

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA**

TIAGO WOBETO PINTER

**PERFORMANCE DA SELEÇÃO DE PORTFÓLIOS UTILIZANDO DADOS
INTRADIÁRIOS E MÉTODOS ECONÔMÉTRICOS DE REGULARIZAÇÃO**

**Porto Alegre
2020**

TIAGO WOBETO PINTER

**PERFORMANCE DA SELEÇÃO DE PORTFÓLIOS UTILIZANDO DADOS
INTRADIÁRIOS E MÉTODOS ECONÔMICOS DE REGULARIZAÇÃO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Flávio Augusto Ziegelmann

**Porto Alegre
2020**

CIP - Catalogação na Publicação

Pinter, Tiago Wobeto

Performance da seleção de portfólios utilizando dados intradiários e métodos econométricos de regularização / Tiago Wobeto Pinter. -- 2020.
66 f.

Orientador: Flávio Augusto Ziegelmann.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, , Porto Alegre, BR-RS, 2020.

1. Seleção de portfólio. 2. Método LASSO-VAR. 3. Dados de alta frequência. 4. Volatilidade realizada. 5. Métodos de encolhimento lineares. I. Augusto Ziegelmann, Flávio, orient. II. Título.

TIAGO WOBETO PINTER

**PERFORMANCE DA SELEÇÃO DE PORTFÓLIOS UTILIZANDO DADOS
INTRADIÁRIOS E MÉTODOS ECONÔMÉTRICOS DE REGULARIZAÇÃO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Aprovado em: Porto Alegre, 23 de outubro de 2020:

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Flávio Augusto Ziegelmann- Orientador
UFRGS

Prof. Dr. André Alves Portela Santos
UFSC

Prof. Dr. Bruna Kasprzak Borges
SEPLAG

Prof. Dr. Tiago Pascoal Filomena
UFRGS

AGRADECIMENTOS

Gostaria de aproveitar este breve espaço para agradecer ao apoio incondicional de minha família nestes últimos anos nos momentos mais difíceis. Agradecer ao meu orientador, professor Flávio Augusto Ziegelmann, pela paciência e dedicação em me guiar ao longo da elaboração deste trabalho. Desejo meus agradecimentos à Tainan Bacco pelo auxílio em disponibilizar parte dos dados de alta frequência que foram utilizados nesta dissertação e pela sua ajuda em entender algumas especificidades próprias deste tipo de base de dados. Por fim, deixo meu muito obrigado a todo o corpo técnico e funcionários da FCE, em especial aos demais professores, que me acompanharam ao longo do mestrado.

RESUMO

O principal objetivo desta dissertação é a comparação entre o uso de dados de alta frequência (cotações intradiárias) e de dados diários na construção de carteiras de mínima variância através de 30 ativos da B3 no período entre janeiro de 2017 e julho de 2019. Os dados de alta frequência necessitaram de tratamento diferenciado a fim de mitigar o viés proveniente dos ruídos de microestrutura e dos eventos corporativos das empresas que afetam o preço de mercado. As abordagens para estimativa das matrizes de covariâncias com dados de alta frequência foram divididas em dois tipos: uma abordagem que não é robusta à falta de sincronização entre a negociação dos diferentes ativos do portfólio e uma medida de covariância para dados de alta frequência robusta à falta de sincronização. A dinâmica da previsão da matriz de covariâncias para portfólios de alta frequência não robustos à sincronização é especificada de acordo com os modelos EWMA *RiskMetrics* e DCC-GARCH. Para a dinâmica da matriz de covariâncias robusta à sincronização das negociações intradiárias dos ativos, implementamos os métodos LASSO-VAR e adaLASSO-VAR de Callot et al. (2017) com o uso do estimador Kernel Realizado Multivariado. As carteiras que utilizam dados de alta frequência são comparadas com portfólios construídos através das cotações diárias baseadas na matriz de covariância amostral, EWMA *RiskMetrics*, DCC-GARCH, métodos de encolhimento linear para a covariância, métodos por análise de fatores, carteira igualmente ponderada, além dos retornos do índice Ibovespa no mesmo período. O desempenho dos portfólios é mensurado através das estatísticas de performance relacionadas aos retornos, risco e *turnover* com frequência de rebalanceamento diária, semanal e mensal para os pesos dos portfólios. Nossos resultados apontam que os métodos LASSO-VAR e adaLASSO-VAR apresentaram elevado *turnover* e menor retorno líquido na comparação entre os portfólios construídos com os retornos diários.

Palavras-chave: Seleção de Carteiras. Volatilidade realizada. Método LASSO-VAR. Alta dimensionalidade.

ABSTRACT

The main objective of this dissertation is compare the performances resulting from the use of high frequency data (intradaily returns) and low frequency data (daily returns) for the construction of minimum variance portfolios through 30 B3 assets in the period between January 2017 and July 2019. The high-frequency data required different treatment in order to mitigate the bias arising from the microstructure noise and companies corporate events that affect the market price. The approaches for estimating covariance matrices with high frequency data have been divided into two types: an approach that is not robust to the lack of synchronization between the trading of different portfolio assets and a covariance measure for high frequency data robust to this synchronization. The dynamic of the high-frequency covariance matrix forecast not robust to trade synchronization is specified with EWMA *RiskMetrics* and DCC-GARCH models. For the dynamic of the covariance matrix robust to assets trade synchronization, we implement the LASSO-VAR and adaLASSO-VAR methods by Callot et al. (2017) with the Multivariate Realized Kernel estimator. The high-frequency portfolios are compared with daily prices portfolios built through the sample covariance matrix, EWMA *RiskMetrics*, DCC-GARCH, shrinkage methods, factor analysis methods, equally weighted portfolio and the Ibovespa index returns for the same period. The performance of the portfolios is measured by statistics for returns, risk and turnover with daily, weekly and monthly re-balancing schemes for the portfolios weights. Our results suggests that LASSO-VAR and adaLASSO-VAR shows high turnover and lower net returns compared to daily returns portfolios.

Keywords: Portfolio selection. Realized volatility. LASSO-VAR methods. High frequency Data. High dimensional data.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	6
2	REVISÃO DA LITERATURA EMPÍRICA	11
3	SELEÇÃO DE CARTEIRAS	16
3.1	Carteira de Média-Variância	16
3.2	Carteira de Mínima Variância	17
4	PREVISÕES PARA AS MATRIZES DE COVARIÂNCIAS	18
4.1	Estimativa das covariâncias com dados diários	18
4.1.1	Matriz de covariância amostral	18
4.1.2	Modelo de média móvel exponencial ponderada	18
4.1.3	Matriz de covariâncias via modelo fatorial	19
4.1.4	Métodos de encolhimento lineares	20
4.1.4.1	LW-I: Covariâncias com matriz identidade	21
4.1.4.2	LW-fator: Covariâncias com único fator de mercado	21
4.1.4.3	LW-corr: Covariâncias com matriz de correlações constante	21
4.1.5	Modelo DCC-GARCH	22
4.2	Estimadores das covariâncias com dados intradiários não sincronizados	23
4.3	Estimadores das covariâncias com dados intradiários sincronizados	25
4.3.1	Método LASSO-VAR	27
4.3.2	Método adaLASSO-VAR	31
5	APLICAÇÃO EMPÍRICA AO MERCADO BRASILEIRO	33
5.1	Dados	33
5.2	Exercício Empírico	34
5.3	Resultados	37
5.3.1	Carteira de mínima variância global	37
5.3.2	Carteira de mínima variância com restrição sobre a alocação por ativo	40
5.3.3	Análise dos custos de transação	43
6	CONCLUSÃO	46
	REFERÊNCIAS	48
	APÊNDICE A – ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS DOS ATIVOS	55
	APÊNDICE B – CARTEIRAS DE MÍNIMA VARIÂNCIA	58
	APÊNDICE C – PARÂMETRO DE ENCOLHIMENTO	64

1 INTRODUÇÃO

O estudo de estratégias para a seleção de carteiras com ativos de risco é tópico importante em finanças tendo em vista que afeta as decisões sobre o gerenciamento de risco de instituições financeiras, estas que, por sua vez, são estruturas fundamentais no bom funcionamento da economia por serem responsáveis pela disponibilidade de crédito para novos investimentos. A Teoria Moderna de Portfólio teve seu início com o trabalho de Markowitz (1952), na qual a seleção de ativos é vista como um problema de otimização matemática que extrai a informação passada proveniente do vetor de retornos e de sua matriz de covariâncias. A estratégia de seleção de portfólios de média-variância é baseada em uma metodologia analiticamente tratável que consegue capturar o *trade-off* entre risco e retorno esperado pelos investidores no dia a dia do mercado financeiro, e que possibilita a comparação de maneira empírica dos portfólios construídos através de medidas de performance sobre o ganho econômico.

A otimização de portfólios adotava inicialmente o vetor da média dos retornos e a matriz de covariâncias amostrais como estimativas para o vetor de retornos esperados e para a matriz de covariâncias dos retornos, supondo por hipótese retornos com distribuição normal. No entanto, empiricamente, a hipótese de normalidade da distribuição dos retornos usualmente não é válida, devido à presença do excesso de curtose e assimetria aumentando os erros de estimação dos retornos esperados e das covariâncias dos retornos (BRANDT, 2010). Estes erros de estimação, por sua vez, impactam as carteiras de média-variância podendo levar a perdas econômicas para os investidores que adotem esta estratégia de alocação (JAGGANNATHAN; MA, 2003).

Para mitigar os erros de estimação, duas alternativas possíveis incluem a adoção de estratégias com carteiras de mínima variância (CMV) e métodos econométricos mais robustos para a dinâmica da matriz de covariâncias dos retornos. A carteira de mínima variância pode ser interpretada como um caso específico da carteira de média-variância, na qual o investidor é totalmente avesso ao risco, além disto é a carteira com menor desvio padrão na fronteira eficiente do portfólio de Markowitz (1952).

A carteira de mínima variância vem sendo amplamente implementada na literatura empírica recente para o mercado de capitais norte-americano (JAGGANNATHAN; MA, 2003; DEMIGUEL; GARLAPPI, 2009; FAN et al., 2012) e brasileiro (RUBESAM; BELTRAME, 2013; CALDEIRA et al., 2014; BORGES et al., 2015; CALDEIRA et al., 2017). Os principais argumentos para a adoção das carteiras de mínima variância incluem a necessidade de estimação somente da matriz de covariância, a maior facilidade na implementação de métodos econométricos próprios para este fim e a mitigação dos erros oriundos da estimação do vetor dos retornos médios. Corroborando com o uso da carteira de mínima variância, estudos empíricos indicam que a matriz de covariância dos retornos possui menor erro de estimação do que o vetor dos retornos esperados (MICHAUD, 1989; CHOPRA; ZIEMBA, 1993). Ademais, sem os erros de estimação provenientes da estimativa dos retornos esperados, as carteiras de variância mínima apresentam menor *turnover* na comparação com carterias de média-variância gerando menores custos de transação e maior retorno líquido para o investidor.

A necessidade de estimativas mais acuradas para a matriz de covariâncias dos retornos levou a implementação de diferentes metodologias econométricas. Os métodos de encolhimento para a matriz de covariância incondicional utilizam a combinação entre a matriz de covariância amostral e uma matriz-alvo com estrutura própria procurando mitigar os erros de estimação através da exploração do *trade-off* entre viés e variância. Estimadores de encolhimento lineares para a matriz de covariância dos retornos foram propostos nos trabalhos de Ledoit e Wolf (2003), Ledoit e Wolf (2004a) e Ledoit e Wolf (2004b), enquanto, métodos de encolhimento não-lineares são apresentados em Ledoit e Wolf (2012) e Ledoit e Wolf (2017).

Os métodos com uso de fatores também são adotados para descrever a dinâmica das covariâncias dos retornos. Nesta abordagem, os fatores podem ser baseados em fatores observáveis provenientes de características macroeconômicas ou das empresas, como por exemplo, nos artigos de Fama e French (1993), Carhart (1997) e Fama e French (2015), ou podem ser extraídos diretamente dos retornos através de análise fatorial e análise de componentes principais, como nos trabalhos de Hu e Tsay (2014), Li et al. (2016) e Trucíos et al. (2019).

Os modelos GARCH multivariados expandem o GARCH univariado proposto por Bollerslev (1986) para a análise da dinâmica da matriz de covariância condicional dos retornos. O modelo vech-GARCH foi proposto em Bollerslev et al. (1988), seguido por outros modelos como GARCH com Correlação Condicional Constante (CCC-GARCH) de Bollerslev (1990), BEKK de Engle e Kroner (1995) e GARCH com Correlação Condicional Dinâmica (DCC-GARCH) de Engle (2002) e Tse e Tsui (2002), entre vários outros. Nos modelos GARCH multivariados, uma das principais limitações diz respeito ao grande número de parâmetros que torna muitas vezes inviável o uso destes modelos em aplicações com um número elevado de ativos. Note-se que estudos realizados por Caporin e McAleer (2014) e Almeida et al. (2018), apontam que os modelos DCC apresentam bons resultados na classe de modelos GARCH multivariados com maior número de ativos.

A maior disponibilidade de dados de alta frequência, dados que compreendem as negociações dos ativos ao longo de um único dia, impulsionou o desenvolvimento de várias medidas de volatilidade ao longo das duas últimas décadas que posteriormente passaram a ser utilizadas no contexto de seleção de portfólios. Andersen et al. (1998) introduziram a variância realizada determinada pela soma dos quadrados dos retornos intradiários em curtos intervalos de tempo, que mais tarde foi expandida para o contexto multivariado sendo denominada covariância realizada (ANDERSEN et al., 2003; BARNDORFF-NIELSEN; SHEPHARD, 2004).

A variância realizada não é uma medida consistente para a volatilidade devido à presença de ruídos de microestrutura característicos dos dados de alta frequência conforme Barndorff-Nielsen e Shephard (2004). Para estes dados, o erro de estimação da volatilidade baseado na hipótese de ruídos de microestrutura gaussianos diminui a medida que os retornos intradiários são amostrados em intervalos de tempo menores, entretanto, o viés deste estimador aumenta. Desta forma existe um *trade-off* entre viés e variância na escolha da frequência temporal dos retornos intradiários (BIAIS et al., 2005; MCALEER; MEDEIROS, 2008).

Neste contexto, a escolha de uma frequência temporal parcimoniosa que consiga aproveitar a maior quantidade de informação dos dados de alta frequência sem que o estimador da volatilidade dos ativos seja severamente viesado é analisada por diversos trabalhos. Andersen et al. (1998) recomendam o intervalo de 5 minutos para os retornos intradiários, Band e Russell (2008) propõem um método de seleção da frequência ótima para a variância realizada através da minimização do erro quadrático médio em função de diferentes frequências de intervalos intradiários, e Liu et al. (2015) concluem através do procedimento *Model Confidence Set* de Hansen et al. (2011) que o intervalo de 5 minutos dificilmente é superado.

Este *trade-off* característico dos dados de alta frequência levou à implementação de novas medidas para a volatilidade latente dos ativos que prometem maior robustez aos ruídos de microestrutura. Barndorff-Nielsen e Shephard (2004) adotaram diversas funções kernel para a estimação não paramétrica da volatilidade, Zhang et al. (2005) e Zhang (2006) utilizam subamostragens das séries do quadrado dos retornos intradiários em diferentes escalas de tempo e Andersen et al. (2012) propõem estimadores robustos aos saltos das cotações intradiárias.

Nas medidas para as matrizes de covariâncias realizada, além dos ruídos de microestrutura, existem as distorções provenientes da falta de sincronia na negociação entre os diferentes ativos (ZHANG, 2010; GRIFFIN; OOMEN, 2011). A falta de sincronia entre as negociações faz com que ocorra a presença de retornos intradiários nulos para os ativos de menor liquidez, sendo que o resultado desta característica entre os ativos é conhecido como efeito *Epps* devido ao estudo pioneiro realizado por Epps (1979). No Efeito *Epps*, a correlação entre os ativos tende a zero quanto maior a frequência dos intervalos dos retornos adotados na construção das matrizes de covariâncias realizada.

O conceito de períodos amostrais atualizados (*refresh time samples*), introduzido por Harris et al. (1995), pode ser aplicado na construção dos estimadores das matrizes de covariâncias realizada com o objetivo de reduzir o viés devido à falta de sincronização das negociações entre os ativos. Nesta abordagem, o retorno das cotações intradiárias é computado após a negociação de todos os ativos da amostra, garantindo que exista variação de preço para todos os ativos em cada período de atualização. Entre os principais estimadores para as matrizes de covariâncias realizada robustos aos dados não sincronizados destacam-se os estimadores de Hayashi-Yoshida (HAYASHI; YOSHIDA, 2005), estimador kernel realizado multivariado de Barndorff-Nielsen et al. (2011) e kernel realizado composto de Lunde et al. (2016a). Por outro lado, Griffin e Oomen (2011) estudam o viés e variância dos estimadores das matrizes de covariâncias para cotações não sincronizadas e demonstram que o estimador de covariâncias realizada de Andersen et al. (2003) pode ser mais eficiente dependendo do nível dos ruídos de microestrutura.

O uso das medidas de covariâncias com dados de alta frequência para a seleção de portfólios é adotado por diversos estudos como Fleming et al. (2003), Pooter et al. (2008), Liu (2009), Pinto et al. (2014), Borges et al. (2015) e Caldeira et al. (2017). Para contornar a dificuldade de estimação da dinâmica da matriz de covariância condicional imposta pela alta dimensionalidade, geralmente são adotados modelos GARCH multivariados com especificações

parcimoniosas através de técnicas como *covariance targeting* de Engle e Mezrich (1996), além do modelo heterogêneo autoregressivo (HAR) adaptado para o contexto multivariado de Chiriac e Voev (2010).

Uma das desvantagens destas abordagens é a falta de flexibilidade para a dinâmica da matriz de covariância condicional a fim de superar as barreiras computacionais da alta dimensionalidade. Callot et al. (2017) propõem uma nova abordagem através da combinação dos métodos de regularização *Least Absolute Shrinkage and Selection Operator* (LASSO) de Tibshirani (1996) e *adaptive LASSO* (adaLASSO) de Zou (2006) sobre um vetor autoregressivo (VAR) para a estimação das matrizes de covariâncias com dados de alta frequência e alta dimensão. Nesta abordagem, cada entrada da matriz de covariância condicional é estimada equação por equação baseada no modelo vetor autoregressivo e o método LASSO é posteriormente aplicado sobre cada equação selecionando as covariáveis mais significativas. Os autores apresentam a construção teórica de um limite superior para o erro de previsão da matriz de covariância válida para amostras finitas e a partir deste resultado é determinado um limite para o erro de previsão da variância do portfólio. Estes métodos, denominados como LASSO-VAR e adaLASSO-VAR, são testados empiricamente sobre 30 ações do índice *Dow Jones* entre 2006 e 2012 com dados de alta frequência.

O principal objetivo desta dissertação é comparar o desempenho de portfólios de mínima variância utilizando os retornos com cotações diárias de fechamento (*close-to-close price*) e retornos com dados intradiários (dados de alta frequência). Para esta finalidade, selecionamos 30 ativos da bolsa de valores brasileira (B3) no período entre 02/01/2013 e 31/07/2019, e analisamos a performance dos portfólios adotando modelos *benchmark* para dados diários e modelos para dados de alta frequência com matrizes de covariâncias robustas ou não à falta de sincronização das negociações intradiárias dos ativos. Desta forma, pretende-se verificar se existem ganhos econômicos para o investidor na otimização dos portfólios de mínima variância com a utilização dos dados de alta frequência e adoção de estimadores robustos para a covolatilidade dos ativos.

Os métodos de regularização linear LASSO e adaLASSO surgem como estratégia interessante ao possibilitar o uso do modelo vetor autoregressivo em um contexto de alta dimensionalidade. Desta forma adotamos o uso de ferramentas de *machine learning* em combinação com a otimização de portfólios por mínima variância, o que consideramos ser um *approach* ainda novo na literatura empírica de finanças.

Os modelos DCC-GARCH e de média móvel exponencial ponderada (EWMA *RiskMetrics*) foram adotados para as matrizes de covariâncias utilizando a medida de volatilidade kernel realizado de Barndorff-Nielsen et al. (2009) em intervalos de 5 minutos dado o maior uso deste intervalo na literatura. Para a estimativa das matrizes de covariâncias robusta ao efeito *Epps* adotamos os métodos LASSO-VAR e adaLASSO-VAR propostos em Callot et al. (2017) com o uso do estimador de matriz de covariância kernel realizado multivariado de Barndorff-Nielsen et al. (2011).

A análise da performance dos portfólios é realizada através da média dos retornos, média

dos retornos anualizados, desvio padrão anualizado, índice de sharpe anualizado, retornos acumulados, máximo *drawdown*, valor em risco (VaR) e *turnover* para a frequência de rebalanceamento diária, semanal e mensal dos portfólios. Em seguida, também analisamos os impactos dos custos de transação em dois cenários distintos e a adoção de restrições para a alocação máxima em cada ativo conforme sugerido por Jaggannathan e Ma (2003).

Nossos principais resultados indicam que os portfólios que utilizaram os dados de alta frequência em conjunto com os métodos de regularização LASSO e adaLASSO apresentaram elevado *turnover*, o que refletiu em um menor retorno líquido para o investidor. A adoção da restrição sobre a norma de alocação dos ativos diminuiu o *turnover* das carteiras com dados de alta frequência, no entanto, estes portfólios se mantiveram com fraco desempenho na comparação com as carteiras que utilizaram dados diários em termos de risco e retorno. Desta forma, para os ativos e período de análise deste trabalho, os portfólios construídos a partir das cotações intradiárias não apresentaram melhores resultados do que os portfólios construídos com as cotações diárias de fechamento.

2 REVISÃO DA LITERATURA EMPÍRICA

Nesta seção será feita uma revisão sobre os trabalhos empíricos relacionados a seleção de portfólios, dando ênfase quanto ao uso dos dados de alta frequência e a dimensão dos portfólios construídos.

Fleming et al. (2003) analisam os benefícios econômicos do uso das cotações intradiárias no contexto de seleção de portfólios. As estimativas para as matrizes de covariâncias condicionais do estudo adotam retornos diários e retornos intradiários com intervalos de 5 minutos no problema de otimização de carteiras de média-variância para os contratos futuros do índice S&P 500, títulos do tesouro norte-americano e ouro. A matriz de covariância condicional é estimada através de janela móvel (*rolling covariance estimators*). Os autores concluem que existem ganhos econômicos no uso de cotações intradiárias para a seleção de portfólios de média variância mesmo com a presença de custos de transação.

Pooter et al. (2008) constroem portfólios de mínima variância e média-variância usando retornos intradiários com intervalos entre 1 e 130 minutos e comparam com portfólios que adotam retornos diários para 75 ativos do índice S&P500 norte-americano. Os autores adotam as mesmas estimativas das matrizes de covariâncias condicionais de Fleming et al. (2003). Neste trabalho, os portfólios com dados de alta frequência obtêm melhor performance com relação aos portfólios que utilizam cotações diárias de fechamento. Os autores concluem que a frequência dos intervalos adotada no cálculo dos retornos intradiários aparentemente possui maior importância na performance dos portfólios do que a metodologia adotada na estimativa das covariâncias condicionais.

Na mesma linha do trabalho anterior, Liu (2009) compara o uso de retornos diários e retornos intradiários na construção de portfólios de mínima variância para 30 ações do índice Dow Jones entre 1993 e 2000. Os resultados do estudo indicam que o benefício dos dados de alta frequência no problema de seleção de portfólio dependem da frequência de rebalanceamento e da janela de estimação adotada pelo gestor. Os melhores resultados foram obtidos quando o investidor adota uma estratégia de rebalanceamento diário e janela de estimação menor que 6 meses.

Fan et al. (2012) analisam a estimação da matriz de covariância condicional com dados de alta frequência e alta dimensão para a seleção de portfólios de mínima variância através dos métodos de sincronização “*pairwise-refresh time*” e “*all-refresh time*” entre as negociações dos ativos. Na comparação entre as carteiras construídas 30 ativos do índice Dow Jones, os principais resultados indicam que os portfólios construídos com os métodos de sincronização propostos pelos autores obtêm menor risco entre as metodologias concorrentes.

