



Física Geral
Eletromagnetismo
Problemas Seleccionados
Manual de Laboratório

5ª edição

Prof^a. Raquel Giulian
Prof. Leonardo Albuquerque Heidemann
Porto Alegre, 2018

Sumário

Introdução	5
Notação Vetorial	6
Conteúdo Programático	7
Problemas Seleccionados	10
(A) Carga elétrica	11
(B) Campo elétrico	13
(C) Lei de Gauss	16
(D) Potencial elétrico	18
(E) Capacitância	20
(F) Corrente e resistência	22
(G) Campo magnético	25
(H) Lei de Faraday	32
(I) Indutância	34
(J) Corrente Alternada	37

Manual de Laboratório	40
O processo de medida no laboratório de Física	41
Lab 1 – Instrumentos de medida e incertezas	53
Circuito RC – armazenando energia para utilizar no momento certo	56
Lab 2 – Circuito RC – série	63
Medindo campos magnéticos	67
Lab 3 – Projeto	72
Medindo grandezas que variam rapidamente com o tempo	77
Compreendendo a conta de energia elétrica	81
Lab 4 – Circuito RLC – série	88
Respostas	95
Bibliografia	99

Introdução

Este livro é uma ferramenta de apoio às aulas de FÍSICA GERAL – ELETROMAGNETISMO do Instituto de Física - UFRGS. A primeira parte traz uma seleção de exercícios e problemas que podem ser utilizados para melhor compreensão dos conteúdos vistos em aula. Os exercícios sugeridos aqui devem servir apenas como um guia: são exemplos do nível de dificuldade que pode ser exigido nas avaliações durante o curso. O aluno que sentir dificuldade em resolver os exercícios aqui sugeridos deve procurar apoio em outros materiais didáticos que trazem um número muito maior de exercícios com variados graus de dificuldade.

A segunda parte consiste num MANUAL DE LABORATÓRIO: um conjunto de atividades que serão realizados nas aulas experimentais. O método de avaliação das atividades experimentais deve ser discutido com o professor.

Este material está em constante desenvolvimento e foi elaborado a com significativa contribuição dos professores de Física Geral Eletromagnetismo da UFRGS, em especial os professores Cristiano Krug, Gabriel Vieira Soares, Livio Amaral e Luiz Fernando Ziebell. Muitas alterações foram feitas em relação às edições anteriores para melhor atender às necessidades da disciplina. Os exercícios e problemas são adaptações dos exercícios sugeridos em livros de Física Geral.

Sugestões são bem vindas e podem ser enviadas para os autores através do e-mail raquelgiulian@if.ufrgs.br.

Notação Vetorial

A notação vetorial é ferramenta fundamental para o estudo do eletromagnetismo. Neste livreto, vetores estão escritos no seguinte formato:

$$\vec{B} = \langle a; -b; c \rangle \text{ Tesla}$$

que é equivalente a $\vec{B} = a\hat{i} - b\hat{j} + c\hat{k} (T)$ ou ainda a $\mathbf{B} = a\hat{i} - b\hat{j} + c\hat{k} (T)$. Quando o vetor tiver apenas uma componente não nula, por exemplo na direção z (ou \hat{k}), então o vetor em questão deve ser escrito da seguinte forma:

$$\vec{B} = \langle 0; 0; c \rangle T.$$

Essa disciplina é ministrada por diversos professores, cada um com suas preferências quanto à notação vetorial, entre outros fatores. Você, como aluno, tem o direito de escolher a notação que lhe for mais conveniente, desde que mantidas a coerência e a exatidão. A notação utilizada neste livreto não é necessariamente a mesma do que a utilizada nas aulas e avaliações. Converse com seu professor para qualquer esclarecimento.

Conteúdo Programático

O conteúdo será dividido em quatro áreas. Ao final de cada área, será realizada uma prova que pode abranger todo o conteúdo visto até então.

1ª semana: *Carga elétrica* (condutores, isolantes, carga induzida e força elétrica). *Campo elétrico* (lei de Coulomb, dipolo elétrico).

2ª semana: *Campo elétrico* (momento de dipolo elétrico, energia potencial elétrica, distribuições discretas e contínuas de carga, distribuições contínuas de carga).

3ª semana: *Lei de Gauss* (fluxo elétrico, campo elétrico próximo a objetos simétricos carregados, cargas em condutores). **PROVA I**

4ª semana: *Potencial elétrico* (potencial, diferença de potencial, diferença de energia potencial, superfície equipotencial, potencial próximo a objetos carregados).

5ª semana: **Laboratório 1.** *Capacitância* (capacitor de placas paralelas, diferença de potencial num capacitor, capacitores cilíndricos e esféricos, capacitores em série e em paralelo, capacitores com dielétricos, energia armazenada num capacitor).

6ª semana: *Carga e descarga de capacitores, Corrente e resistência*, (conservação de carga, corrente convencional e corrente de elétrons, densidade de corrente, velocidade de deriva, resistores, resistividade e resistência, lei de Ohm).

7ª semana: *Circuitos* (baterias, força eletromotriz, resistores em série e paralelo, circuitos com baterias e resistores, potência em circuitos, efeito Joule). **Laboratório 2.**

8ª semana: *Circuito RC* (corrente num circuito com capacitor carregando e/ou descarregando).

9ª semana: Aula de problemas e **PROVA II**

10ª e 11ª semanas: *Campo Magnético* (lei de Biot-Savart, campo magnético produzido por corrente, campo magnético da Terra, espira de corrente, momento de dipolo magnético, dipolo magnético, lei de Gauss do magnetismo, força eletromagnética, força magnética num fio com corrente, torque, energia potencial magnética). **Laboratório 3.**

12ª semana: *Lei de Ampère, Efeito Hall. Propriedades Magnéticas da Matéria* (diamagnetismo, paramagnetismo, ferromagnetismo)

13ª semana: **Laboratório 4.** Aula de problemas e **PROVA III**

14ª semana: *Lei de Faraday-Lenz* (força eletromotriz induzida, fluxo magnético variável no tempo, transformadores, corrente induzida).

15ª semana: *Equações de Maxwell* (corrente de deslocamento). *Indutância* (indutores, solenoide, toroide). **Laboratório 5.**

16ª semana: *Corrente alternada* (circuito RL e LC, densidade de energia, conservação de energia).

17ª semana: *Corrente alternada* (circuito RLC, ressonância, circuito resistivo, capacitivo e indutivo, circuito RLC forçado, impedância, fator de potência, constante de fase, diagrama de fasores). **Laboratório 6.**

18ª semana: Aula de problemas e **PROVA IV**.

19ª semana: Divulgação dos resultados

20ª semana: RECUPERAÇÃO OU EXAME

Problemas Seleccionados

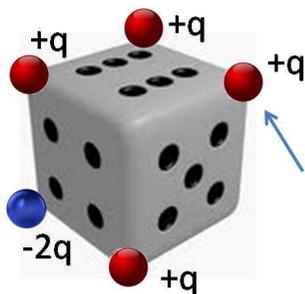
(A) Carga Elétrica

A1 – Se você grudar um pedaço de fita adesiva na mesa e desgrudá-lo puxando rapidamente uma das pontas, a fita ficará carregada eletricamente. Supondo que a fita adesiva tenha 20 cm de comprimento e 1 cm de largura, e que ao fazer isso você consiga arrancar 1 elétron de cada átomo da superfície da fita, qual será a carga elétrica total da fita? (por simplicidade, considere o raio atômico = 1 Å).

A2 – Repetindo o mesmo procedimento com outro pedaço idêntico de fita adesiva, e aproximando os dois pedaços a uma distância de 5 cm, qual será a força elétrica entre eles?

A3 – Quatro partículas carregadas estão dispostas no plano XY sendo $\vec{r}_1 = \langle -3; 0; 0 \rangle$ cm, $\vec{r}_2 = \langle x; 0; 0 \rangle$ cm, $\vec{r}_3 = \langle 0; 2; 0 \rangle$ cm e $\vec{r}_4 = \langle 0; -2; 0 \rangle$ cm as distâncias das cargas até a origem. A carga da partícula 2 é $q_2 = 8,0 \times 10^{-1}$ C, a carga das partículas 3 e 4 é $q_3 = q_4 = -1,6 \times 10^{-19}$ C. Qual deve ser a distância x para que seja nula a força resultante sobre a partícula 1?

A4 – O dado mostrado na figura ao lado possui lado $l = 1,5$ cm. Qual a força (vetor) exercida sobre a partícula indicada pela seta devido à presença das demais cargas? Use notação vetorial para indicar sua resposta. (Dica: defina a origem dos eixos cartesianos no vértice que está escondido, com o eixo z para cima. Calcule as componentes da força nas direções \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} separadamente, só então some as componentes que estão na mesma direção).



A5 – Três partículas carregadas estão dispostas num plano XY: a partícula 1 na posição $\vec{P}_1 = \langle 0; 15; 0 \rangle$ cm, a partícula 2 na posição $\vec{P}_2 = \langle 0; -15; 0 \rangle$ cm e a partícula 3 na posição $\vec{P}_3 = \langle x; 0; 0 \rangle$ cm, com liberdade para se mover no eixo x . $q_1 = q_2 = 3,2 \times 10^{-1}$ C, $q_3 = -6,4 \times 10^{-19}$ C. x pode variar de 0 a 5 m. Qual o valor de x para que a força exercida sobre a partícula 3 (pelas demais cargas) seja (a) mínima e (b) máxima? Quais são os valores (c) mínimo e (d) máximo do módulo da força?

A6 – A figura ao lado mostra duas esferas condutoras de mesma massa m e mesma carga q suspensas por fios isolantes de comprimento L . Mostre que, para $L \gg x$, as esferas estarão em equilíbrio quando a distância x entre elas for igual a:

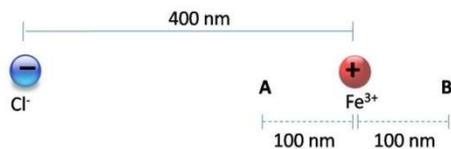
$$x = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 m g} \right)^{1/3}$$



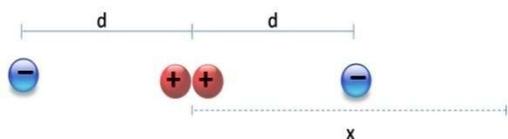
A7 – A força gravitacional entre duas massas pontuais é muito similar matematicamente à força eletrostática entre duas cargas pontuais. A intensidade dessas forças, no entanto, é extremamente diferente. Para ilustrar isso, considere a seguinte situação. Em algum lugar do espaço existem duas esferas idênticas de poeira, 50 μm de diâmetro e densidade 2,5 g/cm³, separadas por uma distância d . Se os grãos são eletricamente neutros, e estão inicialmente em repouso, eles irão colidir devido à atração gravitacional. Agora suponha que ambos estão eletricamente carregados, cada um tendo um número n de elétrons extra. Encontre o menor valor de n que irá evitar a colisão. (Considere $G = 6,67 \times 10^{-11}$ m³kg⁻¹s⁻²).

(B) Campo Elétrico

B1 – Um íon de Fe^{3+} está localizado a 400 nm de um íon de Cl^- , como mostra a figura ao lado. (a) Qual a magnitude, direção e sentido do campo elétrico \vec{E} na posição A? (b) E na posição B? (c) Se um elétron estiver na posição A, qual será a magnitude e direção da força sobre o elétron?



B2 – Um quadrupolo elétrico é formado por um conjunto de dois dipolos, como mostra a figura ao lado. Mostre que, para $x \gg d$, a magnitude do campo \vec{E} num ponto ao longo do eixo dos quadrupolos é dado por

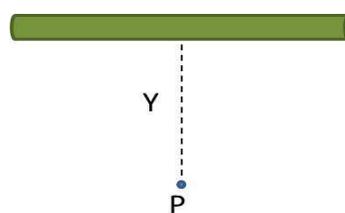


B3 – Uma barra muito longa com densidade de carga λ está disposta conforme a figura ao lado. (Alguns autores chamam esse tipo de barra de semi-infinita, pois o ponto P está próximo a uma das extremidades da barra enquanto a outra extremidade está muito distante). Mostre que o campo elétrico \vec{E} no ponto P faz um ângulo de 45° com a barra independente da distância Y (isto é, as componentes x e y do campo tem a mesma magnitude).

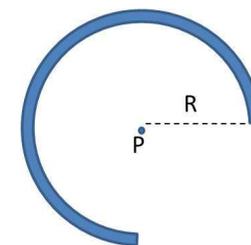


$$E = \frac{6qd^2}{4\pi\epsilon_0 x^4}$$

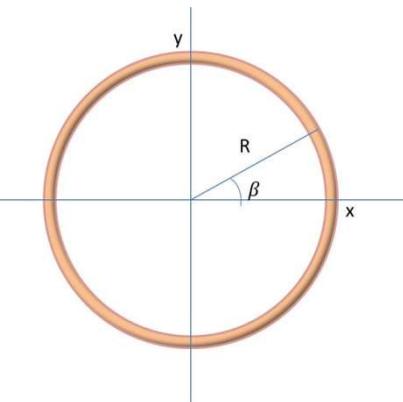
B4 – Calcule o campo \vec{E} próximo a uma barra carregada com carga total Q e comprimento x. As cargas estão distribuídas de forma uniforme ao longo da barra: $x = 0,15 \text{ m}$, $Q = 8 \text{ nC}$ e $Y = 5 \text{ cm}$.



B5 – A figura ao lado mostra um anel incompleto de raio R, carregado com carga total Q. Qual a força (vetor) exercida sobre um elétron que por ventura esteja localizado no ponto P?

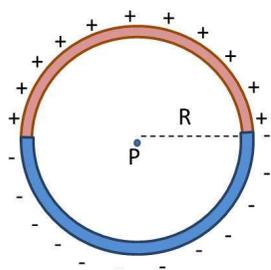
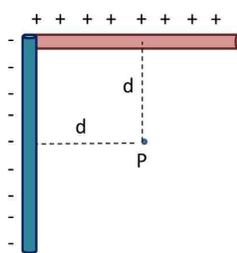


B6 – Um dipolo cujo momento dipolar é $\vec{p} = \langle 3,7; 5,0; 0 \rangle \text{ Cm}$ encontra-se numa região onde o campo $\vec{E} = \langle 3000; 0; 0 \rangle \text{ N/C}$. Qual a energia potencial do dipolo? Qual o torque que age sobre o dipolo? Qual é o trabalho que um agente externo deve realizar para girar o dipolo até que seu momento dipolar seja $\vec{p} = \langle -5,0; 3,7; 0 \rangle \text{ Cm}$?



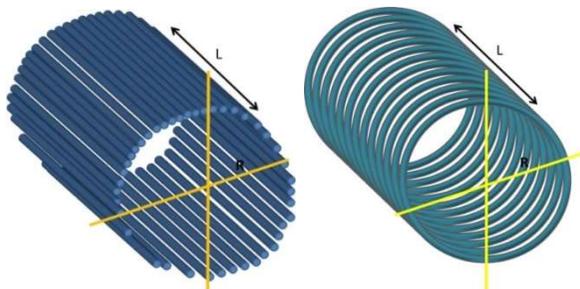
B7 – Calcule a magnitude, direção e sentido do campo \vec{E} no centro de um anel de raio R carregado, sendo que a distribuição de cargas no anel varia como $\lambda(\beta) = \lambda_0 \text{ sen } \beta$.

B8 – Duas barras isolantes de $1,5\text{ m}$ de comprimento encontram-se em um ângulo reto. Uma barra possui $3,0\ \mu\text{C}$ e a outra possui $-3,0\ \mu\text{C}$ de carga uniformemente distribuída ao longo do comprimento, conforme a figura ao lado. Determine o campo elétrico (vetor) no ponto P, que está a $d = 75,0\text{ cm}$ do centro de cada barra.



B9 – Duas barras curvas isolantes com cargas opostas de igual magnitude q formam um círculo de raio R no plano xy , conforme a figura. As cargas estão uniformemente distribuídas na barra. (a) Qual o campo elétrico (vetor) no ponto P? (b) Qual a resposta do item (a) se $q = 20\text{ pC}$ e $R = 10\text{ cm}$?

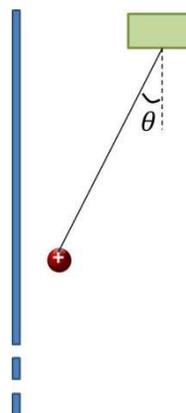
B10 – Considere um cilindro de comprimento L e raio A , oco, carregado com carga total Q . Você está interessado em saber qual é o campo elétrico \vec{E} ao longo do eixo do cilindro, numa de suas extremidades. Para isso, utilize dois caminhos distintos: (a) considerando que o cilindro é formado por uma infinidade de barras de espessura infinitesimal, todas com comprimento L , dispostas num círculo de raio A e (b) considerando que o cilindro é formado por uma infinidade de anéis de raio A cujos eixos estão alinhados e juntos formam um cilindro de comprimento L .



(C) Lei de Gauss

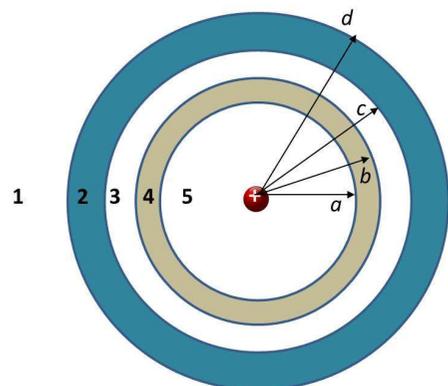
C1 – Uma fábrica de bolinhas de gude foi atingida por um raio durante uma tempestade. O prédio foi protegido por um pára-raios, mas algumas descargas atingiram os equipamentos que fabricavam as bolinhas. Resultado é que a bolinha que estava na máquina ao cair o raio recebeu uma descarga elétrica e as cargas ficaram armazenadas no interior da bolinha de forma que a densidade de carga $\rho(r) = \rho_0 \frac{1}{r^2}$.

(a) Qual o campo \vec{E} na superfície da bolinha, que tem raio $r = 2\text{ cm}$? (b) E no interior da bolinha, 1 cm abaixo da superfície? (c) Qual o campo \vec{E} a 5 cm da superfície da bolinha ?



C2 – A figura ao lado mostra uma bolinha com massa $0,004\text{ g}$ e carga $8 \times 10^{-8}\text{ C}$ suspensa por um fio nas proximidades de uma grande placa condutora carregada, sendo que a densidade de carga da placa é $-2 \times 10^{-9}\text{ C/m}^2$. Encontre um valor para o ângulo θ .

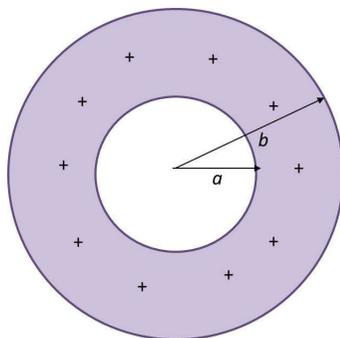
C3 – Uma casca cilíndrica isolante e muito longa tem raio interno a e externo b e densidade volumétrica de carga ρ . Um fio, também muito longo, tem densidade linear de carga λ e está alinhado com o eixo central da casca. Qual o campo elétrico na região entre a e b ?



C4 – Uma carga Q positiva está no centro de um conjunto de calotas concêntricas como mostra a figura abaixo. O raio das calotas está indicado na figura. A mais externa é condutora e está carregada com carga Q negativa, e a calota intermediária é isolante e possui carga líquida q positiva distribuída de forma uniforme por

todo seu volume. Calcule o campo \vec{E} resultante em cada uma das 5 regiões indicadas na figura. Indique a localização aproximada das cargas induzidas, e/ou em excesso, em cada região e indique a direção e sentido dos campos elétricos.

C5 – Uma casca esférica com densidade volumétrica de carga $\rho = 2,0 \text{ nC/m}^3$ tem raio interno $a = 10 \text{ cm}$ e raio externo $b = 2a$, conforme a figura. Determine o módulo do campo elétrico para os seguintes raios a partir do centro: (a) $r = a/2$; (b) $r = 1,5a$; (c) $r = 2a$.

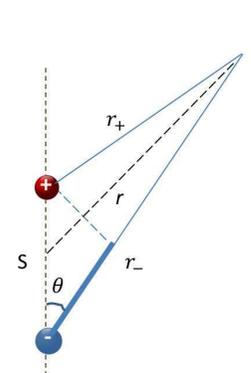
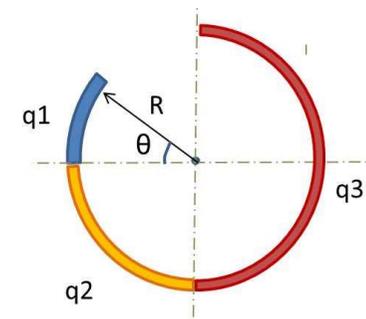


C6 – Usando a Lei de Gauss, determine o campo elétrico próximo a uma placa muito grande com densidade superficial de carga σ .

C7 – Usando a Lei de Gauss, determine o campo elétrico próximo a uma barra muito longa com densidade linear de carga λ .

(D) Potencial Elétrico

D1 – A figura ao lado mostra um anel incompleto, formado por três segmentos de arco com densidade linear de carga constantes, λ_1, λ_2 e λ_3 . A menor delas tem carga total q_1 e comprimento de arco $\pi/4$. As demais estão indicadas na figura. Qual o potencial elétrico no centro do anel? Qual deve ser a relação entre as cargas para que o potencial elétrico no centro do anel seja igual a zero?

