

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE EM PROBLEMAS DE  
INTERAÇÃO SOLO – ESTACA INCLUINDO CAMPOS  
ESTOCÁSTICOS**

**Wilson Rodríguez Calderón**

Porto Alegre  
2020

WILSON RODRÍGUEZ CALDERÓN

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE EM PROBLEMAS DE  
INTERAÇÃO SOLO – ESTACA INCLUINDO CAMPOS  
ESTOCÁSTICOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Porto Alegre  
2020

**WILSON RODRÍGUEZ CALDERÓN**

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE EM PROBLEMAS DE  
INTERAÇÃO SOLO – ESTACA INCLUINDO CAMPOS  
ESTOCÁSTICOS**

Esta Tese de doutorado foi julgada adequada para o título de DOUTOR EM ENGENHARIA CIVIL, na área de ESTRUTURAS, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, Janeiro de 2020

Prof. Marcelo Rocha  
Dr. techn. pela Universitaet  
Innsbruck  
Orientador

Prof. Armando Miguel Awruch  
Dr. pela Coppe da Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Orientador

Prof. Nilo Cesar Consoli  
Coordenador do PPGEC/UFRGS  
PhD pela Concordia University, Canadá  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Liércio André Isoldi (FURG)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Herbert Martins Gomes (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Cesar Alberto Ruver (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dedico este trabalho a Deus por me  
dar vida e inspiração.  
Ao meu pai e à minha mãe pelo  
exemplo de vida e pela suas orações.  
Para minha esposa pelo exemplo de  
luta e compreensão em tempos bons  
e ruins.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus por me dar esta oportunidade especial na minha vida e por me permitir o acesso ao conhecimento.

Aos professores Armando Miguel Awruch, Marcelo Rocha, Herbert Martins Gomes e Jorge Luís Palomino Tamayo, pela orientação e conhecimento fornecido nas aulas e fora delas, pela paciência e pela amizade.

À Myriam Rocio, minha esposa pelo seu apoio e espírito de luta, mesmo quando eu estava distante.

Aos meus pais e irmãos, por toda a força e as orações.

Ao Julio, meu chefe na Colômbia, pelo apoio em momentos fundamentais de meus estudos de doutorado.

Agradeço aos meus colegas do CEMACOM pelo exemplo de disciplina e estudo. Agradeço especialmente aos meus amigos da Venezuela Rosangel e José Rafael pelo seu apoio, motivação e amizade, e meu amigo Felipe Quevedo pelas dicas técnicas e do português.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, através do programa de pós-graduação em engenharia civil e os professores, pela oportunidade dos estudos de doutorado e o conhecimento compartilhado.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico e OEA-GCUB pela bolsa que possibilitou meus estudos.

Agradeço ao pessoal técnico e administrativo do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul por sua ajuda nos tramites no tempo de doutorado.

E a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

## RESUMO

Na análise de estruturas e geotecnia existem várias hipóteses de modelagem, sendo algumas das mais restritivas: desacoplamento, homogeneidade de corpos e variáveis determinísticas, entre outras. Na tentativa de superar estas hipóteses, nesta tese foi desenvolvido um sistema para resolver o problema da confiabilidade da interação entre o solo e os campos estocásticos que incluiu a realização de três núcleos de cálculo. O primeiro, responsável pelo modelo de elementos finitos onde são avaliadas as funções de estado limite que definem a falha ou não falha do sistema, o segundo, responsável pelo modelo probabilístico que fornece os métodos de cálculo da probabilidade de falha e o índice de confiabilidade do sistema e, o terceiro, um gerador de campo aleatório que permite a variabilidade espacial das variáveis aleatórias do sistema. Os três núcleos de computação foram desenvolvidos separadamente e ligados ao trabalho em colaboração. Inicialmente, os dois primeiros núcleos foram desenvolvidos e interligados, e modelos de confiabilidade estrutural foram feitos para verificar o seu funcionamento. Posteriormente, o terceiro núcleo de cálculo foi desenvolvido para suportar os primeiros dois e três modelos foram testados para verificar o seu funcionamento. Finalmente, foi realizada uma análise probabilística da sensibilidade das variáveis no problema de interação solo-estaca e um estudo paramétrico da influência do comprimento das estacas no cálculo dos índices de confiabilidade. Os resultados obtidos levam a concluir que a inclusão da hipótese de heterogeneidade do solo utilizando campos aleatórios é o avanço mais importante na análise probabilística do comportamento do solo e que o índice de confiabilidade varia significativamente com o aumento do comprimento da estaca até um certo ponto, após o qual as mudanças no índice de confiabilidade não são mais significativas para a segurança da estaca. Os resultados encontrados nesta tese constituem uma contribuição para o estado atual do conhecimento, uma vez que estabelecem critérios que podem ser úteis na análise e projeto das estacas.

Palavras-chave: confiabilidade, campos estocásticos, interação solo- estaca

## ABSTRACT

In the analysis of structures and geotechnics there are various hypotheses for modeling, some of the most restrictive being: decoupling, homogeneity of bodies and deterministic variables, among others. In an attempt to overcome these hypotheses, in this thesis a system was developed to solve the reliability of the soil-pile interaction problem with stochastic fields that included the realization of three calculation cores. The first one, in charge of the finite element model where the limit state functions that define the failure or non-failure of the system are evaluated, the second one, in charge of the probabilistic model that provides the calculation methods of the failure probability and the system reliability index, and, the third one, a random field generator that allows the spatial variability of the random variables of the system. The three computation cores were developed separately and linked to work collaboratively. Initially, the first two cores were developed and linked, and structural reliability models were made to verify their operation. Subsequently, the third calculation core was developed to support the first two and three models were tested to verify its operation. Finally, a probabilistic analysis of the sensitivity of the variables in the soil-pile interaction problem and a parametric study of the influence of pile length on the calculation of reliability indices were carried out. The results obtained lead to the conclusion that the inclusion of the hypothesis of soil heterogeneity using random fields is the most important advance in the probabilistic analysis of soil behavior and that the reliability index varies significantly with increasing pile length up to a certain point after which changes in the reliability index are no longer significant for pile safety. The results found in this thesis constitute a contribution to the current state of knowledge as they establish criteria that can be useful in pile analysis and design.

Keywords: reliability, stochastic fields, soil-pile interaction

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>20</b>
1.1	JUSTIFICATIVA.....	21
1.2	OBJETIVOS .....	22
1.3	RESUMO DO ESTADO DA ARTE (REVISÃO BIBLIOGRÁFICA) .....	23
1.4	BREVE DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO DA TESE.....	29
<b>2</b>	<b>ANÁLISE DE CONFIABILIDADE EM PROBLEMAS ESTRUTURAIS E GEOTÉCNICOS .....</b>	<b>31</b>
2.1	CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS .....	31
2.1.1	Função densidade de probabilidade (FDP) e função cumulativa de probabilidades (FCP) 31	
2.1.2	Função densidade de probabilidade conjunta e função cumulativa de probabilidades conjunta .....	32
2.1.3	Parâmetros de uma variável aleatória .....	32
2.1.4	Parâmetros de duas variáveis aleatórias.....	33
2.1.5	Funções de distribuição probabilística.....	36
2.2	BASES CONCEITUAIS PARA A ANÁLISE DA CONFIABILIDADE EM PROBLEMAS ESTRUTURAIS E GEOTÉCNICOS.....	37
2.2.1	Definições de Estados Limites.....	37
2.2.2	Abordagem do problema básico de confiabilidade .....	38
2.2.3	Índice de confiabilidade e sua interpretação.....	39
2.3	MÉTODOS PARA CÁLCULO DA CONFIABILIDADE EM PROBLEMAS ESTRUTURAIS E GEOTÉCNICOS.....	44
2.3.1	Método FORM versão HRLF (“First Order Reliability Methods”) .....	44
2.3.1.1	Algoritmo do Método FORM - HRLF .....	46
2.3.2	Método de simulação de Monte Carlo no cálculo de probabilidade de falha (MC).....	49
2.3.2.1	Algoritmo de Monte Carlo com amostragem direto .....	54
2.3.3	Método de simulação de Monte Carlo com amostragem por importância (MCI).....	55

2.3.3.1	Algoritmo de Monte Carlo com amostragem por importância (MCI) .....	58
2.3.4	Método de simulação de Monte Carlo com amostragem por Hipercubo Latino (MCLH) 58	
2.3.4.1	Algoritmo de Monte Carlo com amostragem por Hipercubo Latino (MCLH) .....	61
<b>3</b>	<b>MÉTODOS PARA GERAR CAMPOS ALEATÓRIOS E MODELO CONSTITUTIVO DE SOLO MOHR-COULOMB .....</b>	<b>63</b>
3.1	DECOMPOSIÇÃO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA .....	64
3.2	MÉTODO DE MÉDIA MÓVEL .....	64
3.3	MÉTODO DISCRETO DA TRANSFORMADA DE FOURIER .....	65
3.4	MÉTODO DE BANDAS ROTATIVAS .....	65
3.5	MÉTODO DE TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER .....	67
3.6	MÉTODO DE SUBDIVISÃO MÉDIA LOCAL .....	67
3.6.1	Subdivisão Média Local Unidimensional .....	68
3.6.2	Subdivisão Média Local Multidimensional .....	69
3.7	MODELO MOHR-COULOMB .....	71
<b>4</b>	<b>ANÁLISE DE PROBLEMAS DE CONFIABILIDADE E SUA VERIFICAÇÃO USANDO O PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS ANSYS .....</b>	<b>74</b>
4.1	PROBLEMA DE CONFIABILIDADE NO MODELO DE CAPACIDADE DE CARGA DE UM SOLO COM CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA EM 2D (SOLUÇÃO ELASTOPLÁSTICA USANDO O CRITÉRIO DE MOHR-COULOMB) .....	74
4.1.1	Modelo implementado usando FORTRAN .....	77
4.1.2	Modelo implementado usando o programa ANSYS (Função de estado limite analítica) 81	
4.1.3	Modelo implementado usando o programa ANSYS (função de estado limite implícita baseada no modelo constitutivo de Mohr-Coulomb) .....	83
<b>5</b>	<b>ANÁLISE DE PROBLEMAS DE CONFIABILIDADE, SENSIBILIDADE PROBABILÍSTICA E ESTUDO PARAMÉTRICO INCLUINDO CAMPOS ESTOCÁSTICOS .....</b>	<b>85</b>
5.1	PROBLEMA DE CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE FALHA DEVIDO À CARGA SUPERFICIAL EM SAPATAS RÍGIDAS ELÁSTICAS EM ESTADO LIMITE DE SERVIÇO .....	86
5.1.1	Modelo implementado incluindo a variabilidade espacial do módulo de elasticidade do solo (códigos FORTRAN) .....	89

5.1.2	Modelo para estabelecer contrastes usando o programa ANSYS sem a inclusão de campos aleatórios .....	93
5.2	PROBLEMA DE CONFIABILIDADE NA INTERAÇÃO SOLO-ESTACA INCLUINDO CAMPOS ESTOCÁSTICOS (SOLUÇÃO ELASTOPLÁSTICA MOHR-COULOMB, CONDIÇÃO DE ADERÊNCIA PERFEITA).....	94
5.2.1	Modelo implementado incluindo a variabilidade espacial nas propriedades do solo $c$ , $\phi$ e $E_s$ .....	98
5.2.2	Análise das sensibilidades probabilísticas do Modelo implementado, incluindo a variabilidade espacial nas propriedades $c$ , $\phi$ e $E_s$ do solo. (aderência Perfeita) .....	105
5.3	PROBLEMA DE CONFIABILIDADE NA INTERAÇÃO SOLO-ESTACA, INCLUINDO CAMPOS ESTOCÁSTICOS (SOLUÇÃO ELASTOPLÁSTICA MOHR-COULOMB E CONDIÇÃO DE ADERÊNCIA POR ATRITO) .....	108
	Os campos aleatórios utilizados são os mesmos que os utilizados no exemplo anterior. ....	111
5.3.1	Modelo implementado incluindo a variabilidade espacial das propriedades do solo $c$ , $\phi$ e $E_s$ (aderência por atrito) .....	111
5.3.2	Análise das sensibilidades probabilísticas do modelo implementado, incluindo a variabilidade espacial das propriedades do solo $c$ , $\phi$ e $E_s$ (aderência por atrito) .....	113
5.4	ESTUDO PARAMÉTRICO DA INFLUÊNCIA DO COMPRIMENTO DA ESTACA NA CONFIABILIDADE, INCLUINDO CAMPOS ESTOCÁSTICOS (SOLUÇÃO ELASTOPLÁSTICA MOHR-COULOMB, CONDIÇÃO DE ADERÊNCIA POR ATRITO) .....	115
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....</b>	<b>118</b>
6.1	CONCLUSÕES .....	118
6.1.1	Fase de pesquisa em confiabilidade estrutural apoiada pela modelagem e adaptação e integração de ferramentas computacionais de elementos finitos.....	118
6.1.2	Fase de pesquisa em campos estocásticos e sua integração em análises de confiabilidade estrutural. ....	120
6.2	RECOMENDAÇÕES .....	124
<b>7</b>	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>125</b>
	APÊNDICES .....	141
A.1	PROBLEMA DE CONFIABILIDADE NUMA TRELIÇA PLANA .....	142
A1.1	Modelo implementado usando MATLAB-FORTRAN.....	143
A1.2	Modelo implementado usando o programa ANSYS .....	145

A.2 PROBLEMA DE CONFIABILIDADE EM CAMADAS ELÁSTICAS DE SOLO COM CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA EM DEFORMAÇÃO PLANA.....	148
A2.1 Modelo implementado usando FORTRAN .....	150
A2.2 Modelo implementado usando o programa ANSYS .....	154
A.3 PROBLEMA DE CONFIABILIDADE NA ESTRUTURA DO PAVIMENTO ELÁSTICO COM CARGA CIRCULAR UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA EM 3D.....	156
A3.1 Modelo implementado usando FORTRAN .....	158
A3.2 Modelo implementado usando o programa ANSYS .....	161

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Gráficos do coeficiente de correlação.....	35
Figura 2.2 – Intervalos de valores de correlação entre variáveis.....	36
Figura 2.3 – Definição de função de estado limite.....	39
Figura 2.4 – Definição do índice de confiabilidade no caso $Z=R - S$ , onde $R$ e $S$ são funções distribuídas normalmente. ....	41
Figura 2.5 – Estimativa da probabilidade de falha. ....	41
Figura 2.6 – Descrição do índice de confiabilidade definido por Hasofer e Lind (1974) para uma função de estado limite lineal. ....	43
Figura 2.7 – Descrição das incógnitas para a determinação do ponto de projeto no método FORM para duas variáveis aleatórias.....	45
Figura 2.8 – Descrição dos elementos básicos para o cálculo de probabilidade de falha pelo método de Monte Carlo. ....	50
Figura 2.9 – Número de simulações de Monte Carlo necessários como função da probabilidade de falha esperada e da variância na resposta. ....	53
Figura 2.10 – Descrição dos elementos básicos para o cálculo de probabilidade de falha pelo método de Monte Carlo com amostragem por importância. ....	57
Figura 2.11– Descrição dos elementos básicos para o cálculo de probabilidade de falha pelo método de Monte Carlo com amostragem por Hipercubo Latino. ....	60
Figura 2.12 – Amostra de tamanho 12 gerada com o método de amostragem de Hipercubo Latino para duas variáveis aleatórias $u_1$ e $u_2$ (distribuição uniforme). ....	61
Figura 3.1 – Função da amostra do campo bidimensional através de TBM usando 16 linhas.	66
Figura 3.2 – Função da amostra do campo bidimensional através de TBM usando 64 linhas.	66
Figura 3.3–Abordagem descendente na construção do LAS do processo aleatório médio local. ....	68
Figura 3.4 – Subdivisão média local em duas dimensões. ....	70
Figura 3.5–Uma função de amostra bidimensional gerada por LAS .....	70
Figura 3.6 – Superfície de fluência de Mohr-Coulomb no espaço principal de tensões .....	72
Figura 3.7 – Superfície de fluência de Mohr-Coulomb no plano octaédrico .....	73
Figura 3.8 – Superfície de fluência de Mohr-Coulomb no plano $p - J$ .....	73
Figura 4.1 – Modelo de estrutura de solo 2D para análise elastoplástico: geometria, restrições e cargas. ....	76

Figura 4.2 – Fluxograma para a solução do problema de confiabilidade em tensão-deformação de modelos elastoplásticos bidimensional.....	78
Figura 4.3 – Malha estruturada do problema elastoplástico em deformações planas. ....	79
Figura 4.4– Malha deformada do problema elastoplástico em deformações planas. ....	79
Figura 4.5 – Gráfico dos índices de confiabilidade e tempos computacionais para o problema elastoplástico em deformações planas desenvolvido em FORTRAN. ....	80
Figura 4.6– Gráfico dos índices de confiabilidade e tempos computacionais para o problema elastoplástico em deformações planas usando ANSYS. ....	82
Figura 5.1 – Solo com sapata rígida carregada: geometria, restrições e cargas. ....	87
Figura 5.2 – Realizações do Módulo elástico do solo $E$ para o problema da deformação plana. ....	90
Figura 5.3 – Distribuição gaussiana de $\ln-E$ do solo utilizando malha de 60x20 elementos e 5000 realizações. ....	91
Figura 5.4 – Malha de elementos finitos para o problema da deformação plana. ....	92
Figura 5.5 – Malha deformada incluindo campos aleatórios na propriedade do módulo de elasticidade do solo para o problema da deformação plana - Desl-y curvas de nível. ....	93
Figura 5.6 – Modelo 2D de interação solo-estaca: geometria, restrições e cargas.....	96
Figura 5.7– Realizações do intercepto coesivo do solo $c$ para o problema da deformação plana. ....	100
Figura 5.8– Realizações do ângulo de atrito $\phi$ do solo para o problema da deformação plana. ....	100
Figura 5.9 – Realizações do módulo de elasticidade do solo $E_s$ para o problema da deformação plana. ....	101
Figura 5.10 – Distribuição gaussiana de $\ln-c$ do solo utilizando malha de 40x32 elementos e 1500 realizações. ....	102
Figura 5.11 – Distribuição gaussiana do ângulo de atrito $\phi$ do solo utilizando malha de 40x32 elementos e 1500 realizações. ....	102
Figura 5.12 – Distribuição gaussiana de $\ln-E_s$ do solo usando malha de 40x32 elementos e 1500 realizações. ....	103
Figura 5.13 – Gráfico de convergência da probabilidade de falha usando malha de 40x32 elementos e 1500 realizações. ....	105
Figura 5.14 – Gráfico de barras de sensibilidade probabilística de postos de Spearman e variáveis não significativas.....	108

Figura 5.15 – Gráfico hierárquico de significância das variáveis em porcentagem.....	108
Figura 5.16 – Modelo 2D de interação solo-estaca com aderência por atrito: geometria, restrições e cargas. ....	109
Figura 5.17 – Gráfico de convergência da probabilidade de falha usando elementos de malha 40x32 e 1500 realizações. ....	113
Figura 5.18 – Gráfico de barras de sensibilidade probabilística de postos de Spearman e variáveis não significativas.....	115
Figura 5.19 – Gráfico hierárquico de significância das variáveis em porcentagem.....	115
Figura 5.20 – Gráfico do comprimento da estaca vs. quociente dos índices de confiabilidade avaliados no novo comprimento em relação ao comprimento anterior em porcentagem. ....	117

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Variáveis aleatórias e seus parâmetros estatísticos característicos.....	76
Tabela 4.2 – Resultados obtidos e seu tempo computacional associado para a solução obtida com a implementação FORTRAN. ....	80
Tabela 4.3– Resultados obtidos e seu tempo computacional associado para a solução usando o módulo PDS do ANSYS. ....	82
Tabela 4.4 – Resultados obtidos e seu tempo computacional associado para a solução usando o módulo PDS do ANSYS. (Função de estado limite implícita baseada no modelo constitutivo de Mohr-Coulomb).....	84
Tabela 5.1 – Variáveis e seus parâmetros estatísticos característicos. ....	89
Tabela 5.2 – Resultados de probabilidade de falha e índice de confiabilidade obtidos. ....	93
Tabela 5.3 – Variáveis e seus parâmetros estatísticos característicos. ....	97
Tabela 5.4 – Resultados de probabilidade de falha e índice de confiabilidade obtidos .....	104
Tabela 5.5 – Resultados da sensibilidade da função de estado limite $GG$ para variáveis de entrada aleatórias .....	107
Tabela 5.6 – Valores do ângulo de atrito entre as superfícies de contato.....	110
Tabela 5.7 – Variáveis e seus parâmetros estatísticos característicos. ....	111
Tabela 5.8 – Resultados de probabilidade de falha e índice de confiabilidade obtidos .....	112
Tabela 5.9 - Resultados da sensibilidade da função de estado limite $GG$ para variáveis de entrada aleatórias. ....	114
Tabela 5.10 – Variáveis e seus parâmetros estatísticos característicos. ....	116

## LISTA DE SIGLAS

ANSYS:	Analysis Systems Incorporated
APDL:	Ansys Parametric Design Language
CEB:	Comite Europeen Du Beton
CIRIA:	Construction Industry Research and Information Association
CSA:	Canadian Standards Association
CV:	Coeficiente de Variação
DFT:	Método Discreto de Transformada de Fourier
ELS:	Estados Limites de Serviço
ELU:	Estados Limites Últimos
FCP:	Função Cumulativa de Probabilidades
FDP:	Função Densidade de Probabilidade
FEL:	Função de Estado Limite
FFT:	Fast Fourier Transform
FORM:	First Order Reliability Methods
FORTRAN:	Formula Translating System
HDMR:	High-Dimensional Model Representation
HLRF:	Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler
LAS:	Local Average Subdivision Method
LH:	Latin Hypercube Method
LHS:	Latin Hypercube Sampling
MA:	Moving Average Method
MATLAB:	Matrix Laboratory
MC:	Monte Carlo Method
MCI:	Monte Carlo Importance
MCIS:	Monte Carlo Importance Sampling
MCLH:	Monte Carlo Latin Hypercube
MEF:	Método dos Elementos Finitos
MIL:	Model's Indicators Library
MPP	Most Probable Point
NKB:	Nordisk Komité Byggeforskrifter
OHBDC:	Ontario Highway Bridge Design Code
PDS:	Probabilistic Design System
PPGEC:	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
RFEM:	Random Finite Element Method
SFEM:	Stochastic Finite Element Method
SICC:	Sistema Integral de Cálculo de Confiabilidade
SORM:	Second Order Reliability Method
SOTRURA-DSA:	Soil Structure Interaction-Dynamic and Static Analysis
TBM:	Turning Band Method

# LISTA DE SÍMBOLOS

## CAPÍTULO 2

$U$ :	variável aleatória	$\Phi$ :	função cumulativa da distribuição normal padrão
$V$ :	variável aleatória	$\beta$ :	índice de confiabilidade
$f_U$ :	função de densidade de probabilidade de $U$	$u_R, u_S$ :	variáveis reduzidas, forma gaussiana padrão da $R$ e $S$
$F_U$ :	função cumulativa de probabilidade de $U$	$\mathbf{u}$ :	espaço transformado, normalizado ou reduzido
$f_{U,V}$ :	função de densidade de probabilidade conjunta das variáveis $U$ e $V$	$g(\mathbf{u})$ :	função de falha
$F_{U,V}$ :	função cumulativa de probabilidade conjunta das variáveis $U$ e $V$	$d$ :	distância mínima da origem para a função $g(u_R, u_S)$
$g(\mathbf{u})$ :	função da variável aleatória $U$	$\mathbf{u}^*$ :	ponto de projeto no espaço reduzido
$E$ :	expectância	$\nabla g(\mathbf{u})$ :	gradiente da função de falha
$\mu_u$ :	média da variável aleatória $U$	$\mathbf{M}$ :	vetor de medias das variáveis aleatórias expressado no espaço real
$E\langle U^2 \rangle$ :	valor quadrático médio da variável aleatória $U$	$\Sigma$ :	vetor de desvios padrões das variáveis aleatórias expressado no espaço real
$Var(U)$ :	variância da variável aleatória $U$	$\mathbf{R}_U$ :	matriz de coeficientes de correlação entre as variáveis aleatórias
$\sigma_U$ :	desvio padrão da variável aleatória $U$	$\varphi$ :	função de densidade de probabilidade normal padrão
$CV$ :	coeficiente de variação	$\Phi^{-1}$ :	função inversa cumulativa de probabilidade normal padrão
$i, j, k$ :	índices	$\mathbf{M}^{eq}$ :	vetor de medias padrões normais equivalentes das variáveis aleatórias
$f_{u_j, u_k}$ :	função de densidade de probabilidade conjunta das variáveis $U_j$ e $U_k$	$\Sigma^{eq}$ :	vetor de desvios padrões normais equivalentes das variáveis aleatórias
$Cov(U_j U_k)$ :	covariância entre das variáveis $U_j$ e $U_k$	$D_S$ :	região segura
$\rho$ :	coeficiente de correlação	$D_f$ :	região de falha
$\mathbf{U}$ :	vetor de várias variáveis aleatórias	$I$ :	função indicadora
$g(\mathbf{U})$ :	função de estado limite	$\hat{P}_f$ :	estimador de $P_f$
$\mathbf{Z}$ :	função de variáveis aleatórias	$N$ :	número de simulações
$R$ :	variável aleatória que caracteriza a resistência	$N_f$ :	número de falhas
$S$ :	variável aleatória que caracteriza as ações	${}^j\mathbf{U}$ :	variáveis aleatórias na simulação $j$ no espaço real
$P_f$ :	probabilidade de falha	${}^j\mathbf{W}$ :	variáveis aleatórias na simulação $j$ com distribuição uniforme
$f_{R,S}$ :	função de densidade de probabilidade conjunta das variáveis $R$ e $S$	${}^j\mathbf{Z}$ :	variáveis aleatórias reduzidas na simulação $j$
$f_C$ :	confiabilidade	$f_{\mathbf{W}}(\mathbf{U})$ :	função de densidade de probabilidade conjunta da amostragem
$\mu_Z, \mu_R, \mu_S$ :	médias das variáveis aleatórias	$p$ :	hipercubo
$\varepsilon$ :	Tolerância	$V(p)$ :	volume do hipercubo
$\sigma_Z, \sigma_R, \sigma_S$ :	desvios padrões das variáveis aleatórias	$m$ :	número de pontos de amostragem

## CAPÍTULO 3

$Z$ :	variável aleatória normalmente distribuída	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ :	tensões principais
$i, j, l$ :	índices	$x, y, z$ :	eixos globais
$\tau$ :	tensão tangencial	$F$ :	função de fluência de Mohr-Coulomb
$\sigma$ :	tensão normal	$J, p, \theta$ :	invariantes
$c$ :	intercepto coesivo	$d_{\varepsilon p}$ :	deformação plástica
$\phi$ :	ângulo de atrito	$a$ :	parâmetro
$\psi$ :	ângulo de dilatancia	$\delta\lambda$ :	parâmetro da deformação plástica

## CAPÍTULO 4

$GG$ :	função de estado limite	$FS$ :	fator de segurança
$X$ :	vetor aleatório da variável $X$	$E$ :	módulo de elasticidade
$D$ :	profundidade de escavação	$\nu$ :	coeficiente de Poisson
$\gamma$ :	peso específico	$B$ :	largura da escavação
$c$ :	intercepto coesivo	$CV$ :	coeficiente de variação
$\phi$ :	ângulo de atrito	$P_f$ :	probabilidade de falha
$Q^{análise}$ :	capacidade de carga calculada na análise	$\beta$ :	índice de confiabilidade
$Q_{ult}$ :	capacidade de carga última	$N_c, N_q, N_\gamma$ :	fatores de capacidade de carga
$Q_{adm}$ :	capacidade de carga admissível	$k_0$ :	coeficiente de empuxo em repouso

## CAPÍTULO 5

$GG$ :	função de estado limite	$\phi$ :	ângulo de atrito
$X$ :	vetor aleatório da variável $X$	$Q^{análise}$ :	capacidade de carga calculada na análise
$D$ :	diâmetro da estaca	$Q_{adm}$ :	capacidade de carga admissível
$u$ :	deslocamentos envolvidos na função estado limite	$Q_{ult}$ :	capacidade de carga última
$\delta_{lim}$ :	recalque limite	$Es$ :	módulo de elasticidade do solo
$\delta_A$ :	recalque de controle	$Ep$ :	módulo de elasticidade da estaca
$E$ :	módulo de elasticidade	$\gamma_s$ :	peso específico do solo
$\ln(E)$ :	campo Gaussiano aleatório do $E$	$\psi$ :	ângulo de dilatancia
$\mu_{\ln(E)}$ :	média do campo do $E$	$G_\phi(x)$ :	campo aleatório gaussiano
$\sigma_{\ln(E)}$ :	desvio padrão do campo do $E$	$\phi_{min}, \phi_{max}$ :	limites inferior e superior do ângulo de atrito
$\tau$ :	vector de distância	$m, s$ :	parâmetros da distribuição
$\rho_{\ln(E)}$ :	coeficiente de correlação do campo do $E$	$R_i$ :	posto de $X_i$ dentro do vector $X$
$\theta_{\ln E}$ :	escala de flutuação do campo do $E$	$S_i$ :	posto de $Y_i$ dentro do vector $Y$
$x$ e $x'$ :	pontos espaciais	$\bar{R}, \bar{S}$ :	postos médios de $R_i$ e $S_i$
$i$ :	índice	$K_n$ :	rigidez normal da interface de contato
$G_i$ :	média local do elemento $i$	$K_s$ :	rigidez de corte da superfície de contacto

$\nu_s$ : coeficiente de Poisson do solo  
 $B$ : largura da escavação  
 $P$ : carga  
 $P_f$ : probabilidade de falha  
 $\beta$ : índice de confiabilidade  
 $c$ : intercepto coesivo

$\nu_p$ : coeficiente de Poisson da estaca  
 $\mu$ : coeficiente de atrito da interface de contacto  
 $G_s$ : módulo de elasticidade ao corte  
 $P_{f_n}/P_{f_a}$ : quociente de probabilidades de falha  
 $\beta_n/\beta_a$ : quociente de índices de confiabilidade  
 $L$ : comprimento da estaca

## 1 INTRODUÇÃO

A confiabilidade estrutural fornece uma estrutura conceitual onde as incertezas podem ser tratadas tanto nos problemas de análise estrutural como de projeto. Assim, as incertezas nos parâmetros estruturais e nas cargas são estimadas, calculadas ou quantificadas usando os conceitos de probabilidade, variáveis aleatórias e processos aleatórios. O problema básico consiste em estabelecer uma relação entre a probabilidade de falha ( $P_f$ ) da estrutura e os parâmetros aleatórios estruturais e de carga. Isso, por sua vez, facilita um marco conceitual para decidir sobre as configurações estruturais ideais para um determinado conjunto de condições de carga, consistentes com os níveis desejados de segurança e custo acessível próprios do projeto. Então, podem-se olhar as normas atuais de projeto estrutural e notar que se aplicam conceitos de fatores de estado limite e fatores de carga e resistência que são calibrados, de fato, com base na modelagem probabilística de incertezas.

Na prática, a modelagem de um sistema estrutural precisa da definição das variáveis básicas que descrevam a geometria do sistema, cargas e propriedades do material; as variáveis de resposta do modelo como os deslocamentos, as tensões e as deformações; e as relações entre elas. Os pesquisadores, por muito tempo, concentraram sua atenção na melhoria dos modelos estruturais (barras, vigas, lâminas, sólidos, entre outros) e as leis constitutivas (elasticidade, plasticidade, teorias de dano, entre outras). Com o desenvolvimento da ciência da computação, uma grande quantidade de trabalho tem sido dedicada a avaliar numericamente soluções aproximadas dos problemas de valor limite que descrevem o sistema estrutural. O método dos elementos finitos é provavelmente, na atualidade, a abordagem mais avançada e estudada para a solução de problemas estruturais.

No entanto, a crescente precisão dos modelos constitutivos e o constante aprimoramento das ferramentas computacionais ainda não resolve o problema de identificação dos parâmetros do modelo e as incertezas associadas à sua estimativa. Além disso, na maioria das aplicações de engenharia estrutural, a aleatoriedade intrínseca de materiais (solo, rocha, concreto, entre outros) ou cargas (vento, movimento sísmico e outras cargas naturais e humanas) é tal que modelos determinísticos usam características médias que na melhor das hipóteses, chegam a representações aproximadas da realidade.

A contabilização da variabilidade espacial das propriedades mecânicas dos materiais é uma das tarefas da mecânica estocástica ou probabilística, que se desenvolveu rapidamente num tempo aproximado de trinta anos. As áreas de aplicação são muitas e envolvem projeto, análise e otimização de estruturas com alto risco, tais como barragens, usinas nucleares, e estruturas *offshore*. A faixa de comportamento estrutural é complexa e inclui análise de tensão, controle de deformação, fluência e relaxação, dinâmica, fratura, fadiga e estabilidade estrutural, entre outros.

Nesta tese, pretende-se fazer o desenvolvimento do problema de confiabilidade estrutural incluindo a variabilidade espacial presente no domínio de estudo, que neste caso vai contemplar estruturas e/ou solo. A literatura sobre os temas fundamentais de estudo encontra-se fragmentada entre livros, teses e artigos que contemplam temas separados como confiabilidade estrutural, elementos finitos, campos estocásticos e uma mistura deles. No entanto, encontra-se uma abordagem chamada *Random Finite Element – RFEM* (Fenton e Griffiths, 2008). Em geral, o método *RFEM* faz uma mistura do método de elementos finitos (MEF), um método para cálculo de confiabilidade que tipicamente pode ser o método de Monte Carlo (MC) e um gerador de campos estocásticos que no caso dos pesquisadores Fenton e Griffiths usam o Método de subdivisão de media local (LAS) .

No trabalho do autor, estudam-se as três partes do método *RFEM* por separado, para depois juntar tudo até chegar ao método *RFEM*. No caso preliminar, gera-se a ferramenta de elementos finitos e a ferramenta de confiabilidade, para depois juntar e adaptar as duas ferramentas como um desenvolvimento de trabalho colaborativo. Ao final, chega-se à análise completa do método *RFEM*.

## 1.1 JUSTIFICATIVA

Na modelagem de problemas em engenharia estrutural e engenharia geotécnica é comum introduzir hipóteses para simplificar a abordagem matemática e numérica de fenômenos complexos. Isto com o objetivo de alcançar soluções que aproximem razoavelmente o comportamento real ou que através da idealização se atinja uma aproximação de um fenômeno para compreendê-lo e assim tomar decisões nas fases de análise, projeto e construção.

Algumas das hipóteses mais comuns são: a continuidade dos meios, a homogeneidade dos materiais, o caráter determinístico dos modelos, o estudo dos fenômenos em um espaço ou

domínio limitado, a inclusão de leis constitutivas com limitações de deformação ou tensão, a análise desacoplada em fenômenos multifísicos e de interação, a inclusão de condições idealizadas de união ou contorno e descuidar as condições iniciais de um material, entre outras. Esta tese justifica seu desenvolvimento na implementação e adaptação de paradigmas que tentam oferecer alternativas para avançar na direção de técnicas com pesquisa recente, que oferecem saída para boa parte das hipóteses anteriormente mencionadas, tendo como foco a abordagem da modelagem probabilística de alguns problemas estruturais e da geotecnia e a incursão na modelagem de campos estocásticos em problemas representativos da geotecnia e de interação solo-estaca.

Devido às complexidades oferecidas pelo modelo de interação solo-estaca, este é estabelecido como o candidato ideal para testar a modelagem probabilística e de campo aleatório, onde se admite a inclusão da variabilidade espacial naturalmente presente nos solos. Uma vez atingidas as características descritas para o modelo de interação solo-estaca, é possível avançar de forma especial para propostas de análise de sensibilidade probabilística de variáveis aleatórias que incluam a variabilidade espacial e o estudo paramétrico de alguma variável do modelo de interação solo-estaca onde seja requerido.

## 1.2 OBJETIVOS

O objetivo principal do trabalho é desenvolver uma análise de confiabilidade no problema de interação solo-estaca incluindo campos estocásticos.

Para atingir este objetivo, propõem-se os seguintes objetivos secundários:

- a) Desenvolver e adaptar ferramentas computacionais em módulos ou aplicativos para cálculo de confiabilidade, modelagem por elementos finitos dos problemas de estudo e um gerador de campos estocásticos.
- b) Desenvolver casos de estudo de confiabilidade (problemas de estruturas e/ou geotecnia, uma vez que é um problema de interação) integrada com funções de estado limite calculadas por modelos de elementos finitos.
- c) Desenvolver casos de estudo de confiabilidade (problemas de estruturas e/ou geotecnia) integrada com funções de estado limite calculadas por modelos de elementos finitos e geração de parâmetros de material por campos estocásticos.
- d) Verificar o desempenho dos casos estudados pela comparação com resultados da

literatura ou com modelos desenvolvidos em ANSYS quando isto seja possível.

### **1.3 RESUMO DO ESTADO DA ARTE (REVISÃO BIBLIOGRÁFICA)**

A primeira fase de desenvolvimento da teoria da confiabilidade estrutural, data de 1920 a 1960, aparece em retrospecto como um começo muito lento. Durante este período os pioneiros, espalhados por muitos países, trabalharam independentemente em vários elementos da teoria da confiabilidade aplicada a problemas de resistência estrutural. Eles questionaram o pensamento estabelecido e desenvolveram os conceitos básicos de eventos estruturais aleatórios, partindo radicalmente das noções clássicas de engenharia estrutural. Até cerca de 1960, esse trabalho pioneiro foi largamente ignorado.

Mayer (1926) na Alemanha e mais tarde o suíço Basler (1960) propuseram medidas de segurança semelhantes às do índice de segurança de Cornell (1967a, b), mas seu trabalho foi ignorado e não teve influência na prática projetual. A seguir está uma lista de referências de trabalhos iniciais que foram influentes. Forssell (1924) declarou o princípio da otimização: que o projeto deve minimizar o custo total esperado de uma estrutura, sendo a soma de certos custos iniciais e o custo esperado da falha. Mayer (1926) sugeriu um projeto baseado na média e na variância das variáveis aleatórias. Plum (1950), considerando as lajes de concreto armado em edifícios, estabeleceu a aparente contradição entre os níveis de segurança economicamente ótimo e as taxas muito mais baixas de falhas observadas na prática real. Johnson (1953) deu a primeira teoria da confiabilidade estrutural e do projeto econômico, incluindo teorias estatísticas de resistência desenvolvidas por Weibull (1939). Foi Freudenthal (1947) quem apresentou os problemas fundamentais de segurança estrutural de um membro sob carga variável aleatória; sua apresentação foi a primeira a evocar uma medida de aceitação entre os engenheiros estruturais. Freudenthal (1947) trouxe os métodos de probabilidade e estatística para caracterizar a natureza do fator de segurança.

Durante o período de 1967 a 1974, houve um rápido crescimento do interesse acadêmico na teoria da confiabilidade estrutural e uma crescente aceitação por engenheiros do projeto estrutural baseado em probabilidades. A teoria clássica da confiabilidade estrutural tornou-se bem desenvolvida e amplamente conhecida através de algumas publicações importantes, como Freudenthal (1947), Johnson (1953), Pugsley (1966) e Ferry e Borges e Castanheta (1971).

Turkstra (1970) apresentou o projeto estrutural como um problema de tomada de decisão sob

incerteza e risco. A importância é que, em uma ampla variedade de circunstâncias, a tomada de decisão racional é possível, embora falte informação; ver, por exemplo, Luce e Raiffa (1957). Lind et al. (1964) definiram o problema do projeto racional de um código como encontrar um conjunto de melhores valores dos fatores de carga e resistência. Eles sugeriram um procedimento iterativo, considerando o código como um dispositivo de “caixa preta” para tamanhos de membros, dadas as proporções estruturais e, portanto, controlando a segurança estrutural e os custos.

Cornell (1967-b) sugeriu o uso de um formato de segundo ordem. Naquela época, era amplamente entendido que um modelo Gaussiano das variáveis aleatórias seria impreciso para sistemas altamente confiáveis, como estruturas. O formato, portanto, parecia bastante radical e poderia ter sido ignorado, como o formato muito semelhante de Su (1959). No entanto, Lind (1973) mostrou que o requisito de índice de segurança de Cornell poderia ser usado para derivar um conjunto de fatores de segurança em cargas e resistências. Esta abordagem relaciona a análise de confiabilidade a métodos de projeto praticamente aceitos (Ravindra et al., 1974). Foi modificado e empregado em muitos padrões estruturais (“Canadian Standards Association” - CSA, 1974; “Nordisk Komité Byggeforskrifter” - NKB, 1977; “Ontario Highway Bridge Design Code” - OHBDC, 1983; etc.). Muitos desenvolvimentos práticos se seguiram pouco depois, por exemplo, outros índices de segurança (Rosenblueth e Esteva, 1972), e código de otimização (Ravindra e Lind, 1973, 1983). Nos anos seguintes, algumas dificuldades sérias com o formato do segundo ordem foram descobertas no desenvolvimento de exemplos práticos. Primeiro, não era óbvio como definir um índice de confiabilidade em casos de múltiplas variáveis aleatórias, por exemplo, quando mais de duas cargas estavam envolvidas. Mais perturbadoramente, Ditlevsen (1973) e Lind (1973) descobriram independentemente problemas de invariância. O índice de Cornell não foi constante quando certos problemas simples foram reformulados de maneira mecanicamente equivalente; no entanto, nenhum outro índice de segurança permaneceria constante sob outras transformações mecanicamente admissíveis. Vários anos foram gastos na busca de uma saída para este dilema sem resolução.

No início dos anos 1970, portanto, o projeto estrutural baseado na análise de segundo ordem da confiabilidade estava se tornando amplamente aceito, embora, ao mesmo tempo, parecesse impossível desenvolver uma base lógica e firme para a justificativa. O ano 1974 viu a publicação da primeira norma técnica em formato de estados limites baseado em uma lógica probabilística (CSA, 1974).

O impasse lógico do problema da invariância foi superado no início dos anos 1970 (Hasofer e Lind, 1974), e as limitações dos métodos de índice de segurança foram esclarecidas (Veneziano, 1974). Vários códigos foram desenvolvidos e implementados em sucessão curta, e os procedimentos foram documentados em relatórios guia (“Comite Europeen du Beton” - CEB, 1976; “Construction Industry Research and Information Association” - CIRIA, 1977; “Canadian Standards Association” - CSA, 1981), reduzindo muitos aspectos do projeto baseado em probabilidade a uma rotina. Era de se esperar, então, que a ênfase mudasse para extensões e desenvolvimento de detalhes específicos. Isso realmente aconteceu. Por exemplo, modelos de processos aleatórios de resistência e carga atraíram atenção considerável nas últimas décadas.

Nos anos 70, havia poucos estudos sistemáticos de falhas estruturais. Alguns, por exemplo, Smith (1976), pareciam compatíveis com a teoria da confiabilidade. Mas Matousek (1977) concluiu que a falha estrutural quase sempre foi causada pelo erro humano e, portanto, conectada com resistências muito diferentes da média (de estruturas semelhantes sem erro humano). Essas falhas não estariam intimamente correlacionadas com as cargas e, portanto, deveriam ocorrer com mais frequência nas cargas em torno dos valores médios do projeto. Por outro lado, algumas falhas são claramente causadas em estruturas sob cargas extremamente altas. Para cargas suficientemente altas, as estruturas afetadas falhariam quase independentemente da resistência, de modo que as estruturas de resistência média seriam mais comuns entre as falhas. Brown (1979) mostrou que as taxas de falha previstas pela teoria são muito pequenas - por um fator de 10 ou mais. Ele apontou, por exemplo, que a taxa de falha para grandes pontes suspensas foi de aproximadamente 1 em 40 para o século correspondente.

A teoria desenvolvida até os anos 80 é vista como parte de uma teoria mais extensa do controle estrutural de qualidade, considerando também os efeitos do erro humano. O estudo do erro humano na produção estrutural é notavelmente diferente das disciplinas estabelecidas de engenharia mecânica e confiabilidade estrutural, em grande parte porque pode exigir conhecimento de métodos da ciência social. Uma dificuldade característica é a necessidade de primeiro desenvolver um conjunto de conceitos viáveis. Tais esforços foram abordados com o patrocínio de vários institutos de pesquisa em todo o mundo (Melchers e Harrington, 1983; Lind, 1983).

Por outro lado, alguns dos livros relevantes para a confiabilidade estrutural são os de Pugsley (1962), Bolotin (1969), Tichy e Vorlicek (1972), Benjamin e Cornell (1970), Ang e Tang (1975,

1984), Leporati (1979), Ditlevsen. (1981), Elishakoff (1983), Augusti, Baratta e Casciati (1984), Yao (1985), Thoft, Christensen e Murotsu (1986), Madsen, Krenk e Lind (1986) e Melchers (1987). Livros que lidam com sistemas dinâmicos incluem os de Lin (1967), Nigam (1983) e Bolotin (1984). Outros trabalhos incluem os de Wen (1990), Soong e Grigoriu (1993), Dai e Way (1992), Nigam e Narayanan (1994), Lin e Cai (1995), Sundararajan (1995), Ben Haim (1996), Ditlevsen e Madsen (1996), Haldar, Guran e Ayub (1997), Maymon (1998), Melchers (1999), Ranganathan (1999) e Haldar e Mahadevan (2000a, b), entre outros.

Também para o caso desta tese é importante destacar que existem registros notáveis de estudos de confiabilidade em problemas estruturais e geotécnicos desde a década de 1970, sendo autores relevantes Wu e Kraft (1970), Alonso (1976), Vanmarcke (1977). Depois, há autores como Xue e K. Gavin (2007), Griffiths e Fenton (2008), Ching et al. (2009), Sanchez (2010), Zhang et al. (2011), El-Reedy (2013), Phoon e Ching (2015), Sanchez e Klutke (2016), Rubinstein e Kroese (2017), Melchers e Beck (2018). Diversos artigos especializados de revistas e monografias de pesquisa também foram publicados. Assim, Shinozuka (1983) apresenta uma discussão sobre definições e cálculos de índices de confiabilidade. Métodos para calcular a probabilidade de falha são revisados criticamente por Schueller e Stix (1987). Bjerager (1990) apresenta uma revisão do estado da arte dos métodos de confiabilidade estrutural, classificando os problemas em problemas de variáveis aleatórias, modelos de confiabilidade de processos aleatórios e modelos de confiabilidade de campo aleatórios (modelos objetivo da presente tese). Schueller e Ang (1992) resumem os resultados apresentados durante as conferências de Mecânica Estrutural em Tecnologia de Reatores (SMiRT) realizadas em 1992 sobre tópicos relacionados à análise de risco de contenção nuclear, tubulações primárias e outras estruturas similares. Schueller (1997a) descreve os desenvolvimentos em aspectos computacionais da análise de confiabilidade estrutural e trata dos desenvolvimentos em modelagem probabilística de fadiga e fratura, análise de estabilidade estocástica e controle estrutural. Os desenvolvimentos na área do método dos elementos finitos estocásticos (SFEM) foram discutidos por Nakagiri (1987), Benaroya e Rehak (1988), Shinozuka e Yamazaki (1988), Brenner (1991), Ghanem e Spanos (1991a), Shinozuka e Deodatis (1991), Der Kiureghian et al. (1991), Kleiber e Hien (1992), Liu et al. (1992) e Matthies et al. (1997). Uma revisão dos métodos de avaliação da confiabilidade estrutural no contexto da avaliação de segurança sísmica foi apresentada por Der Kiureghian (1996). A edição especial da “Probabilistic Engineering Mechanics”, editada por Schueller (1997b), documenta o estado da arte em aspectos computacionais da mecânica estrutural estocástica. Os trabalhos de Ibrahim (1987) e Manohar e Ibrahim (1999) fornecem visões gerais

abrangentes sobre problemas de dinâmica estrutural com incertezas de parâmetros. A monografia de Scheidt e Purkert (1983) e o artigo de Benaroya (1992) relatam aspectos matemáticos de problemas aleatórios de autovalores. Os trabalhos coletados editados por Cheng e Yang (1993) cobrem aspectos teóricos e computacionais da mecânica estrutural estocástica. A monografia de pesquisa de Grigoriu (1995) considera a especificação e a simulação de processos aleatórios não gaussianos, juntamente com discussões sobre diversas aplicações. Casciati et al. (1997) fornecem uma visão geral de problemas e algoritmos dinâmicos padrão dentro de esquemas clássicos de confiabilidade estrutural. Problemas de confiabilidade no tempo com ênfase em técnicas para combinação de carga foram revisados por Rackwitz (1998). Um resumo de aplicações industriais de confiabilidade estrutural foi dado por Thoft e Christensen (1998). Rackwitz (2000) apresentou uma discussão sobre exemplos que revelam possíveis fragilidades dos métodos de análise de confiabilidade. Métodos de simulação digital de campos aleatórios foram revisados por (1991, 1996) e Spanos e Zeldin (1998). Em uma série de artigos, Elishakoff (1995a, b, 1998, 2000) examinou questões básicas relacionadas à modelagem probabilística de incertezas estruturais e explorou caminhos alternativos para modelar incertezas. Melchers (2001) delineou os desenvolvimentos na análise de confiabilidade das estruturas existentes e discutiu as necessidades de mais pesquisas. Em outros trabalhos como em Gomes (2001), realizaram-se estudos de confiabilidade estrutural em peças de concreto armado (sob análise estática) utilizando técnicas de análise como “First Order Reliability Method” - FORM, simulação direta de Monte Carlo e simulação de Monte Carlo com amostragem por importância adaptativa - MCIS.

A partir do ano 2000 até a atualidade na área de confiabilidade em estruturas encontram-se artigos que tratam temas como: análise de confiabilidade sísmica de estruturas, confiabilidade estrutural aplicada a pontes, análise de confiabilidade *fuzzy*, otimização baseada em confiabilidade, formulação de metamodelos e representação de alta dimensão para análise de confiabilidade Estrutural (“High-Dimensional Model Representation” - HDMR), entre os mais proeminentes, com autores como: Nowak e Szezen (2000b), Li e Chen (2005), Cornell (2007), Pinto et al. (2007), Montiel e Ruiz (2007), Chowdhury et al. (2009, 2011), Rahman e Xu (2011), Guo et al. (2012), Unnikrishnan et al. (2013), Baldomir et al. (2013), Yao et al. (2013), Beaurepaire et al. (2013), Pirmoradi et al. (2014), Jia e Guan (2015) e Ju et al. (2016).

Por outro lado, no mesmo período em matéria de confiabilidade em geotecnia encontram-se artigos cobrindo tópicos, tais como: métodos não paramétricos em aplicações geotécnicas, fatores de segurança e confiabilidade em análise de engenharia geotécnica, análise de

confiabilidade geotécnica em paredes de contenção, confiabilidade em engenharia geotécnica incluindo variabilidade espacial do solo, análise de problemas de confiabilidade geotécnica com informações limitadas, projeto baseado na confiabilidade em engenharia geotécnica, métodos de superfície de resposta em confiabilidade geotécnica, otimização com base na confiabilidade de sistemas geotécnicos, modelos de confiabilidade de tubos enterrados, risco e confiabilidade em engenharia geotécnica, representação de alta dimensão para análise de confiabilidade em geotecnia, métodos de cálculo aproximado para confiabilidade geotécnica e, finalmente, o impacto da incerteza estatística na estimativa de confiabilidade geotécnica, entre os mais proeminentes, com autores como: Sorensen e Burcharth (2000), Duncan (2000), Oberguggenberger e Fellin (2008), Muszynski (2009), Xu (2011), Papaioannou e Straub (2012), Zheng et al. (2012), Beer et al. (2013), Juang e Wang (2013), Tang et al. (2013), Cheon e Gilbert (2014), Elostá et al. (2014), Fenton et al. (2015), Wu (2015), Zhang et al. (2011,2014, 2015), Zhao et al. (2015), Ching et al (2016), Li et al. (2016), Zeng et al. (2016) e Vessia et al. (2017).

O último livro encontrado na revisão, de Melchers e Beck (2018), fornece boa parte dos temas fundamentais e mostra campos ativos de pesquisa como otimização estrutural associada a confiabilidade e avaliação probabilística de estruturas existentes.

Para o tema particular de interesse na geração de campos estocásticos para propriedades de solos encontra-se que as publicações são recentes, como por exemplo os trabalhos de Samy (2003), Spencer (2007), Chok (2008), Suchomel e Masin (2010), Nuttall (2011), Bari (2012), Paiboon (2013), Namikawa (2014), Daryani et al. (2015), Griffiths, Huang e Fenton (2015), Li, Hicks e Vardon (2015), Pula e Zaskórski (2015a), Xiao et al. (2017), Chauhan et al. (2017), Ching e Hu (2017). Yang et al. (2017), Pantelidis e Christodoulou (2017), Luo et al. (2018), Jiang e Huang (2018). Os pesquisadores citados mostram trabalhos do método *RFEM* (*Random Finite Element Method*) para estudar a probabilidade de falha em taludes de terra pela gravidade, recalques em sapatas superficiais, escavações e túneis, entre outros.

No tema de interação solo-estaca, tem-se como referência a tese de doutorado de Palomino (2015) onde trata-se o registro histórico dos temas pertinentes para a pesquisa em interação solo-estaca e exemplos desenvolvidos para o cálculo de problemas de interação solo estaca com condição de aderência perfeita e aderência por atrito.

