\widehat{\Delta}(w)(u \otimes 1))(a \otimes b) &= (w \otimes u)(\Delta(a)(b \otimes 1)),
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

para todos $w, u \in \widehat{A}$ e $a, b \in A$.

A antípoda $\widehat{S}$ é dada por

$$
\begin{aligned}
\widehat{S} : \widehat{A} &\longrightarrow \widehat{A} \\
w &\longmapsto \widehat{S}(w) = w \circ S
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

e a counidade é a avaliação em 1, ou seja, $\widehat{\varepsilon}(w) = w(1)$, para todo $w \in \widehat{A}$. Além disso, se $w = \varphi(\_a) \in \widehat{A}$, então $w(1) = \varphi(a)$.

Observação 1.2.16. Se $\widehat{a} = \varphi(\_a)$ e $\widehat{b} = \varphi(\_b) \in \widehat{A}$, então

$$
\widehat{\Delta}(\widehat{a})(1 \otimes \widehat{b}) = \varphi(\_\, S^{-1}(b_1)a) \otimes \varphi(\_\, b_2). \tag{1.10}
$$

De fato, para todo $c, d \in A$, temos

$$
\begin{aligned}
\widehat{\Delta}(\widehat{a})(1 \otimes \widehat{b})(c \otimes d) &= (\widehat{a} \otimes \widehat{b})((c \otimes 1)\Delta(d)) \\
&= (\varphi \otimes \varphi)((c \otimes 1)\Delta(d)(a \otimes b)) \\
&\overset{1.4}{=} (\varphi \otimes \varphi)((c \otimes 1)\Delta(d)\Delta(b_2)(S^{-1}(b_1)a \otimes 1)) \\
&= (\varphi \otimes \varphi)((c \otimes 1)\Delta(db_2)(S^{-1}(b_1)a \otimes 1)) \\
&= \varphi(c(db_2)_1 S^{-1}(b_1)a)\varphi((db_2)_2) \\
&\overset{1.2.1}{=} \varphi(cS^{-1}(b_1)a)\varphi(db_2) \\
&= (\varphi(\_\, S^{-1}(b_1)a) \otimes \varphi(\_\, b_2))(c \otimes d),
\end{aligned}
$$

ou seja, $\widehat{\Delta}(\widehat{a})(1 \otimes \widehat{b}) = \varphi(\_S^{-1}(b_1)a) \otimes \varphi(\_b_2)$.

O próximo resultado garante a existência de integrais na álgebra de Hopf de multiplicadores regular $\widehat{A}$.

Proposição 1.2.17. *Se φ é uma integral à esquerda e ψ é uma integral à direita em A, então $\widehat{\psi}(w) = \varepsilon(a)$, quando $w = \varphi(\_a)$ e, $\widehat{\varphi}(w) = \varepsilon(a)$, quando $w = \psi(a\_)$ definem integrais à direita e à esquerda em $\widehat{A}$, para todo $a \in A$.*

Lema 1.2.18. *Sejam $w = \varphi(\_a)$ e u qualquer elemento em $\widehat{A}$, então $\widehat{\psi}(uw) = u(S^{-1}(a))$.*

Como consequência do Lema 1.2.18, segue o teorema da bidualidade.

Teorema 1.2.19. *Sejam (A, Δ) um grupo quântico algébrico, $(\widehat{A}, \widehat{\Delta})$ seu dual e $\big(\widehat{\widehat{A}}, \widehat{\widehat{\Delta}}\big)$ seu bidual. Então, as álgebras A e $\widehat{\widehat{A}}$ são isomorfas via a aplicação $\phi(a) = \widehat{\widehat{a}}$, onde $\widehat{\widehat{a}}(w) = w(a)$, para todo $a \in A$.*

Para finalizar essa seção, definimos uma outra classe de álgebra de Hopf de multiplicadores e, para isso, introduzimos a noção de cointegral.

Definição 1.2.20. Seja (A, Δ) uma álgebra de Hopf de multiplicadores. Um elemento não nulo $h \in A$ é chamado de *cointegral à esquerda* se $ah = \varepsilon(a)h$, para todo $a \in A$. Similarmente, um elemento não nulo $k \in A$ é chamado de *cointegral à direita* se $ka = \varepsilon(a)k$, para todo $a \in A$.

Teorema 1.2.21. *Se (A, Δ) é uma álgebra de Hopf de multiplicadores com cointegrais, então ela também tem integrais.*

Note que, a existência de cointegrais na teoria usual de álgebras de Hopf está fortemente ligada ao fato da álgebra ter dimensão finita. Em nosso contexto, a existência de cointegrais também gera uma consequência muito forte, como sugere o resultado abaixo.

Teorema 1.2.22. *Se (A, Δ) é uma álgebra de Hopf de multiplicadores com cointegrais, então $(\widehat{A}, \widehat{\Delta})$ é uma álgebra de Hopf.*

Assim, ao longo deste trabalho, vamos nos limitar a trabalhar com grupos quânticos algébricos.

1.3 (Co)ações de uma Álgebra de Hopf de Multiplicadores em Álgebras

Nesta seção, apresentamos algumas noções acerca de ações e coações da álgebra de Hopf de multiplicadores em uma álgebra com o produto não degenerado. Para obter mais detalhes, indicamos ao leitor as seguintes referências [11], [29] e [8].

Inicialmente, (A, Δ) (ou simplesmente A) é uma álgebra de Hopf de multiplicadores e Y um espaço vetorial.

Definição 1.3.1. ([11]) Dizemos que Y é um *A-módulo à direita*, se existe uma aplicação linear

$$\begin{aligned} \triangleleft : Y \otimes A &\longrightarrow Y \\ y \otimes a &\longmapsto y \triangleleft a \end{aligned}$$

satisfazendo $(y \triangleleft a) \triangleleft b = y \triangleleft ab$, para todos $a, b \in A$ e $y \in Y$.

Analogamente, definimos um *A-módulo à esquerda.* Nesse caso, a aplicação $\triangleleft$ (analogamente $\triangleright$) é chamada de ação (global) de A em Y.

Se A tem unidade, é natural assumirmos que $y \triangleleft 1_A = y$, para todo $y \in Y$, significando o módulo ser unitário. Em nosso contexto, como usual na literatura, esta noção é estendida da seguinte maneira.

Definição 1.3.2. Um A-módulo à direita Y é chamado de *unitário*, se $Y \triangleleft A = Y$.

Analogamente, definimos *A-módulo à esquerda unitário.*

A propriedade a seguir será fundamental para o uso da notação clássica de Sweedler, nesse contexto.

Observação 1.3.3. ([11]) Se Y é um A-módulo à direita unitário, então dados $a_1, ..., a_n \in A$ e $y_1, y_2, ..., y_m \in Y$, existe um elemento $e \in A$ tal que $ea_i = a_i = a_i e$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$ e $y_j \triangleleft e = y_j$, para todo $j \in \{1, ..., m\}$.

Proposição 1.3.4. ([11]) *Sejam Y um A-módulo à direita unitário e $y \in Y$. Se $y \triangleleft a = 0$, para todo $a \in A$, então $y = 0$.*

Nessas condições, Y é um A-módulo à direita unitário *não degenerado.* Similarmente, definimos um A-módulo à esquerda unitário *não degenerado.*

Proposição 1.3.5. ([11]) *Se Y é um A-módulo à direita unitário via $\triangleleft$. Então, existe uma única extensão a um $M(A)$-módulo à direita e, além disso, $y \triangleleft 1_{M(A)} = y$, para todo $y \in Y$.*

Exemplo 1.3.6. ([11]) Seja A uma álgebra de Hopf de multiplicadores, então A é um A-módulo à direita unitário com ação determinada pelo produto definido em A.

A partir de agora, vamos supor que Y é uma álgebra com produto não degenerado e A uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular. Observamos anteriormente que ações à direita e à esquerda são definidos de forma análoga. Tendo em vista isso e os propósitos deste trabalho, as definições, exemplos e resultados a seguir serão apresentados para ações à esquerda.

Definição 1.3.7. ([11]) Dizemos que Y é um *A-módulo álgebra à esquerda* se,

(i) Y é um A-módulo à esquerda unitário;

(ii) $a \triangleright (xy) = (a_1 \triangleright x)(a_2 \triangleright y)$, para todos $x, y \in Y$ e $a \in A$.

Analogamente, definimos um *A-módulo álgebra à direita.*

A identidade (ii) faz sentido pois, temos que Y é um A-módulo à esquerda unitário, assim, para todo $x \in Y$, podemos escrever $x = \sum_i b_i \triangleright x_i$, e

$$\begin{aligned} a \triangleright (xy) &= a \triangleright ((\sum_i b_i \triangleright x_i)y) \\ &= m_Y(\sum_i (\Delta(a)(b_i \otimes 1))(\triangleright \otimes \triangleright)(x_i \otimes y)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= m_Y(\sum_i (a_1 b_i \otimes a_2)(\triangleright \otimes \triangleright)(x_i \otimes y)) \\
&= \sum_i (a_1 b_i \triangleright x_i)(a_2 \triangleright y) \\
&= (a_1 \triangleright x)(a_2 \triangleright y),
\end{aligned}
$$

para todos $a \in A$, $x, y \in Y$.

Nesse caso, dizemos que a_1 está coberto por x e, da mesma forma, a_2 está coberto por y. Observe que, se A e Y têm unidade, a Definição 1.3.7 e a definição clássica de módulo álgebra são equivalentes.

Exemplo 1.3.8. ([11]) Seja A uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular. Então A é um A-módulo álgebra à esquerda via

$$
\begin{aligned}
\triangleright : A \otimes A &\longrightarrow A \\
a \otimes b &\longmapsto a \triangleright b := a_1 b S(a_2).
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.3.9. ([15]) Sejam A_G a álgebra das funções com suporte finito de G em $\Bbbk$, definida no Exemplo 1.1.10 e Y a álgebra de grupo $\Bbbk G$. Então, Y é um A_G-módulo álgebra à esquerda com ação dada por

$$
\begin{aligned}
\triangleright : A_G \otimes Y &\longrightarrow Y \\
\delta_p \otimes y &\longmapsto \delta_p \triangleright y := \delta_p(y) y.
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.3.10. ([11]) Seja A_G a álgebra do Exemplo 1.1.10 e Y uma álgebra qualquer, com produto não degenerado. Assim, se Y é um A_G-módulo álgebra à esquerda via

$$
\begin{aligned}
\triangleright : A_G \otimes Y &\longrightarrow Y \\
f \otimes y &\longmapsto f \triangleright y,
\end{aligned}
$$

então Y é uma álgebra G-graduada com graduação dada por $Y = \oplus_{p \in G} Y_p$, sendo $Y_p = \delta_p \triangleright Y$, onde $\delta_p \in A_G$. Reciprocamente, se Y é G-graduada por $Y = \oplus_{p \in G} Y_p$, então Y é um A_G-módulo álgebra definindo a aplicação $\triangleright : A_G \otimes Y \longrightarrow Y$ por

$$\delta_p \triangleright y = \begin{cases} y & , y \in Y_p, \\ 0 & , \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Lema 1.3.11. ([11]) *Se Y é um A-módulo álgebra à esquerda, então*

$$\begin{aligned} (a \triangleright x)y &= a_1 \triangleright (x(S(a_2) \triangleright y)) \\ x(a \triangleright y) &= a_2 \triangleright ((S^{-1}(a_1) \triangleright x)y), \end{aligned}$$

para todos $a \in A$, $x, y \in Y$.

Para justificar o lado direito das fórmulas acima, estamos usando fortemente o fato da aplicação S ser bijetiva. Vamos mostrar que a primeira equação está bem definida, ou seja daremos um sentido para o lado direito dessa equação, de modo análogo justificamos a segunda.

Escrevemos $y = \sum_i b_i \triangleright y_i$ e, pela bijetividade da aplicação S, $b_i = S(c_i)$, para cada i. Logo, podemos escrever $(1 \otimes c_i)\Delta(a) = a_1 \otimes c_i a_2 \in A \otimes A$, para cada i. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_i a_1 \triangleright (x(S(c_i a_2) \triangleright y_i)) &= \sum_i a_1 \triangleright (x(S(a_2)S(c_i) \triangleright y_i)) \\ &= \sum_i a_1 \triangleright (x(S(a_2)b_i \triangleright y_i)) \\ &= a_1 \triangleright (x(S(a_2) \triangleright y)). \end{aligned}$$

Nesse caso, dizemos que a_2 está *coberto* por y.

As identidades acima, são úteis para estendermos uma ação de A em Y para $M(Y)$.

Proposição 1.3.12. ([11]) *Seja Y um A-módulo álgebra à esquerda. Então, a ação de A em Y pode ser unicamente estendida para uma "ação" de A em $M(Y)$ pelas seguintes estruturas:*

$$(a \triangleright m)y = a_1 \triangleright (m(S(a_2) \triangleright y))$$

$$y(a \triangleright m) \;=\; a_2 \triangleright ((S^{-1}(a_1) \triangleright y)m),$$

para todo $a \in A$, $m \in M(Y)$ *e* $y \in Y$.

Proposição 1.3.13. ([11]) *Nas mesmas condições da proposição anterior,* $M(Y)$ *é um* A*-módulo à esquerda e* $a \triangleright 1_{M(Y)} = \varepsilon(a)1_{M(Y)}$*, para todo* $a \in A$.

Observe que $M(Y)$ não é um A-módulo álgebra, pois nesse caso, a condição de unitário é muito forte e, dessa forma, não podemos dar um significado para (ii) da Definição 1.3.7. No entanto, $M(Y)$ é um A-módulo à esquerda não degenerado.

Proposição 1.3.14. ([11]) *Se* $m \in M(Y)$ *e* $a \triangleright m = 0$*, para todo* $a \in A$*, então* $m = 0$.

Agora, vamos apresentar algumas notações e definições que serão muito utilizadas ao longo do texto, algumas destas, usaremos para justificar os itens da definição de comódulo que será introduzida na sequência.

Notação 1.3.15. Sejam A uma álgebra com produto não degenerado e Y um espaço vetorial. Vamos equipar $A \otimes Y$ com uma estrutura de A-bimódulo com ações à esquerda e à direita dadas pela multiplicação no primeiro fator do produto tensorial. Assim,

$$\begin{aligned} ax &= a(\sum_i a_i \otimes y_i) \\ &= \sum_i aa_i \otimes y_i \\ &= (a \otimes 1)x \end{aligned}$$

e, analogamente, temos que $xa = x(a \otimes 1)$, para todos $a \in A$, $x \in A \otimes Y$.

Definição 1.3.16. ([22]) Se $A \otimes Y$ é um A-bimódulo não degenerado. Definimos $M_0(A \otimes Y)$ como o espaço vetorial dos pares de aplicações lineares (λ, ρ) de A em $A \otimes Y$ satisfazendo

$$a\lambda(b) = \rho(a)b, \tag{1.11}$$

para todos $a, b \in A$.

Podemos obter uma imersão de $A \otimes Y$ em $M_0(A \otimes Y)$, associando a cada $x \in A \otimes Y$, aplicações lineares λ e ρ definidas por $\lambda(a) = x(a \otimes 1) \quad \text{e} \quad \rho(a) = (a \otimes 1)x$. Além disso, faz sentido escrever $z(a \otimes 1)$ para $\lambda(a)$ e $(a \otimes 1)z$ para $\rho(a)$ sempre que $z := (\lambda, \rho)$. E, assim podemos estender as ações de A sobre $A \otimes Y$ à ações de A sobre $M_0(A \otimes Y)$.

De fato, basta definir para todos $a \in A$, $z = (\lambda, \rho) \in M_0(A \otimes Y)$

$$az = (a\lambda(\_), \rho(\_a)) \;\; \text{e} \;\; za = (\lambda(a\_), \rho(\_)a).$$

O A-bimódulo $M_0(A \otimes Y)$ é chamado de *completamento* (ou bimódulo estendido) do A-bimódulo $A \otimes Y$.

É fácil ver que a construção apresentada acima funciona para todo espaço vetorial X que é um A-bimódulo não degenerado. Ou seja, se X é um A-bimódulo tal que, sempre que $ax = 0$ para todo $a \in A$ ou $xa = 0$ para todo $a \in A$, então $x = 0$. Então, sempre existe o seu *completamento* $M_0(X)$. Observamos que, se $X = A$ e A é visto como um A-bimódulo via multiplicação, então $M_0(A) = M(A)$. Por este motivo, é natural nos referirmos a um par em $M_0(X)$ como um multiplicador.

Em particular, dada uma álgebra A e o espaço vetorial Y, como na notação anterior, podemos considerar $A \otimes A \otimes Y$ como um $A \otimes A$-bimódulo com ação via multiplicação à esquerda e à direita nos dois primeiros fatores do produto tensorial e, definir seu completamento $M_0(A \otimes A \otimes Y)$. Neste caso, escreveremos as ações de $A \otimes A$ como $(a \otimes a' \otimes 1)z$ e $z(a \otimes a' \otimes 1)$ quando $a, a' \in A$ e z é um elemento de $M_0(A \otimes A \otimes Y)$. Para mais detalhes sobre estas notações e construções, indicamos ao leitor o artigo [22].

Em nosso texto, na maior parte dos casos, Y também tem estrutura de álgebra. Assim, também será útil, considerarmos ações via multiplicação em fatores do tensor pertencentes a esta álgebra.

Faremos a seguinte convenção: supondo que X é uma combinação de tensores de A e Y e sempre que X for um A-bimódulo ou um Y-bimódulo, denotaremos por $M_{0,i}^{A}(X)$ o completamento de X considerando a ação por elementos de A no i-ésimo fator do tensor e, analogamente, denotaremos $M_{0,i}^{Y}(X)$ o completamento de X considerando a ação por elementos de Y no i-ésimo fator do tensor.

Para ilustrar esta convenção, seja o espaço vetorial $X = Y \otimes A \otimes Y$ com estrutura de Y-bimódulo, sendo a ação dada pela multiplicação no terceiro fator do tensor. Denotaremos o seu completamento por $M_{0,3}^{Y}(Y \otimes A \otimes Y)$.

A seguir, definiremos a noção dual de uma ação. Continuaremos assumindo ao longo de toda esta seção que Y é uma álgebra com produto não degenerado e A uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular.

Definição 1.3.17. ([8]) Dizemos que Y é um A-*comódulo à esquerda*, se existe uma aplicação linear injetiva $\rho : Y \longmapsto M(A \otimes Y)$ que satisfaz:

(i) $\rho(Y)(A \otimes 1) \subseteq A \otimes Y$ e $(A \otimes 1)\rho(Y) \subseteq A \otimes Y$;

(ii) $(\imath_A \otimes \rho)\rho = (\Delta_A \otimes \imath_Y)\rho$ *(coassociatividade).*

Analogamente, definimos um A-*comódulo à direita.* Nesse caso, a aplicação ρ é chamada de coação (global) de A em Y.

Observação 1.3.18. O lado direito da igualdade (ii) tem sentido, pois $\Delta_A \otimes \imath_Y$ é um homomorfismo de álgebras não degenerado, assim podemos estende-lo à $M(A \otimes Y)$.

Observação 1.3.19. Para justificar o lado esquerdo de (ii), vamos utilizar o item (i), e definir $(\imath_A \otimes \rho)(\rho(y))$ como um multiplicador em $M_0(A \otimes A \otimes Y) \subseteq M(A \otimes A \otimes Y)$, para todo $y \in Y$, da seguinte forma:

$$\overline{(\imath_A \otimes \rho)(\rho(y))}(a \otimes b) \overset{not.}{=} (\imath_A \otimes \rho)(\rho(y))(a \otimes b \otimes 1)$$

$$
\begin{aligned}
&= (\imath_A \otimes \rho)(\rho(y)(a \otimes 1))(1 \otimes b \otimes 1),\\
\overline{\overline{(\imath_A \otimes \rho)(\rho(y))}}(a \otimes b) &\overset{not.}{=} (a \otimes b \otimes 1)(\imath_A \otimes \rho)(\rho(y))\\
&= (1 \otimes b \otimes 1)(\imath_A \otimes \rho)((a \otimes 1)\rho(y)),
\end{aligned}
$$

para todos $a, b \in A$.

Verifica-se facilmente que a relação de compatibilidade 1.11 é satisfeita, e portanto, o par está bem definido em $M_0(A \otimes A \otimes Y)$.

Assim, a coassociatividade pode ser expressa da seguinte forma:

$$(\imath_A \otimes \rho)(\rho(y)(a \otimes 1))(1 \otimes b \otimes 1) = (\Delta_A \otimes \imath_Y)(\rho(y))(a \otimes b \otimes 1). \tag{1.12}$$

E, similarmente, podemos escrever:

$$(1 \otimes b \otimes 1)(\imath_A \otimes \rho)((a \otimes 1)\rho(y)) = (a \otimes b \otimes 1)(\Delta_A \otimes \imath_Y)(\rho(y)), \tag{1.13}$$

para todos $y \in Y$, $a, b \in A$.

O próximo resultado nos mostra que dada uma coação $\rho : Y \longrightarrow M(A \otimes Y)$, a injetividade de ρ é equivalente a propriedade da counidade.

Proposição 1.3.20. ([29]) *Se Y é um A-comódulo à esquerda via ρ, então $(\varepsilon_A \otimes \imath_Y)(\rho(y)) = y$, para todo $y \in Y$.*

Note que, $(\varepsilon_A \otimes \imath_Y)(\rho(y))$ está bem definida, pois ε_A é um homomorfismo não degenerado e, com isso, podemos estender a aplicação $\varepsilon_A \otimes \imath_Y$ a $M(A \otimes Y)$.

Observação 1.3.21. Usamos a notação Sigma (sem somatório) para expressar uma coação $\rho : Y \longrightarrow M(A \otimes Y)$. De fato, os itens (i) e (ii) da Definição 1.3.17, podem ser reescritos da seguinte maneira:

(i) $\rho(y)(a \otimes 1) = y^{-1}a \otimes y^0 \in A \otimes Y$ e $(a \otimes 1)\rho(y) = ay^{-1} \otimes y^0 \in A \otimes Y$;

(ii) $ay^{-1}\otimes by^{0-1}\otimes y^{00} = \sum_i b_i(a_iy^{-1})_1\otimes(a_iy^{-1})_2\otimes y^0$, onde $a\otimes b = \sum_i(b_i\otimes 1)\Delta(a_i)$.

Algumas propriedades são obtidas usando a notação Sigma.

Proposição 1.3.22. ([8]) *Para todos $y \in Y$ e $a \in A$, temos:*

(i) $y^{00} \otimes y^{0-1}S_A^{-1}(y^{-1})a = y \otimes a$;

(ii) $y^{00} \otimes S_A^{-1}(y^{0-1})y^{-1}a = y \otimes a$.

Observamos anteriormente que coações à esquerda e à direita são definidas de forma análoga. Tendo em vista isso e os propósitos deste trabalho, as definições, exemplos e resultados a seguir serão apresentados para coações à direita.

Definição 1.3.23. Dizemos que Y é um A-*comódulo álgebra à direita*, se existe uma aplicação $\rho : Y \longrightarrow M(Y \otimes A)$ tal que ρ é uma coação e também um homomorfismo de álgebras.

Analogamente, definimos um A-*comódulo álgebra à esquerda*. Nesse caso, a aplicação ρ também é chamada de coação (global) de A em Y.

Se A e Y têm unidade, a Definição 1.3.23 generaliza o conceito de comódulo álgebra da teoria clássica de álgebras de Hopf.

Exemplo 1.3.24. ([29]) Seja Y uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular, então Y é um Y-comódulo álgebra com $\rho := \Delta_Y$ (comultiplicação de Y).

Exemplo 1.3.25. ([29]) Sejam Y uma álgebra com produto não degenerado e A_G a álgebra de Hopf de multiplicadores do Exemplo 1.1.10, considerando G o grupo dos automorfismos de Y. Então, Y é um A_G-comódulo álgebra (à direita) via

$$\begin{aligned} \rho : Y &\longrightarrow M(Y \otimes A_G) \\ y &\longmapsto \sum_{g\in G} g(y) \otimes \delta_g, \end{aligned}$$

onde $\delta_g(h) = \delta_{g,h}$, para todo $h \in G$ (delta de Kronecker).

Para finalizar a seção, vamos estabelecer uma relação entre os conceitos de módulo álgebra e comódulo álgebra. Para isso, consideramos A um grupo quântico algébrico e Y uma álgebra com produto não degenerado.

Proposição 1.3.26. ([29]) *Se Y é um A-comódulo álgebra à direita via ρ, então Y é um $\widehat{A}$-módulo álgebra à esquerda com ação dada por*

$$\begin{aligned} \triangleright : \widehat{A} \otimes Y &\longrightarrow Y \\ \varphi(\_a) \otimes y &\longmapsto \varphi(\_a) \triangleright y := (\imath \otimes \varphi)(\rho(y)(1 \otimes a)). \end{aligned}$$

Reciprocamente, segue o resultado abaixo.

Proposição 1.3.27. ([29]) *Seja Y um A-módulo álgebra à esquerda via $\triangleright$, então Y é um $\widehat{A}$-comódulo álgebra à direita, definindo-se $\rho : Y \longrightarrow M(Y \otimes \widehat{A})$ tal que*

$$\begin{cases} \rho(y)(1 \otimes u) = S^{-1}(a_1) \triangleright y \otimes \varphi(\_\, a_2) \\ (1 \otimes v)\rho(y) = S(b_2) \triangleright y \otimes \psi(\_\, b_2), \end{cases}$$

onde $u = \varphi(\_\, a)$ e $v = \psi(\_\, b)$, para todos $a, b \in A$ e $y \in Y$.

As igualdades acima fazem sentido, pois a ação é unitária, logo existem elementos na álgebra A *cobrindo* a_1 e b_2.

1.4 Comódulo Coálgebra (Global)

A seguir, apresentamos a definição de comódulo coálgebra no contexto de álgebras de Hopf de multiplicadores. Esta noção foi introduzida por L. Delvaux em [8], no qual seu principal propósito era a construção de um coproduto smash entre duas álgebras de Hopf de multiplicadores. Antes de apresentar a definição e o teorema demonstrado por L. Delvaux, veremos alguns resultados preliminares e notações que serão utilizadas nessa seção e ao longo do texto. Continuaremos supondo que

Y é uma álgebra com produto não degenerado e A é uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular.

Seja Y um A-comódulo à esquerda via ρ, definimos

$$\begin{aligned} T : Y \otimes A &\longrightarrow A \otimes Y \\ y \otimes a &\longmapsto \rho(y)(a \otimes 1). \end{aligned} \tag{1.14}$$

A boa definição de T é imediata da definição de coação. Além disso, esta aplicação é bijetiva ([8]).

Proposição 1.4.1. ([8]) *Sejam Y um A-comódulo à esquerda via ρ e T como definida em 1.14. Então, $(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a)) \in M^A_{0,1}(A \otimes Y \otimes A)$.*

Demonstração. Basta definirmos,

$$((T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a)))(a' \otimes 1 \otimes 1) \;=\; \sum y^{-1}a_1a' \otimes y^0 \otimes a_2,$$

onde a_1 é coberto por a' e y^{-1} é coberto por a_1a', e

$$(a' \otimes 1 \otimes 1)((T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a))) \;=\; \sum a'y^{-1}a_1 \otimes y^0 \otimes a_2,$$

onde y^{-1} é coberto por a' e a_1 é coberto por $a'y^{-1}$. □

Proposição 1.4.2. ([8]) *Dados $a, a', a'' \in A$, $y \in Y$,*

$$\begin{aligned} &(\imath_A \otimes T)((a' \otimes 1 \otimes 1)(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a))(1 \otimes a'' \otimes 1) = \\ &= \;(\imath_A \otimes \rho)((a' \otimes 1)\rho(y))(\Delta_A(a)(1 \otimes a'') \otimes 1). \end{aligned}$$

Demonstração. Basta usar a definição da aplicação T e a Proposição 1.4.1. □

Proposição 1.4.3. ([8])*Sejam Y um A-comódulo à esquerda via ρ e T como definida em 1.14. Então*

$$(\imath_A \otimes \rho)\rho = (\Delta_A \otimes \imath_Y)\rho \Longleftrightarrow (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \Delta_A) = (\Delta_A \otimes \imath_Y)T.$$

Demonstração. Supondo que vale a coassociatividade da Definição 1.3.17, segue da Proposição 1.5 de [8] que $(\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \Delta_A) = (\Delta_A \otimes \imath_Y)T$.

Para a recíproca, usamos a Proposição 1.4.2. $\square$

Definição 1.4.4. ([8]) Sejam Y e A álgebras de Hopf de multiplicadores tais que Y é um A-comódulo à esquerda via ρ (Definição 1.3.17). Dizemos que Y é um *A-comódulo coálgebra à esquerda* se

(i) $((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes y') \in Y \otimes A \otimes Y$ e,
$(1 \otimes 1 \otimes y')((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)) \in Y \otimes A \otimes Y$;

(ii) $(\imath_A \otimes \Delta_Y)T(y \otimes a) = (T \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)$,

para todos $y, y' \in Y$, $a \in A$.

Observação 1.4.5. Observamos que o lado direito na condição (ii) faz sentido usando a condição (i).

Observação 1.4.6. Podemos definir, para todo $y \in Y$, $(\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\rho(y)$ como um multiplicador em $M(A)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\overline{(\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\rho(y)}(a) &\overset{not.}{=} ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\rho(y))a \\
&= (\imath_A \otimes \varepsilon_Y)(\rho(y)(a \otimes 1)), \\
\overline{\overline{(\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\rho(y)}}(a) &\overset{not.}{=} a((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\rho(y)) \\
&= (\imath_A \otimes \varepsilon_Y)((a \otimes 1)\rho(y)).
\end{aligned}$$

Proposição 1.4.7. ([8])*Sejam Y e A álgebras de Hopf de multiplicadores tais que Y é um A-comódulo coálgebra à esquerda via ρ, então*

$$(\imath_A \otimes \varepsilon_Y)(\rho(y)(a \otimes 1)) = \varepsilon_Y(y)a,$$

para todos $y \in Y$, $a \in A$.

A seguir, apresentamos o teorema demonstrado por L. Delvaux em [8] com a construção do coproduto smash. Para isso, vamos supor que Y e A são álgebras de Hopf de multiplicadores regulares. Definimos para todos $y \in Y$, $a \in A$, uma comultiplicação $\overline{\Delta}$ sobre $Y \otimes A$.

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta}(y \otimes a)((y' \otimes a') \otimes (y'' \otimes a'')) &= (((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a_1))(1^2 \otimes y'') \otimes a_2 a'')((y' \otimes a') \otimes (1^2)), \\
((y' \otimes a') \otimes (y'' \otimes a''))\overline{\Delta}(y \otimes a) &= ((1^2) \otimes (y'' \otimes a''))(y' y_1 \otimes (a' \otimes 1^2)((T \otimes \imath_A)(y_2 \otimes \Delta_A(a)))),
\end{aligned}$$

para todos $y', y'' \in Y$ e $a', a'' \in A$.

A boa definição destas aplicações segue imediatamente da Definição 1.4.4 e Proposição 1.4.1, respectivamente.

Teorema 1.4.8. ([8]) *Sejam Y e A duas álgebras de Hopf de multiplicadores regulares tais que A é comutativa, Y é um A-comódulo coálgebra via ρ e esta aplicação é um homomorfismo. Então $\overline{\Delta}$ é um homomorfismo sobre $Y \otimes A$ tal que $(Y \otimes A, \overline{\Delta})$ é uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular.*

1.5 Globalização para (Co)Módulos Álgebra Parciais - Caso Hopf

Exemplos naturais de ações parciais podem ser facilmente obtidos quando restringimos ações globais a subconjuntos não necessariamente invariantes. Investigar a existência de ações envolventes (ou globalização) para uma determinada ação parcial significa descobrir sob quais circunstâncias tal ação parcial pode ser obtida a menos de equivalência como restrição de uma ação global.

O primeiro teorema no contexto algébrico sobre a existência de ações envolventes se deve a R. Exel e M. Dokuchaev, em [10], para ações parciais de grupos em álgebras. Posteriormente M. Alves e E. Batista estenderam estas ideias ao contexto de ações parciais de álgebras de Hopf, em [2] e [3].

A seguir, vamos relembrar as definições de módulo álgebra parcial e comódulo álgebra parcial no contexto de álgebras de Hopf, além das respectivas definições de ação envolvente. No próximo capítulo, estenderemos estas ideias ao contexto de álgebras de Hopf de multiplicadores.

Definição 1.5.1. ([5]) Seja A uma álgebra de Hopf. Dizemos que Y é um A-*módulo álgebra parcial* à esquerda se, existe uma aplicação linear

$$\begin{aligned} \cdot : A \otimes Y &\longrightarrow Y \\ a \otimes y &\longmapsto a \cdot y \end{aligned}$$

tal que para todos $a, b \in A$ e $x, y \in Y$,

(i) $1_A \cdot y = y$;

(ii) $a \cdot (x(b \cdot y)) = (a_1 \cdot x)(a_2 b \cdot y)$.

Nesse caso, dizemos que $\cdot$ é uma *ação parcial* de A em Y. Se, além dos itens (i) e (ii), tivermos a hipótese adicional que $a \cdot ((b \cdot x)y) = (a_1 b \cdot x)(a_2 \cdot y)$, a ação parcial é dita *simétrica*.

Definição 1.5.2. ([2]) Seja S um A-módulo álgebra parcial à esquerda. Uma *ação envolvente*, ou globalização, de S é um par (Y, θ) que satisfaz as seguintes condições:

(i) Y é um A-módulo álgebra à esquerda (não necessariamente unitário);

(ii) A aplicação $\theta : S \longrightarrow Y$ é um monomorfismo de álgebras;

(iii) A subálgebra $\theta(S)$ é um ideal à direita de Y;

(iv) A ação parcial sobre S é equivalente a ação parcial induzida sobre $\theta(S)$, ou seja, $\theta(a \cdot s) = a \cdot \theta(s) = \theta(1_S)(a \triangleright \theta(s))$, para todos $a \in A$ e $s \in S$;

(v) $Y = A \triangleright \theta(S)$.

Agora, mencionamos a definição de uma coação parcial, quando A e Y possuem unidade.

Definição 1.5.3. ([5]) Uma álgebra Y é um A-*comódulo álgebra parcial* à direita se, existe um homomorfismo de álgebras $\rho : Y \longrightarrow Y \otimes A$ tal que para todo $y \in Y$,

(i) $(\imath_Y \otimes \varepsilon_A)\rho(y) = y$;

(ii) $(\rho \otimes \imath_A)\rho(y) = (\rho(1_Y) \otimes 1_A)(\imath_Y \otimes \Delta_A)\rho(y)$.

Nesse caso, ρ é chamada de uma coação parcial de A em Y. Dizemos que Y é um A-comódulo álgebra parcial à direita *simétrico* se também satisfizer

$$(\rho \otimes \imath_A)\rho(y) = (\imath_Y \otimes \Delta_A)\rho(y)(\rho(1_Y) \otimes 1_A),$$

para todo $y \in Y$.

Definição 1.5.4. ([3]) Seja S um A-comódulo álgebra parcial à direita. Dizemos que (Y, ρ, θ) é uma *coação envolvente*, ou globalização, de S se satisfaz:

(i) Y é um A-comódulo álgebra à direita via ρ;

(ii) A aplicação $\theta : S \longrightarrow Y$ é um monomorfismo de álgebras;

(iii) A subálgebra $\theta(S)$ é um ideal à direita de Y;

(iv) θ é um homomorfismo de A-comódulos álgebra parciais onde $\theta(S)$ tem coação parcial induzida, ou seja, $(\theta \otimes \imath_A)(\overline{\rho}(s)) = ((\theta(1_S) \otimes \imath_A)\rho)\theta(s)$, para todo $s \in S$;

(v) Y é gerado por $\theta(S)$ como um A-comódulo álgebra.

Capítulo 2

Globalização para (Co)Módulos Álgebra Parciais

2.1 Globalização para Módulos Álgebra Parciais

Neste capítulo, vamos supor que A é uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular e Y é uma álgebra com produto não degenerado. Além disso, as ações parciais de A em Y serão consideradas à esquerda, pois ações parciais à direita são definidas de maneira similar.

2.1.1 Ações Parciais da Álgebra de Hopf de Multiplicadores

Estendendo a Definição 1.5.1 para o contexto de ações parciais de álgebras de Hopf de multiplicadores em álgebras, temos a seguinte definição.

Definição 2.1.1. ([15]) Dizemos que Y é um A-módulo álgebra parcial à esquerda se, existe uma aplicação linear

$$\begin{aligned} \cdot : A \otimes Y &\longrightarrow Y \\ a \otimes y &\longmapsto a \cdot y \end{aligned}$$

tal que, dados $a, b \in A$ e $x, y \in Y$,

(i) $a \cdot (x(b \cdot y)) = (a_1 \cdot x)(a_2 b \cdot y)$;

(ii) Existe uma aplicação linear $e : A \longrightarrow M(Y)$ tal que

  (1) $e(A)Y \subseteq A \cdot Y$;

  (2) $e(a)(b \cdot y) = a_1 \cdot (S(a_2)b \cdot y)$.

(iii) Dados $a_1, ..., a_n \in A$, $y_1, ..., y_m \in Y$ existe $b \in A$ tal que $a_i b = a_i = b a_i$ e $a_i \cdot y_j = a_i \cdot (b \cdot y_j)$, para todo $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$;

(iv) Se $a \cdot y = 0$, para todo $a \in A$, então $y = 0$.

Nessas condições, a aplicação $\cdot$ é dita uma ação parcial de A em Y e, dizemos que a ação parcial é *simétrica* se também satisfizer os seguintes itens:

(v) $a \cdot ((b \cdot x)y) = (a_1 b \cdot x)(a_2 \cdot y)$;

(vi) $(b \cdot y)e(a) = a_2 \cdot (S^{-1}(a_1)b \cdot y)$;

(vii) $Ye(A) \subseteq A \cdot Y$,

para todos $x, y \in Y$ e $a, b \in A$.

Observe que, o item (i) faz sentido, pois $\Delta(a)(1 \otimes b) = a_1 \otimes a_2 b \in A \otimes A$. Já no item (ii 2), estamos usando o fato da aplicação S ser um anti-homomorfismo bijetivo, ou seja, existe $c \in A$ tal que $S(c) = b$ e, com isso,

$$(\imath \otimes S)((1 \otimes c)\Delta(a)) \;=\; (\imath \otimes S)(a_1 \otimes c a_2)$$

$$= a_1 \otimes S(a_2)b.$$

Observação 2.1.2. Se A e Y possuem unidade, definimos a aplicação linear $e : A \longrightarrow M(Y) = Y$ tal que $e(a) = a \cdot 1_Y$, para todo $a \in A$, obtendo a Definição 1.5.1.

Consideramos (A, Δ) uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular e Y uma álgebra com produto não degenerado. Sabemos que não existe uma estrutura de álgebra natural em $Hom(A, Y)$ dada pelo produto

$$(fg)(a) = \mu_Y[(f \otimes g)\Delta(a)], \tag{2.1}$$

pois nem sempre o lado direito da igualdade faz sentido, já que não existe garantia de $\Delta(a)$ estar coberto. Nesse caso, a ideia é considerar um subespaço de $Hom(A, Y)$ no qual podemos induzir uma estrutura de álgebra semelhante a (2.1), mas que faça sentido. Para isso, definimos

$$Hom^r(A, Y) = \{\sum_i f_i(\_a_i); a_i \in A, f_i \in Hom(A, Y)\}.$$

Toda combinação linear de elementos $f_i(\_a_i)$ é da forma $f(\_e)$, para alguma $f \in Hom(A, Y)$ e $e \in A$. De fato, basta considerar

$$f = \sum_i^n f_i(\_a_i) \in Hom(A, Y),$$

e, $e \in A$ tal que $ea_i = a_i = a_i e$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, desta forma obteremos que $\sum_i^n f_i(\_a_i) = f(\_e)$.

Teorema 2.1.3. ([16]) *Nas condições acima, $Hom^r(A, Y)$ é uma álgebra com multiplicação dada por,*

$$(fg)(c) = \mu_Y[(f \otimes g)\Delta(c)],$$

para todos $c \in A$ e $f, g \in Hom^r(A, Y)$.

Demonstração. Sejam $f(\_a)$, $g(\_b) \in Hom^r(A, Y)$, escrevemos

$$a \otimes b = \sum_{i}^{n} \Delta(p_i)(1 \otimes q_i).$$

Então, para todo $c \in A$,

$$(f(\_a)g(\_b))(c) = \sum_{i}^{n} h_i(\_p_i)(c), \tag{2.2}$$

onde $h_i(d) = \mu_Y[(f \otimes g)(\Delta(d)(1 \otimes q_i))]$, para todo $d \in A$ e para cada i. $\square$

Analogamente, definimos a álgebra $Hom^l(A, Y) = \{\sum_i f_i(a_i\_); a_i \in A, f_i \in Hom(A, Y)\}$.

Observação 2.1.4. Na próxima seção, usaremos com frequência a escrita apresentada na demonstração do Teorema 2.1.3.

Apresentamos a seguir, um importante exemplo de módulo álgebra não trivial.

Exemplo 2.1.5. ([16]) Sejam A_G a álgebra definida no Exemplo 1.1.10 e $Y' = Hom^r(A_G, M(A_G))$. Então, Y' é um A_G-módulo álgebra com ação global dada por

$$\begin{aligned} \triangleright : A_G \otimes Y' &\longrightarrow Y' \\ a \otimes f(\_b) &\longmapsto a \triangleright f(\_b) := f(\_ab). \end{aligned}$$

2.1.2 Globalização para Módulos Álgebra Parciais sobre Álgebras

Nesta subseção, introduzimos algumas definições, exemplos e resultados que serão utilizados para a definição e a construção da globalização para módulos álgebra parciais. Inicialmente, baseado na ideia de (co)ação parcial induzida via projeções de F. Castro e G. Quadros em [7], faremos o análogo para módulos álgebra parciais em nosso contexto. Para o que segue, continuaremos assumindo que $A = (A, \Delta)$

é uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular e Y é uma álgebra com produto não degenerado.

Definição 2.1.6. Seja S uma subálgebra de Y. Um operador linear $\pi : Y \longrightarrow Y$ é chamado de projeção sobre S, se $Im\pi = S$ e $\pi(s) = s$ para todo $s \in S$. Além disso, se π é multiplicativa, dizemos que π é projeção de álgebras.

Definição 2.1.7. Sejam Y um A-módulo álgebra à esquerda via $\triangleright$, S uma subálgebra de Y e $\pi : Y \longrightarrow Y$ uma projeção de álgebras sobre S. Dizemos que a aplicação π é uma A-*projeção* se

$$\pi(a \triangleright (r(b \triangleright s))) = \pi(a \triangleright (r\pi(b \triangleright s))),$$

para todos $r, s \in S$ e $a, b \in A$. Além disso, dizemos que π é A-projeção *simétrica* se também satisfizer que

$$\pi(a \triangleright ((b \triangleright s)r)) = \pi(a \triangleright (\pi(b \triangleright s)r)), \tag{2.3}$$

para todos $r, s \in S$ e $a, b \in A$.

Exemplo 2.1.8. Sejam Y um A-módulo álgebra à esquerda via $\triangleright$, S a subálgebra de Y gerada por um idempotente central $f \in Y$. A aplicação

$$\begin{array}{rcl} \pi : Y & \longrightarrow & Y \\ y & \longmapsto & fy \end{array}$$

é uma A-projeção simétrica.