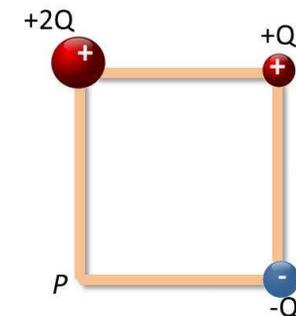


D2 – A figura ao lado mostra um dipolo elétrico de momento dipolar $|\vec{p}| = Sq$. Mostre que para $r \gg S$, o potencial elétrico no ponto P é dado por :

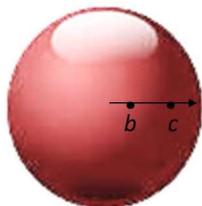
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2}$$

Dica: quando $r \gg S$, é razoável considerar que $r_+r_- \cong r^2$ e $r_- - r_+ \cong S \cos\theta$

D3 – Sobre uma mesa de bilhar estão dispostas três bolinhas. Uma com carga $+Q$, outra com carga $-Q$ e uma terceira com carga $+2Q$, conforme mostra a figura ao lado. (a) Qual o potencial no ponto P? (b) Se uma quarta bolinha for colocada no centro do quadrado, qual deve ser a carga da bolinha para que o potencial no ponto P seja nulo?

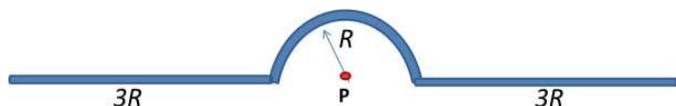


D4 – Uma esfera oca, isolante, de raio R e carga Q é colocada nas proximidades de uma placa muito grande cuja densidade superficial de carga é σ (uniforme). A distância entre a placa e a superfície da esfera é d . Qual a diferença de potencial entre o centro da esfera e a placa? Dica: calcule a ddp devido a cada objeto separadamente e some os resultados. A diferença de potencial entre dois pontos pode ser determinada a partir do campo elétrico.



D5 – Uma esfera isolante, maciça, possui densidade de carga $\rho(r) = \rho_0 r^2$, onde ρ_0 é uma constante. (a) Qual a diferença de potencial entre os pontos b e c? Se a densidade de carga fosse uniforme, qual seria a diferença de potencial entre os pontos b e c?

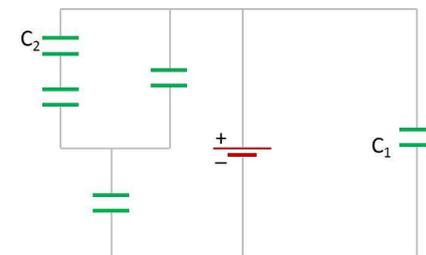
D6 – Um fio tem densidade linear de carga λ uniforme e foi dobrado no formato conforme mostra a figura abaixo. Qual o potencial elétrico no ponto P?



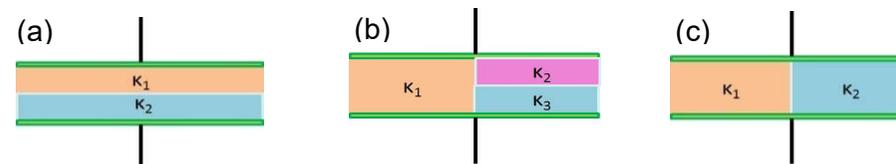
D7 – Considere duas cascas esféricas finas, concêntricas, condutoras. A casca interna tem raio $a = 15\text{ cm}$ e carga 10 nC . A casca externa tem raio $b = 30\text{ cm}$ e carga -15 nC . Forneça expressões para o campo elétrico e o potencial elétrico para as diferentes regiões: (a) $r < 15\text{ cm}$; (b) $15\text{ cm} < r < 30\text{ cm}$; (c) $r > 30\text{ cm}$. Em todos os casos, considere $V = 0$ em $r = \infty$.

(E) Capacitância

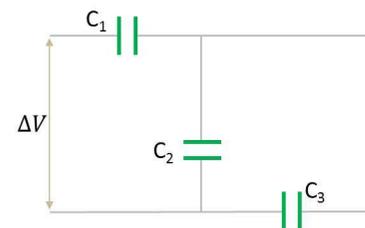
E1 – Sabendo que cada um dos capacitores no circuito ao lado tem capacitância $C = 10\mu\text{F}$ e a diferença de potencial na bateria é $\Delta V = 10\text{ V}$, qual é a carga do capacitor 1? E do capacitor 2?



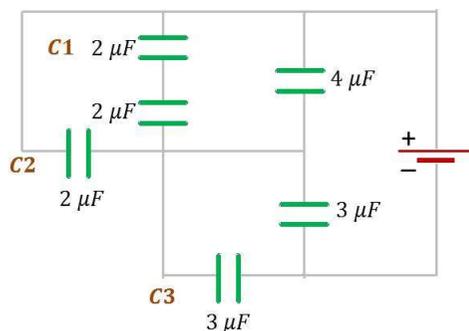
E2 – Encontre uma expressão para a capacitância dos capacitores abaixo sabendo que a distância entre as placas é d , a área das placas é 10 d , o espaço entre as placas está preenchido por dois ou mais materiais de constantes dielétricas distintas conforme mostra a figura abaixo. Analisando cada capacitor separadamente, é possível obter a mesma capacitância com uma associação de capacitores simples (preenchidos por um único material)? Explique.



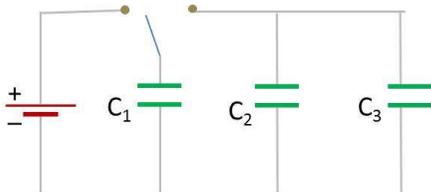
E3 – Uma diferença de potencial de 100 V é aplicada ao circuito ao lado onde $C_1 = 10\mu\text{F}$, $C_2 = 5\mu\text{F}$ e $C_3 = 4\mu\text{F}$. Se o capacitor 3 é substituído por um fio condutor, qual é o aumento na carga do capacitor 1? Qual é o aumento na diferença de potencial entre as placas do capacitor 1?



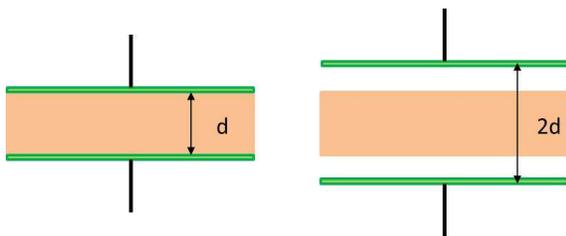
E4 – No circuito ao lado, a diferença de potencial fornecida pela bateria é de 20 V . Qual a capacitância equivalente do circuito? Qual a carga armazenada por essa capacitância equivalente? Qual a carga e ddp para os capacitores 1, 2 e 3?



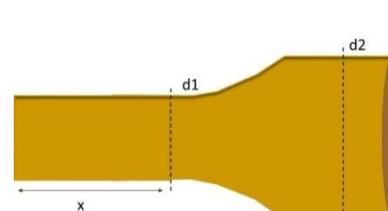
E5 – Na figura ao lado, a ddp da bateria é 10 V , $C_1 = 10\ \mu\text{F}$, $C_2 = C_3 = 2C_1$. A chave é movida para a esquerda e somente depois que o capacitor 1 atingiu o equilíbrio a chave é movida para a direita. Quando o equilíbrio é novamente atingido, qual é a carga do capacitor 1?



E6 – Um capacitor de placas paralelas com área A e espaçamento d é preenchido com vidro ($\epsilon = 2\epsilon_0$). Conectado a uma bateria, o capacitor acumula carga Q . (a) Qual a energia armazenada no capacitor? (b) Mantendo a bateria conectada, a separação entre as placas é aumentada para $2d$ (veja a figura). Qual a energia armazenada nessa nova situação?

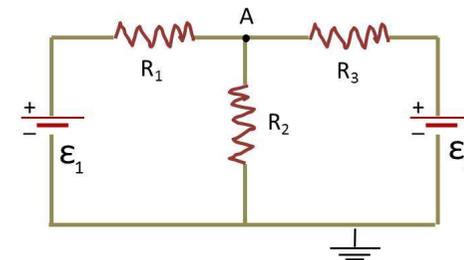


(F) Corrente e Resistência

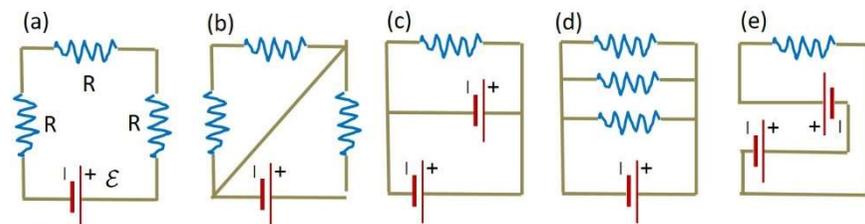


F1 – A figura ao lado mostra parte de um fio de cobre com diâmetros $d_1 = 4R$ e $d_2 = 8R$ por onde passa uma corrente uniforme. $x = 4\text{ m}$ e a diferença de potencial ao longo desse comprimento é $20\ \mu\text{V}$. O número de portadores de carga por unidade de volume é $8,49 \times 10^{28}\text{ m}^{-3}$. Qual é a velocidade de deriva dos elétrons de condução na porção do fio com diâmetro d_2 ?

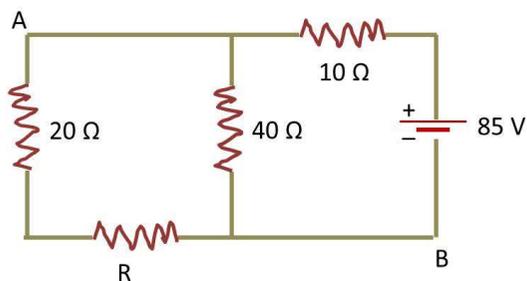
F2 – No circuito ao lado, qual a magnitude e direção das correntes nos resistores R_1 , R_2 e R_3 ? Para isso considere que $\mathcal{E}_1 = 6\text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 12\text{ V}$, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$, $R_3 = 300\ \Omega$. O circuito está aterrado e nesse ponto $V = 0$. Qual é o potencial elétrico no ponto A?



F3 – Calcule a potência total dissipada em cada circuito. Considere que todas as resistências são iguais e as baterias são ideais. Expresse suas respostas em termos de \mathcal{E} e R .

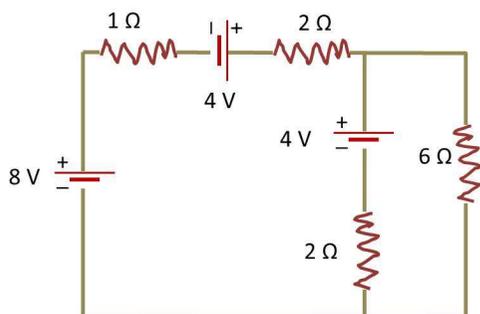
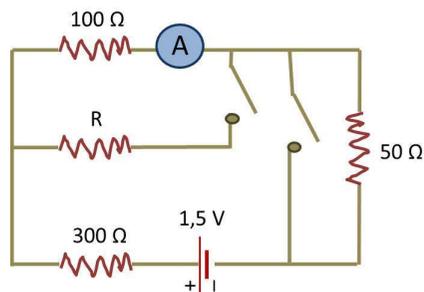


F4 – Se dois fios de mesmo comprimento, um de cobre e outro de alumínio, apresentam a mesma resistência, qual deve ser a razão entre seus raios?



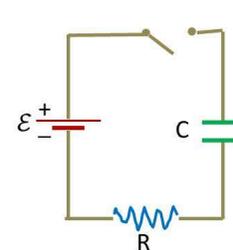
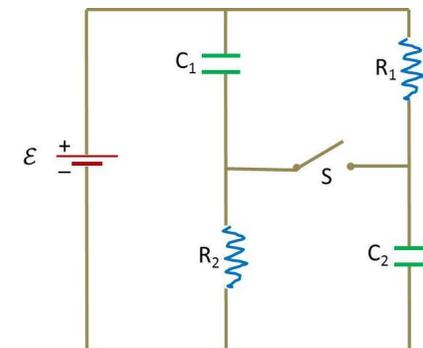
F5 – No circuito ao lado, a potência dissipada no resistor R é 20 W . Qual o valor de R ? Qual a ddp entre os pontos A e B?

F6 – A corrente medida por um amperímetro A no circuito ao lado é a mesma quando ambas as chaves estão abertas ou fechadas. Qual o valor da resistência R ?



F7 – Determine o valor da corrente que passa por cada um dos resistores, a potência fornecida por cada uma das fontes de tensão e a potência dissipada por cada um dos resistores. Faça o balanço energético do circuito.

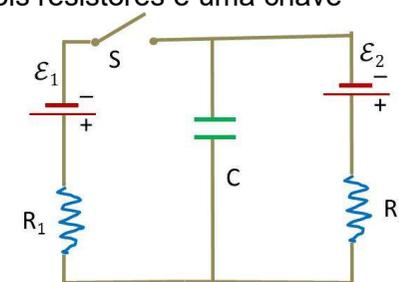
F8 – No circuito ao lado, a chave S permanece fechada por um longo tempo e a corrente no circuito atinge um valor constante. Considere $C_1 = 3\mu\text{F}$, $C_2 = 6\mu\text{F}$, $R_1 = 4\text{k}\Omega$ e $R_2 = 7\text{k}\Omega$. A potência dissipada em R_2 é $2,4\text{ W}$. (a) Determine as cargas em C_1 e C_2 . (b) Abrindo a chave S e aguardando um longo tempo, qual a mudança observada na carga do capacitor 2?

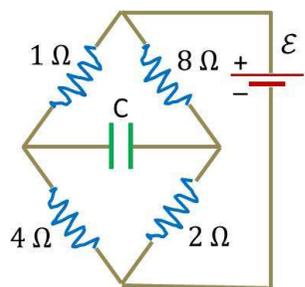


F9 – Num circuito RC série como o da figura ao lado, $C = 1\mu\text{F}$, $R = 2 \times 10^6\Omega$ e $\varepsilon = 10\text{ V}$. Dez segundos depois que a chave foi fechada, determine: (a) a carga no capacitor; (b) a corrente no resistor; (c) a taxa com que a energia é armazenada no capacitor; (d) a taxa com que a bateria fornece energia para o circuito.

F10 – Um capacitor é carregado através de um resistor como mostra a figura no problema anterior. Mostre que metade da energia fornecida pela bateria aparece como energia interna no resistor e a outra metade como energia elétrica no capacitor.

F11 – Um capacitor, duas fontes ideais, dois resistores e uma chave S são mostrados no circuito da figura ao lado. Suponha $C = 12\mu\text{F}$, $\varepsilon_1 = 1,5\text{ V}$, $\varepsilon_2 = 3,0\text{ V}$, $R_1 = 0,5\Omega$ e $R_2 = 0,8\Omega$. (a) Se a chave S permanece aberta por um longo tempo, qual a carga no capacitor? (b) Qual a carga no capacitor se a chave S permanece fechada por um longo tempo?



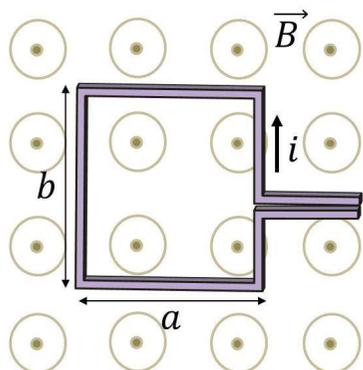


F12 – No circuito ao lado, a bateria fornece 10 V , o capacitor é de $1\ \mu\text{F}$ e os resistores têm as resistências indicadas na figura. O circuito está ligado há um longo tempo. (a) Qual a ddp entre os terminais do capacitor? (b) Se a bateria for desconectada, quanto tempo levará para que essa ddp atinja um décimo do valor inicial?

(G) Campo Magnético

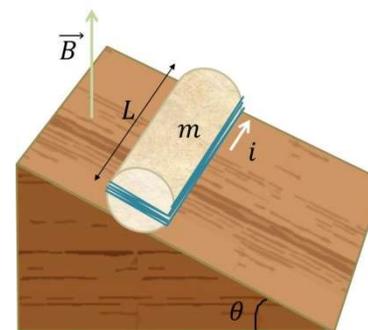
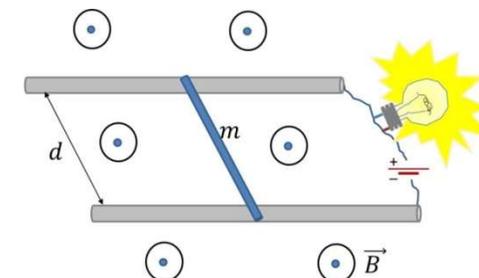
G1 – Um próton atravessa uma região de campo magnético uniforme $\vec{B} = \langle 10; 20; 30 \rangle\text{ mT}$. No tempo t_1 , o próton tem uma velocidade $\vec{v} = \langle v_x; v_y; 2 \rangle\text{ km/s}$ e a força magnética sobre o próton é $\vec{F}_B = \langle 4 \times 10^{-1}; -2 \times 10^{-17}; 0 \rangle\text{ N}$. Nesse instante, qual o valor de v_x e v_y ?

G2 – Um próton viaja através de uma região de campo elétrico e magnético uniformes, onde $\vec{B} = \langle -2,5; 0; 0 \rangle\text{ mT}$. Num certo instante a velocidade do próton é $\vec{v} = \langle 0; 2000; 0 \rangle\text{ m/s}$. Qual a força resultante que age sobre o próton se o campo elétrico for
 (a) $\vec{E} = \langle 0; 0; 4 \rangle\text{ V/m}$, (b) $\vec{E} = \langle 0; 0; -4 \rangle\text{ V/m}$ ou
 (c) $\vec{E} = \langle 4; 0; 0 \rangle\text{ V/m}$?



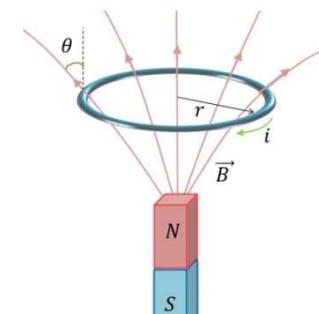
G3 – Uma espira retangular de lados a e b está numa região de campo magnético \vec{B} perpendicular ao plano da espira e é percorrida por uma corrente i constante, conforme mostra a figura ao lado. Determine o torque sobre a espira.

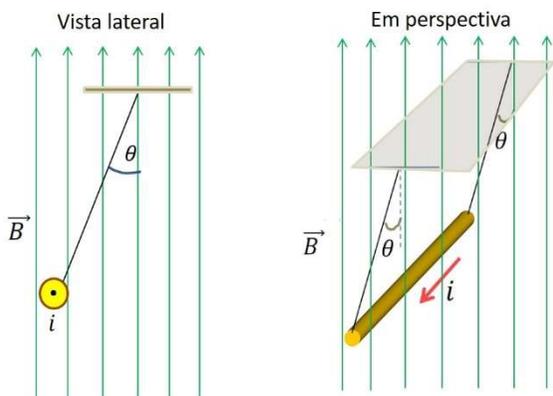
G4 – Dois trilhos de metal separados por uma distância $d = 2,56\text{ cm}$ estão ligados a uma bateria. No momento em que uma barra de metal de massa $m = 24,1\text{ g}$ é colocada sobre os trilhos ($t = 0$), ela fecha o circuito e por ela passa uma corrente $i = 9,13\text{ mA}$. O conjunto está numa região onde existe um campo magnético uniforme $B = 56,3\text{ mT}$. Qual a velocidade da barra $61,1\text{ ms}$ depois? Em que direção ela se move?



G5 – A figura ao lado mostra um cilindro de madeira de massa $m = 250\text{ g}$ e comprimento $L = 10\text{ cm}$ onde foi enrolado um fio formando uma espira de 10 voltas. O cilindro é posicionado de forma que o eixo da espira está perpendicular ao plano inclinado (paralelo à normal do plano inclinado). Nessa região há um campo magnético $\vec{B} = \langle 0; 0,5; 0 \rangle\text{ T}$. Qual deve ser o valor mínimo da corrente na espira capaz de manter o cilindro em sua posição, evitando que ele role para baixo?

G6 – A figura ao lado mostra um ímã e um anel condutor de raio r por onde passa uma corrente i . Se o campo magnético produzido pelo ímã faz um ângulo θ com a vertical na posição onde está o anel, qual é a magnitude e a direção da força resultante sobre o anel?

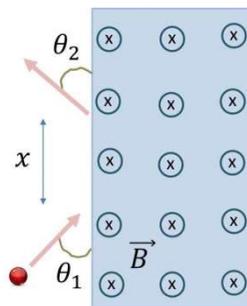




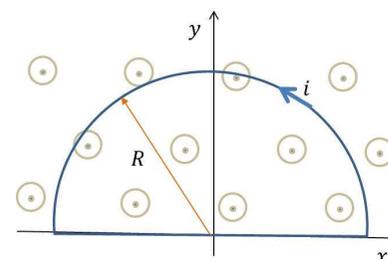
G7 – Uma barra de metal com densidade de massa λ (massa por unidade de comprimento) apresenta uma corrente i (saindo da página). A barra está suspensa por dois fios num campo magnético uniforme vertical como mostra a figura ao lado. No equilíbrio, os fios

fazem um ângulo θ com a vertical. Qual a magnitude do campo magnético?

