Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Soluções de equações p-sublineares envolvendo o operador p-laplaciano via teoria de Morse

Augusto Ritter Stoffel

Dissertação de mestrado

Porto Alegre, maio de 2010

Dissertação submetida por Augusto Ritter Stoffel[1] como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor orientador
Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino

Banca examinadora
Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (PPGMAT/UFRGS)
Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll (PPGMAT/UFRGS)
Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano (PPGMAT/UFRGS)
Prof. Dr. José Afonso Barrionuevo (PPGMAp/UFRGS)

Data da apresentação
04 de maio de 2010

[1]Bolsista CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência e multiplicidade de soluções de certos problemas p-sublineares envolvendo o operador p-laplaciano usando teoria de Morse.

Palavras-chave Equações diferenciais parciais, p-laplaciano, teoria de Morse.

Abstract

The purpose of this text is to provide a didactic exposition of the paper "Solutions of p-sublinear p-Laplacian equation via Morse theory" by Yuxia Guo and Jiaquan Liu [8]. This paper addresses the existence and multiplicity of solutions for the problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a smooth, bounded domain of $\mathbb{R}^N$, Δ_p is the p-Laplacian operator and f satisfies certain conditions, in particular f is p-sublinear at 0. Morse theory is used to infer the existence of critical points of a functional associated to this problem.

In Chapter 2, we introduce the necessary Morse theoretic concepts, assuming basic knowledge of singular homology theory. In Chapter 3, we introduce basic properties of the p-Laplacian operator, assuming knowledge of Sobolev spaces, including imbedding and compactness results. Finally, in Chapter 4, we follow Guo and Liu's paper itself.

Keywords Partial differential equations, p-Laplacian, Morse theory.

Sumário

1 Introdução

Este trabalho consiste em uma exposição didática do artigo "Solutions of p-sublinear p-Laplacian equation via Morse theory" de Yuxia Guo e Jiaquan Liu [8]. Nesse artigo, investiga-se a existência e multiplicidade de soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde Ω é um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$, Δ_p é o operador p-laplaciano e f satisfaz certas condições, em especial alguma condição de p-sublinearidade. O operador p-laplaciano é uma versão homogênea de grau $p-1$ do operador laplaciano usual, Δ_2, e o espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ é conveniente para tratá-lo. Com respeito às condições de p-sublinearidade, supomos, em um primeiro problema, que

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{p\int_0^t f(x,s)\,ds}{|t|} < \lambda_1 |t|^{p-1}$$

(cf. (3.8), (f_4)), isto é, f é, em média e para t grande, dominada por $\lambda_1|t|^{p-1}$, uma função homogênea de grau $p-1$. Em um segundo problema, supomos que

$$f(x,t) = \lambda_1 |t|^{p-2}t + g(x,t) \text{ onde } \lim_{|t|\to\infty} g(x,t)/|t|^{p-1} = 0.$$

(cf. (f_5)), ou seja, f é assintoticamente equivalente a $\lambda_1|t|^{p-2}t$.

Consideraremos a formulação variacional destes problemas e aplicaremos teoria de Morse para inferir a existência e multiplicidade de pontos críticos do funcional associado à equação diferencial.

O texto está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2, apresentamos as idéias de teoria de Morse utilizadas no restante do texto. Para isso, assumimos conhecimentos básicos de homologia singular (propriedade da excisão, invariância por homotopia e seqüência exata longa de um par e de uma tripla), que recapitulamos abaixo. No Capítulo 3, introduzimos as propriedades básicas do operador p-laplaciano. Demonstramos um teorema de representação para o dual do espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, enunciamos alguns resultados de regularidade e princípios de máximo e de comparação, e definimos autovalores do operador (não linear) p-laplaciano. Para isso, assumimos conhecimentos sobre espaços de Sobolev, incluindo as imersões de Sobolev e resultados de compacidade. Por fim, no Capítulo 4, seguimos o artigo de Guo e Liu propriamente dito.

1.1 Teoria de Morse clássica

Classicamente, a teoria de Morse abrange o estudo das funções "mais simples" em uma variedade diferenciável compacta M e da relação destas com a topologia de M. Neste texto, precisaremos de uma versão dessa teoria para o caso de dimensão infinita. Por sorte, será suficiente considerar casos bastante particulares de alguns resultados da teoria generalizada, de forma que uma apresentação razoavelmente autocontida daquilo que utilizaremos poderá ser dada em poucas páginas, no Capítulo 2. Para situar o leitor, enunciamos a seguir o resultado fundamental da teoria de Morse clássica, a saber, as *desigualdades de Morse*.

Seja $f\colon M \to \mathbb{R}$ uma função suave e $x \in M$ um *ponto crítico*, isto é, $df(x) = 0$. Dizemos que x é um ponto crítico *não degenerado* se a hessiana da expressão de f em um sistema de coordenadas é uma forma quadrática não degenerada, e o *índice* do ponto crítico x é a dimensão maximal de um subespaço em que essa hessiana é negativa definida. Uma função $f\colon M \to [a,b]$ é chamada *função de Morse* se só possui pontos críticos não degenerados, e nesse caso dizemos que é de tipo $(v_0, \dots v_k)$ se possui exatamente v_i pontos críticos com índice i. Por fim, f é chamada *admissível* se $f^{-1}(a) \cup f^{-1}(b) = \partial M$ e a, b são valores regulares. Escrevemos $\beta_k = \dim H_k(M, f^{-1}(a))$; se $f^{-1}(a) = \emptyset$, este é o k-ésimo *número de Betti* de M. Podemos enfim enunciar as desigualdades de Morse.

Teorema 1.1 (Morse)**.** *Seja M uma variedade diferenciável compacta de dimensão n e $f\colon M \to [a,b]$ uma função de Morse admissível de tipo $(v_0, \dots v_k)$. Então, para cada $0 \le m \le n$,*

$$\sum_{0\le k\le m} (-1)^{k+m} v_k \ge \sum_{0\le k\le m} (-1)^{k+m} \beta_k, \tag{1.2}$$

$$\sum_{0\le k\le n} (-1)^{k} v_k = \sum_{0\le k\le n} (-1)^{k} \beta_k. \tag{1.3}$$

A demonstração pode ser encontrada em Hirsch [9].

1.2 Revisão de homologia singular

Nesta seção, apresentamos rapidamente a teoria de homologia singular. Uma referência para este tópico é Greenberg [6]. X, Y, Z denotarão espaços topológicos. Escrevemos $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ quando $A \subset X$, $B \subset Y$ e $f(A) \subset B$. Dizemos que $f_0, f_1\colon (X,A) \to (Y,B)$ são homotópicas quando existe uma homotopia satisfazendo $f_t(A) \subset B$ para todo t.

Para cada inteiro $q \ge 0$, o *q-simplexo padrão* é o conjunto

$$\Delta^q = \left\{ (x_1, \dots x_q) \in \mathbb{R}^q; x_1, \dots x_q \ge 0 \text{ e } \sum_{1\le k\le q} x_k \le 1 \right\}.$$

Em particular, $\Delta^0 = \{0\}$ é um ponto. Para cada $0 \le p \le q$ temos a *aplicação face* $F_p\colon \Delta^q \to \Delta^{q+1}$ dada por $F_p(x_1, \dots, x_q) = (x_1, \dots, x_{p-1}, 0, x_p, \dots, x_q)$ para $1 \le p \le q$, e $F_0(x_1, \dots, x_q) = (x_1, \dots, x_q, 1 - \sum_{1\le k\le q} x_k)$.

Se X é um espaço topológio, um *q-simplexo singular* é uma aplicação contínua $s\colon \Delta^q \to X$, e uma *q-cadeia* com coeficientes em um dado anel R é um elemento do R-módulo livre $C_q(X;R)$ gerado por todos os q-simplexos singulares em X. Em outras palavras, uma q-cadeia é uma combinação linear formal com coeficientes em R de q-simplexos. Interessam em especial o caso $R = \mathbb{Z}$, em que $C_q(X;R)$ é simplesmente o grupo abeliano gerado livremente por todos os q-simplexos, e o caso em que R é um corpo, e portanto $C_q(X;R)$ é um espaço vetorial. Definimos o *operador bordo* $\partial_{q+1}\colon C_{q+1}(X;R) \to C_q(X;R)$ estendendo linearmente a aplicação que mapeia um $(q+1)$-simplexo s em

$$\partial_{q+1} s = \sum_{0 \le k \le q} (-1)^k s \circ F_k.$$

Chama-se a $z \in \operatorname{Ker} \delta_q$ um *q-ciclo* e a $b \in \operatorname{Im} \delta_{q+1}$ um *q-bordo*.

Verifica-se que $\partial_{q+2} \circ \partial_{q+1}\colon C_{q+2}(X;R) \to C_q(X;R) = 0$. Isso motiva a definição dos *módulos de homologia singular* de X com coeficientes em R,

$$H_q(X;G) = \frac{\operatorname{Ker} \partial_q}{\operatorname{Im} \partial_{q+1}},$$

como uma medida da não exatidão da seqüência

$$\ldots \xrightarrow{\partial} C_{q+1}(X;R) \xrightarrow{\partial} C_q(X;R) \xrightarrow{\partial} \ldots$$

(essa seqüência é chamada *complexo de cadeias singular*) Daqui em diante, omitiremos, como usual, referências desnecessárias ao anel R e subíndices q.

Seja Y outro espaço topológico. Uma aplicação contínua $f\colon X \to Y$ induz naturalmente um homomorfismo $C_q(X) \to C_q(Y)$ (que mapeia o q-simplexo $s\colon \Delta^q \to X$ em $f \circ s\colon \Delta^q \to Y$). Esse homomorfismo "desce" da maneira natural a um homomorfismo $f_*\colon H_q(X) \to H_q(Y)$.

O *funtor homologia singular* associa a cada espaço topológico X a seqüência de módulos $H_q(X)$, e a cada aplicação contínua $f\colon X \to Y$ a seqüência de homomorfismos $f_*\colon H_q(X) \to H_q(Y)$. Para utilizar com propriedade essa terminologia, deve-se verificar que $(\mathrm{Id}_X)_* = \mathrm{Id}_{H_q(X)}$ e que se $g\colon Y \to Z$ é outra aplicação contínua, então $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, o que é evidente.

Se $A \subset X$, podemos considerar $C_q(A) \subset C_q(X)$, e o operador bordo induz um homomorfismo $C_{q+1}(X)/C_{q+1}(A) \to C_q(X)/C_q(A)$ da maneira natural. A homologia do complexo de cadeias assim definido é chamada *homologia relativa*, e é denotada por $H_q(X, A)$. Uma definição mais direta de homologia relativa pode ser dada da seguinte forma: Chamamos z de q-ciclo relativo se $\partial z \in C_{q-1}(A)$, e b de q-bordo relativo se $b \in \operatorname{Im} \partial + C_q(A)$. Então

$$H_q(X, A) = \frac{\{q\text{-ciclos relativos}\}}{\{q\text{-bordos relativos}\}}.$$

As propriedades fundamentais do funtor homologia singular estão sumarizadas nos seguintes axiomas de Eilenberg-Steenrod.

1. Se $f, g\colon (X,A) \to (Y,B)$ são homotópicas, então $f_* = g_*$ (invariância por homotopia).

2. Se $\bar{V} \subset \mathring{A}$, então $H_q(X,A) \cong H_q(X \setminus V, A \setminus V)$ (propriedade de excisão).

3. Se P é o espaço dado por um ponto, então $H_q(P) = \{0\}$ para todo $q \neq 0$.

4. Se X é a união disjunta de $\{X_\alpha\}$, então $H_q(X) \cong \bigoplus_\alpha H_q(X_\alpha)$.

5. Para cada par (X,A), existe uma seqüência exata longa

$$\cdots \to H_{q+1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{q+1}(X) \xrightarrow{j_*} H_{q+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_q(A) \to \cdots$$

onde $i\colon A \to X$ e $j\colon X \to (X,A)$ são as inclusões.

A seqüência exata de um par é funtorial no sentido de que, dada uma aplicação $f\colon (X,A) \to (Y,B)$, temos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_q(A) \arrow[r] \arrow[d] & H_q(X) \arrow[r] \arrow[d] & H_q(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{q-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_q(B) \arrow[r] & H_q(Y) \arrow[r] & H_q(Y,B) \arrow[r] & H_{q-1}(B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

onde as setas verticais são as aplicações induzidas por f.

