UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

PROGRESSÕES COM O GEOGEBRA: UM ESTUDO COM OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

YASMIN DE OLIVEIRA MENGER

Porto Alegre

2021

Yasmin de Oliveira Menger

PROGRESSÕES COM O GEOGEBRA:
UM ESTUDO COM OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática

Orientadora: Profª Drª Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Porto Alegre

2021

Instituto de Matemática e Estatística

Departamento de Matemática Pura e Aplicada

PROGRESSÕES COM O GEOGEBRA:
UM ESTUDO COM OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Yasmin de Oliveira Menger

Banca examinadora:

Profª. Drª. Marilaine de Fraga Sant'Ana
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

Prof. Dr. Vandoir Stormowski
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

Profª. Drª. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti – Orientadora
Instituto de Matemática e Estatística- UFRGS

AGRADECIMENTOS

Me arrisco a ser clichê, mas agradeço primeiramente a Deus, pois sei que quando havia apenas um par de pegadas na areia, era Dele.

Agradeço aos meus pais e ao meu irmão, que sempre encontraram espaço para o amor, para a paciência e para o incentivo a seguir meus sonhos, independente do sonho que fosse. Que sempre acreditaram em mim, geralmente, mais do que eu acreditava em mim.

Agradeço a toda minha família, a minha prima Samantha, que é muito mais irmã mais velha do que prima. A minha dinda Adriane, aos meus tios, Jatane e Jataniel e aos meus avós, Gelcy, Meni, João e Ignês, pois sempre estiveram ao meu lado.

As minhas amigas de infância, Yasmin Vasconcellos e Caroline Araújo, que permanecem ao meu lado, mesmo depois de tantos anos.

A família que encontrei na faculdade: Andrey, Jean, Mikaela, Gustavo, Pedro, Tiago M., Thiago F., Valéria, João, Giovana e Isadora, por me fazerem sentir parte do lugar. A vida as vezes nos leva para caminhos diferentes, mas sempre terei um pouco de vocês comigo.

Agradeço a professora Márcia Notare, minha orientadora, pela sua paciência provavelmente infinita, seus constantes cuidados e incentivos, me mantendo calma, mesmo quando achava que nada ia dar certo. Obrigada aos professores Vandoir Stormowski e Marilaine Sant’Ana por ajudarem a contribuir nesta pesquisa.

Agradeço, por fim, a todos que fizeram parte desta jornada.

RESUMO

Este trabalho de Conclusão de Curso busca analisar como o software de matemática dinâmica GeoGebra pode contribuir para o estudo de progressões. Foi utilizada como base a Teoria de Registros de Representações Semiótica de Duval, a potencialidade da utilização das tecnologias digitais para a aprendizagem de matemática e os pressupostos do ensino à distância no ensino básico. Para investigar o problema de pesquisa, foi planejada uma sequência de atividades, as quais estão registradas e disponibilizadas em um GeoGebraBook. O experimento prático da pesquisa para a produção dos dados foi realizado, de modo remoto, com alunos voluntários da 1ª série do Ensino Médio de uma escola particular de Canoas. A pesquisa apontou que utilizar o GeoGebra no estudo de progressões pode auxiliar na mobilização de diferentes registros de representação semiótica, descritos por Duval (2012, 2013), e contribuir para a apreensão global de conceitos matemáticos inerentes ao estudo de progressões.

Palavras chave: Progressões. GeoGebra. Registro de representação Semiótica. Ensino à Distância.

ABSTRACT

This Final Paper seeks to analyze how the dynamic mathematics software GeoGebra can contribute on the study of progressions. Duval's Theory of Semiotic Records Representations, the potential of using digital technologies for mathematics learning and the assumptions of e-learning in basic education were used as a basis. A sequence of activities was planned to investigate the research problem, which are recorded and available in a GeoGebraBook. The production of data for the practical research experiment was carried out, remotely, at a private school in Canoas, with high school 1st grade volunteer students. The research pointed out that using GeoGebra in the study of progressions can help to mobilize different semiotic records representations, described by Duval (2012, 2013) and contribute to the global understanding of mathematical concepts inherent to the study of progressions.

Keywords: Progressions. GeoGebra. Registration of Semiotic Representation. E-learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

Sumário

1. Introdução

Sempre gostei de matemática mais do que gostava das outras matérias e foi meu professor da 5ª série que, por acidente, acabou por me incentivar a ser professora. Lembro que ele já era bem velho e queria muito se aposentar, mas eu, criança e com energia ficava "incomodando" ele nas aulas de matemática e pedindo desafios mais difíceis, afinal, os exercícios do livro eu já tinha resolvido. Foi então que ele teve uma brilhante ideia: ele propôs que eu explicasse as questões para meus colegas, assim eu iria parar de "incomodá-lo" e meus colegas também iriam parar de perguntar para este professor. Então, foi assim que para parar de incomodar o professor, descobri que queria ser professora.

No entanto, mesmo sempre tendo grande apreço pelo conteúdo de matemática, meu contato com a matemática no ensino básico – salvo poucas exceções – limitou-se à manipulação de representações algébricas e aulas tradicionais (sala, quadro e livro), proporcionando-me um entendimento limitado ou, por vezes até falho, de alguns conteúdos.

No curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, tive a oportunidade de descobrir que a matemática não se limitava apenas a conceitos algébricos e como professores poderíamos e deveríamos proporcionar diferentes representações matemáticas, tais como representações algébricas, representações geométricas, representações por tabela entre outros.

Ao longo do curso estudamos sobre diferentes autores e, nesta pesquisa, abordaremos principalmente a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval (2012, 2013), que defende que para compreender determinado objeto matemático, o estudante deve ter a capacidade de identificá-lo em mais de um registro. Essa atividade cognitiva supõe que o aluno não confunde mais o objeto matemático com o conteúdo de uma única representação, proporcionando uma apreensão conceitual desse objeto.

Vinculado com o objetivo de proporcionar um melhor entendimento dos conteúdos estudados, ainda na universidade, tive a oportunidade de aprender a utilizar diferentes *softwares* voltados ao ensino, em especial ao *software* GeoGebra[1], o qual possui recursos que permitem a manipulação de diferentes objetos e representações matemáticas, como, por exemplo, representações gráficas, algébricas e geométricas, inclusive tendo a possibilidade de acessar e manipular tais representações de maneira dinâmica e simultânea.

Foi um longo caminho até chegar ao cerne desta pesquisa, afinal, durante o curso de Licenciatura em Matemática temos a oportunidade de fazermos diferentes projetos e, com tais oportunidades, encontramos, além de respostas, outras perguntas. Porém, durante o curso, ainda não havia participado de nenhum projeto ou pesquisa no qual vinculasse o conteúdo de progressões com nada além das representações algébricas. Percebendo isso, este trabalho visa responder à questão: **Como a utilização do GeoGebra e a mobilização de diferentes registros de representação semiótica auxiliam na aprendizagem das progressões?** A pesquisa tem por objetivo, a partir de uma sequência de atividades, verificar como estudantes transitam entre os registros de representação semiótica no processo de compreensão de progressões, em concordância com a Teoria de Raymond Duval.

Cabe aqui relatar que esta pesquisa foi realizada durante a pandemia da Covid-19 e foi conduzida de forma remota, com separação física dos participantes. Acerca da preparação de aulas remotas e da utilização de tecnologias digitais de informação e comunicação (TDICs), Notare (2012) apresenta a importância da elaboração do material educacional digital (MED). Esta pesquisa foi planejada para ser colocada em prática em aulas remotas, mas seu planejamento pode ser utilizado também em aulas presenciais, desde que com o auxílio de recursos tecnológicos.

Esse trabalho foi estruturado em quatro capítulos. O segundo capítulo trata acerca das considerações teóricas nas quais foram feitos os embasamentos desta pesquisa. Abordaremos a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval, a tecnologia digital nas aulas de matemática, o estudo de progressões e trabalhos correlatos.

O terceiro capítulo aborda os procedimentos metodológicos, no qual falaremos sobre a abordagem qualitativa, o contexto e a produção das atividades desta pesquisa. No

[1] Disponível em: https://www.geogebra.org/download (Acesso em: 04/12/2021)

quarto capítulo faremos a descrição e análise do experimento prático. Por fim, haverá algumas reflexões finais acerca desta pesquisa.

2. Considerações Teóricas

Esse capítulo aborda aspectos teóricos acerca da teoria dos registros de representações semióticas de Duval, do ensino de progressões e do desenvolvimento da educação a distância. O estudo foi realizado por meio de consulta e reflexão sobre trabalhos relacionados aos temas anteriormente citados e da Base Nacional Comum Curricular.

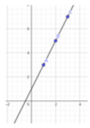
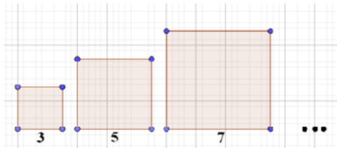
2.1 Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval

Para entender as dificuldades que os alunos têm na compreensão da matemática, Duval (2013) argumenta que devemos buscar entender qual a natureza dessas dificuldades e onde elas se encontram. O autor salienta a importância dessas questões para que, ao ensinarmos matemática, não estarmos dando instrumentos eventualmente úteis ou somente formando futuros matemáticos, mas também estarmos contribuindo com seu desenvolvimento geral e sua capacidade de raciocínio.

Quando abordamos o ensino de matemática, estamos lidando com objetos abstratos, pois os elementos que tal área estuda não são ditos "reais" ou "físicos" e não podem ser diretamente acessados via percepção imediata. É preciso, então, utilizar representações para acessar e manipular tais objetos. Porém a representação irá depender do registro de representação semiótica a ser utilizado. Se pensarmos em uma função, ela pode ser representada, entre outros registros, pela lei algébrica da função ou pelo gráfico correspondente - além de outros aspectos a serem considerados, como, por exemplo, em qual plano está representada tal função? Portanto, é importante salientar que os objetos matemáticos representados não estão "presos" a uma única representação, mas geralmente possuem várias representações semióticas que desempenham um papel notável no estudo de matemática.

Neste trabalho estudaremos Progressões Aritméticas (PA) e Progressões Geométricas (PG) considerando que elas podem ter mais de uma representação. Na Figura 1 está representada a PA $(3,5,7,\ldots)$ por meio de seu termo geral, sua representação gráfica, sua representação algébrica e uma possível representação geométrica.

Figura 1: Exemplo de representações de uma PA

Termo geral da P.A.	Gráfico	Lei da função	Representação geométrica
$a_n = 3 + (n-1) \cdot 2$		y = 2x + 1	

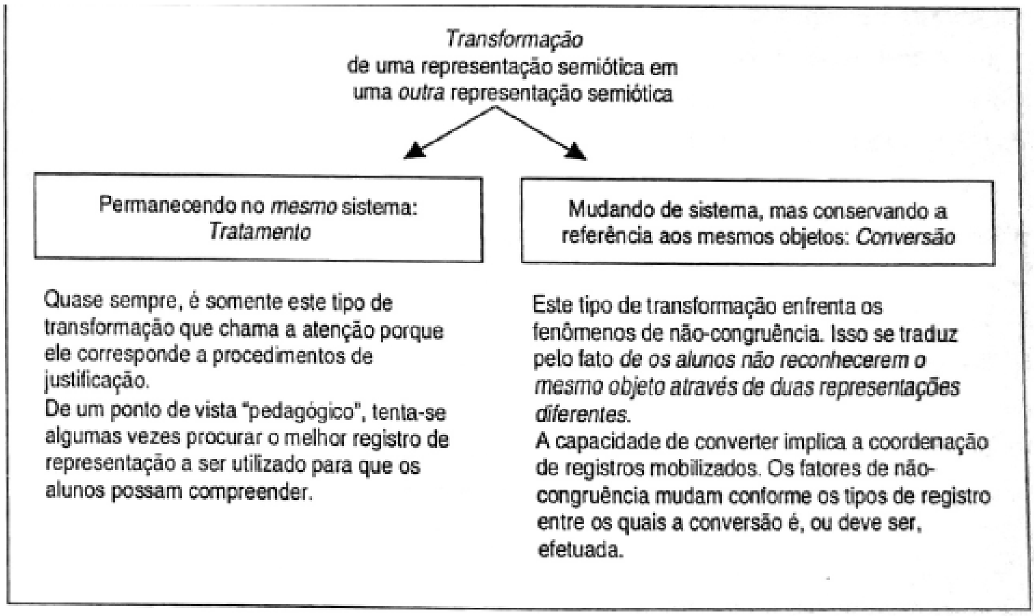
Fonte: Dados da pesquisa

Para melhor compreendermos os diferentes registros de representações, Duval (2012) as separa em dois grupos: mentais e semióticas. As representações mentais tratam de um conjunto de imagens, estão ligadas a como imaginamos o objeto matemático e como o conceituamos, enquanto as representações semióticas envolvem o emprego de signos que pertencem a um sistema de representação, com especificidades próprias de significação e de funcionamento. O autor salienta a importância da utilização das representações na aprendizagem da matemática.

> Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. Consideram-se, geralmente, as representações semióticas como um simples meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação, quer dizer para torná-las visíveis ou acessíveis a outrem. Ora, este ponto de vista é enganoso. As representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento. (DUVAL, 2012, p.269)

Analisando o desenvolvimento cognitivo da aprendizagem dos alunos em matemática, o autor especifica que existem diferentes tipos de transformações para as representações semióticas e as separa em *tratamento* e *conversões*, como veremos no Quadro 1 a seguir:

Quadro 1: Transformações de registros de representação semiótica



Fonte: Duval (2013, p. 15)

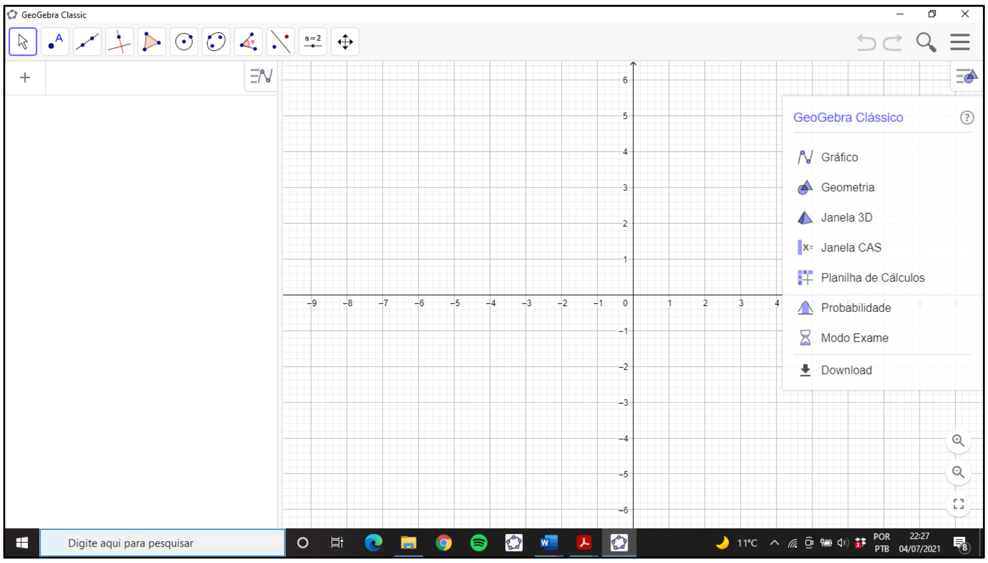
Do ponto de vista matemático, a conversão não possui papel fundamental para os matemáticos, pois pode não agregar importância em justificativas ou provas, por isso pode não chamar atenção, ou ser considerada apenas uma atividade secundária. Porém, do ponto de vista pedagógico, tal transformação de registro de representação semiótica representa um princípio de compreensão do conteúdo estudado. A atividade cognitiva de conversão de registros desempenha papel fundamental para conseguirmos analisar o entendimento do aluno, sendo utilizada para converter um registro semiótico em outro, estando este novo registro representado em um diferente sistema.

Mas, por que Duval considera a conversão tão importante para analisar o entendimento do aluno acerca do conteúdo? Como já foi citado no começo deste texto, os objetos matemáticos são abstratos e suas representações semióticas são apenas meios para mostrar ou acessar o objeto de estudo. Nesta linha de raciocínio, o próprio autor argumenta que estamos em um paradoxo cognitivo do pensamento matemático, afinal, se as representações semióticas não devem ser consideradas como os próprios objetos matemáticos, mas os objetos matemáticos só podem ser acessados por meio dessas representações semióticas, então como não os confundir?

Para responder tal questionamento, o autor argumenta que para compreender o objeto matemático, o estudante deve ter a capacidade de mudar de registro. Essa atividade cognitiva supõe que o aluno não confunde mais o objeto matemático com o conteúdo de uma única representação, proporcionando uma apreensão conceitual desse objeto. Portanto, ao entender que o objeto matemático não possui apenas um registro específico e tendo a capacidade de fazer a conversão de um mesmo objeto matemático para, no mínimo, duas representações diferentes, o educando avança no processo de compreensão do objeto matemático. Tal constatação enfatiza a importância de os educadores utilizarem diferentes representações para um mesmo objeto matemático durante as aulas e incentivar a mobilização dessas representações nas atividades propostas aos alunos.