G8 – Um próton com energia cinética de 6 MeV se move no plano da página e entra numa região de campo magnético $B = 1 \text{ T}$ direcionado para dentro da página, como mostra a figura ao lado. O próton entra na região de campo \vec{B} com o vetor velocidade fazendo um ângulo $\theta_1 = 35^\circ$ com a borda da região. Qual é a distância entre o ponto de entrada e saída (x na figura)? Qual o valor de θ_2 ?

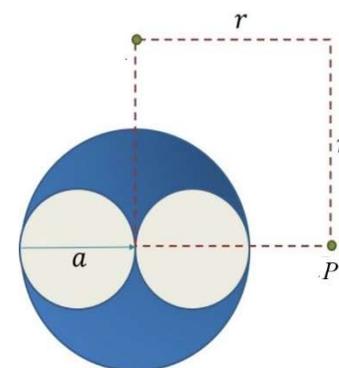


G9 – Considere um elétron orbitando um próton numa trajetória circular de raio $R = 5,29 \times 10^{-11} \text{ m}$ devido à atração Coulombiana. Considere o sistema como se fosse um anel por onde passa uma corrente. Qual será o torque resultante quando o sistema for colocado numa região de campo magnético $B = 0,4 \text{ T}$ perpendicular ao momento magnético do anel?



Mostre que a força resultante sobre o fio é zero.

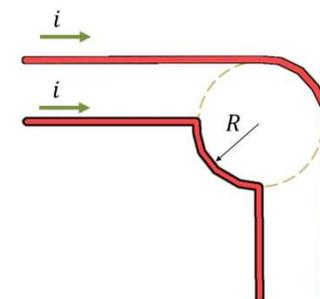
G10 – Um fio por onde passa uma corrente i foi moldado num formato semicircular de raio R e uma reta de comprimento $2R$ como mostra a figura ao lado. Nessa mesma região há um campo magnético que aponta na direção $+z$ (representado pelos pontos azuis na figura ao lado). Mostre que a

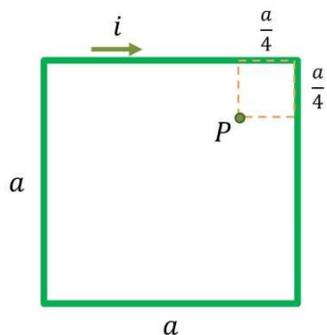


Determine a magnitude e direção do campo magnético em função de μ_0 , i , r e a no ponto P.

G11 – Um condutor cilíndrico longo de raio a contém duas cavidades, cada uma com diâmetro a ao longo de todo o comprimento do fio. Uma visão da seção transversal do fio é mostrada na figura ao lado. Uma corrente i uniforme (considerando a porção sólida do material) passa através do fio e aponta para fora da página. Determine a magnitude e direção do campo

G12 – Dois fios muito longos por onde passa corrente i de mesma magnitude estão moldados conforme a figura ao lado. Mostre que o campo magnético \vec{B} no centro do círculo de raio R é o mesmo que o campo \vec{B} a uma distância R abaixo de um fio reto muito longo por onde passa uma corrente i .

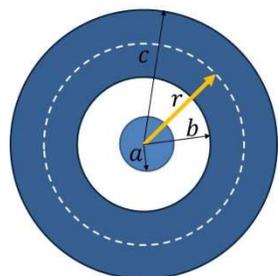
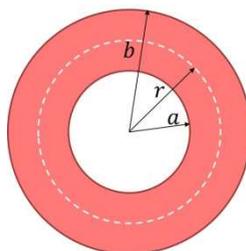




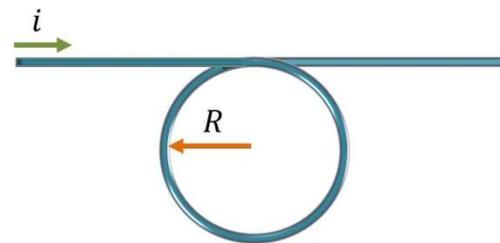
G13 – Encontre uma expressão para determinar a magnitude do campo magnético no ponto P da figura ao lado. Dica: considere a origem dos eixos cartesianos no ponto P.

G14 – A figura ao lado mostra a seção transversal de um condutor oco de raio externo b e interno a , por onde passa uma corrente uniforme i . Demonstre que a magnitude do campo magnético $B(r)$ para uma distância $a < r < b$ é dada por:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi(b^2 - a^2)} \frac{r^2 - a^2}{r}$$



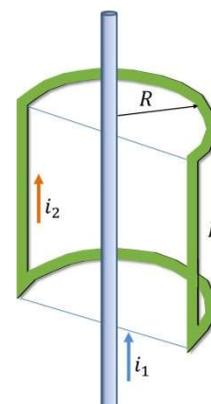
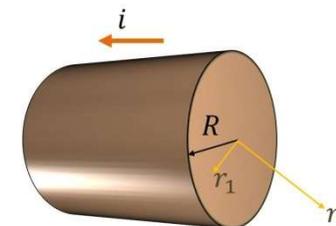
G15 – A figura ao lado mostra um cabo coaxial de raios a , b e c . Correntes opostas de igual magnitude estão distribuídas nos dois condutores. Derive uma expressão para calcular o campo magnético $B(r)$ na região (a) $r < a$, (b) $a < r < b$, (c) $b < r < c$ e (d) $r > c$.



G16 – Um fio condutor por onde passa uma corrente i foi torcido para formar um loop de raio R (no plano da página), como mostra a figura abaixo. Qual a direção do campo magnético no

centro do loop? Determine uma expressão para calcular a magnitude do campo magnético no centro do loop.

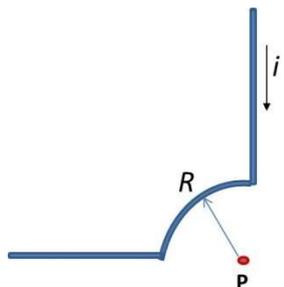
G17 – Uma corrente i passa por um fio condutor cilíndrico de raio R , como mostra a figura ao lado. A densidade de corrente J não é uniforme através da seção transversal do fio, mas obedece à função $J = br$ onde b é uma constante. Determine uma expressão para calcular a magnitude do campo magnético B (a) a uma distância $r_1 < R$ e (b) a uma distância $r_2 > R$ (em relação ao centro do condutor).



G18 – Um fio condutor muito longo por onde passa uma corrente i_1 está parcialmente envolto por um loop por onde passa uma corrente i_2 (figura ao lado). O loop fio foi moldado num formato semicilíndrico de raio R e o comprimento L . O fio condutor passa pelo eixo do loop. Calcule a força magnética exercida sobre o loop.

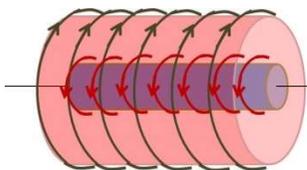
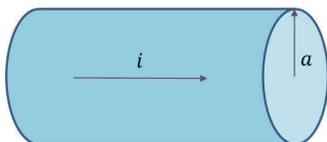
G19 – Considere um solenoide de comprimento L e raio R contendo N voltas de um fio por onde passa uma corrente i . (a) Determine uma expressão para o campo magnético num ponto ao longo do eixo do solenoide, do lado de fora do solenoide, como função da distância x até uma das pontas (considere $x = 0$ no centro do solenoide e d a distância do centro até o ponto onde está sendo calculado o campo B). (b) Mostre que para

valores muito grandes de L , e $d = 0$, B se aproxima de $B = \mu_0 i N/L$, para posições ao longo do eixo, no interior do solenoide, distante das bordas.



G20 – A figura ao lado mostra um fio moldado para formar duas seções retas e um quarto de círculo, por onde passa corrente i . Determine o campo magnético (vetor) no ponto P.

G21 – Um fio cilíndrico espesso de raio a é percorrido por uma corrente i . Determine uma expressão para o campo magnético \vec{B} , dentro e fora do fio, considerando que (a) a corrente está distribuída uniformemente sobre a superfície externa do fio, (b) a corrente está distribuída por todo o volume do fio com densidade de corrente J constante, (c) a corrente está distribuída por todo o volume do fio de forma que a densidade de corrente J é proporcional à distância até o eixo do fio.

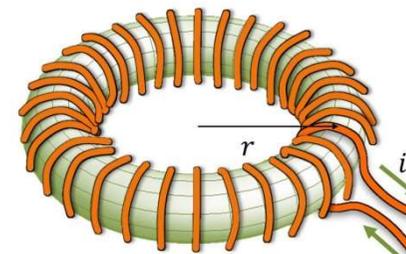


G22 – Considere dois solenoides coaxiais, cada um conduzindo uma corrente i em direções opostas. O solenoide interno, de raio a , possui n_1 voltas por unidade de comprimento; o solenoide externo possui raio b e n_2 voltas por unidade de comprimento. Determine \vec{B} (a) no interior do conjunto, (b) entre eles e (c) fora deles.

G23 – Um fio condutor longo e reto de raio R conduz uma corrente não uniforme cuja densidade de corrente é $J = J_0 r/R$, onde J_0 é uma constante. A corrente total é i . (a) Determine uma expressão para i

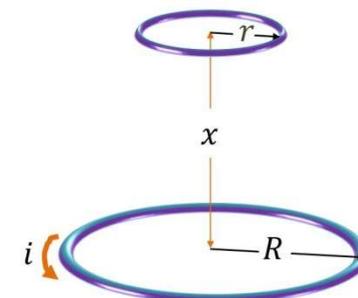
em função de J_0 e R . (b) Determine uma expressão para o campo magnético no interior do fio para uma distância r .

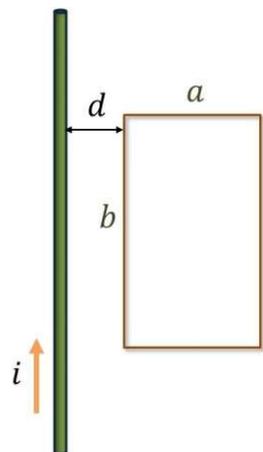
G24 – A figura ao lado mostra um toroide, que consiste num solenoide fechado em forma de anel. (a) Considerando a simetria, explique qual deve ser o formato do campo magnético no interior desse toroide. (b) Considere o toroide compacto (a separação entre cada volta do fio é pequena), com N voltas, conduzindo uma corrente i . Usando a lei de Ampère, determine a magnitude do campo magnético num ponto interno ao toroide, a uma distância r do eixo principal (ver figura ao lado). (c) O campo magnético no interior do toroide é um campo uniforme? Explique.



(H) Lei de Faraday

H1 – A figura ao lado mostra dois anéis cujos eixos estão alinhados, separados por uma distância x . O anel maior tem raio R , o anel menor tem raio r . Os anéis estão separados por uma distância $x \gg R$, e por isso o campo magnético devido à corrente no anel de raio R é praticamente uniforme no anel menor. Considere que a distância x está aumentando a uma taxa constante $dx/dt = v$. (a) Determine uma expressão para o fluxo de campo magnético através do anel menor como função de x . Encontre uma expressão para (b) a fem induzida e (c) a direção da corrente no anel menor.



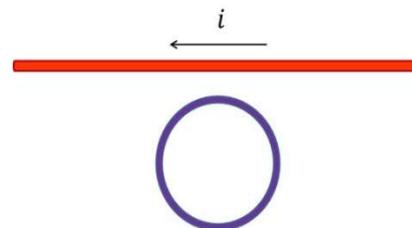
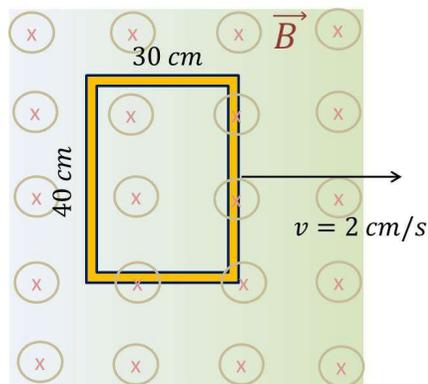


H2 – (a) Calcule o fluxo magnético através do retângulo mostrado na figura ao lado em função de a, b, d e i . (b) Avalie o resultado encontrado para $a = 5 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$, $d = 2 \text{ cm}$ e $i = 20 \text{ A}$.

H3 – Uma espira plana e circular de raio $r = 75 \text{ cm}$ está em repouso numa região de campo magnético uniforme. A espira está orientada de tal forma que o campo magnético aponta para cima

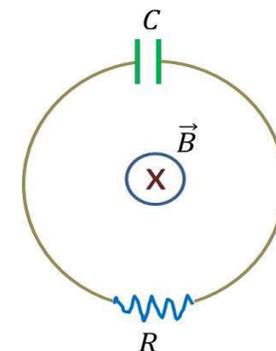
e faz um ângulo de 30° com a normal da espira. O campo varia com o tempo de acordo com $B(t) = 1,4e^{-(0,057t)} \text{ Tesla}$. (a) Determine a fem induzida na espira em função do tempo. (b) Para que valor de t a fem induzida é igual a um décimo do seu valor inicial? Determine o sentido da corrente induzida na espira, se observada por cima da espira.

H4 – Um retângulo que mede $30 \times 40 \text{ cm}$ está localizado no interior de um campo magnético uniforme de $1,25 \text{ T}$, com o campo perpendicular ao plano da bobina. A bobina se move perpendicular ao campo com velocidade constante $v = 2 \text{ cm/s}$, inclusive atingindo a região onde o campo \vec{B} termina abruptamente, como mostra a figura ao lado. Determine a fem induzida nessa bobina quando ela está (a) inteiramente no interior do campo, (b) parcialmente no interior do campo e (c) inteiramente fora do campo.



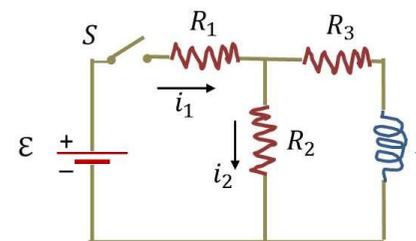
H5 – O fio na figura ao lado conduz uma corrente $i(t) = i_0 e^{-bt}$ onde $b > 0$. Determine o sentido da corrente induzida na bobina (horário ou anti-horário) para $t > 0$.

H6 – A figura ao lado mostra uma espira circular de raio r contendo uma resistência e um capacitor ligados em série, imerso numa região onde um campo magnético uniforme (no espaço) entrando no plano na página decresce no tempo a uma taxa constante $dB/dt = -a$, sendo a uma constante positiva. (a) Qual a carga no capacitor quando ele está completamente carregado? (b) Qual das placas do capacitor está em potencial mais elevado? (c) Qual a origem da força que causa a separação de cargas?



(I) Indutância

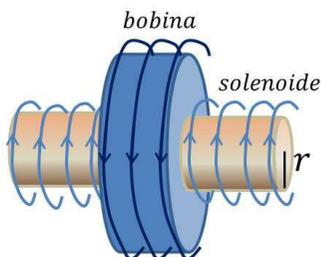
I1 – No circuito ao lado, $\mathcal{E} = 100 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$ e $L = 2 \text{ H}$. Ao fechar a chave S, quais os valores de i_1 e i_2 ? Considere positivo o sentido das correntes indicadas na figura. Muito tempo depois, quais são os valores de i_1 e i_2 ? A chave é então aberta. Nesse instante, quais são os valores de i_1 e i_2 ? E muito tempo depois, quais são os valores de i_1 e i_2 ?



Muito tempo depois, quais são os valores de i_1 e i_2 ? A chave é então aberta. Nesse instante, quais são os valores de i_1 e i_2 ? E muito tempo depois, quais são os valores de i_1 e i_2 ?

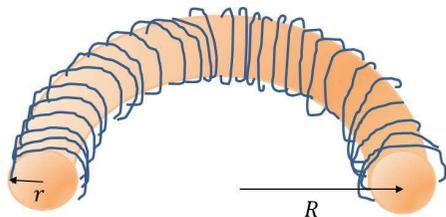
12 – Num circuito LC em série, a carga inicial do capacitor é Q e ele está sendo descarregado. Quando a carga no capacitor é igual a $Q/2$, qual é o fluxo magnético que atravessa cada uma das N espiras do indutor (como função de Q, N, L e C)?

13 – Uma bobina possui N voltas e está envolvendo um solenoide, longo, de raio r , com n espiras por unidade de comprimento (figura ao lado). (a) Mostre que a indutância mútua do sistema é dada por $M = \mu_0 \pi R^2 n N$. (b) Explique por que M não depende do formato, tamanho ou possível falta de proximidade das espiras na bobina.



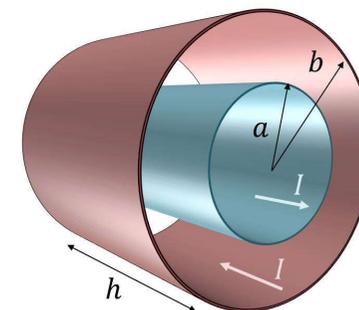
14 – A fem autoinduzida num solenoide de indutância L varia no tempo conforme $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-kt}$. Levando em consideração que a carga é finita (ou seja, $i = 0$ quando $t = \infty$), determine a carga total que passa pelo solenoide (que atravessa um determinado ponto no fio que compõe o solenoide).

15 – Um fio condutor foi enrolado num papelão formando um toroide com N espiras (voltas), raio menor r e maior R . A seção transversal do toroide é mostrada na figura ao lado. Se $R \gg r$, o campo magnético no interior do toroide é essencialmente o mesmo que o campo no interior de um solenoide muito longo que tenha sido moldado no formato de um círculo de raio R . Modelando o campo como se fosse o campo uniforme de um solenoide longo, mostre que a indutância desse toroide é aproximadamente $L \approx \frac{1}{2} \mu_0 N^2 \frac{r^2}{R}$.



moldado no formato de um círculo de raio R . Modelando o campo como se fosse o campo uniforme de um solenoide longo, mostre que a indutância desse toroide é aproximadamente $L \approx \frac{1}{2} \mu_0 N^2 \frac{r^2}{R}$.

16 – Um indutor consiste em duas cascas cilíndricas concêntricas como mostra a figura. A casca interna tem raio a e a externa tem raio b , ambas com comprimento h . A casca interna transporta uma corrente i para fora e a externa para dentro do plano da página, com igual magnitude. Calcule, na região $a < r < b$: (a) a densidade de energia magnética; (b) a indutância.



17 – Mostre que $i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$ é a solução da equação diferencial $iR + L \frac{di}{dt} = 0$ onde i_0 é a corrente em $t = 0$ e $\tau = L/R$.

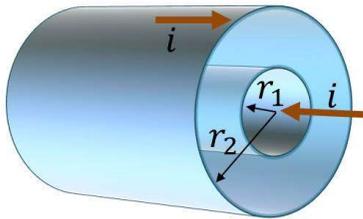
18 – Um fio condutor de raio R transporta uma corrente uniforme. A corrente total no fio é i . Mostre que a energia magnética por unidade de comprimento dentro do fio é dada por $\mu_0 i^2 / 16\pi$.

19 – Um cabo coaxial é formado por dois cilindros condutores de paredes finas, com raios r_1 e r_2 . As correntes nos dois cilindros são iguais em magnitude mas com sentidos opostos. (a) Use a lei de Ampère para determinar o campo magnético como função da distância r ao eixo do cabo nas regiões $(0 < r < r_1)$, $(r_1 < r < r_2)$ e $(r > r_2)$. (b) Mostre que a densidade de energia magnética na região entre os cilindros é dada por:

$$u_m = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{4\pi} i^2 (\pi r^2)^{-1}$$

(c) Mostre que a energia magnética total num volume de cabo com comprimento ℓ é dada por

$$U_m = \frac{\mu_0}{4\pi} i^2 \ell \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$



(d) Mostre que a autoindutância por unidade de comprimento do cabo é dada por

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

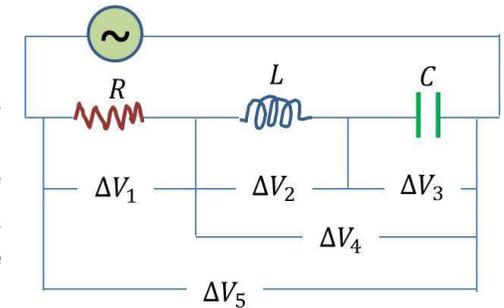
(J) Corrente Alternada

J1 – A tensão de uma fonte de corrente alternada é dada por $\Delta v = 120 \text{sen}(30 \pi t)$ onde a tensão é dada em volts e o tempo t em segundos. A fonte é conectada a um indutor de $0,5 \text{ H}$. Determine: (a) a frequência da fonte, (b) a voltagem rms no indutor, (c) a reatância indutiva do circuito, (d) a corrente rms no indutor e (e) a corrente máxima no indutor.

J2 – Uma fonte de tensão alternada fornece uma tensão $\Delta v = 98 \text{sen}(80 \pi t)$ a um capacitor onde a tensão é dada em volts e o tempo t em segundos. A corrente máxima no circuito é $0,5 \text{ A}$. Determine: (a) a tensão rms da fonte, (b) a frequência da fonte e (c) o valor da capacitância.