Hautsch et al. (2015) analisam os portfólios de mínima variância utilizando cotações intradiárias com 400 ativos do índice S&P500 entre 2006 e 2009 através da medida de covariâncias denominada Kernel Realizado em Blocos (*Realized Block Kernel*) sugerida por Hautsch et al. (2012). Os autores adotam diferentes janelas de estimação, vários métodos de regularização e dois modelos distintos para a previsão das matrizes de covariâncias condicionais com dados

de alta frequência. Os estimadores das matrizes de covariâncias condicionais com retornos diários adotados foram: modelo DCC-GARCH com a parametrização “*covariance targeting*” de Engle e Mezrich (1996), matriz de covariâncias amostrais com janela móvel regularizada por componentes principais, método de encolhimento linear de Ledoit e Wolf (2003), além do modelo EWMA *Riskmetrics*. Os resultados do trabalho apontam que os portfólios construídos através dos dados de alta frequência apresentaram menor volatilidade na comparação com os portfólios com dados de fechamento diários.

Becker et al. (2015) analisam diferentes funções de perda no ranqueamento de modelos GARCH multivariados para a previsão das matrizes de covariâncias condicionais e variância dos portfólios de média-variância e mínima variância através do procedimento *Model Confidence Set* (MCS) de Hansen et al. (2011). A aplicação empírica foi feita com dados diários e dados de alta frequência com intervalos fixos de 5 minutos para um número máximo de 20 ações da NYSE. Os principais resultados encontrados apontam que a função de quase-verossimilhança apresenta maior poder de seleção dos melhores modelos para a covariância condicional de acordo com o MCS independente do tipo de dados utilizado.

Caldeira et al. (2016) estudam o problema de seleção de portfólios com a combinação de 8 modelos GARCH multivariados adotando uma abordagem econômica. Os pesos na combinação são escolhidos através do índice de Sharpe com fator de desconto para os problemas de otimização de média variância e mínima variância. A metodologia proposta é implementada para três conjuntos de dados com cotações diárias: 50 ativos do índice S&P500, 45 ativos do Eurostoxx e 17 ativos do índice STI. Os principais resultados do trabalho sugerem que os portfólios que utilizam a combinação de previsões obtêm melhor performance em termos do índice de Sharpe e desvio padrão na comparação com os portfólios construídos com um único modelo GARCH multivariado.

Ferreira e Santos (2017) implementam modelos GARCH multivariados e métodos de encolhimento lineares para a matriz de covariâncias de Ledoit e Wolf (2003) com diferentes estratégias de seleção de carteiras como média-variância, mínima variância, média-variância restrita pela norma euclidiana, volatilidade no tempo (“*volatility timing*”) e retorno ao risco (“*reward-to-risk*”). Os autores utilizam as cotações diárias de 69 ações do índice S&P100 entre 1990 e 2013 e analisam a performance dos portfólios através dos retornos, desvio padrão, *turnover* e índice de sharpe. Na ausência dos custos de transação, os modelos GARCH multivariados apresentaram performance semelhante aos métodos de encolhimento lineares em termos do retorno ajustado para o risco, enquanto que, com a inclusão dos custos de transação, os métodos de encolhimento conseguiram melhores resultados. Segundo os autores, a diferença de performance é decorrente do maior *turnover* dos portfólios que adotaram a abordagem GARCH.

No trabalho de Callot et al. (2017), os métodos *Least Absolute Shrinkage and Selection Operator* (LASSO) e *adaptive LASSO* (adaLASSO) são adotados no contexto de seleção de portfólios com dados de alta frequência. Os autores sugerem que a previsão das entradas das matrizes de covariâncias realizadas sejam modeladas por um vetor autoregressivo (VAR) e

adotam o LASSO como procedimento capaz de reduzir o número de parâmetros significativos do modelo. Os autores analisam a performance dos métodos LASSO-VAR e adaLASSO-VAR na previsão das matrizes de covariâncias e na seleção de portfólios de média-variância para 30 ativos da bolsa de valores norte-americana.

Na mesma linha do trabalho anterior, Zou et al. (2018) propõem o uso do estimador *Average Realized Volatility Matrix* (AVRM) de Wang e Zou (2010) para as matrizes de covariâncias realizadas com dados de alta frequência em combinação com a posterior aplicação da função de penalização *Smoothly Clipped Absolut Deviation* (SCAD) de Fan e Li (2001). As principais conclusões sugerem que os métodos que adotaram a função SCAD apresentaram melhor desempenho na redução do risco com relação aos métodos concorrentes para a seleção de carteiras com mínima variância entre 100 ativos do índice S&P500.

Trucíos et al. (2019) estudaram estimativas para as matrizes de covariâncias condicionais com uso de cotações intradiárias através da análise de componentes principais que são robustas à presença de outliers. Os métodos *Principal Volatility Components* (PVC) de Hu e Tsay (2014) e *Generalized Principal Volatility Components* (GPVC) de Li et al. (2016) são implementados, e conjuntamente, é apresentado o método *Robust Principal Volatility Components* (RBPVC), robusto aos possíveis outliers. O RBPVC é aplicado na construção de portfólios de mínima variância para 73 ações do índice Nasdaq entre 2001 e 2007. Na aplicação empírica, o RBPVC teve melhor performance com relação ao GPVC e outros métodos concorrentes.

A abordagem bayesiana é adotada por Kastner (2019) na modelagem da matriz de covariância dos retornos através do uso de fatores estocásticos para a volatilidade e da implementação de um algoritmo *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC) parcimonioso para a estimação dos parâmetros. A redução do número de parâmetros estimados é feita com o uso de uma *priori* hierárquica Normal-Gamma sobre as cargas de fatores. A eficiência do método é testada através de simulações Monte Carlo e uma aplicação empírica é realizada para a otimização de portfólios de mínima variância com cotações diárias de 300 ativos do índice S&P500. Os métodos bayesianos apresentaram performance superior com relação aos métodos concorrentes com menor desvio padrão anualizado e maior retorno ajustado para o risco.

Engle et al. (2019) implementam um método robusto à alta dimensionalidade para a matriz de covariância condicional dos retornos combinando o método de verossimilhança composto de Engle et al. (2020) para estimação do primeiro estágio do DCC-GARCH e o método de encolhimento não-linear de Ledoit e Wolf (2012) na estimação da matriz de correlação-alvo (“*correlation targeting*”) do segundo estágio. Os autores utilizam a nova abordagem no problema de seleção de portfólio com mínima variância para três conjuntos de dados com 100, 500 e 1000 ativos do *Center for Research in Security Prices* (CRSP) entre 1980 e 2015. Os principais resultados da análise dos portfólios apontam que o modelo DCC-GARCH não-linear apresentou melhores resultados para os conjuntos com maior número de ativos.

Na literatura empírica brasileira, diversos trabalhos implementaram a estratégia de alocação de portfólio por mínima variância. No entanto, estudos que analisam o uso das cotações

intradiárias ainda são escassos.

Rubesam e Beltrame (2013) analisam diferentes estratégias de seleção de portfólios com cotações diárias da BMF&Bovespa para o período entre 1998 e 2011. As carteiras foram construídas através dos modelos GARCH multivariados, métodos de encolhimento lineares e EWMA *RiskMetrics*. Os resultados do estudo indicam que as carteiras de mínima variância apresentaram retornos maiores e volatilidades menores do que todos os outros modelos considerados *benchmark*.

Caldeira et al. (2014) utilizam o modelo Fama-French-Carhart com uma especificação GARCH fatorial multivariada proposta por Santos e Moura (2014) para construção de portfólios de mínima variância. A aplicação empírica do modelo envolveu as cotações diárias de 61 ativos negociados na bolsa de valores brasileira e apresentou melhores resultados em termos da variância e retorno ajustado para o risco com relação aos outros modelos *benchmark*.

O modelo heterogêneo autoregressivo multivariado (MHAR) é implementado por Pinto et al. (2014) com o objetivo de estudar o ganho econômico de um investidor que usa a previsão da volatilidade com dados de alta frequência na construção de portfólios de média-variância. O principal resultado aponta que os ganhos financeiros do portfólio aumentam proporcionalmente com um maior retorno-alvo escolhido, no entanto, os autores analisam através de testes de robustez que o maior risco de estimação dos retornos faz com que a performance dos portfólios diminua.

No trabalho de Borges et al. (2015) é feita a análise da performance de portfólios de mínima variância para os 30 ativos de maior liquidez da BM&FBovespa no período entre fevereiro de 2009 e dezembro de 2011. Os autores comparam as carteiras construídas com cotações diárias e dados de alta frequência em intervalos de tempo que variam entre 5 a 120 minutos. Além dos mesmos estimadores implementados em Liu (2009), foram adotados o método de encolhimento de Ledoit e Wolf (2003), modelo GARCH multivariado *variance targeting-VECH* e estimador *Kernel Realizado Multivariado* de Barndorff-Nielsen et al. (2011). Os autores concluem que o modelo *variance targeting-VECH* baseado em dados de alta frequência conseguiram ganhos substanciais, redução do risco e diminuição do *turnover* das carteiras em comparação aos modelos concorrentes.

Santos (2016) analisa o desempenho dos modelos GARCH multivariados no contexto de seleção de portfólios de mínima variância para 45 ações do índice IBOVESPA e 45 ativos do índice norte-americano S&P100 entre 2008 e 2014 utilizando as cotações diárias de fechamento. No estudo são aplicados os modelos CCC-GARCH, DCC-GARCH, DECO e DCC-GARCH Assimétrico de Engle e Colacito (2006). A performance dos modelos é comparada à taxa de certificado de depósito interbancário diário (CDI) para o mercado brasileiro e o retorno dos títulos da dívida pública dos Estados Unidos de um mês para o mercado norte-americano (*T-Bill*). Os principais resultados apontam que as carteiras construídas através dos modelos GARCH apresentaram resultados superiores aos índices de referência com relação ao risco, índice de sharpe, retorno bruto acumulado e excesso de retorno acumulado.

Caldeira et al. (2017) realizam estudo semelhante aos de Pooter et al. (2008) e Liu (2009) comparando portfólios de mínima variância com dados diários e de alta frequência com intervalos fixos variando entre 5 e 120 minutos. Neste trabalho, os autores utilizaram os 30 ativos de maior liquidez da BM&FBovespa entre 2009 e 2012 através de modelos GARCH multivariados. Os principais resultados indicam ganhos no uso dos estimadores das matrizes de covariâncias realizadas, com os portfólios de mínima variância atingindo menor risco e turnover na comparação com as carteiras construídas com preços diários. O trabalho também indica que a frequência utilizada na construção dos retornos com dados de alta frequência possui papel importante na otimização, com o intervalo de 5 minutos sendo o mais apropriado para os ativos brasileiros.

3 SELEÇÃO DE CARTEIRAS

Neste capítulo são apresentados o problema de seleção de carteiras de média variância e mínima variância, bem como os motivos que nos levam a escolha da carteira de mínima variância como estratégia de alocação de ativos.

3.1 CARTEIRA DE MÉDIA-VARIÂNCIA

A teoria de otimização de carteiras de Markowitz (1952) foi um marco nas finanças quantitativas ao apresentar a solução da escolha dos pesos entre uma cesta de ativos, dado o nível de retorno esperado e variância da carteira, como um problema de otimização matemática.

O problema do investidor consiste em selecionar um vetor de pesos ótimo \mathbf{w}_t^* que minimize o risco dado um nível de retorno escolhido baseado somente no conjunto de informações que estão disponíveis até o período atual.

Suponha, para fins de notação, que $\mathbf{w}_t = (w_{1,t}, \dots, w_{n,t})'$ seja o vetor de pesos da carteira no período t escolhidos em $t - 1$, $\hat{\Sigma}_t$ é a estimativa da previsão da matriz de variâncias-covariâncias para o período t , $\hat{\boldsymbol{\mu}}_t$ é o vetor de retornos esperados no período t e $\bar{\mu}$ uma taxa de retorno-alvo escolhida pelo investidor. O problema de otimização da carteira de média-variância pode ser definido como

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_t^* &= \underset{\mathbf{w}_t}{\operatorname{arg\,min}} \mathbf{w}_t' \hat{\Sigma}_t \mathbf{w}_t, \\ \text{sujeito à } \mathbf{w}_t' \hat{\boldsymbol{\mu}}_t &= \bar{\mu}, \\ \sum_{i=1}^n w_{i,t} &= 1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

A restrição $\mathbf{w}_t' \hat{\boldsymbol{\mu}}_t = \bar{\mu}$ garante que o investidor obtenha o retorno-alvo no próximo período e depende da estimativa dos retornos esperados $\hat{\boldsymbol{\mu}}_t$, enquanto a restrição $\sum_{i=1}^n w_{i,t} = 1$ indica que o investidor utiliza todo seu capital na alocação do portfólio.

A necessidade de obter boas estimativas para os retornos esperados faz com que muitas vezes os pesos selecionados para este tipo de carteira carreguem viés proveniente dos erros de estimação conforme Michaud (1989) e Best e Grauer (1991). Como resultado empírico destes erros de estimação, Chopra e Ziemba (1993) demonstram que existe uma piora na performance nos portfólios de média-variância levando a perdas monetárias para o investidor. Jagannathan e Ma (2003) defendem o uso da estratégia de alocação de mínima variância conjuntamente com o uso da restrição de vendas no problema de otimização como um método indireto de encolhimento da matriz de covariâncias amostral capaz de obter melhores resultados que a construção de portfólios de média-variância. Kempf e Memmel (2006) analisam que os portfólios de mínima variância conseguem melhores resultados fora da amostra do que o portfólio de Markowitz e estudam a distribuição dos pesos da carteira de mínima variância global fazendo um paralelo com a estimação da regressão linear múltipla por mínimos quadrados ordinários.

3.2 CARTEIRA DE MÍNIMA VARIÂNCIA

Na estratégia de alocação de portfólio de mínima variância, o objetivo do investidor consiste em escolher o peso ótimo para cada ativo que minimize a variância do portfólio, sendo que a variância é interpretada como uma medida de risco. O problema da carteira de mínima variância pode ser expresso por

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_t^* &= \arg \min_{\mathbf{w}_t} \mathbf{w}_t' \hat{\Sigma}_t \mathbf{w}_t, \\ &\text{sujeito à } \sum_{i=1}^n w_{i,t} = 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Além da restrição para o uso de todo o capital pelo investidor, a restrição para vendas de ativos também é definida como:

$$w_{i,t} \geq 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

A solução do problema de otimização anterior pode gerar portfólios com concentração excessiva em poucos ativos. Para contornar este resultado e impor uma maior diversificação aos portfólios, Jaggannathan e Ma (2003) defendem a adição de restrições para o valor máximo investido em cada ativo, também conhecidas como restrições *box*. Nesta restrição são adicionados limites superiores e inferiores para a alocação em cada um dos i ativos no período t ,

$$0 \leq w_{i,t} \leq \eta. \quad (3.4)$$

Jaggannathan e Ma (2003) analisam que mesmo adotando valores equivocados para η , a performance fora da amostra é melhorada com esta restrição do ponto de vista empírico, pois o erro de estimação da matriz $\hat{\Sigma}_t$ é diminuído com a maior diversificação provocada pelo limite η no problema de otimização.

Os problemas de otimização de portfólio anteriores possuem em comum a dependência da boa previsão da matriz de covariâncias. A melhor precisão de $\hat{\Sigma}_t$ garante uma melhor alocação por ativo e menor risco ao investidor, sendo peça importante na seleção de portfólios. Recentemente diversos trabalhos adotaram o uso de carteiras de mínima variância como Rubesam e Beltrame (2013), Borges et al. (2015) e Caldeira et al. (2017).

A previsão das matrizes de covariâncias traz diversos desafios e dúvidas na sua implementação empírica. Uma das principais dúvidas diz respeito aos ganhos de performance dos modelos para previsão da covariância que fazem uso de retornos intradiários com relação ao uso de retornos diários (FLEMING et al., 2003; BORGES et al., 2015) aliado à necessidade de estimadores da covariância robustos à alta dimensionalidade.

4 PREVISÕES PARA AS MATRIZES DE COVARIÂNCIAS

A seção 4.1 apresenta os estimadores da matriz de covariâncias com o uso de dados diários; a seção 4.2, os estimadores de covariâncias com o uso de dados de alta frequência não sincronizados; e, por fim, a seção 4.3 trata da estimação das covariâncias com o uso de cotações intradiárias robusta à sincronização das negociações entre os diferentes ativos do portfólio.

4.1 ESTIMATIVA DAS COVARIÂNCIAS COM DADOS DIÁRIOS

Na previsão das matrizes de covariâncias com dados diários serão utilizados os retornos logarítmicos dos preços diários de fechamento. O retorno logarítmico é definido como o logaritmo natural do retorno bruto de um ativo i , $i = 1, \dots, n$, no período t ,

$$r_{i,t} = \ln\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}}\right) = p_{i,t} - p_{i,t-1}, \quad (4.1)$$

onde $P_{i,t}$ é o preço do ativo i no período t e $r_{i,t} = \ln(P_{i,t})$. O vetor de log-retornos diários será denotado por $\mathbf{r}_t = (r_{1,t}, \dots, r_{n,t})$.

4.1.1 Matriz de covariância amostral

O estimador da matriz de covariâncias amostral adota os retornos das ações sem nenhuma estrutura específica para a matriz de covariâncias. Desta forma, as observações mais recentes recebem a mesma ponderação de observações passadas,

$$\hat{\Sigma}_t^A = \frac{1}{\tau - 1} \sum_{h=1}^{\tau} \left(\mathbf{r}_{t-h} - \bar{\mathbf{r}} \right) \left(\mathbf{r}_{t-h} - \bar{\mathbf{r}} \right)', \quad (4.2)$$

$\hat{\Sigma}_t^A$ é considerado o estimador das matrizes de covariâncias amostrais; \mathbf{r}_{t-h} é o vetor dos retornos dos ativos em $t - h$; $\bar{\mathbf{r}}$, o vetor da média dos retornos amostrais e τ é o número de dias da janela de estimação.

A matriz de covariâncias amostral é um estimador não viesado e consistente da matriz de covariâncias sob as hipóteses de que o vetor de retornos é estacionário e possui distribuição normal multivariada segundo Merton (1980). No entanto, Ledoit e Wolf (2003) demonstram que o estimador de covariâncias amostral apresenta elevado erro de estimação na maioria das aplicações cujo número de observações não é suficientemente alto em relação ao número de ativos utilizados no portfólio.

4.1.2 Modelo de média móvel exponencial ponderada

O estimador das matrizes de covariâncias pela média móvel exponencial ponderada ou *Exponentially-Weighted Moving Average* (EWMA) proposto em RiskMetrics (1996) busca capturar os agrupamentos (*clusters*) de volatilidade dos retornos ao longo do tempo,

$$\hat{\Sigma}_t^{ewma} = (1 - \kappa) \sum_{i=1}^{t-1} \kappa^{i-1} \mathbf{r}_{t-i} \mathbf{r}_{t-i}' \quad (4.3)$$

O cálculo da matriz de covariâncias $\hat{\Sigma}_t^{ewma}$ é feito de maneira recursiva com κ representando o parâmetro de decaimento ou de persistência. O EWMA pondera a covariância amostral entre os períodos mais recentes e mais antigos através deste parâmetro κ . Neste estimador, valores mais elevados para κ indicam menor peso para a correlação dos retornos entre as observações mais recentes.

O trabalho original de RiskMetrics (1996) recomenda definir o parâmetro de decaimento no intervalo entre $0.94 \leq \kappa \leq 0.98$ para capturar as características da variância dos retornos como a heteroscedastidade e a autocorrelação ao longo do tempo. Optamos por definir $\kappa = 0.96$ como fator de decaimento em nossas aplicações.

4.1.3 Matriz de covariâncias via modelo fatorial

O modelo fatorial pressupõe que cada retorno é linearmente dependente de poucos fatores comuns não observados. Este modelo de fatores pode ser representado no seu formato matricial por

$$\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{B}\mathbf{f} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.4)$$

onde $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)'$ é um vetor de retornos de dimensão $n \times 1$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)'$ representa o vetor das médias de \mathbf{r} , $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)'$ é um vetor de fatores comuns não observáveis de dimensão $m \times 1$, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)'$ é um vetor de fatores específicos, ou idiosincráticos, a cada retorno com dimensão $n \times 1$ e \mathbf{B} é a matriz $n \times m$ de cargas fatoriais representada por

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Assume-se ainda que $E(\mathbf{f}) = 0$ e a matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}_f$ é uma matriz identidade tal qual $var(f_m) = 1$ e $cov(f_m, f_k) = 0$ para $m \neq k$. O vetor $\boldsymbol{\varepsilon}$ possui média $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$, com a matriz de covariância $cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Psi}$ diagonal, na qual $var(\varepsilon_i) = \psi_i$. Por fim, é importante ressaltar a hipótese de que $\boldsymbol{\varepsilon}$ é não correlacionado com \mathbf{f} isto é, $cov(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{f}) = \mathbf{0}$.

Nesta dissertação utilizamos os vetores com os retornos diários dos n ativos em uma janela de estimação pré-determinada de tamanho h , e portanto consideramos uma matriz com retornos diários de dimensão $h \times n$ para a construção das estimativas das covariâncias. Neste caso, a nova notação fica definida por

$$\mathbf{r}_{ij} - \boldsymbol{\mu}_{ij} = \mathbf{b}_{ji}\mathbf{f}_{ij} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, \quad (4.5)$$

onde \mathbf{r}_{ij} representa os retornos para os dias $i = 1, \dots, h$ compreendidos na janela de estimação, $j = 1, \dots, n$ é o índice para os ativos e $m = 1, \dots, p$ é o índice para os fatores comuns não observados, $\boldsymbol{\mu}_{ij}$ é a média dos retornos entre os n ativos do dia i , \mathbf{b}_{ji} indica as cargas de fatores do dia i para o ativo j , \mathbf{f}_{ij} são os fatores comuns do dia i para o ativo j e $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ são os erros. Podemos

representar esta nova notação matricialmente como

$$\begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1h} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{h1} & \dots & r_{hn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{11} & \dots & \mu_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{h1} & \dots & \mu_{hn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & \dots & f_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{h1} & \dots & f_{hp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \dots & \varepsilon_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon_{h1} & \dots & \varepsilon_{hn} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Supondo as mesmas hipóteses do modelo anterior, na qual um único vetor de retornos é utilizado, a matriz de covariâncias induzida pelo modelo fatorial descrito acima é determinada pelas estimativas da matriz \mathbf{B} e Ψ :

$$\hat{\Sigma}_t^{K-Fator} = \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{B}}' + \hat{\Psi} \quad (4.7)$$

A estimação da matriz de cargas de fatores $\hat{\mathbf{B}}$ e da matriz de covariâncias dos resíduos $\hat{\Psi}$ é feita através de máxima verossimilhança adotando como hipótese que os retornos possuem distribuição conjunta normal para cada período da janela de estimação. Neste trabalho, utilizamos um e três fatores comuns para os modelos que adotam a análise fatorial nas estimativas da matriz de covariâncias.

Este método de estimativa para as matrizes de covariâncias é adotado devido a sua capacidade de implementação no contexto de alta dimensionalidade. No entanto, a maior facilidade para implementação possui como contrapartida as hipóteses rígidas deste modelo que podem não corresponder aos dados observados. Portanto, este modelo será considerado apenas como um competidor para as demais estimativas de covariâncias que utilizam os retornos diários na sua computação.

Recentemente, novas metodologias de estimação para modelos fatoriais e modelos de componentes principais para séries temporais foram estudados nos trabalhos de Pan e Yao (2008), Lam et al. (2011), Lam e Yao (2012), Hu e Tsay (2014), Li et al. (2016), Alonso et al. (2016), Chang et al. (2018) e Trucíos et al. (2019).

4.1.4 Métodos de encolhimento lineares

Os estimadores lineares da matriz de covariâncias por encolhimento foram propostos inicialmente por James e Stein (1961) e são formados pela combinação convexa entre uma matriz de covariâncias com pouco viés, porém ineficiente, e uma matriz-alvo com muito viés e estrutura. A matriz-alvo geralmente possui poucos parâmetros livres e reflete características *a priori* sobre a matriz de covariâncias a ser estimada,

$$\hat{\Sigma}_t^{enc} = (1 - \alpha)\mathbf{S}_t + \alpha\mathbf{F}_t, \quad (4.8)$$

onde $\hat{\Sigma}_t^{enc}$ é considerado o estimador das matrizes de covariâncias por encolhimento, \mathbf{S}_t é a matriz de covariâncias com pouco viés, $\alpha \in (0, 1)$ é o parâmetro de encolhimento e \mathbf{F}_t representa a matriz-alvo com muita estrutura e menor número de parâmetros livres.