Uma das possibilidades de trabalhar com a mobilização de diferentes registros de representação semiótica é com a utilização das tecnologias digitais. O software GeoGebra, por exemplo, permite de maneira versátil e simultânea "a alternância entre os registros analíticos e gráficos que representam as relações de funções afins e exponenciais com progressões aritméticas e geométricas" (MARCHETTO, 2017, p.30). O GeoGebra possibilita ao estudante acesso dinâmico aos objetos matemáticos com representações semióticas diferentes e simultâneas, além de ter uma interface intuitiva, como mostra a Figura 2 a seguir.

Figura 2: Interface do software GeoGebra – Versão 6-0-640-0



Fonte: Dados da pesquisa

Além disso, este software mostra-se disponível para todos os sistemas operacionais e, além da versão para computadores, encontramos também a versão para dispositivos móveis, como tablets ou smartphones, todos estes sem custo, o que colabora para uma mais fácil disseminação entre professores e estudantes.

Para realçar o potencial do GeoGebra para o trabalho com diferentes registros semióticos vamos analisar a questão apresentada na Figura 3 a seguir.

Figura 3: Questão de Progressão Aritmética

A altura de uma planta, em centímetros, ao decorrer dos dias, foi anotada e organizada conforme a tabela seguinte:

Tempo (dias)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Altura (cm)	3,0	5,5	8,0	10,5	13,0	15,5	18,0	20,5	23,0

Se esse comportamento de crescimento for mantido, essa planta terá a altura de 65,5 cm após:

A) 20 dias

B) 22 dias

C) 23 dias

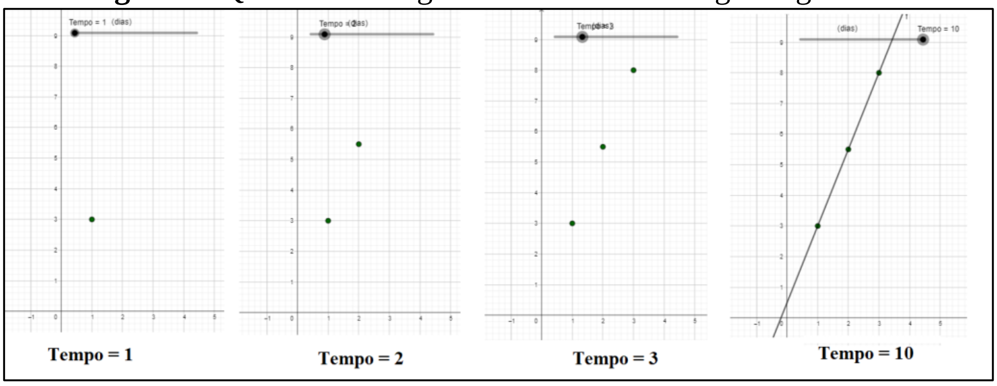
D) 25 dias

E) 26 dias

Fonte: Mundo Educação

Percebe-se, de imediato, que a questão apresenta as informações do problema na forma de registro em tabela. Porém, é possível, para melhor explorar a situação, colocar as informações que a tabela traz como pontos no plano cartesiano no software GeoGebra. A partir desse registro gráfico, podemos identificar, de forma evidente, que os pontos estão alinhados e relacionados a uma função afim. Com o auxílio do recurso de "controle deslizante", os alunos podem dinamizar a questão, como mostrado na Figura 4 a seguir.

Figura 4: Questão de Progressão Aritmética – registro gráfico



Fonte: Dados da pesquisa

A construção mostrada na Figura 4 permite-nos acessar dois registros de representação semiótica, uma representação em tabela e uma representação gráfica, favorecendo a atividade cognitiva de conversão de registros. É notável, em ambos os registros de representações semióticas, a identificação do padrão de crescimento de 2,5cm por dia, porém, como fica evidenciado na Figura 4, a utilização do recurso "controle deslizante" permite uma apreensão mais visual do crescimento que está acontecendo com o passar dos dias – tomando os dias pelo eixo x e a altura pelo eixo y. Além disso, segundo recomendações da BNCC, é importante o estudo de função afim antes do estudo de progressões. A partir do estudo de tal conteúdo, os estudantes podem perceber que a questão se trata de uma função cuja forma algébrica pode ser descrita por "$y = 2{,}5x + 0{,}5$ e, portanto, se substituirmos y por 65,5 poderemos encontrar a resposta do problema.

Destacamos, então, que uma única questão, ou objeto matemático, possui no mínimo três representações semióticas que podem ser construídas no software GeoGebra (tabela, gráfica e algébrica). Portanto, o GeoGebra pode possibilitar o acesso a diferentes registros de um mesmo objeto, além de auxiliar no processo de conversão de registros, proporcionando uma apreensão conceitual e dinâmica do conteúdo a ser estudado.

Na seção a seguir, apresentamos a utilização de recursos de tecnologia digital nas aulas de matemática, como se desenvolveram com o passar dos anos e quais recursos foram utilizados nesta pesquisa.

2.2 Tecnologia digital nas aulas de matemática

A pesquisa realizada nesse trabalho foi conduzida de forma remota, com separação física dos participantes. Dessa forma, as estratégias pedagógicas para a elaboração do material educacional da pesquisa, assim como as estratégias de interação entre participantes e pesquisador, foram ancoradas em estudos relacionados à Educação a Distância (EAD). A EAD é a forma de ensino caracterizada pela separação física e/ou temporal de professores e alunos. Segundo a lei, a EAD é encontrada no decreto n° 9057, de 25 de maio de 2017:

> Art. 1° Para os fins deste Decreto, considera-se educação a distância a modalidade educacional na qual a mediação didático-pedagógica nos processos de ensino e aprendizagem ocorra com a utilização de meios e tecnologias de informação e comunicação, com pessoal qualificado, com políticas de acesso, com acompanhamento e avaliação

> compatíveis, entre outros, e desenvolva atividades educativas por estudantes e profissionais da educação que estejam em lugares e tempos diversos. (BRASIL, 2017, p.1)

Behar (2009) argumenta que a EAD pode causar uma sensação de isolamento por parte dos alunos, caso as interações e o contato com professor e com outros colegas seja precária. Dessa forma, é importante ressaltar que, tanto o decreto já citado, quanto Behar (2009) enfatizam a necessidade de utilização de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs), para “diminuir” essa “distância pedagógica” entre o aluno e o professor.

É interessante notar que, ao contrário do que pode vir a ser o senso comum, a história da EAD no Brasil ou no mundo não começa no século XXI, mas seus primeiros registros (no Brasil) vem do começo do século XX. Porém, as características do ensino a distância mudaram ao longo dos anos, principalmente pelo surgimento de novas TDICs.

Alves (2011) argumenta que provavelmente as primeiras experiências em EAD no Brasil ficaram sem registro, mas em 1904 o Jornal do Brasil, na seção de classificados, oferece profissionalização por correspondência para datilógrafos. A partir de tal marco se tem registros de cursos por rádio, telefone, correspondência, TV, CD-ROM, e-mail e etc., incluindo o surgimento de instituições de ensino voltadas exclusivamente a EAD.

> Assim, a EaD passou, pela era do correio, do rádio e da televisão, e vive hoje a era da internet, tendo, em cada período, de acordo com suas circunstâncias, acumulado certa quantidade de erros e acertos, contradições e incoerências não de todo inesperadas, já que vivemos num país com dimensões continentais e com problemas estruturais no campo educacional que demandam correções urgentes. (GOMES, 2013. p. 19)

Percebendo que as novas gerações estão tendo contato cada vez mais cedo com computadores e celulares, é difícil entender por qual motivo a escola tem dificuldade (ou resistência) em aderir às tecnologias digitais. Notare e Gravina (2013) apontam como uma das causas para tal acontecimento a falta de ampla divulgação dos recursos didáticos digitais na formação de professores, sendo então - geralmente – necessária uma formação continuada para o docente utilizar de recursos digitais nas aulas de matemática.

Acerca da preparação de aulas EAD e da utilização de TDICs, Notare (2012) apresenta a importância da elaboração do Material Educacional Digital (MED), enfatizando possibilidades de maior autonomia que tal recurso pode proporcionar se comparado ao material impresso. Além disso, a utilização de materiais educacionais digitais permite contemplar atendimentos aos variados estilos de aprendizagem dos alunos, já que, com um material digital e manipulativo o estudante poderá desenvolver seus conhecimentos de acordo com suas necessidades e realidade.

> Em cursos a distância, a qualidade do material educacional que será disponibilizado aos alunos configura-se como um dos pilares da EAD. Sabe-se que apenas a disponibilização de material impresso apresenta limitações, por ser um meio unidirecional, que não permite interação e flexibilidade. É a concepção do MED que conduz para a escolha dos conteúdos e para o direcionamento pretendido. (NOTARE, 2012, p.2)

O surgimento de novas TDICs proporciona também o aparecimento de novos ambientes para o ensino de matemática, os quais podem oferecer uma visualização diferente de problemas já antes concebidos, assim como outras formas de manipular os objetos matemáticos. Essas novas visualizações podem ser interpretadas como diferentes representações semióticas de um mesmo objeto matemático, como abordado na seção anterior, na qual, segundo Duval (2013), para um real entendimento de um objeto matemático é necessário que o estudante consiga perceber, no mínimo, duas representações semióticas diferentes.

Basso e Notare (2015) destacam que o intuito não é de “utilizar a tecnologia para proporcionar mais praticidade e rapidez na execução de algoritmos”, mas sim, “proporcionar aos alunos possibilidades para acessar e manipular objetos matemáticos até então não acessíveis.” (p. 3). Pois assim os alunos que conseguirem movimentar e modificar os objetos matemáticos no computador, ou no smartphone, ou no tablet, estarão operando de forma recíproca em suas mentes, de modo que os recursos digitais se tornam extensões de pensamento que potencializam as atividades cognitivas dos estudantes.

Impulsionando de forma abrupta o ensino remoto, a chegada do coronavírus fez com que funcionários e instituições de ensino de todos os níveis aderissem, mesmo que as vezes de maneira precária, às aulas à distância. Moreira, Henriques e Barros (2020) argumentam que professores e escolas “foram forçados a adotar [...] práticas de ensino remoto de emergência, muito diferentes das práticas de uma educação digital em rede de qualidade.”. Transformando, quase que do dia para a noite, professores em youtubers, postando vídeos e fazendo vídeo conferência em diferentes sistemas, a pandemia forçou, mesmo o educador mais apegado às aulas presenciais, em professor do ensino remoto.

O ensino remoto apresentou-se de forma diversa nas escolas, com aulas, síncronas, tarefas assíncronas ou gravação de vídeos, com a utilização de *softwares* e outros recursos digitais, ou apenas com materiais impressos disponibilizados nas instituições de ensino para os estudantes. Todos os professores viram-se voltados a novas práticas de ensino.

Moreira, Henriques e Barros (2020) argumentam que devemos aproveitar essa necessidade imediatista de aulas remotas para ampliar o conhecimento das tecnologias digitais pelos docentes e discentes. Afinal, apesar de todas as tragédias que a pandemia trouxe, que utilizemos essa necessidade de utilização de tecnologia para melhorar e ampliar a educação na escola, a muito parada no tempo.

2.3 O ensino e aprendizagem de progressões

Nesta seção analisamos como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) aborda a aprendizagem de progressões, assim como descrevemos como os livros didáticos abordam essa temática. Antes de analisar o conteúdo específico dessa pesquisa, vamos especificar o que é a BNCC:

> [...] é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (BRASIL, 2017, p. 7)

Esse documento trata as progressões como sendo sequências que os alunos da 1ª série do ensino médio devem identificar e manipular, conseguindo descrever por meio de um padrão ou regularidade os elementos de tais sequências, estando elas representadas de forma algébrica ou geométrica. Também se percebe que os parâmetros curriculares nacionais esperam que a escola trabalhe com o conteúdo de progressões de maneira gradual.

> As progressões aritmética e geométrica [...] não devem ser tratadas como um tópico independente, em que o aluno não as reconhece como funções já estudadas. Devem-se evitar as exaustivas coletâneas de cálculos que fazem simples uso de fórmulas (“determine a soma...”, “calcule o quinto termo...”). (BRASIL, 2006, p. 75)

De acordo com Marchetto (2017), o conteúdo de progressões pode causar confusão nos estudantes de ensino médio graças a falta de “ligação” entre este tema e outros temas estudados anteriormente. Não há uma real necessidade de tratarmos sequências como algo completamente novo, ou desconexo dos outros conteúdos, afinal “As sequências têm muitas aplicações, tanto em nosso cotidiano como dentro da própria matemática.” (MARCHETTO, 2017, p. 38). Além disso o aluno ficará mais motivado na aprendizagem de progressões se conseguir perceber ou identificar mais de uma representação. Ainda em sua pesquisa Marchetto (2017) argumenta que existem poucas pesquisas relacionadas ao ensino de sequências, portanto para compreender melhor o ensino de progressões nas escolas, torna-se importante verificar como os livros didáticos abordam essa temática. Por isso, examinaremos os livros didáticos apresentados no Quadro 2.

Quadro 2: Livros didáticos analisados e siglas adotadas

Títulos dos Livros	Autores	Edição	Volume	Sigla
Matemática, ciências e aplicações	Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo e Almeida	9ª	1	L1
Matemática, contexto & aplicações	Luiz Roberto Dante	2ª	1	L2

Fonte: Dados da pesquisa

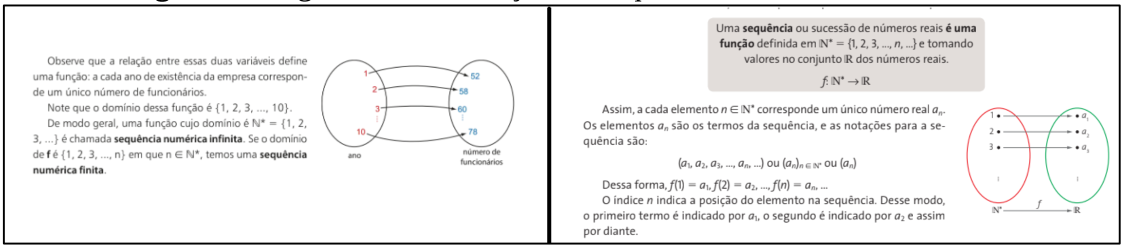
Optamos por analisar livros do acervo online Prof. Leonardo Portal[2], bastante utilizado por alunos e professores durante as aulas remotas. Tais livros podem ser encontrados impressos e digitais. Além disso, sua versão online está disponível de forma gratuita e facilmente disseminada.

O Livro L1 foi lançado em 2016 e o Livro L2 em 2013. Cabe aqui relatar que a BNCC, anteriormente citada, foi homologada em 2018, portanto depois da publicação de tais livros. Os livros didáticos indicados para a 1ª série do ensino médio analisados nesta pesquisa apresentam um capítulo próprio para o estudo de progressões. Cabe aqui ressaltar que em ambos os livros, tais capítulos estão colocados logo após os capítulos

[2] Disponível em: https://www.leonardoportal.com/p/acervo-de-matematica.html (Acesso em: 04/10/2021)

que abordam as funções. No entanto para introduzir o conteúdo de progressões, o Livro L2 utiliza a ideia de regularidades e de identificação de padrões na natureza, com o intuito de estimular e dar exemplos de sequências encontradas no cotidiano do aluno. O Livro 1, porém, já adentra o capítulo trazendo um vínculo entre sequências e função afim. É importante dizer que logo os livros parecem "concordar" e o Livro 2 também faz uma ponte entre progressões e funções. Na Figura 5, a seguir, um registro da introdução de ambos os livros acerca de sequências, utilizando funções de domínio N^* (L1 na Figura 5 (a), L2 na Figura 5 (b))

Figura 5: Registro da introdução de sequências nos livros didáticos



(a) **(b)**

Fonte: Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo e Almeida (2016, p. 171) L1, Dante (2013, p. 207) L2

Tendo então definido o conceito de sequência, os livros começam a apresentar os conceitos de termos e razões, geralmente com a utilização de exemplos perceptíveis no cotidiano dos estudantes (dias, meses, salário...). Logo em seguida são apresentadas as definições de progressão aritmética (PA). Aqui se percebe que o Livro 1 introduz o conteúdo com um exemplo geométrico, enquanto o Livro 2 faz uma definição mais formal do conteúdo em questão. Em contrapartida, ao analisarmos as questões relacionadas a PA o L2 traz, mesmo que raramente, questões envolvendo formas geométricas, enquanto o L1 traz apenas questões algébricas, como veremos da Figura 6.

Percebemos pela análise dos livros que, apesar da BNCC especificar a importância de relacionar o conteúdo de funções com outros conteúdos já vistos anteriormente, os autores dos livros não costumam abordar esses aspectos. Além disso, os livros enfatizam questões com representações somente algébricas, não incentivando a mobilização de diferentes registros para melhor apreensão conceitual do objeto em estudo. Outro aspecto que destacamos é o fato de não identificarmos, nos livros analisados, nenhuma tentativa de utilização de tecnologias digitais, as quais poderiam dinamizar explicações e questões.

Figura 6: Questões de PA do Livro L1

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

9 Quais das sequências seguintes representam progressões aritméticas?

a) (21, 25, 29, 33, 37, ...)

b) (0, −7, 7, −14, 14, ...)

c) (−8, 0, 8, 16, 24, 32, ...)

d) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, ...\right)$

e) (−30, −36, −41, −45, ...)

f) $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, ...)$

10 Determine a razão de cada uma das progressões aritméticas seguintes, classificando-as em crescente, decrescente ou constante.

a) (38, 35, 32, 29, 26, ...)

b) (−40, −34, −28, −22, −16, ...)

c) $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, ...\right)$

d) (90, 80, 70, 60, 50, ...)

e) $\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, ...\right)$

f) $(\sqrt{3} - 2, \sqrt{3} - 1, \sqrt{3}, \sqrt{3} + 1, ...)$

11 Dada a P.A. (28, 36, 44, 52, ...), determine seu:

a) oitavo termo;

b) décimo nono termo.