Demonstração. É fácil ver que π é uma projeção multiplicativa sobre a subálgebra $S = fY$.

Vamos verificar que π é uma A-projeção simétrica.

Dados $a, b \in A$, $fr, fs \in S$

$$\pi(a \triangleright (fr\pi(b \triangleright fs))) \;=\; \pi(a \triangleright (fr(f(b \triangleright fs))))$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi(a \triangleright (f(rf)(b \triangleright fs))) \\
&= \pi(a \triangleright (f(fr)(b \triangleright fs))) \\
&= \pi(a \triangleright ((ff)r(b \triangleright fs))) \\
&= \pi(a \triangleright (fr(b \triangleright fs))).
\end{aligned}
$$

Ou seja π é uma A-projeção. A simetria segue de:

$$
\begin{aligned}
\pi(a \triangleright (\pi(b \triangleright fs)fr)) &= \pi(a \triangleright (f(b \triangleright fs)fr)) \\
&= \pi(a \triangleright ((b \triangleright fs)ffr)) \\
&= \pi(a \triangleright ((b \triangleright fs)fr)).
\end{aligned}
$$

□

Proposição 2.1.9. *Sejam Y um A-módulo álgebra à esquerda via $\triangleright$, S uma subálgebra de Y. Se a aplicação $\pi : Y \longrightarrow Y$ é uma A-projeção simétrica sobre S, então S é um A-módulo álgebra parcial à esquerda simétrico via $a \cdot s = \pi(a \triangleright s)$, $a \in A$ e $s \in S$.*

Demonstração. Vamos verificar os itens da Definição 2.1.1. Dados $a, b \in A$, $r, s, t \in S$,

$$
\begin{aligned}
a \cdot (r(b \cdot s)) &= \pi(a \triangleright (r(\pi(b \triangleright s)))) \\
&\overset{2.1.7}{=} \pi(a \triangleright (r(b \triangleright s))) \\
&= \pi((a_1 \triangleright r)(a_2 b \triangleright s)) \\
&= \pi(a_1 \triangleright r)\pi(a_2 b \triangleright s) \\
&= (a_1 \cdot r)(a_2 b \cdot s),
\end{aligned}
$$

e, analogamente,

$$
a \cdot ((b \cdot r)t) = \pi(a \triangleright (\pi(b \triangleright r)t))
$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(2.3)}{=} \pi(a \triangleright ((b \triangleright r)t)) \\
&= \pi((a_1 \triangleright (b \triangleright r))(a_2 \triangleright t)) \\
&= \pi((a_1 b \triangleright r)(a_2 \triangleright t)) \\
&= (a_1 b \cdot r)(a_2 \cdot t)
\end{aligned}$$

Logo, os itens (i) e (v) estão verificados. E, como consequência imediata, podemos escrever

$$(b \cdot r)(c \cdot t) = b_1 \cdot (r(S(b_2)c \cdot t)), \tag{2.4}$$

$$(b \cdot r)(c \cdot t) = c_2 \cdot ((S^{-1}(c_1)b \cdot r)t). \tag{2.5}$$

Usando as equações 2.4 e 2.5, definimos $e : A \longmapsto M(S)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\overline{e(a)}(b \cdot r) &= \pi(a_1 \triangleright \pi(S(a_2)b \triangleright r)), \\
\overline{\overline{e(a)}}(b \cdot r) &= \pi(a_2 \triangleright \pi(S^{-1}(a_1)b \triangleright r)),
\end{aligned}$$

para todos $a, b \in A$, $r \in S$.

Vamos verificar que a aplicação está bem definida. Primeiro, temos que $A \cdot S = S$, pois, dado $s \in S$,

$$s = \pi(s) \overset{1.3.3}{=} \pi(e \triangleright s) = e \cdot s,$$

e, reciprocamente, dado $c \cdot r \in A \cdot S$, $c \cdot r = \pi(c \triangleright r) \in S$.

Além disso, $e(a) = (\overline{e(a)}, \overline{\overline{e(a)}}) \in M(S)$, para todo $a \in A$. De fato,

$$\begin{aligned}
(b \cdot r)\overline{e(a)}(c \cdot t) &= \pi(b \triangleright r)\pi(a_1 \triangleright \pi(S(a_2)c \triangleright t)) \\
&= \pi((b \triangleright r)(a_1 \triangleright \pi(S(a_2)c \triangleright t))) \\
&= \pi(a_2 \triangleright ((S^{-1}(a_1)b \triangleright r)\pi(S(a_3)c \triangleright t))) \\
&\overset{(2.3)}{=} \pi(a_2 \triangleright (\pi(S^{-1}(a_1)b \triangleright r)\pi(S(a_3)c \triangleright t))) \\
&\overset{2.1.7}{=} \pi(a_2 \triangleright (\pi(S^{-1}(a_1)b \triangleright r)(S(a_3)c \triangleright t)))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi(a_2 \triangleright (\pi(S^{-1}(a_1)b \triangleright r))(a_3 S(a_4)c \triangleright t))\\
&= \pi(a_2 \triangleright \pi(S^{-1}(a_1)b \triangleright r))\pi(c \triangleright t)\\
&= (\overline{\overline{e(a)}}(b \cdot r))(c \cdot t),
\end{aligned}
$$

para todo $b, c \in A$, $r, t \in S$.

Logo, como o produto em S é não degenerado, temos que $e(a) \in M(S)$, para todo $a \in A$.

Observamos também que (1) e (2) de (ii) e, os itens (vi) e (vii) da Definição 2.1.1 são satisfeitos imediatamente da definição do multiplicador $e(a)$ e da igualdade $A \cdot S = S$.

Para o item (iii), sejam $a_1, ..., a_n \in A$, $r_1, ..., r_m \in S$, escolhemos $b \in A$ tal que $r_j = b \triangleright r_j$ e $a_i b = a_i = b a_i$. Assim temos

$$
\begin{aligned}
a_i \cdot r_j &= \pi(a_i \triangleright r_j)\\
&= \pi(a_i \triangleright (b \triangleright r_j))\\
&= \pi(a_i \triangleright \pi(b \triangleright r_j))\\
&= a_i \cdot (b \cdot r_j),
\end{aligned}
$$

para todo $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

Supondo que $a \cdot r = 0$ para todos $a \in A$, $r \in S$, escolhemos $a \in A$ tal que $r = a \triangleright r$. Assim, $0 = a \cdot r = \pi(a \triangleright r) = \pi(r) = r$.

Ou seja, o item (iv) também é satisfeito.

Portanto, S é um A-módulo álgebra parcial à esquerda simétrico via $a \cdot s = \pi(a \triangleright s)$, para todos $a \in A$ e $s \in S$. $\square$

No contexto de ações parciais de álgebras de Hopf, a definição de ação envolvente, bem como o Teorema de existência de tais ações para módulos álgebras parciais, foram apresentados inicialmente por E. Batista e M. Alves em [2]. Inspirado nesse trabalho, definiremos e faremos uma construção análoga no contexto previamente fixado.

Definição 2.1.10. Seja S um A-módulo álgebra parcial à esquerda. Uma **ação envolvente**, ou globalização, de S é uma terna (Y, θ, π) que satisfaz as seguintes condições:

(i) Y é um A-módulo álgebra à esquerda;

(ii) A aplicação $\theta : S \longrightarrow Y$ é um monomorfismo de álgebras;

(iii) A subálgebra $\theta(S)$ é um ideal à direita de Y;

(iv) A aplicação $\pi : Y \longrightarrow Y$ é uma A-projeção simétrica sobre $\theta(S)$ tal que a ação parcial de S é equivalente (via θ) à ação parcial induzida em $\theta(S)$ via π, ou seja

$$\theta(a \cdot s) = a \cdot \theta(s) = \pi(a \triangleright \theta(s)),$$

$a \in A$, $s \in S$;

(v) $Y = A \triangleright \theta(S)$.

A seguir, apresentamos alguns resultados e observações para a construção da globalização para módulos álgebra parciais.

Lema 2.1.11. *Seja S um A-módulo álgebra parcial à esquerda. Então, $Hom^r(A, S) = \{\sum_i f_i(\_a_i); a_i \in A, f_i \in Hom(A, S)\}$ é um A-módulo álgebra à esquerda via*

$$\begin{aligned} \triangleright : A \otimes Hom^r(A, S) &\longrightarrow Hom^r(A, S) \\ a \otimes f(\_b) &\longmapsto a \triangleright f(\_b) := f(\_ab). \end{aligned}$$

Demonstração. Inicialmente, vamos ver que $Hom^r(A, S)$ é um A-módulo à esquerda unitário. De fato,

$$a \triangleright (b \triangleright f(\_c)) = a \triangleright f(\_bc) = f(\_abc) = ab \triangleright f(\_c),$$

para todos $a, b \in A$ e $f(\_c) \in Hom^r(A, S)$.

E, além disso, dada $f(\_c) \in Hom^r(A, S)$, considerando $e \in A$ tal que $ec = c$, temos que $f(\_c) = e \triangleright f(\_c)$. Ou seja a ação é unitária.

Agora, sejam $a \in A$ e $f(\_b)$, $g(\_c) \in Hom^r(A, S)$. Escrevemos $b \otimes c = \sum_i^n \Delta(p_i)(1 \otimes q_i)$ e, usando a escrita de (2.2) temos,

$$\begin{aligned}
(a \triangleright (f(_b)g(_c)))(d) &= (a \triangleright \sum_i^n h_i(_p_i))(d) \\
&= (\sum_i^n h_i(_ap_i))(d) \\
&= \sum_i^n h_i(dap_i) \\
&= \mu_S[(f \otimes g)(\sum_i^n \Delta(dap_i)(1 \otimes q_i))] \\
&= \mu_S[(f \otimes g)(\sum_i^n \Delta(da)\Delta(p_i)(1 \otimes q_i))] \\
&= \mu_S[(f \otimes g)(\Delta(da)(b \otimes c))] \\
&= \mu_S[(f \otimes g)(d_1a_1b \otimes d_2a_2c)] \\
&= f(d_1a_1b)g(d_2a_2c) \\
&= f(_a_1b)g(_a_2c)(d) \\
&= (a_1 \triangleright f(_b))(a_2e \triangleright g(_c))(d) \\
&= (a_1 \triangleright f(_b))(a_2 \triangleright g(_c))(d),
\end{aligned}$$

para todos $d \in A$ e $ec = c$. Logo, $a \triangleright (f(\_b)g(\_c)) = (a_1 \triangleright f(\_b))(a_2 \triangleright g(\_c))$, para todos $a \in A$ e $f(\_b), g(\_c) \in Hom^r(A, S)$. Portanto, $Hom^r(A, S)$ é um A-módulo álgebra à esquerda. $\square$

Definição 2.1.12. Dizemos que um A-módulo álgebra parcial à esquerda S é **quase unitário** se, para finitos elementos $s_1, ..., s_n \in S$, existe $b \in A$ tal que $b \cdot s_i = s_i$ e $cb \cdot s_i = c \cdot s_i$, para todo $c \in A$. Neste caso, a ação parcial é dita *quase unitária.*

Exemplo 2.1.13. Sejam Y uma álgebra com produto não degenerado, A_G a álgebra das funções com suporte finito de um grupo G em $\Bbbk$ definida no Exemplo 1.1.10 e N um subgrupo finito de G tal que $car(\Bbbk) \nmid |N|$. Definimos a aplicação linear

$$\begin{array}{rcl} \lambda : A_G & \longrightarrow & \Bbbk \\ \delta_g & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{|N|} & , g \in N, \\ 0 & , \text{caso contrário.} \end{cases} \end{array}$$

Então, segue da Proposição 2.1.10 de [15], que Y é um A_G-módulo álgebra parcial à esquerda com ação dada por $\delta_g \cdot x = \lambda(\delta_g)x$, para todos $\delta_g \in A_G$ e $x \in Y$.

Agora, vamos mostrar que essa ação satisfaz a Definição 2.1.12.

Seja $N = \{h_1, ..., h_m\}$ e tome $b = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \delta_{h_i}$, então $b \cdot x = \lambda(b)x = |N|\frac{1}{|N|}x = x$, para cada $x \in Y$. Além disso, $\delta_g \cdot x = \delta_g b \cdot x$, para todos $\delta_g \in A_G$ e $x \in Y$ pois,

- 1º caso: Se $g \in N$, então $\delta_g b = \delta_g$, e a igualdade é verificada.

- 2º caso: Se $g \notin N$, então $\delta_g b = 0$ e $\delta_g b \cdot x = 0$ e, por outro lado $\delta_g \cdot x = \lambda(\delta_g)x = 0$, ou seja $\delta_g b \cdot x = \delta_g \cdot x$.

Portanto, Y é um A_G-módulo álgebra parcial à esquerda quase unitário.

Observamos também que, o Exemplo 2.1.13 satisfaz a condição de simetria da ação parcial, ou seja, que $\lambda(a)\lambda(b) = \lambda(a_1 b)\lambda(a_2)$, para todos $a, b \in A$.

Exemplo 2.1.14. Toda ação parcial induzida via A-projeção é quase unitária.

De fato, sejam Y um A-módulo álgebra à esquerda via $\triangleright$, S uma subálgebra de Y e $a \cdot s = \pi(a \triangleright s)$, $a \in A$ e $s \in S$, a ação parcial induzida via uma A-projeção π.

Dados $s_1, ..., s_n \in S \subseteq Y$, consideramos $b \in A$ tal que $b \triangleright s_i = s_i$, para todo

$1 \leq i \leq n$. Assim, temos

$$b \cdot s_i = \pi(b \triangleright s_i) = \pi(s_i) = s_i,$$

e,

$$\begin{aligned} a \cdot s_i &= \pi(a \triangleright s_i) \\ &= \pi(a \triangleright (b \triangleright s_i)) \\ &= \pi(ab \triangleright s_i)) \\ &= ab \cdot s_i, \end{aligned}$$

para todo $a \in A$. Portanto, a ação parcial induzida é quase unitária.

Lema 2.1.15. *Sejam S um A-módulo álgebra parcial à esquerda quase unitário e a aplicação linear*

$$\begin{aligned} \varphi : S &\longrightarrow Hom^r(A, S) \\ s &\longmapsto \varphi(s) = f_s(\_b), \end{aligned}$$

onde $s = b \cdot s$, $ab \cdot s = a \cdot s$ e $f_s(\_b)(a) := a \cdot s$, $a \in A$. Então, temos:

(i) φ é monomorfismo de álgebras;

(ii) $\varphi(s)(a \triangleright \varphi(r)) = \varphi(s(a \cdot r))$, para todos $a \in A$ e $r, s \in S$.

Demonstração. (i) Note que φ está bem definida. De fato, dados $s, r \in S$ tais que $s = b \cdot s$, $r = c \cdot r$ e $s = r$. Assim,

$$\varphi(s)(a) = f_s(\_b)(a) = ab \cdot s = a \cdot s = a \cdot r = ac \cdot r = f_r(\_c)(a) = \varphi(r)(a),$$

para todo $a \in A$, ou seja, $\varphi(s) = \varphi(r)$. E, é fácil ver que $\varphi(s) \in Hom^r(A, S)$, para todo $s \in S$.

Agora, tomamos $b \in A$ para o conjunto $\{r, s, rs\}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\varphi(rs)(a) &= \varphi(b \cdot rs)(a) \\
&= ab \cdot rs \\
&= a \cdot rs \\
&= a \cdot (r(b \cdot s)) \\
&= (a_1 \cdot r)(a_2 b \cdot s) \\
&= (a_1 b \cdot r)(a_2 b \cdot s) \\
&= f_r(a_1 b) f_s(a_2 b) \\
&= (f_r(_b) f_s(_b))(a) \\
&= (\varphi(r)\varphi(s))(a),
\end{aligned}$$

para todo $a \in A$. Ou seja φ é um homomorfismo de álgebras.

Além disso, se $s \in S$ é tal que $\varphi(s) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi(s)(a) \\
&= \varphi(b \cdot s)(a) \\
&= ab \cdot s,
\end{aligned}$$

para todo $a \in A$. Em particular, se $a \in A$ é tal que $ab = b$, obtemos que $s = 0$. Ou seja, φ é injetiva.

(ii) Seja $b \in A$ para o conjunto $\{r, s, s(a \cdot r)\}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\varphi(s)(a \triangleright \varphi(r))(c) &= \varphi(s)(a \triangleright f_r(_b))(c) \\
&= (c_1 b \cdot s)(c_2(ab) \cdot r) \\
&= (c_1 \cdot s)(c_2 a \cdot r) \\
&= c \cdot (s(a \cdot r)) \\
&= cb \cdot (s(a \cdot r))
\end{aligned}$$

$$= \varphi(s(a \cdot r))(c),$$

para todo $c \in A$.

Portanto, $\varphi(s)(a \triangleright \varphi(r)) = \varphi(s(a \cdot r))$, $r, s \in S$, $a \in A$. □

Lema 2.1.16. *Sejam Y um A-módulo álgebra, a, $b \in A$ e r, $t \in Y$. Então,*

(i) $(a \triangleright r)t = a_1 \triangleright (r(S(a_2) \triangleright t))$;

(ii) $(a \triangleright r)(b \triangleright t) = a_1 \triangleright (r(S(a_2)b \triangleright t))$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} (i) \quad a_1 \triangleright (r(S(a_2) \triangleright t)) &= (a_1 \triangleright r)(a_2 \triangleright (S(a_3) \triangleright t)) \\ &= (a_1 \triangleright r)(a_2 S(a_3) \triangleright t) \\ &= (a_1 \triangleright r)(a_2 S(a_3) \triangleright (e \triangleright t)) \\ &= (a_1 \triangleright r)(a_2 S(a_3) e \triangleright t) \\ &= (a \triangleright r)t, \end{aligned}$$

para todos $a \in A$, $r, t \in Y$, $e \in A$ tal que $e \triangleright t = t$.

$$\begin{aligned} (ii) \quad a_1 \triangleright (r(S(a_2)b \triangleright t)) &= (a_1 \triangleright r)(a_2 S(a_3) b \triangleright t) \\ &= (a \triangleright r)(b \triangleright t), \end{aligned}$$

para todos $a, b \in A$ e $r, t \in Y$. □

Lema 2.1.17. *Nas condições anteriores, sejam $\varphi : S \longrightarrow Hom^r(A, S)$, e $Y = A \triangleright \varphi(S)$. Então,*

(i) Y é um A-submódulo álgebra à esquerda de $Hom^r(A, S)$;

(ii) $\varphi(S)$ é um ideal à direita de Y.

Demonstração. (i) Y é um A-submódulo de $Hom^r(A,S)$ pois para todos $a,b \in A$, $t \in S$, $a \triangleright (b \triangleright \varphi(t)) = ab \triangleright \varphi(t) \in Y$. Além disso,

$$\begin{aligned}(a \triangleright \varphi(r))(b \triangleright \varphi(t)) &\overset{(2.1.16)}{=} a_1 \triangleright (\varphi(r)(S(a_2)b \triangleright \varphi(t))) \\ &\overset{(2.1.15)}{=} a_1 \triangleright \varphi(r(S(a_2)b \cdot t)) \in Y,\end{aligned}$$

para todos $a,b \in A$, $r,t \in S$. Ou seja, Y é um A-submódulo álgebra.

(ii) Inicialmente, observamos que $\varphi(S) \subseteq Y$. De fato, seja $s \in S$, tome $b \in A$ tal que $b \cdot s = s$, $e \in A$ tal que $eb = b$. Assim,

$$\varphi(s) = f_s(\_b) = f_s(\_eb) = e \triangleright f_s(\_b) = e \triangleright \varphi(s).$$

Logo, $\varphi(S) \subseteq Y$. E, pelo Lema 2.1.15, temos $\varphi(S)$ é um ideal à direita de Y. $\square$

Lema 2.1.18. *A aplicação linear*

$$\begin{aligned}\pi' : Hom^r(A,S) &\longrightarrow Hom^r(A,S) \\ f(\_a) &\longmapsto \varphi(f(a)),\end{aligned}$$

é uma A-projeção sobre $\varphi(S)$.

Demonstração. • $Im\pi' = \varphi(S)$

De fato, dado $\varphi(s) \in \varphi(S)$, tome $b \in A$ tal que $b \cdot s = s$, assim

$$\varphi(s) = \varphi(b \cdot s) = \varphi(eb \cdot s) = \varphi(f_s(eb)) = \varphi(f_s(b)) = \pi'(f_s(\_b)).$$

• $\pi'(\varphi(s)) = \varphi(s)$, para todo $s \in S$

De fato,

$$\pi'(\varphi(s)) = \pi'(\varphi(b \cdot s)) = \pi'(f_s(\_b)) = \varphi(f_s(b)) = \varphi(f_s(eb)) = \varphi(eb \cdot s) = \varphi(b \cdot s) = \varphi(s),$$

onde $b \in A$ é tal que $b \cdot s = s$, $eb = b$.

• π' é homomorfismo de álgebras.

Sejam $f(\_a), g(\_b) \in Hom^r(A, S)$, $a \otimes b = \Delta(p_i)(1 \otimes q_i)$, e $ep_i = pi$,

$$
\begin{aligned}
\pi'(f(\_a))\pi'(g(\_b)) &= \varphi(f(a))\varphi(g(b)) \\
&= \varphi(f(a)g(b)) \\
&= \varphi(\mu_S(f \otimes g)(a \otimes b)) \\
&= \varphi(\mu_S((f \otimes g)(\Delta(p_i)(1 \otimes q_i)))) \\
&= \varphi(\mu_S((f \otimes g)(\Delta(e)(a \otimes b)))) \\
&= \varphi(f(\_a)g(\_b)(e)) \\
&= \varphi(h(\_p_i)(e)) \\
&= \varphi(h(ep_i)) \\
&= \varphi(h(p_i)) \\
&= \pi'(h(\_p_i)) \\
&= \pi'(f(\_a)g(\_b)).
\end{aligned}
$$

Logo, π' é homomorfismo de álgebras.

• π' é A-projeção.

$$
\begin{aligned}
\pi'(a \triangleright (\varphi(r)\pi'(b \triangleright \varphi(s)))) &= \pi'(a \triangleright (\varphi(r)\pi'(b \triangleright \varphi(c \cdot s)))) \\
&= \pi'(a \triangleright (\varphi(r)\pi'(b \triangleright f_s(\_c)))) \\
&= \pi'(a \triangleright (\varphi(r)\pi'(f_s(\_bc)))) \\
&= \pi'(a \triangleright (\varphi(r)\varphi(f_s(bc)))) \\
&= \pi'(a \triangleright (\varphi(r)\varphi(bc \cdot s))) \\
&= \pi'(a \triangleright (\varphi(r)\varphi(b \cdot s))) \\
&= \pi'(a \triangleright (\varphi(r(b \cdot s)))) \\
&\overset{2.1.15(ii)}{=} \pi'(a \triangleright (\varphi(r)(b \triangleright \varphi(s)))),
\end{aligned}
$$

para todos $a, b \in A$, $r, s \in S$, e, $c \in A$ tal que $c \cdot s = s$ e $bc \cdot s = b \cdot s$.

Portanto, π' é uma A-projeção sobre $\varphi(S)$. $\square$

Lema 2.1.19. *Nas condições anteriores, são equivalentes:*

(i) $\varphi(S)$ *é ideal de* $Y = A \triangleright \varphi(S)$*;*

(ii) $(a \triangleright \varphi(s))\varphi(t) = \varphi((a \cdot s)t)$*, para todos* $a \in A$*,* $s, t \in S$*;*

(iii) a ação parcial de A *em* S *é simétrica.*

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ $\varphi(S)$ é ideal de Y, assim $(a \triangleright \varphi(s))\varphi(t) \in \varphi(S)$, logo

$$\begin{aligned}
(a \triangleright \varphi(s))\varphi(t) &= \pi'((a \triangleright \varphi(s))\varphi(t)) \\
&= \pi'(a \triangleright \varphi(s))\varphi(t) \\
&= \pi'(a \triangleright \varphi(b \cdot s))\varphi(t) \\
&= \pi'(f_s(_ab))\varphi(t) \\
&= \varphi(f_s(ab))\varphi(t) \\
&= \varphi(ab \cdot s)\varphi(t) \\
&= \varphi(a \cdot s)\varphi(t) \\
&= \varphi((a \cdot s)t),
\end{aligned}$$

para todos $a \in A$, $s, t \in S$ e $b \in A$ tal que $b \cdot s = s$ e $ab \cdot s = a \cdot s$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Imediato pois sabemos do Lema 2.1.17 (ii) que $\varphi(S)$ é ideal à direita.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Tome $b \in A$ para o conjunto $\{s, t, (a \cdot s)t\}$. Logo,

$$\begin{aligned}
(a \triangleright \varphi(s))\varphi(t)(c) &= (f_s(_ab)f_t(_b))(c) \\
&= f_s(c_1 ab)f_t(c_2 b) \\
&= (c_1 ab \cdot s)(c_2 b \cdot t) \\
&= (c_1 a \cdot s)(c_2 \cdot t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= c \cdot ((a \cdot s)t) \\ &= cb \cdot ((a \cdot s)t) \\ &= \varphi((a \cdot s)t)(c), \end{aligned}$$

para todo $c \in A$. Portanto, $(a \triangleright \varphi(s))\varphi(t) = \varphi((a \cdot s)t)$, para todos $a \in A$, $s, t \in S$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ De fato,

$$\begin{aligned} c((a \cdot s)t) &= \varphi((a \cdot s)t)(c) \\ &= (a \triangleright \varphi(s))\varphi(t)(c) \\ &= (c_1 a \cdot s)(c_2 \cdot t), \end{aligned}$$

para todos $a, c \in A$, $s, t \in S$ e, $b \in A$ para o conjunto $\{s, t, (a \cdot s)t\}$. □

Teorema 2.1.20. *(Globalização) Nas condições anteriores, (Y, φ, π) é uma ação envolvente de S, onde $\pi = \pi'|_Y$.*

Demonstração. Observamos que os itens (i), (ii), (iii) e (v) da Definição 2.1.10 são satisfeitos imediatamente dos lemas e observações anteriores. E, além disso, no Lema 2.1.18 mostramos que a aplicação

$$\begin{aligned} \pi' : Hom^r(A, S) &\longrightarrow Hom^r(A, S) \\ f(\_b) &\longmapsto \varphi(f(b)), \end{aligned}$$

é uma A- projeção sobre $\varphi(S)$. Vamos verificar a propriedade de simetria para π'.

$$\begin{aligned} \pi'(a \triangleright (\pi'(b \triangleright \varphi(r))\varphi(s))) &= \pi'(a \triangleright (\pi'(b \triangleright \varphi(r))\pi'(\varphi(s)))) \\ &= \pi'(a \triangleright (\pi'((b \triangleright \varphi(r))\varphi(s)))) \\ &\overset{2.1.19(ii)}{=} \pi'(a \triangleright (\pi'(\varphi((b \cdot r)s)))) \\ &= \pi'(a \triangleright (\varphi((b \cdot r)s)))) \\ &= \pi'(a \triangleright ((b \triangleright \varphi(r))\varphi(s))), \end{aligned}$$

para todos $a, b \in A$, $r, s \in S$. Ou seja, π' é uma A-projeção simétrica.

Agora, mostraremos que a ação parcial sobre S é equivalente (via φ) a ação parcial induzida em $\varphi(S)$ via π'. De fato, tome $b \in A$ tal que $b \cdot r = r$ e $ab \cdot r = a \cdot r$, para todo $a \in A$. Logo,

$$\begin{aligned} a \cdot \varphi(r) &= \pi'(a \triangleright \varphi(r)) \\ &= \pi'(a \triangleright \varphi(b \cdot r)) \\ &= \pi'(a \triangleright f_r(\_b)) \\ &= \pi'(f_r(\_ab)) \\ &= \varphi(f_r(ab)) \\ &= \varphi(ab \cdot r) \\ &= \varphi(a \cdot r). \end{aligned}$$

Finalmente, consideramos $\pi = \pi'|_Y$ e o resultado segue. □

Observação 2.1.21. O Teorema de Globalização nos fornece a construção de uma ação envolvente, a qual chamaremos de ação envolvente padrão (Y, φ, π) de S.

Lema 2.1.22. *Com as notações anteriores, seja $(\overline{Y}, \theta, \overline{\pi})$ outra ação envolvente de S. Então, para todos $a \in A$, $r, s \in S$,*

$$\theta(r)(a \triangleright \theta(s)) = \theta(r(a \cdot s)).$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} \theta(r)(a \triangleright \theta(s)) &= \overline{\pi}(\theta(r)(a \triangleright \theta(s))) \\ &= \overline{\pi}(\theta(r))\overline{\pi}(a \triangleright \theta(s)) \\ &= \theta(r)(a \cdot \theta(s)) \\ &= \theta(r)\theta(a \cdot s) \\ &= \theta(r(a \cdot s)), \end{aligned}$$

para todos $a \in A$, $r, s \in S$. $\square$

Proposição 2.1.23. *Com as notações anteriores, seja* $(\overline{Y}, \theta, \overline{\pi})$ *outra ação envolvente de* S*. Então, a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \Phi : (\overline{Y}, \theta, \overline{\pi}) & \longrightarrow & (Y, \varphi, \pi) \\ \sum\limits_i a_i \triangleright \theta(r_i) & \longmapsto & \sum\limits_i a_i \triangleright \varphi(r_i), \end{array}$$

é um epimorfismo de A*-módulos álgebras.*

Demonstração. A aplicação Φ está bem definida. De fato, seja $x \in Y$ tal que $x = \sum\limits_i a_i \triangleright \theta(r_i) = 0$. Assim, para todo $a \in A$,

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & a \triangleright (\sum\limits_i a_i \triangleright \theta(r_i)) \\ & = & \sum\limits_i aa_i \triangleright \theta(r_i). \end{array}$$

Portanto,

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \overline{\pi}(\sum\limits_i aa_i \triangleright \theta(r_i)) \\ & = & \sum\limits_i aa_i \cdot \theta(r_i) \\ & = & \theta(\sum\limits_i aa_i \cdot r_i). \end{array}$$

Como θ é monomorfismo, temos que $\sum\limits_i aa_i \cdot r_i = 0$.

Portanto, para todos $a \in A$ e $b \in A$ tal que $b \cdot r_i = r_i$, $cb \cdot r_i = c \cdot r_i$, temos

$$\begin{array}{rcl} \Phi(x)(a) & = & \Phi(\sum\limits_i a_i \triangleright \theta(r_i))(a) \\ & = & (\sum\limits_i a_i \triangleright \varphi(r_i))(a) \\ & = & (\sum\limits_i a_i \triangleright \varphi(b \cdot r_i))(a) \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\sum_i a_i \triangleright f_{r_i}(\_b))(a)\\
&= (\sum_i f_{r_i}(\_a_i b))(a)\\
&= \sum_i f_{r_i}(a a_i b)\\
&= \sum_i (a a_i b) \cdot r_i\\
&= \sum_i a a_i \cdot r_i\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Logo, $\Phi(x) = 0$, ou seja, Φ está bem definida. E, a linearidade de Φ decorre da construção.

Agora, vamos mostrar que Φ é homomorfismo de álgebras.

$$
\begin{aligned}
\Phi((a \triangleright \theta(r))(b \triangleright \theta(t))) &\overset{(2.1.16)}{=} \Phi(a_1 \triangleright (\theta(r)(S(a_2)b \triangleright \theta(t))))\\
&\overset{(2.1.22)}{=} \Phi(a_1 \triangleright \theta(r(S(a_2)b \cdot t)))\\
&= a_1 \triangleright \varphi(r(S(a_2)b \cdot t))\\
&\overset{(2.1.15)}{=} a_1 \triangleright (\varphi(r)(S(a_2)b \triangleright \varphi(t)))\\
&\overset{(2.1.16)}{=} (a \triangleright \varphi(r))(b \triangleright \varphi(t))\\
&= \Phi(a \triangleright \theta(r))\Phi(b \triangleright \theta(t)),
\end{aligned}
$$

para todos $a, b \in A$ e $r, t \in S$,

E, é facil ver que Φ é homomorfismo de A-módulos. Portanto Φ é um homomorfismo de A-módulos álgebras.

Finalmente, Φ é um epimorfismo, uma vez que,

$$\sum_i a_i \triangleright \varphi(r_i) = \Phi(\sum_i a_i \triangleright \theta(r_i)),$$

para todo $\sum_i a_i \triangleright \varphi(r_i) \in A \triangleright \varphi(S)$. $\square$

Definição 2.1.24. Uma ação envolvente (Y, θ, π) é *minimal* se, para todo A-submódulo M de Y que satisfaz $\pi(M) = 0$, então $M = 0$.

Proposição 2.1.25. *A ação envolvente padrão* (Y, φ, π) *é minimal.*

Demonstração. Vamos provar o resultado para os submódulos cíclicos, pois dado M um submódulo de Y tal que $\pi(M) = 0$ e $x \in M$, considerando $L = \langle x \rangle$, temos que $\pi(L) = 0$. Assim, se mostrarmos a proposição para os submódulos cíclicos, obtemos que $L = 0$, ou seja, $x = 0$. Logo, $M = 0$.

Portanto, consideremos M um A-submódulo cíclico de Y tal que $\pi(M) = 0$. Claramente, $M = \langle \sum_i a_i \triangleright \varphi(r_i) \rangle = \langle A \triangleright (\sum_i a_i \triangleright \varphi(r_i)) \rangle$.

Das afirmações, temos para todo $b \in A$,

$$\begin{aligned} 0 &= \pi(b \triangleright (\sum_i a_i \triangleright \varphi(r_i))) \\ &= \pi(\sum_i ba_i \triangleright \varphi(r_i)) \\ &= \pi(\sum_i ba_i \triangleright \varphi(c \cdot r_i)) \\ &= \pi(\sum_i ba_i \triangleright f_{r_i}(\_c)) \\ &= \pi(\sum_i f_{r_i}(\_ba_ic)) \\ &= \varphi(\sum_i f_{r_i}(ba_ic)) \\ &= \varphi(\sum_i (ba_ic) \cdot r_i). \end{aligned}$$

Como φ é um monomorfismo, segue que $\sum_i (ba_ic) \cdot r_i = 0$ para todo $b \in A$. Logo,

$$\begin{aligned} \sum_i (a_i \triangleright \varphi(r_i))(b) &= \sum_i (a_i \triangleright \varphi(c \cdot r_i))(b) \\ &= \sum_i a_i \triangleright f_{r_i}(\_c)(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_i f_{r_i}(\_a_i c)(b) \\ &= \sum_i f_{r_i}(b a_i c) \\ &= \sum_i (b a_i c) \cdot r_i \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $b \in A$. Portanto, $\sum_i a_i \triangleright \varphi(r_i) = 0$, o que implica $M = 0$. $\square$

Teorema 2.1.26. *Quaisquer duas ações envolventes minimais são isomorfas como A-módulos álgebras.*

Demonstração. Vimos anteriormente que a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : (\overline{Y}, \theta, \overline{\pi}) &\longrightarrow (Y, \varphi, \pi) \\ \sum_i a_i \triangleright \theta(r_i) &\longmapsto \sum_i a_i \triangleright \varphi(r_i) \end{aligned}$$

é um epimorfismo de A-módulos álgebras. Agora, vamos supor que $\overline{Y}$ é minimal e provar que Φ é injetora. Seja $x = \sum_i a_i \triangleright \theta(r_i) \in \overline{Y}$ tal que $\Phi(x) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i (a_i \triangleright \varphi(r_i))(c) \\ &= \sum_i (a_i \triangleright \varphi(b \cdot r_i))(c) \\ &= \sum_i (f_{r_i}(\_a_i b))(c) \\ &= \sum_i c a_i b \cdot r_i. \\ &= \sum_i c a_i \cdot r_i, \end{aligned}$$

para todo $c \in A$. Em particular, podemos tomar $c \in A$ de modo que $c a_i = a_i$, logo $\sum_i a_i \cdot r_i = 0$ e,

$$0 = \theta(\sum_i a_i \cdot r_i)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_i a_i \cdot \theta(r_i) \\ &= \overline{\pi}(\sum_i a_i \triangleright \theta(r_i)), \end{aligned}$$

e, como $\overline{Y}$ é minimal, temos que $x = \sum_i a_i \triangleright \theta(r_i) = 0$. $\square$

Observação 2.1.27. Se A e S possuem unidade 1_A e 1_S, respectivamente, temos que $Hom^r(A, S) = Hom(A, S)$. De fato, basta basta tomar $b = 1_A$ e $f = f(\_1_A)$ para toda $f \in Hom(A, S)$.

E, nesse caso particular, definimos

$$\begin{aligned} \pi' : Hom(A, S) &\longrightarrow Hom(A, S) \\ f &\longmapsto \pi'(f) = \varphi(f(1_A)) \end{aligned}$$

e, assim temos

$$\begin{aligned} \pi'(a \triangleright \varphi(s)) &= \varphi((a \triangleright \varphi(s))(1_A)) \\ &= \varphi((a \triangleright f_s(\_1_A))(1_A)) \\ &= \varphi(f_s(\_a)(1_A)) \\ &= \varphi(f_s(a)) \\ &= \varphi(a \cdot s) \\ &= \varphi(1_S(a \cdot s)) \\ &\overset{(2.1.15)}{=} \varphi(1_S)(a \triangleright \varphi(s)), \end{aligned}$$

para todos $a \in A$ e $s \in S$.

E, $a \cdot \varphi(s) = \pi'(a \triangleright \varphi(s)) = \varphi(1_S)(a \triangleright \varphi(s))$, para todos $a \in A$ e $s \in S$.

Ou seja, as Definições 2.1.10 e 1.5.2 coincidem e mais ainda, obtemos uma generalização da ação envolvente padrão, construída em [2], para o caso em que A é uma álgebra de Hopf e S é uma álgebra com unidade.

2.2 Globalização para Comódulos Álgebra Parciais

Neste capítulo, consideramos A uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular e Y uma álgebra com produto não degenerado. Além disso, as coações serão consideradas à direita, pois o conceito à esquerda é definido de modo similar.

2.2.1 Coações Parciais da Álgebra de Hopf de Multiplicadores

No contexto de álgebras de Hopf de multiplicadores, a Definição 1.5.3 é estendida da seguinte forma.

Definição 2.2.1. ([15]) Dizemos que Y é um A-*comódulo álgebra parcial à direita* se existe um homomorfismo de álgebras injetor $\rho : Y \longrightarrow M(Y \otimes A)$ e um idempotente $E \in M(Y \otimes A)$ tal que $(1 \otimes A)E$ e $E(1 \otimes A) \subseteq M(Y) \otimes A$ satisfazendo

(i) $\rho(Y)(1 \otimes A) \subseteq E(Y \otimes A) \quad \text{e} \quad (1 \otimes A)\rho(Y) \subseteq (Y \otimes A)E$;

(ii) $(\rho \otimes \imath_A)(\rho(y)) = (E \otimes 1)(\imath_Y \otimes \Delta_A)(\rho(y))$,

para todo $y \in Y$. Nesse caso ρ é chamada de uma coação parcial de A em Y. Usaremos, em alguns casos, a terna (Y, ρ, E) para denotar o A-comódulo álgebra parcial Y.

Dizemos que a coação é *simétrica* se além dos itens acima ρ satisfazer

(iii) $(\rho \otimes \imath_A)(\rho(y)) = (\imath_Y \otimes \Delta_A)(\rho(y))(E \otimes 1)$, para todo $y \in Y$.

Analogamente, definimos A-*comódulo álgebra à esquerda*.

Observação 2.2.2. Pelo fato de Δ_A ser um homomorfismo não degenerado, o lado direito das igualdades (ii) e (iii) fazem sentido, pois podemos pensar na extensão da aplicação $(\imath_Y \otimes \Delta_A)$, o que não ocorre com o lado esquerdo. Logo, utilizando o item (i), damos um sentido a esses itens, da seguinte forma:

$$(\rho \otimes \imath_A)(\rho(y)(1 \otimes a)) \;=\; (E \otimes 1)(\imath_Y \otimes \Delta_A)(\rho(y))(1 \otimes 1 \otimes a) \tag{2.6}$$

$$(\rho \otimes \imath_A)(\rho(y)(1 \otimes a)) \;=\; (\imath_Y \otimes \Delta_A)(\rho(y))(E \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes a). \tag{2.7}$$

Observação 2.2.3. Se A e Y possuem unidade, consideramos $E = \rho(1_Y)$ e observamos que o item (i) de 1.5.3 equivale a injetividade de ρ, assim obtemos a Definição 1.5.3.

Lema 2.2.4. ([15]) *Seja (Y, ρ, E) um A-comódulo álgebra parcial, então*

$$E\rho(y) = \rho(y) \quad e \quad \rho(y)E = \rho(y), \tag{2.8}$$

para todo $y \in Y$.

2.2.2 Globalização para Comódulos Álgebra Parciais sobre Álgebras

Nesta seção, apresentamos a definição de coação envolvente para coações parciais de uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular sobre uma álgebra, e também mostramos que todo comódulo álgebra parcial, sob certa condição, admite envolvente. No contexto de coações parciais de álgebras de Hopf, esta construção foi apresentada em [3], que é de fato, uma das principais referências para a generalização que apresentamos a seguir.

Definição 2.2.5. Seja $A = (A, \Delta)$ uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular tal que existe $e \in A$ idempotente central não nulo sendo $\Delta(e)(e \otimes 1) = e \otimes e$. Então todo A-comódulo álgebra parcial à direita S é dito **quase counitário**.

Exemplo 2.2.6. Sejam A_G a álgebra das funções com suporte finito de um grupo G em $\Bbbk$ definida no Exemplo 1.1.10 e, considere $\delta_p \in A_G$ tal que $p^2 = p$, ou seja, p é o elemento neutro do grupo. Assim, temos que δ_p é um idempotente central tal que $\Delta(\delta_p)(\delta_p \otimes 1) = \delta_p \otimes \delta_p$. E, portanto todo A_G-comódulo álgebra parcial à direita é quase counitário.

No que segue, sempre que mencionarmos um A-comódulo álgebra parcial à direita, este será considerado quase counitário.

Definição 2.2.7. Seja $S = (S, \overline{\rho}, E)$ um A-comódulo álgebra parcial à direita. Dizemos que $((Y, \rho), \theta, \pi)$ é uma **coação envolvente**, ou globalização, de S se satisfaz:

(i) Y é um A-comódulo álgebra à direita via ρ;

(ii) A aplicação $\theta : S \longrightarrow Y$ é um monomorfismo de álgebras;

(iii) A subálgebra $\theta(S)$ é um ideal à direita de Y;

(iv) $(\theta \otimes \imath_A)(\overline{\rho}(s)(1 \otimes e)) = (\pi \otimes \imath_A)(\rho(\theta(s))(1 \otimes e))$, sendo π uma projeção de álgebras de Y sobre $\theta(S)$ tal que:

$$(\pi \otimes \imath_A)(\rho(\pi(y))(1 \otimes e)) = \overline{E}(\pi \otimes \imath_A)(\rho(y)(1 \otimes e)) \quad (E\text{-projeção})$$

onde $\overline{E} = \Phi(E) \in M(\theta(S) \otimes A)$ é definido para todos $s \in S$, $a \in A$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \overline{\Phi(E)}(\theta(s) \otimes a) &= (\theta \otimes \imath_A)(E(s \otimes a)), \\ \overline{\overline{\Phi(E)}}(\theta(s) \otimes a) &= (\theta \otimes \imath_A)((s \otimes a)E). \end{aligned} \tag{2.9}$$

(v) Y é gerado por $\theta(S)$ como um A-comódulo álgebra.