## 1.4 BREVE DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO DA TESE

O presente trabalho está organizado desta forma:

*Capítulo 2: ANÁLISE DE CONFIABILIDADE EM PROBLEMAS ESTRUTURAIS E GEOTÉCNICOS* - Neste Capítulo apresenta-se conceitos fundamentais de probabilidade e estatística de variáveis aleatórias e funções de distribuição probabilística, as bases conceituais para a análise da confiabilidade em problemas estruturais e geotécnicos incluindo as definições de estados limites e o abordagem do problema básico de confiabilidade com alguns critérios para probabilidades de falha aceitáveis. Uma amostra de métodos representativos para a análise de confiabilidade estrutural em geral, como são o método FORM em sua versão Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HLRF), os métodos Monte Carlo (MC) e aproximações (Monte Carlo com amostragem por importância (MCI), Monte Carlo com amostragem por Hipercubo Latino (MCLH), entre outros). Os detalhes dos algoritmos dos métodos mencionados são apresentados resumindo que eles avaliam a probabilidade de falha ( $P_f$ ) e o índice de confiabilidade ( $\beta$ ).

*Capítulo 3: MÉTODOS PARA GERAR CAMPOS ALEATÓRIOS E MODELO CONSTITUTIVO DE SOLO MOHR-COULOMB* - apresenta-se os aspectos mais relevantes dos algoritmos mais comuns para gerar campos aleatórios, tais como: Decomposição da Matriz de Covariância, Métodos de Média Móvel (MA), Método Discreto de Transformada de Fourier (DFT), Método de Bandas Rotativas (TBM), Método de Transformada Rápida de Fourier (FFT), Método de Subdivisão Média Local (LAS) usado no Capítulo 5. Ao final apresenta-se a formulação do modelo constitutivo de Mohr-Coulomb para solos, como base para modelado do solo na interação solo-estaca.

*Capítulo 4: ANÁLISE DE PROBLEMAS DE CONFIABILIDADE E SUA VERIFICAÇÃO USANDO O PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS ANSYS* – e apresentado o desenvolvimento, a implementação e a verificação de um exemplo de aplicação num problema de confiabilidade da capacidade de carga num solo elastoplástico de uma sapata. Para esse fim, busca-se a solução através do desenvolvimento de um código adaptado usando a linguagem FORTRAN pela eficiência computacional. Finalmente realiza-se a verificação usando o programa

comercial de elementos finitos *ANSYS*. É feita uma discussão dos resultados do exemplo.

*Capítulo 5: ANÁLISE DE PROBLEMAS DE CONFIABILIDADE, SENSIBILIDADE PROBABILÍSTICA E ESTUDO PARAMÉTRICO INCLUINDO CAMPOS ESTOCÁSTICOS* - dedica-se esta seção à análise de três problemas representativos e definitivos para cumprir a finalidade de modelar o problema de interação solo-estaca. O primeiro modelo de confiabilidade incluindo campos estocásticos é um solo elástico com carga na superfície em 2D que permite usar e verificar um gerador de campos aleatórios adaptado de rotinas do software *RFEM* de Fenton e Griffiths (2008). Seguidamente para os modelos de interação solo-estaca com modelo constitutivo de Mohr-Coulomb (um com aderência perfeita e outro com aderência por atrito), realiza-se análises de confiabilidade e análises de sensibilidade probabilística. Finalmente é apresentado um estudo paramétrico da influência do comprimento da estaca no cálculo do índice de confiabilidade incluindo campos estocásticos.

*Capítulo 6: CONCLUSÕES, RECOMENDAÇÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS* - as conclusões são apresentadas em duas fases de desenvolvimento da tese, a primeira correspondente a problemas de confiabilidade sem incluir campos estocásticos e a segunda incluindo campos estocásticos. São formuladas algumas recomendações relativas a futuros temas de pesquisa e considerações finais.

*Capítulo 7: REFERÊNCIAS* - Uma relação de referências bibliográficas mencionadas no texto é apresentada.

*Capítulo 8: APÊNDICES* - são apresentados o desenvolvimento, a implementação e a verificação de vários exemplos de aplicações da confiabilidade em problemas estruturais e geotécnicos, tais como: uma treliça elástica plana, um modelo de carga dupla uniforme num sistema de solo elástico de duas camadas, e, um modelo de carga circular tridimensional num quarto de cilindro que representa quatro camadas de uma estrutura de pavimento asfáltico. Estes exemplos foram resolvidos usando ferramentas desenvolvidas em MATLAB e FORTRAN. Finalmente realiza-se uma verificação dos modelos usando o programa comercial de elementos finitos *ANSYS* e é feita uma discussão dos resultados dos exemplos.

## 2 ANÁLISE DE CONFIABILIDADE EM PROBLEMAS ESTRUTURAIS E GEOTÉCNICOS

O consenso de aceitar a análise de confiabilidade como uma ferramenta poderosa para avaliar a segurança de problemas estruturais e geotécnicos foi alcançado em décadas recentes.

A análise de confiabilidade é considerada um procedimento de verificação que tem a possibilidade de determinar a probabilidade de falha de uma estrutura, um solo, um talude ou estruturas em interação com os solos, tais como as estacas. Este procedimento incorpora a variação aleatória das variáveis do problema. A incerteza dos parâmetros dos materiais em geral (solo, concreto, entre outros) tem uma importância radical e, portanto, é necessário estudar os problemas estruturais e geotécnicos do ponto de vista que é chamado de análise de confiabilidade.

### 2.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Quando os resultados das experiências de um determinado fenômeno são previsíveis, o fenômeno é chamado determinista, e caso contrário, o fenômeno será chamado aleatório ou não-determinista; neste caso, cada experiência deve ser associada a um valor de probabilidade de ocorrência do evento relacionado ao fenômeno observado.

#### 2.1.1 Função densidade de probabilidade (FDP) e função cumulativa de probabilidades (FCP)

Uma função densidade de probabilidade  $f_U(u)$ , pode usar-se na Equação (2.1) para expressar a probabilidade da variável  $U$  assumir valores entre  $a$  e  $b$  (Gomes, 2004).

$$P(a \leq U \leq b) = \int_a^b f_U(u) du \quad (2.1)$$

onde  $U$  é a variável aleatória ou randômica. Para que  $f_U(u)$  seja considerada uma FDP tem que satisfazer as condições:

$$1) f_U(u) \geq 0.0 \text{ para qualquer } u. \quad (2.2)$$

- 2)  $\int_{-\infty}^{\infty} f_U(u) du = 1.0$
- 3)  $\int_a^b f_U(u) du = P(a \leq U \leq b)$

Por outro lado, a função cumulativa de probabilidades,  $F_U(u)$ , pode ser definida por:

- 1)  $F_U(-\infty) = 0.0$
  - 2)  $0 \leq F_U(u) \leq 1.0$
  - 3)  $F_U(\infty) = 1.0$
- (2.3)

Existem muitas funções teóricas que satisfazem as condições descritas para as FDP e FCP. A FDP que está mais próxima do histograma que representa os dados agrupados para a variável é usada para representá-la na análise.

### 2.1.2 Função densidade de probabilidade conjunta e função cumulativa de probabilidades conjunta

Nas análises onde se tenham duas ou mais variáveis aleatórias, é imperativo estudar o comportamento conjunto das variáveis; para compreender o comportamento de dependência, usa-se a definição para duas variáveis aleatórias dependentes entre si,  $U$  e  $V$ . Os conceitos são extensíveis para um número superior de variáveis aleatórias. Então usando a FDP conjunta,  $f_{U,V}(u,v)$ , das variáveis aleatórias dependentes entre si,  $U$  e  $V$ , pode-se determinar a FCP conjunta de probabilidades (Gomes, 2004), assim:

$$F_{U,V}(a,b) = P(U \leq a, V \leq b) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f_{U,V}(u,v) dudv \quad (2.4)$$

onde a FDP conjunta das variáveis aleatórias tem que satisfazer as condições:

- 1)  $f_{U,V}(u,v) \geq 0.0$  para qualquer  $u$  e  $v$ .
  - 2)  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v) dudv = 1.0$
  - 3)  $\int_a^b \int_c^d f_{U,V}(u,v) dudv = P(a \leq U \leq b, c \leq V \leq d)$
- (2.5)

### 2.1.3 Parâmetros de uma variável aleatória

Para obter a esperança matemática ou a expectância usa-se a integração ponderada de uma variável aleatória (Gomes, 2004). A expectância de uma função de uma variável randômica é então:

$$E\langle g(U) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) f_U(u) du \quad (2.6)$$

onde  $g(u)$  é a função da variável aleatória e  $f_U(u)$  é a FDP de  $U$ . Como pode-se observar pela Equação (2.6) que a expectância de uma função de uma variável aleatória é a integral do produto de  $g(u)$  por  $f_U(u)$ .

A expectância mais importante é a média ou valor esperado de uma variável aleatória  $U$  e é obtida com  $g(u) = u$ :

$$E\langle U \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u f_U(u) du = \mu_U \quad (2.7)$$

Outras expectâncias interessantes de uma função de uma variável aleatória são:

- valor quadrático médio (segundo momento) de uma variável aleatória,

$$E\langle U^2 \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f_U(u) du \quad (2.8)$$

- variância (segundo momento em torno da média) de uma variável aleatória:

$$Var(U) \equiv E\langle (U - \mu_U)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - \mu_U)^2 f_U(u) du = E\langle U^2 \rangle - (\mu_U)^2 \quad (2.9)$$

- desvio padrão de uma variável aleatória:

$$\sigma_U = +\sqrt{Var(U)} \quad (2.10)$$

Por outro lado, o coeficiente de variação ( $CV$ ) de  $U$  é:

$$CV = \frac{\sigma_U}{\mu_U} \quad (2.11)$$

$CV$  sempre é positivo não interessando se a média é negativa. A expectância pode ser aplicada para um grupo de variáveis aleatórias.

#### 2.1.4 Parâmetros de duas variáveis aleatórias

Para introduzir a definição de expectância de uma função de duas variáveis aleatórias, defina-se a expectância de uma função de várias variáveis aleatórias  $g(u_1, u_2, \dots, u_n)$  assim:

$$\begin{aligned}
E\langle g(U_1, U_2, \dots, U_n) \rangle \\
\equiv \int_{u_1=-\infty}^{+\infty} \int_{u_n=-\infty}^{+\infty} g(u_1, u_2, \dots, u_n) f_u(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n
\end{aligned} \quad (2.12)$$

Então, para a expectância de duas variáveis aleatórias, existem definições usais como:

- valor esperado do produto de duas variáveis aleatórias  $U_j$  e  $U_k$ :

$$E\langle U_j U_k \rangle \equiv \int_{u_j=-\infty}^{+\infty} \int_{u_k=-\infty}^{+\infty} u_j u_k f_{u_j, u_k}(u_j, u_k) du_j du_k \quad (2.13)$$

onde  $f_{u_j, u_k}(u_j, u_k)$  é a FDP conjunta de  $U_j$  e  $U_k$ .

- A covariância é uma medida não padronizada do grau no qual se movem duas variáveis aleatórias juntas. A covariância é estimada como o produto dos desvios da média para cada variável em cada período. A covariância entre  $U_j$  e  $U_k$ :

$$\begin{aligned}
Cov(U_j U_k) &\equiv E\langle (U_j - \mu_j)(U_k - \mu_k) \rangle = E\langle U_j U_k \rangle - E\langle U_j \rangle E\langle U_k \rangle \\
&= \int_{u_j=-\infty}^{+\infty} \int_{u_k=-\infty}^{+\infty} (u_j - \mu_j)(u_k - \mu_k) f_{u_j, u_k}(u_j, u_k) du_j du_k \\
E\langle U_j \rangle &\equiv \mu_j \equiv \int_{u_j=-\infty}^{+\infty} \int_{u_k=-\infty}^{+\infty} u_j f_{u_j, u_k}(u_j, u_k) du_j du_k \\
E\langle U_k \rangle &\equiv \mu_k \equiv \int_{u_j=-\infty}^{+\infty} \int_{u_k=-\infty}^{+\infty} u_k f_{u_j, u_k}(u_j, u_k) du_j du_k
\end{aligned} \quad (2.14)$$

- o coeficiente de correlação que constitui um índice de relação linear entre duas variáveis aleatórias:

$$\rho_{jk} = \frac{Cov(U_j U_k)}{\sigma_{U_j} \cdot \sigma_{U_k}} \quad (2.15)$$

onde  $\sigma_{U_j}$  e  $\sigma_{U_k}$  são os desvios padrões das variáveis aleatórias.

O coeficiente de correlação entre duas variáveis aleatórias cumpre o intervalo  $(-1 \leq \rho_{jk} \leq 1)$  como pode ser visualizado na Figura 2.1.

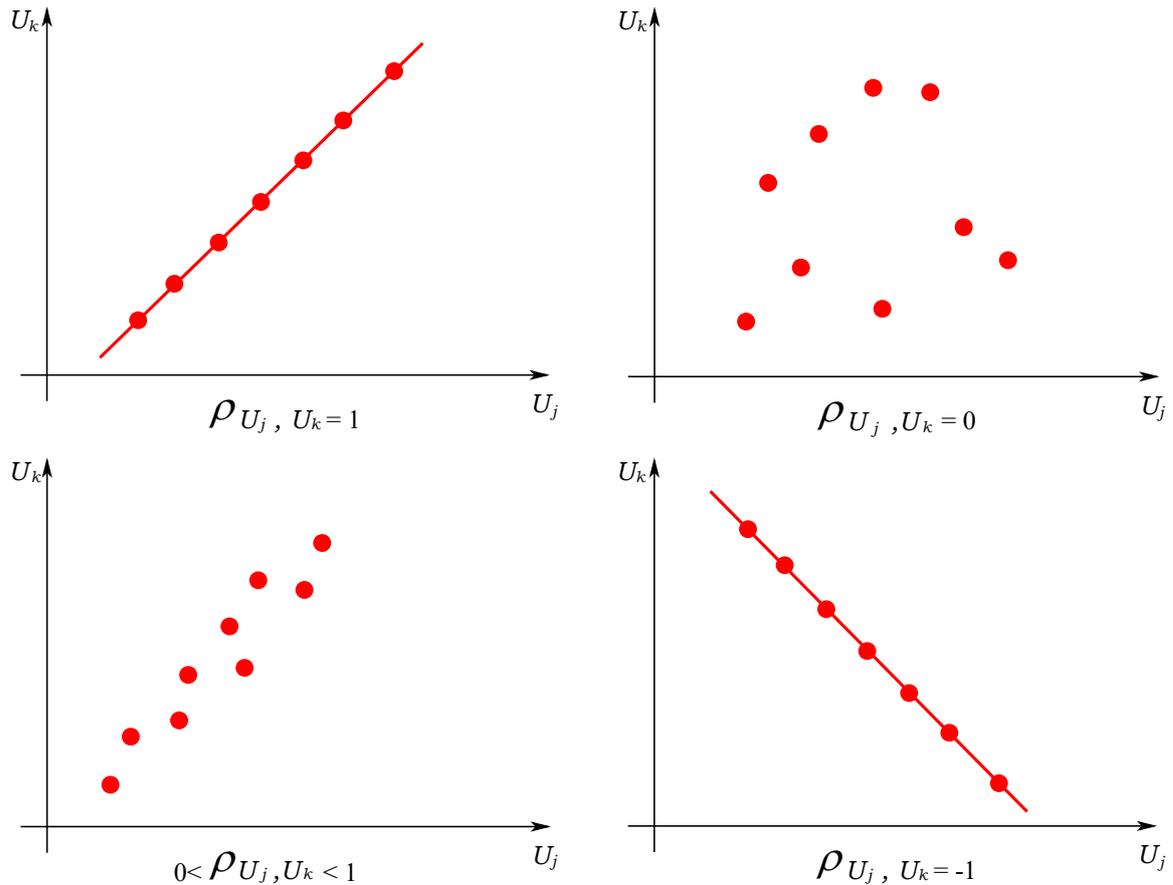


Figura 2.1 – Gráficos do coeficiente de correlação.

Quando  $\rho_{jk} = 0$  as variáveis aleatórias são não-correlacionadas. Se  $\rho_{jk} = 1$  há uma correlação positiva perfeita, e o coeficiente indica uma dependência total entre as duas variáveis chamadas relação direta (quando uma delas aumenta, a outra também faz em uma proporção constante). Se  $\rho_{jk} = -1$  há uma correlação negativa perfeita, e o coeficiente indica uma dependência total entre as duas variáveis chamadas relação inversa (quando uma delas aumenta, a outra diminui em uma proporção constante) Finalmente se  $0 \leq \rho_{jk} \leq 1$  tem-se correlação positiva, e se  $-1 \leq \rho_{jk} \leq 0$  a correlação é negativa.

A Figura 2.2 mostra os intervalos de valores de coeficiente de correlação entre variáveis e sua caracterização de nível de dependência (Tichy, 1993).

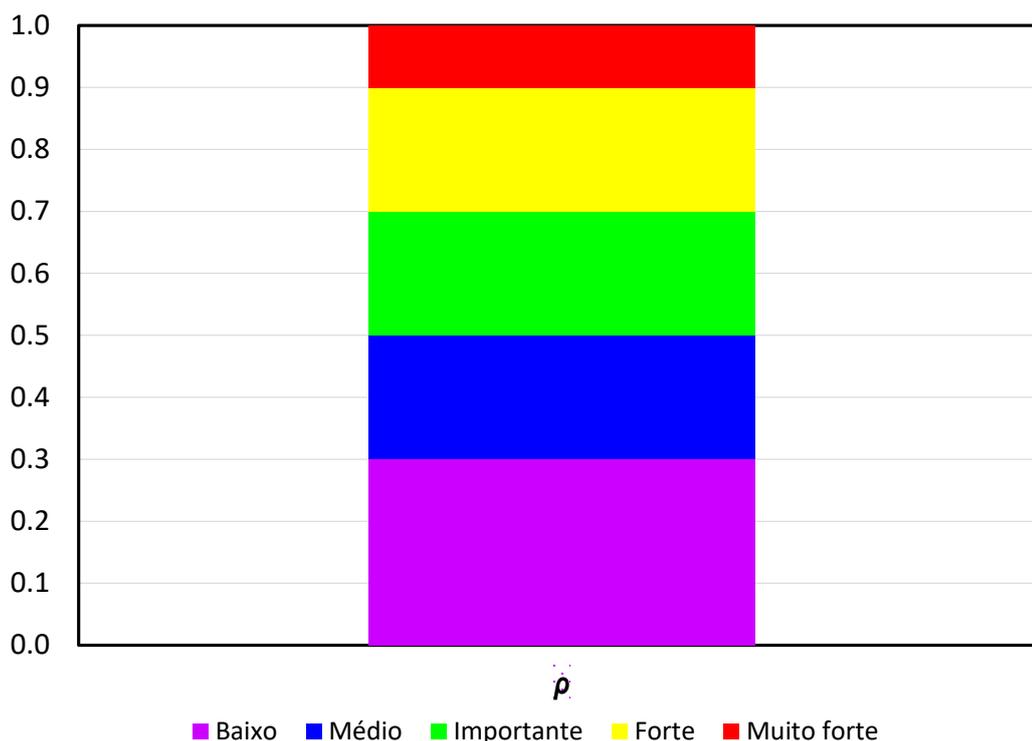


Figura 2.2 – Intervalos de valores de correlação entre variáveis.

### 2.1.5 Funções de distribuição probabilística

Todas as funções que cumpram às condições da Equação (2.2) para uma FDP podem ser usadas como distribuição de probabilidades. Procura-se que a FDP tenha uma representação estatística adequada para um determinado fenômeno. Na literatura encontram-se as mais diversas distribuições que podem ser utilizadas. Muitos autores podem ser consultados (Haldar e Mahadevan, 2000b; Nowak, 2000a; Fenton e Griffiths, 2008; El-Reedy, 2013; Phoon e Ching, 2015; Rubinstein e Kroese, 2017; Melchers e Beck, 2018) onde são apresentadas várias funções de distribuição de probabilidades que podem ser aproveitadas na engenharia como:

- Distribuição uniforme;
- Distribuição normal ou Gaussiana;
- Distribuição lognormal;
- Distribuição de Rayleigh;
- Distribuição exponencial;
- Distribuição Gamma;
- Distribuição Beta;
- Distribuição Tipo I (máximos ou mínimos extremos) ou Gumbel;

- Distribuição Tipo II (máximos ou mínimos extremos) ou Frechet;
- Distribuição Tipo III (máximos ou mínimos extremos) ou Weibull.

## **2.2 BASES CONCEITUAIS PARA A ANÁLISE DA CONFIABILIDADE EM PROBLEMAS ESTRUTURAIS E GEOTÉCNICOS**

### **2.2.1 Definições de Estados Limites**

O estado limite na confiabilidade estrutural pode-se definir como o limite entre um comportamento aceitável ou não aceitável de uma estrutura. Na prática o estado limite de uma estrutura pode ser representado matematicamente pelo uso de uma função de desempenho ou função de estado limite. Numa estrutura pode considerar-se vários modos de falha por separado e então, pode-se definir para cada modo um estado limite particular.

Procurando as normativas do Brasil, encontrou-se a NBR 6122 (ABNT, 2019) de projeto e execução de fundações, onde, o projeto deve assegurar que as fundações apresentem segurança contra os estados-limites últimos (ELU) e os estados-limites de serviço (ELS) definidos na seção 6.2:

- a) estados limites últimos: associados a colapso parcial ou total da obra;
- b) estados limites de serviço: associados a deformações, fissuras e vibrações que comprometem o uso da obra.

Os estados limites últimos representam os mecanismos que conduzem ao colapso da fundação. Na seção 6.2.1 da NBR 6122, os seguintes mecanismos podem caracterizar o estado limite último:

- a) perda de estabilidade global;
- b) ruptura por esgotamento da resistência do terreno;
- c) ruptura por deslizamento (fundações o rasas);
- d) ruptura estrutural em decorrência de movimentos da fundação;
- e) arrancamento ou insuficiência de resistência por tração;
- f) ruptura do terreno decorrente de carregamentos transversais;
- g) ruptura estrutural por compressão, tração, flexão ou cisalhamento, considerados também os efeitos de segunda ordem nas situações destacadas nesta Norma.

Na seção 6.2.2.1, para verificar os estados limites de serviço (ELS) em relação ao solo de fundação ou ao elemento estrutural de fundação deve atender-se que:  $E_k \leq C$ , onde  $E_k$  é o valor característico do efeito das ações (por exemplo, o recalque estimado), calculado considerando-se parâmetros geotécnicos característicos e ações características e  $C$  é o valor limite de serviço (admissível) do efeito das ações (por exemplo, recalque aceitável). O valor limite de serviço para um determinado efeito das ações é o valor associado a problemas de desempenho, tais como trincas inaceitáveis, vibrações ou comprometimentos à funcionalidade plena da obra.

Os limites de serviço a serem considerados definidos na seção 6.2.2.2.1 da NBR 6122, são:

- a) recalques excessivos;
- b) levantamentos excessivos decorrentes, por exemplo, de expansão do solo ou outras causas;
- c) vibrações inaceitáveis.

### 2.2.2 Abordagem do problema básico de confiabilidade

A forma básica de descrever o problema de confiabilidade usa o conceito fundamental de função de estado limite ou função de falha  $g(\mathbf{U})$ , que inclui o estado limite de interesse. A maneira clássica de descrever a confiabilidade é através da relação entre as variáveis aleatórias resistência ( $R$ ) e solicitação ( $S$ ). Então, a função de estado limite pode ser apresentada como:

$$Z = g(\mathbf{U}) = g(U_1, U_2, \dots, U_n) = R - S \quad (2.16)$$

onde  $\mathbf{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  é o vetor das variáveis aleatórias, a função de estado limite  $g(\mathbf{U})$  define regiões de falha e segurança, e  $U_1, U_2, \dots, U_n$  são as variáveis aleatórias. Pode-se notar que a variável  $Z$  é aleatória (função de variáveis aleatórias). No caso que a função  $g(\mathbf{U}) > 0$  indica que  $\mathbf{U}$  pertence a região segura, caso contrário se define a região de falha e se  $g(\mathbf{U}) = 0$  o estado é de falha iminente, como pode-se ver na Figura 2.3. A margem de segurança ( $g(R,S)=R-S$ ) é a expressão mais utilizada na confiabilidade devido à sua invariância natural. Em geral, a probabilidade de falha ( $P_f$ ) de uma estrutura ou sistema pode ser expressa como:

$$P_f = \int_{g(\mathbf{U}) < 0} f_U(\mathbf{U}) d\mathbf{U} \quad (2.17)$$

Entenda-se pela integração da função densidade de probabilidade conjunta,  $f_U(\mathbf{U})=f_U(U_1, U_2, \dots, U_n)$  no domínio da falha  $g(\mathbf{U})$ .

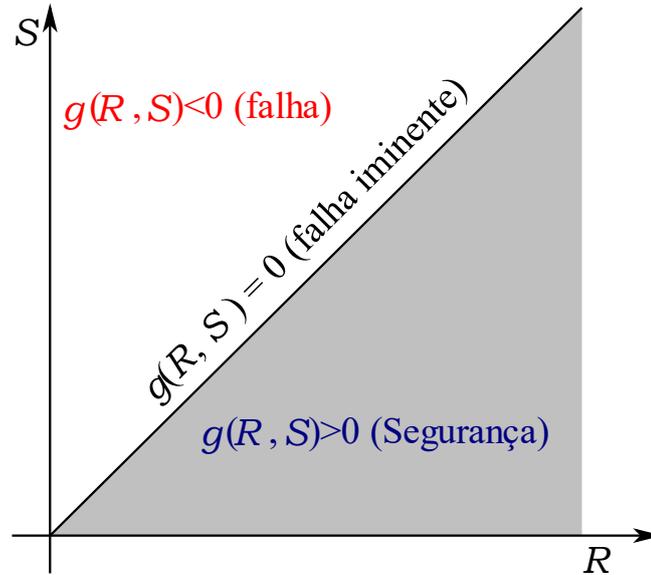


Figura 2.3 – Definição de função de estado limite.

Usando a margem de segurança a probabilidade de falha ( $P_f$ ) é expressa pela probabilidade de ocorrer  $g(R,S) < 0$ , e é concebida assim:

$$P_f = P(g(R, S) < 0) = P(R - S < 0) = \int \int_{g(R,S) < 0} f_{RS}(R, S) dR dS \quad (2.18)$$

Onde  $f_{R,S}(R,S)$ , é a FDP conjunta com variáveis aleatórias  $R$  e  $S$ , e novamente o domínio de integração é o domínio de falha.

Haldar (1999) define a confiabilidade como a probabilidade de sobrevivência de um componente ou um sistema desde que utilizado de acordo com as especificações de projeto. Ou seja, pode ser definida como o complemento da probabilidade de falha:

$$f_c = 1 - P_f \quad (2.19)$$

onde  $f_c$  é a confiabilidade e  $P_f$  a probabilidade de falha. A falha pode ser definida como a incapacidade do componente ou do sistema de funcionar como foi projetado.

### 2.2.3 Índice de confiabilidade e sua interpretação

Quando as variáveis aleatórias são normalmente distribuídas, os parâmetros que descrevem a variável aleatória  $Z = R - S$  são:

$$\begin{aligned}\mu_Z &= \mu_R - \mu_S \\ \sigma_Z &= \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}\end{aligned}\tag{2.20}$$

sendo  $\mu_Z, \mu_R, \mu_S, \sigma_Z, \sigma_R, \sigma_S$  as médias e os desvios padrões das variáveis aleatórias e da função de falha, respectivamente. A probabilidade de falha pode ser expressa como (como mostra a Figura 2.3):

$$P_f = P(R - S < 0) = \Phi\left(\frac{0 - (\mu_R - \mu_S)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right)\tag{2.21}$$

onde  $\Phi$  é a função cumulativa da distribuição normal padrão (média 0 e desvio padrão 1). Neste caso  $k = Z = 0$ . Então:

$$P_f = P(Z < 0) = \Phi\left(\frac{0 - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) = \Phi\left(-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = \Phi(-\beta)\tag{2.22}$$

do acima, conclui-se que:

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{1}{CV_Z} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\tag{2.23}$$

e que:

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f)\tag{2.24}$$

o índice  $\beta$  é chamado índice de confiabilidade e é o parâmetro mais usado para medir o nível de segurança de uma estrutura ou sistema. O índice  $\beta$  é uma medida do número de desvios padrão entre o valor médio da margem de segurança e o limite que define a região segura (Figura 2.4). Por definição, o índice de confiabilidade é o inverso do coeficiente de variação da margem de segurança. Os valores elevados de  $\beta$  significam sistemas mais confiáveis ou seguros (menor probabilidade de falha); baixos valores de  $\beta$  significa sistemas menos confiáveis ou inseguros (maior probabilidade de falha). Na prática, os valores do índice de confiabilidade geralmente são encontrados no intervalo  $1 \leq \beta \leq 3.5$  e, neste caso, a probabilidade de falha pode ser aproximada (Figura 2.5) por:

$$P_f = 10^{-\beta} \tag{2.25}$$

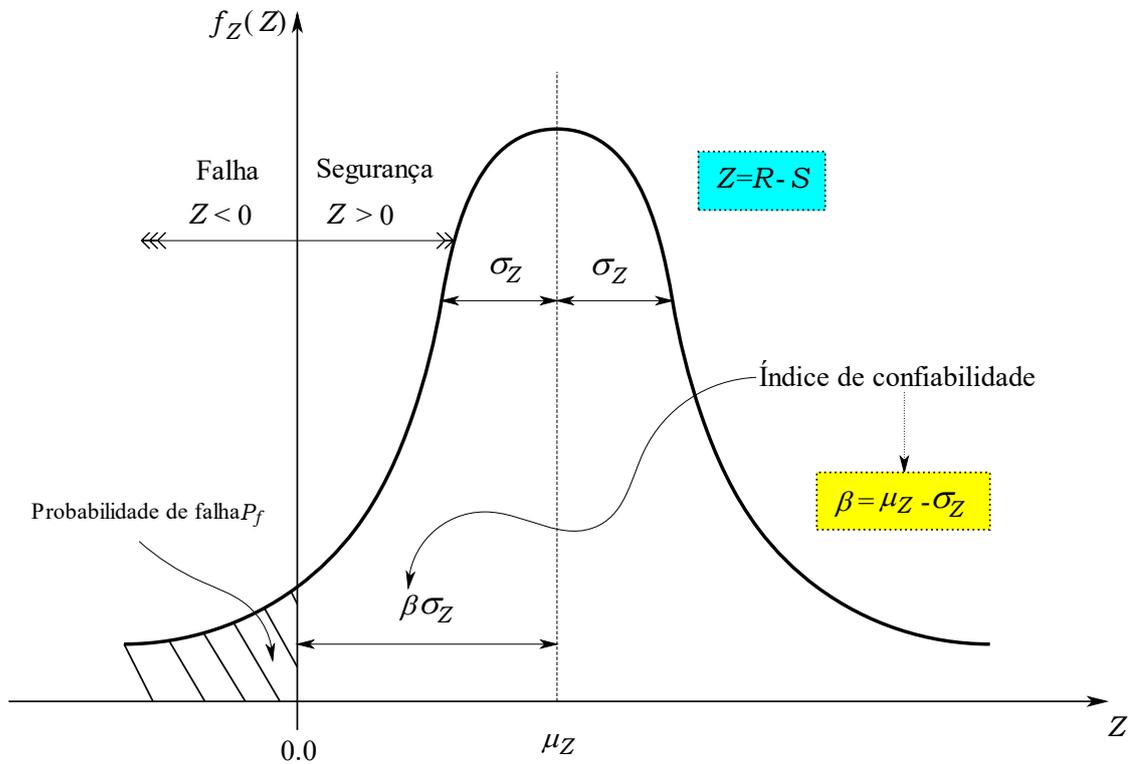


Figura 2.4 – Definição do índice de confiabilidade no caso  $Z=R - S$ , onde  $R$  e  $S$  são funções distribuídas normalmente.

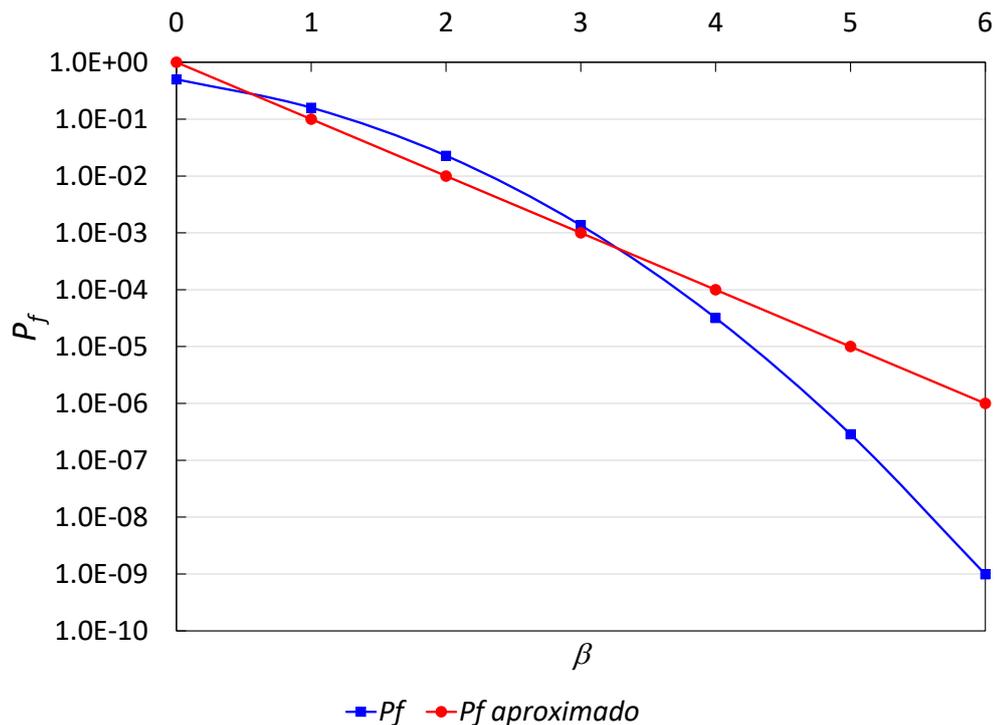


Figura 2.5 – Estimativa da probabilidade de falha.

Agora, considerando a Equação (2.16) onde a resistência  $R$  e a solicitação  $S$  (espaço original ou real  $\mathbf{U}$ , Figura 2.6(a) são variáveis aleatórias normalmente distribuídas e não correlacionadas com médias  $\mu_R$  e  $\mu_S$ , e desvios padrão  $\sigma_R$  e  $\sigma_S$ , respectivamente. A Figura 2.6(a) mostra, a superfície de falha ( $g(\mathbf{U})=0$ ), a região de segurança ( $g(\mathbf{U}) > 0$ ) e a região de falha ( $g(\mathbf{U}) < 0$ ). A área hachurada exhibe o domínio onde a função de estado limite assume valores negativos. Para definir uma base comum de comparação,  $R$  e  $S$  podem ser transformados em sua forma gaussiana padrão  $u_R$  e  $u_S$  (espaço transformado, normalizado ou reduzido  $\mathbf{u}$ , Figura 2.6(b), que é uma forma de distribuição adimensional das variáveis que comumente chamam-se variáveis reduzidas (padrão, média 0 e desvio padrão 1):

$$u_R = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad (2.26)$$

$$u_S = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \quad (2.27)$$

Na Figura 2.6(b) os círculos descrevem valores constantes da FDP,  $f_{u_R, u_S}(u_R, u_S)$ . Usando a transformação descrita, a função de falha  $g(\mathbf{u})$  no espaço das variáveis reduzidas,  $\mathbf{u}$  (Figura 2.6(b)) pode ser escrita como:

$$g(u_R, u_S) = R - S = u_R \sigma_R + \mu_R - (u_S \sigma_S + \mu_S) = u_R \sigma_R - u_S \sigma_S + (\mu_R - \mu_S) \quad (2.28)$$

Note-se que, para este caso,  $g(u_R, u_S)$  é uma função linear (Figura 2.6(b)) e que a função  $g(u_R, u_S) = 0$  é deslocada por uma distância  $d$  da origem. Usando conceitos básicos de geometria analítica, pode provar-se que a distância mais curta da origem a uma função linear da forma  $ax + by + c = 0$  é:

$$d = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2.29)$$

Portanto, ao substituir  $c = \mu_R - \mu_S$ ,  $a = \sigma_R$  e  $b = \sigma_S$ , a distância mínima da origem para a função  $g(u_R, u_S) = 0$  é:

$$d = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \beta \quad (2.30)$$

Conseqüentemente, o índice de confiabilidade de Hasofer e Lind (1974),  $\beta$ , é definido como a distância mais curta da origem à função de estado limite ( $g(\mathbf{u})=0$ ), medida no espaço

normalizado ou reduzido. Este princípio é ilustrado na Figura 2.6(b) para o caso em que apenas duas variáveis são consideradas, a resistência  $R$  e a solicitação  $S$  e a função de estado limite é linear. Shinozuka (1983) mostrou que o ponto para o qual a distância é mínima corresponde ao ponto mais provável de falha, ponto de verificação ou ponto de projeto (“Most Probable Point” – MPP). De outra forma, o ponto sobre a superfície de falha mais próximo à origem é também o ponto sobre a reta com maior probabilidade de ocorrência, ou seja, o ponto com maior valor de FDP,  $f_{R,S}(R,S)$  sobre a superfície de falha. Conhecido  $\beta$ , pode-se usar a Equação (2.22) para calcular a probabilidade de falha e a Equação (2.19) para obter a confiabilidade na escala de probabilidade.

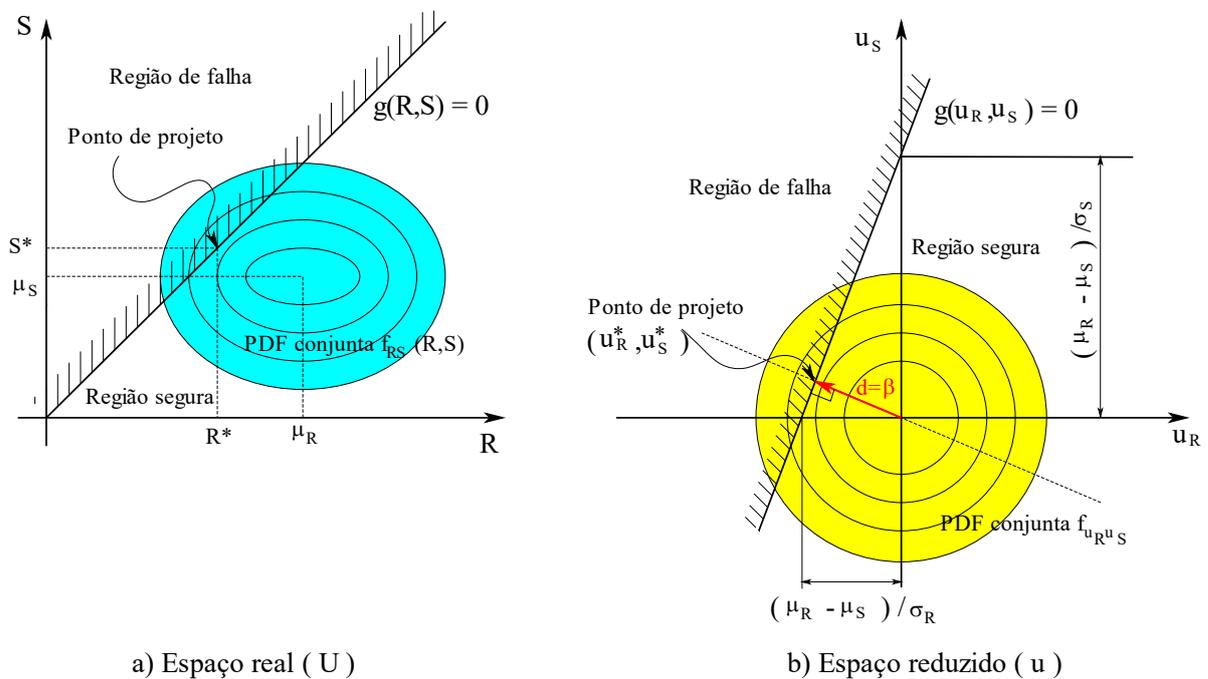


Figura 2.6 – Descrição do índice de confiabilidade definido por Hasofer e Lind (1974) para uma função de estado limite lineal.

Na maioria dos problemas,  $R$  e  $S$  não são normalmente distribuídos e a função de estado limite não é linear. Nesses casos, a Equação (2.22) só pode ser usada como uma estimativa. O item a seguir explica um método representativo suficientemente geral para lidar com o cálculo da probabilidade de falha de maneira aproximada, esse método possui como característica o uso dos dois primeiros momentos das variáveis (média e variância), além disso, uma aproximação de primeira ordem é usada na função de estado limite para encontrar o ponto de projeto ou ponto de controle, a referida família de métodos é conhecida como métodos de confiabilidade de primeira ordem (“First Order Reliability Methods” – FORM).

Na avaliação da Equação (2.17), a função  $g(\mathbf{U})$  pode ser não linear e conter várias variáveis randômicas, portanto, pode-se ter uma FDP conjunta de múltiplas variáveis randômicas e correlacionadas,  $f_U(\mathbf{U})$ , no espaço original  $\mathbf{U}$ . Para o cálculo do problema básico de confiabilidade (Equação (2.17)) a integral  $n$ -dimensional num domínio complexo ( $g(\mathbf{U}) < 0$ ) é de difícil obtenção e muitas vezes dispendiosa computacionalmente. Por isso é comum calcular o índice de confiabilidade  $\beta$  no espaço reduzido  $\mathbf{u}$  ou espaço normal padrão e correlacioná-lo com a probabilidade de falha.

O processo de transformação do espaço real para o espaço reduzido, precisa técnicas desenvolvidas por autores como Rosenblatt (1952) e Nataf (1962). No final obtém-se um espaço de variáveis normais padrão equivalentes não correlacionadas, isso pode ser estudado em profundidade em Melchers e Beck (2018).

## 2.3 MÉTODOS PARA CÁLCULO DA CONFIABILIDADE EM PROBLEMAS ESTRUTURAIS E GEOTÉCNICOS

As análises de confiabilidade são realizadas através de métodos tais como FORM – “First order reliability method” e métodos SORM – “Second order reliability method”, MC – “Monte Carlo” e aproximações (Monte Carlo com amostragem por importância – MCI, Monte Carlo amostragem do Hipercubo Latino – MCLH, entre outros), existem registros importantes destes em problemas estruturais e geotécnicos desde a década de 1970, sendo os autores proeminentes Wu e Kraft (1970), Alonso (1976), Vanmarcke (1977). Depois, há autores como Xue e Gavin (2007), Fenton e Griffiths (2008), Ching et al. (2009), Zhang et al. (2011), El-Reedy (2013), Phoon e Ching (2015), Rubinstein e Kroese (2017), Melchers e Beck (2018). As análises probabilísticas requerem análises deterministas anteriores que avaliem uma função de estado limite colocada para o cálculo que determina a falha ou não falha da estrutura analisada (elementos finitos, soluções analíticas explícitas, entre outros) e, assim, atingir a determinação do que é conhecido como índice de confiabilidade.

### 2.3.1 Método FORM versão HRLF (“First Order Reliability Methods”)

O método FORM aparece para quando as variáveis aleatórias  $\mathbf{U}$  (espaço real ou original  $\mathbf{U}$ ), podem ter qualquer distribuição probabilística, podem ser correlacionadas ou não. Si as variáveis estiverem correlacionadas, são necessários processos de transformação (Rosenblatt, 1952; Nataf, 1962) para chegar à descrição em variáveis normais padrões reduzidas e não

correlacionadas (espaço normal padrão  $\mathbf{u}$ ). A função de estado limite  $g(\mathbf{U})$  no espaço real pode ser exibida no espaço reduzido  $\mathbf{u}$  em função das variáveis  $\mathbf{u}$  como  $g(\mathbf{u})$ . A superfície de falha  $g(\mathbf{u}) = 0$  é aproximada por um hiperplano no ponto com a menor distância até a origem, identificado como se apresenta na secção 2.2.2 como o ponto de projeto (“Most Probable Point”–MPP)  $\mathbf{u}^*$ , lembrando que ele é também o ponto sobre o hiperplano, com o maior valor da função densidade de probabilidade conjunta das variáveis. Encontrado o ponto de projeto, pode calcular-se o índice de confiabilidade ( $\beta$ ) que é a distância deste ponto de projeto até a origem pela Equação (2.31) e a probabilidade de falha ( $P_f$ ) pode ser calculada aproximadamente pela Equação (2.32). Na Figura 2.7 é possível ver o processo para duas variáveis aleatórias.

$$\beta = \sqrt{\mathbf{u}^{*T} \mathbf{u}^*} \quad (2.31)$$

$$P_f = P(g(\mathbf{u}) < 0) \cong \Phi(-\beta) \quad (2.32)$$

onde,  $\Phi$  é a FCP normal padrão no espaço reduzido e  $\mathbf{u}^*$  é o ponto de projeto no espaço reduzido.

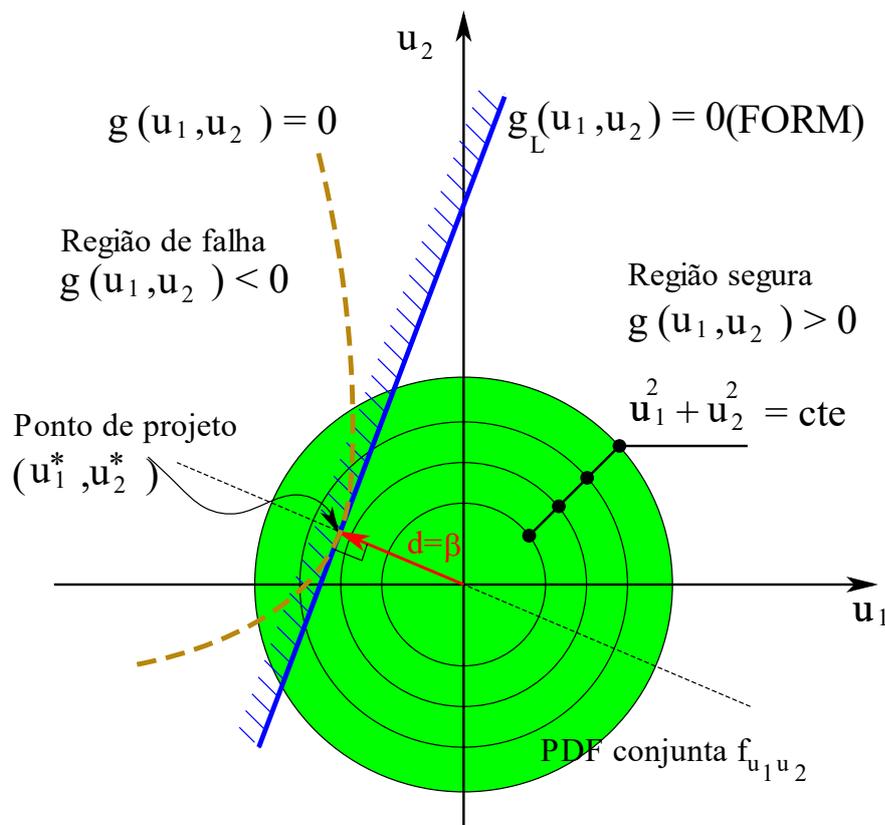


Figura 2.7 – Descrição das incógnitas para a determinação do ponto de projeto no método FORM para duas variáveis aleatórias.

A determinação do ponto de projeto  $\mathbf{u}^*$  da Figura 2.7 é a base para calcular o índice de confiabilidade e a probabilidade de falha no método FORM. O método FORM encontra o ponto de projeto pela abordagem de um problema de otimização que mais exatamente consiste num problema de programação não-linear com uma restrição, assim:

$$\text{minimizar } \|\mathbf{u}\| \quad (2.33)$$

$$\text{sujeito a: } g(\mathbf{u}) = 0$$

O problema apresentado na Equação (2.33) pode ser resolvido usando a teoria dos métodos de otimização disponíveis e adaptados ao problema de otimização por diferentes alternativas. O esquema mais usado para problemas de análise de confiabilidade em geral é o desenvolvido por Hasofer e Lind (1974) e aperfeiçoado por Rackwitz e Fiessler (1978), na literatura encontra-se habitualmente identificado como HLRF e está expresso recursivamente por:

$$\mathbf{u}^{k+1} = \frac{1}{\|\nabla g(\mathbf{u}^k)\|^2} [\nabla g(\mathbf{u}^k)^T \mathbf{u}^k - g(\mathbf{u}^k)] \nabla g(\mathbf{u}^k) \quad (2.34)$$

onde  $g(\mathbf{u}^k)$  é o valor da função de falha avaliado no ponto  $\mathbf{u}$  na iteração  $k$  e  $\nabla g(\mathbf{u}^k)$  é o gradiente da função de falha no espaço reduzido avaliado no ponto  $\mathbf{u}$  na iteração  $k$ .

### 2.3.1.1 Algoritmo do Método FORM - HLRF

O método FORM é um esquema iterativo para análise de confiabilidade que pode ser resumido da seguinte forma::

- 1) Definir uma função de estado limite apropriada  $g(\mathbf{U}) = 0$  (lembrando que o vetor  $\mathbf{U} = \{U_1 \ U_2 \ \dots \ U_n\}^T$  tem  $n$  variáveis aleatórias no espaço real) e obter parâmetros em notação matricial das distribuições correspondentes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{\Sigma}$ ,  $\mathbf{R}_U$ .

$$\mathbf{M} = \{\mu_{U_1} \ \mu_{U_2} \ \dots \ \mu_{U_n}\}^T \quad (2.35)$$

$$\mathbf{\Sigma} = \text{diag}\{\sigma_{U_1} \ \sigma_{U_2} \ \dots \ \sigma_{U_n}\} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{R}_U = \begin{bmatrix} \rho_{U_1U_1} & \rho_{U_1U_2} & \dots & \rho_{U_1U_n} \\ \rho_{U_2U_1} & \rho_{U_2U_2} & \dots & \rho_{U_2U_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{U_nU_1} & \rho_{U_nU_2} & \dots & \rho_{U_nU_n} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

onde  $\mathbf{M}$  é o vetor de medias das variáveis aleatórias,  $\mathbf{\Sigma}$  o vetor de desvios padrões das

variáveis aleatórias e  $\mathbf{R}_U$  é a matriz de coeficientes de correlação entre as variáveis aleatórias, todo no espaço real.

- 2) Alocar um ponto de partida  $\mathbf{U}$  no espaço real que geralmente é escolhido como o vetor das medias das variáveis aleatórias.

$$\mathbf{U} = \mathbf{M} = \{\mu_{U_1} \mu_{U_2} \dots \mu_{U_n}\}^T \quad (2.38)$$

- 3) Calcular a matriz  $\mathbf{R}_u$  dos coeficientes de correlação normais equivalentes pelo modelo de Nataf (1962), esta matriz pode ser transformada ao espaço Gaussiano Padrão correlacionado por (Melchers e Beck, 2018):

$$\rho_{u_i u_j}^e = F_{U_i U_j} \rho_{U_i U_j}, F_{U_i U_j} \geq 1 \quad (2.39)$$

$$\mathbf{R}_u = \begin{bmatrix} \rho_{u_1 u_1} & \rho_{u_1 u_2} & \dots & \rho_{u_1 u_n} \\ \rho_{u_2 u_1} & \rho_{u_2 u_2} & \dots & \rho_{u_2 u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{u_n u_1} & \rho_{u_n u_2} & \dots & \rho_{u_n u_n} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

onde  $\rho_{u_i u_j}^e$  é o coeficiente de correlação equivalente das variáveis aleatórias  $u_i$  e  $u_j$  (espaço Gaussiano Padrão correlacionado),  $\rho_{U_i U_j}$  é o coeficiente de correlação equivalente das variáveis aleatórias  $U_i$  e  $U_j$  (espaço real) e  $F_{U_i U_j}$  é um coeficiente que depende do tipo de distribuição e alguns parâmetros das mesmas (Melchers e Beck, 2018).

- 4) Calcular as médias e desvios padrões normais equivalentes no ponto de semente ou partida usando:

$$\sigma_{U_i}^e = \frac{\varphi\{\Phi^{-1}(F_{U_i}(U_i^k))\}}{f_{U_i}(U_i^k)} \quad (2.41)$$

$$\mu_{U_i}^e = U_i^k - \sigma_{U_i}^e \Phi^{-1}(F_{U_i}(U_i^k)) \quad (2.42)$$

onde  $\varphi$  é a FDP normal padrão (com média zero e desvio padrão unitário),  $\Phi^{-1}$  é a função inversa FCP normal padrão,  $F_{U_i}$  é a função cumulativa de probabilidade da variável  $U_i$  (FCP),  $f_{U_i}$  é a função de densidade de probabilidade da variável  $U_i$  (FDP),  $U_i^k$  é a variável aleatória  $i$  no espaço real na iteração  $k$ ,  $\mu_{U_i}^e$  e  $\sigma_{U_i}^e$  as médias e desvios

padrões normais equivalentes do ponto em estudo no espaço real (Melchers e Beck, 2018).