12 Em uma P.A. de razão 9, o 10º termo vale 98.

a) Qual é seu 2º termo?

b) Qual é seu termo geral?

13 Preparando-se para uma competição, um atleta corre sempre 400 metros a mais que a distância percorrida no dia anterior. Sabe-se que no 6º dia ele correu 3,2 km. Qual é a distância percorrida pelo atleta no 2º dia?

14 Faça o que se pede:

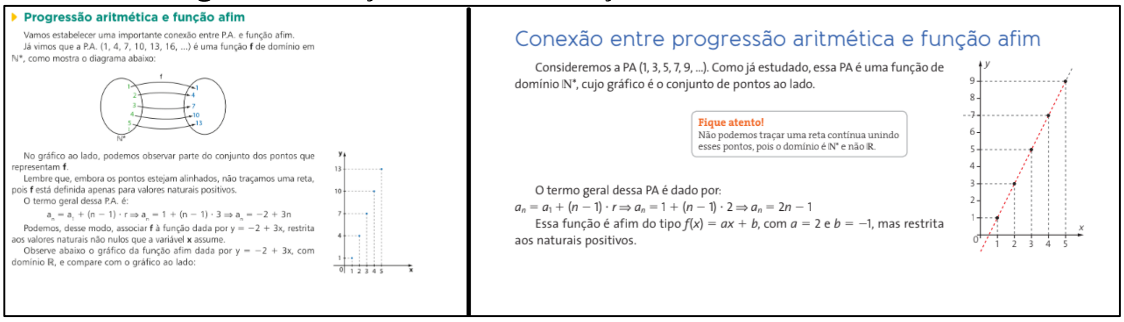
a) Escreva a P.A. em que o 4º termo vale 24 e o 9º termo vale 79.

b) Considerando a sequência formada pelos termos de ordem par (2º, 4º, 6º, ...) da P.A. do item a, determine seu 20º termo.

Fonte: Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo e Almeida (2016, p. 176)

Como já citado, no começo do capítulo de progressões, ambos os livros abordaram sequências, fazendo uma ponte entre este conteúdo e o conteúdo de funções, apenas utilizando a definição de conjuntos, como mostrado na Figura 7. No final da seção de PA, ambos os livros retomam a relação entre PA e função afim utilizando agora de sua representação gráfica. Cabe aqui ressaltar que ambos os livros fazem uma análise pontual dos aspectos relacionados à mobilização de diferentes registros de representação semiótica, e não dão continuidade ou apresentam questionamentos que provoquem o trabalho simultâneo com os registros, conforme ilustra a Figura 7 a seguir. (L1 na Figura 7 (a), L2 na Figura 7 (b))

Figura 7: Relação entre PA e função afim nos livros didáticos



Progressão aritmética e função afim

Vamos estabelecer uma importante conexão entre P.A. e função afim.

Já vimos que a P.A. (1, 4, 7, 10, 13, 16, ...) é uma função **f** de domínio em $\mathbb{N}^*$, como mostra o diagrama abaixo:

No gráfico ao lado, podemos observar parte do conjunto dos pontos que representam **f**.

Lembre que, embora os pontos estejam alinhados, não traçamos uma reta, pois **f** está definida apenas para valores naturais positivos.

O termo geral dessa P.A. é:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow a_n = -2 + 3n$$

Podemos, desse modo, associar **f** à função dada por $y = -2 + 3x$, restrita aos valores naturais não nulos que a variável **x** assume.

Observe abaixo o gráfico da função afim dada por $y = -2 + 3x$, com domínio $\mathbb{R}$, e compare com o gráfico ao lado:

Conexão entre progressão aritmética e função afim

Consideremos a PA (1, 3, 5, 7, 9, ...). Como já estudado, essa PA é uma função de domínio $\mathbb{N}^*$, cujo gráfico é o conjunto de pontos ao lado.

Fique atento!
Não podemos traçar uma reta contínua unindo esses pontos, pois o domínio é $\mathbb{N}^*$ e não $\mathbb{R}$.

O termo geral dessa PA é dado por:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow a_n = 2n - 1$

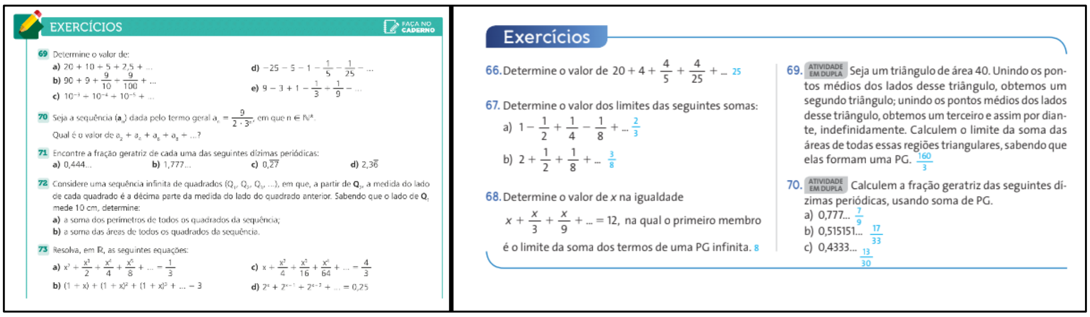
Essa função é afim do tipo $f(x) = ax + b$, com $a = 2$ e $b = -1$, mas restrita aos naturais positivos.

Fonte: p. Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo e Almeida (2016, p. 181) L1, Dante (2013, p. 218)

Em seguida, quando abordado o conteúdo de progressão geométrica (PG), o Livro L1 traz uma questão fictícia de "propagação de notícias" induzindo os alunos a fazerem uma associação entre PA e PG Logo depois, o capítulo explica que a razão nas PGs será representada pela letra "q" e faz uma definição formal acerca do conteúdo. O Livro L2 apresenta o conteúdo de PG com uma questão real de "taxa de crescimento relativo da produtividade de uma usina de açúcar", no entanto, após tal exemplo define PG da mesma maneira de L1.

Na seção de PG podemos perceber que existe uma perda quase que total da utilização de representações não algébricas. Tanto as explicações, quanto as questões exigidas mostram-se estáticas, com exceção de pequenos adendos quando ambos os livros definem a soma dos termos de uma PG infinita e fazem – como na seção sobre PA – uma breve conexão entre PG e função exponencial. Cabe aqui ressaltar que a utilização de geometria e funções se encontra apenas nas explicações, mas não se identificam questões abordando tais representações, como poderemos ver na Figura 8 (L1 na Figura 8 (a), L2 na Figura 8 (b)).

Figura 8: Exemplos de questões sobre soma dos infinitos termos de uma PG nos livros didáticos



EXERCÍCIOS — FAÇA NO CADERNO

69 Determine o valor de:
a) $20 + 10 + 5 + 2,5 + \ldots$
b) $90 + 9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \ldots$
c) $10^{-3} + 10^{-4} + 10^{-5} + \ldots$
d) $-25 - 5 - 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \ldots$
e) $9 - 3 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \ldots$

70 Seja a sequência (a_n) dada pelo termo geral $a_n = \frac{9}{2 \cdot 3^n}$, em que $n \in \mathbb{N}^*$.
Qual é o valor de $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \ldots$?

71 Encontre a fração geratriz de cada uma das seguintes dízimas periódicas:
a) 0,444... b) 1,777... c) $0,\overline{27}$ d) $2,3\overline{6}$

72 Considere uma sequência infinita de quadrados ($Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$), em que, a partir de Q_2, a medida do lado de cada quadrado é a décima parte da medida do lado do quadrado anterior. Sabendo que o lado de Q_1 mede 10 cm, determine:
a) a soma dos perímetros de todos os quadrados da sequência;
b) a soma das áreas de todos os quadrados da sequência.

73 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:
a) $x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{8} + \ldots = \frac{1}{3}$
b) $(1 + x) + (1 + x)^2 + (1 + x)^3 + \ldots = 3$
c) $x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{64} + \ldots = \frac{4}{3}$
d) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \ldots = 0,25$

Exercícios

66. Determine o valor de $20 + 4 + \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \ldots$ 25

67. Determine o valor dos limites das seguintes somas:
a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$ $\frac{2}{3}$
b) $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \ldots$ $\frac{3}{8}$

68. Determine o valor de x na igualdade $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \ldots = 12$, na qual o primeiro membro é o limite da soma dos termos de uma PG infinita. 8

69. ATIVIDADE EM DUPLA Seja um triângulo de área 40. Unindo os pontos médios dos lados desse triângulo, obtemos um segundo triângulo; unindo os pontos médios dos lados desse triângulo, obtemos um terceiro e assim por diante, indefinidamente. Calculem o limite da soma das áreas de todas essas regiões triangulares, sabendo que elas formam uma PG. $\frac{160}{3}$

70. ATIVIDADE EM DUPLA Calculem a fração geratriz das seguintes dízimas periódicas, usando soma de PG.
a) 0,777... $\frac{7}{9}$
b) 0,515151... $\frac{17}{33}$
c) 0,4333... $\frac{13}{30}$

Fonte: Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo e Almeida (2016, p. 190) L1, Dante (2013, p. 230)

Portanto percebemos que, apesar da BNCC e dos parâmetros curriculares nacionais orientarem o ensino de sequências por meio de diferentes representações, os livros didáticos possuem uma carência em abordar o conteúdo de maneira dinâmica, enfatizando as questões em perguntas exclusivamente algébricas. Fica claro, portanto, que a utilização de tecnologias digitais contemporâneas pode vir a auxiliar no desenvolvimento da aprendizagem de progressões, permitindo aos alunos a possibilidade de identificar um mesmo objeto matemático em registros semióticos diferentes.

2.4 Trabalhos Correlatos

O assunto abordado nessa pesquisa já foi estudado em outros trabalhos. Assim, para conhecer o panorama de pesquisas que se aproximam de nosso estudo, primeiramente realizamos uma pesquisa no Repositório Digital da UFRGS (LUME)[3], com as seguintes palavras chaves: Progressões, GeoGebra e Duval. Encontramos então o trabalho de Carlos (2017). Também realizamos uma pesquisa no Google Acadêmico[4], utilizando as mesmas palavras chaves, e encontramos os trabalhos de Julião, Cristovão, Oliveira (2020), Ferreira, Alves, Santos (2021) e Kluppel (2012). O Quando 3, a seguir, traz as temáticas que cada trabalho aborda associadas às palavras chaves usadas.

[3] Disponível em: https://lume.ufrgs.br/ (Acesso em:04/12/2021)
[4] Disponível em: https://scholar.google.com.br/?hl=pt (Acesso em:04/12/2021)

Quadro 3: Relação entre os trabalhos escolhidos e as temáticas abordadas

Autores	Teoria de Duval	Progressões	Software GeoGebra	Tipo de Pesquisa
Julião, Cristovão, Oliveira (2020)	X	X		Artigo
Carlos (2017)	X		X	Dissertação
Ferreira, Alves, Santos (2021)		X	X	Artigo
Kluppel (2012)	X			Dissertação

Fonte: Dados da pesquisa

Explorando o primeiro artigo "*Uma análise de representações semióticas no estudo de sequências numéricas com alunos do Ensino Médio*" de Julião, Cristovão e Oliveira (2020), identificamos que os autores fizeram uma pesquisa na qual buscaram desenvolver diferentes significantes para os mesmos objetos matemáticos, mais especificamente, objetos matemáticos do estudo de padrões e regularidades em sequências numéricas, bem como especificidades do conteúdo progressões aritméticas e geométricas.

Segundo os autores, a mudança de registro proporciona um entendimento mais completo de um mesmo conteúdo estudado, portanto a pesquisa por eles realizada ao longo de 12 horas-aula, em uma turma de 1ª série do ensino médio possibilitou a realização das transformações descritas por Duval (2013). Os autores destacam que

> [...] é importante formular tarefas que suscitam a atividade cognitiva tanto de tratamento quanto de conversão das representações semióticas entre registros, bem como a análise da congruência semântica com relação ao conteúdo da representação semiótica na língua natural.(p. 17)

Em sua dissertação, Carlos (2017) traz a teoria de Duval e a utilização do software GeoGebra em "*Parâmetros no GeoGebra na construção de Circunferências: Um Estudo Sobre Raciocínio Generalizador com Alunos do 3º Ano do Ensino Médio*". A autora desenvolve sua pesquisa criando um *website*[5] o qual desenvolve atividades para recordar a utilização do software e sobre o conteúdo de circunferências.

[5] Disponível em: https://marcianecarlos.wixsite.com/matematica (Acesso em:04/12/2021)

A autora observou que o software GeoGebra possibilitou aos alunos, de forma dinâmica, a visualização das alternâncias de registros semióticos. Segundo a autora, o software permite que de forma simultânea se perceba que, ao alterar os parâmetros, a figura geométrica por ele descrita se altere também, concluindo que

> [...] trabalhar atividades que proporcionam o conhecimento global do objeto de estudo é importante para a compreensão do mesmo. A utilização do software GeoGebra nesta sequência de atividades foi importante no processo de aprendizagem dos alunos, ao proporcionar o pensar matematicamente diante das atividades propostas. (CARLOS, 2017, p. 118).

É esperado que, assim como no trabalho de Carlos (2017), nesta pesquisa os alunos consigam transitar entre os diferentes registros de representação, assim como consigam utilizar do software como apoio para tal transição.

No artigo intitulado *O uso do GeoGebra para a interpretação geométrica de funções aplicadas ao estudo das progressões aritméticas e geométricas* Ferreira, Alves e Santos (2021) fizeram uma pesquisa com seis professores do ensino médio, que conhecem o conteúdo das sequências e que já trabalham em suas aulas cotidianamente com o software GeoGebra, além de dois professores dos anos iniciais do ensino fundamental, a fim de observarem os aspectos didáticos. Planejaram uma Situação Didática, usando a resolução de um Problema Olímpico extraído da OBMEP (2010). Ao final da pesquisa, os autores concluíram que é importante fomentar uma discussão sobre a utilização de ferramentas tecnológicas digitais, como o software GeoGebra, nos processos de ensino e de aprendizagem de conteúdos de matemática.

Na dissertação de Kluppel (2012) intitulada *Reflexões sobre o ensino de geometria em livros didáticos a luz da teoria de representação semiótica segundo Raymond Duval*, a autora tem como objetivo explicitar a importância da presença da teoria de Duval nos livros didáticos, argumentando que por meio de estudos dos livros didáticos é possível saber um pouco mais a respeito de como o conteúdo está sendo trabalhado nas escolas. A pesquisa conclui que os livros falham em trazer diferentes tratamentos, a autora enfatiza a importância do professor permanecer buscando alternativas em suas aulas para a melhor compreensão dos alunos quanto aos conteúdos estudados.

3 Procedimentos Metodológicos

Nesse capítulo apresentaremos a abordagem metodológica que escolhemos para esta investigação, assim como os participantes da pesquisa, o cenário e o planejamento das atividades. Essa pesquisa busca responder à pergunta diretriz: **Como a utilização do GeoGebra e a mobilização de diferentes registros de representação semiótica auxiliam na aprendizagem das progressões?**

Nas seções a seguir, descrevemos os procedimentos metodológicos mencionados acima.

3.1 Abordagem Qualitativa

Martins (2004) em sua pesquisa sobre metodologia qualitativa enfatiza a proximidade do pesquisador com o pesquisado, considerando a necessidade da análise do desenvolvimento resultante do trabalho.

> É preciso esclarecer, antes de mais nada, que as chamadas metodologias qualitativas privilegiam, de modo geral, da análise de microprocessos, através do estudo das ações sociais individuais e grupais. Realizando um exame intensivo dos dados, tanto em amplitude quanto em profundidade, os métodos qualitativos tratam as unidades sociais investigadas como totalidades que desafiam o pesquisador. (MARTINS, 2004, p.292)

Bogdan e Biklen (1994) citam cinco características da pesquisa qualitativa que evidenciam a constante necessidade da proximidade entre pesquisador e pesquisado para melhor análise dos resultados.

> 1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador, o instrumento principal (p.47)
> 2. A investigação qualitativa é descritiva (p. 48)
> 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos (p. 49)
> 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de formar indutiva (p. 50)
> 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. (p.50)

Dessa forma, foi escolhida para esta investigação a abordagem qualitativa, pois mostra-se adequada para analisar os processos de aprendizagem dos estudantes em ambientes de exploração de matemática dinâmica, visando analisar o desenvolvimento dos alunos ao manipular o software GeoGebra e as progressões aritméticas e geométricas.

3.2 Contexto e Participantes da Pesquisa

Essa pesquisa foi realizada com alunos voluntários da primeira série do Ensino Médio no Colégio da Imaculada, localizado no bairro Rio Branco, em Canoas (a carta de autorização da escola encontra-se no Apêndice A). A instituição, que atende alunos da Pré-Escola, Ensino Fundamental e Ensino Médio, é católica, fundada por Irmãs Franciscanas em 1957. A escolha desse colégio se deu principalmente pelo fato de ter sido o colégio que a autora frequentou no seu Ensino Fundamental e Ensino Médio, mantendo contato com diretores e professores e sabendo do interesse que possuem por projetos que possam agregar qualidade ao ensino e à aprendizagem.

