UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

STEPHANIE DA SILVA TRINDADE

A CONSTITUIÇÃO DE UM GRUPO DE ESTUDOS SOBRE FRAÇÕES COM PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

Porto Alegre

2021

STEPHANIE DA SILVA TRINDADE

A CONSTITUIÇÃO DE UM GRUPO DE ESTUDOS SOBRE FRAÇÕES COM PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Linha de Pesquisa: Formação de professores de Matemática e novas tendências.

Orientador(a): Profª Drª Elisabete Zardo Búrigo.

Porto Alegre

2021

STEPHANIE DA SILVA TRINDADE

A CONSTITUIÇÃO DE UM GRUPO DE ESTUDOS SOBRE FRAÇÕES COM PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

COMISSÃO EXAMINADORA:

____

Profª Drª Elisabete Zardo Búrigo – Orientadora

____

Profª Drª Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes (UFSM)

____

Profª Drª Andreia Dalcin (UFRGS)

____

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso (UFRGS)

Porto Alegre
2021

À minha mãe, Giovana, por me apresentar as mais diversas formas de amor e incentivo.

Ao meu pai, José Eni (in memorian), por ter me apoiado até nos seus últimos momentos.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe por todo o suporte e amparo para que eu seguisse meus objetivos. Sou grata por ser privilegiada e ter um ser humano tão incrível como mãe. A conclusão de mais essa etapa em minha vida só foi possível pelo resgate e incentivo nos momentos importantes.

Ao meu pai, que mesmo não estando mais presente durante este percurso, pôde acompanhar os momentos iniciais no mestrado e me incentivar com sua frase preferida: *“A única coisa que não podem te tirar nessa vida são os teus estudos, então estude!”.*

À Patrícia, por fazer das minhas realizações suas também, por somar e incentivar durante essa caminhada; por tornar mais leve o caminho.

À professora Elisabete pelo aceite em formar esta parceira, por toda sua disponibilidade e determinação em se fazer presente mesmo de longe. Sua presença mesmo virtual durante a pandemia de Covid-19 e estímulo para as reflexões foram essenciais para o desenvolvimento da pesquisa e meu desenvolvimento profissional.

Às professoras Andreia e Anemari e ao professor Marcus pelas contribuições durante a qualificação desta pesquisa e pela disponibilidade em avaliar este trabalho.

À professora Maria Arlita pelo tato em orientar seus alunos durante a graduação, por incentivá-los a buscar mais e pela paciência em ter me orientado e incentivado em momentos conturbados. Sou grata por ter se feito presente até aqui.

À CAPES pelo fomento disponibilizado durante a realização desta pesquisa.

Presentemente eu posso me
considerar um sujeito de sorte
Porque apesar de muito moço me
sinto são e salvo e forte
[...]
Eu sonho mais alto que drones
Combustível do meu tipo? A fome
Pra arregaçar como um ciclone
Pra que amanhã não seja só um
ontem com um novo nome

AmarElo – Belchior/Emicida

RESUMO

Este trabalho narra o processo de planejamento e as interações entre professores que ensinam Matemática, participantes de um curso de extensão sobre frações no Ensino Fundamental. Foram adotados pressupostos teóricos sobre saberes docentes, aprendizagem na e da prática e os significados de fração. O curso de extensão, intitulado “Estudo e Ensino de Frações na Escola”, foi organizado visando a constituição de um grupo de estudos, dialogando com a questão de pesquisa: Como ocorre a construção de um grupo de estudos por professores que ensinam matemática e estudam o ensino de frações?. O curso foi oferecido a professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental de escolas públicas do Rio Grande do Sul, e realizado em encontros semanais virtuais de fevereiro a abril de 2021. Os participantes foram convidados a participar do estudo no ambiente do curso estudando materiais elaborados pela pesquisadora, propondo assuntos, tendo iniciativa e autonomia nos estudos, vinculando-os a suas experiências docentes. Com inspiração na metodologia da pesquisa narrativa, construímos a narrativa da investigação tendo como registros: vídeo e áudio dos encontros do curso de extensão, atividades e materiais enviados pelos participantes e diário de bordo da pesquisadora. A leitura e a narrativa dos encontros permitiram identificar três dimensões relevantes para a constituição de um grupo de estudos: avanços nas interações e discussões sobre as atividades propostas, a mobilização das experiências profissionais no decorrer dos encontros e as percepções e construções do ambiente por parte de cada professor. Percebemos que as mudanças ocorridas no ambiente estiveram marcadas pela colaboração, coletividade e responsabilidade na participação e aprendizagem mútua. As experiências docentes foram mobilizadas durante as interações com diferentes intuitos, como relatos de experiências exemplificando situações, realizando comparativos e como foco de reflexões, buscando inspirações e ideias para as práticas docentes dos professores. Consideramos que as experiências profissionais foram o pilar central para a constituição do espaço como grupo de estudos, e que o mesmo se desenvolveu de forma dinâmica e pela dinâmica.

PALAVRAS-CHAVE: Saberes docentes. Desenvolvimento profissional. Ensino de matemática. Frações. Ensino Fundamental. Grupo de estudos.

ABSTRACT

This work narrates the planning process and interactions among teachers who teach Mathematics, participants of an extension course on fractions in elementary school. We adopted theoretical assumptions about teaching knowledge, learning in and from practice, and the meanings of fractions. The extension course, entitled "Study and Teaching of Fractions at School," aimed at the constitution of a study group, dialoguing with the research question: How does the construction of a study group by teachers who teach mathematics and study the teaching of fractions?. The course brought together teachers who teach mathematics in elementary public schools in the state of Rio Grande do Sul in weekly virtual meetings from February to April 2021. The researcher invited the teachers to participate in the course environment by studying materials prepared previously, proposing subjects, taking the initiative and autonomy in studies, linking them to their teaching experiences. Inspired by the narrative research methodology, we built the narrative of the investigation having as records: video and audio of the meetings of the extension course, activities, and materials sent by the participants and the researcher's logbook. We identified three relevant dimensions for the constitution of a study group: advances in interactions and discussions on the proposed activities, the mobilization of professional experiences during the meetings, and the perceptions and constructions of the environment on the part of every teacher. We realized that collaboration, collectivity, and responsibility in participation and mutual learning enabled the changes in the environment. The teachers mobilized their teaching experiences during interactions with different purposes, such as experience reports exemplifying situations, making comparisons, and as a focus of reflections, seeking inspiration and ideas for teachers' teaching practices. We believe that professional experiences were the central pillar for the dynamical constitution of the space as a study group.

KEYWORDS: Teaching knowledge. Professional development. Teaching math. Fractions. Elementary School. Study group.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Diferentes processos e caminhos influenciaram meu interesse pelos temas envolvidos nesta pesquisa e pelas mudanças ocorridas ao longo do processo. Nesta introdução apresento motivos que instigaram meu interesse pelos temas desta pesquisa e reflexões envolvidas no seu planejamento.

Inicio mencionando as vivências e reflexões que o curso de Magistério (Curso Normal), no Instituto Estadual de Educação Pereira Coruja, no município de Taquari, Rio Grande do Sul me proporcionou. Antes de qualquer escolha de profissão e/ou olhar para Educação Matemática, o referido curso já despertava inquietações quanto à construção das ideias de número por estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Naquele momento percebia que estava mais atenta a notar as etapas de alfabetização e letramento em cada estudante do que constatar etapas de alfabetização matemática e numeramento, e tal fato me intrigava. Acredito que este tenha sido um dos processos iniciais do meu pensamento quanto à Educação Matemática e ao Ensino de Matemática. Nesse mesmo período, em conexão com essa inquietação, passei a pensar sobre a formação dos professores responsáveis pelo início da alfabetização, os professores atuantes nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Em seguida, no decorrer da graduação em Ciências Exatas – Licenciatura, tive a oportunidade de estudar um pouco mais a fundo o processo de construção do conceito de número, elucidando algumas das inquietações anteriores e desenvolvendo outras. Em determinado momento, me interessei por pesquisas referentes aos conjuntos numéricos e suas propriedades, estudadas ainda ao longo do Ensino Fundamental, e o conjunto dos números racionais ganhou prioridade nas novas inquietações. Assim, iniciei questionamentos quanto a esses números.

Nas etapas de escolha da temática para esta pesquisa, tomei como ponto de partida as inquietações e interesses mencionados nos parágrafos acima; para tanto optei por considerar o ensino de matemática ao longo do Ensino Fundamental, A partir de discussões e do percurso realizado ao longo da graduação, percebo que dentre os “medos” dos estudantes ainda na Educação Básica, o assunto *frações* é um dos que maior impacto causa ao ser mencionado. Por este motivo, optei por enfocar, na pesquisa, o estudo de número racional ao longo do Ensino Fundamental.

Após essas escolhas, as dúvidas “*o que fazer e como fazer?*” surgiram. A tomada de decisão sobre qual curso de graduação seguir favoreceu que a formação de professores fosse alvo de reflexões, pois percebia que embora tivesse interesse no ensino de matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, o curso de Pedagogia não era a opção ideal para mim naquele momento. As reflexões sobre formação de professores seguiram durante a graduação em Ciências Exatas e durante os componentes curriculares do mestrado em Ensino de Matemática. Nesses ambientes, pude ler estudos que apontavam para a falta ou insuficiência de disciplinas relacionadas à matemática nos cursos de Pedagogia e/ou a influência que estas componentes curriculares exercem na formação destes profissionais. Tais leituras me deram embasamento para formular um projeto inicial de pesquisa. Naquele momento, percebia que desenvolver uma pesquisa sobre formação de professores poderia expandir minhas considerações e perspectivas quanto à prática docente.

Nessa sequência de acontecimentos, pensamentos e opções, escolhi realizar uma ação de formação continuada com Professores que Ensinam Matemática (PEM) no Ensino Fundamental de escolas públicas, enfocando o conceito de número racional. Para tanto, optei por abordar os diferentes significados dos números racionais, visando sua reconstrução.

1.1. O PERCURSO INICIAL DA PESQUISA

Corroborando a percepção que tive quanto aos números racionais no decorrer da graduação e a opção por considerar este assunto como parte da pesquisa, percebi que diferentes autores (MOREIRA, DAVID, 2005; ROMANATTO, 1997, 1999; ONUCHIC, ALLEVATO, 2008; SOARES, FERREIRA, MOREIRA, 2010) e propostas curriculares (BRASIL, 1998; 2017) enfatizam a importância de estudos envolvendo esta ideia matemática no Ensino Fundamental. A busca por compreender o processo de ensino e aprendizagem dos números racionais justifica-se pela importância desses números para resolver diferentes situações no dia a dia e de outras áreas do conhecimento (por exemplo, Física, Química, Biologia, Engenharia). E pela avaliação de que a não compreensão do conceito ou compreensões distorcidas desencadeiam prejuízos à interpretação de fenômenos e eventos do mundo real (SOARES, 2007).

Segundo Caraça (1951), a construção histórica dos números racionais precisou romper algumas ideias relacionadas aos naturais, constituindo-se em uma complexa e importante estrutura da Matemática. Além disso, atenta-se para o estudo dos números racionais na formação inicial do professor de Matemática, a qual, segundo Moreira e David (2005), frequentemente se limita a questões relacionadas ao corpo ordenado dos números racionais ou, então, à percepção do conjunto dos números racionais como um subconjunto dos reais. Em outros termos, segundo estes autores, em muitos cursos de licenciatura, os números racionais são abordados apenas como uma ferramenta para a compreensão e construção dos reais.

Ao discutir sobre a importância dos números racionais na Educação Básica, bem como a complexidade de sua aprendizagem, Soares, Ferreira e Moreira (2010) apontam que as experiências que constroem o conceito de número racional vivenciadas pela criança ocorrem de forma lenta e não planejada. Magina e Campos (2008) afirmam que a criança pode até apresentar habilidades em manipular números racionais, porém, isto não permite concluir que as mesmas possuam consciência do processo e clareza do conceito de número racional.

A complexidade na aprendizagem destes números é enfatizada por diferentes autores, (ROMANATTO, 1997, 1999; SOARES, 2007; ONUCHIC, ALLEVATO, 2008), os quais argumentam que tal fato se deve à representação $\frac{a}{b}$ assumir diferentes significados, de acordo com o contexto na qual está inserida. Onuchic e Allevato (2008) compreendem que a notação “barra fracionária” induz generalizações equivocadas por parte dos estudantes, levando, por exemplo, ao tratamento semelhante ou similar entre frações e razões.

Quanto à formação de professores dos anos iniciais, pesquisas como a de Magina e Campos (2008) investigaram as concepções de professores atuantes nesta etapa de ensino ao analisarem diferentes situações envolvendo fração e a resolução dessas situações por parte de seus alunos. As pesquisadoras constataram que os professores dos anos iniciais participantes da pesquisa superestimaram o nível de acertos de seus alunos, e esses, por sua vez, apresentaram desempenhos considerados insuficientes em diversos problemas, principalmente naqueles que envolviam significados como o de *número* e *operador multiplicativo*. As autoras apontam como uma possível causa de tal evento, a falta de clareza por parte dos professores sobre os diferentes significados que os números racionais podem assumir, levando-os a apresentarem estratégias de ensino que não potencializam a superação de falsas concepções quanto a esses números.

Os aspectos salientados acima, como a importância do conceito de número racional em interpretações de eventos do cotidiano, a ruptura de algumas ideias relacionadas aos naturais para conceituar um novo conceito de número e as concepções distorcidas que estudantes apresentam quanto a esses números, reforçam a necessidade de discussões e estudos do modo como estes (números racionais) estão sendo tratados nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Assim, esses aspectos motivaram a proposta inicial desta pesquisa, envolvendo a formação de professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental quanto aos números racionais por meio de seus diferentes significados.

Entretanto, mudanças ocorreram no decorrer da pesquisa. Inicialmente, decorrente das leituras realizadas no âmbito do mestrado, minhas perspectivas quanto à formação de professores em espaços coletivos foram se transformando, no sentido de que novas possibilidades e compreensões foram sendo percebidas como possíveis. Por meio de discussões e estudos realizados durante a componente curricular de "Metodologia de Pesquisa em Educação Matemática" cursada em 2019 passei a considerar Comunidade de Prática[1] (CoP) como opção para a pesquisa. Assim, uma versão inicial do projeto de pesquisa apresentado ao Programa de Pós-Graduação em março de 2020 foi a construção de um grupo de estudos almejando a possível constituição de uma CoP com os participantes. Para tanto, buscava reunir professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental de uma mesma escola. O intuito de delimitar o grupo de professores a uma única escola justificava-se pelo objetivo de alcançar uma CoP.

A fim de constituir um grupo constituído por professores de uma mesma escola, durante o ano de 2019 mantive contato com a escola A[2], situada em Taquari-RS, com a qual eu tinha vínculos e sabia da sua receptividade para com pesquisas e formações para os professores. Devido ao cronograma de desenvolvimento da pesquisa retomei o contato com a escola A durante os meses de janeiro a março de 2020, contudo não obtive retorno. Em março de 2020 já vivíamos a pandemia de Covid-19 e em meio à situação tínhamos o começo do ano letivo nas escolas, assim, as aulas presenciais era assunto de discussão. Permaneci na busca de contato com outras escolas também situadas na cidade de Taquari, entretanto, acredito que pela incerteza sobre a continuidade ou retomada das aulas, não obtive retorno de nenhuma delas. Então realizei o contato direto com professores próximos a mim. Dentre as pessoas com quem entrei em contato, duas delas tinham interesse em participar de momentos de formação sobre números racionais, embora trabalhassem em escolas diferentes. Almejávamos congregar um número maior de professores, assim, optamos por abrir as inscrições para um curso de extensão. Decidimos limitar o número de vagas a fim de priorizar as discussões e vínculos entre os participantes. Deste modo, divulgamos o período de inscrições para o curso no site do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, com prazo de sete dias. Neste período, divulguei via *Whatsapp e Facebook* a abertura de inscrições entre aqueles professores com quem já havia conversado anteriormente.

---

[1] Fazendo referência às ideias propostas por Wenger (1998).
[2] Nome da instituição será preservado.

Assim, entre os meses de julho e setembro de 2020 ocorreu a primeira oferta do curso de extensão tendo como objetivo a constituição de um grupo de estudo sobre números racionais.

1.2. A PRIMEIRA EXPERIÊNCIA E AS REFORMULAÇÕES DECORRENTES

O curso de extensão proposto e realizado durante 2020 ocorreu durante onze semanas no período de julho a setembro de 2020 com encontros virtuais semanais, sendo intitulado como "(Re)construindo o conceito de número racional e outros conceitos matemáticos emergentes da prática no Ensino Fundamental". O intuito da proposta de curso de extensão foi proporcionar aos professores um ambiente em que pudessem sugerir e participar ativamente das discussões e estudos sobre números racionais, bem como outros conceitos emergentes de discussões. Visando isso foram disponibilizados cinco materiais contendo situações-problema que envolviam significados de números racionais como ponto de partida de estudo.

Participaram cinco professores que ensinavam ou tinham experiência no ensino de matemática no Ensino Fundamental de escolas públicas no Rio Grande do Sul. Destes cinco professores, dois foram convidados por mim nos meses anteriores, uma foi convidada por um dos professores com quem eu havia conversado e outros dois professores haviam se inscrito por meio da divulgação no site do programa. Assim, três professoras residiam e atuavam em Taquari e dois professores residiam e atuavam na região metropolitana de Porto Alegre. As professoras residentes em Taquari atuavam nos anos iniciais do Ensino Fundamental, já os professores da região metropolitana atuavam nos anos finais. Dos cinco professores, participantes três se mantiveram até o último encontro previsto como data final do curso de extensão.

Embora nesta primeira experiência desenvolvendo o estudo com professores tenhamos constituído registros importantes e que contribuiriam para a pesquisa, naquele momento, não tivemos o consenso de participação na pesquisa dos professores participantes das interações. Assim, embora tivéssemos registros como as gravações de vídeo e áudio, após o exame de qualificação optamos por não considerar esta experiência para a pesquisa, e então elaboramos uma nova proposta. Para a nova proposta consideramos nossas reflexões sobre a experiência anterior, as interações desenvolvidas e o formato proposto de estudo, assim, reformulamos um novo projeto de extensão.

Com base nos dilemas e na experiência anterior, e também considerando a discussão realizada no exame de qualificação, optamos por aumentar o número de vagas no curso a fim de que a diversidade de participantes potencializasse as interações. Para tanto, aumentamos o período de inscrições para trinta dias na segunda quinzena de janeiro e na primeira quinzena de fevereiro de 2020. Fomentamos a divulgação envolvendo site do programa de pós-graduação e perfis oficiais em redes sociais do programa; e mudamos o nome do curso de extensão para “Estudo e Ensino de Frações na Escola”. Por intermédio das mudanças realizadas alcançamos o interesse e procura de cinquenta professores nas primeiras vinte quatro horas de inscrições, assim tínhamos cinquenta inscritos ainda faltando mais de um mês para a data de início dos encontros. Após a identificação dos perfis dos professores por meio do formulário de inscrições e devido ao número limitado de vagas, aprovamos a inscrição de doze professores, dos quais onze participaram de algum momento de estudo e interação e quatro concluíram os oito encontros previstos.

Além da ampliação da divulgação e inscrições realizamos pequenas mudanças nos arquivos disponibilizados. O arquivo com maior alteração foi aquele nomeado como “Material 05”, no qual, ao invés de apresentarmos situações envolvendo a percepção de frações como número, optamos por apresentar situações-problema em que deveríamos operar com frações (operações que não necessariamente eram abordadas nos materiais anteriores). Os demais materiais passaram por revisão e pequenas mudanças gramaticais e/ou de formatação.

Quanto às mudanças relacionadas à abordagem e ao espaço proposto no curso de extensão, retomamos e aprofundamos o estudo nos referenciais sobre espaços formativos envolvendo professores que ensinam matemática. Delimitamos características que constituíssem um grupo de estudos (como apresentado na seção 2.4) e então reformulamos a abordagem na apresentação do curso de extensão. Para a segunda experiência passei a perceber a necessidade em propor momentos que incentivassem a iniciativa de cada professor nos estudos, bem como fortalecer a interação e responsabilidade uns com os outros. Percebi que eu, quanto pesquisadora/participante do estudo/e professora com pouca experiência profissional poderia instigá-los mais em relação a suas práticas profissionais, propondo situações e questionamentos vinculados ao tema de estudo. Assim, comecei um estudo e exercício diário de deixar minhas ideias, dúvidas e interesses mais transparentes, a fim de que isso desfizesse parte da formalidade que tínhamos enquanto pesquisador/participante e nos aproximássemos como iguais. Senti a necessidade de minimizar uma certa formalidade presente na experiência anterior. Percebo tal formalidade como reflexo de meus sentimentos e posicionamento pessoal frente a uma situação que, embora fosse planejada, era nova em minha rotina.

Após a reformulação da proposta, dos referenciais de pesquisa e das mudanças na divulgação e inscrições, nossa segunda proposta de curso de extensão ocorreu entre os meses de fevereiro e abril de 2020. Nessa experiência tivemos o consentimento dos professores participantes das interações, assim, utilizamos os registros obtidos nesse contexto para a análise e desenvolvimento da pesquisa. Assim, com os registros obtidos com o desenvolvimento da proposta em 2021 buscamos construir a narrativa entrelaçando aspectos que se aproximam à questão de pesquisa: Como ocorre a construção de um grupo de estudos por professores que ensinam matemática e estudam o ensino de frações? Dentre as características que consideramos para um grupo de estudo estão a *coletividade*, *colaboração e responsabilidade* com o estudo e os demais participantes, tais aspectos serão discutidos na seção 2.

2. FUNDAMENTOS QUE COMPÕEM O NOSSO OLHAR

"É estranho que os professores tenham a missão de formar pessoas e que se reconheça que possuem competências para tal, mas que, ao mesmo tempo, não se reconheça que possuem a competência para atuar em sua própria formação e para controlá-la [...]."

Maurice Tardif

Buscamos relacionar diferentes perspectivas para compor o olhar adotado nesta pesquisa. Deste modo nos apropriamos de três linhas de diálogo que ao final convergem para uma direção, são elas: os saberes mobilizados pelos professores, a formação de professores que ensinam matemática e pressupostos sobre frações e seus significados. Nas subseções a seguir comentamos cada uma das perspectivas segundo autores da área e em seguida entrelaçamos umas com as outras apresentando o olhar pelo qual buscamos entrelaçar a narrativa da pesquisa com nossa questão norteadora.

2.1. OS SABERES DOCENTES SEGUNDO MAURICE TARDIF

Pesquisadores como Tardif (2010) e Gauthier e outros (1998) compreendem que a prática do professor é composta por diversos saberes intrínsecos a ela. Esses autores propõem algumas ideias e tipificações para esses saberes. A seguir abordamos elementos deste assunto, para que então possamos perceber e refletir sobre como esses saberes se fazem presentes nas falas dos professores ao longo do grupo de estudos.

Maurice Tardif é sociólogo, dirige pesquisas sobre formação de professores em Montréal, no Canadá, e participa de debates sobre educação no Brasil. O autor salienta que o saber do professor é plural e heterogêneo, pois envolve, na própria prática docente, conhecimentos e saberes-fazer diversos, decorrentes de diferentes fontes e momentos, como a formação profissional e o trabalho docente. Ainda vinculando os saberes à prática docente, o autor menciona que "ensinar é mobilizar uma ampla variedade de saberes, reutilizando-os no trabalho para adaptá-los e transformá-los pelo e para o trabalho." (TARDIF, 2010, p. 20-21). Gauthier e outros (1998) propõem uma discussão próxima à de Tardif, compreendendo a existência de vínculos entre o ensino e a prática e, assim, enfatizam a importância de se considerar o contexto em que acontece o ensino. Nessa linha, os autores, assim como Tardif (2010), percebem a prática docente como âmbito de mobilização de diferentes saberes.

Tardif (2010) compreende a seguinte tipificação de saberes relacionados à prática docente, os quais assumiremos como olhar para as falas dos professores nesta pesquisa:

- *Os saberes da formação profissional*: compreendem o conjunto de saberes construídos no âmbito das instituições de formação, como os saberes das ciências da educação. Os saberes pedagógicos fazem parte deste momento, como reflexões sobre a prática docente. Essas reflexões buscam uma representação e orientação para a atividade educativa.

- *Os saberes disciplinares:* "são saberes que correspondem aos diversos campos do conhecimento, aos saberes de que dispõe a nossa sociedade, tais como se encontram hoje integrados nas universidades, sob a forma de disciplinas, no interior de faculdades e de cursos distintos.". Esses saberes, conforme o autor, são decorrentes dos grupos sociais de "produtores de saberes" (TARDIF, 2010, p. 38).

- *Os saberes curriculares:* são os saberes que as instituições de ensino categorizam e apresentam relacionados aos conhecimentos sociais por ela definidos, almejando determinada cultura para a qual se espera que estejam preparando seus estudantes. São perceptíveis por meio de objetivos, conteúdos e métodos que as instituições oferecem aos professores.

- *Os saberes experienciais:* são os saberes construídos a partir da prática e trabalho cotidiano realizado por professores. Assim, eles emergem e se validam por meio da prática, e são decorrentes tanto da experiência individual como da coletiva. São atualizados e necessários à prática docente, além de serem constituídos de outros saberes (como os disciplinares ou pedagógicos) reformulados devido à prática.

Tardif (2010) menciona que os professores tendem a hierarquizar seus saberes em relação a suas utilidades no ensino, dando ênfase aos saberes vinculados à sua prática cotidiana. Devido à intenção de vincular as discussões em grupo com as práticas de cada professor, nos parágrafos seguintes enfatizamos aspectos dos *saberes experienciais.*

Tardif (2010) compreende que os saberes experienciais estão intrinsecamente ligados a múltiplas interações e estão diretamente condicionados por elas. Tal condicionamento se deve ao fato de essas interações transcenderem situações abstratas, repercutindo em "situações concretas que não são passíveis de definições acabadas e que exigem improvisação e habilidade pessoal, bem como a capacidade de enfrentar situações mais ou menos transitórias e variáveis" (p. 49).

Tardif (2010) compreende que os *saberes experienciais* possuem três aspectos (condicionantes), a saber: as relações e interações estabelecidas entre os professores e outros participantes das práticas, a começar pelos alunos; as obrigações e normas que seu trabalho exige, como os programas escolares/institucionais; as próprias instituições como meio organizado e formado por diferentes funções hierárquicas. Contudo, o autor esclarece que esses não são objetos de conhecimento, mas sim constituintes da prática docente e que se revelam apenas por meio dela. Nesta linha, os *saberes experienciais* aparecem não como saberes constituídos como os demais (da formação, curriculares e disciplinares), mas sim como compostos por eles, reformulados, “polidos” e novamente testados.

Indo além, Tardif (2010) busca compreender e identificar o efeito do tempo nos saberes profissionais dos professores. Em outras palavras, busca uma solução para o “pluralismo epistemológico” dos saberes, encontrando uma perspectiva, em seu ponto de vista válida, na natureza social que nos engloba. Passando, assim, a considerar aspectos decorrentes dos saberes pessoais (como o ambiente familiar) e/ou da formação escolar anterior (Educação Básica) que possivelmente influenciam os saberes docentes. Exemplificando a compreensão do autor quanto a estas influências, destacamos o seguinte trecho: “Nesse sentido, o saber profissional está, de um certo modo, na confluência entre várias fontes de saberes provenientes da história de vida individual, da sociedade, da instituição escolar, dos outros atores educativos, dos lugares de formação, etc.” (TARDIF, 2010, p. 64).

2.2. A FORMAÇÃO DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

É importante iniciar as considerações quanto à perspectiva de formação de professores tomada neste texto, salientando que, conforme Fiorentini e outros (2002), compreendemos que esta pesquisa não é um estudo no campo de formação de “professores de matemática” (PM), mas sim no campo de formação de “professores que ensinam matemática” (PEM). Tal percepção se deve ao fato de que o estudo não diz respeito somente a professores de matemática (licenciados para tal), mas também a professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, estes não sendo em sua maioria licenciados em matemática e não tendo o ensino de matemática como única ou principal atribuição.

Fiorentini e outros (2002) propõem uma perspectiva quanto à formação de professores que ensinam matemática ao longo de vinte e cinco anos de pesquisas no Brasil, tal perspectiva nos oferece uma percepção de como se desenvolveram as pesquisas neste campo de estudo. Os autores constatam, no período de 1978 a 2002, a existência de cento e doze trabalhos que tinham como objetivo principal a formação ou o desenvolvimento profissional de professores. Por intermédio desses trabalhos, foi possível a percepção de que a produção acadêmica sobre o assunto cresceu significativamente no período observado, sendo o número de pesquisas na década de 1990 aproximadamente oito vezes maior do que nas duas décadas anteriores. Os autores compreendem que esse aumento esteve vinculado ao crescimento no número de programas de pós-graduação relacionados à Educação Matemática e, ainda, à tendência mundial da época que passava a reconhecer o professor como ator fundamental dos processos educacionais.

Fiorentini e outros (2002) percebem que, no que diz respeito à formação continuada de professores que ensinam matemática, aconteceu no período analisado uma mudança de paradigma, de modo que deixam de ser pesquisas *para* professores passando a ser pesquisas *com* professores.

Quanto a pesquisas atuais no campo da formação de professores que ensinam matemática, Fiorentini (2018) reafirma o que já haviam percebido no período de 1978 a 2002 e corrobora o aumento constante de pesquisas envolvendo este campo de estudo. Em contrapartida ao estudo publicado em 2002, o novo mapeamento realizado pelo grupo de pesquisadores e relatado por Fiorentini (2018) aponta um crescimento de pesquisas que estudam outros contextos para além da formação inicial e continuada, algo que não acontecia no primeiro mapeamento. Neste novo conjunto de pesquisas, focos como a aprendizagem docente, saberes profissionais e crenças, concepções e atitudes dos professores que ensinam matemática foram alvo de investigações.

Nesta linha, Fiorentini e Crecci (2017) abordam conhecimentos/saberes mobilizados em formação continuada de professores que ensinam matemática. Os autores utilizam *corpus* de pesquisas relacionadas entre 2001 e 2012, e optam por considerar apenas trabalhos de doutorado, obtendo, assim, treze pesquisas. Os autores distinguem saberes de conhecimentos:

> Assumimos que, quando um saber, ou parte dele, passa ao nível de consciência, geralmente via análise ou sistematização, esse saber se torna também um “conhecimento”. Ou seja, consideramos o conhecimento como uma forma especial de saber que se diferencia por ser consciente ou explícito, após passar por um processo de sistematização. (FIORENTINI; CRECCI, 2017, p. 167).

Como forma de sistematização, os professores classificaram os trabalhos analisados em três temáticas relacionadas aos saberes e conhecimentos docentes, a saber: temas relacionados à educação estatística, temas específicos do ensino de matemática e temas não específicos do ensino de matemática.

Quanto ao grupo de pesquisas relacionadas à educação estatística, os autores supracitados perceberam que a aprendizagem dos conhecimentos específicos estudados no processo formativo abordado nas pesquisas foi potencializada na medida em que os professores envolvidos relacionavam as discussões com suas práticas.

Já as pesquisas que não abordavam um tema específico de ensino de matemática partiram da prática profissional para investigar os saberes e conhecimentos dos professores. Os autores perceberam que o grupo de pesquisas que abordavam temas específicos do ensino de matemática, quando comparadas às pesquisas anteriores, obteve conhecimentos conceituais e didático-pedagógicos restritos. Deste modo, os autores compreendem que não abordar um tema específico do ensino de matemática e partir da prática profissional possibilitou que os trabalhos enfocassem a prática docente e os saberes mobilizados nesse ambiente, em contraponto às outras teses analisadas.

Ao comentar aspectos destes trabalhos, como o de Fiorentini e outros (2002), Fiorentini (2018) e Fiorentini e Crecci (2017), buscamos situar brevemente como autores brasileiros percebem as discussões acerca de PEM e, em especial, sobre a formação de tais professores. Percebemos, com a leitura de tais perspectivas, como está se desenvolvendo este campo de pesquisa, o crescimento do número de discussões acerca da temática e os modos como acontecem alguns dos processos formativos envolvendo este grupo de professores (os PEM). Compreendemos esta pesquisa como situada no campo da formação de professores que ensinam matemática, então a percepção proposta pelos autores citados acima contribui para o nosso embasamento.

2.3. AS FRAÇÕES E SEUS SIGNIFICADOS

Lembremos que tivemos o número racional como ponto de partida para estudo em grupo. E, com isto em vista, optamos por abordar o estudo dos significados que as frações podem assumir para estudo. Por esta perspectiva, buscamos pressupostos para o ensino de números racionais, concordando com Kieren (1976) quando afirma que, para compreender as ideias relacionadas a números racionais, é preciso vivenciar situações com suas diversas interpretações. Deste modo, a seguir apresentamos aspectos dos diferentes significados, tanto no que se refere às ideias envolvidas, quanto a pressupostos do processo de construção histórica de tais compreensões.