- 5) Montar os parâmetros para as distribuições normais equivalentes:

$$\mathbf{M}^{eq} = \{\mu_{U_1}^{eq} \mu_{U_2}^{eq} \dots \mu_{U_n}^{eq}\}^T \quad (2.43)$$

$$\mathbf{\Sigma}^{eq} = \text{diag}\{\sigma_{U_1}^{eq} \sigma_{U_2}^{eq} \dots \sigma_{U_n}^{eq}\} \quad (2.44)$$

- 6) Com  $\mathbf{\Sigma}^{eq}$  calcular a matriz de covariância no espaço reduzido e depois fatorar, por exemplo, por Decomposição Cholesky.

$$\mathbf{C}_u = \mathbf{\Sigma}^{eq} \mathbf{R}_u \mathbf{\Sigma}^{eq} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{C}_u = \mathbf{L}_u \mathbf{L}_u^T \quad (2.46)$$

- 7) Transformar o ponto de partida  $\mathbf{U}$  do espaço real para o espaço normal padrão não correlacionado ou reduzido  $\mathbf{u}$  usando transformação de Nataf (Melchers e Beck, 2018):

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}_u^{-1}(\mathbf{U} - \mathbf{M}^{eq}) \quad (2.47)$$

- 8) Avaliar a função de estado limite  $g(\mathbf{u})$  e o gradiente de  $g(\mathbf{u})$  no espaço reduzido, lembrando que:

$$\nabla g(\mathbf{u}) = \left( \frac{\partial g(\mathbf{u})}{\partial U_1} \frac{\partial U_1}{\partial u_1} \frac{\partial g(\mathbf{u})}{\partial U_2} \frac{\partial U_2}{\partial u_2} \dots \frac{\partial g(\mathbf{u})}{\partial U_n} \frac{\partial U_n}{\partial u_n} \right)^T \quad (2.48)$$

e usando diferenças finitas assim,

$$\Delta \mathbf{u}_i = (u_1 \ u_2 \ (u_i + \Delta u_i) \ \dots \ u_n)^T \quad (2.49)$$

$$\Delta \mathbf{U}_i = \mathbf{M}^{eq} + \mathbf{L}_z \Delta \mathbf{u}_i \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial g(\mathbf{u})}{\partial u_i} = \nabla g(\mathbf{U})_i = \frac{g(\mathbf{U}) - g(\Delta \mathbf{U})}{\Delta u_i} \quad (2.51)$$

- 9) Calcular o novo ponto  $u^{k+1}$  pela minimização da distância da função de estado limite até a origem usando a expressão do algoritmo HLRF da Equação (2.34):

$$\mathbf{u}^{k+1} = \frac{1}{\|\nabla g(\mathbf{u}^k)\|^2} [\nabla g(\mathbf{u}^k)^T \mathbf{u}^k - g(\mathbf{u}^k)] \nabla g(\mathbf{u}^k) \quad (2.52)$$

10) Calcular o novo ponto  $\mathbf{U}^{k+1}$  no espaço real:

$$\mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{M}^{eq} + \mathbf{L}_Z^k \mathbf{u}^{k+1} \quad (2.53)$$

11) Verificar a convergência do método com critério de erro relativo do ponto  $\mathbf{U}$  na iteração  $k+1$  e o erro da função de estado limite avaliada no ponto  $\mathbf{U}^{k+1}$  :

$$\frac{\|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|}{\|\mathbf{U}^{k+1}\|} \leq \varepsilon_U \quad (2.54)$$

e

$$\|g(\mathbf{U}^{k+1})\| \leq \varepsilon_g \quad (2.55)$$

Se  $\mathbf{U}^{k+1}$  atende os critérios de convergência vai para o passo 12, pelo contrário, tomar  $\mathbf{U}^{k+1}$  como novo ponto de partida e repetir os passos 4 a 11 até a convergência.

12) Calcular o índice de confiabilidade  $\beta$  usando:

$$\mathbf{U}^* \cong \mathbf{U}^{k+1}, \beta = \sqrt{\mathbf{U}^{*T} \mathbf{U}^*} \quad (2.56)$$

13) Calcular a probabilidade de falha ( $P_f$ ), com:

$$P_f^{FORM} = \Phi(-\beta) \quad (2.57)$$

### 2.3.2 Método de simulação de Monte Carlo no cálculo de probabilidade de falha (MC)

O método de Monte Carlo (MC) é um método de cálculo de probabilidade baseado no princípio de simulações aleatórias, apareceu no ano de 1949, com a publicação “The Monte Carlo Method” dos autores matemáticos John Von Neumann e Stanislaw Ulam. Este método apresenta facilidade para a implementação computacional serial e paralela, boa precisão, verificação estatística do erro e não precisa maiores conhecimentos matemáticos.

À medida que os problemas se tornam complexos, a simulação aparece como uma boa opção para estimar a confiabilidade. Caso se considere um sistema ou estrutura cujo desempenho é

definido por um conjunto de variáveis aleatórias  $\mathbf{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ , a função de estado limite (f.e.l)  $g(\mathbf{U})$  que define as regiões de falha e segurança e a função de densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias  $f_{\mathbf{U}}(\mathbf{U}) = f_{\mathbf{U}}(U_1, U_2, \dots, U_n)$ . No caso que a função  $g(\mathbf{U}) > 0$  indica que  $\mathbf{U}$  pertence a região segura ( $D_s$ ), caso contrário se define a região de falha ( $D_f$ ) e se  $g(\mathbf{U}) = 0$  o estado é de falha iminente, como pode-se ver na Figura 2.8. Em geral, a probabilidade de falha ( $P_f$ ) de uma estrutura ou sistema pode ser calculada como:

$$P_f = \int_{g(\mathbf{U}) < 0} f_{\mathbf{U}}(\mathbf{U}) d\mathbf{U} = \int_{D_f} f_{\mathbf{U}}(\mathbf{U}) d\mathbf{U} \quad (2.58)$$

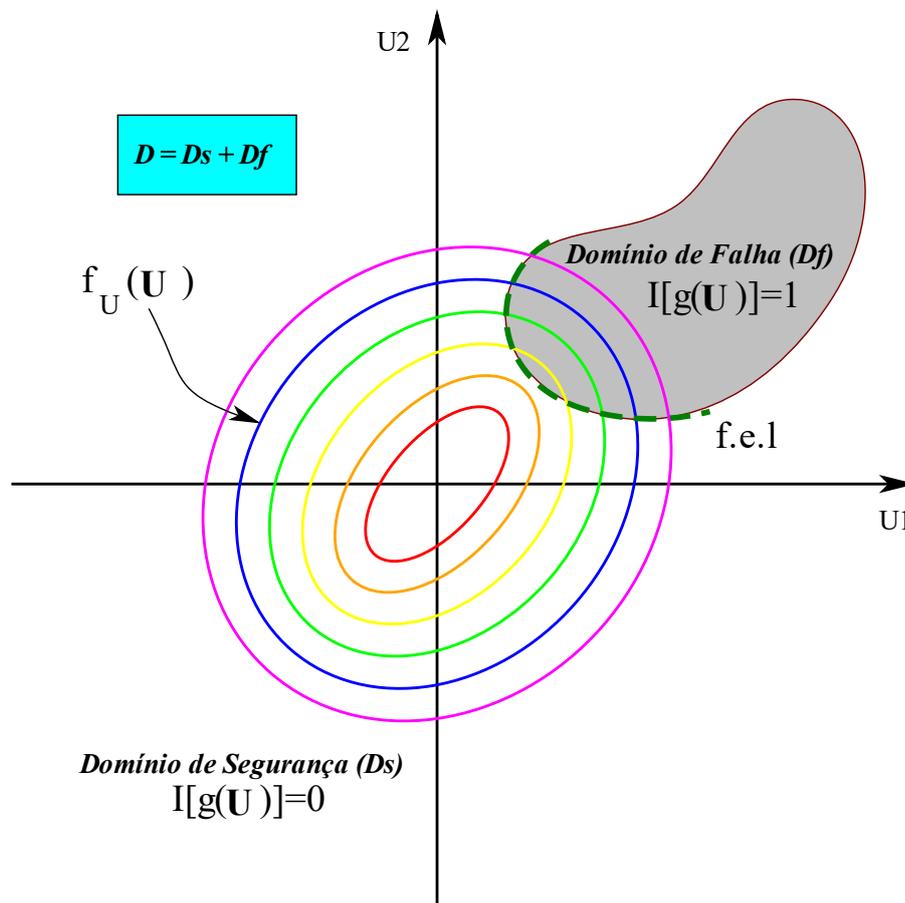


Figura 2.8 – Descrição dos elementos básicos para o cálculo de probabilidade de falha pelo método de Monte Carlo.

Pode-se definir uma função indicadora  $I$  tal que  $I[g(\mathbf{U})] = 1$  para  $g(\mathbf{U}) < 0$  (Domínio de falha -  $D_f$ ) e  $I[g(\mathbf{U})] = 0$  para  $g(\mathbf{U}) > 0$  (Domínio de segurança -  $D_s$ ). Então, a probabilidade de falha pode ser estimada como o valor esperado da função indicadora; isto é:

$$P_f = \int_{D_f} f_U(\mathbf{U}) dU = \int_D I[g(\mathbf{U})] f_U(\mathbf{U}) dU = E[I[g(\mathbf{U})]] \quad (2.59)$$

A função indicadora identifica o domínio da integração. A função  $g(\mathbf{U})$  é uma função de desempenho na análise de confiabilidade, portanto, a integração fornece a probabilidade de falha,  $P_f$ . Observa-se que a integração é realizada em todos os domínios onde as variáveis básicas são definidas (Domínio  $D=D_s+D_f$ ). Quando esta integração é avaliada teoricamente pelo método MC para infinitos pontos, a  $P_f$  pode ser calculada da seguinte maneira:

$$P_f = E\{I[g(\mathbf{U})]\} = \mu_I = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[g(\mathbf{U}_i)] \quad (2.60)$$

onde  $N$  é o número de simulações. Na prática é possível calcular um estimador de  $P_f$  (usa-se a notação  $\hat{P}_f$  para isso estimador) pelo método MC, assim:

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[g(\mathbf{U}_i)] \quad (2.61)$$

Lembrando a definição do coeficiente de variação aplicado a  $\hat{P}_f$ , tem-se:

$$CV_{\hat{P}_f} = \frac{\sigma_{\hat{P}_f}}{\mu_{\hat{P}_f}} \quad (2.62)$$

Avaliando o valor esperado do estimador de  $P_f$ , que é a média do estimador da probabilidade de falha, tem-se que:

$$\mu_{\hat{P}_f} = E[\hat{P}_f] = E\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[g(\mathbf{U}_i)]\right\} = \frac{1}{N} \left[ \sum_{i=1}^N E\{I[g(\mathbf{U}_i)]\} \right] = \frac{NP_f}{N} = P_f \quad (2.63)$$

O que mostra que estimador  $\hat{P}_f$  é um não tendencioso de  $P_f$ . Avaliando a variância do estimador de  $P_f$ , tem-se:

$$\sigma_{\hat{P}_f}^2 = E[(\hat{P}_f - \mu_{\hat{P}_f})^2] = E[(\hat{P}_f - P_f)^2] = E[\hat{P}_f^2 - 2\hat{P}_f P_f + P_f^2] = E[\hat{P}_f^2] - P_f^2 \quad (2.64)$$

De outra forma, se cada amostra para obter  $\mu_{\hat{P}_f}$  é independente, então a variância de  $\hat{P}_f$  será a soma das variâncias de cada amostra de  $P_f$ , assim:

$$\begin{aligned}\hat{P}_f &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{N} I[g(\mathbf{U}_i)] \Rightarrow \sigma_{\hat{P}_f}^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N}\right)^2 \text{VAR}\{I[g(\mathbf{U}_i)]\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{N}\right)^2 \{E[I[g(\mathbf{U}_i)]^2] - P_f^2\}\end{aligned}\quad (2.65)$$

Com isso obtém-se:

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{P}_f}^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{N}\right)^2 \{E[I[g(\mathbf{U}_i)]^2] - P_f^2\} = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sum_{i=1}^N \{E[I[g(\mathbf{U}_i)]] - P_f^2\} \\ &= \left(\frac{1}{N}\right)^2 (NP_f - NP_f^2) = \frac{P_f - P_f^2}{N}\end{aligned}\quad (2.66)$$

O que mostra que  $\sigma_{\hat{P}_f}^2$  é não tendencioso, pois para  $n \rightarrow \infty$ ,  $\sigma_{\hat{P}_f}^2 \rightarrow 0$ . Então colocando a Equação (2.66) e (2.63) na Equação (2.62):

$$CV_{\hat{P}_f} = \frac{\sigma_{\hat{P}_f}}{\mu_{\hat{P}_f}} = \frac{\sqrt{\frac{P_f - P_f^2}{N}}}{P_f} = \sqrt{\frac{1 - P_f}{NP_f}}\quad (2.67)$$

Se  $\hat{P}_f \rightarrow P_f$ , então se deve diminuir o  $CV_{\hat{P}_f}$  para que se tenha confiança no valor de  $\hat{P}_f$ .

O número de simulações para alcançar um coeficiente de variação  $CV_{\hat{P}_f}$  pode-se estimar isolando  $N$  da Equação (2.67) como:

$$N = \frac{1 - P_f}{(CV_{\hat{P}_f})^2 P_f}\quad (2.68)$$

Na Figura 2.9 é apresentado um gráfico que descreve o número de simulações  $N$  como uma função da probabilidade de falha requerida e do coeficiente de variação desejado, para isso usa-se a Equação (2.68) para construir o gráfico. A sensibilidade da probabilidade de falha nas mudanças no coeficiente de variação é alta. Uma pequena mudança em  $CV_{\hat{P}_f}$  pode causar mudanças muito importantes na estimativa da probabilidade de falha.

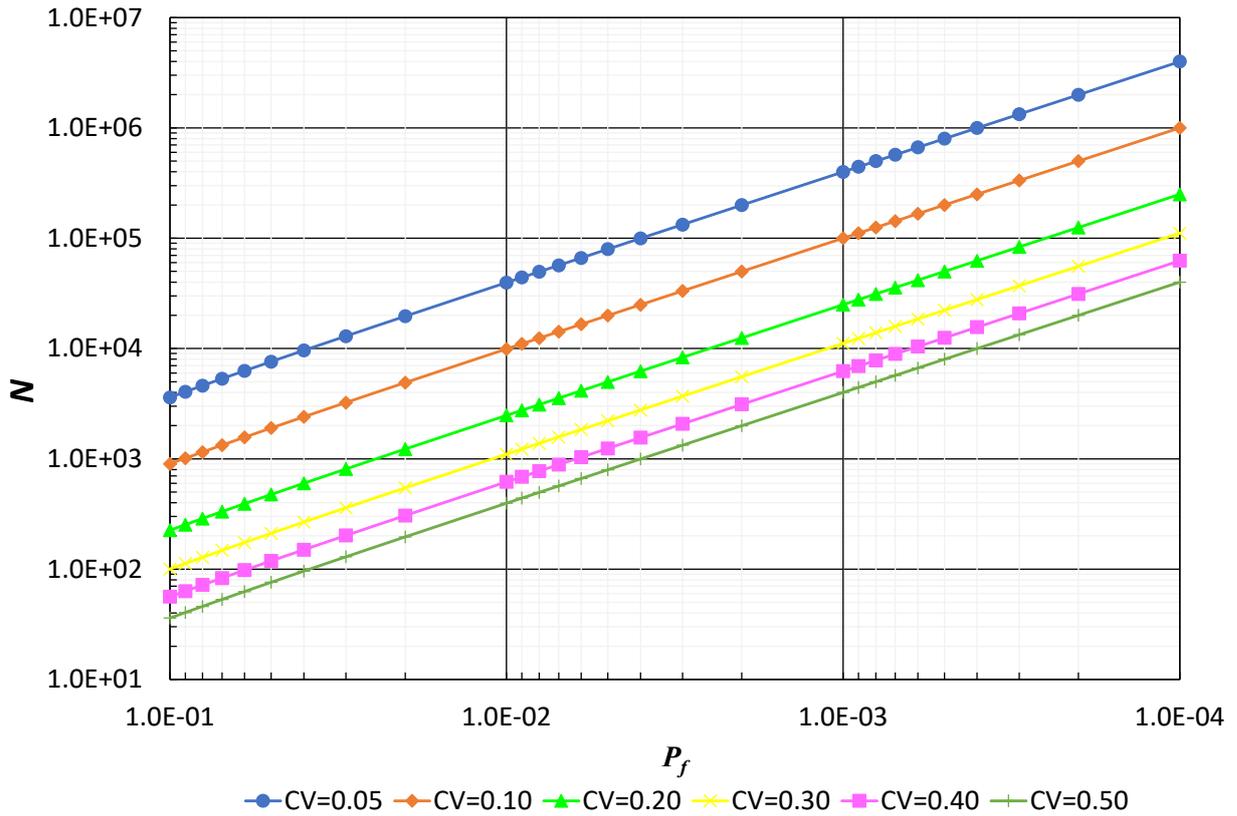


Figura 2.9 – Número de simulações de Monte Carlo necessários como função da probabilidade de falha esperada e da variância na resposta.

O coeficiente de variação pode ser estimado como:

$$CV_{\hat{P}_f} = \sqrt{\frac{1 - P_f}{NP_f}} \approx \sqrt{\frac{1}{NP_f}} \Big|_{P_f \rightarrow 0} \quad (2.69)$$

Para um objetivo de  $CV_{\hat{P}_f} = 0.1$  e uma probabilidade de falha  $P_f = 10^{-e}$ , pode-se obter um número de simulações  $N = 10^{e+2}$ .

Embora a simulação seja uma ferramenta muito valiosa, ela deve ser usada com cuidado. Por exemplo, um aspecto que requer atenção especial é o caso de variáveis correlacionadas. Para variáveis aleatórias normais correlacionadas, métodos como a decomposição de Cholesky podem ser usados (Haldar e Mahadevan, 2000b; Nowak, 2000a); para variáveis correlacionadas arbitrárias, existem outros métodos disponíveis (Melchers e Beck, 2018). Além disso, definir o número de simulações necessárias para obter uma solução confiável também é uma tarefa difícil que depende do resultado real, por exemplo, se a probabilidade de falha for estimada em cerca de  $10^{-4}$  então o número de simulações necessárias deve ser maior que  $10^4$ . Embora vários

modelos estatísticos tenham sido propostos para selecionar o número de simulações (Haldar e Mahadevan, 2000b); a melhor abordagem consiste em projetar o valor esperado e a variância do resultado em função do número de simulações; neste caso, a solução é alcançada na convergência.

Claramente, o custo computacional da simulação é uma questão central. O custo computacional cresce com o número de variáveis e a complexidade da função de estado limite. Então, para reduzir o número de simulações, várias técnicas de redução de variáveis foram propostas. Entre os mais utilizados estão a amostragem de importância, a simulação direcional, o uso de variáveis antitéticas e amostragem estratificada (Melchers e Beck, 2018; Ross, 2012). Recentemente, devido ao aumento do crescimento das capacidades computacionais, os métodos de simulação aprimorados ganharam impulso. Alguns exemplos são simulação de subconjuntos (Au e Beck, 2001), simulação melhorada de Monte Carlo (Naes et. al., 2009), métodos que utilizam o substituto da função de estado limite com base em expansões de polinômios de caos e kriging (Sudret 2008, 2012) e técnicas de aprendizagem estatística (Hurtado, 2004).

### 2.3.2.1 Algoritmo de Monte Carlo com amostragem direto

Para o algoritmo tem-se o conjunto de valores  ${}^jU_i$  das variáveis aleatórias do problema (variáveis do problema na simulação  $j$  no espaço real,  ${}^jU$ ), onde  $j = \{1, \dots, N\}$ , com  $N$  igual a o número de simulações das variáveis aleatórias do problema e  $i = \{1, \dots, n\}$ , com  $n$  igual a o número de variáveis aleatórias do problema, o conjunto de valores  ${}^jW_i$  das variáveis aleatórias na simulação  $j$  com distribuição uniforme (variáveis do problema obtidas por método de transformada inversa,  ${}^jW$ ) e o conjunto de valores  ${}^jZ_i$  das variáveis aleatórias reduzidas na simulação  $j$  (variáveis do problema na simulação  $j$  no espaço reduzido,  ${}^jZ$ ). Usando a técnica de transformação inversa para a geração das mostras tem-se a versão simples do método Monte Carlo, mas isto tem um custo computacional alto, já que, não é uma amostragem inteligente.

O método MC tem os seguintes passos:

1. Simular número aleatórios entre 0 e 1 na quantidade de simulações e variáveis aleatórias a gerar:

$${}^jW = ({}^jW_1 \quad {}^jW_2 \quad \dots \quad {}^jW_n)^T \quad (2.70)$$

2. Avaliar as variáveis aleatórias normalizadas e não correlacionadas:

$${}^j\mathbf{Z} = \Phi^{-1}({}^j\mathbf{W}) \quad (2.71)$$

3. Impor a correlação no espaço reduzido (está implícito ter feito transformação de  $\mathbf{R}_U$  para  $\mathbf{R}_Z$  e a fatoração Cholesky):

$${}^j\mathbf{Z}_c = L_Z {}^j\mathbf{Z} \quad (2.72)$$

4. Obter as variáveis uniformes e correlacionadas:

$${}^j\mathbf{W}_c = \Phi({}^j\mathbf{Z}_c) \quad (2.73)$$

5. Usar a transformação probabilística inversa para a distribuição de Probabilidade desejada e obter as variáveis no espaço real e correlacionado:

$${}^j\mathbf{U}_c = F_U^{-1}({}^j\mathbf{W}_c) \quad (2.74)$$

6. Avaliar a função de estado limite para cada amostra:

$$g({}^j\mathbf{U}_c) \quad (2.75)$$

7. Avaliar  $P_f$  e  $CV_{\hat{P}_f}$  até que haja convergência  $CV_{\hat{P}_f} < \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é uma tolerância que pode ter um valor referente de 0.02 ou 0.05 (2% ou 5%), caso contrário retornar ao passo 1:

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[g(\mathbf{U}_i)] \quad (2.76)$$

$$CV_{\hat{P}_f} = \sqrt{\frac{1 - P_f}{nP_f}}$$

### 2.3.3 Método de simulação de Monte Carlo com amostragem por importância (MCI)

A eficiência de uma simulação pode ser melhorada se houver informações adicionais sobre o problema; e uma maneira de fazê-lo é ter uma estimativa das combinações de valores das variáveis que mais contribuem para a determinação da probabilidade. No método de Monte Carlo com amostragem por importância (MCI), a análise concentra-se na área que mais

contribui para a probabilidade de falha e não se estende por todo o domínio de valores das variáveis aleatórias.

Como foi mostrado no método de Monte Carlo, a probabilidade de falha é estimada como:

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[g(\mathbf{U}_i)] = \frac{N_f}{N} \quad (2.77)$$

Onde  $N_f$  é o número de falhas,  $N$  é o número de simulações e  $\mathbf{U}_i = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  é o valor das variáveis aleatórias na simulação  $i$ .

Na amostragem por importância, uma nova função  $f_w(\mathbf{U})$  é definida, denomina-se função de densidade de probabilidade conjunta da amostragem, mostrada esquematicamente na Figura 2.10. Qualitativamente, pode-se ver que esta função de amostragem  $f_w(\mathbf{U})$  está centrada ou focada no ponto do projeto da função de estado limite, e a amostragem estatística será concentrada ali para o cálculo da probabilidade de falha. Uma vez definida esta função, a probabilidade de falha pode-se deduzir sua estimativa como:

$$\begin{aligned} P_f &= \int_{D_f} f_U(\mathbf{U}) d\mathbf{U} = \int_D I[g(\mathbf{U})] f_U(\mathbf{U}) d\mathbf{U} = \int_D I[g(\mathbf{U})] \frac{f_U(\mathbf{U})}{f_w(\mathbf{U})} f_w(\mathbf{U}) d\mathbf{U} \\ &= \int_D I_w[g(\mathbf{U})] f_w(\mathbf{U}) d\mathbf{U} = E[I_w[g(\mathbf{U})]] \end{aligned} \quad (2.78)$$

com:

$$I_w[g(\mathbf{U})] = I[g(\mathbf{U})] \cdot \frac{f_U(\mathbf{U})}{f_w(\mathbf{U})} \quad (2.79)$$

Então, por estatística pode-se estimar a probabilidade de falha assim:

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_w[g(\mathbf{U}_i)] \quad (2.80)$$

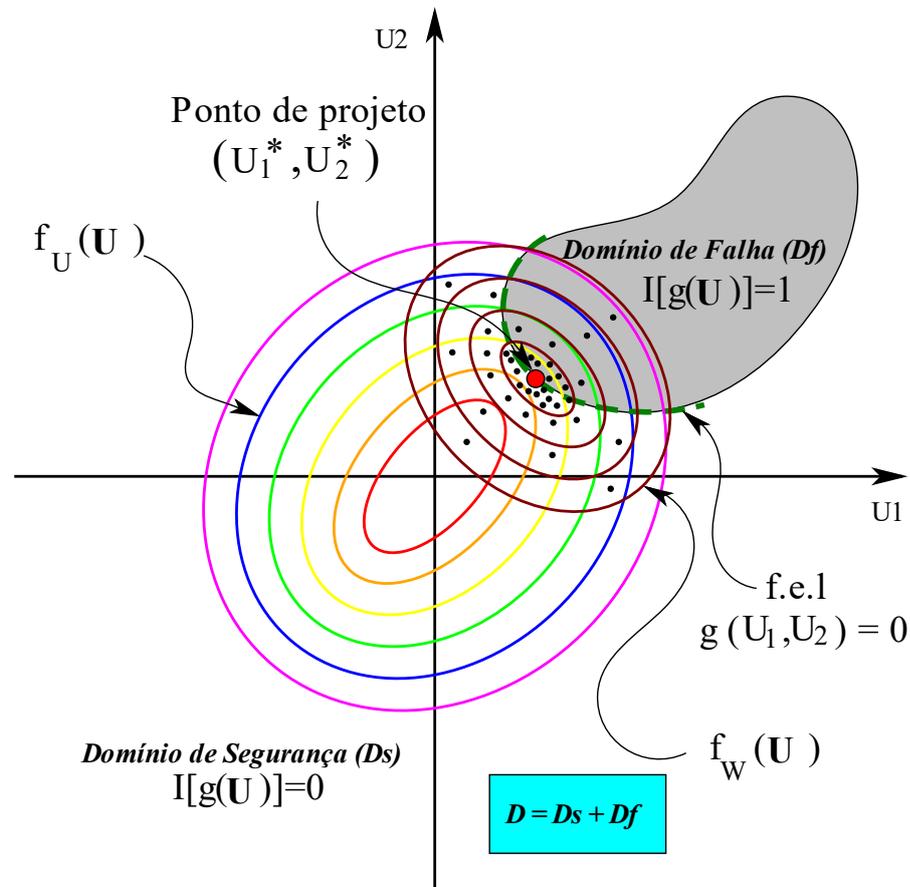


Figura 2.10 – Descrição dos elementos básicos para o cálculo de probabilidade de falha pelo método de Monte Carlo com amostragem por importância.

A seleção da função  $f_w(U)$  não é uma tarefa fácil e depende da experiência do avaliador. Os métodos mais utilizados para a seleção de  $f_w(U)$  são discutidos em detalhes por autores como Haldar e Mahadevan (2000b), Ross (2012) e Melchers e Beck (2018). Como a região a ser amostrada não é conhecida exatamente, é necessário fazer uma estimativa do ponto do projeto  $U^*$ . Algumas alternativas para esse fim são:

- Encontrar um valor próximo ao ponto de projeto  $U^*$  usando os métodos de transformação e segundo ordem, como FORM ou SORM.
- Definir  $U^*$  como o valor máximo da função  $f_U(U)$  sobre a função de estado limite.
- Definir  $U^*$  arbitrariamente, por exemplo, um ponto na região de falha o mais próximo possível do valor máximo da função  $f_U(U)$ .
- Definir  $f_w(U) = f_U(U)$ , de tal forma que a média seja  $U^*$ , isso é uma translação da função  $f_U(U)$ . Detalhes podem ser encontrados em Melchers e Beck (2018).
- Escolher  $f_w(U) = \Phi(U^*, C_V)$ ; onde  $\Phi()$  é a função de distribuição normal conjunta e  $C_V$

é uma matriz de covariância de tipo diagonal onde a correlação entre variáveis é 0 e os valores  $\sigma_i^2$  ficam na diagonal. Esta solução produz pontos de amostra que não são tendenciosos em relação a cada variável e permitem maior densidade na região de interesse. Mais detalhes podem ser encontrados em Melchers e Beck (2018).

O método executa amostragem na função  $f_W(\mathbf{U})$  e não em  $f_U(\mathbf{U})$ . Melchers e Beck (2018) discutem extensivamente as vantagens e dificuldades da aplicação prática deste método.

### 2.3.3.1 Algoritmo de Monte Carlo com amostragem por importância (MCI)

Um resumo do método MCI tem os seguintes passos:

1. Definir a função de estado limite  $g(\mathbf{U}) = 0$ , com vetor  $\mathbf{U} = \{U_1 U_2 \dots U_n\}^T$ .
2. Definir a função de densidade das variáveis  $U_i$  e a função de densidade conjunta  $f_U(\mathbf{U})$ .
3. Identificar o ponto de projeto  $\mathbf{U}^*$  (ponto de máxima probabilidade sobre a função de estado limite).
4. Gerar um vetor de números aleatórios  $\mathbf{U}_i$  com distribuição normal, média  $\mathbf{U}^*$  e matriz de covariância  $\mathbf{C}_V$  com base na função de densidade de amostragem  $f_W(\mathbf{U}) = \Phi(\mathbf{U}^*, \mathbf{C}_V)$ .
5. Calcular a probabilidade de falha para cada iteração como:

$$\hat{P}_{f_i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_W [g(\mathbf{U}_i)] \quad (2.81)$$

com:

$$I_W [g(\mathbf{U}_i)] = I [g(\mathbf{U}_i)] \cdot \frac{f_U(\mathbf{U}_i)}{f_W(\mathbf{U}_i)} \quad (2.82)$$

6. Repetir os passos 4 e 5 um número  $N$  de vezes.
7. Determinar a probabilidade de falha ( $P_f$ ) assim:

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{P}_{f_i} \quad (2.83)$$

### 2.3.4 Método de simulação de Monte Carlo com amostragem por Hipercubo Latino (MCLH)

Dentro das técnicas de redução da variância, o método de amostragem por Hipercubo Latino

(“Latin Hypercube Sampling”- LHS) é um dos mais simples. Este método foi proposto por McKay et al. (1979) e estendido por Iman (1980) e outros.

Neste método, a amostragem é realizada de forma uniforme em um hipercubo cujo centro é o ponto de projeto (é um jeito para aplicar o método usando o ponto de projeto) como mostrado na Figura 2.11; em geral, basta tomar um hipercubo  $p$  centrado em  $U^*$ . Os lados do hipercubo são paralelos aos eixos de referência. A densidade uniforme da função no hipercubo é  $f_w(U) = 1/V(p)$ , onde  $V(p)$  é o volume do hipercubo. A probabilidade de falha é escrita como:

$$P_f = \int_p I[g(\mathbf{U})] \frac{f_U(\mathbf{U})}{f_w(\mathbf{U})} f_w(\mathbf{U}) dvol = \int_p I[g(\mathbf{U})] \frac{f_U(\mathbf{U})}{V(p)} V(p) dvol \quad (2.84)$$

A estimativa desta integral é dada pela expectativa matemática da variável  $I[g(\mathbf{U})]f_U(\mathbf{U})V(p)$  para um vetor aleatório  $U$  uniformemente distribuído em  $V(p)$ :

$$\hat{P}_f = \frac{V(p)}{N} \sum_{i=1}^N I[g(\mathbf{U}_i)]f_U(\mathbf{U}_i) \quad (2.85)$$

Na literatura o método de Hipercubo Latino é considerado ineficiente para probabilidades pequenas.

As Equações (2.84) e (2.85) descrevem uma alternativa para o método MCLH, mas tem outras formas simples de usá-lo.

A técnica de amostragem por Hipercubo Latino (LHS) é uma forma mais avançada e eficiente para métodos de simulação de Monte Carlo. A única diferença entre LHS e a técnica de amostragem direta de Monte Carlo é que LHS tem uma amostragem com “memória”, o que significa que evita amostras repetidas que foram avaliadas antes (evita amostras de agrupamento). Também faz que os extremos de uma distribuição participem do processo de amostragem. Geralmente, a técnica de Amostragem de Hipercubo Latino requer 20% a 40% menos de ciclos de simulações que a técnica de Simulação de Monte Carlo Direto para fornecer os mesmos resultados com a mesma precisão. No entanto, esse número depende em grande parte do problema.

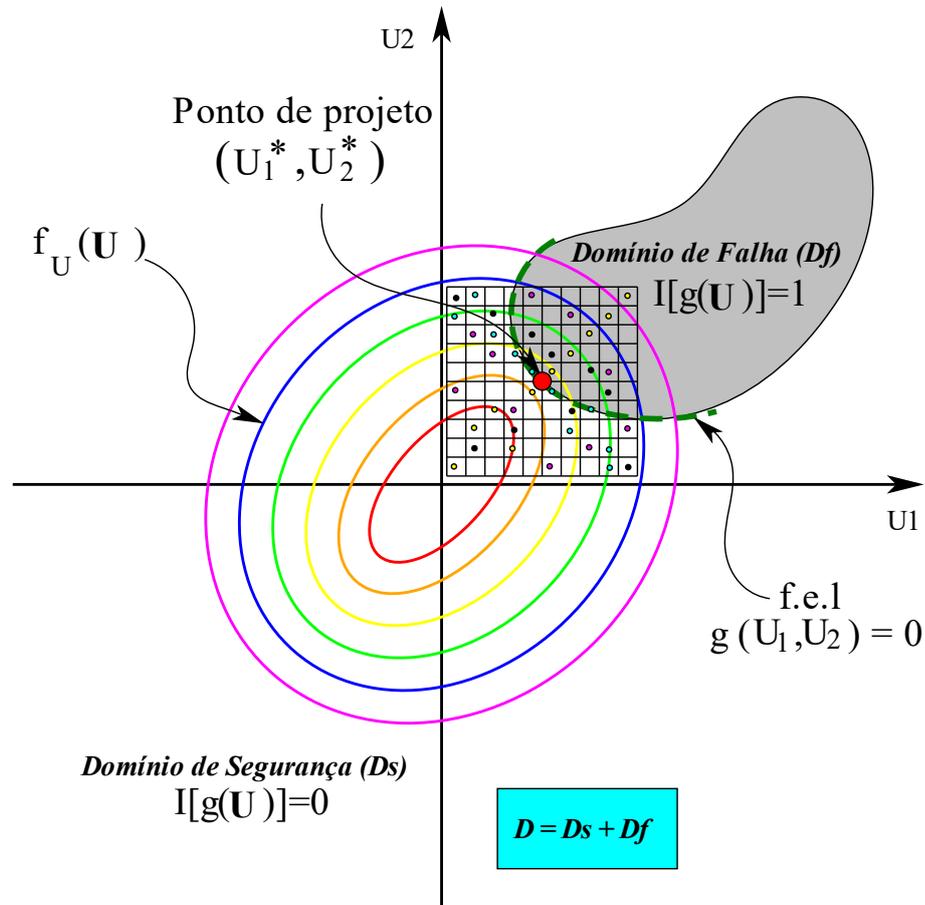


Figura 2.11– Descrição dos elementos básicos para o cálculo de probabilidade de falha pelo método de Monte Carlo com amostragem por Hipercubo Latino.

Para a técnica de Amostragem por Hipercubo Latino, o intervalo de todas as variáveis de entrada aleatória é dividido em  $m$  intervalos com igual probabilidade, onde  $m$  é o número de pontos de amostragem. Para cada variável aleatória, cada intervalo é atingido apenas uma vez com um ponto de amostragem. O processo de geração de pontos de amostragem com o Hipercubo Latino tem “memória”, no sentido de que os pontos de amostragem não podem se agrupar, porque estão restritos no intervalo respectivo. Uma ilustração de uma amostra com um tamanho de amostra de 12 é gerado com método de amostragem de Hipercubo Latino para duas variáveis aleatórias  $u_1$  e  $u_2$  ambas com distribuição uniforme como mostra a Figura 2.12.

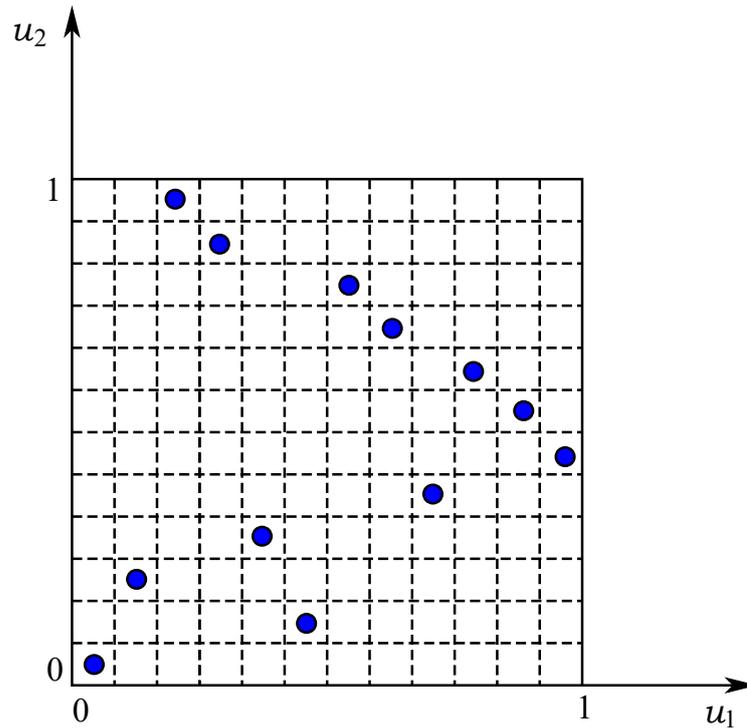


Figura 2.12 – Amostra de tamanho 12 gerada com o método de amostragem de Hipercubo Latino para duas variáveis aleatórias  $u_1$  e  $u_2$  (distribuição uniforme).

Existem várias maneiras de determinar a localização de um ponto de amostragem dentro de um determinado intervalo:

- Localização aleatória: dentro do intervalo, o ponto de amostragem é posicionado em uma localização aleatória que concorda com a função de distribuição da variável aleatória dentro do intervalo.
- Localização mediana: dentro do intervalo, o ponto de amostragem é posicionado na posição do 50% conforme é determinado pela função de distribuição da variável aleatória dentro do intervalo.
- Valor médio: dentro do intervalo, o ponto de amostragem é posicionado na posição do valor médio conforme determinado pela função de distribuição da variável aleatória dentro do intervalo.

Autores como Íman e Conover (1980) tem mais detalhes.

#### 2.3.4.1 Algoritmo de Monte Carlo com amostragem por Hipercubo Latino (MCLH)

Um resumo do método MCLH tem os seguintes passos:

1. Para cada variável aleatória  $U$  gerar um ponto dentro do subintervalo ( $m$  subintervalos).
2. O primeiro ponto do cubo latino é gerado amostrando uma variável das anteriores para cada eixo. O segundo ponto é gerado da mesma forma só que os pontos anteriormente escolhidos são excluídos da lista dos subintervalos. São gerados  $m$  amostras desta forma.
3. A probabilidade de falha é estimada como usualmente em Monte Carlo direto:

$$\hat{P}_f = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I[g(U_i)] \quad (2.86)$$

4. O procedimento é repetido  $n$  vezes, e a probabilidade de falha é então avaliada como:

$$\hat{P}_f = \frac{1}{nm} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m I[g(U_{i,j})] \quad (2.87)$$

5. Terminar as simulações quando o  $CV_{\hat{P}_f}$  avaliado como no método Monte Carlo multiplicado por  $1/(nm)$  seja inferior a uma tolerância especificada (convergência  $CV_{\hat{P}_f} < \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é uma tolerância que pode ter um valor referente de 0.02 ou 0.05 (2% ou 5%), assim:

$$CV_{\hat{P}_f} = \sqrt{\frac{1 - P_f}{nmP_f}} < \varepsilon \quad (2.88)$$

### 3 MÉTODOS PARA GERAR CAMPOS ALEATÓRIOS E MODELO CONSTITUTIVO DE SOLO MOHR-COULOMB

Nesta seção mostra-se um resumo da base teórica dos principais métodos para a geração de campos aleatórios. Pelo reconhecimento científico, liderança e grande número de publicações encontradas dos autores Fenton e Griffiths na área de modelagem probabilística de problemas geotécnicos incluindo campos estocásticos, usa-se como referência Fenton e Griffiths (2008), também se emprega como software de referência em versões compiladas e fonte o programa RFEM de Fenton e Griffiths (2008).

Considerando o exposto, este capítulo tem para estudo de detalhes dos métodos para gerar campos aleatórios a referência mencionada, incluindo o método utilizado para os exemplos de teste desta tese, o método *Local Average Subdivision* - LAS, publicado por Fenton e Vanmarcke (1990) e implementado no RFEM como gerador de campo deste software. Na literatura relatada no estado da arte desta tese pode-se observar que diferentes autores de publicações recentes (na área de campos aleatórios aplicados a problemas geotécnicos) entre 2013 e 2018, utilizaram o software RFEM ou seus componentes como ferramentas para investigar ativamente na área. A seguir, a teoria básica dos campos aleatórios.

Na análise e projeto de engenharia civil, a necessidade de incluir incertezas e variabilidade espacial dos materiais é cada vez mais considerada, a fim de aumentar o rigor dos critérios de segurança e desempenho em obras de infraestrutura. Assim surgem alternativas de modelagem como o método de elementos finitos estocásticos ou aleatórios, onde todos os desenvolvimentos alcançados pela pesquisa em três áreas se juntam, como a modelagem de elementos finitos, a análise de confiabilidade e a geração de campos aleatórios. No caso deste capítulo, a teoria básica dos diferentes algoritmos para a geração de campos aleatórios é apresentada de forma resumida, tendo como foco o método LAS utilizado nos problemas de teste e o problema objetivo desta tese no capítulo 5.

Os métodos mais comuns para a geração de campos aleatórios estão representados nas seguintes alternativas:

1. Decomposição da matriz de covariância
2. Métodos de Média Móvel (MA)

3. Método Discreto de Transformada de Fourier (DFT)
4. Método de Bandas Rotativas (TBM)
5. Método de Transformada Rápida de Fourier (FFT)
6. Método de Subdivisão Média Local (LAS)

Todos os métodos, precisam da média e covariância da variável aleatória para representar o campo desta. Podem gerar-se campos gaussianos e não gaussianos, mas no último caso precisa-se de transformações não lineares de campos gaussianos com alguns cuidados (Fenton e Griffiths, 2008). Os métodos TBM, FFT e LAS são geralmente muito mais eficientes do que os três primeiros métodos (Fenton e Griffiths, 2008).

### 3.1 DECOMPOSIÇÃO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA

É um método direto de produção de um campo aleatório homogêneo com estrutura de covariância prescrita. Tem como vantagem a simplicidade e precisão, mas só é útil para pequenos campos (Fenton e Griffiths, 2008), isto porque a base do método precisa da decomposição Cholesky de uma matriz de covariância  $C$ , definida positiva e que acrescenta seu tamanho muito rápido com o aumento de tamanho da malha colocada para gerar o campo.

Sabe-se que a decomposição Cholesky pode ter problemas de erro quando as matrizes estão mal condicionadas e torna-se singulares, esta situação ocorre frequentemente em matrizes de covariância (Fenton e Griffiths, 2008), o que implicaria técnicas para melhorar o condicionamento da matriz e, portanto, custos computacionais adicionais que restringem a aplicação geral do método para a geração de campos aleatórios.

### 3.2 MÉTODO DE MÉDIA MÓVEL

Journel e Huijbregts (1978), Mantoglou e Wilson (1981), Naganum et al. (1987), Mignolet e Spanos (1992) e Spanos e Mignolet (1992) apresentam tópicos relacionados a este método. O método de Média Móvel (MA) tem como ponto negativo que ele é lento e a formulação introduz algum erro na covariância estimada para cada realização. Alguns estudos podem ser encontrados na literatura para melhorar estes aspectos, como a introdução de um fator de correção de multiplicação para a remoção de erros na covariância estimada (Journel e Huijbregts, 1978), também o método de Média Móvel (MA) pode ser combinado com o método Auto Regressivo (AR) para chegar ao modelo MA Auto Regressivo Bidimensional (ARMA)

sugerido por Naganum et al. (1987). Verificou-se que este método é 2 a 6 vezes mais lento que o método FFT e no caso tridimensional são estimadas velocidades entre 15 e 80 vezes mais lentas que o método FFT.

Fenton e Griffiths (2008) mostram que a abordagem de Média Móvel em duas dimensões é pelo menos 10 vezes mais lenta que a abordagem FFT. Em três dimensões, estima-se que o método MA é 100 vezes mais lento que a abordagem FFT correspondente.

### **3.3 MÉTODO DISCRETO DA TRANSFORMADA DE FOURIER**

O método é baseado na representação espectral de campos aleatórios contínuos quadrados homogêneos (Yaglom, 1962).

De acordo com Fenton e Griffiths (2008), o método MA tem as seguintes características:

- Potencialmente preciso.
- Computacionalmente lento para tamanhos de campo razoáveis e funções típicas de densidade espectral.
- Eficiência comparável com o método de Média Móvel (MA).
- A principal vantagem sobre a abordagem MA é que a função de densidade espectral é estimada na prática usando técnicas padrão.

### **3.4 MÉTODO DE BANDAS ROTATIVAS**

Matheron (1973), Mantoglou e Wilson (1981) apresentam tópicos relacionados a este método. O método de Bandas Rotativas (TRB) admite a simulação de campos aleatórios no espaço bidimensional (2D) ou superior usando uma série de processos unidimensionais (1D) ao longo de linhas que cruzam o domínio.

De acordo com Fenton e Griffiths (2008), o método TRB tem as seguintes características:

- Requer um gerador unidimensional existente ou processo de linha (por exemplo, FFT ou LAS).
- Tem aparência listrada da realização quando um número insuficiente de linhas, são usados. Usando um número maior de linhas o método fornece mais precisão, porém isto acrescenta tempo computacional.

- Há dificuldades em verificar o aspecto listrado em três dimensões e mais, porque não é possível visualizar adequadamente esta condição.
- A aparência listrada pode afetar o comportamento ou cálculos onde os campos aleatórios gerados são utilizados.

A Figura 3.1 representa a realização de um processo bidimensional utilizando o TBM com 16 linhas, pode-se notar que a figura tem uma aparência listrada, entretanto, pode-se utilizar o TBM com 64 linhas e observar na Figura 3.2 que a aparência listrada neste caso é insignificante.

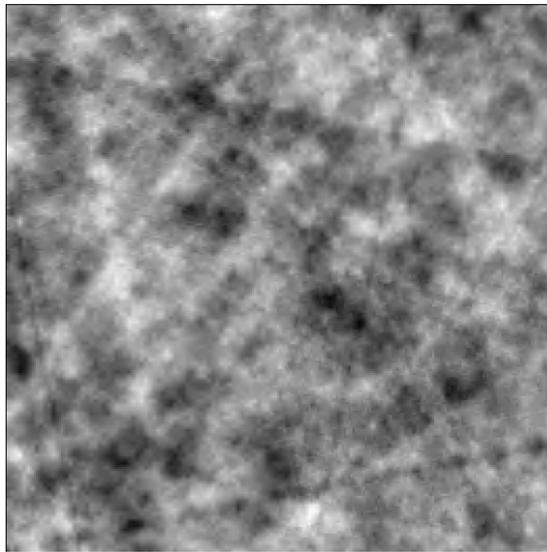


Figura 3.1 – Função da amostra do campo bidimensional através de TBM usando 16 linhas

Fonte: Fenton e Griffiths (2008)

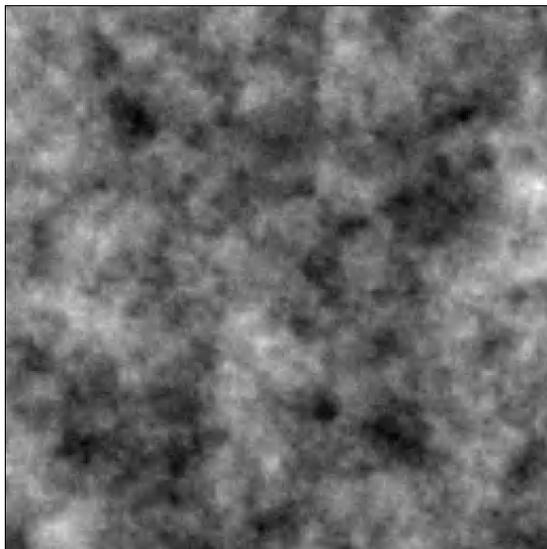


Figura 3.2 – Função da amostra do campo bidimensional através de TBM usando 64 linhas

Fonte: Fenton e Griffiths (2008)

### 3.5 MÉTODO DE TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

O método de Transformada Rápida de Fourier (FFT) foi desenvolvido por Cooley e Tukey (1965), e depois encontra-se contribuições de Shinozuka e Jan (1972).

De acordo com Fenton e Griffiths (2008) as principais características deste método são:

- É muito mais eficiente em termos computacionais que a DFT. Por exemplo, em uma dimensão o FFT será aproximadamente 2000 vezes mais rápido que o DFT.
- Tem a suposição da periodicidade do processo que conduz a uma estrutura simétrica do covariância, isto é a desvantagem principal às aproximações de DFT e de FFT em relação à estrutura de covariância.
- Devido à estreita relação entre a discretização espacial e de frequência, deve ser exercido um cuidado considerável ao definir inicialmente o campo espacial e sua discretização, então isto afeta a facilidade de uso.
- Tem grande vantagem para calcular campos anisotrópicos sem sacrifício da eficiência.
- É útil para a geração de processos fractais.

### 3.6 MÉTODO DE SUBDIVISÃO MÉDIA LOCAL

O conceito fonte da abordagem do método de Subdivisão Média Local (LAS) derivou-se do algoritmo de subdivisão estocástica descrito por Carpenter (1980) e Fourier et al. (1982); depois Lewis (1987) generalizou a abordagem para permitir a modelagem de espectros de potência arbitrários sem eliminar a problema de sobreposição comumente conhecido como “*aliasing*”. Voss (1985) e Peitgen e Saupe (1988) tentaram eliminar o problema de “*aliasing*” com sucesso, adicionando aleatoriedade para todos os pontos de cada estágio da subdivisão em um método chamado Adições Aleatórias Sucessivas, no entanto, a consistência interna facilmente alcançada pelos métodos de deslocamento do ponto médio é amplamente perdida com a técnica de adições aleatórias sucessivas (Fenton e Griffiths, 2008).

O método de Subdivisão Média Local (LAS) de Fenton e Vanmarcke (1990), resolve os problemas associados aos métodos de subdivisão estocástica e incorpora nele conceitos da teoria da média local. O algoritmo é ilustrado por um processo de Markov, com uma função de correlação exponencial simples, bem como por um processo auto semelhante chamado de ruído gaussiano fracionário, conforme definido por Mandelbrot e Van Ness (1968). Os processos de

tipo auto semelhante foram demonstrados por Mandelbrot (1982), Voss (1985), e outros pesquisadores como Mohr (1981), Peitgen e Saupe (1988), Whittle (1956), eles são representativos de diferentes formas naturais e padrões. No campo experimental, Fenton (1999(b)) encontrou comportamento fractal em registros CPT tomadas na Noruega.

De acordo com Fenton e Griffiths (2008) o método LAS tem as seguintes características:

- É difícil de implementar porém é fácil de usar, rápido e preciso.
- A vantagem do uso de médias locais presentes no método é que elas são ideais para modelagem estocástica de elementos finitos usando funções de interpolação eficientes e de baixa ordem.

Os tópicos seguintes mostram o resumo dos algoritmos LAS para uma e duas dimensões. Para uma melhor compreensão do assunto ver Fenton e Griffiths (2008).

### 3.6.1 Subdivisão Média Local Unidimensional

O método LAS prossegue com a construção de um processo de média local no domínio do mapeamento que para o caso de uma dimensão é uma linha que é progressivamente subdividida. O método tem recursividade e isto é executado de cima para baixo, como está ilustrado na Figura 3.3. Na etapa ou estado 0, é gerada uma média global para o processo que deve ser mantida para as etapas seguintes. Na etapa 1, o domínio é subdividido em duas regiões cujas médias "locais" devem, por sua vez, ser calculadas como médias com o valor global (ou pai). Os passos seguintes são obtidos subdividindo cada célula "pai" e gerando valores para as duas regiões resultantes ou "filhos", preservando a média ascendente. A média global deve permanecer constante durante toda a subdivisão, o que é assegurado pela exigência de que a média de cada par gerado seja equivalente ao valor da célula "pai".