De forma semelhante, uma tripla $A \subset B \subset X$ dá origem a uma seqüência exata

$$\cdots \to H_{q+1}(B,A) \xrightarrow{i_*} H_{q+1}(X,A) \xrightarrow{j_*} H_{q+1}(X,B) \xrightarrow{\partial_*} H_q(B,A) \to \cdots$$

que é funtorial.

2 Um pouco de teoria de Morse em dimensão infinita

Neste capítulo, vamos associar a cada ponto crítico de um funcional $J\colon E \to \mathbb{R}$, onde E é um espaço de Banach, uma seqüência de grupos $C_q(J,u)$, $q \geq 0$ inteiro, chamados *grupos críticos* de J em u e obter, sob certas condições, restrições sobre a natureza destes. Isso será utilizado no Capítulo 4 para inferir a existência e multiplicidade de pontos críticos de funcionais resultantes da formulação variacional de certas equações diferenciais envolvendo o operador p-laplaciano.

2.1 Grupos críticos

Seja E um espaço de Banach e $J\colon E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Isso significa que para cada $u \in E$ existe um funcional $J'(u) \in E^*$ tal que

$$\frac{|J(u+v) - J(u) - J'(u)(v)|}{\|v\|} \to 0 \text{ quando } \|v\| \to 0,$$

e a aplicação $u \mapsto J'(u)$ é contínua. Dado $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, definimos os conjuntos de subnível fechado e aberto de J por

$$J^c = J^{-1}\left((-\infty, c]\right), \quad \mathring{J}^c = J^{-1}\left((-\infty, c)\right).$$

Dizemos que $u \in E$ é um *ponto crítico* de J se $J'(u) = 0$, e nesse caso $J(u)$ é chamado de *valor crítico* de J. No que segue, denotaremos o conjunto dos pontos críticos de J por K. O *q-ésimo grupo crítico de Morse* de J no ponto crítico u é definido como o grupo de homologia relativa

$$C_q(J,u) = H_q(J^c, J^c \setminus \{u\}).$$

Aqui, bastará considerar grupos de homologia com coeficientes em $\mathbb{R}$. Segue-se da propriedade da excisão que se U é uma vizinhança de u, então $C_q(\Phi, u) \cong H_q(\Phi^c \cap U, (\Phi^c \cap U) \setminus \{u\})$.

Dizemos que o funcional J cumpre a condição de deformação (D_c) no nível $c \in \mathbb{R}$ se, dados $\epsilon > 0$ e uma vizinhança N de $K_c = \{u \in E; J(u) = c \text{ e } J'(u) = 0\}$, existem $\bar{\epsilon} > 0$ e uma deformação contínua $\eta\colon E \times [0,1] \to E$ tais que

- $\eta_0 = \mathrm{Id}\colon E \to E$;
- $\eta_t(u) = \eta(u,t) = u$ para $u \notin J^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ e $t \in [0,1]$;

- $J(\eta_t(u))$ é decrescente em t para todo $u \in E$;
- $\eta_1(J^{c+\bar{\epsilon}} \setminus N) \subset J^{c-\bar{\epsilon}}$.
- $\eta_t\colon E \to E$ é um homeomorfismo para todo $0 \le t \le 1$.

É possível provar que um funcional satisfaz a condição de deformação (D_c) a partir de certas condições de compacidade. Dizemos que um funcional $J \in C^1(E)$ satisfaz a condição de Palais-Smale se, para toda seqüência $\{u_n\} \subset E$ tal que $\{J(u_n)\}$ é limitado e $J'(u_n) \to 0$, tem-se que $\{u_n\}$ possui uma subseqüência convergente, e dizemos que $J \in C^1(E)$ satisfaz a condição de compacidade de Cerami (C_c) se, para toda seqüência $\{u_n\} \subset E$ tal que $J(u_n) \to c$ e $(1+\|u_n\|)\|J'(u_n)\| \to 0$, tem-se que $\{u_n\}$ possui uma subseqüência convergente. Sabe-se que tanto a condição de Palais-Smale quanto a condição (C_c) para todo $c \in \mathbb{R}$ implicam a condição de deformação (D_c) para todo $c \in \mathbb{R}$. Para o caso envolvendo a condição de Palais-Smale, ver Chang [4, §1.3]. A demonstração é semelhante àquela do Teorema 2.6 abaixo e será omitida.

Proposição 2.1. *Se J satisfaz (D_c) e $K_c = \emptyset$ para todo $c \in [a-\delta, b+\delta]$ então, dado $\epsilon \in (0,\delta)$, existe uma aplicação contínua $\eta\colon E \times [0,1] \to E$ tal que $\eta_0 = \mathrm{Id}$, $\eta_t(x) = x$ se $x \notin J^{-1}([a-\epsilon, b+\epsilon])$, $J(\eta_t(x))$ é decrescente em t para cada $x \in E$ e $\eta_1(J^b) \subset J^a$.*

Demonstração. Seja $A \subset [a,b]$ o conjunto dos l tais que existe uma deformação como acima, substituindo a condição $\eta_1(J^b) \subset J^a$ por $\eta_1(J^b) \subset J^l$, e ponhamos $l_0 = \inf A$. É claro que $[l_0, b] \subset A$, logo basta mostrar que não pode ser $l_0 > a$. Como efeito, nesse caso, por (D_{l_0}) teríamos uma deformação $\tilde{\eta}$ tal que $\tilde{\eta}_1(J^{l_0+\epsilon}) \subset J^{l_0-\epsilon}$. Tomando η uma deformação tal que $\eta_1(J^b) \subset J^{l_0+\epsilon}$, obteríamos a deformação $\tilde{\eta}_t \circ \eta_t$, e $\tilde{\eta}_1 \circ \eta_1(J^b) \subset J^{l_0-\epsilon}$, um absurdo. □

Da proposição acima, segue-se que se K é limitado inferiormente por b e J satisfaz (D_c) para todo $c \le b$, então os grupos de homologia $H_q(E, J^a)$ não dependem de $a \le b$. O tipo de argumento para mostrá-lo será usado várias vezes, por isso faremo-lo em detalhes agora. Seja η como na proposição acima e $i\colon (E, J^a) \to (E, J^b)$ a inclusão. Então $\eta_t \circ i$ é uma aplicação $(E, J^a) \to (E, J^a)$ para todo t, já que $J(\eta_t(u))$ é decrescente em t. Como $\eta_1 \circ i$ é homotópica a $\eta_0 \circ i = \mathrm{Id}$, segue-se da invariância por homotopia do funtor homologia singular que $\eta_{1*} \circ i_* = (\eta_1 \circ i)_* = \mathrm{Id}$. Analogamente, $i \circ \eta_1$ é homotópica a $i \circ \eta_0 = \mathrm{Id}$ como aplicação $(E, J^b) \to (E, J^b)$, e portanto $i_* \circ \eta_{1*} = \mathrm{Id}$. Logo $H_q(E, J^a) \cong H_q(E, J^b)$. Note-se que é essencial considerar as homotopias acima, pela seguinte razão: não faria sentido escrever $\eta_{0*} \circ i_* = (\eta_0 \circ i)_*$, pois η_0 *não* é uma aplicação $(E, J^b) \to (E, J^a)$.

Em vista disso, se K é limitado, podemos definir o *q-ésimo grupo crítico de J no infinito* como $C_q(J, \infty) = H_q(E, J^a)$ para qualquer $a < \inf K$. A proposição abaixo, juntamente com um argumento semelhante ao do parágrafo anterior, mostra que se J satisfaz D_c para todo $c \notin [a,b]$ onde $a < \inf J(K) \le \sup J(K) < b$, então $C_q(J,\infty) \cong H_q(J^b, J^a)$.

Proposição 2.2. *Se J satisfaz (D_c) e $K_c = \emptyset$ para todo $c \geq b - \delta$ então, dado $\epsilon \in (0, \delta)$, existe uma aplicação contínua $\eta\colon E \times [0,1] \to E$ tal que $\eta_0 = \mathrm{Id}$, $\eta_t(x) = x$ se $J(x) \leq b - \epsilon$, $J(\eta_t(x))$ é decrescente em t para cada $x \in E$ e $\eta_1(E) \subset J^b$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.1, podemos encontrar, para cada $k \in \mathbb{N}$, uma deformação $\eta^k\colon E \times [0,1] \to E$ tal que $\eta_0^k = \mathrm{Id}$, $\eta_t^k(x) = x$ se $x \notin J^{-1}([b-\epsilon+k-1, b+\epsilon+k])$, $J(\eta_t^k(u))$ decrescente em t e $\eta_1^k(J^{b+k}) \subset J^{b+k-1}$. Definamos $\eta_t = \eta_t^1 \circ \eta_t^2 \circ \eta_t^3 \circ \cdots$. Essa aplicação está bem definida e é contínua porque, em $J^{b+\epsilon+k}$, η_t é dada por $\eta_t^1 \circ \cdots \circ \eta_t^k$. É evidente que η é aplicação procurada. $\square$

Como um exemplo simples de cálculo de grupos críticos, mencionamos o fato de que se u é um ponto de mínimo estrito de J, isto é, $c = J(u) < J(v)$ para todo v em uma vizinhança U de u, então $C_q(J,u) = 0$ para $q \geq 1$, $C_0(J,u) \cong \mathbb{R}$. De fato, nesse caso temos $H_q(J^c \cap U, (J^c \cap U) \setminus \{u\}) = H_q(\{u\}, \emptyset)$. Um exemplo não trivial, que será usado posteriormente, é dado abaixo.

Proposição 2.3 (Bartsch e Li [3, Prop. 3.8])**.** *Suponhamos que $E = V \oplus W$ é uma decomposição em subespaços fechados, que o funcional $J\colon E \to \mathbb{R}$ satisfaz (D_c) para todo c suficientemente negativo, que J é limitado inferiormente em W e que $J(u) \to -\infty$ para $u \in V$ quando $\|u\| \to \infty$. Então $C_k(J, \infty) \neq 0$ se $k = \dim V < \infty$.*

Na demonstração dessa proposição, e em outros pontos adiante, usaremos o fato de que a aplicação $E \to V \times W$, $v + w \mapsto (v, w)$, onde a norma em $V \times W$ é dada por $\|(v,w)\| = \|v\| + \|w\|$, é um homeomorfismo. De fato, essa aplicação é contínua e bijetiva, logo, pelo teorema da aplicação aberta, sua inversa é contínua.

Demonstração. Seja $a < \inf_{u \in W} J(u)$ tal que $C_k(J, \infty) \cong H_q(E, J^a)$. Então, para uma bola B centrada em 0 suficientemente pequena, $J^a \subset E \setminus (W \cup B)$. Além disso, temos $C = \{u \in V; \|u\| \geq R\} \subset J^a$ para algum R suficientemente grande. Assim, temos as inclusões

$$i\colon (E, J^a) \to (E, E \setminus (W \cup B)) \text{ e } j\colon (E, C) \to (E, J^a).$$

Definamos $h_t\colon E \to E$ por

$$v + w \in V \oplus W \mapsto (1 + Kt)v + (1 - t)w$$

onde $K > 0$ é escolhido de forma que h_1 mapeie $E \setminus (W \cup B)$ em C. Então $h_t \circ i \circ j$ define uma homotopia entre $h_0 \circ i \circ j = \mathrm{Id}$ e $h_1 \circ i \circ j$ como aplicações $(E, C) \to (E, C)$. Assim,

$$(h_1 \circ i)_* \circ j_* = \mathrm{Id},$$

e portanto $j_*\colon H_k(E, C) \to H_k(E, J^a)$ é injetiva.