Para construir a globalização, inicialmente, vamos apresentar algumas notações e considerações importantes. Para mais detalhes, citamos [16] e [28].

Seja A' o espaço vetorial dual de A e $A'_c = \{\sum_i \omega_i(a_i\_b_i), \omega_i \in A', a_i, b_i \in A\}$. O espaço A'_c possui uma estrutura de álgebra assim como o espaço $Hom^r(A, \Bbbk)$.

Observação 2.2.8. Se $\mathcal{T}$ é A-comódulo à direita via ρ, podemos definir uma aplicação linear $\triangleright_\rho$, como segue

$$\begin{aligned} \omega(a\_b) \triangleright_\rho t &= (\imath_{\mathcal{T}} \otimes \omega(a\_))\rho(t)(1 \otimes b) \\ &= (\imath_{\mathcal{T}} \otimes \omega)((1 \otimes a)\rho(t)(1 \otimes b)), \end{aligned}$$

para todos $t \in \mathcal{T}$ e $\omega(a\_b) \in A'_c$. Assim, $\mathcal{T}$ é um A'_c-módulo à esquerda via $\triangleright_\rho$.

Agora, desejamos saber quais A'_c-módulos são induzidos de comódulos. Para isso, seja $\mu : A'_c \otimes \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ uma aplicação linear tal que $\mathcal{T}$ é um A'_c-módulo à esquerda via μ. Definimos a aplicação linear injetiva ν_μ de $\mathcal{T}$ em $Hom(A'_c, \mathcal{T})$ por $\nu_\mu(t)(\omega) = \mu(\omega \otimes t)$, para todos $t \in \mathcal{T}$, $\omega \in A'_c$.

E, definimos também a inclusão canônica

$$\eta : \mathcal{T} \otimes A \longrightarrow Hom(A'_c, \mathcal{T})$$

onde $\eta(t \otimes a)(\omega) := \omega(a)t$, para todos $t \in \mathcal{T}$, $a \in A$ e $\omega \in A'_c$.

Usando estas notações, apresentamos a seguinte definição.

Definição 2.2.9. ([28]) Um A'_c-módulo à esquerda $\mathcal{T}$ (via μ) é chamado de *módulo racional* se ambos $\nu_\mu(\mathcal{T})\beta(A)$ e $\nu_\mu(\mathcal{T})\beta'(A)$ estão contidos em $\eta(\mathcal{T} \otimes A)$, onde $\beta(a)(\omega(b\_c)) := \omega(b\_ac)$ e, $\beta'(a)(\omega(b\_c)) := \omega(ba\_c)$, para todos $a \in A$ e $\omega(b\_c) \in A'_c$.

Proposição 2.2.10. ([28]) *Um A'_c-módulo à esquerda $\mathcal{T}$ é racional se, e somente se é induzido de um A-comódulo à direita $\mathcal{T}$.*

Lema 2.2.11. *Sejam $\mathcal{T}$ um A-comódulo álgebra à direita via ρ e $U \subseteq \mathcal{T}$ uma subálgebra. A álgebra $V := \langle A'_c \triangleright_\rho U\rangle \subseteq \mathcal{T}$ é o menor A subcomódulo álgebra contendo U.*

Demonstração. Vamos apresentar a demonstração dividindo-a em afirmações.

1. $A'_c \triangleright_\rho U$ é um A'_c-módulo.

Segue imediatamente da Observação 2.2.8 que $A'_c \triangleright_\rho U$ é um A'_c-módulo.

2. $A'_c \triangleright_\rho U$ é um A'_c-módulo racional.

2.1 Observamos que soma de módulos racionais é um módulo racional, pela Proposição 3.5 de [28]. Consequentemente, para mostrar que $A'_c \triangleright_\rho U$ é um A'_c-módulo racional, basta mostrar que $A'_c \triangleright_\rho u$ é um A'_c-módulo racional para cada $u \in U$.

Consideramos $\rho(u)(1 \otimes a) \in \mathcal{T} \otimes A$, assim podemos escrever

$$\rho(u)(1 \otimes a) = \sum_i t_{i,a} \otimes a_i$$

onde $\{a_i\}$ é base de A. Denote por $V_u = \langle t_{i,a}\rangle_{alg}$ para cada $a \in A$.

2.2 Vamos mostrar que V_u é um A-comódulo que contém $u \in U$.

• $u \in V_u$.

De fato, seja $a \in A$ tal que $\varepsilon_A(a) = 1_{\Bbbk}$, assim

$$\begin{aligned} u &= (\imath_{\mathcal{T}} \otimes \varepsilon_A)\rho(u) \\ &= (\imath_{\mathcal{T}} \otimes \varepsilon_A)(\rho(u)(1 \otimes a)) \\ &= (\imath_{\mathcal{T}} \otimes \varepsilon_A)(\sum_i t_{i,a} \otimes a_i) \\ &= \sum_i t_{i,a}\varepsilon_A(a_i) \in V_u. \end{aligned}$$

• V_u é um A-comódulo.

Sabemos que, $(\rho\otimes\imath_A)(\rho(u)(1\otimes a))(1\otimes c\otimes 1)=(\imath_{\mathcal{T}}\otimes\Delta_A)(\rho(u))(1\otimes c\otimes a)$, para todos $u\in U$, $a,c\in A$, pois ρ é coação global. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_i \rho(t_{i,a})(1\otimes c)\otimes a_i &= (\rho\otimes\imath_A)(\sum_i t_{i,a}\otimes a_i)(1\otimes c\otimes 1)\\
&= (\rho\otimes\imath_A)(\rho(u)(1\otimes a))(1\otimes c\otimes 1)\\
&= (\imath_{\mathcal{T}}\otimes\Delta_A)(\rho(u))(1\otimes c\otimes a)\\
&= (\imath_{\mathcal{T}}\otimes\Delta_A)(\rho(u))(1\otimes\sum_k \Delta_A(c_k)(1\otimes d_k))\\
&= (\imath_{\mathcal{T}}\otimes\Delta_A)(\rho(u))(\imath_{\mathcal{T}}\otimes\Delta_A)(1\otimes\sum_k c_k)(1\otimes 1\otimes d_k)\\
&= (\imath_{\mathcal{T}}\otimes\Delta_A)(\sum_k \rho(u)(1\otimes c_k))(1\otimes 1\otimes d_k)\\
&= (\imath_{\mathcal{T}}\otimes\Delta_A)(\sum_{k,j} t_{j,c_k}\otimes a_{kj})(1\otimes 1\otimes d_k)\\
&= \sum_{k,j} t_{j,c_k}\otimes\Delta_A(a_{kj})(1\otimes d_k)\\
&= \sum_{k,j} t_{j,c_k}\otimes\sum_{k,j,l}\tilde{a}_{kjl}\otimes a_{kjl}\\
&= \sum_{k,j,l} t_{j,c_k}\otimes\tilde{a}_{kjl}\otimes a_{kjl},
\end{aligned}$$

onde $\{a_i\}_{i\in I}$ é base de A. Observamos que, não necessariamente $kjl=i$, assim basta considerar o funcional linear $\delta_q\in A'$ definido por $\delta_q(a_p)=1_{\Bbbk}$ se $p=q$ e $\delta_q(a_p)=0$ se $p\neq q$, e aplicar $\imath\otimes\imath\otimes(\delta_i+\delta_{kjl})$, na igualdade obtida, para concluirmos que $\rho(t_{i,a})(1\otimes c)=\sum\limits_{k,j,l} t_{j,c_k}\otimes\tilde{a}_{kjl}\in V_u\otimes A$.

Logo, $\rho(t_{i,a})(t_{l,b}\otimes c)=\sum\limits_{k,j,l} t_{j,c_k}t_{l,b}\otimes\tilde{a}_{kjl}\in V_u\otimes A$. Com isso, temos que $\rho(V_u)\in M(V_u\otimes A)$. Ou seja, V_u é um A-comódulo que contém u.

Portanto, V_u é um A'_c-submódulo racional de $\mathcal{T}$ contendo u e, consequentemente contendo $A'_c\ \triangleright_\rho u$.

2.3 $V_u = A'_c \triangleright_\rho u$.

Basta mostrar que $V_u \subseteq A'_c \triangleright_\rho u$. De fato, dados $u \in U$, $a \in A$ e $\rho(u)(1 \otimes a) = \sum_i t_{i,a} \otimes a_i$, considere $e \in A$ unidade local para o conjunto $\{a_i\}$. Então

$$\begin{aligned} t_{j,a} &= \sum_i t_{i,a}\delta_j(a_i) \\ &= (\imath_{\mathcal{T}} \otimes \delta_j)((1 \otimes e)(\sum_i t_{i,a} \otimes a_i)) \\ &= (\imath_{\mathcal{T}} \otimes \delta_j)((1 \otimes e)\rho(u)(1 \otimes a)) \\ &= \delta_j(e\_a) \triangleright_\rho u, \end{aligned}$$

onde $\delta_j(e\_a) \in A'_c$. Ou seja $V_u \subseteq A'_c \triangleright_\rho u$. Logo, segue a igualdade.

Portanto, $A'_c \triangleright_\rho u$ é um A'_c-submódulo à esquerda racional de $\mathcal{T}$. Assim, $A'_c \triangleright_\rho U$ é um A'_c-módulo à esquerda racional (pois, a soma de módulos racionais é um módulo racional). E, pela Proposição 2.2.10, segue que $A'_c \triangleright_\rho U$ é um A-comódulo à direita via ρ, ou seja, $A'_c \triangleright_\rho U$ é um A-subcomódulo de $\mathcal{T}$.

3. $V = \langle A'_c \triangleright_\rho U\rangle_{alg}$ é um A-subcomódulo.

Sabemos que $\langle A'_c \triangleright_\rho U\rangle_{alg} = \prod_j(\sum_i f_i^j \triangleright_\rho u_i^j)$, $f_i^j \in A'_c$, $u_i^j \in U$, assim um elemento de V é um produto de elementos de $\mathcal{S} = A'_c \triangleright_\rho U$. Como $\mathcal{S}$ é um A-comódulo segue que $\rho(\mathcal{S}) \subseteq M(\mathcal{S} \otimes A)$, vamos mostrar que $\rho(V) \subseteq M(V \otimes A)$. De fato,

$$\begin{aligned} \rho(v)(u \otimes a) &= \rho(ss')(tt' \otimes a) \\ &= \rho(s)\rho(s')(t \otimes a)(t' \otimes 1) \\ &= (r \otimes b)(t' \otimes 1) \\ &= rt' \otimes b \in V \otimes A, \end{aligned}$$

para todos $v = ss', u = tt' \in V$ e $a \in A$.

Além disso, precisamos mostrar que $\rho(V)(1 \otimes A) \subseteq V \otimes A$ e $(1 \otimes A)\rho(V) \subseteq V \otimes A$.

$$(1 \otimes a)\rho(v) = (1 \otimes a)\rho(ss')$$

$$
\begin{aligned}
&= (1 \otimes a)\rho(s)\rho(s') \\
&= (t \otimes b)\rho(s') \\
&= (t \otimes b)(1 \otimes e)\rho(s') \\
&= (t \otimes b)(t' \otimes c') \\
&= tt' \otimes bc' \in V \otimes A,
\end{aligned}
$$

para todos $v \in V$, $a \in A$, $e \in A$ tal que $be = b$. Logo, $(1 \otimes A)\rho(V) \subseteq V \otimes A$. Analogamente, mostramos a outra inclusão. Portanto, V é um A-subcomódulo de $\mathcal{T}$.

4. V é o menor A-subcomódulo contendo U.

De fato, suponhamos que $U \subseteq M$ com M um A-subcomódulo de $\mathcal{T}$, então M é um A'_c-módulo via $\triangleright_\rho$. Assim $A'_c \triangleright_\rho U \subseteq A'_c \triangleright_\rho M \subseteq M$, mas $V = \langle A'_c \triangleright_\rho U\rangle_{alg}$, então $V \subseteq M$.

5. V é um A-comódulo álgebra.

Sabemos que V é um A-comódulo, e $\mathcal{T}$ é A-comódulo álgebra, assim $V \subseteq \mathcal{T}$ implica que V também é A-comódulo álgebra. $\square$

Teorema 2.2.12. *Todo A-comódulo álgebra parcial quase counitário é globalizável.*

Demonstração. Seja $(S, \overline{\rho}, E)$ um A-comódulo álgebra parcial à direita. Considere $(S \otimes A, \rho = \imath_S \otimes \Delta_A)$ como um A-comódulo álgebra (global) à direita, e

$$V = \langle A'_c \triangleright_\rho U\rangle_{alg} \subseteq S \otimes A,$$

onde $U = \overline{\rho}(S)(1 \otimes e) \subseteq S \otimes A$.

Observamos que U é uma subálgebra de $S \otimes A$ pois, para todos $s, t \in S$, temos

$$
\begin{aligned}
\overline{\rho}(s)(1 \otimes e)\overline{\rho}(t)(1 \otimes e) &= \overline{\rho}(s)(1 \otimes e)(r \otimes a) \\
&= \overline{\rho}(s)(r \otimes ea)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{\rho}(s)(r \otimes ae) \\
&= \overline{\rho}(s)\overline{\rho}(t)(1 \otimes e)(1 \otimes e) \\
&= \overline{\rho}(st)(1 \otimes e^2) \\
&= \overline{\rho}(st)(1 \otimes e) \in U.
\end{aligned}
$$

Definimos:

$$
\begin{array}{rcl}
\theta : S & \longrightarrow & V \\
s & \longmapsto & \overline{\rho}(s)(1 \otimes e)
\end{array}
\qquad \text{e} \qquad
\begin{array}{c}
\pi : V \longrightarrow V \\
v \longmapsto E(1 \otimes e)(v).
\end{array}
$$

Então, $((V, \rho = \imath_S \otimes \Delta_A), \theta, \pi)$ é uma coação envolvente, ou globalização, de $(S, \overline{\rho}, E)$.

• θ é monomorfismo de álgebras.

Para mostrarmos que θ é injetor, lembramos que, se $e^2 = e$, $\Delta(e)(e \otimes 1) = e \otimes e$, temos que $\varepsilon_A(e) = 1_{\Bbbk}$, pois $\varepsilon_A(e) = \varepsilon_A(e^2)$, assim $\varepsilon_A(e) = 1_{\Bbbk}$ ou $\varepsilon_A(e) = 0$, mas por outro lado,

$$
\begin{aligned}
e &= ((\imath_A \otimes \varepsilon_A)\Delta_A(e))e \\
&= (\imath_A \otimes \varepsilon_A)(\Delta(e)(e \otimes 1)) \\
&= (\imath_A \otimes \varepsilon_A)(e \otimes e) \\
&= e\varepsilon_A(e)
\end{aligned}
$$

logo $\varepsilon_A(e) = 1_{\Bbbk}$. Assim, se $\theta(s) = 0$, então $\overline{\rho}(s)(1 \otimes e) = 0$ e,

$$0 = (\imath_S \otimes \varepsilon_A)(\overline{\rho}(s)(1 \otimes e)) = s\varepsilon_A(e) = s.$$

E, além disso,

$$
\begin{aligned}
\theta(s)\theta(t) &= \overline{\rho}(s)(1 \otimes e)\overline{\rho}(t)(1 \otimes e) \\
&= \overline{\rho}(st)(1 \otimes e)
\end{aligned}
$$

$$= \quad \theta(st),$$

para todos $s, t \in S$. Portanto θ é monomorfismo de álgebras.

- A subálgebra $\theta(S)$ é um ideal à direita de V.

Temos que $V = \langle A'_c \triangleright_\rho U\rangle_{alg}$, assim V é gerado por elementos da forma:

$$\begin{aligned}
\omega(b_c) \triangleright_\rho u &= (\imath \otimes \omega)((1 \otimes b)\rho(u)(1 \otimes c)) \\
&= (\imath \otimes \omega)((1 \otimes 1 \otimes b)(\imath_S \otimes \Delta_A)(\overline{\rho}(s)(1 \otimes e))(1 \otimes 1 \otimes c)) \\
&= (\imath_S \otimes \imath_A \otimes \omega(b_))((\imath_S \otimes \Delta_A)(\overline{\rho}(s)(1 \otimes e))(1 \otimes 1 \otimes c)) \\
&= (\imath_S \otimes \imath_A \otimes \omega(b_))((\imath_S \otimes \Delta_A)(s^0 \otimes s^1 e)(1 \otimes 1 \otimes c)) \\
&= (\imath_S \otimes \imath_A \otimes \omega(b_))(s^0 \otimes \Delta_A(s^1 e)(1 \otimes c)) \\
&= (\imath_S \otimes \imath_A \otimes \omega(b_))(s^0 \otimes (s^1 e)_1 \otimes (s^1 e)_2 c) \\
&= s^0 \otimes (s^1 e)_1 \omega(b(s^1 e)_2 c),
\end{aligned}$$

onde $\omega(b\_c) \in A'_c$, $u = \overline{\rho}(s)(1 \otimes e) \in U$.

Agora, vamos mostrar que $\theta(r)v \in \theta(S)$, para todos $r \in S$, $v \in V$. De fato,

$$\begin{aligned}
\theta(r)v &= \overline{\rho}(r)(1 \otimes e)(s^0 \otimes (s^1 e)_1 \omega(b(s^1 e)_2 c)) \\
&= \overline{\rho}(r)(s^0 \otimes (s^1 e)_1 e \omega(b(s^1 e)_2 c)) \\
&\overset{2.2.4}{=} \overline{\rho}(r)E(s^0 \otimes (s^1 e)_1 e)\omega(b(s^1 e)_2 c) \\
&= \overline{\rho}(r)(\imath_S \otimes \imath_A \otimes \omega(b_))(E(s^0 \otimes (s^1 e)_1 e) \otimes (s^1 e)_2 c) \\
&\overset{(*)}{=} \overline{\rho}(r)(\imath_S \otimes \imath_A \otimes \omega(b_))(s^{00} \otimes s^{01} e \otimes s^1 ec) \\
&= \overline{\rho}(r)(s^{00} \otimes s^{01} e \otimes \omega(bs^1 ec) \\
&= \overline{\rho}(r)\overline{\rho}(s^0)(1 \otimes e)\omega(bs^1 ec) \\
&= \overline{\rho}(rs^0)(1 \otimes e)\omega(bs^1 ec) \\
&= \theta(rs^0)\omega(bs^1 ec) \in \theta(S).
\end{aligned}$$

Justificativa (∗): Segue da igualdade (2.6) que
$s^{00} \otimes s^{01}a \otimes s^1 b = \sum_i E(s^0 \otimes (s^1 a_i)_1 b_i) \otimes (s^1 a_i)_2$, onde $a \otimes b = \sum_i \Delta(a_i)(b_i \otimes 1)$, $s \in S$ e $a, b \in A$.

Agora, vamos mostrar o item (iv) da definição de coação envolvente. Inicialmente, faremos considerações sobre a projeção π.

• π é uma projeção de álgebras de V sobre $\theta(S)$.

1. $\pi(\theta(s)) = \theta(s)$, $s \in S$.

$$\begin{aligned}
\pi(\theta(s)) &= \pi(\overline{\rho}(s)(1 \otimes e)) \\
&= E(1 \otimes e)\overline{\rho}(s)(1 \otimes e) \\
&= E(1 \otimes e)(r \otimes a) \\
&= E(r \otimes ae) \\
&= E\overline{\rho}(s)(1 \otimes e)(1 \otimes e) \\
&= E\overline{\rho}(s)(1 \otimes e) \\
&\overset{2.2.4}{=} \overline{\rho}(s)(1 \otimes e) \\
&= \theta(s).
\end{aligned}$$

2. $\pi(V) = \theta(S)$.

Da igualdade anterior, temos que $\theta(S) \subseteq \pi(V)$. Sabemos também que todo elemento de V é gerado por elementos da forma $v = s^0 \otimes (s^1 e)_1 \omega(b(s^1 e)_2 c)$. Assim

$$\begin{aligned}
\pi(v) &= \pi(s^0 \otimes (s^1 e)_1)\omega(b(s^1 e)_2 c) \\
&= E(1 \otimes e)(s^0 \otimes (s^1 e)_1)\omega(b(s^1 e)_2 c) \\
&= E(s^0 \otimes (s^1 e)_1 e)\omega(b(s^1 e)_2 c) \\
&= s^{00} \otimes s^{01} e_1 e \omega(b s^1 e_2 c) \\
&= s^{00} \otimes s^{01} e \omega(b s^1 e c) \\
&= \overline{\rho}(s^0)(1 \otimes e)\omega(b s^1 e c)
\end{aligned}$$

$$= \quad \theta(s^0)\omega(bs^1ec) \in \theta(S),$$

e disso segue que $\pi(V) \subseteq \theta(S)$. Portanto, segue a igualdade.

3. π é homomorfismo de álgebras.

Sejam $v, u \in V$, denotamos $v = s \otimes a$ e $u = r \otimes b$, assim

$$\begin{aligned}
\pi(vu) &= \pi(sr \otimes ab) \\
&= E(1 \otimes e)(sr \otimes ab) \\
&= E(1 \otimes e)(s \otimes a)(r \otimes b) \\
&\overset{(*)}{=} \overline{\rho}(t)(1 \otimes e)(r \otimes b) \\
&= \overline{\rho}(t)(r \otimes be) \\
&\overset{2.2.4}{=} \overline{\rho}(t)E(r \otimes be) \\
&\overset{2.2.1}{=} \overline{\rho}(t)EE(r \otimes be) \\
&= \overline{\rho}(t)EE(r \otimes b)(1 \otimes e)(1 \otimes e) \\
&= \overline{\rho}(t)E(1 \otimes e)E(r \otimes b)(1 \otimes e) \\
&= \overline{\rho}(t)(1 \otimes e)E(r \otimes b)(1 \otimes e) \\
&= E(1 \otimes e)(s \otimes a)E(1 \otimes e)(r \otimes b) \\
&= \pi(v)\pi(u).
\end{aligned}$$

Justificativa $(*)$: Segue de 2. $\pi(V) = \theta(S)$.

4. π é uma $\overline{E}$-projeção, onde $\overline{E} = \Phi(E)$.

Precisamos mostrar que π satisfaz:

$$(\pi \otimes \imath_A)(\rho(\pi(v))(1 \otimes 1 \otimes e)) = \overline{E}(\pi \otimes \imath_A)(\rho(v)(1 \otimes 1 \otimes e)). \qquad (E\text{-projeção})$$

Sabemos de (2) que, $\pi(v) = \overline{\rho}(s^0)(1 \otimes e)\omega(bs^1ec)$, onde $v = s^0 \otimes (s^1e)_1\omega(b(s^1e)_2c)$.

Assim, por um lado, temos

$$(\pi \otimes \imath_A)(\rho(\pi(v))(1 \otimes 1 \otimes e)) \quad = \quad (\pi \otimes \imath_A)((\imath_S \otimes \Delta_A)(\overline{\rho}(s^0)(1 \otimes e)\omega(bs^1ec))(1 \otimes 1 \otimes e))$$

$$
\begin{aligned}
&= (\pi \otimes \imath_A)((\imath_S \otimes \Delta_A)(s^{00} \otimes s^{01} e\omega(bs^1 ec))(1 \otimes 1 \otimes e))\\
&= (\pi \otimes \imath_A)(s^{00} \otimes \Delta_A(s^{01} e)(1 \otimes e))\omega(bs^1 ec)\\
&= (\pi \otimes \imath_A)(s^{00} \otimes (s^{01} e)_1 \otimes (s^{01} e)_2 e)\omega(bs^1 ec)\\
&= (E \otimes 1)(1 \otimes e \otimes 1)(s^{00} \otimes (s^{01} e)_1 \otimes (s^{01} e)_2 e)\omega(bs^1 ec)\\
&= (E \otimes 1)(s^{00} \otimes (s^{01} e)_1 e \otimes (s^{01} e)_2 e)\omega(bs^1 ec)\\
&= (E \otimes 1)((\imath_S \otimes \Delta_A)(s^{00} \otimes s^{01} e))(1 \otimes e \otimes e)\omega(bs^1 ec)\\
&= (E \otimes 1)((\imath_S \otimes \Delta_A)(\overline{\rho}(s^0)(1 \otimes e)))(1 \otimes e \otimes e)\omega(bs^1 ec)\\
&= (E \otimes 1)(\imath_S \otimes \Delta_A)\overline{\rho}(s^0)(1 \otimes \Delta_A(e)(e \otimes e))\omega(bs^1 ec)\\
&= (E \otimes 1)(\imath_S \otimes \Delta_A)\overline{\rho}(s^0)(1 \otimes e_1 e \otimes e_2 e)\omega(bs^1 ec)\\
&= (E \otimes 1)(\imath_S \otimes \Delta_A)\overline{\rho}(s^0)(1 \otimes e \otimes e)\omega(bs^1 ec)\\
&\overset{(2.6)}{=} (\overline{\rho} \otimes \imath_A)(\overline{\rho}(s^0)(1 \otimes e))(1 \otimes e \otimes 1)\omega(bs^1 ec)\\
&= (\overline{\rho}(s^{00})(1 \otimes e) \otimes s^{01} e)\omega(bs^1 ec).
\end{aligned}
$$

Por outro lado, inicialmente, observamos que

$$
\begin{aligned}
(\imath_A \otimes \Delta_A)((e \otimes 1)\Delta_A(s^1 e))(1 \otimes 1 \otimes c) &= (e \otimes 1 \otimes 1)(\imath_A \otimes \Delta_A)\Delta_A(s^1 e)(1 \otimes 1 \otimes c)\\
&= (e \otimes 1 \otimes 1)(\Delta_A \otimes \imath_A)\Delta_A(s^1 e)(1 \otimes 1 \otimes c)\\
&= (e \otimes 1 \otimes 1)(\Delta_A \otimes \imath_A)(\Delta_A(s^1 e)(1 \otimes c))\\
&= (e \otimes 1)\Delta_A((s^1 e)_1) \otimes (s^1 e)_2 c\\
&= e(s^1 e)_{11} \otimes (s^1 e)_{12} \otimes (s^1 e)_2 c.
\end{aligned}
$$

e,

$$
\begin{aligned}
(\imath_A \otimes \Delta_A)((e \otimes 1)\Delta_A(s^1 e))(1 \otimes 1 \otimes c) &= (\imath_A \otimes \Delta_A)(e(s^1 e)_1 \otimes (s^1 e)_2)(1 \otimes 1 \otimes c)\\
&= e(s^1 e)_1 \otimes \Delta_A((s^1 e)_2)(1 \otimes c)\\
&= e(s^1 e)_1 \otimes (s^1 e)_{21} \otimes (s^1 e)_{22} c.
\end{aligned}
$$

ou seja, $e(s^1 e)_{11} \otimes (s^1 e)_{12} \otimes (s^1 e)_2 c = e(s^1 e)_1 \otimes (s^1 e)_{21} \otimes (s^1 e)_{22} c$.

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\overline{E}(\pi \otimes \imath_A)(\rho(v)(1 \otimes 1 \otimes e)) &= \overline{E}(\pi \otimes \imath_A)((\imath_S \otimes \Delta_A)(s^0 \otimes (s^1e)_1)(1 \otimes 1 \otimes e))\omega(b(s^1e)_2c) \\
&= \overline{E}(\pi \otimes \imath_A)(s^0 \otimes \Delta_A(s^1e)_1(1 \otimes e))\omega(b(s^1e)_2c) \\
&= \overline{E}(\pi \otimes \imath_A)(s^0 \otimes (s^1e)_{11} \otimes (s^1e)_{12}e)\omega(b(s^1e)_2c) \\
&= \overline{E}(E \otimes 1)(1 \otimes e \otimes 1)(s^0 \otimes (s^1e)_{11} \otimes (s^1e)_{12}e)\omega(b(s^1e)_2c) \\
&= \Phi(E)(E \otimes 1)(s^0 \otimes (s^1e)_{11}e \otimes (s^1e)_{12}e)\omega(b(s^1e)_2c) \\
&= \Phi(E)E(s^0 \otimes (s^1e)_{11}e) \otimes (s^1e)_{12}e\omega(b(s^1e)_2c) \\
&= \Phi(E)E(s^0 \otimes (s^1e)_1e) \otimes (s^1e)_{21}e\omega(b(s^1e)_{22}c) \\
&\overset{(2.6)}{=} \Phi(E)(s^{00} \otimes s^{01}e \otimes (s^1e)_1e)\omega(b(s^1e)_2c) \\
&= \Phi(E)(\theta(s^0) \otimes (s^1e)_1e)\omega(b(s^1e)_2c) \\
&\overset{(2.9)}{=} (\theta \otimes \imath_A)(E(s^0 \otimes (s^1e)_1e))\omega(b(s^1e)_2c) \\
&\overset{(2.6)}{=} (\theta \otimes \imath_A)(s^{00} \otimes s^{01}e)\omega(bs^1ec) \\
&= \theta(s^{00}) \otimes s^{01}e\omega(bs^1ec) \\
&= \overline{\rho}(s^{00})(1 \otimes e) \otimes s^{01}e\omega(bs^1ec).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(\pi \otimes \imath_A)(\rho(\pi(v))(1 \otimes 1 \otimes e)) = \overline{E}(\pi \otimes \imath_A)(\rho(v)(1 \otimes 1 \otimes e)),$$

para todo $v \in V$.

5. $(\theta \otimes \imath_A)(\overline{\rho}(s)(1 \otimes e) = (\pi \otimes \imath_A)(\rho(\theta(s))(1 \otimes e))$.

$$\begin{aligned}
(\theta \otimes \imath_A)(\overline{\rho}(s)(1 \otimes e)) &= (\theta \otimes \imath_A)(s^0 \otimes s^1e) \\
&= \theta(s^0) \otimes s^1e \\
&= \overline{\rho}(s^0)(1 \otimes e) \otimes s^1e \\
&= s^{00} \otimes s^{01}e \otimes s^1e \\
&\overset{(2.6)}{=} E(s^0 \otimes (s^1e)_1e) \otimes (s^1e)_2e
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= E(1 \otimes e)(s^0 \otimes (s^1e)_1) \otimes (s^1e)_2 e \\
&= \pi(s^0 \otimes (s^1e)_1) \otimes (s^1e)_2 e \\
&= (\pi \otimes \imath_A)(s^0 \otimes (s^1e)_1 \otimes (s^1e)_2 e) \\
&= (\pi \otimes \imath_A)(s^0 \otimes \Delta(s^1e)(1 \otimes e)) \\
&= (\pi \otimes \imath_A)((\imath_S \otimes \Delta)(s^0 \otimes s^1e)(1 \otimes 1 \otimes e)) \\
&= (\pi \otimes \imath_A)((\imath_S \otimes \Delta)(\overline{\rho}(s)(1 \otimes e))(1 \otimes 1 \otimes e)) \\
&= (\pi \otimes \imath_A)(\rho(\theta(s))(1 \otimes e)),
\end{aligned}
$$

para todo $s \in S$.

- V é um A-comódulo álgebra via ρ gerado por $\theta(S)$.

Segue imediatamente da construção e do Lema 2.2.11.

Portanto, $(S, \overline{\rho}, E)$ é um A-comódulo álgebra parcial à direita quase counitário globalizável e, $((V, \rho = \imath_S \otimes \Delta_A), \theta, \pi)$ é uma coação envolvente para $(S, \overline{\rho}, E)$.

$\square$

Observação 2.2.13. Se A e S possuem unidade, 1_A e 1_S respectivamente, e $\pi(y) = \theta(1_S)y \in \theta(S)$. Então, as definições 1.5.4 e 2.2.7 coincidem.

Demonstração. Supondo que vale a Definição 1.5.4, vamos verificar o item (iv) da Definição 2.2.7. Observamos que π é uma projeção de álgebras. De fato, π é projeção e, $\pi(yy') = \theta(1_S)yy' = \theta(1_S)y\theta(1_S)y' = \pi(y)\pi(y')$, para todos $y, y' \in Y$.

Agora, vamos mostrar que $\overline{E} = (\pi \otimes \imath_A)\rho(\theta(1_S))$. Para tal, note que $M(S \otimes A) = S \otimes A$ e podemos definir:

$$
\begin{aligned}
\Phi : S \otimes A &\longrightarrow \theta(S) \otimes A \\
s \otimes a &\longmapsto \theta(s) \otimes a.
\end{aligned}
$$

Agora, segue da Proposição 3.1.11 de [15] que $E = \overline{\rho}(1_S)$. Assim,

$$\overline{E} = \Phi(E) = \Phi(\overline{\rho}(1_S)) = \Phi(r \otimes b) = \theta(r) \otimes b = (\theta \otimes \imath_A)(\overline{\rho}(1_S)) =$$
$$= (\theta(1_S) \otimes 1_A)\rho(\theta(1_S)) = (\pi \otimes \imath_A)\rho(\theta(1_S)).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\overline{E}(\pi \otimes \imath_A)(\rho(y)(1 \otimes e)) &= (\pi \otimes \imath_A)\rho(\theta(1_S))(\pi \otimes \imath_A)(\rho(y)(1 \otimes e)) = \\
&= (\pi \otimes \imath_A)(\rho(\theta(1_S))(\rho(y)(1 \otimes e))) \\
&= (\pi \otimes \imath_A)(\rho(\theta(1_S)y)(1 \otimes e)) \\
&= (\pi \otimes \imath_A)(\rho(\pi(y))(1 \otimes e)),
\end{aligned}$$

para todo $y \in Y$. Ou seja, π é uma $\overline{E}$-projeção.

A Definição 2.2.7 implica a clássica. De fato, se $\pi = \theta(1_S)$ temos que

$$(\theta \otimes \imath_A)(\overline{\rho}(s)) = (\theta(1_S) \otimes 1_A)\rho(\theta(s)).$$

□

Capítulo 3

Comódulo Coálgebra Parcial

3.1 Comódulo Coálgebra Parcial

Nesta seção, apresentaremos a definição de comódulo coálgebra parcial à esquerda no contexto de álgebras de Hopf de multiplicadores. Também mostramos que esta definição generaliza o caso Hopf para comódulos coálgebra parciais de E. Batista e J. Vercruysse, apresentado em [4] e o caso global, do contexto Hopf de multiplicadores, de Delvaux em [8] e, exibimos uma família de exemplos. Ao longo de toda a seção, vamos supor que Y e A são álgebras de Hopf de multiplicadores regulares. Inicialmente, relembramos a definição clássica.

Definição 3.1.1. ([4]) Sejam Y uma coálgebra, A uma álgebra de Hopf e $\rho : Y \longrightarrow A \otimes Y$ uma aplicação linear. Dizemos que Y é um A-*comódulo coálgebra parcial à esquerda* via ρ se, para todo $y \in Y$, as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $(\varepsilon_A \otimes \imath_Y)\rho(y) = y$;

(ii) $(\imath_A \otimes \Delta_Y)\rho(y) = (m_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \tau_{Y,A} \otimes \imath_Y)(\rho \otimes \rho)\Delta_Y(y)$;

(iii) $(\imath_A \otimes \rho)\rho(y) = (m_A \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)\{(\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\rho \otimes [(\Delta_A \otimes \imath_Y)\rho]\}\Delta_Y(y)$.

Dizemos que Y é um A-*comódulo coálgebra parcial à esquerda simétrico* se, para todo $y \in Y$, a seguinte condição adicional é satisfeita:

(iv) $(\imath_A \otimes \rho)\rho(y) = (m_A \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \tau_{A\otimes Y,A})\{[(\Delta_A \otimes \imath_Y)\rho] \otimes (\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\rho\}\Delta_Y(y)$.

Agora, estendendo essa noção ao nosso contexto, temos a seguinte definição.

Definição 3.1.2. Sejam Y e A duas álgebras de Hopf de multiplicadores. Dizemos que Y é um A-**comódulo coálgebra parcial à esquerda** se, existe uma aplicação linear

$$\rho : Y \longrightarrow M(A \otimes Y)$$

tal que, dados $a \in A$ e $y, y' \in Y$,

(i) $(\varepsilon_A \otimes \imath_Y)\rho(y) = y$;

(ii) $((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes y') \in Y \otimes A \otimes Y$ e,
$(1 \otimes 1 \otimes y')((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)) \in Y \otimes A \otimes Y$;

(iii) $(\imath_A \otimes \Delta_Y)T = (T \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y \otimes \imath_A)$;

(iv) $(\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \Delta_A) = ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y \otimes \imath_A)$,

onde :

$$T : Y \otimes A \longrightarrow A \otimes Y$$

é tal que $T(y \otimes a) = \rho(y)(a \otimes 1) \in A \otimes Y$, para todos $y \in Y$, $a \in A$.

Dizemos que Y é um A-**comódulo coálgebra parcial à esquerda simétrico** se, para todos $y \in Y$, $a \in A$ as seguintes condições adicionais são satisfeitas:

(v) $(\overline{T} \otimes \imath_Y)(a \otimes \Delta_Y(y))(1 \otimes y' \otimes 1) \in A \otimes Y \otimes Y$;

(vi) $(\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau_{Y \otimes A})(\overline{T} \otimes \imath_A)(\imath_A \otimes \tau_{A \otimes Y})(\Delta_A \otimes \imath_Y) = ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\overline{T} \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \tau_{A \otimes Y,Y})((\Delta_A \otimes \imath_Y)\overline{T} \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \Delta_Y)$,

onde :

$$\overline{T} : A \otimes Y \quad \longrightarrow \quad A \otimes Y$$

é tal que $\overline{T}(a \otimes y) = (a \otimes 1)\rho(y) \in A \otimes Y$, para todos $y \in Y$, $a \in A$.

Observação 3.1.3. A aplicação T não é mais uma bijeção linear.

De fato, como mencionamos anteriormente em 1.14, para mostrar a bijetividade da aplicação T, a coassociatividade (1.3.17) da aplicação ρ é fundamental.

Observação 3.1.4. O item (ii) é necessário para dar sentido ao item (iii).

De fato, da definição de T e usando a notação sigma, temos que para todos $y \in Y$, $a \in A$, a igualdade

$$(\imath_A \otimes \Delta_Y)T(y \otimes a) = (T \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a),$$

pode ser reescrita como segue

$$y^{-1}a \otimes \Delta_Y(y^0) = (T \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a),$$

e, cobrindo-se adequadamente ambos os lados, obtemos para todo $y' \in Y$,

$$y^{-1}a \otimes \Delta_Y(y^0)(1 \otimes y') = (T \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes y'). \qquad (3.1)$$

Portanto, se $(\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y') \in Y \otimes A \otimes Y$, para todos $a \in A$ e $y, y' \in Y$. Então o lado direito da igualdade faz sentido e pertence a $A \otimes Y \otimes Y$.

Precisamente, denotamos

$$z = (\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a), \quad y \in Y, a \in A.$$

E, definimos o multiplicador $(T \otimes \imath_Y)z \in M_{0,3}^Y(A \otimes Y \otimes Y)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\overline{(T \otimes \imath_Y)(z)}(y') &= (T \otimes \imath_Y)(z)(1 \otimes 1 \otimes y') \\ &= (T \otimes \imath_Y)(z(1 \otimes 1 \otimes y')).\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}\overline{\overline{(T \otimes \imath_Y)(z)}}(y') &= (1 \otimes 1 \otimes y')(T \otimes \imath_Y)(z) \\ &= (T \otimes \imath_Y)((1 \otimes 1 \otimes y')z).\end{aligned}$$

Vamos verificar a compatibilidade em $M_{0,3}^Y(A \otimes Y \otimes Y)$.

$$\begin{aligned}y'\overline{(T \otimes \imath_Y)(z)}(y'') &= (1 \otimes 1 \otimes y')((T \otimes \imath_Y)(z)(1 \otimes 1 \otimes y'')) \\ &= (1 \otimes 1 \otimes y')((T \otimes \imath_Y)(z(1 \otimes 1 \otimes y''))) \\ &\overset{3.1.2(ii)}{=} (1 \otimes 1 \otimes y')((T \otimes \imath_Y)(x \otimes b \otimes t)) \\ &= (1 \otimes 1 \otimes y')(T(x \otimes b) \otimes t) \\ &= T(x \otimes b) \otimes y't \\ &= (T \otimes \imath_Y)(x \otimes b \otimes y't) \\ &= (T \otimes \imath_Y)((1 \otimes 1 \otimes y')(x \otimes b \otimes t)) \\ &= (T \otimes \imath_Y)((1 \otimes 1 \otimes y')(z(1 \otimes 1 \otimes y'')) \\ &= (T \otimes \imath_Y)(((1 \otimes 1 \otimes y')z)(1 \otimes 1 \otimes y'')) \\ &= (T \otimes \imath_Y)((p \otimes c \otimes w)(1 \otimes 1 \otimes y'')) \\ &= T(p \otimes c) \otimes w)(1 \otimes 1 \otimes y'') \\ &= T(p \otimes c)(1 \otimes 1 \otimes wy'') \\ &= ((T \otimes \imath_Y)(p \otimes c \otimes w))(1 \otimes 1 \otimes y'') \\ &= ((T \otimes \imath_Y)((1 \otimes 1 \otimes y')z)(1 \otimes 1 \otimes y'') \\ &= \overline{\overline{(T \otimes \imath_Y)(z)}}(y')y'',\end{aligned}$$

para todos $y', y'' \in Y$.

Logo, podemos ver o lado direito da igualdade 3.1, da seguinte forma:

$$(T \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes y') = (T \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y')). \quad (3.2)$$

Observação 3.1.5. Note que $(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a))$ é um multiplicador em $M^A_{0,3}(A \otimes Y \otimes A)$ para todos $y \in Y$, $a \in A$, definido da seguinte forma :

$$\begin{aligned}
\overline{(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a))}(1 \otimes 1 \otimes a') &= (T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a))(1 \otimes 1 \otimes a') \\
&= (T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a)(1 \otimes a')), \\
\overline{\overline{(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a))}}(1 \otimes 1 \otimes a') &= (1 \otimes 1 \otimes a')(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a)) \\
&= (T \otimes \imath_A)(y \otimes (1 \otimes a')\Delta_A(a)).
\end{aligned}$$

A compatibilidade segue de forma imediata. Analogamente, definimos o multiplicador $(\imath_A \otimes T)((T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a))) \in M^A_{0,1}(A \otimes A \otimes Y)$.

Observação 3.1.6. Para todos $a' \in A$, $y \in Y$, temos:

$$[(\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a))](1 \otimes a' \otimes 1) = (\imath_A \otimes T)((T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a))(1 \otimes 1 \otimes a')). \quad (3.3)$$

De fato, note que, para todo $a'' \in A$,

$$\begin{aligned}
&[(\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a))](a'' \otimes a' \otimes 1) = \\
&\overset{3.1.5}{=} (\imath_A \otimes T)[(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a))(a'' \otimes 1 \otimes 1)](1 \otimes a' \otimes 1) \\
&\overset{1.4.1}{=} ((\imath_A \otimes T)(y^{-1}a_1a'' \otimes y^0 \otimes a_2))(1 \otimes a' \otimes 1) \\
&= (y^{-1}a_1a'' \otimes T(y^0 \otimes a_2))(1 \otimes a' \otimes 1) \\
&= (y^{-1}a_1a'' \otimes y^{0-1}a_2 \otimes y^{00})(1 \otimes a' \otimes 1) \\
&= y^{-1}a_1a'' \otimes y^{0-1}a_2a' \otimes y^{00} \\
&= (\imath_A \otimes T)(y^{-1}a_1a'' \otimes y^0 \otimes a_2a') \\
&= (\imath_A \otimes T)(T(y \otimes a_1a'') \otimes a_2a') \\
&= (\imath_A \otimes T)((T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a)(a'' \otimes a')))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\imath_A \otimes T)((T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a)(1 \otimes a')(a'' \otimes 1))) \\
&= (\imath_A \otimes T)((T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a)(1 \otimes a')))(a'' \otimes 1 \otimes 1) \\
&\overset{3.1.5}{=} [(\imath_A \otimes T)((T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a))(1 \otimes 1 \otimes a'))](a'' \otimes 1 \otimes 1).
\end{aligned}
$$

Portanto, provamos que:

$$
[(\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta(a))](1 \otimes a' \otimes 1) = [(\imath_A \otimes T)((T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta(a))(1 \otimes 1 \otimes a'))], \tag{3.4}
$$

para todos $a' \in A$, $y \in Y$.