Etapa 0	$Z_1^0$							
Etapa 1	$Z_1^1$				$Z_2^1$			
Etapa 2	$Z_1^2$	$Z_2^2$	$Z_3^2$	$Z_4^2$	$Z_5^2$	$Z_6^2$	$Z_7^2$	$Z_8^2$
Etapa 3	$Z_1^3$	$Z_2^3$	$Z_3^3$	$Z_4^3$	$Z_5^3$	$Z_6^3$	$Z_7^3$	$Z_8^3$
Etapa 4								

Figura 3.3–Abordagem descendente na construção do LAS do processo aleatório médio local.

Fonte: Fenton e Griffiths (2008)

O algoritmo tem os seguintes passos (Fenton e Griffiths, 2008):

1. Gerar aleatoriamente uma média global normalmente distribuída (mostrada como  $Z_1^0$  na Figura 3.3) com média zero e variância obtida da teoria de média local (Etapa 0).
2. Subdividir o campo ou domínio em duas partes iguais.
3. Gerar dois valores normalmente distribuídos  $Z_1^1$  e  $Z_2^1$  cujos valores meios, e variâncias. (Etapa 1) são selecionados para satisfazer três critérios:
  - a) eles mostram a variação correta de acordo com a teoria da média local.
  - b) eles estão devidamente correlacionados uns com os outros.
  - c) a média dos valores médios dos filhos é igual ao valor médio pai,
 
$$\frac{1}{2}(Z_1^1 + Z_2^1) = Z_1^0.$$
 Ou seja, as distribuições de  $Z_1^1$  e  $Z_2^1$  estão condicionadas ao valor de  $Z_1^0$ . Em outras palavras a média global do pai é preservada.
4. Subdividir cada célula da etapa 1 em duas partes iguais.
5. Gerar dois valores normalmente distribuídos,  $Z_1^2$  e  $Z_2^2$ , cujos valores meios e variâncias (Etapa 2) são selecionados de modo a satisfazer quatro critérios:
  - (a) eles mostram a variação correta de acordo com a teoria da média local
  - (b) eles estão devidamente correlacionados uns com os outros
  - (c) eles preservam a valor médio original ou pai,  $\frac{1}{2}(Z_1^2 + Z_2^2) = Z_1^1$
  - (d) eles estão devidamente correlacionados com  $Z_3^2$  e  $Z_4^2$

O terceiro critério implica o condicionamento das distribuições dos filhos  $Z_1^2$  e  $Z_2^2$  sobre o valor do pai  $Z_1^1$ . O quarto critério só será satisfeito aproximadamente pelo condicionamento de suas distribuições também sobre o valor pai  $Z_2^1$ .
6. A partir de agora, o processo segue as regras já mostradas nas etapas anteriores.

A filosofia do método LAS unidimensional é a base do método multidimensional, por isso, abaixo são mostrados apenas alguns detalhes da subdivisão bidimensional. Para uma melhor compreensão do assunto ver Fenton e Griffiths (2008).

### 3.6.2 Subdivisão Média Local Multidimensional

O método LAS bidimensional (2D) segue um processo de subdivisão onde uma célula pai é dividida em quatro células do mesmo tamanho. A discretização da malha de elementos finitos e o mapeamento do campo aleatório tem que ajustar-se com critérios de implementação e precisão, os detalhes do processo pode-se ver em Fenton e Griffiths (2008).

Na Figura 3.4, as células pai são chamadas  $Z_l^i$ , onde  $l=i+1, 2, \dots$ , e as células subdivididas ou filhos, são denominadas  $Z_j^{i+1}$ , onde  $j=2, 3, 4$ . Todas as células são subdivididas no processo de LAS, mas por simplicidade só  $Z_5^i$  é subdividida na Figura 3.4. Usando a notação vetorial, os valores do vetor da coluna  $Z^{i+1} = \{Z_1^{i+1}, Z_2^{i+1}, Z_3^{i+1}, Z_4^{i+1}\}$  são obtidos por aleatoriedade e subdivisão de media local.

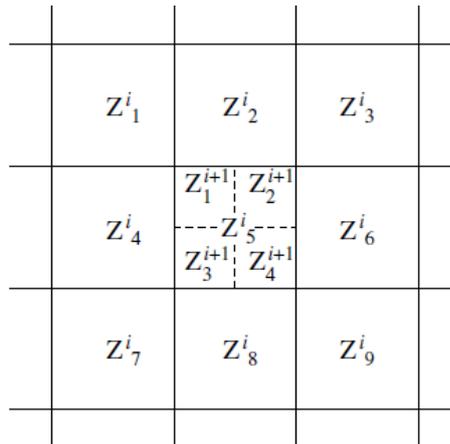


Figura 3.4 – Subdivisão média local em duas dimensões.

Fonte: Fenton e Griffiths (2008)

A Figura 3.5 mostra um campo bidimensional gerado com o método LAS, onde pode-se ver o contraste de áreas escuras e claras que indicam a heterogeneidade do meio, caracterizado através do campo aleatório gerado.

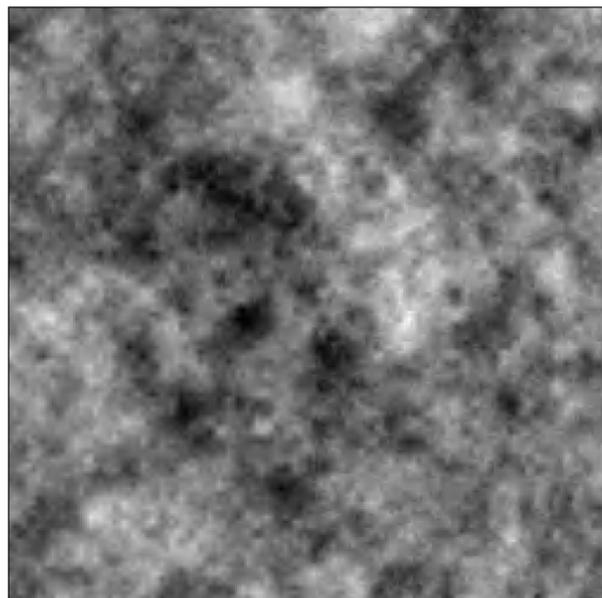


Figura 3.5–Uma função de amostra bidimensional gerada por LAS

Fonte: Fenton e Griffiths (2008)

### 3.7 MODELO MOHR-COULOMB

Um modelo clássico para solos é o critério de rotura de Mohr-Coulomb. Sua forma mais simples, depende das tensões normais e tensões tangenciais no plano de falha, assim:

$$\tau = c + \sigma \tan \phi \quad (3.1)$$

onde  $c$  é o intercepto coesivo e  $\phi$  o ângulo de atrito. Em termos das principais tensões, esta equação acaba por ser:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \phi + c \cos \phi \quad (3.2)$$

que é independente da tensão principal intermediária (Prat e Gens, 2000). Em termos de invariantes, a função de fluência de Mohr-Coulomb é expressa como:

$$F \equiv J - (-p + a)g(\theta) \quad (3.3)$$

com:

$$g(\theta) = \frac{\sin \phi}{\cos \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi}$$

$$a = \frac{c}{g(\theta)}$$

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$J = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - p)^2 + (\sigma_y - p)^2 + (\sigma_z - p)^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xz}^2 + 2\tau_{yz}^2]}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left[ -\frac{1\sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{3}\sigma_1 - \sigma_3} \right]$$

Se o ângulo de dilatancia  $\psi$  for igual ao ângulo de atrito  $\phi$ , considera-se plasticidade associada. Equação (3.3) mostra que a superfície de fluência depende das três invariantes:  $p$ ,  $J$  e  $\theta$ . As deformações plásticas são neste caso:

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_j^p &= d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \left[ \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ij}} \right] = \\
 &= d\lambda \left[ g(\theta) \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}} - (-p + a)g'(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ij}} \right] = \\
 &= d\lambda \left[ g(\theta) \frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{s_{ij}}{2J} - (-p + a)g'(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ij}} \right]
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde,  $d\lambda$  é um parâmetro escalar que fornece a magnitude da deformação plástica.

A superfície de fluência de Mohr-Coulomb é uma pirâmide de eixo da linha hidrostática, cuja seção transversal (acima do plano octaedro) é um hexágono irregular. A superfície de fluência no espaço principal do esforço pode ser vista na Figura 3.6.

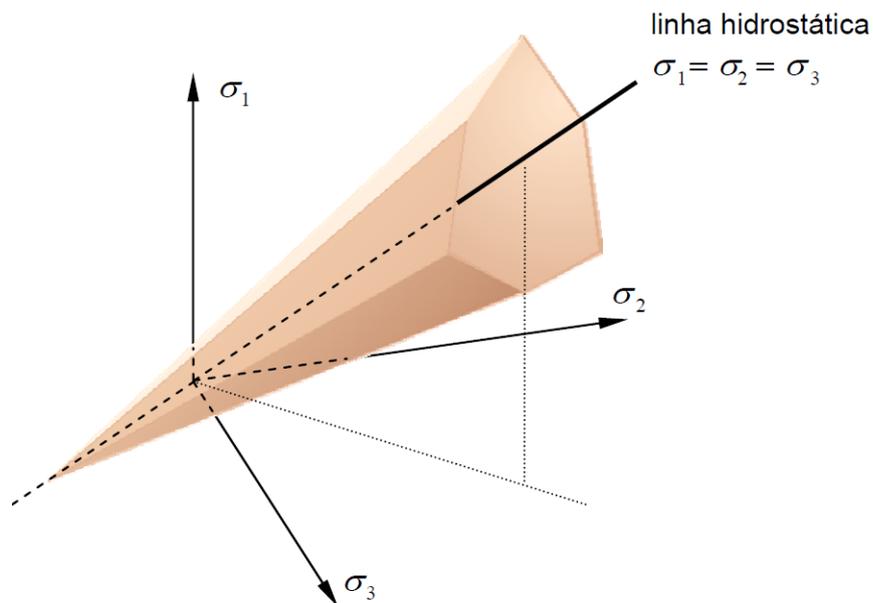


Figura 3.6 – Superfície de fluência de Mohr-Coulomb no espaço principal de tensões

Fonte: Prat e Gens (2000)

A seção no plano octaedro pode ser vista na Figura 3.7. A Figura 3.8 mostra a superfície de fluência de Mohr-Coulomb no espaço  $p$ - $J$ , que é a maneira tradicional de representar o critério de ruptura Mohr-Coulomb na mecânica do solo.

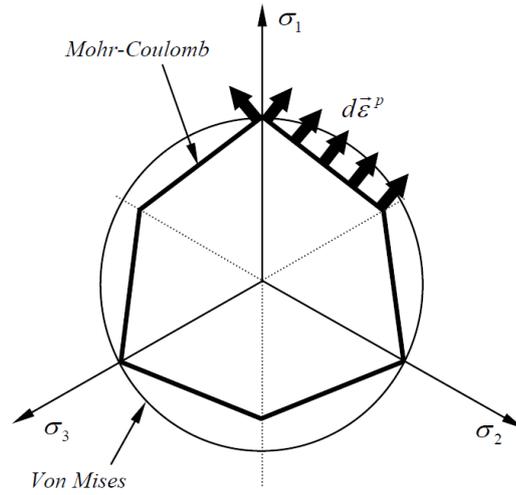


Figura 3.7 – Superfície de fluência de Mohr-Coulomb no plano octaédrico

Fonte: Prat e Gens (2000)

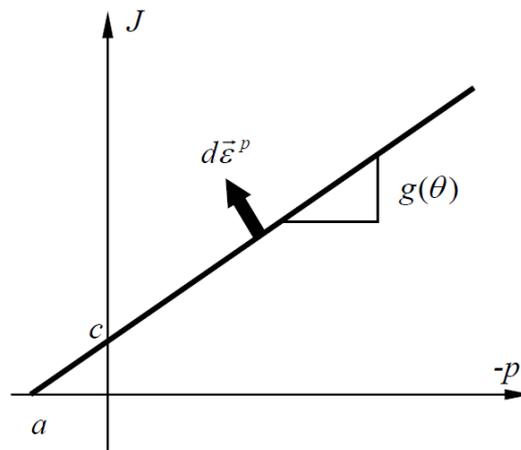


Figura 3.8 – Superfície de fluência de Mohr-Coulomb no plano  $p - J$

Fonte: Prat e Gens (2000)

## **4 ANÁLISE DE PROBLEMAS DE CONFIABILIDADE E SUA VERIFICAÇÃO USANDO O PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS ANSYS**

Nesta seção, apresenta-se o desenvolvimento, a implementação e a verificação de um exemplo representativo de aplicações da confiabilidade em problemas de engenharia geotécnica, no entanto, apresentam-se também nos apêndices 1, 2 e 3 vários exemplos estruturais e geotécnicos desenvolvidos na tese com sua verificação. Para o fim de buscar a solução através do desenvolvimento de códigos próprios, usa-se adaptação de códigos e desenvolvimentos mostrados nos exemplos testados.

A verificação dos resultados obtidos por códigos próprios ou adaptados é feita por comparação com o software comercial ANSYS, uma vez que este possui a capacidade de vincular seu núcleo de cálculo de elementos finitos com um módulo especializado em projeto probabilístico. Qualidade avançada que poucos programas de elementos finitos possuem. O vínculo é feito através de um *script* escrito na linguagem APDL (*ANSYS Parametric Design Language*) que permite o desenvolvimento de modelos parametrizados necessários em problemas de confiabilidade, uma vez que deve-se fazer o cálculo repetitivo da resposta do modelo com diferentes valores de seus parâmetros de entrada (cargas, propriedades materiais, parâmetros geométricos, entre outros). Na prática da implementação dos modelos apresentados a seguir, foram enfrentadas diferentes dificuldades com sucesso pela flexibilidade do ANSYS em preencher lacunas no programa, através da customização de modelos próprios de usuário.

### **4.1 PROBLEMA DE CONFIABILIDADE NO MODELO DE CAPACIDADE DE CARGA DE UM SOLO COM CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA EM 2D (SOLUÇÃO ELASTOPLÁSTICA USANDO O CRITÉRIO DE MOHR-COULOMB)**

Este problema procura mensurar as dificuldades e os tempos característicos exigidos na aplicação da confiabilidade em um problema de tensão-deformação em geotecnia 2D, onde

algum tipo de não-linearidade é incluída. Essa inclusão normalmente implica soluções iterativas que podem aumentar consideravelmente os tempos de cálculo.

O problema fornece o caminho para a identificação da estratégia de desenvolvimento dos modelos computacionais para o cálculo de confiabilidade estrutural, onde sempre haverá dois módulos: um de análise, responsável pela entrada de dados para o cálculo da função de estado limite FEL, e outro para os cálculos de confiabilidade que foram chamados SICC. Em termos práticos, o módulo SICC é desenvolvido como ferramenta geral e pode ser reutilizado com pequenas adaptações para outros problema. Dessa forma, resta apenas desenvolver o módulo de análise que é responsável pelo cálculo da função de estado limite. Para o desenvolvimento deste módulo é tomado como um ponto de partida o programa de elementos finitos SOTRURA-DSA (*SOil sTRUcture inteRAction-Dynamic and Static Analysis*) desenvolvido por Palomino (2015).

O desenvolvimento de problemas de teste implica adaptação do SOTRURA-DSA para o acoplamento com o programa de confiabilidade SICC e para o cálculo adequado das variáveis aleatórias do problema.

O problema abordado é inspirado em Phoon e Ching (2015). Algumas funções de distribuição de probabilidade das variáveis foram alteradas, mas as características e valores do problema foram preservados, por isso a verificação foi feita com ANSYS. A Figura 4.1 mostra a configuração geométrica, condições de suporte e dados básicos desse modelo.

As variáveis aleatórias do problema são resumidas na Tabela 4.1. Para a análise, uma equação de estado limite é colocada com base em procedimentos padrões de cálculo da capacidade de carga de uma fundação, dada por:

$$GG(\mathbf{X}) = Q(\mathbf{X}) - Q_{adm} = Q^{análise}(D, \gamma, c, \phi) - \frac{\bar{Q}_{ult}}{FS} \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{X}$  denota o vetor aleatório da variável  $\mathbf{X} = \{D, \gamma, c, \phi\}^T$ , onde  $D$  denota a profundidade de escavação,  $\gamma$  o peso específico do solo,  $c$  o intercepto coesivo do solo e  $\phi$  o ângulo de atrito. Estas variáveis aleatórias participam na função implícita (MEF) ou explícita (métodos analíticos), calculados na análise,  $Q^{análise}$ . O valor da capacidade de carga última  $\bar{Q}_{ult} = 2.336.7$  kPa é obtida avaliando  $Q$  com os valores médios de suas variáveis aleatórias, tal como na Equação (4.2) mais à frente no texto. É tomado como fator de segurança um  $FS= 3.0$ . Como

variáveis determinísticas tem-se a largura da escavação  $B = 10$  m, o módulo de elasticidade do solo  $E = 10000$  kPa e o coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ . Além disso, o problema utiliza funções de distribuição uniformes, normais e lognormal. Na Tabela 4.1 os valores da Média e  $CV$  são reportados por Phoon e Ching (2015).

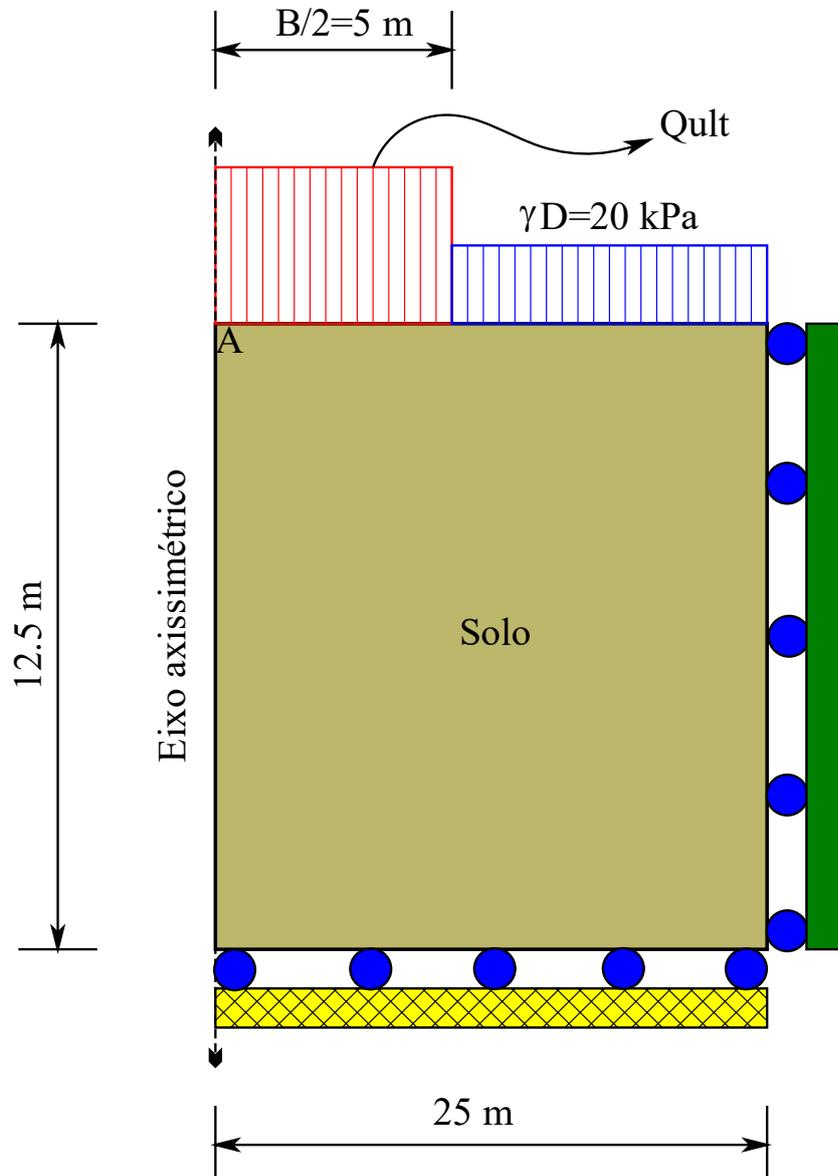


Figura 4.1 – Modelo de estrutura de solo 2D para análise elastoplástica: geometria, restrições e cargas.

Tabela 4.1 – Variáveis aleatórias e seus parâmetros estatísticos característicos.

Variável	Unidade	Média	CV	Distribuição
$D$	M	1	0.15	Normal
$\gamma$	kN/m <sup>3</sup>	20	0.10	Lognormal
$c$	kPa	20	0.25	Lognormal
$\phi$	°	30°	0.10	Uniforme

### 4.1.1 Modelo implementado usando FORTRAN

O problema é abordado em duas partes: A primeira parte consiste em um sistema integral de cálculo de confiabilidade (*SICC.EXE*) que atua como o programa mestre. Esta parte cuida de todo o cálculo da confiabilidade com base nos resultados da função de estado limite (*FEL.EXE*) que é a segunda parte. A segunda parte serve como o escravo da primeira parte, ela é o modelo de análise estrutural, neste caso, baseado no método de elementos finitos, que por sua vez alimenta o cálculo da função de estado limite (*FEL.EXE*).

O fluxograma da solução implementada é mostrado na Figura 4.2. A primeira parte do fluxograma configura o modelo de análise de confiabilidade, desenvolvido em FORTRAN e identificado pelo executável *SICC.exe*; este programa lê o *arquivo.dta* que contém os dados do modelo de confiabilidade necessários mostrados na Tabela 4.1. Além disso, este arquivo fornece os dados necessários para o método a ser usado (FORM, MC ou MCI). O programa *SICC.exe*, chama o arquivo executável *FEL.exe* (Segunda parte) durante o cálculo entregando para este o *arquivo.smp*, que contém amostras de variáveis aleatórias para o cálculo da função de estado limite. Em seguida, *FEL.exe* executa os cálculos relevantes e devolve o *arquivo.fel*, onde têm os valores da função de estado limite calculados para os valores lidos do *arquivo.smp*. Com os valores da função de estado de limite no *arquivo.fel*, o programa mestre *SICC.exe* executa os cálculos de confiabilidade usando o método definido no *arquivo.dta*. Por fim, o *SICC.exe* grava o arquivo de resultados de confiabilidade no *arquivo.otp*.

A segunda parte do fluxograma consiste no modelo de análise MEF, que essencialmente contribui para o cálculo da função de estado limite e é desenvolvido em FORTRAN. *FEL.exe* precisa da leitura do *arquivo\_mef.dat* que contém os dados do modelo de elementos finitos parametrizados com indicadores em suas variáveis aleatórias para executar uma única leitura no processo iterativo de cálculo dos métodos de análise de confiabilidade; seguidamente precisa-se a leitura do *arquivo\_mil.txt*, onde estão os dados que permitem a interpretação dos indicadores que identificam a ordem e o significado de cada variável aleatória estabelecida na análise de confiabilidade. Depois da leitura dos dois arquivos mencionados e possível ativar o mecanismo de cálculo de elementos finitos que fornece o cálculo das variáveis primárias e secundárias da análise em deformações planas. Nesse problema específico este código é adaptado para entregar a capacidade de carga do solo  $Q^{análise}$  presente na função de estado limite da Equação (4.1).

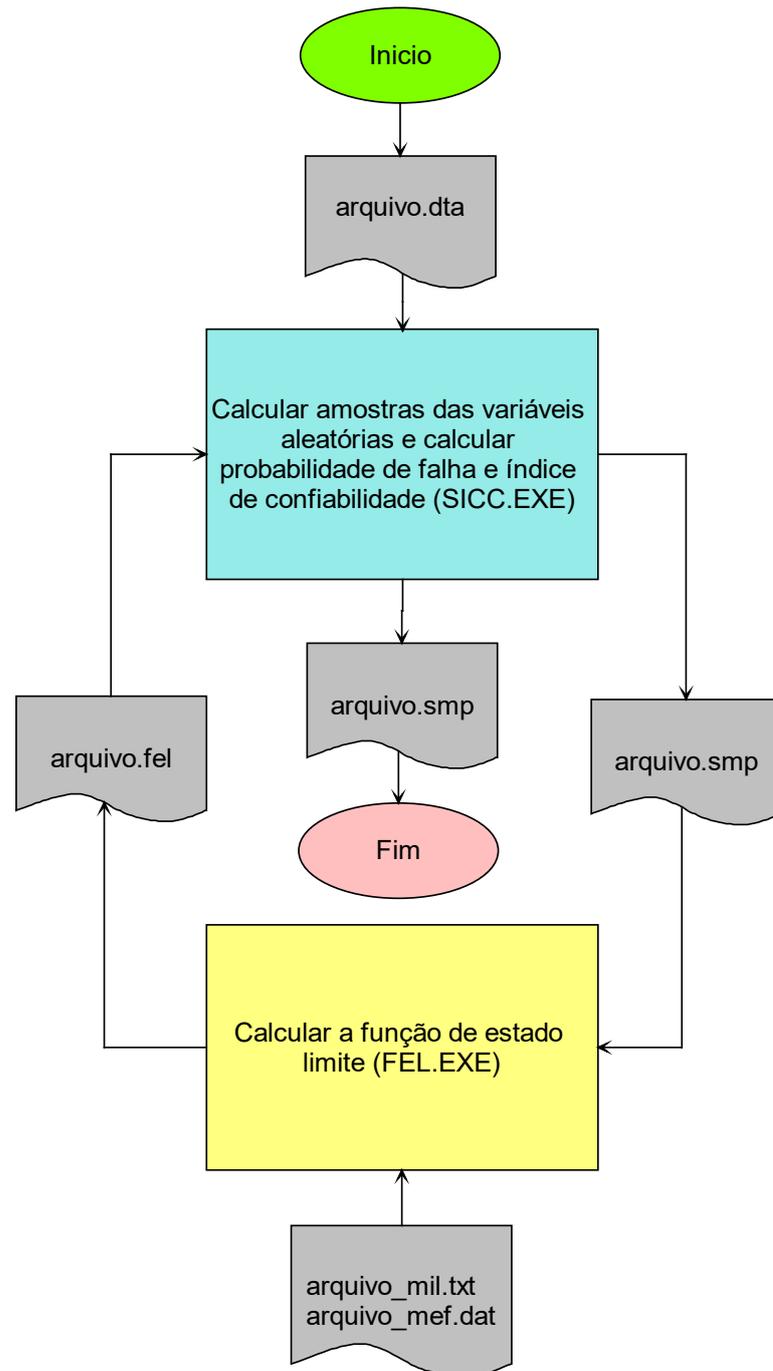


Figura 4.2 – Fluxograma para a solução do problema de confiabilidade em tensão-deformação de modelos elastoplásticos bidimensional.

Os arquivos de dados *arquivo\_mil.txt*, *arquivo\_mef.dat* e *arquivo.dta* devem ser adaptados para o modelo elastoplástico 2D em MEF. Além disso, os arquivos em FORTRAN do modelo MEF devem ser adaptados ao sistema de análise de confiabilidade (SICC). Embora grande parte da solução seja mantida para outro problema de teste, cada modelo requer certo grau de customização ou adaptação na medida em que as condições especiais sejam incluídas nas análises.

A Figura 4.3 mostra a malha estruturada obtida. Para a definição da discretização da malha, são realizados testes de tamanho de malha até atingir um tamanho que ofereça resultados razoáveis sem incorrer em excesso de custo computacional, essa prática é comum na modelagem de elementos finitos, para estabelecer níveis adequados de erro e custo computacional.

Nesta malha são utilizadas restrições de problemas simétricos em deformações planas conforme Figura 4.1.

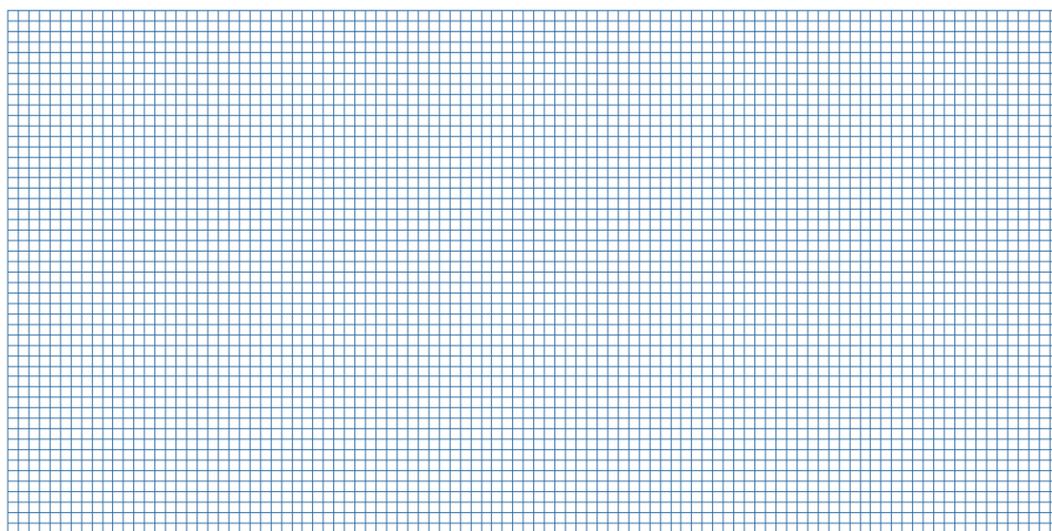


Figura 4.3 – Malha estruturada do problema elastoplástico em deformações planas.

Realizadas as simulações obtém-se a deformada da Figura 4.4.

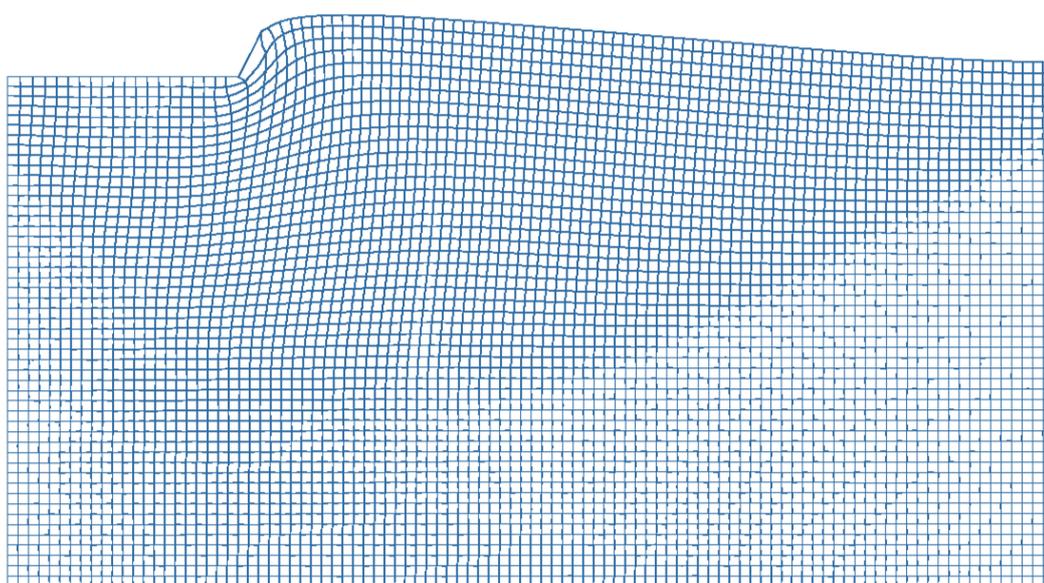


Figura 4.4– Malha deformada do problema elastoplástico em deformações planas.

A Tabela 4.2 mostra os resultados para o estudo de caso. O critério de parada no método MCI é um  $CV_{Pf}$  inferior a 2%.

Tabela 4.2 – Resultados obtidos e seu tempo computacional associado para a solução obtida com a implementação FORTRAN.

Método	Prob. de falha ( $P_f$ )	Índice de confiabilidade ( $\beta$ )	$CV_{Pf}$ (%)	Tempo CPU (min)	Variação % em relação a HLRF*
FORM(HLRF)*	0.723828E-02	2.445	---	358.167	---
MCI (Passo 250) (sim 3000)	0.981572E-02	2.333	1.977	16423.500 (11.41 dias)	35.61

Os resultados do índice de confiabilidade e do tempo computacional relatados na Tabela 4.2, são traçados na Figura 4.5 onde o eixo primário e secundário são as escalas de tempo computacional e índice de confiabilidade, respectivamente.

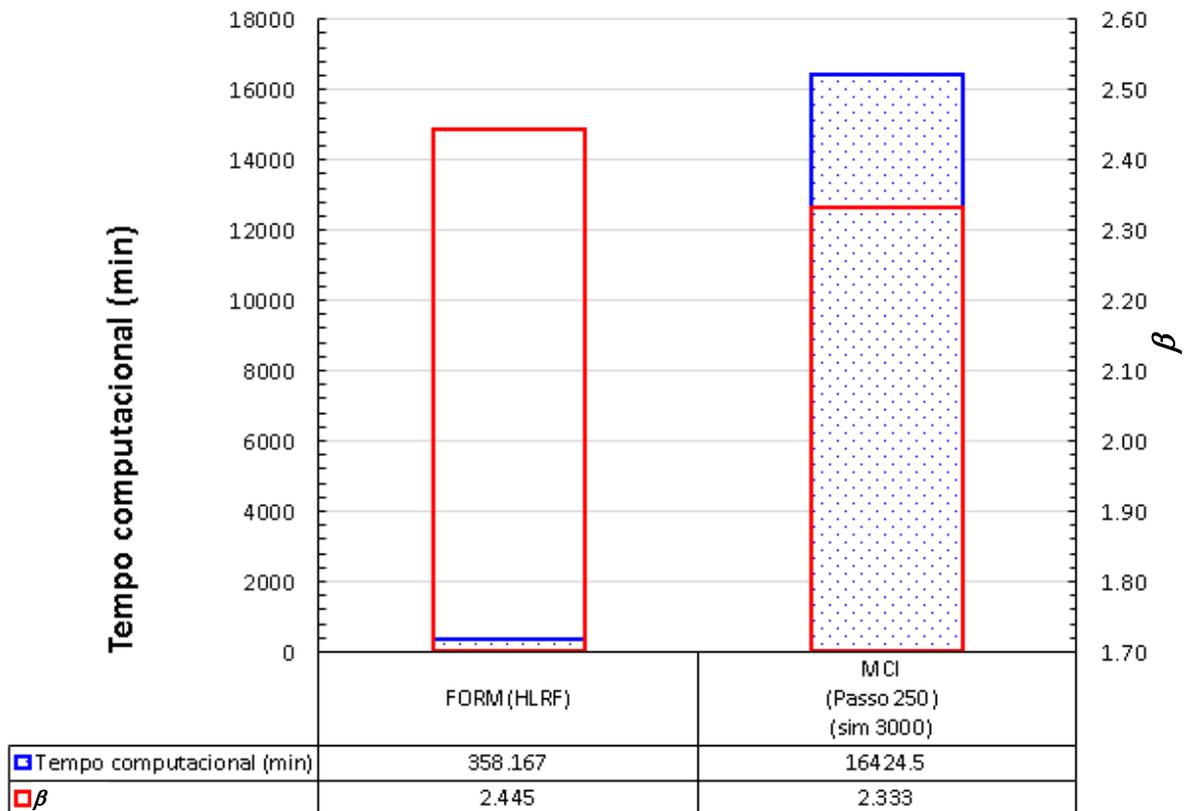


Figura 4.5 – Gráfico dos índices de confiabilidade e tempos computacionais para o problema elastoplástico em deformações planas desenvolvido em FORTRAN.

Observa-se uma semelhança nos resultados encontrados entre o método FORM e MCI, lembrando que o critério de parada para o último é de um  $CV_{pf}$  menor do que 2%, e isso é cumprido com 3000 simulações. Apesar de ser relativamente baixo, este número é atingido com 11.41 dias nesse pequeno modelo de 500 elementos. O tempo obtido com o método MCI torna inviável seu uso serialmente.

#### 4.1.2 Modelo implementado usando o programa ANSYS (Função de estado limite analítica)

Uma vez que a versão do ANSYS disponível não possui o modelo constitutivo de Mohr-Coulomb utilizou-se as equações de capacidade de carga última  $Q_{ult}$  de Meyerhof (1963) adaptadas para argilas moles ou duras. Essas equações são verificadas satisfatoriamente usando valores médios com o modelo numérico anterior ( $Q_{ult}^{MEF} = 2365$  kPa,  $Q_{ult}^{análise} = 2337$  kPa). Assim pode-se implementar um macro na linguagem APDL do ANSYS. Estas equações são dadas por:

$$Q_{ult} = \frac{2}{3}cN_c + \gamma DN_q + \frac{1}{2}B\gamma N_\gamma \quad (4.2)$$

onde, as funções  $N_c$ ,  $N_q$  e  $N_\gamma$  são conhecidas como fatores de capacidade de carga ou fatores de suporte e há diversas expressões dependendo do autor considerado. No entanto, as expressões de Meyerhof (1963) utilizadas aqui são:

$$N_q = e^{\pi \tan \phi} \tan^2(\pi/4 + \phi/2) \quad (4.3)$$

$$N_c = (N_q - 1) \cot \phi \quad (4.4)$$

$$N_\gamma = (N_q - 1) \tan(1.4\phi) \quad (4.5)$$

Embora não seja comum usar o ANSYS com modelos analíticos, é interessante ver a viabilidade e competitividade de uma solução explícita.

A Tabela 4.3 mostra os resultados para o estudo de caso, utilizando o método de Monte Carlo (MC) e o método Monte Carlo com amostragem do Hipercubo Latino (MCLH).

Tendo em conta que os modelos de previsão utilizados são diferentes (um analítico e um numérico baseado em Mohr-Coulomb) não são feitas comparações. No entanto, na secção 4.1.3 estão os resultados de um modelo numérico em ANSYS que são comparados com o modelo

numérico em FORTRAN.

Tabela 4.3– Resultados obtidos e seu tempo computacional associado para a solução usando o módulo PDS do ANSYS.

Método	Prob. de falha ( $P_f$ )	Índice de confiabilidade ( $\beta$ )	$CV_{P_f}$ (%)	Tempo CPU (min)	Variação % em relação a MC*
MC* (5000000 sim)	0.795218E-02	2.411	0.500	1323.104	---
MCLH (Passo 1000) (sim 10000)	0.960454E-02	2.341	---	3.850	20.78
MCLH (Passo 10000) (sim 100000)	0.817717E-02	2.401	---	101.833	2.83

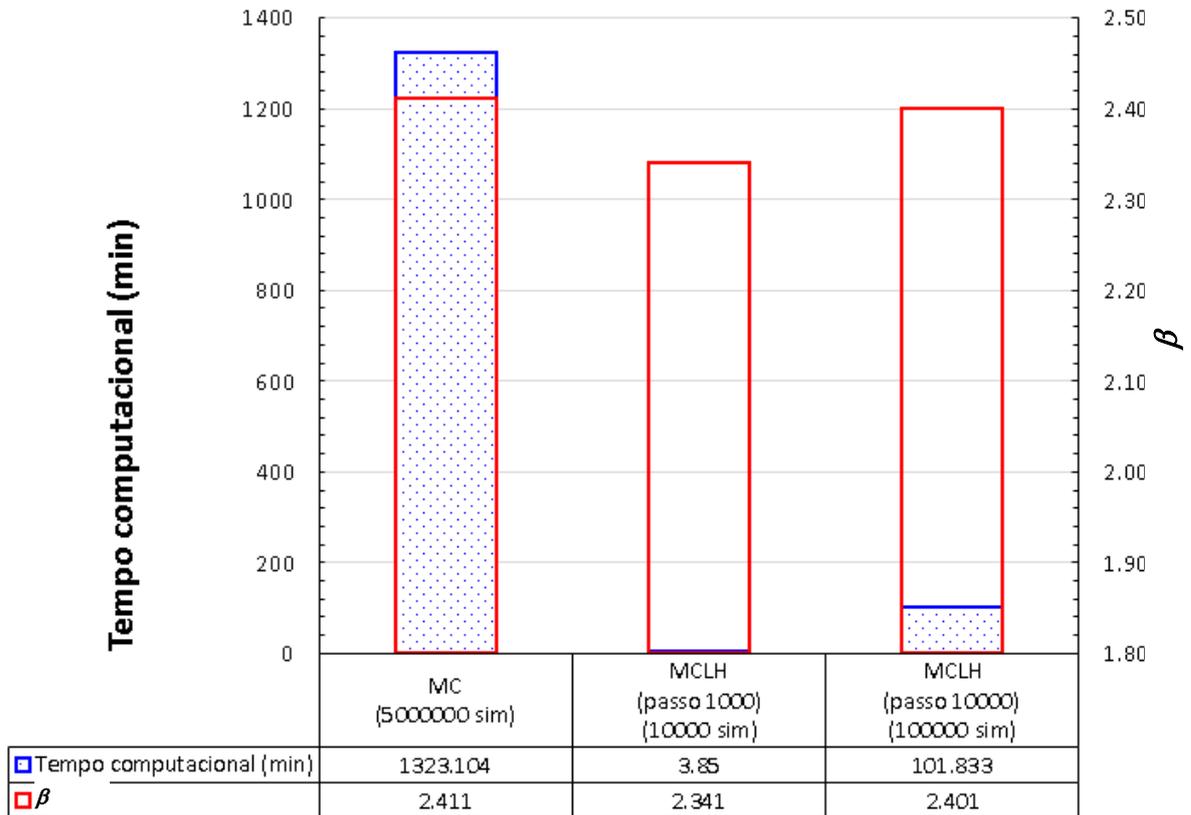


Figura 4.6– Gráfico dos índices de confiabilidade e tempos computacionais para o problema elastoplástico em deformações planas usando ANSYS.

Pode ser visto na Figura 4.6 semelhanças nos resultados encontrados entre o método MC e sua aproximação MCLH quando chega a 100000 simulações.

### 4.1.3 Modelo implementado usando o programa ANSYS (função de estado limite implícita baseada no modelo constitutivo de Mohr-Coulomb)

Versões relativamente recentes do programa ANSYS têm vindo a incorporar modelos constitutivos para utilização em geomateriais, dando assim a possibilidade de implementar um modelo de fiabilidade no problema da capacidade de carga de um solo sob carga uniforme calculada pelo modelo constitutivo de Mohr-Coulomb.

A implementação incorpora o cálculo das condições iniciais de tensão geostática, onde é aplicada a condição de coluna de carga por peso vertical e confinamento horizontal utilizando o coeficiente clássico  $k_0$  ( $k_0 = \nu/(1-\nu)$ ), onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson). A aplicação da carga é realizada em etapas de tal forma que o primeiro estágio corresponda às condições iniciais geostáticas e imediatamente a carga é aplicada de forma incremental até chegar à falha onde o valor de  $Q_{ult}$  é capturado para cada uma das amostras das variáveis aleatórias características de um modelo de simulação no método Monte Carlo com amostragem por Hipercubo Latino.

Antes de executar os modelos de confiabilidade, são realizados testes prévios onde se ajusta o número de núcleos utilizados pelos núcleos de cálculo paralelizados da memória compartilhada no ANSYS. Para o caso utiliza-se o solver SPARSE e se estabelece o uso de 6 núcleos como o número ótimo, por outro lado, um ajuste da malha é desenvolvido de forma a obter resultados adequados em precisão e tempo de cálculo, este último fator de radical importância para a viabilidade da modelagem massiva típica de métodos de simulação em confiabilidade estrutural.

No modelo implementado é obtido o resultado reportado na Tabela 4.4, chamando a atenção para o fato de que os tempos de cálculo do modelo MEF são relativamente altos (para efeitos de um modelo de confiabilidade que utiliza a simulação como estratégia de cálculo) devido à condição do problema de elastoplasticidade e à necessidade de avançar na carga até a condição limite de falha. No entanto, as dificuldades de cálculo e com as estratégias acima mencionadas foram satisfatórias os resultados com um número razoável de simulações de 10000.

Comparando-se os valores de  $P_f$  da Tabela 4.4 com o da Tabela 4.2 verifica-se a solução obtida entre os métodos MCI (FORTRAN) e MCLH (ANSYS). A variação entre as probabilidades de falha é 3.22% (para diminuir essa porcentagem de variação pode-se aumentar o número de simulações).

Tabela 4.4 – Resultados obtidos e seu tempo computacional associado para a solução usando o módulo PDS do ANSYS. (Função de estado limite implícita baseada no modelo constitutivo de Mohr-Coulomb).

<b>Método</b>	<b>Prob. de falha (<math>P_f</math>)</b>	<b>Índice de confiabilidade (<math>\beta</math>)</b>	<b><math>CV_{P_f}</math> (%)</b>	<b>Tempo CPU (min)</b>
MCLH (Passo 1000) (sim 10000)	0.950E-02	2.345	---	22500 (15.63 dias)

## **5 ANÁLISE DE PROBLEMAS DE CONFIABILIDADE, SENSIBILIDADE PROBABILÍSTICA E ESTUDO PARAMÉTRICO INCLUINDO CAMPOS ESTOCÁSTICOS**

Nesta secção, busca-se mostrar a implementação de exemplos de aplicações estratégicas para a abordagem de problemas de cálculo de confiabilidade na análise de carga em solos e interação solo-estaca incluindo campos estocásticos. Para tal fim procede-se a encontrar a solução utilizando toda uma série de ferramentas computacionais e códigos *FORTRAN* adaptados para a realização fundamental da ligação dos três núcleos básicos necessários ao desenvolvimento das análises acima mencionadas, estes compreendem um núcleo de análise de elementos finitos ou modelo de elementos finitos, um núcleo de análise de confiabilidade ou modelo probabilístico e um gerador de campo aleatório. Esta solução pode ser obtida de forma compacta ou ligando aplicações computacionais separadas que se juntam para a solução integrada de confiabilidade, elementos finitos e campos estocásticos; sendo esta última a forma como são desenvolvidos os exemplos mostrados nesta seção desta tese de doutorado.

Nos capítulos anteriores foi mostrada a ligação de dois núcleos de análise de elementos finitos e análise de confiabilidade e sua aplicação em alguns problemas de teste convenientemente verificados. Assim que este Capítulo só mencionará alguns detalhes da incorporação do terceiro núcleo que falta, de importância radical para o cumprimento da incorporação da variabilidade espacial aos modelos probabilísticos que deseja-se bordar, tendo em conta que não é uma tarefa fácil e imediata, uma vez que, a adaptação e articulação de ferramentas computacionais apresenta dificuldades e desafios para primeiro compreender os códigos desenvolvidos por outros pesquisadores e, assim, ser capaz de manipulá-los e adaptá-los para a união com outros códigos ou ferramentas que foram originalmente concebidos apenas para abordar as fases de cálculo de seu objeto de análise. Portanto, na adaptação surgem requisitos de armazenamento e cálculo que devem ser atendidos de forma adequada para que, no final, a ligação funcional dos três núcleos mencionados tenha sido atingida e, portanto, a solução esperada seja encontrada e sua discussão.

Mais do que nos detalhes da implementação computacional, é dada ênfase aos resultados obtidos, sua discussão e contribuição para o estado de conhecimento na análise probabilística dos problemas de interação solo-estaca, incluindo campos aleatórios, considerando que esses avanços contribuem para oferecer novos paradigmas que atacam restrições e hipóteses clássicas

em engenharia, como homogeneidade e análise determinística.

Na revisão preliminar da literatura pode-se observar que em relação à análise probabilística com variabilidade espacial em geotecnia, existe uma fonte notável de áreas de pesquisa de grande relevância atual que apresentam atividade relativamente recente, como é o caso, que livros específicos que conseguem abordar os três aspectos necessários para modelos que incluem campos aleatórios em engenharia geotécnica são realmente escassos e podem ser nomeados autores como Phoon e Ching (2015), Fenton e Griffiths (2008) e Baetcher e Christian (2003). Destes autores, apenas Fenton e Griffiths (2008) entrega à comunidade internacional de pesquisadores um código chamado *RFEM*, muito valioso por conter o código fonte para algumas aplicações específicas de confiabilidade com campos aleatórios em geotecnia; este código em linguagem *FORTRAN* é tomado como base para sua adaptação na geração de campos aleatórios nos exemplos discutidos neste Capítulo.

Para os modelos de interação solo-estaca realiza-se análises de sensibilidade probabilística e um estudo paramétrico da influência do comprimento da estaca no cálculo do índice de confiabilidade incluindo campos estocásticos.

Finalmente, são mencionadas as ferramentas básicas utilizadas para o desenvolvimento dos modelos implementados neste Capítulo, que incluem algumas das três fases de pré-processo, solução e pós-processo de modelagem ou a ligação destes ou alguma atividade especial, deixando claro que estes incluem algum nível de desenvolvimento, adaptação ou customização para a solução, entre os quais estão: *MATLAB*, *OCTAVE* (livre), *FORTRAN*, Códigos em *FORTRAN* de elementos finitos para interação solo-estrutura (Palomino, 2015), Códigos em *FORTRAN* de cálculo de Confiabilidade (Gomes, 2001), Códigos e bibliotecas em *FORTRAN* do software *RFEM* (Fenton e Griffiths, 2008), *GiD*, *Excel* e *ANSYS*.

## **5.1 PROBLEMA DE CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE FALHA DEVIDO À CARGA SUPERFICIAL EM SAPATAS RÍGIDAS ELÁSTICAS EM ESTADO LIMITE DE SERVIÇO**

Embora este problema trate de um caso de aplicação exclusiva da geotecnia, este foi escolhido como um teste de aprendizagem estratégico para romper barreiras com relação à incorporação da variabilidade espacial na modelagem de solos como componente fundamental dos problemas de interação solo-estaca. Por outro lado, devido à sua simplicidade, é possível estabelecer

rapidamente discussões sobre a incorporação da variabilidade espacial na modelagem do solo e seu efeito na probabilidade de falha ou nos cálculos de confiabilidade, além de permitir a obtenção de uma prova verificável contra a literatura, uma vez que o modelo implementado é exatamente extraído de Fenton e Griffiths (2008).

A Figura 5.1 mostra a configuração geométrica, restrições e cargas do modelo a ser implementado.

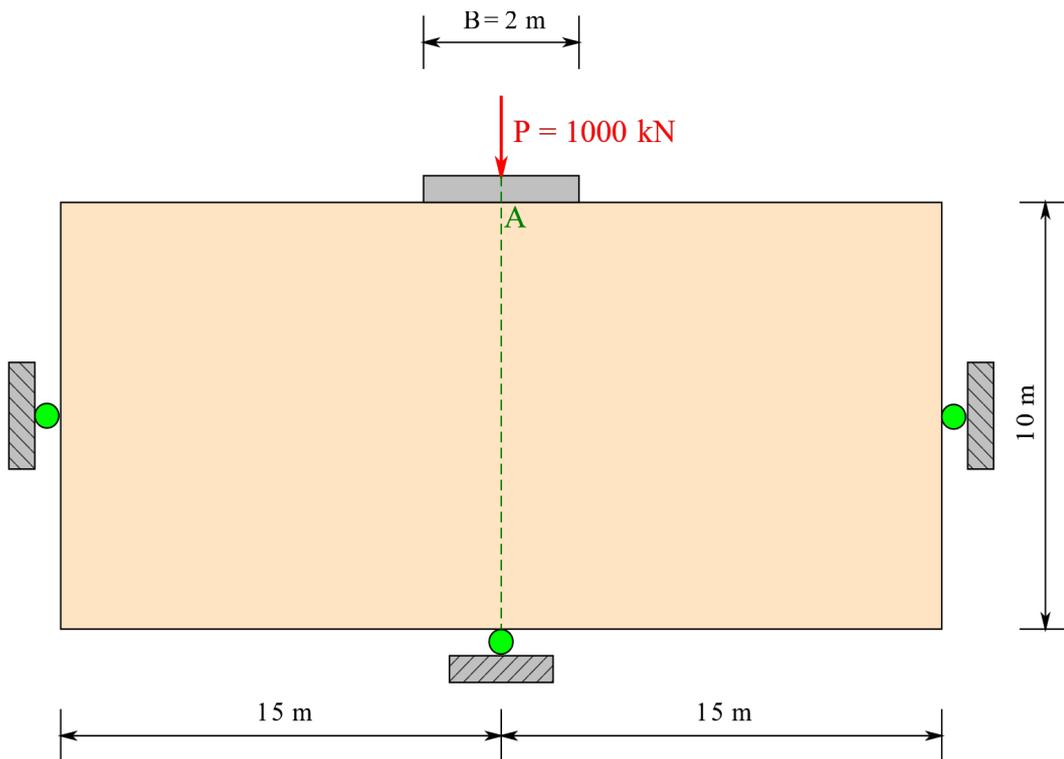


Figura 5.1 – Solo com sapata rígida carregada: geometria, restrições e cargas.

As variáveis do problema estão resumidas na Tabela 5.1. Para a análise é proposta uma equação de estado limite por serviço, tomando um recalque máximo de 0.1 m.

$$GG(\mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{u}) = \delta_{lim} - \delta_A \quad (5.1)$$

onde  $\mathbf{X}$  denota o conjunto de variáveis aleatórias pertencentes à estrutura (note-se que para este caso  $\mathbf{X}$  tem variabilidade espacial, incluída por meio do campo de propriedade aleatória Módulo de elasticidade do solo especificamente), o vetor  $\mathbf{u}$  representa o conjunto de deslocamentos envolvidos na função estado limite  $GG$ ,  $\delta_A$  é o recalque de controle calculado e  $\delta_{lim}$  é o recalque limite estabelecido pelo analista que para este caso é 0.1 m.