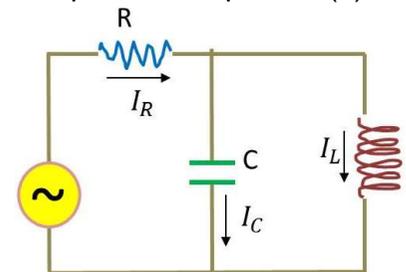
J3 – Um circuito AC é composto por um resistor de 250Ω , um indutor de 15 mH , um capacitor de $3,5 \mu\text{F}$ e uma fonte de tensão alternada com amplitude de 45 V , operando com frequência angular $\omega = 360 \text{ rad/s}$. (a) Qual é o fator de potência do circuito? (b) Determine a potência média aparente (S) fornecida ao circuito. (c) Qual é a potência média ativa (P) dissipada no resistor? Qual é a potência média reativa (Q), que fica armazenada no circuito?

J4 – Cinco voltímetros com impedância muito grande, ajustados para ler valores rms, estão conectados conforme a figura ao lado. Sendo $R = 200 \Omega$, $L = 0,4 \text{ H}$, $C = 6 \mu\text{F}$ e $\Delta V = 30 \text{ V}$, qual é a leitura da tensão em cada voltímetro se (a) $\omega = 200 \text{ rad/s}$ e (b) $\omega = 1000 \text{ rad/s}$?



J5 – Num circuito RLC, $L = 0,28 \text{ H}$ e $C = 4 \mu\text{F}$. A fonte fornece uma voltagem com amplitude de 120 V . Qual é a frequência angular de ressonância do circuito? (b) Quando a fonte opera na frequência angular de ressonância, a amplitude da corrente no circuito é $1,7 \text{ A}$. Qual a resistência do resistor? (c) Na frequência angular de ressonância, quais são as voltagens de pico no indutor, capacitor e resistor?

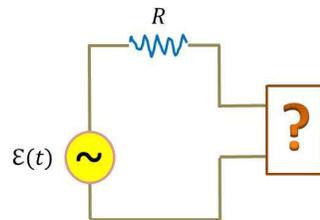
J6 – O circuito ao lado contém uma fonte AC que fornece uma tensão senoidal conforme $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \text{sen}(\omega t)$. No estado de equilíbrio temos as correntes mostradas no circuito. Sem recorrer a uma matemática complicada, responda: (a) Quais os valores de I_R , I_C e I_L quando



$\omega = 0$ (frequência zero significa que a fonte foi substituída por uma bateria ideal)? (b) Quais os valores de I_R , I_C e I_L quando $\omega \rightarrow \infty$? (c) Qual é a frequência de ressonância?

J7 – Um indutor, um capacitor e um resistor estão conectados em série a uma fonte de tensão alternada. Se os valores da resistência, capacitância e indutância forem duplicados, o que acontecerá com (a) a frequência angular de ressonância, (b) a reatância indutiva, (c) a reatância capacitiva e (d) a impedância ?

J8 – O circuito abaixo é formado por uma fonte AC que fornece uma tensão senoidal variando conforme $\varepsilon = \varepsilon_m \text{sen}(\omega t)$, uma resistência $R = 6 \Omega$ e uma parte desconhecida que pode conter um indutor, um capacitor ou ambos. A amplitude da fonte é $\varepsilon_m = 6 V$. Quando a frequência



angular $\omega = 2 \text{ rad/s}$, a corrente está em fase com a fonte, enquanto que para $\omega = 1 \text{ rad/s}$ a corrente está fora de fase em relação à fonte por exatamente $\pi/4$. (a) Quais componentes estão presentes na parte desconhecida (um indutor, um capacitor ou ambos)? Explique. (b) Determine os valores dos componentes desconhecidos.

J9 – Um circuito em série possui impedância de 60Ω e fator de potência igual a $0,72$ em 50 Hz . A tensão da fonte está atrasada em relação à corrente. (a) Que elemento do circuito (um indutor ou um capacitor) deve ser ligado em série com o circuito para aumentar o fator de potência? (b) Qual deve ser o valor desse elemento para que o fator de potência seja igual a 1 ? (c) Apresente diagramas de fasores esquemáticos para o circuito antes e depois da ligação do novo elemento.

O PROCESSO DE MEDIDA NO LABORATÓRIO DE FÍSICA

Não são raros eventos em que nos valem de medidas para tomarmos decisões. Medimos nossa temperatura corporal para avaliarmos se necessitamos de tratamento. Medimos a pressão manométrica dos pneus para avaliarmos se precisamos injetar ou retirar ar neles. Consultamos medidas da temperatura ambiente para escolhermos a roupa que vestiremos. Consultamos o horário (medida de tempo) para não chegarmos atrasados em encontros. Medidas são, portanto, fundamentais em nossas vidas. No entanto, usualmente não nos preocupamos muito com a precisão dessas medidas. Em grande parte das vezes, não nos interessa saber se o horário informado no relógio está um pouco atrasado ou adiantado. Não nos preocupamos em saber o quanto podemos confiar nas temperaturas coletadas com um determinado termômetro. Nossas medidas comumente são realizadas de forma despreziosa, sem muito rigor.

No laboratório de Física isso ocorre de modo muito diferente. Os processos de medição são mais minuciosos do que os que realizamos costumeiramente. Desejamos obter a maior precisão possível com os equipamentos de que dispomos. Mas como fazer isso? Como podemos melhorar a precisão dos processos de medição? Intuitivamente podemos concluir que inferências realizadas a partir de um conjunto de medidas são mais precisas do que medidas isoladas. Mas, quando disponho de um conjunto de medidas, como posso analisá-las? Calcular a média delas é suficiente? Responder a questões como essas é o objetivo desta atividade. Para exemplificarmos todo esse processo, realizaremos um debate sobre a medição da resistência interna de amperímetros.

O que são amperímetros?

Um amperímetro é um instrumento utilizado para a realização de medidas de correntes elétricas. Evidentemente, não queremos modificar os circuitos quando os exploramos com um instrumento. Com amperímetros, não é diferente. Queremos medir correntes elétricas sem alterar as características do circuito. Mas como é possível fazer isso? Não discutiremos aqui os detalhes sobre o funcionamento interno de um amperímetro. No entanto, vamos avaliá-los do ponto de vista de uma das suas características mais importantes: a sua resistência elétrica.

A resistência elétrica de um circuito influencia na intensidade da corrente elétrica que circula nele. A corrente elétrica i que perpassa por uma resistência elétrica R submetida a uma tensão ΔV , por exemplo, pode ser predita pela seguinte relação:

$$i = \frac{\Delta V}{R} . \quad \text{Eq. 1}$$

O amperímetro precisa ser posicionado em série no circuito em que se deseja medir a corrente elétrica, como é exemplificado na figura

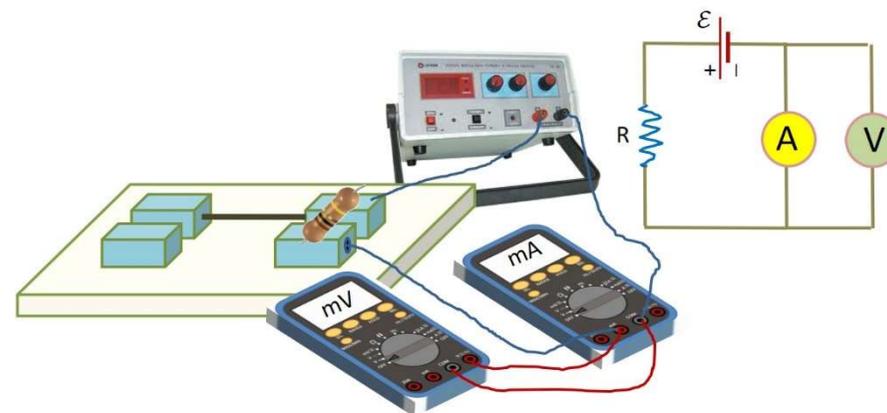


Figure 1- Medindo a resistência interna de um multímetro

1. Como a resistência equivalente em circuitos em séries é a soma da resistência elétrica de cada um dos seus componentes, a resistência interna dos amperímetros se soma à resistência equivalente do circuito investigado, alterando a sua dinâmica. Por isso, nosso desejo é que os amperímetros tenham resistência elétrica nula. No entanto, a resistência elétrica de um amperímetro real, por menor que seja, nunca é nula. Eles possuem um circuito interno com fios e diversos componentes eletrônicos que acabam provocando uma resistência à circulação de corrente elétrica. Ainda assim, frequentemente desprezamos tal resistência. Será que isso é razoável? Quando podemos desprezar a resistência interna dos amperímetros e quando não podemos? Para respondermos tais perguntas, precisamos conhecer o valor da resistência interna típica de um amperímetro.

Medindo a resistência elétrica de um amperímetro

Nesta disciplina, usaremos diversos amperímetros de uma mesma marca e modelo em uma série de experimentos (Minipa ET-2075B). Por isso, é interessante que conheçamos a resistência elétrica deles para podermos avaliar quando podemos desprezá-la e quando não. Mas como podemos obter essa informação? Podemos medi-la. Um procedimento simples para isso é submeter o amperímetro a uma diferença de potencial ΔV conhecida e medir a corrente elétrica i que passa por ele. Desse modo, podemos usar a Eq. 1 para inferir a resistência elétrica do equipamento. Mas podemos confiar em uma única medida? Depende da precisão de que necessitamos para essa medida. Intuitivamente, sabemos que, se medirmos a resistência interna a partir de um conjunto de dados, poderemos ter uma maior confiabilidade nos dados. No exemplo de que estamos tratando, é possível se coletar dados da corrente no amperímetro quando submetido a diferentes tensões. Desse modo, pode-se inferir a resistência elétrica do amperímetro pela declividade da reta constituída

pelos dados representados em um gráfico da tensão em função da corrente elétrica, como pode ser constatado da Eq.1. No entanto, como temos incertezas associadas a cada dado experimental coletado, esses dados não serão perfeitamente representados por uma reta. Surge então uma nova questão: qual é a melhor curva que se ajusta a esses dados?

Ajuste de Curvas

Diversas retas podem ser ajustadas a um conjunto de dados experimental. Qual delas utilizar? Intuitivamente, podemos conjecturar que a melhor reta a ser utilizada é aquela tal que a soma das diferenças entre os valores de tensão medidos e os preditos pela reta tenha o menor valor possível. Em outras palavras, queremos minimizar a soma

$$\sum_{i=1}^N d_n = (\Delta V_i - \overline{\Delta V}_i),$$

onde ΔV_i são as tensões medidas e $\overline{\Delta V}_i$ são as tensões preditas pela reta ajustada.

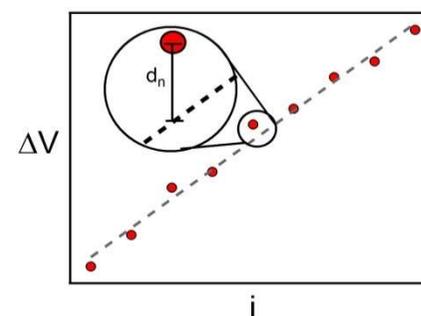


Figura 1 - Diferença de potencial em função da corrente

No entanto, há um inconveniente importante no uso desse critério: tal soma pode ser bem pequena para retas que não apresentam bom ajuste aos dados se as diferenças entre os valores medidos e os preditos se cancelarem, sendo alguns positivos e outros negativos. Nesses casos, apesar de não termos uma reta bem ajustada aos dados, o critério utilizado indicaria que sim. Como resolver isso? Elevando os valores de d_n ao

quadrado. Ou seja, podemos procurar a reta tal que a seguinte soma tenha o menor valor possível:

$$\sum_{i=1}^N d_n^2 = (\Delta V_i - \overline{\Delta V})^2.$$

O método que utiliza esse critério para a realização de ajustes de curvas, que é amplamente utilizado no meio acadêmico, é denominado Método dos Mínimos Quadrados. Todos os *softwares* do tipo planilha eletrônica realizam esse cálculo automaticamente e nos valeremos disso quando necessário.

Todos os amperímetros da sala possuem a mesma resistência interna?

Ainda que todos os amperímetros que utilizaremos nas nossas aulas sejam da mesma marca e modelo, eles possuem diferentes resistências internas. Existe alguma forma de estimar a resistência interna de um desses amperímetros escolhido aleatoriamente? Calcular a média das resistências é suficiente para realizar essa estimativa?

Variabilidade das medidas: o desvio padrão amostral e da média

Apesar de as resistências dos amperímetros não serem exatamente as mesmas, elas possuem valores que se distribuem em torno de um valor médio, que é igual à média dessas resistências. Desse modo, se tomarmos um dos amperímetros aleatoriamente, o valor mais provável da sua resistência interna é igual à média das resistências internas de todos os amperímetros. Mas quanto podemos confiar nessa estimativa? Para respondermos tal pergunta, é importante quantificarmos a variabilidade das resistências r que medimos. Quanto menor for essa variabilidade, maior será a nossa confiança para assumir que a resistência interna de um amperímetro particular é igual à média. Intuitivamente, podemos conjecturar que tal variabilidade pode ser medida pelo somatório das diferenças entre as resistências

medidas r_i e a média \bar{r} dessas resistências, ou seja, por $(r_1 - \bar{r}) + (r_2 - \bar{r}) + \dots + (r_N - \bar{r})$, onde N é o número de medidas realizadas. No entanto, temos aqui um inconveniente semelhante ao que tivemos quando analisávamos ajustes de curvas: se valores positivos e negativos se cancelarem, esse somatório pode ser muito pequeno mesmo quando os dados apresentam grande variabilidade. Podemos propor a mesma solução adotada anteriormente: vamos elevar os termos ao quadrado. Temos então a variabilidade dos dados sendo mensurada por $(r_1 - \bar{r})^2 + (r_2 - \bar{r})^2 + \dots + (r_N - \bar{r})^2$.

A impossibilidade de comparação entre as variabilidades de diferentes conjuntos de dados é a limitação desta proposta, pois o resultado desse somatório é altamente dependente da quantidade de termos. Desse modo, é possível que esse somatório seja maior para grandes conjuntos com pouca variabilidade do que para pequenos grupos com grande variabilidade. Para amenizar tal limitação, podemos, então, dividir o somatório por N , ou seja, calcular a variabilidade por $[(r_1 - \bar{r})^2 + (r_2 - \bar{r})^2 + \dots + (r_N - \bar{r})^2]/N$. Ainda que esse somatório seja conceitualmente interessante, não é essa a medida de dispersão de dados que costuma ser utilizada no meio científico, mas algo que guarda alguma semelhança com ele: o **desvio padrão dos dados** (σ). Ele é calculado por:

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{(r_1 - \bar{r})^2 + (r_2 - \bar{r})^2 + \dots + (r_N - \bar{r})^2}{N - 1}}$$

Mas por que utilizamos essa equação? A resposta está em suas propriedades. Quando construímos um histograma (gráfico de frequências) de um conjunto de medidas, por exemplo, podemos, em muitos casos, assumir que a distribuição desses dados é representada por uma distribuição normal. A equação que define essa distribuição assim como sua representação gráfica é ilustrada na Figura 3.

Não é nosso objetivo aqui discutir detalhes da distribuição normal. O que desejamos destacar é que, quando supomos que a distribuição de um conjunto de dados é normal, o que é bastante razoável na maioria das vezes, o desvio padrão σ quantifica como os dados estão distribuídos. Para entendermos isso, analisemos a Figura 4.

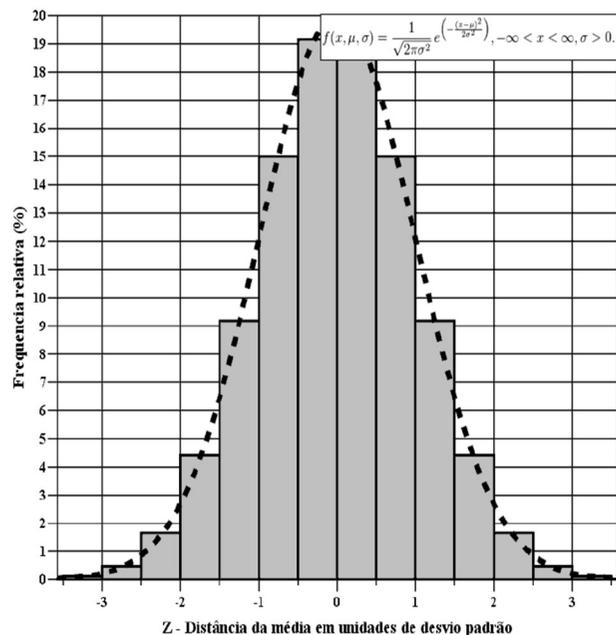


Figura 2 - A distribuição normal é usualmente utilizada para representar a distribuição de frequências de um conjunto de dados (Lima Jr. et al., 2013, p. 30).

O intervalo compreendido pela média das medidas mais ou menos um desvio padrão compreende 68% das medidas realizadas. No caso que estamos exemplificando, se tomarmos a média \bar{r} das resistências internas r de todos os amperímetros investigados e o desvio padrão σ_r desses dados, 68% das medidas estarão no intervalo entre $(\bar{r} - \sigma_r)$ e $(\bar{r} + \sigma_r)$; 95% no intervalo $(\bar{r} \pm 2\sigma_r)$; e 99% no intervalo $(\bar{r} \pm 2,57\sigma_r)$.

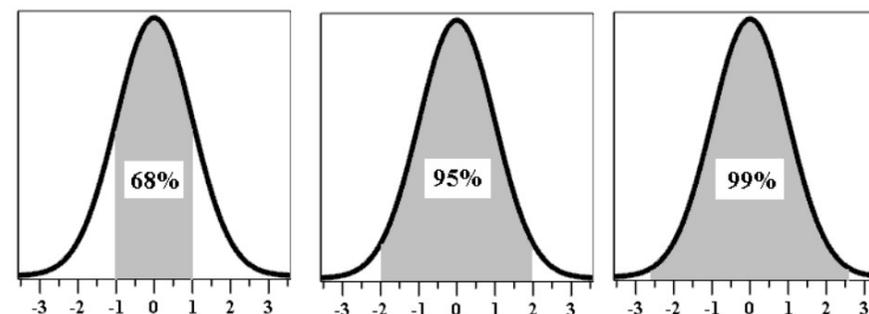


Figura 3 - A média e o desvio padrão demarcam a distribuição dos dados em uma distribuição normal. Na figura, o eixo das abcissas expressa a distância da média em unidades de desvio padrão (Lima Jr. et al., 2013, p. 30).

Agora já sabemos como quantificar a variabilidade de um conjunto de dados. Podemos então calcular a média e o desvio padrão das resistências internas de um conjunto de amperímetros. Mas surge então uma questão: Se analisássemos um novo conjunto de amperímetros da mesma marca e modelo dos exemplificados aqui, a média das resistências internas desse novo conjunto de amperímetros seria a mesma? Provavelmente não. Temos como estimar, a partir do conjunto de medidas que realizamos, a média das resistências internas desse novo conjunto de amperímetros? Temos! Para responder a essa questão, temos que compreender um novo conceito: o de **desvio padrão da média** ($\sigma_{\bar{r}}$). Ele é calculado por:

$$\sigma_{\bar{r}} = \frac{\sigma_r}{\sqrt{N}}$$

Não vamos entrar em detalhes aqui sobre a origem do conceito de desvio padrão da média¹; vamos apenas explicar como essa grandeza nos permite estimar a incerteza na média de um conjunto de medidas. Para isso, vamos supor um novo conjunto de N novas

1 Se você é um aluno curioso, pesquise sobre o Teorema Central do Limite para compreender com mais profundidade o conceito de desvio padrão da média.

medidas da resistência interna de amperímetros como os investigados nesta aula. Qual seria a média dessas medidas? Assim como o desvio padrão dos dados quantifica a dispersão dos dados em torno da média, o desvio padrão da média quantifica a dispersão das médias de subconjuntos de dados em torno da média de todo o conjunto de dados. Aplicando esse conceito ao nosso exemplo, podemos interpretar os dois conjuntos de medidas de resistências internas como subconjuntos de um grande conjunto contendo todas as medidas. Desse modo, podemos afirmar, com 68% de confiança, que a média das N novas medidas a serem realizadas estará no intervalo compreendido por $(\bar{r} \pm \sigma_{\bar{r}})$; com 95% de confiança, no intervalo $(\bar{r} \pm 2\sigma_{\bar{r}})$; e com 99% de confiança, no intervalo $(\bar{r} \pm 2,57\sigma_{\bar{r}})$. O desvio padrão da média pode ser compreendido assim como a incerteza da média de um conjunto de medidas, ou seja, ele nos fornece uma estimativa da confiabilidade de uma média. Em suma, se escolhermos um amperímetro aleatoriamente, podemos dizer que: i) o valor mais provável da sua resistência interna é a média das resistências de todos os amperímetros; e ii) a incerteza que temos nesse valor é igual ao desvio padrão da média das resistências dos amperímetros.

E se eu só tivesse condições de realizar uma única medida?

Nem sempre podemos realizar diversas medidas de uma grandeza. Em alguns casos, nem mesmo faz sentido realizar diversas medidas. No entanto, é evidente que existe uma incerteza associada a uma única medida. Não existem instrumentos que sejam perfeitamente precisos. Então como podemos estimar essa incerteza? Usualmente os manuais dos instrumentos trazem informações sobre isso. Desse modo, as incertezas das medidas de tensão e de corrente elétrica realizadas com um voltímetro e um amperímetro podem ser consultadas no manual do multímetro utilizado. Mas como é calculada a incerteza da resistência interna de um amperímetro que foi calculada a partir de

apenas uma medida de tensão e uma de corrente elétrica? Nesse caso, precisamos calcular a incerteza propagada das incertezas das medidas de tensão e de corrente elétrica.