Observação 3.1.7. O item (iv) pode ser escrito de forma explícita cobrindo-se ambos os lados por $(1 \otimes a' \otimes y')$, $a' \in A$, $y' \in Y$, como segue

$$
y^{-1}a_1 \otimes y^{0-1}a_2a' \otimes y^{00}y' = x^{-1}b_1\varepsilon_Y(x^0) \otimes b_2a' \otimes w. \tag{3.5}
$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
&y^{-1}a_1 \otimes y^{0-1}a_2a' \otimes y^{00}y' = \\
&= (y^{-1}a_1 \otimes T(y^0 \otimes a_2a'))(1 \otimes 1 \otimes y') \\
&= (\imath_A \otimes T)[T(y \otimes a_1) \otimes a_2a'](1 \otimes 1 \otimes y') \\
&= (\imath_A \otimes T)[(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a)(1 \otimes a'))](1 \otimes 1 \otimes y') \\
&= (\imath_A \otimes T)[(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a))(1 \otimes 1 \otimes a')](1 \otimes 1 \otimes y') \\
&\overset{(3.3)}{=} [(\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a))](1 \otimes a' \otimes y') \\
&\overset{3.1.2(iv)}{=} ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes a' \otimes y') \\
&= ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)\{(\imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)[(\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y')](1 \otimes 1 \otimes a' \otimes 1)\} \\
&\overset{3.1.2(ii)}{=} ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)((x \otimes \Delta_A(b) \otimes w)(1 \otimes 1 \otimes a' \otimes 1)) \\
&= ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(x \otimes \Delta_A(b)(1 \otimes a') \otimes w) \\
&= (\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T(x \otimes b_1) \otimes b_2a' \otimes w \\
&= x^{-1}b_1\varepsilon_Y(x^0) \otimes b_2a' \otimes w.
\end{aligned}
$$

A observação a seguir, serve para justificar a boa definição do item referente a simetria (3.1.2(vi)), que reescrevemos novamente abaixo:

$$(\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau_{Y\otimes A})(\overline{T} \otimes \imath_A)(\imath_A \otimes \tau_{A\otimes Y})(\Delta_A \otimes \imath_Y) = ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\overline{T} \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \tau_{A\otimes Y,Y}) \circ$$
$$\circ((\Delta_A \otimes \imath_Y)\overline{T} \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \Delta_Y).$$

Lema 3.1.8. *O primeiro membro da igualdade em (vi) pode ser justificado pela seguinte equivalência:*

$$(\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau_{Y\otimes A})(\overline{T} \otimes \imath_A)(\imath_A \otimes \tau_{A\otimes Y})(\Delta_A \otimes \imath_Y) = (\Delta_A \otimes \imath_Y)\overline{T} \Longleftrightarrow (\imath_A \otimes \rho)\rho = (\Delta_A \otimes \imath_Y)\rho.$$

Demonstração. Supondo que $(\imath_A \otimes \rho)\rho = (\Delta_A \otimes \imath_Y)\rho$, dados $a, b, b' \in A$, $y \in Y$,

$$\begin{aligned}
&(b \otimes 1 \otimes 1)(\Delta_A \otimes \imath_Y)\overline{T}(a \otimes y)(b' \otimes 1 \otimes 1) = \\
&\quad = (b \otimes 1 \otimes 1)(\Delta_A \otimes \imath_Y)((a \otimes 1)\rho(y))(b' \otimes 1 \otimes 1) \\
&\quad = ((b \otimes 1)\Delta_A(a) \otimes 1)(\Delta_A \otimes \imath_Y)\rho(y)(b' \otimes 1 \otimes 1) \\
&\quad = (ba_1 \otimes a_2 \otimes 1)(\imath_A \otimes \rho)\rho(y)(b' \otimes 1 \otimes 1) \\
&\quad = (ba_1 \otimes a_2 \otimes 1)(\imath_A \otimes \rho)(\rho(y)(b' \otimes 1)) \\
&\quad = ba_1 y^{-1} b' \otimes (a_2 \otimes 1)\rho(y^0) \\
&\quad = ba_1 y^{-1} b' \otimes \overline{T}(a_2 \otimes y^0) \\
&\quad = (\imath_A \otimes \overline{T})(ba_1 y^{-1} b' \otimes a_2 \otimes y^0) \\
&\quad = (\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau_{Y\otimes A})(ba_1 y^{-1} b' \otimes y^0 \otimes a_2) \\
&\quad = (\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau_{Y\otimes A})((ba_1 \otimes 1)(\rho(y)(b' \otimes 1)) \otimes a_2) \\
&\quad = (\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau_{Y\otimes A})(((ba_1 \otimes 1)\rho(y))(b' \otimes 1) \otimes a_2) \\
&\quad = (\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau_{Y\otimes A})(\overline{T}(ba_1 \otimes y)(b' \otimes 1) \otimes a_2) \\
&\quad = (\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau_{Y\otimes A})((\overline{T}(ba_1 \otimes y) \otimes a_2)(b' \otimes 1 \otimes 1)) \\
&\quad = (\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau_{Y\otimes A})(\overline{T}(ba_1 \otimes y) \otimes a_2)(b' \otimes 1 \otimes 1) \\
&\quad = ((\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau_{Y\otimes A})(\overline{T} \otimes \imath_A)(ba_1 \otimes y \otimes a_2))(b' \otimes 1 \otimes 1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ((\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau_{Y\otimes A})(\overline{T} \otimes \imath_A)(\imath_A \otimes \tau_{A\otimes Y})(ba_1 \otimes a_2 \otimes y))(b' \otimes 1 \otimes 1)\\
&= ((\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau_{Y\otimes A})(\overline{T} \otimes \imath_A)(\imath_A \otimes \tau_{A\otimes Y})((b \otimes 1)\Delta_A(a) \otimes y))(b' \otimes 1 \otimes 1)\\
&= (b \otimes 1 \otimes 1)((\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau_{Y\otimes A})(\overline{T} \otimes \imath_A)(\imath_A \otimes \tau_{A\otimes Y})(\Delta_A \otimes \imath_Y)(a \otimes y))(b' \otimes 1 \otimes 1).
\end{aligned}
$$

E, reciprocamente,

$$
\begin{aligned}
&((b \otimes 1)\Delta_A(a) \otimes 1)(\imath_A \otimes \rho)\rho(y)(b' \otimes 1 \otimes 1) =\\
&= ((b \otimes 1)\Delta_A(a) \otimes 1)(\imath_A \otimes \rho)(\rho(y)(b' \otimes 1))\\
&= ((b \otimes 1)\Delta_A(a) \otimes 1)(\imath_A \otimes \rho)(y^{-1}b' \otimes y^0)\\
&= (ba_1 \otimes a_2 \otimes 1)(y^{-1}b' \otimes \rho(y^0))\\
&= ba_1 y^{-1}b' \otimes \overline{T}(a_2 \otimes y^0)\\
&= (\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau_{Y\otimes A})((ba_1 \otimes 1)(\rho(y)(b' \otimes 1)) \otimes a_2)\\
&= ((\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau_{Y\otimes A})(\overline{T} \otimes \imath_A)(\imath_A \otimes \tau_{A\otimes Y})((b \otimes 1)\Delta_A(a) \otimes y))(b' \otimes 1 \otimes 1)\\
&= (b \otimes 1 \otimes 1)((\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau_{Y\otimes A})(\overline{T} \otimes \imath_A)(\imath_A \otimes \tau_{A\otimes Y})(\Delta_A \otimes \imath_Y)(a \otimes y))(b' \otimes 1 \otimes 1)\\
&= (b \otimes 1 \otimes 1)(\Delta_A \otimes \imath_Y)\overline{T}(a \otimes y)(b' \otimes 1 \otimes 1)\\
&= (b \otimes 1 \otimes 1)(\Delta_A \otimes \imath_Y)((a \otimes 1)\rho(y))(b' \otimes 1 \otimes 1)\\
&= ((b \otimes 1 \otimes 1)(\Delta_A \otimes \imath_Y)(a \otimes 1))(\Delta_A \otimes \imath_Y)\rho(y)(b' \otimes 1 \otimes 1)\\
&= ((b \otimes 1)\Delta_A(a) \otimes 1)(\Delta_A \otimes \imath_Y)\rho(y)(b' \otimes 1 \otimes 1),
\end{aligned}
$$

para todos $a, b, b' \in A$, $y \in Y$. □

Proposição 3.1.9. *Todo comódulo coálgebra global é um comódulo coálgebra parcial.*

Demonstração. Supondo que a aplicação $\rho : Y \longrightarrow M(A \otimes Y)$ define uma estrutura de A-comódulo coálgebra (global) à esquerda sobre Y. Segue da Proposição 1.3.20 que $(\varepsilon_A \otimes \imath_Y)\rho = \imath_Y$. Ou seja, o item (i) da Definição 3.1.2 é satisfeito. Os itens (ii) e (iii) decorrem imediatamente da Definição 1.4.4.

Assim, basta mostrar o item (iv). Para isto, vamos usar a escrita obtida na Observação 3.1.7.

$$
\begin{aligned}
&[((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y(y) \otimes a)](1 \otimes a' \otimes y') = \\
&\overset{3.1.7}{=} \quad x^{-1}b_1 \otimes \varepsilon_Y(x^0) \otimes b_2a' \otimes w \\
&\overset{1.4.7}{=} \quad b_1\varepsilon_Y(x) \otimes b_2a' \otimes w \\
&= \quad (\varepsilon_Y \otimes \imath_A \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(x \otimes b_1 \otimes b_2a' \otimes w) \\
&= \quad (\varepsilon_Y \otimes \imath_A \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(x \otimes \Delta_A(b)(1 \otimes a') \otimes w) \\
&= \quad (\varepsilon_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)(x \otimes b \otimes w)(1 \otimes a' \otimes 1) \\
&= \quad (\varepsilon_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y'))(1 \otimes a' \otimes 1) \\
&= \quad (\varepsilon_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a))(1 \otimes a' \otimes y')) \\
&= \quad (\Delta_A \otimes \imath_Y)((\varepsilon_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a))(1 \otimes a' \otimes y') \\
&= \quad (\Delta_A \otimes \imath_Y)(T((\varepsilon_Y \otimes \imath_Y)\Delta_Y(y) \otimes a))(1 \otimes a' \otimes y') \\
&= \quad (\Delta_A \otimes \imath_Y)(T(y \otimes a))(1 \otimes a' \otimes y') \\
&\overset{1.4.3}{=} \quad (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a))(1 \otimes a' \otimes y'),
\end{aligned}
$$

para todos $a, a' \in A$, $y' \in Y$. □

Proposição 3.1.10. *Seja Y um A-comódulo coálgebra parcial à esquerda simétrico via ρ. Então Y é um A-comódulo coálgebra (global) à esquerda se, e somente se*

$$(\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\rho(y) = \varepsilon_Y(y)1_{M(A)}. \tag{3.6}$$

Demonstração. Se Y é um A-comódulo coálgebra (global) à esquerda, segue da Observação 1.4.6 e Proposição 1.4.7 que $(\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\rho(y) = \varepsilon_Y(y)1_{M(A)}$.

Por outro lado, suponha que Y um A-comódulo coálgebra parcial à esquerda simétrico via ρ tal que (3.6) é satisfeita, temos que:

(i) ρ é injetora.

De fato, seja $y \in Y$ tal que $\rho(y) = 0$, logo:

$$0 = (\varepsilon_A \otimes \imath_Y)\rho(y) \overset{3.1.2(i)}{=} y.$$

(ii) $(\imath_A \otimes \rho)\rho = (\Delta_A \otimes \imath_Y)\rho$.

Vamos provar que $(\Delta_A \otimes \imath_Y)T = (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \Delta_A)$ e usando a Proposição 1.4.3, obtemos o resultado.

$$\begin{aligned}
&(\Delta_A \otimes \imath_Y)(T(y \otimes a))(1 \otimes a' \otimes y') = \\
&= \quad (\Delta_A \otimes \imath_Y)(T((\varepsilon_Y \otimes \imath_Y)\Delta_Y(y) \otimes a))(1 \otimes a' \otimes y') \\
&= \quad (\Delta_A \otimes \imath_Y)(T(\varepsilon_Y \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\Delta_Y(y) \otimes a))(1 \otimes a' \otimes y') \\
&= \quad (\Delta_A \otimes \imath_Y)((\varepsilon_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a))(1 \otimes a' \otimes y') \\
&= \quad (\varepsilon_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes a' \otimes y') \\
&= \quad (\varepsilon_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y'))(1 \otimes a' \otimes 1) \\
&= \quad (\varepsilon_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)(x \otimes b \otimes w)(1 \otimes a' \otimes 1) \\
&= \quad (\varepsilon_Y(x) \otimes \Delta_A(b) \otimes w)(1 \otimes a' \otimes 1) \\
&= \quad \varepsilon_Y(x) \otimes \Delta_A(b)(1 \otimes a') \otimes w \\
&= \quad \varepsilon_Y(x) b_1 \otimes b_2 a' \otimes w \\
&= \quad \varepsilon_Y(x) 1_{M(A)}(b_1) \otimes b_2 a' \otimes w \\
&\overset{(3.6)}{=} \quad (\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\rho(x)(b_1) \otimes b_2 a' \otimes w \\
&= \quad (\imath_A \otimes \varepsilon_Y)(\rho(x)(b_1 \otimes 1)) \otimes b_2 a' \otimes w \\
&= \quad x^{-1} b_1 \varepsilon_Y(x^0) \otimes b_2 a' \otimes w \\
&= \quad [((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes a' \otimes y') \\
&\overset{3.1.2(iv)}{=} \quad [(\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a)](1 \otimes a' \otimes y'),
\end{aligned}$$

para todos $y, y' \in Y$ e $a, a' \in A$.

Os demais itens, decorrem imediatamente da Definição 3.1.2. $\square$

Proposição 3.1.11. *Sejam Y e A álgebras de Hopf. Então, a Definição 3.1.1 e a Definição 3.1.2 são equivalentes.*

Demonstração. Supondo que vale a Definição 3.1.1, os itens (i) e (ii) da Definição 3.1.2 são automaticamente satisfeitos. Vamos provar os itens (iii) e (iv).

Para o item (iii), por um lado, temos para todos $y \in Y$, $a \in A$,

$$\begin{aligned}
(\imath_A \otimes \Delta_Y)T(y \otimes a) &= (\imath_A \otimes \Delta_Y)(\rho(y)(a \otimes 1)) \\
&= y^{-1}a \otimes \Delta(y^0) \\
&= y^{-1}a \otimes {y^0}_1 \otimes {y^0}_2 \\
&= (\imath_A \otimes \Delta_Y)\rho(y)(a \otimes 1 \otimes 1) \\
&\overset{3.1.1(ii)}{=} (m_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \tau_{Y,A} \otimes \imath_Y)(\rho \otimes \rho)\Delta_Y(y)(a \otimes 1 \otimes 1) \\
&= ({y_1}^{-1}{y_2}^{-1} \otimes {y_1}^0 \otimes {y_2}^0)(a \otimes 1 \otimes 1) \\
&= {y_1}^{-1}{y_2}^{-1}a \otimes {y_1}^0 \otimes {y_2}^0.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(T \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a) &= (T \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T)(y_1 \otimes y_2 \otimes a) \\
&= (T \otimes \imath_Y)(y_1 \otimes \rho(y_2)(a \otimes 1)) \\
&= T(y_1 \otimes {y_2}^{-1}a) \otimes {y_2}^0 \\
&= {y_1}^{-1}{y_2}^{-1}a \otimes {y_1}^0 \otimes {y_2}^0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(\imath_A \otimes \Delta_Y)T = (T \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y \otimes \imath_A).$$

E, finalmente, para todos $y \in Y$, $a \in A$, por um lado temos

$$\begin{aligned}
&(\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a)) = \\
&\quad = \quad (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(y \otimes a_1 \otimes a_2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\imath_A \otimes T)(\rho(y)(a_1 \otimes 1) \otimes a_2)\\
&= (\imath_A \otimes T)(y^{-1}a_1 \otimes y^0 \otimes a_2)\\
&= y^{-1}a_1 \otimes y^{0-1}a_2 \otimes y^{00}\\
&= y^{-1} \otimes y^{0-1} \otimes y^{00}(a_1 \otimes a_2 \otimes 1)\\
&= ((\imath_A \otimes \rho)\rho(y))(a_1 \otimes a_2 \otimes 1)\\
&\overset{3.1.1(iii)}{=} (m_A \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)\{(\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\rho \otimes [(\Delta_A \otimes \imath_Y)\rho]\}\Delta_Y(y)(a_1 \otimes a_2 \otimes 1)\\
&= (m_A \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)\{(\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\rho(y_1) \otimes [(\Delta_A \otimes \imath_Y)\rho(y_2)]\}(a_1 \otimes a_2 \otimes 1)\\
&= (m_A \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)\{{y_1}^{-1}\varepsilon_Y({y_1}^0) \otimes \Delta({y_2}^{-1}) \otimes {y_2}^0\}(a_1 \otimes a_2 \otimes 1)\\
&= ({y_1}^{-1}{y_2}^{-1}{}_1 \otimes {y_2}^{-1}{}_2 \otimes {y_2}^0)(a_1 \otimes a_2 \otimes 1)\varepsilon_Y({y_1}^0)\\
&= {y_1}^{-1}{y_2}^{-1}{}_1 a_1 \otimes {y_2}^{-1}{}_2 a_2 \otimes {y_2}^0 \varepsilon_Y({y_1}^0).
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
&((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y(y) \otimes a) =\\
&\quad= ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(y_1 \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T(y_2 \otimes a)\\
&\quad= (\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T(y_1 \otimes {y_2}^{-1}{}_1 a_1 \otimes {y_2}^{-1}{}_2 a_2 \otimes {y_2}^0)\\
&\quad= {y_1}^{-1}{y_2}^{-1}{}_1 a_1 \varepsilon_Y({y_1}^0) \otimes {y_2}^{-1}{}_2 a_2 \otimes {y_2}^0.
\end{aligned}
$$

Assim, obtemos o item (iv).

Reciprocamente, vamos mostrar que a Definição 3.1.2 implica a Definição 3.1.1.

Para provarmos o item (ii) de 3.1.1, vamos usar o item (iii) da Definição 3.1.2, tomando $a = 1_A$. Assim, temos

$$
\begin{aligned}
(\imath_A \otimes \Delta_Y)T(y \otimes 1_A) &= (T \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes 1_A) \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow (\imath_A \otimes \Delta_Y)\rho(y) &= (T \otimes \imath_Y)(y_1 \otimes T(y_2 \otimes 1_A))\\
&= T(y_1 \otimes {y_2}^{-1}) \otimes {y_2}^0\\
&= {y_1}^{-1}{y_2}^{-1} \otimes {y_1}^0 \otimes {y_2}^0.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$(\imath_A \otimes \Delta_Y)\rho(y) = (m_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \tau_{Y,A} \otimes \imath_Y)({y_1}^{-1} \otimes {y_1}^0 \otimes {y_2}^{-1} \otimes {y_2}^0),$$

e, portanto, para todo $y \in Y$, obtemos:

$$(\imath_A \otimes \Delta_Y)\rho(y) = (m_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \tau_{Y,A} \otimes \imath_Y)(\rho \otimes \rho)\Delta_Y(y).$$

Agora, vamos mostrar a igualdade (iii) de 3.1.1 usando o item (iv) da Definição 3.1.2, tomando $a = 1_A$. Assim, temos que

$$(\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(1_A)) = ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(y_1 \otimes ({y_2}^{-1})_1 \otimes ({y_2}^{-1})_2 \otimes {y_2}^0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&(\imath_A \otimes T)(T(y \otimes 1_A) \otimes 1_A) = (\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T(y_1 \otimes {y_2}^{-1}{}_1) \otimes {y_2}^{-1}{}_2 \otimes {y_2}^0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow y^{-1} \otimes T(y^0 \otimes 1_A) = {y_1}^{-1}\varepsilon_Y({y_1}^0){y_2}^{-1}{}_1 \otimes {y_2}^{-1}{}_2 \otimes {y_2}^0 \\
&\Leftrightarrow y^{-1} \otimes y^{0-1} \otimes y^{00} = {y_1}^{-1}\varepsilon_Y({y_1}^0){y_2}^{-1}{}_1 \otimes {y_2}^{-1}{}_2 \otimes {y_2}^0.
\end{aligned}$$

Logo, para todo $y \in Y$,

$$\begin{aligned}
(\imath_A \otimes \rho)\rho(y) &= (m_A \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\rho(y_1) \otimes \Delta_A({y_2}^{-1}) \otimes {y_2}^0) \\
&= (m_A \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\rho(y_1) \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)\rho(y_2)) \\
&= (m_A \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)\{(\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\rho \otimes [(\Delta_A \otimes \imath_Y)\rho]\}\Delta_Y(y).
\end{aligned}$$

□

Proposição 3.1.12. *Sejam Y e A duas álgebras de Hopf de multiplicadores, considere*

$$\begin{aligned}
\rho : Y &\longrightarrow M(A \otimes Y) \\
y &\longmapsto h \otimes y
\end{aligned}$$

uma aplicação linear onde $h \in M(A)$. Então, Y é um A-comódulo coálgebra parcial à esquerda se e somente se:

(i) $\varepsilon(h) = 1_{\Bbbk}$*;*

(ii) $h \otimes h = (h \otimes 1)\Delta(h)$.

Demonstração. Inicialmente, observamos que se $h \in M(A)$ satisfaz as condições (i) e (ii), então $h^2 = h$. De fato, aplicando $\imath \otimes \varepsilon$ em (ii), temos:

$$\begin{aligned}
(\imath \otimes \varepsilon)(h \otimes h) &= (\imath \otimes \varepsilon)((h \otimes 1)\Delta(h)) \\
&= \overline{\overline{(\imath \otimes \varepsilon)\Delta(h)}}(h) \\
&= h(\imath \otimes \varepsilon)(\Delta(h)) \\
&= h\imath_A(h) \\
&= h^2.
\end{aligned}$$

Logo, $h\varepsilon(h) = h^2$. E, do item (i), segue que $h = h^2$.

Suponha que Y é um A-comódulo coálgebra parcial à esquerda, então para todo $y \in Y$,

$$\begin{aligned}
y &\overset{3.1.2(i)}{=} (\varepsilon_A \otimes \imath_Y)\rho(y) \\
&= \varepsilon(h)y.
\end{aligned}$$

E, portanto, o item (i) é satisfeito.

Agora, vamos mostrar o item (ii). Sabemos da Definição 3.1.2 (iv) que:

$$(\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \Delta_A) = ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y \otimes \imath_A).$$

Assim, para todos $y, y' \in Y$, $a, a' \in A$, temos:

$$\begin{aligned}
&[(\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a))](1 \otimes a' \otimes y') = \\
&\quad = [((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y(y) \otimes a)](1 \otimes a' \otimes y').
\end{aligned}$$

Da equação (3.4), da definição de par dada na Observação 3.1.5 e reescrevendo o 2º membro, temos:

$$(\imath_A \otimes T)[(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a)(1 \otimes a'))](1 \otimes 1 \otimes y') =$$
$$= ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[(\imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y'))(1 \otimes 1 \otimes a' \otimes 1)].$$

Usando a definição de T e o item (ii) da Definição 3.1.2, obtemos:

$$\begin{aligned}
&(\imath_A \otimes T)[\rho(y)(a_1 \otimes 1) \otimes a_2 a'](1 \otimes 1 \otimes y') = \\
&\quad = ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[(\imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)(x \otimes b \otimes t)(1 \otimes 1 \otimes a' \otimes 1)] \\
&\quad = ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[(x \otimes \Delta_A(b)(1 \otimes a') \otimes t)],
\end{aligned}$$

donde segue que,

$$ha_1 \otimes T(y \otimes a_2 a')(1 \otimes 1 \otimes y') = ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(x \otimes b_1 \otimes b_2 a' \otimes t) \Leftrightarrow$$
$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow ha_1 \otimes ha_2 a' \otimes yy' &= ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(x \otimes b_1 \otimes b_2 a' \otimes t) \\
&= (\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T(x \otimes b_1) \otimes b_2 a' \otimes t \\
&= hb_1 \varepsilon_Y(x) \otimes b_2 a' \otimes t \\
&= (h \otimes 1 \otimes 1)((\varepsilon_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)(x \otimes b \otimes t))(1 \otimes a' \otimes 1) \\
&= (h \otimes 1 \otimes 1)((\varepsilon_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y'))(1 \otimes a' \otimes 1) \\
&= (h \otimes 1 \otimes 1)((\Delta_A \otimes \imath_Y)(\varepsilon_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y'))(1 \otimes a' \otimes 1) \\
&= (h \otimes 1 \otimes 1)((\Delta_A \otimes \imath_Y)T((\varepsilon_Y \otimes \imath_Y)\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y'))(1 \otimes a' \otimes 1) \\
&= (h \otimes 1 \otimes 1)((\Delta_A \otimes \imath_Y)T(y \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y'))(1 \otimes a' \otimes 1) \\
&= (h \otimes 1 \otimes 1)((\Delta_A(ha) \otimes y)(1 \otimes 1 \otimes y'))(1 \otimes a' \otimes 1) \\
&= (h \otimes 1)\Delta_A(ha)(1 \otimes a') \otimes yy'.
\end{aligned}$$

Logo,

$$ha_1 \otimes ha_2 a' \otimes yy' = (h \otimes 1)\Delta_A(ha)(1 \otimes a') \otimes yy',$$

para todo $y' \in Y$. Ou seja,

$$(h \otimes h)\Delta_A(a)(1 \otimes a') \otimes y = (h \otimes 1)\Delta_A(ha)(1 \otimes a') \otimes y,$$

para todo $y \in Y$, assim

$$(h \otimes h)\Delta_A(a)(1 \otimes a') = (h \otimes 1)\Delta_A(h)\Delta_A(a)(1 \otimes a').$$

Além disso, sabemos que $\Delta_A(A)(1 \otimes A) = A \otimes A$, então $\Delta_A(a)(1 \otimes a')$ é um gerador de $A \otimes A$. E, $(h \otimes 1)\Delta_A(h)$ e $h \otimes h \in M(A \otimes A)$. Portanto

$$h \otimes h = (h \otimes 1)\Delta(h).$$

Reciprocamente, suponha que $\varepsilon(h) = 1_{\Bbbk}$ e que $h \otimes h = (h \otimes 1)\Delta(h)$.

(i) Para todo $y \in Y$,

$$\begin{aligned} y &= \varepsilon_A(h)y \\ &= (\varepsilon_A \otimes \imath_Y)(h \otimes y) \\ &= (\varepsilon_A \otimes \imath_Y)\rho(y). \end{aligned}$$

(ii) Defina em $M_{0,3}^Y(Y \otimes A \otimes Y)$:

$$\begin{aligned} \overline{(\imath_Y \otimes T)(\Delta(y) \otimes a)}(y') &\overset{not.}{=} (\imath_Y \otimes T)(\Delta(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y') && (3.7) \\ &= (\imath_Y \otimes T)(\Delta(y)(1 \otimes y') \otimes a), \\ \overline{\overline{(\imath_Y \otimes T)(\Delta(y) \otimes a)}}(y') &\overset{not.}{=} (1 \otimes 1 \otimes y')(\imath_Y \otimes T)(\Delta(y) \otimes a) && (3.8) \\ &= (\imath_Y \otimes T)((1 \otimes y')\Delta(y) \otimes a). \end{aligned}$$

Vamos verificar a compatibilidade em $M_{0,3}^Y(Y \otimes A \otimes Y)$:

$$\begin{aligned} y''\overline{(\imath_Y \otimes T)(\Delta(y) \otimes a)}(y') &= (1 \otimes 1 \otimes y'')[(\imath_Y \otimes T)(\Delta(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y')] \\ &= (1 \otimes 1 \otimes y'')[(\imath_Y \otimes T)(\Delta(y)(1 \otimes y') \otimes a)] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1 \otimes 1 \otimes y''))(y_1 \otimes ha \otimes y_2 y') \\
&= y_1 \otimes ha \otimes y'' y_2 y' \\
&= (\imath_Y \otimes \tau_{A,Y})(y_1 \otimes y'' y_2 y' \otimes ha) \\
&= (\imath_Y \otimes \tau_{A,Y})((1 \otimes y'')(\Delta(y)(1 \otimes y') \otimes ha) \\
&= (\imath_Y \otimes \tau_{A,Y})(((1 \otimes y'')(\Delta(y))(1 \otimes y') \otimes ha) \\
&= y_1 \otimes ha \otimes y'' y_2 y' \\
&= (y_1 \otimes ha \otimes y'' y_2)(1 \otimes 1 \otimes y') \\
&= [(\imath_Y \otimes T)(y_1 \otimes y'' y_2 \otimes a)](1 \otimes 1 \otimes y') \\
&= [(\imath_Y \otimes T)((1 \otimes y'')\Delta(y) \otimes a)](1 \otimes 1 \otimes y') \\
&= [(1 \otimes 1 \otimes y'')(\imath_Y \otimes T)(\Delta(y) \otimes a)](1 \otimes 1 \otimes y') \\
&= \overline{\overline{(\imath_Y \otimes T)(\Delta(y) \otimes a)}}(y'')y',
\end{aligned}
$$

para todos $y, y', y'' \in Y$, $a \in A$.

(iii) Por um lado, temos:

$$
\begin{aligned}
(\imath_A \otimes \Delta_Y)T(y \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y') &= (\imath_A \otimes \Delta_Y)(\rho(y)(a \otimes 1))(1 \otimes 1 \otimes y') \\
&= ha \otimes \Delta(y)(1 \otimes y') \\
&= ha \otimes y_1 \otimes y_2 y'.
\end{aligned}
$$

Por outro lado:

$$
\begin{aligned}
(T \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes y') &\overset{(3.2)}{=} (T \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y')) \\
&= (T \otimes \imath_Y)(\overline{(\imath_A \otimes T)(\Delta(y) \otimes a)}(y')) \\
&\overset{(3.7)}{=} (T \otimes \imath_Y)((\imath_A \otimes T)(\Delta(y)(1 \otimes y') \otimes a)) \\
&= (T \otimes \imath_Y)((\imath_A \otimes T)(y_1 \otimes y_2 y' \otimes a)) \\
&= (T \otimes \imath_Y)(y_1 \otimes \rho(y_2 y')(a \otimes 1)) \\
&= (T \otimes \imath_Y)(y_1 \otimes ha \otimes y_2 y')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \rho(y_1)(ha \otimes 1) \otimes y_2 y' \\
&= hha \otimes y_1 \otimes y_2 y' \\
&\overset{h^2=h}{=} ha \otimes y_1 \otimes y_2 y'.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$(\imath_A \otimes \Delta_Y)T(y \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y') = (T \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y'),$$

para todo $y' \in Y$.

Portanto,

$$(\imath_A \otimes \Delta_Y)T(y \otimes a) = (T \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a),$$

para todos $y \in Y$, $a \in A$.

E, finalmente vamos mostrar:

(iv) $(\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \Delta_A) = ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y \otimes \imath_A)$.

Por um lado, temos

$$
\begin{aligned}
&[(\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a))](a' \otimes a'' \otimes y') = \\
&= (\imath_A \otimes T)((T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a))(a' \otimes a'' \otimes y') \\
&\overset{1.4.1}{=} (\imath_A \otimes T)(ha_1 a' \otimes y \otimes a_2)(1 \otimes a'' \otimes y') \\
&= (ha_1 a' \otimes \rho(y)(a_2 \otimes 1))(1 \otimes a'' \otimes y') \\
&= (ha_1 a' \otimes ha_2 \otimes y)(1 \otimes a'' \otimes y') \\
&= (h \otimes h)(a_1 a' \otimes a_2 \otimes y)(1 \otimes a'' \otimes y') \\
&\overset{(ii)}{=} ((h \otimes 1)\Delta(h)(\Delta(a)(a' \otimes 1)) \otimes y)((1 \otimes a'' \otimes y') \\
&= (h \otimes 1)\Delta(ha)(a' \otimes a'') \otimes yy'.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$[((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y(y) \otimes a)](a' \otimes a'' \otimes y') =$$

$= ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes a'' \otimes y')](a' \otimes 1 \otimes 1)$

$= ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[(\imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y'))(1 \otimes 1 \otimes a'' \otimes 1)]$

$\circ(a' \otimes 1 \otimes 1)$

$\overset{(3.7)}{=} ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[(\imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y)(1 \otimes y') \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes a'' \otimes 1)]$

$\circ(a' \otimes 1 \otimes 1)$

$= ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[(\imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)(y_1 \otimes \rho(y_2 y')(a \otimes 1))(1 \otimes 1 \otimes a'' \otimes 1)](a' \otimes 1 \otimes 1)$

$= ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[(\imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)(y_1 \otimes ha \otimes y_2 y')(1 \otimes 1 \otimes a'' \otimes 1)](a' \otimes 1 \otimes 1)$

$= (\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(y_1 \otimes \Delta_A(ha)(1 \otimes a'') \otimes y_2 y')](a' \otimes 1 \otimes 1)$

$= (h(ha)_1 \varepsilon_Y(y_1) \otimes (ha)_2 a'' \otimes y_2 y')(a' \otimes 1 \otimes 1)$

$= (h \otimes 1)\Delta(ha)(a' \otimes a'') \otimes yy'.$

Logo,

$[(\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a))](a' \otimes a'' \otimes y') =$

$= [((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y(y) \otimes a)](a' \otimes a'' \otimes y'),$

para todos $a', a'' \in A$, $y' \in Y$.

Portanto,

$$(\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a)) = ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y(y) \otimes a),$$

para todos $y \in Y$, $a \in A$. $\square$

Exemplo 3.1.13. Considere Y uma álgebra de Hopf de multiplicadores e A_G o espaço das funções de G em $\Bbbk$ com suporte finito do Exemplo 1.1.10, então, Y é um A_G-comódulo coálgebra parcial à esquerda via:

$$\begin{aligned} \rho : Y &\longrightarrow M(A_G \otimes Y) \\ y &\longmapsto h \otimes y \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{array}{rcl} h: G & \longrightarrow & \Bbbk \\ s & \longmapsto & \begin{cases} 1 & , s \in N \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases} \end{array}$$

para N subgrupo de G.

De fato, pela Proposição 3.1.12, basta mostrar que $\varepsilon(h) = 1_{\Bbbk}$ e $h \otimes h = (h \otimes 1)\Delta(h)$.

(i) $\varepsilon(h) = h(e_G) = 1_{\Bbbk}$, pois $e_G \in N$ (elemento neutro do grupo G).

(ii) Por um lado,

$$\begin{array}{rcl} (h \otimes h)(s,t) & = & h(s)h(t) \\ & = & \begin{cases} 1 & , s,t \in N \\ 0 & , \text{caso contrário} . \end{cases} \end{array}$$

Por outro lado,

$$\begin{array}{rcl} (h \otimes 1)\Delta(h)(s,t) & = & h(s)h(st) \\ & = & \begin{cases} 1 & , s \in N \;\; e \;\; st \in N \\ 0 & , \text{caso contrário} . \end{cases} \end{array}$$

Agora, note que, se $s \in N$ e $st \in N$ então $s^{-1}st \in N$, ou seja $t \in N$. Assim, $(h \otimes h)(s,t) = (h \otimes 1)\Delta(h)(s,t)$, para todos $s,t \in N$ e, portanto, $(h \otimes h) = (h \otimes 1)\Delta(h)$.

Exemplo 3.1.14. Nas condições do Exemplo 3.1.13, podemos considerar um caso ainda mais particular no qual $\rho(y) = \delta_e \otimes y$. Ou seja, o caso em que $N = \{e\}$.

Exemplo 3.1.15. Considere Y uma álgebra de Hopf de multiplicadores e A o espaço linear gerado pelos elementos $\{e_p d^q; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$. Sabemos do Exemplo 1.1.11 que A é uma álgebra de Hopf de multiplicadores. Então, Y é um A-comódulo coálgebra parcial à esquerda via:

$$\begin{aligned} \rho : Y &\longrightarrow A \otimes Y \\ y &\longmapsto e_0 \otimes y \end{aligned}$$

pois $e_0 e_0 = e_0$ e,

$$\begin{aligned} (e_0 \otimes 1)\Delta(e_0) &= (e_0 \otimes 1)(\sum_{r \in \mathbb{Z}} e_r \otimes e_{0-r}) \\ &= \sum_{r \in \mathbb{Z}} e_0 e_r \otimes e_{0-r} \\ &= e_0 \otimes e_0. \end{aligned}$$

e, $\varepsilon(e_0) = 1_{\mathbb{k}}$.

3.2 Coproduto Smash Parcial

A construção do coproduto smash associado a um comódulo coálgebra, como noção dual do produto smash, foi inicialmente formulada por M. Richard K. em [18]. Em [8] L. Delvaux generalizou esta noção ao contexto de álgebras de Hopf de multiplicadores. No contexto de álgebras de Hopf, E. Batista e J. Vercruysse construíram em [4] o coproduto smash parcial associado a um comódulo coálgebra parcial. Nesta seção, vamos estender ao contexto parcial os resultados apresentados por L. Delvaux generalizando também o caso clássico de álgebras de Hopf.

Inicialmente, sejam Y e A álgebras de Hopf de multiplicadores tais como na Definição 3.1.2 . Vamos definir, conforme [8], duas aplicações lineares $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ sobre $(Y \otimes A) \otimes (Y \otimes A)$. Sejam $y, y' \in A$ e $a, a' \in A$, definimos:

- $\overline{T}_1((y \otimes a) \otimes (y' \otimes a')) = ((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a_1))(1 \otimes 1 \otimes y') \otimes a_2 a'$;

- $\overline{T}_2((y' \otimes a') \otimes (y \otimes a)) = y'y_1 \otimes (a' \otimes 1 \otimes 1)((T \otimes \imath_A)(y_2 \otimes \Delta_A(a)))$.

A boa definição destas aplicações segue imediatamente da Definição 3.1.2 e Proposição 1.4.1, respectivamente.

Usaremos as aplicações $\overline{T}_1$ e $\overline{T}_2$ para definir uma comultiplicação $\overline{\Delta}$ sobre $Y \otimes A$.

Proposição 3.2.1. *Seja Y um A-comódulo coálgebra parcial. Para todos $y \in Y$, $a \in A$, $\overline{\Delta}(y \otimes a)$ define um multiplicador em $M((Y \otimes A) \otimes (Y \otimes A))$ da seguinte forma:*

$$\overline{\Delta}(y \otimes a)((y' \otimes a') \otimes (y'' \otimes a'')) = \overline{T}_1((y \otimes a) \otimes (y'' \otimes a''))((y' \otimes a') \otimes (1 \otimes 1));$$
$$((y' \otimes a') \otimes (y'' \otimes a''))\overline{\Delta}(y \otimes a) = ((1 \otimes 1) \otimes (y'' \otimes a''))\overline{T}_2((y' \otimes a') \otimes (y \otimes a)), \qquad (3.9)$$

para todos $y', y'' \in Y$ e $a', a'' \in A$. E, além disso, $\overline{\Delta}$ é coassociativa.

Demonstração. Para mostrar que $\overline{\Delta}(y \otimes a)$ é um multiplicador, basta usar a associatividade do produto em $(Y \otimes A) \otimes (Y \otimes A)$, analogamente ao apresentado em [8].

Agora, mostraremos a coassociatividade de $\overline{\Delta}$. Denotaremos por "$\imath$"a aplicação identidade sobre $Y \otimes A$. Por um lado, temos:

$$(\imath \otimes \overline{\Delta})((y' \otimes a' \otimes 1 \otimes 1)\overline{\Delta}(y \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes y'' \otimes a'') =$$

$$= (\imath \otimes \overline{\Delta})(y'y_1 \otimes (a' \otimes 1 \otimes 1)((T \otimes \imath_A)(y_2 \otimes \Delta_A(a)))(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes y'' \otimes a'')$$

$$\overset{1.4.1}{=} (\imath \otimes \overline{\Delta})(y'y_1 \otimes a'{y_2}^{-1}a_1 \otimes {y_2}^0 \otimes a_2)(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes y'' \otimes a'')$$

$$= (y'y_1 \otimes a'{y_2}^{-1}a_1 \otimes \overline{\Delta}({y_2}^0 \otimes a_2)(1 \otimes 1 \otimes y'' \otimes a'')$$

$$= y'y_1 \otimes a'{y_2}^{-1}a_1 \otimes ((\imath_Y \otimes T)\Delta_Y({y_2}^0) \otimes a_2)(1 \otimes 1 \otimes y'') \otimes a_3a''$$

$$= [(\imath_{Y\otimes A\otimes Y} \otimes T \otimes \imath_A)(y'y_1 \otimes a'{y_2}^{-1}a_1 \otimes \Delta_Y({y_2}^0) \otimes a_2 \otimes a_3a'')](1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= [(\imath_{Y\otimes A\otimes Y} \otimes T \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \imath_A \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A \otimes \imath_A)(y'y_1 \otimes a'{y_2}^{-1}a_1 \otimes {y_2}^0 \otimes a_2 \otimes a_3a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= [(\imath_{Y\otimes A\otimes Y} \otimes T \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \imath_A \otimes \Delta_Y \otimes \imath_{A\otimes A})(y'y_1 \otimes (a' \otimes 1^2)((T \otimes \imath_A)(y_2 \otimes \Delta_A(a_1)) \otimes a_2a''))](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_{Y\otimes A\otimes Y} \otimes T \otimes \imath_A)(\imath_{Y\otimes A} \otimes \Delta_Y \otimes \imath_{A\otimes A})(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_{A\otimes A})(y'y_1 \otimes y_2 \otimes \Delta(a_1) \otimes a_2a'')]$$
$$\circ(1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_{Y\otimes A\otimes Y} \otimes T \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes \Delta_Y)T \otimes \imath_{A\otimes A})(y'y_1 \otimes y_2 \otimes \Delta(a_1) \otimes a_2a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_{Y\otimes A\otimes Y} \otimes T \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes (T \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y \otimes \imath_A) \otimes \imath_{A\otimes A})$$
$$\circ(y'y_1 \otimes y_2 \otimes \Delta(a_1) \otimes a_2a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes \imath_A \otimes \imath_Y \otimes T \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_Y \otimes \imath_A \otimes \imath_A)$$
$$\circ(\imath_Y \otimes (\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y \otimes \imath_A) \otimes \imath_{A\otimes A})(y'y_1 \otimes y_2 \otimes \Delta(a_1) \otimes a_2a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_{A\otimes Y\otimes A})(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \imath_A \otimes T \otimes \imath_A) \circ (\imath_Y \otimes (\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y \otimes \imath_A) \otimes \imath_{A\otimes A})$$
$$\circ(y'y_1 \otimes y_2 \otimes \Delta_A(a_1) \otimes a_2a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_{A\otimes Y\otimes A})(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \imath_A \otimes T \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes T \otimes \imath_A \otimes \imath_A)$$
$$\circ(\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A \otimes \imath_{A\otimes A})(y'y_1 \otimes y_2 \otimes \Delta_A(a_1) \otimes a_2a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_{A\otimes Y\otimes A})(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A) \otimes \imath_A)$

$\circ(\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A \otimes \imath_A \otimes \imath_A)((y' \otimes 1)\Delta_Y(y) \otimes \Delta(a_1) \otimes a_2a''))](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$

$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_{A\otimes Y\otimes A})(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A) \otimes \imath_A)$

$\circ(\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A \otimes \imath_A \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_A)((y' \otimes 1)\Delta_Y(y) \otimes a_1 \otimes a_2a''))](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$

$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_{A\otimes Y\otimes A})(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A) \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_A)$

$\circ(\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_{A\otimes A})((y' \otimes 1)\Delta_Y(y) \otimes a_1 \otimes a_2a''))](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$

$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_{A\otimes Y\otimes A})(\imath_{Y\otimes Y} \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \Delta_A) \otimes \imath_A)$

$\circ(y'y_1 \otimes \Delta_Y(y_2) \otimes a_1 \otimes a_2a''))](1^4 \otimes y'' \otimes 1),$

para todos $y, y', y'' \in Y$, $a, a', a'' \in A$.