Para terminar, basta ver que $H_k(E, C) \neq 0$. Isso é ao menos intuitivo, e vamos fazê-lo para o caso $k = 1$, que é o que nos interessará adiante; os demais casos são semelhantes. Recordemos que, por definição, uma classe de homologia relativa em $H_1(E, C)$ é dada por $z + \partial(C_2(E)) + C_1(C)$ onde z é um 1-ciclo relativo, isto é, $\partial z \in C_0(C)$. Suponhamos que z é um simplexo. Temos duas possibilidades: ou os extremos de z estão na mesma componente de C, ou então cada extremo está em uma componente diferente. No primeiro caso, z é homólogo a um segmento de reta contido em C, logo $[z] = 0$. No segundo caso, $\pm z$ é homólogo ao segmento $\tilde{z} = [-x, x]$ relativamente a C, onde $x \in C$ é fixo. De fato, $\tilde{z} + [z(1), \pm x] - [\pm x, \mp x] + [\mp x, z(0)]$ é um bordo. Se fosse $[\tilde{z}] = 0$, teríamos $\tilde{z} = \partial c_2 + c_1$ onde c_2 é uma 2-cadeia em E e c_1 uma 1-cadeia em C, de onde $\partial \tilde{z} = \partial c_1$. Isso é impossível, pois a parte de $\partial \tilde{z}$ contida em uma das componentes conexas de C é um ponto, enquanto que a parte de ∂c_1 contida nessa mesma componente é um bordo. Portanto, $H_k(E, C) \cong \mathbb{R}$. □

2.2 Relações de Morse

Nesta seção, seguimos Chang [4, §1.3]. Ali, considera-se o caso mais geral de variedades de Banach-Finsler, que são espaços localmente modelados por um dado espaço de Banach, mas nos ateremos a espaços de Banach. O leitor perceberá que os argumentos da teoria da Morse clássica continuam funcionado em dimensão infinita mediante a adição de hipóteses de compacidade convenientes.

Um *campo de vetores pseudogradiente* para uma função C^1 $J\colon E \to \mathbb{R}$ é uma aplicação $X\colon E \to E$ tal que

$$\|X(u)\| \leq 2\|J'(u)\| \quad \text{e} \quad J'(u)(X(u)) \geq \|J'(u)\|^2$$

para todo $u \in E$. Em particular, $\|X\| \geq \|J'\|$. Se E é um espaço de Hilbert, um exemplo de campo pseudogradiente é o gradiente de J, isto é, o campo que correspondente a J' via a identificação $E^* \cong E$. No caso geral, é preciso recorrer à construção abaixo.

Proposição 2.4. *Se $J\colon E \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, e $K = \{u \in E; J'(u) = 0\}$, então existe um campo pseudogradiente suave para J em $E \setminus K$.*

Demonstração. Seja $u \in E \setminus K$, e escolhamos $X_u \in E$ com $\|X_u\| = 1$ tal que $J'(u)(X_u) > (2/3)\|J'(u)\|$. Façamos $Y_u = (3/2)\|J'(u)\|X_u$. Então, para v em uma vizinhança suficientemente pequena de u, temos $\|Y_u\| < 2\|J'(v)\|$, $J'(v)(Y_u) \geq \|J'(v)\|^2$. Tomando uma partição da unidade $\{\xi_u\}_{u \in E \setminus K}$ subordinada a essas vizinhanças, temos que

$$Y(v) = \sum \xi_u(v) Y_u$$

é um campo pseudogradiente para J. □

Lema 2.5. *Suponhamos que J cumpre a condição de Palais-Smale, que a é o único valor crítico de J em $[a, b]$ e que $K_a = K \cap J^{-1}(a)$ consiste de pontos isolados. Então J^a é um retrato por deformação de J^b.*

Demonstração. Pela condição de Palais-Smale, K_a é compacto, ou seja, consiste em um número finito de pontos. Seja X um campo pseudogradiente para J e seja $\sigma(t) = \sigma(t, u)$ a curva integral do campo $-X/\|X\|^2$ iniciando em $u \in J^{-1}(a, b]$.

Mostremos que σ atinge J^a em tempo finito. Temos

$$J(\sigma(t)-u) = \int_0^t J'(\sigma(s))\left(\frac{-X(\sigma(s))}{\|X(\sigma(s))\|^2}\right) ds \leq -\frac{t}{4},$$

logo $T_u = \sup\{t; \sigma(t) \in J^{-1}(a,b]\} < \infty$. Há duas possibilidades:

$$\inf_{0\leq t<T_u} \operatorname{dist}(\sigma(t,u), K_a) > 0 \quad \text{ou} \quad \inf_{0\leq t<T_u} \operatorname{dist}(\sigma(t,u), K_a) = 0. \tag{2.1}$$

Consideremos o primeiro caso. Decorre da condição de Palais-Smale que $\|J'(\sigma(t))\| \geq \alpha$ para todo $0 \leq t < T_u$ e certo $\alpha > 0$. Assim,

$$\|\sigma(t_2) - \sigma(t_1)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\sigma'(s)\|\, ds \leq \frac{1}{\alpha}(t_2 - t_1).$$

Isso implica que existe $z = \lim_{t\to T_u} \sigma(t,u) \in J^{-1}(a) \setminus K_a$. Consideremos agora a segunda possibilidade em (2.1). Mostraremos que $\lim_{t\to T_u} \sigma(t) = z \in K_a$. Temos que $\lim_{t\to T_u} \operatorname{dist}(\sigma(t), K_a) = 0$. Isso é claro ao menos para uma seqüência $t_n \to T_u$. Se existisse $t'_n \to T_u$ com $\operatorname{dist}(\sigma(t'_n), K_a) \geq \epsilon_0 > 0$, teríamos seqüências $r_n < r'_n$ convergindo a T_u tais que

$$\operatorname{dist}(\sigma(r_n), K_a) = \frac{\epsilon_0}{2}, \quad \operatorname{dist}(\sigma(r'_n), K_a) = \epsilon_0$$

e $\epsilon_0/2 \leq \operatorname{dist}(\sigma(t), K_a) \leq \epsilon_0$ para todo $t \in [r_n, r'_n]$. Novamente pela condição de Palais-Smale,

$$\inf_{r_n \leq t \leq r'_n} \|J'(\sigma(t))\| \geq \alpha > 0$$

para algum α independente de n. Assim

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon_0}{2} &\leq \|\sigma(r'_n) - \sigma(r_n))\| \\ &\leq \int_{r_n}^{r'_n} \|\sigma'(s)\|\, ds \\ &\leq \frac{1}{\alpha}(r'_n - r_n) \to 0,\end{aligned}$$

uma contradição. Temos portanto $\lim_{t\to T_u} J'(\sigma(t)) = 0$, e, verifica-se facilmente que o conjunto limite da órbita σ está contido em K_a e de fato é dado por um único ponto z.

Agora, devemos mostrar que a aplicação $u \mapsto T_u$ é contínua. No primeiro caso em (2.1), temos $J(\sigma(T_u, u)) = a$, e

$$\frac{d}{dt} J(\sigma(t,u)) = J'(\sigma(T_u,u))\left(\frac{-X(\sigma(T_u,u))}{\|X(\sigma(T_u,u))\|^2}\right) < -\frac{1}{4},$$

logo a continuidade de T_u decorre do teorema da aplicação implícita. No caso $z = \lim_{t\to T_u} \sigma(t) \in K_a$, se $v \mapsto T_v$ não fosse contínua em u, teríamos uma seqüência $v_n \to u$ tal que, digamos, $T_{v_n} \geq T_u + \epsilon_0$ para certo $\epsilon_0 > 0$. Mas

$$J(\sigma(T_v - \epsilon, v) - J(\sigma(t,v)) \leq \int_t^{T_v - \epsilon} \sigma'(s,v)\, ds \leq -\frac{1}{4}(T_v - \epsilon - t),$$

e portanto $J(\sigma(t,v)) \geq a + (1/4)(T_v - t)$. Sabemos de equações diferenciais ordinárias que $\sigma(T_u - \epsilon, v_n) \to \sigma(T_u - \epsilon, u)$ e assim

$$\begin{aligned} J(\sigma(T_u - \epsilon, u)) &= \lim J(\sigma(T_u - \epsilon, v_n)) \\ &\geq \lim \left(a + \frac{1}{4}(T_{v_n} - T_u + \epsilon) \right) \\ &\geq a + \frac{1}{4}(\epsilon_0 + \epsilon). \end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, obteríamos $a \geq a + \epsilon_0/4$, um absurdo. O caso $T_{v_n} \leq T_u - \epsilon_0$ é análogo.

Por fim, definimos $\eta\colon [0,1] \times J^b \to J^b$ por

$$\eta(t,u) = \begin{cases} \sigma(tT_u, u), & \text{se } u \in J^{-1}(a,b]; \\ u & \text{se } u \in J^a, \end{cases}$$

onde, é claro, $\sigma(T_u, u) = \lim_{t \to T_u} \sigma(t,u)$. Esta é a retração por deformação de J^b em J^a que procuramos, e falta apenas verificar sua continuidade. Em $[0,1] \times \mathring{J}^a$, vale $\eta(t,u) = u$. Em $[0,1) \times J^{-1}(a,b]$, a continuidade de η segue-se da teoria de equações diferenciais ordinárias. Para verificar a continuidade de η em $\{1\} \times J^{-1}(a,b]$, supomos que existem $\epsilon > 0$, $v_n \to u \in J^{-1}(a,b]$ e $t_n \to T_u$ tais que $\|\sigma(t_n, v_n) - z\| \geq \epsilon$, onde $z = \sigma(T_u, u)$. Podemos supor que $\bar{B}(z, \epsilon) \cap K_a \subset \{z\}$. Uma vez que

$$\begin{gathered} \|\sigma(s,u) - \sigma(T_u, u)\| \to 0 \text{ quando } s \to T_u, \\ \|\sigma(t,v) - \sigma(t,u)\| \to 0 \text{ quando } v \to u, \end{gathered}$$

para cada $t \in [0,1)$ fixo, temos, a menos de uma subseqüência, $t'_n \to T_u$ tal que $\sigma(t'_n, v_n) \to z$. Podemos assumir que $t_n < t'_n$, e obter, para todo n suficientemente grande, $t_n \leq r_n < r'_n \leq t'_n$ tais que

$$\begin{gathered} \epsilon/2 \leq \|\sigma(t, v_n) - z\| \leq \epsilon \text{ para } t \in [r_n, r'_n], \\ \|\sigma(r_n, v_n) - z\| = \epsilon, \quad \|\sigma(r'_n, v_n) - z\| = \epsilon/2 \end{gathered}$$

Então, pela condição de Palais-Smale, $\|J'(\sigma(t, v_n))\| \geq \beta > 0$ para $t \in [r_n, r'_n]$, e

$$\frac{\epsilon}{2} \leq \|\sigma(r'_n, v_n) - \sigma(r_n, v_n)\| \leq \int_{r'_n}^{r_n} \|\sigma'(s, v_n)\|\, ds \leq \frac{1}{\beta}(r_n - r'_n) \to 0,$$

um absurdo. Resta assim analisar a continuidade de η em $[0,1] \times J^{-1}(a)$. Esse caso é similar ao anterior e será omitido. □

Teorema 2.6. *Sejam $J\colon E \to \mathbb{R}$ é um funcional de classe C^1 satisfazendo a condição de Palais-Smale e c um valor crítico isolado com K_c formado por pontos isolados. Então, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno,*

$$H_q(J^{c+\epsilon}, J^{c-\epsilon}) \cong \bigoplus_{u \in K_c} C_q(J, u). \tag{2.2}$$

Demonstração. Tomando N uma união disjunta de vizinhanças dos pontos em K_c, obtemos, pela propriedade da excisão e pelo fato de que os grupos de homologia de um espaço são dados pela soma direta dos grupos de homologia de suas componentes,

$$H_q(J^c, J^c \setminus K_c) = H_q(J^c \cap N, J^c \cap N \setminus K_c) = \bigoplus_{u \in K_c} C_q(J,u).$$