A pesquisa foi realizada com estudantes da 1ª série do ensino médio, pois eles já possuíam conhecimento sobre funções e ainda não haviam estudado progressões no colégio. Foram convidados vinte alunos, dos quais oito aceitaram o convite, mas apenas quatro compareceram nas aulas, os quais serão nomeados pelas letras A, B, C e D. Cabe destacar que as aulas ocorreram de forma remota e síncrona pela plataforma de videoconferências Google Meet, pois a pesquisa foi realizada durante o período da pandemia da Covid-19. Os termos de consentimento e assentimento encontram-se nos Apêndices B e C, respectivamente.

3.3 Produção de dados

Para desenvolver esta pesquisa foi elaborada uma sequência de atividades que propõe a utilização de GeoGebra para o estudo de progressões, mobilizando mais de um registro de representação semiótica. Os encontros realizados com os estudantes para a produção dos dados foram síncronos, via Google Meet[6], utilizando o *software* GeoGebra e o aplicativo Virtual Math Teams[7]. Os recursos tecnológicos foram selecionados de modo a possibilitar a interação entre participantes e pesquisadora, diminuindo a distância pedagógica entre os envolvidos (BEHAR, 2009), já que o distanciamento físico foi

[6] Disponível em: https://meet.google.com/?hs=197&pli=1&authuser=0 (Acesso em:04/12/2021)
[7] Disponível em: https://vmt.mathematicalthinking.org/ (Acesso em:04/12/2021)

inevitável. Cabe destacar que foi construído um GeoGebraBook[8] para postagem das atividades propostas, constituindo o material educacional digital e dinâmico do experimento prático (NOTARE, 2012), e que todos os recursos utilizados são grátis e estão disponíveis para todos os sistemas operacionais.

Os dados coletados foram produzidos por meio da gravação dos encontros síncronos, dos arquivos produzidos pelos participantes no software e por imagens das questões que os alunos encaminharam via e-mail para a pesquisadora.

3.4 Sequência de atividades dinâmicas

A sequência foi pensada para alunos que já estudaram o conteúdo de funções anteriormente, portanto, não prevê aulas introdutórias sobre este tema. Para obter dados que ajudassem a responder à pergunta diretriz da pesquisa, foram elaborados quatro encontros, representados no Quadro 4 a seguir.

Quadro 4: Encontros para a prática da pesquisa

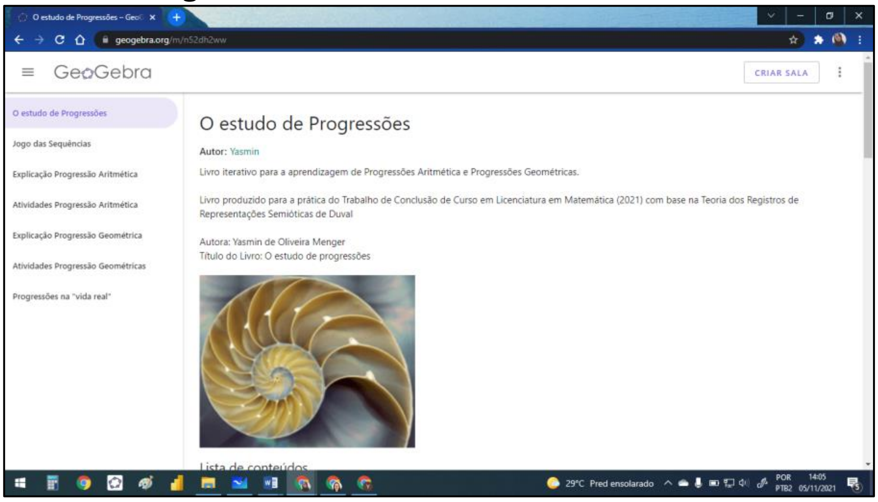
1º Encontro: (1h 30)	➢ Introdução ao GeoGebra ➢ Atividade: Você sabe o que são sequências? Consegue pensar em alguma? Se sim tente representa-las no GeoGebra. (duplas no Virtual Math Teams) ➢ Jogo das sequências (no GeoGebra Book)
2º Encontro: (1h 30)	➢ Apresentação formal dos conceitos de progressão aritmética, com a colaboração dos alunos. ➢ Atividades dinâmicas do GeoGebra Book.
3º Encontro: (1h 30)	➢ Apresentação formal dos conceitos de progressão geométrica, com a colaboração dos alunos. ➢ Atividades dinâmicas do GeoGebra Book.
4º Encontro: (1h 30)	➢ Atividade: Pense em alguma progressão que acontece na vida real e represente da melhor maneira possível no GeoGebra. (duplas no Virtual Math Teams)

Fonte: Dados da pesquisa

A tela inicial do GeoGebraBook desenvolvido para o experimento prático pode ser visualizada na Figura 9.

[8] Disponível em: https://www.geogebra.org/m/n52dh2ww (Acesso em:04/12/2021)

Figura 9: Tela inicial do GeoGebraBook



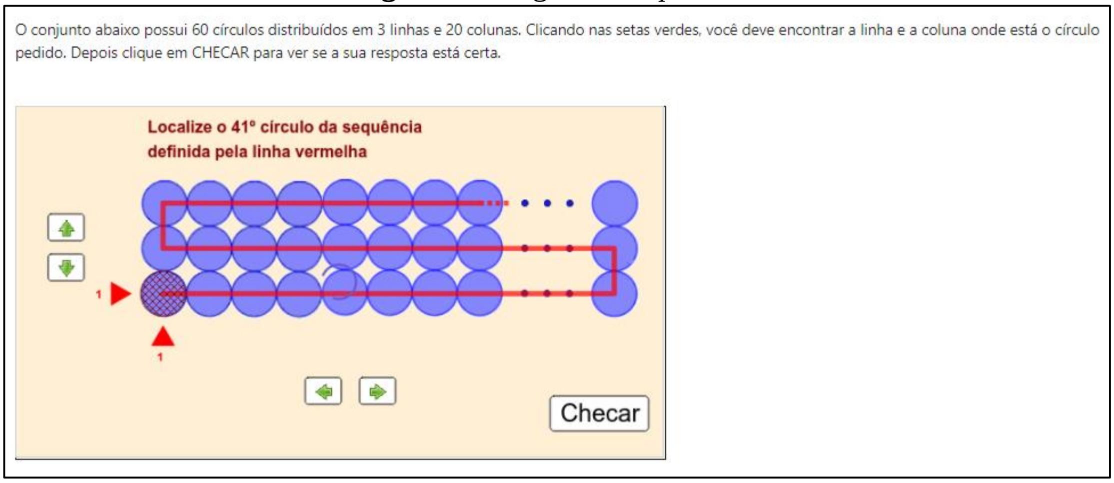
Fonte: Dados da pesquisa

Acerca da preparação deste GeoGebraBook, Notare (2012) apresenta a importância da elaboração do material educacional digital (MED), permitindo contemplar atendimentos aos variados estilos de aprendizagem dos alunos, já que, com um material digital e manipulativo o estudante poderá desenvolver seus conhecimentos de acordo com suas necessidades e realidade.

O livro digital, intitulado “O estudo de progressões” foi organizado nos seguintes capítulos: Jogo das sequências, Explicação progressões aritméticas, Atividades progressões aritméticas, Explicação progressões geométricas, Atividades progressões geométricas e Progressões na “Vida real”.

O primeiro capítulo, “Jogo das sequências”, consiste em material retirado do acervo do GeoGebra. É um jogo que permite que os alunos explorem e identifiquem padrões e percebam, a partir da soma, a posição que o círculo deverá terminar. A primeira fase do jogo está representada na Figura 10.

Figura 10: Jogo das sequências



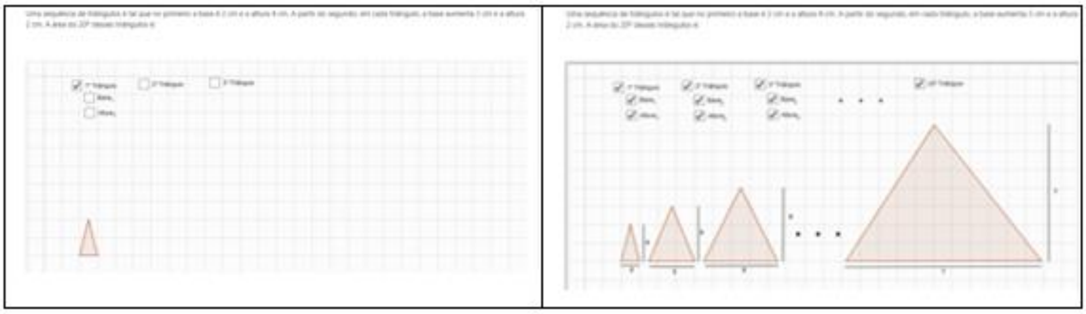
Fonte: https://www.geogebra.org/m/n52dh2ww#material/xUeVpMd2

O segundo capítulo "Explicação progressões aritméticas" ficou reservado para a postagem da explicação do conteúdo de PA discutido em aula síncrona com os estudantes.

O terceiro capítulo, intitulado "Atividades progressões aritméticas" consiste na postagem de questões manipulativas acerca de PA, construídas previamente no GeoGebra. As questões foram pensadas para que os alunos conseguissem interagir e manipular os *applets* e assim transitar entre diferentes registros de representação semiótica.

A Figura 11, a seguir, apresenta uma atividade do terceiro capítulo.

Figura 11: Questão PA



Fonte: Dados da pesquisa

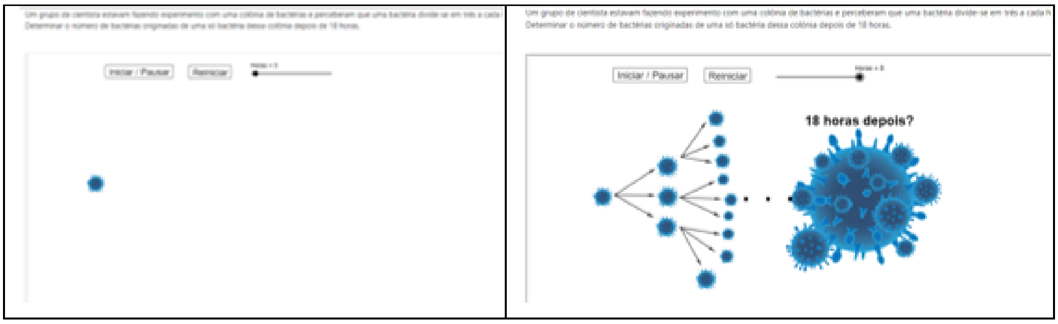
A questão da Figura 11 propõe que os alunos façam a conversão do registro geométrico para o registro algébrico, no entanto existem outras questões que propõem o trabalho com registros de tabela e registros gráficos com o objetivo de proporcionar aos alunos em todas as questões, no mínimo, a mobilização de duas representações semióticas para um mesmo objeto matemático.

O quarto capítulo “Explicação progressões aritméticas” ficou reservado para a postagem da explicação do conteúdo de PG discutido em aula síncrona com os estudantes.

O quinto capítulo, intitulado “Atividades progressões geométricas” consiste na postagem de questões manipulativas acerca de PG, construídas previamente no GeoGebra. As questões foram pensadas para que, assim como no terceiro capítulo, os alunos conseguissem interagir e manipular os *applets* e assim transitar entre diferentes registros de representação semiótica.

A Figura 12, a seguir, apresenta uma atividade do terceiro capítulo.

Figura 12: Questão PG



Fonte: Dados da pesquisa

A questão da Figura 12 propõe que os alunos percebam como as bactérias se dividem ao decorrer das horas. Esta atividade possibilita que os estudantes façam a conversão do registro geométrico para o registro algébrico, com o objetivo que os alunos tenham, no mínimo, acesso a duas representações semióticas para um mesmo objeto matemático.

Cabe aqui ressaltar que, assim como Basso e Notare (2015) enfatizam, o intuito não é proporcionar mais rapidez na execução das questões, mas sim proporcionar um melhor entendimento dos conteúdos estudados. O GeoGebraBook desenvolvido para essa pesquisa visa potencializar as atividades cognitivas dos estudantes.

O último capítulo intitulado Progressões na “vida real” ficou reservado para a postagem de um material produzido pelos alunos, no GeoGebra. O objetivo é perceber se, após trabalharem as progressões, os estudantes conseguem associar as mesmas a sua vida cotidiana.

Acerca dos quatro encontros, para o primeiro encontro foi planejada uma apresentação do *software* GeoGebra aos alunos, mostrando a interface e os comandos básicos. Depois, os alunos tiveram um momento para a exploração do software.

No segundo encontro, foram apresentados os conceitos formais de progressão aritmética para os alunos. Após terem se familiarizado com os conceitos apresentados, os alunos passaram a trabalhar com as atividades dinâmicas disponibilizadas no GeoGebraBook no capítulo “Atividades Progressões Aritméticas”.

O terceiro encontro se deu de maneira bastante parecida com o segundo encontro, no qual foram apresentados os conceitos formais de progressão geométrica para os alunos. Após terem se familiarizado com os conceitos apresentados, os participantes da pesquisa iniciaram o trabalho com as atividades dinâmicas postadas no GeoGebraBook no capítulo “Atividades Progressões Geométricas”.

No quarto e último encontro, agora que os alunos já estavam familiarizados com o software e com as progressões aritmética e geométrica, a tarefa solicitava a realização de uma construção no GeoGebra que representasse alguma progressão que existe na “vida real”.

No capítulo a seguir, descrevemos os resultados das atividades aplicadas, por meio da análise das gravações e dos dados produzidos. Além disso, analisamos o experimento com suporte nos estudos teóricos apresentados no capítulo anterior.

4 Descrição e Análise do Experimento Prático

A descrição e a análise das atividades estão dispostas na mesma ordem em que foram aplicadas. Cabe citar que, devido à agenda da pesquisadora, os encontros “1 e 2” foram realizados em uma única tarde, assim como os encontros “3 e 4”. Além disso, nos dois primeiros encontros participaram os alunos A e B, e nos dois últimos encontros participaram os alunos A, B, C e D. Na maior parte do tempo os alunos trabalharam de forma conjunta, porém ficaram responsáveis por fazerem seus registros pessoais de forma individual.

4.1 Primeiro Encontro

O primeiro encontro ocorreu no dia 14 de setembro de 2021, via Google Meet das 14h até às 15h30. Os alunos A e B entraram pontualmente no link previamente enviado para eles. Esperamos por alguns minutos, pois haviam outros alunos que tinham mostrado interesse, uma terceira aluna chegou a participar dos primeiros minutos do encontro, porém depois saiu da reunião, mais tarde ela explicou que ficou sem internet. Para esta aluna, e para os demais alunos que mostraram interesse na oficina, porém não compareceram, foi disponibilizado o link do GeoGebraBook que mantém disponíveis as explicações e as atividades propostas.

Em um primeiro momento eu e os três alunos nos apresentamos. Expliquei que a pesquisa consistia principalmente em analisar como seria o desenvolvimento das atividades propostas e como eles poderiam associar tal conteúdo a conceitos previamente abordados na escola, ou, inclusive nas suas vidas cotidianas. Dei ênfase ao fato de que não estariam fazendo uma prova ou algum tipo de avaliação costumeira do colégio, mas que tinham liberdade para trabalhar em conjunto e tirarem todas as dúvidas que viriam a ter.

Utilizei o recurso do Google Meet de compartilhamento de tela do meu computador para mostrar para os participantes a interface do GeoGebra e seus recursos básicos. Foi feita a construção objetos geométricos elementares, como ponto, reta, polígonos, assim como foi apresentada a janela algébrica – especificamente para a construção de funções – e também algumas utilizações do recurso controle deslizante.

Para o momento seguinte, estava planejada a utilização da plataforma Virtual Math Teams (VMT)[9], que proporciona a utilização de uma mesma janela do GeoGebra por mais de um usuário, favorecendo o trabalho colaborativo. A proposta era proporcionar aos participantes o trabalho conjunto para realizar as atividades. Porém, neste dia o site estava “fora do ar”. Então as atividades previstas para realização em grupo na plataforma do VMT foram realizadas individualmente ou, como estratégia de trabalho conjunto, um dos participantes poderia compartilhar sua tela para fazer a construção enquanto o outro poderia sugerir ideias sobre como prosseguir.

Ambos os alunos, A e B, já possuíam o *software* instalado em seus computadores. Dei um momento para que abrissem o mesmo e se familiarizassem com este. Os alunos não mostraram dificuldade e relaram que já possuíam o *software*, pois a professora de matemática do colégio já havia feito atividades com o GeoGebra em momentos anteriores.

Dado este primeiro momento de introdução, indaguei se eles sabiam o que eram sequências, e, se soubessem, conseguiriam representar alguma no GeoGebra. O Quadro 5 mostra o diálogo entre os alunos neste momento.