Por outro lado,

$(y' \otimes a' \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)(\overline{\Delta} \otimes \imath)(\overline{\Delta}(y \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y'' \otimes a'')) =$

$= (y' \otimes a' \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)(\overline{\Delta} \otimes \imath)(\overline{T}_1(y \otimes a \otimes y'' \otimes a''))$

$\overset{3.1.2(ii)}{=} (y' \otimes a' \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)(\overline{\Delta} \otimes \imath)(x \otimes e \otimes z \otimes a_2a'')$

$= (y' \otimes a' \otimes 1 \otimes 1)\overline{\Delta}(x \otimes e) \otimes z \otimes a_2a''$

$= y'x_1 \otimes (a' \otimes 1 \otimes 1)((T \otimes \imath_A)(x_2 \otimes \Delta_A(e))) \otimes z \otimes a_2a''$

$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)((y' \otimes 1)\Delta_Y(x) \otimes \Delta_A(e) \otimes z \otimes a_2a'')]$

$= (y' \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\Delta_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(x \otimes e \otimes z \otimes a_2a'')]$

$= (y' \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\Delta_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a_1)(1 \otimes 1 \otimes y'') \otimes a_2a'')]$

$= (y' \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_{A\otimes Y\otimes A})(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\Delta_Y \otimes \imath_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)((\imath_Y \otimes T)$

$\circ(\Delta_Y(y) \otimes a_1) \otimes a_2a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$

$= (y' \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_{A\otimes Y\otimes A})(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\Delta_Y \otimes \imath_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_A)$

$\circ(\Delta_Y(y) \otimes a_1 \otimes a_2a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$

$= (y' \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_{A\otimes Y\otimes A})(\imath_{Y\otimes Y} \otimes \Delta_A \otimes \imath_{Y\otimes A})(\Delta_Y \otimes T \otimes \imath_A)(\Delta_Y(y) \otimes a_1 \otimes a_2a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$

$= (y' \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_{A\otimes Y\otimes A})(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes T \otimes \imath_A)(\Delta_Y \otimes \imath_Y \otimes \imath_A \otimes \imath_A)$

$$\circ(\Delta_Y \otimes \imath_A \otimes \imath_A)(y \otimes a_1 \otimes a_2 a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= (y' \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_{A\otimes Y\otimes A})(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes T \otimes \imath_A)$$

$$\circ((\Delta_Y \otimes \imath_Y)\Delta_Y \otimes \imath_A \otimes \imath_A)(y \otimes a_1 \otimes a_2 a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= (y' \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_{A\otimes Y\otimes A})(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes T \otimes \imath_A)$$

$$\circ((\imath_Y \otimes \Delta_Y)\Delta_Y \otimes \imath_A \otimes \imath_A)(y \otimes a_1 \otimes a_2 a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= (y' \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_{A\otimes Y\otimes A})(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes T \otimes \imath_A)$$

$$\circ(\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A \otimes \imath_A)(\Delta_Y(y) \otimes a_1 \otimes a_2 a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= (y' \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_{A\otimes Y\otimes A})(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes (\imath_Y \otimes T)$$

$$\circ(\Delta_Y \otimes \imath_A) \otimes \imath_A)(\Delta_Y(y) \otimes a_1 \otimes a_2 a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes (T \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \Delta_A) \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(y' y_1 \otimes (\imath_Y \otimes T)$$

$$\circ(\Delta_Y \otimes \imath_A)(y_2 \otimes a_1) \otimes a_2 a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$\overset{(*)}{=} (1 \otimes a' \otimes 1^4)\{(\imath_Y \otimes [((\imath_A \otimes \imath_Y \otimes \varepsilon_Y)((\imath_A \otimes \Delta_Y)T) \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \Delta_A)] \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)$$

$$\circ(y' y_1 \otimes (\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y \otimes \imath_A)(y_2 \otimes a_1) \otimes a_2 a'')\}(1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)\{(\imath_Y \otimes [((\imath_A \otimes \imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(T \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y \otimes \imath_A) \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \Delta_A)] \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)$$

$$\circ(y' y_1 \otimes (\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y_2) \otimes a_1) \otimes a_2 a'')\}(1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)\{[(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes \imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(T \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T) \otimes \imath_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)$$

$$\circ(\imath_Y \otimes (\Delta_Y \otimes \imath_A \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \Delta_A) \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)](y' y_1 \otimes (\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y_2) \otimes a_1) \otimes a_2 a'')\}(1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes \imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(T \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T) \otimes \imath_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)$$

$$\circ(\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(y' y_1 \otimes (\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y_2) \otimes a_1) \otimes a_2 a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes \imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(T \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A))(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)$$

$$\circ(y' y_1 \otimes (\Delta_Y \otimes T)(\Delta_Y(y_2) \otimes a_1) \otimes a_2 a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes \imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(T \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T) \otimes \imath_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)$$

$$\circ(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \imath_Y \otimes T \otimes \imath_A)(y' y_1 \otimes (\Delta_Y \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\Delta_Y(y_2) \otimes a_1) \otimes a_2 a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes \imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(T \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T) \otimes \imath_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T \otimes \imath_A)$$

$$\circ(y'y_1 \otimes (\Delta_Y \otimes \imath_Y)\Delta_Y(y_2) \otimes a_1 \otimes a_2a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes \imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(T \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T) \otimes \imath_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T \otimes \imath_A)$$

$$\circ(y'y_1 \otimes (\imath_Y \otimes \Delta_Y)\Delta_Y(y_2) \otimes a_1 \otimes a_2a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes \imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(T \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T) \otimes \imath_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T \otimes \imath_A)$$

$$\circ(y'y_1 \otimes (\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A)(\Delta_Y(y_2) \otimes a_1) \otimes a_2a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes T(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T) \otimes \imath_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T \otimes \imath_A)$$

$$\circ(y'y_1 \otimes (\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A)(\Delta_Y(y_2) \otimes a_1) \otimes a_2a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes (\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)$$

$$\circ(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A \otimes \imath_A)(y'y_1 \otimes \Delta_Y(y_2) \otimes a_1 \otimes a_2a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$= (1 \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes (((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y \otimes \imath_A)) \otimes \imath_A)$$

$$\circ(y'y_1 \otimes \Delta_Y(y_2) \otimes a_1 \otimes a_2a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1)$$

$$\overset{3.1.2(iv)}{=} (1 \otimes a' \otimes 1^4)[(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \Delta_A) \otimes \imath_A)$$

$$\circ(y'y_1 \otimes \Delta_Y(y_2) \otimes a_1 \otimes a_2a'')](1^4 \otimes y'' \otimes 1),$$

para todos $y, y', y'' \in Y$, $a, a', a'' \in A$.

$$\begin{aligned}(*) \quad T \otimes \imath_A &= (\imath_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(T \otimes \imath_A)\\ &= (\imath_A \otimes (\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)\Delta_Y \otimes \imath_A)(T \otimes \imath_A)\\ &= (\imath_A \otimes \imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\imath_A \otimes \Delta_Y)T \otimes \imath_A.\end{aligned}$$

Portanto, provamos que

$$(\imath \otimes \overline{\Delta})((y' \otimes a' \otimes 1 \otimes 1)\overline{\Delta}(y \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes y'' \otimes a'') =$$
$$= (y' \otimes a' \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)(\overline{\Delta} \otimes \imath)(\overline{\Delta}(y \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y'' \otimes a'')),$$

para todos $y, y', y'' \in Y$, $a, a', a'' \in A$. Ou seja $\overline{\Delta}$ satisfaz a coassociatividade. $\square$

Devemos mostrar que $\overline{\Delta}$ é um homomorfismo de álgebras. Para isto, vamos apresentar algumas observações e resultados. Antes disto, precisamos da definição a seguir.

Definição 3.2.2. Sejam Y e A duas álgebras de Hopf de multiplicadores. Dizemos que Y é um A-**comódulo biálgebra parcial à esquerda** se, existe uma aplicação linear $\rho : Y \longmapsto M(A \otimes Y)$ que define uma estrutura de comódulo álgebra parcial à esquerda e comódulo coálgebra parcial à esquerda.

Dizemos que Y é um A-**comódulo biálgebra parcial simétrico** quando ambas estruturas satisfazem as respectivas condições de simetria.

Nas condições da Definição 3.2.2, vamos observar alguns fatos que serão importantes ao que segue.

Observação 3.2.3. (i) Note que a injetividade de ρ não implica a injetividade de T. De fato, dado $\sum_i y_i \otimes ai \in Ker(T)$, temos:

$$0 = \sum_i \rho(y_i)(a_i \otimes 1).$$

Aplicando $\varepsilon_A \otimes \imath_Y$ na igualdade acima, obtemos:

$$0 = \sum_i (\varepsilon_A \otimes \imath_Y)(\rho(y_i))\varepsilon_A(a_i) = \sum_i y_i \varepsilon_A(a_i).$$

Assim, $y_i = 0$ ou $\varepsilon_A(a_i) = 0$ para cada i. Isto não implica necessariamente que $\sum_i y_i \otimes ai = 0$.

(ii) Sabemos da Proposição 3.2.3 de [15] que, se Y é um A-comódulo álgebra parcial simétrico, então $\rho : Y \longmapsto M(A \otimes Y)$ é um homomorfismo que pode ser unicamente estendido a $M(Y)$ e $\rho(1_{M(Y)}) = E$.

(iii) Se A é comutativa então a aplicação linear T é, de fato, um homomorfismo de álgebras, pois:

$$\begin{aligned} T((y \otimes a)(y' \otimes a')) &= T(yy' \otimes aa') \\ &= \rho(yy')(aa' \otimes 1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \rho(y)\rho(y')(a' \otimes 1)(a \otimes 1) \\
&= \rho(y)(b \otimes z)(a \otimes 1) \\
&= \rho(y)(ba \otimes z) \\
&= \rho(y)(a \otimes 1)(b \otimes z) \\
&= \rho(y)(a \otimes 1)\rho(y')(a' \otimes 1) \\
&= T(y \otimes a)T(y' \otimes a'),
\end{aligned}
$$

para todos $y, y' \in Y$, $a, a' \in A$.

Uma importante consequência do item (iii) da observação anterior é o seguinte resultado.

Proposição 3.2.4. *Seja Y um A-comódulo biálgebra parcial à esquerda simétrico tal que A é comutativa. Então a aplicação T pode ser estendida unicamente a $\tilde{T}$ sobre $M(Y \otimes A)$ e $\tilde{T}(1_{M(Y\otimes A)}) = E$.*

Demonstração. Sabemos das Proposições 3.1.10 e 3.2.2 de [15], respectivamente, que $\rho(Y)(A \otimes 1) = E(A \otimes Y)$ e que $(A \otimes 1)\rho(Y) = (A \otimes Y)E$ onde E é dado pela estrutura de A-comódulo álgebra parcial em Y. Assim, definimos:

$$
\begin{aligned}
\tilde{T} : M(Y \otimes A) &\longrightarrow M(A \otimes Y) \\
m &\longmapsto \tilde{T}(m) = (\overline{\tilde{T}(m)}, \overline{\overline{\tilde{T}(m)}})
\end{aligned}
$$

sendo, para todos $y \in Y$, $b \in A$,

$$\overline{\tilde{T}(m)}(b \otimes y) = T(\overline{m}(x \otimes a)),$$

onde $E(b \otimes y) = \rho(x)(a \otimes 1) = T(x \otimes a)$, e,

$$\overline{\overline{\tilde{T}(m)}}(b \otimes y) = T(\overline{\overline{m}}(z \otimes c)),$$

onde $(b \otimes y)E = (c \otimes 1)\rho(z) := T'(z \otimes c)$.

(1) Boa definição do par $\tilde{T}(m)$.

$$
\begin{aligned}
(c\otimes y)\overline{\tilde{T}(m)}(c'\otimes y') &= (c\otimes y)T(\overline{m}(x\otimes a))\\
&= (c\otimes y)E(d\otimes t)\\
&= (c\otimes y)EE(d\otimes t)\\
&= ((c\otimes y)E)(E(d\otimes t))\\
&= ((b\otimes 1)\rho(z))T(\overline{m}(x\otimes a))\\
&= T'(z\otimes b)T(\overline{m}(x\otimes a))\\
&\overset{(*)}{=} T(z\otimes b)T(\overline{m}(x\otimes a))\\
&= T((z\otimes b)(\overline{m}(x\otimes a)))\\
&= T(\overline{\overline{m}}(z\otimes b)(x\otimes a))\\
&= T(\overline{\overline{m}}(z\otimes b))T(x\otimes a)\\
&\overset{(*)}{=} T'(\overline{\overline{m}}(z\otimes b))T(x\otimes a)\\
&= T'(\overline{\overline{m}}(z\otimes b))E(c'\otimes y')\\
&= ((d\otimes w)E)E(c'\otimes y')\\
&= (d\otimes w)E(c'\otimes y')\\
&= T'(\overline{\overline{m}}(z\otimes b))(c'\otimes y')\\
&\overset{(*)}{=} T(\overline{\overline{m}}(z\otimes b))(c'\otimes y')\\
&= \overline{\overline{\tilde{T}(m)}}(c\otimes y)(c'\otimes y'),
\end{aligned}
$$

para todos $c, c' \in A$, $y, y' \in Y$, $E(c'\otimes y') := T(x\otimes a)$ e $(c\otimes y)E := T'(z\otimes b)$.

Justificativa de $(*)$: Para todos $y \in Y$, $a \in A$, segue que,

$$
\begin{aligned}
T'(y\otimes a)(d\otimes z) &= (a\otimes 1)\rho(y)(d\otimes z)\\
&= (a\otimes 1)(\sum_i d_i\otimes z_i)\\
&= \sum_i d_i a\otimes z_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\sum_i d_i \otimes z_i)(a \otimes 1) \\
&= \rho(y)(d \otimes z)(a \otimes 1) \\
&= \rho(y)(a \otimes 1)(d \otimes z) \\
&= T(y \otimes a)(d \otimes z),
\end{aligned}
$$

para todos $d \in A$, $z \in Y$. Logo, usando que o produto é não degenerado, obtemos que $T'(y \otimes a) = T(y \otimes a)$.

(2) $\tilde{T}$ estende T.

$$
\begin{aligned}
\overline{\tilde{T}(y \otimes c)}(c' \otimes y') &= T((y \otimes c)(x \otimes a)) \\
&= T(yx \otimes ca) \\
&= \rho(yx)(ca \otimes 1) \\
&= \rho(y)\rho(x)(a \otimes 1)(c \otimes 1) \\
&= \rho(y)E(c' \otimes y')(c \otimes 1) \\
&\overset{2.2.4}{=} \rho(y)(c'c \otimes y') \\
&= \rho(y)(c \otimes 1)(c' \otimes y') \\
&= T(y \otimes c)(c' \otimes y') \\
&= \overline{T(y \otimes c)}(c' \otimes y'),
\end{aligned}
$$

para todos $y' \in Y$, $c' \in A$. Logo, $\overline{\tilde{T}(y \otimes c)} = \overline{T(y \otimes c)}$.

Analogamente, mostramos que $\overline{\overline{\tilde{T}(y \otimes c)}} = \overline{\overline{T(y \otimes c)}}$. Assim, $\tilde{T}(y \otimes c) = T(y \otimes c)$, para todos $y \in Y$, $c \in A$.

(3) $\tilde{T}(1_{M(Y \otimes A)}) = E$

$$
\begin{aligned}
\overline{\tilde{T}(1_{M(Y \otimes A)})}(b \otimes y) &= T(1_{M(Y \otimes A)}(x \otimes a)) \\
&= T(x \otimes a) \\
&= E(b \otimes y),
\end{aligned}
$$

para todos $b \in A$, $y \in Y$. Ou seja $\overline{\tilde{T}(1_{M(Y\otimes A)})} = \overline{E}$.

Analogamente, mostramos que $\overline{\overline{\tilde{T}(1_{M(Y\otimes A)})}} = \overline{\overline{E}}$.

(4) $\tilde{T}$ é homomorfismo de álgebras.

$$\begin{aligned}
\overline{\tilde{T}(mn)}(b\otimes y) &= T((\overline{mn})(x\otimes a)) \\
&= T(\overline{m}(\overline{n}(x\otimes a))) \\
&= T(\overline{m}(z\otimes c)) \\
&= \overline{\tilde{T}(m)}(\rho(z)(c\otimes 1)) \\
&= \overline{\tilde{T}(m)}(T(z\otimes c)) \\
&= \overline{\tilde{T}(m)}(T(\overline{n}(x\otimes a))) \\
&= \overline{\tilde{T}(m)}(\overline{\tilde{T}(n)}(b\otimes y)) \\
&= \overline{\tilde{T}(m)\tilde{T}(n)}(b\otimes y),
\end{aligned}$$

para todos $b \in A$, $y \in Y$. Logo, $\overline{\tilde{T}(mn)} = \overline{\tilde{T}(m)\tilde{T}(n)}$. Analogamente, mostramos para o segundo elemento do par.

(5) $\tilde{T}$ é única.

Vamos supor que S é um homomorfismo que também estende T e $S(1_{M(Y\otimes A)}) = E$. Assim, se $E(b\otimes y) = T(x\otimes a)$, então

$$\begin{aligned}
\overline{\tilde{T}(m)}(b\otimes y) &= T(\overline{m}(x\otimes a)) \\
&= T(m(x\otimes a)) \\
&= S(m(x\otimes a)) \\
&= S(m)S(x\otimes a) \\
&= S(m)T(x\otimes a) \\
&= S(m)\rho(x)(a\otimes 1) \\
&= S(m)E(b\otimes y) \\
&= S(m)S(1_{M(Y\otimes A)})(b\otimes y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= S(m)(b \otimes y) \\
&= \overline{S(m)}(b \otimes y),
\end{aligned}
$$

para todos $b \in A$, $y \in Y$. Assim, $\overline{\tilde{T}(m)} = \overline{S(m)}$. Analogamente, mostramos para o outro elemento do par. Logo, para todo $m \in M(Y \otimes A)$, temos que $\tilde{T}(m) = S(m)$ e, portanto $\tilde{T} = S$.

Podemos mostrar também que:

(6) $\tilde{T}(1_{M(Y)} \otimes c) = (c \otimes 1)E$, $c \in A$.

$$
\begin{aligned}
\tilde{T}(1_{M(Y)} \otimes c)(b \otimes y) &= T((1_{M(Y)} \otimes c)(x \otimes a)) \\
&= T(x \otimes ca) \\
&= T(x \otimes ac) \\
&= \rho(x)(ac \otimes 1) \\
&= \rho(x)(a \otimes 1)(c \otimes 1) \\
&= (c \otimes 1)\rho(x)(a \otimes 1) \\
&= (c \otimes 1)E(b \otimes y),
\end{aligned}
$$

para todos $b \in A$, $y \in Y$. Portanto, segue a igualdade. □

Teorema 3.2.5. *Sejam Y e A duas álgebras de Hopf de multiplicadores tais que A é comutativa e Y é um A-comódulo biálgebra parcial à esquerda simétrico. Então $\overline{\Delta}$ é um coproduto.*

Demonstração. Pelas observações anteriores, basta mostrar que $\overline{\Delta}$ é um homomorfismo. De fato,

$$
\begin{aligned}
&(y'' \otimes a'' \otimes 1 \otimes 1))\overline{\Delta}(yy' \otimes aa') = \\
&= \overline{T}_2(y'' \otimes a'' \otimes yy' \otimes aa') \\
&= y''(yy')_1 \otimes (a'' \otimes 1 \otimes 1)((T \otimes \imath_A)((yy')_2 \otimes \Delta_A(aa')))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (1 \otimes a'' \otimes 1 \otimes 1)(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_A)((y'' \otimes 1)\Delta_Y(yy') \otimes \Delta_A(aa')) \\
&\overset{(*)}{=} (1 \otimes a'' \otimes 1 \otimes 1)(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_A)(y''y_1 \otimes y_2 \otimes \Delta_A(a))(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_A)(ey'_1 \otimes y'_2 \otimes \Delta_A(a')) \\
&\overset{(**)}{=} (y'' \otimes a'' \otimes 1 \otimes 1)\overline{\Delta}(y \otimes a)(e \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)\overline{\Delta}(y' \otimes a') \\
&\overset{(***)}{=} (y'' \otimes a'' \otimes 1 \otimes 1)\overline{\Delta}(y \otimes a)\overline{\Delta}(y' \otimes a'),
\end{aligned}
$$

para todos $y'' \in Y$, $a'' \in A$. Analogamente, mostramos para o outro elemento do par. Assim, $\overline{\Delta}(yy' \otimes aa') = \overline{\Delta}(y \otimes a)\overline{\Delta}(y' \otimes a')$, para todos $y, y' \in Y$, $a, a' \in A$.

Justificativa de $(*)$: Consideramos $e \in Y$ tal que $y''y_1e = y''y_1$ e usamos que T é um homomorfismo na extensão.

Justificativa de $(**)$: Basta usar que $(y'' \otimes a'' \otimes 1 \otimes 1)\overline{\Delta}(y \otimes a) \in Y \otimes A \otimes Y \otimes A$, logo existe um elemento $c \in A$ (unidade local) no tensor à direita de e, com isso, podemos aplicar a definição de $\overline{T}_2$.

Justificativa de $(***)$: Basta aplicar a definição para $(y'' \otimes a'' \otimes 1 \otimes 1)\overline{\Delta}(y \otimes a)$ em $Y \otimes A \otimes Y \otimes A$ e usar que $y''y_1e = y''y_1$. □

Proposição 3.2.6. *Sejam Y e A duas álgebras de Hopf de multiplicadores e, considere $Y \otimes A$ com o coproduto $\overline{\Delta}$. Então*

$$\overline{\varepsilon}(y \otimes a) := \varepsilon_Y(y)\varepsilon_A(a)$$

é counidade à esquerda para $Y \otimes A$.

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
&(\overline{\varepsilon} \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\overline{\Delta}(y \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y' \otimes a')) = \\
&= (\varepsilon_Y \otimes \varepsilon_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)[((\imath_Y \otimes T \otimes \imath_A)(\Delta_Y(y) \otimes a_1 \otimes a_2a'))(1 \otimes 1 \otimes y' \otimes 1)] \\
&= (\varepsilon_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)[((\varepsilon_Y \otimes T \otimes \imath_A)(\Delta_Y(y) \otimes a_1 \otimes a_2a'))(1 \otimes y' \otimes 1)] \\
&= (\varepsilon_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)[(T \otimes \imath_A)(\varepsilon_Y \otimes \imath_Y \otimes \imath_A \otimes \imath_A)(\Delta_Y(y) \otimes a_1 \otimes a_2a')(1 \otimes y' \otimes 1)] \\
&= (\varepsilon_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)[(T \otimes \imath_A)((\varepsilon_Y \otimes \imath_Y)\Delta_Y(y) \otimes a_1 \otimes a_2a')(1 \otimes y' \otimes 1)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\varepsilon_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)[(T(y \otimes a_1) \otimes a_2 a')(1 \otimes y' \otimes 1)] \\
&= (\varepsilon_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)[(\rho(y)(a_1 \otimes 1) \otimes a_2 a')(1 \otimes y' \otimes 1)] \\
&= ((\varepsilon_A \otimes \imath_Y)(\rho(y)(a_1 \otimes 1)) \otimes a_2 a')(y' \otimes 1) \\
&= ((\varepsilon_A \otimes \imath_Y)(\rho(y)(a_1 \otimes 1)) \otimes a_2 a')(y' \otimes 1) \\
&= (((\varepsilon_A \otimes \imath_Y)\rho(y))\varepsilon_A(a_1) \otimes a_2 a')(y' \otimes 1) \\
&\overset{3.1.2(i)}{=} (y \otimes a a')(y' \otimes 1) \\
&= (y \otimes a)(y' \otimes a'),
\end{aligned}
$$

para todos $y' \in Y$, $a' \in A$. Então,

$$(\overline{\varepsilon} \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\overline{\Delta}(y \otimes a)) = y \otimes a,$$

para todos $y \in Y$, $a \in A$. $\square$

Observamos agora que, como não temos necessariamente, que a propriedade counitária,

$$(\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\rho(y) = \varepsilon_Y(y)1_{M(A)}$$

é satisfeita, então não podemos garantir a existência de counidade à direita para $Y \otimes A$ no caso parcial. Todavia, é possível garantir que a existência de counidade à direita é satisfeita em um subespaço menor. Para este propósito, apresentaremos algumas definições e resultados.

Definição 3.2.7. Seja A uma álgebra com unidades locais. Dizemos que A é uma **biálgebra de multiplicadores**, se existe um homomorfismo $\Delta : A \longmapsto M(A \otimes A)$ que satisfaz:

(i) $\Delta(A)(1 \otimes A) \subseteq A \otimes A$ e $(A \otimes 1)\Delta(A) \subseteq A \otimes A$;

(ii) $(a \otimes 1 \otimes 1)((\Delta \otimes \imath)(\Delta(b)(1 \otimes c))) = ((\imath \otimes \Delta)((a \otimes 1)\Delta(b)))(1 \otimes 1 \otimes c)$, para todos a, b e $c \in A$, onde $\imath$ denota a aplicação identidade de A.

Além disso, dizemos que A possui *counidade à esquerda* (resp. à direita), se existe um homomorfismo $\varepsilon : A \longmapsto \Bbbk$ tal que $(\varepsilon \otimes \imath)\Delta = \imath$ (respec. $(\imath \otimes \varepsilon)\Delta = \imath$). E, que A é *counitária* se tem counidade à esquerda e à direita.

Exemplo 3.2.8. Toda álgebra de Hopf de multiplicadores é uma biálgebra de multiplicadores counitária.

Definição 3.2.9. Seja A uma biálgebra de multiplicadores. Dizemos que uma subálgebra $B \subseteq A$ é uma *subbiálgebra de multiplicadores* se:

(i) $\Delta(B) \subseteq M(B \otimes B)$;

(ii) $\Delta(B)(1 \otimes B) \subseteq B \otimes B$ e $(B \otimes 1)\Delta(B) \subseteq B \otimes B$.

Exemplo 3.2.10. Seja G um grupo (não necessariamente finito) e H um subgrupo de G. Então, o subespaço vetorial B com base $\{\delta_h\}_{h \in H}$ é uma subbiálgebra de multiplicadores de A_G (1.1.10).

Inicialmente, vamos verificar que B é uma subálgebra com produto não degenerado. De fato,

$$\delta_g \delta_h = \begin{cases} \delta_g & , \text{se} \quad h = g, \\ 0 & , \text{caso contrário}, \end{cases}$$

ou seja $\delta_g \delta_h \in B$. Portanto B é subálgebra de A_G.

Agora, supondo que $\delta_g \delta_h = 0$, para todo $h \in H$, em particular se $h = g$, temos que $\delta_g = \delta_g \delta_g = 0$. Ou seja, o produto em B é não degenerado.

Vamos verificar que $\Delta_B(B) \subseteq M(B \otimes B)$. Sabemos que para todo $b \in B$, $\Delta_B(b)$ satisfaz as propriedades de um multiplicador pois pertence a $M(A_G \otimes A_G)$. Assim, basta mostrar que $\Delta_B(\delta_g)(\delta_h \otimes \delta_k) \in B \otimes B$ para $g, h, k \in H$. De fato,

$$\Delta_B(\delta_g)(\delta_h \otimes \delta_k) \quad = \quad \Delta_B(\delta_g)(1 \otimes \delta_k)(\delta_h \otimes 1)$$

$$
\begin{aligned}
&= (\delta_{gk^{-1}} \otimes \delta_k)(\delta_h \otimes 1) \\
&= \delta_{gk^{-1}}\delta_h \otimes \delta_k \in B \otimes B,
\end{aligned}
$$

para todos $g, h, k \in H$.

Note que, $\Delta_B(B)(1 \otimes B) \subseteq B \otimes B$. De fato, $\Delta_B(\delta_g)(1 \otimes \delta_h) = \delta_{gh^{-1}} \otimes \delta_h \in B \otimes B$, para todos $g, h \in H$. Analogamente, verificamos que $(B \otimes 1)\Delta_B(B) \subseteq B \otimes B$.

Proposição 3.2.11. *Seja A uma biálgebra de multiplicadores com counidade à esquerda, defina A_b o $\Bbbk$-espaço vetorial gerado por elementos da forma*

$$\langle a_1\varepsilon(a_2b); \quad \varepsilon_A(b) = 1_{\Bbbk}\rangle_{\Bbbk}.$$

Então:

(i) *A_b é uma subálgebra de A;*

(ii) *A_b é uma subbiálgebra de multiplicadores de A;*

(iii) *A_b tem counidade à direita.*

Demonstração. (i) Observamos inicialmente que, para todo $a \in A$,

$$(\imath \otimes \varepsilon)(\Delta(a)(1 \otimes b)) = (\imath \otimes \varepsilon)\Delta(a),$$

como multiplicadores em $M(A)$. De fato, para todo $c \in A$, temos

$$
\begin{aligned}
(\imath \otimes \varepsilon)(\Delta(a)(1 \otimes b))(c) &= a_1\varepsilon(a_2b)c \\
&= a_1c\varepsilon(a_2b) \\
&= (\imath \otimes \varepsilon)((\Delta(a)(c \otimes 1))(1 \otimes b)) \\
&= a_1c\varepsilon(a_2)\varepsilon(b) \\
&= a_1c\varepsilon(a_2) \\
&= (\imath \otimes \varepsilon)(\Delta(a)(c \otimes 1))
\end{aligned}
$$

$$= (\imath \otimes \varepsilon)\Delta(a)(c).$$

Agora, provamos que A_b é uma subálgebra de A. Dados $a_1\varepsilon(a_2b)$, $d_1\varepsilon(d_2b) \in A_b$, temos:

$$\begin{aligned}
(a_1\varepsilon(a_2b))(d_1\varepsilon(d_2b)) &= (\imath \otimes \varepsilon)(\Delta(a)(1 \otimes b))(\imath \otimes \varepsilon)(\Delta(d)(1 \otimes b)) \\
&= (\imath \otimes \varepsilon)(\Delta(a))(\imath \otimes \varepsilon)(\Delta(d)(1 \otimes b)) \\
&= (\imath \otimes \varepsilon)(\Delta(a)\Delta(d)(1 \otimes b)) \\
&= (\imath \otimes \varepsilon)(\Delta(ad)(1 \otimes b)) \\
&= (ad)_1\varepsilon((ad)_2b) \in A_b.
\end{aligned}$$

(ii) Vamos mostrar inicialmente que $\Delta(A_b)(1 \otimes A_b) \subseteq A_b \otimes A_b$ e $(A_b \otimes 1)\Delta(A_b) \subseteq$ $\subseteq A_b \otimes A_b$.

$$\begin{aligned}
\Delta(a_1\varepsilon(a_2b))(1 \otimes d_1\varepsilon(d_2b)) &= \Delta(a_1)(1 \otimes d_1)\varepsilon(a_2b)\varepsilon(d_2b) \\
&= (a_1 \otimes a_2d_1)\varepsilon(a_3b)\varepsilon(d_2b) \\
&\overset{(*)}{=} a_1\varepsilon(a_2b) \otimes a_3\varepsilon(a_4b)d_1\varepsilon(d_2b) \\
&\overset{(i)}{=} a_1\varepsilon(a_2b) \otimes (a_3d)_1\varepsilon((a_3d)_2b) \in A_b \otimes A_b
\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
(d_1\varepsilon(d_2b) \otimes 1)\Delta(a_1\varepsilon(a_2b)) &= d_1a_1\varepsilon(d_2b) \otimes a_2\varepsilon(a_3b) \\
&\overset{(*)}{=} d_1a_1\varepsilon(d_2b) \otimes \varepsilon(a_2b)a_3\varepsilon(a_4b) \\
&= d_1\varepsilon(d_2b)a_1\varepsilon(a_2b) \otimes a_3\varepsilon(a_4b) \\
&\overset{(i)}{=} (da_1)_1\varepsilon((da_1)_2b) \otimes a_2\varepsilon(a_3b) \in A_b \otimes A_b.
\end{aligned}$$

Justificativa de $(*)$: Analogamente ao que fizemos no item (i), podemos provar que:

$$(\varepsilon \otimes \imath)(\Delta(a)(b \otimes 1)) = (\varepsilon \otimes \imath)\Delta(a) = \imath(a),$$

para todo $a \in A$ e, a última igualdade segue pois ε é counidade à esquerda, por hipótese.

Agora, veremos que $\Delta(A_b) \subseteq M(A_b \otimes A_b)$. De fato, provamos anteriormente que $\Delta(A_b)(1 \otimes A_b) \subseteq A_b \otimes A_b$ e $(A_b \otimes 1)\Delta(A_b) \subseteq A_b \otimes A_b$. Assim, obtemos que $\Delta(A_b)(A_b \otimes A_b) \subseteq A_b \otimes A_b$ e $(A_b \otimes A_b)\Delta(A_b) \subseteq A_b \otimes A_b$, pois A_b é subálgebra. Além disso, para cada $c \in A_b$, $\Delta(c)$ é um multiplicador em $A_b \otimes A_b$ pois, mais geralmente, é um multiplicador em $A \otimes A$.

Portanto, A_b é uma subbiálgebra de multiplicadores de A.

(iii) A_b tem counidade à direita.

$$
\begin{aligned}
\overline{(\imath \otimes \varepsilon)\Delta(a_1\varepsilon(a_2b))}(c) &= (\imath \otimes \varepsilon)(\Delta(a_1\varepsilon(a_2b))(c \otimes 1)) \\
&= a_1c\varepsilon(a_2)\varepsilon(a_3b) \\
&= a_1c\varepsilon(\varepsilon(a_2)a_3b) \\
&\overset{(*)}{=} a_1c\varepsilon(a_2b) \\
&= \overline{a_1\varepsilon(a_2b)}(c),
\end{aligned}
$$

para todo $c \in A$. Ou seja, $(\imath \otimes \varepsilon)\Delta(a_1\varepsilon(a_2b)) = a_1\varepsilon(a_2b)$, como multiplicador em A, pois o produto é não degenerado.

$$(*) \quad (\varepsilon \otimes \imath)(\Delta(a)(1 \otimes b)) = (\varepsilon \otimes \imath)\Delta(a)(b) = ab,$$

para todos $a, b \in A$. $\square$

Corolário 3.2.12. $\overline{Y \rtimes A} := (\imath \otimes \overline{\varepsilon})\overline{\Delta}(Y \otimes A)$ *é uma biálgebra de multiplicadores counitária.*

Demonstração. Dados $y' \in Y$, $a' \in A$ tais que $\varepsilon_Y(y') = \varepsilon_A(a') = 1_{\Bbbk}$. Os elementos de $\overline{Y \rtimes A}$ são da forma:

$$
\begin{aligned}
(\imath \otimes \overline{\varepsilon})\overline{\Delta}(y \otimes a) &= (\imath \otimes \overline{\varepsilon})(\overline{\Delta}(y \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y' \otimes a')) \\
&= (\imath \otimes \overline{\varepsilon})(\overline{T}_1(y \otimes a \otimes y' \otimes a')) \\
&= (\imath \otimes \overline{\varepsilon})(\sum((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a_1))(1 \otimes 1 \otimes y') \otimes a_2a')
\end{aligned}
$$

$$\overset{3.1.2(ii)}{=} \quad (\imath \otimes \overline{\varepsilon})((x \otimes c \otimes w) \otimes a_2 a')$$
$$= \quad x\varepsilon_Y(w) \otimes c\varepsilon_A(a_2 a'),$$

para todos $y \in Y$, $a \in A$.

Agora, observamos dos resultados obtidos anteriormente, que $Y \otimes A$ é uma biálgebra de multiplicadores com counidade à esquerda. E, com a Proposição 3.2.11 concluímos que $\overline{Y \rtimes A}$ é uma subbiálgebra de multiplicadores counitária de $Y \otimes A$.

$\square$

Observação 3.2.13. A biálgebra de multiplicadores counitária

$$\overline{Y \rtimes A} := (\imath \otimes \overline{\varepsilon})\overline{\Delta}(Y \otimes A)$$

também será chamada de **Coproduto Smash Parcial**.

3.3 Comódulo Coálgebra Parcial Induzido

Nesta seção, construiremos um comódulo coálgebra parcial a partir de um comódulo coálgebra global através de uma projeção. Para este propósito, apresentamos a seguinte definição.

Definição 3.3.1. Seja (A, Δ_A) uma álgebra de Hopf de multiplicadores. Dizemos que uma subálgebra $B \subseteq A$ é uma *subálgebra de Hopf de multiplicadores* de A se (B, Δ_B) é uma álgebra de Hopf de multiplicadores, onde $\Delta_B : B \longrightarrow M(B \otimes B)$ denota o coproduto Δ_A restrito à B.

Exemplo 3.3.2. Seja G um grupo (não necessariamente finito) e H um subgrupo de G. Então, o subespaço vetorial B com base $\{\delta_h\}_{h \in H}$ é uma subálgebra de Hopf de multiplicadores de A_G (1.1.10).

No Exemplo 3.2.10, mostramos que B é uma subbiálgebra de multiplicadores de A_G. Assim, basta mostrar que as aplicações T_1 e T_2 da Definição 1.1.6 são bijeções.

Seja $T_1(\delta_g \otimes \delta_h) = \Delta_B(\delta_g)(1 \otimes \delta_h)$, mostraremos que $S_1(\delta_g \otimes \delta_h) = \delta_{gh} \otimes \delta_h$ é a inversa de T_1. De fato,

$$\begin{aligned}(S_1T_1)(\delta_g \otimes \delta_h) &= S_1(\Delta_B(\delta_g)(1 \otimes \delta_h)) \\ &= S_1(\delta_{gh^{-1}} \otimes \delta_h) \\ &= \delta_g \otimes \delta_h,\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}(T_1S_1)(\delta_g \otimes \delta_h) &= T_1(\delta_{gh} \otimes \delta_h) \\ &= \delta_{ghh^{-1}} \otimes \delta_h \\ &= \delta_g \otimes \delta_h,\end{aligned}$$

para todos $g, h \in H$. Portanto, T_1 é bijeção com inversa S_1. Analogamente, mostramos que T_2 é bijeção.

Agora, sejam Z um A-comódulo coálgebra (global) à esquerda via ρ, Y uma subálgebra de Hopf de multiplicadores de Z e π uma projeção de álgebras de Z sobre Y, conforme Definição 2.1.6.

Definimos:

$$\begin{aligned}\beta : Y &\longrightarrow M(A \otimes Y) \\ y &\longmapsto \beta(y) := (\imath_A \otimes \pi)\rho(y),\end{aligned}$$

onde $\beta(y)$ é o multiplicador em $M(A \otimes Y)$ definido por:

$$\begin{aligned}\overline{(\imath_A \otimes \pi)\rho(y)}(a \otimes 1) &= (\imath_A \otimes \pi)(\rho(y)(a \otimes 1)), \\ \overline{\overline{(\imath_A \otimes \pi)\rho(y)}}(a \otimes 1) &= (\imath_A \otimes \pi)((a \otimes 1)(\rho(y)),\end{aligned}$$

para todos $y \in Y$, $a \in A$. E, denotamos

$$T'(y \otimes a) = \beta(y)(a \otimes 1) = (\imath_A \otimes \pi)T(y \otimes a).$$

Além disso, vamos supor que:

(i) π é comultiplicativa para todos $y \in Y$, $z \in Z$, no seguinte sentido

$$\begin{aligned} \Delta_Y(\pi(z))(1 \otimes y) &= (\pi \otimes \pi)(\Delta_Z(z)(1 \otimes y)), \\ \Delta_Y(\pi(z))(y \otimes 1) &= (\pi \otimes \pi)(\Delta_Z(z)(y \otimes 1)). \end{aligned} \tag{3.10}$$

(ii) Para todos $z \in Z$, $a \in A$,

$$T'(\pi(z) \otimes a) = (\imath_A \otimes \pi)T(z \otimes a). \tag{3.11}$$

(iii) Para todos $a \in A$, $z \in Z$ e $t \in Y$ tal que $\varepsilon_Y(t) = 1_{\Bbbk}$,

$$(\imath_A \otimes \pi)T(\pi(z) \otimes a) = (\imath_A \otimes \pi)T(z_2 \otimes a)\varepsilon_Y(\pi(z_1 t)). \tag{3.12}$$

Observação 3.3.3. Os itens (i) e (ii) implicam a seguinte igualdade.

$$(\imath_Y \otimes T')(\Delta_Y(\pi(z))(y \otimes 1) \otimes a) = (\pi \otimes \imath_A \otimes \pi)(\imath_Z \otimes T)(\Delta_Z(z)(y \otimes 1) \otimes a). \tag{3.13}$$

De fato,

$$\begin{aligned} (\imath_Y \otimes T')(\Delta_Y(\pi(z))(y \otimes 1) \otimes a) &\overset{(3.10)}{=} (\imath_Y \otimes T')((\pi \otimes \pi)(\Delta_Z(z)(y \otimes 1)) \otimes a) \\ &= (\imath_Y \otimes T')((\pi \otimes \pi)(z' \otimes z'') \otimes a) \\ &= \pi(z') \otimes T'(\pi(z'') \otimes a) \\ &\overset{(3.11)}{=} \pi(z') \otimes (\imath_A \otimes \pi)T(z'' \otimes a) \\ &= (\pi \otimes \imath_A \otimes \pi)(\imath_Z \otimes T)(\Delta_Z(z)(y \otimes 1) \otimes a), \end{aligned}$$

para todos $y \in Y$, $z \in Z$ e $a \in A$.

Proposição 3.3.4. *Nas condições mencionadas, Y é um A-comódulo coálgebra parcial à esquerda via β.*

Demonstração. Vamos verificar os itens da Definição 3.1.2.

(i) $(\varepsilon_A \otimes \imath_Y)\beta(y) = y$, $y \in Y$.