Agora, mostremos que $H_q(J^c \setminus K_c, J^{c-\epsilon}) = 0$ para $\epsilon > 0$ pequeno. Pela Proposição 2.1, podemos obter, para cada $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, uma deformação $\eta^k \colon E \times [0,1] \to E$ tal que $\eta_0 = \mathrm{Id}$, $h_t(u) = u$ para $u \notin J^{-1}[c-\epsilon-1/k, c+1/k]$, $J(\eta_t(u))$ é decrescente em t e $\eta_1(J^c \setminus N_k) \subset J^{c-\epsilon-1/(k+1)}$, onde N_k é uma vizinhança de K_c. Podemos também supor que $\cap N_k = K_c$. Definamos, então, $\eta_t = \cdots \circ \eta_t^3 \circ \eta_t^2 \circ \eta_t^1$. A aplicação η obtida dessa forma é contínua em $(J^c \setminus K_c) \times [0,1]$, já que em cada vizinhança $J^c \setminus N_k$, temos $\eta_t = \eta_t^k \circ \cdots \circ \eta_t^1$. Além disso, η_1 mapeia $J^c \setminus K_c$ em $J^{c-\epsilon}$ e η_t define uma homotopia de aplicações $(J^c \setminus K_c, J^{c-\epsilon}) \to (J^c \setminus K_c, J^{c-\epsilon})$. Portanto,

$$H_q(J^c \setminus K_c, J^{c-\epsilon}) \cong H_q(J^{c-\epsilon}, J^{c-\epsilon}) = 0.$$

Pelo lema anterior, $H_q(J^{c+\epsilon}, J^{c-\epsilon}) \cong H_q(J^c, J^{c-\epsilon})$ e, para finalizar a demostração do teorema, basta olhar para a seqüência exata de homologia para a tripla $J^c \supset J^c \setminus K_c \supset J^{c-\epsilon}$:

$$\cdots \to H_q(J^c \setminus K_c, J^{c-\epsilon}) \to H_q(J^c, J^{c-\epsilon}) \to H_q(J^c, J^c \setminus K_c) \to H_{q-1}(J^c \setminus K_c, J^{c-\epsilon}) \to \cdots$$

Daí obtemos $H_q(J^c, J^{c-\epsilon}) \cong H_q(J^c, J^c \setminus K_c)$, ou seja,

$$H_q(J^{c+\epsilon}, J^{c-\epsilon}) \cong \bigoplus_{u \in K_c} C_q(J,u). \qquad \square$$

Podemos estender ligeiramente o teorema acima da seguinte forma. Se a, b são valores regulares e J possui um número finito de valores críticos em $[a,b]$, sendo que a apenas um desses valores críticos estão associados grupos críticos não triviais, então

$$H_q(J^b, J^a) \cong \bigoplus_{u \in K_a^b} C_q(J,u), \tag{2.3}$$

onde $K_a^b = \{u \in E; a \leq J(u) \leq b \text{ e } J'(u) = 0\}$. De fato, se, se $c_1 < c_2$ são valores críticos em (a,b) e $K \cap (c_1, c_2) = \emptyset$, então a seqüência exata de homologia da tripla $J^{c_2+\epsilon} \supset J^{c_1+\epsilon} \supset J^{c_1-\epsilon}$ é dada por

$$\begin{aligned} \cdots \to H_q(J^{c_1+\epsilon}, J^{c_1-\epsilon}) \to H_q(J^{c_2+\epsilon}, J^{c_1-\epsilon}) \to H_q(J^{c_2+\epsilon}, J^{c_1+\epsilon}) \cong \\ \cong H_q(J^{c_2+\epsilon}, J^{c_2-\epsilon}) \to H_{q-1}(J^{c_1+\epsilon}, J^{c_1-\epsilon}) \to \cdots \end{aligned}$$

Se $H_q(J^{c_i-\epsilon}, J^{c_i+\epsilon})$ é trivial, concluímos que $H_q(J^{c_2+\epsilon}, J^{c_1-\epsilon}) \cong H_q(J^{c_{1-i}+\epsilon}, J^{c_{1-i}-\epsilon})$. O resultado geral segue-se por indução.

2.3 Contratibilidade de esferas de dimensão infinita

Mais tarde, precisaremos usar o fato de que a esfera do espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ é contrátil. Mostraremos isso nesta seção.

Lembremos que l_p, $1 \leq p < \infty$, é o espaço de Banach formado por todas as seqüências $x = (x^1, x^2, x^3, \dots)$ de números reais tais que

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x^n|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Proposição 2.7. *$l_p \setminus \{0\}$ é contrátil para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Basta mostrar que $\sigma \colon l_p \setminus \{0\} \to l_p \setminus \{0\}$ dada por

$$(x^1, x^2, x^3, \dots) \mapsto (0, x^1, x^2, x^3, \dots)$$

é homotópica à aplicação identidade, já que

$$(x^1, x^2, x^3, \dots) \mapsto ((1-t), tx^1, tx^2, tx^3, \dots) \text{ para } 0 \leq t \leq 1$$

define uma homotopia entre σ e uma aplicação constante.

Definamos $\eta^k \colon (l_p \setminus \{0\}) \times [0,1] \to l_p \setminus \{0\}$ por

$$\eta_t^k(x^1, x^2, x^3, \cdots) = (x^1, \cdots, x^{k-1}, tx^k, (1-t)x^k, x^{k+1}, \cdots).$$

Vamos definir $\eta \colon (l_p \setminus \{0\}) \times [0,1] \to l_p \setminus \{0\}$ deixando η^k agir no intervalo de tempo $[\frac{k-1}{k}, \frac{k}{k+1}]$, isto é,

$$\eta_t(x) = \begin{cases} \eta^k_{(k+1)kt-(k^2-1)}(x) & \text{se } t \in [\frac{k-1}{k}, \frac{k}{k+1}]; \\ x & \text{se } t = 1. \end{cases}$$

Então $\eta_0 = \eta_0^1 = \sigma$, e η é claramente contínua em $(l_p \setminus \{0\}) \times [0,1)$. Falta mostrar, portanto, que se $x_m \to x$ em l_p e $t_m \to 1$, então $\eta_{t_m}(x_m) \to x$ em l_p. Dado $y \in l_p$, escrevamos

$$\pi_k y = (y^1, \dots, y^k, 0, \dots), \quad \pi^k(y) = (0, \dots, 0, y^{k+1}, y^{k+2}, \dots).$$

Se $t_m > k/(k+1)$, então os k primeiros termos de x_m e $\eta_{t_m}(x_m)$ coincidem, e

$$\begin{aligned} \|x - \eta_{t_m}(x_m)\|_p &\leq \|\pi_k(x - \eta_{t_m}(x_m))\|_p + \|\pi^k(x - \eta_{t_m}(x_m))\|_p \\ &\leq \|x - x_m\|_p + \|\pi^k(x)\|_p + 2^{1/p}\|\pi^k(x_m)\|_p \\ &\leq \|x - x_m\|_p + \|\pi^k(x)\|_p + 2^{1/p}\|\pi^k(x_m - x)\|_p + 2^{1/p}\|\pi^k(x)\|_p \end{aligned}$$

Fazendo $m \to \infty$, podemos fazer $k \to \infty$, e a estimativa acima mostra que $\|x - \eta_{t_m}(x_m)\|_p \to 0$. Logo η é contínua. $\square$

Proposição 2.8. $W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ *é contrátil.*

Demonstração. Seja $\{e_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma seqüência de funções com norma 1 e suportes disjuntos dois a dois. A aplicação

$$\{\alpha_n\} \in l_p \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

é uma isometria linear, logo sua imagem V é um subespaço fechado. Mostremos que V possui um complementar fechado. De fato, seja $W = \cap_{n\in\mathbb{N}} \ker \Delta_p e_n$ (ver (3.1)). É claro que W é fechado e $V \cap W = \{0\}$. Logo, falta mostrar apenas que $V + W = W_0^{1,p}(\Omega)$. Dada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \geq \int_{\cup \operatorname{Spt} e_n} |\nabla u|^p \, dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\operatorname{Spt} e_n} |\nabla u|^p \, dx.$$

Como $\|\Delta_p e_n\| = 1$, temos $|(\Delta_p e_n)u| \leq (\int_{\operatorname{Spt} e_n} |\nabla u|^p \, dx)^{1/p}$ (ver (3.2)); e pela desigualdade acima, fazendo $\alpha_n = (\Delta_p e_n)u$, temos $\{\alpha_n\} \in l_p$. Então é claro que

$$u = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n + \left(u - \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n \right) \in V + W.$$

Afirmamos que o espaço $V \oplus W \setminus \{0\}$ pode ser deformado em $V \setminus \{0\}$. Daí seguirá, pela Proposição 2.7, que $W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ é contrátil. Definindo $\eta_t \colon V \oplus W \setminus \{0\} \to V \oplus W \setminus \{0\}$ por

$$\left(\sum \alpha_n e_n\right) + w \in V \oplus W \mapsto \left(\sum \alpha_n e_{n+1}\right) + t\|w\| e_1 + (1-t)w$$

temos que η_0 é homotópica à aplicação identidade, pois é essencialmente a aplicação σ da demonstração da proposição anterior, e η_1 tem imagem em $V \setminus \{0\}$. $\square$

3 O operador p-laplaciano

Classicamente, o operador *p-laplaciano* $\Delta_p\colon C^2(\Omega) \to C^0(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto e $p > 1$, é definido por

$$\Delta_p(u) = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

Isso motiva a definição de $\Delta_p\colon W_0^{1,p}(\Omega) \to (W_0^{1,p}(\Omega))^*$, onde Ω é um aberto limitado com fronteira suave, como sendo o operador que leva $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ no funcional $\Delta_p u$ dado por

$$\phi \in W_0^{1,p}(\Omega) \mapsto -\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\phi\, dx. \tag{3.1}$$

Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\left|\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\phi\, dx\right| \leq \left(\int_\Omega (|\nabla u|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \|\phi\|, \tag{3.2}$$

logo esse funcional é de fato limitado, e tem norma $\|u\|^{p-1}$. (Neste texto, sempre usaremos a norma $\|u\| = (\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx)^{1/p}$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Esta norma é equivalente à usual pela desigualdade de Sobolev.)

3.1 Representação de funcionais lineares em espaços de Sobolev

Para uso posterior, e como aquecimento para o uso de técnicas variacionais, provaremos o seguinte resultado.

Teorema 3.1. $-\Delta_p\colon W_0^{1,p}(\Omega) \to (W_0^{1,p}(\Omega))^*$ *é um homeomorfismo.*

Para isso, precisamos da seguinte estimativa.

Lema 3.2. *Se* $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^N$ *e* $p \geq 2$, *então*

$$(|s_2|^{p-2}s_2 - |s_1|^{p-2}s_1) \cdot (s_1 - s_2) \geq C|s_2 - s_1|^p.$$

Se $1 < p < 2$, *então*

$$(|s_2|^{p-2}s_2 - |s_1|^{p-2}s_1) \cdot (s_1 - s_2) \geq C\frac{|s_2 - s_1|^2}{(|s_2| + |s_1|)^{2-p}}.$$

Aqui, $C > 0$ *depende apenas de* p.

Observe-se que se $p, q > 1$ e $p^{-1}+q^{-1} = 1$, então as aplicações $s \mapsto |s|^{p-2}s$ e $r \mapsto |r|^{q-2}r$ são inversas. Logo, aplicando o lema anterior para $s_i = |r_i|^{q-2}r_i$, obtemos

$$\left||r_2|^{q-2}r_2 - |r_1|^{q-2}r_1\right| \leq C|r_2 - r_1|^{q-1} \text{ se } 1 < q \leq 2, \tag{3.3}$$

$$\left||r_2|^{q-2}r_2 - |r_1|^{q-2}r_1\right| \leq C|r_2 - r_1| \left||r_2|^{q-1} + |r_1|^{q-1}\right|^{\frac{q-2}{q-1}} \text{ se } q > 2. \tag{3.4}$$

Demonstração do Teorema 3.1. Primeiramente, notemos que se $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ então, dada $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|\phi\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}|(\Delta_p u_2 - \Delta_p u_1)(\phi)| &= \left|\int_\Omega (|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1) \cdot \nabla\phi \, dx\right| \\ &\leq \left(\int_\Omega \left||\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\right|^{\frac{p}{p-1}} \, dx\right)^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$

Assim, se $1 < p \leq 2$, segue-se imediatamente de (3.3) que $-\Delta_p$ é um operador contínuo. Para o caso $p \geq 2$, a continuidade de $-\Delta_p$ segue-se de (3.4) e de uma aplicação conveniente da desigualdade de Hölder.