Quadro 5: Diálogo sobre sequências

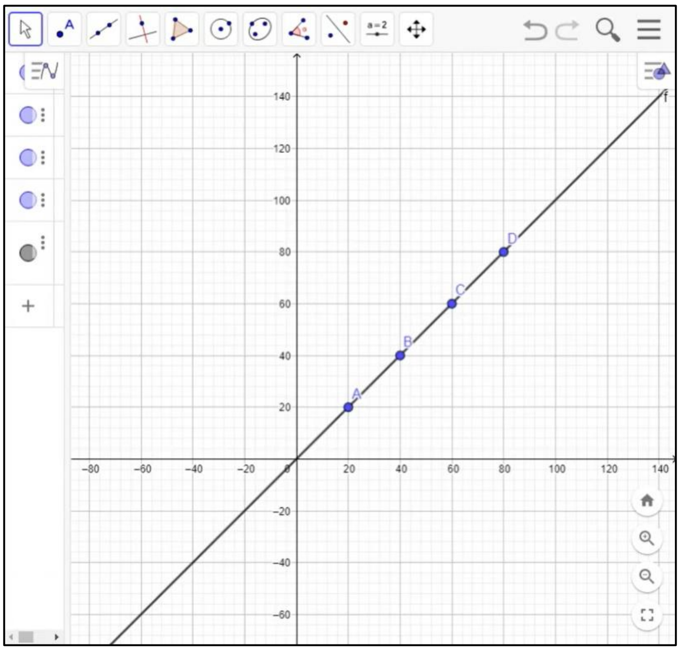
Aluna B: Ai sora, tipo “1, 2, 3, 4”, esses números estão em sequência.
Aluno A: Isso, deve ser quando os números crescem da mesma maneira.
Professora: Só quando crescem? E quando diminuem?
Aluno A: Deve ser sequência também. (risadas)

Fonte: Dados da pesquisa

Perguntei novamente se eles conseguiriam representar uma sequência no GeoGebra, a Aluna B disse que não possuía nenhuma ideia, mas o Aluno A compartilhou sua tela e fez a construção da Figura 13, a seguir, argumentando que a ideia de sequências para ele se parecia muito com o entendimento de função afim que ele já conhecia.

[9] Disponível em: https://vmt.mathematicalthinking.org/about (Acesso em:04/12/2021)

Figura 13: Construção de sequência pelo aluno A



Fonte: Dados da pesquisa

Pedi para que o aluno A explicasse sua construção. O Quadro 6 traz o diálogo desencadeado.

Quadro 6: Construção de sequências no GeoGebra.

Aluno A: Tentei fazer com que no eixo x e no eixo y crescesse na mesma maneira, sempre de 20 em 20.
Professora: Certo. E "aluna B", sabe dizer se, seguindo esse padrão o "aluno A" tivesse colocado um ponto E, em quais coordenadas estariam?
Aluna B: [...] Acho que no 100.

Fonte: Dados da pesquisa

A partir do compartilhamento de tela do Aluno A, percebemos que a Aluna B, que havia comentado anteriormente não possuía ideia sobre como proceder, avançou na compreensão. O extrato acima revela que a Aluna B conseguiu identificar um padrão da sequência apresentada pelo colega, a partir da observação no registro gráfico que ele construiu. Analisando o comportamento da sequência a partir da observação dos eixos, identificou o padrão que a função afim estava descrevendo, prevendo o próximo elemento da sequência. Esse entendimento é importante para avançar nas atividades acerca de progressões que serão abordadas mais adiante

Em seguida pedi para que acessassem, lessem e tentassem jogar o capítulo do GeoGebraBook intitulado “Jogo das sequências”. O jogo interativo permite a exploração e identificação de padrões para antecipar a posição do círculo solicitado. Instrui para que em um primeiro momento tentassem sozinhos, mas que havendo dúvidas eu estava à disposição. Passados alguns minutos perguntei se estavam conseguindo desenvolver a atividade e a Aluna B disse que ainda estava na primeira fase. Novamente compartilhei a tela com os participantes e expliquei que existia um padrão, pois a cada linha existiam 20 círculos e a primeira fase perguntava onde se encontrava o 41º círculo. Após esse diálogo, a Aluna B compreendeu como poderia resolver o problema do jogo, como mostra o Quadro 7 a seguir.

Quadro 7: Construção de sequências no GeoGebra.

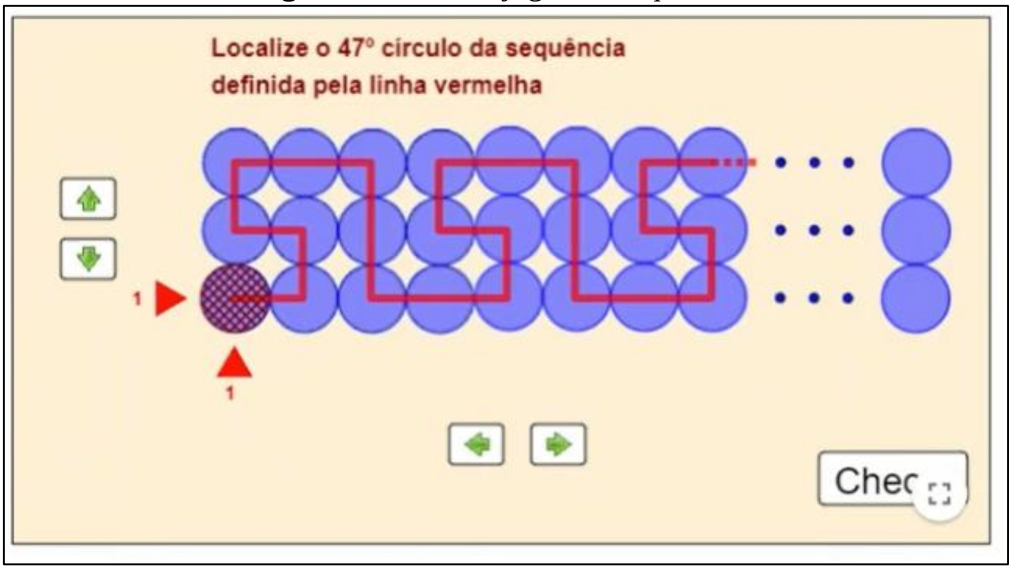
Aluna B: Ta, então se vai de 20 em 20, depois da segunda linha vão ter ido 40, isso? Professora: Isso. Aluna B: Então vai mais um para cima.

Fonte: Dados da pesquisa

Depois de identificar o comportamento da sequência, que dessa vez estava representada em registro figural, na forma de sequências de círculos justapostos e organizados de acordo com o padrão de 20 círculos por linha, a Aluna B conseguiu identificar onde estava localizado o 41º círculo. A aluna B fez um raciocínio análogo ao analisado antes, na atividade de função afim, porém apoiada em uma representação semiótica diferente. Passando este momento, os alunos prosseguiram trabalhando sozinhos.

O Aluno A disse que não estava conseguindo passar da fase 3 e compartilhou sua tela para que encontrássemos a resposta juntos, como mostrado na Figura 14 a seguir.

Figura 14: Fase 3, jogo das sequências



Fonte: Dados da pesquisa

Para compreender a dúvida do Aluno A, questionei se eles conseguiriam encontrar um padrão nesta etapa do jogo e, depois de um tempo, perceberam que passadas 9 circunferências o desenho voltaria a se repetir. Como queriam localizar o 47º círculo, a Aluna B argumentou que $9 \cdot 5 = 45$, e o Aluno A prosseguiu o raciocínio dizendo que o padrão se repetiria 5 vezes e andaria mais 2 circunferências. Posicionou as setas na 17ª coluna e 1ª linha (de baixo para cima), estando na localização certa. Identificamos nesse processo, a análise inicial do problema no registro figural e, em seguida, a conversão para o registro numérico, no qual os alunos realizaram alguns tratamentos para chegar à solução do problema. Conforme Duval (2013), estas atividades cognitivas proporcionam o processo de apreensão conceitual do objeto matemático estudado. Depois de resolverem essa questão, os alunos A e B tiveram mais facilidade para encontrar os padrões nas questões seguintes. O Aluno A continuou compartilhando a tela e ambos os alunos jogaram por mais algum tempo, juntos, passando mais algumas fases.

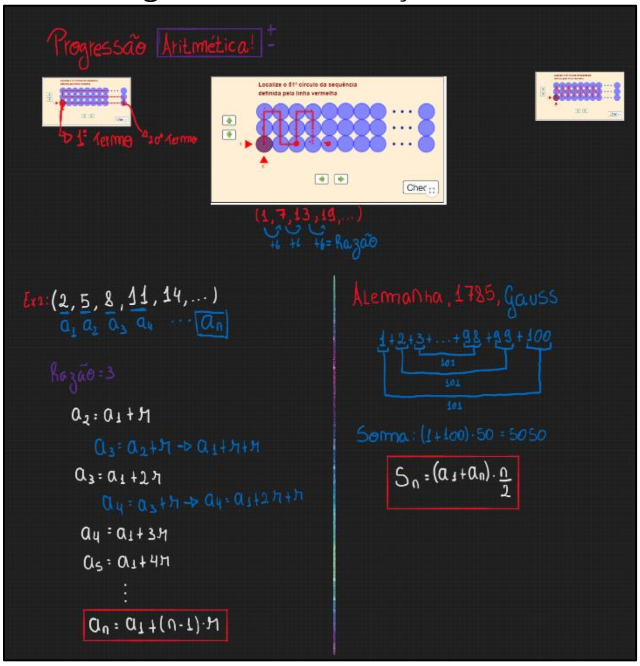
Assim se encerrou o primeiro encontro, no qual ainda não havia sido dada nenhuma explicação formal sobre o conteúdo de progressões, mas ambos os alunos demonstraram uma ideia intuitiva sobre o conteúdo abordado. Em conversas paralelas a Aluna B relatou que não se achava muito boa em matemática e que apresentava certa dificuldade, enquanto o Aluno A relatou que sempre se interessou por matemática e não achava os conteúdos, em geral, difíceis. Apesar de tais relatos, neste primeiro encontro ambos os alunos se mostraram bastante dedicados e atentos às atividades propostas.

Como já foi relatado anteriormente, o segundo encontro ocorreu na mesma tarde, após 20 minutos de intervalo e será descrito a seguir.

4.2 Segundo Encontro

Neste segundo encontro começamos abordando o conceito formal de progressões aritméticas (PA) fazendo um paralelo com o "Jogo das sequências", identificando os termos, com suas devidas posições e as razões de cada progressão. Também foi desenvolvida a forma geral de uma PA a partir da identificação de padrões. Para encerrar a apresentação formal da PA eu contei a história de Gauss para introduzir o conceito de soma de PA e estabelecer a fórmula com os alunos. O quadro montado no aplicativo *Whiteboard* está na Figura 15 a seguir.

Figura 15: Formalização da PA



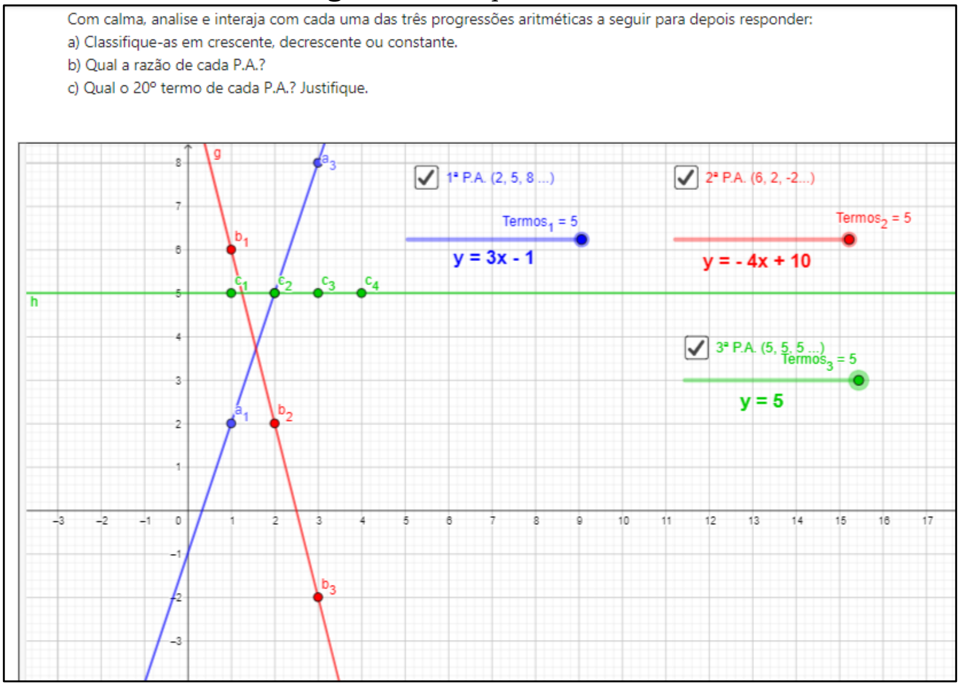
Fonte: Dados da pesquisa

Tal quadro está disponibilizado no capítulo "Explicação Progressão Aritmética" do GeoGebraBook para livre acesso dos alunos. Em seguida foi solicitado aos alunos para que acessassem o capítulo "Questões de Progressão Aritmética", no qual foram postadas questões que buscam abordar o conteúdo com diferentes registros de representações semióticas. Antes dos alunos começarem a resolver os exercícios, dei ênfase para o fato de que não era uma avaliação, mas que eles deveriam buscar, mais do que as respostas certas, entenderem e desenvolverem as questões. Dei liberdade para a utilização de fórmulas se necessário, mas incentivei o uso do GeoGebra, tanto o *applet* que já estava pronto e disponibilizado em cada questão, quanto o aplicativo que eles já tinham instalado.

4.2.1 Questão 1 (PA)

A primeira questão, como mostra a Figura 16 a seguir, busca associar o conteúdo de PA, ainda "novidade" para os alunos, com o conteúdo de funções, estudado previamente na escola. A pergunta no início da questão é: "Com calma, analise e interaja com cada uma das três progressões aritméticas a seguir para depois responder: a) Classifique-as em crescente, decrescente ou constante. b) Qual a razão de cada PA? c) Qual o 20º termo de cada PA? Justifique."

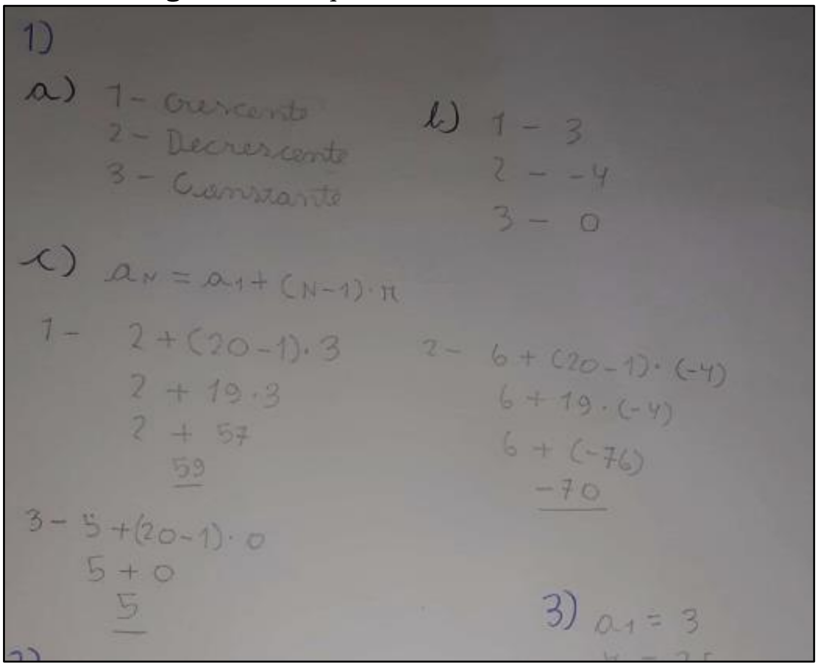
Figura 16: 1ª questão PA



Fonte: Dados da pesquisa

Cabe ressaltar que, embora as funções pareçam estáticas na Figura 16, o *applet* é dinâmico e visa mostrar o padrão dos pontos para depois se tornar uma função, necessitando da interação dos alunos com o *software*. Além disso, a primeira questão pergunta sobre se as progressões são crescentes, decrescentes ou constantes, porém não apresentei tais conceitos na aula introdutória, esperava que os alunos associassem com funções. A seguir, na Figura 17 apresento a resolução do Aluno A.

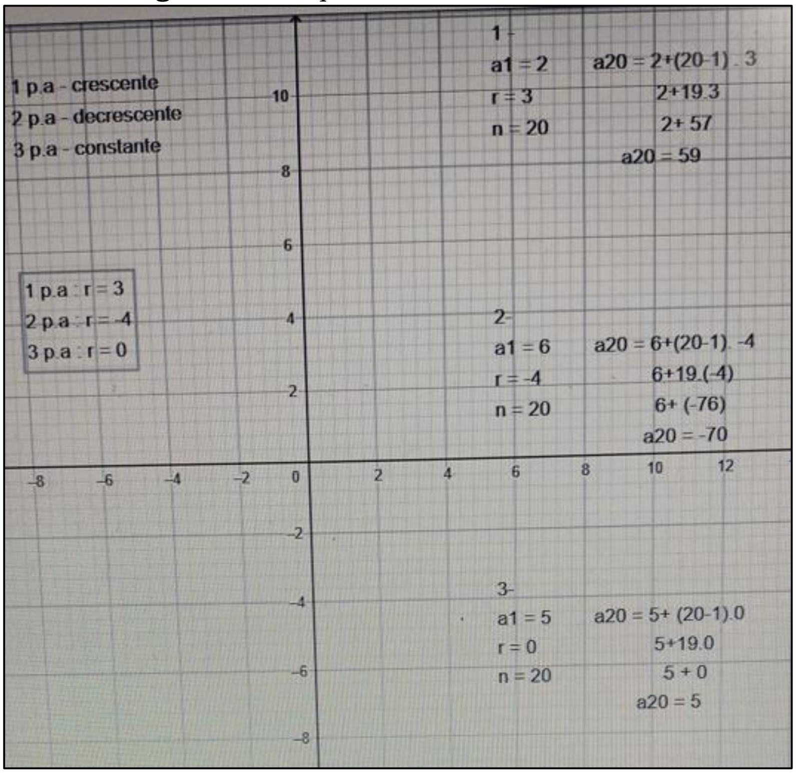
Figura 17: 1ª questão PA Aluno A



Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 18 a resolução da Aluna B, a partir de imagens que ela me encaminhou por e-mail.