Os métodos de cálculo de incertezas propagadas podem ser bastante complicados. Aqui, trataremos de um método bastante simples usualmente denominado de Método dos Limites. Vamos exemplificá-lo supondo que a incerteza da tensão sobre as entradas do amperímetro é σ_1 e da corrente elétrica que circula por ele é σ_2 . Ou seja, a tensão medida está no intervalo entre $\Delta V - \sigma_1$ e $\Delta V + \sigma_1$ e a corrente elétrica, entre $i - \sigma_2$ e $i + \sigma_2$. Qual é então a incerteza da resistência elétrica do amperímetro investigado? Para responder isso, basta calcularmos os valores limites dessa grandeza. O máximo valor possível para a resistência ocorrerá se a tensão for $\Delta V + \sigma_1$ e a corrente elétrica for $i - \sigma_2$. Nesse caso, usando a Eq. 1, temos:

$$r_{\text{máx}} = \frac{\Delta V + \sigma_1}{i - \sigma_2}$$

Usando o mesmo raciocínio, o valor mínimo de r será:

$$r_{\text{mín}} = \frac{\Delta V - \sigma_1}{i + \sigma_2}$$

Desse modo, podemos dizer que o valor da resistência interna medida está no intervalo entre $r_{\text{máx}}$ e $r_{\text{mín}}$. Em outras palavras, o valor da resistência elétrica do amperímetro é:

$$R = \left[\left(\frac{r_{\text{mín}} + r_{\text{máx}}}{2} \right) \pm \left(\frac{r_{\text{mín}} - r_{\text{máx}}}{2} \right) \right]$$

Erro é a mesma coisa que incerteza?

Apesar de serem frequentemente utilizados como sinônimos, os manuais de metrologia atribuem significados distintos aos conceitos de “erro” e “incerteza”. O Guia para Expressão da Incerteza da Medição (Joint Committee for Guide in Metrology, 2008 *apud* Lima Jr. *et al.*, 2013) usa o termo “erro” para indicar a diferença entre o valor verdadeiro e o resultado de uma medição. Desse modo, o conceito de erro tem uso restrito, pois são poucos os casos em que conhecemos o valor verdadeiro de uma grandeza. São exemplos desses casos experimentos em que se deseja mensurar a velocidade da luz no vácuo ou o valor de π , que são valores previamente conhecidos pelo experimentador. O cálculo do erro só faz sentido para casos em que sabemos o valor verdadeiro da grandeza que se quer medir.

A incerteza, por outro lado, é entendida como uma estimativa que quantifica a confiabilidade do resultado de uma medição. Desse modo, quando calculamos o desvio padrão da média de um conjunto de medidas, estamos calculando a incerteza da média dessas medidas, ou seja, estamos avaliando a confiança que podemos ter em adotar a média dessas medidas como o valor da grandeza mensurada. O conceito de incerteza, portanto, tem maior aplicabilidade do que o conceito de erro.

Algarismos significativos e incerteza

Uma questão frequente nas aulas de laboratório é: Com quantos algarismos uma grandeza deve ser apresentada? No laboratório, a resposta dessa questão é uma função da incerteza da grandeza. Devemos apresentar os dados até o seu primeiro algarismo duvidoso. Voltemos ao exemplo da resistência interna dos amperímetros. Suponhamos que a média das resistências internas de um conjunto de amperímetros é $2,1546 \Omega$ e o desvio padrão dessa média, que é

entendido aqui como a incerteza da resistência interna dos amperímetros, é $0,03 \Omega$. Interpretando tais dados assumimos, com 68% de certeza, que a resistência interna dos amperímetros está no intervalo entre $2,1246$ e $2,1846 \Omega$. Desse modo, a segunda casa decimal da grandeza medida é duvidosa. Por isso, os algarismos subsequentes são omitidos quando expressamos essa medida, e a medida da resistência interna dos amperímetros exemplificados é exposta por $(2,15 \pm 0,03) \Omega$. Em suma, o resultado de uma medição deve ser sempre expresso com a mesma quantidade de casas decimais que sua incerteza. Os algarismos apresentados são então chamados de algarismos significativos.

Referência

Lima Jr., P.; Silva, M. T. X.; Silveira, F. L.; Veit, E. A. (2013). *Laboratório de mecânica: subsídios para o ensino de Física experimental*. Porto Alegre: UFRGS, Instituto de Física. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/90438>.

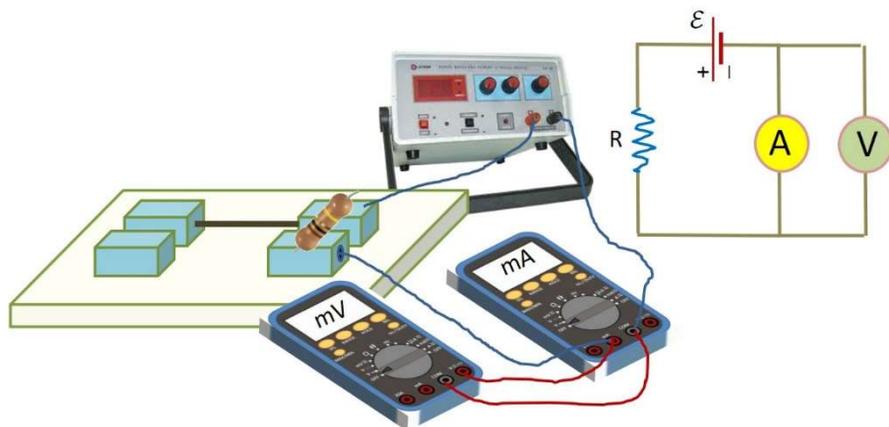
Atividade de Laboratório I

Instrumentos de medida e incertezas

Este material foi cuidadosamente preparado para auxiliar no andamento das atividades no laboratório de Física Geral Eletromagnetismo. É importante responder TODAS as perguntas (indicadas pelo símbolo ♦) feitas ao longo do texto, discutindo com seu grupo possíveis respostas e justificando-as. Sempre que possível, faça isso por escrito.

TAREFA 1

Construa um circuito contendo um resistor de $1\text{ k}\Omega$ em série com uma fonte de tensão contínua e um multímetro. Coloque o multímetro na função amperímetro na escala de miliampere. Usando outro multímetro, meça a tensão no amperímetro. Realize medidas com diferentes correntes elétricas variando a tensão de saída da fonte.



- ♦ Como podemos tratar esses dados se nosso objetivo é medir a resistência interna do amperímetro?
- ♦ Qual é a melhor curva que se ajusta a esses dados?

Para responder essas questões, se dirija a um dos computadores da sala e use um aplicativo que possibilite a construção de gráficos, SciDavis por exemplo. Insira seus dados no aplicativo, construa o gráfico desejado e encontre a melhor reta que se ajusta aos dados.

- ♦ Qual foi a melhor reta ajustada? Determine a equação dessa reta ajustada.
- ♦ Qual é o valor da resistência elétrica do amperímetro que você investigou?

TAREFA 2

Utilize as medidas de todos os grupos da turma e aplique os conhecimentos abordados na tarefa de leitura para responder as seguintes questões:

- ♦ Qual deve ser a resistência interna de um amperímetro escolhido aleatoriamente entre os utilizados nesta aula?
- ♦ Qual é a incerteza desse valor?

TAREFA 3

Suponha que o manual do Minipa ET-2075B informe que as medidas de tensão e corrente realizadas nas faixas de milivolt e miliampere têm incerteza de 3%. Use esses dados para calcular a

incerteza da resistência interna inferida de uma única medida de tensão e corrente elétrica realizada na Tarefa 1.

- ◆ Essa incerteza é maior ou menor do que a incerteza mensurada na Tarefa 2 por meio do desvio padrão da média das resistências medidas pela turma?
- ◆ Elas são coerentes? Por quê?

CIRCUITO RC – ARMAZENANDO ENERGIA PARA UTILIZAR NO MOMENTO CERTO

Estamos tão acostumados à comodidade proporcionada por equipamentos como refrigerador, televisão, telefone celular, até mesmo o mais simples relógio, que fica difícil imaginar como seria a vida sem eles. O funcionamento de todos os dispositivos eletrônicos baseia-se na passagem de corrente elétrica por um circuito, que pode conter diferentes componentes incluindo resistores, capacitores e baterias (ou fontes de tensão), entre outros. Um circuito contendo um resistor e um capacitor (que podem também estar conectados a uma fonte de tensão) é conhecido como CIRCUITO RC.

Num circuito elétrico, a função principal da fonte de tensão (ou bateria) é fornecer energia ao sistema. A energia fornecida pela fonte pode ser constante (tensão contínua, ou DC) ou pode variar com o tempo (tensão alternada, ou AC), respeitando uma função periódica tipo degrau, triangular, senoidal, entre outras.

O capacitor é um dispositivo que tem como função armazenar energia, e isso é feito no campo elétrico que se estabelece entre as placas do capacitor quando este está carregado. Assim como a bateria, o capacitor também pode fornecer energia ao circuito, quando, por exemplo, um capacitor carregado é conectado a uma lâmpada, a lâmpada acende. No entanto, há uma grande diferença entre conectar uma lâmpada a um capacitor carregado e a uma bateria. A bateria (ou fonte de tensão DC) mantém a mesma diferença de potencial por um longo tempo. Quando uma lâmpada é conectada a uma bateria, por exemplo, a lâmpada acende e o seu brilho não muda enquanto o circuito estiver conectado. No entanto, ao conectar um capacitor carregado numa lâmpada (resistor), o brilho da lâmpada é intenso logo que o circuito é fechado, diminuindo com o passar do tempo até se

extinguir por completo. No caso do capacitor, a diferença de potencial não é constante. Inicialmente a passagem de carga pelo resistor é bem fácil, pois há grande diferença de potencial entre as placas, mas conforme o capacitor descarrega, a corrente decresce de forma exponencial, até se extinguir por completo.

No laboratório, faremos experimentos para entender como se comporta a corrente num circuito contendo um capacitor e um resistor. Essa situação, apesar de simplificada, representa sistemas utilizados atualmente em diversas situações como, por exemplo, o flash da máquina fotográfica, o marcapasso e o desfibrilador.

Salvando vidas

“...afastem-se ...choque”.

Em situações onde há parada cardíaca, muitas vezes faz-se uso de um equipamento chamado desfibrilador para ressuscitar o paciente. O desfibrilador é um equipamento que faz passar uma corrente elétrica pelo miocárdio, músculo cardíaco que auxilia no bombeamento de



Figura 4 - Desfibrilador

sangue através do coração, para reestabelecer seu funcionamento de forma sincronizada. Desfibriladores podem ser encontrados em hospitais, centros de saúde, ambulâncias e até mesmo em locais públicos de grande movimento, como aeroportos.

O desfibrilador gera uma descarga elétrica no paciente. Para que haja descarga elétrica, primeiro é preciso acumular uma certa quantidade de carga e para isso utiliza-se um capacitor. A carga acumula-se nas placas do capacitor quando este é submetido a uma diferença de potencial. A figura 6 mostra uma representação

esquemática de um circuito contendo uma fonte de tensão, um capacitor e o paciente (representado na imagem pelo coração).

Primeiramente, o capacitor é conectado à fonte de tensão e isso faz com que cargas elétricas se acumulem nas placas do capacitor, que após um tempo apresenta a mesma diferença de potencial da fonte. As pás do desfibrilador, feitas de material condutor, são geralmente posicionadas no peito do paciente, próximas uma da outra, ou uma

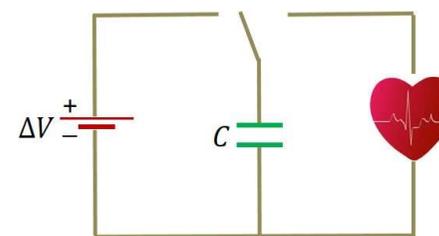


Figura 5 – Circuito RC (paciente - capacitor).

sobre o peito e a outra na lateral logo abaixo do braço esquerdo, possibilitando que a corrente elétrica atravesse o coração do paciente. Para diminuir a resistência elétrica e aumentar o valor da corrente que atravessa o

miocárdio, é comum utilizar algum tipo de gel condutor que melhora o contato elétrico entre as pás e o peito do paciente. O caminho entre uma pá e a outra passando pelo coração do paciente equivale a uma resistência elétrica aproximada de $50 - 150 \Omega$, a tensão da fonte é aproximadamente $5000 V$ enquanto o capacitor tem em torno de $32 \mu F$ de capacitância.

Quando as pás do desfibrilador (carregado) são posicionadas no paciente e a descarga é acionada, a diferença de potencial que havia no capacitor diminui rapidamente, dando lugar a uma corrente elétrica que atravessa o miocárdio por um curto período de tempo, reestabelecendo os batimentos cardíacos de forma sincronizada.²

² Williams, D., *Physical principles of defibrillators*. Anaesthesia & Intensive Care Medicine, 2012. **13**(8): p. 384-387.

Circuito RC - série

Um circuito composto por um resistor de resistência R e um capacitor de capacitância C é a forma mais simples de circuito RC (figura 7). O desfibrilador é um exemplo de circuito RC. A energia elétrica armazenada no campo elétrico do capacitor é convertida em outras formas de energia, geralmente calor, no resistor. Essa conversão de energia não é instantânea, mas leva um tempo característico em cada circuito, dependendo dos valores de R e C .

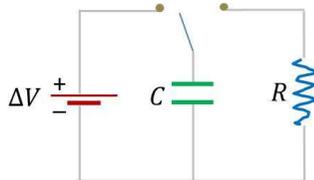


Figura 6 - Circuito RC

Ao conectar a resistência ao capacitor carregado, eliminando do circuito a fonte de tensão (como no caso do desfibrilador), num caminho fechado passando por R e C , podemos dizer que

$$\Delta V(t) + i(t)R = 0$$

Corrente i é definida como a quantidade de carga Q que atravessa o fio por unidade de tempo

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

e a ddp no capacitor é dada por

$$\Delta V(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

Dessa forma, podemos dizer que

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}Q(t)$$

Essa é uma equação diferencial de primeira ordem, pois nela estão presentes a função $Q(t)$ e também a derivada temporal dessa função, $\frac{dQ(t)}{dt}$. A solução dessa equação deve ser uma função cuja derivada primeira é igual à própria função, a menos de uma constante. A função que apresenta esse tipo de comportamento é a função exponencial, portanto pode-se escrever

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

A quantidade RC , chamada *constante de tempo*, é o que caracteriza o circuito e pode ser reescrita como τ . Num processo de descarga, por exemplo, após um tempo igual a τ , a carga no capacitor é igual a e^{-1} (ou 0,37) vezes o seu valor inicial.

Métodos para resolver esse tipo de equação serão vistos em detalhe no curso de equações diferenciais. Por ora, você pode utilizar a solução dessas equações conforme a tabela a seguir.

Capacitor Carregando	Capacitor Descarregando
$\Delta V = R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C}$	$R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = 0$
$Q(t) = \Delta V_0 C \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$	$Q(t) = \Delta V_0 C e^{-\frac{t}{RC}}$
$\Delta V(t) = \Delta V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$	$\Delta V(t) = \Delta V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$

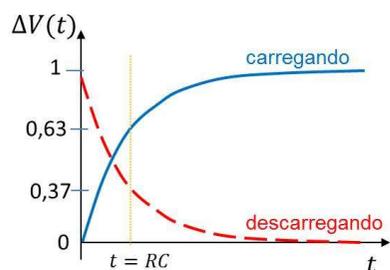


Figura 7 – Tensão entre as placas do capacitor durante o processo de carga ou descarga.

é útil se quisermos estudar a evolução temporal de ΔV do capacitor. Nesse caso, precisamos de medidas instantâneas que podem ser obtidas através de um osciloscópio.

O osciloscópio é um dos instrumentos de medição mais versáteis usados na eletrônica. Ele nos fornece, num modo gráfico, tensões em função do tempo. Em um monitor como o apresentado na figura 9, ele representa, no eixo das ordenadas (vertical), a tensão entre dois pontos e no eixo das abscissas, o tempo. Ou seja, a tela de um osciloscópio é um gráfico de uma função da tensão contra o tempo: $\Delta V \times t$. Trata-se de um instrumento próprio para observar variações rápidas de tensões ao longo do tempo, informação essa que não pode ser obtida por um multímetro comum.

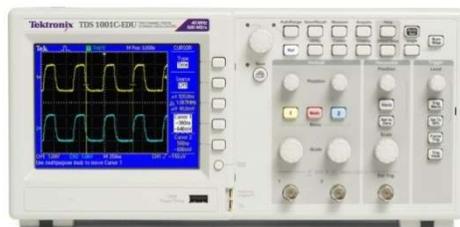


Figura 8 - A tela do osciloscópio apresenta um gráfico da tensão entre dois pontos em função do tempo.

Quando $t = RC$, a tensão no capacitor atinge 63% do valor máximo quando este estiver carregando e 37% do valor máximo num processo de descarga. Essa função é representada graficamente na figura 8.

Como o multímetro só nos permite medir valores RMS (do inglês *root mean square*)³ de tensões, ele não

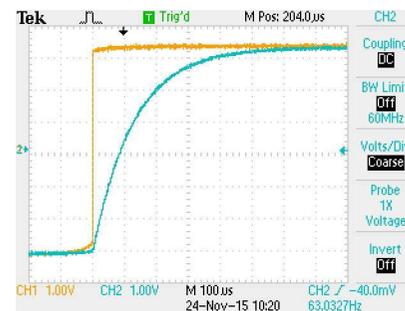


Figura 9 - Tensão da fonte e do capacitor, quando o mesmo está sendo carregado.

capacitor, enquanto que a curva em formato degrau (laranja) representa a tensão da fonte.

Suponha que desejamos estudar o processo de carregamento de um capacitor como o que exemplificamos há pouco. Se o colocarmos em série com uma fonte de tensão ΔV contínua, ao ligarmos o circuito, a tensão no capacitor evoluirá de modo semelhante ao representado na figura 10. A curva suave (verde) representa a tensão no

³ Para mais informações sobre valores RMS, veja página 78.

Atividade de Laboratório II

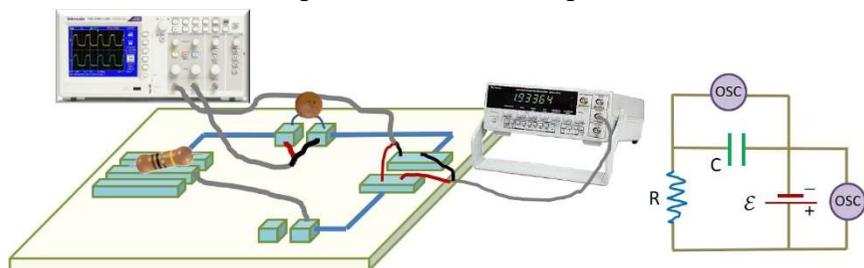
Circuitos RC - série

1 - Osciloscópio

O osciloscópio é um instrumento para medir tensões alternadas, em intervalos de tempo que variam desde segundos até microssegundos. As escalas utilizadas nos dois eixos – usualmente no eixo vertical tem-se a tensão e no eixo horizontal o tempo – podem ser modificadas com o objetivo de tornar o gráfico, que é visto na tela do osciloscópio, o mais adequado para as medições que se deseja realizar. Se, por exemplo, a escala do eixo vertical escolhida atribuir o valor de 2 V por divisão (2 V/div), isto significa que cada divisão do gráfico representado na tela vale 2 V. Da mesma forma, pode-se modificar a escala do eixo horizontal. O osciloscópio, assim como o voltímetro, sempre mede tensões entre dois pontos, portanto, cada canal precisa ser abastecido com dados coletados em dois pontos. Por isso, o cabo coaxial que alimenta cada canal possui dois pinos.

2 – Aparato Experimental

Monte um circuito contendo um capacitor, um resistor e o gerador de funções como mostrado esquematicamente na figura abaixo. Tanto o gerador de funções quanto o osciloscópio possuem um fio terra (fio preto do cabo coaxial) que precisam necessariamente estar conectados no mesmo ponto. Por isso, é importante montar o circuito



conforme mostra a figura assegurando que o fio terra da fonte está ligado com o fio terra do osciloscópio. Isso significa ligar cabo preto com preto.

Construa então um circuito em série com um resistor (5,6 k Ω), um capacitor (47 nF) e o gerador de funções já ajustado. Usando cabos coaxiais, ligue a fonte no canal 1 do osciloscópio e o capacitor no canal 2, cuidando para que os fios terra estejam ligados no mesmo ponto (preto com preto).

- ◆ Ligue os equipamentos e acione o botão AUTO SET no osciloscópio.
- ◆ Verifique o que acontece quando são selecionadas as funções onda quadrada, onda senoidal e onda triangular no gerador de funções.
- ◆ Selecione uma onda quadrada no gerador de funções e faça alguns ajustes nos botões do osciloscópio para facilitar a análise. A coluna ao lado direito da tela mostra as opções em uso pelo equipamento. Utilizando os botões imediatamente ao lado de onde diz COUPLING, selecione DC. Observe se a amplitude dos canais está multiplicada por um fator 1, isto é: PROBE 1x VOLTAGE. A opção INVERT deve estar OFF. Observe se os canais 1 e 2 estão com a mesma escala.
- ◆ Ajuste as escalas vertical e a horizontal (igual para os dois canais) de forma que ocorra a sobreposição do sinal da fonte e do sinal da tensão no capacitor. Verifique que enquanto a fonte (onda quadrada) tem um valor ora positivo, ora negativo, a tensão no capacitor também oscila entre estes valores máximo e mínimo, porém como uma curva exponencial tanto crescente (processo de carregamento do capacitor) quanto decrescente (processo de descarga).