Verifiquemos que $-\Delta_p$ é injetivo. Se $p \geq 2$, então, pelo Lema 3.2,

$$\begin{aligned}\|\Delta_p u_2 - \Delta_p u_1\| &\geq \frac{1}{\|u_1 - u_2\|} \int_\Omega (|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1) \cdot \nabla(u_1 - u_2) \, dx \\ &\geq C\|u_2 - u_1\|^{p-1}\end{aligned} \tag{3.5}$$

para $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ quaisquer. Se $1 < p < 2$, então

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla(u_2 - u_1)|^p \, dx = \int_\Omega \frac{|\nabla(u_2 - u_1)|^p}{(|u_2| + |u_1|)^{p(2-p)/2}} (|u_2| + |u_1|)^{p(2-p)/2} \, dx \\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla(u_2 - u_1)|^2}{(|u_2| + |u_1|)^{2-p}} \, dx\right)^{p/2} \left(\int_\Omega (|u_2| + |u_1|)^p \, dx\right)^{\frac{2-p}{2}} \\ &\leq C \left(\int_\Omega (|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1) \cdot \nabla(u_1 - u_2) \, dx\right)^{p/2} \left(\int_\Omega (|u_2| + |u_1|)^p \, dx\right)^{\frac{2-p}{2}}\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\Delta_p u_2 - \Delta_p u_1\| \geq C \frac{\|u_2 - u_1\|}{(\|u_2\| + \|u_1\|)^{2-p}}. \tag{3.6}$$

Mostremos agora que $-\Delta_p$ é sobrejetivo. Dada $f \in (W_0^{1,p}(\Omega))^*$, definamos o funcional $J\colon W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$J(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - f(u).$$

Dada $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, temos, para cada $x \in \Omega$,

$$\frac{d}{dt}|\nabla u + t\nabla\phi|^p = p|\nabla u + t\nabla\phi|^{p-2}(\nabla u + t\nabla\phi) \cdot \nabla\phi$$

Portanto, para certo $0 < t = t(x) < 1$, temos

$$
\begin{aligned}
J(u+\phi) - J(u) &= \int_\Omega |\nabla u + t\nabla\phi|^{p-2}(\nabla u + t\nabla\phi)\cdot\nabla\phi\,dx - f(\phi) \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\phi\,dx - f(\phi) + r(\phi)
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
r(\phi) &= \int_\Omega \Big(|\nabla u + t\nabla\phi|^{p-2}(\nabla u + t\nabla\phi) - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\Big)\cdot\nabla\phi\,dx \\
&\leq \left(\int_\Omega \Big||\nabla u + t\nabla\phi|^{p-2}(\nabla u + t\nabla\phi) - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\Big|^{\frac{p}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\|\phi\|,
\end{aligned}
$$

Usando novamente as desigualdades (3.3) e (3.4), concluímos que $r(\phi) = o(\|\phi\|)$ ou seja, $r(\phi)/\|\phi\| \to 0$ quando $\phi \to 0$. Portanto, $J \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega))$ e $J'(u) = -\Delta_p u - f$.

O operador J é limitado inferiormente. Com efeito,

$$
J(u) = \|u\|^p - f(u) \geq (\|u\|^{p-1} - \|f\|)\|u\|. \tag{3.7}
$$

Mais do que isso, J possui um ponto de mínimo. Seja $m = \inf J$ e $\{u_n\}$ uma seqüência minimizante, isto é, $J(u_n) \to m$. Por (3.7), $\{u_n\}$ é limitada. Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo, todo conjunto limitado é pré-compacto na topologia fraca, e, passando a uma subseqüência, podemos supor que u_n converge fracamente a uma certa u. Recordemos que a norma é fracamente seqüencialmente semicontínua inferiormente, que é um nome pomposo para o fato de que, tomando L é um funcional linear de norma 1 tal que $\|u\| = L(u)$, obtemos

$$
\|u\| = L(u) = \lim L(u_n) \leq \liminf \|u_n\|.
$$

Assim, $J(u) \leq \lim(1/p)(\|u_n\|^p - f(u_n)) = \lim J(u_n) = m$. Portanto, u é um ponto de mínimo e $J'(u) = 0$, ou seja, $-\Delta_p u = f$.

Por fim, a continuidade da inversa $(-\Delta_p)^{-1}$ segue-se de (3.5) e (3.6). □

3.2 Regularidade, princípios do máximo e de comparação

O operador quase linear Δ_p não é elíptico, já que, formalmente, podemos escrever

$$
\Delta_p u = \sum_{1\leq i,j\leq N} a_{ij}(\nabla u)u_{x_i x_j}
$$

onde

$$
a_{ij}(\xi) = |\xi|^{p-2}\delta_{ij} + (p-2)|\xi|^{p-4}\xi_i\xi_j.
$$

Assim, a matriz $(a_{ij}(\xi))$ não é positiva definida se (e somente se) $\xi = 0$. Isso sugere, porém, que uma teoria de regularidade e princípios de máximo e comparação semelhantes aos dos operadores elípticos podem ser obtidos. Nessa seção, enunciamos alguns resultados desse tipo. Mais informações sobre o assunto podem ser encontrados na tese de doutorado de Edson Iriarte [10].

Lema 3.3 (Anane [1]). *Seja* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *tal que* $\Delta_p u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, *e ponhamos* $p^* = Np/(N-p)$ *se* $1 < p < N$ *e* $p^* \in (p, \infty)$ *se* $N \leq p$. *Se existem* $a > 0$, $\sigma \in [1, p^*)$, $q \in [1, p^*/p)$ *e uma função não negativa* $b \in L^{q/(q-1)}(\Omega)$ *tais que*

$$-u\Delta_p u \leq a|u|^\sigma + b|u| \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

então $u \in L^\infty(\Omega)$ *e* $\|u\|_\infty \leq C$, *onde* C *só depende de* a, σ, q, N, p, $\|b\|_{q/(q-1)}$ *e* $\|u\|_{p_0}$, *onde* $p_0 = p^*$ *se* $p < N$ *e* $p_0 = 2\max\{pq, \sigma\}$ *se* $N \leq p$.

Lema 3.4 (Lieberman [11], Tolksdorf [15]). *Seja* Ω *um domínio limitado de classe* $C^{2,\beta}$, $0 < \beta < 1$, *e seja* $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *tal que* $\Delta_p u \in L^\infty(\Omega)$. *Então* $u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ *e* $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C$ *para algum* $0 < \alpha < 1$ *e* $C > 0$ *que só dependem de* N, Ω, p, $\|u\|_\infty$ *e* $\|\Delta_p u\|_\infty$.

O próximo lema é um caso particular de um teorema de García-Melián e Sabina de Lis [5] sobre princípios de máximo para operadores da forma $-\Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u$.

Lema 3.5. *Se* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é um domínio limitado de classe* $C^{1,\alpha}$, a *é uma constante estritamente maior que o primeiro autovalor de* Δ_p *em* Ω, *e* $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ *satisfaz*

$$-\Delta_p u + a|u|^{p-2}u \geq 0, \quad u|_{\delta\Omega} = 0$$

então $u = 0$ *ou* $u > 0$ *em* Ω *e*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Lema 3.6 (Guedda e Véron [7]). *Suponhamos que* $p > 1$, Ω *é um domínio limitado com fronteira* C^2, $f, g \in L^\infty(\Omega)$ *e* $u, v \in C^1(\Omega)$ *satisfazem* $-\Delta_p u = f$, $-\Delta_p v = g$ *em* Ω, $u = v = 0$ *em* $\partial\Omega$, $0 \leq f \leq g$ *q.t.p. em* Ω *e que* $\{x \in \Omega; f(x) = g(x)\}$ *tem interior vazio. Então*

$$0 \leq u < v \text{ em } \Omega, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} < \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

3.3 Autovalores do *p*-laplaciano

Dizemos que λ é um autovalor de $-\Delta_p$ em Ω com condição de fronteira zero se o problema p-homogêneo

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui uma solução não nula. De acordo com a Seção 4.1, essa condição é equivalente a que o operador Φ_λ de classe C^1 dado por

$$\Phi_\lambda(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p - \lambda |u|^p \, dx$$

possua um ponto crítico diferente de 0.

Seja

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx}; u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \right\}. \tag{3.8}$$

Pela desigualdade de Sobolev, temos $\lambda_1 > 0$. Além disso, o funcional Φ_{λ_1} é limitado inferiormente por 0. Por outro lado, podemos tomar uma seqüência $\{u_n\}$ minimizando o quociente (3.8) tal que $\|u_n\| = 1$ para todo n. Pelo teorema de Rellich-Kondrachov e pela reflexividade de $W_0^{1,p}(\Omega)$, podemos passar a uma subseqüência convergente em $L^p(\Omega)$ e convergente fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega)$ a uma certa função e_1. Então, pela semicontinuidade da norma, concluímos que $\Phi_{\lambda_1}(e_1) = 0$, e e_1 é um ponto de mínimo de Φ_{λ_1}. Como $\Phi(|e_1|) = \Phi(e_1)$, podemos supor $e_1 \geq 0$. É facil verificar que podemos aplicar os Lemas 3.3 e 3.4 para concluir que $e_1 \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ para algum $0 < \alpha < 1$.

Se λ é um autovalor de $-\Delta_p$ em Ω, e u um autovetor associado, então aplicando o funcional $-\Delta_p u - \lambda |u|^{p-2} u$ em u, obtemos $\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx = \lambda \int \Omega |u|^p \, dx$, e portanto $\lambda \geq \lambda_1$.

Também pode-se mostrar que λ_1 é um autovalor isolado e simples, isto é, todo autovetor de λ_1 é um múltiplo de e_1, e que $e_1 > 0$ em Ω (ver Lindqvist [12]).

4 Soluções de equações p-sublineares envolvendo o operador p-laplaciano

Neste capítulo, vamos procurar soluções não triviais para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave e as seguintes condições são impostas em $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Primeiramente, exigimos que $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ e $f(x,0) = 0$ para todo $x \in \Omega$. Isso implica que (4.1) tem a solução trivial $u \equiv 0$. Além disso, suporemos que existe c tal que

$$|f(x,t)| \leq c(1 + |t|^{q-1}) \text{ para } x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \tag{f_1}$$

onde $1 \leq q < Np/(N-p)$ se $1 < p < N$ e $1 \leq q < \infty$ se $N \leq p$. Definindo $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\, ds$, suporemos que existem $1 < \nu < p$ e $r, a_r > 0$ tais que

$$F(x,t) \geq a_r |t|^\nu \text{ para } x \in \Omega, |t| \leq r \tag{f_2}$$

e que

$$pF(x,t) - f(x,t)t > 0 \text{ para } x \in \Omega \text{ e } t \neq 0. \tag{f_3}$$

Vamos procurar soluções não-triviais de (4.1) em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Portanto, entenderemos (4.1) no sentido das distribuições, ou seja, vamos mostrar que sob certas circunstâncias existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, vale

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \phi - f(x,u)\phi \, dx = 0. \tag{4.2}$$

Segue-se do teorema da divergência que para funções $u \in C^2(\Omega)$ com $u = 0$ em $\partial\Omega$, as condições (4.1) e (4.2) são equivalentes.

Os resultados que mostraremos neste capítulo são os seguintes.

Teorema 4.1. *Suponhamos que f é contínua à Hölder, $f(x,t) \geq 0$ para $t \geq 0$ e $f(x,t) \leq 0$ caso contrário, e que f satisfaz as condições (f_1), (f_2) e (f_3). Suponhamos também que*

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{pF(x,t)}{|t|^p} < \lambda_1 \tag{f_4}$$

onde λ_1 é dado em (3.8). Então o problema (4.1) possui ao menos três soluções não triviais em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 4.2. *Suponhamos que f satisfaz as condições (f_1), (f_2), (f_3) e que*

$$f(x,t) = \lambda|t|^{p-2}t + g(x,t) \ \textit{onde} \ \lim_{|t|\to\infty} \frac{g(x,t)}{|t|^{p-1}} = 0. \tag{f_5}$$

Então o problema (4.1) possui uma solução não trivial em $W_0^{1,p}(\Omega)$ contanto que uma das seguintes condições se verifique:

$$\lambda = \lambda_1 \ e \ \lim_{|t|\to\infty} (f(x,t)t - pF(x,t)) = -\infty \tag{f_6}$$

ou

$$\lambda \in (\lambda_l, \lambda_{l+1}) \setminus \sigma(-\Delta_p). \tag{f_7}$$

Na condição (f_7), $\{\lambda_l\}$ é uma seqüência de autovalores de $-\Delta_p$ construída através do índice de Yang (ver Perera [13]). Para este teorema, apresentaremos apenas a demonstração do caso (f_6).