Para incluir o campo aleatório do solo é considerado este na propriedade módulo de elasticidade  $E$ , onde o campo desta propriedade é considerado com distribuição lognormal, tal que  $\ln(E)$  é um campo Gaussiano (normal) aleatório com média  $\mu_{\ln(E)}$  e desvio padrão  $\sigma_{\ln(E)}$ . Uma das justificativas para assumir o módulo elástico como distribuição lognormal é que ele assume valores estritamente positivos, propriedade em conformidade com a distribuição lognormal. Uma função de correlação espacial de Gauss-Markov é usada para o campo aleatório calculado, esta função fornece o coeficiente de correlação entre os valores logarítmicos do módulo em pontos separados por uma distância  $\tau$ , assim:

$$\rho_{\ln E}(\tau) = \exp \left\{ -\frac{2|\tau|}{\theta_{\ln E}} \right\} \quad (5.2)$$

em que  $\tau = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$  é o vector entre pontos espaciais  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$ , e  $|\tau|$  é a norma ou módulo deste vector. A função de correlação é governada pela chamada distância de correlação ou escala de flutuação  $\theta_{\ln E}$ , que em termos gerais é a distância na qual o logaritmo dos módulos em dois pontos está significativamente correlacionado.

No caso de uma única carga, pegar  $\theta_{\ln E}$  grande é conservador; de fato, a suposição de que  $E$  é lognormalmente distribuído e espacialmente constante leva a uma maior variabilidade (através de realizações) do recalque. Assim, as abordagens tradicionais de aleatoriedade no recalque usando uma variável aleatória simples para caracterizar  $E$  são conservadoras, ou seja, o assentamento será geralmente menor do que o esperado. As realizações do campo logarítmico - módulo elástico são atingidas utilizando a técnica LAS bidimensional. O valor do módulo elástico atribuído ao elemento  $i$  é:

$$E_i = \exp \{ \mu_{\ln E} + \sigma_{\ln E} G_i \} \quad (5.3)$$

onde  $G_i$  é a média local sobre o elemento  $i$  de um campo aleatório gaussiano de média zero e variância unitária  $G(x)$ .

O valor da escala de flutuação ou distância de correlação utilizado é  $\theta_{\ln E} = 3.0$  m. A Tabela 5.1 apresenta um resumo dos dados utilizados para o modelo de probabilidade. Na Tabela 5.1 os valores da Média e  $CV$  são reportados por Fenton e Griffiths (2008).

Tabela 5.1 – Variáveis e seus parâmetros estatísticos característicos.

Variável	Unidade	Média	CV	Distribuição
$E$	kPa	40000	1.00	Lognormal
$\nu$	---	0.25	---	Determinístico
$B$	m	2.0	---	Determinístico
$P$	kN	1000	---	Determinístico
$\delta_{lim}$	m	0.1	---	Determinístico

### 5.1.1 Modelo implementado incluindo a variabilidade espacial do módulo de elasticidade do solo (códigos FORTRAN)

Às ferramentas desenvolvidas com a metodologia descrita no Capítulo 3 é adicionado um gerador de campo obtido a partir do código fonte da aplicação *Rset12D* (Fenton e Griffiths, 2008). A adaptação inclui a extração cuidadosa do gerador de campo da aplicação *Rset12D* deixando de lado as rotinas para o cálculo por elementos finitos das realizações e outras rotinas acessórias, o resultado final é um código capaz de gerar dois arquivos de texto simples, um chamado *campos.res* e os outros *val\_medio.res*, esses dois arquivos contêm o seguinte:

1. *Campos.res*: contém as  $n$  realizações de campo dos módulos  $E$  calculados pelo gerador de campo sob a técnica LAS 2D. Para o caso 5000 realizações são calculadas em uma malha de elementos finitos de 60x20 nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente para um total de 1200 elementos, portanto, este arquivo contém 1200x5000 linhas, ou seja, 6000000 linhas. A malha foi feita tendo em conta critérios de erro e de custos computacionais.
2. *Val\_medio.res*: contém a média aritmética dos módulos  $E_i$  de cada realização, portanto este arquivo para o caso contém 5000 linhas. Os dados neste arquivo são usados para representar graficamente um histograma destes valores e para caracterizar a distribuição de dados das médias das variáveis em cada realização.

Uma ferramenta de pós-processamento no MATLAB é desenvolvida para a verificação gráfica dos resultados obtidos pelo gerador de campos. Os gráficos a seguir mostram os campos aleatórios calculados para o módulo elástico do solo em algumas realizações do problema abordado.

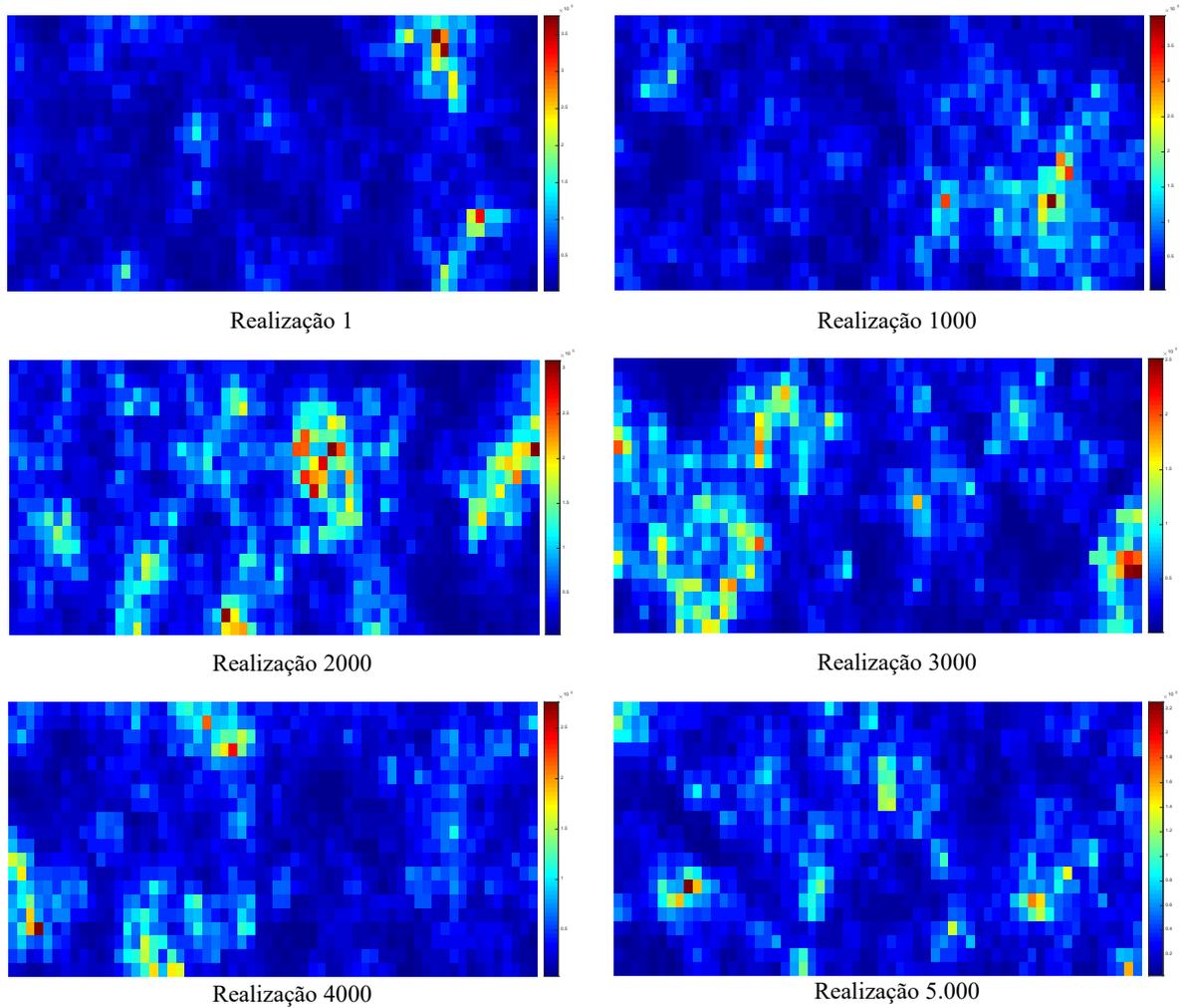


Figura 5.2 – Realizações do Módulo elástico do solo  $E$  para o problema da deformação plana.

Na Figura 5.2, as zonas vermelhas intensas correspondem aos módulos altos e as zonas azuis intensas às regiões dos módulos baixos, de modo que as regiões de incrustações fortes são perceptíveis dentro das zonas fracas.

A Figura 5.3 mostra a distribuição de  $\ln E$  como um sino de Gauss típico da distribuição normal.

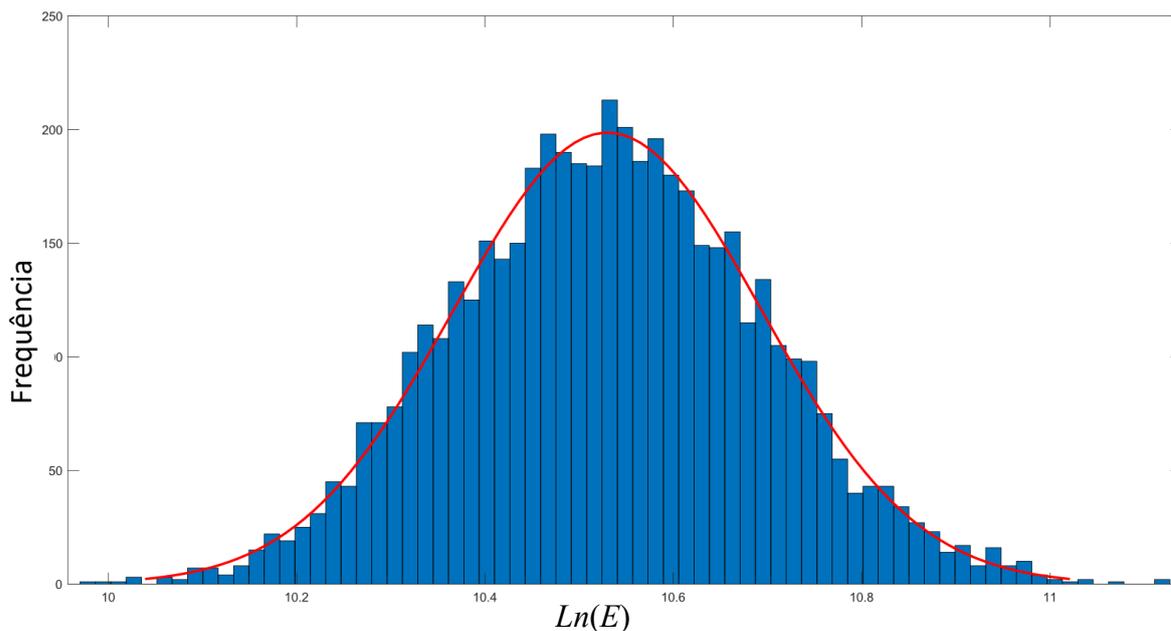


Figura 5.3 – Distribuição gaussiana de  $\ln-E$  do solo utilizando malha de  $60 \times 20$  elementos e 5000 realizações.

O arquivo de *campo.res* é usado em cada simulação para atualizar o módulo elástico de cada elemento finito e assim ter modelos com variabilidade espacial incorporada. Os tamanhos dos arquivos são restritivos no armazenamento de variáveis, de modo que apenas os campos são armazenados na memória para cada realização e não todos de uma só vez, o que geraria uma alta necessidade de memória que cresceria fortemente para incluir mais variáveis com variabilidade espacial como inevitavelmente acontece no problema da interação solo-estaca, isto pelas complexidades que devem ser incluídas.

Em seguida, é mostrada a malha de elementos finitos utilizada para obter o valor da função de estado limite  $GG$  em cada realização. O pré-processamento e pós-processamento destas malhas é feito com a ferramenta *GiD* desenvolvida pelo *Centro Internacional de Métodos Numéricos em Engenharia - CIMNE* da *Universidade Politécnica da Catalunha*.

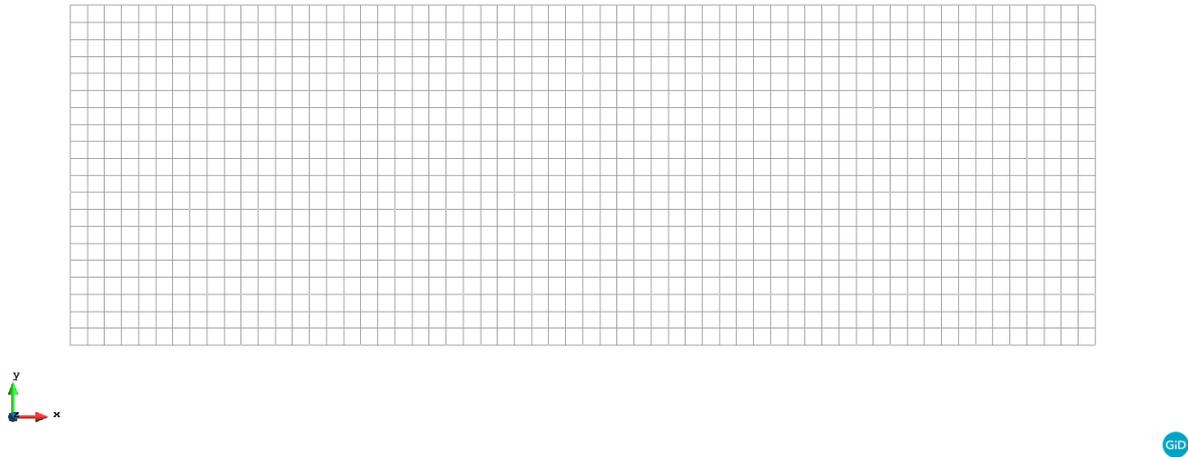
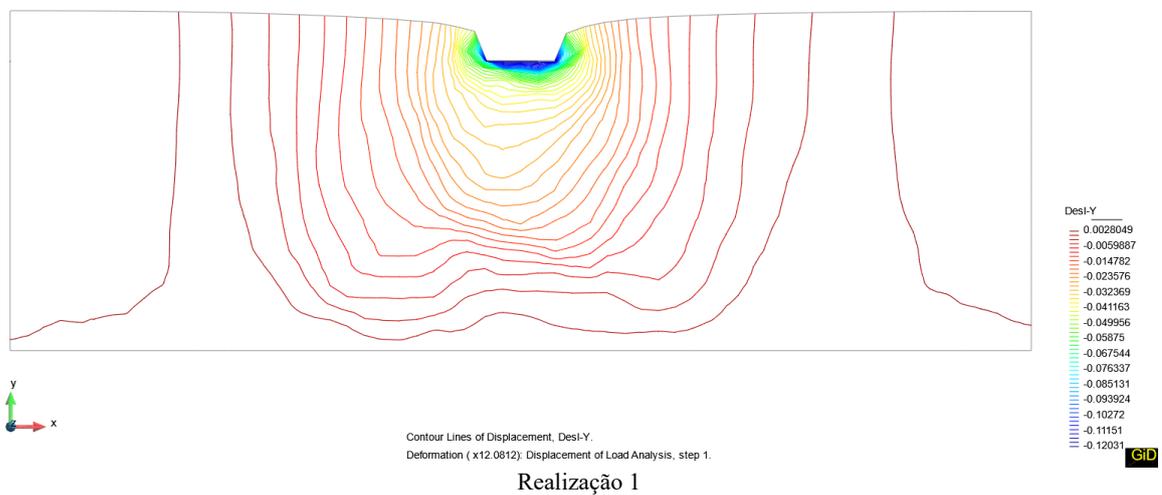


Figura 5.4 – Malha de elementos finitos para o problema da deformação plana.

Uma vez realizadas as simulações, mostra-se os gráficos deformados da realização 1 e 5000, e suas curvas de nível de deslocamento vertical Desl-y na Figura 5.5. Pode-se ver como as curvas de nível são distorcidas e perdem sua simetria, qualidades esperadas quando o solo é considerado homogêneo, razão pela qual quando se introduzem campos aleatórios é necessário modelar sem eixo de simetria e isso induz a que não se obtenha economia na malha.



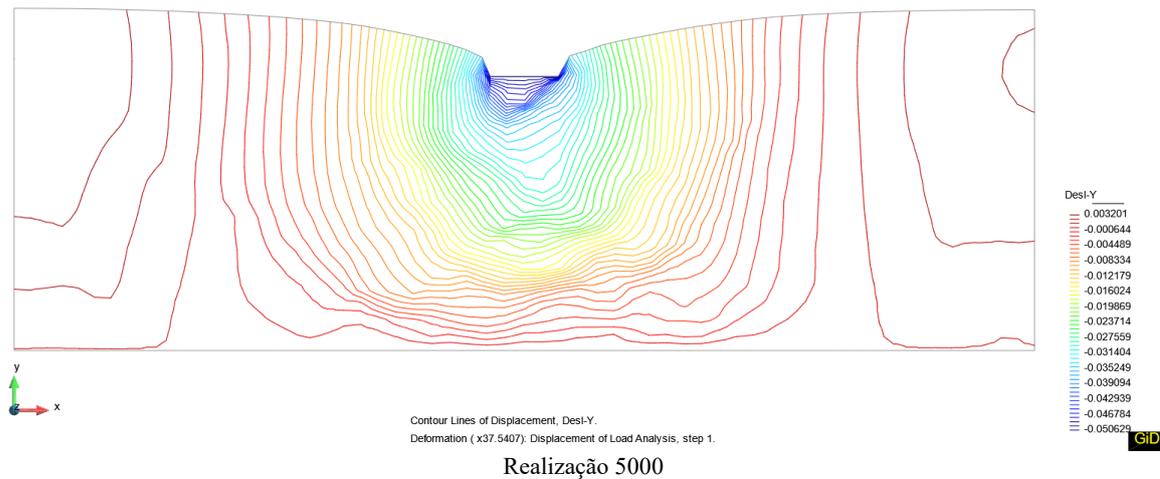


Figura 5.5 – Malha deformada incluindo campos aleatórios na propriedade do módulo de elasticidade do solo para o problema da deformação plana - Desl-y curvas de nível.

O resultado obtido para a probabilidade de falha é registrado na Tabela 5.2 e comparado com Fenton e Griffiths (2008). O valor obtido para a probabilidade de falha e o índice de confiabilidade associado são muito satisfatórios e mostram o bom funcionamento da estratégia utilizada para o cálculo dos problemas de confiabilidade, incluindo campos aleatórios.

Tabela 5.2 – Resultados de probabilidade de falha e índice de confiabilidade obtidos.

Método-Autores	Prob. de falha ( $P_f$ )	Índice de confiabilidade ( $\beta$ )
Semi - analítico (Fenton e Griffiths, 2008)	3.920E-02	1.760
Monte Carlo Análise presente (5000 realizações)	3.940E-02	1.758

### 5.1.2 Modelo para estabelecer contrastes usando o programa ANSYS sem a inclusão de campos aleatórios

Para este modelo são utilizados os mesmos dados do modelo anterior, porém o módulo de elasticidade não possui variabilidade espacial e é então estabelecido como uma variável aleatória simples de distribuição lognormal com média de 40000 kPa e desvio padrão de 40000 kPa.

Dado o uso prévio do ANSYS em verificações e sua comprovada eficácia no cálculo de

problemas de confiabilidade, um modelo de contraste é implementado aqui para observar o efeito da inclusão ou não inclusão de campos estocásticos nas propriedades do material que, neste caso, é o módulo de elasticidade do solo. O resultado obtido para a probabilidade de falha após 5000 simulações utilizando o método direto de Monte Carlo em *ANSYS* é  $2.158 \times 10^{-1}$ , cujo índice de confiabilidade associado é 0.787. Com o resultado obtido e contrastando com o valor mostrado na Tabela 5.2, verifica-se que ao incluir o campo aleatório do módulo obtém-se uma menor probabilidade de falha e, portanto, um maior índice de confiabilidade. Em Pula e Zaskórski (2015b) pode-se verificar que a inclusão de campos estocásticos pode aumentar o índice de confiabilidade, portanto, não utilizar campos aleatórios introduz uma condição de análise conservadora no cálculo de índices de confiabilidade.

## **5.2 PROBLEMA DE CONFIABILIDADE NA INTERAÇÃO SOLO-ESTACA INCLUINDO CAMPOS ESTOCÁSTICOS (SOLUÇÃO ELASTOPLÁSTICA MOHR-COULOMB, CONDIÇÃO DE ADERÊNCIA PERFEITA)**

Tendo percorrido toda a série de problemas apresentados nesta tese nos capítulos precedentes, chega-se ao problema objetivo final que corresponde ao fenômeno da interação solo-estaca, levando em conta que este apresenta muitos detalhes que serão abordados com o avanço da modelagem probabilística, modelagem de elementos finitos e modelagem de campos estocásticos. Uma vez que o problema 5.1 abre caminho para a identificação da estratégia de implementação de modelos computacionais, a partir de agora dois módulos de análise são sempre adaptados, um encarregado dos cálculos de entrada para o cálculo da função de estado limite e outro para os cálculos de confiabilidade, simultaneamente coloca-se um arquivo chamado *camposc.res*, este arquivo fornece três campos sobre as propriedades intercepto coesivo, ângulo de atrito e módulo de elasticidade do solo, escolhido estas três propriedades com base em estudos anteriores de Fenton e Griffiths (2008) e alguns estudos no processo de publicação pelo autor e seus orientadores, sobre sensibilidade probabilística de problemas de confiabilidade em modelos de capacidade de carga de um solo sob carga uniformemente distribuída em 2D.

Fenton e Griffiths (2008) provaram que o ângulo de atrito é a variável de maior impacto no cálculo da capacidade de um solo, e em menor intensidade as demais, assim Fenton e Griffiths (2008) mostram toda uma série de investigações em problemas elastoplásticos de carga em

colunas de solo, carga em sapatas, estabilidade de taludes e empuxo em paredes, em todas elas privilegiam sobretudo a variabilidade espacial das variáveis ângulo de atrito e intercepto coesivo do solo, e descartam a aplicação de condições iniciais que requerem a inclusão do peso específico do solo. Por esta razão e como contribuição aos modelos, o peso específico e o cálculo das condições iniciais são incorporados ao problema da interação solo-estaca. Este detalhe induz mudanças e desafios importantes para a convergência e para o tempo computacional.

Para o cálculo dos campos aleatórios contidos no arquivo *camposc.res* realiza-se a adaptação de um gerador de campo estocástico baseado no código fonte da aplicação *Rpill2D* incluída como um componente do software *RFEM* dos autores Fenton e Griffiths (2008). O objetivo desta aplicação, originalmente, é o cálculo de pilares elastoplásticos do solo sob o modelo de Mohr-Coulomb incluindo campos aleatórios, porém, após da adaptação é possível gerar dois arquivos, um chamado *camposc.res*, já explicado acima e outro chamado *val\_medioc.res*, neste arquivo estão os valores médios aritméticos das três variáveis, intercepto coesivo, ângulo de atrito e módulo de elasticidade, calculados para cada realização. O último arquivo permite mostrar a distribuição dos valores médios das variáveis aleatórias incluindo toda a variabilidade contida nas  $N$  realizações calculadas.

A modelagem bidimensional foi escolhida por duas razões principais:

1. O problema estudado já introduz complexidades importantes e seu tratamento requer grandes quantidades de memória e requisitos de armazenamento em arquivos de entrada e saída que podem alcançar a ordem de milhões de linhas que constituem tamanhos da ordem de Gigabytes.
2. Talvez a razão mais importante seja que, devido à revisão da literatura, foi encontrado em Palomino (2015) e o manual de referência do *PLAXIS 3D FOUNDATION* (2006), que a modelagem 3D da capacidade máxima de carga em estacas ou grupos de estacas prevê capacidades de carga significativamente maiores do que as obtidas por métodos convencionais ou modelos 2D, portanto, tecnicamente neste manual baseado na pesquisa de El-Mossallamy (1999) recomenda não utilizar a modelagem 3D para previsões específicas de carga última em estacas ou grupos de estacas por este motivo. Palomino (2015) tem toda uma dissertação e discussão sobre o tema que permite estabelecer que um modelo 2D é suficiente e confiável para os cálculos necessários dos modelos de elementos finitos desta tese, e ainda mais quando se vai desenvolver o

cálculo de muitas realizações para a determinação da probabilidade de falha e seu respectivo índice de confiabilidade associada.

O problema da interação solo-estaca é construído a partir da coleta de informações parciais da literatura básica e clássica dos fundamentos teóricos da mecânica do solo, de Phoon e Ching (2015), Fenton e Griffiths (2008), Baetcher e Christian (2003) e da experiência e conhecimento adquiridos pelo autor no desenvolvimento desta tese. A Figura 5.6 mostra a configuração geométrica, as condições de apoio e os dados básicos do modelo.

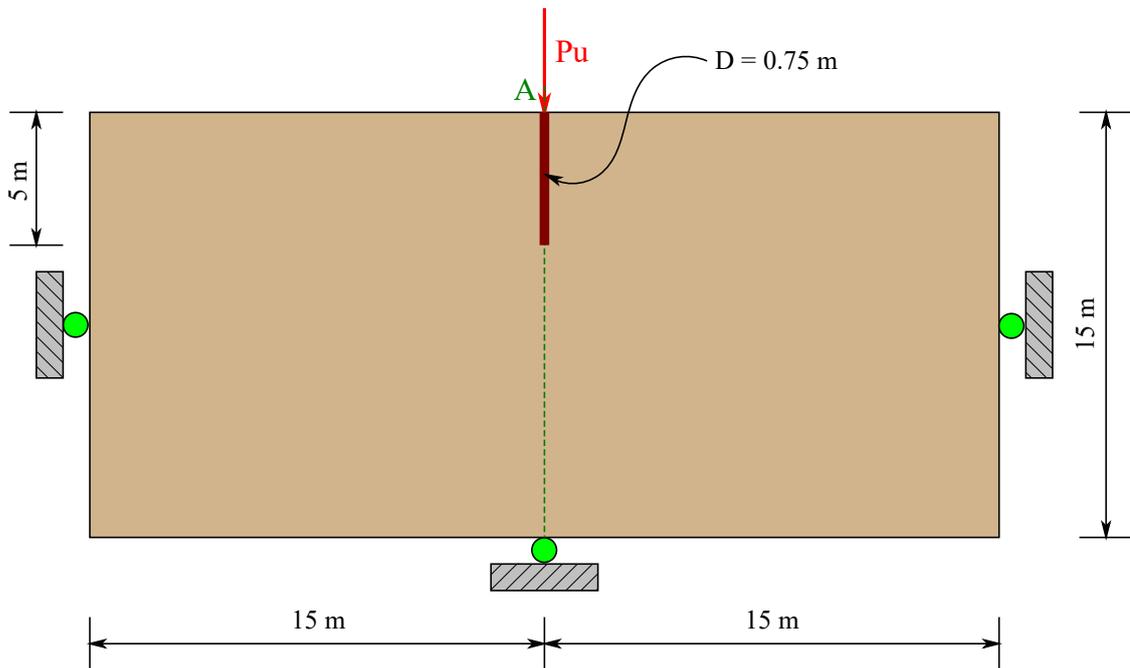


Figura 5.6 – Modelo 2D de interação solo-estaca: geometria, restrições e cargas.

As variáveis do problema estão resumidas na Tabela 5.3. Para a análise é proposta uma equação de estado limite baseada no cálculo da capacidade de carga de uma estaca.

$$GG(\mathbf{X}) = Q(\mathbf{X}) - Q_{adm} = Q^{análise}(D, Es, Ep, c, \phi) - \frac{\bar{Q}_{ult}}{FS} \quad (5.4)$$

Onde  $\mathbf{X}$  representa o vetor das variáveis aleatórias  $\mathbf{X} = \{D, Es, Ep, c, \phi\}^T$ ,  $D$  denota o diâmetro da estaca,  $Es$  o módulo de elasticidade do solo,  $Ep$  o módulo de elasticidade da estaca,  $c$  o intercepto coesivo do solo e  $\phi$  o ângulo de atrito do solo, estas variáveis aleatórias participam da função implícita (MEF) calculada na análise  $Q^{análise}$ . Note-se que as variáveis  $Es$ ,  $c$  e  $\phi$  têm variabilidade espacial incluída nos campos estocásticos previamente calculados, também é importante dizer que o ângulo de dilatância é considerado  $\psi = \phi$ , para o que é considerado

plasticidade associada, e dado que  $\phi$  tem variabilidade espacial, então  $\psi$  herda a mesma variabilidade espacial. A forma da Equação (5.4) é usada seguindo equações encontradas em Phoon e Ching (2015).

O valor da capacidade de carga última  $\bar{Q}_{ult} = 2888.192 \text{ kPa}$  é obtido calculando  $Q$  nos valores médios de suas variáveis aleatórias sem incluir a variabilidade espacial e é tomado como fator de segurança  $FS=1,5$ , portanto, a capacidade de carga admissível  $Q_{adm}$  é  $1925.461 \text{ kPa}$ . O coeficiente de Poisson do solo é estabelecido como variável determinística  $\nu_s = 0.45$ , o coeficiente de Poisson da estaca de concreto  $\nu_p = 0.30$  e o peso específico do solo  $\gamma_s=20.2 \text{ kN/m}^3$ . A Tabela 5.3 resume as variáveis de entrada que participam do modelo de interação solo-estaca considerando que não há escorregamento entre a estaca e o solo.

Tabela 5.3 – Variáveis e seus parâmetros estatísticos característicos.

Variável	Unidade	Média	CV	Distribuição
$D$	m	0.75	0.30	Lognormal
$E_p$	$\text{kN/m}^2$	21E6	0.50	Lognormal
$\nu_p$	---	0.3	---	Determinístico
$\gamma_s$	$\text{kN/m}^3$	20.2	0.10	Lognormal
$\nu_s$	---	0.45	---	Determinístico
$c(x,y)$	kPa	30.5	1.00	Lognormal
$E_s(x,y)$	$\text{kN/m}^2$	100000	0.30	Lognormal
$\phi(x,y)$	rad	---	---	Limitada (Bounded)

A variável  $\phi$ , utiliza uma distribuição especial implementada por Fenton e Griffiths (2008). Assume-se que o ângulo de atrito  $\phi$  é limitado superiormente e inferiormente, de modo que as distribuições normal e lognormal não são apropriadas. Uma distribuição beta é frequentemente usada para variáveis aleatórias limitadas. Infelizmente, um campo aleatório beta-distribuído tem uma distribuição conjunta complexa e a simulação é complicada e numericamente difícil. Para simplificar a distribuição é usada uma transformação do tipo  $\tanh$  que resulta em uma distribuição limitada que se assemelha a uma distribuição beta, mas que surge como uma simples transformação de um campo aleatório normal padrão  $G_\phi(x)$  ( $x$  representa o par coordenado  $(x,y)$  em 2D) assim:

$$\phi(x) = \phi_{\min} + \frac{1}{2} (\phi_{\max} - \phi_{\min}) \left\{ 1 + \tanh \left( \frac{m + sG_\phi(x)}{2\pi} \right) \right\} \quad (5.5)$$

onde  $G_\phi(x)$  é um campo aleatório gaussiano com média zero e variância unitária,  $(\phi_{\min}, \phi_{\max})$

são os limites inferior e superior da distribuição, e  $(m,s)$  são parâmetros da distribuição que controlam sua forma. Quando  $m = 0$ , a distribuição é simétrica em relação ao ponto médio,  $0.5(\phi_{min} + \phi_{max})$ , com pequenos valores de  $s$ , produz-se um pico unimodal mais estreito. Valores diferentes de  $m = 0$  não foram investigados.

Tomando como referência os valores de Fenton e Griffiths (2008) para esta distribuição, tem-se:

1.  $\phi_{min} = 0.174533$  rad ( $10^\circ$ ),  $\phi_{max} = 0.698132$  rad ( $40^\circ$ )
2.  $m = 0, s = 5$

Uma função de correlação espacial de Gauss-Markov é usada para o campo aleatório calculado, fornecendo o coeficiente de correlação entre os valores logarítmicos da propriedade em pontos separados por uma distância  $\tau$ , como explicado na Equação (5.2). No caso de carga descrito na Figura 5.1 toda a teoria associada à função de correlação é explicada, o que funciona da mesma forma para todas as variáveis aleatórias com variabilidade espacial aqui contempladas.

O valor da distância de correlação utilizado é  $\theta_{lnProp_x} = \theta_{lnProp_y} = 4.0$  m seguindo valores reportados por Fenton e Griffiths (2008). *Prop* refere-se a propriedades com variabilidade espacial.

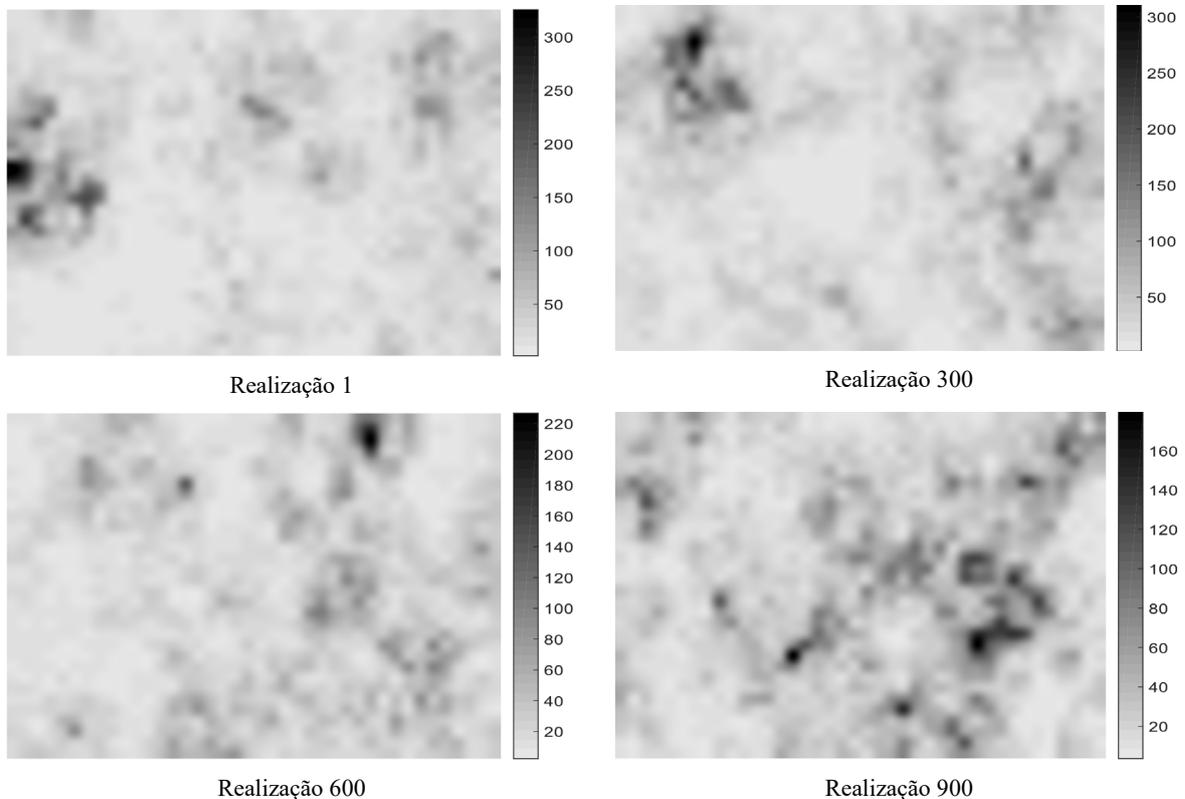
O cálculo do campo aleatório de todas as variáveis com distribuição lognormal e variabilidade espacial é realizado de forma análoga à apresentada na Equação (5.3) e para o caso especial do ângulo de atrito e de dilatação a Equação (5.5) é utilizada.

### **5.2.1 Modelo implementado incluindo a variabilidade espacial nas propriedades do solo $c$ , $\phi$ e $E_s$**

Às ferramentas desenvolvidas com a metodologia descrita no Capítulo 3 é adicionado um gerador de campo obtido a partir do código fonte da aplicação *Rpill2D* incluído no software *RFEM* de Fenton e Griffiths (2008). A adaptação inclui a extração cuidadosa do gerador de campo da aplicação *Rpill2D* deixando de lado as rotinas para o cálculo por elementos finitos das realizações e outras rotinas acessórias, o resultado final é um código capaz de gerar dois arquivos de texto simples, um chamado *campoc.res* e outro *val\_medioc.res*, esses dois arquivos contêm o seguinte:

1. *Camposc.res*: contém as  $n$  realizações dos campos aleatórios de  $c$ ,  $\phi$  e  $E_s$  calculados pelo gerador de campos sob a técnica LAS 2D. Para o caso 1500 realizações são calculadas em uma malha de elementos finitos de  $40 \times 32$  nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente para um total de 1280 elementos, portanto, este arquivo contém  $1280 \times 1500$  linhas, ou seja, 1920000 linhas com registro de 3 colunas por linha. Inicialmente foi obtida uma malha de  $40 \times 30$  com base em critérios de erro e de custo computacional, entretanto, o gerador obtido corrigiu o tamanho da malha para  $40 \times 32$ , a fim de adaptar a malha de elementos finitos com o mapeamento do gerador LAS.
2. *Val\_medioc.res*: contém a média aritmética das variáveis aleatórias com variabilidade espacial  $c_i$ ,  $\phi_i$  e  $E_{s_i}$  de cada realização, então este arquivo para o caso contém 1500 linhas com registro de 3 colunas por linha. Os dados deste arquivo são utilizados para representar graficamente os histogramas destes valores.

Uma ferramenta de pós-processamento em *MATLAB* foi desenvolvida para verificação gráfica dos resultados obtidos pelo gerador de campo. As Figuras 5.7, 5.8 e 5.9 mostram os campos aleatórios de 1 a 1500 que foram devidamente escolhidos para o problema abordado.



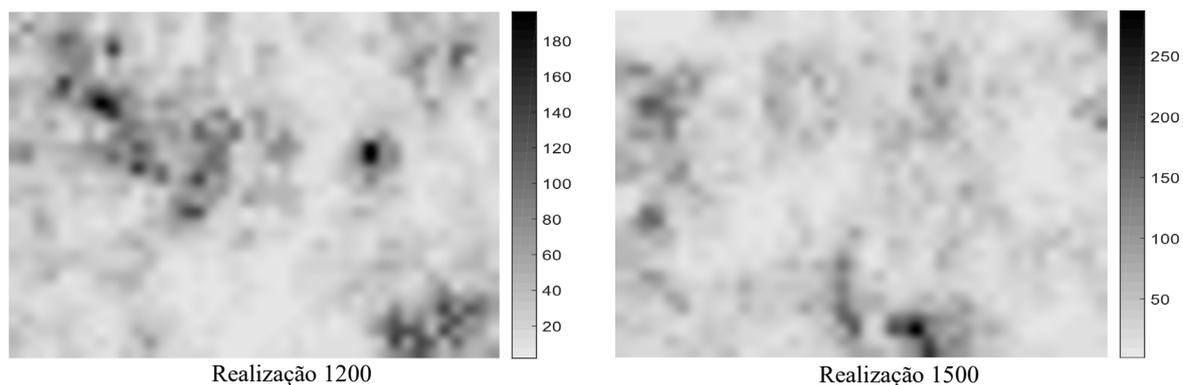


Figura 5.7– Realizações do intercepto coesivo do solo  $c$  para o problema da deformação plana.

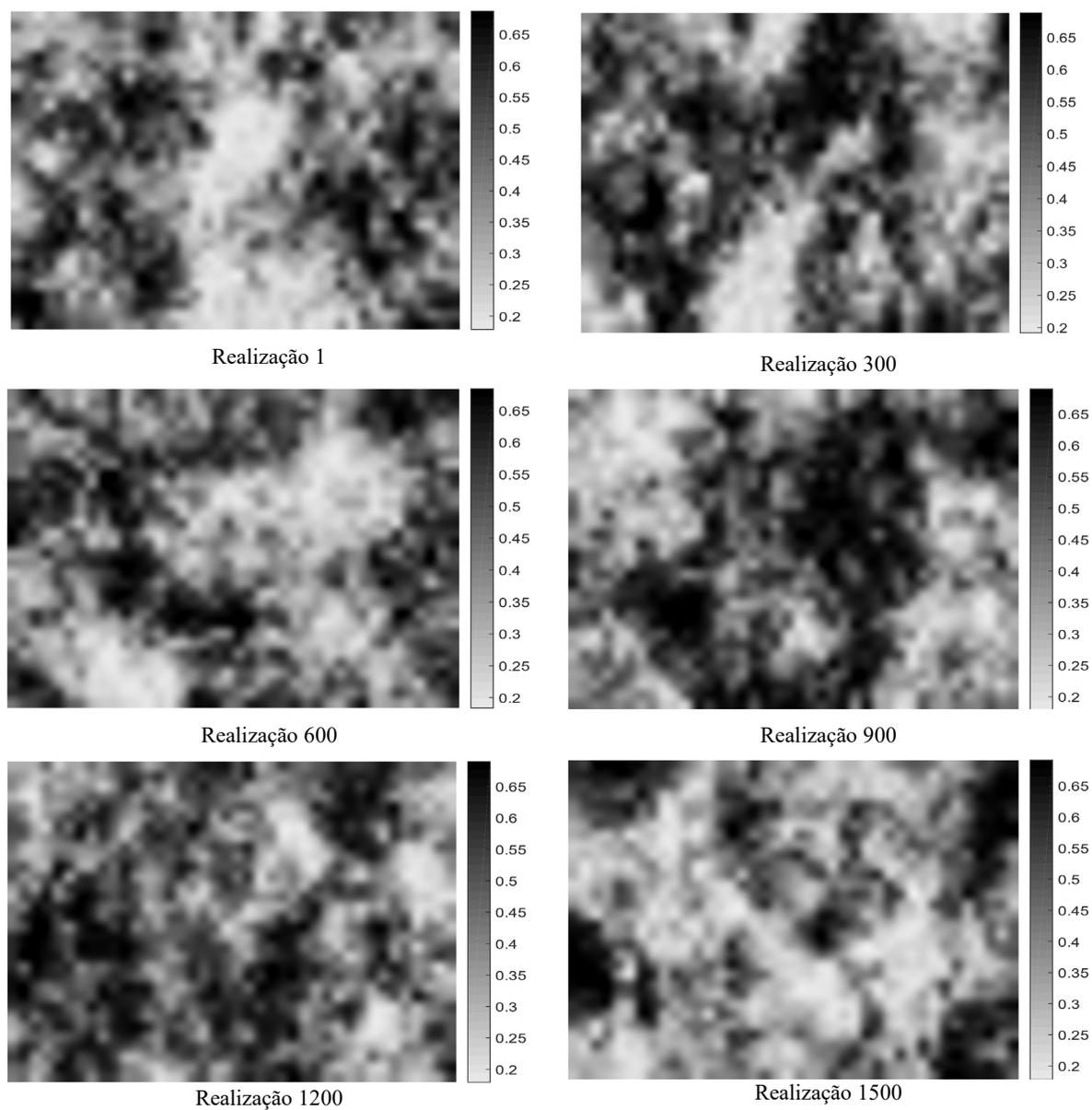


Figura 5.8– Realizações do ângulo de atrito  $\phi$  do solo para o problema da deformação plana.

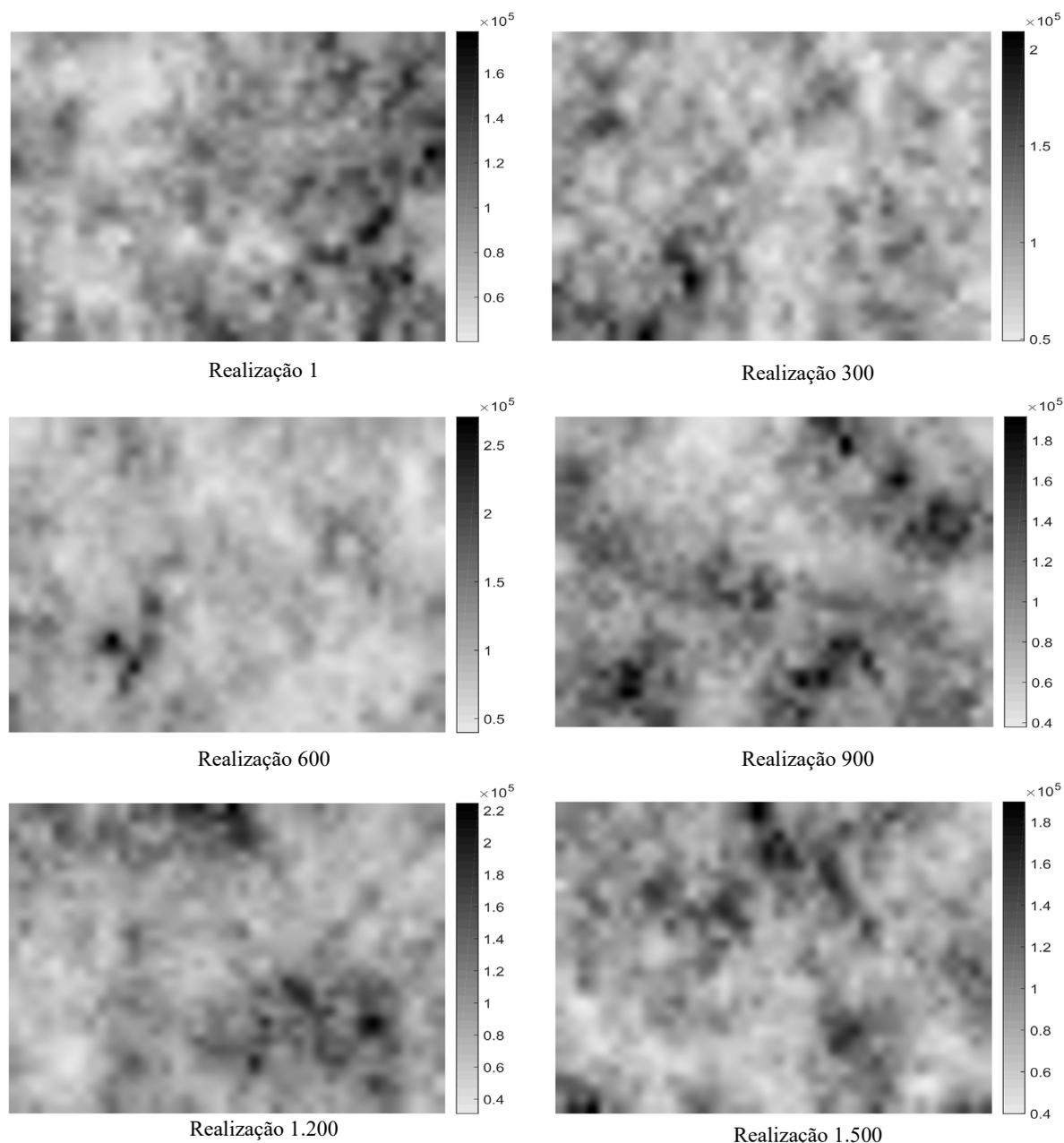


Figura 5.9 – Realizações do módulo de elasticidade do solo  $E_s$  para o problema da deformação plana.

Nas Figuras 5.7 a 5.9 as áreas mais escuras correspondem a valores de propriedade mais altos e as áreas menos escuras correspondem a regiões de valores de propriedade mais baixos, de modo que incrustações de áreas fortes dentro de áreas fracas são notáveis.

As Figuras 5.10 e 5.12 mostram as distribuições  $\ln-c$  e  $\ln-E_s$  como sinus de Gauss típicos da distribuição normal enquanto a Figura 5.11 mostra a distribuição do ângulo de atrito.

Numericamente os gráficos obtidos nas Figuras 5.10, 5.11 e 5.12 foram comparados com os resultados obtidos com a ferramenta original *Rpill2D* e coincidem, verificando-se assim a correta adaptação do gerador de campo para as propriedades 2D.

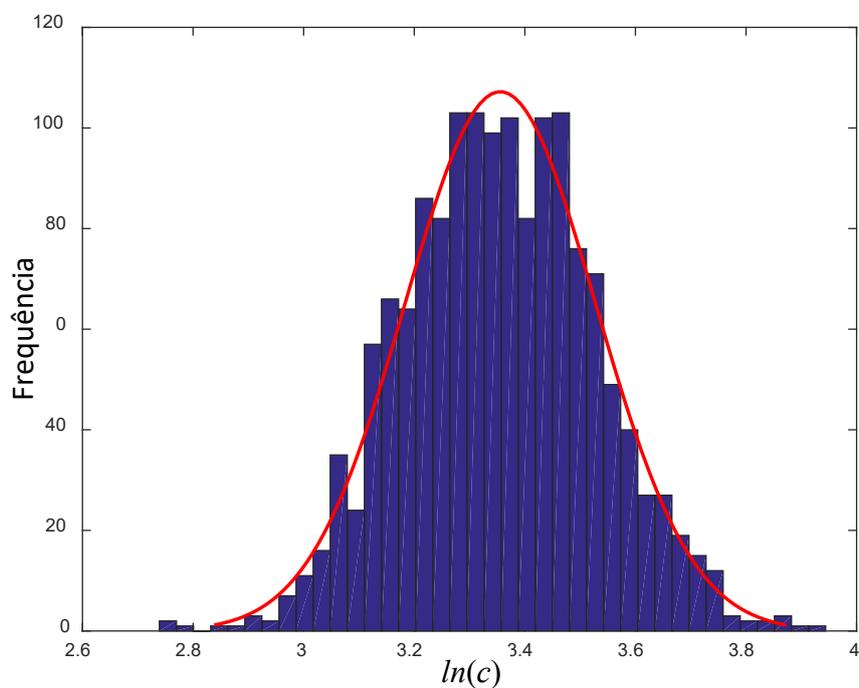


Figura 5.10 – Distribuição gaussiana de  $\ln-c$  do solo utilizando malha de 40x32 elementos e 1500 realizações.

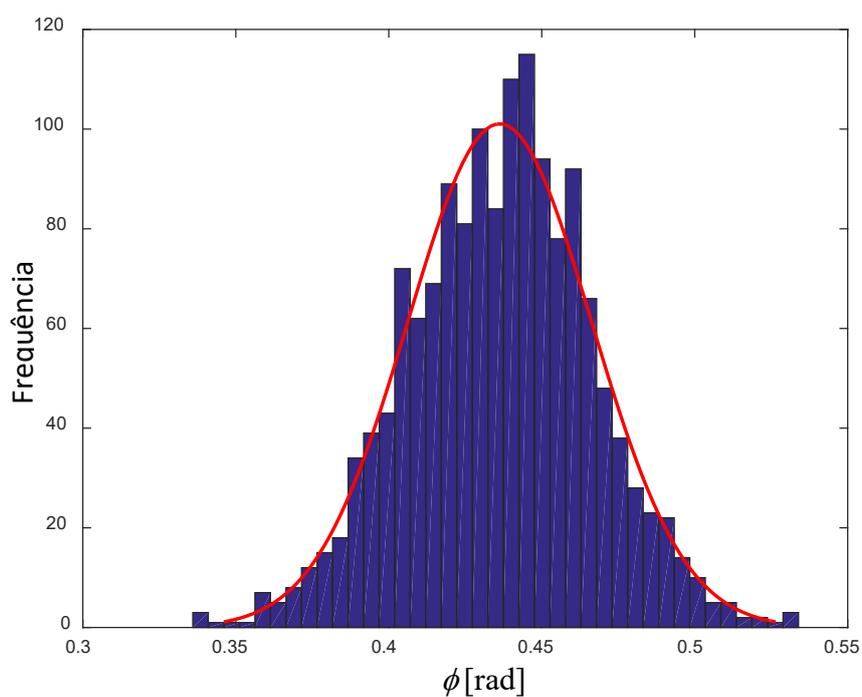


Figura 5.11 – Distribuição gaussiana do ângulo de atrito  $\phi$  do solo utilizando malha de 40x32 elementos e 1500 realizações.

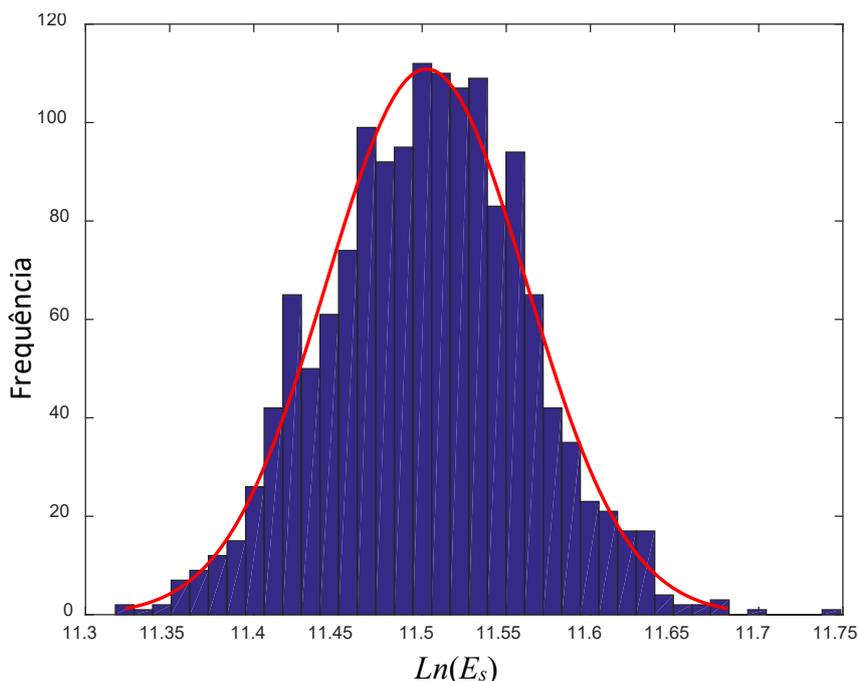


Figura 5.12 – Distribuição gaussiana de  $ln-E_s$  do solo usando malha de 40x32 elementos e 1500 realizações.