TAREFA 1

Com os ajustes propostos na montagem experimental, aborde as questões:

- ◆ Como é o gráfico representado no monitor do osciloscópio nessa configuração? Qual o significado físico desse gráfico?
- ◆ Como se pode estimar a constante de tempo do circuito a partir de uma análise da curva de descarregamento do capacitor? Determine visualmente (ordem de grandeza), olhando na tela do osciloscópio, a constante de tempo do circuito.
- ◆ Analise o que acontece se você mudar o valor da resistência do circuito?
- ◆ Analise o que ocorre (ordem de grandeza), se você acrescentar outro resistor ao circuito, primeiro em série, depois em paralelo, e estime o valor da constante de tempo para os dois casos.
- ◆ Estime se há diferenças entre o valor da constante de tempo do circuito calculada a partir dos valores nominais de R e C comparado com o valor estimado pela curva no osciloscópio.

TAREFA 2

- ◆ Considere novamente o circuito contendo apenas um resistor e um capacitor em série.
- ◆ Ajuste o osciloscópio de forma que a descarga do capacitor apareça mais à esquerda da tela, como na

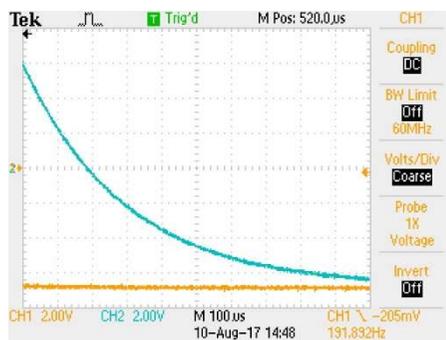


figura ao lado. (observe se as escalas dos dois canais são as mesmas).

- ◆ Coloque um *pendrive* no osciloscópio e clique em SAVE para gravar os dados coletados.

Utilizando aplicativo de gráficos (Sci-Davis, LibreOffice, Origin ou qualquer outro que esteja acessível via os computadores da sala) construa um gráfico da tensão no capacitor em função do tempo.

NÃO FAÇA UM GRÁFICO COM TODA A COLUNA. Selecione uma parte dos dados (300 pontos é suficiente) e então faça um gráfico mostrando a tensão no capacitor no eixo Y e o tempo no eixo X. Evite utilizar valores constantes, principalmente no início e no final da curva. O comportamento exponencial da curva é o mesmo independente da região que for escolhida para o ajuste, desde que haja variação.

- ◆ Qual curva pode ser ajustada aos dados? Quais parâmetros (grandezas) podem ser obtidos com este ajuste?
- ◆ Analisando a equação da curva ajustada, o que se pode concluir do produto da resistência pela capacitância do circuito?
- ◆ Tal resultado é coerente com as características dos componentes utilizados no circuito?

Salve os dados num USB e compartilhe com seus colegas do grupo pois você pode precisar deles.

MEDINDO CAMPOS MAGNÉTICOS

Campos magnéticos são fundamentais para o funcionamento de muitos equipamentos e estão presentes em diversas tecnologias contemporâneas. Aparelhos de ressonância magnética, altofalantes, motores elétricos e trens Maglev são exemplos de equipamentos que dependem de campos magnéticos para funcionarem. Mas como esses campos são gerados nesses equipamentos? Usualmente, são produzidos por meio de ímãs permanentes ou bobinas dimensionadas especialmente para a função que desempenharão nos equipamentos. O estudo e caracterização de campos magnéticos são, portanto, fundamentais.

Instrumentos frequentemente utilizados em laboratórios para investigar campos magnéticos fazem uso de sensores que se valem do efeito Hall. Esse fenômeno certamente será tratado nas aulas teóricas deste curso. Menos conhecido e pouco discutido é o uso de bússolas para se medir campos magnéticos. Como isso pode ser realizado? Que grandezas precisam ser medidas para isso? Em que tipo de situação tal método pode ser utilizado? Essas são questões que serão debatidas nesta tarefa de leitura e nas próximas aulas de laboratório.

Para onde aponta a bússola?

Uma bússola, como a da figura 11, usualmente é constituída por uma agulha magnetizada que pode girar livremente no plano horizontal, imersa num líquido para minimizar o atrito. A agulha da bússola, por ser de material magnético, possui momento magnético próprio, e quando na presença de um campo magnético externo sofre um torque até se alinhar com a direção do campo magnético no qual está imersa. As bússolas comuns, como essa da figura 11, funcionam melhor em locais de baixa latitude, onde a componente horizontal do campo magnético da Terra apresenta os maiores valores. Próximo aos

polos, onde o campo magnético terrestre é praticamente perpendicular à superfície, bússolas comuns não têm muita utilidade. Bússolas náuticas profissionais são esféricas, permitindo identificar a orientação do campo em três dimensões⁴. A bússola está intimamente relacionada com a história das navegações, pois esse instrumento foi amplamente utilizado para se tomar decisões sobre a orientação que as embarcações deveriam seguir. No entanto, o uso das bússolas para se identificar a direção norte-sul demanda que o instrumento esteja distante de qualquer outro objeto com propriedades magnéticas como ímãs, por exemplo. Por quê?

E quando a bússola está sob a influência de outro campo magnético além do campo terrestre? Nesse caso, a bússola vai se alinhar na direção do campo resultante do somatório dos dois campos existentes: o campo terrestre e o campo adicional. Lembremos que campo magnético é uma grandeza vetorial. Vamos analisar aqui um caso particular adotando um referencial



Figura 10 - Bússola

tal que $\vec{B}_{Terra} = \langle 0; y; 0 \rangle T$ em um local específico do planeta. Nesse local, suponhamos que há um campo adicional $\vec{B}_{Adicional} = \langle x, 0, 0 \rangle$. O campo resultante \vec{B}_{Res} nesse local é a soma vetorial dos dois campos, ou seja, $\vec{B}_{Res} = \langle x, y, 0 \rangle T$. A figura 12 ilustra esse somatório.

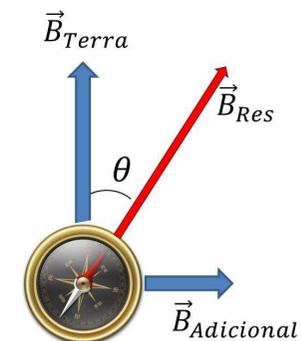


Figura 11 - campo B resultante

⁴ Para saber mais sobre o processo de construção de uma bússola náutica, veja: <https://www.youtube.com/watch?v=mDdR6aCZoN4>.

Podemos concluir, a partir da figura 12, que o ângulo θ entre \vec{B}_{Terra} e $\vec{B}_{Adicional}$ é dado por:

$$\frac{B_{Adicional}}{B_{Terra}} = \tan \theta$$

Desse modo, se conhecemos a intensidade e a direção do campo magnético terrestre em um local, podemos inferir a intensidade de um campo magnético adicional por meio da medida do ângulo formado entre a direção do campo magnético terrestre e a direção da agulha de uma bússola (ou vice-versa). Vejamos como podemos utilizar essas relações para investigar a momento de dipolo magnético de um ímã.

Investigando o campo magnético de um ímã

Matematicamente, podemos expressar a intensidade do campo magnético de um ímã $B_{ímã}$ em uma distância x na direção que coincide com o seu momento de dipolo magnético da seguinte forma:

$$B_{ímã}(x) = k \cdot x^n$$

onde k e n são constantes. (Para mais informações sobre bússolas e como utilizá-las para medir campos magnéticos, veja a referência ⁵) Vamos analisar como podemos medir a constante n . Primeiramente, ajustamos uma bússola de tal forma que, longe da influência de campos adicionais, a sua agulha faça um ângulo zero (na escala graduada da própria bússola). Com a bússola fixa, aproximamos o polo norte ou sul de um ímã em uma direção perpendicular ao seu alinhamento original. Com isso, a agulha da bússola será defletida com um ângulo proporcional à intensidade do campo magnético produzido pelo ímã.

⁵ Lunk, B.; Beichner, R. (2011). Exploring Magnetic Fields with a Compass. *The Physics Teacher*, 49(1), 45-48.

Utilizando os conhecimentos que discutimos na seção anterior, podemos inferir o campo magnético produzido pelo ímã a partir do ângulo formado entre a direção original da agulha (sem o ímã) e a direção quando o ímã está presente. Se medirmos o campo magnético do ímã em duas distâncias d e $2d$, a razão entre esses campos pode ser escrita como:

$$\frac{B_{ímã}(2d)}{B_{ímã}(d)} = \frac{k \cdot (2d)^n}{k \cdot (d)^n} = 2^n$$

Aplicando o logaritmo natural nos dois lados da relação, temos:

$$\ln\left(\frac{B_{ímã}(2d)}{B_{ímã}(d)}\right) = n \cdot \ln(2)$$

Logo:

$$n = \ln\left(\frac{B_{ímã}(2d)}{B_{ímã}(d)}\right) \left(\frac{1}{\ln 2}\right)$$

Desse modo, pode-se inferir o valor de n para um ímã medindo o campo magnético produzido por ele em duas distâncias d e $2d$. Tanto empiricamente como teoricamente pode-se mostrar que $n = -3$ no caso que estamos investigando. Ou seja, podemos construir uma relação do tipo:

$$B_{ímã}(x) = \frac{k}{x^3}$$

Imediatamente conseguimos identificar semelhanças entre esse tipo de campo e o campo magnético \vec{B}_{espira} produzido por uma espira na qual circula uma corrente elétrica i . A partir da lei de Biot-Savart,

pode-se mostrar que \vec{B}_{espira} a uma distância x (para x muito maior do que o raio da espira) ao longo do seu eixo é:

$$B_{\text{espira}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2iA}{x^3}$$

onde A é a área da espira. Definindo o momento de dipolo magnético da espira como $\vec{\mu} = i\vec{A}$, considerando \vec{A} o vetor com módulo igual à área e direção e sentido normal à área, temos:

$$\vec{B}_{\text{espira}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{\mu}}{x^3}$$

Desse modo, o momento de dipolo magnético de um ímã pode ser inferido a partir de um ajuste de curva realizado com uma série de medidas do campo magnético produzido por ele em diferentes distâncias x , que podem ser realizadas com uma bússola, dispostas em um gráfico de $B_{\text{ímã}}$ em função de x^3 .

Atividade de Laboratório III

Projeto

OBJETIVO

Estudar fenômenos eletromagnéticos. Assim resumimos o objetivo geral das duas aulas de laboratório previstas neste guia de atividade. De modo distinto das aulas de laboratório anteriores, quando o experimento investigado era previamente definido, agora você terá liberdade para investigar os fenômenos que você julga mais interessantes. Estará à disposição uma série de materiais como fios, pregos, multímetros, pinos, bússola, arame, régua etc, que você poderá utilizar da maneira que achar mais conveniente para demonstrar alguns dos fenômenos eletromagnéticos vistos ou não em aula. Os experimentos propostos na sequência desse guia são sugestões. Se você quiser investigar outro fenômeno eletromagnético, pode planejar e executar o experimento que desejar. Basta planejá-lo e apresentá-lo ao professor. Se necessário, adapte o experimento para a realidade da sala onde você está. Você pode fazer quantos experimentos quiser, mas lembre-se de que o mais importante não é a quantidade, mas a qualidade dos resultados. Ao final das aulas, você deverá ter resultados suficientes para escrever um pequeno relatório do experimento que você desenvolveu, descrevendo em detalhes o que foi feito, como, com que materiais, quais os resultados obtidos e comparações com previsões teóricas. Faça anotações detalhadas durante o experimento (com desenhos e fotos) pois você vai precisar dessas informações para escrever seu relatório. Ao final do experimento peça para o professor do laboratório rubricar as páginas onde estão suas anotações, e essas devem ser anexadas ao relatório.

SUGESTÃO 1

CAMPO MAGNÉTICO DE UM FIO LONGO

Construa um circuito simples com um resistor, fonte de tensão e um fio longo ($\pm 2m$). A lâmpada suporta uma tensão máxima de $5V$, o resistor comum suporta $14V$. Tome cuidado para não ultrapassar esses limites. Estenda o fio na direção NORTE-SUL sobre a mesa ou no chão, deixe a fonte numa das extremidades o mais distante possível do ponto onde serão feitas as medidas.

Com a fonte desligada, posicione a bússola sobre o fio com a agulha alinhada na direção do fio e meça a deflexão da agulha quando a fonte é ligada. Faça várias medidas, em diferentes posições para ter certeza de não ter nenhuma interferência externa (evite as extremidades). Faça a corrente passar pelo fio na direção oposta e observe o que acontece.



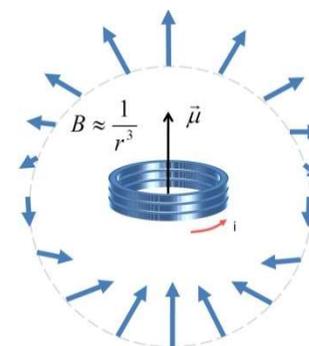
Repita o experimento com a bússola a certa altura do fio, escolha uma altura que possibilite medir alguma deflexão na agulha. Meça a altura com a régua e anote a deflexão da agulha.

Análise dos dados – suas observações são consistentes com a previsão teórica de que o campo magnético ao redor de um fio longo por onde passa corrente é proporcional à $\frac{1}{r}$ (onde r é a distância até o eixo do fio)? Determine a corrente no fio a partir dos valores medidos (deflexão na agulha da bússola) e compare com o valor ajustado na fonte.

SUGESTÃO 2

CAMPO MAGNÉTICO DE UMA BOBINA

Construa uma bobina com o fio longo, enrolando-a num pedaço de cano de PVC e prendendo-a com fita. Construa um circuito simples com a fonte, a bobina e uma resistência. Posicione a bobina de tal forma que o seu eixo coincida com a direção LESTE-OESTE. Posicione o conjunto bússola-bobina o mais distante possível da fonte (para evitar interferências).



Faça um desenho esquemático mostrando a posição relativa da agulha da bússola para diferentes posições ao redor da bobina (enquanto passa corrente por ela). Posicione a bússola a diferentes distâncias ao longo do eixo da bobina e observe a deflexão da agulha. Compare os seus resultados com a previsão teórica.

Análise dos dados – qual a previsão teórica que melhor descreve o campo magnético ao longo do eixo da bobina? É razoável considerar a bobina como um solenoide infinito (e utilizar a lei de Ampère para calcular o campo)? Suas observações são consistentes com a previsão teórica de que o campo magnético ao longo do eixo de uma bobina é proporcional à $\frac{1}{r^3}$ (onde r é a distância até o centro)? Pode ser que nenhuma dessas abordagens seja adequada para o sistema que você construiu. Nesse caso, qual é a melhor forma de analisar o comportamento desse sistema?

SUGESTÃO 3

BOBINA COM NÚCLEO DE FERRO

Para esse experimento você vai precisar de pregos não magnetizados. Verifique se os pregos que você tem disponíveis estão magnetizados aproximando da bússola (sem tocar) os dois lados do prego. Se o prego está desmagnetizado, ambos os lados afetarão a bússola da mesma forma. Caso os pregos estejam fortemente magnetizados, cada um dos lados do prego afetará a bússola de forma diferente. Para reduzir o efeito da magnetização nos pregos, aproxime o ímã (sem tocar) fazendo com que o prego fique magnetizado na direção oposta. Repita essa operação quantas vezes for necessário até que a magnetização do prego seja imperceptível com a bússola.

Construa uma bobina enrolando o fio longo num cano de PVC e prendendo com fita. Meça o diâmetro interno da bobina. Conecte a bobina ao resistor e à fonte (desligada). Oriente o eixo da bobina na direção LESTE-OESTE, ligue a fonte e posicione a bússola (ao longo do eixo da bobina) até que a agulha indique 5° . Desligue a fonte (a agulha da bússola deve então marcar 0°).

Insira um prego (desmagnetizado) na bobina, ligue a fonte e observe a deflexão da bússola. Repita essa operação adicionando outros pregos à bobina e anote os resultados. Explique por que a deflexão da agulha da bússola é afetada pela introdução dos pregos na bobina.

O que acontece quando você desliga a fonte? Explique os resultados observados.

SUGESTÃO 4

CRIE SEU PRÓPRIO EXPERIMENTO

O objetivo dessa atividade é verificar na prática algum fenômeno relacionado ao eletromagnetismo. Se você se sentir motivado a desenvolver um experimento que não esteja sugerido aqui, faça isso. Você pode utilizar os equipamentos disponíveis na sala (fonte de tensão, lâmpadas, resistores, fios, bússola, ...) e pode trazer de casa outros materiais que possibilitem desenvolver o experimento que você quer.

Em geral, grupos que optam por criar seu próprio experimento obtêm resultados muito interessantes quando trabalham com motivação. Porém, não basta criar um experimento complexo, é preciso obter resultados e fazer uma análise adequada dos resultados obtidos. O ideal é utilizar a primeira aula para planejar e testar várias possibilidades, e se preciso providenciar os materiais que não estão disponíveis no laboratório, e na segunda aula aprimorar as medidas e analisar os resultados em grupo, ainda no laboratório.

MEDINDO GRANDEZAS QUE VARIAM RAPIDAMENTE COM O TEMPO

Vimos na primeira aula de laboratório que o processo de medição no laboratório de Física demanda uma série de procedimentos e cuidados a partir de uma investigação sobre a resistência interna de amperímetros. Naquela atividade, partimos do pressuposto de que a tensão e a corrente elétrica no amperímetro não se modificavam com o tempo enquanto realizávamos uma medida particular, ou seja, considerávamos essas grandezas constantes durante cada medida. Certamente isso não era bem verdade. A tensão de saída de fontes reais nunca é perfeitamente constante. No entanto, as variações das tensões mensuradas eram tão pequenas que era muito razoável desprezá-las frente ao objetivo que tínhamos, que era medir a resistência interna de um amperímetro.

Em nosso cotidiano, no entanto, grande parte dos eventos que envolvem correntes elétricas ocorre com tensões alternadas, pois o fornecimento de energia elétrica em nossas casas é realizado desse modo⁶. A tensão entre os terminais de uma tomada em Porto Alegre usualmente varia com uma frequência de aproximadamente 60 Hz. Mas então o que significam os 110, 127 ou 220 volts que atribuímos à tensão dos equipamentos elétricos? E, se a tensão não é constante, o que é medido quando uso um voltímetro para avaliar a tensão entre os terminais de uma tomada? Existe alguma forma de medir tensões que variam rapidamente com o tempo? Essas são questões que abordaremos nesta tarefa de leitura e na próxima aula experimental.

⁶ Se você quer entender melhor o porquê de usarmos tensões alternadas, precisa compreender o processo histórico ocorrido a partir da Guerra de Correntes despojado pela contraposição das ideias de Tesla e Franklin. Para ler mais, consulte: <http://www.if.ufrgs.br/cref/?area=questions&id=1089>.

110 V, 127 V e 220 V: O que é isso?

As tensões das tomadas de diferentes residências não são sempre iguais. Aliás, é comum que dentro de uma mesma residência existam tomadas com diferentes tensões de operação. Em Porto Alegre, o usual é que elas funcionem com tensão efetiva de 127 V ou 220 V com frequência de 60 Hz. No passado não muito distante, existiram redes alimentadas com tensões efetivas de 110 V com frequência de 50 Hz, mas hoje são raríssimas redes com essas características. Por herança histórica, ainda é comum ouvirmos expressões do tipo “essa tomada é 110” quando, na verdade, se deseja fazer uma referência à tensão de 127 V.

Mas, se a tensão varia com o tempo, o que é essa tensão? É o valor máximo da tensão entre os terminais das tomadas? Para respondermos essas perguntas, precisamos primeiramente compreender como representamos tensões alternadas.

A tensão de saída de fontes alternadas oscila, aproximadamente, de forma periódica. Por isso, uma analogia interessante neste momento é relacionar fontes alternadas com um modelo que já conhecemos: o modelo de movimento harmônico simples. Esse modelo é usado, por exemplo, para representar o movimento de um corpo que oscila preso por uma mola sobre uma superfície lisa. A evolução temporal da posição desse corpo é descrita matematicamente por uma função trigonométrica do tipo:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

onde A é a amplitude do movimento, ω a frequência angular do movimento e φ a constante de fase. De forma análoga, a tensão de saída V de uma fonte alternada pode ser representada por:

$$\Delta V(t) = \Delta V_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

onde ΔV_0 é o pico de tensão de saída, ω é a frequência angular (igual a $2\pi f$, onde f é a frequência da fonte) das oscilações e φ a constante de fase da fonte. Essa função é representada graficamente na Fig.1.

Agora imagine algo que oscila 60 vezes por segundo. Assim é a tensão fornecida para nossas casas. Essa frequência é baixa quando comparada com valores comumente explorados em circuitos elétricos. Mesmo assim, se tivéssemos um voltímetro que realizasse a medida instantânea dessas tensões, não conseguiríamos coletar ou interpretar os dados em função da rapidez com que eles se modificariam no leitor do aparelho.