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_A \otimes \imath_Y)\beta(y) &= (\varepsilon_A \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \pi)\rho(y) \\
&= (\varepsilon_A \otimes \pi)\rho(y) \\
&= \pi((\varepsilon_A \otimes \imath_Y)\rho(y)) \\
&\overset{1.3.20}{=} \pi(y) \\
&= y.
\end{aligned}$$

(ii) Sejam $y, y' \in Y$, $a \in A$,

$$((\imath_Y \otimes T')(\Delta_Y(y) \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes y') \in Y \otimes A \otimes Y;$$

$$(1 \otimes 1 \otimes y')((\imath_Y \otimes T')(\Delta_Y(y) \otimes a)) \in Y \otimes A \otimes Y.$$

Usando a definição natural de multiplicador em $M^Y_{0,1}(Y \otimes A \otimes Y)$, para todo $y'' \in Y$, temos

$$\begin{aligned}
&((\imath_Y \otimes T')(\Delta_Y(y) \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes y')(y'') = \\
&= ((\imath_Y \otimes T')(\Delta_Y(y)(y'' \otimes 1) \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes y') \\
&= ((\imath_Y \otimes T')(\Delta_Y(\pi(y))(y'' \otimes 1) \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes y') \\
&\overset{(3.13)}{=} (\pi \otimes \imath_A \otimes \pi)((\imath_Z \otimes T)(\Delta_Z(y)(y'' \otimes 1) \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes \pi(y')) \\
&= (\pi \otimes \imath_A \otimes \pi)((\imath_Z \otimes T)(\Delta_Z(y)(y'' \otimes 1) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y')) \\
&= (\pi \otimes \imath_A \otimes \pi)((\imath_Z \otimes T)(\Delta_Z(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y')(y'' \otimes 1 \otimes 1)) \\
&= (\pi \otimes \imath_A \otimes \pi)((\imath_Z \otimes T)(\Delta_Z(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y'))(y'' \otimes 1 \otimes 1) \\
&= (\pi \otimes \imath_A \otimes \pi)((\imath_Z \otimes T)(\Delta_Z(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y'))(y'').
\end{aligned}$$

Assim,

$$((\imath_Y \otimes T')(\Delta_Y(y) \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes y') = (\pi \otimes \imath_A \otimes \pi)((\imath_Z \otimes T)(\Delta_Z(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y')). \quad (3.14)$$

E, da Definição 1.4.4 (i), temos

$$(\imath_Z \otimes T)(\Delta_Z(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y')) \in Z \otimes A \otimes Z,$$

para todos $y, y' \in Y \subseteq Z$, $a \in A$. Portanto $((\imath_Y \otimes T')(\Delta_Y(y) \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes y') \in Y \otimes A \otimes Y$, para todos $y, y' \in Y$, $a \in A$. De modo análogo, mostramos a outra inclusão.

(iii) $(\imath_A \otimes \Delta_Y)T' = (T' \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T')(\Delta_Y \otimes \imath_A)$.

$$\begin{aligned}
&(\imath_A \otimes \Delta_Y)(T'(y \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes y') = \\
&= (\imath_A \otimes \Delta_Y)((\imath_A \otimes \pi)T(y \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes y') \\
&= y^{-1}a \otimes \Delta_Y(\pi(y^0))(1 \otimes y') \\
&\overset{(3.10)}{=} y^{-1}a \otimes (\pi \otimes \pi)(\Delta_Z(y^0)(1 \otimes y')) \\
&= (\imath_A \otimes \pi \otimes \pi)(y^{-1}a \otimes \Delta_Z(y^0)(1 \otimes y')) \\
&= (\imath_A \otimes \pi \otimes \pi)((\imath_A \otimes \Delta_Z)(T(y \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes y')) \\
&\overset{1.4.4(ii)}{=} (\imath_A \otimes \pi \otimes \pi)(((T \otimes \imath_Z)(\imath_Z \otimes T)(\Delta_Z(y) \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes y')) \\
&\overset{1.4.4(i)}{=} (\imath_A \otimes \pi \otimes \pi)((T \otimes \imath_Z)(z \otimes b \otimes z')) \\
&= (\imath_A \otimes \pi)T(z \otimes b) \otimes \pi(z') \\
&\overset{(3.11)}{=} T'(\pi(z) \otimes b) \otimes \pi(z') \\
&= (T' \otimes \imath_Y)(\pi \otimes \imath_A \otimes \pi)(z \otimes b \otimes z') \\
&\overset{1.4.4(i)}{=} (T' \otimes \imath_Y)((\pi \otimes \imath_A \otimes \pi)((\imath_Z \otimes T)(\Delta_Z(y) \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes y')) \\
&\overset{(3.14)}{=} (T' \otimes \imath_Y)(((\imath_Y \otimes T')(\Delta_Y(y) \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes y')) \\
&= (T' \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T')(\Delta_Y(y) \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes y'),
\end{aligned}$$

para todos $y, y' \in Y$, $a \in A$. Portanto,

$$(\imath_A \otimes \Delta_Y)T' = (T' \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T')(\Delta_Y \otimes \imath_A)).$$

(iv) $(\imath_A \otimes T')(T' \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \Delta_A) = ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T' \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T')(\Delta_Y \otimes \imath_A)$.

Dados $y, y' \in Y$, $a, c \in A$, temos

$$
\begin{aligned}
&(\imath_A \otimes T')(T' \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a))(1 \otimes c \otimes y') = \\
&= (\imath_A \otimes T')[(T' \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a)(1 \otimes c))](1 \otimes 1 \otimes y') \\
&= (\imath_A \otimes T')(T'(y \otimes a_1) \otimes a_2 c)(1 \otimes 1 \otimes y') \\
&\overset{(3.11)}{=} (\imath_A \otimes T')((\imath_A \otimes \pi)T(y \otimes a_1) \otimes a_2 c)(1 \otimes 1 \otimes y') \\
&= y^{-1}a_1 \otimes T'(\pi(y^0) \otimes a_2 c)(1 \otimes y') \\
&\overset{(3.11)}{=} y^{-1}a_1 \otimes (\imath_A \otimes \pi)T(\pi(y^0) \otimes a_2 c)(1 \otimes y') \\
&\overset{(3.12)}{=} y^{-1}a_1 \otimes (\imath_A \otimes \pi)T({y^0}_2 \otimes a_2 c)(1 \otimes y')\varepsilon_Y(\pi({y^0}_1 t)) \\
&= (\imath_A \otimes \imath_A \otimes \pi)(y^{-1}a_1 \otimes T({y^0}_2 \otimes a_2 c)\varepsilon_Y(\pi({y^0}_1 t)))(1 \otimes 1 \otimes y') \\
&= (\imath_A \otimes \imath_A \otimes \pi)((\imath_A \otimes T)(y^{-1}a_1 \otimes {y^0}_2 \varepsilon_Y(\pi({y^0}_1 t)) \otimes a_2 c))(1 \otimes 1 \otimes y') \\
&= (\imath_A \otimes \imath_A \otimes \pi)((\imath_A \otimes T)(\imath_A \otimes (\varepsilon_Y \pi) \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(y^{-1}a_1 \otimes \Delta_Y(y^0)(t \otimes 1) \otimes a_2 c))(1 \otimes 1 \otimes y') \\
&= (\imath_A \otimes \imath_A \otimes \pi)((\imath_A \otimes (\varepsilon_Y \pi) \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \imath_Y \otimes T)(y^{-1}a_1 \otimes \Delta_Y(y^0)(t \otimes 1) \otimes a_2 c))(1 \otimes 1 \otimes y') \\
&= (\imath_A \otimes \imath_A \otimes \pi)((\imath_A \otimes (\varepsilon_Y \pi) \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \imath_Y \otimes T)((\imath_A \otimes \Delta_Y)T(y \otimes a_1)(1 \otimes t \otimes 1) \otimes a_2 c))(1 \otimes 1 \otimes y') \\
&\overset{1.4.4(ii)}{=} (\imath_A \otimes \imath_A \otimes \pi)((\imath_A \otimes (\varepsilon_Y \pi) \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \imath_Y \otimes T)((T \otimes \imath_Z)(\imath_Z \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a_1) \\
&\qquad \circ (1 \otimes t \otimes 1) \otimes a_2 c))(1 \otimes 1 \otimes y') \\
&= (\imath_A \otimes \imath_A \otimes \pi)(\imath_A \otimes (\varepsilon_Y \pi) \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[((\imath_A \otimes \imath_Y \otimes T)((T \otimes \imath_Z \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_A)(\Delta_Y(y) \otimes a_1 \otimes a_2 c))) \\
&\qquad \circ (1 \otimes t \otimes 1 \otimes 1)](1 \otimes 1 \otimes y') \\
&= (\imath_A \otimes \imath_A \otimes \pi)(\imath_A \otimes (\varepsilon_Y \pi) \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[((T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes \imath_A \otimes T)(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_A)(\Delta_Y(y) \otimes \Delta_A(a)(1 \otimes c))) \\
&\qquad \circ (1 \otimes t \otimes 1 \otimes 1)](1 \otimes 1 \otimes y') \\
&= (\imath_A \otimes \imath_A \otimes \pi)(\imath_A \otimes (\varepsilon_Y \pi) \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[(T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A))(\Delta_Y(y) \otimes \Delta_A(a)(1 \otimes c)) \\
&\qquad \circ (1 \otimes t \otimes 1 \otimes 1)](1 \otimes 1 \otimes y') \\
&= (\imath_A \otimes \imath_A \otimes \pi)(\imath_A \otimes (\varepsilon_Y \pi) \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[(T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A)(\Delta_Y(y) \otimes a) \\
&\qquad \circ (1 \otimes 1 \otimes c \otimes 1))](1 \otimes 1 \otimes y')
\end{aligned}
$$

$$= (\imath_A \otimes \imath_A \otimes \pi)(\imath_A \otimes (\varepsilon_Y \pi) \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[(T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \Delta_A))(\Delta_Y(y) \otimes a))$$

$$\circ(1 \otimes 1 \otimes c \otimes 1)](1 \otimes 1 \otimes y')$$

$$\overset{1.4.3}{=} (\imath_A \otimes \imath_A \otimes \pi)(\imath_A \otimes (\varepsilon_Y \pi) \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[(T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y(y) \otimes a)$$

$$\circ(1 \otimes 1 \otimes c \otimes 1)](1 \otimes 1 \otimes y')$$

$$= ((\imath_A \otimes \imath_A \otimes \pi)((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T' \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y(y) \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes c \otimes y')$$

$$= (((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T' \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes \pi)T)(\Delta_Y(y) \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes c \otimes y')$$

$$= (((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T' \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T')(\Delta_Y(y) \otimes a))(1 \otimes c \otimes y')$$

$$= (((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T' \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T')(\Delta_Y(y) \otimes a))(1 \otimes c \otimes y'),$$

para todos $y' \in Y$, $c \in A$. Portanto

$$(\imath_A \otimes T')(T' \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a)) = ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T' \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T')(\Delta_Y(y) \otimes a),$$

para todos $y \in Y$, $a \in A$.

E, portanto, Y é um A-comódulo coálgebra parcial à esquerda via β. $\square$

Nesse caso, dizemos que Y é um A-**comódulo coálgebra parcial induzido via** π.

Capítulo 4

Módulo Coálgebra Parcial

4.1 Módulo Coálgebra (Global)

Nesta seção, apresentamos uma versão alternativa a definição de Módulo Coálgebra apresentada por A. Van Daele e K. De Commer em [24]. Esta definição é proposta com o inicial e principal objetivo de dualizar a definição de comódulo coálgebra global dada por L. Delvaux em [8]. Inicialmente, vamos relembrar a definição clássica de módulo coálgebra e uma consequência importante desta.

Definição 4.1.1. Seja A uma álgebra de Hopf. Uma coálgebra Y é um *A-módulo coálgebra à direita*, via a aplicação linear $\blacktriangleleft: Y \otimes A \longrightarrow Y$, se as seguintes propriedades são satisfeitas:

(i) $y \blacktriangleleft 1_A = y$;

(ii) $(y \blacktriangleleft a) \blacktriangleleft b = y \blacktriangleleft ab$;

(iii) $\Delta_Y(y \blacktriangleleft a) = \Delta_Y(y)\Delta_A(a)$,

para todos $y \in Y$, $a, b \in A$.

Proposição 4.1.2. ([7]) *Sejam A uma álgebra de Hopf e Y um A-módulo coálgebra à direita via $\blacktriangleleft$. Então, $\varepsilon_Y(y \blacktriangleleft a) = \varepsilon_Y(y)\varepsilon_A(a)$, para todos $y \in Y$, $a \in A$.*

Estendendo esta noção ao contexto de álgebras de Hopf de multiplicadores, temos a seguinte definição.

Definição 4.1.3. Sejam Y e A álgebras de Hopf de multiplicadores, sendo Y regular. Dizemos que Y é um A-**módulo coálgebra à direita** se, existe uma aplicação linear

$$\begin{aligned} \triangleleft : Y \otimes A &\longrightarrow Y \\ y \otimes a &\longmapsto y \triangleleft a \end{aligned}$$

tal que:

(i) Y é um A-módulo à direita unitário;

(ii) $(\Delta_Y(y)(1 \otimes a))(1 \otimes y') \in Y \otimes Y$ e $(1 \otimes y')(\Delta_Y(y)(1 \otimes a)) \in Y \otimes Y$;

(iii) $\Delta_Y(y \triangleleft a)(1 \otimes b) = \Delta_Y(y)(\Delta_A(a)(1 \otimes b))$;

(iv) $(\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\Delta_Y(y)(1 \otimes a)(1 \otimes z)) = y\varepsilon_A(a)\varepsilon_Y(z)$,

para todos $y, y', z \in Y$, $a, b \in A$.

Observação 4.1.4. (1) Para todos $y, y' \in Y$, $a \in A$, podemos pensar nas expressões $(\Delta_Y(y)(1 \otimes a))(1 \otimes y')$ e $(1 \otimes y')(\Delta_Y(y)(1 \otimes a))$ como multiplicadores em $M^Y_{0,1}(Y \otimes Y)$. Para isto, basta definirmos, para todo $w \in Y$:

$$\overline{(\Delta_Y(y)(1 \otimes a))(1 \otimes y')}(w) = (\Delta_Y(y)(w \otimes 1))(1 \otimes a)(1 \otimes y'), \tag{4.1}$$

$$\overline{\overline{(\Delta_Y(y)(1 \otimes a))(1 \otimes y')}}(w) = ((w \otimes 1)\Delta_Y(y))(1 \otimes a)(1 \otimes y'). \tag{4.2}$$

E, analogamente

$$\overline{(1 \otimes y')(\Delta_Y(y)(1 \otimes a))}(w) = (1 \otimes y')(\Delta_Y(y)(w \otimes 1))(1 \otimes a),$$

$$\overline{\overline{(1 \otimes y')(\Delta_Y(y)(1 \otimes a))}}(w) = (1 \otimes y')((w \otimes 1)\Delta_Y(y))(1 \otimes a).$$

É fácil ver que estes pares definem multiplicadores em $M^Y_{0,1}(Y \otimes Y)$.

(2) As expressões $\Delta_Y(y)(1 \otimes a)$ e $\Delta_Y(y)(a \otimes 1)$ também fazem sentido como multiplicadores em $M^Y_{0,1}(Y \otimes Y)$ e $M^Y_{0,2}(Y \otimes Y)$, respectivamente. O primeiro multiplicador é definido como segue

$$\overline{\Delta_Y(y)(1 \otimes a)}(z) = (\Delta_Y(y)(z \otimes 1))(1 \otimes a), \tag{4.3}$$

$$\overline{\overline{\Delta_Y(y)(1 \otimes a)}}(z) = ((z \otimes 1)\Delta_Y(y))(1 \otimes a). \tag{4.4}$$

para todos $y \in Y$, $a \in A$.

E, analogamente definimos o segundo multiplicador.

(3) Usando o item (ii) da Definição 4.1.3, escrevemos

$$\Delta_Y(y)(a \otimes b)(1 \otimes z) := (\Delta_Y(y)(1 \otimes b)(1 \otimes z))(a \otimes 1), \tag{4.5}$$

$$(1 \otimes z)\Delta_Y(y)(a \otimes b) := ((1 \otimes z)\Delta_Y(y)(1 \otimes b))(a \otimes 1).$$

(4) Nas condições anteriores, o item (iii) da Definição 4.1.3 faz sentido da seguinte forma:

$$\Delta_Y(y \triangleleft a)(1 \otimes b)(1 \otimes z) = \Delta_Y(y)(\Delta_A(a)(1 \otimes b))(1 \otimes z),$$

para todo $z \in Y$.

(5) Usando a notação de Sweedler, podemos reescrever o item (iii), para todos $y, z \in Y$, $a, b \in A$, como segue

$$\begin{aligned} \Delta_Y(y \triangleleft a)(1 \otimes b)(1 \otimes z) &= \Delta_Y(y)(\Delta_A(a)(1 \otimes b))(1 \otimes z) \\ &= \Delta_Y(y)(a_1 \otimes a_2 b)(1 \otimes z) \\ &\overset{(4.5)}{=} (\Delta_Y(y)(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes z))(a_1 \otimes 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(ii)}{=} (\sum_i w_i \otimes w_i^{'})(a_1 \otimes 1)\\
&= (\Delta_Y(y)(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes z))(f \otimes 1)(a_1 \otimes 1)\\
&\overset{(4.1)}{=} (\Delta_Y(y)(f \otimes 1))(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes z)(a_1 \otimes 1)\\
&= y_1 f \triangleleft a_1 \otimes (y_2 \triangleleft a_2 b) z,
\end{aligned}$$

onde $w_i f = w_i$.

Proposição 4.1.5. *Para todos $y \in Y$, $a \in A$, $\varepsilon_Y(y \triangleleft a) = \varepsilon_Y(y)\varepsilon_A(a)$.*

Demonstração. Sejam $y \in Y$, $a \in A$ e $z \in Y$ tal que $\varepsilon_Y(z) = 1_{\Bbbk}$, logo

$$\begin{aligned}
\varepsilon_Y(y \triangleleft a) &= \varepsilon_Y(y \triangleleft a)\varepsilon_Y(z)\\
&= \varepsilon_Y((y \triangleleft a)z)\\
&= \varepsilon_Y(((y\varepsilon_Y(z)) \triangleleft a)z)\\
&= \varepsilon_Y(y_1 z)\varepsilon_Y((y_2 \triangleleft a)z)\\
&= \varepsilon_Y(\varepsilon_Y(y_1 z)(y_2 \triangleleft a)z)\\
&= \varepsilon_Y((\varepsilon_Y \otimes \imath_Y)((\Delta_Y(y)(z \otimes 1))(1 \otimes a)(1 \otimes z)))\\
&\overset{(4.1)}{=} \varepsilon_Y((\varepsilon_Y \otimes \imath_Y)((\Delta_Y(y)(1 \otimes a)(1 \otimes z))(z \otimes 1)))\\
&= \varepsilon_Y((\varepsilon_Y \otimes \imath_Y)(\Delta_Y(y)(1 \otimes a)(1 \otimes z)))\\
&= (\varepsilon_Y \otimes \varepsilon_Y)(\Delta_Y(y)(1 \otimes a)(1 \otimes z))\\
&= \varepsilon_Y((\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\Delta_Y(y)(1 \otimes a)(1 \otimes z)))\\
&\overset{4.1.3(iv)}{=} \varepsilon_Y(y\varepsilon_A(a)\varepsilon_Y(z))\\
&= \varepsilon_Y(y)\varepsilon_A(a).
\end{aligned}$$

□

Exemplo 4.1.6. Sejam A uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular, $Y = A$ e a ação via produto. Então, Y é um A-módulo coálgebra à direita.

(i) Y é um A-módulo à direita unitário pois, para todos $y, z, w \in Y$, temos

$$\begin{aligned}(y \triangleleft z) \triangleleft w &= (yz) \triangleleft w \\ &= (yz)w \\ &= y(zw) \\ &= y \triangleleft zw,\end{aligned}$$

e, $y = yf = y \triangleleft f$, onde $f \in Y$ é uma unidade local para $y \in Y$.

(ii) $(\Delta_Y(y)(1 \otimes z))(1 \otimes w) = y_1 \otimes (y_2 z)w \in Y \otimes Y$ e,
$(1 \otimes w)(\Delta_Y(y)(1 \otimes z)) = y_1 \otimes w(y_2 z) \in Y \otimes Y$;

(iii) Para todos $y, z, w \in Y$,

$$\begin{aligned}\Delta_Y(y \triangleleft z)(1 \otimes w) &= \Delta_Y(yz)(1 \otimes w) \\ &= \Delta_Y(y)\Delta_Y(z)(1 \otimes w) \\ &= \Delta_Y(y)(\Delta_Y(z)(1 \otimes w)).\end{aligned}$$

(iv) Para todos $y, z, w \in Y$,

$$\begin{aligned}(\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\Delta_Y(y)(1 \otimes z)(1 \otimes w)) &= (\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\Delta_Y(y))\varepsilon_Y(z)\varepsilon_Y(w) \\ &= y\varepsilon_Y(z)\varepsilon_Y(w).\end{aligned}$$

Exemplo 4.1.7. Sejam Y um A-módulo coálgebra à direita via $\triangleleft$, e Z uma álgebra de Hopf de multiplicadores qualquer. Então $Z \otimes Y$ é um A-módulo coálgebra à direita via

$$\begin{aligned}\blacktriangleleft : Z \otimes Y \otimes A &\longrightarrow Z \otimes Y \\ z \otimes y \otimes a &\longmapsto z \otimes (y \triangleleft a).\end{aligned}$$

Proposição 4.1.8. *Se A e Y possuem unidade. Então, a Definição 4.1.1 e a Definição 4.1.3 são equivalentes.*

Demonstração. Supondo que vale a Definição 4.1.1, vamos verificar os itens da Definição 4.1.3.

(i) Y é um A-módulo e, para todo $y \in Y$, temos que $y = y \blacktriangleleft 1_A$, ou seja a ação é unitária.

(ii) $(\Delta_Y(y)(1 \otimes a))(1 \otimes y') \in Y \otimes Y$ e, $(1 \otimes y')(\Delta_Y(y)(1 \otimes a)) \in Y \otimes Y$, pois $\Delta_Y(y)(1 \otimes a) \in Y \otimes Y$.

(iii) Para todos $y \in Y$, $a, b \in A$,

$$\begin{aligned}
\Delta_Y(y \blacktriangleleft a)(1 \otimes b) &\overset{4.1.1(iii)}{=} (\Delta_Y(y)\Delta_A(a))(1 \otimes b) \\
&= ((y_1 \blacktriangleleft a_1) \otimes (y_2 \blacktriangleleft a_2))(1 \otimes b) \\
&= ((y_1 \blacktriangleleft a_1) \blacktriangleleft 1_A) \otimes ((y_2 \blacktriangleleft a_2) \blacktriangleleft b) \\
&\overset{4.1.1(i)}{=} (y_1 \blacktriangleleft a_1) \otimes (y_2 \blacktriangleleft a_2 b) \\
&= \Delta_Y(y)(\Delta_A(a)(1 \otimes b)).
\end{aligned}$$

(iv) Para todos $y \in Y$, $a, b \in A$,

$$\begin{aligned}
(\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\Delta_Y(y)(1 \otimes a)(1 \otimes z)) &= y_1 \otimes \varepsilon_Y((y_2 \blacktriangleleft a)z) \\
&= y_1 \varepsilon_Y(y_2 \blacktriangleleft a)\varepsilon_Y(z) \\
&\overset{4.1.2}{=} y_1 \varepsilon_Y(y_2)\varepsilon_A(a)\varepsilon_Y(z) \\
&= y\varepsilon_A(a)\varepsilon_Y(z).
\end{aligned}$$

Reciprocamente, supondo que vale a Definição 4.1.3. Temos que Y é A-módulo unitário com ação não degenerada. Assim $(y \blacktriangleleft 1_A) \blacktriangleleft b = y \blacktriangleleft b$, para todo $b \in A$, implica que $y \blacktriangleleft 1_A = y$, para todo $y \in Y$.

E, o item (iii) é imediato. Portanto, vale a Definição 4.1.1. $\square$

A seguir, apresentamos um teorema de dualidade entre módulos coálgebra e comódulos coálgebra para um grupo quântico algébrico. Com essa finalidade, para o que segue, vamos supor que A é um grupo quântico algébrico e Y é uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular. Além disso, consideramos φ uma integral à esquerda em A.

Nessas condições $\hat{A} = \{\varphi(\_a); a \in A\}$ é a álgebra de Hopf de multiplicadores dual de A, construída na Seção 1.2.

Proposição 4.1.9. *Sejam Y e A álgebras de Hopf de multiplicadores regulares tais que Y é um A-comódulo coálgebra à esquerda via ρ. Então, Y é um $\widehat{A}$-módulo coálgebra à direita via*

$$\begin{aligned} \triangleleft : Y \otimes \widehat{A} &\longrightarrow Y \\ y \otimes \varphi(\_a) &\longmapsto y \triangleleft \varphi(\_a) := (\varphi \otimes \imath_Y)(\rho(y)(a \otimes 1)). \end{aligned}$$

Demonstração. Note que, usando a notação sigma, $y \triangleleft \varphi(\_a) = \varphi(y^{-1}a)y^0$, para todos $y \in Y$ e $a \in A$.

(i) Y é um $\widehat{A}$-módulo à direita unitário.

Dados $y \in Y$, $\varphi(\_a), \varphi(\_b) \in \widehat{A}$, temos

$$\begin{aligned} (y \triangleleft \varphi(\_a)) \triangleleft \varphi(\_b) &= ((\varphi \otimes \imath_Y)T(y \otimes a)) \triangleleft \varphi(\_b) \\ &= \varphi(y^{-1}a)(y^0 \triangleleft \varphi(\_b)) \\ &= \varphi(y^{-1}a)(\varphi \otimes \imath_Y)T(y^0 \otimes b) \\ &= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(y^{-1}a \otimes T(y^0 \otimes b)) \\ &= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_A \otimes T)(y^{-1}a \otimes y^0 \otimes b)) \\ &= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(y \otimes a \otimes b)) \\ &= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(c)(d \otimes 1))) \\ &\overset{(*)}{=} (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_A \otimes T)((T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(c))(d \otimes 1 \otimes 1))) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{1.4.3}{=} && (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\Delta_A \otimes \imath_Y)(T(y \otimes c))(d \otimes 1 \otimes 1)) \\
&= && (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(\Delta_A(y^{-1}c)(d \otimes 1) \otimes y^0) \\
&= && (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((y^{-1}c)_1 d \otimes (y^{-1}c)_2 \otimes y^0) \\
&= && \varphi((y^{-1}c)_1 d)\varphi((y^{-1}c)_2) y^0 \\
&= && \varphi(d)\varphi(y^{-1}c) y^0 \\
&= && (\varphi \otimes \imath_Y)(T(y \otimes c))\varphi(d) \\
&= && y \triangleleft \varphi(\_c\varphi(d)) \\
&\overset{(**)}{=} && y \triangleleft (\varphi(\_a)\varphi(\_b)).
\end{aligned}
$$

Portanto, Y é um $\widehat{A}$-módulo à direita.

Justificativa de $(*)$: Vamos mostrar que

$$
(T \otimes \imath_A)[(y \otimes \Delta_A(c))(1 \otimes d \otimes 1)] = [(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(c))](d \otimes 1 \otimes 1), \qquad (4.6)
$$

como multiplicadores em $M_{0,3}^A(A \otimes Y \otimes A)$. De fato, seja $a \in A$,

$$
\begin{aligned}
(T \otimes \imath_A)[(y \otimes \Delta_A(c))(1 \otimes d \otimes 1)](1 \otimes 1 \otimes a) &= (T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(c)(d \otimes 1))(1 \otimes 1 \otimes a) \\
&= (T \otimes \imath_A)(y \otimes c_1 d \otimes c_2)(1 \otimes 1 \otimes a) \\
&= T(y \otimes c_1 d) \otimes c_2 a \\
&= (T \otimes \imath_A)(y \otimes (\Delta_A(c)(d \otimes 1))(1 \otimes a)) \\
&= (T \otimes \imath_A)(y \otimes (\Delta_A(c)(1 \otimes a))(d \otimes 1)) \\
&= T(y \otimes c_1 d) \otimes c_2 a \\
&= y^{-1}c_1 d \otimes y^0 \otimes c_2 a \\
&= (y^{-1}c_1 \otimes y^0 \otimes c_2 a)(d \otimes 1 \otimes 1) \\
&= (T(y \otimes c_1) \otimes c_2 a)(d \otimes 1 \otimes 1) \\
&= ((T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(c)(1 \otimes a)))(d \otimes 1 \otimes 1) \\
&= ((T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(c))(1 \otimes 1 \otimes a))(d \otimes 1 \otimes 1)
\end{aligned}
$$

$$= \quad [(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(c))](d \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes a),$$

para todo $a \in A$.

Logo, segue a igualdade, para todos $y \in Y$, $c, d \in A$,

$$(T \otimes \imath_A)[(y \otimes \Delta_A(c))(1 \otimes d \otimes 1)] \quad = \quad [(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(c))](d \otimes 1 \otimes 1).$$

Justificativa de $(**)$: Segue da Observação 1.2.13, $\varphi(\_a)\varphi(\_b) = \varphi(\_c\varphi(d))$, onde $a \otimes b = \Delta_A(c)(d \otimes 1)$.

Além disso, a ação é unitária, pois

$$\begin{aligned}
Y &= \varphi(A)Y \\
&= (\varphi \otimes \imath_Y)(A \otimes Y) \\
&= (\varphi \otimes \imath_Y)(T(Y \otimes A)) \\
&= Y \triangleleft \varphi(_A) \\
&= Y \triangleleft \widehat{A}.
\end{aligned}$$

(ii) $\Delta_Y(y)(1 \otimes \varphi(\_a))(1 \otimes z) \in Y \otimes Y$ e, $(1 \otimes z)(\Delta_Y(y)(1 \otimes \varphi(\_a))) \in Y \otimes Y$, para todos $y, z \in Y$ e $\varphi(\_a) \in \widehat{A}$.

Inicialmente, observamos que, para todo $w \in Y$,

$$\begin{aligned}
\Delta_Y(y)(1 \otimes \varphi(_a))(1 \otimes z)(w \otimes 1) &= (\Delta_Y(y)(w \otimes 1))(1 \otimes \varphi(_a))(1 \otimes z) \\
&= y_1 w \otimes (y_2 \triangleleft \varphi(_a))z \\
&= (\imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(y_1 w \otimes T(y_2 \otimes a))(1 \otimes z) \\
&= (\imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(y_1 w \otimes y_2 \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes z)) \\
&= (\imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y)(w \otimes 1) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes z)) \\
&= (\imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes z)(w \otimes 1 \otimes 1)) \\
&= (\imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes z))(w \otimes 1).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta_Y(y)(1 \otimes \varphi(\_a))(1 \otimes z) = (\imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes z)).$$

E, da Definição 1.4.4 (i), temos que: $((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes z) \in Y \otimes A \otimes Y$.

Assim

$$\Delta_Y(y)(1 \otimes \varphi(\_a))(1 \otimes z) = (\imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes z)) \in Y \otimes Y.$$

Analogamente, mostramos que: $(1 \otimes z)(\Delta_Y(y)(1 \otimes \varphi(\_a))) \in Y \otimes Y$.

(iii) $\Delta_Y(y \triangleleft \varphi(\_a))(1 \otimes \varphi(\_b))(1 \otimes z) = \Delta_Y(y)(\Delta_{\widehat{A}}(\varphi(\_a))(1 \otimes \varphi(\_b)))(1 \otimes z)$, para todos $y, z \in Y$ e $\varphi(\_a), \varphi(\_b) \in \widehat{A}$.

De fato, seja $w \in Y$,

$$\begin{aligned}
&\Delta_Y(y \triangleleft \varphi(_a))(1 \otimes \varphi(_b))(1 \otimes z)(w \otimes 1) = \\
&= \varphi(y^{-1}a)(\Delta_Y(y^0)(w \otimes 1))(1 \otimes \varphi(_b))(1 \otimes z) \\
&= \varphi(y^{-1}a)(y^0{}_1 w \otimes (\varphi \otimes \imath_Y)T(y^0{}_2 \otimes b))(1 \otimes z) \\
&= (\imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(\varphi(y^{-1}a)y^0{}_1 w \otimes T(y^0{}_2 \otimes b))(1 \otimes z) \\
&= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(y^{-1}a \otimes y^0{}_1 w \otimes T(y^0{}_2 \otimes b))(1 \otimes z) \\
&= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_A \otimes \imath_Y \otimes T)(y^{-1}a \otimes \Delta_Y(y^0)(w \otimes 1) \otimes b))(1 \otimes z) \\
&= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_A \otimes \imath_Y \otimes T)((y^{-1}a \otimes \Delta_Y(y^0) \otimes b)(1 \otimes w \otimes 1 \otimes 1)))(1 \otimes z) \\
&= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_A \otimes \imath_Y \otimes T)(\imath_A \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A)(T(y \otimes a) \otimes b))(w \otimes z) \\
&= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_A \otimes \imath_Y \otimes T)((\imath_A \otimes \Delta_Y)T(y \otimes a) \otimes b))(w \otimes z) \\
&\overset{1.4.4(ii)}{=} (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_A \otimes \imath_Y \otimes T)((T \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a) \otimes b))(w \otimes z) \\
&= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_A \otimes \imath_Y \otimes T)(T \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_A)(\Delta_Y(y) \otimes a \otimes b))(w \otimes z) \\
&= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes \imath_A \otimes T)(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_A)(\Delta_Y(y) \otimes a \otimes b))(w \otimes z) \\
&= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A))(\Delta_Y(y) \otimes a \otimes b))(w \otimes z) \\
&= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A))(\Delta_Y(y) \otimes \Delta_A(c)(d \otimes 1)))(w \otimes z)
\end{aligned}$$

$= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[((\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A))(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A)(\Delta_Y(y) \otimes c))$

$\qquad \circ(1 \otimes d \otimes 1 \otimes 1)])(w \otimes z)$

$= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[((\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \Delta_A))(\Delta_Y(y) \otimes c))$

$\qquad \circ(1 \otimes d \otimes 1 \otimes 1)])(w \otimes z)$

$\overset{(*)}{=} (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[((\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y(y) \otimes c))(1 \otimes d \otimes 1 \otimes 1)])(w \otimes z)$

$= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[(\imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes c)(1 \otimes 1 \otimes z))(1 \otimes d \otimes 1^2)])$

$\quad \circ(w \otimes 1).$

Logo,

$\Delta_Y(y \triangleleft \varphi(\_a))(1 \otimes \varphi(\_b))(1 \otimes z) =$

$\overset{(**)}{=} (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[(\imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes c)(1 \otimes 1 \otimes z))$

$\quad \circ(1 \otimes d \otimes 1^2)]).$

Note que, da Definição 1.4.4 (i), $((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes c))(1 \otimes 1 \otimes z) \in Y \otimes A \otimes Y$.

Vamos denotar $((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes c))(1 \otimes 1 \otimes z) := \sum_i y_i^{'} \otimes a_i^{'} \otimes z_i^{'}$.

Assim,

$\Delta_Y(y \triangleleft \varphi(\_a))(1 \otimes \varphi(\_b))(1 \otimes z) =$

$= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[(\imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)(\sum_i y_i^{'} \otimes a_i^{'} \otimes z_i^{'})(1 \otimes d \otimes 1 \otimes 1)]).$

Por outro lado, usando que $a \otimes b = \Delta_A(c)(d \otimes 1)$ e a equação 1.10, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta_Y(y)(\Delta_{\widehat{A}}(\varphi(\_a))(1 \otimes \varphi(\_b)))(1 \otimes z) &= \Delta_Y(y)(\varphi(\_d) \otimes \varphi(\_c))(1 \otimes z) \\ &\overset{(4.5)}{=} (\Delta_Y(y)(1 \otimes \varphi(\_c))(1 \otimes z))(\varphi(\_d) \otimes 1) \\ &\overset{(ii)}{=} (\sum_j y_j^{''} \otimes z_j^{''})(\varphi(\_d) \otimes 1). \end{aligned}$$

Agora, vamos tomar $f \in Y$ tal que $y_i^{'} f = y_i^{'}$, e, $y_j^{''} f = y_j^{''}$, para todos i, j.

E, voltando a $(**)$, temos:

$$\overset{(**)}{=} (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[(\imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y)(f \otimes 1) \otimes c)(1 \otimes 1 \otimes z))(1 \otimes d \otimes 1^2)])$$

$$= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[(\imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)(y_1 f \otimes T(y_2 \otimes c)(1 \otimes z))(1 \otimes d \otimes 1 \otimes 1)])$$

$$= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)[y_1 f \otimes \Delta_A({y_2}^{-1} c)(d \otimes 1) \otimes {y_2}^0 z])$$

$$= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(T(y_1 f \otimes ({y_2}^{-1} c)_1 d) \otimes ({y_2}^{-1} c)_2 \otimes {y_2}^0 z)$$

$$= (\varphi \otimes \imath_Y)(T(y_1 f \otimes ({y_2}^{-1} c)_1 d)) \otimes \varphi(({y_2}^{-1} c)_2) {y_2}^0 z$$

$$= (\varphi \otimes \imath_Y)(T(y_1 f \otimes d)) \otimes \varphi({y_2}^{-1} c) {y_2}^0 z$$

$$= (y_1 f \triangleleft \varphi(\_d)) \otimes (y_2 \triangleleft \varphi(\_c)) z.$$

Logo, $\Delta_Y(y \triangleleft \varphi(\_a))(1 \otimes \varphi(\_b))(1 \otimes z) = (y_1 f \triangleleft \varphi(\_d)) \otimes (y_2 \triangleleft \varphi(\_c)) z$, para todos $y, z \in Y$,$\varphi(\_a), \varphi(\_b) \in \widehat{A}$, sendo $a \otimes b = \Delta_A(c)(d \otimes 1)$.

Mas,

$$\begin{aligned}
\Delta_Y(y)(\Delta_{\widehat{A}}(\varphi(_a))(1 \otimes \varphi(_b)))(1 \otimes z) &\overset{(ii)}{=} (\sum_j y_j'' \otimes z_j'')(\varphi(_d) \otimes 1) \\
&= (\sum_j y_j'' \otimes z_j'')(f \otimes 1)(\varphi(_d) \otimes 1) \\
&= (\Delta_Y(y)(1 \otimes \varphi(_c))(1 \otimes z))(f \otimes 1)(\varphi(_d) \otimes 1) \\
&= (\Delta_Y(y)(f \otimes 1))(1 \otimes \varphi(_c))(1 \otimes z)(\varphi(_d) \otimes 1) \\
&= (y_1 f \triangleleft \varphi(_d)) \otimes (y_2 \triangleleft \varphi(_c)) z,
\end{aligned}$$

para todos $y, z \in Y$,$\varphi(\_a), \varphi(\_b) \in \widehat{A}$. Portanto,

$$\Delta_Y(y \triangleleft \varphi(\_a))(1 \otimes \varphi(\_b))(1 \otimes z) = \Delta_Y(y)(\Delta_{\widehat{A}}(\varphi(\_a))(1 \otimes \varphi(\_b)))(1 \otimes z),$$

para todos $y, z \in Y$,$\varphi(\_a), \varphi(\_b) \in \widehat{A}$.

Justificativa de $(*)$: Basta mostrar que, para todos $y \in Y$, $c \in A$, temos:

$$(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \Delta_A))(\Delta_Y(y) \otimes c) = (\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y(y) \otimes c).$$

Para tal, definiremos dois multiplicadores em $M_{0,1}^{Y}(Y\otimes A\otimes A\otimes Y)$. Seja $w\in Y$,

1º Multiplicador:

$$\overline{(\imath_Y\otimes(\Delta_A\otimes\imath_Y)T)(\Delta_Y(y)\otimes c)}(w)=(\imath_Y\otimes(\Delta_A\otimes\imath_Y)T)(\Delta_Y(y)(w\otimes 1)\otimes c),$$

$$\overline{\overline{(\imath_Y\otimes(\Delta_A\otimes\imath_Y)T)(\Delta_Y(y)\otimes c)}}(w)=(\imath_Y\otimes(\Delta_A\otimes\imath_Y)T)((w\otimes 1)\Delta_Y(y)\otimes c).$$

2º Multiplicador:

$$\begin{aligned}&\overline{(\imath_Y\otimes(\imath_A\otimes T)(T\otimes\imath_A)(\imath_Y\otimes\Delta_A))(\Delta_Y(y)\otimes c)}(w)=\\ &=\ (\imath_Y\otimes(\imath_A\otimes T)(T\otimes\imath_A)(\imath_Y\otimes\Delta_A))(\Delta_Y(y)(w\otimes 1)\otimes c),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\overline{\overline{(\imath_Y\otimes(\imath_A\otimes T)(T\otimes\imath_A)(\imath_Y\otimes\Delta_A))(\Delta_Y(y)\otimes c)}}(w)=\\ &=\ (\imath_Y\otimes(\imath_A\otimes T)(T\otimes\imath_A)(\imath_Y\otimes\Delta_A))((w\otimes 1)\Delta_Y(y)\otimes c).\end{aligned}$$

É fácil ver que estes pares estão bem definidos. Vamos verificar a igualdade $(*)$ apenas para os multiplicadores à esquerda e, usando que o produto é não degenerado, concluímos a igualdade para o outro elemento do par. Assim,

$$\begin{aligned}&\overline{(\imath_Y\otimes(\Delta_A\otimes\imath_Y)T)(\Delta_Y(y)\otimes c)}(w)=\\ &=\ (\imath_Y\otimes(\Delta_A\otimes\imath_Y)T)(\Delta_Y(y)(w\otimes 1)\otimes c)\\ &=\ (\imath_Y\otimes(\Delta_A\otimes\imath_Y)T)(y_1w\otimes y_2\otimes c)\\ &=\ y_1w\otimes((\Delta_A\otimes\imath_Y)T)(y_2\otimes c)\\ &=\ y_1w\otimes((\Delta_A\otimes\imath_Y)T(y_2\otimes c))\\ &\overset{1.4.3}{=}\ y_1w\otimes((\imath_A\otimes T)(T\otimes\imath_A)(\imath_Y\otimes\Delta_A))(y_2\otimes c)\\ &=\ (\imath_Y\otimes(\imath_A\otimes T)(T\otimes\imath_A)(\imath_Y\otimes\Delta_A))(y_1w\otimes y_2\otimes c)\\ &=\ (\imath_Y\otimes(\imath_A\otimes T)(T\otimes\imath_A)(\imath_Y\otimes\Delta_A))(\Delta_Y(y)(w\otimes 1)\otimes c)\\ &=\ \overline{(\imath_Y\otimes(\imath_A\otimes T)(T\otimes\imath_A)(\imath_Y\otimes\Delta_A))(\Delta_Y(y)\otimes c)}(w),\end{aligned}$$

para todo $w \in Y$. Portanto,

$$(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes \Delta_A))(\Delta_Y(y) \otimes c) = (\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y(y) \otimes c),$$

para todos $y \in Y$, $c \in A$.