4.1 Formulação variacional

Utilizaremos métodos variacionais para encontrar soluções de (4.1), ou seja, faremo-lo através do estudo do seguinte funcional Φ definido em $W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \int_\Omega F(x,u)\, dx. \tag{4.3}$$

Já provamos, na demonstração do Teorema 3.1, que a primeira integral acima define um funcional de classe C^1. Façamos o mesmo para o funcional $u \mapsto \int_\Omega F(x,u)\,dx$. Dada $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, temos, para quase todo $x \in \Omega$, um certo $0 < t < 1$ tal que $F(x, u+\phi) - F(x,u) = f(x, u+t\phi)\phi$. Logo

$$\int_\Omega F(x,u+\phi)\,dx - \int_\Omega F(x,u)\,dx = \int_\Omega f(x,u)\phi\,dx + r(\phi)$$

onde

$$r(\phi) = \int_\Omega (f(x,u+t\phi) - f(x,u))\phi\,dx$$

Para mostrar que Φ é de diferenciável, basta tomar um seqüência $\phi_n \to 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e mostrar que $r(\phi_n)/\|\phi_n\| \to 0$. Se $N < p$, notamos que

$$r(\phi_n) \le \left(\int_\Omega |f(x,u+t\phi_n) - f(x,u)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \|\phi_n\|_{L^p(\Omega)}.$$

Pelas desigualdades de Sobolev, $\phi_n \to 0$ em $C(\bar\Omega)$, e como $f \in C(\bar\Omega \times \mathbb{R})$, o mesmo vale para o integrando da integral acima. Por outro lado, se $1 < p \le N$, notamos que

$$r(\phi_n) \le \left(\int_\Omega |f(x,u+t\phi_n) - f(x,u)|^{\frac{Np}{Np-N+p}}\,dx\right)^{\frac{Np-N+p}{Np}} \|\phi_n\|_{L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega)} \tag{4.4}$$

e que, por (f_1),

$$|f(x, u + t\phi_n) - f(x, u)|^{\frac{Np}{Np-N+p}} \leq C\,(1 + |u|^r + |\phi_n|^r) \tag{4.5}$$

onde

$$r = \frac{Np(q-1)}{Np - N + p} < \frac{Np}{N - p}.$$

Novamente pelas desigualdades de Sobolev, a função à direita em (4.5) é integrável, e é claro que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega 1 + |u|^r + |\phi_n|^r\,dx = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} (1 + |u|^r + |\phi_n|^r)\,dx.$$

Isso é suficiente para aplicar o teorema da convergência dominada (ver Royden [14, Prop. 11.18]) da seguinte forma. Se a integral da equação (4.4) não tende a zero, temos, a menos de uma subseqüência,

$$\int_\Omega |f(x, u + t\phi_n) - f(x, u)|^{\frac{Np}{Np-N+p}}\,dx > \epsilon > 0.$$

Passando novamente a uma subseqüência, podemos supor $\phi_n \to 0$ q.t.p., e daí obtemos uma contradição pelo teorema da convergência dominada. (Note que, a rigor, no caso $p = N$ deveríamos substituir p por um certo $p' < p$ de forma que valha $q < Np'/(N - p')$.)

Assim temos, em ambos os casos, que $r(\phi) = o(\|\phi\|)$, e, portanto, Φ é diferenciável com $\Phi'(u)(\phi) = \int_\Omega f(x, u)\phi\,dx$. Usando esse mesmo tipo de argumento, vemos que $\Phi'(u)$ depende continuamente de u.

Por (4.2), temos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma solução fraca de (4.1) se, e só se, u é um ponto crítico do funcional Φ.

4.2 Grupos críticos em zero

Proposição 4.3. *Suponhamos que f satisfaz as condições (f_1), (f_2), (f_3) e que $u \equiv 0$ é um ponto crítico isolado de Φ. Então os grupos críticos de Morse de Φ em 0 são todos triviais.*

É evidente que sempre podemos supor que os pontos críticos de Φ são isolados; do contrário haveria um número infinito de soluções para (4.1). Para demonstrar a proposição acima, vamos usar os seguintes lemas.

Lema 4.4. *Se f satisfaz (f_1), (f_2), então para toda $u \neq 0$ existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\Phi(tu) < 0 \text{ para todo } 0 < t < t_0.$$

(Portanto, a função 0 é máximo local estrito de Φ em cada subespaço de dimensão finita de $W_0^{1,p}(\Omega)$, mas não necessariamente é um máximo local.)

Demonstração. Por (f_1), temos

$$\begin{aligned}
|F(x,u)| &= \left|\int_0^u f(x,t)\,dt\right| \\
&\leq \int_0^u |f(x,t)|\,dt \\
&\leq \int_0^u c(1+|t|^{q-1})\,dt \\
&= c(|u|+|u|^q).
\end{aligned}$$

Como $q \geq 1$, temos que dado $r > 0$ existe uma constante A_r tal que

$$|F(x,u)| \leq A_r|u|^q \text{ para } x \in \Omega \text{ e } |u| \geq r. \tag{4.6}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Phi(tu) &= \frac{|t|^p}{p}\|u\|^p - \int_\Omega F(x,tu)\,dx \\
&= \frac{|t|^p}{p}\|u\|^p - \int_{|tu|<r} F(x,tu)\,dx - \int_{|tu|\geq r} F(x,tu)\,dx \\
&\leq \frac{|t|^p}{p}\|u\|^p - \int_{|tu|<r} a_r|tu|^\nu\,dx + \int_{|tu|\geq r} A_r|tu|^q\,dx \quad \text{(por (4.6) e } (f_2)) \\
&= \frac{|t|^p}{p}\|u\|^p - \int_\Omega a_r|tu|^\nu\,dx + \int_{|tu|\geq r} a_r|tu|^\nu\,dx + \int_{|tu|\geq r} A_r|tu|^q\,dx \\
&= |t|^\nu\left(\frac{|t|^{p-\nu}}{p}\|u\|^p - \int_\Omega a_r|u|^\nu\,dx + \int_{|tu|\geq r} a_r|u|^\nu\,dx + |t|^{p-\nu}\int_{|tu|\geq r} A_r|u|^q\,dx\right).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Note-se que, pelo teorema da convergência dominada,

$$\int_{|tu|\geq r} a_r|u|^\nu\,dx = \int_\Omega \chi_{|tu|\geq r}a_r|u|^\nu\,dx \to 0 \text{ quando } t \to 0.$$

Portanto, para t suficientemente pequeno, o termo entre parêntesis em (4.7) é negativo, e daí segue-se o lema. □

Lema 4.5. *Se f satisfaz (f_1), (f_3), então, para toda $u \neq 0$ e todo $t > 0$,*

$$\frac{d}{dt}\Phi(tu) > \frac{p}{t}\Phi(tu).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi(tu) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{|t|^p}{p}\|u\|^p - \int_\Omega F(x,tu)\,dx\right)\\
&= |t|^{p-1}\|u\|^p - \int_\Omega \frac{d}{dt}F(x,tu)\,dx\\
&= |t|^{p-1}\|u\|^p - \int_\Omega f(x,tu)u\,dx\\
&= \frac{p}{t}\left(\frac{t^p}{p}\|u\|^p - \int_\Omega \frac{1}{p}f(x,tu)tu\,dx\right)\\
&> \frac{p}{t}\left(\frac{t^p}{p}\|u\|^p - \int_\Omega F(x,tu)\,dx\right) \qquad (\text{por } (f_3))\\
&= \frac{p}{t}\Phi(tu).
\end{aligned}$$

□

Demonstração da Proposição 4.3. Primeiramente, vamos mostrar que se $B_\rho = \{u; \|u\| < \rho\}$ é uma vizinhança que contém apenas o ponto crítico 0, então $\Phi^0 \cap B_\rho$ é um conjunto estrelado, ou seja, para quaisquer $u \in \Phi^0 \cap B_\rho$ e $0 \le t \le 1$, temos $tu \in \Phi^0 \cap B_\rho$. De fato, se o máximo de $\Phi(tu)$ para $0 \le t \le 1$ fosse atingido em um certo t_0 com $\Phi(t_0 u) > 0$, teríamos, pelo Lema 4.5,

$$0 = \frac{d}{dt}\Phi(t_0 u) > \frac{p}{t_0}\Phi(t_0 u) > 0.$$

Logo $\Phi(tu) \le 0$ para todo $0 \le t \le 1$, e $\Phi^0 \cap B_\rho$ é contrátil (uma deformação de $\Phi^0 \cap B_\rho$ em $\{0\}$ é dada por $(t,u) \mapsto (1-t)u$).

Mostremos agora que $\Phi^0 \cap B_\rho \setminus \{0\}$ também é contrátil. Dado $u \in (B_\rho \setminus \mathring{\Phi}^0) \setminus \{0\}$, ponhamos

$$t_u = \inf\{t \in (0,+\infty); \Phi(tu) \ge 0\}.$$

Como $\Phi(u) \ge 0$, temos $t_u \le 1$. Pelo Lema 4.4, $t_u > 0$ para toda u, e pela continuidade da aplicação $t \mapsto \Phi(tu)$, temos $\Phi(t_u u) = 0$. Além disso, t_u é o único $t \in (0,+\infty)$ tal que $\Phi(t_u u) = 0$. De fato, pelo Lema 4.5, o aberto $\{t > t_u; \Phi(tu) > 0\}$ é não-vazio e fechado em $(t_u, +\infty)$.

Uma vez que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_u} \Phi(tu) > \frac{p}{t_u}\Phi(t_u u) = 0,$$

temos, pelo teorema da função implícita, que a aplicação $u \in (B_\rho \setminus \mathring{\Phi}^0) \setminus \{0\} \mapsto t_u \in (0,1]$ é contínua. Portanto, a aplicação $h\colon B_\rho \setminus \{0\} \to \Phi^0 \cap B_\rho \setminus \{0\}$ dada por

$$h(u) = \begin{cases} t_u u & \text{se } u \in (B_\rho \setminus \mathring{\Phi}^0) \setminus \{0\}\\ u & \text{se } u \in (B_\rho \cap \mathring{\Phi}^0) \setminus \{0\} \end{cases}$$

é contínua. Com efeito, $h(u) = u$ para $u \in (B_\rho \cap \Phi^0) \setminus \{0\}$, logo h é contínua em cada um dos fechados $(B_\rho \setminus \mathring{\Phi}^0) \setminus \{0\}$ e $(B_\rho \cap \Phi^0) \setminus \{0\}$ de $B_\rho \setminus \{0\}$. Assim, h é uma retração de $B_\rho \setminus \{0\}$ em $\Phi^0 \cap B_\rho \setminus \{0\}$.

Pela Proposição 2.8, $B_\rho \setminus \{0\}$ é contrátil. Assim, se $\phi\colon B_\rho \setminus \{0\} \times [0,1] \to B_\rho \setminus \{0\}$ é uma homotopia entre a aplicação identidade de $B_\rho \setminus \{0\}$ e uma aplicação constante, $h \circ \phi$ é uma homotopia entre a aplicação identidade de $\Phi^0 \cap B_\rho \setminus \{0\}$ e uma aplicação constante. Logo $\Phi^0 \cap B_\rho \setminus \{0\}$ é contrátil.