Diversos trabalhos apresentam uma cronologia do estudo quanto aos possíveis significados de número racional, e todos eles apresentam Thomas E. Kieren como pioneiro em tal discussão. Em seu primeiro trabalho sugerindo tal perspectiva, Kieren (1976) utiliza o termo *interpretações* e os menciona como sete, a saber: fração, fração decimal, classes de equivalência de frações, razão, operador multiplicativo, elemento de um corpo quociente e medida ou ponto na reta. Em 1980, o mesmo autor revê suas concepções e reformula suas interpretações de número racional e fração, agora as chamando de *construtos* e ao invés de sete, menciona apenas cinco chamando-os de "básicos", são eles: parte-todo, razão, quociente, medida e operador multiplicativo.

Na mesma década em que Thomas E. Kieren publica seus primeiros trabalhos quanto às interpretações/construtos, Merlyn Behr auxilia na fundação do *Rational Number Project* (RNP) e, concomitantemente, realiza pesquisas quanto ao ensino e aprendizagem de números racionais. Em 1980, Marlyn Behr e colaboradores do RNP publicam uma ideia diferente daquela proposta por Kieren nesse ano; a proposta de construtos do grupo foi: parte-todo, medida, razão, quociente indicado, elemento de um corpo quociente e operador multiplicativo. Entretanto, o grupo salienta nesse mesmo momento que o construto corpo quociente exige estruturas cognitivas não condizentes com o Ensino Fundamental. Em 1983, o grupo publica uma visão modificada dos construtos propostos por Kieren, aproximando–se mais das ideias do autor.

Já em 1988 Thomas E. Kieren volta a reformular suas próprias considerações, desta vez dando maior atenção às interpretações e aplicações quanto a frações, e opta por chamá-las de *subconstrutos*. Deste modo, para Kieren (1988) os subconstrutos são: medida, quociente, razão e operador multiplicativo. Ao compararmos as propostas desse autor publicadas em 1976, 1980 e 1988 percebemos que ele inclui o antigo construto parte-todo no novo subconstruto medida, unindo a relação parte-todo em seu aspecto contínuo e discreto. E adiciona a ideia de probabilidade ao subconstruto número proporcional, unindo-a com o antigo construto razão. No mesmo período (1988), o grupo de pesquisadores do RNP continua suas pesquisas empíricas quanto aos subconstrutos discutidos por Thomas E. Kieren, com distanciamentos e aproximações de opiniões, potencializando a continuidade dessas discussões no âmbito da pesquisa da época.

Segundo Moreira e Ferreira (2008), apenas próximo aos anos 2000 os diversos grupos de pesquisadores, unidos a novos grupos e diversas vertentes, parecem estabelecer um consenso em torno de alguns subconstrutos, a saber: parte-todo, medida, razão, quociente e operador. Contudo, ainda existem distanciamentos entre concepções, por exemplo, alguns pesquisadores brasileiros como Romanatto (1997, 1999), Nunes e outros (2003) e Onuchic e Alevatto (2008) optam pelos significados constantes das colunas do Quadro 1.

Quadro 1 – Equivalências entre significados de números racionais conforme os autores citados

ROMANATTO (1997; 1999)	**NUNES *ET AL.* (2003)**	**ONUCHIC E ALEVATTO (2008)**
Medida	Medida	
Número na reta	Número	Ponto racional
Operador multiplicativo	Operador multiplicativo	Operador
Quociente	Quociente	Quociente
Razão		Razão
Probabilidade		Probabilidade
	Parte-todo	Fração

Fonte: elaborado pela autora a partir das obras citadas.

Romanatto (1977, 1999) e Onuchic e Alevatto (2008) optam por englobar, mesmo que implicitamente, os significados de medida e parte-todo em um único “novo significado”, nomeando-o, respectivamente, como medida e fração. Em contrapartida, Nunes e outros (2003) optam por distinguir ambas as perspectivas em dois significados próprios, o de medida e o de parte-todo. Entretanto, esses autores também optam por não distinguir a razão como significado, deixando esta perspectiva implícita em significados como medida.

Vista a existência de proximidades e distanciamentos, optamos por seguir esta pesquisa considerando os seguintes significados: medida, razão, quociente, e operador multiplicativo.

Com base nas pesquisas citadas neste capítulo, compreendemos como cada um dos significados o que segue:

- Medida: Quando comparamos duas grandezas de mesma espécie (por exemplo, dois valores que exprimem volume, comprimento ou tempo). Em situações que envolvem esse significado podemos perceber três momentos: *escolha da unidade*, *comparação com a unidade e expressão do resultado dessa comparação por um número* (CARAÇA, 1951). Contudo, existem situações nas quais compreendemos que a *escolha da unidade* seja sugerida ou pré-estabelecida pela própria situação, e nesses contextos o significado medida assume o papel de parte-todo. Nesse caso, a unidade inicial é dividida em n partes iguais, e cada parte pode ser representada por $\frac{1}{n}$, e posteriormente são tomadas m partes dessas n, formando assim a fração $\frac{m}{n}$. Enfim, como explicitado acima, tomamos a interpretação parte-todo como um caso particular do significado medida.

- Razão: uma comparação multiplicativa entre grandezas, abrangendo o caso da probabilidade, envolvendo a comparação multiplicativa entre o número de casos favoráveis e o total de eventos do espaço amostral. E, como anteriormente, optamos por considerar a probabilidade como um caso particular do significado razão.

- Quociente: um conjunto de objetos a ser repartido igualmente entre um número de grupos, repercutindo na barra fracionária assumir a imagem da função quociente e numerador e denominador passarem a ser dividendo e divisor.
- Operador Multiplicativo: definido pela presença de uma relação multiplicativa entre grandezas, correspondendo à ação de "esticar" ou "encolher" determinada grandeza.

Optamos por considerar cada um dos quatro significados supracitados como foco de um material disponibilizado como possível ponto de partida para o estudo com professores. Assim, para a construção dos materiais numerados de 01 a 05 foram considerados, respectivamente, os significados de medida/parte-todo, razão, quociente e operador multiplicativo. E a fim de que disponibilizássemos um material que potencializasse discussões sobre frações como números, e nos aproximássemos do que os autores supracitados consideram como significado *número*, disponibilizamos um quinto material envolvendo situações em que retomaríamos significados já estudados, mas agora com a necessidade de operarmos frações.

2.4. NOSSO OLHAR: conexões estabelecidas para o desenvolvimento da pesquisa

Nesta seção buscamos estabelecer conexões entre as três perspectivas apresentadas como partes de nossa fundamentação teórica. Assim, apresentamos a relação que fazemos e consideramos como o olhar que assumimos para o desenvolvimento desta pesquisa.

Um dos primeiros dilemas ainda no planejamento da pesquisa foi quanto às possíveis nomenclaturas e definições que poderiam ser consideradas na construção do espaço de interação/formação, foram elas: Comunidades de Prática, Grupos de Estudos, Grupos Colaborativos e tantas outras. Em busca da compreensão sobre o espaço que planejávamos, identificamos a *colaboração* e *coletividade* como elementos em destaque em nossas expectativas. Por intermédio desses elementos, nos aproximamos de leituras e considerações acerca de Comunidades de Prática (CoP).

Relacionado às CoP, Rodrigues, Silva e Miskulin (2017) constatam a predominância da obra de Wenger (1998) em pesquisas na área de Educação e Ensino no Brasil ao tratar sobre o tema. Estes autores realizam um panorama do desenvolvimento conceitual da CoP fundamentado nas diferentes discussões que Etienne Wenger realiza sobre o conceito, e salientam três publicações principais de Wenger no que se refere às CoP. Entretanto, sua segunda obra, publicada em 1998, é a mais frequente em pesquisas brasileiras quanto às CoP;

dentre as justificativas de tal escolha está o fato de nela o autor estabelecer elementos centrais para a constituição de CoP (RODRIGUES *et al*, 2017). Nessa obra, 14 indicadores são elencados a fim de se reconhecer um grupo como uma CoP, dentre eles estão a existência de uma comunidade, um domínio e uma prática. Comunidade, formada por pessoas que possuem um propósito comum, este propósito faz parte dos indicadores, sendo intitulado como domínio, e a prática é constituída por três pilares: engajamento, empreendimento articulado e repertório compartilhado. E, conforme o autor, estes aspectos não acontecem separadamente, pois são interdependentes.

Percebendo os diferentes *indicadores* necessários para a constituição e/ou reconhecimento de uma CoP, consideramos que o espaço que almejávamos partilhava de algumas das ideias constituintes de CoP como a colaboração e compromisso mútuo, mas não assegurava a existência de aspectos essenciais de CoP como o engajamento e negociações de objetivos específicos do grupo. Assim, entendemos o espaço que almejávamos como um Grupo de Estudos em que tínhamos os aspectos da *coletividade* e *colaboração*, mencionados por Wenger (1998), como referências. Compreendemos *colaboração* no sentido de Kenski (2003) e Mandaji (2011); para estes autores, *colaboração* é uma relação de aprendizagem em grupo, na qual o trabalho de um complementa o de outro de modo que tal *interdependência* gera a necessidade de diálogo contínuo, troca de informações, de experiências, de estratégias e exige respeito e confiança. Já para a compreensão de c*oletividade* nos aproximamos das ideias de Nóvoa (1992) quanto a formação mútua, que pressupõe um espaço plural e diverso.

Buscávamos perceber a constituição desse espaço com a clareza de que essa constituição poderia não ocorrer. Para tanto, propusemos a iniciativa e autonomia dos participantes nos estudos, vinculando esses estudos àquilo que considerávamos intrínsecos às discussões: suas experiências. Nesse sentido, Nóvoa (1992) considera o seguinte:

> Não se trata de mobilizar a experiência apenas numa dimensão pedagógica, mas também num quadro conceptual de produção de saberes. Por isso, é importante a criação de redes de (auto)formação participada, que permitam compreender a globalidade do sujeito, assumindo a formação como um processo interactivo e dinâmico. A troca de experiências e a partilha de saberes consolidam espaços de formação mútua, nos quais cada professor é chamado a desempenhar, simultaneamente, o papel de formador e de formando. (NÓVOA, 1992, p. 26).

Nóvoa (1992) incentiva espaços interativos e dinâmicos que proporcionem a formação mútua. O autor relaciona estes pontos a uma *formação contínua*, e para tanto considera importante a valorização de espaços “que promovam a preparação de professores reflexivos, que assumam a **responsabilidade** do seu próprio desenvolvimento profissional e que participem como protagonistas” (p. 27, grifo nosso). Nesses espaços torna-se importante o estímulo de uma *apropriação* por parte dos professores de seus próprios saberes, promovendo a autonomia por meio da interação entre pares, "reconstruindo os sentidos da sua acção profissional, rejeitando a multiplicação de dispositivos de supervisão e de avaliação que reduzem o controlo dos professores sobre as suas práticas e sobre a sua profissão*."* (NÓVOA, 2002, p. 59-60).

O autor salienta a importância em considerarmos a *formação contínua* como espaços diversos, trabalhando no sentido da sua diversificação de modelos e práticas, afastando-se de um *"figurino único"*. Para tanto, o mesmo aponta cinco ideias que devemos refletir ao pensar em *formação contínua*, a saber: envolver perspectivas inovadoras investindo nas situações escolares; valorizar as atividades de (auto)formação participada e de formação mútua; manter um alicerce na reflexão na prática e sobre a prática valorizando os saberes que os professores detêm; incentivar a participação dos professores no planejamento, realização e avaliação dos programas de formação; perceber, utilizar e/ou modificar as experiências inovadoras e redes de trabalho já existentes ao invés de desenvolver novos dispositivos de controle.

Podemos perceber proximidades do espaço planejado nesta pesquisa com as ideias de Nóvoa (2002) sobre a *formação contínua*. Aspectos como a atenção às situações escolares, às experiências, aos saberes, a proposta de autonomia e formação mútua e a reflexão sobre a prática aproximam o espaço planejado às ideias do autor. Um dos pilares que almejávamos era a responsabilidade de cada professor sobre seu próprio desenvolvimento e sobre sua participação na dinâmica do espaço formativo. Assim, definimos os três aspectos centrais que consideramos constituintes do grupo de estudos: a coletividade, a colaboração e a responsabilidade na participação e aprendizagem mútua.

Quanto aos saberes, os compreendemos na perspectiva de autores como Tardif (2010) e Gauthier (1998). O primeiro autor compreende a existência de uma pluralidade de saberes interligados, vinculados a locais, tempos e interações, como a formação profissional, os conhecimentos disciplinares, a vivência com o currículo escolar e a experiência docente. Já Gauthier (1998, p. 25) reconhece a essencialidade de saberes relacionados ao conteúdo, à experiência e à cultura, mas compreende que "tomá-los como exclusivos é mais uma vez contribuir para manter o ensino na ignorância", corroborando a ideia da pluralidade de saberes.

Assim, assumimos a compreensão da existência de uma pluralidade de saberes interligados entre si e a uma diversidade de locais, tempos e interações como as experiências pessoais/profissionais, aos conteúdos, à cultura e às próprias discussões presentes no âmbito de estudo.

Nóvoa (2002) enfatiza a importância de situações escolares e reflexões sobre a prática e na prática em espaços de *formação contínua*. Nesse sentido, entendemos que a aprendizagem vinculada a esses espaços pode ser compreendida como Crecci e Fiorentini (2018) propõem. Esses pesquisadores, amparados em estudos de Cochran-Smith e Lytle, compreendem que a aprendizagem docente nestes espaços esteja relacionada a três ideias: o conhecimento do professor, a aprendizagem docente e a prática profissional. Os autores ainda complementam explicando que essas três ideias podem ser interpretadas conforme a relação que estabelecem com a prática do trabalho do professor, a saber, respectivamente: aprendizagem *PARA* a prática, aprendizagem *NA* prática, aprendizagem *DA* prática. Eles as distinguem do seguinte modo:

> Na concepção de aprendizagem *PARA* a prática de ensinar e aprender, especialistas constroem conhecimentos que são ensinados aos professores que devem aplicá-los em suas práticas. Já na segunda concepção, pressupõe-se que a aprendizagem e os conhecimentos sejam construídos *NA* prática, isto é, de maneira tácita mediante reflexão da própria prática pelo professor. Sobre a terceira concepção, destaca-se que não há uma separação entre conhecimento prática e formal ou teórico. Deste modo, supõe-se que o conhecimento que os professores precisam para ensinar bem é produzido quando os mesmos tomam sua própria prática como contexto de investigação ou análise e como instrumento de interpretação e análise, conhecimentos produzidos por outros especialistas. (CRECCI, FIORENTINI, 2018, p. 6).

Entendemos que espaços como os que Nóvoa (2002) defende favorecem e/ou buscam aprendizagens *na* e *da* prática. Crecci e Fiorentini (2018) compreendem que, para a aprendizagem *na* prática, é essencial que o espaço formativo se dê em comunidades de professores, tendo como fundamento principal a reflexão sobre suas práticas. E, nesses ambientes, o esperado é que os formadores sejam os responsáveis por organizar o espaço de discussões, tendo uma postura de escuta e estímulo a reflexões. Quanto à aprendizagem *da* prática, os autores entendem que o conhecimento neste ambiente é construído quando professores tratam suas salas de aula e escolas como espaços de investigação, do mesmo modo que tomam conhecimentos produzidos por terceiros como aporte para interpretação e futura investigação da prática.

Assim, buscamos construir o espaço planejado nesta pesquisa como um espaço que favorecesse a coletividade, a colaboração e a responsabilidade, tendo como perspectiva alguns aspectos que Nóvoa (1992; 2002) aponta em relação aos espaços de *formação contínua*, dentre eles o estímulo à autonomia e reflexões sobre a prática, e saberes docentes favorecendo possíveis aprendizagens na perspectiva de Crecci e Fiorentini (2018) quanto às aprendizagens *na* e *da* prática.

3. METODOLOGIA

Para desenvolver esta pesquisa, e elementos que proporcionassem o estudo sobre a questão formulada, foi organizado um curso de extensão, no âmbito da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), com o objetivo de propor um ambiente no qual pudesse ser constituído um grupo de estudos. O curso de extensão foi intitulado “Estudo e Ensino de Frações na Escola” tendo como público-alvo professores que tivessem experiência no ensino de matemática no Ensino Fundamental de escolas públicas no Rio Grande do Sul. A modalidade do curso foi online, tendo carga horária de 40 horas e encontros síncronos realizados virtualmente. Por critérios de exequibilidade desta pesquisa, optamos por limitar o número de vagas para o grupo e consequentemente para as inscrições no curso. Deste modo, foram disponibilizadas 12 vagas.

Por se tratar de uma proposta de intuito colaborativo, o cronograma do curso foi flexível e adaptado no decorrer dos encontros, a fim de abordar interesses, expectativas e necessidades do grupo. No primeiro encontro do curso, a pesquisa foi apresentada aos participantes, foram lidos e enviados os Termos de Consentimentos Livre e Esclarecido (apêndice A).

Os encontros aconteceram via aplicativo e software de webconferência *Zoom*, em decorrência do distanciamento social; nesse período não aconteceram encontros presenciais do grupo de estudos ou incentivo para que professores desenvolvessem atividades presenciais com alunos. A carga horária proposta para cada encontro foi de duas horas e validada pelos participantes durante conversas no primeiro encontro. Foram realizados momentos de estudo sobre frações e ensino de matemática, resolução de atividades e construção de propostas sobre o estudo e troca de experiências sobre a prática de sala de aula. Para a pesquisa consideramos as interações realizadas nos momentos de encontro síncrono. Onze professores compõem a narrativa, dentre os quais quatro ganham destaque na seção seguinte (3.1), de modo que apresentamos brevemente cada um. Os quatro professores destacados participaram dos estudos até a data prevista para a conclusão do curso.

O material que embasa a narrativa foi produzido por meio da gravação em áudio e vídeo dos encontros[3], produções dos participantes ao longo das atividades e o diário de bordo da pesquisadora. Com posse desses materiais, buscamos interpretar momentos de mobilização de saberes docentes no decorrer do estudo, identificar dimensões que apontam para a constituição de um grupo de estudos e identificar possíveis momentos que potencializaram aprendizagens. Para tanto, optamos por assumir pressupostos da pesquisa narrativa, construindo uma narrativa

[3] Os áudios gravados foram transcritos, e as identidades dos participantes preservadas.

da investigação desenvolvida em diálogo com a questão de pesquisa, considerando as interações e materiais desenvolvidos pelos participantes no decorrer dos estudos em grupo.

A escolha pela pesquisa narrativa justifica-se por esta ser uma investigação diretamente relacionada a uma experiência. Neste caso, a experiência ocorreu por meio das interações realizadas no âmbito do curso de extensão, e segundo Clandinin e Connelly (2011) esta (a experiência) se faz em um *espaço tridimensional* constituído pelos conceitos de *interação, continuidade* e *situação*. Interação, no sentido de que cada experiência a ser narrada leva a outras experiências (pessoais ou sociais). Continuidade, no sentido em que a experiência se desenvolve a partir de outras experiências (envolvendo, assim, passado, presente e futuro). E a situação no sentido em que, quando narramos, o contexto está sendo considerado.

Devido aos aspectos mencionados acima, Crecci (2016), apoiada nas ideias de Clandinin e Connelly (2011), salienta três aspectos essenciais para pesquisas narrativas, a saber: a temporalidade, a sociabilidade e o local. O local, compreendido como o "ponto de encontro das experiências" de cada participante da pesquisa, sendo, no caso desta pesquisa, os encontros virtuais realizados em grupo. Quanto à temporalidade e sociabilidade, em ambos os aspectos o pesquisador narrativo tem papel fundamental. No primeiro, o mesmo participa "das formas temporais dos pontos de vista dos participantes em relação ao passado, presente e futuro das pessoas, dos lugares, das coisas e dos eventos em estudo" (CRECCI, 2016, p. 140). Já no segundo, o pesquisador atende a condições sociais, ou seja, deve compreender os contextos nos quais as experiências pessoais foram e/ou são constituídas, interpretando narrativas. Ainda quanto à sociabilidade, Crecci (2016) a elucida em uma frase: "Uma segunda dimensão de sociabilidade vincula-se ao fato de que os pesquisadores narrativos não podem subtrair a eles próprios da pesquisa" (p. 140-141). Sendo necessário, assim, considerar o impacto que o pesquisador causa nesse tipo de pesquisa.

Nesse sentido, Cristovão (2015) opta por unir a pesquisa narrativa a uma perspectiva etnográfica, e salienta que, segundo Clandinin e Connelly (2011, p. 174), "os pesquisadores narrativos vão descobrir que aspectos de seu estudo têm características denominadas etnográficas". E, com essa inspiração, buscamos pressupostos de Rockwell (2009) quanto a aspectos etnográficos.

Assim como Clandinin e Connelly (2011) afirmam que não podemos desconsiderar a presença do pesquisador narrativo em sua pesquisa, para Rockwell (2009) o mesmo ocorre quanto à pesquisa etnográfica. Para esta autora, não podemos negar a presença do pesquisador no local estudado, considerando que estar lá acarreta interpretações, sensações e angústias por parte do mesmo. Ou seja, embora o pesquisador faça parte do grupo, este olhar distinto dos demais não o torna igual aos demais integrantes do grupo. Transpondo essa orientação para o contexto dessa pesquisa, compreendemos que o pesquisador tem objetivos únicos relacionados à pesquisa que não serão objetivos em comum com demais participantes e vice-versa. Assim, tanto pesquisador quanto demais participantes terão objetivos únicos em suas individualidades.

3.1. OS PROFESSORES PARTICIPANTES

O Quadro 2 apresenta o nome fictício, a formação, atuação e estado em que atuam os professores participantes do estudo.

Quadro 2 – Formação, turmas e cidade em que cada professor atua

NOME	FORMAÇÃO	ATUAÇÃO E EXPERIÊNCIA	ESTADO
Diogo	Licenciado em Matemática	Atuando nas turmas de 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio.	Rio Grande do Sul
Geruza	Pedagoga e Licenciada em Matemática	Atuando no 8º ano em disciplinas fora da área da matemática. Experiência nos anos iniciais.	Maranhão
Priscila	Licenciada em Matemática e Mestre em Ensino de Matemática	Atuando do 6º ao 9º do Ensino Fundamental.	Rio Grande do Sul
Stephanie	Licenciada em Ciências Exatas com ênfase em Matemática e mestranda em Ensino de Matemática	Não atuava no momento da pesquisa. Experiência nos anos iniciais.	Rio Grande do Sul
Suzi	Licenciada em Matemática com especialização em metodologia do ensino da matemática	Atuando no momento da pesquisa em 8º ano do Ensino Fundamental e turmas do Ensino Médio. Experiência em anos iniciais e 6º, 7º e 8º anos do Ensino Fundamental.	Rio Grande do Sul

Fonte: elaborado pela autora.

Embora o público-alvo fosse professores que ensinam matemática em escolas públicas do Rio Grande do Sul, devido ao número de inscrições e considerando as informações prestadas no formulário de inscrições, houve três professores não atuantes no Rio Grande do Sul dentre os doze confirmados. Contudo, dentre esses, apenas Geruza permaneceu até a data prevista de encerramento sendo a única professora presente no Quadro 2 não atuante no estado.

Nos encontros finais, os professores foram convidados a escreverem uma breve apresentação sobre si para constituir a dissertação. A seguir, no Quadro 3, reproduzo a apresentação de cada um deles (com exceção de Diogo, que optou por não enviar uma apresentação).

Quadro 3 – Apresentação pessoal de cada professor.

Diogo	
Geruza	Sou professora desde 1995, teve uns intervalos nesse período entre ser professora e aluna não tinha como ser as duas devido a necessidade de onde morava no interior do Maranhão. Trabalhei por 6 anos sala multi-seriada. De 2001 a 2003 terminei o ensino fundamental e em 2004 dei início ao ensino médio e 2006 conclui o mesmo junto com o magistério. Foram seis anos sem fazer o que mais gosto que é ser professora. Em 2007 passei no concurso do município. Em 2008 fiz Graduação em Pedagogia, em 2014 passei no vestibular da XXXXX[4] para Matemática era um sonho cursar a matéria e poder trabalhar no que gosto com a disciplina que amo. O curso de Fração foi uma luz para meu aprendizado e é um dos temas que gosto de trabalhar com meus alunos.
Priscila	Me formei em Licenciatura em Matemática no ano de 2014 e concluí o mestrado em Ensino de Matemática no ano de 2019. Desde 2015 leciono matemática em um munícipio da região metropolitana de Porto Alegre. Sou professora dos Anos Finais (6° a 9° ano), os anos que atendo variam de um ano para outro, pois não sou a única professora de matemática da escola. Nesses poucos anos de experiência que possuo, percebi, nas mais distintas turmas, a grande dificuldade, e até mesmo receio, que os alunos têm em relação às frações. Esse foi o principal motivo de eu ter me inscrito no curso "Estudo e ensino de frações na escola". Outro motivo é a constante qualificação profissional que almejo buscar.
Suzi	Professora, 30 anos, leciono hoje na rede privada com ensino fundamental de 6º ao 9º ano e na rede estadual com ensino fundamental 7ºe 9º anos, e também com ensino médio 1º ano matemática e física, graduada em Licenciatura da Matemática, especialista no Ensino da Matemática e pós graduanda em Gestão Escolar. Ao despertar para a matemática através de uma professora na 7º série, na época decidi lecionar na área e me sinto realizada com minha escolha, atuo na área da educação desde os 18 anos, inicialmente com educação infantil e anos iniciais, pois tenho formação em Ensino Normal - Magistério, tenho uma visão de que o estudo/ensino de frações é assunto importante a ser tratado na educação básica, sendo assim esse foi um curso que me chamou atenção.

Fonte: acervo da pesquisa.

[4] Nome da instituição preservado.

4. ANTES E DURANTE OS ENCONTROS VIRTUAIS COM OS PROFESSORES

Ainda em 2020, durante a reformulação do projeto de pesquisa e planejamento do curso de extensão, os números racionais e os significados de frações eram alvo de meus estudos. Enquanto realizava esses estudos surgiam dúvidas sobre os possíveis formatos de estudos que poderíamos propor para o curso de extensão.

Refletia, ainda, sobre o espaço que almejava e embora não tivesse (naquele momento) definido aspectos da CoP e Grupos de Estudos, tinha a clareza de que não gostaria de propor uma dinâmica de estudo restrita e inalterável. Assim, surgiu a ideia de propor materiais envolvendo situações que fossem ponto de partida para o estudo dos participantes do curso. O estudo realizado por meio de leituras e discussões em reuniões de orientação foi suporte inicial para a formulação de situações-problema, consideradas como ponto de partida. Deste modo, construí materiais utilizando atividades elaboradas por autores estudados, algumas reformuladas, outras na íntegra, e outras, ainda, elaboradas por mim com base nas leituras dos mesmos. Optamos por organizá-las de acordo com os significados de frações que interpretávamos, compondo assim os cinco materiais mencionados anteriormente.

Os materiais foram disponibilizados durante os contatos via e-mail que antecederam o início do curso de extensão, além de disponibilizados via plataforma *Moodle.* Antecedendo o início do curso, além do envio dos materiais, outros e-mails foram enviados. Neles dávamos as boas-vindas, informávamos passos-a-passos de acesso ao *Moodle* e plataforma de reuniões *Zoom* utilizada para os encontros. Optamos por realizar as demais conversas com maiores informações e apresentações (como o convite para a pesquisa) durante os encontros virtuais síncronos.

Compreendemos que o fato de a pesquisadora ser a proponente e, também, participante do grupo, pressupunha implicitamente um papel de liderança. Como mencionado, dentre nossas expectativas tínhamos a colaboração, coletividade e responsabilidade como essenciais para a percepção e construção do grupo, assim, o papel de liderança não era algo que planejávamos e/ou que gostaríamos de manter. A fim de amenizar essa posição, buscamos que o papel de liderança fosse compartilhado, incentivando a autonomia e participação ativa de todos os professores.

4.1. O PRIMEIRO ENCONTRO: apresentações, impressões e planejamentos

O primeiro encontro com os participantes inscritos e confirmados no curso de extensão aconteceu no dia 17 de fevereiro de 2021. Naquele momento estiveram presentes Deise, Diogo, Jonas, Lize, Priscila, Simone, Suzi, Vanessa e Wiliam. Era o primeiro dia útil após o feriado de carnaval, na penúltima semana de férias de diretores, professores e funcionários da rede estadual de ensino do Rio Grande do Sul. Alguns professores atuantes em outras regiões ou em coordenações mencionaram que já haviam voltado ao trabalho, estando, inclusive, na escola, justificando assim possíveis desconexões do ambiente de reunião, tanto por problemas de rede como por outras atividades.

Enquanto nos apresentávamos, alguns trechos das falas dos professores ganharam minha atenção. “Coincidências” ao serem colegas de município e, principalmente, colegas de alguma disciplina no curso de graduação iam aparecendo com frequência em suas falas. Além dessas, destaco outros trechos, por exemplo, o comentário de um dos professores justificando seu interesse pela especialização em psicopedagogia devido ao grande número de alunos com deficiência que costumava encontrar em suas turmas. Já Priscila e Wiliam mencionaram que as frações são a “grande pedra no sapato de alunos e professores” e então aproveitam todas as oportunidades que têm para discutir sobre o assunto, por isso o interesse no curso.

Ao final das apresentações, pude perceber que todos eles residiam e/ou atuavam na região metropolitana de Porto Alegre, em nove cidades, e isso esclareceu as “coincidências”. Além da influência que o formato virtual de discussões e estudo iria exercer sobre nós. Notei que conexões de internet instáveis e problemas com microfones e/ou câmeras seriam, possivelmente, recorrentes, ainda mais ao notar que o software utilizado não era de conhecimento da maioria dos participantes. Devido a alguns desses problemas, três professoras não conseguiram participar de todo o encontro, acontecendo desconexões e reconexões em vários momentos. Algumas destas professoras entraram em contato comigo via e-mail e/ou Whatsapp buscando ajuda para solucionar o problema. Outras comentaram ainda em reunião seus problemas técnicos e então buscamos solucionar momentaneamente o que fosse possível.

Em geral os professores sugeriram que o estudo seguisse a ordem dos materiais, que estavam nomeados por Material 01, Material 02 e Material 03. Percebi que a forma como optei por nomear os arquivos influenciou na decisão sobre qual material seria utilizado para iniciar o estudo. O professor Wiliam também sugeriu que vinculássemos as discussões em algum momento a questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), então propus que intercalássemos estudos sobre os materiais e questões da OBMEP. De modo que após cada estudo de material procurássemos questões da OBMEP que apresentassem ideias próximas ao que discutimos e estudamos a partir do material.

Sobre o modo de estudar os materiais, a professora Lize questionou qual a melhor forma de estudo, do ponto de vista da pesquisa: todos realizarem todas as atividades ou dividirem as atividades entre si. Percebi que a ideia de o curso de extensão estar vinculado à pesquisa influenciava nas atitudes e interações que tínhamos e teríamos. Implicitamente sabia que a relação entre pesquisa e ambiente do curso era algo intrínseco e então teriam influências, mas apenas após o comentário de Lize tal relação e influência passou a ter destaque em minhas reflexões. Respondi à professora esclarecendo que minha pesquisa tinha como foco nossas interações e reflexões nesse ambiente e que, então, o modo como responderíamos as questões poderia ser aquele com o qual todos concordassem. O combinado, após algumas opiniões, foi de que cada um ficasse responsável por uma questão, a resolvesse, acrescentasse comentários se fosse o caso e então enviasse sua resolução e comentários para o Moodle e/ou pasta no Google Drive para que todos tivessem acesso. A ideia era a de que cada um resolvesse uma questão, mas se inteirasse dos envios dos colegas para que esses fossem ponto de partida para discussões nos encontros seguintes.

A pasta no Google Drive foi sugerida por alguns professores como solução para os problemas que alguns estavam tendo ao acessar o Moodle e devido à familiaridade de quase todos os professores com a ferramenta.

Após a reunião, alguns dos professores que não estavam presentes entraram em contato comigo via e-mail ou *Whatsapp* para justificar suas ausências e esclarecer que ainda estariam interessados em participar. Então, nos dias seguintes, encaminhei um e-mail para todos os presentes e ausentes com um resumo do que havíamos conversado e planejado para a semana seguinte.

4.2. O SEGUNDO ENCONTRO E AS DISCUSSÕES SOBRE *QUANTAS VEZES CABE*

No dia 24 de fevereiro, realizamos o segundo encontro virtual do curso. Alguns professores que não estavam presentes na semana anterior ou que não puderam permanecer durante todo o encontro compareceram neste dia. Os professores presentes nesse momento foram Jonas, Geruza, Priscila, Suzi e Vanessa.

Ao disponibilizar a sala virtual para acesso deixava minha câmera conectada, assim, sempre que algum dos professores acessava a sala podia perceber que não estava sozinho no ambiente virtual. Aqueles que iam acessando conectavam suas câmeras instantaneamente, assim, durante o encontro, normalmente, todos estávamos com as câmeras ligadas. Durante as apresentações dos professores Jonas, Geruza e Vanessa, notei que o fato de a maioria dos participantes utilizarem suas câmeras conectadas ao longo de todo o encontro era algo que impactava a todos, indiretamente ou não. Pois um professor que não pôde conectar sua câmera buscou se desculpar por isso reiteradas vezes ao longo de sua apresentação.

Assim como os outros participantes haviam feito na semana anterior, Vanessa justificou seu interesse pelo curso. Segundo a professora o *"ensino de frações e tudo o que está ligado é um grande problema"*. A professora falava naquele momento de Uberaba, Minas Gerais, cidade em que atuava.