O método é denominado de encolhimento (*shrinkage*), pois a matriz \mathbf{S}_t é encolhida em direção à matriz-alvo, sendo que o maior valor de α implica em maior peso para a matriz

\mathbf{F}_t sobre o resultado do estimador $\hat{\Sigma}_t^{enc}$. Desta forma, a combinação convexa (4.8) explora o *trade-off* entre o viés e variância da matriz \mathbf{S}_t . Segundo Engle et al. (2019), os estimadores de encolhimento também atuam encolhendo a dispersão da distribuição dos autovalores da matriz de covariância o que reduz o erro de estimação.

Os estimadores propostos em Ledoit e Wolf (2003), Ledoit e Wolf (2004a) e Ledoit e Wolf (2004b) procuram diminuir o erro de estimação da matriz de covariâncias amostral, tal qual $\mathbf{S}_t = \Sigma_t^A$, através de diferentes propostas para a matriz-alvo \mathbf{F}_t .

4.1.4.1 LW-I: Covariâncias com matriz identidade

No trabalho de Ledoit e Wolf (2004a), a matriz-alvo proposta é definida pela matriz identidade $\mathbf{F}_t^I = \mathbf{I}_n$:

$$\hat{\Sigma}_t^{LW-I} = (1 - \hat{\alpha})\hat{\Sigma}_t^A + \hat{\alpha}\mathbf{F}_t^I. \quad (4.9)$$

4.1.4.2 LW-fator: Covariâncias com único fator de mercado

Neste método de encolhimento proposto em Ledoit e Wolf (2003), o processo gerador do retorno do ativo i no período t é proveniente de um modelo de índice de mercado único adotado primeiramente por Sharpe (1963),

$$r_{i,t} = a_i + \beta_i r_{M,t} + \varepsilon_{i,t}, \quad (4.10)$$

onde o retorno do ativo i no período t é dado por $r_{i,t}$, o retorno do índice de mercado no período t é representado por $r_{M,t}$ e $\varepsilon_{i,t}$ são os resíduos. A matriz-alvo \mathbf{F}_t^{Fator} é estimada por

$$\hat{\mathbf{F}}_t^{Fator} = s_{m,t}^2 \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{B}}' + \mathbf{D}_t, \quad (4.11)$$

onde $\hat{\mathbf{B}}$ é o vetor de coeficientes, $\hat{\mathbf{B}} = (\beta_1, \dots, \beta_j)'$, estimados através de (4.10), $s_{m,t}^2$ é a variância amostral dos retornos de mercado e \mathbf{D}_t é uma matriz diagonal contendo a variância dos resíduos estimados na mesma regressão. O estimador de covariância de encolhimento com único fator de mercado (LW-Fator) é

$$\hat{\Sigma}_t^{LW-Fator} = (1 - \hat{\alpha})\hat{\Sigma}_t^A + \hat{\alpha}\hat{\mathbf{F}}_t^{Fator}. \quad (4.12)$$

4.1.4.3 LW-corr: Covariâncias com matriz de correlações constante

Ledoit e Wolf (2004b) adotam um estimador de correlação constante entre os ativos para a matriz alvo \mathbf{F}_t . Os autores assumem que os retornos dos ativos são considerados independentes e identicamente distribuídos. Sejam as correlações amostrais entre os ativos i e j definidas a partir da matriz de covariâncias amostral

$$\rho_{ij} = \frac{h_{ij}}{\sqrt{h_{ii} \times h_{jj}}}, \quad (4.13)$$

h_{ij} é a entrada da matriz de covariâncias amostral e a média de ρ é

$$\bar{\rho} = \frac{2}{(N-1)N} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \rho_{ij}. \quad (4.14)$$

Define-se $\hat{\mathbf{F}}_t^{corr}$ como a matriz de correlação constante amostral considerada a matriz-alvo do estimador de encolhimento. As entradas da matriz $\hat{\mathbf{F}}_t^{corr}$ são definidas através das variâncias amostrais e médias das correlações amostrais,

$$\hat{f}_{ii}^{corr} = h_{ii} \quad \text{e} \quad \hat{f}_{ij}^{corr} = \bar{\rho} \sqrt{h_{ii}h_{jj}}. \quad (4.15)$$

O estimador de encolhimento de covariâncias com correlação constante (LW-corr) é calculado pela combinação convexa:

$$\hat{\Sigma}_t^{LW-corr} = (1 - \hat{\alpha})\hat{\Sigma}_t^A + \hat{\alpha}\hat{\mathbf{F}}_t^{corr}. \quad (4.16)$$

A escolha do parâmetro $\hat{\alpha}$ para os estimadores de encolhimento é feita através da minimização de uma função de perda quadrática utilizando a norma de Frobenius de acordo com Ledoit e Wolf (2003). Nesta dissertação, os resultados relativos aos métodos de covariâncias por encolhimento linear são especificados pelo termo LW, fazendo referência aos autores do método, sendo que mais detalhes quanto a estimação do parâmetro de encolhimento α podem ser encontrados no apêndice C.

Ledoit e Wolf (2012) implementam um estimador de encolhimento não-linear através de uma função denominada QuEST baseada em um método de inversão numérica. Neste trabalho utilizaremos os estimadores lineares como base de comparação para a dinâmica das covariâncias dos retornos dos ativos.

4.1.5 Modelo DCC-GARCH

Definimos $\mathbf{H}_t = \text{Cov}(\mathbf{r}_t | I_{t-1})$, como a matriz de covariâncias condicional, onde I_{t-1} representa a informação disponível até o período $t - 1$, e as entradas das covariâncias e variâncias de \mathbf{H}_t representamos respectivamente por $h_{ij,t} = \text{Cov}(r_{i,t}, r_{j,t} | I_{t-1})$ e $h_{ii,t} = \text{Var}(r_{i,t} | I_{t-1})$.

A dinâmica das matrizes de variâncias-covariâncias condicionais sob o modelo de correlações condicionais dinâmicas (*Dynamic Conditional Correlation - DCC*) proposto por Engle (2002) e Tse e Tsui (2002) é determinada pelas matrizes \mathbf{D}_t e \mathbf{C}_t através da expressão

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{C}_t \mathbf{D}_t, \quad (4.17)$$

onde $\mathbf{D}_t = \text{diag}(\sqrt{h_{11,t}}, \dots, \sqrt{h_{ii,t}})$ é uma matriz diagonal cujos elementos $h_{ii,t}$ são as variâncias condicionais dos retornos, sendo estas geralmente modeladas como um GARCH univariado e \mathbf{C}_t é a matriz de correlações condicionais que varia no tempo. Para garantir que \mathbf{C}_t seja positiva e inversível, Engle (2002) propõe sua estimação através de uma proxy \mathbf{Q}_t :

$$\mathbf{Q}_t = (1 - a - b)\bar{\mathbf{Q}} + a\mathbf{v}_{t-1}\mathbf{v}'_{t-1} + b\mathbf{Q}_{t-1}, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{C}_t = \text{diag}(\mathbf{Q}_t)^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{Q}_t \cdot \text{diag}(\mathbf{Q}_t)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.19)$$

onde a e b são valores escalares não negativos satisfazendo $a + b < 1$ e garantindo que \mathbf{Q}_t seja estacionária e positiva definida, \mathbf{v}_t é o vetor de resíduos padronizados com $\mathbf{v}_t = \left(\frac{r_{1,t}}{\sqrt{h_{11,t}}}, \dots, \frac{r_{n,t}}{\sqrt{h_{nn,t}}} \right)'$, e $\bar{\mathbf{Q}}$ representa a matriz de covariâncias incondicionais dos resíduos padronizados sendo estimada por $\bar{\mathbf{Q}} = 1/T \sum_{t=1}^T (\mathbf{v}_t \mathbf{v}_t')$. A variância condicional dos retornos do ativo i no período t é modelada neste trabalho de acordo com o modelo GARCH(1,1) de Bollerslev (1986):

$$\begin{aligned} r_{i,t} &= h_{ii,t} \varepsilon_{i,t}, \\ h_{ii,t} &= \omega + \alpha \varepsilon_{i,t-1}^2 + \beta h_{ii,t-1}, \\ \text{com } \omega, \alpha, \beta &\geq 0, \alpha + \beta < 1 \text{ e } \varepsilon_{i,t} \sim N(0,1). \end{aligned} \quad (4.20)$$

A estimação dos parâmetros do DCC-GARCH pode ser feita através de dois estágios. No primeiro estágio, os parâmetros do GARCH(1,1) para a variância condicional dos $i = 1, \dots, n$ ativos são estimados e em seguida são calculados os resíduos padronizados \mathbf{v}_t , enquanto no segundo estágio, os parâmetros a e b da proxy \mathbf{Q}_t são estimados por quase-verossimilhança.

4.2 ESTIMADORES DAS COVARIÂNCIAS COM DADOS INTRADIÁRIOS NÃO SINCRONIZADOS

A maior disponibilidade dos dados de alta frequência e o avanço computacional fez com que novas medidas para a volatilidade latente dos ativos fossem construídas através das cotações intradiárias. Andersen et al. (1998) adotaram empiricamente o uso dos dados de alta frequência para o cálculo de uma medida denominada variância realizada que servia como proxy para a volatilidade dos preços dos ativos. A variância realizada é definida como a soma dos quadrados dos retornos intradiários calculada em intervalos fixos. O retorno de um período intradiário pode ser definido como

$$y_{t,i} = p_{t-i/M} - p_{t-(i+1)/M} \quad \text{para } i = 1, \dots, M. \quad (4.21)$$

Nesta expressão, $p_{t-i/M}$ é a cotação intradiária i de um ativo que é registrada ao longo do dia t em intervalos regulares com uma frequência fixa predefinida e M é o número total de intervalos ao longo do dia de negociação. Por fim, a variância realizada de um ativo pode ser computada através dos retornos intradiários como

$$VR_t^{(M)} = \sum_{i=1}^M (y_{t,i})^2. \quad (4.22)$$

A variância realizada é uma medida consistente para a volatilidade dos preços de um ativo dado que os ruídos de microestrutura não observados sejam independentes do processo de formação dos preços e que os retornos intradiários não sejam autocorrelacionados. Sob estas hipóteses, quanto menor o intervalo regular adotado para o cálculo do retorno, maior o número de intervalos M , e teoricamente maior a precisão da variância realizada (BARNDORFF-NIELSEN; SHEPHARD, 2004). No entanto, com dados empíricos, na medida em que o comprimento do

intervalo entre os retornos intradiários é reduzido, existe um aumento dos ruídos de microestrutura proveniente das imperfeições no processo de negociação dos ativos financeiros e do caráter discreto dos preços levando a um maior viés na medida de variância realizada (ZHANG et al., 2005; MCALEER; MEDEIROS, 2008).

Uma solução comumente adotada para tentar minimizar o viés relacionado aos ruídos de microestrutura consiste na escolha de intervalos de tempo intradiários com uma frequência parcimoniosa, com M não muito elevado. Desta forma, procura-se explorar o *trade-off* entre a variância do estimador e o viés dos ruídos para diferentes frequências intertemporais a fim de que a medida de variância realizada continue utilizando o maior conjunto de informações disponíveis sem que os impactos dos ruídos tornem esta medida muito imprecisa. Estudos empíricos realizados por Band e Russell (2008) e Pooter et al. (2008) apontam que os intervalos intradiários entre 5 e 30 minutos garantem bons resultados na precisão dos estimadores de volatilidade.

Outra solução consiste no uso de estimadores robustos aos ruídos de microestrutura com dados de alta frequência através de diferentes metodologias próprias. Dentre alguns destes estimadores podemos enfatizar o estimador de duas escalas de tempo de Zhang et al. (2005), estimador multi-escala de Zhang (2006), kernel realizado univariado de Barndorff-Nielsen et al. (2008) e estimador de duas escalas de tempo robusto de Boudt e Zhang (2012).

O estimador kernel para a volatilidade de um ativo com dados de alta frequência foi proposto inicialmente por Zhou (1996) no estudo das séries da taxa de câmbio. A principal característica desta medida é sua estrutura semelhante à matriz de covariâncias robusta à heteroscedasticidade e autocorrelação de Newey e West (1987). Segundo Hansen e Lunde (2006), os ruídos de microestrutura geram maior autocorrelação nos retornos intradiários e esta autocorrelação é fonte de viés para a variância realizada. Desta forma, adaptações do estimador de Newey e West (1987) podem ser utilizadas no contexto de retornos intradiários. No entanto, Hansen e Lunde (2006) demonstram que o estimador kernel de Zhou (1996) é inconsistente com relação aos ruídos de microestrutura.

Barndorff-Nielsen et al. (2008) propõem o uso de um estimador kernel através de diferentes funções de peso do tipo *Flat-Top*, e Barndorff-Nielsen et al. (2009) analisam que o uso da função Parzen garante estimadores não negativos para a variância quadrática. Nesta dissertação, adotamos o estimador kernel realizado como proxy da volatilidade dos ativos através dos dados de alta frequência com as recomendações de Barndorff-Nielsen et al. (2009) e utilizamos a função kernel Parzen com intervalos fixos de 5 minutos entre as cotações intradiárias.

Para fins de notação, os períodos intradiários τ_0, \dots, τ_M são observados em um intervalo fixo e definimos as cotações neste *grid* de intervalos como X_0, \dots, X_M . Para a construção do estimador kernel realizado, o cálculo dos retornos de alta frequência é baseado no procedimento *jittering* que aplica a média local entre as primeiras e últimas observações. Seguindo as mesmas especificações de Barndorff-Nielsen et al. (2009) utilizamos as médias locais entre dois preços disponíveis. Desta forma as cotações em intervalos fixos são $X_j = X_{\tau_{j+1}}$ para $j = 1, 2, \dots, M - 1$,

e

$$X_0 = \frac{1}{2}(X_{\tau_0} + X_{\tau_1}), \quad \text{e} \quad X_M = \frac{1}{2}(X_{\tau_{M-1}} + X_{\tau_M}). \quad (4.23)$$

Os retornos intradiários entre os períodos τ_j e τ_{j-1} de um único dia de negociação são calculados a partir destas cotações como $x_j = X_j - X_{j-1}$ para $j = 1, 2, \dots, M$. Por fim, o estimador kernel realizado univariado (KR) é computado através dos retornos para cada um dos ativos

$$KR(x_j) = \sum_{h=-H}^H k\left(\frac{h}{H+1}\right) \Delta_h \quad \text{com} \quad \Delta_h = \sum_{j=|h|+1}^n x_j x_{j-h}, \quad (4.24)$$

onde Δ_h é a autocovariância com defasagem h dos retornos observados, $k(\cdot)$ é uma função de peso kernel, x_j é o retorno de alta frequência e H é a *bandwidth*.¹ A função kernel Parzen é definida por

$$k(x) = \begin{cases} 1 - 6x^2 + 6x^3 & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2(1-x)^3 & 1/2 \leq x \leq 1, \\ 0 & x > 1. \end{cases} \quad (4.25)$$

O estimador kernel realizado univariado é implementado para cada um dos ativos de nossa amostra com as cotações intradiárias. Em seguida, estas séries com as medidas de volatilidade são utilizadas na previsão da covariância de acordo com os modelos EWMA da seção 4.1.2 e DCC-GARCH da seção 4.1.5.

4.3 ESTIMADORES DAS COVARIÂNCIAS COM DADOS INTRADIÁRIOS SINCRONIZADOS

Na seção anterior, utilizamos as séries com os retornos intradiários em intervalos fixos de 5 minutos por ativo. No entanto, estimar as matrizes de covariâncias realizadas através de medidas univariadas em intervalos fixos sem a sincronização na negociação entre as ações acarreta no denominado efeito *Epps*. Epps (1979) foi um dos pioneiros a analisar a correlação entre ativos com retornos intradiários amostrados em intervalos fixos e concluiu que o aumento da frequência dos intervalos gera viés com os valores entre as correlações tendendo a zero. A explicação mais comum para este efeito é a presença de ativos com menor volume de negociação que geram retornos intradiários nulos e valores subestimados para o grau de dependência entre os ativos (BARNDORFF-NIELSEN et al., 2011).

O desenvolvimento de estimadores da covariância com dados de alta frequência tem sido tópico de extensa pesquisa nos últimos anos, sendo que os principais desafios destas medidas consistem na necessidade de maior robustez à falta de sincronização das negociações entre os diferentes ativos e na redução dos ruídos de microestrutura. Importantes contribuições na construção de medidas de covariância com dados de alta frequência foram feitas por Ait-Sahalia

¹ A melhor escolha para o *trade-off* entre viés e variância assintótica deste estimador é estudado em Barndorff-Nielsen et al. (2008). O estimador deste parâmetro é melhor detalhado em Barndorff-Nielsen et al. (2009).

et al. (2010), Christensen et al. (2010), Mancino e Sanfelici (2011), Barndorff-Nielsen et al. (2011), Peluso et al. (2015) e Lunde et al. (2016b).

Neste trabalho, adotamos o estimador Kernel Realizado Multivariado de Barndorff-Nielsen et al. (2011) que utiliza o conceito de períodos amostrados atualizados (*refresh times samples*) introduzido por Harris et al. (1995) para sincronizar as cotações intradiárias e computar os seus retornos.

Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)'$, o vetor de log preços observados em intervalos irregulares com dimensão d . Para definir o conceito de períodos atualizados, adotamos $N_t^{(i)}$ como um processo de contagem relativo ao número de negociações observadas para o ativo i no tempo t . O período atualizado é definido como o período em que todos os ativos já tiverem sido negociados ao menos uma vez. Seguindo Barndorff-Nielsen et al. (2011), definimos $\tau_1 = \max(t_1^{(1)}, \dots, t_1^{(d)})$ como o primeiro período atualizado de um determinado dia para todos os ativos da amostra. Nesta notação, $t_1^{(1)}$ representa o horário em que o ativo 1 foi negociado pela primeira vez, e desta forma, observamos que τ_1 é determinado pelo ativo que leva maior tempo para ser negociado. O próximo período de atualização τ_2 ocorre quando todas as ações tiverem sido negociadas novamente, e o procedimento é repetido até o último período de atualização do dia. A regra geral para as atualizações subsequentes pode ser definida como

$$\tau_{j+1} = \max\left(t_{N_{j+1}^{(1)}}^{(1)}, \dots, t_{N_{j+1}^{(d)}}^{(d)}\right), \quad (4.26)$$

onde $N_{\tau_j}^{(i)} + 1$ representa o processo de contagem do ativo i para o período atualizado τ_{j+1} e $t_{N_{\tau_j}^{(i)}+1}^{(i)}$ é o horário de negociação para o ativo i na atualização $j + 1$.

Barndorff-Nielsen et al. (2011) assumem que as cotações são observadas nos períodos atualizados (ou sincronizados) e são representadas por $\mathbf{X}(\tau_j)$, trata-se de uma construção utilizada para minimizar a falta de sincronia das negociações dos ativos. O procedimento *jittering* é adotado sobre os pontos iniciais e finais do vetor de preços após a sincronização. Neste procedimento \mathbf{X}_0 e \mathbf{X}_n são substituídos pela média das m observações iniciais e finais do vetor de preços sincronizados.² Seja $n, m \in \mathbb{N}$ com $n - 1 + 2m = N$, então redefinimos o vetor de preços $\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_n$ como $\mathbf{X}_j = \mathbf{X}(\tau_{\tau+m})$ para $j = 1, 2, \dots, n - 1$, e

$$\mathbf{X}_0 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{X}(\tau_j), \quad \text{e} \quad \mathbf{X}_n = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{X}(\tau_{N-m+j}). \quad (4.27)$$

O vetor com os retornos de alta frequência é definido por $\mathbf{x}_j = \mathbf{X}_{\tau_j} - \mathbf{X}_{\tau_{j-1}}$ onde $j = 1, 2, \dots, N$ e N é o número de observações atualizadas. O estimador Kernel Realizado Multivariado (KRM) é computado através do vetor com retornos de alta frequência atualizados \mathbf{x}_j

$$KRM(x) = \sum_{h=-H}^H k\left(\frac{h}{H+1}\right) \Gamma_h, \quad \text{com} \quad \Gamma_h = \sum_{j=|h|+1}^n \mathbf{x}_j \mathbf{x}'_{j-h}, \quad \text{para} \quad h \geq 0, \quad (4.28)$$

² Barndorff-Nielsen et al. (2011) adotam $m = 2$ para um conjunto de 30 ativos. Nesta dissertação utilizamos a mesma recomendação.

onde $k(\cdot)$ é a função kernel Parzen definida em (4.25), H é a *bandwidth* e Γ_h é a matriz de autocovariâncias realizada com defasagem h na qual $\Gamma_h = \Gamma'_{-h}$ para $h < 0$.

Utilizamos esta medida para as matrizes de covariâncias realizadas nos métodos LASSO-VAR e adaLASSO-VAR propostos por Callot et al. (2017).

4.3.1 Método LASSO-VAR

O modelo vetorial autoregressivo (VAR) originado do artigo seminal de Sims (1980) foi um marco para a análise empírica de modelos macroeconômicos formados por diversas variáveis que são conjuntamente determinadas, ou seja, são explicadas por suas defasagens e pelas defasagens das demais variáveis. O VAR permitiu analisar o impacto de choques estocásticos sobre o sistema de equações do modelo através de funções impulso-resposta, além de gerar previsões para as trajetórias futuras das variáveis (LUTKEPOHL, 2005).

O modelo vetor autoregressivo possui como principal adversidade na sua implementação, o elevado número de parâmetros que precisam ser estimados à medida que o número de variáveis aumenta, caracterizando um problema de alta dimensionalidade. Esta limitação empírica faz com que o uso do VAR para previsão das matrizes de covariâncias e posterior seleção de portfólios seja restrito a um baixo número de ativos por amostra (DEMIGUEL et al., 2014).

Para contornar esta dificuldade no contexto de seleção de portfólios com dados de alta frequência, Callot et al. (2017) modelam a dinâmica das entradas da matriz de covariâncias sob o contexto de alta dimensionalidade aplicando os métodos de regularização *Least Absolute Shrinkage and Selection Operator* (LASSO) de Tibshirani (1996) e *adaptive LASSO* (adaLASSO) de Zou (2006) sobre um vetor autoregressivo.

A regularização consiste em buscar o melhor ajuste de um modelo pela minimização do seu erro da seguinte forma:

$$\text{Erro do modelo} = \text{Erro dos dados} + \lambda \cdot \text{termo de penalização} \quad (4.29)$$

Na equação anterior, o erro do modelo é determinado pela soma dos resíduos quadráticos combinado por um termo de penalização e um grau de intensidade λ . Um dos primeiros métodos de regularização, consiste na regressão ridge, desenvolvida por Hoerl e Kennard (1970). As regressões ridge tem a capacidade de encolher os coeficientes impondo uma penalização na norma L2 sobre a soma dos resíduos, e desta forma estabiliza o caminho da solução da regressão linear ao introduzir um pequeno viés ao coeficiente estimado, em troca de uma menor variância, sendo uma alternativa interessante ao uso de mínimos quadrados ordinários. No entanto, a regressão ridge acaba não eliminando os coeficientes no seu problema de otimização, e portanto, não serve como técnica de seleção de variáveis e não traz uma solução para o problema de alta dimensionalidade.

O método LASSO, por outro lado, consegue no seu problema de otimização selecionar as variáveis regressoras mais relevantes ao penalizar os coeficientes até que alguns deles tenham

valor nulo, e portanto, é uma alternativa para lidar com a alta dimensionalidade. O grau de intensidade λ que regula o nível de penalização dos coeficientes para dados *cross-section* geralmente é feito por *cross-validation*. Os métodos *cross-validation* geralmente performam bem para fins de previsão, no entanto, possuem um maior esforço computacional e podem se tornar inviável no contexto de alta dimensionalidade, além de apresentarem pior performance no contexto de séries temporais como enfatizado por Kock e Callot (2015). Outra abordagem comumente utilizada é escolher λ através da minimização das estatísticas de critério de informação como o Critério de Informação de Akaike (AIC), o que torna a otimização mais rápida computacionalmente Callot et al. (2017).

No contexto de séries temporais multivariadas, Hsu et al. (2008) mostram a consistência da aplicação do método LASSO sobre modelos VAR com choques estacionários, enquanto Kock e Callot (2015) chegam a limites teóricos para a consistência da seleção feita pela otimização do LASSO sobre o modelo vetor autoregressivo gaussiano em um ambiente de alta dimensionalidade. Recentemente, a aplicação empírica em finanças para os métodos de regularização linear começam a ser mais explorados como passo intermediário para a otimização de carteiras. Neste sentido, Callot et al. (2017) propõem o uso do LASSO para a modelagem da previsão das matrizes de covariância realizada de 30 ativos do índice Dow Jones através da penalização de modelos VAR, em seguida estas matrizes são utilizadas na construção de portfólios de média-variância conseguindo resultados superiores aos métodos concorrentes.