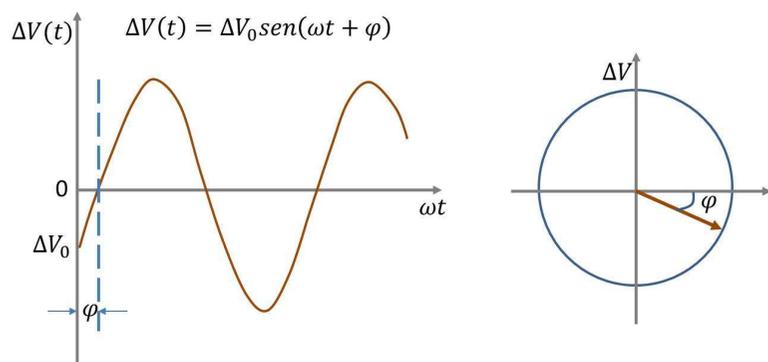


Figura 12 - Gráfico qualitativo de ΔV em função de t e o respectivo diagrama de fasores.

Os multímetros nos fornecem uma média temporal quando mensuramos tensões alternadas. Mas que média é essa? Analisando a figura 1, podemos perceber que a média aritmética da tensão de saída de uma fonte alternada é um valor próximo de zero. Então qual é o valor calculado pelo multímetro? De modo semelhante ao que era realizado no método dos mínimos quadrados (tratado na nossa primeira aula), o multímetro calcula o valor médio quadrático ou valor RMS (*root mean square*). A tensão RMS de uma fonte alternada é a raiz quadrada da média dos quadrados das tensões instantâneas. No

caso de uma tensão alternada senoidal como a que estamos tratando aqui, essa média é dada por:

$$\Delta V_{RMS}^2 = \langle \Delta V^2 \rangle_{\text{médio}} = \langle \Delta V_0^2 \text{sen}^2(2\pi ft + \varphi) \rangle_{\text{médio}}$$

$$\begin{aligned} \Delta V_{RMS} &= \sqrt{\langle \Delta V_0^2 \text{sen}^2(2\pi ft + \varphi) \rangle} \\ &= \Delta V_0 \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \Delta V_{RMS} &= \frac{\Delta V_0}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

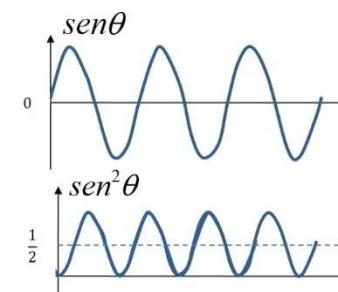


Figura 13 - Funções seno e seno quadrado

Desse modo, quando o voltímetro mede uma tensão RMS (também denominada de tensão eficaz) de 127 V entre os terminais de uma tomada, significa que a tensão de pico nela é de $127\sqrt{2}$ Volts, ou seja, $\Delta V_0 = 179,6$ Volts. Assim, como a frequência dessa tensão é 60 Hz, ela oscila entre +179,6 V e -179,6 V com período de 0,016 s.

A potência média dissipada em um circuito elétrico com tensão alternada pode ser calculada da mesma forma que a potência dissipada em um circuito de corrente contínua quando usamos o valor RMS da corrente elétrica. Ou seja, assim como calculamos a potência P dissipada em um circuito de corrente contínua por $P = Ri^2$, onde R é a resistência elétrica do circuito e i , a corrente elétrica que circula nele, a potência média $P_{\text{méd}}$ dissipada em um circuito com corrente alternada pode ser calculada por $P_{\text{méd}} = Ri_{RMS}^2$.

COMPREENDENDO A CONTA DE ENERGIA ELÉTRICA: O FATOR DE POTÊNCIA

Cada vez mais campanhas procuram promover a conscientização sobre o uso da energia elétrica. Fatores econômicos e ambientais fazem com que essa energia seja tratada como um bem precioso em nossa sociedade. Manter a borracha de vedação das geladeiras em bom estado, evitar o uso de máquinas de lavar com poucas roupas, evitar o uso do modo *stand by* dos equipamentos são exemplos de ações frequentemente sugeridas que podem ser facilmente implementadas em nosso cotidiano. No entanto, se queremos aprofundar nosso conhecimento sobre ações que possibilitam a economia de energia elétrica, é importante que conheçamos o que pagamos para as concessionárias, ou seja, que entendamos o que é exposto em nossas contas de luz.

Existem variações nas contas de luz expedidas pelas concessionárias dependendo de uma série de características do imóvel e do processo de medição de consumo realizado. O normal é que elas apresentem a quantidade de energia consumida em kWh, o preço por kWh e o valor total em R\$. Essas quantidades fazem parte do que é denominado de “Consumo Ativo” (veja o conteúdo circulado em vermelho na figura 13). No entanto, existem pessoas que são surpreendidas quando são informados que precisam pagar por um outro tipo de consumo: o “Consumo Reativo Excedente”. O



Figura 14 - Conta de luz residencial típica.

que é esse consumo? Como ele é calculado? Quando o consumo de energia reativa é muito alto, eletricitistas propõem a instalação de bancos de capacitores na instalação elétrica. Por quê? Quais são as causas desse consumo reativo? Os procedimentos sugeridos em campanhas de conscientização contribuem para diminuir o consumo reativo também? Essas são questões que serão abordadas nesta tarefa de leitura e na próxima aula de laboratório.

Não queremos jogar energia fora!

Uma residência, fábrica, estabelecimento comercial ou qualquer local que seja possui uma série de equipamentos com diferentes características que constituem suas instalações elétricas. Para possibilitar uma melhor compreensão dos conceitos de consumo ativo e reativo, vamos simplificar aqui uma instalação elétrica considerando que, mesmo que momentaneamente, podemos atribuir aos equipamentos que a constituem uma resistência, uma capacitância e uma indutância equivalente. Desse modo, vamos realizar um estudo sobre um circuito constituído por um resistor de resistência R , um capacitor de capacitância C e um indutor de indutância L dispostos em série com uma fonte de corrente alternada com força eletromotriz $\mathcal{E}(t)$. Temos aqui um circuito RLC em série com uma fonte alternada, como é ilustrado na figura 14.

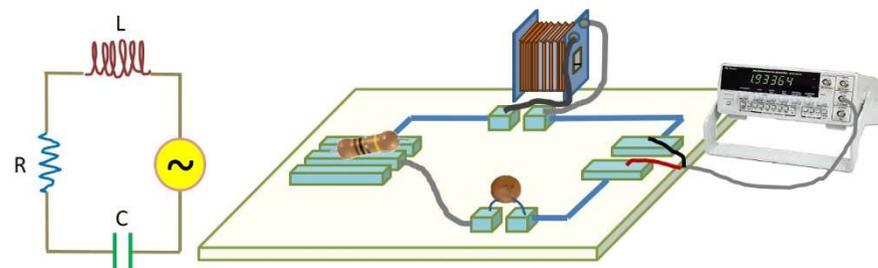


Figura 16 – Circuito RLC série.

Usualmente desejamos que uma instalação elétrica possa suprir a máxima potência possível. Mas como podemos fazer isso? Para respondermos essa pergunta, vamos analisar como se comporta a potência instantânea $P(t)$ fornecida por uma fonte alternada para um circuito RLC em série. Ela é representada por:

$$P(t) = \mathcal{E}(t) \cdot i(t)$$

onde i é a corrente elétrica no circuito. Passamos então analisar como se comportam as funções $\mathcal{E}(t)$ e $i(t)$.

Vamos supor que a força eletromotriz na fonte varia de acordo com uma função trigonométrica do tipo:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \text{sen}(\omega t)$$

onde ω é a frequência angular da fonte e \mathcal{E}_0 é a força eletromotriz de pico na fonte. As tensões entre os terminais do resistor, do indutor e do capacitor também vão oscilar de acordo com uma função trigonométrica. Essas tensões podem ser representadas em um diagrama de fasores como o ilustrado na figura 15, onde V_R , V_L e V_C são as tensões de pico no resistor, no indutor e no capacitor, respectivamente.

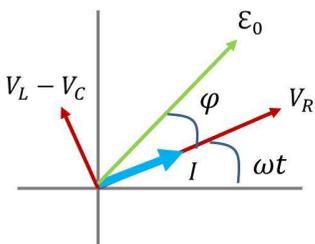


Figura 15 - Diagrama de fasores de um circuito RLC série com fonte de tensão alternada.

Note que o fasor da corrente elétrica sempre deve ter a mesma direção do fasor que representa a tensão no resistor. Já o fasor da força eletromotriz \mathcal{E} da fonte pode não estar em fase com o fasor I da corrente elétrica. Para encontrarmos a diferença de fase φ entre \mathcal{E} e I , basta construirmos um triângulo retângulo com os fasores das tensões V_R , $V_L - V_C$ e \mathcal{E} , como é ilustrado na figura 16 para um caso em que $V_L > V_C$.

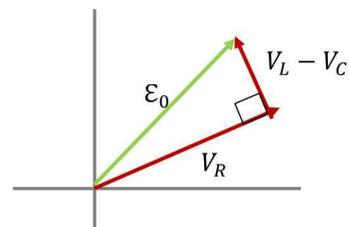


Figura 16 – Soma de fasores.

A análise deste triângulo nos permite concluir que:

$$\varphi = \text{arctg} \left(\frac{V_L - V_C}{V_R} \right)$$

Desse modo, o valor instantâneo i da corrente elétrica pode ser representado

por:

$$i(t) = I \text{sen}(\omega t - \varphi)$$

Mas quanto vale I ? Recordando que $V_L = \chi_L \cdot I = \omega L \cdot I$, $V_C = \chi_C \cdot I = \frac{1}{\omega C} \cdot I$, e $V_R = R \cdot I$, onde χ_L e χ_C são, respectivamente, as reatâncias indutiva e capacitiva do circuito. Analisando o diagrama de fasores da figura 14 podemos concluir que:

$$\mathcal{E}_0^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2$$

$$\mathcal{E}_0^2 = I^2 [R^2 + (\chi_L - \chi_C)^2]$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\chi_L - \chi_C)^2}}$$

Com isso, a potência dissipada no resistor pode ser reescrita como:

$$P(t) = R \cdot i(t)^2 = R \cdot I^2 \text{sen}^2(\omega t - \varphi)$$

Como visto anteriormente (figura 6), a média temporal da função seno quadrado é $\frac{1}{2}$, e por isso podemos dizer que:

$$P_{\text{méd}} = R \cdot \frac{I^2}{2} = R \left(\frac{I}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$P_{méd} = R \cdot I_{RMS}^2$$

onde RMS significa valor médio quadrático, do inglês *Root Mean Square*.

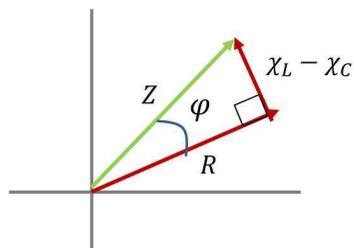


Figura 17 - relação entre impedância e resistência num diagrama de fasores

Seguindo o exemplo mostrado na figura 17, podemos inferir que a impedância e a resistência do circuito estão relacionadas pelo $\cos \varphi$, de forma que:

$$R = Z \cdot \cos \varphi$$

$$P_{méd} = I_{RMS}^2 Z \cdot \cos \varphi$$

$$P_{méd} = I_{RMS} \mathcal{E}_{RMS} \cdot \cos \varphi$$

Analisando a equação acima, podemos concluir o $\cos \varphi$, que denominamos *fator de potência FP*, influencia diretamente na potência fornecida pela fonte ao circuito RLC. Quanto mais próximo de 1 for o fator de potência, maior vai ser a potência média fornecida pela fonte.

Voltando às instalações elétricas, queremos que a energia elétrica seja aproveitada ao máximo em nossas casas, empresas etc. Por isso, queremos que o *FP* dessas instalações tenham o valor mais próximo possível de 1, maximizando a potência fornecida pela rede elétrica para a instalação. Para garantir que isso aconteça, ou seja, que a energia elétrica produzida no Brasil seja aproveitada da melhor forma possível, a Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) estabelece que o *FP* das instalações elétricas não pode ser menor do que 0,92⁷. Nesses órgãos, o *FP* é tratado em termos dos conceitos de energia ativa (*EA*) e energia reativa (*ER*). A *EA* está relacionada com a capacidade

⁷ Para mais detalhes, consulte a Resolução 456/2000 da ANEEL.

do circuito de realizar trabalho enquanto que a *ER* é a energia estocada nos componentes da instalação momentaneamente (em capacitores e/ou indutores) e devolvida ao circuito em seguida. O *FP* é definido então como:

$$FP = \frac{EA}{\sqrt{EA^2 + ER^2}}$$

O Consumo Reativo Excedente (CRE) das instalações é então calculado, em R\$, como uma função de *FP*:

$$CRE = CEA \left[\left(\frac{FP}{0,92} \right) - 1 \right]$$

onde *CEA* é o consumo de energia ativa em R\$. Em alguns casos, as contas de luz também apresentam o valor do *FP* da instalação elétrica, como é destacado na figura 11.

Mas como podemos aumentar o fator de potência?

Para termos um *FP* igual à unidade, precisamos que os fasores de \mathcal{E} e I coincidam em suas direções, ou seja, precisamos que φ seja tão pequeno quanto possível. Vimos que esse ângulo (veja a figura 17) é dado por:

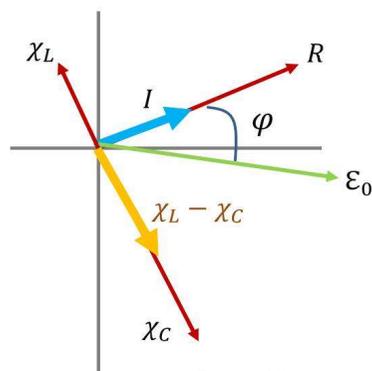
$$\varphi = \arctg \left(\frac{X_L - X_C}{R} \right) = \arctg \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)$$

Analisando a equação acima, podemos concluir que o *FP* é igual à unidade quando a seguinte igualdade é satisfeita:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

Se pudessemos modificar a frequência de alimentação do sistema, bastaria escolher a frequência de ressonância ω_R da instalação elétrica para obtermos um FP igual à 1, ou seja, escolher a frequência $\omega = 1/\sqrt{LC}$. No entanto, como já discutimos na nossa primeira aula de laboratório, a frequência de alimentação da rede elétrica de Porto Alegre é de aproximadamente 60 Hz, não podendo ser modificada pelo usuário comum. Desse modo, para diminuirmos o ângulo φ precisamos ajustar os valores de L e C da instalação elétrica. Nesses casos, existem basicamente duas situações possíveis que são ilustradas na figura 20: i) a reatância capacitiva da instalação é maior do que a reatância indutiva e o fasor I está adiantado com um ângulo φ em relação ao fasor \mathcal{E} , e ii) a reatância indutiva da instalação é maior do que a reatância capacitiva e o fasor I está atrasado com um ângulo φ em relação ao fasor \mathcal{E} . Nos dois casos, a correção do FP é usualmente realizada por meio da instalação de bancos de capacitores adequados, diminuindo ou aumentando a capacitância equivalente da instalação elétrica.

$\chi_C > \chi_L$, circuito capacitivo



$\chi_C < \chi_L$, circuito indutivo

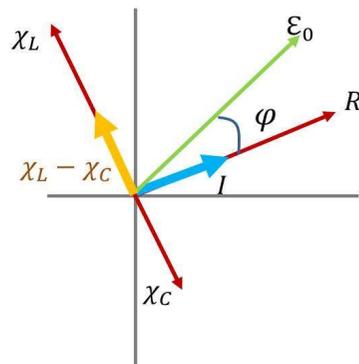


Figura 18 - diagramas de fasores representando um circuito capacitivo e um circuito indutivo

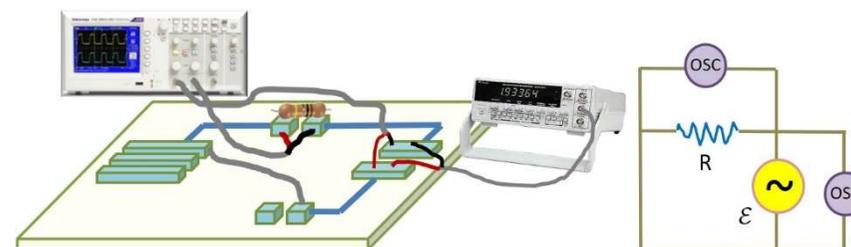
Atividade de Laboratório IV

Circuitos RLC - série

O roteiro a seguir será utilizado nas duas aulas de laboratório que seguem. Primeiramente, será feita uma avaliação qualitativa do comportamento do circuito contendo diferentes componentes (resistor 5,6 kΩ, capacitor 47 nF e bobina de 1000 voltas com e sem núcleo de ferro). Num segundo momento, faremos medições de tensão e corrente num circuito RLC para diferentes valores de frequência, para determinar qual é a frequência de ressonância do circuito. Após as atividades, você terá que responder perguntas no Moodle relacionadas aos experimentos, por isso é recomendável que você faça anotações sobre as atividades realizadas no laboratório.

TAREFA 1

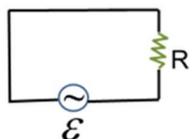
Circuito Resistivo



Monte o circuito contendo apenas o resistor ligado em série com o gerador de funções. É fundamental que o terra da fonte e do osciloscópio estejam conectados no mesmo ponto (cabo preto). Monitore a tensão de saída da fonte no canal 1 e a tensão nos terminais do resistor no canal 2. No decorrer do experimento, você pode verificar (utilizando o osciloscópio) a tensão nos terminais do capacitor e do indutor, e para isso você deve mudar os COMPONENTES (capacitor, indutor e resistor) de lugar. **NUNCA MUDE OS CABOS DO OSCILOSCÓPIO DE LUGAR.**

Ajuste o gerador de funções para fornecer uma tensão com formato senoidal. Alinhe os dois canais do osciloscópio para melhor comparar os sinais da fonte e do resistor (coloque uma curva sobre a outra).

Circuito Resistivo

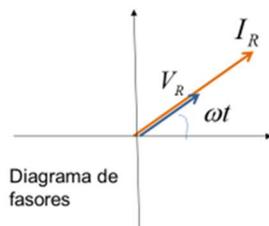
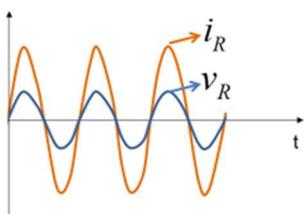


$$\varepsilon = \varepsilon_m \text{sen}(\omega t)$$

ddp no resistor

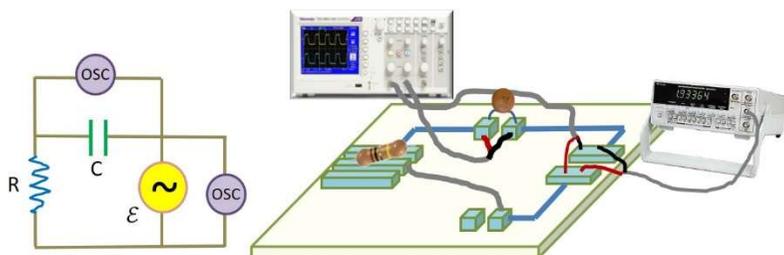
$$v_R = V_R \text{sen}(\omega t)$$

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{V_R}{R} \text{sen}(\omega t) = I_R \text{sen}(\omega t)$$



◆ O que acontece quando mudamos a frequência no gerador?

Circuito Capacitivo



Acrescente o capacitor ao circuito. Ajuste a frequência do gerador e a escala do osciloscópio para otimizar a visualização do sinal de saída da fonte e do capacitor.

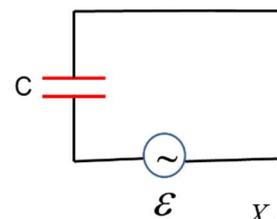
◆ Como se comporta a tensão no capacitor para diferentes frequências?

Ajuste a frequência até que a tensão da fonte apareça defasada em relação à tensão do capacitor. Agora troque o resistor e o capacitor de lugar para verificar a tensão no resistor (para essa mesma frequência).

◆ O que mudou no osciloscópio?

Se tivéssemos apenas o capacitor ligado à fonte, sem nenhuma resistência, teríamos a situação mostrada esquematicamente abaixo.

Circuito Capacitivo



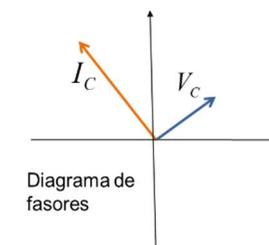
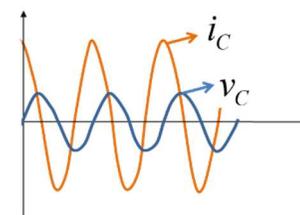
$$\varepsilon = \varepsilon_m \text{sen}(\omega t)$$

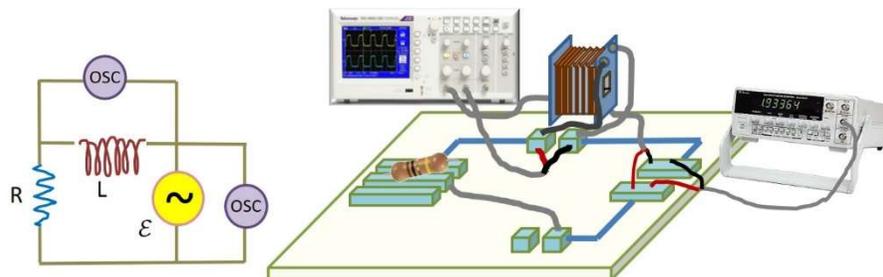
ddp no capacitor

$$v_C = V_C \text{sen}(\omega t)$$

$$i_C = \frac{V_C}{X_C} \text{sen}(\omega t + 90^\circ)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad \text{Reatância Capacitiva}$$



Circuito Indutivo

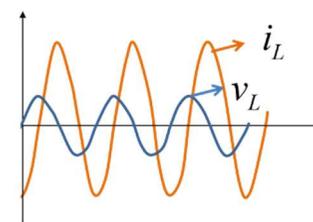
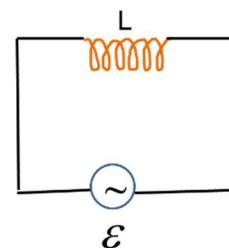
Substitua o capacitor pelo indutor no circuito, mantendo os cabos do osciloscópio na mesma configuração. Ajuste a frequência do gerador e o osciloscópio para melhor visualizar o sinal do gerador e do indutor.