Tendo o arquivo *camposc.res* já verificado, este é usado em cada realização para atualizar as propriedades de cada elemento finito e assim obter os modelos no problema de interação solo-estaca com variabilidade espacial incorporada.

A malha de elementos finitos utilizada consiste em elementos sólidos planos para a representação do solo com propriedades de elastoplasticidade sob o modelo constitutivo de Mohr Coulomb (malha de elementos quadriláteros 40x32 perfeitamente adaptada ao campo gerado para variáveis aleatórias com variabilidade espacial), e para a modelagem de estacas são utilizados elementos do tipo viga de modelagem de estacas sob o modelo constitutivo elástico linear, deve-se também notar que a malha de elementos finitos da estaca é discretizado de acordo com a malha de elementos sólidos para alcançar uma perfeita união entre a estaca e o solo.

A condição de perfeita união entre estaca e solo tem sido utilizada por diferentes pesquisadores na modelagem da interação solo-estaca (Palomino, 2015).

De acordo com a velocidade, requisitos de armazenamento e economia de memória a ter quando se lida com problemas de confiabilidade, incluindo campos estocásticos, evita-se ao máximo o pós-processo gráfico e escrita de arquivos, de modo que o interesse é focado nas realizações

calculadas, as variáveis aleatórias de entrada e saída e seu pós-processo estatístico.

O resultado obtido para a probabilidade de falha e o índice de confiabilidade associado são registrados na Tabela 5.4. É importante ressaltar que um pequeno teste com poucas simulações é realizado preliminarmente para estimar a probabilidade de falha de  $P_f$  e para estimar um número de simulações que levam em conta um coeficiente de variação de  $P_f$  igual ou inferior a 0,05 (5%) (Gomes, 2004).

Tabela 5.4 – Resultados de probabilidade de falha e índice de confiabilidade obtidos

<b>Método</b>	<b>Prob. de falha (<math>P_f</math>)</b>	<b>Índice de confiabilidade (<math>\beta</math>)</b>	<b>Coefficiente de variação de <math>P_f</math> <math>CV_{P_f}</math></b>
Simulação de Monte Carlo com campos aleatórios calculados por metodologia LAS (1500 realizações)	0.2873	0.5612	0.0407

O exemplo desenvolvido constitui uma contribuição para o estado de conhecimento na modelagem da interação solo-estaca, considerando aspectos como a variabilidade espacial das principais propriedades do solo, a inclusão da variabilidade da amostra nas variáveis principais das estacas, o estudo e tratamento adequado das distribuições estatísticas das variáveis aleatórias do solo, o estudo da variabilidade da função de estado limite por sensibilidades probabilísticas e não por estudo paramétrico, a incorporação de coeficientes de variação ampla que permitem explorar a sensibilidade probabilística da função de estado limite em relação a variáveis de entrada aleatórias, entre outros aspectos a destacar. Finalmente, ressalta-se que a implementação do exemplo desenvolvido requer como fase preliminar o estudo profundo do fenômeno de interação solo-estaca contemplado na literatura clássica da geotecnia e a familiarização com os parâmetros do problema e suas ordens de grandeza.

Espera-se que os modelos implementados sirvam de referência para que outros pesquisadores usem como ponto de partida para pesquisas futuras que permitam a incorporação de novos temas e alternativas de modelagem.

Os resultados obtidos na Tabela 5.4 mostram uma alta probabilidade de falha, que é razoável com as condições impostas ao problema e a ordem considerável de magnitude dos coeficientes de variação utilizados. Na Figura 5.13 pode-se observar a evolução do cálculo da probabilidade de falha através das realizações e sua convergência, pois era esperado que variações importantes

puddessem ser percebidas no início do processo de simulação e com o avanço a probabilidade de falha  $P_f$  tende a estabilizar-se em um valor de tendência constante.

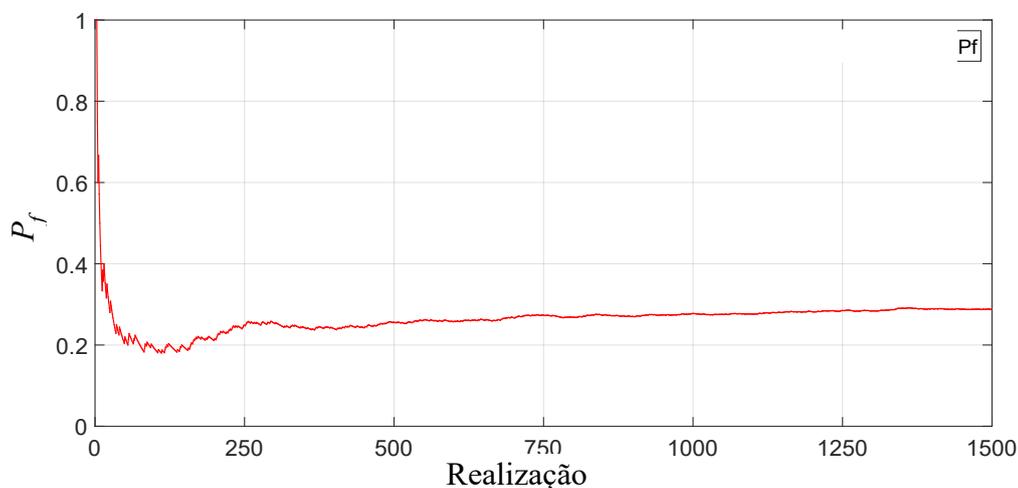


Figura 5.13 – Gráfico de convergência da probabilidade de falha usando malha de 40x32 elementos e 1500 realizações.

### 5.2.2 Análise das sensibilidades probabilísticas do Modelo implementado, incluindo a variabilidade espacial nas propriedades $c$ , $\phi$ e $E_s$ do solo. (aderência Perfeita)

O coeficiente de correlação de postos de Spearman é utilizado como ferramenta para o cálculo de sensibilidades probabilísticas (ANSYS, 2016) uma vez que estabelece o nível de significância de uma variável aleatória em relação à função de estado limite em estudo. A expressão para o cálculo é:

$$r_s = \frac{\sum_i^n (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_i^n (R_i - \bar{R})^2} \sqrt{\sum_i^n (S_i - \bar{S})^2}} \quad (5.6)$$

onde:

$R_i$  é posto de  $X_i$  dentro do conjunto de observações  $[X_1 X_2 \dots X_n]^T$ ,  
 $S_i$  é posto de  $Y_i$  dentro do conjunto de observações  $[Y_1 Y_2 \dots Y_n]^T$  e,  
 $\bar{R}, \bar{S}$  são os postos médios de  $R_i$  y  $S_i$  respectivamente.

Estabelecer a sensibilidade probabilística das variáveis aleatórias de um problema ou projeto

permite definir critérios para investir e poupar dinheiro nas variáveis apropriadas que intervêm na confiabilidade de uma estrutura, pelo que é necessário investir dinheiro e esforço nas variáveis mais significativas para afetar positivamente a confiabilidade de uma forma eficaz e poupar dinheiro em variáveis insignificantes onde os cortes podem ser feitos sem afetar significativamente a confiabilidade de uma estrutura, desde que, naturalmente, seja humanamente possível intervir na variável aleatória presente no problema.

Há uma diferença entre as sensibilidades probabilísticas e sensibilidades determinísticas. As sensibilidades determinísticas são, na sua maioria, apenas informações de gradiente local. Inerentemente, as simulações de Monte Carlo sempre variam todas as variáveis de entrada aleatórias no ao mesmo tempo; assim, se as interações existirem, elas serão sempre refletidas corretamente no probabilístico sensibilidades (ANSYS, 2016).

Para o cálculo das sensibilidades probabilísticas é utilizado o sistema de álgebra livre *OCTAVE* e *MATLAB*, sendo então desenvolvida uma ferramenta computacional para captura de dados, cálculo de sensibilidades probabilísticas, aplicação do teste de significância às variáveis aleatórias que intervêm no cálculo da função de estado limite e a representação gráfica estatística dos resultados.

A Tabela 5.5 apresenta os valores obtidos para as sensibilidades probabilísticas calculadas pela Equação (5.6), e seus respectivos valores em termos percentuais para determinar o nível de significância da variável em relação à função de estado limite. Apenas variáveis significativas são relatadas de acordo com o teste de significância associado ao coeficiente de correlação de postos de Spearman. Os resultados são entregues na ordem, que parte da variável mais significativa para a variável menos significativa.

Embora este tipo de análise de sensibilidade probabilística não seja muito comum na literatura, no caso da inclusão de variáveis aleatórias com variabilidade espacial é adicionada como uma contribuição adicional, o que dá um caráter especial à análise tendo em mente que é necessário estabelecer um valor característico que resuma os campos aleatórios em cada realização. Para o cálculo da sensibilidade das variáveis aleatórias com variabilidade espacial, são utilizados os valores médios da propriedade em cada execução e estes são registrados no arquivo *val\_medioc.res*, obtido por meio do gerador de campos adaptado pelo autor a partir dos arquivos fonte do *RFEM* de Fenton e Griffiths (2008).

Tabela 5.5 – Resultados da sensibilidade da função de estado limite  $GG$  para variáveis de entrada aleatórias

Variável	Sensibilidade $r_s$	Sensibilidade (%)
$\phi$	0.4174	55
$C$	0.1840	24
$\gamma_s$	0.1642	21

Os resultados obtidos na Tabela 5.5 ratificam o ângulo de atrito como a variável mais significativa, seguida do intercepto coesivo, e estes resultados coincidem favoravelmente com a pesquisa relatada por Fenton e Griffiths (2008) sobre problemas relacionados ao carregamento do solo, tais como carga nas sapatas, colunas de solo e estabilidade do talude, onde estes pesquisadores argumentam e apoiam como as variáveis mais significativas  $\phi$  e  $c$ , em sua ordem e descartam a inclusão de outras, porém pode-se observar que o peso específico do solo é significativo em 21% para o cálculo da função estado limite e, portanto, para a capacidade de carga do conjunto solo-estaca.

O peso específico do solo é incluído na modelagem por meio da ativação das condições iniciais de tensão, que para o caso tem variabilidade espacial, dado que, o módulo de elasticidade do solo possui essa variabilidade e isso induz que quando o peso do solo é ativado as forças são distribuídas de forma proporcional à rigidez de cada elemento finito dentro da discretização gerando uma resposta não uniforme. A inclusão de campos aleatórios nesta modelagem não é comum em códigos geotécnicos e dá um caráter especial à análise como um avanço para a modelagem da heterogeneidade natural do solo.

Na Figura 5.14 pode-se observar a hierarquia de significância das variáveis aleatórias e das variáveis não significativas sob o nível de significância imposta de 0.025. Neste sentido, pode-se observar a grande influência do ângulo de atrito e como as duas variáveis associadas à estaca, o diâmetro  $D$  e o módulo de elasticidade do material da estaca  $E_p$  não são significativos e apenas a influência do variável comprimento da estaca em termos de probabilidade de falha ficaria por explorar. O módulo do solo também não é muito significativo, provavelmente porque sua influência é limitada à faixa elástica do solo e a capacidade de carga é calculada em condições de deformação plástica.

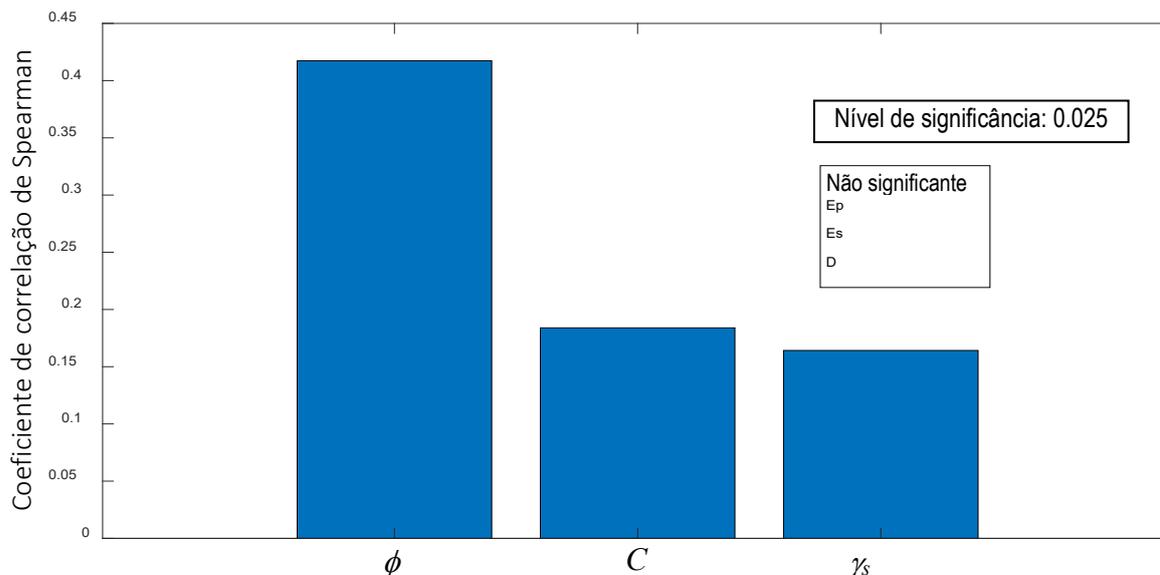


Figura 5.14 – Gráfico de barras de sensibilidade probabilística de postos de Spearman e variáveis não significativas.

A Figura 5.15 mostra em escala de porcentagem a significância das variáveis e sua hierarquia.

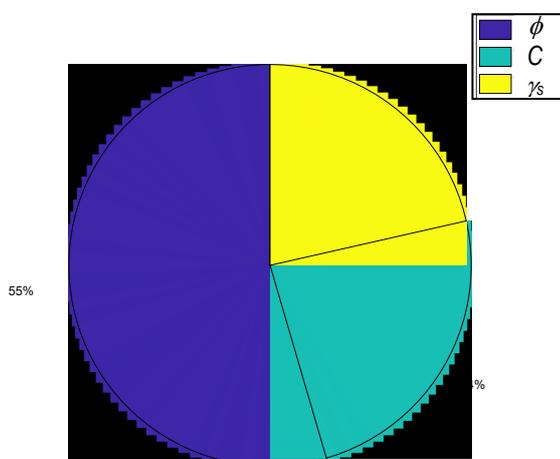


Figura 5.15 – Gráfico hierárquico de significância das variáveis em porcentagem.

### 5.3 PROBLEMA DE CONFIABILIDADE NA INTERAÇÃO SOLO-ESTACA, INCLUINDO CAMPOS ESTOCÁSTICOS (SOLUÇÃO ELASTOPLÁSTICA MOHR-COULOMB E CONDIÇÃO DE ADERÊNCIA POR ATRITO)

Uma vez resolvido o problema da interação solo-estaca com aderência perfeita, a solução do mesmo problema é abordada, incluindo a condição de aderência por atrito. Portanto, todos os

detalhes relatados no modelo anterior são omitidos aqui e os aspectos referentes à modelagem da interface solo-estaca são estabelecidos. A construção deste novo modelo implica o estudo da literatura sobre a modelagem de interfaces de fricção, destacando-se Palomino (2015) e Bowles (1988). Com isso, inicia-se a definição de três parâmetros fundamentais para a modelagem da interface de fricção:

1. A rigidez normal da interface de contato  $K_n$
2. A rigidez de corte da superfície de contacto  $K_s$
3. O coeficiente de atrito da interface de contacto  $\mu$  (envolve atrito entre duas superfícies, como as associadas à estaca e ao solo).

Em relação aos dois primeiros parâmetros  $K_n$  e  $K_s$ , estes têm a ver fundamentalmente com aspectos de convergência e precisão dos resultados, pelo que existe toda uma série de recomendações na literatura, no entanto, em Palomino (2015) existe uma discussão muito completa que permite calcular os valores com a fórmula  $K_s = K_n = 48G_s$ , onde  $G_s$  é o módulo de elasticidade ao corte do solo calculado de forma clássica como  $G_s = E_s / [2(1 + \nu_s)]$  onde  $E_s$  é o módulo de elasticidade e  $\nu_s$  é o módulo de Poisson do solo).

A Figura 5.16 mostra a configuração geométrica, condições de apoio, interface de atrito e dados básicos do modelo.

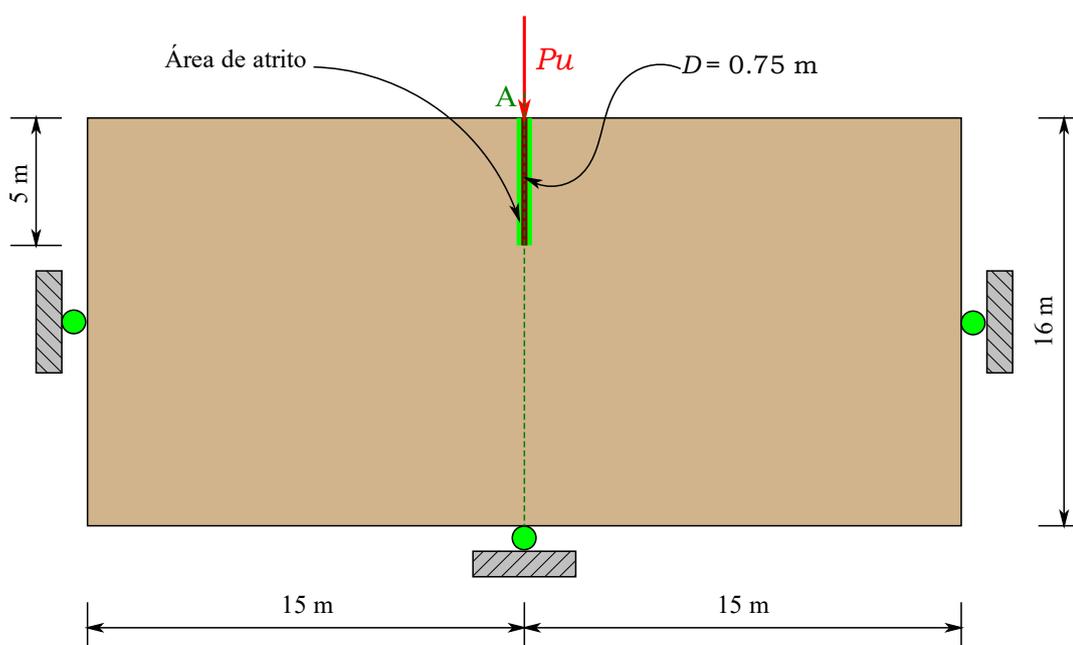


Figura 5.16 – Modelo 2D de interação solo-estaca com aderência por atrito: geometria, restrições e cargas.

Para o caso pode-se usar os valores médios de  $E_s$  e  $\nu_s$ , e substituí-los nas fórmulas mostradas para obter os valores de  $K_s$  e  $K_n$ . O terceiro parâmetro  $\mu$  é discutido por alguns autores como Serdaroglu (2010), onde ele o define em termos do ângulo de atrito do solo usando a equação  $\mu = \tan(\phi)$ , no entanto, nesta tese as recomendações Bowles (1988) são bem-vindas, onde o parâmetro  $\mu$  é explicado como uma função característica das superfícies de contato que pode ser calculada como  $\mu = \tan(\delta)$ , onde  $\delta$  é o ângulo de atrito entre as superfícies que podem ser extraídas da Tabela 5.6.

Tabela 5.6 – Valores do ângulo de atrito entre as superfícies de contato.

Fonte: Bowles (1988).

<b>Concreto maciço ou alvenaria em contacto com:</b>	$\delta(^{\circ})$
Rocha limpa	35
Pedregulho limpo, mistura de pedregulho e areia, areia granulada grossa	29 - 31
Areia limpa fina a média, areia siltosa média a grossa, Pedregulho siltoso ou argiloso	24 - 29
Areia fina e limpa, areia siltosa ou argilosa fina a média	19 - 24
Silte arenoso fino, Silte não plástico	17-19
Argila muito rígida com resíduos duros ou pré-consolidados	22-26
Argilas de rigidez média e rígidas e argilas arenosas	17-19
<b>Estacas de aço contra:</b>	$\delta(^{\circ})$
Pedregulho limpo, mistura siltosa de areia e pedregulho, enchimento com rocha dura de tamanho único	22
Areia limpa, mistura siltosa de areia com pedregulho, enchimento de rocha dura de tamanho único	17
Areia siltosa, pedregulho ou areia misturada com silte ou argila	14
Silte arenoso fino, silte não plástico	11
<b>Estacas-pranchas de concreto simples ou concreto armado contra:</b>	$\delta(^{\circ})$
Pedregulho limpo, mistura de pedregulho e areia, enchimento de rocha bem graduado com escória	22-26
Areia limpa, mistura siltosa de areia com pedregulho, enchimento de rocha dura de tamanho único	17-22
areia siltosa, pedregulho até areia misturada com silte ou argila	17
Silte arenoso fino, silte não plástico	14
<b>Outros materiais:</b>	$\delta(^{\circ})$
Madeira sobre solo	14-16

As variáveis do problema estão resumidas na Tabela 5.7, incluindo os novos parâmetros da superfície de atrito. A função de estado limite ainda tem a mesma estrutura da Equação (5.4) para o caso de aderência perfeita, somente neste caso haverá uma influência adicional dos parâmetros da superfície de atrito, especialmente o coeficiente de atrito  $\mu$  que podem ser

avaliados como  $\tan(18^\circ)$  de acordo com os valores de referência da Tabela 5.6.

O valor da capacidades de carga última  $\bar{Q}_{ult} = 1075.5903$  kPa é obtido calculando  $Q$  nos valores médios das suas variáveis aleatórias sem incluir a variabilidade espacial e é tomado como fator de segurança  $FS=1.5$ , pelo que a capacidade de carga admissível será  $Q_{adm}=717.0602$  kPa.

Tabela 5.7 – Variáveis e seus parâmetros estatísticos característicos.

Variável	Unidade	Média	CV	Distribuição
$D$	M	0.75	0.30	Lognormal
$E_p$	kN/m <sup>2</sup>	21E6	0.50	Lognormal
$\nu_p$	---	0.3	---	Determinístico
$\gamma_s$	kN/m <sup>3</sup>	20.2	0.10	Lognormal
$\nu_s$	---	0.45	---	Determinístico
$c(x,y)$	kPa	30.5	1.00	Lognormal
$E_s(x,y)$	kN/m <sup>2</sup>	100000	0.30	Lognormal
$\phi(x,y)$	Rad	---	---	(Limitada) Bounded
$K_n$	kPa/m	165517.241	---	Determinístico
$K_s$	kPa/m	165517.241	---	Determinístico
$\mu$	---	0.3249	---	Determinístico

Os campos aleatórios utilizados são os mesmos que os utilizados no exemplo anterior.

### 5.3.1 Modelo implementado incluindo a variabilidade espacial das propriedades do solo $c$ , $\phi$ e $E_s$ (aderência por atrito)

O modelo é desenvolvido seguindo todos os comentários relatados no exemplo anterior e a superfície de atrito é adicionada como uma alternativa para a interação solo-estaca. A malha de elementos finitos para a modelagem da interface está em conformidade com a malha de elementos finitos do solo, respeitando a discretização utilizada para campos aleatórios (malha de elementos quadriláteros 40x32 perfeitamente adaptada ao campo gerado para variáveis aleatórias com variabilidade espacial).

De acordo com a velocidade, requisitos de armazenamento e economia de memória a ter quando se lida com problemas de confiabilidade, incluindo campos estocásticos, evita-se ao máximo o pós-processo gráfico e escrita de arquivos, de modo que o interesse é focado nas realizações calculadas, as variáveis aleatórias de entrada e saída e seu pós-processo estatístico.

O resultado obtido para a probabilidade de falha e o índice de confiabilidade associado são registrados na Tabela 5.8.

Tabela 5.8 – Resultados de probabilidade de falha e índice de confiabilidade obtidos

<b>Método</b>	<b>Prob. de falha (<math>P_f</math>)</b>	<b>Índice de confiabilidade (<math>\beta</math>)</b>	<b>Coefficiente de variação de <math>P_f</math> <math>CV_{P_f}</math></b>
Simulação de Monte Carlo com campos aleatórios calculados por metodologia LAS (1500 realizações)	0.2873	0.5612	0.0407

O exemplo aqui desenvolvido acrescenta às contribuições já comentadas no exemplo anterior, a inclusão da superfície de atrito como alternativa de união parcial entre solo e estaca incorporando maior complexidade aos cálculos e uma aproximação às condições reais de campo.

Os resultados obtidos na Tabela 5.8 são exatamente iguais aos obtidos com uma união perfeita na Tabela 5.4, pois a capacidade de carga admissível foi modificada devido à condição de aderência, sem modificar os demais parâmetros de entrada, ou seja, os modelos são requeridos de acordo com sua capacidade de carga. Se, por outro lado, o exercício fosse realizado mantendo a capacidade de carga admissível de  $Q_{adm}$  imposta na condição de aderência perfeita (que é maior que a capacidade de carga admissível de  $Q_{adm}$  na condição de aderência de atrito), haveria mais falhas ao colocar um requisito de capacidade de carga admissível maior do que o modelo com aderência de atrito não atende como o modelo com aderência perfeita atende, e portanto a probabilidade de falha aumentaria.

A Figura 5.17 mostra a evolução do cálculo da probabilidade de falha através das realizações e sua convergência, pois era esperado que variações importantes pudessem ser percebidas no início do processo de simulação e com o avanço a probabilidade de falha  $P_f$  tende a se estabilizar em um valor de tendência constante.

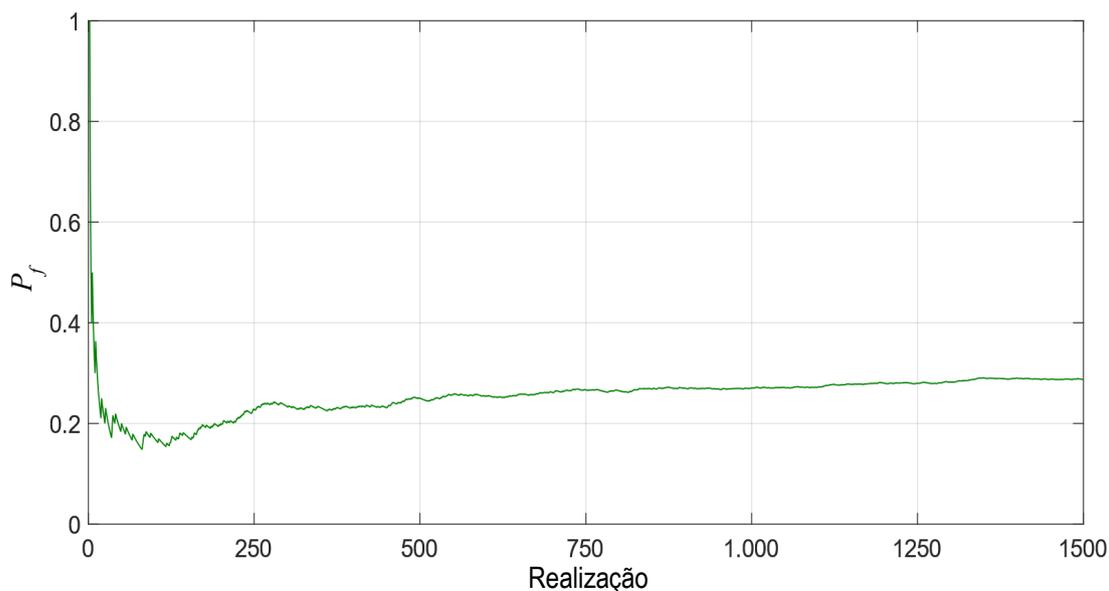


Figura 5.17 – Gráfico de convergência da probabilidade de falha usando elementos de malha 40x32 e 1500 realizações.

### 5.3.2 Análise das sensibilidades probabilísticas do modelo implementado, incluindo a variabilidade espacial das propriedades do solo $c$ , $\phi$ e $E_s$ (aderência por atrito)

A metodologia e as ferramentas mostradas no exemplo anterior são utilizadas, porém com os resultados do modelo de aderência por atrito. A Tabela 5.10 apresenta os valores obtidos para as sensibilidades probabilísticas calculadas e seus respectivos valores em termos percentuais que determinam o nível de significância da variável em relação à função de estado limite. Apenas variáveis significativas são relatadas de acordo com o teste associado ao coeficiente de correlação de postos de Spearman. Os resultados são entregues na ordem que parte da variável mais significativa para a variável menos significativa.

É necessário ressaltar que o cálculo deste modelo utiliza uma capacidade de carga admissível ajustada à própria capacidade de carga de um modelo com aderência por atrito, ou seja, com relação à condição de aderência perfeita, a capacidade de carga admissível  $Q_{adm}$  é menor, situação que sugere que os dois modelos teriam condições de falha semelhantes a uma carga proporcional à sua capacidade de carga, no entanto, a questão permanece se a sensibilidade das variáveis é afetada pela alteração da condição de aderência, a resposta pode ser estabelecida com a revisão e discussão dos resultados a serem mostrados.

Tabela 5.9 - Resultados da sensibilidade da função de estado limite  $GG$  para variáveis de entrada aleatórias.

Variável	Sensibilidade $r_s$	Sensibilidade (%)
$\phi$	0.3046	52
$\gamma_s$	0.1466	25
$C$	0.1389	23

Se os resultados da Tabela 5.9 forem comparados com os obtidos na Tabela 5.5, pode-se observar que os resultados de sensibilidade são afetados pela condição de aderência, sendo necessário rever os detalhes dessa afetação.

Em primeiro lugar, é necessário ressaltar que as três variáveis significativas do problema, como o ângulo de atrito, o peso específico do solo e o intercepto coesivo, são mantidas, resultado que ratifica essas variáveis como o conjunto significativo de variáveis na análise da capacidade de carga das estacas em seu fenômeno de interação com o solo. Por outro lado, a sensibilidade probabilística do ângulo de atrito do solo diminui ligeiramente (de 55% para 52%), entretanto, esse percentual é cedido para a distribuição nas outras duas variáveis significativas.

Analisando o comportamento das variáveis peso específico do solo e intercepto coesivo, observa-se uma inversão na ordem de significância que coloca a variável  $\gamma_s$  ligeiramente acima da variável intercepto coesivo, o que pode indicar que em condições de aderência por atrito, o peso específico ganha importância e em termos práticos qualquer sobrecarga junto ao topo da estaca aplicada no solo, gerará efeitos positivos de aumento da capacidade de carga da estaca em proporção ao seu valor de sensibilidade e, portanto, haverá um aumento no índice de confiabilidade do mesmo. O intercepto coesivo torna-se a terceira variável de significância com 23%, o que a coloca como uma variável de considerável importância na capacidade de carga das estacas.

Na Figura 5.18 pode-se observar a hierarquia de significância das variáveis aleatórias e das variáveis não significativas sob o nível de significância imposta de 0.025. A este respeito pode-se observar a grande influência do ângulo de atrito e como as duas variáveis associadas à estaca, o diâmetro  $D$  e o módulo de elasticidade do material da estaca  $E_p$  não são significativos.

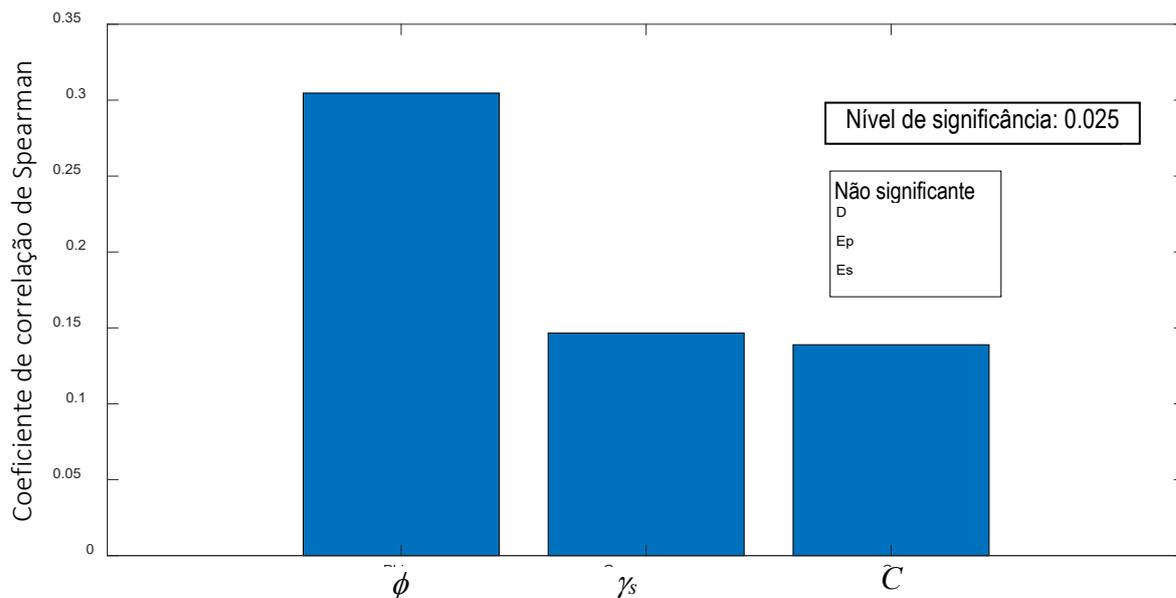


Figura 5.18 – Gráfico de barras de sensibilidade probabilística de postos de Spearman e variáveis não significativas.

A Figura 5.19 mostra em escala de porcentagem a significância das variáveis e sua hierarquia.

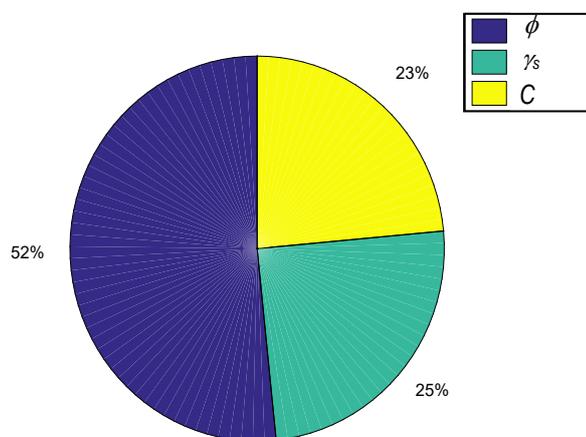


Figura 5.19 – Gráfico hierárquico de significância das variáveis em porcentagem.

#### 5.4 ESTUDO PARAMÉTRICO DA INFLUÊNCIA DO COMPRIMENTO DA ESTACA NA CONFIABILIDADE, INCLUINDO CAMPOS ESTOCÁSTICOS (SOLUÇÃO ELASTOPLÁSTICA MOHR-COULOMB, CONDIÇÃO DE ADERÊNCIA POR ATRITO)

Como última variável a ser explorada no problema da interação solo-estaca, é estudada aqui a influência do comprimento da estaca na probabilidade de falha sob condição limite de

capacidade de carga última. Para isso, propõe-se um estudo paramétrico variando o comprimento da estaca de 3.5 m para 8.0 m com passos de 1.5 m. Como ponto de referência, coloca-se o modelo de 5 m previamente realizado e mantém-se o requisito de capacidade de carga admissível deste problema  $Q_{adm}=717.0602$  kPa.

A Tabela 5.10 resume os resultados alcançados.

Tabela 5.10 – Variáveis e seus parâmetros estatísticos característicos.

$L(m)$	$P_f$	$Pf_n/Pf_a$ (%)	$\beta$	$\beta_n/\beta_a$ (%)	$CV_{P_f}$	Número de realizações
3.5	0.4800	---	0.0502	---	0.0329	1000
5	0.2873	59.85	0.5612	1117.93	0.0407	1500
6.5	0.1547	53.85	1.0166	181.15	0.0604	1500
8	0.0853	55.14	1.3701	134.77	0.0845	1500

A Tabela 5.10 mostra como à medida que o comprimento da estaca aumenta, a probabilidade de falha diminui e o índice de confiabilidade aumenta como é esperado, porém, revisando as colunas  $Pf_n / Pf_a$  (%) e  $\beta_n / \beta_a$  (%), que significam o quociente de probabilidades de falha com o novo valor de  $L$  em relação ao valor anterior de  $L$  e o quociente de índices de confiabilidade no mesmo sentido, respectivamente, pode-se observar como esses quocientes registram mudanças cada vez menores que implicam que em maiores comprimentos os índices de confiabilidade registrem mudanças cada vez menores, o que define o critério de não utilizar comprimentos de estacas muito grandes, uma vez que estes não vão gerar mudanças significativas no índice de confiabilidade do sistema de interação solo-estaca.

Pode-se observar que a mudança mais forte no índice de confiabilidade é dada no passo de  $L = 3.5$  m para  $L = 5.0$  m, o que poderia estar relacionado ao conceito de comprimento crítico da teoria clássica de Meyerhof para o cálculo da capacidade de carga máxima de ponta em estacas.

É importante ressaltar que um aspecto a destacar na contribuição das análises realizadas neste Capítulo é a adoção do paradigma da heterogeneidade através da inclusão dos campos estocásticos nas principais variáveis associadas ao comportamento do solo, um avanço importante dado à idade da hipótese de homogeneidade presente nas análises de engenharia há décadas.

A Figura 5.20 mostra graficamente o comportamento assintótico do quociente do índice de confiabilidade explicado acima e determina em escala logarítmica a notável mudança nesse quociente que ocorre entre os comprimentos de 3.5 m a 5.0 m no caso da estaca analisada.

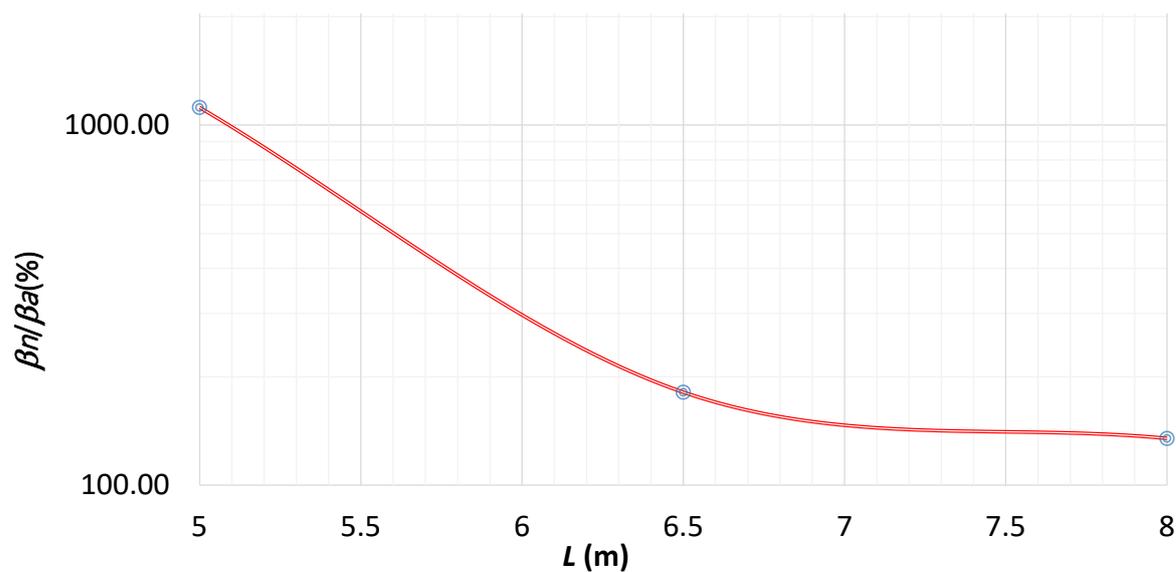


Figura 5.20 – Gráfico do comprimento da estaca vs. quociente dos índices de confiabilidade avaliados no novo comprimento em relação ao comprimento anterior em porcentagem.

As análises encontradas nos resultados da sensibilidade probabilística e do estudo paramétrico constituem uma poderosa ferramenta para a obtenção de critérios de projeto e propõem uma contribuição adicional desta tese para o estado de conhecimento na união das áreas de confiabilidade, campos estocásticos e interação solo-estrutura.

## 6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

As conclusões e recomendações desta tese são definidas abaixo, com base nos resultados obtidos.

### 6.1 CONCLUSÕES

Nesta seção, as conclusões são baseadas nos resultados obtidos nas diferentes fases da tese:

#### 6.1.1 Fase de pesquisa em confiabilidade estrutural apoiada pela modelagem e adaptação e integração de ferramentas computacionais de elementos finitos.

- Um esquema funcional e genérico foi encontrado para adaptar duas ferramentas de cálculo computacional (um núcleo de análise de elementos finitos e um núcleo de análise probabilística) e para conseguir a ligação destes.
- Foi criada a estrutura de arquivos de entrada e saída necessárias para gerar a ligação dos núcleos comentados; posteriormente, os dois núcleos ou ferramentas foram integradas e adaptadas, incluindo os arquivos de entrada e saída, e aplicadas com sucesso para quatro problemas de confiabilidade para testar sua funcionalidade.
- Nesta primeira etapa, pode-se concluir que a implementação de ferramentas de confiabilidade estrutural ligando dois núcleos de análise separados (um para a modelagem numérica da função de estado limite e outro para a modelagem probabilística que utiliza métodos de cálculo de confiabilidade) é favorável, uma vez que no exercício de programação uma linguagem de programação diferente pode ser usada para cada núcleo e a depuração de erros pode ser feita independentemente. O processo de ligação requer um conhecimento profundo dos dois núcleos do esquema, bem como a criação de arquivos de entrada e saída adaptados às particularidades de cada problema.
- A adaptação para cada um dos quatro problemas de confiabilidade mencionados acima foi comparada, os resultados obtidos com os de modelos idênticos desenvolvidos no *ANSYS* foram comparados, demonstrando a correspondência relativa (com valores de erro analisados para a probabilidade de falha) dos valores dos índices de confiabilidade obtidos.

- Ao adaptar esses problemas de confiabilidade, diferentes opções foram testadas, assim: a) modelagem 2D e 3D, b) funções de distribuição probabilística (normal, log-normal e uniforme), c) variáveis aleatórias correlacionadas d) altos coeficientes de variação, e) métodos de cálculo de confiabilidade do tipo FORM, f) métodos de simulação e redução da variância usando métodos de amostragem por importância, g) não linearidade geométrica e não linearidade material para a medição das tensões computacionais esperadas em um modelo de análise elastoplástica.
- O trabalho desenvolvido abordou os principais desafios dos problemas de confiabilidade de modelagem, testou desafios numéricos e demonstrou que o esquema de adaptação utilizado é bem-sucedido e versátil (num exemplo o núcleo de análise probabilística foi desenvolvido em *FORTTRAN* enquanto o núcleo de cálculo da função de estado limite foi programado em *MATLAB*).
- A tese exigiu o estudo de quatro áreas que foram abordadas em ordem, do início ao fim, do fundamental ao mais avançado, começando com a modelagem com elementos finitos do fenômeno de tensões em problemas estruturais e geotécnicos, continuando com a modelagem de fenômenos de interação estrutura-solo para o caso do solo-estaca e a análise da confiabilidade estrutural, finalmente, termina com a modelagem dos campos estocásticos aplicados a problemas geotécnicos.
- A revisão da literatura nessas quatro áreas foi exaustiva, concluindo que, na realidade, os autores que estudaram de forma integrada os fenômenos de interação estrutura-solo, análise probabilística e campos aleatórios, são poucos, a tal ponto que, atualmente, apenas Fenton e Griffiths (2008) fizeram uma contribuição na geotecnia liberando o código fonte de cálculo da confiabilidade com campos aleatórios e o software RFEM.
- Na revisão de software comercial com a capacidade de realizar análises probabilísticas com variabilidade espacial, até agora, não há nenhum software comercial. Portanto, pode-se concluir que a análise probabilística dos fenômenos da interação solo-estrutura com campos aleatórios é um tema que agrega valor ao estado de conhecimento atual que merece ser publicado em periódicos de alto impacto.
- Os resultados obtidos a partir das simulações usando os métodos de cálculo de confiabilidade FORM, Monte Carlo (MC), Monte Carlo com amostragem por importância (MCI) e Monte Carlo com amostragem por Hipercubo Latino (MCLH) são semelhantes, mas tem variações que tem que ser analisadas (o esquema MCLH do *ANSYS* foi usado para validar os problemas). Destes quatro métodos, o mais confiável

é o MC porque é o método de maior exploração de amostragem aleatória, enquanto o MCI e MCLH são aproximações do MC e concentram sua amostragem em algum critério, este fato, pode diminuir o tempo de cálculo computacional, mas também pode sacrificar a aproximação.

- É verdade que o método MC é o mais confiável, no entanto, tem altas demandas por tempo computacional que restringem seu uso em grandes problemas ou naqueles com algum tipo de não linearidade, sendo aconselhável usar as alternativas de amostragem com objetivo de reduzir o número de simulações ou iniciar uma primeira estimativa da ordem de magnitude da probabilidade de falha com o método FORM para quantificar aproximadamente o número de simulações antes de usar o método MC.

### **6.1.2 Fase de pesquisa em campos estocásticos e sua integração em análises de confiabilidade estrutural.**

- O primeiro modelo é um problema de confiabilidade em um solo elástico com carga de superfície, incluindo o campo estocástico do módulo de elasticidade do solo  $E$ . Os resultados do modelo mostram que a inclusão desse campo estocástico elimina a hipótese de homogeneidade e como resultado, desaparece a suavidade e simetria nas curvas de nível dos resultados do deslocamento vertical  $Desl-y$ .
- Os resultados satisfatórios da probabilidade de falha  $P_f$  e do índice de confiabilidade  $\beta$ , demonstram que a incorporação do terceiro núcleo de cálculo que é responsável pela geração dos campos estocásticos funciona corretamente, uma vez que os resultados correspondem aos mostrados por Fenton e Griffiths (2008). Essa verificação foi necessária para poder avançar no desenvolvimento dos outros modelos de interação solo-estaca propostos nesta tese, pois além de não ter uma referência de outro autor para comparar os resultados, também não há software comercial de elementos finitos com a capacidade de realizar análises probabilísticas com variabilidade espacial para fazer verificação.
- O terceiro núcleo de cálculo que é introduzido no esquema de análise torna a tarefa de gerar campos aleatórios independente dos outros dois núcleos e fornece dois arquivos de saída que se tornam os insumos para o cálculo de confiabilidade estrutural, considerando a variabilidade espacial das propriedades do solo.
- A heterogeneidade introduzida pelos campos estocásticos impede a aplicação de técnicas típicas de economia computacional tradicionalmente utilizadas em modelos

clássicos de solo, como o uso de eixos axisimétricos. Além disso, no desenvolvimento do núcleo de cálculo que gera os campos estocásticos, nenhuma economia pode ser feita em: a) o número de operações devido a fatorização das matrizes e, b) o armazenamento dos parâmetros do material. Este armazenamento cresce enormemente quando a variabilidade espacial é introduzida e aumenta ainda mais quando multiplica-se pelo número de realizações probabilísticas executadas pelo método de Monte Carlo, tanto que o tamanho de armazenamento de um arquivo cresce rapidamente até atingir Giga ou Tera.

- O cálculo do primeiro problema mostrou que a incorporação do campo aleatório do Módulo de Elasticidade do solo produz uma menor probabilidade de falha  $P_f$  (e, portanto, um índice de confiabilidade  $\beta$  mais alto), em relação à probabilidade de falha que é obtida a partir de uma análise igual, mas com um módulo aleatório sem variabilidade espacial. Uma análise mais rigorosa envolve um estudo paramétrico, que não é necessário neste caso, desde El-Ramly et al. (2002), Griffiths et al. (2004), Fenton e Griffiths (2008), Ji et al. (2013) e Pula e Zaskórski (2015b) concluíram que desconhecer a natureza espacial da variabilidade resulta em uma superestimação da probabilidade de falha  $P_f$ .
- Desconhecer a variabilidade espacial resultará em uma maior probabilidade de falha  $P_f$  e superestimar o risco de falha (menor índice de confiabilidade  $\beta$ ) em comparação com métodos clássicos sem correlação espacial. Essas considerações levam à conclusão de que os resultados dos índices de confiabilidade  $\beta$  serão mais conservadores ou de lado da segurança quando os campos aleatórios não forem incluídos na modelagem.
- Apresentam-se as conclusões das análises de sensibilidade probabilística e do estudo paramétrico dos problemas de interação solo-estaca, para a contribuição dos resultados encontrados no estado atual de conhecimento, uma vez que não foram encontradas referências desses procedimentos na revisão da literatura quando a variabilidade espacial está envolvida em problemas de interação solo-estaca.
- Para o segundo modelo de confiabilidade incluindo campos aleatórios, as sensibilidades probabilísticas foram calculadas ( modelo de interação solo-estaca sob perfeita condição de aderência), e confirmam que o ângulo de atrito  $\phi$  é a variável mais significativa seguida pelo intercepto coesivo  $c$ . Os resultados encontrados coincidem com os de pesquisa realizada por Fenton e Griffiths (2008) sobre problemas com solos carregados (sapatas, colunas de solo, estabilidade de inclinação), onde as variáveis mais

significativas foram  $\phi$  e  $c$  em sua ordem descartando a inclusão de outras variáveis. No entanto, na análise das sensibilidades probabilísticas realizadas para esse problema, verificou-se que o peso específico do solo  $\gamma$  é significativo de 21% no cálculo da função de estado limite e, portanto, da capacidade de carga do conjunto estaca-solo.

- O peso específico  $\gamma$  do solo foi incluído na modelagem pelas condições iniciais de tensão. A variabilidade espacial do módulo de elasticidade  $E_s$  do solo faz com que as forças sejam distribuídas proporcionalmente à rigidez de cada elemento finito quando o peso do solo é imposto, gerando uma resposta de tensões não uniforme. Não é comum que os programas de cálculo geotécnico incluam a análise de carga com campos aleatórios, de modo que os resultados obtidos com a modelagem do problema de interação solo-estaca em condição de aderência perfeita, marquem o caminho para a modelagem da heterogeneidade natural do solo.
- O pós-processamento desenvolvido para representar sensibilidades resultou na hierarquia de significado de variáveis aleatórias e variáveis não significativas com um nível de significância estabelecido de 0.025, demonstrando que o ângulo de atrito tem uma grande significância nos resultados do problema de interação solo-estaca com condição de aderência perfeita e que o diâmetro  $D$  e o módulo de elasticidade do estaca  $E_p$  não são significativos. O módulo de elasticidade do solo  $E_s$ , não tem grande significância, talvez porque sua influência é limitada à faixa elástica do solo, enquanto a capacidade de carga é calculada sob condições limite de deformações plásticas.
- No terceiro problema de modelagem de confiabilidade da interação solo-estaca, com aderência por atrito, o critério de determinação do coeficiente de atrito no contato solo-estaca foi introduzido com base nas superfícies de contato pelas recomendações de Bowles (1997).
- Ao comparar os resultados probabilísticos da sensibilidade dos dois modelos de interação solo-estaca, é evidenciado que os coeficientes de sensibilidade são afetados pela condição de aderência, no entanto, ao comparar a probabilidade de resultados de falha, estes não são alterados se a capacidade de carga admissível for adequadamente recalculada em cada caso.
- Os resultados encontrados com aderência por atrito continuam a mostrar que as variáveis mais significativas do problema em sua ordem são, o ângulo de atrito  $\phi$ , o peso específico  $\gamma$  e o intercepto coesivo  $c$  do solo, confirmando que essas propriedades compõem o conjunto mais significativo de variáveis na análise da capacidade de carga

de uma estaca ao interagir com o solo. Por outro lado, é importante notar que, nesse problema, a sensibilidade probabilística do ângulo de atrito  $\phi$  do solo diminui ligeiramente de 55% para 52% e a redução de 3% é distribuída entre as outras duas variáveis significativas do solo (peso específico  $\gamma$  e o intercepto coesivo  $c$ ).