Neste trabalho, procuramos adotar os métodos LASSO-VAR e adaLASSO-VAR para formação de portfólios constituídos por ativos da bolsa de valores brasileira a fim de verificar a existência de ganhos relevantes ao investidor que siga esta nova abordagem e possua a disponibilidade do uso de dados de alta frequência.

Callot et al. (2017) definem Σ_t como uma matriz de covariâncias realizadas dependente dos p valores mais recentes $\Sigma_{t-1}, \dots, \Sigma_{t-p}$. Desta forma, cada entrada distinta da matriz Σ_t depende de $n \left(\frac{n+1}{2}\right) p$ variáveis (mais uma constante) com n ativos. Definimos $\mathbf{z}_t = \text{vech}(\Sigma_t)$ como um vetor $n(n+1)/2 \times 1$ com as entradas únicas da matriz de covariâncias realizadas para cada dia t e assumimos que \mathbf{z}_t segue um vetor autoregressivo de ordem p :

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{v}^* + \sum_{i=1}^p \Phi_i^* \mathbf{z}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad \text{para } t = 1, \dots, T, \quad (4.30)$$

onde Φ_i^* , $i = 1, \dots, p$, são as matrizes dos parâmetros de dimensão $k \times k$ com $k = n(n+1)/2$, \mathbf{v}^* é o vetor de interceptos com dimensão $k \times 1$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ um termo de erro com média zero.

Os métodos de regularização foram adotados assumindo a hipótese de esparsidade da matriz dos coeficientes Φ_i^* . Esta hipótese, em síntese, nos diz que algumas covariâncias entre os ativos não são significativas para a previsão da entrada da matriz de covariâncias do próximo período.

Na aplicação empírica do método LASSO sobre o VAR é conveniente reescrever (4.30) na sua forma empilhada. Seja $\mathbf{Z}_t = (1, z'_{t-1}, \dots, z'_{t-p})'$, o vetor de dimensão $(kp+1) \times 1$ das variáveis exploratórias no tempo t e $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_T, \dots, \mathbf{Z}_1)'$, a matriz formada pelas $T \times (kp+1)$ covariáveis,

$\mathbf{z}_i = (z_{T,i}, \dots, z_{1,i})'$ é um vetor com $T \times 1$ observações, na qual $i = 1, \dots, k$ e $\mathbf{e}_i = (\varepsilon_{T,i}, \dots, \varepsilon_{1,i})'$ é o respectivo vetor de erros. Por fim, $\boldsymbol{\gamma}_i^* = (\mathbf{v}_i^*, \boldsymbol{\beta}_i^{*'})'$ é o vetor de parâmetros de cada equação i com dimensão $(kp + 1)$. A forma empilhada para as covariâncias de cada entrada da matriz $\boldsymbol{\Sigma}_t$ pode ser expressa como

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma}_i^* + \mathbf{e}_i \quad \text{para } i = 1, \dots, k. \quad (4.31)$$

Na otimização do LASSO, o vetor de interceptos \mathbf{v} em (4.30) não é considerado esparsos, e portanto, o LASSO não penaliza os interceptos. A hipótese de esparsidade é feita somente sobre os valores de $\boldsymbol{\beta}_i^*$, de tal forma que para cada $i = 1, \dots, k$, $s_i = |\{j : \boldsymbol{\beta}_{i,j}^* \neq 0\}|$ é o número de coeficientes distintos de zero de $\boldsymbol{\beta}_i^*$ por equação.

Os valores de $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_i^*$ são obtidos através da resolução do seguinte problema de minimização com respeito a $\boldsymbol{\gamma}_i$:

$$\arg \min_{\boldsymbol{\beta}_i} \frac{1}{T} \|\mathbf{z}_i - \mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma}_i\|^2 + 2\lambda_T \|\boldsymbol{\beta}_i\|_{L_1}, \quad (4.32)$$

onde $\|z\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m z_i^2}$ é a norma euclideana e $\|z\|_{L_1} = \sum_{i=1}^m |z_i|$ representa a norma L_1 . O primeiro termo na função objetivo de (4.32) representa a soma dos quadrados dos resíduos de cada equação e o segundo termo é definido como a função de penalização que aplica a norma L_1 sobre os coeficientes $\boldsymbol{\beta}_i$. λ_T é uma sequência que representa os parâmetros de encolhimento podendo ser escolhida pelo método *cross-validation* ou usando a minimização de uma função de critério de informação.

A solução $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_i^*$ do problema (4.32) é definida neste trabalho através da minimização do Critério de Informação Bayesiano (BIC) para cada equação e parâmetro de encolhimento λ_T da mesma forma que no trabalho original,

$$\text{BIC}_i(\lambda_T) = T \times \log(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_{\lambda,i} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,i}) + \sum_{j=1}^{kp} \mathbb{1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ij}^\lambda \neq 0) \times \log(T), \quad (4.33)$$

onde $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\lambda,i}$ é o vetor de resíduos e $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ij}^\lambda$ é o vetor de coeficientes ambos estimados de acordo com o λ_T correspondente.

Os resultados teóricos referentes à um limite máximo para o erro de previsão da matriz de covariância do método LASSO aplicado sobre o VAR são importantes pois determinam a precisão na seleção dos pesos ótimos do portfólio de mínima variância. O limite superior para $\|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{T+1} - \boldsymbol{\Sigma}_{T+1}\|_\infty$ conjuntamente com a imposição da restrição para a proporção de vendas no portfólio estabelece um limite superior para o erro de previsão da variância da carteira de acordo com os autores.

Seja $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, o conjunto de pesos do portfólio, $\boldsymbol{\sigma}_{T+1}^2 = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}_{T+1}\mathbf{w}$, a variância condicional verdadeira do portfólio e $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{T+1}^2 = \mathbf{w}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{T+1}\mathbf{w}$, a previsão da variância condicional do portfólio. Callot et al. (2017) assumem que $\|\mathbf{w}\|_{L_1} \leq (1+c)$ para algum $c \geq 0$, com c indicando a proporção de vendas permitidas no portfólio, sendo que $c = 0$ é a carteira com restrição à vendas de ativos (*long only*). A construção do limite superior para o erro de previsão da variância do portfólio é estabelecida através de dois teoremas.

Teorema 1 (Callot et al., 2017). *Supondo que $\|w\|_{L_1} \leq (1+c)$, para algum $c \geq 0$. Então:*

$$|\hat{\sigma}_{T+1}^2 - \sigma_{T+1}^2| \leq \|\hat{\Sigma}_{T+1} - \Sigma_{T+1}\|_{\infty} (1+c)^2. \quad (4.34)$$

O Teorema 1 nos mostra que a presença de uma restrição sobre as vendas do portfólio implica em um limite superior para o erro de previsão da variância do portfólio. Para garantir que $\|\hat{\Sigma}_{T+1} - \Sigma_{T+1}\|_{\infty}$ tenha um limite superior baseado no método LASSO aplicado sobre o VAR algumas definições e condições adicionais são necessárias. Sejam m_i e $\eta_{i,z}^2$, as médias e variâncias de $z_{t,i}$ respectivamente e $\eta_{i,\varepsilon}^2$, a variância do termo de erro $\varepsilon_{t,i}$ para cada $i = 1, \dots, k$ equação. Definimos também $m_T = \max_{1 \leq i \leq k} |m_i|$, $\eta_T = \max_{1 \leq i \leq k} (\eta_{i,y} \vee \eta_{i,\varepsilon})$ e $\bar{s} = \max(s_1, \dots, s_k)$, na qual \bar{s} representa o número máximo de coeficientes diferentes de zero para qualquer equação do VAR.

Teorema 2 (Callot et al., 2017). *Seja $\lambda_T = \sqrt{8 \ln(1+T)^5 \ln(1+k)^4 \ln(1+p)^2 \ln(k^2 p) K_T^2 / T}$, na qual K_T , m_T e η_T^2 são limitadas. Sobre as condições de regularidade do apêndice de Callot et al. (2017) para todo $0 < q < 1$:*

$$\|\hat{\Sigma}_{T+1} - \Sigma_{T+1}\|_{\infty} \leq \sqrt{\tilde{K}_T} \left(\frac{16}{q\kappa^2} \bar{s} \lambda_T + 1 \right), \quad (4.35)$$

$$\text{com } \tilde{K}_T = \frac{\eta_T^2 (9m_T^2 + \ln(kp+1) \ln(T))}{\eta_T^2 \vee \frac{1}{6}} \text{ e } K_T = \frac{\eta_T^2 (1 + 4 \exp(9m_T^2))}{\eta_T^2 \vee \frac{1}{6}}.$$

O Teorema 2 fornece um limite superior para o erro de previsão de $\hat{\Sigma}_{T+1}$ válido para amostras finitas. Os autores também enfatizam que para qualquer dimensão da matriz de covariâncias, o teorema impõe um limite superior para o erro de previsão do método LASSO. O valor da constante $\kappa > 0$ é proveniente da definição de condição de autovalores restritos detalhado em Kock e Callot (2015).

Corolário 1 (Callot et al., 2017). *Sob as hipóteses dos teoremas 1 e 2:*

$$|\hat{\sigma}_{T+1}^2 - \sigma_{T+1}^2| \leq \sqrt{\tilde{K}_T} \left(\frac{16}{q\kappa^2} \bar{s} \lambda_T + 1 \right) (1+c)^2. \quad (4.36)$$

O corolário fornece um limite máximo para o erro de previsão da variância condicional do portfólio. O portfólio de mínima variância com restrição à vendas (*long only*) adotado nesta dissertação é um caso específico na qual

$$|\hat{\sigma}_{T+1}^2 - \sigma_{T+1}^2| \leq \sqrt{\tilde{K}_T} \left(\frac{16}{q\kappa^2} \bar{s} \lambda_T + 1 \right). \quad (4.37)$$

Corolário 2 (Callot et al., 2017). *Sob as hipóteses dos teoremas 1 e 2:*

$$\sup_{w \in \mathbb{R}^n: \|w\|_{L_1} \leq 1+c} |\hat{\sigma}_{T+1}^2 - \sigma_{T+1}^2| \leq \sqrt{\tilde{K}_T} \left(\frac{16}{q\kappa^2} \bar{s} \lambda_T + 1 \right) (1+c)^2. \quad (4.38)$$

com alta probabilidade e \tilde{K}_T do teorema 2.

Este corolário demonstra que a previsão da variância do portfólio não é tão distante da previsão da variância do portfólio verdadeiro quando utilizamos os pesos \hat{w} que minimizam o erro de previsão fora da amostra. Portanto, o uso do LASSO nesta metodologia garante que tanto a variância do portfólio quanto os pesos estimados estejam próximos aos seus respectivos valores verdadeiros.

4.3.2 Método adaLASSO-VAR

Além do LASSO aplicado sobre o VAR, também utilizamos o método *adaptive LASSO* (adaLASSO) de Zou (2006). O método adaLASSO é estimado em dois passos. No primeiro passo, $J(\hat{\beta}_i) = \{j \in \mathbb{R}^{kp} : \hat{\beta}_{i,j} \neq 0\}$ representa os índices dos coeficientes diferentes de zero na equação i selecionados através do método LASSO e $\tilde{J}_{i(\hat{\gamma}_i)} = \{1\} \cup (J_i(\hat{\beta}_i) + 1)$ é a união dos conjuntos elemento a elemento entre os índices dos coeficientes selecionados no primeiro passo adicionado os interceptos. Já no segundo passo, o adaLASSO adaptado ao VAR resolve o seguinte problema de otimização:

$$\arg \min_{\beta_i} \frac{1}{T} \|\mathbf{z}_i - \mathbf{Z}_{\tilde{J}(\hat{\gamma}_i)} \hat{\gamma}_{i,\tilde{J}(\hat{\gamma}_i)}\|^2 + 2\lambda_T \sum_{j \in J(\hat{\beta}_i)} \frac{|\beta_{i,j}|}{|\hat{\beta}_{i,j}|}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (4.39)$$

Portanto, se o método LASSO classifica um coeficiente como igual a zero no primeiro passo, este mesmo coeficiente não é incluído no segundo estágio da otimização do adaLASSO. As previsões do LASSO-VAR e adaLASSO-VAR um passo à frente são feitas da mesma forma que no VAR. Depois de determinado $\hat{\gamma}_i$ para cada equação, as entradas da matriz $\hat{\Sigma}_{T+1}$ são definidas por

$$\hat{\mathbf{z}}_{i,T+1|T} = \hat{\gamma}_i' \mathbf{Z}_T \quad \text{para } i = 1, \dots, k. \quad (4.40)$$

Callot et al. (2017) adotam duas abordagens distintas para garantir que a matriz $\hat{\Sigma}_{T+1}$ seja positiva semi-definida e possa ser utilizada na seleção de portfólios. A primeira abordagem segue procedimento semelhante ao aplicado por Hautsch et al. (2012) através da limpeza de autovalores da matriz de covariâncias para cada matriz $\hat{\Sigma}_{T+1}$ que possuir autovalores negativos ou com valores maiores que $10 \times n$ com n sendo o número de ativos e a segunda abordagem aplica a transformação logarítmica de acordo com Chiu et al. (1996).

Na primeira abordagem, para cada previsão da matriz de covariâncias que não seja positiva semi-definida, escrevemos a decomposição espectral de $\hat{\Sigma}_{T+1}$ como $\hat{\Sigma}_{T+1} = \hat{\mathbf{V}}_{T+1}' \hat{\Lambda}_{T+1} \hat{\mathbf{V}}_{T+1}$, na qual $\hat{\mathbf{V}}_{T+1}$ é a matriz formada pelos autovetores e $\hat{\Lambda}_{T+1}$ é uma matriz diagonal contendo os n autovalores $\hat{\lambda}_{iT+1}$. Defina $\hat{\lambda}_{mpT+1}$, como o menor autovalor maior que zero na previsão de matriz de covariâncias tal qual $\hat{\lambda}_{mpT+1} = \min\{\hat{\lambda}_{iT+1} | \hat{\lambda}_{iT+1} > 0\}$, trocam-se todos os autovalores na qual $\hat{\lambda}_{iT+1} < \hat{\lambda}_{mpT+1}$ por $\tilde{\lambda}_{mpT+1}$ para formar a nova matriz diagonal de autovalores $\tilde{\Lambda}_{T+1}$, e portanto, a nova decomposição espectral $\tilde{\Sigma}_{T+1} = \hat{\mathbf{V}}_{T+1}' \tilde{\Lambda}_{T+1} \hat{\mathbf{V}}_{T+1}$ é positiva definida por construção.

Na segunda abordagem, aplica-se inicialmente a transformação logarítmica, $\mathbf{\Omega}_t = \log(\mathbf{\Sigma}_t)$, e estima-se o VAR através da variável $\bar{\Sigma}_t = \text{vech}(\mathbf{\Omega}_t)$ com a previsão um passo à frente denotada

por $\hat{\Omega}_{T+1}$. Em seguida, o primeiro procedimento é revertido com $\hat{\Sigma}_{T+1} = \exp(\hat{\Omega}_{T+1})$ para construirmos a matriz de previsão de covariâncias positiva adequada à otimização de portfólios.

Em nossas aplicações utilizamos os métodos LASSO e adaLASSO sobre um modelo VAR(1) utilizando a medida de covariância Kernel Realizado Multivariado para dados de alta frequência do mercado de capitais brasileiro.

5 APLICAÇÃO EMPÍRICA AO MERCADO BRASILEIRO

Neste capítulo será descrita a base de dados utilizada para o exercício de otimização de portfólios por mínima variância, as estatísticas de performance para a análise das estratégias adotadas e os resultados finais.

5.1 DADOS

Nossa amostra contempla 30 ativos da B3, antiga BM&FBovespa, no período entre 02/01/2013 e 31/07/2019 com 1614 dias de negociação. A escolha dos ativos é feita através de um filtro com valor mínimo de 150 negociações intradiárias por ativo. Esta filtragem é necessária para a aplicação do método *refresh time* demonstrado na seção 4.3, sendo que as estatísticas quanto ao número de negociações diárias por ativo estão na tabela A.1 do apêndice. As 30 empresas, todas constituintes do índice IBOVESPA, estão descritas na tabela A.3.

Os retornos diários foram computados através das cotações de fechamento (*close-to-close prices*) ajustadas para eventos corporativos de acordo com a metodologia do *software* Economática. As estatísticas descritivas dos log-retornos diários estão na tabela A.2 do apêndice.

Os dados de alta frequência do estudo são representados pelo conjunto de todas as transações diárias por ativo (*tick-by-tick data*). Estes dados mereceram atenção especial sendo excluídas as observações fora do horário de negociação normal da B3, negociações canceladas e duplicadas com o auxílio do pacote “*GetHFData*”¹ para o *software* R. Em seguida, estas cotações intradiárias foram ajustadas para eventos corporativos como desdobramentos, agrupamentos e distribuições de lucros de acordo com a metodologia empregada no *software* Economática a fim de evitar distorções no cálculo das medidas de variâncias e covariâncias realizadas.²

O cálculo da medida *Kernel Realizado* da seção 4.2 foi feito para cada uma das 30 séries com cotações intradiárias ajustadas em intervalos de tempo de 5 minutos. Na estimativa da medida das matrizes de covariâncias realizadas com transações sincronizadas da seção 4.3, as séries foram sincronizadas através da abordagem *refresh time* e, posteriormente, fora aplicado o estimador de covariâncias *Kernel Realizado Multivariado*. Para a implementação das medidas de volatilidade e estimação dos métodos EWMA e DCC-GARCH fora utilizado a *toolbox* do *software* MATLAB de Kevin Sheppard³.

As estimativas das matrizes de covariâncias com encolhimento linear e análise de fatores com retornos diários da seção 4.1 foram implementadas através do pacote “*RiskPortfolios*” de Ardía et al. (2017) para o *software* R. Os métodos LASSO-VAR e adaLASSO-VAR foram

¹ As cotações intradiárias dos ativos negociados na B3 eram disponibilizados até dezembro de 2018 no endereço do ftp da B3: <ftp://ftp.bmf.com.br> de Perlin e Ramos (2016). No entanto, após esta data os dados precisaram ser adquiridos diretamente da B3.

² A metodologia adotada para o ajuste dos eventos corporativos pode ser encontrada no endereço: <https://economica.com/support/manual/portugues/manual.htm#Proventos/Caracteristicas.htm>

³ A *toolbox* está disponibilizada em: <https://www.kevinsheppard.com/code/matlab/mfe-toolbox/>

calculados através das funções do pacote “*lassovar*” disponibilizado por Callot (2015) e a análise dos portfólios utilizou funções do pacote “*PerformanceAnalytics*” de Peterson e Carl (2020).

5.2 EXERCÍCIO EMPÍRICO

A previsão das matrizes de covariâncias condicionais é feita dividindo a amostra completa em dois grupos. Para a otimização com rebalanceamento diário, o grupo dentro da amostra possui 982 observações compreendendo o período entre 02/01/2013 até 28/12/2016 e o grupo fora da amostra possui 632 observações no período entre 02/01/2017 até 31/07/2019.

Nesta dissertação, os pesos ótimos dos portfólios são calculados através de uma estratégia de estimação recursiva das matrizes de covariâncias baseadas em uma janela móvel. Neste procedimento, o conjunto dentro da amostra é utilizado para a estimação da previsão um passo à frente das matrizes de covariâncias $\hat{\Sigma}_{t+1}$ de acordo com as metodologias do capítulo 4. Em seguida, estas matrizes são adotadas no cálculo dos pesos ótimos do problema de seleção de portfólios por mínima variância. No próximo período, adicionamos uma nova observação e excluimos a mais antiga e re-estimamos os modelos previsão da matriz de covariâncias novamente através de uma janela móvel com tamanho fixo, este processo é repetido até que a observação final da amostra completa seja atingida.

Além dos modelos propostos no trabalho, a carteira ingênua, na qual todos os ativos do portfólio recebem a mesma ponderação, também foi implementada. Esta estratégia de alocação geralmente apresenta bons resultados com relação ao retorno acumulado, apesar do maior risco envolvido decorrente da falta de um método para otimização dos pesos dos ativos (DEMIGUEL; GARLAPPI, 2009).

As medidas realizadas foram agregadas semanalmente e mensalmente para a otimização dos portfólios com rebalanceamento semanal e mensal. Para a análise da performance, define-se T , como o número de observações totais, h , o número de observações dentro da amostra e $t = T - h$, o número de previsões fora da amostra. Os retornos de cada portfólio para o período $t + 1$ baseado nos 30 ativos é definido como

$$r_{t+1}^p = w_t' r_{t+1}, \quad (5.1)$$

onde w_t é o vetor com os pesos ótimos do período t e R_{t+1} é o vetor de retornos correspondente ao período $t + 1$. A seguir são definidas as estatísticas utilizadas para análise de performance dos portfólios.

a) Retorno médio

$$\bar{\mu}^p = \frac{1}{T - h - 1} \sum_{t=h+1}^T r_{t+1}^p \quad (5.2)$$

b) Retorno médio anualizado

$$\hat{\mu}_{anual}^p = \bar{\mu}^p \times 252, \quad (5.3)$$

onde $\bar{\mu}^p$ é o retorno médio do portfólio.

c) Desvio padrão anualizado

$$\hat{\sigma}_{anual}^p = \sqrt{\frac{1}{T-h-1} \sum_{t=h+1}^T (r_{t+1}^p - \bar{\mu}^p)^2} \times \sqrt{252}, \quad (5.4)$$

onde $\bar{\mu}^p$ é o retorno médio do portfólio.

d) Índice de sharpe anualizado

O índice de sharpe proposto por Sharpe (1963) mensura a relação entre risco e retorno de um portfólio com

$$IS = \frac{\hat{\mu}_{anual}^p}{\hat{\sigma}_{anual}^p}. \quad (5.5)$$

Para testar a significância estatística entre o índice de sharpe de cada portfólio e o índice *benchmark* utilizamos a metodologia de Ledoit e Wolf (2008) através da aplicação do método bootstrap por bloco circular com distribuição t-Student seguindo Ferreira e Santos (2017).

O *bootstrap* é aplicado com 1.000 reamostragens e 5 pares de índices de sharpe para cada bloco, sendo que os p-valores obtidos serviram para testar a hipótese nula de mesmo valor entre o índice de sharpe do portfólio e o índice de sharpe dos retornos do *benchmark*, na qual adotamos o IBOVESPA.

e) Retorno acumulado

$$\hat{\mu}_{acum}^p = \prod_{t=h+1}^T (1 + r_{t+1}^p). \quad (5.6)$$

Demonstra o retorno de uma unidade monetária investida ao longo de todo o período fora da amostra.

f) Máximo drawdown

O máximo drawdown reflete a maior perda ocorrida desde um ponto de alta (pico) até um ponto mínimo (vale) da série de retornos do portfólio.

$$MD = \frac{(\text{Valor no pico} - \text{Valor no vale})}{\text{Valor no vale}} \quad (5.7)$$

g) Valor em risco (VaR)

Dado um certo nível de confiança $\alpha \in (0, 1)$, o VaR de um portfólio no intervalo de confiança α é dado pelo menor número l , tal qual a probabilidade da perda L exceder l não é maior do que $(1 - \alpha)$. Neste caso, considerando $F_L(l)$ como uma distribuição de perda, o VaR pode ser definido formalmente como

$$VaR_{\alpha}(L) = \min\{l \in \mathbb{R} | F_L(l) \geq \alpha\} \text{ para } \alpha \in]0, 1[. \quad (5.8)$$

O VaR pode ser entendido também como a perda máxima potencial de um investimento no horizonte de tempo dado um nível de probabilidade pré-definido α (BOUDT et al., 2008). Na estimação do VaR necessitamos da média dos retornos ($\bar{\mu}^p$), distribuição dos retornos do portfólio e a variância dos retornos (σ). Sob a hipótese de normalidade na distribuição dos retornos do portfólio, a estimativa do VaR para determinado nível de confiança α é calculada por

$$VaR_\alpha = -\bar{\mu}^p - \sqrt{\sigma} \cdot z_\alpha, \quad (5.9)$$

onde z_α é o quantil do intervalo α da distribuição normal. Nesta dissertação, adotamos o VaR modificado através da expansão de Cornish-Fisher, que apresenta maior robustez para retornos que não seguem a distribuição normal através de correções do coeficiente de assimetria e do excesso de curtose.