Jonas mencionou ser professor de matemática e física do Ensino Médio e responsável pelo Departamento de Ciência, Tecnologia e Inovação da cidade onde atuava, na região oeste do Maranhão. O professor esclareceu que devido ao cargo de responsável pelo departamento citado e as formações pedagógicas necessárias para o ensino híbrido adotado no município, criou um grupo no *Whatsapp* com professores da região chamando-o de *Professores Inovadores*. E que por esse ambiente do grupo divulgou o curso de extensão convidando professores como Geruza, professora do mesmo município.

Geruza, ao se apresentar, relatou ser formada em Licenciatura em Matemática desde 2018, embora tivesse lecionado apenas a disciplina de Língua Portuguesa. Jonas complementou a fala de Geruza esclarecendo que na região, em cidades pequenas, eram comuns situações como a de Geruza; segundo ele o professor pode ser formado em Licenciatura em Matemática, mas "*ele ganha uma turma de Língua Portuguesa, trabalha com uma turma de inglês, história..."*.

Jonas relacionou essa situação com a formação dos professores dos anos iniciais, visto que estes professores *"coordenam"* várias disciplinas mesmo sem terem formação específica para essas disciplinas. Ao falarmos sobre os anos iniciais, Suzi relatou ter duas experiências distintas: uma como professora de 4º e 5º ano e outra como professora de matemática dos anos finais. Nesse segundo papel, realizou encontros para estudos com as professoras dos anos iniciais da mesma escola. O trecho a seguir apresenta partes da fala da professora Suzi:

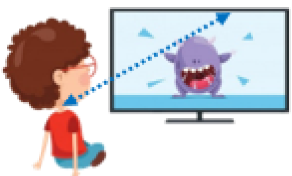
- *A fala das professoras dos anos iniciais é sempre de que as frações são as maiores dificuldades dos alunos, que eles não conseguem compreender, que têm muita dificuldade... Então* ***elas entendem que quando elas estão trabalhando de forma lúdica parece que tudo está indo, e quando elas começam a introduzir a parte mais específica mesmo, principalmente quando aparecem as operações ali no quinto ano, elas sempre falaram que os alunos têm muita dificuldade.*** *[...] Mais do que isso, o que eu pude perceber, mais do que a dificuldade* *dos alunos, se tu me permites e se a gente pode falar, é a dificuldade que as professoras e professores dos anos iniciais ali do Ensino Fundamental I têm de explicar isso. O que elas me passaram nesse encontro que a gente teve foi* ***que na verdade elas tiveram poucas oportunidades dentro da graduação, na pedagogia, para tratar desse conceito que é tão complexo para elas e para os alunos.*** *[...] E aí eu percebo que* ***quando a gente representa através de desenhos eles conseguem, e aí quando a gente passa para a parte numérica é um desastre****... eles não têm essa compreensão porque as professoras dos anos iniciais ficam muito nessa parte dos desenhos, desenhos, desenhos... [...] Eu percebi que teve uma mudança ano passado em relação à BNCC onde a gente teve alguns conceitos que foram passados para o sétimo ano, que eu sentia muita dificuldade realmente do sexto em fazer essas atividades e eu acho que isso até deu uma melhorada nesse sentido.* (grifo nosso).

No relato de Suzi sobre a experiência de estudos com professores dos anos iniciais pude perceber três ideias importantes: as operações com frações como foco de estudo escolhido pelas professoras dos anos iniciais; as dificuldades de alunos para compreender as operações com frações, relatadas por professoras dos anos iniciais, e as dificuldades dessas professoras para explicar as operações, percebida por Suzi e relatada pelas professoras dos anos iniciais; e o papel do currículo da formação inicial e do currículo do Ensino Fundamental no realce de dificuldades sobre o ensino de frações.

A Figura 1 apresenta parte da primeira atividade do Material 01. Nela envolvíamos a noção de medida em uma situação sobre parafusos e polegadas.

Figura 1 – Questões sobre polegadas propostas no Material 01.

- Citados alguns produtos que apresentam medidas em polegadas, se quiséssemos expressar a medida de algum deles (como uma televisão) em centímetros, como poderíamos fazer isso?



Fonte: imagem adaptada da internet

- Como podemos comparar as polegadas da televisão com os centímetros encontrados na atividade anterior?

- Pela comparação realizada na atividade acima como podemos identificar a maior unidade, polegada ou centímetro?

Fonte: acervo da pesquisa.

As dificuldades em operar com frações, mencionadas no relato de Suzi, foram retomadas durante nossas discussões sobre polegadas (Figura 1). A professora percebeu a questão *quantas vezes cabe* presente em diferentes momentos envolvendo as discussões sobre polegadas (primeira atividade do Material 01) e, sempre que a percebia, relatava para todos. Suzi tinha a percepção de que, nos anos finais, os alunos optam por outras estratégias para resolver as situações envolvendo centímetros e polegadas e acabam não se aproximando da questão *quantas vezes cabe*, ao contrário dos anos iniciais. Segundo a professora, *"lá no quinto eles rompem a barreira do quanto cabe e querem partir para a parte numérica da coisa".* A professora retomou seu relato anterior mencionando que o estudo das operações com frações poderia ser visto como um marco, de modo que nesse momento os alunos *"já não se questionam mais nesse sentido de quantas vezes cabe, eles já querem fazer só conta, conta, conta... só cálculo. [...] Aí quando tu fazes a representação do desenho, aí eles enxergam, porque eles já não se questionam mais. Eles olham a parte numérica, não compreendem, aí particularmente eu falando né, não sei quem mais tem sexto ano aí, mas aí quando tu fazes a representação disso no quadro em forma de desenho, parece que abre uma luz... um portal. E eles dizem 'bah sora, era só isso?".*

Priscila, ao comentar ambas as situações mencionadas pela professora, sugere uma *"dupla culpa"*. A "dupla culpa" mencionada pela professora referia-se a uma *"preguiça"* por parte do aluno e do professor ao realizarem falas do tipo, respectivamente: *"é de mais ou de menos, professora?"* e *"tá, é de soma"*. A professora completou sua fala comentando que tomar o caminho diferente a esse diálogo exige mais do professor, exemplificando a dificuldade de tomar tal atitude em salas superlotadas, comuns em sua prática.

Vanessa, por sua vez, relatou perceber em sua prática uma rotulação feita por parte dos alunos dos anos finais, de que *"desenho é coisa de criancinha* [referindo-se aos alunos dos anos iniciais]". E Jonas, por sua vez, relatou uma experiência em que vinculava os desenhos com acontecimentos do cotidiano dos alunos, como a reforma que a escola passava, e utilizava essa estratégia para vincular o geométrico/figural com o aritmético.

As discussões foram surgindo enquanto estudávamos a atividade sobre polegadas (Figura 1), Priscila, que havia escolhido tal atividade para estudo, sugeriu duas abordagens: uma abordagem histórica envolvendo a comparação entre sistema imperial e sistema métrico; e uma abordagem envolvendo a ordem entre frações no contexto das polegadas. Ambas propostas foram registradas em forma de comentários no documento enviado pela professora. A Figura 2 mostra as propostas enviadas por ela.

Figura 2 – Tópicos de discussão propostos por Priscila sobre a atividade envolvendo polegadas

Mais algumas possibilidades de abordagens:

*Comparação entre o sistema métrico e o sistema imperial;

*Comparação de frações utilizando o comprimento de diferentes parafusos. Por exemplo:

$$\frac{5\,''}{16} < \frac{3''}{8} < \frac{1''}{2} < \frac{5''}{8}$$

Fonte: acervo da pesquisa.

Ao comentar sobre os motivos que a fizeram pensar na comparação de frações, a professora comentou que *"às vezes eles [os alunos] se confundem porque o denominador 16 é muito maior do que o 2, então aquela ali tem que ser maior. É que muitas vezes o aluno ainda não conseguiu construir a ideia de que o denominador é a quantidade de partes que tu divides"*. Lembrei que já havia lido pesquisas que tratavam sobre tal confusão e a relacionavam com as dificuldades que os alunos tinham em reformular ideias válidas para os números naturais e agora não válidas para os racionais. Ao comentar sobre essas leituras, me dispus a enviar alguma delas para o Moodle durante a semana, caso fosse de interesse deles. Priscila comentou que gostaria que eu enviasse e assim o fiz, enviando a dissertação de Maria José Ferreira da Silva e sugerindo outros trabalhos da autora.

Priscila concluiu suas considerações sobre essa atividade e então Suzi iniciou a fala sobre a atividade que havia escolhido, envolvendo uma corrida (Figura 3), justificando sua escolha por esta ser *"bem prática"*. A atividade envolvia uma situação hipotética de que duas equipes competiriam em uma corrida e poderiam não medir as distâncias percorridas com instrumentos usuais de medida padrão, como réguas, trenas, dentre outros. A Figura 3 apresenta as duas primeiras perguntas da atividade.

Figura 3 – Perguntas iniciais da atividade envolvendo uma corrida no Material 01

a. Se as equipes escolheram unidades diferentes para medir, como um bastão e passos. Como procederíamos para identificar quem percorreu a maior distância?

b. Se a equipe A mediu a sua distância com passos pequenos e obteve exatos 10 passos de distância e a equipe B também utilizou passos largos para medir sua distância, obtendo uma distância de 6 passos e um pouco (um pouco sendo uma medida menor que o passo utilizado). Como poderíamos identificar quem percorreu maior distância nesse caso?

Fonte: acervo da pesquisa

Ao comentar sobre suas respostas para a atividade, Suzi as comparou com as respostas enviadas por sua amiga, também participante do curso, a professora Laura. Laura estava com problemas de acesso e por isso não participava do encontro, mas havia realizado o estudo da atividade e o enviado, como havíamos planejado.

Enquanto Suzi optou por responder a situação por meio da descrição de ações que poderiam ser feitas, sem utilizar unidades de medida padrão para resolver a situação de início, sua colega havia optado por utilizar as unidades de medidas padrão como os centímetros para responder à questão, supondo valores: 20 cm de comprimento para o passo e 30 cm para o bastão.

Suzi, ao explicar sua proposta para o item *a*, sugeriu o uso de um *"medidor como base, assim, mesmo que as equipes adotem variadas opções para medir, aplicaremos um sistema que fará a equiparação dos dois grupos".* A professora explicou sua compreensão quanto a um *medidor*, para ela este possui a mesma função de uma régua, e concluiu: *E daí, 'quanto mede cada bastão?', 'quanto mede cada passo?', então quanto a quantidade total deles deu em relação ao livro [exemplo de medidor utilizado na fala]? Então utilizaríamos um medidor em comum que não fosse uma régua, mas que querendo ou não está relacionado aos centímetros".*

Enquanto a professora explicava sua ideia percebeu que retomávamos a questão *quantas vezes cabe* e salientou isso. Segundo a professora: *"não tinha refletido isto ontem* (referindo-se ao dia em que resolveu a atividade)*, mas agora pensando na situação das polegadas percebo que a gente está voltando para essa questão de novo, não é?"*.

Ao longo da conversa sobre a questão, Priscila pontuou que possivelmente os alunos não se preocupariam em medir e pensariam "*ah, como o bastão é maior que o passo, então deu tantos bastões e esse time ganhou...".* Essa percepção mencionada por Priscila foi retomada no decorrer das discussões, por exemplo, quando nos questionamos sobre como explicar que 77 $\frac{1}{2}$

canetas mediam uma distância menor do que $9\ \frac{1}{24}$ cabos. A Figura 4 mostra os itens desse desafio.

Figura 4 – Desafios proposto à atividade "Em uma corrida" do Material 1

DESAFIO:

Um grupo de alunos escolheu como unidade de medida uma caneta Bic e obteve como distância $77\ \frac{1}{2}$ canetas, outro grupo escolheu como unidade um cabo de vassoura e obteve como distância $9\ \frac{1}{24}$ cabos.

I. Como saberíamos quem percorreu a maior distância?

II. Como você explicaria que $77\ \frac{1}{2}$ canetas medem uma distância menor do que $9\ \frac{1}{24}$ cabos?

III. Que tipo de atividade você poderia propor para melhorar as comparações feitas pelos alunos?

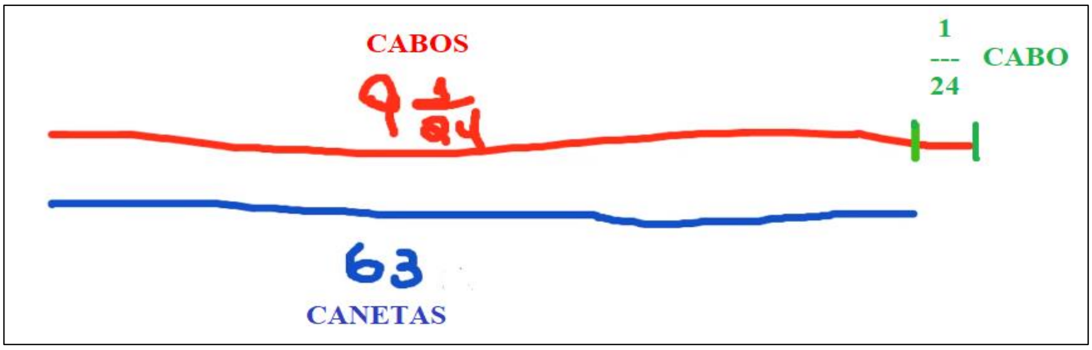
Fonte: acervo da pesquisa

Ao discutirmos sobre o item *ii* do desafio, Priscila e Suzi retomaram a ideia já apresentada pela primeira, de que os alunos não se preocupariam em medir e aconteceria uma confusão ao compararem os números. Buscávamos estratégias para responder a questão e três sugestões foram dadas: utilizar unidades de medida padrão como os centímetros para identificar as medidas de uma caneta e um bastão e então operar com os números obtidos a fim de identificar as distâncias em centímetros; comparar as $77\ \frac{1}{2}$ canetas com os $9\ \frac{1}{24}$ cabos; e comparar 1 caneta com 1 cabo.

Enquanto conversávamos sobre as três sugestões, percebemos pela tela que o professor Jonas, que havia sugerido a comparação de 1 caneta e 1 cabo, foi até um local em busca dos objetos (uma caneta e um cabo de vassoura), retornando em segundos com ambos em mãos. O mesmo comentou que aproximadamente cabiam 7 canetas em um cabo e *"sobra um pouquinho"*. Consideramos que então caberiam 7 canetas em um cabo e assim em 9 cabos caberiam 63 canetas. Nesse raciocínio Suzi enfatizou que *"eles [os alunos] vão fazer a subtração do quanto que falta para 77"* e então a questão estaria resolvida. Embora o desafio não procurasse as medidas exatas de cada distância e sim apenas a equipe que percorreu a maior distância, insisti para que estabelecêssemos as medidas. Meu intuito era que discutíssemos sobre as etapas realizadas por nós e principalmente que chegassem a um momento em que precisássemos subdividir a unidade.

A fim de que seguíssemos nessa discussão, optei por utilizar as ferramentas do software e desenhar a situação de comparação, assim todos que estivessem na sala virtual poderiam visualizar. A Figura 5 mostra o desenho realizado (com exceção das legendas).

Figura 5 – Representação da comparação entre cabos e canetas feita com as ferramentas da e na plataforma digital.

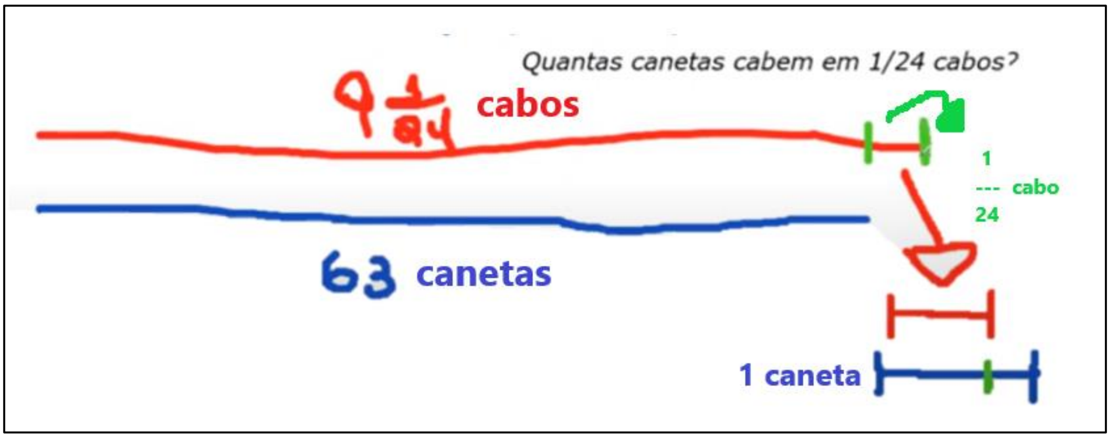


Fonte: acervo da pesquisa.

Enquanto desenhava enfatizei a questão: *se, por exemplo, cabem exatas 7 canetas em um cabo, então em 9 1/24 cabos temos 63 canetas, e um pouquinho, que são os 1/24 cabos. O que fazemos com esse "pedacinho?"*. Após momentos de silêncio busquei reformular a pergunta, então escrevi na tela: *quantas canetas cabem em 1/24 cabos?* Após novos momentos de silêncio entre nós, um dos professores relatou o que o intrigava na questão. Para ele era difícil pensar em uma estratégia de resolução para si próprio e para o aluno se nós não conhecêssemos a medida dos objetos em centímetros.

Percebi pela fala do professor que ele estava preocupado com as medidas padrão, então sugeri que não pensassem tanto em medidas e sim em ações. Então outros professores sugeriram novas ideias a partir de ações. Priscila sugeriu que verificássemos se 1/24 cabos seria uma medida maior que uma caneta ou menor ou ainda se seria metade de uma caneta ou um terço dela. Desenhei a comparação sugerida por Priscila. A Figura 6 apresenta o desenho realizado agora com a pergunta (com exceção das legendas).

Figura 6 – Nova representação da comparação entre cabos e canetas feita com as ferramentas da e na plataforma digital



Fonte: acervo da pesquisa

Expliquei que caso aquele novo pedaço pequeno, em azul, coubesse três vezes em uma caneta e duas vezes em 1/24 cabos, então poderíamos dizer que 1/24 de cabo é igual a 2/3 de uma caneta, como Priscila havia nos sugerido. Como nos aproximávamos do fim do encontro, sugeri que pensassem nessa questão e naquilo que já havíamos feito até o momento: *e se essa diferença* (a medida destacada em azul e verde) *não couber um número inteiro de vezes em uma caneta, o que fazemos?* O intuito era de que percebessem que o processo realizado até então e as ações realizadas para medir poderiam continuar indefinidamente, além de que percebessem a necessidade da subdivisão da unidade.

Após a pergunta, já em tom de encerramento das discussões, diferentes comentários surgiram, por exemplo, Jonas, brincando, comentou: *essa questão aí 'mordeu', essa semana vou pegar o cabo, a caneta e uma trena e fazer essa medição de fato pra tirar a dúvida.* Enquanto o professor Diogo, que havia entrado há poucos minutos na reunião, explicou em sua fala que compreendeu "*que a questão não é a trena, e sim a comparação. Fugir da régua".* Diogo, embora não tenha acompanhado nossas conversas desde o início do encontro, argumentou para os outros colegas que a situação que estávamos fazendo *"passando para a divisão seria quase que uma dízima".* A percepção do professor chamou a atenção e então fiquei curiosa para suas ideias de discussões na semana seguinte.

Encerrando o encontro, cada professor escolheu uma atividade dentre as que restavam no Material 01 ou 02. E enfatizaram seus desejos em continuar trabalhando com o Material 01 para que concluíssemos o assunto.

4.3. O TERCEIRO ENCONTRO: novos modos de estudo e a retomada da questão *quantas vezes cabe*

O terceiro encontro do grupo foi marcado por ser o primeiro após o retorno das férias, para a maioria. Assim, a partir desse encontro as rotinas de alguns de nós mudaram, ao exemplo de Simone e Jonas que estariam em reunião no momento daquele encontro e de Priscila que conciliava a participação no encontro com seu momento disponível para esclarecer possíveis dúvidas de seus alunos.

Com isso, neste dia se fizeram presentes Diogo, Geruza, Priscila e Vanessa. Diogo e Geruza haviam escolhido as atividades que restavam do Material 01 para estudo naquela semana, assim, Geruza foi a primeira a comentar sobre sua atividade.

Geruza narrou a perspectiva de quatro crianças sobre a atividade envolvendo giros (Figura 7). Nessa atividade tínhamos perguntas envolvendo a prática do esporte de arremesso de disco.

Figura 7 – Perguntas sobre a atividade envolvendo giros no Material 01.

Tendo em mãos um disco original ou adaptado, explique para as crianças sobre esse esporte e demonstre (por vídeos ou pessoalmente) as diferentes técnicas que os esportistas profissionais utilizam, por exemplo: 1 giro com velocidade, 1 giro e meio, e/ou apenas meio giro.

Fonte: imagem retirada da internet

a. Peça para que identifiquem como seria um "meio giro" e "um giro e meio". Como saber que o movimento realizado realmente foi metade de um giro?

b. Peça que então realizem 1 giro e ¼ de giro. Novamente questione como saber se o movimento realizado está correto e é um quarto de giro?

c. O que você imagina que aconteceria no nível de ensino em que atua? Como os estudantes iriam buscar resolver os questionamentos?

d. O que você poderia fazer de adaptações e intervenções nesse contexto?

e. É possível comparar os giros?

f. Como poderíamos comparar o movimento realizado entre dois alunos de tamanhos diferentes? Por exemplo, um aluno do 9º ano e outro do 5º ano.

Fonte: acervo da pesquisa.

A narrativa realizada pela professora surpreendeu a mim, e acredito que aos outros colegas que a ouviam, pois não esperávamos que ela tivesse realizado a atividade com crianças. Ela nos contou que improvisou um disco para que as crianças pudessem arremessar e que, embora tenha procurado por crianças que frequentavam o 7º ano, havia conversado com quatro meninos que brincavam na rua próxima à sua casa e frequentavam o 3º, 4º e 6º anos, com idades variando entre 6 a 9 anos. Enquanto a professora narrava sua experiência, pudemos notar que ela havia feito aos meninos as perguntas exatamente do modo como estavam no material e isso chamou minha atenção. Pois, principalmente considerando as idades dos meninos, pensei que a professora teria adaptado algumas perguntas ou apenas realizado uma conversa com eles.

Dentre as principais dúvidas expostas pelos meninos, segundo a narrativa da professora, estavam aquelas que envolviam a ideia de giro, por exemplo: "*mas o que é um giro?". *Após alguns exemplos dados por Geruza, os meninos relacionaram os giros aos movimentos realizados no balé e em seguida optaram por desenhar "uma pizza" no chão para representar "um giro".

Além das dúvidas sobre o que seria um giro, a professora salientou a dificuldade encontrada por ela mesma ao perceber que os meninos não tinham noção de graus. E que dentre as situações mencionadas na atividade, como um giro, ou um giro e meio, a principal discussão entre os meninos ocorreu sobre ¼ de giro.

O menino mais velho, de 9 anos e que frequentava o 6º ano, seguiu a estratégia de utilizar metades para identificar ¼ de giro, o que intrigou seus amigos mais novos. Geruza comentou que o mesmo a havia perguntado: *"metade é 50 né, tia?".* Priscila comentou que embora as crianças normalmente tenham clara a ideia de metade, não era tão natural relacionar tal ideia à fração 1/2.

Pela narrativa construída por Geruza sobre sua experiência com as crianças, pude notar que a representação de pizza era presente no estudo de frações de parte dos meninos com quem a professora havia conversado. Pois, em diferentes momentos, a professora narrou a fala dos meninos sobre *"desenhar uma pizza"* buscando representar uma circunferência. A ideia proposta pelos meninos era utilizar a representação de "uma pizza" para identificar suas partes e consecutivamente a amplitude que haveria cada "parte".

Geruza enfatizou a animação dos meninos em ajudá-la na atividade e comentou que eles pediram para que os procurasse sempre que ela tivesse novas atividades, para ajudá-la. Priscila então comentou, em tom descontraído, que essa era uma questão interessante para os anos iniciais, pois *"ela não é só de pôr a mão na massa, mas sim o corpo todo"*. E que, embora percebesse a animação das crianças em realizar a atividade, relatada por Geruza, acreditava que para os anos finais a mesma não seria tão desafiadora.

Em determinado momento interrompemos nossas conversas sobre a atividade para ajudar Diogo que estava com problemas no áudio do seu equipamento. As professoras que participavam da conversa demonstraram interesse em ajudar o colega dando opiniões sobre o problema. Percebi que as ajudas eram importantes para a constituição do grupo; essa importância era reforçada pelos problemas tecnológicos recorrentes no espaço virtual.

Ao retomarmos o assunto sobre o estudo feito por Geruza, agora já com Diogo podendo interagir, este e Priscila comentavam sobre o *medo* que os alunos dos anos finais e Ensino Médio têm em falar sobre frações. Diogo comentou sua opinião sobre este medo ser culpa nossa enquanto professores, pois na sua opinião as crianças entram motivadas nos anos iniciais e, entre o 4º e 5º ano, elas começam a não entender frações, consecutivamente perdem a motivação quanto à matemática que tinham e então carregam esse medo pela vida. Dentre os erros dos professores, Diogo pontuou o excesso de teoria dando como exemplo os estudos realizados em nossas formações acadêmicas.

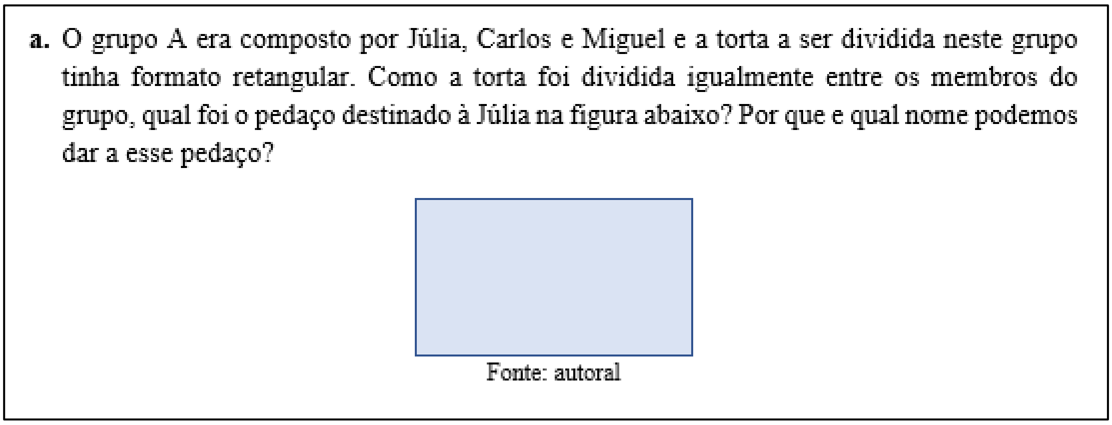
Ao falarmos sobre formações acadêmicas, Geruza concordou com a fala de Diogo dando exemplo de sua formação em Pedagogia, na qual teve *"uma base matemática muito básica"*. Diogo então mencionou os Cursos Normais como outro ambiente onde a matemática era "muito básica". O professor fez seu relato seguindo comentários que ouvia de alunos de sua escola que frequentavam o curso normal.

Iniciamos então uma conversa sobre formação inicial. Dei um contraexemplo ao professor Diogo comentando sobre minha experiência como aluna do curso normal. Mencionei que havia sido ao longo de tal curso que tomei minha decisão sobre a docência em matemática e então Diogo, Geruza e Priscila fizeram seus relatos. Diogo comentou que optou pela docência em matemática no 6º ano do Ensino Fundamental devido a uma *"professora incrível, incrível"*, nas palavras dele; Geruza mencionou que também havia optado por esta profissão por influência de um professor de matemática, mas em seu caso já no Ensino Médio; Priscila, ao contrário dos colegas, comentou sorrindo que havia optado pela *"matemática no reforço de matemática"* ainda próximo ao que, na época, era a terceira série do Ensino Fundamental. Priscila destacou que não havia optado pela docência em matemática por *"um exemplo de professor, mas sim pelo prazer em aprender matemática"*.

O encontro parecia mais leve do que os anteriores, talvez porque estávamos conhecendo melhor uns aos outros. Aproveitando o ambiente descontraído ao longo das conversas, insisti para que todos tentassem utilizar as ferramentas disponibilizadas pelo software, podendo desenhar, digitar, riscar, entre outras opções na tela compartilhada entre todos.

Diogo e Priscila familiarizaram-se com as ferramentas e voltaram a interagir por meio delas na tela compartilhada enquanto Diogo comentava sua atividade, a qual envolvia a equipartição de tortas de diferentes formatos em determinados números de partes. A Figura 8 apresenta a primeira situação da atividade escolhida por Diogo.

Figura 8 – Item *a* da atividade envolvendo a equipartição no Material 01



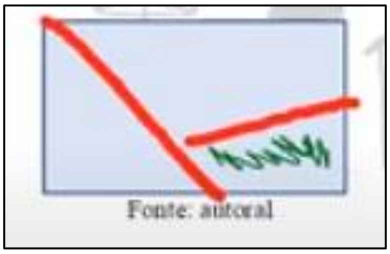
a. O grupo A era composto por Júlia, Carlos e Miguel e a torta a ser dividida neste grupo tinha formato retangular. Como a torta foi dividida igualmente entre os membros do grupo, qual foi o pedaço destinado à Júlia na figura abaixo? Por que e qual nome podemos dar a esse pedaço?

Fonte: autoral

Fonte: acervo da pesquisa.

Sobre a situação apresentada na Figura 8, todos enfatizávamos a importância de as questões destacarem a necessidade das partes de um todo serem iguais. Priscila, exemplificando uma possível divisão em três partes caso o enunciado não destacasse as partes iguais, desenhou os traços em vermelhos da imagem disponibilizada na Figura 9.

Figura 9 – Divisões feitas por Priscila exemplificando a desigualdade das partes

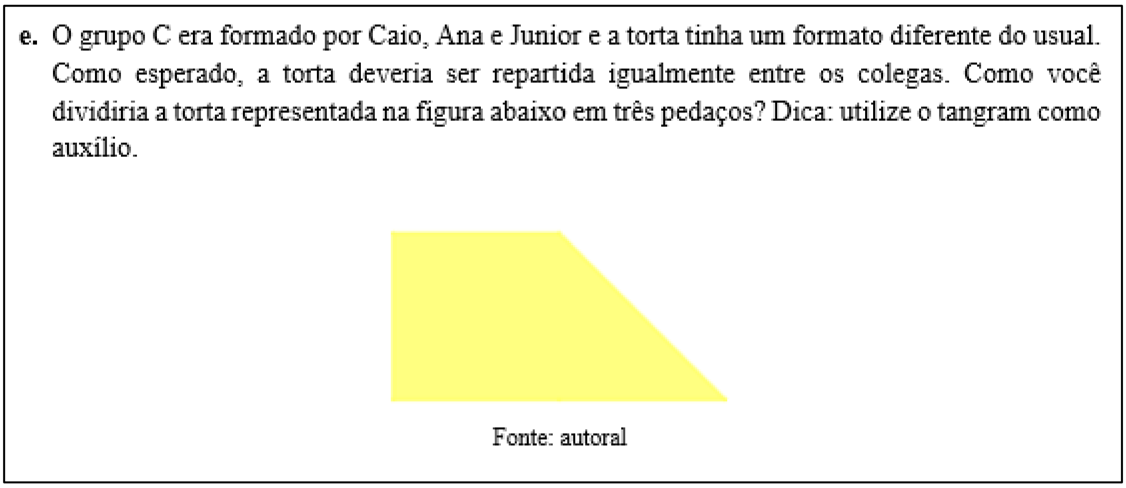


Fonte: acervo da pesquisa.

Após o desenho feito por Priscila, perguntei *"como sabemos qual fração representa a parte em verde?"*. Diogo relacionou as ideias comentadas na situação da semana anterior envolvendo um cabo de vassoura e uma caneta. Segundo o professor, se tivéssemos apenas uma das partes poderíamos repeti-la e então ver quantas vezes caberiam na forma original (o retângulo). O professor também sugeriu que calculássemos a área e/ou o peso da parte verde em destaque e relacionássemos à área e/ou o peso do retângulo todo.

A pergunta feita por mim sobre como identificar a fração que representava a parte em verde na Figura 9, tinha como intuito que nos aproximássemos das situações seguintes, ao exemplo da situação proposta no item *e* (Figura 10).

Figura 10 – Item *e* da atividade envolvendo a equipartição no Material 01



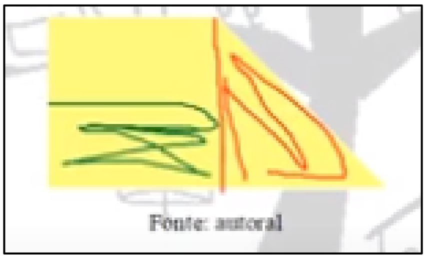
e. O grupo C era formado por Caio, Ana e Junior e a torta tinha um formato diferente do usual. Como esperado, a torta deveria ser repartida igualmente entre os colegas. Como você dividiria a torta representada na figura abaixo em três pedaços? Dica: utilize o tangram como auxílio.