(iv) $(\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\Delta_Y(y)(1 \otimes \varphi(\_a))(1 \otimes z)) = y\varepsilon_{\widehat{A}}(\varphi(\_a))\varepsilon_Y(z)$, para todos $y, z \in Y$, $\varphi(\_a) \in \widehat{A}$.

$$\begin{aligned}
&(\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\Delta_Y(y)(1 \otimes \varphi(_a))(1 \otimes z)) = \\
&\overset{(ii)}{=} \quad (\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes z)) \\
&= \quad (\imath_Y \otimes \varphi)[(\imath_Y \otimes \imath_A \otimes \varepsilon_Y)(\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(\imath_Y \otimes \imath_A \otimes \varepsilon_Y)(1 \otimes 1 \otimes z)] \\
&= \quad (\imath_Y \otimes \varphi)[(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T)(\Delta_Y(y) \otimes a)\varepsilon_Y(z)] \\
&\overset{(*)}{=} \quad (\imath_Y \otimes \varphi)(y \otimes a\varepsilon_Y(z)) \\
&= \quad y\varphi(a)\varepsilon_Y(z) \\
&= \quad y\varepsilon_{\widehat{A}}(\varphi(_a))\varepsilon_Y(z).
\end{aligned}$$

para todos $y, z \in Y$, $\varphi(\_a) \in \widehat{A}$.

Justificativa de $(*)$: Para todo $z \in Y$, temos:

$$\begin{aligned}
(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(z \otimes 1) &= (\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T)(\Delta_Y(y)(z \otimes 1) \otimes a) \\
&= y_1 z \otimes (\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T(y_2 \otimes a) \\
&\overset{1.4.7}{=} y_1 z \otimes \varepsilon_Y(y_2)a \\
&= yz \otimes a \\
&= (y \otimes a)(z \otimes 1).
\end{aligned}$$

Logo, $(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T)(\Delta_Y(y) \otimes a) = y \otimes a$, para todos $y \in Y$, $a \in A$. $\square$

4.2 Módulo Coálgebra Parcial

Nesta seção, apresentaremos a definição de módulo coálgebra parcial à direita no contexto de álgebras de Hopf de multiplicadores. Também mostramos que esta definição generaliza o caso Hopf de E. Batista e J. Vercruysse apresentado em [4] e o caso global definido neste trabalho, na seção anterior. Além disso, exibimos alguns exemplos. Ao longo de toda a seção, vamos supor que Y e A são álgebras de Hopf de multiplicadores, sendo Y regular. Inicialmente, relembramos a definição clássica, ou seja quando A é uma álgebra de Hopf e Y uma coálgebra.

Definição 4.2.1. ([4]) Uma coálgebra Y é um A-*módulo coálgebra parcial à direita* via a aplicação linear $\leftharpoonup: Y \otimes A \longrightarrow Y$ se, para todos $y \in Y$, $a, b \in A$, valem as seguintes propriedades,

(i) $y \leftharpoonup 1_A = y$;

(ii) $\Delta(y \leftharpoonup a) = y_1 \leftharpoonup a_1 \otimes y_2 \leftharpoonup a_2$;

(iii) $(y \leftharpoonup a) \leftharpoonup b = \varepsilon_Y(y_1 \leftharpoonup a_1)(y_2 \leftharpoonup a_2 b)$.

Um módulo coálgebra parcial à direita é dito *simétrico* se a seguinte condição adicional é satisfeita:

(iv) $(y \leftharpoonup a) \leftharpoonup b = (y_1 \leftharpoonup a_1 b)\varepsilon_Y(y_2 \leftharpoonup a_2)$, para todos $y \in Y$, $a, b \in A$.

No contexto de álgebras sem unidade, temos a seguinte definição.

Definição 4.2.2. Sejam Y e A álgebras de Hopf de multiplicadores. Dizemos que Y é um A-**módulo coálgebra parcial à direita** se, existe uma aplicação linear $\leftharpoonup: Y \otimes \langle A \cup \{1_{M(A)}\}\rangle_{\Bbbk} \longrightarrow Y$ tal que:

(i) $y \leftharpoonup 1_{M(A)} = y$, para todo $y \in Y$;

(ii) $(\Delta_Y(y)(1 \otimes a))(1 \otimes y') \in Y \otimes Y$ e $(1 \otimes y')(\Delta_Y(y)(1 \otimes a)) \in Y \otimes Y$, para todos $a \in A$, $y, y' \in Y$;

(iii) Para cada $a, b \in A$, $y, z \in Y$,

$$((y \leftharpoonup a) \leftharpoonup b)z = \varepsilon_Y(y_1 f \leftharpoonup a_1)(y_2 \leftharpoonup a_2 b)z,$$

onde $f \in Y$ é unidade local para o primeiro fator do tensor na expressão $\Delta_Y(y)(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes z) \in Y \otimes Y$.

(iv) Para cada $a, b \in A$, $y, y' \in Y$,

$$(\Delta_Y(y \leftharpoonup a)(1 \otimes b))(1 \otimes y') = (y_1 f \leftharpoonup a_1) \otimes (y_2 \leftharpoonup a_2 b)y',$$

onde $f \in Y$ é unidade local para o primeiro fator do tensor na expressão $\Delta_Y(y)(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes y') \in Y \otimes Y$.

(v) Se $y \leftharpoonup a = 0$ para todo $a \in A$, então $y = 0$ (ação é não degenerada).

Além disso, dizemos que Y é um A-**módulo coálgebra parcial à direita simétrico** ou que a ação parcial de A em Y é simétrica se também vale que:

(vi) $(\Delta_Y(y)(a \otimes 1))(z \otimes 1) \in Y \otimes Y$, para todos $a \in A$, $y, z \in Y$;

(vii) Para cada $a, b \in A$, $y, z \in Y$,

$$((y \leftharpoonup a) \leftharpoonup b)z = (y_1 \leftharpoonup a_1 b)\varepsilon_Y(y_2 f \leftharpoonup a_2)z,$$

onde $f \in Y$ é unidade local para o segundo fator do tensor na expressão $\Delta_Y(y)(a_1 b \otimes 1)(z \otimes 1) \in Y \otimes Y$.

Observação 4.2.3. (1) O segundo membro das igualdades em (iii) e (iv) podem ser reescritos, respectivamente, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_Y(y_1 f \leftharpoonup a_1)(y_2 \leftharpoonup a_2 b)z &= (\varepsilon_Y \otimes \imath_Y)((\Delta_Y(y)(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes z))(f \otimes 1)(a_1 \otimes 1)) \\
&= (\varepsilon_Y \otimes \imath_Y)((\Delta_Y(y)(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes z))(a_1 \otimes 1)); \\
(y_1 f \leftharpoonup a_1) \otimes (y_2 \leftharpoonup a_2 b)y' &= (\Delta_Y(y)(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes y'))(f \otimes 1)(a_1 \otimes 1) \qquad (4.7) \\
&= (\Delta_Y(y)(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes y'))(a_1 \otimes 1),
\end{aligned}$$

onde $\Delta_Y(y)(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes z)$ e $\Delta_Y(y)(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes y')$ são multiplicadores em $M_{0,1}^Y(Y \otimes Y)$.

(2) As expressões em (iii) e (iv) independem da escolha da unidade local. De fato, para (iv), denotamos $\Delta_Y(y)(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes y') = \sum_i w_i \otimes w_i'$ e consideramos $f, g \in Y$ tais que $w_i f = w_i$ e $w_i g = w_i$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
(y_1 f \leftharpoonup a_1) \otimes (y_2 \leftharpoonup a_2 b)y' &= (\Delta_Y(y)(f \otimes 1)(1 \otimes a_2 b))(1 \otimes y')(a_1 \otimes 1) \\
&= ((\Delta_Y(y)(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes y'))(f \otimes 1))(a_1 \otimes 1) \\
&= ((\sum_i w_i \otimes w_i')(f \otimes 1))(a_1 \otimes 1) \\
&= (\sum_i w_i f \otimes w_i')(a_1 \otimes 1) \\
&= (\sum_i w_i g \otimes w_i')(a_1 \otimes 1) \\
&= ((\sum_i w_i \otimes w_i')(g \otimes 1))(a_1 \otimes 1) \\
&= ((\Delta_Y(y)(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes y'))(g \otimes 1))(a_1 \otimes 1) \\
&= (\Delta_Y(y)(g \otimes 1)(1 \otimes a_2 b))(1 \otimes y')(a_1 \otimes 1) \\
&= (y_1 g \leftharpoonup a_1) \otimes (y_2 \leftharpoonup a_2 b)y'.
\end{aligned}$$

A mesma justificativa vale para o item (iii).

(3) Podemos reescrever o item (vii) (simetria), usando a mesma ideia das observações anteriores. Para isso, assumimos o item (vi) $(\Delta_Y(y)(a\otimes 1))(z\otimes 1) \in Y\otimes Y$ e definimos esta expressão em $M^Y_{0,2}(Y\otimes Y)$ convenientemente. Assim, obtemos a seguinte escrita para o item (vii)

$$((y \leftharpoonup a) \leftharpoonup b)z = (\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)((\Delta_Y(y)(a_1 b\otimes 1)(z\otimes 1))(1\otimes f))(1\otimes a_2).$$

Proposição 4.2.4. *Todo A-módulo coálgebra global é um A-módulo coálgebra parcial.*

Demonstração. Seja Y um A-módulo coálgebra à direita global via $\triangleleft$. Sabemos da Proposição 1.3.5 que $\triangleleft$ pode ser unicamente estendida a uma ação de $M(A)$, em particular, podemos estender a $\triangleleft : Y\otimes \langle A\cup\{1_{M(A)}\}\rangle_{\Bbbk} \longrightarrow Y$ e, além disso $y\triangleleft 1_{M(A)} = y$, para todo $y\in Y$. Assim o item (i) da Definição 4.2.2 está verificado.

(ii) É imediato da Definição 4.1.3 (ii).

(iii) Para cada $a,b\in A$, $y,z\in Y$, temos

$$\begin{aligned}
((y\triangleleft a)\triangleleft b)z &\overset{4.1.3(i)}{=} (y_i\triangleleft ab)z\\
&= (y\varepsilon_Y(f)1_{M(Y)}\triangleleft ab)z\\
&= ((\varepsilon_Y\otimes \imath_Y)\Delta_Y(y)(\varepsilon_Y\otimes\imath_Y)(f\otimes 1)\triangleleft ab)z\\
&= ((\varepsilon_Y\otimes \imath_Y)(\Delta_Y(y)(f\otimes 1))\triangleleft ab)z\\
&= ((\varepsilon_Y(y_1 f)y_2)\triangleleft ab)z\\
&= ((\varepsilon_Y(y_1 f)y_2)\triangleleft \varepsilon_A(a_1)a_2 b)z\\
&\overset{4.1.5}{=} (\varepsilon_Y(y_1 f\triangleleft a_1)(y_2\triangleleft a_2 b))z,
\end{aligned}$$

onde $f\in Y$ é unidade local para o primeiro fator do tensor na expressão $\Delta_Y(y)(1\otimes a_2 b)(1\otimes z) = \sum_i w_i\otimes w_i'$ e $\varepsilon_Y(f) = 1_{\Bbbk}$ $(*)$.

Portanto,

$$((y\triangleleft a)\triangleleft b)z = \varepsilon_Y(y_1 f\triangleleft a_1)(y_2\triangleleft a_2 b)z.$$

Justificativa de $(*)$: Seja $l \in Y$ tal que $\varepsilon_Y(l) = 1_{\Bbbk}$ e, tome $f \in Y$ unidade local para os finitos elementos $w_1, .., w_n, l \in Y$, assim $1_{\Bbbk} = \varepsilon_Y(l) = \varepsilon_Y(fl) = \varepsilon_Y(f)$.

(iv) Para cada $a, b \in A$, $y, y' \in Y$,

$$\begin{aligned}
\Delta_Y(y \triangleleft a)(1 \otimes b)(1 \otimes y') &\overset{4.1.3(iii)}{=} \Delta_Y(y)(\Delta(a)(1 \otimes b))(1 \otimes y') \\
&= \Delta_Y(y)(a_1 \otimes a_2 b)(1 \otimes y') \\
&\overset{(4.5)}{=} (\Delta_Y(y)(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes y'))(a_1 \otimes 1) \\
&\overset{4.1.3(ii)}{=} (\sum_i y_i^{'} \otimes z_i^{'})(a_1 \otimes 1) \\
&= (\Delta_Y(y)(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes y'))(f \otimes 1)(a_1 \otimes 1) \\
&\overset{(4.1)}{=} (\Delta_Y(y)(f \otimes 1))(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes y')(a_1 \otimes 1), \\
&= (y_1 f \triangleleft a_1) \otimes (y_2 \triangleleft a_2 b) y'.
\end{aligned}$$

onde $f \in Y$ é unidade local para os finitos elementos $y_i's \in Y$. Portanto,

$$(\Delta_Y(y \triangleleft a)(1 \otimes b))(1 \otimes y') = (y_1 f \triangleleft a_1) \otimes (y_2 \triangleleft a_2 b) y'.$$

(v) Este item é imediato, pois toda ação global unitária é não degenerada. □

Proposição 4.2.5. *Um A-módulo coálgebra parcial à direita unitário é global se e somente se* $\varepsilon_Y(y \leftharpoonup a) = \varepsilon_Y(y)\varepsilon_A(a)$, *para todos* $y \in Y$, $a \in A$.

Demonstração. Se Y é um A-módulo coálgebra global então a igualdade é satisfeita devido a Proposição 4.1.5.

Reciprocamente, supondo que Y é um A-módulo coálgebra parcial à direita unitário tal que $\varepsilon_Y(y \leftharpoonup a) = \varepsilon_Y(y)\varepsilon_A(a)$ para todos $y \in Y$, $a \in A$, temos:

(i) Y é um A-módulo à direita unitário.

$$\begin{aligned}
((y \leftharpoonup a) \leftharpoonup b)z &\overset{4.2.2(iii)}{=} \varepsilon_Y(y_1 f \leftharpoonup a_1)(y_2 \leftharpoonup a_2 b)z \\
&\overset{(*)}{=} \varepsilon_Y(y_1 f' \leftharpoonup a_1)(y_2 \leftharpoonup a_2 b)z
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon_Y(y_1 f')\varepsilon_A(a_1)(y_2 \leftharpoonup a_2 b)z \\
&= (\varepsilon_Y(y_1 f')y_2 \leftharpoonup ab)z \\
&= ((\varepsilon_Y \otimes \imath_Y)(\Delta_Y(y)(f' \otimes 1))(1 \otimes ab))z \\
&= (((\varepsilon_Y \otimes \imath_Y)\Delta_Y(y)(\varepsilon_Y \otimes \imath_Y)(f' \otimes 1))(1 \otimes ab))z \\
&= \varepsilon_Y(f')((\varepsilon_Y \otimes \imath_Y)\Delta_Y(y)(1 \otimes ab))z \\
&= (y \leftharpoonup ab)z,
\end{aligned}
$$

para todos $y, z \in Y$, $a, b \in A$ e $f' \in Y$ unidade local para o primeiro fator do tensor na expressão $\Delta_Y(y)(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes z) \in Y \otimes Y$ e tal que $\varepsilon_Y(f') = 1_{\Bbbk}$.

Em $(*)$ estamos usando a Observação 4.2.3 (2) que garante a independência na escolha da unidade local.

(ii) $(\Delta_Y(y)(1 \otimes a))(1 \otimes y') \in Y \otimes Y$ e, $(1 \otimes y')(\Delta_Y(y)(1 \otimes a)) \in Y \otimes Y$.

Imediato da Definição 4.2.2 item (ii).

(iii) $\Delta_Y(y \leftharpoonup a)(1 \otimes b) = \Delta_Y(y)(\Delta_A(a)(1 \otimes b))$.

Dados $a, b \in A$, $y \in Y$,

$$
\begin{aligned}
\Delta_Y(y)(\Delta_A(a)(1 \otimes b))(1 \otimes z) &= \Delta_Y(y)(a_1 \otimes a_2 b)(1 \otimes z) \\
&\overset{(4.5)}{=} (\Delta_Y(y)(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes z))(a_1 \otimes 1) \\
&\overset{4.2.2(ii)}{=} (\sum_i y_i^{'} \otimes z_i^{'})(a_1 \otimes 1) \\
&= (\Delta_Y(y)(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes z))(f \otimes 1)(a_1 \otimes 1) \\
&\overset{4.7}{=} (y_1 f \leftharpoonup a_1) \otimes (y_2 \leftharpoonup a_2 b)z \\
&\overset{4.2.2(iv)}{=} (\Delta_Y(y \leftharpoonup a)(1 \otimes b))(1 \otimes z),
\end{aligned}
$$

para todo $z \in Y$, onde $f \in Y$ é unidade local para os finitos $y_i^{'}s \in Y$.

(iv) $(\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\Delta_Y(y)(1 \otimes a)(1 \otimes z)) = y\varepsilon_A(a)\varepsilon_Y(z)$, $y, z \in Y$, $a \in A$.

Inicialmente, observamos que $(\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\Delta_Y(y)(1 \otimes a)) \in M(Y)$. De fato, para todo $w \in Y$, basta definir

$$\begin{aligned}
\overline{(\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\Delta_Y(y)(1 \otimes a))}(w) &= (\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\Delta_Y(y)(w \otimes 1)(1 \otimes a)),\\
\overline{\overline{(\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\Delta_Y(y)(1 \otimes a))}}(w) &= (\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)((w \otimes 1)\Delta_Y(y)(1 \otimes a)).
\end{aligned}$$

Vamos verificar a compatibilidade,

$$\begin{aligned}
w'\overline{(\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\Delta_Y(y)(1 \otimes a))}(w) &= w'(\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\Delta_Y(y)(w \otimes 1)(1 \otimes a))\\
&= w'(\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(y_1 w \otimes y_2 \leftharpoonup a)\\
&= w'(y_1 w) \otimes \varepsilon_Y(y_2 \leftharpoonup a)\\
&= (w' y_1) w \otimes \varepsilon_Y(y_2 \leftharpoonup a)\\
&= (w' y_1 \otimes \varepsilon_Y(y_2 \leftharpoonup a)) w\\
&= ((\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(w' y_1 \otimes y_2 \leftharpoonup a)) w\\
&= (\overline{\overline{(\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\Delta_Y(y)(1 \otimes a))}}(w')) w,
\end{aligned}$$

para todos $w, w' \in Y$.

Portanto, $(\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\Delta_Y(y)(1 \otimes a)) \in M(Y)$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\overline{(\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\Delta_Y(y)(1 \otimes a))}(w) &= (\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\Delta_Y(y)(w \otimes 1)(1 \otimes a))\\
&= (\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(y_1 w \otimes y_2 \leftharpoonup a)\\
&= y_1 w \varepsilon_Y(y_2 \leftharpoonup a)\\
&= y_1 w \varepsilon_Y(y_2) \varepsilon_A(a)\\
&= y \varepsilon_A(a) w\\
&= \overline{y \varepsilon_A(a)}(w),
\end{aligned}$$

para todo $w \in Y$.

Assim, temos para todos $y \in Y$, $a \in A$,

$$(\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\Delta_Y(y)(1 \otimes a)) = y \varepsilon_A(a).$$

E, note que $(\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(1 \otimes z) = 1\varepsilon_Y(z)$, para todo $z \in Y$. Portanto,

$$\begin{aligned} (\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\Delta_Y(y)(1 \otimes a)(1 \otimes z)) &= (\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(\Delta_Y(y)(1 \otimes a))(\imath_Y \otimes \varepsilon_Y)(1 \otimes z) \\ &= y\varepsilon_A(a)\varepsilon_Y(z), \end{aligned}$$

para todos $y, z \in Y$, $a \in A$. $\square$

Proposição 4.2.6. *Sejam Y e A álgebras de Hopf. Então, as Definições 4.2.2 e 4.2.1 são equivalentes.*

Demonstração. Inicialmente, observamos que $1_{M(A)} = 1_A$ e $\langle A \cup \{1_{M(A)}\}\rangle_{\Bbbk} = A$.

Supondo que vale a Definição 4.2.2.

(i) $y \leftharpoonup 1_A = y$, para todo $y \in Y$.

(ii) Dentre finitos elementos de Y, tome $1_Y \in Y$, assim, necessariamente, $f = 1_Y$. Note que esse elemento $f \in Y$ é o mesmo para todo $y \in Y$.

Logo, para cada $y, y' \in Y$, $a, b \in A$, temos que

$$\Delta_Y(y \leftharpoonup a)(1 \otimes b)(1 \otimes y') = y_1 \leftharpoonup a_1 \otimes (y_2 \leftharpoonup a_2 b)y',$$

e, para $y' = 1_Y$ e $b = 1_A$, temos que, para cada $y \in Y$, $a \in A$,

$$\Delta_Y(y \leftharpoonup a) = y_1 \leftharpoonup a_1 \otimes y_2 \leftharpoonup a_2.$$

(iii) Dentre finitos elementos de Y, tome $f = 1_Y \in Y$. Logo, para cada $y, z \in Y$, $a, b \in A$, temos

$$((y \leftharpoonup a) \leftharpoonup b)z = \varepsilon_Y(y_1 \leftharpoonup a_1)(y_2 \leftharpoonup a_2 b)z,$$

e, para $z = 1$ e a igualdade é satisfeita.

Reciprocamente, vamos supor que vale a Definição 4.2.1.

(i) Imediato.

(ii) Este item é automaticamente satisfeito pois $M(Y \otimes Y) = Y \otimes Y$.

(iii) Sabemos que

$$(y \leftharpoonup a) \leftharpoonup b = \varepsilon_Y(y_1 \leftharpoonup a_1)(y_2 \leftharpoonup a_2 b),$$

logo, basta tomar $f = 1_Y$ e a condição será satisfeita.

(iv) Sabemos que $\Delta_Y(y \leftharpoonup a) = \Delta_Y(y)\Delta_A(a)$, para todos $y \in Y$, $a \in A$. Tome $f = 1_Y$, assim temos que, para cada $y' \in Y$, $a, b \in A$

$$\begin{aligned}
(\Delta_Y(y \leftharpoonup a)(1 \otimes b))(1 \otimes y') &= (\Delta_Y(y)\Delta_A(a)(1 \otimes b))(1 \otimes y') \\
&= (y_1 \leftharpoonup a_1) \otimes ((y_2 \leftharpoonup a_2) \leftharpoonup b)(1 \otimes y') \\
&= ((y_1 \leftharpoonup a_1) \otimes \varepsilon_Y(y_2 \leftharpoonup a_2)(y_3 \leftharpoonup a_3 b))(1 \otimes y') \\
&= ((y_1 \leftharpoonup a_1) \otimes (y_2 \leftharpoonup a_2 b))(1 \otimes y') \\
&= y_1 \leftharpoonup a_1 \otimes (y_2 \leftharpoonup a_2 b) y'.
\end{aligned}$$

(v) Supondo que $y \leftharpoonup a = 0$ para todo $a \in A$, basta tomar $a = 1_A$ e obtemos que $y = 0$. $\square$

Proposição 4.2.7. *Sejam Y e A álgebras de Hopf de multiplicadores e $\lambda : \langle A \cup \{1_{M(A)}\}\rangle_{\Bbbk} \longrightarrow \Bbbk$ uma aplicação $\Bbbk$-linear. Então*

$$\begin{aligned}
\leftharpoonup : Y \otimes \langle A \cup \{1_{M(A)}\}\rangle_{\Bbbk} &\longrightarrow Y \\
y \otimes a &\longmapsto y\lambda(a)
\end{aligned}$$

define uma estrutura de A-módulo coálgebra parcial sobre Y se, e somente se:

(i) $\lambda(1_{M(A)}) = 1_{\Bbbk}$;

(ii) $\lambda(a)\lambda(b) = \lambda(a_1)\lambda(a_2 b)$.

Demonstração. Supondo que λ define uma ação parcial.

Segue do item (i) da Definição 4.2.2 que $y\lambda(1_{M(A)}) = y \leftharpoondown 1_{M(A)} = y$, para todo $y \in Y$, logo $\lambda(1_{M(A)}) = 1_{\Bbbk}$.

Para o item (ii), por um lado, temos

$$((y \leftharpoondown a) \leftharpoondown b)z \;=\; y\lambda(a)\lambda(b)z,$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_Y(y_1 f \leftharpoondown a_1)(y_2 \leftharpoondown a_2 b)z &= \varepsilon_Y(y_1 f)\lambda(a_1)y_2 z\lambda(a_2 b)\\
&= yz\varepsilon_Y(f)\lambda(a_1)\lambda(a_2 b).
\end{aligned}$$

Logo, assumindo que $\varepsilon_Y(f) = 1_{\Bbbk}$, segue da Definição 4.2.2 (iii) que

$$y\lambda(a)\lambda(b)z = yz\lambda(a_1)\lambda(a_2 b),$$

para todos $y, z \in Y$. Portanto, $\lambda(a)\lambda(b) = \lambda(a_1)\lambda(a_2 b)$.

Reciprocamente, vamos verificar os itens da Definição 4.2.2.

(i) $y \leftharpoondown 1_{M(A)} = y\lambda(1_{M(A)}) = y$, para todo $y \in Y$.

(ii) Para todos $a \in A$, $y, y' \in Y$,

$$(\Delta_Y(y)(1 \otimes a))(1 \otimes y') \stackrel{(*)}{=} (\Delta_Y(y)\lambda(a))(1 \otimes y') \in Y \otimes Y.$$

Analogamente, verificamos a outra inclusão.

(iii) Para cada $a, b \in A$, $y, z \in Y$,

$$\begin{aligned}
((y \leftharpoondown a) \leftharpoondown b)z &= yz\lambda(a)\lambda(b)\\
&= \varepsilon_Y(y_1 f)y_2 z\lambda(a_1)\lambda(a_2 b)\\
&= \varepsilon_Y(y_1 f \leftharpoondown a_1)(y_2 \leftharpoondown a_2 b)z.
\end{aligned}$$

onde $f \in Y$ é unidade local para o primeiro fator do tensor na expressão $\Delta_Y(y)(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes z) \in Y \otimes Y$ e $\varepsilon_Y(f) = 1_{\Bbbk}$.

(iv) Para cada $a, b \in A$, $y, z \in Y$

$$\begin{aligned}
(\Delta_Y(y \leftharpoonup a)(1 \otimes b))(1 \otimes z) &= \lambda(a)(\Delta_Y(y)(1 \otimes b))(1 \otimes z) \\
&\overset{(*)}{=} \lambda(a)\lambda(b)\Delta_Y(y)(1 \otimes z) \\
&= \lambda(a_1)\lambda(a_2b)(y_1 \otimes y_2z) \\
&= \lambda(a_1)\lambda(a_2b)(y_1f \otimes y_2z) \\
&= \lambda(a_1)\lambda(a_2b)\Delta_Y(y)(f \otimes 1)(1 \otimes z) \\
&= \lambda(a_1)\lambda(a_2b)(y'_1f \otimes y'_2z) \\
&= (y'_1f \leftharpoonup a_1) \otimes (y'_2 \leftharpoonup a_2b)z,
\end{aligned}$$

onde $f \in Y$ também é unidade local para o primeiro fator do tensor na expressão $\Delta_Y(y')(1 \otimes a_2b)(1 \otimes z) \in Y \otimes Y$.

Justificativa de $(*)$: Definimos o seguinte multiplicador em $M^Y_{0,2}(Y \otimes Y)$:

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta(y)(1 \otimes a)}(z) &= (\Delta(y)(1 \otimes z))(1 \otimes a), \\
\overline{\overline{\Delta(y)(1 \otimes a)}}(z) &= ((1 \otimes z)\Delta(y))(1 \otimes a).
\end{aligned}$$

Verifica-se facilmente a boa definição deste par.

(v) Supondo que $y \leftharpoonup a = 0$ para todo $a \in A$, assim $y\lambda(a) = 0$ para todo $a \in A$. Logo, basta tomar $a \in A$ tal que $\lambda(a) = 1_{\Bbbk}$ e obtemos que $y = 0$. $\square$

Exemplo 4.2.8. Sejam Y uma álgebra com produto não degenerado, A_G a álgebra definida no Exemplo 1.1.10 e N um subgrupo finito de G tal que $car(\Bbbk) \nmid |N|$. Definimos a aplicação linear

$$\begin{aligned}
\lambda : \langle A_G \cup \{1_{M(A_G)}\}\rangle_{\Bbbk} &\longrightarrow \Bbbk \\
\delta_g &\longmapsto \begin{cases} \frac{1}{|N|} & , g \in N, \\ 0 & , \text{caso contrário.} \end{cases} \\
1_{M(A_G)} &\longmapsto \sum_{g \in G} \lambda(\delta_g)
\end{aligned}$$

Então, Y é um A_G-módulo coálgebra parcial à direita com ação $y \leftharpoonup a = \lambda(a)y$, para todo $a \in \langle A_G \cup \{1_{M(A_G)}\}\rangle_{\Bbbk}$ e $y \in Y$.

Vamos verificar os itens (i) e (ii) da Proposição 4.2.7.

(i) Sabemos que a álgebra de multiplicadores de A_G é o espaço de todas as funções de G em $\Bbbk$ e que $1_{M(A_G)} = \sum_{g\in G} \delta_g$ (soma formal). Logo,

$$\begin{aligned} \lambda(1_{M(A_G)}) &= \sum_{g\in G} \lambda(\delta_g) \\ &= \sum_{g\in N} \frac{1}{|N|} \\ &= \frac{|N|}{|N|} \\ &= 1_{\Bbbk}. \end{aligned}$$

(ii) Sejam $\delta_g, \delta_h \in A_G$, então

$$\lambda(\delta_g)\lambda(\delta_h) = \begin{cases} \frac{1}{|N|^2} & , g, h \in N, \\ 0 & , \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \lambda((\delta_g)_1)\lambda((\delta_g)_2\delta_h) &\overset{1.1.10}{=} \lambda(\delta_{gh^{-1}})\lambda(\delta_h) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{|N|^2} & , gh^{-1} \text{ e } h \in N \Rightarrow g \in N \\ 0 & , \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, $\lambda(\delta_g)\lambda(\delta_h) = \lambda((\delta_g)_1)\lambda((\delta_g)_2\delta_h)$, para todo δ_g e $\delta_h \in A_G$.

Assim, concluímos que λ define uma ação parcial de A_G em Y.

Exemplo 4.2.9. Sejam as álgebras A_G e Y do exemplo anterior, definimos um elemento idempotente $f \in M(A_G)$ tal que $(f \otimes 1)\Delta(f) = f \otimes f$ por

$$\begin{aligned} f : G &\longrightarrow \Bbbk \\ g &\longmapsto \begin{cases} 1 & , g \in N, \\ 0 & , \text{caso contrário,} \end{cases} \end{aligned}$$

onde N é um subgrupo qualquer de G (recordamos que G também é um grupo qualquer). Então, Y é um $\widehat{A_G}$-módulo coálgebra parcial à direita via $y \leftharpoondown b = y\lambda(b)$, onde $\lambda(\widehat{h}) = \lambda(\varphi(\_h)) = \varphi(fh)$ e $\lambda(1_{M(\widehat{A_G})}) = \varepsilon(f)$.

(i) Inicialmente, lembramos do Exemplo 1.1.10 que $\varepsilon(h) = h(e)$, onde e é o elemento neutro de G, $h \in A_G$. Podemos estender ε para todo $m \in M(A_G)$, definindo $\varepsilon(m) = \varepsilon(m)\varepsilon(c) = \varepsilon(mc)$, onde $\varepsilon(c) = 1_\Bbbk$,

Logo,

$$\lambda(1_{M(\widehat{A_G})}) = \varepsilon(f) = \varepsilon(f\delta_e) = (f\delta_e)(e) = f(e)\delta_e(e) = 1_\Bbbk.$$

(ii) Sejam $\widehat{h}, \widehat{g} \in \widehat{A_G}$, então

$$\begin{aligned} \lambda(\widehat{h}_1)\lambda(\widehat{h}_2\widehat{g}) &\overset{1.10}{=} \varphi(fS^{-1}(g_1)h)\varphi(fg_2) \\ &\overset{1.2.1}{=} \varphi(f(\imath \otimes \varphi)(\Delta(fg_2)(S^{-1}(g_1)h \otimes 1))) \\ &= \varphi((\imath \otimes \varphi)((f \otimes 1)\Delta(fg_2)(S^{-1}(g_1)h \otimes 1))) \\ &= \varphi((\imath \otimes \varphi)((f \otimes 1)\Delta(f)\Delta(g_2)(S^{-1}(g_1)h \otimes 1))) \\ &\overset{(*)}{=} \varphi((\imath \otimes \varphi)((f \otimes f)\Delta(g_2)(S^{-1}(g_1)h \otimes 1))) \\ &= \varphi((\imath \otimes \varphi)((f \otimes f)(g_2S^{-1}(g_1)h \otimes g_3))) \\ &= \varphi((\imath \otimes \varphi)((f \otimes f)(h \otimes g))) \\ &= \varphi(fh)\varphi(fg) \\ &= \lambda(\widehat{h})\lambda(\widehat{g}), \end{aligned}$$

onde na igualdade $(*)$ estamos usando a propriedade $(f \otimes 1)\Delta(f) = f \otimes f$. Assim, $\lambda(\widehat{h})\lambda(\widehat{g}) = \lambda(\widehat{h}_1)\lambda(\widehat{h}_2\widehat{g})$, para todo $\widehat{h} = \varphi(\_h)$ e $\widehat{g} = \varphi(\_g) \in \widehat{A_G}$.

Portanto, $\leftharpoonup$ é uma ação parcial parcial de $\widehat{A_G}$ em Y.

4.3 Módulo Coálgebra Parcial Induzido

Nesta seção, construiremos um módulo coálgebra parcial a partir de um módulo coálgebra global através de uma projeção. Para isso, vamos supor que Z é um A-módulo coálgebra à direita (global) via $\triangleleft$, Y é uma subálgebra de Hopf de multiplicadores de Z (Definição 3.3.1) e π uma projeção de álgebras de Z sobre Y, conforme Definição 2.1.6. Além disso, também vamos supor que π satisfaz:

(i) Para todos $y \in Y$, $z \in Z$, $a \in A$, a comultiplicatividade no seguinte sentido

$$(\Delta_Y(\pi(z))(y \otimes 1))(1 \otimes a) = (\pi \otimes \pi)(\Delta_Z(z)(y \otimes 1)(1 \otimes a)). \tag{4.8}$$

(ii) Para todos $a \in A$, $z \in Z$ e $y' \in Y$ tal que $\varepsilon_Y(y') = 1_{\Bbbk}$,

$$\pi(\pi(z) \triangleleft a) = \pi(\varepsilon_Y(\pi(z_1))z_2 \triangleleft a). \tag{4.9}$$

Proposição 4.3.1. *Nas condições mencionadas, para todos $y \in Y$, $a \in \langle A \cup \{1_{M(A)}\}\rangle_{\Bbbk}$, a aplicação linear*

$$y \leftharpoonup a := \pi(y \triangleleft a)$$

define sobre Y uma estrutura de A-módulo coálgebra parcial.

Demonstração. De fato,

(i) $y \leftharpoonup 1_{M(A)} = \pi(y \triangleleft 1_{M(A)}) = \pi(y) = y$, para todo $y \in Y$.

(ii) $(\Delta_Y(y)(1 \otimes a))(1 \otimes y') \in Y \otimes Y$, e $(1 \otimes y')(\Delta_Y(y)(1 \otimes a)) \in Y \otimes Y$,

para todos $a \in A$, $y, y' \in Y$.

Sabemos da Definição 4.1.3 que para todos $y, y' \in Y$, $a \in A$, $(\Delta_Z(y)(1 \otimes a))(1 \otimes y') \in Z \otimes Z$, assim

$$(\pi \otimes \pi)((\Delta_Z(y)(1 \otimes a))(1 \otimes y')) \in Y \otimes Y,$$

e, para todo $y'' \in Y$, temos

$$\begin{aligned}
(\pi \otimes \pi)((\Delta_Z(y)(1 \otimes a))(1 \otimes y'))(y'' \otimes 1) &= (\pi \otimes \pi)((\Delta_Z(y)(1 \otimes a))(1 \otimes y'))(\pi(y'') \otimes 1) \\
&= (\pi \otimes \pi)((\Delta_Z(y)(1 \otimes a))(1 \otimes y')(y'' \otimes 1)) \\
&\overset{(4.1)}{=} (\pi \otimes \pi)(\Delta_Z(y)(y'' \otimes 1)(1 \otimes a)(1 \otimes y')) \\
&= \pi(y_1 y'') \otimes \pi((y_2 \triangleleft a)y') \\
&= (\pi \otimes \pi)(\Delta_Z(y)(y'' \otimes 1)(1 \otimes a))(1 \otimes y') \\
&\overset{(4.8)}{=} (\Delta_Y(\pi(y))(y'' \otimes 1))(1 \otimes a)(1 \otimes y') \\
&= (\Delta_Y(y)(y'' \otimes 1))(1 \otimes a)(1 \otimes y') \\
&\overset{(4.1)}{=} (\Delta_Y(y)(1 \otimes a)(1 \otimes y'))(y'' \otimes 1).
\end{aligned}$$

Logo,

$$(\pi \otimes \pi)((\Delta_Z(y)(1 \otimes a))(1 \otimes y')) = (\Delta_Y(y)(1 \otimes a))(1 \otimes y'),$$

para todos $y, y' \in Y$, $a \in A$. Portanto $(\Delta_Y(y)(1 \otimes a))(1 \otimes y') \in Y \otimes Y$.

Analogamente, mostramos a outra inclusão.

(iii) Para cada $a, b \in A$, $y, y' \in Y$,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_Y(y_1 f \leftharpoonup a_1)(y_2 \leftharpoonup a_2 b)y' &= \varepsilon_Y(\pi(y_1 f \triangleleft a_1))\pi(y_2 \triangleleft a_2 b)\pi(y') \\
&= \varepsilon_Y(\pi(y_1 f \triangleleft a_1))\pi((y_2 \triangleleft a_2 b)y') \\
&= (\varepsilon_Y \pi \otimes \pi)(y_1 f \triangleleft a_1 \otimes (y_2 \triangleleft a_2 b)y') \\
&\overset{4.1.4(5)}{=} (\varepsilon_Y \otimes \imath_Y)(\pi \otimes \pi)(\Delta_Y(y \triangleleft a)(1 \otimes b)(1 \otimes y'))\varepsilon_Y(t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\varepsilon_Y \otimes \imath_Y)(\pi \otimes \pi)(\Delta_Y(y \triangleleft a)(1 \otimes b)(1 \otimes y')(t \otimes 1)) \\
&\overset{(4.1)}{=} (\varepsilon_Y \otimes \imath_Y)(\pi \otimes \pi)(\Delta_Y(y \triangleleft a)(t \otimes 1)(1 \otimes b)(1 \otimes y')) \\
&= \varepsilon_Y(\pi((y \triangleleft a)_1 t))\pi(((y \triangleleft a)_2 \triangleleft b)y') \\
&= \varepsilon_Y(\pi((y \triangleleft a)_1 t))\pi((y \triangleleft a)_2 \triangleleft b)y' \\
&\overset{(4.9)}{=} \pi(\pi(y \triangleleft a) \triangleleft b)y' \\
&= (\pi(y \triangleleft a) \leftharpoonup b)y' \\
&= ((y \leftharpoonup a) \leftharpoonup b)y',
\end{aligned}
$$

onde $t \in Y$ é tal que $\varepsilon_Y(t) = 1_{\Bbbk}$. Portanto

$$((y \leftharpoonup a) \leftharpoonup b)y' = \varepsilon_Y(y_1 f \leftharpoonup a_1)(y_2 \leftharpoonup a_2 b)y',$$

onde $f \in Y$ é unidade local para o primeiro fator do tensor na expressão $\Delta_Y(y)(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes y') \in Y \otimes Y$.

(iv) Para cada $a, b \in A$, $y, y' \in Y$,

$$
\begin{aligned}
(\Delta_Y(y \leftharpoonup a)(1 \otimes b))(1 \otimes y')(y'' \otimes 1) &= (\Delta_Y(\pi(y \triangleleft a))(y'' \otimes 1)(1 \otimes b))(1 \otimes y') \\
&\overset{(4.8)}{=} (\pi \otimes \pi)(\Delta_Y(y \triangleleft a)(y'' \otimes 1)(1 \otimes b)(1 \otimes y')) \\
&= (\pi \otimes \pi)(\Delta_Y(y \triangleleft a)(1 \otimes b)(1 \otimes y')(y'' \otimes 1)) \\
&= (\pi \otimes \pi)(\Delta_Y(y \triangleleft a)(1 \otimes b)(1 \otimes y'))(y'' \otimes 1) \\
&\overset{4.1.4(5)}{=} (\pi \otimes \pi)(y_1 f \triangleleft a_1 \otimes (y_2 \triangleleft a_2 b)y')(y'' \otimes 1) \\
&= \pi(y_1 f \triangleleft a_1) \otimes \pi((y_2 \triangleleft a_2 b)y')(y'' \otimes 1) \\
&= (\pi(y_1 f \triangleleft a_1) \otimes \pi(y_2 \triangleleft a_2 b)y')(y'' \otimes 1) \\
&= (y_1 f \leftharpoonup a_1 \otimes (y_2 \leftharpoonup a_2 b)y')(y'' \otimes 1),
\end{aligned}
$$

para todo $y'' \in Y$.

Logo, $(\Delta_Y(y \leftharpoonup a)(1 \otimes b))(1 \otimes y') = y_1 f \leftharpoonup a_1 \otimes (y_2 \leftharpoonup a_2 b)y'$,

onde $f \in Y$ é unidade local para o primeiro fator do tensor na expressão $\Delta_Y(y)(1 \otimes a_2 b)(1 \otimes y') \in Y \otimes Y$.

(v) $y \leftharpoondown a = 0$ para todo $a \in A$ então $y = 0$.

De fato, supondo que $0 = y \leftharpoondown a = \pi(y \triangleleft a)$ para todo $a \in A$. Seja $e \in A$ tal que $y \triangleleft e = y$, assim temos

$$0 = y \leftharpoondown e = \pi(y \triangleleft e) = \pi(y) = y.$$

$\square$

A ação parcial $\leftharpoondown$ definida na Proposição 4.3.1 é chamada de ação parcial induzida via π. Dizemos também que Y é um A-**módulo coálgebra parcial induzido via** π.

4.4 Dualização

Nesta seção, estabelecemos a dualidade entre módulos coálgebra parciais e comódulos coálgebra parciais para um grupo quântico algébrico. Para o que segue, vamos supor que A é um grupo quântico algébrico, Y é uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular. Além disso, consideramos φ uma integral à esquerda em A.

Proposição 4.4.1. *Se Y é um A-comódulo coálgebra parcial à esquerda simétrico via ρ, então Y é um $\widehat{A}$-módulo coálgebra parcial à direita simétrico via*

$$\leftharpoondown : Y \otimes \langle \widehat{A} \cup \{1_{M(\widehat{A})}\}\rangle_{\Bbbk} \longrightarrow Y,$$

onde $y \leftharpoondown \varphi(\_a) = (\varphi \otimes \imath_Y)(\rho(y)(a \otimes 1))$ e $y \leftharpoondown 1_{M(\widehat{A})} = (\varepsilon_A \otimes \imath_Y)\rho(y)$.

Demonstração. Vamos verificar os itens da Definição 4.2.2.

(i) $y \leftharpoondown 1_{M(\hat{A})} = (\varepsilon_A \otimes \imath_Y)\rho(y) \overset{3.1.2(i)}{=} y$, para todo $y \in Y$.