Seguindo Favre e Galeano (2002), a expansão de Cornish-Fisher é adotada no cálculo do VaR_{cf} como

$$z_{cf} = z_\alpha + \frac{(z_\alpha^2 - 1)S}{6} + \frac{(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)K}{24} - \frac{(z_\alpha^3 - 5z_\alpha)S^2}{36}, \quad (5.10)$$

$$VaR_{cf} = -\bar{\mu}^p - \sqrt{\sigma} \cdot z_{cf}, \quad (5.11)$$

onde S é o coeficiente de assimetria e K é o excesso de curtose com relação à distribuição normal. Adotamos $\alpha = 0.95$ em nossa análise de performance para os retornos de cada portfólio.

h) Turnover médio

O turnover pode ser interpretado como a quantidade de riqueza realocada no portfólio entre dois períodos consecutivos:

$$turnover_t = \sum_{i=1}^n (|w_{i,t+1} - w_{i,t}|), \quad (5.12)$$

onde w_{t+1} é o vetor de peso desejado dos ativos no período $t + 1$ e w_t é o peso dos ativos para o período t antes do rebalanceamento desejado.

O turnover médio representa a fração média da quantidade de riqueza realocada no portfólio para todo o período de análise:

$$TO = \frac{1}{T - h - 1} \sum_{t=h}^{T-1} \sum_{i=1}^n (|w_{i,t+1} - w_{i,t}|). \quad (5.13)$$

A série dos retornos líquidos é calculada da mesma forma que em Thornton e Valente (2012), na qual se define um custo fixo c representando o custo com emolumentos e outras taxas de negociação de mercado. Os retornos líquidos são calculados de acordo com a expressão

$$r_{t+1}^{p,liq} = (1 - c \cdot turnover_t) (1 + r_{t+1}^p) - 1. \quad (5.14)$$

São considerados três cenários distintos: nenhum custo de transação, 15 pontos-base e 25 pontos-base. Em cada um destes cenários comparamos as estatísticas de performance para os retornos líquidos de cada portfólio.

5.3 RESULTADOS

Nesta seção, primeiramente é feita a análise de performance dos portfólios construídos através da carteira de mínima variância com rebalanceamento diário, semanal e mensal; em um segundo momento, é aplicada a restrição na alocação máxima para cada ativo, também conhecida como restrição *box*, e por fim, será analisado o impacto dos custos de transação gerado pelo *turnover* de cada portfólio.

A análise de performance foi feita de acordo com as estatísticas retorno médio, retorno médio anualizado, desvio padrão anualizado, índice de sharpe anualizado, retorno acumulado, máximo *drawdown*, valor em risco (VaR) e turnover médio. Todas as carteiras que utilizaram dados de alta frequência receberam a nomenclatura “intra” fazendo referência ao uso das cotações intradiárias; e os métodos LASSO-VAR e adaLASSO-VAR foram nomeados como LASSO e adaLASSO, sendo que designamos com o termo “logm” quando foi aplicada a transformação logarítmica.

O índice IBOVESPA apresentou retorno anualizado de 9.30% e retorno acumulado de 24.94% no período entre 02/01/2017 e 31/07/2019. Com relação às estatísticas de risco, o desvio padrão anualizado foi de 8.87%, valor em risco (VaR) de -0.924%, máximo *drawdown* de 9.52% e índice de sharpe anualizado de 1.047.

5.3.1 Carteira de mínima variância global

A tabela 1 demonstra os resultados das estatísticas de performance para as carteiras de mínima variância com restrição de vendas e aplicação de todo o capital pelo investidor.

Tabela 1 – Carteiras de mínima variância global com restrição de vendas.

(continua)								
Modelo	$\bar{\mu}^p$	$\hat{\mu}_{anual}^p$	$\hat{\sigma}_{anual}^p$	IS	$\hat{\mu}_{acum}^p$	MD	VaR	TO
<i>Rebalanceamento Diário</i>								
Ingênua	0.041%	10.41%	8.19%	1.272	27.12%	9.39%	-0.851%	0.56%
Amostrai	0.032%	8.04%	6.36%	1.264	20.88%	7.32%	-0.613%	1.42%
EWMA	0.042%	10.91%	6.69%	1.631	27.50%	6.08%	-0.675%	15.73%
LW-corr	0.031%	7.89%	6.35%	1.242	20.54%	7.52%	-0.613%	0.89%
LW-Fator	0.031%	8.02%	6.36%	1.261	20.83%	7.36%	-0.613%	0.92%
LW-I	0.032%	8.04%	6.35%	1.265	20.88%	7.34%	-0.613%	0.91%
DCC-GARCH	0.039%	10.17%	6.02%	1.690	25.72%	4.79%	-0.594%	12.32%
K-Fator ($K = 1$)	0.032%	8.04%	6.41%	1.254	20.87%	7.24%	-0.614%	0.70%
K-Fator ($K = 3$)	0.032%	8.29%	6.40%	1.295	21.47%	7.08%	-0.617%	0.97%
EWMA intra	0.057%	15.00%	8.78%	1.708	36.98%	10.20%	-0.349%	11.67%
DCC-GARCH intra	0.041%	10.60%	7.21%	1.471	26.89%	8.53%	-0.740%	5.30%
LASSO intra	0.038%	9.84%	6.58%	1.496	25.06%	8.58%	-0.664%	32.12%
LASSO-logm intra	0.037%	9.66%	6.54%	1.476	24.63%	7.68%	-0.640%	29.93%
adaLASSO intra	0.036%	9.31%	6.65%	1.401	23.86%	7.72%	-0.681%	34.12%
adaLASSO-logm intra	0.037%	9.56%	6.72%	1.423	24.45%	7.06%	-0.690%	27.68%
<i>Rebalanceamento Semanal</i>								
Ingênua	0.041%	10.32%	8.18%	1.26	26.88%	9.43%	-0.851%	0.25%

Tabela 1 - Carteiras de mínima-variância global com restrição de vendas.

(conclusão)								
Modelo	$\bar{\mu}^P$	$\hat{\mu}_{anual}^P$	$\hat{\sigma}_{anual}^P$	IS	$\hat{\mu}_{acum}^P$	MD	VaR	TO
Amostrai	0.031%	7.99%	6.35%	1.257	20.75%	7.41%	-0.613%	0.86%
EWMA	0.042%	11.03%	6.59%	1.674	27.75%	5.98%	-0.662%	8.70%
LW-corr	0.031%	7.90%	6.35%	1.244	20.54%	7.54%	-0.613%	0.78%
LW-Fator	0.031%	8.02%	6.35%	1.262	20.83%	7.38%	-0.613%	0.79%
LW-I	0.032%	8.04%	6.35%	1.266	20.88%	7.37%	-0.613%	0.79%
DCC-GARCH	0.040%	10.51%	6.03%	1.743	26.49%	4.81%	-0.593%	6.18%
K-Fator ($K = 1$)	0.032%	8.06%	6.41%	1.257	20.92%	7.22%	-0.614%	0.68%
K-Fator ($K = 3$)	0.032%	8.26%	6.40%	1.292	21.40%	7.11%	-0.617%	0.81%
EWMA intra	0.063%	16.65%	9.01%	1.848	40.59%	9.62%	-0.388%	7.22%
DCC-GARCH intra	0.040%	10.45%	7.18%	1.455	26.55%	8.57%	-0.739%	3.10%
LASSO intra	0.035%	9.00%	6.55%	1.373	23.11%	9.16%	-0.649%	7.09%
LASSO-logm intra	0.033%	8.57%	6.49%	1.320	22.11%	8.81%	-0.631%	7.41%
adaLASSO intra	0.037%	9.61%	6.58%	1.460	24.53%	7.81%	-0.668%	7.86%
adaLASSO-logm intra	0.036%	9.17%	6.60%	1.389	23.51%	7.68%	-0.665%	7.09%
<i>Rebalanceamento Mensal</i>								
Ingênua	0.041%	10.29%	8.18%	1.257	26.80%	9.47%	-0.850%	0.11%
Amostrai	0.031%	7.93%	6.37%	1.245	20.63%	7.53%	-0.614%	0.69%
EWMA	0.043%	11.31%	6.66%	1.699	28.40%	6.83%	-0.640%	4.11%
LW-corr	0.031%	7.79%	6.36%	1.224	20.30%	7.71%	-0.614%	0.67%
LW-Fator	0.031%	7.92%	6.37%	1.244	20.61%	7.54%	-0.614%	0.68%
LW-I	0.031%	7.95%	6.36%	1.248	20.66%	7.52%	-0.614%	0.68%
DCC-GARCH	0.034%	8.87%	6.08%	1.457	22.75%	5.32%	-0.600%	2.63%
K-Fator ($K = 1$)	0.031%	7.96%	6.42%	1.240	20.71%	7.30%	-0.614%	0.63%
K-Fator ($K = 3$)	0.032%	8.13%	6.41%	1.269	21.10%	7.23%	-0.619%	0.70%
EWMA intra	0.057%	14.92%	8.79%	1.697	36.81%	10.42%	-0.743%	4.17%
DCC-GARCH intra	0.039%	10.09%	7.19%	1.404	25.73%	8.42%	-0.746%	1.58%
LASSO intra	0.034%	8.63%	6.59%	1.309	22.27%	11.06%	-0.661%	2.07%
LASSO-logm intra	0.034%	8.81%	6.54%	1.347	22.69%	10.16%	-0.631%	2.17%
adaLASSO intra	0.036%	9.37%	6.63%	1.414	24.00%	7.74%	-0.669%	2.43%
adaLASSO-logm intra	0.036%	9.37%	6.65%	1.408	23.99%	8.61%	-0.671%	2.15%

Fonte: Elaboração do autor.

Nota: A tabela apresenta a performance das carteiras de mínima variância global dos portfólios com $0 < w_{i,t} < 1$ para o período entre 02/01/2017 até 31/07/2019. As linhas referem-se aos estimadores da matriz de covariância do capítulo 4, além da carteira ingênua. A expressão “intra” corresponde ao uso de cotações intradiárias e “logm” indica a aplicação da transformação logarítmica. As colunas representam as estatísticas de performance para cada portfólio: média dos retornos ($\bar{\mu}^P$), média dos retornos anualizado ($\hat{\mu}_{anual}^P$), desvio padrão anualizado ($\hat{\sigma}_{anual}^P$), índice de sharpe (IS), retornos acumulados ($\hat{\mu}_{acum}^P$), máximo drawdown (MD), valor em risco (VaR) e turnover médio (TO). Os custos de transação são considerados nulos.

A minimização do risco é o principal objetivo nesta estratégia de seleção de portfólios e neste quesito, o DCC-GARCH com o uso de cotações diárias sincronizadas apresentou melhor resultado com o desvio padrão anualizado de 6.02%. Os métodos do tipo LASSO com cotações intradiárias e sincronização entre as negociações dos ativos propostos neste trabalho tiveram piores resultados com desvio padrão anualizado no intervalo entre 6.58% e 6.72%.

O retorno da carteira possui importância fundamental do ponto de vista econômico para o investidor. O modelo EWMA com dados intradiários apresentou melhores resultados nas frequências de rebalanceamento diária e semanal em termos do retorno médio e retorno anualizado. Os métodos LASSO e adaLASSO tiveram retorno anualizado entre 9.30% e 9.90% para a frequência de rebalanceamento diária. No que diz respeito ao retorno acumulado, a

carteira com o modelo EWMA apresentou o melhor resultado em todas as frequências de rebalanceamento com ganho 10% maior na média do que os portfólios construídos com os métodos LASSO e adaLASSO.

A carteira EWMA com uso de cotações intradiárias apresentou a melhor performance para as frequências de rebalanceamento diário e semanal com relação ao índice de sharpe anualizado. Já na frequência mensal, o método adaLASSO com a regularização de Hautsch et al. (2012) apresentou pior resultado na comparação com os outros métodos LASSO. Nenhum dos portfólios implementados obteve um índice de sharpe estatisticamente distinto dos retornos do IBOVESPA de acordo com o teste de Ledoit e Wolf (2008).

A menor perda de acordo com o máximo *drawdown* ocorreu com o modelo DCC-GARCH e frequência de rebalanceamento diário e semanal, enquanto o pior desempenho foi da carteira EWMA com uso de cotações intradiárias para as frequências de rebalanceamento diária e semanal. Os métodos LASSO e adaLASSO alvo deste estudo tiveram piores desempenho na frequência de rebalanceamento mensal.

Na estatística de valor em risco (VaR), os melhores resultados nos rebalanceamentos diário e semanal foram do modelo EWMA com dados de alta frequência e DCC-GARCH com uso das cotações de fechamento. Por outro lado, a carteira igualmente ponderada apresentou os piores resultados nesta estatística para todas as frequências de rebalanceamento adotadas. No geral, os métodos LASSO e adaLASSO exibiram resultados inferiores aos métodos de encolhimento lineares (LW) e superiores à carteira com a estratégia ingênua de alocação.

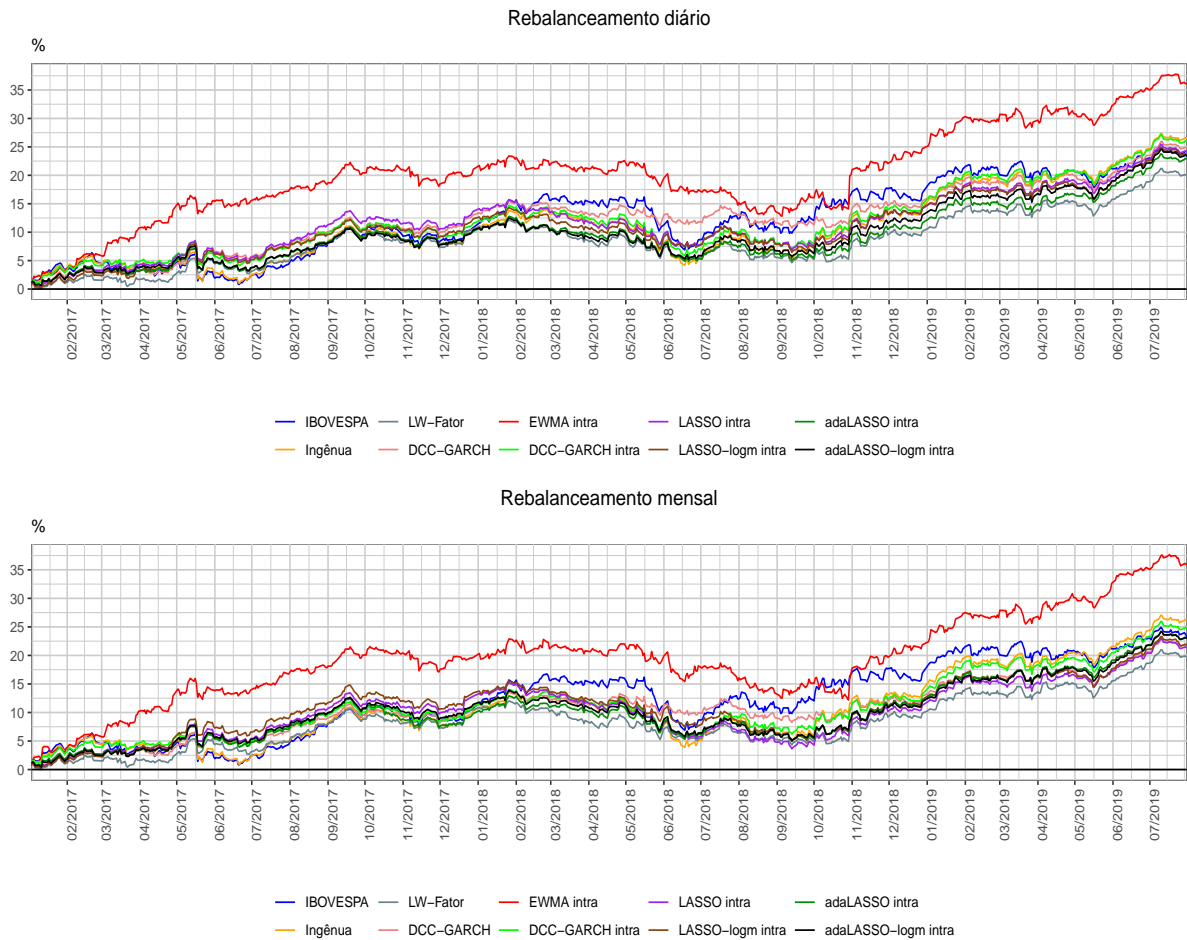
As abordagens que usaram os dados de alta frequência para a covariância tiveram uma pior performance com um maior turnover médio na comparação com os portfólios que adotaram os retornos com cotações diárias, com exceção para o modelo EWMA e DCC-GARCH com uso de cotações com fechamento diário que também apresentaram um elevado turnover.

Uma boa estratégia de investimento deve ser resiliente ao longo do tempo gerando um crescimento do retorno acumulado do portfólio com menor volatilidade possível para horizontes de longo prazo. O gráfico 1 demonstra os retornos acumulados com rebalanceamento diário para o período fora da amostra. Nas estratégias com dados de alta frequência, selecionamos as carteiras do tipo LASSO e adaLASSO, EWMA intra e DCC-GARCH intra; já com relação ao uso de cotações diárias estão representadas a carteira ingênua, EWMA, DCC-GARCH, modelo de encolhimento linear LW com um único fator de mercado, além do benchmark representado pelos retornos do índice IBOVESPA.

No gráfico 1 podemos observar que o modelo EWMA com uso de cotações intradiárias teve retornos maiores ao longo de todo o período na comparação com os demais métodos empregados, superando o retorno do índice IBOVESPA ao em todo o período sob análise, com retorno acumulado de 36.98%. Observamos que os métodos LASSO e adaLASSO apresentaram resultados abaixo dos modelos DCC-GARCH e da carteira ingênua.

De maneira geral, os métodos de encolhimento LASSO e adaLASSO apresentaram bom retorno ajustado ao risco representado pelo índice de sharpe na comparação com os portfólios

Figura 1 – Retornos acumulados sem custos de transação



Fonte: Elaboração do autor.

concorrentes. No entanto, o elevado *turnover* das carteiras com dados de alta frequência faz com que sua performance fique muito dependente dos custos de transação envolvidos.

5.3.2 Carteira de mínima variância com restrição sobre a alocação por ativo

Seguindo Jaggannathan e Ma (2003), foi adicionado ao problema de otimização a restrição sobre a alocação de cada ativo para pesos máximos de 5% e 10% a fim de verificar se uma maior diversificação leva a melhores resultados nas estatísticas de performance dos portfólios. A tabela 2 apresenta com maior detalhe o caso na qual cada ativo está restrito a alocação máxima de 5% do portfólio. Os resultados para a alocação de 10% por ativo estão no apêndice A.4.

Tabela 2 – Carteira de mínima variância com restrição de vendas e restrição por ativo (*box*) com $0 < w_i \leq 0.05$ para $i = 1, \dots, 30$ ativos.

(continua)

Modelo	$\bar{\mu}^P$	$\hat{\mu}_{anual}^P$	$\hat{\sigma}_{anual}^P$	IS	$\hat{\mu}_{acum}^P$	MD	VaR	TO
<i>Rebalanceamento Diário</i>								
Ingênua	0.041%	10.41%	8.19%	1.272	27.12%	9.39%	-0.851%	0.56%
Amostral	0.040%	10.30%	6.78%	1.522	26.14%	7.34%	-0.696%	0.70%
EWMA	0.036%	9.13%	6.85%	1.332	23.47%	8.35%	-0.718%	4.97%
LW-corr	0.040%	10.29%	6.81%	1.512	26.12%	7.52%	-0.701%	0.63%
LW-Fator	0.040%	10.29%	6.78%	1.518	26.11%	7.35%	-0.697%	0.62%
LW-I	0.040%	10.29%	6.78%	1.518	26.11%	7.35%	-0.697%	0.63%
DCC-GARCH	0.043%	11.24%	6.68%	1.681**	28.24%	6.80%	-0.684%	5.53%
K-Fator ($K = 1$)	0.040%	10.25%	6.79%	1.510	26.03%	7.50%	-0.698%	0.62%
K-Fator ($K = 3$)	0.040%	10.22%	6.76%	1.512	25.96%	7.31%	-0.694%	0.63%
EWMA intra	0.033%	8.48%	7.39%	1.148	22.07%	8.67%	-0.782%	3.67%
DCC-GARCH intra	0.040%	10.23%	7.55%	1.356	26.12%	9.00%	-0.783%	3.42%
LASSO intra	0.044%	11.37%	6.96%	1.633*	28.58%	7.59%	-0.718%	18.88%
LASSO-logm intra	0.041%	10.72%	6.91%	1.550	27.10%	7.55%	-0.708%	15.70%
adaLASSO intra	0.040%	10.32%	6.99%	1.475	26.21%	7.45%	-0.725%	19.39%
adaLASSO-logm intra	0.039%	10.04%	7.09%	1.416	25.59%	7.35%	-0.739%	16.68%
<i>Rebalanceamento Semanal</i>								
Ingênua	0.041%	10.32%	8.18%	1.260	26.88%	9.43%	-0.851%	0.25%
Amostral	0.040%	10.32%	6.78%	1.522	26.18%	7.33%	-0.697%	0.60%
EWMA	0.038%	9.66%	6.91%	1.397	24.70%	7.91%	-0.724%	3.06%
LW-corr	0.040%	10.32%	6.81%	1.516	26.19%	7.51%	-0.701%	0.60%
LW-Fator	0.040%	10.32%	6.78%	1.522	26.18%	7.34%	-0.697%	0.60%
LW-I	0.040%	10.32%	6.78%	1.521	26.18%	7.35%	-0.697%	0.60%
DCC-GARCH	0.042%	10.98%	6.67%	1.646*	27.66%	7.06%	-0.684%	2.98%
K-Fator ($K = 1$)	0.040%	10.31%	6.79%	1.517	26.16%	7.49%	-0.698%	0.60%
K-Fator ($K = 3$)	0.040%	10.26%	6.76%	1.516	26.03%	7.30%	-0.694%	0.60%
EWMA intra	0.034%	8.73%	7.38%	1.183	22.65%	8.89%	-0.772%	2.40%
DCC-GARCH intra	0.040%	10.19%	7.54%	1.351	26.02%	9.19%	-0.782%	2.08%
LASSO intra	0.043%	11.26%	6.98%	1.613*	28.33%	7.60%	-0.716%	4.51%
LASSO-logm intra	0.041%	10.59%	6.88%	1.540	26.81%	7.67%	-0.701%	4.17%
adaLASSO intra	0.038%	9.75%	6.99%	1.395	24.92%	7.82%	-0.721%	4.78%
adaLASSO-logm intra	0.039%	9.93%	6.96%	1.426	25.32%	7.61%	-0.715%	4.39%
<i>Rebalanceamento Mensal</i>								
Ingênua	0.041%	10.29%	8.18%	1.257	26.80%	9.47%	-0.850%	0.11%
Amostral	0.040%	10.37%	6.79%	1.527	26.28%	7.32%	-0.697%	0.57%
EWMA	0.041%	10.48%	6.98%	1.503	26.58%	7.20%	-0.721%	1.74%
LW-corr	0.040%	10.37%	6.81%	1.521	26.29%	7.49%	-0.701%	0.57%
LW-Fator	0.040%	10.37%	6.79%	1.528	26.29%	7.31%	-0.697%	0.57%
LW-I	0.040%	10.37%	6.79%	1.527	26.29%	7.32%	-0.697%	0.57%
DCC-GARCH	0.041%	10.76%	6.75%	1.593*	27.18%	7.16%	-0.695%	1.404%
K-Fator ($K = 1$)	0.040%	10.33%	6.80%	1.520	26.22%	7.48%	-0.699%	0.57%
K-Fator ($K = 3$)	0.040%	10.31%	6.77%	1.523	26.15%	7.28%	-0.695%	0.57%
EWMA intra	0.034%	8.61%	7.39%	1.165	22.37%	9.64%	-0.775%	1.45%
DCC-GARCH intra	0.039%	10.05%	7.52%	1.337	25.70%	8.87%	-0.781%	1.15%
LASSO intra	0.040%	10.46%	7.02%	1.490	26.55%	9.16%	-0.721%	1.52%
LASSO-logm intra	0.038%	9.82%	6.99%	1.405	25.08%	8.45%	-0.720%	1.32%
adaLASSO intra	0.039%	10.05%	7.05%	1.426	25.61%	7.69%	-0.733%	1.59%
adaLASSO-logm intra	0.037%	9.56%	7.11%	1.345	24.51%	8.32%	-0.746%	1.50%

Fonte: Elaboração do autor.

Tabela 2 - Carteira de mínima-variância com restrição de vendas e restrição por ativo (*box*) com $0 < w_i \leq 0.05$ para $i = 1, \dots, 30$ ativos.