Fonte: autoral

Fonte: acervo da pesquisa.

Diogo e Priscila sugeriram que dividíssemos “a torta” mencionada no item *e* (Figura 10) em três triângulos retângulos. Então sugeri outra divisão como mostra a Figura 11.

Figura 11 – Divisão do quadrilátero em três partes de mesma área



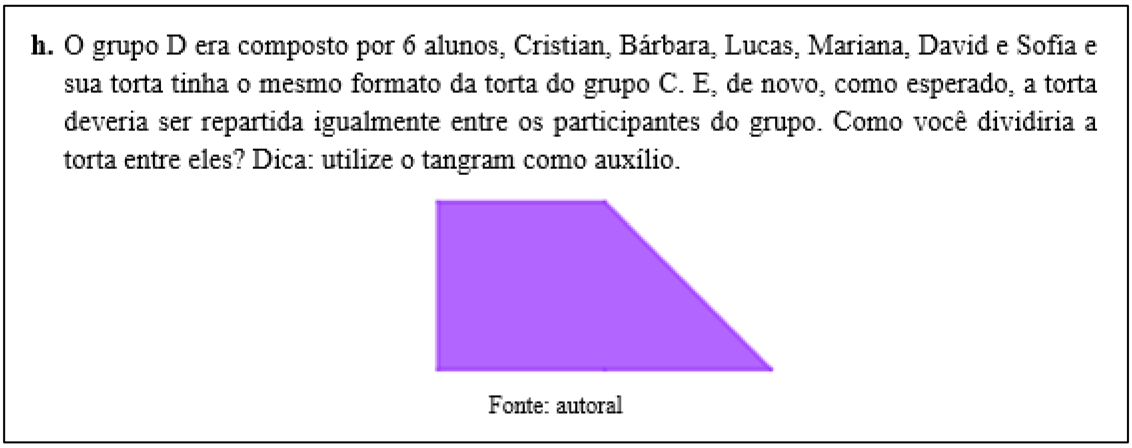
Fonte: acervo da pesquisa

Após a nova divisão “da torta” (Figura 11) buscamos responder a pergunta: *como provar aos alunos que as partes em verde e laranja são iguais?”*. A pergunta realizada por mim tinha o intuito de que estabelecêssemos saídas para a situação e percebêssemos que as partes não precisavam ter formatos iguais, mas sim áreas iguais.

Priscila percebeu e pontuou que se um aluno dividisse a figura apenas em triângulos retângulos, como sugerido por ela e Diogo, então ele teria noções geométricas. E que, para provarmos a igualdade entre as partes em verde e vermelho poderíamos usar a sobreposição de figuras; por exemplo, ao sobrepor a parte vermelha no quadrado restante e então perceber que esta também equivaleria à metade do quadrado. Sugestões como o uso da proporção e área foram mencionadas por outros professores, mas acabamos não avançando no assunto.

Em outros itens da atividade estudada por Diogo (sobre a equipartição de tortas), percebi as escolhas que cada professor fazia para resolvê-la, por exemplo, no item *h* da atividade. A Figura 12 apresenta o item.

Figura 12 – Item *h* da atividade envolvendo a equipartição no Material 01



h. O grupo D era composto por 6 alunos, Cristian, Bárbara, Lucas, Mariana, David e Sofia e sua torta tinha o mesmo formato da torta do grupo C. E, de novo, como esperado, a torta deveria ser repartida igualmente entre os participantes do grupo. Como você dividiria a torta entre eles? Dica: utilize o tangram como auxílio.

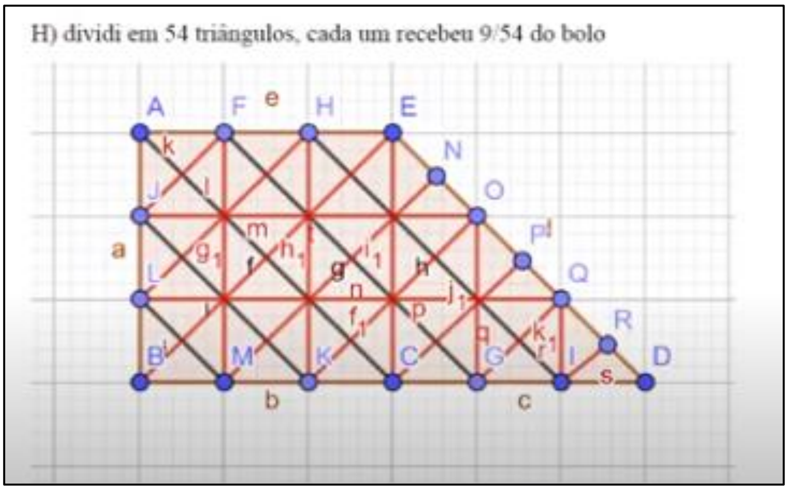
Fonte: autoral

Fonte: acervo da pesquisa.

Neste item seriam necessários dois conjuntos de Tangram para montar a figura completa; como nenhum dos professores possuía dois conjuntos cada um destes utilizou de uma estratégia. Diogo utilizou o software Geogebra e justificou que estava participando de um curso sobre a ferramenta, assim aproveitou para unir as duas experiências. Já Priscila percebeu a equivalência entre as peças do Tangram e assim não construiu a figura fisicamente, apenas desenhou as possíveis divisões da figura na tela compartilhada em reunião.

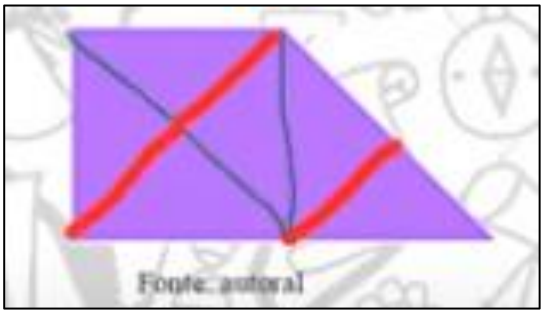
As Figuras 13 e 14 apresentam, respectivamente, as construções realizadas por Diogo e Priscila.

Figura 13 – Divisões realizadas por Diogo ao buscar dividir o todo em seis partes



Fonte: acervo da pesquisa.

Figura 14 – Divisão proposta por Priscila ao buscar dividir o todo em seis partes



Fonte: acervo da pesquisa.

Diogo pontuou que poderíamos ter diferentes respostas devido à equivalência entre as peças do Tangram. Aproveitei a fala do professor e comentei que havia autores que consideravam a noção de equivalência um dos fundamentos essenciais para a compreensão de número racional. Minha ideia ao fazer esse comentário era a de que, caso fosse do interesse de algum dos professores, eu pudesse compartilhar via Moodle leituras para aqueles interessados, como na semana anterior sobre as dificuldades de expandir o campo dos números naturais para o dos números racionais. Não continuamos o assunto, então não realizei o compartilhamento dos textos.

Ao final do encontro realizamos uma conversa desenvolvendo um panorama sobre o Material 01. Dentre as falas dos professores destaco as palavras "comparação" e "contagem", mencionadas por Diogo e Geruza. Diogo percebeu e então pontuou que em todas as atividades discutidas no material realizávamos comparações e recorríamos à geometria para resolvê-las. Compreendi que a geometria mencionada pelo professor se referia à utilização de figuras e demais representações que fazíamos para pensar na questão. Já Geruza pontuou que fazíamos a contagem das 'partes' em todas as atividades. Pontuei que em algumas realizávamos uma dupla contagem e então Priscila e Diogo relacionaram o caso do cabo de vassoura e da caneta com ideias da dupla contagem.

Notei que, embora não comentassem com detalhes a situação envolvendo o cabo e a caneta, os professores haviam compreendido que poderíamos seguir realizando o processo de comparação e subdivisão da unidade quantas vezes fosse necessário. Priscila retomou seu comentário feito na semana anterior, relatando que o próximo passo para identificar o *"pedacinho"* restante no cabo seria compará-lo com uma caneta, que seria nossa unidade, identificando assim se o *"pedacinho"* representa dois terços da caneta, por exemplo. Percebi que o comentário feito por Priscila tanto na semana anterior como neste encontro foi fundamental para que o grupo desenvolvesse o raciocínio. Pois a partir do comentário feito pela professora, outros professores puderam dar novas opiniões e conjecturas, ao exemplo de Diogo que atentou ao fato de que se o *"pedacinho não couber um número inteiro de vezes então temos que refazer esse processo indefinidamente".*

Continuando nossa conversa sobre o material, criticamos a ênfase nas representações de "pizza" e então Diogo comentou que buscava sair do *"feijãozinho com arroz, sair do robozinho"* (referindo-se ao ensino de frações enfático nas relações parte-todo e representações de pizzas) e por isso buscava outros cursos como aquele ambiente em que estávamos. Enalteci a vontade deles enquanto professores que em meio a uma pandemia e todas as mudanças que estávamos sofrendo estavam buscando novas perspectivas. Diogo comentou que, além de cursos, estaria buscando uma especialização para se *"atualizar",* assim, eu e Priscila o incentivamos a buscar algum mestrado e então utilizamos os minutos finais do encontro para conversar sobre o assunto e respondermos dúvidas de Diogo quanto ao ingresso.

4.4. O QUARTO ENCONTRO: sentimentos de ausência e comparativos como pontos de discussão

Como o encontro anterior havia sido o primeiro concomitante com o retorno das aulas e, assim, muitos professores precisaram se ausentar, decidi oferecer a estes um momento de conversa para retomar alguns dos pontos discutidos em sua ausência. Assim, fiquei disponível na sala virtual a partir das 14h15, 45 minutos antes do encontro, para que pudéssemos retomar algumas discussões até o horário marcado para o quarto encontro. Suzi manteve contato via e-mail e *Whatsapp* durante a semana e acessou a sala virtual para conversarmos sobre as discussões da semana anterior.

Permanecemos algum tempo conversando sobre as dificuldades e possibilidades encontradas no retorno às aulas na instituição pública em que atuava. A mesma pontuou a burocracia e dificuldades técnicas que a instituição enfrentava na migração e utilização de plataformas digitais sugeridas pelo governo. E explicou que, enquanto enfrentavam estes problemas, a instituição optava por realizar *lives* diárias sobre cada uma das áreas de conhecimento, mas que a participação dos alunos se aproximava de apenas 10% de todos os alunos matriculados.

Suzi mencionou ter percebido a baixa participação de seus colegas no envio de atividades via Moodle e encontros, incluindo aquele encontro que realizávamos para recuperar ausências, relacionando essa ausência dos colegas à baixa participação de seus alunos. Busquei tranquilizá-la enfatizando que estávamos no início do retorno às aulas e em agravamento de casos de Covid-19 em algumas regiões, o que influenciava na participação de todos.

Percebemos que havíamos nos empolgado conversando e logo estaria chegando o horário marcado para a reunião semanal, então iniciamos a fala sobre o Material 01. Suzi comentou ter estudado todas as atividades do material e que faltavam duas atividades para comentarmos as quais, respectivamente, envolviam a equipartição de um objeto e os giros.

Enquanto Suzi ia pontuando suas percepções sobre as questões, fui identificando pontos que havíamos conversado em sua ausência. A Figura 15 apresenta uma das questões sobre as quais Suzi comentou os mesmos aspectos que seus colegas na semana anterior.

Figura 15 – Item *e* da atividade envolvendo a equipartição no Material 01 comentado por Suzi

e. O grupo C era formado por Caio, Ana e Junior e a torta tinha um formato diferente do usual. Como esperado, a torta deveria ser repartida igualmente entre os colegas. Como você dividiria a torta representada na figura abaixo em três pedaços? Dica: utilize o tangram como auxílio.

Fonte: autoral

Fonte: acervo da pesquisa.

Quanto à questão apresentada na Figura 15, Suzi comentou sobre a possibilidade de identificar noções de geometria na resolução da atividade. A professora então mencionou seu interesse em enviar essa questão para seus alunos do 7º ano devido a mesma possibilitar que utilizassem conhecimentos geométricos. Comentei que, caso se sentisse à vontade em apresentar seu relato sobre o uso da atividade em sua prática docente, eu gostaria de ouvi-la.

Suzi relatou ter confeccionado um conjunto de Tangram em papel para tentar identificar mais de uma solução para as questões G e J da atividade (Figura 16 e 17), mas que não havia tido sucesso na busca de uma nova solução. A Figura 16 apresenta o item *e* e o item *g*.

Figura 16 – Itens *e* e *g* da atividade envolvendo a equipartição no Material 01.

e. O grupo C era formado por Caio, Ana e Junior e a torta tinha um formato diferente do usual. Como esperado, a torta deveria ser repartida igualmente entre os colegas. Como você dividiria a torta representada na figura abaixo em três pedaços? Dica: utilize o tangram como auxílio.

Fonte: autoral

g. Se utilizarmos as peças do tangram para montarmos a torta do grupo C, e então representarmos numericamente o pedaço de torta que cada um recebeu, podemos estimar quantas representações teríamos? Explique.

Fonte: acervo da pesquisa.

A Figura 17 apresenta o item *h* e o item *j*.

Figura 17 – Item *h* e *j* da atividade envolvendo a equipartição no Material 01 comentado por Suzi.

h. O grupo D era composto por 6 alunos, Cristian, Bárbara, Lucas, Mariana, David e Sofia e sua torta tinha o mesmo formato da torta do grupo C. E, de novo, como esperado, a torta deveria ser repartida igualmente entre os participantes do grupo. Como você dividiria a torta entre eles? Dica: utilize o tangram como auxílio.

Fonte: autoral

j. Se utilizarmos as peças do tangram para montarmos a torta do grupo C, e então representarmos numericamente o pedaço de torta que cada um recebeu, podemos estimar quantas representações teríamos? Explique.

Fonte: acervo da pesquisa.

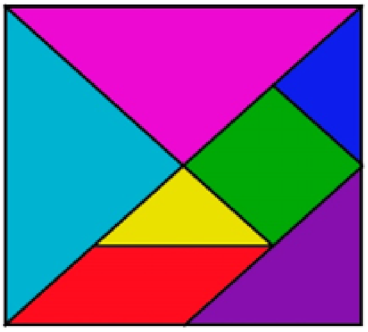
Lembrava que havia mais de uma solução para cada questão e por isso era sugerido que buscássemos mais de uma. No momento da conversa com Suzi, minutos antes do encontro com o grupo, concordávamos que era sim possível ter outras soluções devido às equivalências entre as peças do Tangram, mas desenhando na tela compartilhada e mobilizando as peças do Tangram físicas, não encontramos novas soluções. Como sabia que havia outras, me comprometi em conferir as outras soluções, como eu e Suzi imaginávamos e então compartilhar com ela.

A Figura 18 apresenta o desafio que seguia as atividades que eu e Suzi comentávamos.

Figura 18 – Itens *i* e *ii* do desafio da atividade envolvendo equipartição no Material 01

DESAFIO:

I. Se em um grupo com 10 pessoas, cada uma recebeu um pedaço de bolo do tamanho e formato do triângulo pequeno do tangram (representado na imagem abaixo por verde ou roxo). Como poderia ser o formato de torta destinado a esse grupo antes da divisão? Quantos e quais formatos seriam possíveis?



Fonte: imagem retirada da internet

II. E se nesse mesmo grupo, cada uma das 10 crianças recebesse um triângulo pequeno de bolo e ainda assim sobrassem duas fatias, qual poderia ser o formato do bolo? (utilize as peças do tangram)

Fonte: acervo da pesquisa.

Os itens *i* e *ii* do desafio propunham que construíssem o ‘todo’ por meio da identificação de uma de suas ‘partes’, comentei que não lembrava ao certo naquele momento se com 10 ou 12 partes conseguiríamos montar um ‘todo’ como os das Figuras 16 e 17. Prontamente Suzi respondeu que imaginava serem 12 partes, naquele momento não pensei em lhe questionar o porquê, pois tinha a mesma intuição que a professora. Dias depois fiquei curiosa sobre a resposta dada por Suzi.

Ao conversarmos sobre o desafio, detalhei brevemente diferenças entre situações envolvendo parte-todo e outras situações como em contextos de medida nos quais não tínhamos uma unidade estabelecida. Enquanto isso, Priscila acessava a sala virtual; informamos sobre o que conversávamos e então seguimos nossa conversa.

Quanto à atividade envolvendo giros, fiquei surpresa enquanto Suzi comentava suas ideias, pois em geral eram as mesmas ideias que os vizinhos de Geruza haviam expressado. Complementando sua fala, Suzi mencionou o seguinte: *eu acho que ao nono ano eles vão ser mais precisos, porque os pequenos provavelmente fariam só uma referência, assim... mas os grandes, eles iriam partir para a situação da medida da circunferência ali* [referindo-se à ideia de desenhar uma circunferência no chão para auxiliar no desenvolvimento da questão]. *Eu acho que os pequenos usam muito o corpo como referência, e daí eles relacionariam com o corpo, o movimento de um quarto de volta ou meia volta, não com a medida. Já os grandes se preocupariam mais com o quanto de fato eles conseguiram girar."* Pontuei que os comentários da professora se aproximavam bastante daquilo narrado por Geruza na semana anterior e então, em seguida, convidamos Priscila para a conversa para que começássemos nossas discussões sobre o outro material.

Assim como Suzi, Priscila estranhou a presença de apenas nós três na sala virtual e questionou a ausência dos outros professores. Retomei a fala que havia feito antes sobre a pandemia e o retorno às aulas como um dos possíveis motivos das ausências.

Já ao conversarmos sobre o Material 02, o qual era foco da reunião, Suzi iniciou comentando sobre a atividade escolhida por ela. O material em questão abordava questões envolvendo o significado razão, então buscaríamos estabelecer relações. Suzi iniciou sua fala indicando suas dúvidas quanto à questão envolvendo educação alimentar. A questão mencionada pela professora buscava estabelecer algumas inferências sobre a prática alimentar por meio de dados que relacionavam o consumo com dias, semanas e meses. A Figura 19 apresenta o quadro com os dados disponibilizados no Material 02.

Figura 19 – Quadro disponível no Material 02 com relações envolvendo consumo de alimentos

- Com qual frequência você costuma comer bombons? E quantos bombons (mais ou menos)?

João: de 3 em 3 dias	Bianca: 4 vezes na semana	Natalia: 1 vez na semana
8 bombons por semana	12 bombons por semana	8 bombons por mês

- Quando você costuma comer saladas?

João: 2 dias na semana	Bianca: todos os dias	Natalia: um dia sim outro não

- Quantos copos de refrigerante você toma (estimado) por semana?

João: 8 copos	Bianca: 3 copos	Natalia: 0 copos

- Quantas frutas você costuma comer por semana?

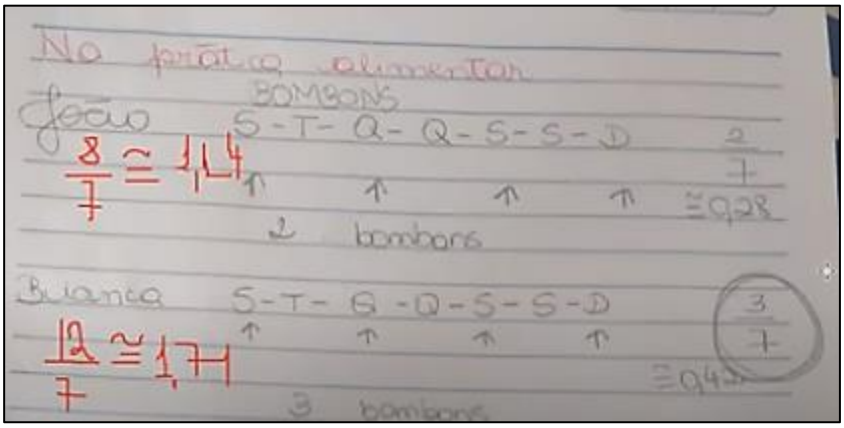
João: 5 frutas	Bianca: 10 frutas	Natalia: 7 frutas

Fonte: acervo da pesquisa.

Suzi esclareceu que estava preocupada em dividir uma *"quantidade exata"* de bombons e saladas por dia de consumo, mas como não eram informadas quantidades nem dias da semana em que ocorria a alimentação, ela encontrou problemas em sua resolução. Suzi enfatizou que havia recorrido à representação decimal para comparar e responder as questões. Suzi pediu que eu compartilhasse sua resolução com Priscila para que a mesma pudesse ajudá-la a pensar. Percebi que Suzi estava confortável na dinâmica proposta nos encontros, pois percebia abertura para iniciar e instigar novas discussões com os colegas.

Enquanto Suzi comentava suas ideias, percebeu que seria melhor não focar nos dias específicos da semana, mas sim na semana como um todo. A própria professora utilizou as ferramentas da plataforma digital para fazer anotações na tela compartilhada. Naquele momento a tela era compartilhada por mim mostrando o envio da solução feito por Suzi e sempre que alguma tela era compartilhada todos os participantes podiam escrever na mesma. A Figura 11 mostra a tela compartilhada com a resolução de Suzi, com dois raciocínios diferentes. Ela pediu minha opinião e de Priscila para identificar qual dos dois raciocínios compreendíamos melhor, aquele destacado em vermelho (elaborado naquele momento em que conversávamos) ou aquele registrado em lápis no papel.

Figura 20 – Imagem da tela com anotações antigas e novas feitas por Suzi sobre a atividade envolvendo prática alimentar do Material 02



Fonte: acervo da pesquisa.

Pedi que Suzi comentasse seu raciocínio ao estabelecer a fração 2/7 para a situação envolvendo João (aluno fictício mencionado no quadro da Figura 20) e então ela comentou que:

- *Eu dividi de três em três dias* [e então estabeleceu os dias em que comeram bombons como Segunda-feira, Quarta-feira, sexta-feira e domingo – aqueles com uma seta na Figura 20), *então nas minhas contas de três em três dias fechou quatro dias na semana. Lembra que eu falei que reorganizei? Aí eu peguei os 8 bombons e dividi pelos 4 dias. E então representei por dois sétimos, sendo 2 bombons e 7 os dias da semana. Mas aí eu queria ver com vocês, nesse sentido. Porque se eu colocasse do jeito que eu coloquei* [Figura 20] *em segunda, quarta, sexta e domingo, fica de um jeito, mas também poderia ser segunda, quinta e domingo. Só que na minha concepção se eu colocar segunda, quinta e domingo, parece que vai ser a cada quatro dias e não a cada três dias como fala no material.*

Priscila sugeriu que estabelecemos meses ou semanas como unidade de medida e não fixássemos os dias da semana. Então citamos nossas duas opções até o momento, utilizar os números decimais ou utilizar uma unidade de tempo em comum como mês ou semana. Ao mencionarmos a possibilidade do uso da representação decimal como Suzi havia sugerido, Priscila salientou sua perspectiva sobre o costume de seus alunos.

- *Muitas vezes os alunos adotam como estratégia passar toda e qualquer fração pra decimal pra poder resolver. E em alguns casos, aqui os dois dariam pra ver* [referindo-se a representação fracionária e à decimal], *mas em alguns casos passar para o decimal acaba sendo mais trabalhoso... tem que passar pra decimal, fazer as operações... Como vai dividir dois decimais? Mas enfim... Às vezes os alunos acabam optando por isso porque se sentem mais à vontade com esse tipo de número.*

Suzi então respondeu a Priscila justificando sua escolha pela representação decimal devido a compreender que não conseguiríamos representar meses e semanas em uma única unidade de tempo padrão:

- *É que nesse caso aqui a gente não tem como a gente fazer uma representação na questão do mês exatamente como deveria. [...] Nesse caso aqui se a gente quer uma resposta mais precisa acredito que os decimais seriam menos trabalhosos.*

Como estávamos na discussão comparando facilidades e dificuldades em trabalhar com frações ou números decimais no caso em específico, sugeri que pensássemos apenas em dias. Assim, como João comia 8 bombons por semana, em 4 semanas comeria 32 bombons, e então minha proposta foi de que pensássemos como comparar as frações 32/28 e 32/30 nas quais os numeradores representam a quantidade de bombons e os denominadores os dias (30 representando um mês completo). Como sugestões de modos para comparar ambas as frações Diogo, que havia entrado há poucos minutos na reunião, sugeriu que utilizássemos denominadores comum por meio de múltiplos comuns de 28 e 30. Já Priscila mencionou que poderíamos utilizar desenhos, embora considerasse esse um processo trabalhoso. E Suzi então propôs que nesses casos utilizássemos a transformação para números mistos. Eu e Priscila concordamos que a ideia de utilizar números mistos poderia facilitar o processo, dependendo dos conhecimentos prévios dos alunos, pois possivelmente compreenderiam que comparar frações próprias fosse mais fácil de comparar do que frações impróprias.

Após a série de sugestões, retomei todas as possibilidades sugeridas por cada um de nós ao longo da conversa, a fim de que percebêssemos a variedade de caminhos citados por nós.

Priscila e Diogo estudaram a questão intitulada “Muitas pizzas e muitas pessoas”. Nela buscávamos identificar possíveis divisões de 18 pizzas para 24 pessoas distribuídas em mesas. Ambos os professores elencaram aspectos distintos em suas resoluções e isso foi enfatizado em nossas discussões. Por exemplo, Diogo pensou na distribuição sem a necessidade de que todas as mesas tivessem o mesmo número de pessoas. Um exemplo de distribuição feita pelo professor foi de *“1 mesa com 6 pessoas e 4,5 pizzas mais 6 mesas com 3 pessoas e 2,25 pizzas em cada mesa”.* A estratégia de Diogo para resolver a questão me surpreendeu, pois eu não havia pensado nessa possibilidade e/ou visto alguém resolvê-la daquele modo.

Priscila, por sua vez, ao contrário de Diogo, realizou sua distribuição considerando mesas com o mesmo número de pessoas e consecutivamente o mesmo número de pizzas. Contudo, também me surpreendendo, buscou identificar o padrão que acontecia nas distribuições possíveis considerando um mesmo número de mesas com um mesmo número de pessoas em cada. A distribuição inicial feita por Priscila é apresentada na Figura 21.

Figura 21 – Distribuição inicial feita por Priscila ao dividir 18 pizzas entre 24 pessoas

24 pessoas vão juntas a uma pizzaria e pedem 18 pizzas. Não há uma mesa onde possam se sentar todas juntas. Como distribuir as pessoas e as pizzas em mesas menores, de modo que todos possam comer igualmente?

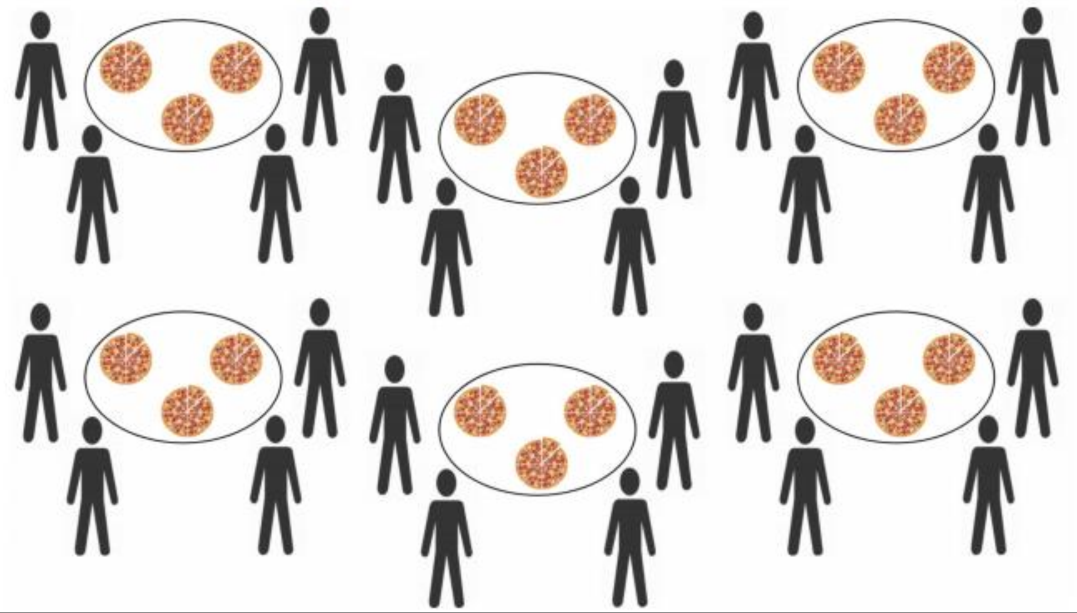
24 pessoas

18 pizzas; 144 fatias; Cada pizza será dividida em 8 fatias.

6 mesas

Em cada mesa sentarão 4 pessoas e serão colocadas 3 pizzas.

Cada pessoa comerá 6 fatias de pizza.



Fonte: acervo da pesquisa.

Após apresentar sua ideia inicial tendo a Figura 21 compartilhada com todos, Priscila comentou que:

- *Eu comecei com seis mesas né? E ainda usando seis mesas eu fui mudando a quantidade... ah... o número de fatias que cada pizza foi dividida. Então ainda considerando seis mesas ao invés de dividir em oito fatias eu dividi em quatro. [...] Daí dividi em 12, 16, dividi em 20. Se a gente for parar pra pensar no ponto de vista da quantidade de pizzas que cada pessoa comeu, ela sempre comeu a mesma quantidade. Que é o que eu coloco ali embaixo* (referindo-se ao comentário feito por si própria no material enviado que aparecia na parte de baixo da tela compartilhada com todos).

O comentário ao qual Priscila se referia aparece na Figura 22 com o título de *"Importante"*.

Figura 22 – Comentários feitos e enviados por Priscila apontando outras possibilidades de respostas para o problema envolvendo muitas pizzas e muitas pessoas

* Ainda usando 6 mesas.

↳ Ao invés de dividir cada pizza em 8 fatias, dividir em 4. Sendo assim cada pessoa comeria 3 fatias.

↳ Dividir cada pizza em 12 fatias. Sendo assim cada pessoa comeria 9 fatias.

↳ Dividir cada pizza em 16 fatias. Sendo assim cada pessoa comeria 12 fatias.

↳ Dividir cada pizza em 20 fatias. Sendo assim cada pessoa comeria 15 fatias.

↳ Dividir cada pizza em **n** fatias, tal que **n = m:18** sendo **m** um múltiplo comum de 18 e 24. Cada pessoa comeria **m:24** fatias.

Importante: Nessa resolução a quantidade de pizza que cada pessoa comeria é a mesma, muda apenas o tamanho da fatia, pois as frações $\frac{3}{72}$, $\frac{6}{144}$, $\frac{9}{216}$, $\frac{12}{288}$ e $\frac{15}{360}$ são equivalentes.

Fonte: acervo da pesquisa.

Priscila continuou seu comentário:

- Se a gente for ver é quase uma discussão filosófica, mas existe uma diferença na maneira como tu vais cortar uma pizza em oito fatias ou em quatro. Do ponto de vista do que tu comes não, mas... [gesticulando bastante com as mãos] *do [ponto de vista] do problema matemático eu listei como diferentes... esses números de fatias que tu poderias resolver. Aí tentei encontrar ali um padrão e dar uma algebrizada no negócio para encontrar um padrão do que era que estava acontecendo. Em quantas fatias eu podia dividir, considerando o mínimo múltiplo comum entre 18 e 24 e tal.*

Enquanto Priscila comentava, Suzi teve problemas de conexão, então apenas Diogo interagiu conosco. O professor relatou a facilidade em identificarmos a proporção pelo caminho adotado por Priscila, visto que era fácil percebermos que, se mais fatias eram cortadas, cada um poderia comer mais fatias também.

Embora Priscila já houvesse comentado brevemente sobre o uso do mínimo múltiplo comum na resolução da questão, busquei enfatizar essa discussão, então retomei as divisões feitas por Diogo, pois percebia que através das mesmas era mais fácil percebermos a influência dos múltiplos. Questionei o que acontecia para que em determinados números de mesas as pizzas tivessem que ser divididas como Diogo havia nos mostrado. Priscila prontamente respondeu que tal divisão só acontecia devido ao número de mesas não ser um divisor do número de pizzas e concluiu sua fala valorizando as potencialidades da questão.

- Trouxemos bastante essa ideia de proporção nessa questão e o que mais gostei foi que no fim a gente conclui que temos infinitas possibilidades. 'Ah, eu consegui fazer mais um', 'ah, consegui fazer mais um'. E daqui a pouco 'opa, eu consigo fazer muitas'. Acho difícil na sala de aula eles conseguirem concluir isso, mas é bem interessante.

Priscila mencionou em sua fala ainda a necessidade que teve *"enquanto professora"* de buscar uma generalização para entender o que acontecia, sendo isso uma necessidade que acreditava que os alunos não teriam.

Iniciamos então uma conversa sobre os alunos, Diogo pontuando a dificuldade que seus alunos têm em interpretação e relatando a brincadeira que faz com seu colega de escola, o professor de Língua Portuguesa. Segundo Diogo, "*o problema dos alunos não é a matemática e sim o português.".* O professor se mostrou preocupado com a aprendizagem que os alunos estariam tendo naquele período de ensino remoto emergencial. Dentre os aspectos que pude perceber com ênfase nas falas do professor, destaco os problemas de acesso à internet e tecnologia por parte de seus alunos. Segundo Diogo, foram propostos momentos síncronos com os alunos via a plataforma *Google Meet*, embora a ferramenta que melhor funcionasse em sua realidade seria o *Whatsapp*. Contudo, o próprio acesso ao *Whatsapp* era problemático pois muitas famílias com vários integrantes e muitas vezes com mais de uma criança em período escolar tinham acesso a apenas um telefone celular, o que dificultava o contato do professor com seus alunos.