- O comportamento da sensibilidade das variáveis de peso específico  $\gamma$  e o intercepto coesivo  $c$  do solo, inverte a ordem de significância, colocando o peso específico  $\gamma$  como variável ligeiramente acima da variável intercepto coesivo  $c$ , observando que no problema da interação solo-estaca, com a aderência por atrito, o peso específico  $\gamma$  adquire maior importância, em termos práticos, isso pode ser visto como que, uma sobrecarga aplicada ao solo em um lugar perto ao topo da estaca produz um efeito positivo de aumentar a capacidade de carga da estaca em proporção ao seu valor de sensibilidade e, portanto, o índice de confiabilidade da estaca vai aumentar.
- O ângulo de atrito  $\phi$  do solo continua a ser a variável mais significativa do problema, o intercepto coesivo  $c$  torna-se a terceira variável significativa com 23%, enquanto as duas variáveis associadas à estaca, o diâmetro  $D$  e o módulo elástico da estaca  $E_p$  permanecem como as variáveis que não são significativas no problema.
- Por meio do estudo paramétrico da influência do comprimento da estaca  $L$  no cálculo do índice de confiabilidade  $\beta$ , verificou-se que o quociente dos índices de confiabilidade determinado pelo valor de  $\beta$  avaliado no novo valor de  $L$  ( $\beta_n$ ) dividido pelo valor de  $\beta$  avaliado no valor de  $L$  anterior ( $\beta_a$ ), os valores do quociente mudam cada vez menos à medida que o comprimento aumenta.
- O cálculo da relação de índices de confiabilidade  $\beta_n/\beta_a$  estabelece um critério que leva à conclusão de que o comprimento da estaca não deve exceder tamanhos muito grandes, uma vez que isto não gerará mudanças significativas no índice de confiabilidade do sistema de interação solo-estaca.
- O estudo paramétrico mostrou que a mudança mais notória no índice de confiabilidade ocorreu entre os comprimentos da estaca de 3.5 m e 5.0 m, que poderia estar associado ao conceito de comprimento crítico da teoria clássica de Meyerhof para o cálculo da capacidade de carga por ponta nas estacas. O comprimento crítico de uma estaca é o comprimento acima do qual não há alteração significativa na capacidade de carga por ponta da estaca. No caso o comprimento crítico médio é aproximadamente 3.75 m, que fica no intervalo de 3.5 m até 5.0 m.
- A contribuição mais significativa das análises realizadas é representada na adoção do

paradigma da heterogeneidade por meio da inclusão de campos estocásticos nas principais variáveis associadas ao comportamento do solo. Esse progresso é muito importante ao considerar a idade da hipótese de homogeneidade utilizada nas análises de engenharia e que vem sendo mantida há décadas. Por outro lado, a análise probabilística da sensibilidade e o estudo paramétrico motivaram a tomada de decisões na metodologia de cálculo.

## 6.2 RECOMENDAÇÕES

Cinco temas para pesquisas futuras são recomendados, com base na revisão da literatura e nos resultados alcançados nesta tese. Estes temas correspondem a estudos de confiabilidade, incluindo campos estocásticos nos seguintes problemas:

- Interação de grupos de estacas ou fundações tipo laje-estacas
- Interação solo-fluido-estrutura, caso das barragens.
- Interação túnel-solo ou túnel-rocha.
- Otimização em problemas de interação.
- Estruturas maciças, como é o caso das estruturas históricas.

## 7 REFERÊNCIAS

- ALONSO, E.; **Risk analysis of slopes its application to slopes in Canadian sensitive clays.** *Géotechnique*, v. 26, p. 453-472, 1976.
- ANG, A. H. S.; TANG, W. H.; **Probability concepts in engineering design, Vol. I: Basic principles.** Wiley, 1975. 424p.
- ANG, A. H. S.; TANG, W.H.; **Probability concepts in engineering planning design, Vol II: Decision, Risk Reliability.** John Wiley Sons. 1984.562p.
- ANSYS, Inc.; **Theory Reference** (Version 16.0), 2016.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6122: Projeto e execução de fundações - Procedimento.** Rio de Janeiro, 2019.
- AU, S.K.; BECK, J.; **Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation.** *Prob. Eng. Mech.* v. 16, n. 4, 263–277, 2001.
- AUGUSTI, G.; BARATTA, A.; CASCIATI, F.; **Probabilistic methods in structural engineering.** Chapman Hall, New York, 1984.
- BAECHER, G. B.; CHRISTIAN, J. T.; **Reliability and statistics in geotechnical engineering.** J. Wiley, 2003.
- BALDOMIR, A.; KUSANO, I.; . HERNANDEZ, S.; . JURADO, J. A.; **A reliability study for the Messina Bridge with respect to flutter phenomena considering uncertainties in experimental and numerical data.** *Computers & Structures*, 128. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2013.07.004>, 2013.
- BASLER, E.; **Analysis of Structural Safety.** ASCE Annual Convention, Boston, Mass., 1960.
- BEAUREPAIRE, P.; JENSEN, H. A.; . S. G. I.; V. M. A.; **Reliability-based optimization using bridge importance sampling.** *Probabilistic Engineering Mechanics*, 34. <https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2013.04.001>, 2013.

BEER, M.; ZHANG, Y.; QUEK, S. T.; PHOON, K. K.; **Reliability analysis with scarce information: Comparing alternative approaches in a geotechnical**. *Structural Safety*, v. 41, p. 1-10, 2013.

BENHAIM, Y.; **Robust Reliability in the Mechanical Sciences**. Springer Verlag, 1996. 233p.

BENJAMIN, J. R.; CORNELL, C. A.; **Probability, Statistics Decisions for Civil Engineers**. McGraw-Hill, 1970, 698p.

BOLOTIN, V.V.; **Random vibration of elastic systems**. Martinus Nijhoff Publishers, 1984, 468p.

BOLOTIN, V.V.; **Statistical methods in structural mechanics**. Holden Day, San Francisco, 1969, 240p.

BOWLES, J. E. **Foundation analysis and design**. 4<sup>a</sup> Ed., USA: Ed. McGraw Hill, 1988.

BROWN, C.B.; **A Fuzzy Safety Measure**. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASC E*, v. 105, pp. 855-872, 1979.

CARPENTER, L.; **Computer Rendering of fractal curves surfaces**, in *Association for Computing Machinery's Special Interest Group on Graphics Interactive Techniques SIGGRAPH 80 Proceedings*, Assoc. Computing Machinery, New York, pp. 108–120, 1980.

CEB (COMITE EUROPEEN DU BETON), JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY CEB-CECM-FIP-IABSE-IASS-RILEM; **First Order Reliability Concepts for Design Codes, CEB Bulletin No. 112**, 1976.

CHAUHAN, V. B.; DASAKA, S. M.; DASGUPTA, U. S.; **Effect of Spatial Variability on the Earth Pressure of a Rigid Retaining Wall. In Geotechnical Special Publication**. In *Geotechnical Special Publication*, American Society of Civil Engineers (ASCE), p. 350–359, 2017.

CHENG, A.H.D.; YANG, C.Y. (EDS); **Computational Stochastic Mechanics**. Elsevier Applied science, Prentice Hall, 1993. 673p.

CHEON, J.Y.; GILBERT, R.B.; **Modeling spatial variability in offshore geotechnical properties for reliability-based foundation design**. *Structural Safety*, v. 49, p. 18-26, 2014.

CHING, J., HU, Y. G.; **Effective Young's Modulus for a Footing on a Spatially Variable Soil Mass**. In *Geotechnical Special Publication*, American Society of Civil Engineers (ASCE), p. 360–369, 2017.

CHING, J.; PHOON, K. K.; WU, S. H.; **Impact of Statistical Uncertainty on Geotechnical Reliability Estimation**. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 142, p. 1-13, 2016.

CHING, J.; PHOON, K.; **Efficient Evaluation of Reliability for Slopes with Circular Slip Surfaces Using Importance Sampling**. *Journal of Geotechnical Geoenvironmental Engineering* 135(6): 768-777, 2009.

CHOWDHURY, R.; RAO, B. N.; PRASAD, A. M.; **High-dimensional model representation for structural reliability analysis**. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, v. 25, p. 301-337, 2009.

CHOWDHURY, R.; RAO, B. N.; PRASAD, A. M.; **High-dimensional model representation for structural reliability analysis: Authors' reply to comments by S. Rahman H. Xu**. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, v. 27, p. 1660-1662, 2011.

CIRIA (CONSTRUCTION INDUSTRY RESEARCH INFORMATION ASSOCIATION); **Rationalization of Safety Serviceability Factors in Structural Codes**, CJRTA Report No. 63. London, 1977.

COOLEY, J. W.; TUKEY, J. W.; **An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series**, *Math. Comput.*, 19(90), 297–301, 1965.

CORNELL, C. A.; **Seismic reliability analysis of structures**. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, v. 36, p. 1811-1812, 2007.

CORNELL, C. A.; **Some Thoughts on Maximum Probable Loads Structural Safety Insurance**, Memorandum, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, to Members of ASCE Structural Safety Committee, 1967a.

CORNELL, C.A.; **Bounds on the reliability of structural systems**. Journal Structural Div., ASCE, v. 93, p. 171–200. 1967b.

CSA (CANADIAN STARDS ASSOCIATION); **Stards for the Design of Cold-Formed Steel Members in Buildings, CSA S-136**, 1974, 1981.

DAI; WAY.; **Reliability analysis in engineering applications**. Van Nostr Reinhold, 1992, 433p.

DARYANI, K. E.; MOHAMAD, H.C.; **Effects of Soil Spatial Variability on Bearing Capacity of Shallow Foundations**. Geotechnical Safety Risk V: Fifth International Symposium on Geotechnical Safety Risk (ISGSR2015), p. 371–376, 2015.

DELFT UNIVERSITY OF TECHNOLOGY & PLAXIS BV.; **Plaxis 3D Foundation V.1.5**. 2006.

DITLEVSEN, O.; MADSEN, H.O.; **Structural reliability methods**. John Wiley & Sons, 1996, 384p.

DITLEVSEN, O.; **Structural Reliability the Invariance Problem**. Solid Mechanics Report No. 22, University of Waterloo, Ontario, 1973.

DUNCAN, J. M.; **Factors of Safety Reliability in Geotechnical Engineering**. Journal of Geotechnical Geo-environmental Engineering, v. 126, p. 307-316, 2000.

ELISHAKOFF, I.; **Probabilistic Methods in the Theory of Structures**. John Wiley, 1983, 489p.

ELOSTA, H.; HUANG, S.; INCECIK, A.; **Wave loading fatigue reliability uncertainty analyses for geotechnical pipeline models**. Ships Offshore Structures, v. 9, p. 450-463, 2014.

EL-MOSSALLAMY, Y.; **Load-settlement behaviour of large :piles in over-consolidated day. Proceeding of the 7th. Internatio on Numerical Models in Geotechnical Engineering**, Graz, Aus, pp. 443-450, 1999.

EL-RAMLY, H.; MORGENSTERN, N. R.; **Probabilistic slope stability analysis for practice**. Canadian Geotechnical Journal, 39(3). <https://doi.org/10.1139/t02-034>, 2002.

EL-REEDY M.A.; **Reinforced concrete structural reliability**. CRC Press, 2013, 369p.

FENTON, G. A.; VANMARCKE, E. H.; **Simulation of random fields via local average subdivision**, *ASCE J. Eng. Mech.*, **116**(8), 1733–1749, 1990.

FENTON, G. A.; **Error evaluation of three random-field generators**. Journal of Engineering Mechanics, v. 120, p. 2478-2497, 1994.

FENTON, G. A.; **Estimation for stochastic soil models**, *ASCE J. Geotech. Geoenv. Eng.*, **125**(6), 470–485, 1999(a).

FENTON, G. A.; GRIFFITHS, D. V.; **Risk Assessment in Geotechnical Engineering**. 1 ed., John Wiley & Sons Inc, 2008, 463p.

FENTON, G. A.; NAGHIBI, F.; DUNDAS, D.; BATHURST, R. J.; GRIFFITHS, D. V.; **Reliability-Based Geotechnical Design in the 2014 Canadian Highway Bridge Design Code**. Canadian Geotechnical Journal, v. 20, p. 1-53, 2015.

FENTON, G. A.; **Random field modeling of CPT data**, *ASCE J. Geotech. Geoenv. Eng.*, **125**(6), 486–498, 1999(b).

FENTON, G.; VANMARCKE, E.; **Simulation of random fields via local average subdivision**. Journal of Engineering Mechanics, v. 116, p. 1733-1749, 1990.

FENTON, G.A.; **Simulation analysis of random fields generators**, 1990. PhD thesis. Princeton University, USA.

FERRY BORGES, J; CASTANHETA, M.; **Structural Safety**. 2<sup>nd</sup> ed., Lisbon: Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1971. 326p.

FLINT, A.R.; SMITH, B.W.; BAKER, M.J. MANNERS, W.; **The derivation of safety factors for design of highway bridges. Design of Steel Bridges**, Granada Publishing, UK. 1981.

FORSSELL, C.; **Economy Construction**. *Sunt förnuft*, v. 4(in Swedish), p. 74-77, 1924. Translated in excerpts in *Structural Reliability Codified Design*, ed. N. C. Lind, SM Study No. 3, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Waterloo, Canada, 1970.

FREUDENTHAL, A. M.; **The Safety of Structures Trans. ASCE**, v. 112, 1947.

GHANEM, R., SPANOS, P.D.; **Stochastic finite elements: a spectral approach**. 1 ed, Springer Verlag, 1991a, 214p.

GOMES, H. M.; **Técnicas de Avaliação da Confiabilidade em Estruturas de Concreto Armado**. Tese Doutoral. UFRGS, BRAZIL, 2001

GOMES, H. M.; **Apostila e slides da disciplina Confiabilidade em Sistemas Mecânicos**. UFRGS, BRAZIL, 2004

GRIFFITHS, D.; HUANG, J.; FENTON, G.; **Probabilistic Slope Stability Analysis using RFEM with Non-Stationary Random Fields**. *Geotechnical Safety Risk V: Fifth International Symposium on Geotechnical Safety Risk (ISGSR2015)*, p. 690-695, 2015.

GRIFFITHS, D. V.; FENTON, G. A.; **Probabilistic slope stability analysis by finite elements**. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2004\)130:5\(507\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2004)130:5(507)), 2004.

GRIGORIU, M.; **Applied non-Gaussian processes: examples, theory, simulation, linear random vibration, MATLAB solutions**. Prentice Hall, 1995. 442p.

GUO, T.; FRANGOPOL, D. M.; YUWEN, C.; **Fatigue reliability assessment of steel bridge details integrating weigh-in-motion data and probabilistic finite element analysis**. *Computers & Structures*, 112–113. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.09.002>. 2002.

HALDAR, A., MAHADEVAN, S.; **Probability, reliability, statistical methods in engineering design**. John Wiley Sons, 2000b, 304p.

HALDAR, A.; GURAN, A.; AYYUB, B.M.; **Uncertainty modeling in finite element, fatigue stability of systems**. World Scientific, 1997, 436p.

HALDAR, A.; MAHADEVAN, S.; **Reliability assessment using stochastic finite element analysis**. John Wiley Sons, 2000a, 328p.

HASOFER, A. M.; LIND, N. C.; **Exact invariant Second-Moment code format**, J. Engineering Mechanics Div. ASCE, v.100, n.1, p. 111-121, 1974.

HURTADO J.E.; **Structural Reliability: Statistical Learning Perspectives**. Springer, 2004, 257p.

IMAN, R. L.; W. J. CONOVER.; **Small Sample Sensitivity Analysis Techniques for Computer Models, with an Application to Risk Assessment**. Communications in Statistics: Part A- Theory Methods, v. A9, n. 17, p. 1749-1842. 1980.

JI, J.; LIAO, H. J.; LOW, B. K.; **Probabilistic Strength-Reduction Stability Analysis of Slopes Accounting for 2-D Spatial Variation**. Key Engineering Materials, 535–536. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.535-536.582>, 2013.

JIA, LEI; GUAN, F.; **A Method of Multi-Failure Models Based on Response Surfaces Method-High Dimensional Model Representation on Structural Reliability Analysis**. Applied Mechanics and Materials, 724. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.724.3>, 2015.

JIANG, S. H.; HUANG, J.; **Modeling of non-stationary random field of undrained shear strength of soil for slope reliability analysis**. Soils Foundations, 58(1), p. 185–198, 2018.

JOHNSON, A.I.; **Strength, Safety Economical Dimensions of Structures, Division of Building Statistics Structural Engineering Bulletin 12**, Royal Institute of Technology, 1953.

JOURNEL, A. G.; HUIJBREGTS, CH. J.; **Mining Geostatistics**, Academic, New York, 1978.

JU Y.; PARKS, G.; Z. C.; **A bisection-sampling-based support vector regression-high-dimensional model representation metamodeling technique for high-dimensional**

**problems.** Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C Journal of Mechanical Engineering Science 1989-1996. <https://doi.org/10.1177/0954406216629504>, 2016.

JUANG, C. H.; WANG, L.; **Reliability-based robust geotechnical design of spread foundations using multi-objective genetic algorithm.** Computers Geotechnics, v. 48, p. 96-106, 2013.

KAILASH, C. K.; LEONARD, R. L.; **Reliability in Engineering Design.** 1 ed., John Wiley & Sons Inc, 1977, 608p.

KLEIBER, M.; HIEN, T.D.; **The stochastic finite element method.** John Wiley, 1992, 336p.

LEPORATI, E.; **The assessment of structural safety.** Research Studies Press, 1979, 133p.

LEWIS, J. P.; **Generalized stochastic subdivision,** *ACM Trans. Graphics*, 6(3), 167–190, 1987.

LI, D. Q.; SHAO, K. B.; CAO, Z. J.; TANG, X. S.; PHOON, K. K.; **A generalized surrogate response aided-subset simulation approach for efficient geotechnical reliability-based design.** Computers Geotechnics, v. 74, p. 88-101, 2016.

LI, J.; CHEN J. B.; **Dynamic response reliability analysis of structures with uncertain parameters.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 62, p. 289-315, 2005.

LI, Y.; HICKS, M.A.; VARDON P.J.; **Three Dimensional Discrete Failures in Long Heterogeneous Slopes.** Geotechnical Safety Risk V: Fifth International Symposium on Geotechnical Safety Risk (ISGSR2015), p. 677 - 682, 2015.

LUCE, R.D.; RAIFFA, H.; **Games Decisions.** Wiley, 1957, 531p.

LUO, Z.; DI, H., KAMALZARE, M.; LI, Y.; **Effects of soil spatial variability on structural reliability assessment in excavations.** Underground Space, 2018.

MADSEN, H.O.; KRENK, S.; LIND, N.C.; **Methods of Structural Safety**. Engineeringwood Cliffs: Prentice Hall, 1986, 403p.

MANTOGLU, A.; WILSON, J. L.; **Simulation of random fields with the turning bs method**, Report #264, Massachusetts Institute of Technology, Dept. Civil Eng., Cambridge, MA., 1981.

MATHERON, G.; **The intrinsic random functions their applications**, *Adv. in Appl. Probab.*, **5**, 439–468, 1973.

MATOUSEK, M.; SCHNEIDER, J.; **Untersuchungen zur Struktur des Sicherheits problems bei Bauwerken**. Bericht No. 59, Institut für Baustatik und Konstruktion, Eidgenössische Technische Hochschule, Zurich, 1976.

MAYER, H.; **Die Sicherheit der Bauwerke**, Springer, 1926, 66p.

MAYMON, G.; **Some engineering applications in random vibrations random structures**. Progress in astronautics aeronautics, AIAA, v. 178, 1998.

MCKAY, M.D.; BECKMAN, R.J.; CONOVER, W.J.; **A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code**. Technometrics, v. 21, n. 2, p. 239-245, 1979.

MELBROT, B. B.; NESS, J. W.; **Fractional Brownian motions, fractional noises applications”** *SIAM Rev.*, **10**(4), 422–437, 1968.

MELBROT, B. B.; **The Fractal Geometry of Nature**, W.H. Freeman, New York, 1982.

MELCHERS, R.E.; BECK, A. T.; **Structural reliability analysis prediction**. 3<sup>rd</sup> Ed, John Wiley Sons, 2018, 514p.

MELCHERS, R.E.; **Structural Reliability Analysis Prediction**. 1<sup>st</sup> ed., Ellis Horwood, 1987, 398p.

MELCHERS, R.E.; **Structural Reliability Analysis Prediction**. 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley, 1999, 456p.

MEYERHOF, G. G.; **Some Recent Research on the Bearing Capacity of Foundations.** Canadian Geotechnical Journal, 1(1), 16–26. <https://doi.org/10.1139/t63-00>, 1963.

MIGNOLET, M. P.; SPANOS, P. D.; **Simulation of homogeneous two-dimensional random fields: Part I —AR ARMA Models,** *ASME J. Appl. Mech.*, **59**, S260–S269, 1992.

MONTIEL, M. A.; RUIZ, S. E.; **Influence of structural capacity uncertainty on seismic reliability of buildings under narrow-b motions.** *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, v. 36, p. 1915-1934, 2007.

MUSZYNSKI, M. R.; **Incorporating Reliability Methods into Geotechnical Engineering Practice.** *Journal of Performance of Constructed Facilities*, v. 23, p. 130-131, 2009.

NAES A.; LEIRA B.J.; BATSEVYCH O.; **System reliability analysis by enhanced monte Carlo simulation.** *Structural Safety*, v. 31, p. 349–355. 2009.

NAGANUM, T.; DEODATIS, G.; SHINOZUKA, M.; **An ARMA model for two-dimensional processes,** *ASCE J. Eng. Mech.*, **113**(2), 234–251, 1987.

NAMIKAWA, T.; **Finite element analysis of compression behavior of ground improvement with spatial variability.** In *Geotechnical Safety Risk IV - Proceedings of the 4th International Symposium on Geotechnical Safety Risk, (ISGSR 2013)*, p. 169-174, 2014.

NATAF, A.; **Determination des Distributions dont les Marges sont Donnees.** *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, v. 225, p. 42–43, 1962.

NIGAM, N.C.; **Introduction to random vibrations.** MIT Press, Massachusetts, 1983, 341p.

NIGAM, N.C.; NARAYANAN, S.; **Applications of random vibrations.** Narosa, New Delhi, 1994, 557p.

NOWAK A. S.; SZERSZEN, M. M.; **Structural reliability as applied to highway bridges**. Progress in Structural Engineering Materials, v. 2, p. 218-224, 2000b.

NOWAK, A.S.; COLLINS, K.R.; **Reliability of Structures**. 1 Ed, McGraw-Hill, 2000a, 324p.

OBERGUGGENBERGER, M.; FELLIN, W.; **Reliability bounds through random sets: Non-parametric methods and geotechnical applications**. Computers & Structures, 86(10). <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2007.05.040>, 2008.

OHBDC; **Ontario highway bridge design code**. Ontario Ministry of Transport, Canada, 1983.

PAIBOON, J.; **Numerical analysis of homogenization using random finite element method**, 2013. PhD Thesis. Colorado State University, Colorado.

PALOMINO, J.; **Simulação numérica da interação solo-estaca pelo método dos elementos finitos**, 2015. Tese de doutorado. UFRGS, BRAZIL.

PANTELIDIS, L.; CHRISTODOULOU, P.; **Spatial Correlation Length of Clay Soils in Practice Its Influence in Probabilistic Bearing Capacity Analysis**. In Geotechnical Special Publication, American Society of Civil Engineers (ASCE), p. 487–496, 2017.

PAPAIIOANNOU, I.; STRAUB, D.; **Reliability updating in geotechnical engineering including spatial variability of soil**. Computers Geotechnics, v. 42, p. 44-51, 2012.

PEITGEN, H-O.; SAUPE, D.; *The Science of Fractal Images*, Springer-Verlag, New York, 1988.

PHOON, K.K.; CHING, J.; **Risk Reliability in Geotechnical Engineering**. CRC Press, 2015, 624p.

PINTO, P. E.; GIANNINI, R.; FRANCHIN, P.; **Seismic reliability analysis of structures**. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, v. 36, p. 2081-2081, 2007.

PIRMORADI, ZHILA; HAJI, HAJIKOLAEI; K. W.; G. G.; **Designing scalable product families by the radial basis function-high-dimensional model representation**

**metamodelling technique. Engineering Optimization.**  
<https://doi.org/10.1080/0305215x.2014.971776>, 2014.

PLUM, N. M.; **Is the Design of Our Houses rational When Initial Cost, Maintenance, Repair are Taken into Account?** Ingenioren. 1950. 454p.

PRAT, P.; GENS, A.; **Leyes de Comportamiento de Materiales.** CIMNE, 2000. 102p.

PUGSLEY, A.; **The Safety of Structures.** Edward Arnold, 1962, 1966. 156p.

PULA, W.; ZASKÓRSKI, L.; **Safety Assessment of a Shallow Foundation Using the Random Finite Element Method.** Geotechnical Safety Risk V: Fifth International Symposium on Geotechnical Safety Risk (ISGSR2015), p. 689 - 695, 2015a.

PULA, W.; ZASKÓRSKI, L.; **On Some Methods in Safety Evaluation in Geotechnics,** Studia Geotechnica et Mechanica, 37(2), p. 17-32, 2015b.

RAHMAN, S.; XU, H.; **Comments on ‘High-dimensional model representation for structural reliability analysis’ by R. Chowdhury, B. N. Rao A. M. Prasad.** International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering, v. 27, p. 1652-1659, 2011.

RANGANATHAN, R.; **Structural reliability analysis design.** Jaico Publishing House, Mumbai, 1999, 456p.

ROSENBLATT, M.; **Remarks on a multivariate transformation.** Ann. Math. Stat., v. 23, p. 470–472, 1952.

ROSS, S.M.; **Simulation.** 5<sup>th</sup> ed., Academic Press, 2012, 315p.

RUBINSTEIN, R.Y.; KROESE, D. P.; **Simulation the Monte Carlo Method.** 3<sup>rd</sup> Ed, John Wiley Sons, 2017, 624p.

SÁNCHEZ, M.; **Introducción a la confiabilidad y evaluación de riesgos: teoría y aplicaciones en ingeniera.** 2<sup>nd</sup> Ed., Ediciones Uniandes, 2010.

SÁNCHEZ, M.; KLUTKE G. A.; **Reliability Life-Cycle Analysis of Deteriorating System structural reliability analysis prediction - Springer Series in Reliability Engineering.** Springer, 2016, 371p.

SCHEIDT, J. V.; PURKERT, W.; **Random eigenvalue problems**. North Holl, New York, 1983.

SHINOZUKA, M.; JAN, C. M.; **Digital simulation of random processes its applications**, *J. Sound Vibration*, **25**(1), 111–128, 1972.

SOONG, T.T.; GRIGORIU, M.; **Random vibration of mechanical structural systems**. Prentice Hall, Engineeringwood Cliffs, New Jersey, 1993, 352p.

SORENSEN, J. D.; BURCHARTH H. F.; **Reliability analysis of geotechnical failure modes for vertical wall breakwaters**. *Computers Geotechnics*, v. 26, p. 225-245, 2000.

SPANOS, P. D.; MIGNOLET, M. P.; **Simulation of homogeneous two-dimensional random fields: Part II—MA ARMA Models**, *ASME J. Appl. Mech.*, **59**, S270–S277, 1992.

SUDRET B.; **Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions**. *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 93, p. 964–979, 2008.

SUDRET B.; **Meta-models for structural reliability uncertainty quantification**. *Proceedings of the 5<sup>th</sup> Asian-Pacific Symposium on Structural Reliability its Applications—Sustainable infrastructures*, ed. by K.K. Phoon, M. Beer, S.T. Quek, S.D. Pang (Reserch Publishing, Chennai,2012), Singapore, 23–25 May 2012.

SUNDARARAJAN, C.; **Probabilistic structural mechanics handbook**. Chapman Hall, 1995, 745p.

TANG, X. S.; LI, D. Q.; RONG, G.; PHOON, K. K.; ZHOU, C. B.; **Impact of copula selection on geotechnical reliability under incomplete probability information**. *Computers Geotechnics*, v. 49, p. 264-278, 2013.

TICHÝ, M.; **Structural Reliability Analysis Prediction**. 1 Ed., Springer Netherls, 1993, 415p.

TICHY, M.; VORLICEK, M.; **Statistical theory of concrete structures**. Irish University Press, Shannon, 1972, 363p.

TURKSTRA, C.J.; **Theory of Structural Design Decisions Study No. 2**, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, 1970.

UNNIKRISHNAN, V. U.; PRASAD, A. M.; RAO, B. N.; **Development of fragility curves using high-dimensional model representation**. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 42(3), 419–430. <https://doi.org/10.1002/eqe.2214>, 2013.

VANMARCKE, E.H.; **Reliability of earth slopes**. J. Geotech. Eng, ASCE, v. 103, n. 11, p. 1247–1265, 1977.

VESSIA, G.; KOZUBAL, J. P.: **High dimensional model representation for reliability analyses of complex rock-soil slope stability**. Civil and Mechanical Engineering, 17(4). <https://doi.org/10.1016/j.acme.2017.04.005>, 2017.

VOSS, R.; **Random fractal forgeries**, *Special Interest Group on Graphics (SIGGRAPH) Conference Tutorial Notes*, ACM, New York, 1985.

WAARTS, P.H.; **Structural reliability using Finite Element Analysis, An appraisal of DARS: Directional Adaptive Response Surface Sampling**, 2000. Phd. thesis, Delft University Press, Netherlands.

WEIBULL, W.; **A statistical theory of the strength of materials**, Proc. Roy. Swed. Inst. Engg. Res., 1939.

WEN, Y.K.; **Structural load modeling combination for performance safety evaluation**. Elsevier, Amsterdam, 1990.

WU, T. H.; KRAFT L. M.; **Safety analysis of slope**. J. of soil mechanics foundations division(ASCE), v. 96, n. SM2, p. 609-630, 1970.

WU, T.H.; **Risk reliability in geotechnical engineering**. Georisk: Assessment Management of Risk for Engineered Systems Geohazards, v. 9, p. 218-219, 2015.

XIAO, L., HUANG, H., ZHANG, J.; **Effect of Soil Spatial Variability on Ground Settlement Induced by Shield Tunnelling**. In Geotechnical Special Publication, American Society of Civil Engineers (ASCE), p. 330–339, 2017.

XU, X. F.; **Reliability-based design in geotechnical engineering: computations applications**. Structure & Infrastructure Engineering. Maintenance, Management, Life-Cycle Design & Performance, v. 7, p. 259-260, 2011.

XUE, J. F.; GAVIN, K.; **Simultaneous determination of critical slip surface reliability index for slopes**. Journal of Geotechnical Geoenvironmental Engineering, n.133, p. 878-886, 2007.

YANG, R.; HUANG, J.; GRIFFITHS, D. V.; SHENG, D.; **Probabilistic Stability Analysis of Slopes by Conditional Random Fields**. In Geotechnical Special Publication, American Society of Civil Engineers (ASCE), p. 450–459, 2017.

RONG, YAO; HUANG, H.; XIAOQUIN. O.; **The Fuzzy Reliability Analysis for the Super Wide Box Girder of New Jiujiang Changjiang River Bridge**. Advanced Materials Research, 680. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amr.680.157>, 2013.

YAO, J.T.P.; **Safety reliability of existing structures**. Pitman, Boston, 1985, 130p.

ZENG, P.; JIMENEZ, R.; LI, T.; **An efficient quasi-Newton approximation-based SORM to estimate the reliability of geotechnical problems**. Computers Geotechnics, v. 76, p. 33-42, 2016.

ZHANG, J.; CHEN, H.Z.; HUANG, H.W.; LUO, Z.; **Efficient response surface method for practical geotechnical reliability analysis**. Computers Geotechnics, v. 69, p. 496-505, 2015.

ZHANG, J.; HUANG, H.W.; JUANG, C.H.; SU, W.W.; **Geotechnical reliability analysis with limited data: Consideration of model selection uncertainty**. Engineering Geology, v. 181, p. 27-37, 2014.

ZHANG, J.; ZHANG L.M.; TANG W.H.; **New methods for system reliability analysis of soil slopes**. Canadian Geotechnical Journal, n. 48, p. 1138-1148, 2011a.

ZHANG, J.; ZHANG, L. M.; TANG, W. H.; **Reliability-Based Optimization of Geotechnical Systems**. Journal of Geotechnical Geoenvironmental Engineering, v. 137, p. 1211-1221, 2011b.

ZHAO, H.; ZHAO, M.; ZHU, C.; **Reliability-based optimization of geotechnical engineering using the artificial bee colony algorithm.** KSCE Journal of Civil Engineering, v. 20, p. 1-9, 2015.

ZHENG, Y.; JIA, J. Q.; XIONG, W. S.; SHEN, X. J.; GAO, F.; LI, L.; **Optimization Design of Geotechnical Engineering Based on Reliability Lingo.** Applied Mechanics Materials, v. 170-173, p. 975-978, 2012.

## APÊNDICES

## A.1 PROBLEMA DE CONFIABILIDADE NUMA TRELIÇA PLANA

Embora este problema não seja um caso específico de interação solo-estrutura, ele foi escolhido como um teste de aprendizado estratégico para romper a barreira da compreensão do desenvolvimento natural de problemas de confiabilidade, onde existem duas alternativas de implementação: o desenvolvimento de um código único com módulos de cálculo de elementos finitos e de confiabilidade, ou o desenvolvimento separado do código de elementos finitos ou de análise em geral e o desenvolvimento do código de confiabilidade, os quais devem ser ligados por alguma estratégia computacional. A alternativa seguida é a última pela vantagem de compilação e depuração separada, além da possibilidade de desenvolvimento de cada uma das partes usando diferentes linguagens, entre outras vantagens.

O problema abordado vem da referência de Haldar e Mahadevan (2000a) e os dados da Tabela A1.1 são dos autores da referência. A Figura A1.1 mostra a geometria, cargas e as condições de contorno da treliça plana.

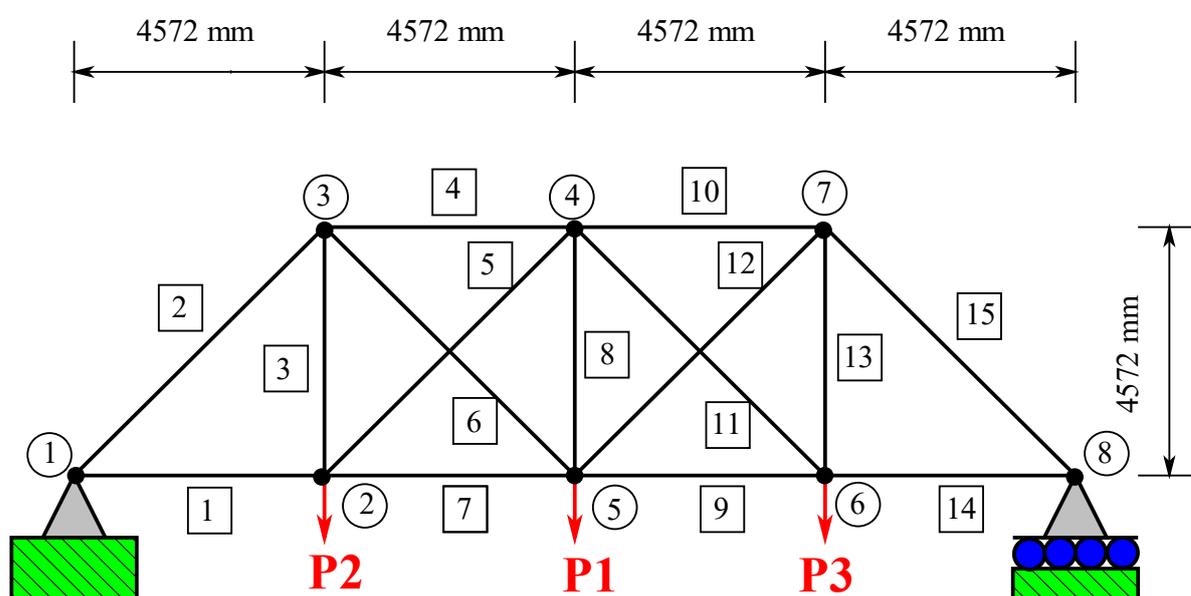


Figura A1.1 – Treliça plana: Geometria, restrições e cargas.

As variáveis aleatórias do problema são resumidas na Tabela A1.1. Para a análise, uma equação de estado limite de serviço é proposta a Equação (A1.1), tendo como máxima deflexão no ponto médio da treliça (nó 5) o valor de 76.2 mm.

$$GG(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{s}) = 1.0 - \frac{\delta}{\delta_{lim}} \quad (A1.1)$$

onde  $\mathbf{x}$  denota o conjunto de variáveis aleatórias pertencentes à estrutura (cargas, propriedades materiais e geometria estrutural) o vetor  $\mathbf{u}$  representa o conjunto de deslocamentos envolvidos na função de estado limite  $GG$ , e o vetor  $\mathbf{s}$  denota o conjunto de efeitos devido às cargas ou variáveis secundárias do problema envolvido na função do estado limite  $GG$  (tensões, forças internas, entre outras),  $\delta$  é a deflexão de controle calculada e  $\delta_{lim}$  é a deflexão limite estabelecida. Para esse caso particular  $GG$  é uma função de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}$  porque é uma função do estado limite para o desempenho em serviço.

O limite de deflexão de 76.2 mm escolhido para o problema é igual a 1/240 do vão da treliça, calculado como:

$$\delta_{lim} = \frac{(4)(4572)}{240} = 76.2 \text{ mm} \quad (A12)$$

Tabela A1.1 – Variáveis aleatórias e seus parâmetros estatísticos característicos.

Variável	Unidade	Média	CV	Distribuição
$E$	MPa	199948,04	0.06	Lognormal
$A_1, A_2,$ $A_3, A_{13},$ $A_{14}, A_{15}$	mm <sup>2</sup>	1032	0.05	Lognormal
$A_4, A_5,$ $A_6, A_7,$ $A_8, A_9,$ $A_{10}, A_{11},$ $A_{12}$	mm <sup>2</sup>	645	0.05	Lognormal
$P_1$	N	266890	0.10	Lognormal
$P_2, P_3$	N	88960	0.10	Lognormal

Os tempos de cálculo reportados nos resultados são apenas referências de ordem de grandeza.

### A1.1 Modelo implementado usando MATLAB-FORTRAN

A solução é desenvolvida em duas partes: a primeira é o modelo de análise estrutural, que neste caso, é baseado no método dos elementos finitos (pode ser também um modelo analítico) que serve como um núcleo de cálculo para a resposta aleatória, que por sua vez alimenta o cálculo da função de estado limite. Essa primeira parte serve como escravo da segunda parte, que

consiste em um Sistema Integral de Cálculo de Confiabilidade (SICC) que atua como um programa mestre. Esta segunda parte cuida de todos os cálculos de confiabilidade com base nos resultados da função de estado limite. É nessa parte que também são desenvolvidos os métodos para o cálculo da confiabilidade, tais como, Monte Carlo (MC) e Monte Carlo com amostragem por importância (MCI), com algumas opções especiais para buscar a estabilidade ou convergência do cálculo. Para o desenvolvimento do módulo SICC é tomado como um ponto de partida o programa desenvolvido por Gomes (2001).

Os computadores utilizados para os cálculos têm as seguintes características:

1. Laptop Acer, processador Intel i7 de 4ª geração para 2.0 GHz com 2 núcleos físicos, 8GB de RAM e placa de vídeo GEFORGE NVIDIA 840M de 385 cores CUDA com memória GDDR3 (6105 MB de memória total disponível).
2. Workstation Dell, Processadores dual Intel Xeon E5649 para 2,53 GHz com 12 núcleos físicos no total, 48 GB de RAM, 2 placas de vídeo QUADRO FX4800 de 192 cores CUDA com memória GDDR3 (5631 MB de memória total disponível) e GPU DE CÁLCULO TESLA K20c de 2496 cores CUDA e memória GDDR5 (4800 MB de memória total disponível).

O fluxograma para resolver o problema da confiabilidade em treliças planas segue a mesma estrutura da figura 4.1 fazendo as adaptações particulares.

A Tabela A1.2 mostra os resultados obtidos através da implementação para este caso da treliça. O critério de saída no método MCI é um  $CV_{Pf}$  (coeficiente de variação da probabilidade de falha) inferior a 2%.

Tabela 01.2 – Resultados obtidos e seu tempo computacional associado para a solução obtida com a implementação MATLAB-FORTRAN.

<b>Método</b>	<b>Prob. de falha (<math>P_f</math>)</b>	<b>Índice de confiabilidade (<math>\beta</math>)</b>	<b><math>CV_{Pf}</math> (%)</b>	<b>Tempo CPU (min)</b>	<b>Varição % em relação a MC*</b>
FORM(HLRF)	0.695860E-02	2.459	---	0.533	7.11
MC (200000 sim)	0.773500E-02	2.421	2.533	11.567	3.26
MC* (1000000 sim)	0.749100E-02	2.433	1.151	167.100	---
MCI (passo 500) (sim 21000)	0.788923E-02	2.414	1.989	9.009	5.32

sim: simulações, passo: parcelamento de amostras.

Os resultados do índice de confiabilidade e do tempo computacional relatados na Tabela A1.2, são resumidos na Figura A1.2. O eixo primário e secundário correspondem, respectivamente, às escalas de tempo computacional e índice de confiabilidade  $\beta$ .

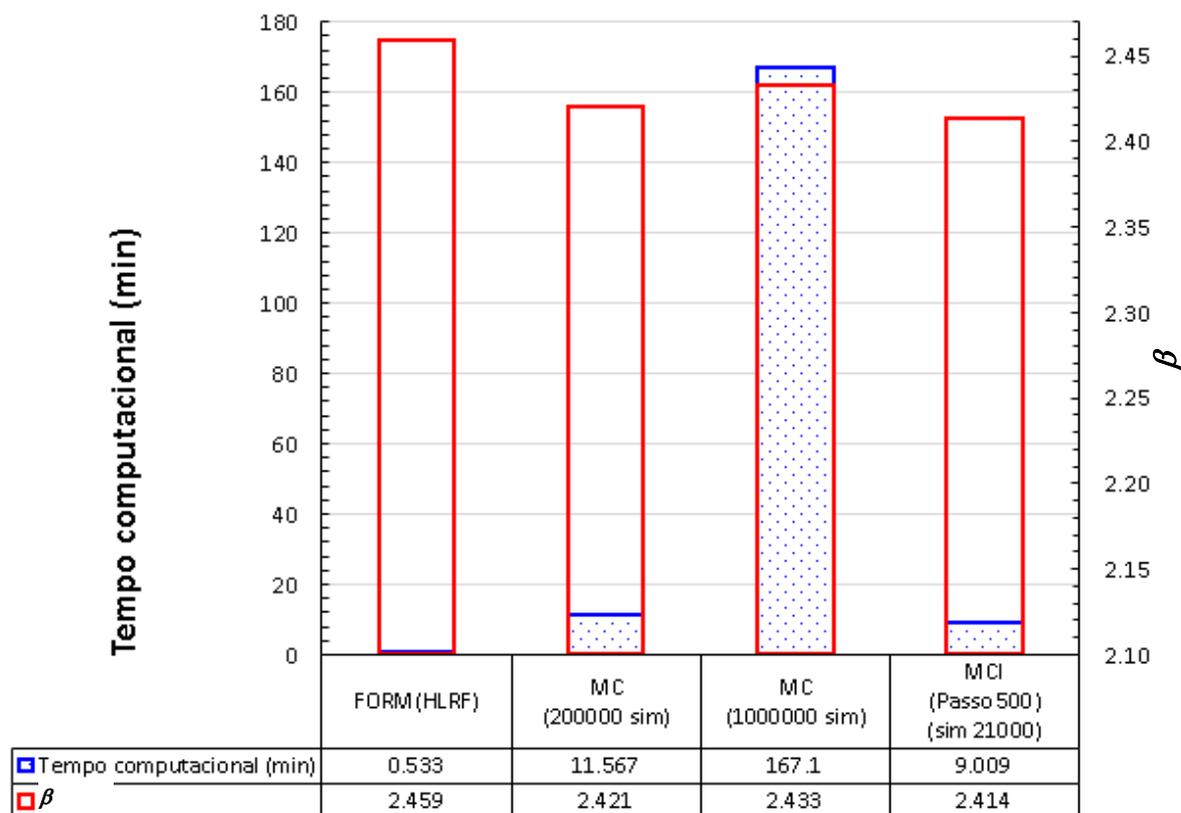


Figura A1.2 – Resultados do índice de confiabilidade e do tempo computacional obtidos pela implementação MATLAB-FORTRAN.

Há uma semelhança nos resultados encontrados entre os métodos FORM, MC e MCI, onde o critério de parada, para o último método, é de um  $CV_{pf}$  menor de 2%, que certamente é cumprido antes mesmo de atingir 25000 simulações, lembrando que o MCI é uma aproximação do método MC. Este modelo é linear, com pequeno número de nós e elementos.

## A1.2 Modelo implementado usando o programa ANSYS

Neste exemplo, também é usado um módulo de análise presente no programa de elementos finitos ANSYS chamado de PDS (*Probabilistic Design System*). Através dele é possível utilizar métodos de análise de confiabilidade como o método de Monte Carlo (MC) e o método Monte Carlo com amostragem pelo Hipercubo Latino (MCLH). A Figura A1.3 mostra o esquema do ANSYS para análise probabilística de problemas de engenharia usando o módulo PDS.

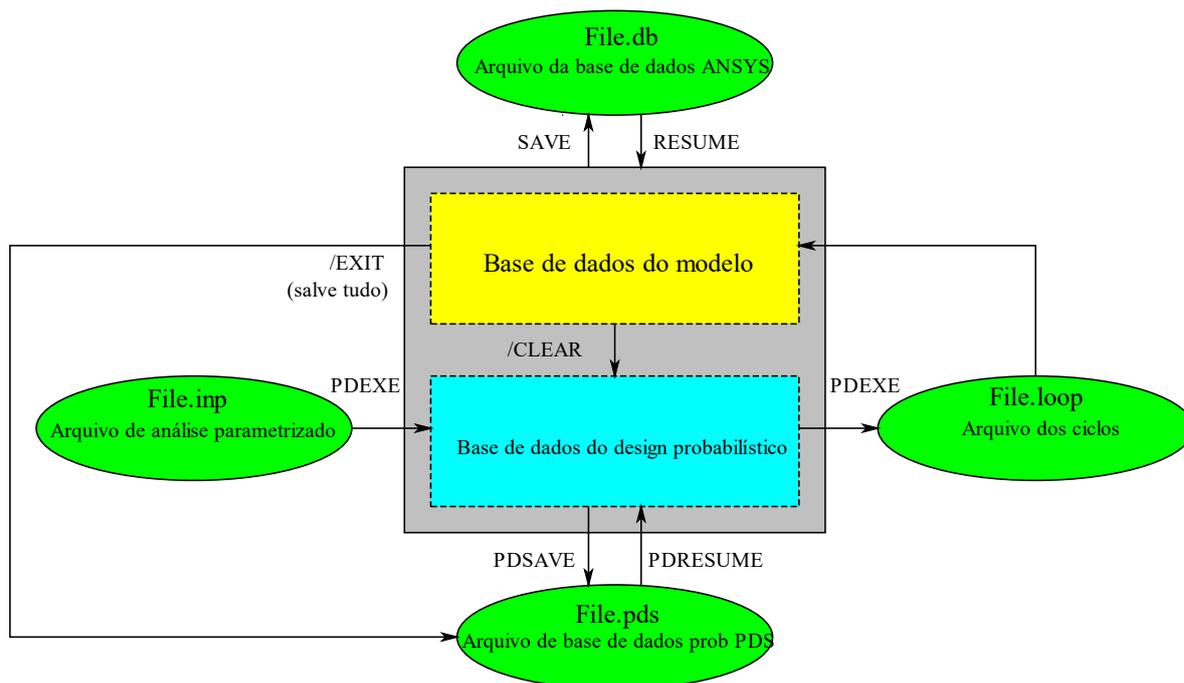


Figura A1.3 – Esquema para a solução do problema de confiabilidade em ANSYS.

Fonte: ANSYS (2016)

Na Figura A1.3 mostra-se a interação de duas bases de dados fundamentais, a primeira trata os dados do modelo MEF (ou analítico se isso é programado pelo usuário) usando a linguagem paramétrica APDL (*ANSYS Parametric Design Language*), e a segunda trata a análise probabilística. Como as variáveis aleatórias não têm valor exclusivo, elas são parametrizadas e modificadas para serem enviadas para o núcleo de análise em cada simulação e assim obter os valores necessários para a avaliação da função de estado limite. Na prática, este tipo de análise avançada é conseguido através da escrita de um *script* que consiste em três partes. A primeira parte é um *macro* que grava um arquivo de análise onde todos os comandos necessários são colocados para especificar o modelo MEF (ou o modelo analítico) do usuário. Em princípio esta parte do arquivo começa com a definição das variáveis parametrizadas, o procedimento de pré-processamento, solução e pós-processamento. Já a segunda parte trata da análise probabilística (onde variáveis aleatórias, suas distribuições e parâmetros estatísticos são especificados). Se as variáveis estiverem correlacionadas, é possível também especificar o valor de correlação entre elas. Nessa segunda parte também se especifica o método probabilístico a ser usado (MC ou MCLH) e seus valores característicos. Na terceira parte, os comandos especificam o início do módulo de cálculo probabilístico e os comandos de processamento de texto, gráficos e relatórios.

A Figura A1.4 mostra a malha de elementos finitos (elementos *LINK1*, de dois nós), numeração de nós, numeração de elementos e condições de carga e suporte.

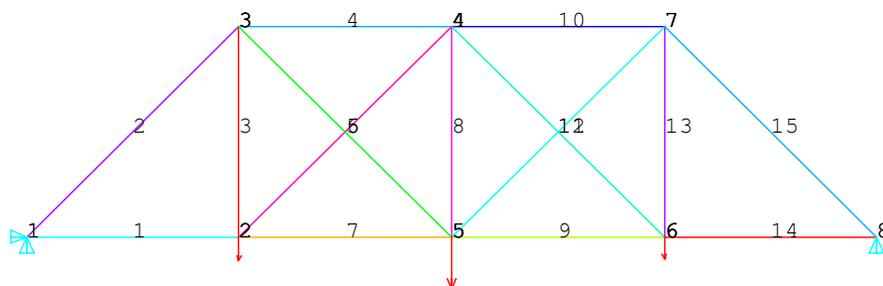


Figura A1.4 – Malha de elementos finitos, numeração, suporte e condições de carga do problema estudado.

A Tabela A1.3 mostra os principais resultados para o estudo de caso utilizando o ANSYS e seus métodos de Monte Carlo (MC) e Monte Carlo com amostragem do Hipercubo Latino (MCLH).

Tabela A1.3 – Resultados obtidos e seu tempo computacional associado para a solução usando o módulo PDS do ANSYS.

Método	Prob. de falha ( $P_f$ )	Índice de confiabilidade ( $\beta$ )	$CV_{P_f}$ (%)	Tempo CPU (min)	Variação % em relação a MC*
MC* (200000 sim)	0.725026E-02	2.445	2.617	440500	---
MCLH (Passo 1000) (sim 10000)	0.707250E-02	2.454	---	21.416	2.45
MCLH (Passo 10000) (sim 100000)	0.746822E-02	2.434	---	299.317	3.01

A variação entre as probabilidades de falha MC\* das tabelas A1.2 e A1.3 é 3.21%. Os resultados do índice de confiabilidade e do tempo computacional relatados na Tabela A1.3, são resumidos na Figura A1.5.

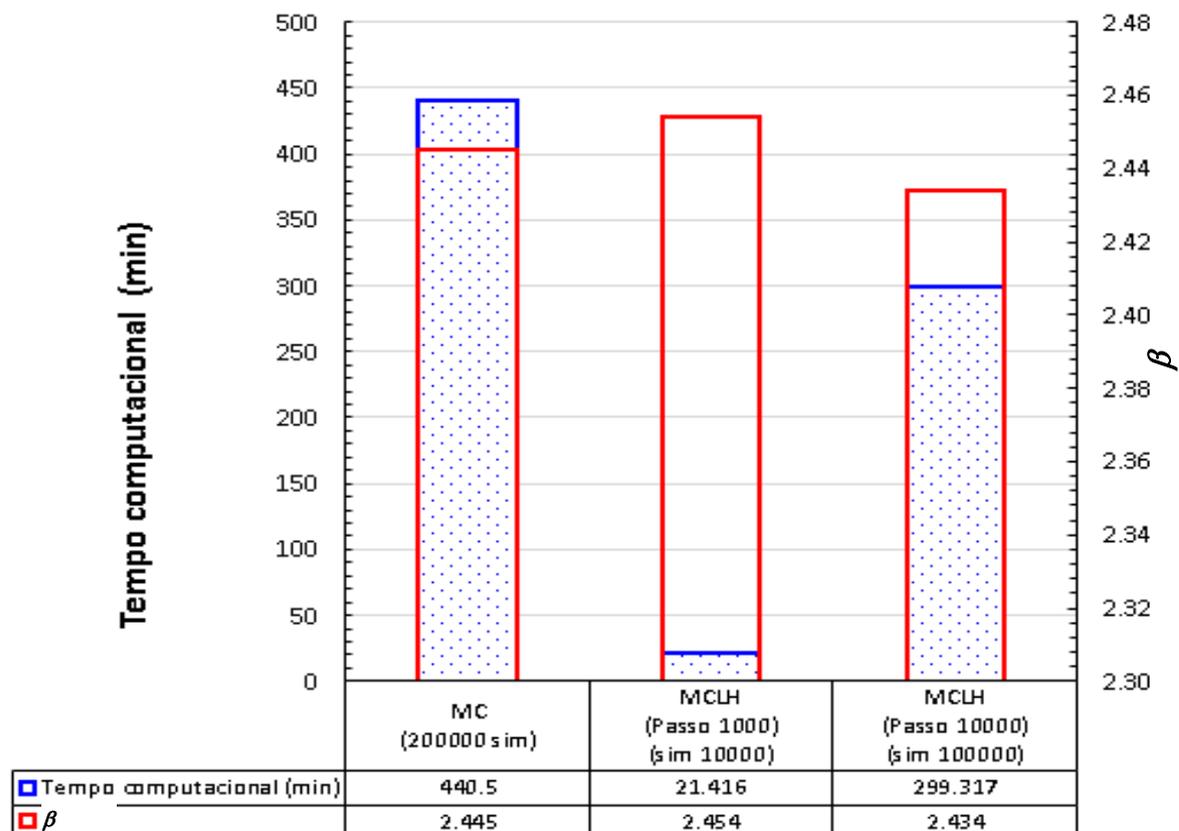


Figura A1.5 – Resultados do índice de confiabilidade e do tempo computacional obtidos pelo ANSYS.