Modelo	$\bar{\mu}^P$	$\hat{\mu}_{anual}^P$	$\hat{\sigma}_{anual}^P$	IS	$\hat{\mu}_{acum}^P$	MD	VaR	TO
--------	---------------	-----------------------	--------------------------	----	----------------------	----	-----	----

(conclusão)

Nota: A tabela apresenta a performance das carteiras de mínima variância dos portfólios com $0 < w_{i,t} < 0.05$ para cada ativo no período entre 02/01/2017 até 31/07/2019. As linhas referem-se aos estimadores da matriz de covariância do capítulo 4, além da carteira ingênua. A expressão “intra” corresponde ao uso de cotações intradiárias e “logm” indica a aplicação da transformação logarítmica. As colunas representam as estatísticas de performance para cada portfólio: média dos retornos ($\bar{\mu}^P$), média dos retornos anualizado ($\hat{\mu}_{anual}^P$), desvio padrão anualizado ($\hat{\sigma}_{anual}^P$), índice de sharpe (IS), retornos acumulados ($\hat{\mu}_{acum}^P$), máximo drawdown (MD), valor em risco (VaR) e turnover médio (TO). Os custos de transação são considerados nulos. Os asteriscos indicam a diferença estatística entre o índice de sharpe da carteira e o índice de sharpe do IBOVESPA no período com nível de significância de 10% (*), 5% (**) e 1% (***)

O maior retorno médio para esta estratégia de otimização com rebalanceamento diário e semanal do portfólio foi obtido através do método LASSO com uso das cotações intradiárias, enquanto para os portfólios que sofrem rebalanceamento mensal, as carteiras ingênua, EWMA e DCC-GARCH com dados diários apresentaram o maior retorno médio com 0.041%.

Resultados semelhantes foram observados para a estatística de retorno anualizado, na qual, o método LASSO intra teve também maior retorno nas frequências de rebalanceamento diária e semanal. O DCC-GARCH com uso de dados diários apresentou maior retorno na frequência mensal com retorno anualizado de 10.76%.

Os portfólios construídos através dos métodos de encolhimento lineares LW e por análise de fatores apresentaram um aumento médio de 6% do retorno acumulado com a imposição da nova restrição de 5% para cada ativo no problema de otimização, enquanto os métodos do tipo LASSO e adaLASSO com dados de alta frequência apresentaram um aumento médio na ordem de 2%. Já, o aumento da diversificação dos portfólios através da alocação de 10% por ativo diminuiu os ganhos em termos de retorno acumulado dos portfólios com métodos de encolhimento linear com dados diários e dos métodos LASSO e adaLASSO para portfólios construídos a partir de dados de alta frequência.

As restrições *box* de 5% permitiram uma maior performance com relação ao índice de sharpe para a maioria dos portfólios construídos com exceção dos modelos EWMA com uso de cotações diárias e DCC-GARCH com cotações intradiárias. Os métodos LASSO e adaLASSO apresentaram um aumento do retorno anualizado na ordem de 0.7% sem um aumento de igual magnitude do desvio padrão anualizado. Cabe ressaltar, no entanto, que somente o índice de sharpe do modelo DCC-GARCH com cotações de fechamento foi estatisticamente distinto do índice de sharpe dos retornos do IBOVESPA no período para todas as frequências de rebalanceamento.

Para a estatística de máximo *drawdown*, os métodos LASSO e adaLASSO apresentaram melhora na performance quando a restrição de alocação máxima por ativo de 5% do portfólio fora adotada, com um menor drawdown sendo observado nos portfólios construídos a partir do método LASSO com dados de alta frequência; enquanto para os portfólios com dados diários, os modelos EWMA e DCC-GARCH apresentaram um aumento no máximo drawdown. Com relação à estatística de valor em risco (VaR), a imposição de uma maior diversificação levou a

maiores valores de perda no período para todas as carteiras.

O turnover das carteiras apresentou diminuição significativa com a imposição de restrições *box* por ativo. Desta forma, a alteração do problema de otimização conseguiu melhorar a performance geral dos métodos LASSO e adaLASSO propostos para a carteira de mínima variância gerando um maior retorno acumulado para o investidor.

5.3.3 Análise dos custos de transação

Nesta seção é feita a análise do impacto dos custos de transação sobre as carteiras de mínima variância adotando-se 15 e 25 pontos-base como custos do rebalanceamento do portfólio para o investidor. A tabela 3 apresenta as principais estatísticas de performance dos portfólios com relação aos retornos líquidos sem a adoção das restrições *box*.

Tabela 3 – Carteira de mínima varência com restrição de vendas e custos de transação de 15 p.b. e 25 p.b.

Modelo	15 p.b				25 p.b			
	$\hat{\mu}_{anual}^p$	$\hat{\sigma}_{anual}^p$	IS	$\hat{\mu}_{acum}^p$	$\hat{\mu}_{anual}^p$	$\hat{\sigma}_{anual}^p$	IS	$\hat{\mu}_{acum}^p$
<i>Rebalanceamento Diário</i>								
Ingênua	10.41%	8.19%	1.272	27.12%	10.41%	8.19%	1.272	27.12%
Amostrai	7.03%	6.33%	1.111	18.49%	6.65%	6.33%	1.050	17.60%
EWMA	4.21%	6.68%	0.630	11.87%	0.15%	6.70%	0.024**	1.95%
LW-corr	7.10%	6.33%	1.122	18.66%	6.86%	6.33%	1.084	18.10%
LW-Fator	7.21%	6.33%	1.139	18.92%	6.97%	6.33%	1.100	18.34%
LW-I	7.24%	6.33%	1.144	18.98%	6.99%	6.33%	1.105	18.41%
DCC-GARCH	4.78%	6.00%	0.796	13.13%	1.57%	6.01%	0.262	5.36%
K-Fator ($K = 1$)	7.27%	6.37%	1.140	19.06%	7.08%	6.37%	1.111	18.62%
K-Fator ($K = 3$)	7.41%	6.37%	1.164	19.39%	7.15%	6.37%	1.123	18.78%
EWMA intra	9.77%	8.80%	1.110	25.27%	6.58%	8.82%	0.747	17.92%
DCC-GARCH intra	7.85%	7.16%	1.096	20.55%	6.42%	7.16%	0.897	17.21%
LASSO intra	-3.09%	6.55%	-0.473***	-6.33%	-10.63%	6.56%	-1.619***	-26.56%
LASSO-logm intra	-2.47%	6.51%	-0.380***	-4.74%	-9.56%	6.52%	-1.466***	-23.60%
adaLASSO intra	-4.31%	6.62%	-0.652***	-9.47%	-12.20%	6.62%	-1.841***	-30.97%
adaLASSO-logm intra	-1.74%	6.69%	-0.260***	-2.83%	-8.36%	6.69%	-1.250***	-20.27%
<i>Rebalanceamento Semanal</i>								
Ingênua	10.32%	8.18%	1.260	26.88%	10.32%	8.18%	1.260	26.88%
Amostrai	7.20%	6.33%	1.139	18.90%	6.97%	6.33%	1.102	18.35%
EWMA	7.13%	6.58%	1.084	18.77%	4.81%	6.60%	0.729	13.29%
LW-corr	7.15%	6.32%	1.131	18.77%	6.94%	6.32%	1.097	18.28%
LW-Fator	7.26%	6.33%	1.148	19.04%	7.05%	6.33%	1.114	18.54%
LW-I	7.29%	6.32%	1.153	19.09%	7.07%	6.32%	1.119	18.59%
DCC-GARCH	7.57%	6.01%	1.259	19.70%	5.91%	6.02%	0.981	15.81%
K-Fator ($K = 1$)	7.29%	6.37%	1.145	19.12%	7.11%	6.37%	1.115	18.68%
K-Fator ($K = 3$)	7.45%	6.36%	1.171	19.47%	7.23%	6.36%	1.136	18.96%
EWMA intra	13.23%	9.02%	1.466	33.10%	11.19%	9.05%	1.236	28.55%
DCC-GARCH intra	8.61%	7.14%	1.205	22.30%	7.77%	7.15%	1.087	20.35%
LASSO intra	5.69%	6.53%	0.870	15.37%	3.81%	6.55%	0.583	10.90%
LASSO-logm intra	5.12%	6.47%	0.792	14.02%	3.18%	6.49%	0.490	9.35%
adaLASSO intra	5.95%	6.56%	0.907	16.00%	3.87%	6.58%	0.589	11.05%
adaLASSO-logm intra	5.82%	6.58%	0.885	15.69%	3.95%	6.59%	0.599	11.23%

(continua)

Tabela 3 -Carteira de mínima varância com restrição de vendas e custos de transação de 15 p.b. e 25 p.b.

(conclusão)

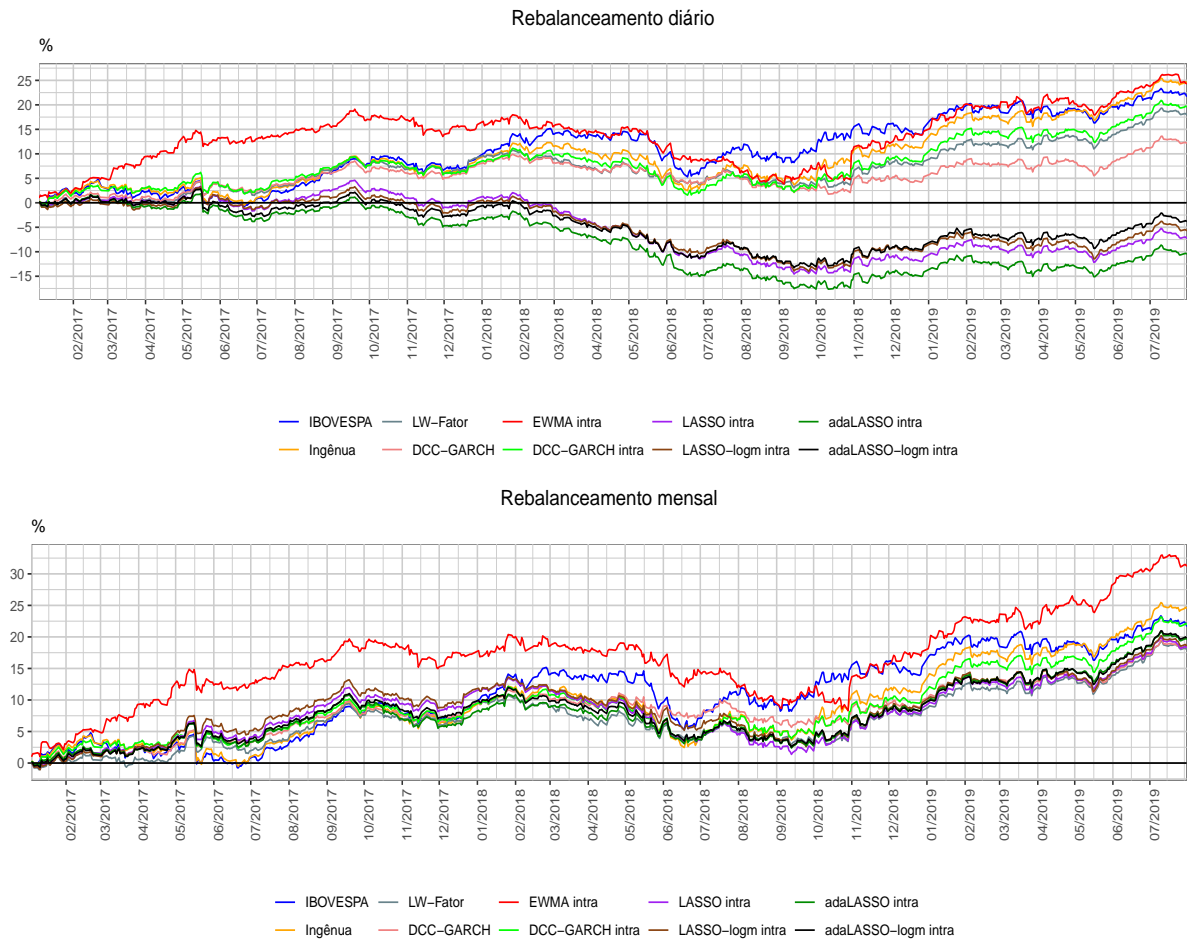
<i>Rebalanceamento Mensal</i>								
Ingênua	10.29%	8.18%	1.257	26.80%	10.29%	8.18%	1.257	26.80%
Amostrai	7.22%	6.34%	1.138	18.94%	7.03%	6.34%	1.109	18.50%
EWMA	9.29%	6.62%	1.403	23.76%	8.16%	6.62%	1.234	21.17%
LW-corr	7.09%	6.34%	1.119	18.63%	6.90%	6.33%	1.090	18.20%
LW-Fator	7.22%	6.34%	1.138	18.93%	7.03%	6.34%	1.109	18.50%
LW-I	7.24%	6.34%	1.142	18.98%	7.05%	6.34%	1.113	18.55%
DCC-GARCH	7.40%	6.04%	1.224	19.31%	6.69%	6.03%	1.108	17.64%
K-Fator ($K = 1$)	7.23%	6.39%	1.131	18.96%	7.05%	6.39%	1.105	18.56%
K-Fator ($K = 3$)	7.36%	6.37%	1.156	19.27%	7.17%	6.37%	1.126	18.83%
EWMA intra	12.85%	8.78%	1.464	32.20%	11.67%	8.79%	1.328	29.57%
DCC-GARCH intra	8.88%	7.14%	1.243	22.91%	8.44%	7.14%	1.183	21.91%
LASSO intra	7.35%	6.55%	1.121	19.27%	6.79%	6.55%	1.037	17.96%
LASSO-logm intra	7.47%	6.50%	1.149	19.54%	6.88%	6.50%	1.059	18.17%
adaLASSO intra	7.92%	6.59%	1.203	20.61%	7.26%	6.58%	1.104	19.07%
adaLASSO-logm intra	8.02%	6.61%	1.212	20.83%	7.43%	6.61%	1.124	19.47%

Fonte: Elaboração do autor.

Nota: A tabela apresenta a performance das carteiras de mínima variância dos portfólios e custo de transação de 15 e 25 pontos-base para o período entre 02/01/2017 até 31/07/2019. As linhas referem-se aos estimadores da matriz de covariância do capítulo 4, além da carteira ingênua. A expressão “intra” corresponde ao uso de cotações intradiárias e “logm” indica a aplicação da transformação logarítmica. As colunas representam as estatísticas de performance para cada portfólio: média dos retornos anualizado ($\hat{\mu}_{anual}^p$), desvio padrão anualizado ($\hat{\sigma}_{anual}^p$), índice de sharpe (IS) e retornos acumulados ($\hat{\mu}_{acum}^p$). Os asteriscos indicam a diferença estatística entre o índice de sharpe da carteira e o índice de sharpe do IBOVESPA no período com nível de significância de 10% (*), 5% (**) e 1% (***)

Todos os modelos formados a partir dos dados com alta frequência apresentaram pior desempenho do que o índice IBOVESPA para os cenários de custos analisados. Os índices de sharpe dos métodos do tipo LASSO e *adaptive* LASSO são estatisticamente distintos do índice de sharpe dos retornos do IBOVESPA somente para as carteiras com rebalanceamento diário segundo o teste *bootstrap* de Ledoit e Wolf (2008). No gráfico 2 verificamos o impacto dos custos de transação de 15 pontos-base sobre os retornos acumulados entre janeiro de 2017 e julho de 2019. As carteiras com melhores performances foram a carteira EWMA com dados intradiários e a carteira igualmente ponderada superando os retornos acumulados do índice IBOVESPA.

Figura 2 – Retornos acumulados com custos de transação de 15 pontos-base.



Fonte: Elaboração do autor.

A adoção da restrição sobre a norma dos vetores de alocação apresentou melhoras para os retornos líquidos das carteiras construídas a partir da regularização LASSO e *adaptive* LASSO com a diminuição do *turnover* destes portfólios e melhora do retorno ajustado para o risco. As tabelas com as estatísticas de performance para as carteiras com restrição *box* de 5% e 10% levando também em conta os custos de transação encontram-se nos apêndices A.5 e A.6.

Os retornos líquidos acumulados com o uso da restrição de alocação máxima de 5% por ativo e rebalanceamento diário para os métodos *adaLASSO* e *adaLASSO-logm* atingiram 6.61% e 8.53% respectivamente no cenário com custos de 15 pontos-base. Essa melhora na performance, no entanto, não se mantém com o aumento dos custos fixos por transação, como pode ser observado na tabela A.5.

6 CONCLUSÃO

O principal objetivo desta dissertação foi estimar a matriz de covariâncias de ativos robustas à alta dimensionalidade através dos métodos *Least Absolute Shrinkage and Selection Operator* (LASSO) e *adaptive Least Absolute Shrinkage and Selection Operator* (adaLASSO) sobre o vetor autoregressivo (VAR) proposto por Callot et al. (2017) e comparar esta abordagem com outros métodos considerados *benchmark*. Nossa aplicação envolveu o uso de cotações intradiárias do mercado de capitais brasileiro para os métodos LASSO-VAR e adaLASSO-VAR, enquanto os métodos concorrentes adotaram na sua maioria as cotações diárias de fechamento. As estimativas para as matrizes de covariâncias foram utilizadas na construção de portfólios de mínima variância e a performance das carteiras foi analisada com relação ao risco, retorno e custos de transação.

Os portfólios de mínima variância construídos a partir dos métodos LASSO com dados de alta frequência apresentaram pior desempenho com relação aos modelos *benchmark* no que diz respeito ao risco envolvido e turnover. Na análise dos retornos ao investidor, os métodos LASSO-VAR e adaLASSO-VAR apresentaram bom desempenho para o retorno anualizado e retorno acumulado sendo superados apenas pelo modelo DCC-GARCH implementado com cotações diárias e pelo modelo EWMA *Riskmetrics* com cotações de fechamento diárias e dados de alta frequência. Para o retorno ajustado pelo risco, representado pelo índice de Sharpe, os portfólios construídos a partir dos métodos LASSO apresentaram bons resultados sendo superados somente pelas carteiras construídas através do DCC-GARCH e EWMA novamente. No entanto, observamos que não houve diferença estatística entre o índice de Sharpe dos portfólios construídos com as cotações intradiárias e os retornos do índice IBOVESPA de acordo com o teste de Ledoit e Wolf (2008).

A análise dos custos de transação das carteiras mostra que o desempenho de todos os portfólios construídos a partir do método LASSO apresentaram piores resultados em relação aos modelos concorrentes devido ao elevado *turnover*. A imposição de restrições para a alocação máxima por ativo na estratégia de seleção foi adotada na tentativa de mitigar o elevado *turnover* dos portfólios. No entanto, a maior diversificação não foi suficiente para que os métodos com regularização sobre o vetor autoregressivo superassem os portfólios concorrentes que adotam os retornos diários na sua construção. Nossas conclusões estão em linha com os resultados obtidos por Ferreira e Santos (2017), na qual o elevado nível de *turnover* é determinante para a performance dos portfólios em termos do retorno ajustado para o risco.

Neste sentido, conforme Liu (2009) e resultado também encontrado por Borges et al. (2015), o uso do estimador Kernel Realizado Multivariado de Hansen et al. (2011) para a sincronização das negociações pode não apresentar vantagens quando é utilizado retornos de ativos com muita liquidez. O resultado é diferente do trabalho de Caldeira et al. (2017), no que diz respeito a menor variância obtida nos portfólios que fazem uso de dados de alta frequência construídos através de intervalos intradiários de 5 minutos.

Os métodos LASSO e adaLASSO baseados no trabalho de Callot et al. (2017) adotados

na construção dos portfólios com mínima variância apresentaram elevado *turnover* em nossa aplicação empírica com relação aos demais métodos concorrentes, e portanto, a sua implementação não ofereceu ganhos significativos para nosso conjunto de ativos quando incorporamos os custos de transação no problema do investidor. Futuras extensões deste trabalho podem incluir a utilização dos dados de alta frequência para métodos de componentes principais robustos aos possíveis outliers de Trucíos et al. (2019) e métodos de encolhimento não-lineares de Ledoit e Wolf (2012) para a dinâmica das matrizes de covariâncias.

A construção de portfólios com dados de alta frequência em intervalos maiores em conjunto com o uso de outras medidas para a covolatilidade não baseados somente na função kernel também são estudos que podem ser realizados no futuro para a melhor compreensão da diferença de performance dos métodos empregados.

REFERÊNCIAS

- AIT-SAHALIA, Yacine; FAN, Jianqing; XIU, Dacheng. High-Frequency Covariance Estimates with Noisy and Asynchronous Financial Data. **Journal of the American Statistical Association**, v. 105, p. 1504–1517, 2010.
- ALMEIDA, Daniel de; HOTTA, Luiz K.; RUIZ, Esther. MGARCH models: Trade-off between feasibility and flexibility. **International Journal of Forecasting**, v. 34, p. 45–63, 2018.
- ALONSO, Andrés M.; GALEANO, Pedro; PEÑA, Daniel. Generalized Dynamic Principal Components. **Journal of the American Statistical Association**, American Statistical Association, v. 111, p. 1121–1131, 2016.
- ANDERSEN, Torben G.; BOLLERSLEV, Tim; DIEBOLD, Francis X.; LABYS, Paul. The Distribution of Realized Exchange Rate. **Journal of the American Statistical Association**, v. 96, p. 42–55, 1998.
- ANDERSEN, Torben G.; DIEBOLD, Francis X.; LABYS, Paul. Modeling and Forecasting Realized Volatility. **Econometrica**, v. 71, p. 529–626, 2003.
- ANDERSEN, Torben G.; DOBREV, Dobrislav; SCHAUMBURG, Ernst. Jump-Robust Volatility Estimation using Nearest Neighbor Truncation. **Journal of Econometrics**, v. 169, p. 75–93, 2012.
- ARDIA, David; BOUDT, Kris; GAGNON-FLEURY, Jean-Philippe. RiskPortfolios: Computation of Risk-Based Portfolios in R. **The Journal of Open Software**, v. 10, 2017.
- BAND, F. M.; RUSSELL, J. R. Microstructure Noise, Realized Variance, and Optimal Sampling. **The Review of Economic Studies**, v. 75, p. 339–369, 2008.
- BARNDORFF-NIELSEN, Ole E.; HANSEN, Peter R.; LUNDE, Asger; SHEPHARD, Neil. Designing Realized Kernels to Measure the ex-post Variation of Equity Prices in the Presence of Noise. **Econometrica**, v. 76, p. 1481–1536, 2008.
- BARNDORFF-NIELSEN, Ole E.; HANSEN, Peter R.; LUNDE, Asger; SHEPHARD, Neil. Realized kernels in practice: trades and quotes. **The Econometrics Journal**, v. 12, p. C1–C32, 2009. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1368-423X.2008.00275.x>>.
- BARNDORFF-NIELSEN, Ole E.; HANSEN, Peter Reinhard; LUNDE, Asger; SHEPHARD, Neil. Multivariate realised kernels: Consistent positive semi-definite estimators of the covariation of equity prices with noise and non-synchronous trading. **Journal of Econometrics**, v. 162, p. 149–169, 2011.
- BARNDORFF-NIELSEN, Ole E.; SHEPHARD, Neil. Econometric Analysis of Realized Covariation: High Frequency Based Covariance, Regression, and Correlation in Financial Economics. **Economática**, v. 72, p. 885–925, 2004.
- BECKER, Ralf.; CLEMENTS, Adam. E.; DOOLAN, Mark B.; HURN, Aubrey S. Selecting volatility forecasting models for portfolio allocation purposes. **International Journal of Forecasting**, v. 31, p. 849–861, 2015.

BEST, Michael J.; GRAUER, Robert R. On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results. **The Review of Financial Studies**, v. 4, p. 315–342, 1991.

BIAIS, Bruno; LOGSTEN, Larry; SPATT, Chester. Market Microstructure: A survey of micro-foundations, empirical results, and policy implications. **Journal of Financial Markets**, v. 8, n. 2, p. 217–264, 2005.

BOLLERSLEV, Tim. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, v. 31, 1986.

BOLLERSLEV, Tim. Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized Arch Model. **The Review of Economics and Statistics**, v. 72, p. 498–505, 1990.

BOLLERSLEV, Tim; ENGLE, Robert F.; WOOLDRIDGE, Jeffrey M. A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances. **Journal of Political Economy**, v. 96, p. 116–131, 1988.

BORGES, Bruna K.; CALDEIRA, João F.; ZIEGELMANN, Flávio A. Selection of Minimum Variance Portfolio Using Intraday Data: An Empirical Comparison Among Different Realized Measures for BMF&Bovespa Data. **Brazilian Review of Econometrics**, v. 35, p. 23–46, 2015.