Outro ponto que destaco da fala de Diogo refere-se à influência que a mídia e determinadas falas veiculadas por ela geraram em seus alunos. O professor comenta que as turmas que mantinham uma participação razoável, em torno de 40% do total de aluno mantendo interações, seriam as dos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, enquanto as turmas de 8º e 9º anos, segundo ele não demonstravam interesse.

- *Já estão naquela idade de não querer e alguém começou dizer aí na mídia que todo mundo iria passar, que todo mundo seria aprovado, então...ficou aquilo né.*

Fiquei surpresa pelo relato de Diogo, pois embora particularmente eu compreendesse a influência gerada por comentários políticos em mídias de grande expansão, não esperava ver um relato de tal influência tão "próximo" a mim.

Seguimos, nos minutos finais da reunião, conversando sobre as experiências e realidades de cada um em meio à pandemia, e concordamos em continuar as discussões sobre o Material 02 na semana seguinte. Naquele dia pude perceber indícios de proximidade e valorização, pelos participantes, das falas uns dos outros, o que acabou mudando minha própria perspectiva, que ainda era marcada pela experiência vivida na edição anterior do curso de extensão.

4.5. O QUINTO ENCONTRO: a confiança e a busca de estratégias em grupo

O quinto encontro ficou marcado pela história da professora Geruza. A professora foi a primeira a entrar no ambiente da sala virtual e, enquanto esperávamos outras pessoas, retomamos o estudo do material 02 e um resumo da reunião anterior na qual Geruza não estava presente. A professora comentou que havia iniciado a resolução da questão envolvendo uma escola multisseriada (Figura 23) e, enquanto conversávamos sobre as perguntas, Geruza retomou reiteradas vezes as histórias sobre suas experiências em escola multisseriada. As situações e contexto narrados pela professora marcaram minha memória, não pelo desconhecido, mas pelo inesperado, pela surpresa.

Figura 23 – Parte da atividade envolvendo escola multisseriada proposta no Material 02

Numa escola multisseriada, 6 alunos do primeiro ano e 5 alunos do segundo fazem parte de uma única turma, a turma da professora Cláudia. Já na turma do professor Bruno, são 5 alunos do terceiro ano e 8 do quarto ano. Considerando que nessa escola existam apenas essas duas turmas e professores, quais relações podemos fazer? Cite aquelas que você percebe ou imagina.

DESAFIO:

I. Como poderíamos responder a seguinte questão:
   a. Qual a relação entre número de professores e número de alunos na turma da professora Cláudia?
   b. E na turma do professor Bruno?
   c. E para a escola toda?

Fonte: acervo da pesquisa.

Geruza comentou ter atuado como professora de escola multisseriada em anos próximos a 1995, e relatou o contexto em que isso aconteceu. Segundo a professora, ela era a única responsável pela educação de crianças que se aproximavam ao que seria hoje da Educação Infantil ao quinto ano do Ensino Fundamental, no interior do Maranhão (mesma cidade em que atuava na época daquela conversa). As reivindicações dos moradores, incluindo seus pais, para que as crianças da localidade tivessem acesso à educação parecia algo vívido na memória de Geruza e talvez essa vivacidade tenha me encantado e impressionado. Segundo a professora, após reivindicações por parte dos moradores dirigidos a políticos da região, foi sugerido que ela assumisse o que seria o início de uma escola com as vinte crianças da localidade, visto que ela era a que tinha maior escolaridade (próxima à conclusão do Ensino Fundamental).

Enquanto eu e Geruza conversávamos, Diogo e Priscila acessaram a sala virtual. Wiliam e Suzi informaram que estavam indispostos devido à Covid-19 e então não participariam, mas gostariam de retomar as discussões em outro momento.

Continuando nossas discussões sobre as atividades, Diogo relatou o estudo que havia feito sobre a atividade intitulada "Um problema com vários pensamentos" (Figura 24). Priscila também havia demonstrado interesse na questão em outra oportunidade, assim, ambos os professores relataram suas estratégias. Diogo explicou seu interesse na questão devido a esta, segundo ele, ser uma das principais situações nas quais seus alunos demonstram dificuldade.

Figura 24 – Parte da atividade envolvendo a relação de alunos com e sem acesso a internet proposta no Material 02.

Uma turma de 40 alunos teve parte de suas atividades remotas devido ao distanciamento social. Por isso, a professora responsável pela turma fez um levantamento para identificar aqueles que possuem acesso à internet ou não, sendo que aqueles alunos que não possuem acesso irão receber os materiais físicos em mãos. Com o levantamento, a professora percebeu que a relação entre o número de alunos que possuem acesso e os que não possuem é de 5 para 3. Com essas informações, como podemos saber quantos materiais físicos a professora terá que preparar? Ou seja, quantos alunos deverão receber os materiais em mãos na portaria da escola?

Fonte: acervo da pesquisa.

A questão apresentada na Figura 24 tinha como intuito identificar o número total de alunos com e sem acesso à internet em uma determinada turma que tinha como relação 5 alunos com acesso para cada 3 sem acesso. Diogo compartilhou sua resolução como mostra a Figura 25.

Figura 25 – Resolução proposta por Diogo para a questão sobre alunos com e sem acesso a internet proposta no Material 02

40 alunos
5 internet
3 físico
Somei o número de alunos da proporção 5+3= 8 e conclui que para cada 8 alunos 5 tem internet e 3 não.
Logo, para saber o número de alunos que deve receber material impresso, utilizes uma regra de três.

$$\frac{8}{3} = \frac{40}{x}$$

8x = 3 x 40
8x = 120
X = 120 / 8
X = 15

15 alunos deve receber material impresso

Fonte: acervo da pesquisa.

Ao explicar seu raciocínio, Diogo esclarece que culminar na regra de três como mostra a Figura 25 não é uma tarefa fácil em suas aulas:

- *Para mim fazer uma relação como uma regra de três, o que eu tenho que fazer? Primeiro eu tenho que descobrir essa proporção de oito está para três igual 40 está para x. Aí eu consigo fazer a proporção. E não a proporção 5 para 3 igual 40 para x. Essa montagem dessa regra de três é bem difícil de colocar na escola, eu tenho dificuldade de colocar isso. Demoro para fazer os alunos entender isso.*

Concluindo seu comentário Diogo exemplificou uma das situações recorrentes nesse contexto, em que alguns alunos apresentam raciocínios próximos ao do item *a* conforme mostra a Figura 26.

Figura 26 – Exemplo proposto por Diogo sobre erros comuns de seus alunos

A) $\frac{5}{3} = 8,\ \frac{10}{6} = 16, \frac{20}{12} = 32,\ \frac{40}{24} = 64$ $(obs: este\ meto\ esta\ errado)$
b) $\frac{8}{3}, \frac{16}{6}, \frac{24}{9}, \frac{32}{12}, \frac{40}{15}$ $\quad \frac{8}{5}, \frac{16}{10}, \frac{24}{15}, \frac{32}{20}, \frac{40}{25}$ $(estes\ dois\ metos\ estão\ certos\ )$

Fonte: acervo da pesquisa.

Em seguida Priscila compartilhou suas resoluções. A professora havia pensado em duas estratégias diferentes das de Diogo, uma apresentada na Figura 27 e outra seguindo o mesmo raciocínio, mas com desenhos de pessoas ao invés do numeral.

Figura 27 – Resolução proposta por Priscila para a questão sobre alunos com e sem acesso a internet proposta no Material 02

Total: 40 alunos

$$\frac{Tem\ acesso}{Não\ tem\ acesso} = \frac{5}{3}$$

Dividir a turma em grupos de oito alunos, sendo 5 que tem acesso e 3 que não tem.

- $5 + 3 = 8$
- $5 + 3 = 8$
- $5 + 3 = 8$
- $5 + 3 = 8$
- $5 + 3 = 8$

Sendo assim formamos 5 grupos.

25 alunos têm acesso e 15 não têm.

Fonte: acervo da pesquisa.

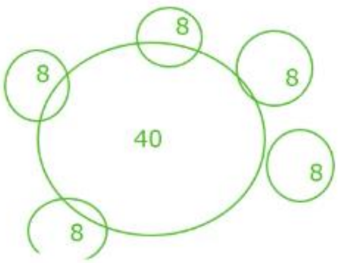
A questão em foco era adaptada de um material de autoria de Nilza Bertoni e tal informação era disponível em nota de rodapé para os professores e também foi destacada por mim no decorrer da conversa. Após a apresentação da ideia de Priscila, a mesma demonstrou sua dúvida em relação a sua resolução ser considerada pela autora como “tentativa e erro”.

Após a apresentação das ideias de Priscila, todos juntos buscamos pensar em novas estratégias de resolução, uma delas foi a representada na Figura 28.

Figura 28 – Estratégia pensada em conjunto para responder a questão sobre alunos com e sem acesso a internet proposta no Material 02

3. UM PROBLEMA COM VÁRIOS PENSAMENTOS:

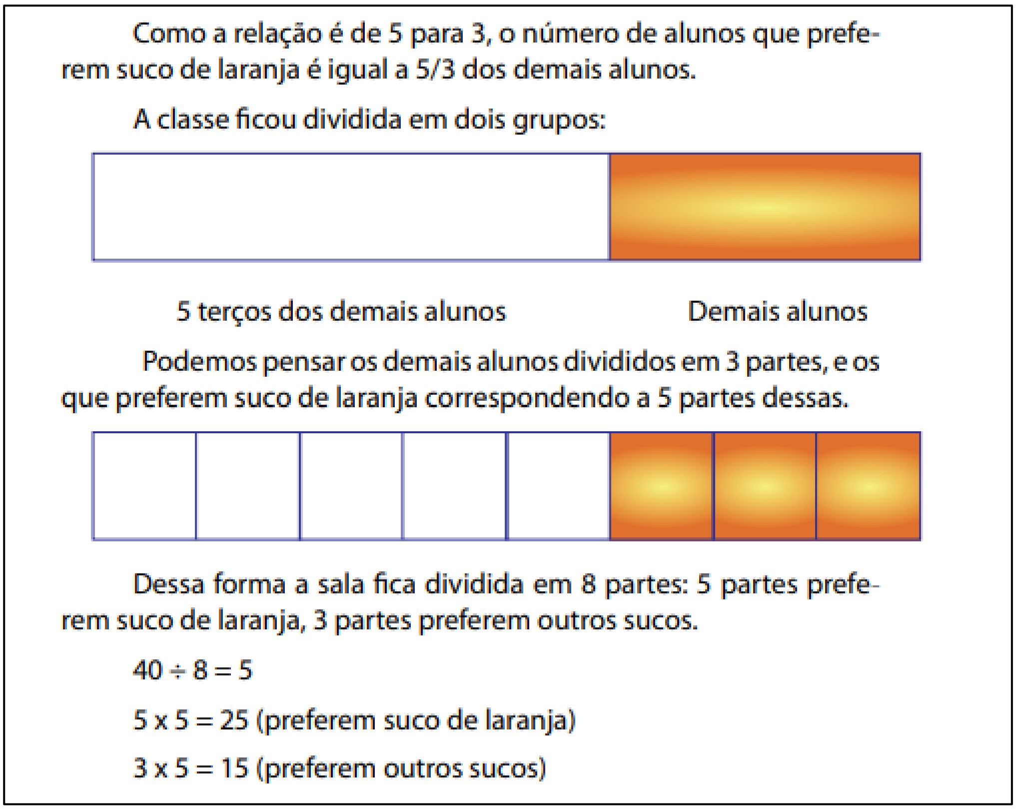
Uma turma de 40 alunos teve parte de suas atividades remotas devido ao distanciamento social. Por isso, a professora responsável pela turma fez um levantamento para identificar aqueles que possuem acesso à internet ou não, sendo que aqueles alunos que não possuem acesso irão receber os materiais físicos em mãos. Com o levantamento, a professora percebeu que a relação entre o número de alunos que possuem acesso e os que não possuem é de 5 para 3. Com essas informações, como podemos saber quantos materiais físicos a professora terá que preparar? Ou seja, quantos alunos deverão receber os materiais em mãos na portaria da escola?



Fonte: acervo da pesquisa.

Embora em alguns momentos tenhamos pensado que a estratégia representada na Figura 28 seja equivalente a alguma das estratégias já apresentadas por Diogo e/ou Priscila, ao final consideramos como uma estratégia diferente, por partirmos do número total de alunos (40), ao contrário dos outros exemplos em que partíamos da relação de 5 para 3. Após citarmos as possibilidades que imaginávamos, compartilhei a resolução proposta pela própria autora da questão original. Na versão original da questão, a relação era entre alunos que gostavam de suco de laranja ou não, a Figura 29 mostra a resolução proposta pela autora.

Figura 29 – Resolução da questão original envolvendo a relação de 5 para 3 proposta por Nilza Bertoni


Como a relação é de 5 para 3, o número de alunos que preferem suco de laranja é igual a 5/3 dos demais alunos.

A classe ficou dividida em dois grupos:

5 terços dos demais alunos

Demais alunos

Podemos pensar os demais alunos divididos em 3 partes, e os que preferem suco de laranja correspondendo a 5 partes dessas.

Dessa forma a sala fica dividida em 8 partes: 5 partes preferem suco de laranja, 3 partes preferem outros sucos.

40 ÷ 8 = 5

5 x 5 = 25 (preferem suco de laranja)

3 x 5 = 15 (preferem outros sucos)

Fonte: acervo da pesquisa.

Fomos construindo a resolução proposta pela autora em conjunto, detalhadamente, e concordamos ao considerar que dentre as soluções apresentadas naquele encontro, a proposta pela Figura 29 seria uma das mais difíceis. A fala de Priscila sobre o assunto resumiu nossa discussão, segundo a professora: *pensarmos em cinco terços de algo que não conhecemos não é simples.*

Aproximando-nos do fim do encontro, conversei com os professores sobre minha proposta de trabalho final para o curso. Propus que construíssem um material no formato que preferissem (vídeo, pdf, áudio, apresentação, atividades, etc) abordando um tópico importante sobre frações que compreendessem importante para professores. Em geral deixei em aberto algumas perguntas como: o que vocês consideram importante a ser discutido entre professores sobre fração? O que vocês proporiam a outros professores sobre frações? Deixei aberta a possibilidade de reestruturarem discussões que tivemos durante os encontros, reorganizassem algum dos materiais propostos, construíssem outros materiais, abordassem assuntos que não foram discutidos no curso e/ou qualquer ideia que gostariam de propor a outros professores desde que relacionada às frações. Comentei que iria retomar o assunto nos encontros seguintes.

Concluímos o encontro, assim como os encontros passados, conversando sobre o material e atividades de estudo para a próxima semana.

4.6. O SEXTO ENCONTRO: problemas antigos sob novos olhares e as expectativas quanto à escola *pós-pandemia*

Nesse encontro estiveram presentes Diogo, Geruza, Priscila e Suzi. Conversamos sobre o interesse de Diogo e Suzi em ingressar no mestrado e suas dúvidas sobre matrículas especiais. Ambos os professores comentaram seus interesses em realizar disciplinas como alunos especiais para em seguida ingressarem definitivamente no programa. Notei que a participação e interesse dos professores Diogo e Suzi naqueles momentos de discussões sobre o ensino de matemática faziam parte das metas de um futuro mestrado.

A atividade envolvendo a divisão de 18 pizzas para 24 pessoas (Figura 30) foi ponto de partida para nosso estudo do Material 3. Embora o problema já tivesse sido foco durante o estudo do Material 02, naquele momento, durante o estudo do Material 03, buscávamos olhar para o problema de um ponto de vista diferente do anterior. As diferenças entre o enunciado do problema do Material 02 para o Material 03 eram apenas quanto às perguntas propostas como desafios. A Figura 30 mostra as questões propostas como desafios para o Material 03, e foram por meio dessas questões que iniciamos nosso estudo naquele encontro. Durante esse momento retomamos vários pontos discutidos no encontro anterior devido à questão já ter sido alvo de estudo. Assim, nosso diálogo foi breve.

Figura 30 – Desafios propostos para a questão envolvendo muitas pizzas e muitas pessoas no Material 03

DESAFIO:

a) Qual caminho você tomou para resolver este problema?

b) Identifique 2 maneiras diferentes de distribuir as pessoas e as pizzas (2 modos diferentes de alojar as pessoas e as pizzas em mesas).

c) Busque uma relação entre pizzas e pessoas. Descreva o processo que você pensou para estabelecer tal relação.

d) Você acredita ser possível identificar a quantia exata de pizza que cada pessoa deverá comer para que todos possam comer igualmente? Se sim, que quantia é essa e como você identificou essa quantia?

e) Você percebe diferenças ou semelhanças entre as questões C e D? Liste aquilo que você percebe.

Fonte: acervo da pesquisa.

Reafirmamos que, assim como havíamos concluído na semana anterior, para ambos os itens, *c* e *d*, nossa resposta seria três quartos. Como entendia que havíamos um consenso por parte de todos sobre as respostas dos itens mencionados, busquei focar nossa discussão no item *e* do desafio. Assim, busquei que estabelecêssemos diferenças e semelhanças entre "os três quartos" encontrados nos itens *c* e *d*. Priscila, Suzi e Diogo concordaram que "não conseguiam fugir dos três quartos" e que para eles essa era a única semelhança entre os itens e não percebiam distinções.

Tentando instigá-los para as próximas atividades, comentei que as diferenças estariam relacionadas às palavras "relação" e "quantia" mencionadas em cada um dos itens, *c* e *d*, respectivamente. E que com as próximas atividades essas distinções ficariam mais evidentes. Priscila respondeu em tom de alívio que após minha menção às palavras "relação" e "quantia" ela já compreendia um pouco mais as diferenças entre os "três quartos" obtidos como resposta em cada item.

A própria Priscila foi a próxima a comentar sua atividade de estudo, envolvendo a divisão de refrigerantes mostrada na Figura 31.

Figura 31 – Atividade envolvendo a divisão de refrigerantes proposta no Material 03

Não é incomum presenciarmos irmãos discutindo quem ficou com a maior parte ou tomou mais refrigerante que o outro, sejam em situações reais ou desenhos e filmes. Nesse contexto vamos imaginar a seguinte situação:

3 irmãos decidem dividir 1 litro de refrigerante, porém têm ao seu alcance apenas 3 copos diferentes uns dos outros, como mostra a figura abaixo:

a. Como os irmãos podem resolver o problema e dividir igualmente o refrigerante?

b. Como você procederia nessa situação?

Fonte: acervo da pesquisa.

O objetivo dos itens *a* e *b* presentes na Figura 31 era de que percebêssemos a necessidade de utilizar uma unidade comum para os três irmãos e que essa unidade comum não é única, podendo haver outras soluções. Priscila demonstrou ter compreendido a necessidade de uma unidade de medida comum para os três irmãos, ela comentou o seguinte:

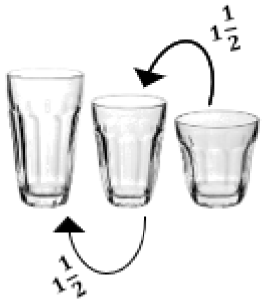
- Eu pensei em usar o copo pequeno como unidade... enche o copo pequeno, derrama no médio, enche o copo pequeno e derrama no grande, para assim todo mundo tomar a mesma quantidade. E assim por diante. E sobrou um pouquinho de refri que não enche o copo pequeno, então tá... enche metade do copo pequeno pra todo mundo, um quarto do copo pequeno pra todo mundo... Parece doideira, mas quem tem irmão é assim mesmo, não é?!

Priscila seguiu sua fala explicando sua solução para o desafio da questão. Enquanto a professora falava tínhamos na tela, compartilhado, o arquivo enviado por ela, nele apareciam as perguntas da atividade seguidas das soluções. A Figura 32 mostra os itens I e II do desafio.

Figura 32 – Itens *I* e *II* do desafio envolvendo a divisão de refrigerantes do Material 03

DESAFIO:

I. Se os irmãos já conhecessem o tamanho dos copos e soubessem que a quantidade de refrigerante que cabe no copo médio é igual a 1 ½ do copo pequeno e a quantidade que cabe no copo grande é igual a 1 ½ do copo médio. Como dividiriam o refrigerante? A quantos copos de refrigerante cada irmão teria direito para que todos tomassem a mesma quantidade, sabendo que 1 litro de refrigerante equivale a 9 copos pequenos?

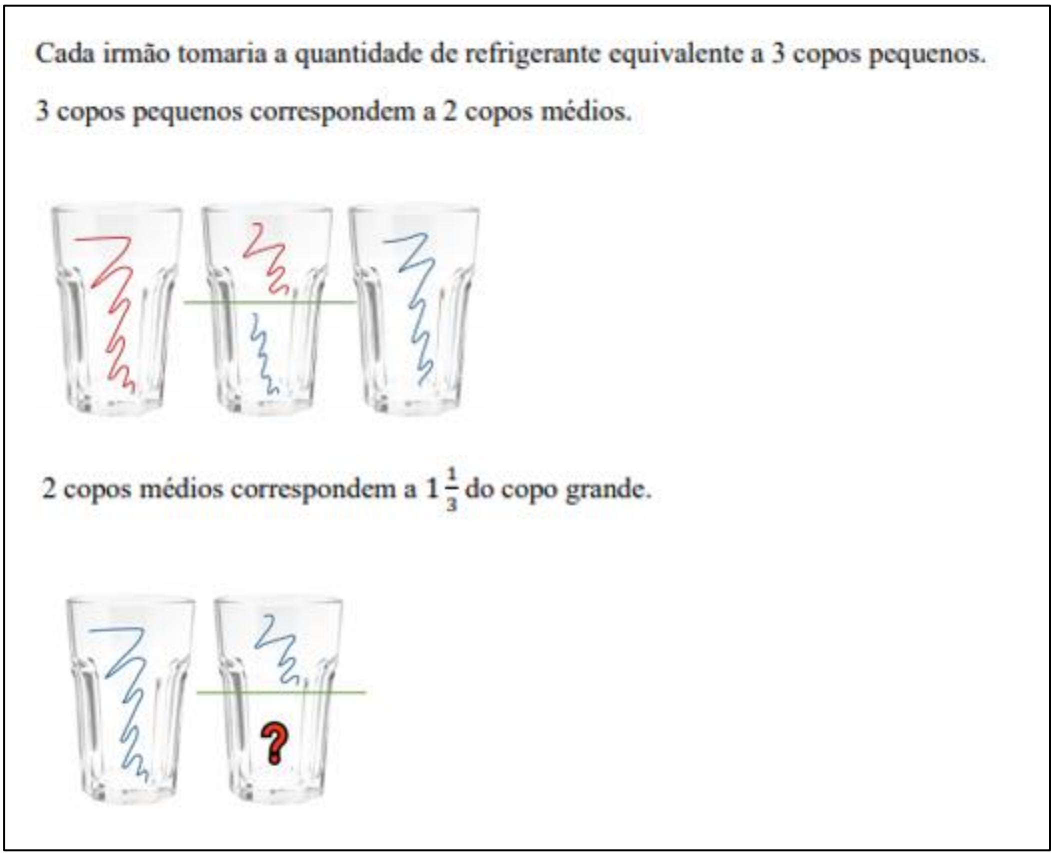


II. Você acredita que existam outras diferentes divisões para que os irmãos ganhem quantidades iguais de refrigerante? Por quê?

Fonte: acervo da pesquisa.

Priscila continuou sua fala detalhando quais os passos usados durante a resolução do item I. Segundo a professora, após compreender que cada irmão teria direito a 3 copos pequenos de refrigerante sua preocupação passou a ser *"três copos pequenos são quantos copos médios ou quantos copos grandes?"*. Respondendo sua pergunta, Priscila havia feito o esquema mostrado na Figura 33.

Figura 33 – Representação feita por Priscila para resolver o item *I* do desafio de dividir refrigerantes do Material 03.



Fonte: acervo da pesquisa.

Antes de iniciar cada reunião, eu acompanhava o envio de arquivos por parte dos professores, assim, antes desta reunião já havia visto a resolução proposta por Priscila. No primeiro momento em que vi a solução proposta com o esquema de copos, demorei a compreender o caminho tomado pela professora. Lembrando disso, enquanto Priscila comentava sua solução, pedi que nos explicasse o raciocínio envolvido no desenho dos copos. Então Priscila retomou o esquema da Figura 33 e nos explicou que os três copos pequenos desenhados poderiam ser divididos em duas partes: a parte em vermelho e a parte em azul; cada uma delas representando um copo pequeno e meio que seria a capacidade de um copo médio.

Priscila seguiu explicando a segunda parte do esquema, agora com os dois copos médios. E nesses dois copos poderíamos considerar apenas um copo médio e meio, correspondendo a um copo grande, restando meio copo médio. O ponto de interrogação como mostra a Figura 33 representava a dúvida em relação a quanto do copo grande aquela metade de copo médio representava.

Enquanto Priscila explicava sua representação, percebi que representar os copos pequenos e médios pelos mesmos modelos de copos e tamanhos era um obstáculo para mim. E após a fala da professora relatei minha percepção.

- Esse é um bom exemplo de como o visual influencia na nossa leitura né?! Porque lendo só as frases '3 copos pequenos correspondem a 2 copos médios' e '2 copos médios correspondem a 1 1/3 do copo grande', a gente raciocina tranquilo. Aí a gente relaciona a nossa leitura com a imagem, aí vem os tamanhos, as cores, aí já dá um 'bug'.

Ao falar "a gente" não almejava representar o pensamento/interpretações de outras pessoas e, talvez, o uso inadequado dos termos tenha conduzido Priscila a concordar com a minha fala sobre as imagens e lamentar a ausência de legendas e maiores explicações, enfatizando que gostaria de tê-las colocado, mas não houve tempo.

A Figura 34 apresenta os itens III, IV e V do desafio em questão.

Figura 34 – Itens *III, IV* e *V* do desafio sobre a divisão de refrigerante do Material 03

III. E se, por sorte ou não, os irmãos encontrassem copos iguais, cada um deles com 300 ml como na imagem abaixo. Como dividiriam o refrigerante? Cada irmão poderia tomar quantos copos?

IV. Estabeleça uma relação refrigerante por pessoa para esta situação.

V. Como você poderia adaptar essa situação para o nível de ensino em que atua?

Fonte: acervo da pesquisa.

O item V solicitava possíveis alterações na apresentação da situação a fim de adaptá-la para o nível de ensino em que cada um atuava. A fala da professora Priscila sobre o item foi a seguinte:

- Eu acho que mesmo para os maiores, mesmo para os alunos do 9º ano, essa questão eu pensei ela muito prática assim, por isso até eu fui fazendo o desenho assim [como na Figura 33], *sabe... ter os copos de diferentes tamanhos, ter essas proporções, ter o líquido não necessariamente o refrigerante, mas para concluir, por exemplo, que aquele um meio do copo médio corresponde a um terço do copo grande eu acho que fazer essa associação ela não é tão simples, ela não é tão óbvia... sem tu ter o material ali e fazer: ó essa medida aqui* [representando com a mão um tamanho] *representa um meio, já nesse copo representa isso*

aqui [fazendo um gesto menor com a outra mão], *ou seja, um terço. Eu fiquei pensando pelo menos isso com os meus alunos, precisaria de algo concreto para poder ilustrar.*

Busquei incentivar que Diogo, Geruza e Suzi participassem da conversa questionando o que os professores tinham compreendido da questão ou da solução proposta por Priscila. Após alguns segundos em silêncio optei por explicar qual havia sido minha primeira ideia de solução para a questão, já que havia diferenças entre minha estratégia e a de Priscila. Expliquei que ao invés de comparar o copo médio com o copo grande, comparei o copo pequeno com o copo grande a fim de deixar todos os copos na mesma unidade de medida. Assim, escolhi o copo pequeno como unidade e percebi que um copo médio equivalia a 3/2 da unidade e o copo grande equivalia a 9/4 da unidade. Priscila comentou ter considerado essa estratégia, mas que durante sua resolução havia notado que não seria necessário, já que para responder à questão bastava responder quantos copos cada irmão poderia tomar (um tomaria 3 copos pequenos, outro tomaria 2 copos médios e outro 1 1/3 de um copo grande).

Em seguida Priscila continuou a apresentação de suas soluções mencionando ter ficado em dúvida ao responder o item *II* do desafio (Figura 32), mas que após algum tempo concluiu que a quantidade de refrigerante não mudaria não importava como eles tomassem (se em copos médios, se em copos pequenos ou se em copos grandes). Diogo e Suzi então concordam com Priscila e interagem conosco, Suzi aproveitou para brincar:

- *Se a gente for parar para pensar é bem difícil dividir um litro entre três, podia ter sido 900ml aí né, Stephanie?!*

Em tom de descontração respondi a Suzi que já havia facilitado a questão considerando que 1 litro seria equivalente a 9 copos. Então Priscila concordou e enfatizou que para os primeiros dois itens (*I e II*) a informação de que 1 litro seria equivalente a 9 copos havia facilitado a resposta, mas que em compensação o item *III* (Figura 34), que considerava os três copos iguais, com capacidade de 300ml, era mais difícil. Priscila comentou que na prática seria muito difícil realizar essa divisão de modo que no mundo real alguém sempre sairia prejudicado. Suzi comentou que a questão em destaque seria um bom contexto prático para trabalharem dízimas periódicas. Já Diogo comentou que a questão retornava ao mesmo tema da questão envolvendo uma caneta e um cabo, no Material 01. O professor comentou o seguinte:

- *Nessa questão a gente volta lá para aquela questão da vassoura e da caneta. Divide, divide, divide, divide, e depois divide, divide, divide.*

Suzi interagiu com o professor.

- *Mas lá naquela situação a gente pensava que estava faltando um pedaço né, aqui não tá faltando. Todo um litro vai ser utilizado.*

Diogo respondeu à professora que, embora todo o litro fosse utilizado, sempre iria sobrar mais um pouquinho para dividir, assim como na situação do cabo e da caneta segundo o professor. Suzi concordou e reiterou sua percepção de que situações como as mencionadas seriam uma boa estratégia para o ensino de dizimas periódicas. Concordei com Suzi ao comentar que considerava válida a ideia do estudo de dízimas por meio da ideia de medida, como a situação dos cabos e canetas. Enquanto conversávamos sobre isso eu relacionava nossa conversa aos estudos e discussões realizadas no âmbito do estágio realizado durante o mestrado na disciplina de Introdução aos Números Racionais do curso de Licenciatura em Matemática, lembrando das discussões sobre dízimas.

Após pensarmos nas possibilidades para o ensino de dízimas periódicas e as dificuldades por parte dos alunos percebidas pelos professores, iniciamos uma série de reflexões sobre a prática. Diogo se mostrou insatisfeito com a carga horária disponibilizada para a disciplina de matemática nas escolas estaduais, considerando que grande parte dos problemas de aprendizagem estariam relacionados a este fator. Em contrapartida, Priscila deu o exemplo da disciplina de Artes.

- *Sendo que nós somos privilegiados, temos quatro períodos de matemática. Mas tem só um de artes. Eu sou muito contra isso. Eu acho que tem que ter, tem que ter quatro período de artes também. Eles têm que ter teatro, tem que ter dança, tem que ter música... o professor de história tem que dar quatro períodos também. Então a gente ainda é a 'elite' [fazendo gesto de aspas com as mãos].*

Instigo a pensarmos em todos os fatores envolvidos nas escolhas como "matemática e português têm 4 períodos, artes e história 1". Questionei-os: *quem escolhe? Quem disse que tem que ter 4 ou 1? Se um dia artes teve 4 por que não tem mais? São várias as variáveis, mas com certeza a política é uma das principais.*

Diogo concordou com a ideia de a política ser a principal responsável pelas escolhas e citou como exemplo as histórias de Japão e China em ascensão após períodos de crise, alcançando os objetivos por meio de investimento em educação, dando como contraexemplo a *"cultura enraizada de não gostar da escola"* do brasileiro, segundo Diogo. Priscila pontuou sua percepção de uma possível mudança naquela "cultura" de não gostar da escola, segundo a professora com o contexto do distanciamento social e pandemia nos encaminhávamos para uma mudança de atitude. A professora percebia uma *"saudade tanto sentimental como de necessidade de explicação do professor"* por parte dos alunos. Com isso ela mantinha uma esperança na valorização da escola e do trabalho do professor.

Mostrando um outro ponto de vista, Diogo comentou sobre seu medo de que o governo insistisse na Educação à Distância a fim de *"colocar 100 alunos em uma turma para um só professor".* Assim iniciávamos uma conversa sobre o contexto que percebíamos do país. Suzi interagiu comentando sua percepção de que, para ela, o país não tinha economia nem cultura para uma realidade de Educação à Distância (EaD). Quanto à economia, Suzi exemplificou:

- O nosso próprio governador não conseguiu dar suporte nem para os professores muito menos para os alunos sendo que a gente está trabalhando há um ano já de forma remota. Não sei se a Priscila tem o Estado também, mas é surreal o não-serviço, o desserviço do governo do Estado. Então, assim, não existe a possibilidade, eles não conseguem manter, não existe.