Figura 18: 1ª questão PA Aluna B



Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos fizeram a atividade individualmente, porém chegaram nas mesmas respostas sem dificuldades. Apenas na questão “b” a Aluna B questionou (Quadro 8).

Quadro 8: Razão de PA decrescente

Aluna B: Sora, qual é a razão? Professora: Do “6” para o “2” variou quanto? Aluna B: Foi 4, mas ta diminuindo. Professora: Isso mesmo, e se tá diminuindo, qual vai ser o sinal? Aluna B: Negativo.

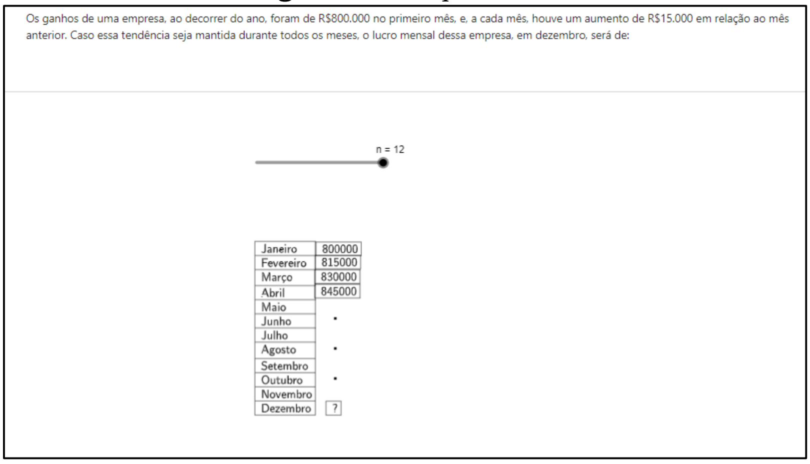
Fonte: Dados da pesquisa

Podemos perceber que no desenvolvimento de ambos os participantes da pesquisa, foram utilizadas as fórmulas do termo geral da PA. A Aluna B utilizou o *software* apenas para digitação, provavelmente pelo meu incentivo a utilizar o *software* para resolver as questões, não por ter visto uma necessidade dele. No entanto o *applet* oportunizou a visualização da situação de maneira dinâmica da construção de funções por meio de pontos. A partir dos registros e das falas dos alunos, podemos perceber que eles acessam o problema via registro gráfico no GeoGebra e, a partir da mobilização deste registro, identificam variáveis visuais pertinentes, que permitem a conversão para o registro algébrico. Finalmente, com os dados do problema convertidos para o registro algébrico, realizam tratamentos neste registro, utilizando as fórmulas, para chegar à solução do problema.

4.2.2 Questão 2 (PA)

A questão 2 de PA, como mostra a Figura 19 a seguir, busca associar o conteúdo de PA com tabelas, introduzindo mais um registro de representação semiótica. A pergunta no início da questão é: “Os ganhos de uma empresa, ao decorrer do ano, foram de R$800.000 no primeiro mês, e, a cada mês, houve um aumento de R$15.000 em relação ao mês anterior. Caso essa tendência seja mantida durante todos os meses, o lucro mensal dessa empresa, em dezembro, será de:”.

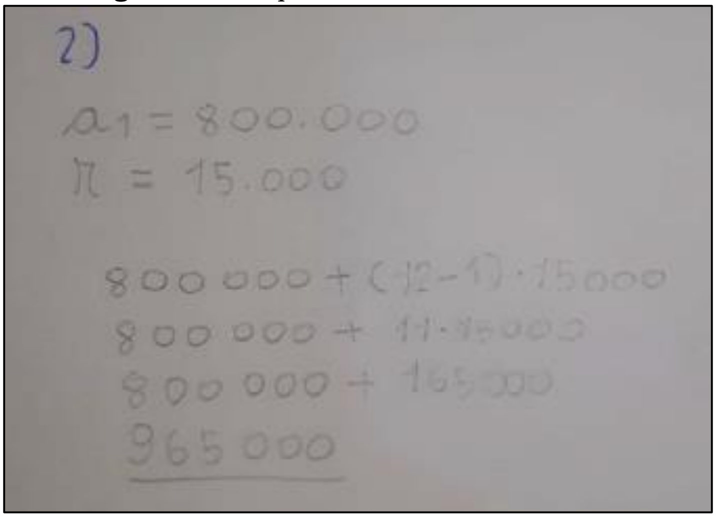
Figura 19: 2ª questão PA



Fonte: Dados da pesquisa

Esta questão, assim como demais que serão apresentadas nesta pesquisa, poderia ter sido resolvida apenas com o enunciado, ou seja, sem o *applet*. Porém, o intuito deste trabalho é auxiliar os alunos a darem diferentes significados a um mesmo objeto matemático, pois assim eles teriam o real entendimento da matemática estudada no colégio, proporcionando apreensões conceituais a partir do acesso a diferentes registros. Além disso, a utilização do recurso de controle deslizante do GeoGebra proporciona uma visualização dos termos da progressão se formando progressivamente, um a um, permitindo um acesso gradual e controlado aos dados do problema. Cabe aqui lembrar que no capítulo acerca das considerações teóricas, salientados que os livros didáticos analisados não enfatizam essa busca por mudança de registros, o que, segundo Duval (2013) pode limitar no entendimento sobre o conteúdo matemático de progressões. Na Figura 20 a seguir temos a resolução do aluno A.

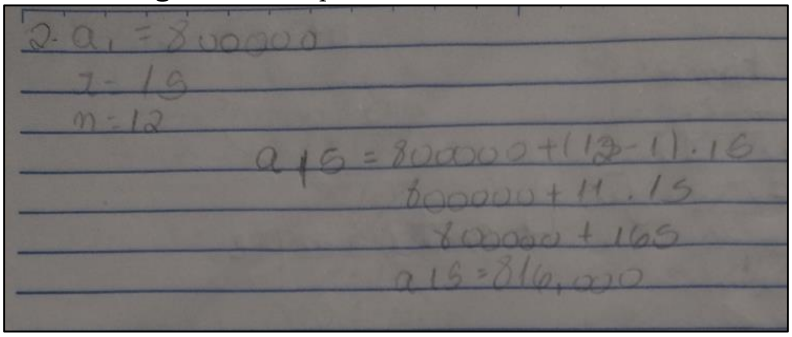
Figura 20: 2ª questão PA Aluno A



Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 21 a seguir temos as resoluções da Aluna B.

Figura 21: 2ª questão PA Aluna B



Fonte: Dados da pesquisa

Nesta questão podemos ver que a Aluna B considerou inicialmente a razão sendo 15. Conversamos sobre sua resposta, após ela afirmar que a resposta final seria 816000, como podemos ver no Quadro 9 abaixo.

Quadro 9: Razão de PA pela tabela

Aluna B: A razão dessa vai ser 15, né?
Professora: Quase isso, mas lê pra mim na tabela lá. Em janeiro, quanto a empresa tinha?
Aluna B: Oitocentos mil.
Professora: E em fevereiro?
Aluna B: Oitocentos e quinze mil.
Professora: Isso, então variou quanto?
Aluna B: Quinze.
Professora: Não, eram oitocentos MIL e virou oitocentos e quinze MIL. Variou quanto?
Aluna B: Ah, então foram quinze mil.

Fonte: Dados da pesquisa

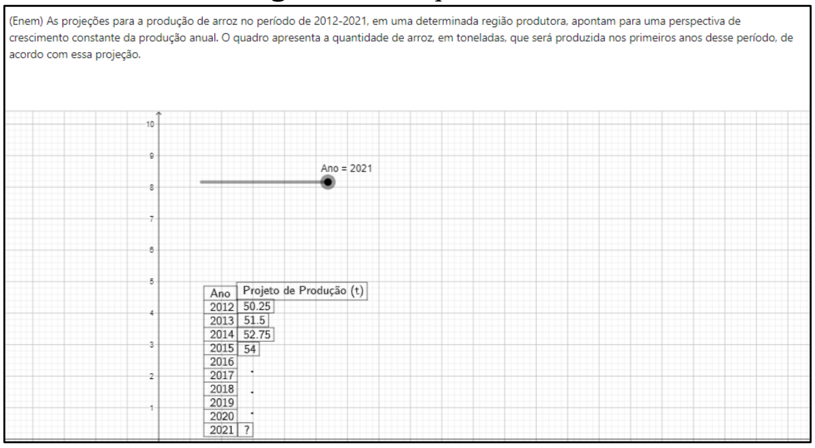
A partir do diálogo, a Aluna B retomou sua solução e, após finalizar a questão, disse que “Então vai dar 965.000, isso? ”. Concordei e seguimos a aula. Acredito que ela não corrigiu no caderno, pois antes de fazerem as questões eu disse que seria bastante importante que eles anotassem o que haviam pensado, ou como haviam interpretado a questão. Não tinha o intuito de dizer que eles não poderiam corrigir o que haviam feito. Por tal motivo vamos perceber que nesta e, em algumas outras questões a Aluna B enviou as questões com respostas pensadas inicialmente, sem refazê-las. Como todos os encontros foram a distância, eu não tive a oportunidade de olhar o caderno da aluna antes dela encaminhar as fotos das resoluções. Não acho que tal acontecimento demonstre que a estudante não entendeu ou não desenvolveu o conteúdo, acredito, inclusive que tal acontecimento ajuda a mostrar o desenvolvimento que ela teve acerca do conteúdo estudado.

Conseguimos perceber que ambos os participantes, nesse encontro, realizaram a transformação do registro da tabela para o registro algébrico de PA, realizando os tratamentos necessários para solucionar o problema. Estes alunos identificaram os respectivos termos da questão, assim como sua razão e o “n-ésimo” termo.

4.2.3 Questão 3 (PA)

A questão 3 de PA, mostra a Figura 22 a seguir, trata, assim como na questão 2, de uma conversão de representação de registro em tabela para registro algébrico, porém nesta questão os alunos devem encontrar a soma de n termos da PA O enunciado da questão é: “(Enem) As projeções para a produção de arroz no período de 2012-2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.”.

Figura 22: 3ª questão PA



Fonte: Dados da pesquisa

Essa questão os alunos A e B fizeram em dupla, se comunicando pelo nosso Google Meet, como mostrado no Quadro 10 abaixo.

Quadro 10: Questão 3 (PA)

Aluna B: Tem que usar aquela fórmula do "S_n" nessa questão. Só substituir os valores.

Aluno A: Acho que é.

[...]

Aluna B: Mas quanto vale o "a_{10}"?

Professora: Vocês vão ter que descobrir também.

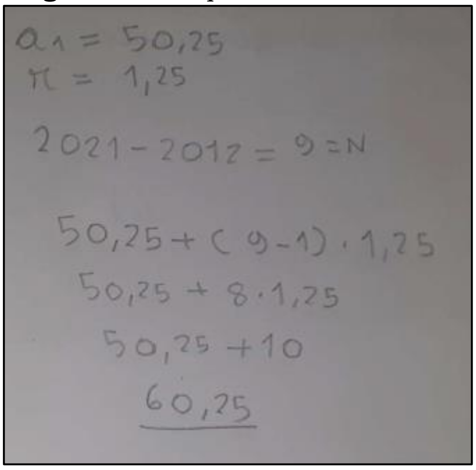
Aluno A: Então tem que usar aquela outra fórmula também?

Professora: Isso.

Fonte: Dados da pesquisa

Então o Aluno A descobriu o décimo termo, como mostrado na Figura 23 a seguir.

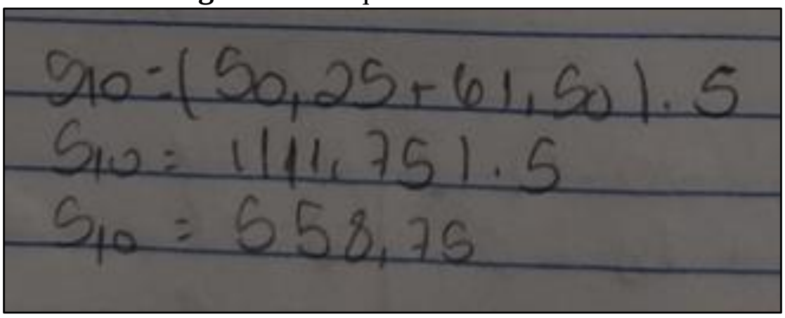
Figura 23: 3ª questão PA Aluno A



Fonte: Dados da pesquisa

Posteriormente a aluna B o substituiu na fórmula da soma, como mostrado na Figura 24 a seguir.

Figura 24: 3ª questão PA Aluna B



Fonte: Dados da pesquisa

Com o auxílio do controle deslizante, os estudantes conseguiram identificar as projeções para a produção de arroz em cada ano, identificando a variação de um ano para o outro como a razão e percebendo que precisariam descobrir a produção de arroz no ano de 2021. Além disso, perceberam que, pela forma algébrica, o ano de 2021 seria descrito como o décimo termo. Analogamente à questão anterior, podemos perceber que os alunos identificaram no registro de tabela as variáveis pertinentes para realizar a conversão para a representação algébrica e, em seguida, realizaram os devidos tratamentos para chegar na solução.

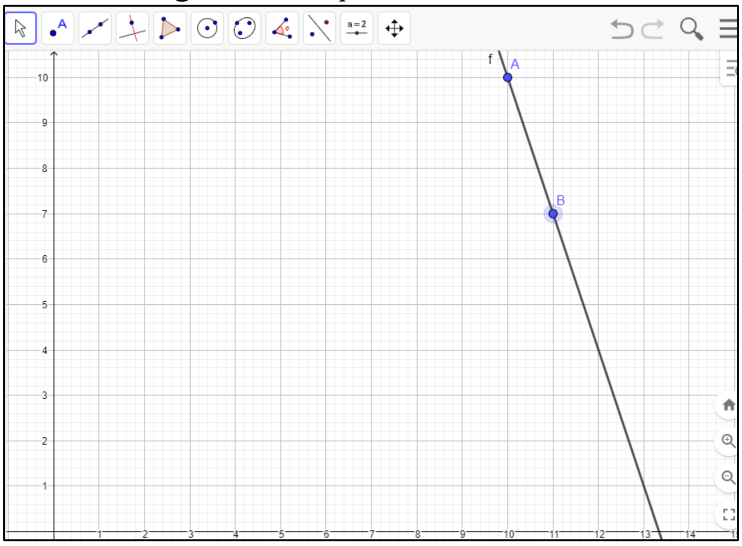
4.2.4 Questão 4 (PA)

Podemos perceber que, nas questões anteriores os alunos utilizaram os *applets* previamente construídos, porém quase não fizeram uso de seu próprio GeoGebra. Durante a aula eles relataram que se sentem mais à vontade resgatando as informações da questão ou do *applet* e substituindo nas fórmulas do que fazendo uma construção com as informações dadas. Isso revela que os estudantes fazem, de forma consciente, a escolha do registro algébrico para resolver os problemas, provavelmente estimulados pela possibilidade de aplicação das fórmulas que foram apresentadas no momento de formalização. Para Duval (2013), um dos papéis da conversão de registros é a possibilidade de escolher aquele que melhor permite o tratamento para chegar à solução do problema. A questão 4, porém, pede para que eles façam suas próprias construções e seu enunciado é: "Utilizando o GeoGebra, resolva: Determine o primeiro termo de uma progressão aritmética de razão -3 cujo décimo termo vale 10.".

A Aluna B relatou que não sabia como fazer essa questão, nem por onde começar. Este fato revela que as conversões de registros não apresentam as mesmas exigências cognitivas nos dois sentidos de conversão. Enquanto o problema foi apresentado na forma de registro gráfico ou tabela, a Aluna B identificava facilmente as variáveis pertinentes para resolver o problema no registro algébrico. Porém, no momento em que o problema é apresentado apenas em registro discursivo e a conversão para o registro gráfico é solicitada, a Aluna B revela dificuldades. Assim, fica evidente a importância em se trabalhar, em sala de aula, com as conversões de registros nas duas direções, para ampliar a apreensão conceitual dos estudantes sobre o conceito abordado.

O Aluno A, que já havia feito a questão, compartilhou sua tela e mostrou sua construção, representada na Figura 25 a seguir.

Figura 25: 4ª questão PA Aluno A



Fonte: Dados da pesquisa

Expliquei então, a partir da construção apresentada pelo Aluno A, que como a questão informava que o décimo termo vale 10, ele construiu o ponto A no ponto em que x é 10 e y também é 10. A questão relata que a razão é “-3”, ou seja, no próximo termo, quando x for 11, o y terá “descido” 3, e, portanto, corresponderia a 7. O aluno A traçou uma reta entre esses dois pontos para auxiliar na visualização do comportamento da função afim. Enfatizei para a Aluna B que o eixo x correspondia à posição dos termos da PA e o eixo y correspondia ao respectivo termo. Deixei-a pensando e, após um tempo ela pediu para o aluno A “subir a tela” até que encontrássemos a reta passando pela coordenada 1 no eixo x, percebendo então que a resposta da questão é 37.