(ii) Sejam $y, y' \in Y$, $\varphi(\_a) \in \hat{A}$, mostraremos que

$$[\Delta_Y(y)(1 \otimes \varphi(\_a))](1 \otimes y') \in Y \otimes Y.$$

Inicialmente, vamos pensar esta expressão como um multiplicador em $M_{0,1}^{Y}(Y \otimes Y)$ para todos $y, y' \in Y$, $\varphi(\_a) \in \hat{A}$. Assim,

$$\begin{aligned}
& [\Delta_Y(y)(1 \otimes \varphi(_a))](1 \otimes y')(z \otimes 1) = \\
= \quad & (\Delta_Y(y)(z \otimes 1))(1 \otimes \varphi(_a))(1 \otimes y') \\
= \quad & y_1 z \otimes (y_2 \leftharpoonup \varphi(_a))y' \\
= \quad & y_1 z \otimes (\varphi \otimes \imath_Y)(\rho(y_2)(a \otimes 1))y' \\
= \quad & \sum_i (\imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(y_1 z \otimes a_i \otimes y_i y') \\
= \quad & \sum_i (\imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((y_1 z \otimes a_i \otimes y_i)(1 \otimes 1 \otimes y')) \\
= \quad & (\imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((y_1 z \otimes T(y_2 \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes y')) \\
= \quad & (\imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y)(z \otimes 1) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y')) \\
= \quad & (\imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(z \otimes 1 \otimes y')) \\
= \quad & (\imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y')(z \otimes 1 \otimes 1)) \\
\overset{3.1.2(ii)}{=} \quad & (\imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\sum_i z_i \otimes b_i \otimes w_i)(z \otimes 1 \otimes 1)) \\
= \quad & \sum_i z_i z \varphi(b_i) \otimes w_i \\
= \quad & \sum_i (z_i \varphi(b_i) \otimes w_i)(z \otimes 1) \\
= \quad & (\imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y'))(z \otimes 1).
\end{aligned}$$

Então:

$$[\Delta_Y(y)(1 \otimes \varphi(\_a))](1 \otimes y')(z \otimes 1) \quad = \quad (\imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y'))(z \otimes 1),$$

para todo $z \in Y$.

Portanto,

$$[\Delta_Y(y)(1 \otimes \varphi(\_a))](1 \otimes y') \quad = \quad (\imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a)(1 \otimes 1 \otimes y')) \in Y \otimes Y.$$

Analogamente, mostramos que $(1 \otimes y')[\Delta_Y(y)(1 \otimes \varphi(\_a))] \in Y \otimes Y$, para todos $y, y' \in Y$, $\varphi(\_a) \in \hat{A}$.

(iii) Dados $y \in Y$, $\varphi(\_a), \varphi(\_b) \in \hat{A}$, temos

$$((y \leftharpoonup \varphi(\_a)) \leftharpoonup \varphi(\_b))z =$$

$$= (((\varphi \otimes \imath_Y)T(y \otimes a)) \leftharpoonup \varphi(\_b))z$$

$$= (\varphi(y^{-1}a)(y^0 \leftharpoonup \varphi(\_b)))z$$

$$= (\varphi(y^{-1}a)((\varphi \otimes \imath_Y)T(y^0 \otimes b)))z$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(y^{-1}a \otimes T(y^0 \otimes b))z$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_A \otimes T)(y^{-1}a \otimes y^0 \otimes b))z$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(y \otimes a \otimes b))z$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(c)(d \otimes 1)))z$$

$$\overset{(4.6)}{=} (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_A \otimes T)((T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(c))(d \otimes 1 \otimes 1)))z$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)[((\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(c)))(d \otimes 1 \otimes 1)]z$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)[((\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(c)))(d \otimes 1 \otimes z)]$$

$$\overset{3.1.2(iv)}{=} (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)[((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y(y) \otimes c)(d \otimes 1 \otimes z)]$$

$$\overset{(4.6)}{=} (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)[((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y(y) \otimes c)(1 \otimes d \otimes 1 \otimes z))]$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)[((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes c)$$

$$\circ(1 \otimes 1 \otimes z))(1 \otimes d \otimes 1 \otimes 1)]$$

$$\overset{3.1.2(ii)}{=} (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)[((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)(x \otimes e \otimes w)(1 \otimes d \otimes 1 \otimes 1)]$$

$$\overset{(*)}{=} (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)[((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes c)(f \otimes 1 \otimes z))(1 \otimes d \otimes 1^2)]$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)[((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y)(f \otimes 1) \otimes c)(1^2 \otimes z))(1 \otimes d \otimes 1^2)]$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)[((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)((y_1 f \otimes T(y_2 \otimes c))(1 \otimes 1 \otimes z))(1 \otimes d \otimes 1 \otimes 1)]$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)[((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(y_1 f \otimes \Delta_A({y_2}^{-1}c)(d \otimes 1) \otimes {y_2}^0 z)]$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)[(\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T(y_1 f \otimes ({y_2}^{-1}c)_1 d) \otimes ({y_2}^{-1}c)_2 \otimes {y_2}^0 z]$$

$$= \varphi((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T(y_1 f \otimes ({y_2}^{-1}c)_1 d))\varphi(({y_2}^{-1}c)_2){y_2}^0 z$$

$$= \varphi((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T(y_1 f \otimes d))\varphi({y_2}^{-1}c){y_2}^0 z$$

$= \varphi((y_1 f)^{-1}d)\varepsilon_Y((y_1 f)^0)\varphi({y_2}^{-1}c){y_2}^0 z$

$= \varepsilon_Y(\varphi((y_1 f)^{-1}d)(y_1 f)^0)\varphi({y_2}^{-1}c){y_2}^0 z$

$= \varepsilon_Y((y_1 f) \leftharpoonup \varphi(\_d))(y_2 \leftharpoonup \varphi(\_c))z$

$\overset{1.2.14}{=} \varepsilon_Y((y_1 f) \leftharpoonup (\varphi(\_a))_1)(y_2 \leftharpoonup (\varphi(\_a))_2\varphi(\_b))z.$

Portanto, para cada $\varphi(\_a), \varphi(\_b) \in \hat{A}$, $y, z \in Y$,

$$((y \leftharpoonup \varphi(\_a)) \leftharpoonup \varphi(\_b))z \;=\; \varepsilon_Y((y_1 f) \leftharpoonup (\varphi(\_a))_1)(y_2 \leftharpoonup (\varphi(\_a))_2\varphi(\_b))z,$$

onde $f \in Y$ é unidade local para o primeiro fator do tensor nas expressões $(\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes c)(1 \otimes 1 \otimes z) \in Y \otimes A \otimes Y$ e $\Delta_Y(y)(1 \otimes \varphi(\_a)_2\varphi(\_b))(1 \otimes z) \in Y \otimes Y$, justificando $(*)$.

(iv) Vamos mostrar que, para cada $\varphi(\_a), \varphi(\_b) \in \hat{A}$, $y, y' \in Y$,

$$(\Delta_Y(y \leftharpoonup \varphi(\_a))(1 \otimes \varphi(\_b)))(1 \otimes y') = (y_1 f \leftharpoonup \varphi(\_a)_1) \otimes (y_2 \leftharpoonup \varphi(\_a)_2\varphi(\_b))y'.$$

De fato, para todo $z \in Y$, temos

$(\Delta_Y(y \leftharpoonup \varphi(\_a))(1 \otimes \varphi(\_b)))(1 \otimes y')(z \otimes 1) =$

$= (\varphi(y^{-1}a)\Delta_Y(y^0)(1 \otimes \varphi(\_b)))(1 \otimes y')(z \otimes 1)$

$= (\varphi(y^{-1}a)\Delta_Y(y^0)(z \otimes 1)(1 \otimes \varphi(\_b)))(1 \otimes y')$

$= (\varphi(y^{-1}a)({y^0}_1 z \otimes {y^0}_2)(1 \otimes \varphi(\_b)))(1 \otimes y')$

$= (\varphi(y^{-1}a)({y^0}_1 z \otimes {y^0}_2 \leftharpoonup \varphi(\_b)))(1 \otimes y')$

$= ((\varphi \otimes \imath_Y \otimes \imath_Y)(y^{-1}a \otimes {y^0}_1 z \otimes (\varphi \otimes \imath_Y)T({y^0}_2 \otimes b)))(1 \otimes y')$

$= ((\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(y^{-1}a \otimes {y^0}_1 z \otimes T({y^0}_2 \otimes b)))(1 \otimes y')$

$= ((\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \imath_Y \otimes T)(y^{-1}a \otimes {y^0}_1 z \otimes {y^0}_2 \otimes b))(1 \otimes y')$

$= ((\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \imath_Y \otimes T)(y^{-1}a \otimes \Delta_Y(y^0)(z \otimes 1) \otimes b))(1 \otimes y')$

$= ((\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \imath_Y \otimes T)[(y^{-1}a \otimes \Delta_Y(y^0) \otimes b)(1 \otimes z \otimes 1 \otimes 1)])(1 \otimes y')$

$$= [(\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \imath_Y \otimes T)(y^{-1}a \otimes \Delta_Y(y^0) \otimes b)](z \otimes y')$$

$$= [(\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \imath_Y \otimes T)(\imath_A \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A)(T(y \otimes a) \otimes b)](z \otimes y')$$

$$= [(\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \imath_Y \otimes T)((\imath_A \otimes \Delta_Y)T(y \otimes a) \otimes b)](z \otimes y')$$

$$\stackrel{3.1.2(iii)}{=} [(\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \imath_Y \otimes T)((T \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes a) \otimes b)](z \otimes y')$$

$$= [(\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \imath_Y \otimes T)(T \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_A)(\Delta_Y(y) \otimes a \otimes b)](z \otimes y')$$

$$= [(\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes \imath_A \otimes T)(\imath_Y \otimes T \otimes \imath_A)(\Delta_Y(y) \otimes a \otimes b)](z \otimes y')$$

$$= [(\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A))(\Delta_Y(y) \otimes a \otimes b)](z \otimes y')$$

$$= [(\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A))(\Delta_Y(y) \otimes \Delta_A(c)(d \otimes 1))](z \otimes y')$$

$$= [(\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)((\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(\Delta_Y(y) \otimes \Delta_A(c)))(1 \otimes d \otimes 1 \otimes 1))](z \otimes y')$$

$$= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)\{[(\imath_Y \otimes ((\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A))(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A))(\Delta_Y(y) \otimes c)]$$
$$\circ(1 \otimes d \otimes 1 \otimes 1)\}(z \otimes y')$$

$$\stackrel{(*)}{=} (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)\{[(\imath_Y \otimes ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T))(\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A)$$
$$\circ(\Delta_Y(y) \otimes c)](1 \otimes d \otimes 1 \otimes 1)\}(z \otimes y')$$

$$= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)\{[(\imath_Y \otimes ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T))((\imath_Y \otimes \Delta_Y)\Delta_Y(y) \otimes c)]$$
$$\circ(1 \otimes d \otimes 1 \otimes 1)\}(z \otimes y')$$

$$= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)\{[(\imath_Y \otimes ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T))((\Delta_Y \otimes \imath_Y)\Delta_Y(y) \otimes c)]$$
$$\circ(1 \otimes d \otimes 1 \otimes 1)\}(z \otimes y')$$

$$= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)\{[(\imath_Y \otimes ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y))(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)$$
$$\circ(\Delta_Y(y) \otimes c)](1 \otimes d \otimes 1 \otimes 1)\}(z \otimes y')$$

$$= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)\{[(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\Delta_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \imath_A)$$
$$\circ(\Delta_Y(y) \otimes c)](1 \otimes d \otimes 1 \otimes 1)\}(z \otimes y')$$

$$= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)\{[(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\Delta_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y(y) \otimes c)]$$
$$\circ(1 \otimes d \otimes 1 \otimes 1)\}(z \otimes y')$$

$$= (\varphi \otimes \imath_Y \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)\{[(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\Delta_Y \otimes \imath_A \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)$$

$$\circ(\Delta_Y(y)\otimes c)](1\otimes d\otimes 1\otimes 1)\}(z\otimes y')$$

$$\stackrel{(**)}{=} (\varphi\otimes\imath_Y\otimes\varphi\otimes\imath_Y)\{(T\otimes\imath_A\otimes\imath_Y)[(\imath_Y\otimes(\imath_A\otimes\varepsilon_Y)T\otimes\imath_A\otimes\imath_Y)(\Delta_Y\otimes\imath_A\otimes\imath_A\otimes\imath_Y)(\imath_Y\otimes(\Delta_A\otimes\imath_Y)T)$$

$$\circ(\Delta_Y(y)\otimes c)](d\otimes 1\otimes 1\otimes 1)\}(z\otimes y')$$

$$= (\varphi\otimes\imath_Y\otimes\varphi\otimes\imath_Y)\{(T\otimes\imath_A\otimes\imath_Y)[(\imath_Y\otimes\imath_A\otimes\varepsilon_Y\otimes\imath_A\otimes\imath_Y)(\imath_Y\otimes T\otimes\imath_A\otimes\imath_Y)(\Delta_Y\otimes\imath_A\otimes\imath_A\otimes\imath_Y)$$

$$\circ(\imath_Y\otimes(\Delta_A\otimes\imath_Y)T)(\Delta_Y(y)\otimes c)](d\otimes 1\otimes 1\otimes 1)\}(z\otimes y')$$

$$= (\varphi\otimes\imath_Y\otimes\varphi\otimes\imath_Y)\{[(\imath_A\otimes\imath_Y\otimes\varepsilon_Y\otimes\imath_A\otimes\imath_Y)(T\otimes\imath_Y\otimes\imath_A\otimes\imath_Y)(\imath_Y\otimes T\otimes\imath_A\otimes\imath_Y)(\Delta_Y\otimes\imath_A\otimes\imath_A\otimes\imath_Y)$$

$$\circ(\imath_Y\otimes(\Delta_A\otimes\imath_Y)T)(\Delta_Y(y)\otimes c)](d\otimes 1\otimes 1\otimes 1)\}(z\otimes y')$$

$$= (\varphi\otimes\imath_Y\otimes\varphi\otimes\imath_Y)\{[(\imath_A\otimes\imath_Y\otimes\varepsilon_Y\otimes\imath_A\otimes\imath_Y)((T\otimes\imath_Y)(\imath_Y\otimes T)(\Delta_Y\otimes\imath_A)\otimes\imath_A\otimes\imath_Y)$$

$$\circ(\imath_Y\otimes(\Delta_A\otimes\imath_Y)T)(\Delta_Y(y)\otimes c)](d\otimes 1\otimes 1\otimes 1)\}(z\otimes y')$$

$$\stackrel{3.1.2(iii)}{=} (\varphi\otimes\imath_Y\otimes\varphi\otimes\imath_Y)\{[(\imath_A\otimes\imath_Y\otimes\varepsilon_Y\otimes\imath_A\otimes\imath_Y)((\imath_A\otimes\Delta_Y)T\otimes\imath_A\otimes\imath_Y)(\imath_Y\otimes(\Delta_A\otimes\imath_Y)T)$$

$$\circ(\Delta_Y(y)\otimes c)](d\otimes 1\otimes 1\otimes 1)\}(z\otimes y')$$

$$= (\varphi\otimes\imath_Y\otimes\varphi\otimes\imath_Y)\{[((\imath_A\otimes(\imath_Y\otimes\varepsilon_Y)\Delta_Y)T\otimes\imath_A\otimes\imath_Y)(\imath_Y\otimes(\Delta_A\otimes\imath_Y)T)(\Delta_Y(y)\otimes c)]$$

$$\circ(d\otimes 1\otimes 1\otimes 1)\}(z\otimes y')$$

$$= (\varphi\otimes\imath_Y\otimes\varphi\otimes\imath_Y)\{[(T\otimes\imath_A\otimes\imath_Y)(\imath_Y\otimes(\Delta_A\otimes\imath_Y)T)(\Delta_Y(y)\otimes c)](d\otimes 1\otimes 1\otimes 1)\}(z\otimes y')$$

$$= (\varphi\otimes\imath_Y\otimes\varphi\otimes\imath_Y)\{(T\otimes\imath_A\otimes\imath_Y)[((\imath_Y\otimes(\Delta_A\otimes\imath_Y)T)(\Delta_Y(y)\otimes c))(1\otimes d\otimes 1\otimes 1)]\}(z\otimes y')$$

$$= ((\varphi\otimes\imath_Y)T\otimes\varphi\otimes\imath_Y)[((\imath_Y\otimes(\Delta_A\otimes\imath_Y)T)(\Delta_Y(y)\otimes c))(1\otimes d\otimes 1\otimes 1)](z\otimes y')$$

$$= ((\varphi\otimes\imath_Y)T\otimes\varphi\otimes\imath_Y)[((\imath_Y\otimes\Delta_A\otimes\imath_Y)(\imath_Y\otimes T)(\Delta_Y(y)\otimes c))(1\otimes d\otimes 1\otimes y')](z\otimes 1)$$

$$= ((\varphi\otimes\imath_Y)T\otimes\varphi\otimes\imath_Y)[(\imath_Y\otimes\Delta_A\otimes\imath_Y)((\imath_Y\otimes T)(\Delta_Y(y)\otimes c)(1\otimes 1\otimes y'))$$

$$\circ(1\otimes d\otimes 1\otimes 1)](z\otimes 1)$$

$$\stackrel{3.1.2(ii)}{=} ((\varphi\otimes\imath_Y)T\otimes\varphi\otimes\imath_Y)[(\imath_Y\otimes\Delta_A\otimes\imath_Y)(x\otimes e\otimes w)(1\otimes d\otimes 1\otimes 1)](z\otimes 1)$$

$$\stackrel{(***)}{=} ((\varphi\otimes\imath_Y)T\otimes\varphi\otimes\imath_Y)[(\imath_Y\otimes\Delta_A\otimes\imath_Y)((\imath_Y\otimes T)(\Delta_Y(y)\otimes c)(f\otimes 1\otimes y'))$$

$$\circ(1\otimes d\otimes 1\otimes 1)](z\otimes 1)$$

$$= ((\varphi\otimes\imath_Y)T\otimes\varphi\otimes\imath_Y)[(\imath_Y\otimes\Delta_A\otimes\imath_Y)((\imath_Y\otimes T)(\Delta_Y(y)(f\otimes 1)\otimes c)(1\otimes 1\otimes y'))$$

$$\circ(1\otimes d\otimes 1\otimes 1)](z\otimes 1)$$

$= ((\varphi \otimes \imath_Y)T \otimes \varphi \otimes \imath_Y)[(\imath_Y \otimes \Delta_A \otimes \imath_Y)(y_1 f \otimes T(y_2 \otimes c)(1 \otimes y'))(1 \otimes d \otimes 1 \otimes 1)](z \otimes 1)$

$= ((\varphi \otimes \imath_Y)T \otimes \varphi \otimes \imath_Y)[(y_1 f \otimes \Delta_A({y_2}^{-1}c) \otimes {y_2}^0 y')(1 \otimes d \otimes 1 \otimes 1)](z \otimes 1)$

$= ((\varphi \otimes \imath_Y)T(y_1 f \otimes ({y_2}^{-1}c)_1 d) \otimes \varphi(({y_2}^{-1}c)_2) \otimes {y_2}^0 y')(z \otimes 1)$

$= ((\varphi \otimes \imath_Y)T(y_1 f \otimes d)\varphi({y_2}^{-1}c) \otimes {y_2}^0 y')(z \otimes 1)$

$= ((y_1 f) \leftharpoonup \varphi(\_d))z \otimes (y_2 \leftharpoonup \varphi(\_c))y'$

$= ((y_1 f) \leftharpoonup \varphi(\_a)_1)z \otimes (y_2 \leftharpoonup \varphi(\_a)_2 \varphi(\_b))y'.$

Assim:

$$\Delta_Y(y \leftharpoonup \varphi(\_a))(1 \otimes \varphi(\_b))(z \otimes y') \;=\; (((y_1 f) \leftharpoonup \varphi(\_a)_1) \otimes (y_2 \leftharpoonup \varphi(\_a)_2 \varphi(\_b))y')(z \otimes 1).$$

E, como $f \in Y$ depende apenas de $y' \in Y$ e independe de $z \in Y$, então a igualdade vale para todo $z \in Y$.

Portanto, segue que, para cada $\varphi(\_a), \varphi(\_b) \in \hat{A}$, $y, y' \in Y$,

$$\Delta_Y(y \leftharpoonup \varphi(\_a))(1 \otimes \varphi(\_b))(1 \otimes y') \;=\; ((y_1 f) \leftharpoonup \varphi(\_a)_1) \otimes (y_2 \leftharpoonup \varphi(\_a)_2 \varphi(\_b))y',$$

onde $f \in Y$ é unidade local para o primeiro fator do tensor nas expressões $(\imath_Y \otimes T)(\Delta_Y(y) \otimes c)(1 \otimes 1 \otimes z) \in Y \otimes A \otimes Y$ e $\Delta_Y(y)(1 \otimes \varphi(\_a)_2 \varphi(\_b))(1 \otimes y') \in Y \otimes Y$, justificando $(***)$.

Justificativa de $(*)$*:* Sabemos de 3.1.2(iv) que, para todos $y \in Y$, $a \in A$,

$$(\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(y \otimes \Delta_A(a)) = ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y(y) \otimes a).$$

Usaremos esta igualdade para mostrar:

$$(\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A))(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A)(\Delta_Y(y) \otimes a) = (\imath_Y \otimes \Box)(\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A)(\Delta_Y(y) \otimes a),$$

para todos $y \in Y$, $a \in A$, onde:

$\Box = ((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T).$

Para tal, definiremos dois multiplicadores em $M_{0,1}^{Y}(Y \otimes A \otimes A \otimes Y)$.

1º Multiplicador:

$$
\begin{aligned}
&\overline{((\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A))(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A))(\Delta_Y(y) \otimes a)}(z) = \\
&\qquad = \ (\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A))(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A)(\Delta_Y(y)(z \otimes 1) \otimes a), \\
&\overline{\overline{((\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A))(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A))(\Delta_Y(y) \otimes a)}}(z) = \\
&\qquad = \ (\imath_Y \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A))(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A)((z \otimes 1)\Delta_Y(y) \otimes a).
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar a boa definição do par em $M_{0,1}^{Y}(Y \otimes A \otimes A \otimes Y)$. Para isto, basta mostrar a relação de compatibilidade de multiplicadores, pois sabemos que o produto em $Y \otimes A \otimes A \otimes Y$ é não degenerado. Denotamos:

$$\nabla = (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A).$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
&[\overline{\overline{((\imath_Y \otimes \nabla)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A))(\Delta_Y(y) \otimes a)}}(z)](w \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1) = \\
&\qquad = \ [(\imath_Y \otimes \nabla)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A)((z \otimes 1)\Delta_Y(y) \otimes a)](w \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1) \\
&\qquad = \ [(\imath_Y \otimes \nabla)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A)(zy_1 \otimes y_2 \otimes a)](w \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1) \\
&\qquad = \ (zy_1 \otimes \nabla(\imath_Y \otimes \Delta_A)(y_2 \otimes a))(w \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1) \\
&\qquad = \ (zy_1)w \otimes \nabla(\imath_Y \otimes \Delta_A)(y_2 \otimes a) \\
&\qquad = \ (\imath_Y \otimes \nabla)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A)(((z \otimes 1)\Delta_Y(y))(w \otimes 1) \otimes a) \\
&\qquad = \ (\imath_Y \otimes \nabla)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A)((z \otimes 1)(\Delta_Y(y)(w \otimes 1)) \otimes a) \\
&\qquad = \ z(y_1 w) \otimes \nabla(\imath_Y \Delta_A)(y_2 \otimes a) \\
&\qquad = \ (z \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)[(\imath_Y \otimes \nabla)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A)(\Delta_Y(y)(w \otimes 1) \otimes a)] \\
&\qquad = \ (z \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)[\overline{(\imath_Y \otimes \nabla)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A)(\Delta_Y(y) \otimes a)}(w)],
\end{aligned}
$$

para todos $y, z, w \in Y$, $a \in A$.

2º Multiplicador:

$$\overline{((\imath_Y \otimes \Box)(\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A))(\Delta_Y(y) \otimes a)}(z) = ((\imath_Y \otimes \Box)(\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A))(\Delta_Y(y)(z \otimes 1) \otimes a),$$

$$\overline{\overline{((\imath_Y \otimes \Box)(\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A))(\Delta_Y(y) \otimes a)}}(z) = ((\imath_Y \otimes \Box)(\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A))((z \otimes 1)\Delta_Y(y) \otimes a).$$

Vamos mostrar a compatibilidade em $M_{0,1}^Y(Y \otimes A \otimes A \otimes Y)$.

$$\begin{aligned}
&[\overline{\overline{(\imath_Y \otimes \Box)(\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A)(\Delta_Y(y) \otimes a)}}(z)](w \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1) = \\
&\quad = \quad [((\imath_Y \otimes \Box)(\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A))((z \otimes 1)\Delta_Y(y) \otimes a)](w \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1) \\
&\quad = \quad [((\imath_Y \otimes \Box)(\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A))(zy_1 \otimes y_2 \otimes a)](w \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1) \\
&\quad = \quad [(zy_1) \otimes \Box(\Delta_Y \otimes \imath_A)(y_2 \otimes a)](w \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1) \\
&\quad = \quad (zy_1)w \otimes \Box(\Delta_Y \otimes \imath_A)(y_2 \otimes a) \\
&\quad = \quad ((\imath_Y \otimes \Box)(\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A))(((z \otimes 1)\Delta_Y(y))(w \otimes 1) \otimes a) \\
&\quad = \quad ((\imath_Y \otimes \Box)(\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A))((z \otimes 1)(\Delta_Y(y)(w \otimes 1)) \otimes a) \\
&\quad = \quad z(y_1w) \otimes \Box(\Delta_Y \otimes \imath_A)(y_2 \otimes a) \\
&\quad = \quad (z \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)(y_1w \otimes \Box(\Delta_Y \otimes \imath_A)(y_2 \otimes a)) \\
&\quad = \quad (z \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)[(\imath_Y \otimes \Box)(\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A)(\Delta_Y(y)(w \otimes 1) \otimes a)] \\
&\quad = \quad (z \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)[\overline{((\imath_Y \otimes \Box)(\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A))(\Delta_Y(y) \otimes a)}(w)],
\end{aligned}$$

para todos $y, z, w \in Y$, $a \in A$.

Agora, vamos mostrar que estes multiplicadores são iguais em $M_{0,1}^Y(Y \otimes A \otimes A \otimes Y)$. Novamente, usando que o produto em $Y \otimes A \otimes A \otimes Y$ é não degenerado, basta mostrar a igualdade para apenas uma das ordenadas.

$$\begin{aligned}
&\overline{((\imath_Y \otimes \nabla)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A))(\Delta_Y(y) \otimes a)}(z) = \\
&\quad = \quad ((\imath_Y \otimes \nabla)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A))(\Delta_Y(y)(z \otimes 1) \otimes a) \\
&\quad = \quad ((\imath_Y \otimes \nabla)(\imath_Y \otimes \imath_Y \otimes \Delta_A))(y_1z \otimes y_2 \otimes a) \\
&\quad = \quad y_1z \otimes \nabla(y_2 \otimes \Delta_A(a))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= && y_1 z \otimes (\imath_A \otimes T)(T \otimes \imath_A)(y_2 \otimes \Delta_A(a)) \\
&\overset{3.1.2(iv)}{=} && y_1 z \otimes (((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_Y \otimes (\Delta_A \otimes \imath_Y)T)(\Delta_Y(y_2) \otimes a)) \\
&= && y_1 z \otimes \Box(\Delta_Y(y_2) \otimes a) \\
&= && (\imath_Y \otimes \Box)(\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A)(\Delta_Y(y)(z \otimes 1) \otimes a) \\
&= && \overline{((\imath_Y \otimes \Box)(\imath_Y \otimes \Delta_Y \otimes \imath_A))(\Delta_Y(y) \otimes a)}(z),
\end{aligned}
$$

para todos $y, z \in Y$, $a \in A$.

Justificativa de $(**)$*:*

Suponha que $\omega \in M^A_{0,3}(Y \otimes A \otimes A \otimes Y)$. Assim:

$$
\begin{aligned}
(T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\omega)(d \otimes 1 \otimes c \otimes 1) &= (T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\omega(1 \otimes 1 \otimes c \otimes 1))(d \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1) \\
&= (T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(y' \otimes a' \otimes b' \otimes z')(d \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1) \\
&= {y'}^{-1} a' d \otimes {y'}^{0} \otimes b' \otimes z' \\
&= (T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(y' \otimes a'd \otimes b' \otimes z') \\
&= (T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)((\omega(1 \otimes 1 \otimes c \otimes 1))(1 \otimes d \otimes 1 \otimes 1)) \\
&= (T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)((\omega(1 \otimes d \otimes 1 \otimes 1))(1 \otimes 1 \otimes c \otimes 1)) \\
&= (T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\omega(1 \otimes d \otimes 1 \otimes 1))(1 \otimes 1 \otimes c \otimes 1).
\end{aligned}
$$

para todo $c \in A$. Portanto:

$$(T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\omega)(d \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1) = (T \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\omega(1 \otimes d \otimes 1 \otimes 1)).$$

(v) $y \leftharpoonup \varphi(\_a) = 0$ para todo $\varphi(\_a) \in \widehat{A}$ então $y = 0$ (ação é não degenerada).

Inicialmente, observamos que:

$$
\begin{aligned}
\varphi(\_a)(c) &= \varphi(ca) \\
&\overset{ae=a}{=} \varphi(c(ae)) \\
&= \varphi((ca)e)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &\overset{1.2.9}{=} \varphi(e'(ca)) \\ &= \varphi(e'\_a)(c), \end{aligned}$$

para todo $c \in A$. Ou seja $\varphi(\_a) = \varphi(e'\_a)$ para todo $a \in A$. E, também vale que:

$$\begin{aligned} \varphi(b\_d)(c) &= \varphi((bc)d) \\ &\overset{1.2.9}{=} \varphi(d'(bc)) \\ &= \varphi((d'b)c) \\ &= \varphi(d'b\_)(c), \end{aligned}$$

para todo $c \in A$. Ou seja $\varphi(b\_d) = \varphi(d'b\_)$ para todos $b, d \in A$.

Assim, para todos $b, d \in A$, $\varphi(b\_d) \in \widehat{A}$, e considerando a escrita $\rho(y)(d \otimes 1) = \sum_i a_i \otimes y_i$, onde $\{y_i\}$ é um conjunto linearmente independente, temos

$$\begin{aligned} 0 &= y \leftharpoonup \varphi(b\_d) \\ &= (\varphi \otimes \imath_Y)((b \otimes 1)\rho(y)(d \otimes 1)) \\ &= (\varphi \otimes \imath_Y)(\sum_i ba_i \otimes y_i) \\ &= \sum_i \varphi(ba_i)y_i. \end{aligned}$$

Logo, $\varphi(a_i a) = 0$ para todo i, e $a \in A$. E, pela Proposição 1.2.5, obtemos que $a_i = 0$ para cada i.

Donde segue que, $\rho(y)(d \otimes 1) = \sum_i a_i \otimes y_i = 0$ para todo $d \in A$. Portanto, $\rho(y) = 0$ e da Definição 3.1.2 (i), temos que $y = 0$.

(vi) $(\Delta_Y(y)(\varphi(\_a) \otimes 1))(z \otimes 1) \in Y \otimes Y$, para todos $\varphi(\_a) \in \hat{A}$, $y, z \in Y$.

A demonstração segue analogamente ao apresentado no item *(ii)*.

(vii) Dados $y \in Y$, $\varphi(\_a), \varphi(\_b) \in \hat{A}$, temos

$$((y \leftharpoonup \varphi(a\_)) \leftharpoonup \varphi(b\_))z =$$

$$= \varphi(ay^{-1})\varphi(by^{0-1})y^{00}z$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(ay^{-1}) \otimes by^{0-1} \otimes y^{00}z)$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(ay^{-1} \otimes \overline{T}(b \otimes y^0)(1 \otimes z))$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_A \otimes \overline{T})(ay^{-1} \otimes b \otimes y^0)(1 \otimes 1 \otimes z))$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau)(ay^{-1} \otimes y^0 \otimes b)(1 \otimes 1 \otimes z))$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)([(\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau)(\overline{T}(a \otimes y) \otimes b)](1 \otimes 1 \otimes z))$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)([(\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau)(\overline{T} \otimes \imath_A)(a \otimes y \otimes b)](1 \otimes 1 \otimes z))$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)([(\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau)(\overline{T} \otimes \imath_A)(\imath_A \otimes \tau)(a \otimes b \otimes y)](1 \otimes 1 \otimes z))$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)([(\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau)(\overline{T} \otimes \imath_A)(\imath_A \otimes \tau)((c \otimes 1)\Delta_A(d) \otimes y)](1 \otimes 1 \otimes z))$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)([(\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau)(\overline{T} \otimes \imath_A)(\imath_A \otimes \tau)((c \otimes 1 \otimes 1)(\Delta_A \otimes \imath_Y)(d \otimes y))](1 \otimes 1 \otimes z))$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((c \otimes 1 \otimes 1)([(\imath_A \otimes \overline{T})(\imath_A \otimes \tau)(\overline{T} \otimes \imath_A)(\imath_A \otimes \tau)((\Delta_A \otimes \imath_Y)(d \otimes y))](1 \otimes 1 \otimes z)))$$

$$\overset{3.1.2(vi)}{=} (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((c \otimes 1 \otimes 1)([((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\overline{T} \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \tau_{A\otimes Y,Y})((\Delta_A \otimes \imath_Y)\overline{T} \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \Delta_Y)(d \otimes y)]$$
$$\circ(1 \otimes 1 \otimes z)))$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\overline{T} \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \tau_{A\otimes Y,Y})[(c \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)((\Delta_A \otimes \imath_Y)\overline{T} \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \Delta_Y)(d \otimes y)]$$
$$\circ(1 \otimes 1 \otimes z))$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\overline{T} \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \tau_{A\otimes Y,Y})[(c \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)((\Delta_A \otimes \imath_Y)\overline{T} \otimes \imath_Y)(d \otimes \Delta_Y(y))]$$
$$\circ(1 \otimes 1 \otimes z))$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\overline{T} \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \tau_{A\otimes Y,Y})[(c \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)((\Delta_A \otimes \imath_Y)\overline{T} \otimes \imath_Y)(d \otimes \Delta_Y(y))$$
$$\circ(1 \otimes 1 \otimes z \otimes 1)])$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\overline{T} \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \tau_{A\otimes Y,Y})[(c \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)((\Delta_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_Y)(\overline{T} \otimes \imath_Y)(d \otimes \Delta_Y(y)))$$
$$\circ(1 \otimes 1 \otimes z \otimes 1)])$$

$$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\overline{T} \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \tau_{A\otimes Y,Y})[(c \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)((\Delta_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_Y)(\overline{T} \otimes \imath_Y)(d \otimes \Delta_Y(y))$$

$\circ(1 \otimes z \otimes 1))])$

$\overset{3.1.2(v)}{=} (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\overline{T} \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \tau_{A\otimes Y,Y})[(c \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)((\Delta_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_Y)(e \otimes x \otimes w))])$

$\overset{(*)}{=} (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\overline{T} \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \tau_{A\otimes Y,Y})[(c \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)((\Delta_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_Y)(\overline{T} \otimes \imath_Y)(d \otimes \Delta_Y(y))$

$\circ(1 \otimes z \otimes f))])$

$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\overline{T} \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \tau_{A\otimes Y,Y})[(c \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)((\Delta_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_Y)$

$\circ((\overline{T} \otimes \imath_Y)(d \otimes \Delta_Y(y)(1 \otimes f))(1 \otimes z \otimes 1)))])$

$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\overline{T} \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \tau_{A\otimes Y,Y})[(c \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)((\Delta_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_Y)((\overline{T}(d \otimes y_1) \otimes y_2 f)$

$\circ(1 \otimes z \otimes 1)))])$

$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\overline{T} \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \tau_{A\otimes Y,Y})[(c \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)((\Delta_A \otimes \imath_Y \otimes \imath_Y)(d{y_1}^{-1} \otimes {y_1}^0 z \otimes y_2 f))])$

$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\overline{T} \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \tau_{A\otimes Y,Y})[(c \otimes 1)\Delta_A(d{y_1}^{-1}) \otimes {y_1}^0 z \otimes y_2 f])$

$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\overline{T} \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(\imath_A \otimes \tau_{A\otimes Y,Y})[c(d{y_1}^{-1})_1 \otimes (d{y_1}^{-1})_2 \otimes {y_1}^0 z \otimes y_2 f])$

$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)(((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)\overline{T} \otimes \imath_A \otimes \imath_Y)(c(d{y_1}^{-1})_1 \otimes y_2 f \otimes (d{y_1}^{-1})_2 \otimes {y_1}^0 z))$

$= (\varphi \otimes \varphi \otimes \imath_Y)((\imath_A \otimes \varepsilon_Y)(c(d{y_1}^{-1})_1 (y_2 f)^{-1} \otimes (y_2 f)^0) \otimes (d{y_1}^{-1})_2 \otimes {y_1}^0 z)$

$= \varphi(c(d{y_1}^{-1})_1 (y_2 f)^{-1})\varepsilon_Y((y_2 f)^0)\varphi((d{y_1}^{-1})_2){y_1}^0 z$

$= \varphi(c(y_2 f)^{-1})\varphi(d{y_1}^{-1})\varepsilon_Y((y_2 f)^0){y_1}^0 z$

$= \varphi(d{y_1}^{-1}){y_1}^0 z \varepsilon_Y(\varphi(c(y_2 f)^{-1}(y_2 f)^0))$

$= (y_1 \leftharpoondown \varphi(d\_))\varepsilon_Y(y_2 f \leftharpoondown \varphi(c\_))z$

$= (y_1 \leftharpoondown \varphi(a\_)_1\varphi(b\_))\varepsilon_Y(y_2 f \leftharpoondown \varphi(a\_)_2)z.$

Assim, para cada $\varphi(\_a), \varphi(\_b) \in \hat{A}$, $y, z \in Y$,

$$((y \leftharpoondown \varphi(a\_)) \leftharpoondown \varphi(b\_))z = (y_1 \leftharpoondown \varphi(a\_)_1\varphi(b\_))\varepsilon_Y(y_2 f \leftharpoondown \varphi(a\_)_2)z,$$

onde $f \in Y$ é unidade local para o segundo fator do tensor na expressão $\Delta_Y(y)(\varphi(a\_)_1\varphi(b\_) \otimes 1)(z \otimes 1) \in Y \otimes Y$, e também para o terceiro fator do tensor na expressão $(\overline{T} \otimes \imath_Y)(d \otimes \Delta_Y(y))(1 \otimes z \otimes 1) \in A \otimes Y \otimes Y$, justificando $(*)$.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] M. Alves and E. Batista, *Partial Hopf actions, partial invariants and a Morita context*, Algebra and Discrete Mathematics, v.3 (2009) 1-19 .

[2] M. Alves and E. Batista, *Enveloping Actions for Partial Hopf Actions*, Communications in Algebra 38 (2010), no. 8, 2872-2902.

[3] M. Alves and E. Batista, *Globalization theorems for partial Hopf (co)actions and some of their applications*, Groups, Algebra and applications, Contemp. Math., vol 537, Amer Math. Soc.,Providence, RI, (2011) 13-30.

[4] E. Batista and J. Vercruysse, *Dual Constructions for Partial Actions of Hopf Algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra 220 (2016), 518-559.

[5] S. Caenepeel, K. Janssen, *Partial (Co)Actions of Hopf Algebras and Partial Hopf-Galois Theory*, Communications in Algebra 36 (2008), no. 8, 2923-2946.

[6] F. Castro, A. Paques, G. Quadros and A. Sant'Ana, *Partial Actions of Weak Hopf algebras: Smash Products, globalization and Morita Theory*, Journal of Pure and Applied Algebra 219 (2015), 5511-5538.

[7] F. Castro and G. Quadros, *Globalizations for partial (co) actions on coalgebras*, arXiv:1510.01388 (2015).

[8] L. Delvaux, *Semi-Direct Products of Multiplier Hopf Algebras: Smash Coproducts*, Communications in Algebra 30 (2002), no.12, 5979-5997.

[9] L. Delvaux, A. Van Daele and S. H. Wang, *Bicrossproducts of multiplier Hopf algebras*, arXiv:0903.2974 (2009).

[10] M. Dokuchaev and R. Exel, *Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations*, Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005), no.5, 1931-1952.

[11] B. Drabant, A. Van Daele and Y. Zang, *Actions of multiplier Hopf algebra*, Commun. Algebra 27, (1999) 4117-4172.

[12] R. Exel, *Partial actions of groups and actions of semigroups*, Proc. AMS 126 (1998), 3481-3494.

[13] K. Janssen and J. Vercruysse, *Multiplier Bi- and Hopf algebras*, Journal of Algebra and Its Applications, 09 (2010), 275-303.

[14] H. Kurose, A. Van Daele and Y. H. Zhang, *Corepresentation theory of multiplier Hopf algebras II*, Int. J. Math., 11 (2000), 233-278.

[15] D. Azevedo, E. Fontes, G. Fonseca and G. Martini. *Partial (Co)action of Multiplier Hopf Algebras: Morita and Galois Theories*, arXiv:1709.08051v1 (2017).

[16] G. Martini, *(Co)ações Parciais da Álgebra de Hopf de Multiplicadores: Morita e Galois*, tese de doutorado (2016)

[17] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 82, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI (1993).

[18] M. Richard K., *Semi-Direct Products of Hopf Algebras*, Journal of Algebra 47 (1977), 29-51.

[19] A. Van Daele, *Multiplier Hopf algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 342 (1994), 917-932.

[20] A. Van Daele, *Multiplier Hopf algebras and duality*, Quantum Groups and Quantum Spaces, vol. 40, Warsaw, (1997), 51-58.

[21] A. Van Daele *An Algebraic framework for group duality*, Advances in Mathematics 140, (1998), 323-366.

[22] A. Van Daele, *Tools for working with multiplier Hopf algebras*, ASJE (The Arabian Journal for Science and Engineering) C - Theme-Issue 33 (2008), 505-528.

[23] A. Van Daele, *A note on the Sweedler notation for (weak) multiplier Hopf algebras*, Preprint University of Leuven (2016). In preparation.

[24] A. Van Daele and K. De Commer, *Morita equivalence of multiplier Hopf Algebras*, Preprint University of Leuven (2016). In preparation.

[25] A. Van Daele and S. Wang, *Weak multiplier Hopf algebras. Preliminares, motivation and basic examples.* Operator Algebras ans Quantum Groups. Banach Center Publications 98 (2012), 367-415.

[26] A. Van Daele and S. Wang, *Weak multiplier Hopf algebras I. The main theory.* Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal) 705 (2015), 155-209.

[27] A. Van Daele and Y. Zhang, *Multiplier Hopf algebras of discrete type*, J. Algebra 214 (1999), 400-417.

[28] A. Van Daele and Y. H. Zhang, *Corepresentation theory of multiplier Hopf algebras I*, Int. J. Math., 10 (1999), 503-539.

[29] A. Van Daele and Y. H. Zhang, *Galois theory for multiplier Hopf algebras with integrals*, Algebr. Represent. Theory, 2 (1), (1999) 83-106.

[30] A. Van Daele and Y. Zang, *A survey on multiplier Hopf algebras.* in: S. Caenepeel, F. Van Oystaeyen (Eds.), Proceedings of the Conference in Brussels on Hopf Algebras. Hopf Algebras and Quantum Groups, Marcel Dekker, New York (2000), 269-309.