Já quanto à "cultura" que percebia, Suzi comentou o seguinte:

- Até as pessoas, até as famílias que têm condições, que teriam condições e todo o aparato [referindo-se às famílias da escola da rede privada em que atuava] eles não querem o ensino remoto, eles querem os alunos em sala de aula. É uma porcentagem mínima que gostaria desse tipo de ensino, então a gente vê que é muito cultural... que isso não vai acontecer.

Suzi concordou com a fala anterior de Priscila sobre uma possível valorização do trabalho do professor.

- E é bem o que a Priscila disse, eu compreendo que quando a gente voltar para a escola com aquela gurizada a tendência é dar uma melhorada na qualidade de ensino sim. Porque existiu aí uma reflexão, não de todas as famílias obviamente, mas a grande maioria percebeu que eles não conhecem os filhos que eles têm em casa... eles não sabem.

Diogo compreendeu que Suzi se referia à educação de valores sociais e a questionou se era a esse sentido que ela se referia. A professora concordou e concluiu sua fala:

- Porque a questão da valorização do professor é uma questão de educação [referindo-se à educação familiar/social]. Porque o pai que valoriza o professor, tu tens um aluno que valoriza teu trabalho em sala de aula. Agora o pai que 'malha' em casa o professor, o aluno reproduz aquilo em sala de aula. Então a valorização do professor vai ter muito aquilo que o aluno escutou. Então se o pai ele diz 'ah, o professor está em casa sem fazer nada, ganhando dinheiro do meu imposto', o aluno vai reproduzir aquilo em sala. Agora se o pai fala 'meu deus, eu não aguento mais, tu precisas de ajuda, o professor é quem sabe explicar'... o aluno volta de outra maneira para a sala de aula.

Geruza identificou-se com o exemplo dado por Suzi sobre a família perceber a importância do professor. Essa posição da família era aquela que ela mais percebia em sua realidade. Geruza comentou que embora outros municípios do Maranhão estivessem utilizando algumas plataformas digitais, o município em que atuava e morava utilizava apenas o *Whatsapp* como ferramenta de contato entre escola e aluno. A professora comentou a dificuldade em gravar aulas apenas com o celular e que devido a isso uma das soluções era o envio de vídeos curtos sobre o assunto que já estivessem disponíveis no Youtube. Junto aos vídeos eram indicadas as páginas do livro didático sobre o conteúdo. Aqueles que não tinham acesso à internet ou ao *Whatsapp* buscavam a cada 15 dias atividades na escola. Devido a essa rotina, Geruza percebia a dificuldade encontrada pelas famílias e com isso a valorização dos professores por parte delas.

Concluindo aquele encontro, continuamos nossas conversas sobre as atividades seguintes. Conversamos sobre a solução proposta por Geruza para a atividade envolvendo a divisão de tempo apresentada na Figura 35 e a solução proposta por Suzi para a atividade envolvendo a comparação de resultados (Figura 36).

Figura 35 – Atividade sobre a divisão de tempo proposta no Material 03

Júnior tem 3 tarefas escolares para realizar antes de sair para brincar com seus amigos. Contudo, são 13h e seu limite para retornar da brincadeira com os amigos é às 19h30, logo, ele pensou o seguinte: *vou usar metade do meu tempo para fazer as atividades da escola e a outra metade vou ter livre para encontrar o pessoal, mas então quanto tempo tenho para fazer cada uma das atividades?!.*

Para pensar:

a) Se você estivesse na situação de Júnior, como resolveria esse problema?

b) Quanto tempo Júnior deve destinar para cada atividade e quanto tempo livre terá para brincar com seus amigos?

c) Você acredita que existam outros modos de dividir o tempo como Júnior queria além da maneira encontrada nas questões A e B? Por quê?

d) É possível justificar por meio da matemática a resposta do item anterior? Se sim, na etapa de ensino em que atua como poderia abordar essa justificativa?

e) Quais dificuldades ou facilidades você imagina que aconteceriam na turma em que atua frente a esta situação?

Fonte: acervo da pesquisa.

Figura 36 – Atividade envolvendo a comparação de frações proposta no Material 03

Em um restaurante, na mesa 1 e na mesa 2 foram servidas pizzas do mesmo tamanho. Na mesa 1 havia quatro pessoas e na mesa 2 havia seis. Em cada mesa, o garçom partia a pizza em fatias iguais, de acordo com o número de pessoas. Em que mesa a fatia de pizza foi maior: na mesa 1 ou na mesa 2? Por quê?

DESAFIOS:

a) Qual fração da pizza as pessoas receberam em cada uma das mesas?

b) Caso o garçom partisse cada pizza de modo que cada pessoa recebesse duas fatias, em qual mesa a fatia seria maior? Compare essa resposta com a resposta do problema inicial (questão principal), o que podemos concluir?

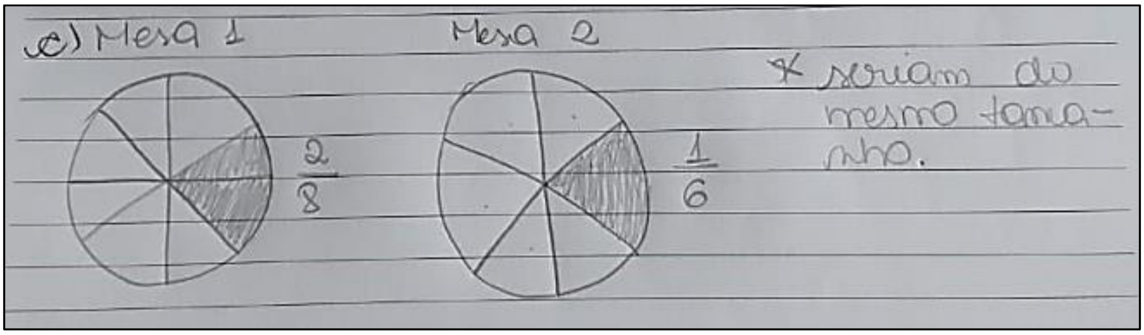
c) Atente para a seguinte situação: se na mesa 1 o garçom dividisse a pizza de modo que cada pessoa recebesse **duas fatias** e na mesa 2 dividisse a outra pizza de modo que cada pessoa recebesse **uma fatia**, em qual das mesas a fatia seria maior? Por quê?

d) Quais adaptações ou quais materiais utilizaria para realizar esta atividade no contexto em que atua?

Fonte: acervo da pesquisa.

Dentre as duas últimas questões (das Figura 35 e 36), o item *c* da Figura 36 foi o que nos possibilitou maior discussão. Para respondê-lo, Suzi construiu o desenho da Figura 37.

Figura 37 – Solução proposta por Suzi para o item *c* da atividade envolvendo a comparação de resultados do Material 03

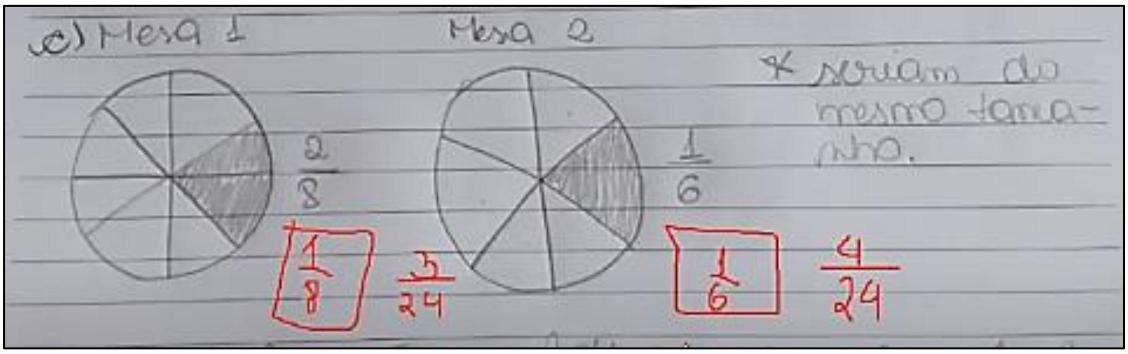


Fonte: acervo da pesquisa.

Após Suzi comentar sua solução, notei o equívoco ao considerar as frações 2/8 e 1/6 iguais (regiões do mesmo tamanho, como descrito na Figura 26). Com o intuito de que conversássemos sobre o assunto, perguntei aos outros professores se teriam uma resposta diferente para a pergunta. Percebi que havia certa confusão entre as ideias de quantidade total de pizza por pessoa e tamanho de cada fatia, assim, expliquei o contexto da questão a fim de que compreendêssemos o objetivo da pergunta. Enquanto explicava o contexto da questão e conversávamos, ia escrevendo na tela compartilhada as informações que constatávamos.

Percebemos que uma fatia da mesa 1 seria igual a um oitavo de pizza, já uma fatia da mesa 2 seria igual a um sexto de pizza. Buscando compará-las para identificar qual delas seria maior, Diogo sugeriu que transformássemos ambas as frações para frações com o mesmo denominador. Assim, a escrita na tela compartilhada ficou aquela apresentada na Figura 38, sendo a escrita em vermelho feita por mim naquele momento.

Figura 38 – Imagem da tela compartilhada durante a reunião durante o estudo do Material 03



Fonte: acervo da pesquisa.

Eu e Diogo brincamos com Suzi comentando que seu desenho a tinha *"passado para trás"* na questão, visto que visualmente as partes grifadas na Figura 37 e 38 pareciam equivalentes. A professora participou da brincadeira comentando que depois refaria o desenho apenas por orgulho.

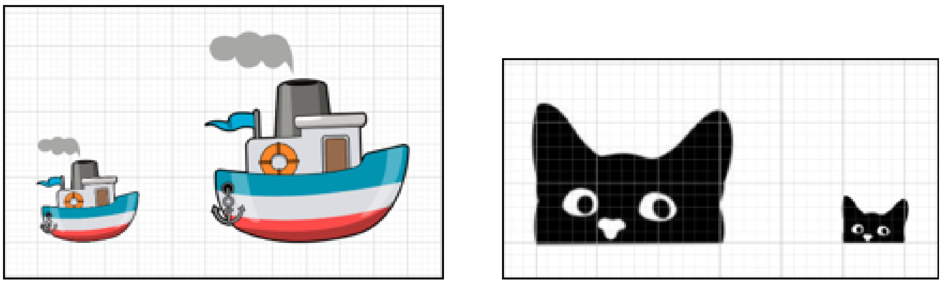
Encerrando o encontro, convidei os professores para que falassem sobre as discussões do dia, ou sobre suas percepções quanto ao Material 03, ou ainda pontos que os intrigavam dentre todos os materiais visto até aquele momento. Diogo comentou que naquele material em destaque a dificuldade em representar questões sobre tempo em forma de fração havia lhe chamado a atenção. Suzi pontuou que pelas discussões sobre o material pôde reafirmar as potencialidades da resolução de problemas que envolvem diferentes ideias matemáticas articuladas às frações. Exemplificando sua fala, Suzi mencionou o item *c* da Figura 36, segundo ela relacionar os desenhos feitos na Figura 37 com área ou ângulos teria evitado o equívoco anterior.

4.7. O SÉTIMO ENCONTRO: planejamento para o último encontro, relações entre peças do Tangram e experiências no ensino durante a pandemia

Neste encontro estiveram presentes Geruza, Priscila e Suzi. Priscila poderia participar por apenas 30 minutos, devido a uma atividade de formação pedagógica na rede em que atuava, então aproveitei os minutos iniciais, enquanto a professora estava presente, para convidá-los a realizarem algumas tarefas para o próximo encontro, que seria o último. Além do trabalho final sobre o qual já havíamos conversado, convidei-os a escrever dois trechos breves: um sobre eles mesmos, apresentando-se e escrevendo aquilo que gostariam que fosse dito sobre sua participação na escrita da dissertação; outro sobre suas percepções em relação ao espaço construído ao longo do curso, suas expectativas ao se inscreverem, suas percepções como concluintes, pontos positivos, pontos negativos, sugestões e o que mais desejassem. Expliquei que o primeiro trecho, sobre si mesmos, serviria para que leitores da dissertação conhecessem cada um deles a fim de interpretar suas falas nas discussões narradas aqui. Já o segundo trecho, sobre o ambiente que construímos, tinha como intuito compreender a visão de cada um quanto à proposta desenvolvida, suas expectativas e percepções com o desenvolver dos encontros.

Após essas combinações, iniciamos nossa conversa sobre as atividades do Material 04. Priscila foi a primeira a comentar sua solução. A atividade escolhida pela professora pedia para identificar a relação entre as figuras de navios, a relação entre as figuras de gatos e representar ambas as relações numericamente. A Figura 39 apresenta parte da questão.

Figura 39 – Atividade sobre a comparação de navios e gatos escolhida por Priscila no Material 04



PARA PENSAR:

- Como você realizou a comparação entre os navios para identificar a relação entre seus tamanhos?
- E como fez com os gatos?
- Você percebeu algo em comum entre ambas as comparações, dos navios e dos gatos?
- Caso você propusesse essa tarefa para a turma em que atua, como faria?

Fonte: acervo da pesquisa.

Nas discussões sobre as perguntas apresentadas na Figura 28, Priscila explicou que sua estratégia foi comparar largura e altura de ambas as imagens, navios e gatos. E ao imaginar a situação em sua prática pensou na utilização do Geogebra como ferramenta, devido à sua interface e ferramentas intuitivas. Quanto ao uso desse *software*, Priscila comentou o seguinte:

- *Eu coloquei o Geogebra ali [referindo-se à resposta do último item da Figura 39] mas eu particularmente na escola pública só consegui usar [Geogebra] uma vez por 'n' fatores. Por ter um laboratório de informática muito antigo, ter poucos computadores... então nos meus primeiros anos que eu trabalhei na escola eu usei o Geogebra porque eu estava mega empolgada, sabe? Mas foi bem difícil, assim, sabe. Foi bem trabalhoso. E daí nos outros anos eu acabei não usando mais. Até tem uma versão muito parecida com o Geogebra lá nos computadores por serem Linux, e é um que já vem instalado e vai ficando incompatível usar o Geogebra original lá. Então ele é uma ferramenta fantástica, mas ao menos na realidade da minha escola eu não consigo usar. Agora no ensino remoto eu não cheguei a usar ainda, porque tem a possibilidade de usar no celular, mas eu ainda não cheguei a usar com os meus alunos.*

Enquanto Priscila comentava suas experiências com o Geogebra, pensava em questionar Diogo sobre suas experiências com o *software*, visto que o mesmo já havia comentado em outros momentos seu interesse pelo assunto. Contudo, o professor não esteva presente no momento da conversa. Em seguida Priscila precisou sair da reunião, ficando eu, Geruza e Suzi. Geruza iniciou sua fala sobre a atividade que havia escolhido, a qual envolvia uma situação sobre Covid-19, como mostra a Figura 40.

Figura 40 – Atividade envolvendo Covid-19 escolhida por Geruza no Material 03.

Em 07 de janeiro de 2021 em Porto Alegre havia uma disponibilidade de 126 leitos livres (entre hospitais públicos e privados), e 686 leitos ocupados. Ou seja, nesta data, no município havia 812 leitos de UTI[1].

Em 03 de Março não havia nenhum leito disponível de modo que 630 leitos estavam ocupados por Covid-19 (confirmados e suspeitos) e 312 leitos estavam ocupados por outras causas. Ou seja, nesta data havia 942 leitos, segundo o processamento de dados disponibilizado pelo município.

Segundo o Painel Covid-19 – Atualização Epidemiológica[2] disponibilizado no site da prefeitura, no dia 03 de março havia 138 pacientes em emergências aguardando na fila de espera para um leito de UTI no município.

I. Como podemos calcular a taxa de alteração de número de leitos de UTI entre 07 de janeiro e 03 de março de 2021?

II. E a taxa de alteração de números de pessoas em espera na fila para um leito de UTI?

III. Como podemos identificar qual a maior taxa? Por quê?

Para pensar:

a) Se o número de leitos em UTI tivesse (hipoteticamente) que seguir a mesma taxa de crescimento do número de pessoas na fila de espera para um leito, qual deveria ser o número de leitos de UTI em 03 de março em Porto Alegre? Explique seu raciocínio.

Fonte: acervo da pesquisa.

Geruza comentou que havia enviado sua solução para dois amigos de graduação em matemática para confirmar suas ideias, visto que compreendia que poderia haver interpretações diferentes. A solução proposta por Geruza para o item *I* está apresentada na Figura 41.

Figura 41 - Solução para o item *I* da atividade envolvendo Covid-19 do material 04 proposta por Geruza

I. Como podemos calcular a taxa de alteração do número de leitos de UTI entre 07 de janeiro e 03 de março de 2021?

- ***07 de janeiro total de leitos 812.***
  - ***126 leitos livres***
  - ***385 leitos de outras causas***
  - ***301 leitos de covid-19***
- ***03 de março total de leitos 942.***
  - ***312 leitos de outras causas***
  - ***630 leitos de covid-19.***
  - ***138 paciente sem leito UTI***

→ *porcentagem de aumento:*

812---------> 942

942 - 812 = 130

130
------ = 0,1600985222 ou 0,16 x 100 = 16%
812

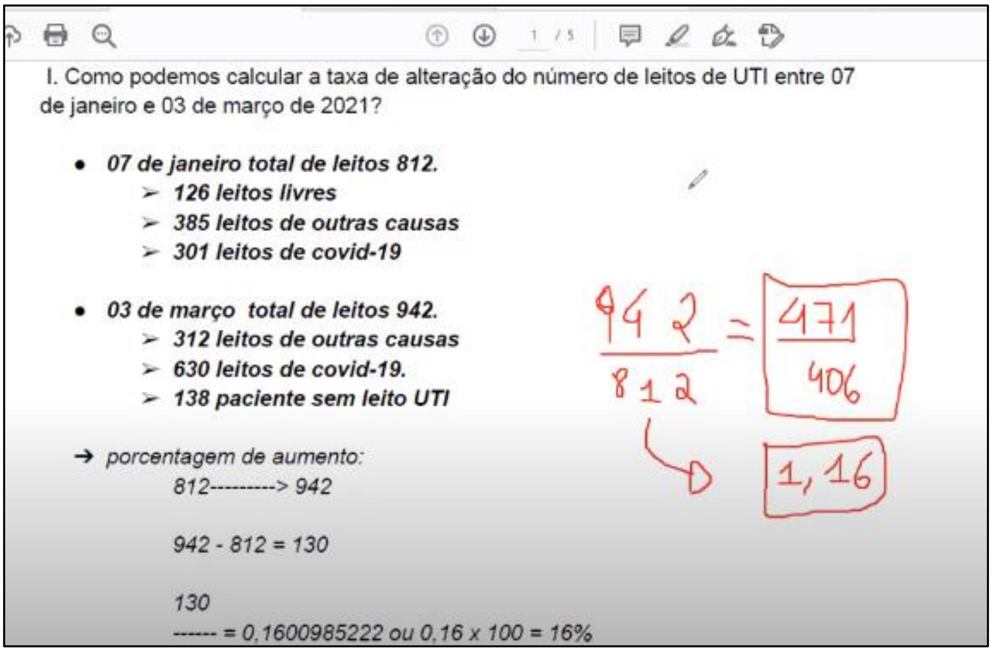
Outra maneira pela regra de três;
valor menor 812 100%
diferença 130 x
812x = 13.000 -----> x = 13.000/ 812
x = 16 % aproximado
A taxa de alteração nos leitos de UTI é de 16%. aproximado.

Fonte: acervo da pesquisa.

Aproveitei o comentário da professora para relatar que havia pensado uma estratégia diferente para a solução da questão. Geruza resolveu a questão utilizando a regra de três como mostra a Figura 41 Em minha solução havia me preocupado em identificar a fração correspondente ao fator multiplicativo entre os números de leitos de janeiro e março. E enquanto Geruza comentava percebi que se eu não soubesse o intuito da questão (que estava em um material com foco no significado de operador) eu teria resolvido a questão usando a mesma estratégia da professora.

Explicando minha solução, escrevi na tela compartilhada as anotações em vermelho da Figura 42.

Figura 42 – Imagem da tela compartilhada durante o estudo do Material 04

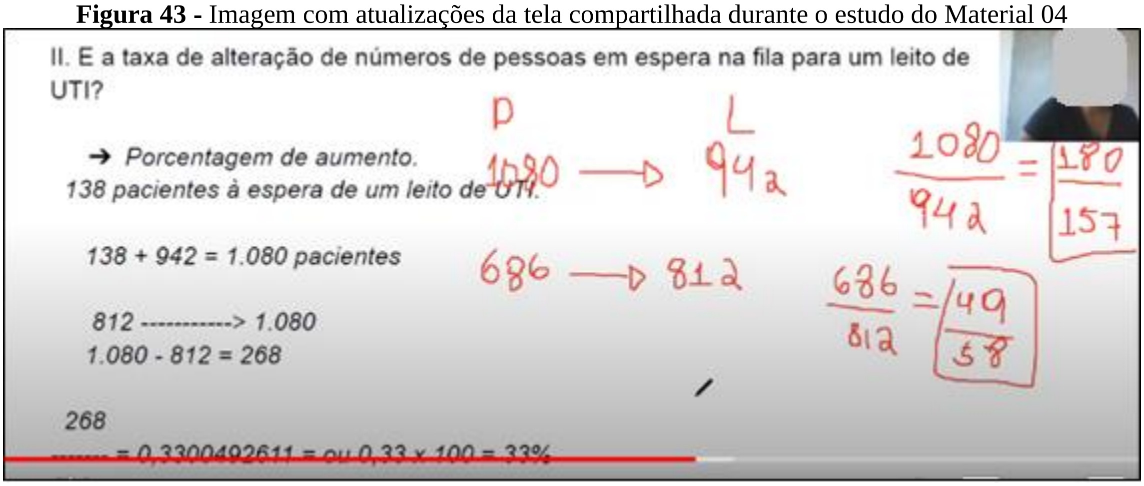


Fonte: acervo da pesquisa.

Comentei que “lia a fração” 471/406 como *“para cada 406 leitos de UTI de Janeiro em Março temos 471”* ou, ainda, *“a taxa 1,16 como para cada 1 leito de janeiro em março temos 1,16”*. Geruza comentou que havia iniciado sua resolução como eu havia feito, mas ao identificar a taxa como 116 havia a considerado *“muito grande”*, assim optou por outra estratégia para compreender a resposta.

Quanto aos itens *II* e *III* da Figura 40, buscávamos identificar as taxas entre números de leitos e pessoas na fila em cada um dos meses, além de identificar qual das taxas era a maior. Após os comentários de Geruza explicando seu raciocínio, expliquei como havia interpretado a questão e a resolvido. Em vermelho na Figura 43 estão as anotações feitas por mim durante a conversa.

Figura 43 - Imagem com atualizações da tela compartilhada durante o estudo do Material 04



Fonte: acervo da pesquisa.

Propus que buscássemos identificar qual das frações em destaque (180/157 e 49/58) era a maior: aquela que representava que para 58 leitos haveria 49 pacientes, ou aquela que representava que para 157 leitos havia 180 pessoas. Suzi sugeriu que escrevêssemos frações equivalentes com o mesmo denominador, embora compreendesse que seria *"complicado"* identificarmos um denominador comum entre os denominadores 157 e 58. Considerando a percepção de Suzi, comentei que teríamos outro modo de identificar a maior delas, sem a necessidade de encontrar um denominador comum, analisando apenas os valores dos denominadores e numeradores de cada uma. Após alguns minutos pensando, concluímos então que aquela fração em que o numerador era maior que o denominador teria uma parte inteira ao contrário da outra fração. Assim, a taxa representada por 180/157 era a maior delas.
Suzi, lamentando não ter conseguido ler a solução da colega com antecedência, iniciou uma conversa sobre a sobrecarga de trabalho que os professores estavam tendo naquele momento de ensino emergencial remoto e a burocracia por parte da rede estadual. Suzi comentou atuar em duas escolas, uma da rede particular e outra estadual. E embora a rede particular exigisse uma demanda de trabalho superior à estadual, com aulas síncronas de terça-feira a sexta-feira, era a burocracia da rede estadual que a sobrecarregava. Segundo a professora, ela precisava trabalhar na rede estadual por meio de três plataformas distintas, uma para os planejamentos, outra para atividades, e outra para avaliação. Além das diversas reuniões para discutir novas plataformas almejadas pela rede estadual, como uma direcionada às avaliações diagnósticas. Geruza pontuou que a posição de alguns pais dificultava ainda mais o trabalho dos professores, de modo que em casos específicos alguns familiares entravam em contato via *WhatsApp* com os professores exigindo posicionamentos que seriam responsabilidade da gestão da escola, como atendimentos por profissionais de apoio. Quanto a isso, Suzi comentou que seu maior problema seria com seus alunos do turno noturno da rede estadual. Segundo Suzi, esses alunos em maioria eram egressos da modalidade de Educação de Jovens e Adultos durante o Ensino Fundamental, e por isso, segundo a professora, os mesmos teriam muitas dificuldades em acesso às aulas remotas e aos conteúdos ensinados. A mesma atuava nas disciplinas de matemática e física para os alunos do primeiro ano do Ensino Médio do turno noturno.

Aquele encontro acontecia dois dias após o lançamento das notas do Exame Nacional do Ensino Médio de 2020, assim, como o exame era foco de diversas notícias do momento, questionei Geruza e Suzi sobre suas percepções quanto à prova. Segundo Suzi, seus alunos de Ensino Médio nem em modalidade "normal" de ensino antes da pandemia conseguiriam realizar a prova, então devido ao ensino remoto o desempenho deles seria ainda pior. A professora relatou parte dos motivos que justificavam sua percepção:

- *Os meus alunos de Ensino Médio não fazem aquela prova... não fazem. Já não faziam... pelos conceitos. Os alunos do Ensino Médio do governo do Estado não têm todos os conceitos trabalhados no Ensino Médio. Por exemplo, a gente tem lá uma lista agora, o governo do estado mandou a matriz curricular de cada uma das componentes e por área. Por exemplo, no primeiro ano [do Ensino Médio] a gente teria que dar todas as funções, os conjuntos numéricos e a gente teria que dar PA e PG. Esquece... PA e PG nunca. Progressões nunca. Aí no segundo ano [do Ensino Médio] a gente teria que trabalhar toda a parte da trigonometria, nunca dá para trabalhar essa parte da trigonometria, nunca dá. Porque a gente já começa atrasado com PA e PG. Tu vais ter que falar de relações antes de falar de círculo trigonométrico, porque eles não fazem ideia do que é seno, cosseno e tangente. Eles não viram isso no nono ano do Ensino Fundamental... porque não dá tempo. Então é uma sucessão de 'não dá tempo'. A geometria então... quando tu chegas no terceiro ano que é basicamente só geometria, eles não sabem área, perímetro e volume do básico. E aí tu te desesperas.*

Suzi continuou sua fala relatando suas experiências com colegas de profissão e posicionamentos que toma em determinadas situações, como em pedidos que considera exagerados de planilhas por parte dos órgãos responsáveis e/ou imposições por parte de colegas de profissão. E comentou como estariam os acessos aos vídeos das aulas. Nesse quesito, quanto à rede estadual, Suzi comentou que até aquele momento não tinham aulas de matemática gravadas, mas em suas disciplinas de física para o Ensino Médio estariam realizando experimentos químicos nos momentos síncronos. Mencionou a situação de um erro no experimento durante o encontro virtual em tom de descontração:

- *Sexta-feira eu fiz experimentos químicos, em física* [fazendo uma expressão de inconformada]. *Aí ficamos eu e uma garrafa [fazendo o gesto segurando a garrafa]: 'ai vamos fazer um foguete', 'ai vamos fazer o da aguinha'. Era eu e o doutor da natureza.*

Em meio a risos continuou sua fala:

- *Mas aí eu fui fazer e meu experimento deu todo errado. E eu comecei a rir... me deu um ataque de riso. E eles [os alunos]: 'sora, não deu certo'. Aí eu saí da aula, desliguei a câmera, fui lá, tentei arrumar e voltei: 'agora vai dar certo, gurizada!'. E deu tudo errado de novo. E eles: 'bah, sora, melhor aula'. E eu falando que agora era questão de honra, na próxima aula eu faria o foguete funcionar.*

Suzi descontraiu o ambiente e nos aproximou mais com suas histórias e descontração. Acredito que Geruza tenha tido a mesma percepção, pois a mesma interagiu contando suas histórias e aproveitou a descontração proposta por Suzi.

Na sequência iniciamos a conversa sobre a atividade escolhida por Suzi, que envolvia o Tangram e era dividida em duas situações: uma apenas analisando as relações entre as peças do Tangram e outra propondo relações com uma figura construída por meio do Tangram. A Figura 44 apresenta a primeira situação e a Figura 47 a segunda situação.

Figura 44 – Primeira parte da atividade envolvendo o Tangram no Material 04

Considerando que conhecemos o Tangram e suas peças (tal assunto foi apresentado ao longo do Material 01), responda as seguintes questões:

I. **Como e quais relações podemos fazer entre:**

a) A área do triângulo pequeno e a área do quadrado formado por todas as peças do tangram? Descreva/explique seu raciocínio.

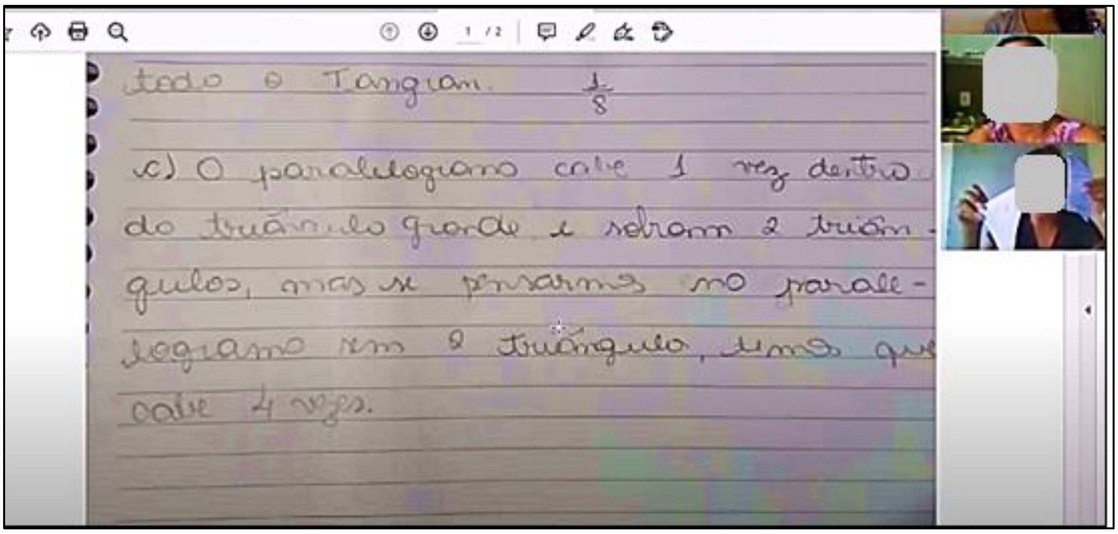
b) A área do paralelogramo e a área do quadrado formado por todas as peças do tangram? Descreva/explique seu raciocínio.

c) A área do paralelogramo e a área do triângulo grande? Descreva/explique seu raciocínio.

Fonte: acervo da pesquisa.

Para a resolução da atividade e compreender as relações solicitadas na Figura 44, Suzi havia construído um Tangram em papel para sobrepor as peças e identificar as relações. O intuito de envolver a área das peças era de que percebêssemos que a área se manteria a mesma mudando o formato de figura. Um exemplo da ideia almejada foi comentado por Suzi ao falar sobre o item *c*. A Figura 45 apresenta a resposta da professora para o item.

Figura 45 – Resposta de Suzi para o item *c* da primeira parte da atividade envolvendo Tangram do Material 04



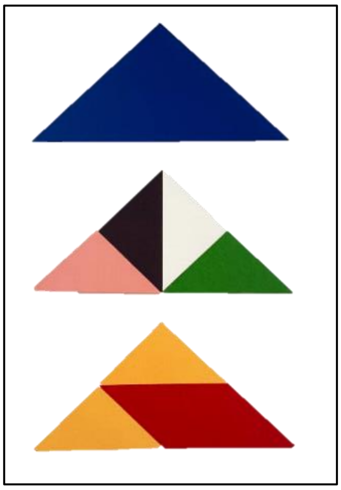
Fonte: acervo da pesquisa.

Explicando sua solução para o item *c*, Suzi comentou sua conclusão.

- Eu descobri então que no paralelogramo a gente tem dois triângulos pequenos e dentro do triângulo grande a gente tem quatro triângulos pequenos. Então o paralelogramo cabe duas vezes dentro do triângulo grande. Só que se eu posicionar ele na sua forma original como ele é, ele não cabe ó [mostrando para a câmera o paralelogramo e o triângulo grande, como na Figura 34]. Não tem um jeito, uma forma que eu faça ele caber aqui dentro. Então o que eu pensei: quando eu pego os quatro triângulos pequenos eu consigo posicionar ele quatro vezes. Então se eu for posicionar ele em sua forma original ele cabe uma vez e sobra espaço para dois triângulos pequenos. Mas se eu penso nele a partir de dois triângulos pequenos ele caberia aqui [no triângulo grande] duas vezes. Não sei se vocês estão me entendendo?!