Assim encerramos o segundo encontro. Podemos perceber que, apesar da relutância para fazerem construções próprias, ambos os alunos demonstraram conseguir abstrair as informações dos *applets* e converter informações de diferentes representações semióticas.

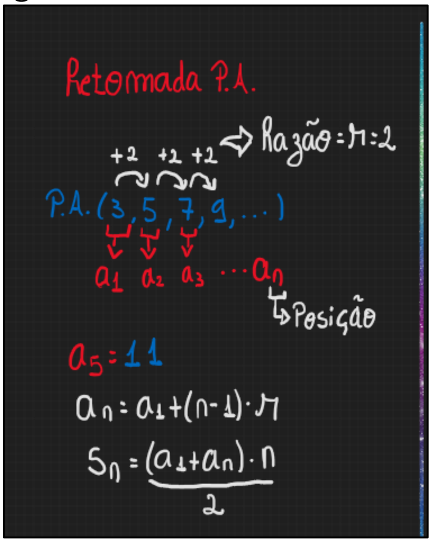
4.3 Terceiro Encontro

Os terceiro e quarto encontros ocorreram no dia 21 de setembro de 2021, via Google Meet das 14h às 15h30, e das 15h50 às 17h, respectivamente. Nestes encontros, além dos alunos A e B, que participaram dos encontros anteriores, participaram mais dois alunos, denominados de alunos C e D. Explicaram que, por motivos pessoais, não conseguiram comparecer aos encontros anteriores, mas assim como os alunos A e B, estes novos participantes também possuíam o *software* GeoGebra instalado e já tiveram contato com o mesmo

De maneira parecida com o segundo encontro, estava planejado abordar o conceito formal, porém neste momento sobre progressões geométricas, fazendo uma analogia com os conceitos já vistos em progressões aritméticas. Por exemplo, comparar o conceito de razão com o conceito de quociente. No entanto como tivemos dois novos participantes reservei cinco minutos da aula para retomar os conceitos de termo, razão, termos geral da PA e soma da PA com os alunos.

Para abordar tais conceitos utilizei o exemplo de PA mostrada na Figura 26 abaixo, com a utilização do "compartilhamento de tela" no Google Meet e do aplicativo *Whiteboard* já utilizado nos encontros anteriores.

Figura 26: Retomada conceitos PA



Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos C e D não demonstraram dificuldade para entender os conceitos apresentados e os alunos A e B lembravam dos mesmos. O pequeno diálogo apresentado no Quadro 11 a seguir mostra esse entendimento.

Quadro 11: Diálogo sobre razão

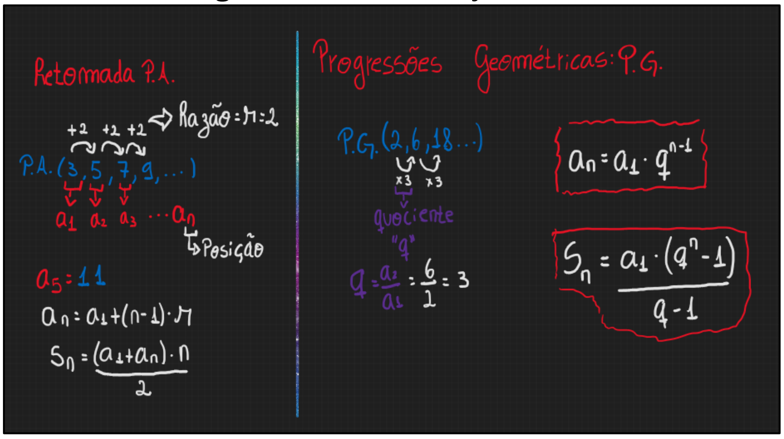
Professora: Então, nesta progressão podemos ver que está ... **Aluna B**: Aumentando 2. É a razão isso, né?

Fonte: Dados da pesquisa

O diálogo, mesmo que rápido, evidencia que os alunos que participaram do encontro anterior recordam dos conteúdos e conceitos estudados.

Para começarmos a abordar o conceito formal de progressão geométrica (PG), deixei a retomada que fizemos de PA a vista na tela para que pudéssemos "consultar" os conceitos e, a partir deles, fazer um paralelo com o conceito de PG (Figura 27).

Figura 27: Formalização da PG



Fonte: Dados da pesquisa

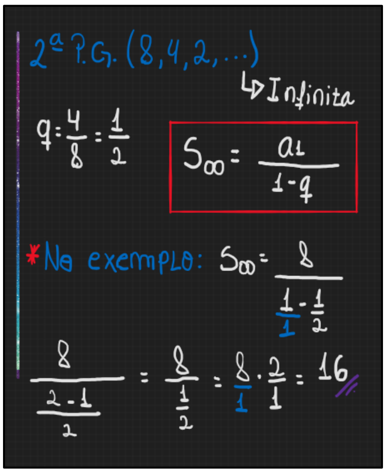
Para abordar a soma de infinitos termos de uma PG foi discutido com os participantes que o quociente deveria estar entre 0 e 1 ($0 < |q| < 1$). Com o objetivo de explorar diferentes representações semióticas, utilizamos uma construção realizada previamente no GeoGebra, que propõe um exemplo geométrico, conforme mostra a Figura 28 a seguir.

Figura 28: Infinitos termos de uma PG

Fonte: Dados da pesquisa

A partir da exploração da construção, discutimos que, quando "n" tende ao infinito temos o resultado mostrado na Figura 29, abaixo. Além disso, utilizei outra PG para ilustrar outra situação e proporcionar melhor entendimento. Assim os alunos tiveram acesso à representação geométrica e à representação algébrica, possibilitando a mobilização de mais de um registro de representação semiótica para um mesmo objeto matemático, o que pode proporcionar aos estudantes melhor entendimento acerca deste objeto matemático, para não confundi-lo com uma de suas representações (DUVAL, 2013).

Figura 29: Fórmula dos infinitos termos de uma PG



Fonte: Dados da pesquisa

Cabe aqui dizer que tais explicações ficaram anexadas no capítulo “Explicação Progressão Geométrica” do GeoGebraBook desenvolvido para essa pesquisa, para livre consulta dos alunos. Uma vez identificado que os estudantes não manifestaram dúvidas sobre a explicação realizada, passei para a próxima parte do planejamento.

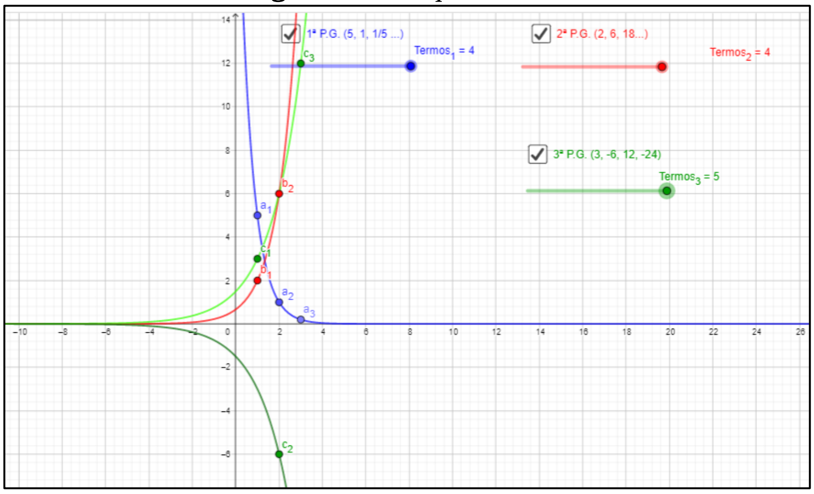
Assim como no segundo encontro, para o momento seguinte, estava planejada a utilização da plataforma Virtual Math Teams (VMT), que proporciona a utilização de uma mesma janela do GeoGebra por mais de uma pessoa, favorecendo o trabalho colaborativo. Porém, assim como no segundo encontro, neste dia o site também estava “fora do ar”. Cabe aqui dizer que, após o segundo encontro, consultei o site do VMT e constatei que ele havia voltado a funcionar. Então acho que foi apenas uma infeliz coincidência da parte da pesquisadora o fato de o site não funcionar nesses dois dias em específico. Então as atividades previstas para realização em grupo na plataforma do VMT foram conduzidas individualmente. Porém, de forma natural e espontânea, os alunos acabaram por discutir sobre as questões propostas de forma coletiva. Assim, foi possível proporcionar um trabalho em grupo, pois os quatro participantes se envolveram nos debates das questões que analisarei a seguir.

Enviei novamente, pelo chat do Google Meet, o link do GeoGebraBook e pedi para que eles acessassem o capítulo “Questões Progressões Geométricas”.

4.3.1 Questão 1 (PG)

A primeira questão, como mostra a Figura 30 a seguir, busca associar o conteúdo de PG, ainda “novidade” para os alunos, com o conteúdo de funções exponenciais, estudado previamente na escola. A pergunta no início da questão é: “Determine o termo geral de cada uma das PGs abaixo:”.

Figura 30: 1ª questão PG



Fonte: Dados da pesquisa

A partir da exploração da questão, os alunos, com algumas interferências minhas, iniciaram um debate, conforme mostra o Quadro 12 abaixo.

Quadro 12: 1ª questão PG

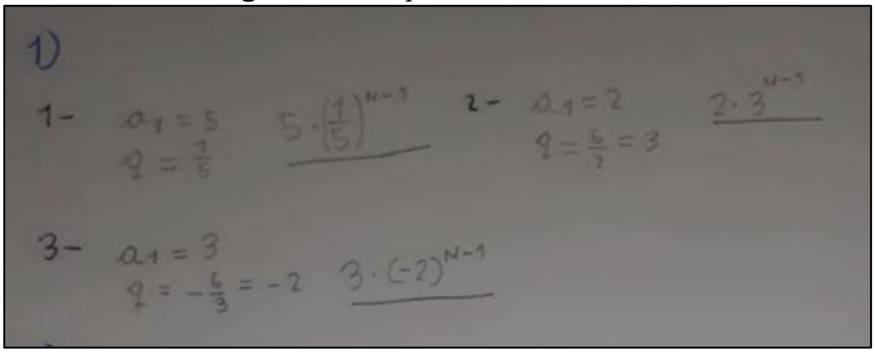
Aluna D: O “sora”, na 1ª P.G. o “q” não é 5, ou é? **Professora:** Não, não é, mas eu entendo por que tu pensou isso. Tenta dar uma lembrada, eu comentei como encontrar o quociente [...]. Se alguém quiser nos ajudar... **Aluna B:** Tinha que dividir o da frente pelo de trás, isso? Mas daí vai dar número quebrado. **Professora:** Isso mesmo. E vocês podem escolher em deixar como fração ou como número decimal.

Fonte: Dados da pesquisa

Como podemos visualizar na Figura 27, acima, a primeira PG estava apresentada, na forma de sequência, da seguinte maneira: $(5, 1, \frac{1}{5}, \ldots)$. Então a Aluna D percebeu que do número 1 para chegar ao 5 é necessário multiplicarmos por 5, porém também percebeu que estávamos procurando pelo valor no qual deveríamos multiplicar o 5 para chegar ao 1, o que não pareceu ser trivial à estudante. Além disso, ela pode perceber que o registro gráfico em azul, que representa a primeira PG, era decrescente. Então, para responder como encontrar o quociente, a Aluna B realizou um tratamento algébrico, a partir da compreensão que teve da explicação inicial sobre PG

A seguir, na Figura 31 está a resolução do Aluno A para esta questão.

Figura 31: 1ª questão PG Aluno A



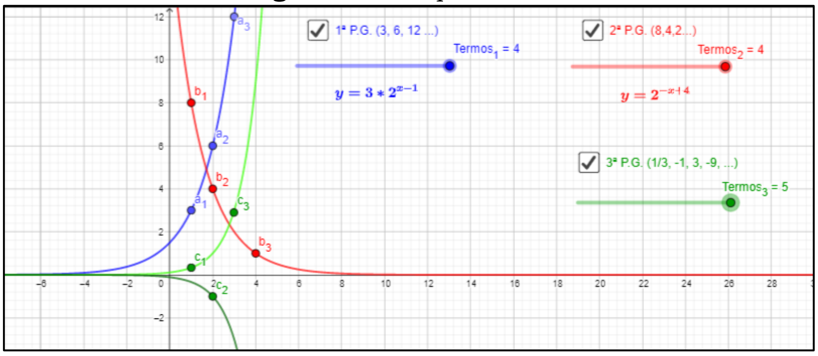
Fonte: Dados da pesquisa

Podemos perceber nesta questão que os alunos observaram o registro gráfico para identificar as variáveis visuais pertinentes e, em seguida, converter para o registro algébrico e realizar os tratamentos necessários para encontrar os termos gerais solicitados.

4.3.2 Questão 2 (PG)

A segunda questão, mostrada na Figura 32 a seguir, busca relacionar o conteúdo de PG com o conteúdo de funções exponenciais. A pergunta no início da questão é: “Com calma, análise e interaja com cada uma das três progressões geométricas a seguir para depois responder: a) Classifique-as em crescente, decrescente ou oscilante. b) Qual o quociente de cada PG? c) Qual o 7º termo de cada PG? Justifique.”.

Figura 32: 2ª questão PG



Fonte: Dados da pesquisa

No Quadro 13 a seguir, segue o diálogo dos alunos. A partir desta questão, os participantes começaram a trabalhar definitivamente em quarteto e debater sobre todas as questões.

Quadro 13: 2ª questão PG

Aluno A: ok vamos pra 2.
Aluno C: Na A acho que é crescente, decrescente e oscilante nessa ordem. O que vocês acham?
Aluna B: Isso ai.
Aluna D: Concordo. [...]. O quociente da "a" é 2 e da "b" é 0,5. Dá última não é do meu conhecimento.
Aluno C: Do 3º é 3?
Aluno A: Parece. [...]. Não, vai ser -3.
Aluno C: Pronto. [...] Agora temos que achar o 7º termo.
Aluna B: Tem que substituir o 7 por "n" naquela fórmula do "S_n"?
Aluno A: Não, a gente já tem o termo geral delas, agora substitui o 7 pelo "n" no termo geral.

Fonte: Dados da pesquisa

Podemos perceber que a terceira PG gerou dúvidas quanto ao seu quociente, pois é única PG que se caracteriza como oscilante. Ao vermos o gráfico da mesma, podemos perceber que ela se divide em duas e que os pontos marcados nesta função exponencial não estão em uma ordem semelhante à ordem das duas PGs anteriores, oscilando ora na representação gráfica crescente, ora na representação gráfica decrescente (ou em outras palavras, ora com valor positivo, ora com valor negativo), justamente pelo fato de seu quociente ser negativo e assim tornar mais difícil a identificação de um quociente que provoque esse padrão.

Percebe-se, neste momento, que o Aluno A confundiu o problema atual com a questão 1, que era parecida e na qual eles já haviam encontrado os respectivos termos gerais. Este fato gerou uma discussão momentânea no grupo. Fiz uma pequena intervenção para destacar que estavam utilizando os valores da questão anterior e então conseguiram voltar a falar sobre a questão 2, como mostra o Quadro 14 a seguir.

Quadro 14: Continuação 2ª questão PG

Aluna D: na "a" dá 448?
Aluno A: O meu deu 192. (O aluno A compartilhou a tela para mostrar o resultado na calculadora fornecida pelo Google).
Aluna D: 2^6 não é 64?
Aluno C: Isso.
Aluna D: Daí não tem que fazer $7 \cdot 64$ que dá 448?
Aluno A: Porque $7 \cdot 64$?
Aluna D: Porque eu substitui errado, esquece. Dá 192 mesmo.
[...]
Aluna D: A "b" pra mim deu 0,125 e a de vocês?
Aluna B: A minha também. Mas não fiz a "c".
Aluno A (no chat): PG 1
An = 3.2^(7-1) = 192

PG 2
An = 8.(1/2)^(7-1) = 0.125

PG 3
An = (1/3).(-3)^(7-1) = 243. Concordam?
Aluno C: Beleza, fechou.

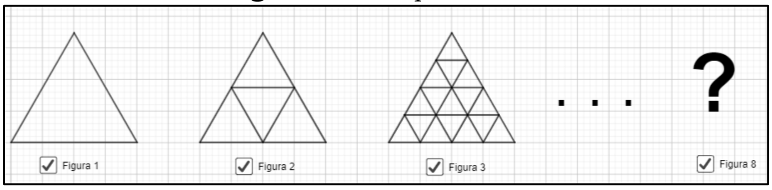
Fonte: Dados da pesquisa

Nesta questão podemos perceber que os alunos conseguiram discutir e, a partir da troca de ideias, identificar no registro gráfico os valores pertinentes para converter para o registro algébrico e resolver a questão. Este processo foi possibilitado porque os participantes conseguiram identificar os respectivos primeiros termos, entender qual termo estava sendo solicitado e utilizar o quociente já descoberto previamente na questão "b". No próprio debate apresentado no Quadro 14, podemos perceber que a Aluna D confundiu o valor do 1º termo com o valor do quociente e, a partir de sua fala de "Porque eu substitui errado", podemos interpretar que ela se distraiu quando estava operando sobre a representação algébrica, afinal o Aluno A só precisou perguntar o motivo pelo qual ela multiplicou o 7 pelo 64 para que ela percebesse seu erro de imediato.