BOUDT, Kris; PETERSON, Brian; CROUX, Christophe. Estimation and decomposition of downside risk for portfolios with non-normal returns. **The Journal of Risk, Incisive Risk Information**, p. 79–103, 2008.

BOUDT, Kris; ZHANG, Jin. Jump Robust Two time scale covariance estimation and realized volatility budgets. **Quantitative Finance**, v. 15, p. 1041–1054, 2012.

BRANDT, Michael W. Portfolio Choice Problems. In: AIT-SAHALIA, Yacine; HANSEN, Lars Peter (Ed.). **Handbook of Financial Econometrics: Tools and Techniques**. [S.l.]: North-Holland, 2010. cap. 5, p. 269–336.

CALDEIRA, João F.; MOURA, Guilherme V.; NOGALES, Francisco J.; SANTOS, André A. P. Combining Multivariate Volatility Forecasts: An Economic-Based Approach. **Journal of Financial Econometrics**, v. 15, p. 247–285, 2016.

CALDEIRA, João F.; MOURA, Guilherme V.; PERLIN, Marcelo S.; SANTOS, André A. P. Portfolio management using realized covariances: Evidence from Brazil. **Economia**, v. 18, p. 328–343, 2017.

CALDEIRA, João F.; MOURA, Guilherme V.; SANTOS, André A. P. Seleção de Carteiras Utilizando o Modelo Fama-French-Carhart. **Revista Brasileira de Economia**, v. 67, p. 45–65, 2014.

CALLOT, Laurence. lassoVar: Estimation and forecasting with VAR models using the (adaptive) Lasso. **R package version 0.9**, 2015.

CALLOT, Laurent A. F.; KOCK, Anders B.; MEDEIROS, Marcelo M. Modelling and Forecasting Large Realized Covariance Matrices and Portfolio Choice. **Journal of Applied Econometrics**, v. 32, p. 140–158, 2017.

CAPORIN, Massimiliano; MCALEER, Michael. Robust ranking of multivariate GARCH models by problem dimension. **Computational Statistics Data Analysis**, v. 76, p. 172–185, 2014.

- CARHART, Mark M. On Persistence in Mutual Fund Performance. **The Journal of Finance**, v. 52, p. 57–82, 1997.
- CHANG, Jinyuan; GUO, Bin; YAO, Qiwei. Principal Component Analysis for Second-Order Stationary Vector Time Series. **The Annals of Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 46, p. 2094–2124, 2018.
- CHIRIAC, Roxana; VOEV, Valeri. Modelling and Forecasting Multivariate Realized Volatility. **Journal of Applied Econometrics**, v. 75, p. 339–369, 2010.
- CHIU, Tom Y. M.; LEONARD, Tom; TSUI, Kam-Wah. The Matrix Logarithmic Covariance. **Journal of the American Statistical Association**, v. 91, p. 198–210, 1996.
- CHOPRA, Vijay J.; ZIEMBA, William T. The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice. **Journal of Portfolio Management**, v. 12, p. 6–11, 1993.
- CHRISTENSEN, Kim; KINNEBROCK, Silja; PODOLSKIJ, Mark. Pre-averaging estimators of the ex-post covariance matrix in noisy diffusion models with non-synchronous data. **Journal of Econometrics**, v. 159, p. 116–133, 2010.
- DEMIGUEL, Lorenzo V.; GARLAPPI, Francisco J. A Generalized Approach to Portfolio Optimization: Improving Performance by Constraining Portfolio Norms. **Management Science**, v. 55, p. 798–812, 2009.
- DEMIGUEL, Victor; NOGALES, Francisco J.; UPPAL, Raman. Stock Return Serial Dependence and Out-of-Sample Portfolio Performance. **Review of Financial Studies**, v. 27, p. 1031–1073, 2014.
- ENGLE, Robert. Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models. **Journal of Business and Economic Statistics**, v. 20, p. 339–350, 2002.
- ENGLE, Robert; COLACITO, Riccardo. Testing and Valuing Dynamic Correlations for Asset Allocation. **Journal of Business Economic Statistics**, v. 24, p. 238–253, 2006.
- ENGLE, Robert; LEDOIT, Olivier; WOLF, Michael. Large dynamic covariance matrices. **Journal of Business Economic Statistics**, v. 37, p. 363–375, 2019.
- ENGLE, Robert; MEZRICH, Joseph. GARCH for Groups. **Risk**, v. 9, p. 36–40, 1996.
- ENGLE, Robert F.; KRONER, Kenneth F. Multivariate Simultaneous Generalized Arch. **Econometric Theory**, v. 11, p. 122–150, 1995.
- ENGLE, Robert F.; PAKEL, Cavit; SHEPHARD, Neil; SHEPPARD, Kevin. Fitting Vast Dimensional Time-Varying Covariance Models. **Journal of Business & Economic Statistics**, American Statistical Association, v. 39, p. 652–668, 2020.
- EPPS, Thomas W. Comovements in Stock Prices in the Very Short Run. **Journal of the American Statistical Association**, v. 74, p. 291–298, 1979.
- FAMA, Eugene F.; FRENCH, Kenneth R. Common risk factors in the returns of stocks and bonds. **Journal of Financial Economics**, v. 33, p. 3–56, 1993.
- FAMA, Eugene F.; FRENCH, Kenneth R. A five-factor asset pricing model. **Journal of Financial Economics**, v. 116, p. 1–22, 2015.

- FAN, Jianqing; LI, Runze. Variable Selection via Nonconcave Penalized Likelihood and its Oracle Properties. **Journal of the American Statistical Association**, v. 96, 2001.
- FAN, Jianqing; LI, Yingying; YU, Ke. Vast Volatility Matrix Estimation Using High-Frequency Data for Portfólio Selection. **Journal of the American Statistical Association**, v. 107, p. 412–428, 2012.
- FAVRE, Luiz; GALEANO, José-Antonio. Mean-Modified Value-at-Risk Optimization with Hedge Funds. **Journal of Alternative Investments**, v. 5, p. 2–21, 2002.
- FERREIRA, Alexandre R.; SANTOS, André A. P. On the choice of covariance specifications for portfolio selection problems. **Brazilian Review of Econometrics**, v. 37, p. 89–122, 2017.
- FLEMING, Jeff; KIRBY, Chris; OSTDIEK, Barbara. The Economic Value of Volatility Timing using Realized Volatility. **Journal of Financial Economics**, v. 67, p. 473–509, 2003.
- GRIFFIN, Jim E.; OOMEN, Roel C. A. Covariance measurement in the presence of non-synchronous trading and market microstructure noise. **Journal of Econometrics**, v. 160, p. 58–68, 2011.
- HANSEN, Peter R.; LUNDE, Asger. Realized Variance and Market Microstructure Noise. **Journal of Business and Economic Statistics**, v. 24, p. 127–161, 2006.
- HANSEN, Peter R.; LUNDE, Asger; NASON, James M. The Model Confidence Set. **Econometrica**, v. 79, p. 453–497, 2011.
- HARRIS, Frederick H. de B.; MCINISH, Thomas H.; SHOESMITH, Gary; WOOD, Robert A. Cointegration, Error Correction, and Price discovery on Informationally Linked Security Markets. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 30, p. 563–579, 1995.
- HAUTSCH, Nikolaus; KYJ, Lada M.; MALEC, Peter. Do High-Frequency Data Improve High-Dimensional Portfolio Allocations. **Journal of Applied Econometrics**, v. 30, p. 263–290, 2015.
- HAUTSCH, Nikolaus; KYJ, Lada M.; OOMEN, Roel C. A. A Blocking and Regularization Approach to High Dimensional Realized Covariance Estimation. **Journal of Applied Econometrics**, v. 27, p. 625–645, 2012.
- HAYASHI, Takaki; YOSHIDA, Nakahiro. On covariance estimation of non-synchronously observed diffusion process. **Bernoulli**, v. 11, p. 359–379, 2005.
- HOERL, Arthur E.; KENNARD, Robert W. Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems. **Technometrics**, Taylor Francis, p. 55–67, 1970.
- HSU, Nan-Jung; HUNG, Hung-Lin; CHANG, Ya-Mei. Subset selection for vector autoregressive processes using lasso. **Computational Statistics Data Analysis**, ScienceDirect, v. 52, p. 3645–3657, 2008.
- HU, Yu-Pin; TSAY, Ruey S. Principal Volatility Component Analysis. **Journal of Business Economic Statistics**, v. 32, p. 153–164, 2014.
- JAGGANNATHAN, Ravi; MA, Tongshu. Risk Reduction in Large Portfolios: Why Imposing the Wrong Constraints Helps. **The Journal of Finance**, v. 58, p. 1651–1683, 2003.
- JAMES, W.; STEIN, Charles. Estimation with quadratic loss. **Proc. Fourth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob.**, v. 1, p. 361–379, 1961.

- KASTNER, Gregor. Sparse bayesian time-varying covariance estimation in many dimensions. **Journal of Econometrics**, v. 210, p. 98–115, 2019.
- KEMPF, Alexander; MEMMEL, Cristoph. Estimating the global minimum variance portfolio. **Schmalenbach Business Review**, v. 101, p. 332–348, 2006.
- KOCK, Anders B.; CALLOT, Laurent. Oracle Inequalities for High Dimensional Vector Autoregressions. **Journal of Econometrics**, v. 186, p. 325–344, 2015.
- LAM, Clifford; YAO, Qiwei. Factor Modelling for High-Dimensional Time Series: Inference for the Number of Factors. **The Annals of Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 40, p. 694–725, 2012.
- LAM, Clifford; YAO, Qiwei; BATHIA, Neil. Estimation of Latent Factors for High-Dimensional Time Series. **Biometrika**, Oxford University Press, v. 98, p. 901–918, 2011.
- LEDOIT, Olivier; WOLF, Michael. Improved estimation of the covariance matrix of stocks return with an application to portfolio selection. **Journal of Empirical Finance**, v. 10, p. 603–621, 2003.
- LEDOIT, Olivier; WOLF, Michael. Honey, i shrunk the sample covariance matrix. **The Journal of Portfolio Management**, v. 30, p. 110–119, 2004.
- LEDOIT, Olivier; WOLF, Michael. A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices. **Journal of Multivariate Analysis**, v. 88, p. 365–411, 2004.
- LEDOIT, Oliver; WOLF, Michael. Robust performance hypothesis testing with the Sharpe ratio. **Journal of Empirical Finance**, v. 15, p. 850–859, 2008.
- LEDOIT, Olivier; WOLF, Michael. Nonlinear shrinkage estimation of large-dimensional covariance matrices. **The Annals of Statistics**, v. 40, p. 1024–1060, 2012.
- LEDOIT, Olivier; WOLF, Michael. Nonlinear Shrinkage of the Covariance Matrix for Portfolio Selection: Markowitz Meets Goldilocks. **Review Of Financial Studies**, v. 30, p. 4349–4388, 2017.
- LI, Weiming; GAO, Jing; LI, Kunpeng; YAO, Qiwei. Modelling Multivariate Volatilities via Latent Common Factors. **Journal of Business Economic Statistics**, v. 34, p. 564–573, 2016.
- LIU, Lily Y.; PATTON, Andrew J.; SHEPPARD, Kevin. Does anything beat 5-minute RV? A comparison of realized measures across multiple asset classes. **Journal of Econometrics**, v. 187, n. 1, p. 293–311, 2015.
- LIU, Qianqiu. On Portfolio Optimization: How and When do We Benefit From High-Frequency Data? **Journal of Applied Econometrics**, v. 24, p. 560–582, 2009.
- LUNDE, Asger; SHEPARD, Neil; SHEPPARD, Kevin. Econometric Analysis of Vast Covariance Matrices Using Composite Realized Kernels and Their Application to Portfolio Choice. **Journal of Business Economic Statistics**, v. 34, p. 504–518, 2016.
- LUNDE, Asger; SHEPARD, Neil; SHEPPARD, Kevin. Econometric Analysis of Vast Covariance Matrices Using Composite Realized Kernels and Their Application to Portfolio Choice. **Journal of Business Economic Statistics**, v. 34, p. 504–518, 2016.

LUTKEPOHL, Helmut. **New Introduction to Multiple Time Series Series Analysis**. [S.l.]: Springer, 2005.

MANCINO, Maria Elvira; SANFELICI, Simona. Estimating Covariance via Fourier Method in the Presence of Asynchronous Trading and Microstructure Noise. **Journal of Financial Econometrics**, v. 9, p. 367–408, 2011.

MARKOWITZ, Harry. Portfolio Selection. **Journal of Finance**, v. 7, p. 77–91, 1952.

MCALEER, Michael; MEDEIROS, Marcelo C. Realized Volatility: a review. **Econometric Reviews**, v. 27, p. 10–45, 2008.

MERTON, Robert. On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation. **Journal of Financial Economics**, v. 8, p. 323–361, 1980.

MICHAUD, Richard O. The Markowitz optimization Enigma: Is Optimized Optimal? **Financial Analysts Journal**, v. 45, p. 31–42, 1989.

NEWBY, Whitney K.; WEST, Kenneth D. A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. **Econometrica**, v. 55, p. 703–708, 1987.

PAN, Jianzhu; YAO, Qiwei. Modelling Multiple Time Series via Common Factors. **Biometrika**, Oxford University Press, v. 95, p. 365–379, 2008.

PELUSO, Stefano; CORSI, Fulvio; MIRA, Antonietta. A Bayesian High-Frequency Estimator of the Multivariate Covariance of Noisy and Asynchronous Returns. **Journal of Financial Econometrics**, v. 13, p. 665–697, 2015.

PERLIN, Marcelo; RAMOS, Henrique. GetHFDData A R Package for Downloading and Aggregating High Frequency Trading Data from Bovespa. **Brazilian Review of Finance**, v. 14, 2016.

PETERSON, Brian G.; CARL, Peter. **PerformanceAnalytics: Econometric Tools for Performance and Risk Analysis**. [S.l.], 2020. R package version 2.0.4. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=PerformanceAnalytics>>.

PINTO, Garcia Márcio Gomes; MEDEIROS, Marcelo Cunha; SANTOS, Francisco Eduardo de Luna e Almeida. Economic gains of realized volatility in the Brazilian stock market. **Brazilian Review of Finance**, v. 12, p. 319–349, 2014.

POOTER, Michiel; MARTENS, Martin; DIJK, Dick Van. Predicting the Daily Covariance Matrix for SP 100 Stocks using intraday data: But which Frequency to Use? **Econometric Reviews**, v. 27, p. 199–229, 2008.

RISKMETRICS. Riskmetrics. **JP Morgan Technical Document**, v. 4, 1996.

RUBESAM, Alexandre; BELTRAME, André L. Carteiras de Variância Mínima no Brasil. **Revista Brasileira de Finanças (Online)**, v. 11, p. 81–118, 2013.

SANTOS, André A. P. Otimização de Carteiras baseada em Modelos de Correlações Condicionais. **Análise Econômica**, v. 34, p. 75–100, 2016.

SANTOS, André A. P.; MOURA, Guilherme V. Dynamic factor multivariate GARCH model. **Computational Statistics Data Analysis**, v. 76, p. 606–627, 2014.

- SHARPE, William F. A simplified model for portfolio analysis. **Management Science**, v. 9, p. 277–293, 1963.
- SIMS, Christopher A. Macroeconomics and Reality. **Econometrica**, The Econometric Society, p. 1–48, 1980.
- THORNTON, Daniel L.; VALENTE, Giorgio. Out-of-sample predictions of bond excess returns and forward rates: An asset allocation perspective. **The Review of Financial Studies**, v. 25, p. 3141–3168, 2012.
- TIBSHIRANI, Robert. Regression Shrinkage and Selection via the Lasso. **Journal of the Royal Statistical Society**, v. 58, p. 267–288, 1996.
- TRUCÍOS, Carlos; HOTTA, Luiz K.; PEREIRA, Pedro L. Valls. On the robustness of the principal volatility components. **Journal of Empirical Finance**, v. 52, p. 201–219, 2019.
- TSE, Y.; TSUI, A. A Multivariate GARCH Model with Time-varying correlations. **Journal of Business and Economic Statistics**, v. 20, p. 351–362, 2002.
- WANG, Yazhen; ZOU, Jian. Vast Volatility Matrix Estimation for High-Frequency Financial Data. **The Annals of Statistics**, v. 38, p. 943–978, 2010.
- ZHANG, Lan. Efficient estimation of stochastic volatility using noisy observations: a multi-scale approach. **Bernoulli**, v. 12, p. 1019–1043, 2006.
- ZHANG, Lan. Estimating Covariation: Epps effect, microstructure noise. **Journal of Econometrics**, v. 160, p. 33–47, 2010.
- ZHANG, Lan; MYKLAND, Per A.; AIT-SAHALIA, Yacine. A Tale of Two Time Scales: Determining Integrated Volatility with Noisy High-Frequency Data. **Journal Royal Statistical**, v. 100, p. 1394–1411, 2005.
- ZHOU, Bin. High-Frequency Data and Volatility in Foreign-Exchange Rates. **Journal of Business and Economic Statistics**, v. 14, p. 45–52, 1996.
- ZOU, Hui. The adaptive lasso and its oracle properties. **Journal of the American Statistical Association**, v. 101, p. 1418–1429, 2006.
- ZOU, Jian; WANG, Fangfang; WU, Yichao. Large portfolio allocation using high-frequency financial data. **Statistics and Its Interface**, v. 11, p. 141–152, 2018.

APÊNDICE A – ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS DOS ATIVOS

Tabela A.1 – 30 ativos utilizados.

Símbolo	Empresa	Setor
BBAS3	Banco do Brasil S.A.	Serviços financeiros
BBDC3	Banco Bradesco S.A.	Serviços financeiros
BRFS3	BRF S.A.	Consumo Não-cíclico
CCRO3	CCR S.A.	Bens de capital e serviços
CESP6	CESP	Utilidade pública
CPLE6	COPEL	Utilidade pública
CSAN3	Cosan S.A. Indústria e Comércio	Óleo, gás e biocombustíveis
CYRE3	Cyrela Brazil Realty S.A.	Consumo cíclico
ELET3	Centrais Elétricas Brasileiras S.A.	Utilidade pública
EMBR3	Embraer S.A.	Bens de capital e serviços
ENBR3	EDP - Energias do Brasil S.A.	Utilidade pública
GRND3	Grendene S.A.	Consumo cíclico
IGTA3	Iguatemi Empresa de Shopping Centers S.A.	Financeiro
JBSS3	JBS S.A.	Consumo Não-cíclico
MRVE3	MRV Engenharia e Participações S.A.	Consumo cíclico
MULT3	Multiplan Empreendimentos Imobiliários S.A.	Financeiro
ODPV3	Odontoprev S.A.	Saúde
PETR4	Petrobras	Óleo, gas e biocombustíveis
PSSA3	Porto Seguro S.A.	Financeiro
RADL3	Raia Drogasil S.A.	Saúde
RENT3	Localiza Rent a Car S.A.	Consumo cíclico
SBSP3	SABESP	Utilidade pública
SULA11	Sul America S.A.	Financeiro
TIMP3	Tim Participações S.A.	Comunicações
TOTS3	Totvs S.A.	Tecnologia da informação
TRPL4	CTEEP	Utilidade pública
USIM5	Usinas Siderurgicas de Minas Gerais S.A.	Materiais básicos
VALE3	Vale S.A.	Materiais básicos
VIVT4	Telefonica Brasil S.A.	Comunicações
WEGE3	WEG S.A.	Bens industriais

Fonte: Elaboração do autor.

Tabela A.2 – Estatísticas descritivas dos log-retornos diários para os 30 ativos negociados na B3 obtidos através do software Economática.

Ativo	Média (%)	Desvio Padrão	Assimetria	Curtose	1ª Autocorrelação
BBAS3	0.0284	0.0119	-0.3897	7.1267	0.0391
BBDC3	0.0234	0.0088	0.0514	2.4254	-0.0147
BRFS3	-0.0048	0.0088	-0.5306	10.4446	0.0633
CCRO3	0.0013	0.0096	-0.2295	2.7138	-0.0305
CESP6	0.0231	0.0093	0.1521	7.5745	-0.0107
CPLE6	0.0213	0.0103	-0.3596	3.8884	-0.0041
CSAN3	0.0135	0.0090	0.0026	1.4513	-0.0226
CYRE3	0.0146	0.0092	-0.2405	4.3042	0.0002
ELET3	0.0517	0.0150	1.0755	13.4627	0.0256
EMBR3	0.0090	0.0091	-0.1681	11.3585	-0.0538
ENBR3	0.0206	0.0086	0.0819	3.1256	-0.1427
GRND3	0.0175	0.0077	-0.0373	2.1072	-0.0510
IGTA3	0.0178	0.0078	-0.1875	3.3409	0.0931
JBSS3	0.0399	0.0135	-0.6439	16.5752	-0.1045
MRVE3	0.0278	0.0102	0.0109	1.7589	-0.0296
MULT3	0.0128	0.0075	-0.0310	2.8355	-0.0486
ODPV3	0.0185	0.0078	0.0097	0.8443	-0.1146
PETR4	0.0115	0.0137	-0.1289	3.1023	-0.0228
PSSA3	0.0316	0.0084	0.0361	1.4452	-0.0026
RADL3	0.0357	0.0079	0.1739	0.7161	0.0326
RENT3	0.0394	0.0090	0.0435	0.8804	-0.0292
SBSP3	0.0213	0.0097	-0.1962	2.2673	0.0065
SULA11	0.0370	0.0087	0.0931	3.0523	-0.0157
TIMP3	0.0153	0.0090	0.3540	3.1840	-0.0643
TOTS3	0.0082	0.0085	0.0120	1.1367	-0.0985
TRPL4	0.0394	0.0069	0.1062	1.9169	-0.0391
USIM5	-0.0099	0.0164	0.4440	5.0269	0.0605
VALE3	0.0102	0.0125	-0.4702	7.1637	0.0517
VIVT4	0.0150	0.0067	0.3386	4.9454	-0.0493
WEGE3	0.0322	0.0072	-0.0022	1.5695	-0.0567

Fonte: Elaboração do autor.

Tabela A.3 – Número de negociações diárias por ativo

Ativo	Mínimo	Máximo	Média
BBAS3	2255	78263	19869.30
BBDC3	920	41385	6554.65
BRFS3	1361	66897	11488.40
CCRO3	1823	85319	16190.40
CESP6	407	19895	3912.62
CPLE6	343	21112	3633.53
CSAN3	645	20737	5952.64
CYRE3	1407	27625	8394.90
ELET3	792	59607	7770.08
EMBR3	802	47555	8195.30
ENBR3	873	31586	7852.59
GRND3	349	12093	1715.26
IGTA3	225	14528	3633.50
JBSS3	1753	84712	17563.20
MRVE3	2124	40738	10336.10
MULT3	330	30856	5216.96
ODPV3	318	17673	4258.39
PETR4	1294	236911	19180.00
PSSA3	323	9884	3180.57
RADL3	477	24603	5313.94
RENT3	1002	45838	7934.93
SBSP3	569	35375	6960.95
SULA11	486	16371	3794.55
TIMP3	1204	36398	9414.25
TOTS3	415	14424	2870.36
TRPL4	317	12714	2073.18
USIM5	1597	47729	12817.10
VALE3	2085	260291	20572.10
VIVT4	477	47393	7903.05
WEGE3	179	28291	6550.12

Fonte: Elaboração do autor.

APÊNDICE B – CARTEIRAS DE MÍNIMA VARIÂNCIA

Tabela A.4 – Carteira de mínima-variância com restrição de vendas e restrição por ativo (*box*)
com $0 < w_i \leq 0.10$ para $i = 1, \dots, 30$ ativos.