A Figura 46 mostra as duas situações comentadas por Suzi: 4 triângulos pequenos formando 1 triângulo grande e 1 paralelogramo (equivalente à área de dois triangulo pequenos) dentro de 1 triângulo grande, sobrando, assim, espaço para outros 2 triângulos pequenos.

Figura 46 – Representação das relações comentadas por Suzi sobre a atividade envolvendo o Tangram no Material 04



Fonte: acervo da pesquisa.

Em sua fala Suzi explicava que, por exemplo, o triângulo composto por 4 triângulos pequenos nas cores rosa, preto, branco e verde, da Figura 46, tem a mesma área do triângulo grande em azul. Quanto ao paralelogramo em vermelho, Suzi comentava que o triângulo grande em azul tinha a mesma área do que dois paralelogramos, contudo, devido à forma do paralelogramo a professora não conseguiria formar um triângulo grande com dois paralelogramos. Assim, ao posicionar um paralelogramo (assim como o vermelho na Figura 46) sobrariam espaços para 2 triângulos pequenos (amarelos na Figura 46). Após comentar essas relações Suzi concluiu seu raciocínio pontuando as ideias almejadas na situação.

- Então porque eu tô falando nisso? Porque a gente está falando da área e não do formato da figura em si. Eu pensei em desmembrar porque a área do paralelogramo é a mesma se eu usar nesse formato [mostrando o paralelogramo para a câmera] ou se eu usar como dois triângulos pequenos.

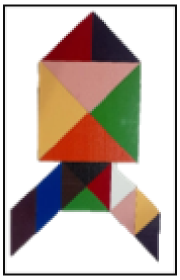
Ao iniciar as discussões sobre a segunda parte da atividade, Suzi relembrou que havia entrado em contato comigo via *WhatsApp* no dia anterior para comentar suas dúvidas na situação.

- E aí a gente vai para o item dois, que foi quando eu enlouqueci a Stephanie ontem de noite, mas tudo bem.

A segunda situação comentada por Suzi naquele momento referia-se às relações entre partes de uma imagem construída pelo Tangram, no caso um foguete. A Figura 47 apresenta a situação.

Figura 47 – Segunda parte da atividade envolvendo Tangram no Material 04.

II. Analisando a seguinte figura com as peças do tangram responda as questões a seguir:



a) Como e quais as relações podemos fazer entre a área do triângulo pequeno e a área total do foguete? Descreva/explique seu raciocínio.

b) Se quiséssemos reduzir a área desse foguete a $\frac{1}{4}$, como poderíamos proceder? Quantos tangrans seriam necessários para construir o foguete que representa um quarto do foguete acima?

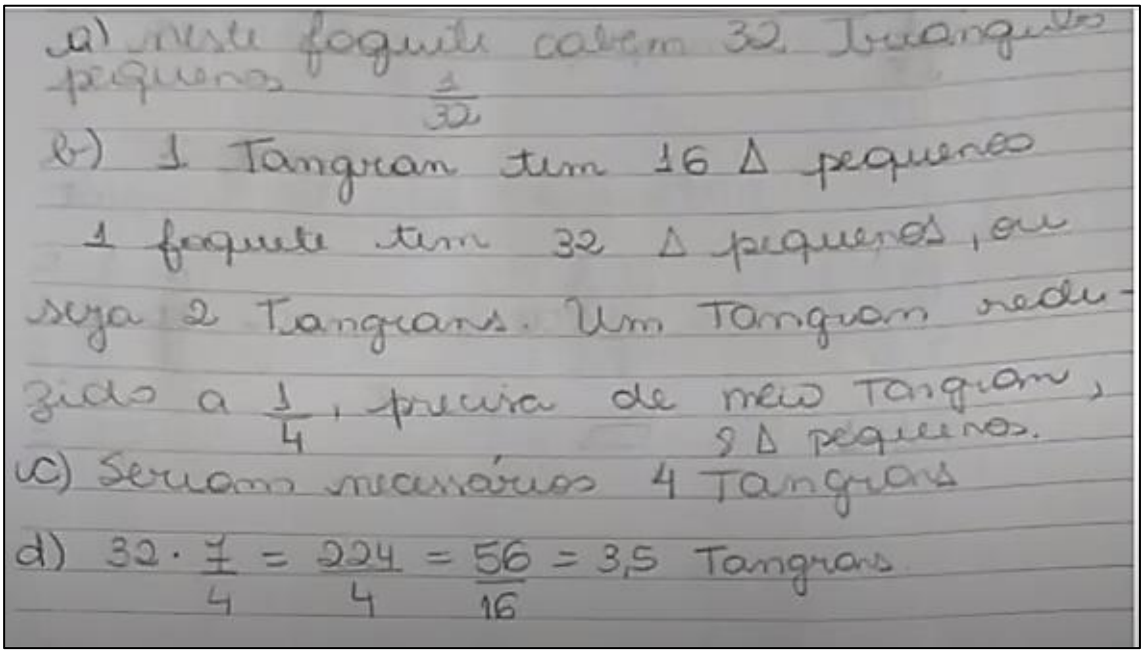
c) Se quiséssemos duplicar a área desse foguete, quantos tangrans seriam necessários?

d) Se quiséssemos aumentar a área desse tangram a $\frac{7}{4}$ quantos tangrans necessitaríamos? Se quiséssemos construir esse novo foguete apenas com triângulos pequenos, quantos seriam necessários?

Fonte: acervo da pesquisa.

Explicando seu raciocínio para a situação da Figura 46, Suzi comentou que sua consideração principal era de que embora tivéssemos peças diferentes, o triângulo pequeno caberia no mínimo duas vezes em cada uma delas; havendo peças que caberiam duas vezes, outras três e outras quatro. A Figura 48 apresenta as soluções propostas pela professora no arquivo que compartilhou.

Figura 48 – Soluções propostas por Suzi para atividade envolvendo o Tangram no Material 04.


a) Neste foguete cabem 32 triângulos pequenos $\frac{1}{32}$

b) 1 Tangram tem 16 Δ pequenos

1 foguete tem 32 Δ pequenos, ou seja 2 Tangrans. Um Tangram reduzido a $\frac{1}{4}$, precisa de meio Tangram, 8 Δ pequenos.

c) Seriam necessários 4 Tangrans

d) $32 \cdot \frac{7}{4} = \frac{224}{4} = \frac{56}{16} = 3{,}5$ Tangrans

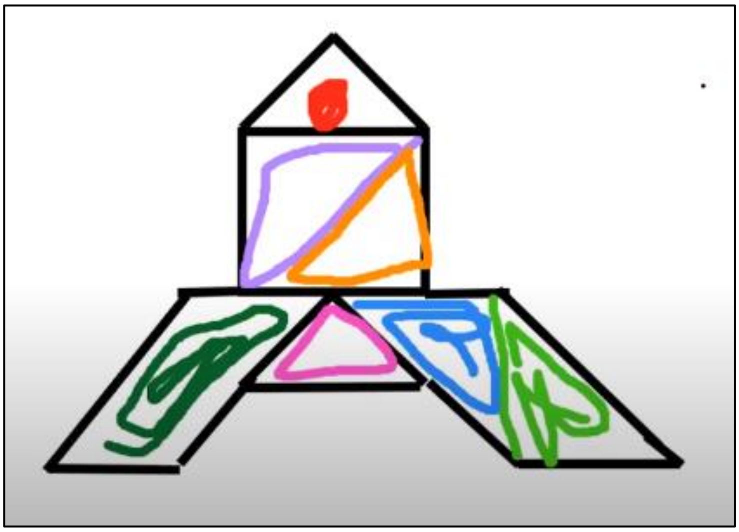
Fonte: acervo da pesquisa.

Respondendo o item *b* da situação, no qual buscávamos diminuir a área do foguete para um quarto de sua área inicial e identificar quantos conjuntos de Tangram necessitaríamos, Suzi comentou suas dúvidas do dia anterior.

- *Então parti do princípio de que tínhamos 32 triângulos pequenos então se queríamos reduzir a um quarto* [dessa área] *basta que eu divida as 32 partes que eu achei por 4. Aí eu achei que teria 8 triângulos pequenos. E sobre quantos tangrans seriam necessários a gente descobriu junto, depois de muita conversa e eu brigar que o quadrado tinha quatro triângulos pequenos... aí concluímos que esse quadrado* [referindo-se a 4 triângulos pequenos do Tangram que estariam formando um quadrado no foguete] *tem quatro triângulos pequenos, mas não o quadrado original do Tangram. Aí foi aí que eu me confundi, porque eu estou olhando esse quadrado [a peça do Tangram] e eu estou vendo que cabem quatro triângulos pequenos [mas não cabem]... tá, daí a gente ficou ali um tempão pensando e eu defini que esse foguete precisa de 2 Tangrans para ser confeccionado e que se eu reduzir a um quarto eu preciso de 8* *triângulos pequenos, sendo assim, eu preciso de meio Tangram para confeccionar esse foguete que foi reduzido. Foi isso que eu descobri, mas eu não consegui montar esse foguete.*

Comentei que eu estava tentando montar esse foguete depois da conversa via *WhatsApp*, e que teria chegado a uma ideia, que embora não conseguíssemos construí-lo com apenas um conjunto de Tangram (devido ao limite do número de triângulos pequenos em cada conjunto de Tangram), ele teria a área de meio conjunto de Tangram. A Figura 49 mostra a imagem criada por mim almejando o foguete de área reduzida a ¼ do original e compartilhada durante a reunião.

Figura 49 – Foguete construído como foguete de área reduzida a ¼ do original conforme atividade do Material 04

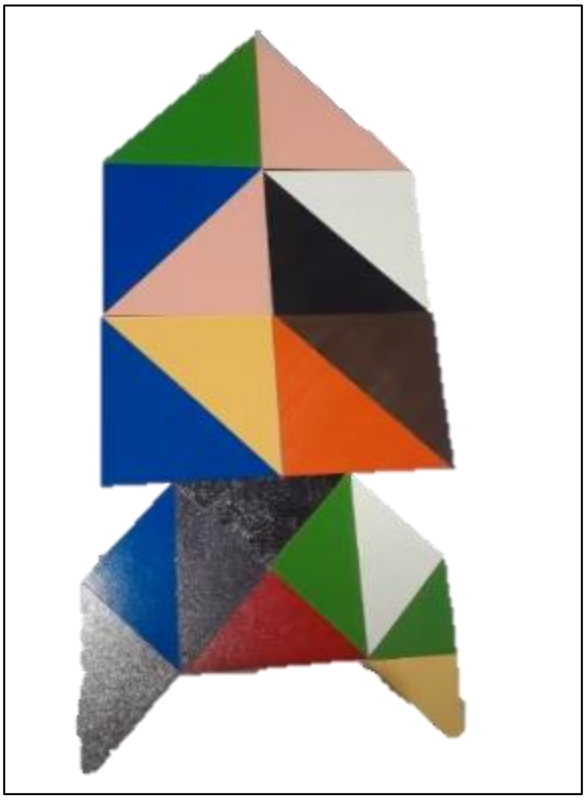


Fonte: acervo da pesquisa.

Suzi concordou que embora não conseguíssemos montar o foguete com apenas um conjunto de Tangram devido ao formato das peças, a imagem criada e apresentada na Figura 49 tinha metade da área de um Tangram completo.

Sobre o último item da situação (item *d*) da Figura 47, Suzi explicou que o teria resolvido por meio das operações com inteiros e racionais como mostra a Figura 48, mas que não havia montado o foguete. Compartilhei a montagem que havia feito para que conferíssemos se nossas ideias estavam corretas. A Figura 50 mostra a imagem compartilhada.

Figura 50 – Foguete com área de 7/4 do original



Fonte: acervo da pesquisa.

Fizemos a equivalência entre as peças da imagem da Figura 50 e confirmamos que realmente a área da imagem era equivalente a 56 triângulos pequenos. Assim, como o foguete original (Figura 47) tinha uma área equivalente a 32 triângulos, percebemos que 56 era o mesmo que sete quartos de 32, ou seja, o novo foguete (Figura 50) tinha 7/4 da área original do foguete. Após a confirmação de nossas conclusões, Suzi comentou as potencialidades da questão.

- *Essa aí é uma atividade muito legal, porque tu podes trabalhar com eles a ideia do primeiro foguete. Depois tu podes trabalhar a ideia de eles ampliarem essa área, deles construírem... daí tu terias que dar as medidas né, e depois eles montarem esse de 56 peças com as peças confeccionadas por eles mesmos.*

Encerramos o encontro com Suzi comentando suas ideias para o trabalho final, no qual queria construir um jogo no *powerpoint* envolvendo frações e polígonos regulares circunscritos a uma circunferência. A professora estava animada para desenvolver o trabalho e apresentá-lo para o grupo. Geruza, aproveitando a animação de Suzi, comentou que também gostaria de apresentar e recebeu o apoio de Suzi: *'isso aí, Geruza, vamos lá'.*

Concluindo o encontro, percebi que estávamos estabelecendo diálogos não tão fixados nos materiais e estabelecendo conversas mais informais do que em encontros anteriores, compartilhando experiências não só positivas, mas mencionando outras situações que não imaginávamos nos primeiros encontros do curso. Notei que a animação de Suzi havia sido um dos pontos principais do encontro, de modo que havia incentivado Geruza nas discussões e momentos de descontração.

4.8. O ÚLTIMO ENCONTRO: os significados de fração e as operações em meio aos relatos de trajetórias pessoais e profissionais

Estiveram presente nesse momento final os mesmos professores que estavam mantendo a frequência dos últimos encontros: Diogo, Geruza, Priscila e Suzi. Como vinha acontecendo nos encontros anteriores, iniciamos aquele momento conversando sobre assuntos variados enquanto esperávamos que todos os colegas acessassem a sala virtual. Naquela semana, no início do mês de abril, havia sido publicado o edital de inscrição para o mestrado de interesse dos professores Diogo e Suzi, assim, este foi um dos assuntos iniciais do nosso encontro: o processo seletivo. Diogo e Suzi comentaram suas dúvidas, expectativas e interesses em relação ao curso almejado. Suzi comentou parte de sua trajetória relatando sua experiência como professora de informática e os motivos pelos quais optou por não permanecer naquela função, como a infraestrutura e aparelhos insuficientes e/ou inadequados.

Estávamos cientes de que aquele era o último encontro previsto para o curso de extensão e que, devido às atividades que teríamos naquele dia (estudo sobre o material 05, apresentação do trabalho final e comentários gerais sobre os encontros), possivelmente ele se estenderia por maior tempo do que os demais. Combinamos de iniciar nossas atividades pelo estudo do material 05. Diogo foi o primeiro a comentar a atividade escolhida por si. A atividade comentada pelo professor envolvia a mistura de tintas como mostra a Figura 51.

Figura 51 – Primeira parte da atividade envolvendo mistura de tintas do Material 05

Para obter tinta de cor laranja, devem-se misturar 3 partes de tinta vermelha com 2 partes de tinta amarela. Para obter tinta de cor verde, devem-se misturar 2 partes de tinta azul com 1 parte de tinta amarela. Para obter tinta de cor marrom, deve-se misturar a mesma quantidade de tintas laranja e verde.

Quantos litros de tinta amarela são necessários para obter 30 litros de tinta marrom?

a) Como poderíamos reescrever a questão para a linguagem de frações? Tente reescrever de duas ou mais formas diferentes mantendo as relações do enunciado inicial.

b) Como seria sua resolução?

Fonte: acervo da pesquisa.

O problema informava a quantidade de "partes" de cores primárias que precisaríamos para obter as cores laranja, verde e marrom. E deveríamos descobrir quantos litros de tinta amarela precisaríamos para obter marrom. A resolução enviada e comentada por Diogo para esta atividade está na Figura 52.

Figura 52 – Primeira parte da resolução proposta por Diogo para a atividade envolvendo a mistura de tintas no material 05

Marron(30L)

Laranja(15 L) (1/2)	verde (15L) (1/2
Vermelho (3 parte) amarelo (2 parte)	azul (2 parte) amarelo (1 parte)
Total (5 parte)	total (3 parte)
15/5 = 3 L	15/3 = 5 L
Vermelho = 3 parte = 3 x 3 = 9 L	azul = 2 parte = 2 x 5 = 10 L
Amarelo = 2 parte = 2 x 3 = 6 L	amarelo = 1 parte = 1 x 5 = 5 l

Resposta : 6L + 5L = 11L

A) Para obter tinta de cor laranja, devemos misturar 3/5 de tinta vermelha e 2/5 de tinta amarea. Para obter tinta de cor verde devem-se misturar 2/3 de tinta azul e 1/3 de tinta amarela. Para obter o marrom devem-se misturar ½ de tinta laranja e ½ de tinta verde.

Fonte: acervo da pesquisa.

Diogo buscou identificar quantos litros equivaliam a cada “parte” mencionada na atividade. Assim, identificou que cada “parte” da constituição do laranja equivalia a 3 litros de tinta e cada “parte” da constituição do verde equivalia a 5 litros. Após identificar a quantidade de cada “parte”, buscou nas informações da atividade o número de “partes” necessárias da cor amarela para formar as cores laranja e verde (cores necessárias para obtermos marrom), identificando a quantidade em litros de cor amarela necessária para obtermos a cor marrom.

Após Diogo explicar sua resolução comentei o quão interessante era perceber resoluções diferentes das que eu imaginava, como no caso sobre o qual conversávamos. Expliquei que havia pensado diferente, então Diogo comentou o seguinte: *sempre faço esse tipo de resolução quando tem esse tipo de questão, porque parece que fica mais visível.* Diogo esclareceu que sua percepção quanto ao *“visível”* se referia ao pouco uso da representação fracionária em sua resolução e perguntou se teríamos alguma sugestão de resolução que envolvesse mais a representação. Então, com a tela compartilhada apresentando o material 05 e a atividade em questão, apresentei a minha primeira resolução ao me deparar com a atividade. A Figura 53 apresenta as anotações que realizei na tela compartilhada com todos enquanto explicava meu raciocínio.

Figura 53 – Anotações feitas por mim durante o encontro ao resolver a atividade envolvendo a mistura de tintas do Material 05

Fonte: acervo da pesquisa.

As anotações em vermelho representavam as medidas para obtermos a cor laranja, ou seja, 3 partes de tinta vermelha mais 2 partes de tinta amarela. As anotações em verde representavam as medidas para obtermos a cor verde, de modo que precisávamos de 2 partes de tinta da cor azul mais 1 parte de tinta amarela. As anotações em amarelo representavam as quantidades que necessitávamos na cor amarela, deste modo a fração 6/15 indicava que dentre 15 litros de tinta laranja, 6 eram de tinta amarela em sua composição. Já a fração 5/15 indicava que dentre 15 litros de tinta verde, 5 eram de tinta amarela em sua composição. Assim, ao todo tínhamos 11 litros de tinta amarela.

As perguntas seguintes pediam que reescrevêssemos a atividade utilizando a representação fracionária e a resolvêssemos novamente, como mostra a Figura 51. Ao comentar minha resolução Diogo esclareceu que havia realizado para as perguntas seguintes uma resolução próxima àquela que eu apresentava na tela. Mas que por não ter identificado as frações equivalentes envolvidas no algoritmo da divisão, percebia que a compreensão do que representa o numerador 11 na fração 11/15 não era tão clara como quando reescrevemos as frações 2/5 e 1/3 como suas parcelas, respectivamente, 6/15 e 5/15.

Enquanto comentávamos sobre as possíveis resoluções utilizando a representação fracionária, Diogo pontuou a dificuldade que percebia de seus alunos compreenderem que qualquer número natural poderia ser reescrito na forma fracionária com denominador 1. Segundo Diogo:

- *Como os alunos chegam às vezes... eu recebo muitos alunos no primeiro ano do [Ensino] médio... eles nunca sabem que todo número, um número qualquer tem denominador 1.*

Suzi concordou com o professor sobre a dificuldade dos alunos, enfatizando que tal dificuldade se mantém até o Ensino Médio embora tenha sido explicada inúmeras vezes no Ensino Fundamental, dando seu relato: *eu digo a vida inteira 'gente, existe um 1 invisível ali.' [...] E outra coisa é o expoente 1. Eu friso bastante.*

Diogo concordou com Suzi também sobre a dificuldade de seus alunos quanto à percepção da existência do expoente 1 e complementou a fala da colega citando o caso do expoente zero. Nesse sentido Diogo comentou sua estratégia para trabalhar as dificuldades que percebe de seus alunos no primeiro ano do Ensino Médio.

- *Outra coisa que eu faço... todo começo de ano, na primeira semana eu pego cálculos, todos os cálculos: adição, subtração, multiplicação, divisão com virgula, multiplicação com virgula. Chega no terceiro ano do [Ensino] médio e tem um monte de aluno pedindo ajuda.*

Suzi concordou com Diogo citando suas percepções:

- *Tem aluno [do Ensino Médio] que não sabe divisão pelo algoritmo simples. E eu estou falando de divisão por unidade... coloca lá no quadro no terceiro ano do Ensino Médio 15490* *dividido por 3 e tem aluno que chama na mesa e fala 'eu não sei fazer'. Isso no terceiro ano do Ensino Médio. Porque eles usam a calculadora né.*

Ambos os professores concordaram que muitas vezes o próprio aluno *"não acredita que ele não sabe fazer".* E que os mesmos (alunos) reconhecem que determinado assunto é visto nos anos iniciais do Ensino Fundamental e então ficam surpresos ao perceberem que têm dificuldades.

Ainda sobre suas estratégias, Diogo comentou que embora pudéssemos achar "loucura", ele "tomava" a tabuada até o 9º ano do Ensino Fundamental considerando as respostas em suas avaliações. Suzi descontraindo a conversa comentou que fazia algo próximo a isto:

- *Eu faço o ditado da tabuada. Mas nas minhas turmas o ditado da tabuada se chama 'atividade bem legal', e eles amam* (enfatizando a palavra 'amam'). *No [Ensino] Fundamental eles amam, chegam a pedir: 'sora, a gente não vai fazer a atividade bem legal?'. Porque eu faço de uma maneira bem dinâmica, e quem gabarita ganha bombom, é sonho de valsa ou ouro branco. Só que é muto difícil eles acertarem tudo, porque assim... eu dou uma meia folha que tá escrito bem em cima 'atividade bem legal' e numerado de 1 a 10 e eles só podem usar uma caneta azul ou preta. Daí eu dito, tipo 3 vezes 4, daí eles não podem escrever 3 vezes 4, só podem colocar o resultado. E eu dito uma única vez os 10 números e é tipo assim, toma lá, dá cá. Daí eu digo 'acabou' e todo mundo levanta as mãozinhas tipo assim* (levantando as mãos acima da cabeça e mostrando para a câmera). *Daí eu falo 'trocar a caneta', aí eles podem trocar a caneta por uma colorida e a gente corrige e eles mesmos dizem 'ah, errei uma, errei duas...'.*

Sobre o uso da calculadora, Diogo e Suzi iniciaram uma discussão sobre os pontos positivos e negativos. Diogo percebia o uso da ferramenta como algo negativo, já Suzi percebia que em determinados momentos o uso era indiferente, segundo ela:

- *Se aplicar o conceito, eles podem usar quantas calculadoras eles quiserem. [...] Tipo, vou trabalhar circunferência, área, volume, comprimento, se eles não aplicarem o conceito, não compreenderem a diferença de diâmetro... de raio... não adianta nada dar calculadora para ele, ele não vai saber aplicar aquele conhecimento.*

Diogo percebia que ao possibilitar o uso da calculadora em momentos como os que Suzi citou, estaríamos "tirando" o hábito de calcular. Suzi, interagindo com o colega, mencionou que o problema seria não "direcionar" o uso da calculadora, e então *"o problema daí seria do professor em não direcionar e não da calculadora. Porque eu, particularmente acho a calculadora fundamental um instrumento fundamental."*

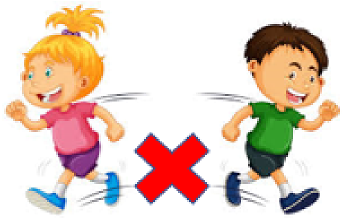
Após a fala de Suzi sobre a importância de direcionar o uso da calculadora, Diogo passou a concordar com a percepção da colega.

As próximas perguntas da atividade escolhida por Diogo tinham como objetivo que percebêssemos qual a principal operação envolvida na situação e que buscássemos resolvê-la com outra operação, como a multiplicação. Percebi que naquele momento não estávamos próximos de identificar diferenças ao resolver a situação com ideias aditivas ou multiplicativas, assim, optei por retomar as questões após conversarmos sobre as outras atividades. Os professores concordaram.

A próxima atividade alvo de discussões era uma adaptação de uma das atividades do Material 01, na qual percebi que houve engajamento e retomada de discussões em diversos encontros. A Figura 54 apresenta a atividade.

Figura 54 – Atividade envolvendo uma corrida no Material 05

Em uma área espaçosa (pátio da escola, quadra de esportes ou outros) divide-se a turma em duplas. Em cada dupla, as crianças ficam de costas uma para a outra, posicionadas no meio do pátio/quadra, demarcados por alguma fita ou ponto de referência, como exemplifica a imagem abaixo, na qual o X é o ponto de referência:



Fonte: adaptada da internet

Ao som de um apito, ambas correm para lados opostos, e a novo som do apito param de correr, permanecendo no local. Cada integrante da dupla escolhe como medir a distância que percorreu, podendo utilizar passos, palmos, canetas, um bastão ou até mesmo cordas de tamanhos variados.

Após todas as duplas medirem suas respectivas distâncias, a turma deve buscar identificar qual dupla correu mais, sendo os ganhadores aqueles que juntos (em dupla) somaram a maior distância.

Fonte: acervo da pesquisa.

A atividade buscava que identificássemos a distância percorrida por uma dupla em duas situações: 1- na qual um integrante da dupla havia medido sua distância com passos e outro integrante com uma corda; 2- na qual um integrante havia medido sua distância com uma caneta BIC e tivesse 98 canetas como distância, já o outro integrante havia obtido a distância de 4 cabos de vassoura e meio.

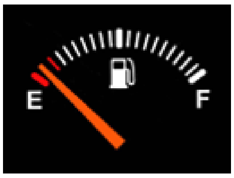
Geruza apresentou sua resolução convertendo em centímetros os passos, corda, canetas e cabo de vassoura. Relembramos que a situação já havia sido alvo de discussões por nós em outros momentos, então Suzi comentou suas ideias sobre o momento passado.

- Eu lembro que até sugeri pegar um instrumento que não fosse uma fita métrica... um instrumento como base para fazer a medição dos dois e depois fazer as multiplicações, ou ir por estimativa para ver quem percorreu a maior distância... também é uma possibilidade.

Relembrei para todos que nos encontros passados havíamos pensado em um modo de identificar quem percorreu maior distância mesmo sem um objeto por perto além daqueles usados para medir, como os passos e a corda. Então Geruza lembrou que nos primeiros encontros havíamos discutido sobre ver quantas canetas cabiam em um cabo e que então o mesmo poderia ser feito entre passos e a corda. Geruza explicou que para a segunda questão, ao comparar 98 canetas e 4 cabos e meio, havia seguido esta lógica de comparar uma caneta e um cabo, mas que durante a resolução convidou seu sobrinho a ajuda-la e então optaram por considerar as medidas em centímetros de cada material e operar com as medidas definidas em centímetros.

Priscila estava em aula síncrona com seus alunos e então havia avisado que acessaria a sala de encontros próximo às 15h30. Enquanto Geruza concluía sua fala Priscila acessou a sala e então foi a próxima a apresentar sua solução. A atividade escolhida pela professora envolvia a mistura de combustíveis e é apresentada na Figura 55.

Figura 55 – Atividade envolvendo a mistura de combustíveis no Material 05



a) Suponhamos que um determinado carro tenha a quantidade indicada pela imagem acima de gasolina comum em seu tanque. Caso o motorista queira completar o tanque com gasolina aditivada (essa gasolina aditivada tendo uma taxa de 0,5% de aditivos), qual será a taxa de aditivos no tanque todo?

b) Suponhamos que a gasolina já existente no tanque seja aditivada (com 0,5% de aditivos). O motorista deseja completar o tanque de gasolina comum e queira acrescentar o aditivo em frasco, o frentista o orienta que, para a determinada marca de aditivo, a medida correta é um frasco de 200ml para cada 40 litros de combustível.

- Qual a taxa de aditivo por litro de combustível segundo o frentista?
- Qual a taxa de aditivos no tanque todo após a mistura da gasolina já existente e a gasolina nova com o aditivo?

c) Caso a gasolina indicada no marcador fosse aditivada (tendo uma taxa de 0,5% de aditivos) e fosse acrescentada gasolina do mesmo tipo até o marcador indicar metade da capacidade do tanque. Qual seria a taxa de aditivos presente no tanque?

Fonte: acervo da pesquisa.

Priscila explicou sua resolução para o item *a*. A professora percebeu que havia no tanque a fração 1/20 de gasolina e então seriam 19/20 de gasolina aditivada com 0,5% de aditivos, assim, multiplicou a fração de gasolina aditivada com a porcentagem de aditivos percebendo que, neste caso, teríamos uma taxa de 0,475% de aditivos em todo o tanque.

Suzi havia comentado que também gostaria de ter resolvido esta situação, mas não pôde, assim, apenas estudou a resolução de Priscila.

- Foi uma ótima opção da Priscila usar a fração e depois usar também aquela parte do 0,5 no formato que ele está. É o que eu costumo falar para os alunos: é alguma coisa de outra coisa. Eu digo para eles que o 'de' na matemática representa uma multiplicação, assim como a palavra 'diferença' representa uma subtração. Eles demoram para fazer essa associação. Às vezes eu pergunto: ah, qual é a diferença entre tal coisa e tal coisa. 'Ai, um é menor e o outro é maior'. Sim, gente. Eu sei! Mas eu quero saber a diferença no sentido de... qual é a operação que a gente está trabalhando. E aí (na resolução da Priscila) *ficou super nítido que a gente está trabalhando a multiplicação... que a gente está falando de 0,5%.*

Enquanto Suzi falava, percebi que a professora havia compreendido que a situação envolvia um raciocínio multiplicativo e então lembrei de retomar a conversa sobre a questão envolvendo a mistura de tintas, a qual Diogo havia apresentado sua resolução. Naquele primeiro momento, ao falar sobre tintas, optei por não entrar na discussão sobre o raciocínio aditivo ou multiplicativo envolvido na questão a fim de que conversássemos e víssemos outros contextos antes de concluir ou discutir sobre. Assim, retomei a questão das tintas (Figura 51) e percebemos que naquele contexto falávamos de parte-todo e acabamos envolvidos por um raciocínio aditivo para responder à pergunta (quantos litros de tinta amarela seriam necessários para 30 litros de marrom, dadas as proporções). E questionei-os: *Já percebemos que nas tintas falávamos de parte-todo e adição, aqui, agora* (na situação de combustíveis) *estamos por enquanto trabalhando a multiplicação, mas em qual contexto?*

Priscila identificou a fração 19/20 como a relação parte-todo e Suzi identificou 0,5% como uma taxa. Então a pergunta que buscávamos discutir era: *o que nos leva a multiplicar os dois contextos* (uma relação parte-todo e uma taxa)*? E o que nos levou a somar na atividade anterior* (mistura de tintas)*?* Várias hipóteses surgiram no decorrer da nossa conversa. Suzi e Diogo, respectivamente, pontuaram as diferenças que percebiam:

- Lá tinha mais de uma coisa né, tinham cores diferentes. Aqui a gente quer completar com outro tipo de gasolina. Não?

- É o mesmo produto.

Questionei o que compreendiam como “mesmo produto” e então Suzi respondeu:

- *Na atividade da Priscila estamos trabalhando o mesmo produto, porque a referência é sempre o mesmo tanque. Ora a gente pega a parte que tem [gasolina], ora a gente pega a parte que não tem... mas a gente está sempre falando do mesmo tanque.*

Percebi que, talvez, o fato das tintas na primeira questão serem de cores e proporções diferentes estivesse levando ambos os professores a compreenderem que seriam grandezas diferentes. Então reescrevi na tela as frações que havíamos trabalhado na questão sobre tintas: 2/5 e 1/3, sendo, respectivamente, 2 partes amarelas dentre 5 e 1 parte amarela dentre 3. E sugeri que identificássemos o que aquelas frações representavam no contexto (2 partes amarelas dentre 5 e 1 parte amarela dentre 3) para que percebêssemos que trabalhávamos com grandezas de mesma espécie.

Num primeiro momento o pensamento foi relacionado à ideia de razão, então retomei ao exemplo do Material 03 de que para cada 4 pessoas teríamos 3 pizzas. Após o exemplo, constatamos que nosso olhar se aproximava mais de uma relação parte-todo do que do significado de razão embora pudéssemos tentar resolver a situação por meio da razão em um outro momento.