4.3.3 Questão 3 (PG)

A questão 3, apresentada na Figura 33 a seguir, busca associar conceitos de geometria com PG, apresentando o problema a partir de um registro de representação figural. A pergunta no início da questão é: “Interaja com o *applet* a seguir e responda: quantos triângulos estarão na figura 8?”.

Figura 33: 3ª questão PG



Fonte: Dados da pesquisa

O Quadro 15 traz o debate dos participantes acerca desta questão.

Quadro 15: 3ª questão PG

Aluno C: Essa ai deixa pra mim. É só multiplicar por 4. Vai dar 64.
Aluna D: Mas ta pedindo o 8º, não o 4º.
Aluno C: Ba, pior. Então tem que multiplicar por 4 mais algumas vezes. [...] Acho que vai dar 16384. É muito triângulo.
Aluno A: Pra mim também deu isso. O sora, ta certo?

Fonte: Dados da pesquisa

Entrei na conversa do grupo apenas para confirmar que haviam chegado ao resultado certo. Nesta questão podemos perceber que os alunos identificaram com facilidade no registro figural os dados pertinentes do problema e os converteram para o registro algébrico. Além disso, destacamos que os alunos não julgaram necessária a utilização da fórmula do termo geral de uma PG, o que revela houve compreensão da situação matemática explorada.

Embora ainda houvesse mais algumas questões a serem resolvidas, como já era 15h30min, optei por dar um intervalo de 20 minutos para que pudessem lanchar e descansar um pouco. As questões restantes foram feitas no quarto encontro que será descrito a seguir.

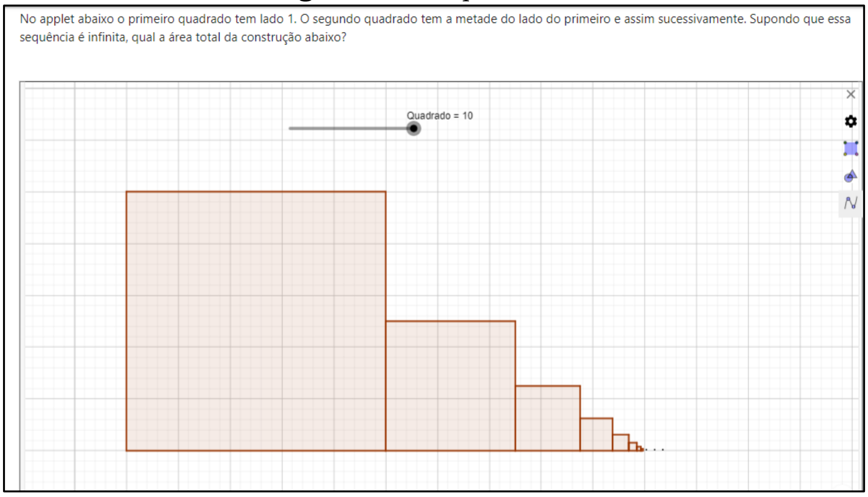
4.4 Quarto Encontro

No quarto encontro, demos continuidade às questões que estavam sendo resolvidas no encontro anterior. Embora, em um primeiro momento, o planejamento era realizar cada encontro em um dia separado, o fato dos encontros 1 e 2, assim como os encontros 3 e 4, respectivamente, ocorrerem em um mesmo dia, foi interessante para dar continuidade à resolução das questões.

4.4.1 4ª Questão PG

A quarta questão a ser analisada, como mostra a Figura 34 a seguir, busca associar o conteúdo de PG com alguns conceitos de geometria, estudados previamente na escola. A pergunta no início da questão é: “No *applet* abaixo o primeiro quadrado tem lado 1. O segundo quadrado tem a metade do lado do primeiro e assim sucessivamente. Supondo que essa sequência é infinita, qual a área total da construção abaixo?”.

Figura 34: 3ª questão PG



Fonte: Dados da pesquisa

O Quadro 16 traz o debate dos estudantes acerca desta questão.

Quadro 16: 3ª questão PG

Aluno C: Tem que usar a fórmula da soma infinita, mas não consegui fazer essa. **Aluno A:** Vou mandar no chat. "a1 = 1 q = 0,5 a1/1-q 1/1 - (0,5) 1/0,5 = 2" **Professora:** Vocês têm certeza que o quociente é 0,5? **Aluno A:** Sim, o primeiro quadrado tem lado 1 e o segundo a metade. Então é 0,5. **Professora:** Tá, mas a questão ta falando da área do quadrado. Como que a gente calcula a área do quadrado mesmo? **Aluna B:** É lado vezes lado? **Professora:** Isso, então como que fica a área do 2º quadrado? **Aluno A:** Ah, então vai ficar 0,5 · 0,5, que dá [...] 0,25? **Professora:** Isso **Aluno C:** Ai é só fazer do mesmo jeito que o "Aluno A" fez antes, mas agora com 0,25? **Professora:** Isso [...] **Aluno C:** 1,333..., confere? **Aluno A:** Pra mim também. **Aluna B:** Acho que é. **Aluna D:** Confere.

Fonte: Dados da pesquisa

Apesar da desatenção quanto ao que o enunciado da questão solicitava, percebe-se que os estudantes conseguiram mobilizar o que estava sendo apresentado em registro geométrico, utilizando nomenclaturas utilizadas no conteúdo de P.G em registro algébrico. Ou seja, os estudantes conseguiram transitar entre diferentes registros de representações semióticas. Para Duval (2013), essa atividade cognitiva supõe que o aluno não confunde mais o objeto matemático com o conteúdo de uma única representação, proporcionando uma melhor apreensão conceitual desse objeto. Então acreditamos que, com o avançar das atividades, os alunos foram capazes de acessar e mobilizar diferentes registros que representam as progressões, como registros gráficos, registros algébricos, registros de tabela e registros figurais, não ficando "presos" ao conceito de progressão apenas no registro algébrico.

4.4.2 Atividade Final

Após finalizarem as questões propostas, expliquei aos alunos qual seria a última atividade da pesquisa. Disse que poderiam continuar trabalhando em um único grupo, mas que agora deveriam representar no GeoGebra, da maneira que quisessem, um exemplo de progressão que acontece na vida real. Depois de alguns instantes, começou o debate mostrado no Quadro 17 a seguir.

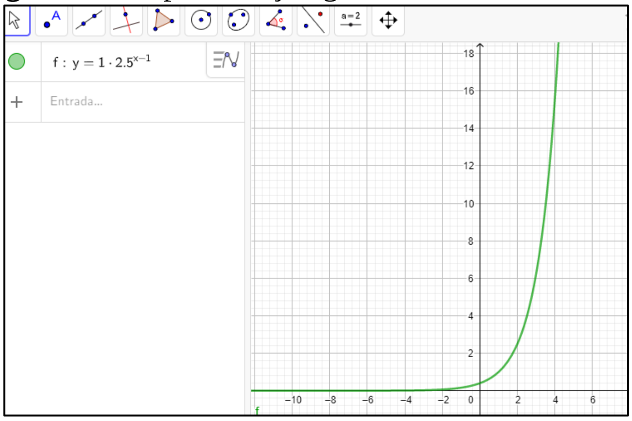
Quadro 17: Atividade Final

Aluno C: A gente pode fazer dos casos de Covid. Ou o que?
Aluno A: Verdade.
Aluno C: Mas não é bem regular.
Aluno A: Tinha uns estudos que apareceu de quantas pessoas uma pessoa contaminava. Ai o primeiro termo é 1.
Aluna B: Ai cada pessoa contaminava umas 5, não era?
Professora: Por que vocês não dão uma pesquisada?
Aluna B: Beleza

Fonte: Dados da pesquisa

Depois de um tempo em silêncio pesquisando sobre informações que ajudassem na representação da situação, a Aluna D disse que achou uma matéria do "G1" que afirmava que cada pessoa contaminada, contaminava entre 2 e 3 pessoas. Os alunos optaram por utilizar o quociente sendo 2,5 e o Aluno A compartilhou sua tela e fez o gráfico apresentado na Figura 35 a seguir.

Figura 35: Representação gráfica da Atividade Final



Fonte: Dados da pesquisa

Podemos perceber que os alunos foram capazes de relacionar de maneira intuitiva o conteúdo de progressões com o conteúdo de funções, como é orientado pela BNCC. Além disso, destacamos o processo de pesquisa da situação proposta, no qual precisaram identificar o quociente da progressão nos dados da reportagem encontrada para construir sua representação gráfica. E, apesar dos alunos C e D não terem participado dos primeiros dois encontros, é perceptível que conseguiram desenvolver as atividades propostas. Além disso, cabe aqui comentar que os alunos conseguiram se dedicar a esta pesquisa e manter um ambiente de descontração sem que ficasse desorganizado. Ao serem liberados no final do encontro, os participantes da pesquisa agradeceram por terem participado e enfatizaram que gostaram do conteúdo, assim como conseguiram compreende-lo. Tais comentários enfatizam que a utilização de tecnologias digitais pode proporcionar a compreensão dos objetos matemáticos se comparado às aulas de sala de aula com quadro, classe e atividades voltadas somente para manipulações algébricas no caderno.

5. Considerações Finais

Quando pensamos sobre o ensino de Matemática, temos que ter a compreensão de que estamos lidando com objetos abstratos. Portanto Duval (2013) salienta a importância dos docentes da área não darem apenas instrumentos eventualmente úteis para a resolução de questões específicas, mas também contribuir com o desenvolvimento cognitivo do estudante.

Acerca da utilização de tecnologias digitais na educação, podemos perceber que as novas gerações estão tendo contato cada vez mais cedo com computadores e celulares. Devemos aproveitar tal fenômeno para a utilização de novos ambientes para o ensino de Matemática, os quais podem oferecer uma abordagem diferente para problemas já antes concebidos, assim como outras formas de representar, acessar e manipular os objetos matemáticos. Cabe aqui ressaltar que Basso e Notare (2015) enfatizam que o intuito não é proporcionar mais rapidez na execução das questões, ou que o computador substitua as atividades cognitivas dos estudantes, mas sim proporcionar um melhor entendimento dos conteúdos estudados.

O experimento prático desta pesquisa foi realizado, de modo remoto, com estudantes voluntários da 1ª série do Ensino Médio de uma escola particular de Canoas. Foi utilizado o *software* GeoGebra para possibilitar o acesso e a manipulação a diferentes registros de representação semiótica. O conteúdo abordado foi progressões, assunto que normalmente é trabalhado com ênfase na representação algébrica, tanto em sala de aula quanto nos livros didáticos, mesmo com as orientações da BNCC instruindo para vincular o estudo de progressões ao estudo de funções, conteúdo estudado anteriormente.

Em relação à pergunta diretriz dessa pesquisa: **Como a utilização do GeoGebra e a mobilização de diferentes registros de representação semiótica auxiliam na aprendizagem das progressões?,** constatamos que nas atividades propostas os alunos identificavam as variáveis visuais pertinentes e transitavam entre diferentes registros para resolver os problemas propostos.

A partir dos estudos teóricos realizados e dos dados coletados e analisados nesta pesquisa, é possível apontar que, a utilização do *software* GeoGebra permite que os alunos acessem os objetos matemáticos de diferentes maneiras, proporcionando o trabalho com diferentes registros de representações semióticas. Concluímos que a versatilidade do

GeoGebra favoreceu a dinamização das atividades que, no papel, se mostrariam estáveis ou, proporcionando aos participantes que pudessem perceber o significado matemático por trás das construções.

Acredito que os quatro estudantes que participaram da pesquisa revelaram nos dados analisados o papel da utilização de recursos tecnológicos para trabalhar com diferentes registros de representação semiótica. A pesquisa também mostrou a importância de que, como professores, devemos nos preocupar com o real entendimento dos estudantes sobre os objetos matemáticos. Como docente, pretendo utilizar esta sequência de atividades em grupos maiores de alunos e, talvez, identificar ainda outras abordagens acerca do conteúdo estudado. Avaliando o experimento prático, percebo que seria oportuno não apresentar as fórmulas para os alunos, de modo que eles poderiam desenvolver seu próprio raciocínio e, provavelmente, não se “prenderiam” a representações algébricas. Além disso, gostaria de dedicar mais tempo para a “Atividade final”, a qual, acredito que, com mais tempo e mais dedicação por parte dos alunos, poderíamos encontrar variados registros.

Mesmo com tal adendo, considero que essas atividades podem ser adaptadas a diferentes conteúdos matemáticos. Também incentivo a utilização do *software* GeoGebra e do acervo que o mesmo disponibiliza, pois pode favorecer a aprendizagem matemática e auxiliar na mobilização dos diferentes registros.

REFERÊNCIAS

ALVES, L. **Educação à Distância: Conceitos e história no Brasil e no mundo.** In: Revista Brasileira de Aprendizagem Aberta. v. 10, 2011. p. 83-92.

BASSO, M.V.A., NOTARE, M.R. **Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica.** Revista Novas Tecnologias na Educação**:** Porto Alegre. Vol. 13, n.2, 2015. Disponível em: http://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/61432/36324.

BEHAR, P. A. **Modelos pedagógicos em educação a distância.** In: BEHAR, P. A. (Org). Modelos pedagógicos em educação à distância. Porto Alegre: Artmed, 2009. p. 15-32.

BRASIL. **Decreto nº 9057**. 2017. Disponível em: D9057 (planalto.gov.br)

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base**: Ensino Fundamental. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base.

BRASIL. **Orientações curriculares para o ensino médio – ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, 2006.

DANTE, L. R. **Matemática Contexto e Aplicações**. 2ª Edição. São Paulo: Ática, 2013. Volume I

DUVAL, Raymond. Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica - 8a ed. Campinas, São Paulo. Papirus, p. 11- 33. 2013.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Revemat. Florianópolis: v.07, n.2, p.266-297, 2012.

GOMES, L. F. **EAD no Brasil: Perspectivas e desafios.** Revista Avaliação. v. 18, 2013. n. 1. p. 13-22

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO R., ALMEIDA N. **Matemática, ciências e aplicações.** 9ª Edição. São Paula: Saraiva, 2016. Volume I

MARCHETTO; R. **O uso do software GeoGebra no estudo de progressões aritméticas e geométricas, e sua relação com funções afins e exponenciais. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática),** Instituto de Matemática – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, p.148, 2017.

MOREIRA, J. A., HENRIQUES, S., BARROS, D. **Transitando de um ensino remoto emergencial para uma educação digital em rede, em tempos de pandemia.** Repositório Aberto, 2020.
Disponível em: http://hdl.handle.net/10400.2/9756

NOTARE, Márcia Rodrigues; GRAVINA, Maria Alice. **A formação continuada de professores de matemática e a inserção de mídias digitais na escola**. In: VI COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA (VI HTEM), 2013, São Carlos, SP, Brasil. Anais [...]. [S. l. : s. n.], 2013.

APÊNDICES

APÊNDICE 1 – Carta de apresentação da Escola.

UFRGS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Porto Alegre, 09/09/2021.

Prezado Diretora Ângela Maria Piassine

Do Colégio da Imaculada

O acadêmico Yasmin de Oliveira Menger é estudante regularmente matriculado no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Como parte das exigências do currículo do curso, o aluno está desenvolvendo uma pesquisa sobre Estudo de progressões por meio de softwares matemáticos, para a conclusão de seu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), o qual é exigido para que possa adquirir o título de Licenciado em Matemática.

Os objetivos do trabalho, estritamente acadêmicos, em linhas gerais, consistem em determinar como os alunos percebem e trabalham com sequências a partir de diferentes representações. Neste sentido, torna-se importante proceder à coleta de dados, incluindo fotos, vídeos e áudio, para futuras análises e obtenção dos resultados relacionados com a aprendizagem da Matemática. Por esta razão, estamos solicitando a sua autorização para que este trabalho possa ser desenvolvido na escola sob sua Direção.

Em caso de manifestação de sua concordância, por favor, registre sua ciência ao final deste documento, o qual está sendo encaminhado em duas vias.

Enquanto orientadora responsável, reiteramos nosso compromisso ético com os participantes dessa pesquisa e nos colocamos à disposição para quaisquer esclarecimentos durante e após a realização da coleta de dados. Para tanto, deixamos à disposição o seguinte contato: marcia.notare@ufrgs.br.

Agradecemos a sua atenção.

Cordialmente,

Márcia R. Notare

Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
Professora do Instituto de Matemática e Estatística/IME-UFRGS

Ângela Maria Piassine

Ângela Maria Piassine
Diretora do Colégio da Imaculada

APÊNDICE 2 - Termo de Consentimento

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. _________________, responsável pelo(a) aluno(a) ____, da turma ____________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada Estudo de progressões por meio de softwares matemáticos, desenvolvida pela pesquisadora Yasmin de Oliveira Menger. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é orientada pela docente Márcia Rodrigues Notare Meneghetti, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do e-mail marcia.notare@ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o desenvolvimento da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Investigar e analisar como os alunos identificam e trabalham com sequências.
- Identificar as potencialidades do software GeoGebra para o estudo de progressões.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A participação do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista e questionário escrito, bem como da participação em oficina, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc., sem identificação. A participação do(a) aluno(a) na pesquisa se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar a pesquisadora responsável pelo telefone XXX-XXX ou e-mail yasha.menger@gmail.com.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de 2021.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa: Márcia R. Notare