Modelo	$\bar{\mu}^p$	$\hat{\mu}_{anual}^p$	$\hat{\sigma}_{anual}^p$	IS	$\hat{\mu}_{acum}^p$	MD	VaR	TO
<i>Rebalanceamento Diário</i>								
Ingênua	0.041%	10.41%	8.19%	1.272	27.12%	9.39%	-0.851%	0.56%
Amostral	0.031%	7.96%	6.34%	1.255	20.70%	7.48%	-0.626%	1.08%
EWMA	0.040%	10.33%	6.49%	1.590	26.15%	6.41%	-0.670%	10.95%
LW-corr	0.031%	7.82%	6.35%	1.231	20.38%	7.57%	-0.628%	0.81%
LW-Fator	0.031%	7.96%	6.34%	1.254	20.68%	7.49%	-0.627%	0.81%
LW-I	0.031%	7.96%	6.34%	1.255	20.70%	7.48%	-0.626%	0.79%
DCC-GARCH	0.038%	9.86%	6.12%	1.611	25.04%	4.45%	-0.607%	10.04%
K-Fator ($K = 1$)	0.030%	7.76%	6.35%	1.223	20.24%	7.72%	-0.623%	0.62%
K-Fator ($K = 3$)	0.032%	8.08%	6.37%	1.268	20.97%	7.63%	-0.627%	0.93%
EWMA intra	0.028%	6.89%	7.29%	0.945	18.36%	8.81%	-0.757%	6.45%
DCC-GARCH intra	0.041%	10.57%	7.21%	1.466	26.83%	8.55%	-0.740%	5.25%
LASSO intra	0.037%	9.50%	6.63%	1.432	24.29%	8.56%	-0.673%	29.72%
LASSO-logm intra	0.036%	9.27%	6.55%	1.416	23.75%	7.77%	-0.652%	24.76%
adaLASSO intra	0.035%	9.10%	6.66%	1.365	23.37%	7.86%	-0.687%	31.75%
adaLASSO-logm intra	0.036%	9.29%	6.72%	1.381	23.81%	7.32%	-0.692%	25.72%
<i>Rebalanceamento Semanal</i>								
Ingênua	0.041%	10.32%	8.18%	1.260	26.88%	9.43%	-0.851%	0.25%
Amostral	0.031%	7.92%	6.34%	1.249	20.60%	7.50%	-0.626%	0.73%
EWMA	0.041%	10.66%	6.48%	1.645	26.91%	6.33%	-0.662%	6.14%
LW-corr	0.031%	7.82%	6.35%	1.231	20.36%	7.54%	-0.628%	0.70%
LW-Fator	0.031%	7.95%	6.34%	1.254	20.66%	7.48%	-0.626%	0.69%
LW-I	0.031%	7.96%	6.34%	1.255	20.68%	7.46%	-0.626%	0.69%
DCC-GARCH	0.039%	9.98%	6.12%	1.630	25.30%	4.33%	-0.604%	5.10%
K-Fator ($K = 1$)	0.031%	7.80%	6.35%	1.229	20.32%	7.69%	-0.623%	0.60%
K-Fator ($K = 3$)	0.032%	8.09%	6.37%	1.270	20.99%	7.57%	-0.628%	0.76%
EWMA intra	0.027%	6.85%	7.26%	0.943	18.26%	8.86%	-0.750%	3.72%
DCC-GARCH intra	0.040%	10.44%	7.18%	1.453	26.52%	8.59%	-0.739%	3.06%
LASSO intra	0.035%	9.08%	6.59%	1.376	23.31%	8.89%	-0.660%	6.69%
LASSO-logm intra	0.034%	8.74%	6.53%	1.339	22.53%	7.99%	-0.641%	6.24%
adaLASSO intra	0.036%	9.32%	6.61%	1.410	23.87%	7.69%	-0.672%	7.31%
adaLASSO-logm intra	0.035%	8.91%	6.62%	1.345	22.92%	7.84%	-0.670%	6.63%
<i>Rebalanceamento Mensal</i>								
Ingênua	0.041%	10.29%	8.18%	1.257	26.80%	9.47%	-0.850%	0.11%
Amostral	0.031%	7.92%	6.35%	1.247	20.60%	7.59%	-0.627%	0.62%
EWMA	0.042%	10.94%	6.54%	1.672	27.54%	5.49%	-0.646%	2.97%
LW-corr	0.031%	7.77%	6.36%	1.222	20.26%	7.67%	-0.628%	0.61%
LW-Fator	0.031%	7.92%	6.35%	1.248	20.61%	7.60%	-0.627%	0.62%
LW-I	0.031%	7.93%	6.35%	1.249	20.62%	7.58%	-0.627%	0.62%
DCC-GARCH	0.035%	8.91%	6.18%	1.441	22.85%	5.12%	-0.609%	2.21%
K-Fator ($K = 1$)	0.030%	7.74%	6.35%	1.219	20.19%	7.77%	-0.623%	0.56%
K-Fator ($K = 3$)	0.031%	8.03%	6.37%	1.261	20.87%	7.68%	-0.628%	0.66%
EWMA intra	0.025%	6.30%	7.23%	0.872	16.97%	8.97%	-0.742%	2.28%
DCC-GARCH intra	0.039%	10.09%	7.19%	1.404	25.73%	8.44%	-0.746%	1.57%
LASSO intra	0.034%	8.57%	6.60%	1.299	22.15%	10.66%	-0.667%	1.92%
LASSO-logm intra	0.033%	8.38%	6.56%	1.276	21.69%	9.27%	-0.646%	1.84%
adaLASSO intra	0.037%	9.48%	6.65%	1.426	24.24%	7.77%	-0.675%	2.28%
adaLASSO-logm intra	0.035%	8.98%	6.68%	1.345	23.11%	8.83%	-0.681%	2.05%

Fonte: Elaboração do autor.

Notas: A tabela apresenta a performance das carteiras de mínima-variância dos portfólios com $0 < w_{i,t} < 0.10$ para cada ativo no período entre 02/01/2017 até 31/07/2019. As linhas referem-se aos estimadores da matriz de covariância do capítulo 4, além da carteira ingênua. A expressão “intra” corresponde ao uso de cotações intradiárias e “logm” indica a aplicação da transformação logarítmica. As colunas representam as estatísticas de performance para cada portfólio: média dos retornos ($\bar{\mu}^P$), média dos retornos anualizado ($\hat{\mu}_{anual}^P$), desvio padrão anualizado ($\hat{\sigma}_{anual}^P$), índice de sharpe (IS), retornos acumulados ($\hat{\mu}_{acum}^P$), máximo drawdown (MD), valor em risco (VaR) e turnover médio (TO). Os custos de transação são considerados nulos $c = 0$. Os asteriscos indicam a diferença estatística entre o índice de sharpe da carteira e o índice de sharpe do IBOVESPA no período com nível de significância de 10% (*), 5% (**) e 1% (***)).

Tabela A.5 – Carteira de mínima-variância com restrição de vendas, restrição por ativo (*box*) com $0 < w_i \leq 0.05$ para $i = 1, \dots, 30$ ativos e custos de transação de 15 p.b e 25 p.b.

Modelo	15 p.b.				25 p.b.			
	$\hat{\mu}_{anual}^P$	$\hat{\sigma}_{anual}^P$	IS	μ_{acum}^P	$\hat{\mu}_{anual}^P$	$\hat{\sigma}_{anual}^P$	IS	μ_{acum}^P
<i>Rebalanceamento Diário</i>								
Ingênua	10.41%	8.19%	1.272	27.12%	10.41%	8.19%	1.270	27.12%
Amostral	9.46%	6.73%	1.404	24.16%	9.26%	6.73%	1.375	23.72%
EWMA	6.62%	6.82%	0.971	17.61%	5.29%	6.82%	0.776	14.47%
LW-corr	9.47%	6.76%	1.400	24.21%	9.30%	6.76%	1.374	23.81%
LW-Fator	9.47%	6.73%	1.407	24.21%	9.30%	6.73%	1.381	23.81%
LW-I	9.47%	6.74%	1.406	24.21%	9.30%	6.74%	1.380	23.81%
DCC-GARCH	8.45%	6.65%	1.270	21.83%	6.94%	6.65%	1.044	18.35%
K-Fator ($K = 1$)	9.46%	6.75%	1.400	24.19%	9.29%	6.75%	1.376	23.79%
K-Fator ($K = 3$)	9.41%	6.72%	1.401	24.07%	9.24%	6.72%	1.375	23.67%
EWMA intra	6.47%	7.35%	0.880	17.36%	5.49%	7.36%	0.747	15.05%
DCC-GARCH intra	8.26%	7.51%	1.100	21.55%	7.33%	7.51%	0.976	19.40%
LASSO intra	3.18%	6.93%	0.460*	9.44%	-1.60%	6.93%	-0.232***	-2.45%
LASSO-logm intra	3.79%	6.87%	0.552	10.89%	-0.23%	6.87%	-0.034***	0.99%
adaLASSO intra	2.02%	6.96%	0.291**	6.61%	-2.84%	6.96%	-0.408***	-5.60%
adaLASSO-logm intra	2.80%	7.05%	0.397*	8.53%	-1.43%	7.05%	-0.203***	-1.98%
<i>Rebalanceamento Semanal</i>								
Ingênua	10.32%	8.18%	1.260	26.88%	10.32%	8.18%	1.260	26.88%
Amostral	9.51%	6.74%	1.412	24.30%	9.35%	6.74%	1.387	23.92%
EWMA	7.91%	6.88%	1.149	20.64%	7.08%	6.89%	1.028	18.71%
LW-corr	9.52%	6.77%	1.406	24.31%	9.35%	6.77%	1.382	23.93%
LW-Fator	9.51%	6.74%	1.412	24.30%	9.35%	6.74%	1.387	23.92%
LW-I	9.51%	6.74%	1.411	24.30%	9.35%	6.74%	1.387	23.92%
DCC-GARCH	9.25%	6.65%	1.391	23.67%	8.43%	6.65%	1.267	21.79%
K-Fator ($K = 1$)	9.53%	6.76%	1.410	24.34%	9.36%	6.76%	1.386	23.96%
K-Fator ($K = 3$)	9.46%	6.72%	1.407	24.17%	9.29%	6.72%	1.382	23.79%
EWMA intra	7.23%	7.35%	0.984	19.13%	6.58%	7.35%	0.895	17.61%
DCC-GARCH intra	8.76%	7.50%	1.168	22.71%	8.19%	7.50%	1.092	21.40%
LASSO intra	8.83%	6.94%	1.273*	22.77%	7.60%	6.95%	1.095	19.93%
LASSO-logm intra	8.29%	6.84%	1.212	21.50%	7.15%	6.84%	1.045	18.87%
adaLASSO intra	7.26%	6.96%	1.044**	19.14%	5.98%	6.96%	0.859	16.13%
adaLASSO-logm intra	7.58%	6.93%	1.094*	19.87%	6.39%	6.93%	0.922	17.10%
<i>Rebalanceamento Mensal</i>								
Ingênua	10.29%	8.18%	1.257	26.80%	10.29%	8.18%	1.257	26.80%
Amostral	9.57%	6.74%	1.419	24.43%	9.41%	6.74%	1.396	24.07%
EWMA	9.27%	6.93%	1.337	23.78%	8.79%	6.93%	1.269	22.68%
LW-corr	9.57%	6.77%	1.413	24.43%	9.41%	6.77%	1.389	24.07%
LW-Fator	9.58%	6.74%	1.420	24.44%	9.42%	6.74%	1.396	24.08%
LW-I	9.57%	6.74%	1.419	24.44%	9.42%	6.74%	1.396	24.08%
DCC-GARCH	9.68%	6.72%	1.441	24.67%	9.29%	6.71%	1.384	23.79%
K-Fator ($K = 1$)	9.57%	6.76%	1.414	24.42%	9.41%	6.76%	1.391	24.06%
K-Fator ($K = 3$)	9.52%	6.73%	1.415	24.32%	9.37%	6.73%	1.392	23.96%
EWMA intra	7.49%	7.35%	1.019	19.75%	7.10%	7.35%	0.966	18.83%
DCC-GARCH intra	9.01%	7.47%	1.205	23.27%	8.69%	7.47%	1.163	22.55%
LASSO intra	9.28%	6.97%	1.330	23.81%	8.86%	6.97%	1.27	22.85%
LASSO-logm intra	8.70%	6.94%	1.254	22.46%	8.34%	6.93%	1.202	21.63%
adaLASSO intra	8.86%	7.00%	1.265	22.85%	8.42%	7.00%	1.204	21.84%
adaLASSO-logm intra	8.40%	7.06%	1.189	21.79%	7.99%	7.06%	1.132	20.85%

Fonte: Elaboração do autor.

Notas: A tabela apresenta a performance das carteiras de mínima-variância global dos portfólios com $0 < w_{i,t} < 0.05$ e custo de transação de transação de 15 e 25 pontos-base para o período entre 02/01/2017 até 31/07/2019. As linhas referem-se aos estimadores da matriz de covariância do capítulo 4, além da carteira ingênua. A expressão “intra” corresponde ao uso de cotações intradiárias e “Logm” indica a aplicação da transformação logarítmica. As colunas representam as estatísticas de performance para cada portfólio: média dos retornos anualizado ($\hat{\mu}_{anual}^p$), desvio padrão anualizado ($\hat{\sigma}_{anual}^p$), índice de sharpe (IS), retornos acumulados ($\hat{\mu}_{acum}^p$). Os asteriscos indicam a diferença estatística entre o índice de sharpe da carteira e o índice de sharpe do IBOVSPA no período com nível de significância de 10% (*), 5% (**) e 1% (***)

Tabela A.6 – Carteira de mínima-variância com restrição de vendas, restrição por ativo (*box*) com $0 < w_i \leq 0.10$ para $i = 1, \dots, 30$ ativos e custos de transação de 15 p.b. e 25 p.b.

Modelo	15 p.b.				25 p.b.			
	$\hat{\mu}_{anual}^P$	$\hat{\sigma}_{anual}^P$	IS	$\hat{\mu}_{acum}^P$	$\hat{\mu}_{anual}^P$	$\hat{\sigma}_{anual}^P$	IS	$\hat{\mu}_{acum}^P$
<i>Rebalanceamento Diário</i>								
Ingênua	10.41%	8.19%	1.272	27.12%	10.41%	8.19%	1.272	27.12%
Amostral	7.07%	6.31%	1.120	18.59%	6.78%	6.31%	1.074	17.91%
EWMA	5.41%	6.47%	0.835	14.69%	2.54%	6.49%	0.391	7.79%
LW-corr	7.05%	6.33%	1.114	18.53%	6.83%	6.33%	1.079	18.02%
LW-Fator	7.18%	6.31%	1.137	18.84%	6.97%	6.31%	1.103	18.34%
LW-I	7.19%	6.31%	1.139	18.86%	6.97%	6.31%	1.105	18.36%
DCC-GARCH	5.35%	6.10%	0.877	14.49%	2.71%	6.11%	0.445	8.16%
K-Fator ($K = 1$)	7.03%	6.31%	1.114	18.50%	6.87%	6.31%	1.087	18.11%
K-Fator ($K = 3$)	7.23%	6.34%	1.140	18.95%	6.98%	6.34%	1.100	18.37%
EWMA intra	3.98%	7.28%	0.547	11.43%	2.30%	7.29%	0.316***	7.37%
DCC-GARCH intra	7.85%	7.17%	1.095	20.54%	6.43%	7.17%	0.897	17.23%
LASSO intra	-2.55%	6.61%	-0.386***	-4.91%	-9.58%	6.61%	-1.448***	-23.63%
LASSO-logm intra	-0.91%	6.52%	-0.141***	-0.77%	-6.91%	6.52%	-1.059***	-16.37%
adaLASSO intra	-3.65%	6.63%	-0.550***	-7.74%	-11.06%	6.64%	-1.665***	-27.75%
adaLASSO-logm intra	-1.26%	6.69%	-0.189***	-1.62%	-7.46%	6.69%	-1.115***	-17.82%
<i>Rebalanceamento Semanal</i>								
Ingênua	10.32%	8.18%	1.260	26.88%	10.32%	8.18%	1.260	26.88%
Amostral	7.17%	6.31%	1.136	18.82%	6.97%	6.31%	1.104	18.35%
EWMA	7.67%	6.45%	1.189	20.00%	6.02%	6.46%	0.931	16.13%
LW-corr	7.09%	6.32%	1.121	18.62%	6.90%	6.32%	1.091	18.18%
LW-Fator	7.22%	6.31%	1.143	18.92%	7.03%	6.31%	1.113	18.48%
LW-I	7.22%	6.31%	1.144	18.94%	7.03%	6.31%	1.115	18.50%
DCC-GARCH	7.44%	6.10%	1.221	19.42%	6.07%	6.10%	0.995	16.21%
K-Fator ($K = 1$)	7.08%	6.31%	1.121	18.60%	6.91%	6.31%	1.095	18.22%
K-Fator ($K = 3$)	7.30%	6.33%	1.152	19.12%	7.09%	6.33%	1.120	18.64%
EWMA intra	5.02%	7.26%	0.691	13.91%	4.03%	7.27%	0.555	11.56%
DCC-GARCH intra	8.62%	7.15%	1.205	22.31%	7.78%	7.15%	1.088	20.38%
LASSO intra	5.89%	6.57%	0.896	15.86%	4.12%	6.59%	0.625	11.64%
LASSO-logm intra	5.75%	6.51%	0.883	15.50%	4.09%	6.53%	0.628	11.57%
adaLASSO intra	5.89%	6.59%	0.893	15.85%	3.95%	6.60%	0.598	11.24%
adaLASSO-logm intra	5.75%	6.60%	0.871	15.53%	4.00%	6.61%	0.604	11.35%
<i>Rebalanceamento Mensal</i>								
Ingênua	10.29%	8.18%	1.257	26.80%	10.41%	8.19%	1.272	27.12%
Amostral	7.21%	6.32%	1.141	18.92%	7.04%	6.32%	1.115	18.53%
EWMA	9.24%	6.49%	1.423	23.63%	8.42%	6.49%	1.298	21.76%
LW-corr	7.07%	6.33%	1.118	18.60%	6.91%	6.33%	1.091	18.21%
LW-Fator	7.22%	6.32%	1.143	18.94%	7.05%	6.32%	1.116	18.55%
LW-I	7.23%	6.32%	1.144	18.95%	7.06%	6.32%	1.117	18.56%
DCC-GARCH	7.56%	6.14%	1.232	19.71%	6.96%	6.13%	1.136	18.31%
K-Fator ($K = 1$)	7.04%	6.32%	1.114	18.51%	6.88%	6.32%	1.089	18.15%
K-Fator ($K = 3$)	7.29%	6.33%	1.151	19.10%	7.11%	6.33%	1.122	18.68%
EWMA intra	5.05%	7.22%	0.700	13.97%	4.44%	7.22%	0.616	12.53%
DCC-GARCH intra	8.88%	7.14%	1.244	22.93%	8.45%	7.14%	1.184	21.93%
LASSO intra	7.32%	6.56%	1.117	19.21%	6.80%	6.55%	1.038	18.00%
LASSO-logm intra	7.16%	6.52%	1.097	18.82%	6.66%	6.52%	1.022	17.66%
adaLASSO intra	8.08%	6.60%	1.223	20.97%	7.46%	6.60%	1.130	19.54%
adaLASSO-logm intra	7.68%	6.64%	1.156	20.05%	7.12%	6.642%	1.073	18.76%

Fonte: Elaboração do autor.

Notas: A tabela apresenta a performance das carteiras de mínima-variância global dos portfólios com $0 < w_{i,t} < 0.10$ e custo de transação de transação de 15 e 25 pontos-base para o período entre 02/01/2017 até 31/07/2019. As linhas referem-se aos estimadores da matriz de covariância do capítulo 4, além da carteira ingênua. A expressão “intra” corresponde ao uso de cotações intradiárias e “logm” indica a aplicação da transformação logarítmica. As colunas representam as estatísticas de performance para cada portfólio: média dos retornos anualizado ($\hat{\mu}_{anual}^p$), desvio padrão anualizado ($\hat{\sigma}_{anual}^p$), índice de sharpe (IS), retornos acumulados ($\hat{\mu}_{acum}^p$). Os asteriscos indicam a diferença estatística entre o índice de sharpe da carteira e o índice de sharpe do IBOVSPA no período com nível de significância de 10% (*), 5% (**) e 1% (***).

APÊNDICE C – PARÂMETRO DE ENCOLHIMENTO

Defina y_{it} , como o retorno do ativo i no período t com $1 \leq i \leq N$ e $1 \leq t \leq T$. A média amostral dos retornos do ativo i é dada por $\bar{y}_i = T^{-1} \sum_{t=1}^T y_{it}$. Sejam Σ , a matriz de covariância populacional (verdadeira) e S , a matriz de covariância amostral. As entradas das matrizes Σ e S são denotadas por σ_{ij} e h_{ij} , respectivamente.

As correlações populacionais e amostrais entre os retornos dos ativos i e j são dadas por

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}} \quad \text{e} \quad r_{ij} = \frac{h_{ij}}{\sqrt{h_{ii}h_{jj}}}. \quad (\text{C.1})$$

As médias das correlações populacionais e amostrais são respectivamente

$$\bar{\rho} = \frac{2}{(N-1)N} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \rho_{ij} \quad \text{e} \quad \bar{r} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N r_{ij}. \quad (\text{C.2})$$

A matriz de correlação constante da população Φ possui nas suas entradas

$$\phi = \sigma_{ii} \quad \text{e} \quad \phi_{ij} = \bar{\rho} \sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}. \quad (\text{C.3})$$

A matriz de correlação constante amostral F possui as entradas,

$$f_{ii} = h_{ii} \quad \text{e} \quad f_{ij} = \bar{r} \sqrt{h_{ii}h_{jj}}. \quad (\text{C.4})$$

A norma de Frobenius é uma matriz simétrica Z de dimensão $N \times N$ cujas entradas $(z_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ são determinadas por

$$\|Z\|^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N z_{ij}^2. \quad (\text{C.5})$$

A função de perda quadrática adotada é a distância entre o estimador de encolhimento e a matriz de covariância verdadeira calculada através de

$$L(\alpha) = \|\alpha F + (1 - \alpha)S - \Sigma\|^2, \quad (\text{C.6})$$

e o da objetivo da minimização é encontrar a constante de encolhimento α que minimiza o valor esperado da função de perda:

$$E(L(\alpha)) = E(\|\alpha F + (1 - \alpha)S - \Sigma\|^2). \quad (\text{C.7})$$

Ledoit e Wolf (2003) provam que o valor ótimo α^* se comporta assintoticamente como uma constante sobre T . Esta constante, chamada κ , pode ser escrita como

$$\kappa = \frac{\pi - \rho}{\gamma}, \quad (\text{C.8})$$

π é a soma das variâncias assintóticas das entradas da matriz de covariância amostral escalonada por \sqrt{T} , $\pi = \text{AsiVar}[\sqrt{T}s_{ij}]$, ρ é a soma das covariâncias assintóticas das entradas do alvo de encolhimento com as entradas da matriz de covariância escalonadas por \sqrt{T} , $\rho = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \text{AsiCov}[\sqrt{T}f_{ij}, \sqrt{T}s_{ij}]$, e finalmente, γ mede a má especificação do parâmetro de encolhimento, sendo calculado por $\gamma = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\phi_{ij} - \sigma_{ij})^2$.

Como κ é desconhecido, precisamos encontrar um estimador consistente para κ através de estimadores consistentes dos parâmetros π , ρ e γ .

O estimador consistente para π é

$$\hat{\pi} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\bar{r}}{2} \left(\sqrt{\frac{h_{jj}}{h_{ii}}} \cdot \hat{v}_{ii,ij} + \sqrt{\frac{h_{ii}}{h_{jj}}} \cdot \hat{v}_{jj,ij} \right), \quad (\text{C.9})$$

$$\hat{v}_{ii,ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left\{ (y_{it} - \bar{y}_i)^2 - s_{ii} \right\} \left\{ (y_{it} - \bar{y}_i)(y_{jt} - \bar{y}_j) - s_{ij} \right\}, \quad (\text{C.10})$$

$$\hat{v}_{jj,ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left\{ (y_{jt} - \bar{y}_j)^2 - h_{jj} \right\} \left\{ (y_{it} - \bar{y}_i)(y_{jt} - \bar{y}_j) - h_{ij} \right\}. \quad (\text{C.11})$$

O estimador consistente para γ é

$$\hat{\gamma} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (f_{ij} - h_{ij})^2, \quad (\text{C.12})$$

onde f_{ij} e h_{ij} são estimadores consistentes para ϕ_{ij} e σ_{ij} , respectivamente. Finalmente, o estimador consistente para κ é calculado através dos parâmetros estimados anteriormente.

$$\hat{\kappa} = \frac{\hat{\pi} - \hat{\rho}}{\hat{\gamma}} \quad (\text{C.13})$$

O estimador de encolhimento proposto para uso empírico é definido pelos autores pela regra

$$\hat{\alpha}^* = \max\left\{0, \min\left\{\frac{\hat{\kappa}}{T}, 1\right\}\right\} \quad (\text{C.14})$$

A intuição para esta fórmula é que para amostras finitas pode ocorrer com que $\hat{\kappa}/T < 0$ ou $\hat{\kappa}/T > 1$, e portanto, a fórmula anterior trunca o parâmetro $\hat{\alpha}$ entre 0 e 1.