◆ O que acontece quando o núcleo de ferro é inserido no interior da bobina?

Ajuste a frequência até que a tensão da fonte apareça defasada em relação ao sinal do indutor. Agora troque o resistor e o indutor de lugar para verificar a tensão no resistor (para essa mesma frequência).

◆ O que mudou no osciloscópio?

Se tivéssemos apenas o indutor ligado à fonte, sem nenhuma resistência, teríamos a situação mostrada esquematicamente abaixo.

Circuito Indutivo

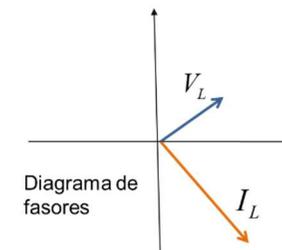
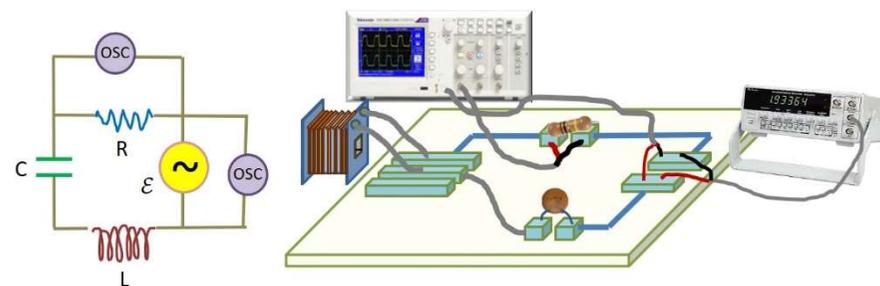
$$\varepsilon = \varepsilon_m \text{sen}(\omega t)$$

ddp no indutor

$$v_L = V_L \text{sen}(\omega t)$$

$$i_L = \frac{V_L}{X_L} \text{sen}(\omega t - 90^\circ)$$

$$X_L = \omega L \quad \text{Reatância Indutiva}$$

**Circuito RLC**

Monte o circuito com o indutor, o capacitor e o resistor ligados ao gerador de funções. Mantenha o osciloscópio e a fonte nos mesmos locais, troque apenas a ordem dos componentes no circuito, deixando o resistor ligado ao canal 2 do osciloscópio. Ajuste o osciloscópio de forma que a tensão no resistor e na fonte estejam sobrepostas. Isso facilitará a análise.

- ◆ O que acontece quando você muda a frequência do gerador?

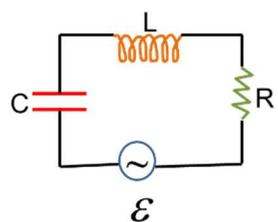
Ajuste a frequência até que o sinal da fonte e do resistor apareçam em fase no osciloscópio.

- ◆ O que acontece com a amplitude da tensão no resistor quando você muda a frequência? Para qual frequência a amplitude é maior?

Ajuste a frequência até que a amplitude da tensão no resistor seja a maior possível. Agora troque os componentes de lugar no circuito para verificar como ficou a tensão no indutor e no capacitor.

- ◆ Construa um diagrama de fasores com os dados do circuito que você analisou.

A figura abaixo mostra a representação esquemática de um circuito RLC forçado com o respectivo diagrama de fasores.

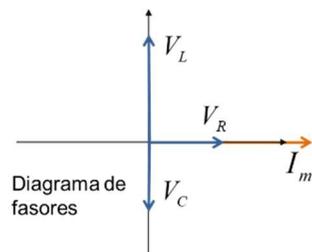
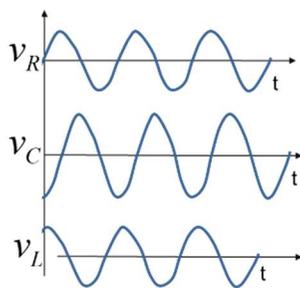


Circuito RLC – forçado

$$v = V_m \text{sen}(\omega t)$$

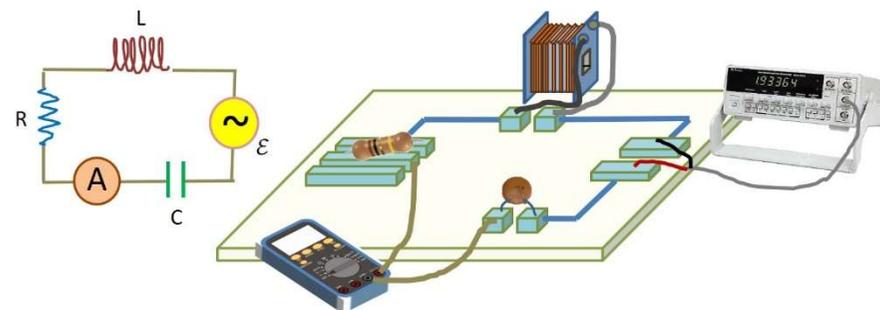
$$i = I_m \text{sen}(\omega t - \phi)$$

$$v = v_C + v_L + v_R$$



TAREFA 2

Agora vamos avaliar a impedância do circuito para diferentes frequências. Conecte um indutor (bobina de 1000 espiras com núcleo de ferro), um resistor (5,6 kΩ) e um capacitor (47 nF) em série a um gerador de funções com a opção onda senoidal, selecione uma frequência de ~500 Hz no gerador de funções. Utilize um multímetro em série no circuito para medir a corrente.



Calcule a impedância do circuito para diferentes valores de frequência, num intervalo entre ~500 Hz e 3000 Hz. Anote os valores medidos diretamente numa tabela num software para fazer gráficos e utilize as facilidades do programa para fazer os cálculos, isso vai facilitar seu trabalho. Construa um gráfico da corrente em função da frequência e após responda as perguntas a seguir.

- ◆ Qual o valor da impedância quando a corrente no circuito é máxima?
- ◆ Qual o valor da corrente máxima no circuito?

Observe no osciloscópio a amplitude da tensão no resistor. Meça com o multímetro em paralelo, qual o valor da tensão no resistor (para a mesma frequência).

- ◆ O valor mostrado no multímetro é igual à amplitude da função no osciloscópio? Explique.

TAREFA 3

Substitua a bobina de 1000 espiras pela de 10000 espiras. Visualize com o osciloscópio a ddp da fonte e do resistor. Encontre a frequência de ressonância para o novo circuito.

Com o osciloscópio, meça a ddp no gerador de funções e no indutor. A ddp no indutor é maior do que entre os terminais do gerador de funções.

◆ Como isso é possível? Explique.

◆ Tal resultado pode ser entendido como uma evidência da invalidez da lei de Kirchhoff?

Respostas*

*Este é um material em desenvolvimento. Sugestões são bem-vindas e podem ser enviadas para raquelgiulian@if.ufrgs.br.

- A1 $\sim 0,01C$
 A2 $\sim 3,6 \times 10^8 N$
 A3 $x = 3,2 cm$
 A4 $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q^2 4444 \langle -0,32; 0,97; -0,03 \rangle N$
 A5 $F_{mínimo} = 0$ quando $x = 0$;
 $F_{máximo} = 6,3 \times 10^{-26} N$ quando $x = 10,6 cm$;
 A7 $\sim 1 e$
 B1 $\vec{E}_A = \langle -4,48 \times 10^5; 0; 0 \rangle N/C$
 $\vec{E}_B = \langle 4,26 \times 10^5; 0; 0 \rangle N/C$
 $\vec{F} = \langle 7,17 \times 10^{-14}; 0; 0 \rangle N$
 B3 $E_x = E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y}$
 B4 $\vec{E} = \langle 0; -16000; 0 \rangle N/C$
 B5 $\vec{F} = \frac{Q(-1,602 \times 10^{-19})}{6\pi^2 \epsilon_0 R^2} \langle 1; -1; 0 \rangle N$
 B6 $\Delta U = -11100 J$
 $\vec{\tau} = \langle 0; 0; -15000 \rangle Nm$
 $W = -26100 J$
 B7 $\vec{E} = \langle 0; -\frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R}; 0 \rangle$
 B8 $\vec{E} = 3,4 \times 10^4 \langle -1; -1; 0 \rangle N/C$
 B9 $\vec{E} = \langle 0; -\frac{q}{\pi^2 \epsilon_0 r^2}; 0 \rangle = \langle 0; -22,9; 0 \rangle N/C$
 B10 (a) (b) $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \left(\frac{1}{\sqrt{A^2 + L^2}} - \frac{1}{A} \right)$
 C1 (a) $E_{sup} = \frac{\rho_0}{0,02 \epsilon_0}$ (b) $E_{int} = \frac{\rho_0}{0,01 \epsilon_0}$
 (c) $E_{7cm} = \frac{\rho_0 R}{\epsilon_0 r^2} = 4,6 \times 10^{11} \rho_0$
 C2 $\theta = \sim 13^\circ$
 C3 $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} [\lambda + \rho\pi(r^2 - a^2)]$

$$C4 \quad E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, E_2 = 0, E_3 = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, E_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{q(r^3-a^3)}{(b^3-a^3)} + Q \right),$$

$$E_5 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$C5 \quad (a) E = 0 \quad (b) E = \frac{\rho(r^3-a^3)}{3\epsilon_0 r^2} = 7,9 \text{ N/C}$$

$$(c) E = \frac{\rho(b^3-a^3)}{3\epsilon_0 b^2} = 13,2 \text{ N/C}$$

$$C6 \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$C7 \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$D1 \quad V_{total} = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q_1+q_2+q_3)}{R}, \text{ para } V_{total} = 0, \text{ uma das possibilidades é } q_1 + q_2 = -q_3.$$

$$D3 \quad (a) V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \quad (b) -1,2q$$

$$D4 \quad \text{Considerando o ponto 2 na superfície da placa e o ponto 1 no centro da esfera } V_2 - V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left(\frac{1}{R+d} - \frac{1}{R} \right) + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (R+d)$$

$$D5 \quad V_C - V_b = -\frac{\rho_0}{20\epsilon_0} (c^4 - b^4),$$

$$V_C - V_b = -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0} (c^2 - b^2) \text{ se a densidade fosse uniforme}$$

$$D6 \quad V_P = \frac{\lambda}{4\epsilon_0} \left[1 + \frac{2\ln(4)}{\pi} \right]$$

$$E1 \quad 100 \mu\text{C} \quad 20 \mu\text{C}$$

$$E2 \quad (a) \frac{20 \kappa_1 \kappa_2 \epsilon_0}{\kappa_1 + \kappa_2}; \quad (b) 5\epsilon_0 \left(\kappa_1 + \frac{2 \kappa_2 \kappa_3}{\kappa_2 + \kappa_3} \right); \quad (c) 5\epsilon_0 (\kappa_1 + \kappa_2)$$

$$E3 \quad 473,7 \mu\text{C} \rightarrow 1000 \mu\text{C}; \quad 47,4 \text{ V} \rightarrow 100 \text{ V}$$

$$E4 \quad 3,2 \mu\text{F}; 64,6 \mu\text{C}; V_3 = 10,8 \text{ V}; Q_3 = 32,3 \mu\text{C}; V_2 = 9,2 \text{ V}; Q_2 = 18,5 \mu\text{C}; V_1 = 4,6 \text{ V}; Q_1 = 9,2 \mu\text{C};$$

$$E5 \quad 20 \mu\text{C}$$

$$E6 \quad (a) U = \frac{Q^2 d}{4\epsilon_0 A} \quad (b) U = \frac{Q^2 d}{12\epsilon_0 A}$$

$$F1 \quad 5,44 \times 10^{-9} \text{ m/s}$$

$$F2 \quad i_1 = 0,00545 \text{ A (horário)}; i_2 = 0,02725 \text{ A (para baixo)}; i_3 = 0,0218 \text{ A (anti-horário)}; V_A = 5,45 \text{ V}$$

$$F3 \quad (a) P = \frac{\xi^2}{3R} \quad (b) P = \frac{\xi^2}{R} \quad (c) P = \frac{\xi^2}{R} \quad (d) P = \frac{3\xi^2}{R} \quad (e) P = \frac{4\xi^2}{R}$$

$$F4 \quad 0,78 \text{ Cu/Al}$$

$$F5 \quad 4,62 \Omega \text{ ou } 168 \Omega$$

$$F6 \quad 600 \Omega$$

$$F7 \quad \text{fontes: } 16 \text{ W}, 8 \text{ W}, -4 \text{ W}; \text{ resistores: } 4 \text{ W}, 8 \text{ W}, 2 \text{ W}, 6 \text{ W}$$

$$F8 \quad (a) Q_1 = 222 \mu\text{C}; Q_2 = 778 \mu\text{C} \quad (b) 444 \mu\text{C}$$

$$F9 \quad (a) 9,93 \mu\text{C} \quad (b) 33,7 \text{ nA} \quad (c) 334,6 \text{ nW} \quad (d) 337 \text{ nW}$$

$$F11 \quad (a) 36 \mu\text{C} \quad (b) 24 \mu\text{C}$$

$$F12 \quad (a) 6 \text{ V} \quad (b) 8,3 \mu\text{s}$$

$$G1 \quad v_x = 4,82 \text{ km/s}; v_y = 9,65 \text{ km/s}$$

$$G2 \quad (a) \vec{F} = \langle 0; 0; 1,44 \times 10^{-18} \rangle \text{ N}$$

$$(b) \vec{F} = \langle 0; 0; 1,60 \times 10^{-19} \rangle \text{ N}$$

$$(c) \vec{F} = \langle 6,41 \times 10^{-19}; 0; 8,01 \times 10^{-19} \rangle \text{ N}$$

$$G3 \quad \text{zero}$$

$$G4 \quad 3,34 \times 10^{-5} \text{ m/s}$$

$$G5 \quad i = \frac{mg}{2NLB} = 2,45 \text{ A}$$

$$G6 \quad F_{res} = iB2\pi r \text{ sen}\theta \text{ na direção } y$$

$$G7 \quad B = \frac{\lambda g \tan \alpha}{i}$$

$$G8 \quad x = 0,4 \text{ m} \quad \theta_2 = \theta_1$$

$$G9 \quad 3,7 \times 10^{-24} \text{ Nm}$$

$$G11 \quad B = \frac{\mu_0 i (2r^2 - a^2)}{\pi r (4r^2 - a^2)}$$

$$G13 \quad B = \frac{\mu_0 i}{3\pi a} (4\sqrt{2} + 2\sqrt{10})$$

$$G15 \quad (a) \frac{\mu_0 i r}{2\pi a^2} \quad (b) \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad (c) \frac{\mu_0 i (r^2 - b^2)}{2\pi (c^2 - b^2)} - \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad (d) \text{ zero}$$

$$G16 \quad \frac{\mu_0 i}{2\pi r} + \frac{\mu_0 i}{2r} = \left(\frac{\mu_0 i}{2r} \right) \left(\frac{1}{\pi} + 1 \right)$$

$$G17 \quad (a) \frac{\mu_0 b r^2}{3} \quad (b) \frac{\mu_0 b r^3}{3r}$$

$$G18 \quad \frac{\mu_0 L i_1 i_2}{\pi R}$$

$$G19 \quad (a) \frac{\mu_0 N i}{2L} \left[\frac{d + \frac{L}{2}}{\sqrt{(d + \frac{L}{2})^2 + R^2}} - \frac{d - \frac{L}{2}}{\sqrt{(d - \frac{L}{2})^2 + R^2}} \right] \quad (b) \frac{\mu_0 i N}{L}$$

$$G20 \quad \frac{\mu_0 i}{8R} \text{ saindo da folha}$$

$$G21 \quad \text{dentro do fio } (a) 0 \text{ T} \quad (b) \frac{\mu_0 J_0 r}{2} \quad (c) \frac{\mu_0 J_0 r^2}{3}$$

$$\text{fora do fio } (a) \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad (b) \frac{\mu_0 J_0 a^2}{2r} \quad (c) \frac{\mu_0 J_0 a^3}{3r}$$

$$G22 \quad (a) \mu_0 i_a n_1 - \mu_0 i_b n_2 \quad (b) -\mu_0 i_b n_2 \quad (c) 0 \text{ T}$$

$$G23 \quad (a) i = \frac{J_0 2\pi r^3}{3R} \quad (b) B = \frac{\mu_0 J_0 r^2}{3R}$$

$$H1 \quad \Phi = \frac{\mu_0 \pi i^2 r^2}{2x^3}; \quad \epsilon = \frac{3\mu_0 \pi i R^2 r^2 v}{2x^4}; \quad \text{o mesmo do anel maior}$$

- H2 (a) $\frac{\mu_0 ib}{2\pi} \ln(1 + \frac{a}{d})$ (b) $5,01 \times 10^{-7} \text{ Wb}$
- H3 $0,122e^{-0,057t}$; $t = 40,4 \text{ s}$; sentido anti-horário
- H4 (a) 0 V (b) -10 mV (c) 0 V
- H5 anti-horário
- H6 (a) $Q = C\pi r^2 a$ (b) a placa da esquerda
- I1 (a) $i_1 = i_2 = 3,33 \text{ A}$ (b) $i_1 = 4,55 \text{ A}$ $i_2 = 2,73 \text{ A}$
(c) $i_1 = 0 \text{ A}$ $i_2 = -1,82 \text{ A}$ (d) $i_1 = i_2 = 0 \text{ A}$
- I2 $\Phi = \frac{Q}{2N} \sqrt{\frac{3L}{C}}$
- I4 $Q = \frac{\epsilon_0}{Lk^2}$
- .
- I6 (a) $\frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}$ (b) $\frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln(\frac{b}{a})$
- J1 (a) 15 Hz (b) $84,8 \text{ V}$ (c) $47,1 \Omega$ (d) $1,8 \text{ A}$ (e) $2,5 \text{ A}$
- J2 (a) $69,3 \text{ V}$ (b) 40 Hz (c) $20 \mu\text{F}$
- J3 (a) $\cos \phi = 0,30$ (b) $S = 1,22 \text{ VA}$ (c) $P = 0,36 \text{ W}$
(c) $Q = 1,15 \text{ VAR}$
- J4 (a) $V_1 = 5,40 \text{ V}$ $V_2 = 2,16 \text{ V}$ $V_3 = 22,50 \text{ V}$ $V_4 = 20,34 \text{ V}$
 $V_5 = 21,04 \text{ V}$ (b) $V_1 = 13,80 \text{ V}$ $V_2 = 27,20 \text{ V}$ $V_3 = 11,49 \text{ V}$
 $V_4 = 16,10 \text{ V}$ $V_5 = 20,90 \text{ V}$
- J5 (a) $\omega = 944,9 \text{ rad/s}$ (b) $R = 70,6 \Omega$ (c) $V_{Res} = 120 \text{ V}$
 $V_{Ind} = 449,8 \text{ V}$ $V_{Cap} = 449,8 \text{ V}$
- J6 (a) $I_C = 0$; $I_L = I_R = \frac{\epsilon_m}{R}$ (b) $I_L = 0$; $I_C = I_R = \frac{\epsilon_m}{R}$
(c) $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- J7 (a) $\omega'_{res} = \frac{\omega_{res}}{2}$ (b) $\chi'_L = 2\chi_L$ (c) $\chi'_C = \frac{1}{2}\chi_C$
(d) na ressonância $Z' = 2R$
- J8 (a) um indutor e um capacitor
(b) $C = 0,125 \text{ F}$ $L = 2 \text{ H}$
- J9 (a) um indutor; (b) $L = 0,13 \text{ H}$

Bibliografia

Chabay, Ruth W.. Matter & interactions. 3rd ed. Hoboken : Wiley, c2011. xxiv, 1080, 19 p : il.

Tipler, Paul A.. Física : para cientistas e engenheiros. 5. ed. Rio de Janeiro : Livros Técnicos e Científicos, 2006. 2 v. : il.

Serway, Raymond A.. Princípios de física. In: Serway, Raymond A.; Jewett, Jr., John W. Princípios de física. São Paulo: Pioneira Thomson Learning. 4 v., 2004-2005. São Paulo :Cengage Learning, c2004-2005 4 v. : il.

Young, Hugh D.. Sears e Zemansky Física. 10. ed. São Paulo : Pearson Addison Wesley, c2003, c2004. 4 v. : il. ; 25 cm.

Nussenzweig, HershMoyses. Curso de física básica. 4. ed. rev. São Paulo: Ed. Edgar Blucher, c2002. 4 v. : il.

Halliday, David. Fundamentos de física. 8. ed. Rio de Janeiro, RJ : LTC, c2009. 4 v. : il.