Para finalizar a demonstração, usamos a seqüência exata de homologia para o par $X = \Phi^0 \cap B_\rho$, $A = \Phi^0 \cap B_\rho \setminus \{0\}$,

$$\cdots \to H_q(A) \to H_q(X) \to H_q(X, A) \to H_{q-1}(A) \to \cdots$$

Como $H_q(X) = H_q(A) = 0$ para todo $q \geq 1$, seque-se imediatamente que $C_q(\Phi, 0) = H_q(X, A)$ é trivial para todo $q \geq 2$; e $H_0(X, A) = 0$ porque X é conexo por caminhos e $A \neq \emptyset$. Para calcular $H_1(X, A)$, temos a seqüência exata

$$0 \cong H_1(X) \to H_1(X, A) \xrightarrow{\partial} H_0(A) \cong \mathbb{R},$$

e é preciso saber que o homomorfismo $\partial\colon H_q(X, A) \to H_{q-1}(A)$ é definido da seguinte forma. Um elemento $[z] \in H_q(X, A)$ é representado por um q-cadeia z tal que ∂z é uma $(q-1)$-cadeia em A. Mas, como $\partial\partial = 0$, temos que ∂z é, na verdade, um $(q-1)$-ciclo de A, e definimos $\partial[z]$ como sendo a classe de homologia $[\partial z] \in H_{q-1}(A)$ (ver Greenberg [6]). Como A é conexo por caminhos, temos que $\partial\colon H_1(X, A) \to H_0(A)$ é o homomorfismo nulo, logo $C_1(\Phi, 0) = H_1(X, A)$ também é trivial. □

4.3 Demonstração do Teorema 4.1

Pela Proposição 2.1, demonstrar o Teorema 4.1 é tão simples quanto determinar a não trivialidade de algum grupo crítico. É precisamente isso que faremos.

Lema 4.6. *Suponhamos que valem as condições (f_1) e (f_4). Então o funcional Φ cumpre a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Suponhamos que $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma seqüência com $\{\Phi(u_n)\}$ limitado e $\Phi'(u_n) \to 0$ em $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$ quando $n \to \infty$. Precisamos mostrar que $\{u_n\}$ possui subseqüência convergente.

Mostremos, primeiramente, que $\{u_n\}$ é limitada. De fato, segue-se de (f_4) que existe $\epsilon > 0$ tal que para $|t|$ suficientemente grande e $x \in \Omega$,

$$F(x, t) \leq \frac{1}{p}(\lambda_1 - \epsilon)|t|^p.$$

Como $F \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$, temos que F é uniformemente limitada em x para $|t|$ pequeno, e portanto

$$F(x, t) \leq \frac{1}{p}(\lambda_1 - \epsilon)|t|^p + C \text{ para } x \in \Omega, t \in \mathbb{R}$$

Assim, dada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \int_\Omega F(x,u)\,dx \\
&\geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{p}(\lambda_1 - \epsilon)\|u\|_{L^p}^p + C|\Omega| \\
&\geq \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\lambda_1 - \epsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|^p + C|\Omega|.
\end{aligned}$$

(Na última desigualdade, usamos (3.8)). Como a constante multiplicando $\|u\|^p$ é positiva e $\{\Phi(u_n)\}$ é limitado, segue-se que $\{\|u_n\|\}$ é limitado.

Recordemos que toda seqüência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ possui uma subseqüência fracamente convergente. Além disso, pelo teorema de Rellich-Kondrachov, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$. Portanto, passando a uma subseqüência, temos, para certa $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$u_n \to u_0 \text{ fracamente em } W_0^{1,p}(\Omega), \quad u_n \to u_0 \text{ em } L^p(\Omega).$$

Usando argumentos como o da Seção 4.1, podemos mostrar que $f(x,u_n) \to f(x,u_0)$ em $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$, isto é, a seqüência de funcionais

$$v \in (W_0^{1,p}(\Omega)) \mapsto \int_\Omega f(x,u_n)v\,dx$$

converge para o funcional

$$v \in (W_0^{1,p}(\Omega)) \mapsto \int_\Omega f(x,u_0)v\,dx.$$

De fato, se $\|v\| \leq 1$, então

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega (f(x,u_n) - f(x,u))v\right| &\leq \int_\Omega |(f(x,u_n) - f(x,u))v| \\
&\leq \|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{L^{\frac{r}{r-1}}}\|v\|_{L^r} \\
&\leq C\|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{L^{\frac{r}{r-1}}}.
\end{aligned}$$

Se $N < p$, tomamos $r = p$ e usamos o fato de que $f(x,u_n) \to f(x,u)$ uniformemente. Se $1 < p \leq N$, fazemos $r = Np/(N-p)$, e, como podemos supor que $u_n \to u_0$ e $f(x,u_n) \to f(x,u)$ pontualmente, aplicamos o teorema da convergência dominada. Em ambos os casos, obtemos $f(x,u_n) \to f(x,u)$ em $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$.

Uma vez que

$$\Phi'(u_n) = -\Delta_p u_n - f(x,u_n) \to 0 \text{ em } (W_0^{1,p}(\Omega))^*$$

e a seqüência $f(x,u_n)$ converge, temos que $-\Delta_p u_n$ converge em $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$, e como $-\Delta_p$ é um homeomorfismo, concluímos que u_n converge em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Isso completa a demonstração. □

Na demonstração da próxima proposição, utilizaremos o seguinte teorema, cuja prova omitimos.

Teorema 4.7 (Azorero, Alonso e Manfredi [2]). *Seja Φ definido em $W_0^{1,p}(\Omega)$ por*

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx - \int_\Omega F(x,u)\, dx.$$

onde $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\, ds$ e f cumpre a condição (f_1). Então um mínimo local de Φ em $C^1(\Omega)$ é um mínimo local de Φ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposição 4.8. *Suponhamos que f satisfaz as hipóteses do Teorema 4.1. Então o funcional Φ possui dois mínimos locais, $u^+ > 0$ e $u^- < 0$ com $\Phi(u^+), \Phi(u^-) < 0$.*

Demonstração. Por (f_3) e (f_4), $\lim_{|t|\to\infty}(f(x,t)/|t|^{p-2}t) < \lambda_1$ uniformemente em x, logo existem constantes $0 < c < \lambda_1$ e $d > 0$ tais que

$$f(x,t) < c|t|^{p-2}t + d \text{ para todo } x \in \Omega, t \geq 0.$$

Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = c|u|^{p-2}u + d & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo que foi visto Seção 4.1, as soluções do problema acima são os pontos críticos do funcional de classe C^1 em $W_0^{1,p}(\Omega)$ dado por

$$\Psi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx - \int_\Omega \frac{c}{p}|u|^p + du\, dx.$$

Como $p > 1$, $c < \lambda_1$ e

$$p\Psi(u) \geq \|u\|^p - c\|u\|_p^p - C\|u\|_1 \geq (\lambda_1 - c)\|u\|_p^p - C\|u\|_p,$$

temos que Ψ é limitado inferiormente e $\Psi(v) \to \infty$ quando $\|v\| \to \infty$. Assim, podemos tomar uma seqüência minimizante limitada $\{u_n\}$. Passando a uma subseqüência, de forma que

$$u_n \to u_c \text{ fracamente em } W_0^{1,p}(\Omega), \quad u_n \to u_c \text{ em } L^p(\Omega),$$

e usando a semicontinuidade inferior da norma, concluímos que u_c é um mínimo de Ψ. Como $\Psi(|u_c|) \leq \Psi(u_c)$, podemos supor $u_c \geq 0$. Pelos Lemas 3.3 e 3.4, temos que $u_c \in C^1(\bar{\Omega})$, e usando Lema 3.6 para comparar u_c e 0, concluímos que $u_c > 0$.

Agora que temos um par de sub- e supersolução, podemos usar técnicas padrão de truncagem para obter uma solução. Definindo

$$\bar{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,0) = 0 & \text{se } t \leq 0, \\ f(x,t) & \text{se } 0 < t < u_c(x), \\ f(x,u_c(x)) & \text{se } u_c(x) \leq t, \end{cases}$$

obtemos uma função contínua e limitada. Definindo $\bar{\Phi}$ de forma análoga ao feito em (4.3), temos

$$\bar{\Phi}(u) \geq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx - C\|u\|_1,$$

e isso mostra que $\bar{\Phi}$ é limitado inferiormente e $\bar{\Phi}(u) \to \infty$ quando $\|u\| \to \infty$. Portanto uma seqüência minimizante será limitada, e, pelo mesmo argumento dado acima, o funcional $\bar{\Phi}$ assume o seu valor mínimo em uma certa u^+. Afirmamos que $\bar{\Phi}(u^+) < 0$. De fato, se $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ e $u_c \geq r$ em $\tilde{\Omega}$, então F e $\bar{F}$ coincidem em $\tilde{\Omega} \times [0, r]$, logo, tomando $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\operatorname{Spt} v \subset \tilde{\Omega}$ e $0 \leq v \leq r$, temos, por (f_2),

$$\bar{\Phi}(tv) = \Phi(tv) \leq (1/p)t^p \|v\|^p - a_r t^\nu \|v\|_\nu^\nu < 0 \tag{4.8}$$

se $t \neq 0$ é pequeno. Como claramente $\bar{\Phi}(\max\{0, u^+\}) \leq \bar{\Phi}(u^+)$, podemos supor $u^+ \geq 0$. Mais que isso, o conjunto $\{u^+(x) = 0\}$ tem interior vazio. Com efeito, se assim não fosse, poderíamos tomar v como em (4.8) e com suporte em $\{u^+(x) = 0\}$. Assim, seria $\bar{\Phi}(u^+ + tv) = \bar{\Phi}(u^+) + \bar{\Phi}(tv) < \bar{\Phi}(u^+)$, uma contradição. Por outro lado, temos

$$0 \leq -\Delta_p u^+ = \bar{f}(x, u^+) < c|u_c|^{p-2}u_c + d = -\Delta_p u_c.$$

Assim, usando os resultados de regularidade e o Lema 3.6 concluímos que $0 < u^+ < u_c$ em Ω e

$$\frac{\partial u_c}{\partial \nu} < \frac{\partial u^+}{\partial \nu} < 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Portanto, se $\|v - u^+\|_{C^1(\bar{\Omega})}$ é suficientemente pequeno, então $0 < v < u_c$, e $\bar{\Phi}(v) = \Phi(v)$. Logo u^+ é um mínimo local de Φ em $C^1(\Omega)$. Pelo Teorema 4.7, u^+ é um mínimo local de Φ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

De forma semelhante, podemos encontrar um mínimo local $u^- \leq 0$ de Φ com $\Phi(u^-) < 0$. □

Para finalizar a demonstração do Teorema 4.1, vamos usar teoria de Morse para concluir Φ precisa possuir ao menos um ponto crítico além dos três que conhecemos até o momento.

Demonstração do Teorema 4.1. Suponhamos, por absurdo, que o conjunto de pontos críticos de Φ é $\{0, u^-, u^+\}$. Então, como u^+, u^- são mínimos locais, temos $C_0(\Phi, u^\pm) = \mathbb{R}$ e os demais grupos críticos de Φ em u^+, u^- são triviais. Sejam $c_1 \leq c_2$ os valores de Φ em $u^\pm$, e

$$a < \inf \Phi \leq c_1, c_2 < 0 < b$$

Pela Proposição 2.2, temos

$$H_q(\Phi^b, \Phi^a) \cong H_q(W_0^{1,p}(\Omega), \emptyset) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } q = 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O Teorema 2.6 exclui a possibilidade de que $c_1 = c_2$; nesse caso, $H_0(\Phi^b, \Phi^a)$ teria posto 2. Assim, podemos tomar um $\epsilon > 0$ apropriado e considerar a seqüência exata de homologia da tripla $\Phi^{c_2+\epsilon} \supset \Phi^{c_2-\epsilon} \supset \Phi^{c_1-\epsilon}$:

$$\begin{aligned} \cdots \to H_1(\Phi^{c_2+\epsilon}, \Phi^{c_2-\epsilon}) \to H_0(\Phi^{c_2-\epsilon}, \Phi^{c_1-\epsilon}) \cong H_0(\Phi^{c_1+\epsilon}, \Phi^{c_1-\epsilon}) \to \\ \to H_0(\Phi^{c_2+\epsilon}, \Phi^{c_1-\epsilon}) \to H_0(\Phi^{c_2+\epsilon}, \Phi^{c_2-\epsilon}) \to 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Notando que

$$H_q(\Phi^{c_i+\epsilon}, \Phi^{c_i-\epsilon}) \cong C_q(\Phi, u^{\pm}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } q = 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e $H_0(\Phi^{c_2+\epsilon}, \Phi^{c_1-\epsilon}) \cong H_0(\Phi^b, \Phi^a) \cong \mathbb{R}$ (o ponto crítico 0 “não conta”, conforme a observação após a demonstração do Teorema 2.6), obtemos a seqüência exata

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\nu_1} \mathbb{R} \xrightarrow{\nu_2} \mathbb{R} \to 0,$$

e isso é um absurdo, já que a soma alternada das dimensões de espaços em uma seqüência exata é nula. Mais diretamente, note que ν_1 é injetiva, logo sobrejetiva, logo v_2 seria ao mesmo tempo nula e sobrejetiva. $\square$

4.4 Demonstração do Teorema 4.2

Lema 4.9. *Suponhamos que valem as condições (f_5) e (f_6). Então o funcional Φ cumpre as condição (C_c) para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ um seqüência tal que

$$\Phi(u_n) \to c \quad \text{e} \quad (1 + \|u_n\|)\|\Phi'(u_n)\| \to 0. \tag{4.10}$$

Vamos mostrar que essa seqüência é limitada. Suponhamos, por absurdo, que $\|u_n\| \to \infty$, e ponhamos $v_n = u_n/\|u_n\|$. Como vimos no lema anterior, podemos supor, a menos de uma subseqüência, que v_n converge fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega)$ para uma certa função v_0 e que $v_n \to v_0$ em $L^p(\Omega)$.