Pode ser visto na Figura A1.6 semelhanças nos resultados encontrados entre o método MC e sua aproximação MCLH, indicando que o método MCLH pode ser adequado, em termos de tempo computacional, para obter uma boa aproximação do índice de confiabilidade.

## A.2 PROBLEMA DE CONFIABILIDADE EM CAMADAS ELÁSTICAS DE SOLO COM CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA EM DEFORMAÇÃO PLANA

Este problema procura mensurar as dificuldades e os tempos característicos exigidos na aplicação da confiabilidade em um problema de estado plano clássico da geotecnia. Uma vez que o problema do apêndice A1.1 abre caminho para a identificação da estratégia de desenvolvimento dos modelos computacionais, daqui por diante sempre haverá dois módulos: um de análise, responsável pela entrada de dados para o cálculo da função de estado limite, e outro para os cálculos de confiabilidade que foram chamados SICC. Em termos práticos, o módulo SICC, já está desenvolvido a partir do problema A1.1 e pode ser reutilizado com

pequenas adaptações neste problema. Dessa forma, resta apenas desenvolver o módulo de análise que é responsável pelo cálculo da função de estado limite. Para o desenvolvimento deste módulo é tomado como um ponto de partida o programa de elementos finitos SOTRURA-DSA (*SOil sTRUcture inteRAction-Dynamic and Static Analysis*) desenvolvido por Palomino (2015).

O desenvolvimento deste exemplo implicou a adaptação do SOTRURA-DSA para o acoplamento com o programa de confiabilidade SICC e para o cálculo adequado das variáveis aleatórias do problema. Para tal o programa *FEL.exe* é desenvolvido de uma forma genérica onde SOTRURA-DSA é adaptado como um módulo de cálculo. Para todos os desenvolvimentos a única linguagem de programação é FORTRAN.

O problema abordado é inspirado em Phoon e Ching (2015). Algumas funções de distribuição foram alteradas, mas as características e valores do problema foram preservados, por isso a verificação foi feita com ANSYS. A Figura A2.1 mostra a configuração geométrica, as condições de suporte e os dados básicos do problema.

As variáveis aleatórias do problema estão resumidas na Tabela A2.1. Para a análise é proposta uma equação do estado limite para serviço, tomando como recalque admissível no ponto *A* o valor determinístico de  $u_{adm} = 0.2$  m. Esse valor foi reportado por Phoon e Ching (2015).

$$GG(\mathbf{X}) = u_{adm} - u_A = u_{adm} - F^{MEF}(E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, P_1, P_2) \quad (\text{A2.1})$$

onde  $\mathbf{X}$  denota o vetor das variáveis aleatórias  $\mathbf{X} = \{E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, P_1, P_2\}^T$ , que participam da função implícita calculada pelo método dos elementos finitos  $F^{MEF}$ . Além disso, este problema inclui uma complexidade adicional, tais como cargas de pressão sobrepostas  $P_1$  e  $P_2$ , o que obriga a adaptar os códigos de cálculo para que eles possam identificar o valor e posição da carga equivalente em cada um dos nós carregados, uma vez que alguns nós vão ter a carga equivalente associada com  $P_1$ , outros a soma de cargas equivalentes  $P_1$  e  $P_2$  e outros, como por exemplo, o nó extremo da carga  $P_2$ , terá pela esquerda, a carga equivalente  $P_1$  e  $P_2$ , enquanto que pela direita apenas a carga  $P_1$ . Além disso, como as cargas aplicadas ao modelo de elementos finitos são cargas nodais equivalentes, um sistema genérico de cálculo é exigido para determinar o valor das cargas equivalentes nodais específicas associadas com as pressões aleatórias  $P_1$  e  $P_2$  em cada simulação.

Neste problema também se começa a explorar o uso da função de distribuição uniforme, aplicada neste caso aos coeficientes de Poisson das camadas.

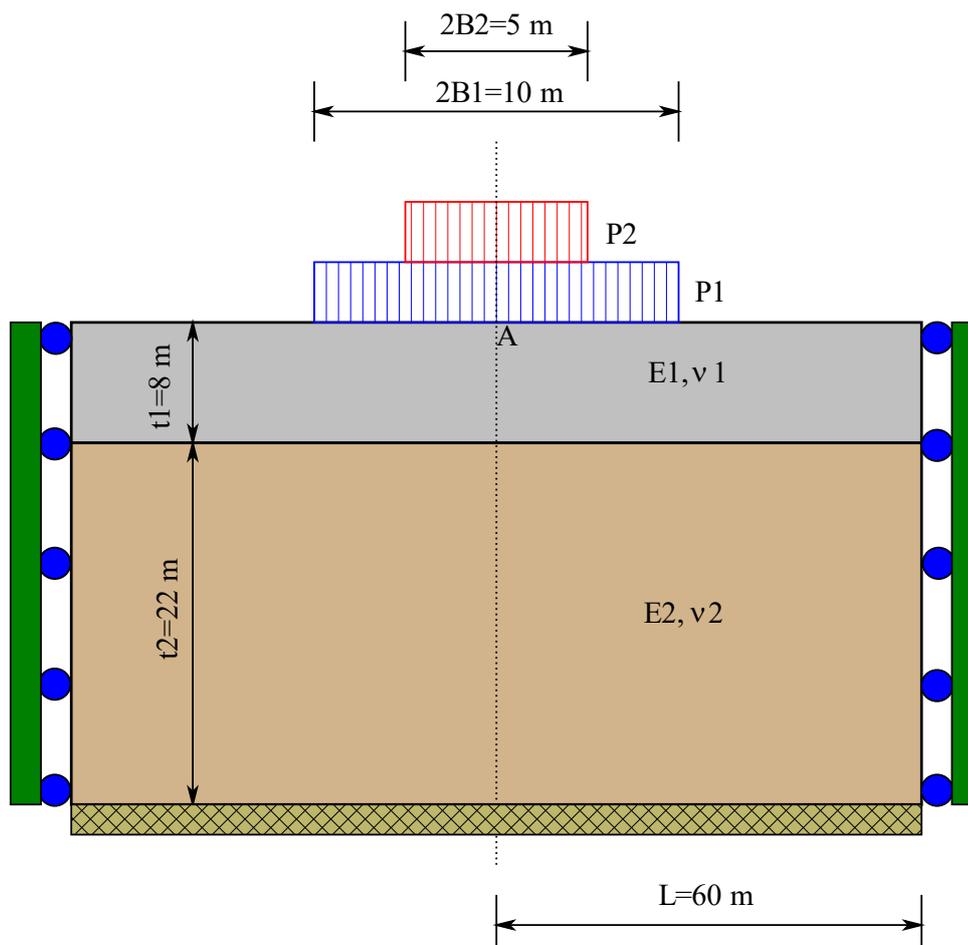


Figura A2.1– Modelo 2D do problema com duas camadas de solo elástico e com duas cargas distribuídas.

Tabela A2.1 – Variáveis aleatórias e seus parâmetros estatísticos característicos.

Variável	Unidade	Média	CV	Distribuição
$E_1$	Mpa	50	0.2	Lognormal
$E_2$	Mpa	100	0.2	Lognormal
$\nu_1$	---	0.3	0.15	Uniforme
$\nu_2$	---	0.3	0.15	Uniforme
$P_1$	Mpa	0.2	0.20	Lognormal
$P_2$	Mpa	0.4	0.20	Lognormal

Na Tabela A2.1 os valores da Média e  $CV$  são reportados por Phoon e Ching (2015). Os tempos de cálculo reportados nos resultados são apenas referências de ordem de grandeza.

## A2.1 Modelo implementado usando FORTRAN

O problema é abordado em duas partes: a primeira é o modelo de análise estrutural, neste caso, baseado no método de elementos finitos, que por sua vez alimenta à função de estado limite

A2.1. Esta primeira parte serve como o escravo da segunda parte, que consiste em um sistema integral de cálculo de confiabilidade (SICC) que atua como o programa mestre. Esta parte cuida de todo o cálculo da confiabilidade com base nos resultados da função de estado limite.

O fluxograma para resolver o problema da confiabilidade camadas elásticas de solo com carga uniformemente distribuída, segue a mesma estrutura da figura 4.1 fazendo as adaptações particulares.

Uma vez que o problema tem simetria geométrica, material e de carga, discretiza-se apenas metade do modelo como mostra-se na Figura A2.1. Para manter uma maior fidelidade ao modelo desenvolvido por Phoon e Ching (2015), tentou-se capturar a malha original desse autor. Para isso, a definição da malha é feita usando um programa de captura chamado *Engauge Digitizer* (que possui ferramentas avançadas de filtragem e de detalhamento) para obter os pontos de malha o mais precisamente possível. A Figura A2.2 mostra o processo de captura dos eixos da malha.

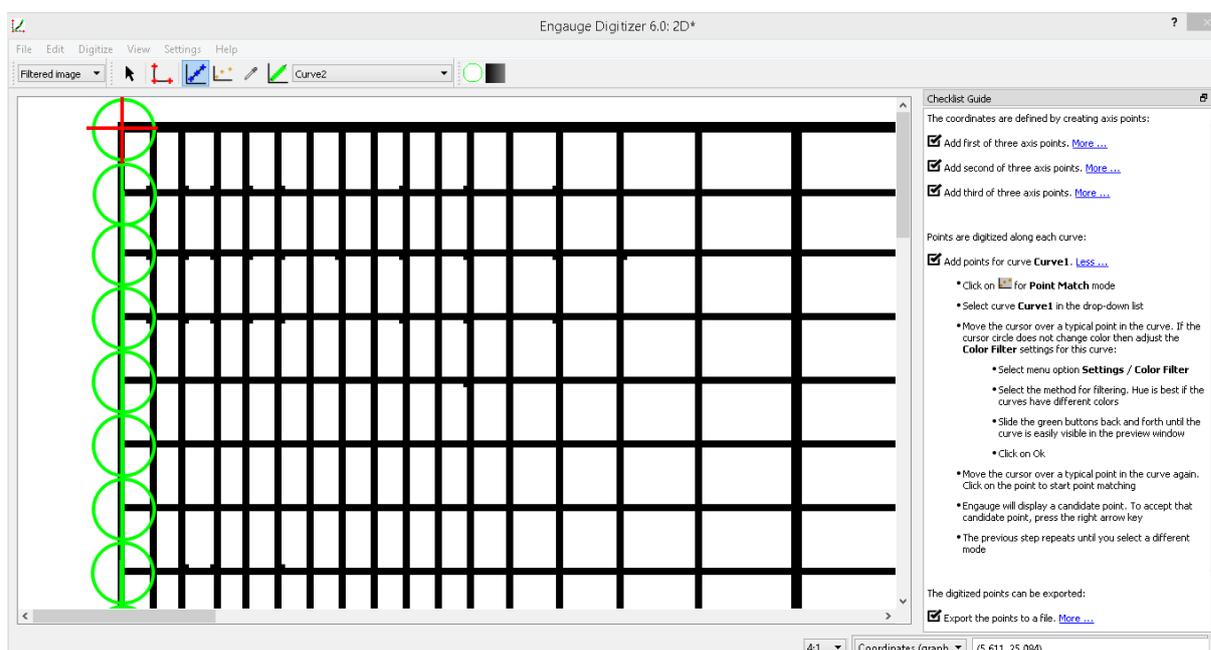


Figura A2.2 – Captura de malha usando o programa livre *Engauge Digitizer*.

Com o processo de captura anterior, são obtidos os pontos usados para a geração da malha mostrada na mostrada na Figura A2.3.

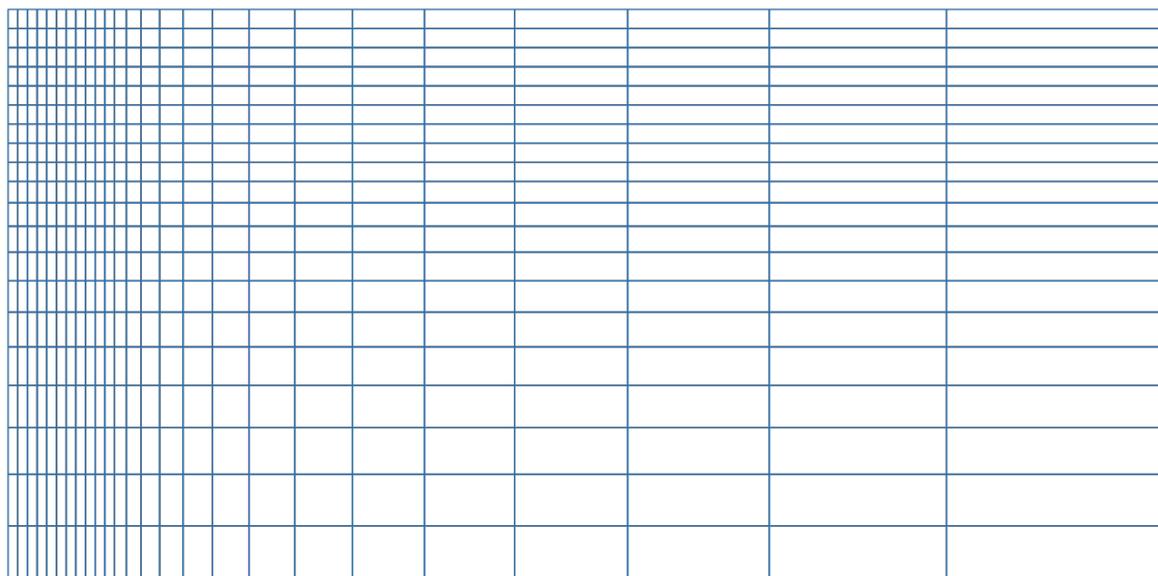


Figura A2.3 – Malha de elementos finitos para o problema em deformações planas.

Fonte: adaptada de Phoon e Ching (2015).

Uma vez que as simulações foram realizadas, a deformada para valores médios das variáveis da Figura A3.3 é obtida.

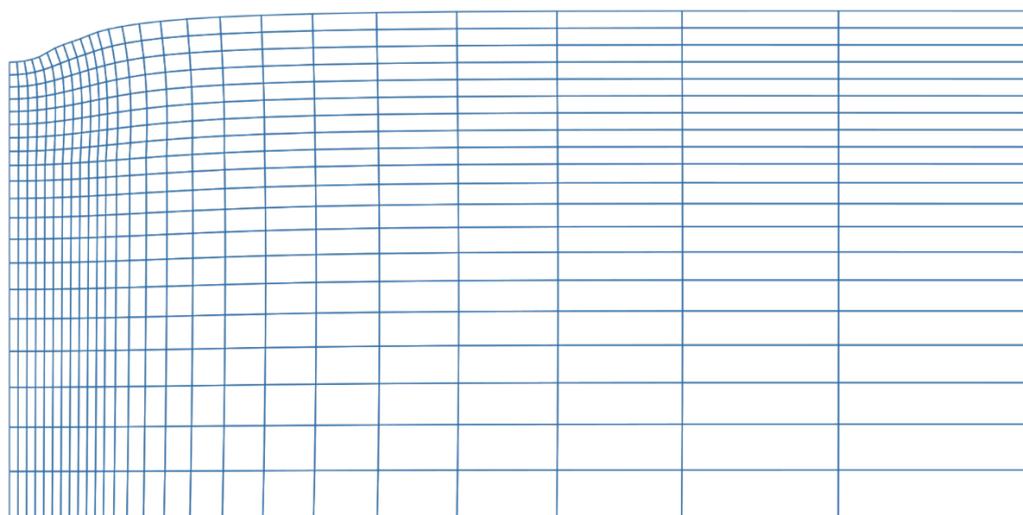


Figura A2.3– Malha deformada para valores médios das variáveis do problema em deformações planas.

A Tabela A2.2 mostra os resultados para o estudo de caso, sendo que o critério de saída do método MCI é um  $CV_{pf}$  inferior a 2%.

Tabela A2.2 – Resultados obtidos e seu tempo computacional associado para a solução obtida com a implementação FORTRAN.

Método	Prob. de falha ( $P_f$ )	Índice de confiabilidade ( $\beta$ )	$CV_{P_f}$ (%)	Tempo CPU (min)	Variação % em relação a MC*
FORM(HLRF)	0.177527E-03	3.571	---	0.017	10.03
MC (1000000 sim)	0.173000E-03	3.578	7.602	73.650	12.32
MC* (5200000 sim)	0.197308E-03	3.544	3.122	407.783	---
MCI (Passo 500) (sim 32500)	0.217406E-03	3.518	1.976	2.500	10.19

Os resultados do índice de confiabilidade e do tempo computacional relatados na Tabela A2.2, são traçados na Figura A2.4, onde o eixo primário e secundário são as escalas de tempo computacional e índice de confiabilidade  $\beta$ , respectivamente.

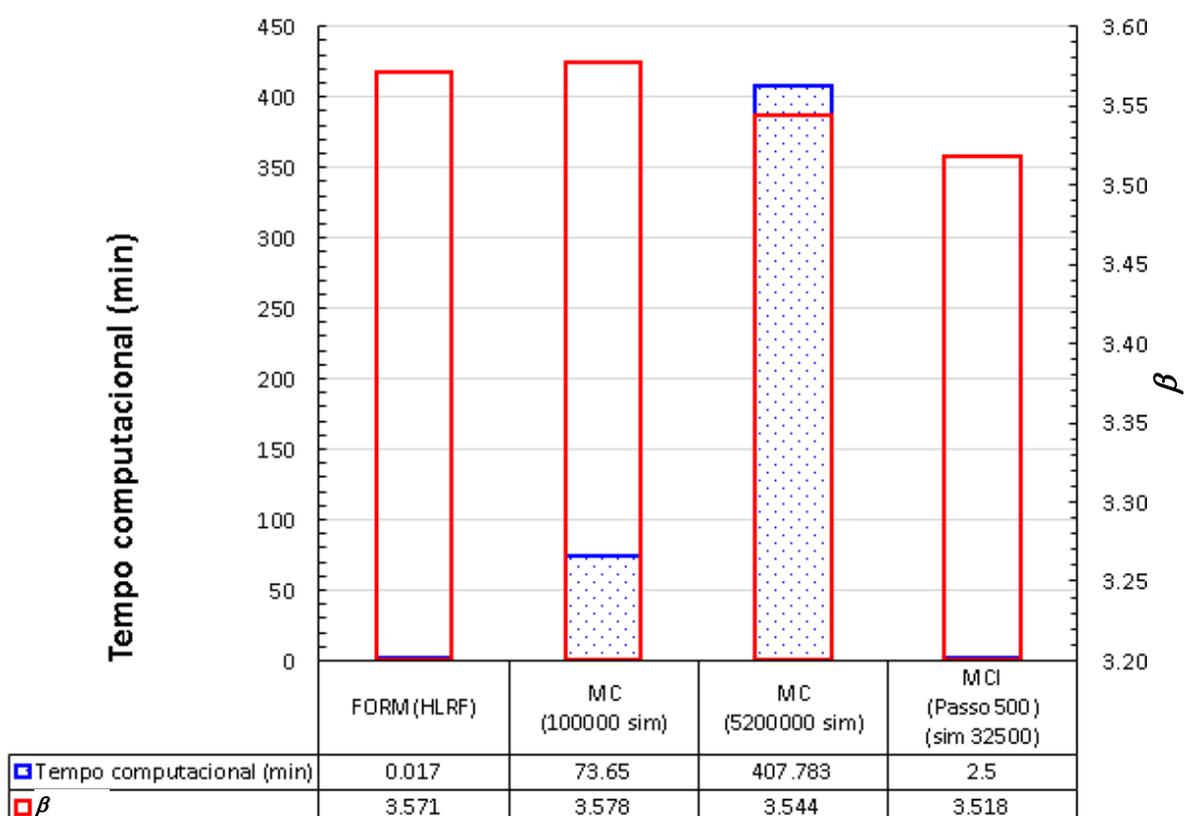


Figura A2.4 – Gráfico dos índices de confiabilidade e tempos computacionais para o problema em deformações planas na implementação em FORTRAN.

Pode-se observar semelhança nos resultados encontrados entre os métodos FORM, MC e MCI,

sendo que o critério de parada para este último é dado por um  $CV_{pf}$  menor que 2%, o que certamente é cumprido com apenas 32500 simulações (o que contrasta fortemente com as 5200000 simulações do método MC), lembrando que o MCI é uma aproximação do método MC. Este modelo é linear, pequeno em relação ao número de nós (546) e elementos (500); no entanto, o método MC requer uma quantidade considerável de tempo (quase 7 h) para chegar a 5200000 simulações e, como visto na Tabela A2.2, um  $CV_{pf}$  perto de 3%.

## A2.2 Modelo implementado usando o programa ANSYS

A Figura A2.5 mostra a discretização da malha de elementos finitos PLANE182 (elemento de 4 nós, 2D), as condições de carga e suporte.



Figura A2.5– Malha de elementos finitos, discretização, suporte e condições de carga do problema estudado.

A Figura A2.6 apresenta a deformada típica após a realização das simulações.

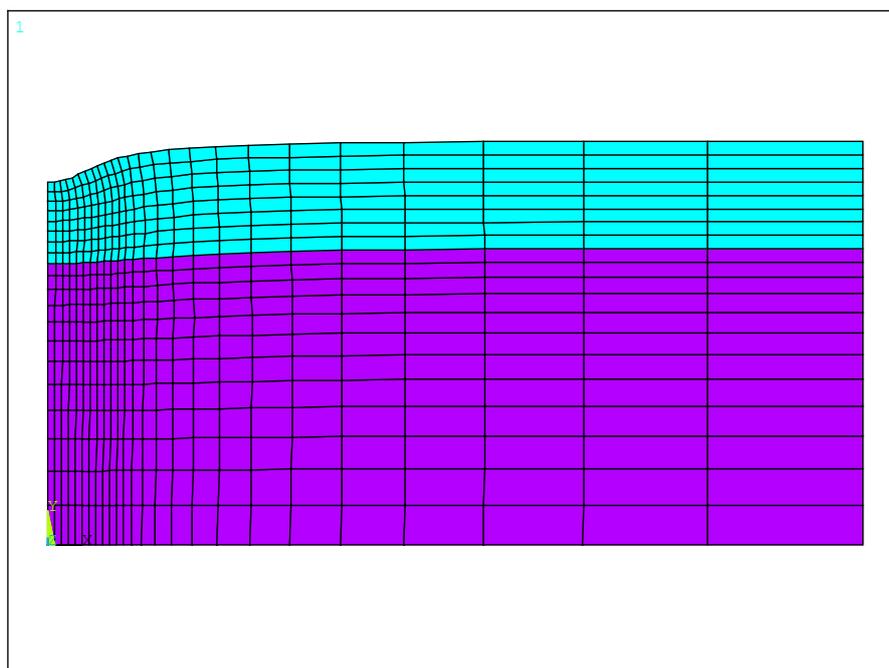


Figura A2.6 – Malha deformada para valores médios das variáveis do problema em deformações planas em ANSYS.

A Tabela A2.3 apresenta os resultados para o caso estudado, utilizando o método de Monte Carlo (MC), e o método Monte Carlo com amostragem do Hipercubo Latino (MCLH).

Tabela A2.3 – Resultados obtidos e seu tempo computacional associado para a solução usando o módulo PDS do ANSYS.

Método	Prob. de falha ( $P_f$ )	Índice de confiabilidade ( $\beta$ )	$CV_{P_f}$ (%)	Tempo CPU (min)	Variação % em relação a MC*
MC* (200000 sim)	0.168707E-03	3.585	17.214	606.583	---
MCLH (Paso 10000) (sim 100000)	0.172230E-03	3.579	---	313.050	2.09

A variação entre as probabilidades de falha MC\* das tabelas A2.2 e A2.3 é 14.5% (para diminuir essa porcentagem de variação pode-se aumentar o número de simulações). Pode ser visto na Figura A2.7, através da semelhança nos resultados encontrados entre o método MC e sua aproximação MCLH, que o método MCLH pode ser adequado em termos de tempo computacional para obter uma boa aproximação do índice de confiabilidade.

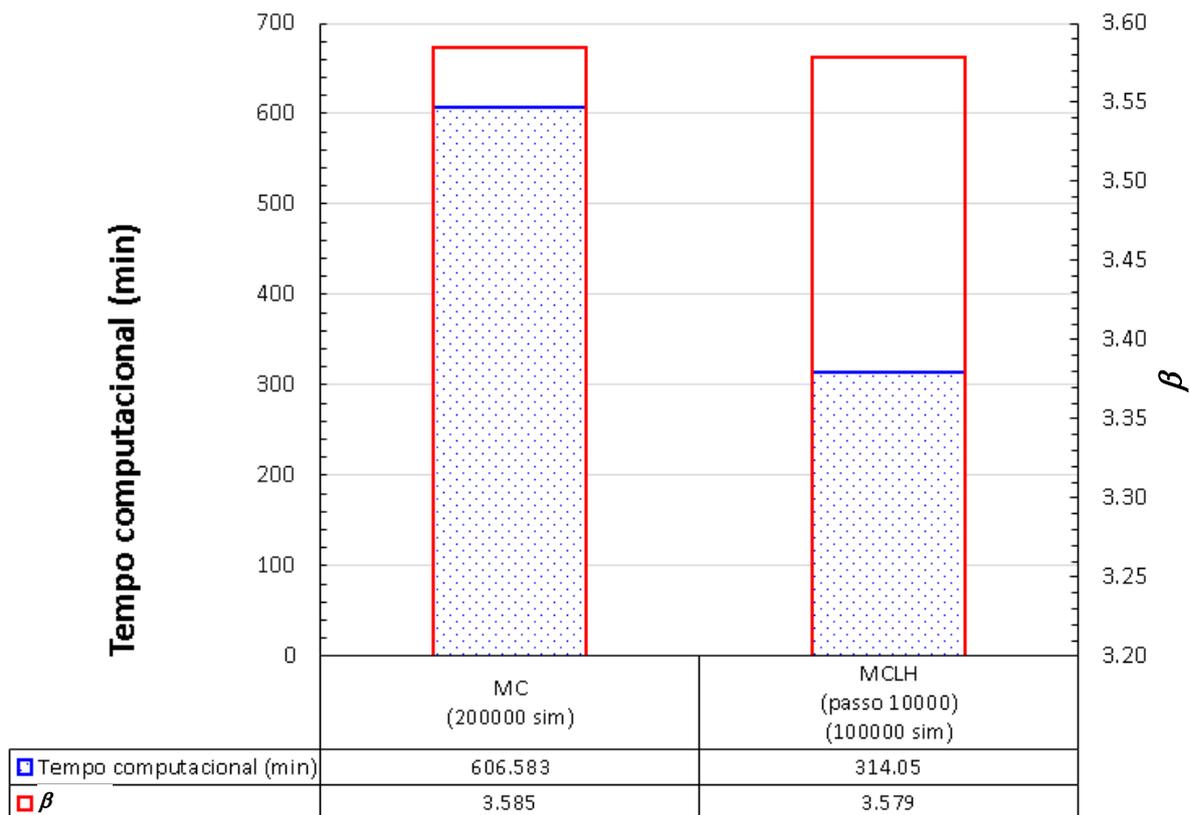


Figura A2.7 – Resultados do índice de confiabilidade e do tempo computacional obtidos pelo *ANSYS*.

### A.3 PROBLEMA DE CONFIABILIDADE NA ESTRUTURA DO PAVIMENTO ELÁSTICO COM CARGA CIRCULAR UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA EM 3D

Este terceiro problema procura mensurar a dificuldade e os tempos característicos exigidos na aplicação da confiabilidade em um problema tridimensional clássico da geotecnia. Tal como no problema A2.1, utilizou-se para o módulo de análise o programa de elementos finitos SOTRURA-DSA e, para o módulo de confiabilidade, o programa SICC. O desenvolvimento dos códigos em FORTRAN segue a mesma estrutura que o exemplo do apêndice A2.

O problema abordado é inspirado em Waarts (2000). Algumas funções de distribuição foram alteradas, mas as características e valores do problema foram preservados, por isso a verificação foi feita com ANSYS. A Figura A3.1 mostra a configuração geométrica, condições de suporte e dados básicos do modelo.

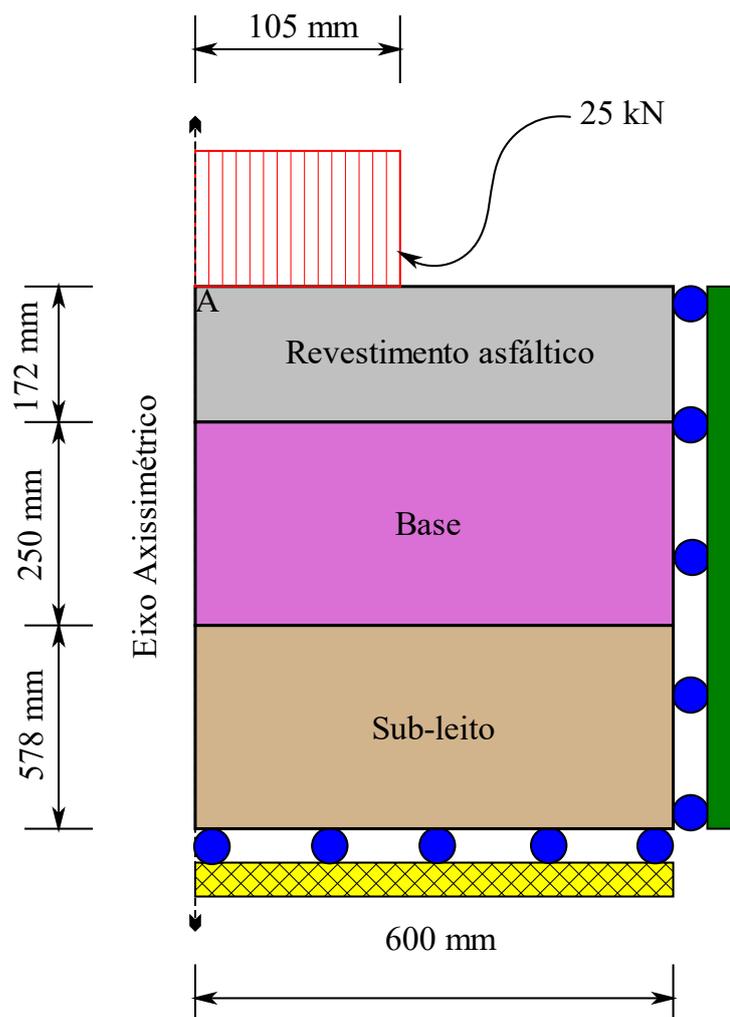


Figura A3.1 – Modelo da estrutura do pavimento: geometria, restrições e cargas.

As variáveis aleatórias do problema são resumidas na Tabela A3.1. Para a análise, é utilizada uma equação de estado limite baseada em procedimentos padrões de projetos de pavimentos. Essa equação tem como novidade uma deformação última aleatória  $\varepsilon_{ult}$  que contrasta com o exemplo anterior em que a variável de controle é determinística.

$$GG(\mathbf{X}) = \varepsilon_{ult} - \varepsilon_A = \varepsilon_{ult} - F^{MEF}(E_{RA}, E_B, E_S, \nu_{RA}, \nu_B, \nu_S) \quad (A3.1)$$

onde  $\mathbf{X}$  denota o vetor aleatório da variável  $X = \{\varepsilon_{ult}, E_{RA}, E_B, E_S, \nu_{RA}, \nu_B, \nu_S\}^T$ , e por sua vez essas variáveis aleatórias participam (exceto a variável  $\varepsilon_{ult}$ ) na função implícita calculada pelo método dos elementos finitos  $F^{MEF}$ .

Tal como no problema do apêndice A2, é aplicada uma função de distribuição uniforme aos coeficientes de Poisson das camadas.

Tabela A3.1 – Variáveis aleatórias e seus parâmetros estatísticos característicos.

Variável	Unidade	Média	CV	Distribuição
$E_{RA}$	Mpa	7950	0.4	Lognormal
$E_B$	Mpa	400	0.4	Lognormal
$E_S$	Mpa	100	0.4	Lognormal
$\nu_{RA}$	---	0.3	1/3	Uniforme
$\nu_R$	---	0.3	1/3	Uniforme
$\nu_S$	---	0.3	1/3	Uniforme
$\varepsilon_{ult}$	mm/mm	250E-6	0.30	Lognormal

Até agora os exemplos foram desenvolvidos com variáveis não correlacionadas, no entanto, este exemplo tem a correlação total entre as variáveis de cada camada, de modo que entre elas o coeficiente de correlação é definido com um valor de 0.99 como aproximação à unidade normalmente utilizada nestes casos. Observa-se na Tabela A3.1, que os coeficientes de variação são elevados e isso representa importantes desafios numéricos, além da inclusão de variáveis totalmente correlacionadas. Na Tabela A3.1 os valores da Média e CV são reportados por Waarts (2000).

Os tempos de cálculo reportados nos resultados são apenas referências de ordem de grandeza.

### A3.1 Modelo implementado usando FORTRAN

A solução desenvolvida é a mesma que do exemplo do Apêndice A2 com a diferença que os arquivos de dados devem ser adaptados para o modelo 3D em MEF. Além disso, os arquivos FORTRAN do modelo MEF devem ser adaptados de forma a compatibilizar com o sistema de análise de confiabilidade SICC. Embora a maior parte seja mantida, cada modelo requer certo grau de customização ou adaptação.

Uma vez que o problema tem simetria geométrica, material e de cargas, pode-se discretizar apenas um quarto de cilindro. Neste caso, o ANSYS é usado como programa para gerar a malha e em seguida a numeração é adaptada para que possa ser usada como entrada. O fluxograma para resolver o problema na estrutura do pavimento elástico com carga circular uniformemente distribuída em 3D, segue a mesma estrutura da figura 4.1 fazendo as adaptações particulares.

A Figura A3.2 mostra a superfície externa da malha estruturada obtida com refinamento na região onde tem altos gradientes de tensão. Para essa geração de malha utilizou-se o pré/pós processador GiD do Centro Internacional de Métodos Numéricos CIMNE (UPC-Barcelona). Nesta malha, todas as faces estão confinadas, exceto a face superior, onde a pressão superficial

é aplicada por meio de cargas equivalentes nos nós. A face curvada do cilindro é restrita aos movimentos horizontais.

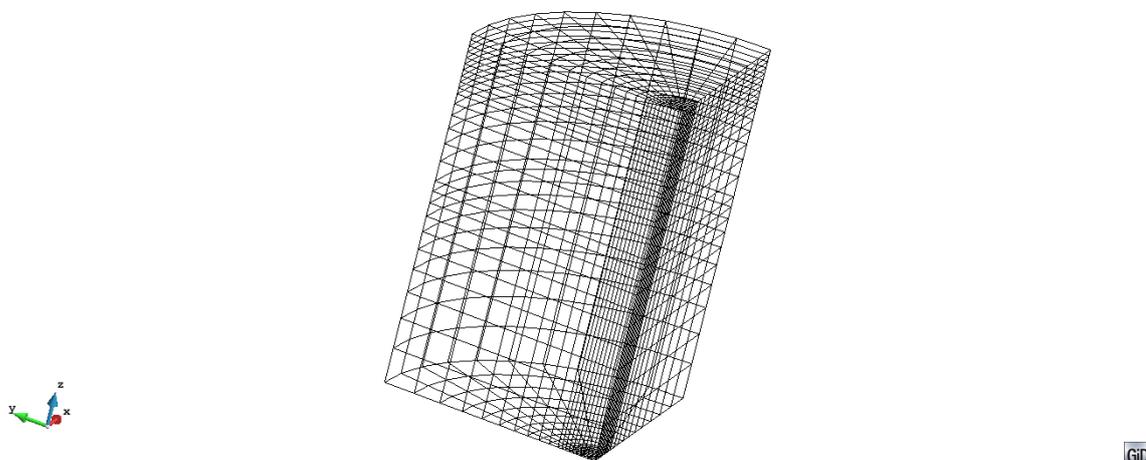


Figura A3.2– Superfície externa da malha do problema 3D da estrutura do pavimento.

Realizadas as simulações são obtidos os campos típicos de pavimentos com concentrações de tensões e deformações na interface asfalto-base, como mostrado na Figura A3.3.

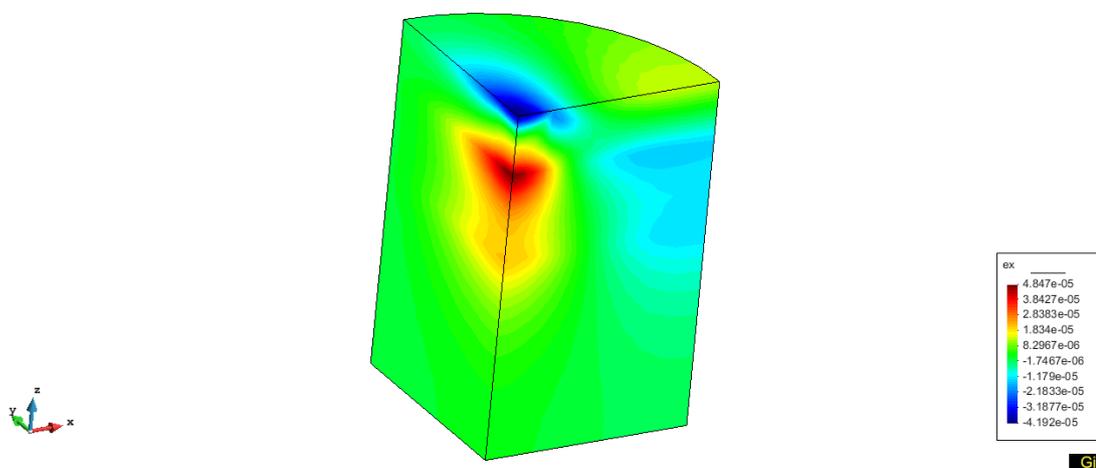


Figura A3.7.1 – Campo de deformações na direção  $x$  da estrutura do pavimento.

A Tabela A3.2 mostra os resultados obtidos para esse estudo de caso, sendo o critério de parada do método MCI um  $CV_{pf}$  inferior a 2%.

Os resultados do índice de confiabilidade e do tempo computacional da Tabela A3.2, são apresentados graficamente na Figura A3.4, onde o eixo primário e secundário representa as escalas de tempo computacional e índice de confiabilidade  $\beta$ , respectivamente.

Tabela A3.2 – Resultados obtidos e seu tempo computacional associado para a solução obtida com a implementação FORTRAN.

Método	Prob. de falha ( $P_f$ )	Índice de confiabilidade ( $\beta$ )	$CV_{Pf}$ (%)	Tempo CPU (min)	Variação % em relação a MC*
FORM(HLRF)	0.445617E-02	2.615	---	13.479	23.78
MC* (10000 sim)	0.360000E-02	2.687	16.637	1277.152	---
MCI (Passo 500) (sim 5500)	0.481273E-02	2.589	1.987	705.322	33.69

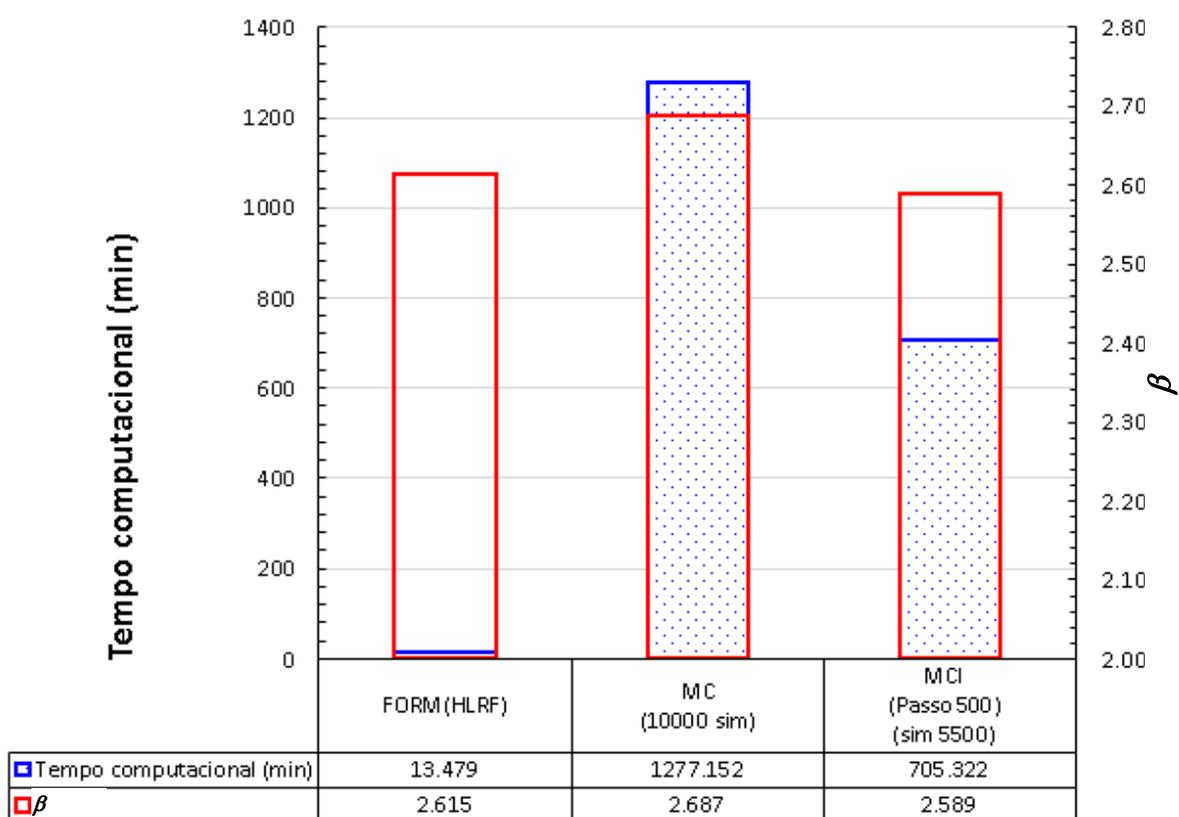


Figura A3.4 – Resultados do índice de confiabilidade e do tempo computacional obtidos pela implementação em FORTRAN do problema do pavimento 3D.

Pode se ver a semelhança nos resultados encontrados entre os métodos FORM, MC e MCI, sendo que o critério de parada, para o último método, é de um  $CV_{Pf}$  menor de 2%, o que certamente cumpre com 5500 simulações que são consideráveis no tempo, já que, este modelo é tridimensional e seu custo é elevado comparado a uma análise 2D. Este modelo é linear, de dimensão média em relação ao número de nós (5427) e elementos (4550); no entanto, o método MC requer uma quantidade considerável de tempo (um pouco mais de 21 h) para chegar a

apenas 10000 simulações com um  $CV_{pf}$  perto de 17% (como visto na Tabela A3.2). Esse fato mostra as limitações da viabilidade do método MC em termos de tempo computacional. Grande é o desafio de abordar problemas com alto coeficiente variação e valores elevados de correlação entre as variáveis.

### A3.2 Modelo implementado usando o programa ANSYS

A Figura A3.5 mostra a discretização da malha de elementos finitos SOLID185 (elemento de 8 nós, 3D), a estratificação, condições de carga e suporte.

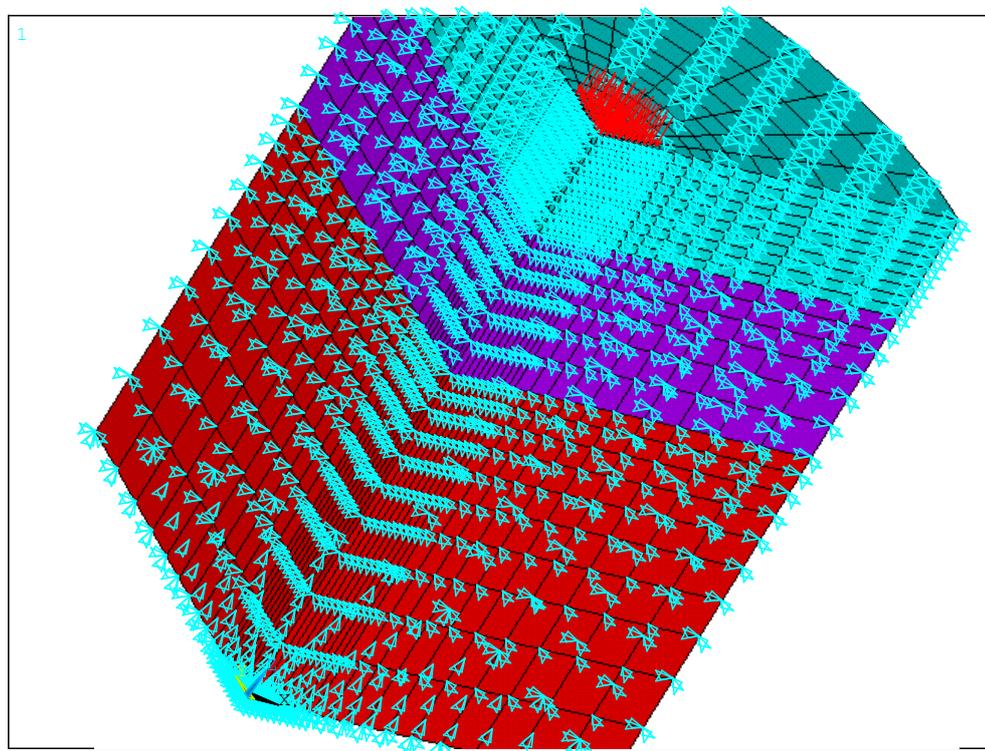


Figura A3.5 – Malha de elementos finitos, estratificação, condições de suporte e de carga do problema estudado.

As simulações obtiveram os campos típicos de deformação horizontal nas estruturas do pavimento, e que também está de acordo com o resultado obtido com o modelador desenvolvido em *FORTRAN* anteriormente. A Figura A3.6 mostra o campo de deformações na direção  $x$ .

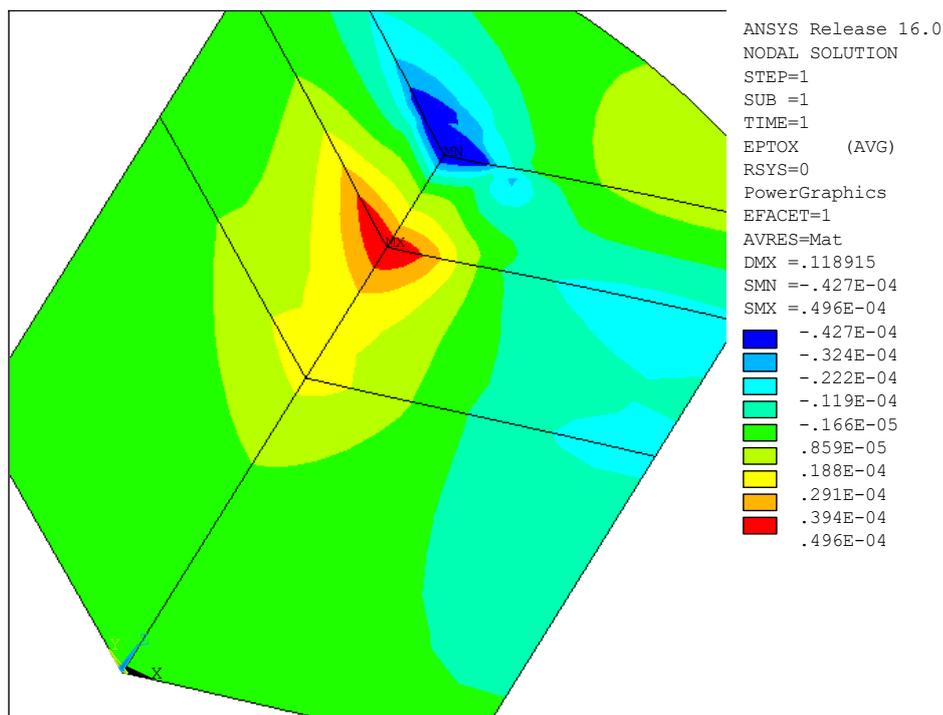


Figura A3.6 – Campo de deformações na direção  $x$  para o problema 3D obtido pelo ANSYS.

A Tabela A3.3 mostra os resultados para o estudo de caso, utilizando o método de Monte Carlo (MC), e o método Monte Carlo com amostragem do Hipercubo Latino (MCLH).

Tabela A3.3 – Resultados de confiabilidade e seu tempo computacional associado usando o módulo PSD do ANSYS.

Método	Prob. de falha ( $P_f$ )	Índice de confiabilidade ( $\beta$ )	$CV_{P_f}$ (%)	Tempo CPU (min)	Varição % em relação a MC*
MC* (sim 10000)	0.345861E-02	2.701	16.974	253.333	---
MCLH (Passo 100) (sim 1000)	0.501502E-02	2.575	---	20950	45.00
MCLH (Passo 1.000) (sim 10000)	0.476191E-02	2.593	---	251.233	37.68
MCLH (Passo 10000) (sim 100000)	0.431294E-02	2.627	---	1823.450	24.70

A variação entre as probabilidades de falha MC\* das tabelas A3.2 e A3.3 é 3.93%.

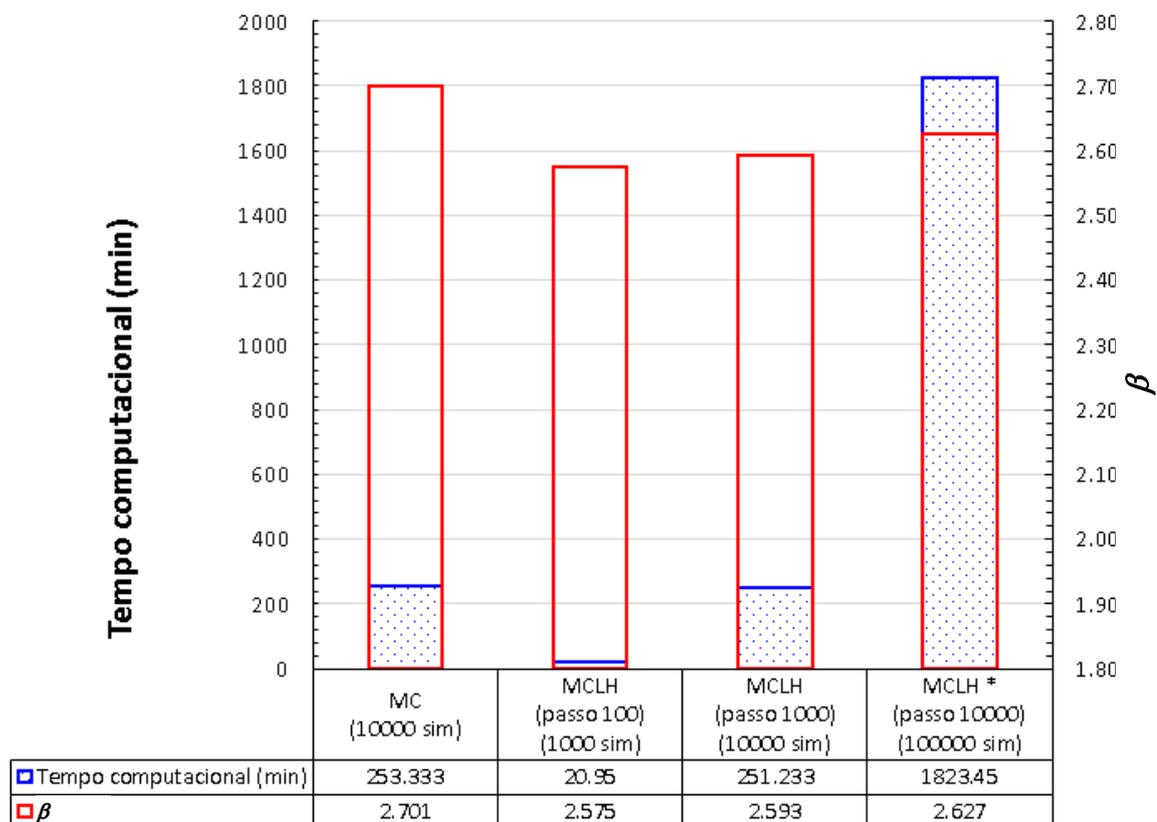


Figura A3.7– Gráfico dos índices de confiabilidade e tempos computacionais para o problema estrutural de cargas em pavimentos 3D usando o ANSYS.

Pode ser visto na Figura A3.7 semelhanças nos resultados encontrados entre o método MC e sua aproximação MCLH. Os tempos computacionais já estão começando a ser de tamanho considerável mesmo que é um problema de elasticidade linear, então esse fato indica que os problemas de confiabilidade em 3D podem levar tempos consideráveis na medida em que incluem complexidades com relação a não linearidade geométrica e física.