Por (f_5), dado $\epsilon > 0$ existe M tal que

$$|g(x,t)| < \epsilon |t|^{p-1} \text{ para } |t| > M.$$

Portanto, definindo $G(x,t) = F(x,t) - (1/p)\lambda_1 |t|^p$, temos $G(x,t) = \int_0^t g(x,s)\, ds$ e, assim,

$$|G(x,t)| < \frac{1}{p}\epsilon |t|^p \text{ para } |t| > M.$$

Note-se que M não depende de x, já que f, e portanto todas as demais funções que consideramos, são uniformemente contínuas na variável x.

Usando isso, podemos calcular

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi(u_n)}{\|u_n\|^p} &= \frac{1}{\|u_n\|^p}\left(\frac{1}{p}\|u_n\|^p - \int_\Omega F(x,u_n)\, dx\right) \\
&= \frac{1}{p} - \frac{1}{\|u_n\|^p}\left(\int_\Omega \frac{1}{p}\lambda_1 |u_n|^p - G(x,u_n)\right) \\
&= \frac{1}{p} - \frac{\lambda_1}{p}\|v_n\|_p^p - \frac{1}{\|u_n\|^p}\int_{|u_n(x)|>M} G(x,u_n)\, dx - \frac{1}{\|u_n\|^p}\int_{|u_n(x)|\le M} G(x,u_n)\, dx \\
&\ge \frac{1}{p} - \frac{\lambda_1}{p}\|v_n\|_p^p - \frac{1}{\|u_n\|^p}\int_\Omega \frac{\epsilon}{p}|u_n|^p\, dx - \frac{C}{\|u_n\|^p} \\
&\ge \frac{1}{p} - \frac{\lambda_1}{p}\|v_n\|_p^p - \frac{\epsilon}{p\lambda_1} - \frac{C}{\|u_n\|^p}
\end{aligned}$$

(A existência de C acima decorre de que $G(x,t)$ é contínua até a fronteira de Ω e portanto o integrado da integral correspondente é limitado. Para estimar $\frac{1}{\|u_n\|^p}\int_\Omega \frac{\epsilon}{p}|u_n|^p\,dx$ usamos (3.8).)

Fazendo $n \to \infty$ e depois $\epsilon \to 0$, e usando o fato de que v_n converge a v_0 em $L^p(\Omega)$, obtemos

$$1 \leq \lambda_1 \|v_0\|_p^p.$$

Como a norma é semicontínua inferiormente, temos

$$\lambda_1 \|v_0\|_p^p \leq \|v_0\|^p \leq \liminf \|v_n 0\|^p = 1.$$

Portanto, $\lambda_1 = \|v_0\|^p / \|v_0\|_p^p$, de onde decorre que v_0 pertence ao auto-espaço do autovalor λ_1. Em particular (mudando o sinal de u_n se necessário), temos $v_0 > 0$ q.t.p. em Ω. Portanto, $u_n(x) \to \infty$ q.t.p. e, por (f_6),

$$\lim(f(x,u_n(x))u_n(x) - pF(x,u_n(x))) = -\infty \text{ q.t.p. em } \Omega \tag{4.11}$$

No entanto, por (4.10), $|\Phi'(u_n)\cdot u_n| \leq \|\Phi'(u_n)\|\|u_n\| \to 0$ logo

$$p\Phi(u_n) - \Phi'(u_n)\cdot u_n \to pc,$$

ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p - pF(x,u_n)\,dx - \int_\Omega (-\Delta_p u_n - f(x,u_n))u_n\,dx$$
$$= \int_\Omega f(x,u_n)u_n - pF(x,u_n)\,dx \to pc$$

Isso contradiz (4.11), logo u_n é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

O restante da demostração é idêntico ao final da demostração do Lema 4.6. Como, por (4.10), $\Phi'(u_n) = -\Delta_p u_n - f(x,u_n)$ converge e $-\Delta_p$ é um homeomorfismo de $W_0^{1,p}(\Omega)$ no seu dual, segue-se que

$$u_n - (-\Delta_p)^{-1} f(x,u_n)$$

converge. Por outro lado, (f_5) implica (f_1) (note que $1 \leq p < Np/(N-p)$ se $N > p$). Logo, pelo mesmo argumento do lema anterior, a aplicação

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \mapsto f(x,u) \in (W_0^{1,p}(\Omega))^*$$

leva seqüencias fracamente convergentes em seqüências convergentes na norma. Assim, passando a uma subseqüência, temos que u_n converge em $W_0^{1,p}(\Omega)$. □

Proposição 4.10. *Suponhamos que valem as condições (f_1), (f_5) e (f_6). Então*

$$C_1(\Phi,\infty) \neq 0.$$

Demonstração. Consideremos a decomposição $W_0^{1,p}(\Omega) = V \oplus W$ onde $V = \mathbb{R}\{e_1\}$ é o subespaço associado ao autovalor λ_1 e W é um subespaço complementar (estenda o funcional $\alpha e_1 \in V \mapsto \alpha$ a $W_0^{1,p}(\Omega)$ e defina W como sendo o seu núcleo). Tomamos $e_1 > 0$ e $\|e_1\| = 1$. Então existe $\bar{\lambda} > \lambda_1$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \geq \bar{\lambda} \int_\Omega |u|^p \tag{4.12}$$

para toda $u \in W$.

Vamos mostrar que

$$\Phi(v) \to -\infty \text{ para } v \in V, \|v\| \to \infty \tag{4.13}$$

e

$$\inf_W \Phi = m > \infty. \tag{4.14}$$

Para mostrar (4.13), ponhamos $G(x,t) = \int_0^t g(x,s)\, ds$. Então, por (f_5) e (f_6), temos $G(x,t) = F(x,t) - (1/p)\lambda_1 |t|^p$ e $\lim_{|t|\to\infty}(g(x,t)t - pG(x,t)) = -\infty$. Além disso, segue-se da regra de L'Hôpital que

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{p(G(x,t))}{|t|^p} = 0, \quad \lim_{|t|\to\infty} \frac{p(F(x,t))}{|t|^p} = \lambda_1. \tag{4.15}$$

Portanto, dado $M > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$g(x,t) - pG(x,t) \leq -M \text{ para } |s| > R, x \in \Omega.$$

(Pela continuidade uniforme de g em relação a x, R não depende de x.) Assim, para $[t, t_1] \subset [R, +\infty)$, temos

$$\frac{G(x,t_1)}{t_1^p} - \frac{G(x,t)}{t^p} = \int_t^{t_1} \frac{d}{ds} \frac{G(x,s)}{|s|^p} = \int_t^{t_1} \frac{g(x,s)s - pG(x,s)}{|s|^{p+1}} \leq \frac{M}{p}\left(\frac{1}{t_1^p} - \frac{1}{t^p}\right).$$

Fazendo $t_1 \to \infty$ na equação acima e usando (4.15), obtemos

$$G(x,t) \geq \frac{M}{p} \text{ para } t \geq R, x \in \Omega.$$

De modo similar, $G(x,t) \geq M/p$ para $t \leq -R$, logo

$$\lim_{|t|\to\infty} G(x,t) = +\infty \text{ uniformemente em } x \in \Omega.$$

Assim, se $v = \alpha e_1 \in V$, temos, pela definição de autovalor de Δ_p e pela definição de G,

$$\Phi(v) = \frac{1}{p}\int_\Omega \lambda_1 |v|^p - \int_\Omega F(x,v)\, dx = -\int_\Omega G(x,v)\, dx.$$

Logo $\alpha \to \infty$ implica $\Phi(v) \to -\infty$, e assim mostramos (4.13).

Para mostrar (4.14), notemos que, por (4.12), existe $d > 0$ tal que

$$\|w\|^p \geq (\lambda_1 + d)\|w\|_p^p \text{ para } w \in W.$$

Mas, por (4.15), existem $0 < \epsilon < d$ e $C > 0$ tais que

$$F(x,t) \leq \frac{1}{p}(\lambda_1 + \epsilon)|t|^p + C \text{ para } t \in \mathbb{R}, x \in \Omega.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\Phi(w) &= \frac{1}{p}\|w\|^p - \int_\Omega F(x,w)\,dx \\
&\geq \frac{1}{p}\left(\|w\|^p - (\lambda_1 + \epsilon)\|w\|_p^p\right) - C \\
&\geq \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\lambda_1 + \epsilon}{\lambda_1 + d}\right)\|w\|^p - C,
\end{aligned}$$

de onde obtemos (4.14).

Para finalizar a demonstração, basta aplicar a Proposição 2.3. □

Bibliografia

[1] Aomar Anane. “Etude des valeurs propres et de la résonance pour l’opérateur p-Laplacien”. Tese de doutorado. Bruxelas: Université Libre de Bruxelles, 1988.

[2] J. P. Garcia Azorero, I. Peral Alonso e Juan J. Manfredi. “Sobolev versus Hölder Local Minimizers and Global Multiplicity for Some Quasilinear Elliptic Equations”. In: *Communications in Contemporary Mathematics* 2.3 (2000), pp. 385–404.

[3] Thomas Bartsch e Shujie Li. “Critical Point Theory for Asymptotically Quadratic Functionals and Applications to Problems with Ressonance”. In: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Appliations* 28.3 (1997), pp. 419–441.

[4] Kung ching Chang. *Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems*. Vol. 6. Progress in Nonlinear Differential Equation and Their Applications. Boston: Birkhäuser, 1991.

[5] J. García-Melián e J. Sabina de Lis. “Maximum and comparison principles for operators involving the p-Laplacian”. In: *J. Math. Anal. Appl.* 218.1 (1998), pp. 49–65.

[6] Marvin J. Greenberg. *Lectures on Algebraic Topology*. W. A. Benjamin, 1973.

[7] Mohammed Guedda e Laurent Véron. “Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents”. In: *Nonlinear Anal.* 13.8 (1989), pp. 879–902.

[8] Yuxia Guo e Jiaquan Liu. “Solutions of p-sublinear p-Laplacian equation via Morse theory”. In: *Journal of London Mathematical Society* 72.2 (2005), pp. 632–644.

[9] Morris W. Hirsch. *Differential Topology*. Graduate Texts in Mathematics 33. Springer, 1976.

[10] Edson Alex Arrázola Iriarte. “Sobre um par de soluções positivas para uma classe de problemas elípticos envolvendo o p-laplaciano”. Tese de doutorado. Campinas, SP: Universidade Estadual de Campinas, 2004. URL: `http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000316767`.

[11] Gary M. Lieberman. “Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations”. In: *Nonlinear Anal.* 12.11 (1988), pp. 1203–1219.

[12] Peter Lindqvist. “On the equation $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+\lambda|u|^{p-2}u = 0$”. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 109.1 (1990), pp. 157–164.

[13] Kanishka Perera. “Nontrivial critical groups in p-Laplacian problems via the Yang index”. In: *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 21.2 (2003), pp. 301–309.

[14] Halsey L. Royden. *Real Analysis*. 3.ª. New York: Macmillan Publishing Company, 1988.

[15] Peter Tolksdorf. "On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points". In: *Comm. Partial Differential Equations* 8.7 (1983), pp. 773–817.