Suzi retomou a pergunta que havia ficado em aberto na atividade anterior, sobre a operação utilizada na situação envolvendo a mistura de tintas. Na questão retomada por Suzi buscávamos pensar na resolução da questão com outra operação (no caso, a multiplicação). Comentei que ao interpretarmos as frações (2/5 e 1/3) como relações de parte-todo, e consequentemente envolvermos a ideia de medida, acabaríamos priorizando o raciocínio aditivo em nossa resolução, assim como eu e Diogo havíamos feito em nossas soluções. Então o significado da fração, nossa interpretação do contexto nos direcionaria para a operação em destaque na resolução e caso quiséssemos resolver a situação por outro raciocínio, no caso o multiplicativo, teríamos de, talvez, reformular a pergunta a fim de que nossa leitura proporcionasse interpretações e raciocínios envolvendo as frações como razões, assim como Priscila havia pensado por um momento.

Suzi pareceu curiosa com as relações e situações consequentes dos significados das frações e me questionou sobre qual delas eu percebia como principal no dia a dia. Fiquei animada com a curiosidade e interação de Suzi, pois percebi que a professora estava refletindo sobre nossas conversas e instigando que todos no ambiente também refletissem sobre suas inquietações. A professora continuou sua fala pontuando suas percepções quanto aos significados presentes nos materiais didáticos que utilizava em ambas as escolas em que atuava (uma da rede privada e outra da rede estadual).

- *Na escola do estado a gente trabalha meio que bitolado: 'ah, agora a gente vai trabalhar esse conceito.' E daí tem que ser o básico desse conceito porque senão o aluno não consegue. São raros os momentos que eu consigo fazer coisas mais diferentes. Porque a solicitação da própria escola e da mantenedora é de que faça, principalmente o ano passado* (2020) *e esse ano, o básico. [...] No estado eu percebo que é mais operacional, 'ah, agora vamos trabalhar frações', e elas acontecem.*

Suzi lamentava a disparidade entre as escolas e explicou que embora utilizasse o mesmo autor de livros didáticos em ambas as escolas, na escola estadual em que atuava conseguia apenas trabalhar o "básico" sobre as frações.

Priscila comentou sua percepção de que quando temos questões *"mais complexas... com o contexto mais elaborado"* independente de envolverem frações ou não, os alunos têm mais dificuldades devido à leitura e interpretação, assim como já havíamos comentado em momentos anteriores. Mas que, além disto, muitas vezes eles identificam quais operações precisam fazer e acabam errando ao operarem com as frações.

- *Há alguns anos temos nas escolas um preparatório para o Instituto Federal, então a gente faz um pré-IF com os alunos e têm sempre questões com frações. As vezes só a fração pela fração, pelo cálculo, e as vezes dentro de um enunciado, assim... e aquelas questões [com um contexto] as vezes os alunos não sabem nem por onde começar. Tinha que pegar parte por parte e 'ó, essa informação tá dizendo isso, então aqui a gente vai precisar somar para depois subtrair'... ou então precisa escrever uma equação onde os coeficientes são frações... 'meu deus'... ai já é o fim do mundo. É bem difícil mesmo de conseguir trabalhar isso [as frações em contextos].*

Diogo concordou com Priscila e enfatizou sua percepção quanto às dificuldades em leitura e interpretação por parte de seus alunos. Suzi respondeu ao colega:

- *Na verdade eles não compreendem, Diogo, o que eles estão lendo. E se for pensar, é aquilo que a gente... que eu acredito, a gente volta naquilo de que, não que sejam responsáveis ou culpadas, mas lá nos anos iniciais as frações são trabalhadas o tempo todo no formato de parte-todo, parte-todo, desenho, parte-todo... Então assim, eles não são... ahm... instigados a fazerem esse tipo de processo contextualizado nos anos iniciais. São raras. Tu podes perguntar para um aluno. Eu estava esses dias conversando com a minha comadre, eu pergunto assim para os meus conhecidos que têm crianças 'como que está o fulano?' [e eles respondem]: 'ah, não sabe ler, mas ama matemática'. Pode ver que tá no primeiro, segundo ou terceiro ano. Quando eles passam a ter ideia e conhecer as frações eles passam a desgostar da matemática, porque eles acham aquilo um absurdo de difícil, porque não é contextualizado... até é, mas só* *com pizza e chocolate, pizza e chocolate não dá, chega uma hora que cansa. Aí chega lá no 6º [ano do Ensino Fundamental] eles não têm... na verdade eles não têm conhecimento sobre aquilo que está sendo apresentado para eles. Então eu acho que a gente enquanto professores dos anos iniciais e principalmente de 6º ano, a gente tem que ter também essa percepção de que nem sempre é culpa ou má vontade do aluno, porque muitas vezes o aluno ele não teve um professor bom nos anos iniciais, principalmente no 4º e 5º ano. E eu não estou dizendo que o professor é ruim e sim que ele não foi preparado para trabalhar daquela maneira [com frações em contextos].*

Suzi pontuou possíveis aspectos relacionados à dificuldade por parte de seus alunos. Nesse sentido Diogo citou uma experiência que teve. Segundo o professor, ao assumir as aulas de matemática de uma turma que não era sua e ao indicar "temas para casa", recebeu elogios e agradecimentos por parte de uma das mães. Sobre isso o professor comentou:

- O que deu a entender? Que eles nunca levavam tema para casa. Os alunos não têm mais esse hábito e até os pais parece que não querem que o aluno tenha tema. A gente sente isso, parece que a gente está incomodando se mandar tema para casa. A gente está incomodando.

Acabamos não prosseguindo o assunto sobre "temas para casa" e então continuamos respondendo as questões da atividade de Priscila, sobre combustíveis (Figura 55). Ao responder a primeira pergunta do item *b* (Figura 55), buscávamos identificar a taxa de aditivo no tanque após a mistura de 200 ml de aditivo para cada 40 litros de combustível. Priscila apresentou a seguinte igualdade como resposta para a questão: $\frac{0{,}2}{40} \cdot 100 = 0{,}5\%$. Priscila explicou seu raciocínio, comentando que 0,2 representava 200 ml de aditivos devido à conversão para litros. Questionei-os se algo chamava atenção na resolução da professora. Meu intuito era de que conversássemos sobre a representação fracionária, se para a interpretação de cada um deles seria possível utilizarmos números decimais em uma fração e não apenas naturais e inteiros.

Suzi brincou que para ela a representação não a incomodava, então estaria *"tudo bem"*, mas em seguida completou que havia questões em que optava pela representação fracionária e em outras pela representação decimal, mas não se recordava de ter trabalhado com as duas juntas, como na solução de Priscila. Geruza brincou que na matemática nada a assustava e que então para ela a representação não provocou questionamentos. Diogo comentou que não era comum identificarmos representações daquela forma e que para *"ser mais doce para os olhos, poderia ter convertido os 40 litros para ml, assim ficaria como uma fração normal"*. Priscila explicou que havia pensado naquela representação *"não como uma fração, mas sim como a* *representação de uma divisão, assim a barrinha para mim representou a divisão".* Salientei que meu intuito era de instigá-los a pensar no que consideramos como uma fração, e de que percebêssemos que a "barrinha" também assumia funções como Priscila havia pontuado. Por exemplo, na situação proposta por Priscila a "barrinha" nos indicava a divisão, um quociente, mas já havíamos visto em outras situações que a "barrinha" representava uma relação, ao exemplo da multiplicativa vista no Material 02 por meio de situações envolvendo a razão.

Priscila apresentou todas suas soluções e então comentei que o intuito daquele material era de que percebêssemos situações em que havia sentido aplicar determinadas operações e outras não, e que isso estaria relacionado ao significado envolvido na situação. Por exemplo, as interpretações que Diogo e Geruza apresentaram sobre as atividades escolhidas (mistura de cores e envolvendo uma corrida) envolviam o significado medida e acabamos tendo a operação de adição com papel central na solução. Já a situação escolhida por Priscila, envolvendo a mistura de combustíveis e aditivos, envolvia o significado razão e por isso tínhamos como operação central na solução a multiplicação.

Após minha fala sobre o objetivo daquele material, convidei os professores a falarem sobre o material ou sobre todos os materiais, para que então seguíssemos para nosso próximo assunto (o trabalho final).

4.9. A CONVERSA SOBRE O GRUPO CONSTRUÍDO POR NÓS

Havia solicitado que escrevessem um texto pontuando suas expectativas, percepções, pontos positivos, negativos e sugestões. Cada professor organizou sua escrita, assim, os itens organizadores da escrita são diferentes uns dos outros. No encontro, cada um dos professores comentou o texto que havia enviado.

O texto enviado por Diogo foi o seguinte:

> ***"- O que esperava do curso?*** *Quando me matriculei no curso, esperava uma aula teórica e uma grande quantidade de questões envolvendo frações. Mas não foi o que encontrei, e sim uma aula onde todos compartilham suas experiências e conhecimento numa roda de conversa, que parti de um ponto.*
> ***- O que não gostei?*** *De ter perdido uma aula*
> ***- O que poderia melhorar?*** *Introdução com uma aula sofre frações, para depois entrar nas tarefas, para tirar um pouco a impressão de que você não veio para ensinar e sim para buscar nosso conhecimento e experiência para terminar seu trabalho de conclusão do curso.*
> ***- O que gostei?*** *Da dificuldade das questões e o leque de discursão que abria cada questão." (texto enviado por Diogo, acervo da pesquisa)*

Complementando o texto, Diogo comentou que, ao entrar no curso, pensou que seria *“um caminhão de conteúdo sobre frações, um monte de questão pra resolver”.* E que após meu primeiro contato com eles, apresentando a proposta do curso e o vínculo com minha pesquisa para o mestrado, ficou desmotivado a continuar, pois pensava que *“essa guria tá me usando para terminar o trabalho dela, ela tá sugando o pouco de conhecimento que eu tenho para terminar o tcc dela”.* Mas que, ao pensar que poderia ajudar, optou por continuar participando.

Após a desistência de outros professores que participaram do primeiro encontro, Diogo se questionou se esses não teriam tido a mesma percepção que a sua, de que estariam fazendo um trabalho por ou para mim. O professor sugeriu que em um outro momento eu iniciasse apresentando os cinco contextos de fração e “*deixasse um ponto de interrogação”,* após isso apresentasse os cinco materiais e então explicasse sobre o vínculo com a pesquisa de mestrado. Diogo explicou que, ao começar apresentando inicialmente os cinco significados, chamaria atenção e curiosidade das pessoas, pois ele considerava que muitos professores não tinham essa clareza de cinco significados, ao exemplo de si próprio. Compreendi que a sugestão de Diogo era de que primeiro eu despertasse o interesse e a curiosidade dos professores inscritos e só após isso falasse sobre a pesquisa, para minimizar a possibilidade de que se sentissem desmotivados logo ao início, como aconteceu consigo.

Concordei com a percepção de Diogo de que a conversa inicial impactava bastante os professores inscritos, e que além daquele *“susto”* comentado por Diogo, outro possível motivo estaria relacionado à proposta do curso e da pesquisa. Exemplifiquei que poderia haver professores que buscavam um curso no qual não precisassem participar ativamente, e não era essa a minha proposta. Havia buscado desde o início esclarecer que a proposta era de que participassem, conversassem, enviassem materiais, interagissem. Enquanto explicava essa outra perspectiva quanto às desistências, Priscila concordava comigo fazendo gestos com a cabeça. Percebi que a professora concordava sobre aquela relação entre proposta e motivação a continuar o curso ou não.

O texto enviado por Suzi foi o seguinte:

> ***“- SOBRE O CURSO:*** *Ao me inscrever para o curso do Estudo de Frações, imaginei que seriam encontros onde seriam expostos alguns conceitos envolvendo frações e como poderíamos trabalhar os mesmo, mas para a minha surpresa, positiva, ao decorrer pude perceber que os materiais eram desenvolvidos e discutidos de forma coletiva, trazendo assim ideias não apenas de um professor e sim de diversos ao mesmo tempo, o que mais me surpreendeu foi a riqueza dos materiais e como cada um deles tem perspectivas diferentes e são contextualizados, desse modo fazem sentido ao serem trabalhados. A desenvoltura, dedicação e organização da mestranda são pontos positivos desses encontros. Posso dizer que o curso superou minhas expectativas.” (acervo da pesquisa)*

No encontro, Suzi comentou sua percepção inicial: para ela estava claro desde a inscrição e divulgações em redes sociais que aquele seria um curso proposto por uma pessoa que estaria terminando seu mestrado e esse foi um dos motivos mais importantes que a levou a se inscrever. A professora esclareceu que tinha o desejo muito forte de cursar um mestrado, fosse na UFRGS ou outra instituição, e por isso não teve a mesma interpretação e sentimento que Diogo, sobre *"ser usada para o trabalho"*. Segundo Suzi:

- *Mesmo que eu tivesse essa ideia: 'que bom que ela tá me usando'. Eu penso assim né, eu Suzi. Porque daqui a pouco sou eu e que bom, tomara que tenha alguém aí que esteja disposto a ser usado para que eu conclua os meus estudos dentro do mestrado.*

Suzi comentou que, embora não tivesse a mesma percepção de Diogo, também teve uma surpresa no decorrer dos encontros. Segundo ela, esperava um curso expositivo e percebeu após os primeiros encontros que seria *"bem diferente"*, como havia expressado em seu texto.

Comentando a sugestão de Diogo, Suzi comentou que não acharia *"bacana"* que os cinco significados das frações fossem expostos no início, pois segundo a mesma:

- *Se eu soubesse, se eu tivesse estudado, tivesse tido uma palestra sobre todas essas partes da fração... eu não ia olhar e analisar os materiais dessa mesma forma como analisei. Então eu me surpreendi no sentido positivo, acredito que foi mais produtivo do que eu imaginei que seria.*

Suzi continuou sua fala lamentando o pouco tempo que pôde destinar ao estudo dos materiais e pontuando sua curiosidade sobre como seria se tivéssemos professores dos anos iniciais como era a ideia inicial. A professora referia-se ao nível de dificuldade das questões, segundo ela, a mesma acreditava que os professores dos anos iniciais não teriam a mesma *"bagagem de área específica"* que eles têm enquanto professores da área de matemática para resolver as questões. Suzi exemplificou com suas próprias dificuldades e dúvidas na resolução de algumas das questões e imaginava como professores dos anos iniciais lidariam com a situação.

Suzi concluiu enfatizando o pouco tempo que pôde destinar ao curso, mas que sobre a proposta havia sido *"topssimo"*. Então Diogo concordou com a professora:

- *Esse ensino remoto nos tira muito tempo, temos que fazer tudo muito diferente, aí trabalhamos sábado, domingo, não tem hora. Mas ah... sobre o curso não tem o que falar, não tem o que falar... Depois que tu pegas ali o segundo ou terceiro encontro aí tu não queres perder nenhum dia mais.*

Geruza concordou com os colegas sobre a surpresa em *"não ser como aqueles outros cursos que a pessoa fala, fala, fala, fala e aí no final responde umas atividades e deu"*. O texto enviado por Geruza foi o seguinte:

> *"-* ***Sobre o curso:*** *Não sei como descrever o que foi esse curso para mim, como estou me sentindo após ter me inscrito, mas é uma satisfação muito grande que sinto pois tudo que se relaciona a meu conhecimento matemático me deixa feliz e mais interessada em aprender. O tema foi ótimo 'Fração', não é um tema fácil de se estudar de cara principalmente se você tiver que os encontrar em situações problemas como foi o caso de algumas questões do curso. Tinha noite que dormia tarde tentando resolver algumas delas e não consegui. Uma pena que foi por pouco tempo esse seria meu ponto negativo e a ausência de alguns participantes que infelizmente não puderam terminar o curso. Outro ponto negativo foi minha participação faltou me doar mais, tanto na resolução das questões como na interação com os outros participantes. Participar desse curso foi muito bom, conhecer outros professores sua experiência em sala de aula me deu mais ânimo para com meu trabalho e aprendizado também. Foi algo diferente, em outros cursos que participei o professor falava, falava e no final a gente tinha de resolver uma folha de questões enorme, o que diferencia esse curso dos outros é que cada problema solucionado ou não é questionado o porquê do resultado encontrado. Espero que venham mais cursos assim com outros temas claro e eu possa participar. Desde já agradeço pela escolha por participar do curso, muito obrigada mesmo de coração." (acervo da pesquisa)*

Quanto aos materiais, a professora pontuou o quão instigantes foram para ela: *"não foi aquela coisa pronta, tínhamos um contexto, tínhamos que pensar e refletir. Outra coisa que eu quero falar é sobre os nossos debates de todos os encontros... é bem diferente e legal. Porque aí eu faço de um jeito, aí a Stephanie apresentava uma outra solução, vinha o Diogo e dava uma outra ideia... e no fim a gente chegava em um determinado ponto juntos."*

Geruza concluiu sua fala brincando: *ó, mas por fim, eu não me senti usada. E se fui usada, eu também usei... usei seu tempo, seu estudo. Mas foi bom Stephanie, torço para o seu sucesso.*

Como todos haviam comentado suas percepções sobre o ambiente, exceto Priscila, perguntei a ela se teria algum ponto diferente para comentar. O comentário enviado anteriormente pela professora foi o seguinte:

> ***"- Avaliação do curso:*** *O curso "Estudo e ensino de frações na escola" foi muito produtivo especialmente pela oportunidade de trocas de experiências com outros professores. Infelizmente, foram poucos professores que participaram do curso. Outro ponto a destacar é a qualidade dos materiais propostos, evidenciando os diferentes significados de frações e os diferentes contextos em que elas aparecem. Em alguns momentos do curso senti falta de um embasamento teórico. As trocas de experiências são muito boas, mas algumas vezes ficamos apenas no "achismo"." (acervo da pesquisa)*

Priscila retomou a conversa sobre as desistências pontuando que o início do ano letivo também era uma justificativa, pois havíamos iniciado o curso ainda no período de recesso escolar, e a partir do segundo e terceiro encontros as aulas já estavam sendo retomadas. A professora lamentou as desistências pois considerava que quanto mais *“realidades diferentes de formação, de atuação, até de lugares, mais rico seria”.* E, quanto à participação na pesquisa, comentou que gostava de estar envolvida neste meio, na ciência, e sempre que recebia a oportunidade participava de pesquisas, inclusive fora da matemática, a fim de contribuir com o que podia.

Geruza comentou que acreditava não ter contribuído muito, mas que só o fato de compartilhar aqueles momentos conosco fazia valer a pena para ela.

- Tem muita coisa que eu ouvi aqui, de vocês, que assim... eu já tenho outra visão, até para as minhas aulas. Da maneira como eu vou usar a fração, não é mais aquela maneira antiga que é sempre a mesma, a mesma. Então já tenho outra maneira, outro modo de usar as frações no meu planejamento.

Diogo concordou com Geruza sobre o quão importante foi participar de debates. E comentou que *“gostaria de participar de outro grupo de discussão. Posso deixar minha inscrição para outro grupo? Quero mais grupos para discutir.”.* Percebi que as discussões foram um dos principais momentos para os professores, e que aqueles momentos haviam motivado todos para os estudos.

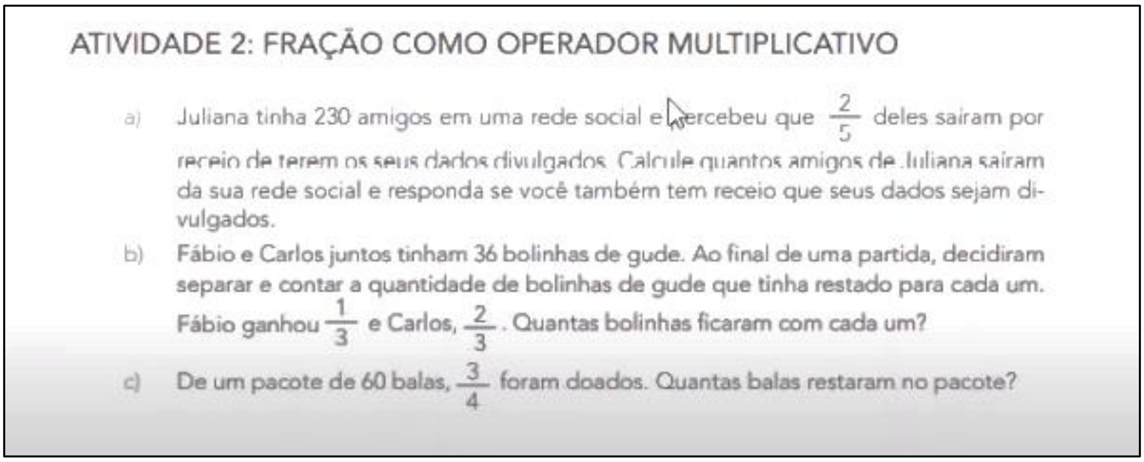
4.10. OS TRABALHOS E CONVERSAS FINAIS

Priscila havia entrado em contato comigo no dia anterior informando que não havia conseguido desenvolver o trabalho final devido às demandas escolares, mas que gostaria de apresentar sua ideia. Assim, Priscila foi a primeira a apresentar a proposta.

- Me chamou muito a atenção aqui no curso de ir evidenciando os diferentes significados da fração. Em muitos momentos da minha prática eu não parei para pensar nisso e nem consegui trabalhar os diferentes significados, só alguns, os mais comuns... representações das operações, parte-todo... e é isso. E outros significados ficam de lado e muitas vezes os alunos apresentam dificuldades e uma coisa está relacionada a outra. E o que eu pensei de propor... algo que eu queria ter feito, mas não tive tempo, era de pegar o material didático... o livro didático que é usado, e conseguir identificar questões para cada um dos tipos... cada um dos significados. Porque a gente olhou para as questões dos materiais né, então a partir das questões dos materiais fazer essa análise no livro didático que é usado. E conseguir ver se ainda realmente está trabalhando muito mais parte-todo, onde aparece o fator multiplicativo, onde aparece razão... para que ano? Quais as questões? Fazer esse tipo de análise.

Priscila continuou sua fala comentando sobre parte das pesquisas que havia realizado para o desenvolvimento do trabalho. E o quão interessante considerava um material da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, o qual apresentava questões diferenciando os significados de fração. Priscila compartilhou sua tela conosco para apresentar o material. A Figura 56 mostra o recorte de uma das páginas que Priscila nos mostrou.

Figura 56 – Atividade do material da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo compartilhado por Priscila



ATIVIDADE 2: FRAÇÃO COMO OPERADOR MULTIPLICATIVO

a) Juliana tinha 230 amigos em uma rede social e percebeu que $\frac{2}{5}$ deles saíram por receio de terem os seus dados divulgados. Calcule quantos amigos de Juliana saíram da sua rede social e responda se você também tem receio que seus dados sejam divulgados.

b) Fábio e Carlos juntos tinham 36 bolinhas de gude. Ao final de uma partida, decidiram separar e contar a quantidade de bolinhas de gude que tinha restado para cada um. Fábio ganhou $\frac{1}{3}$ e Carlos, $\frac{2}{3}$. Quantas bolinhas ficaram com cada um?

c) De um pacote de 60 balas, $\frac{3}{4}$ foram doados. Quantas balas restaram no pacote?

Fonte: acervo da pesquisa.

Priscila esclareceu que considerou interessante que os títulos dos materiais indicassem o significado de fração envolvido nas atividades, e era essa a ideia que gostaria de realizar no material didático utilizado por sua escola. Questionamo-nos sobre o intuito do documento encontrado por Priscila, a mesma sugeriu que este possivelmente fosse utilizado como *caderno de apoio* para as escolas estaduais de São Paulo. Priscila estava correta em sua suposição sobre os objetivos do documento; após o encontro, realizando uma pesquisa, identifiquei o documento como um dos cadernos que compõem o Programa São Paulo Faz Escola, o qual tem como objetivo unificar o conteúdo entre as escolas estaduais implantando o currículo oficial. Nesse sentido Suzi pontuou o quão importante era o Estado investir em proposta como aquelas, e citou o Estado de Pernambuco como outro exemplo de investimentos na educação.

Concordei com Suzi sobre a importância de investimentos na educação e na pesquisa na área de educação, exemplificando que parte considerável das referências que havia utilizado para a construção dos materiais eram do Estado de São Paulo, grupos de pesquisas, pesquisadores, dentre outros. Nesse caminho, comentei sobre uma experiência que tive ao olhar livros didáticos de um dos autores mais conhecidos dentre os professores de matemática, e erros em propriedades e definições que na época encontrei. Salientei que embora reconhecesse que muitas vezes os livros não são utilizados, eles estariam circulando em ambientes escolares e ao alcance de professores e alunos, e o quão preocupante eram esses documentos com erros circulando em grande quantidade pelo país. Suzi comentou que naquela mesma semana havia identificado um erro em uma propriedade no livro do mesmo autor e então questionou quem seriam as pessoas responsáveis por analisar esses livros didáticos e aprovarem suas publicações.

- Mas aí eu quero te perguntar uma coisa: essas pessoas que fazem parte dessa banca né... deve ser uma banca que faz aí a correção, a análise, enfim... essas pessoas elas estão inseridas dentro de sala de aula? Porque se elas estivessem, elas saberiam que têm coisas ali [dentro do material didático] que não faz sentido para quem trabalha em sala de aula.

Respondi que essa era uma pergunta geradora de grande discussão e que poderíamos discutir isto vinculando aos governos de cada momento em análise, visto que ele (o governo) seria um dos principais responsáveis por essa resposta (os responsáveis pela análise do material didático estão inseridos em salas de aula?).

Incentivei Priscila a realizar o trabalho que havia idealizado e que o publicasse, pois seria interessante. Suzi sugeriu que Priscila redigisse sua ideia como projeto para mestrado e então se inscrevesse em algum programa. Como Priscila já havia concluído o mestrado, iniciamos uma conversa sobre a carga horária compatível com o mestrado e a importância da experiência para a pesquisa. Suzi comentou ter aproximadamente cinco anos de experiência como professora dos anos finais e outros cinco anos como professora dos anos iniciais. Diogo comentou ter quatro anos de experiência como professor dos anos finais e lamentou ter concluído o curso em uma instituição que considerava *"fraca"*. O professor explicou parte de sua trajetória:

- Bem resumido, eu sempre fui bom em matemática. Na escola me destacava em matemática e em português era um arrasto, sempre foi assim. [...] E daí sempre me destaquei naquelas feiras de ciências, naquelas coisas que tinha antigamente... feira estadual, feira nacional... sempre participei de todas aquelas feiras. Daí chegou ali pelo oitavo ano, que era naquela época, uma professora minha que sempre me apoiava muito e era professora de matemática, foi onde eu me identifiquei com a matemática... ela me conseguiu uma bolsa de mecatrônica em Caxias, uma bolsa de estudos. E eu bem faceiro né, "bah, ganhei uma bolsa de estudos..." [...] Aí cheguei e falei pro pai, e ele: 'tu tá louco, tu vais é trabalhar, o que que tu quer com estudar?!'. Aí passou o tempo, me formei [no Ensino Médio], casei e tudo, daí depois que começou as EaD que daí eu: 'ah, agora eu vou fazer o que eu quero'. E onde eu trabalhava não tinha condições, trabalhava no comércio e pensar no presencial é surreal. E eu entrava às 7 horas da manhã e saía às 9 horas da noite mais ou menos, e serviço de segunda a domingo praticamente. Então quando teve a EaD que daí eu fui e consegui me formar. Agora quero tentar o mestrado, quero é ver aceitarem um aluno de EaD.

Incentivei que continuasse tentando o acesso ao mestrado, e então convidei Geruza a falar.

- *Eu comecei a trabalhar... eu terminei a quarta série na época o que hoje é o quinto ano. E a gente morava no interior então eu trabalhei quatro anos ensinando nos sábados e feriados... meus sobrinhos tudo pequenininhos... do pré até o quarto ano... quinto ano, por aí.*

Geruza nos explicou que morava *"no interior do interior",* que em tempos atuais levaríamos duas horas para chegar da sede da cidade até o local onde morava, mas que naquela época levava-se 24 horas para realizar o percurso dentro da mata sem estradas. Por não residirem professores no local e como ela havia cursado até a quarta série, ficou encarregada de ensinar as crianças que lá moravam, assim foi contratada pela prefeitura do município. A professora continuou a contar sua trajetória:

- *E assim... estudar nada né* (se referindo a continuar os estudos após a quarta série)... *meu pai ele não permitia a gente estudar. Era de uma família assim... aprendeu a ler e escrever... mulher né... mulher aprendeu a ler e escrever era para casar. Então assim, não era para aprender outras coisas, era para casar.*

Naquele momento estávamos todos nos vendo através das câmeras sem telas compartilhadas, assim, pude notar as expressões que todos nós fazíamos enquanto Geruza contava sua trajetória. As expressões que eu, Priscila e Suzi fazíamos eram de espanto e/ou tristeza. Em minha perspectiva, não estava espantada por acreditar que aquilo que Geruza contava era impossível ou que não fosse algo comum em determinados locais e épocas, mas sim por não imaginar que uma de nós, quatro mulheres, presentes naquele momento tivesse vivenciado as situações sobre machismo que Geruza contava.

Geruza continuou a narrar sua trajetória:

- *Mas assim... eu sofri de todo mundo... eu sofri bullying da minha família. Eu decidi, eu não vou me casar, eu vou estudar. Porque assim... aqui no Maranhão a gente vem de uma família... e eu vejo muito... homens muito machistas. 'Mulher é para cozinhar... mulher não tem que tá estudando'. E eu via muito minha mãe e meu pai... as coisas que ele fazia [...] minha mãe não podia participar de negócios... de nada. Então eu decidi: 'eu não quero isso e se um dia eu tiver uma família, mas eu vou é me sustentar... e se eu tiver homem eu não quero homem para estar me sustentando... me sujeitando não'. E aí eu batalhei por isso... eu estudei... todo mundo falava: 'não vai se casar'; 'essa menina não vai se casar'; 'essa menina vai ficar moça velha'. Eu odiava isso: 'moça velha'. Eu odiava quando as pessoas falavam isso. 'Vai ficar moça velha.' É ridículo.*

Como conforto, pude perceber o orgulho que Geruza sentia ao contar que havia conseguido seguir seus objetivos em meio a todo o machismo que sofria. Acredito que Priscila e Suzi também compartilhavam do mesmo conforto, pois enquanto a colega falava pude notar que as expressões de negação e tristeza davam espaços para pequenos sorrisos.

Geruza continuou sua fala datando as épocas em que pode alcançar seus objetivos.

- *Mas aí eu voltei a estudar em 2000, terminei o Ensino Fundamental... meu pai com muita luta deixou eu ir para a cidade... aí eu fiz até o EJA para o oitavo e nono ano. Aí terminei, formei. Quando terminei aí não parei mais graças a deus. Aí terminei o Ensino Médio em Amarante e foi aí em 2007 que eu participei de um concurso [...] passei. Aí um rapaz que era muito amigo meu falou: 'Geruza, tem uma vaga no interior'. Lá mesmo na região onde eu morava* (referindo-se ao interior no local que seus pais moravam). *Aí 'rapaz, eu quero na hora'. Aí eu comecei.*

Ainda contando as datas de suas conquistas, Geruza comentou que *"já tinha feito em 2008 uma graduação que era de pedagogia",* devido ao projeto do governo da época de que até 2010 todos os professores tivessem uma graduação. E em 2016 iniciou a licenciatura em matemática.

Diogo pontuou que possivelmente eu, Priscila e Suzi vínhamos de uma geração com menos preconceito em relação aos estudos. Segundo o professor, embora ele e Geruza estivessem em regiões diferentes do país, muito se aproximavam os preconceitos. Nesse sentido, Diogo exemplificou:

- *Tem outro fator que é tu estar em uma vila, e é aquele 'vucovuco', aquela agitação... e é diferente de um aluno que mora em uma casa boa, que tem todas as condições para estudar... internet... meus alunos se eu for fazer um levantamento [no bairro em que atua] a metade não tem internet. São todos fatores que alteram no conhecimento e no aprendizado. Não adianta dizer que não.*

Enquanto Diogo deu uma pausa em sua fala, Priscila explicou que precisaria se desconectar da reunião pois teria aula nos próximos minutos. Naquele encontro estávamos conversando mais do que nos anteriores, em cada oportunidade que tinham os professores contavam suas trajetórias e concepções, e não poderíamos nos prolongar por muito tempo devido aos compromissos de cada um. Havíamos iniciado o encontro no horário de costume, às 15h e naquele momento nos aproximávamos das 18h. Assim, buscamos focar nas apresentações de Geruza e Suzi quanto aos trabalhos que gostariam de apresentar, e comentei que aqueles assuntos que estavam surgindo em nossas discussões poderiam ser foco de um momento de conversa futuro caso desejassem.

Geruza iniciou a apresentação de sua proposta como trabalho final. A professora havia proposto um plano de aula visando professores dos anos iniciais. A Figura 57 mostra parte do plano enviado pela professora.

Figura 57 – Parte do trabalho final de Geruza

TEMA: Fração

OBJETIVO GERAL:

Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.

OBJETIVO ESPECIFICO:

Conhecer o conceito de frações a partir da história.

Construir conceito de frações, percebendo que o numerador representa, quantas partes queremos do todo e denominador em quantas partes dividimos um todo qualquer.

Permitir que o cursista resolva problemas com frações, utilizando os conhecimentos já adquiridos e também será capaz de criar situações problema em que a resolução dependa de uma representação fracionária

CONTEÚDO:

- O Surgimento da Fração no Egito.
- Frações: O que são Frações e números mistos?
    - ✓ Significados;
    - Parte/Todo
    - Razão
    - Quociente
    - Número
    - Operador multiplicativo
    - Medida
    - Probabilidade.

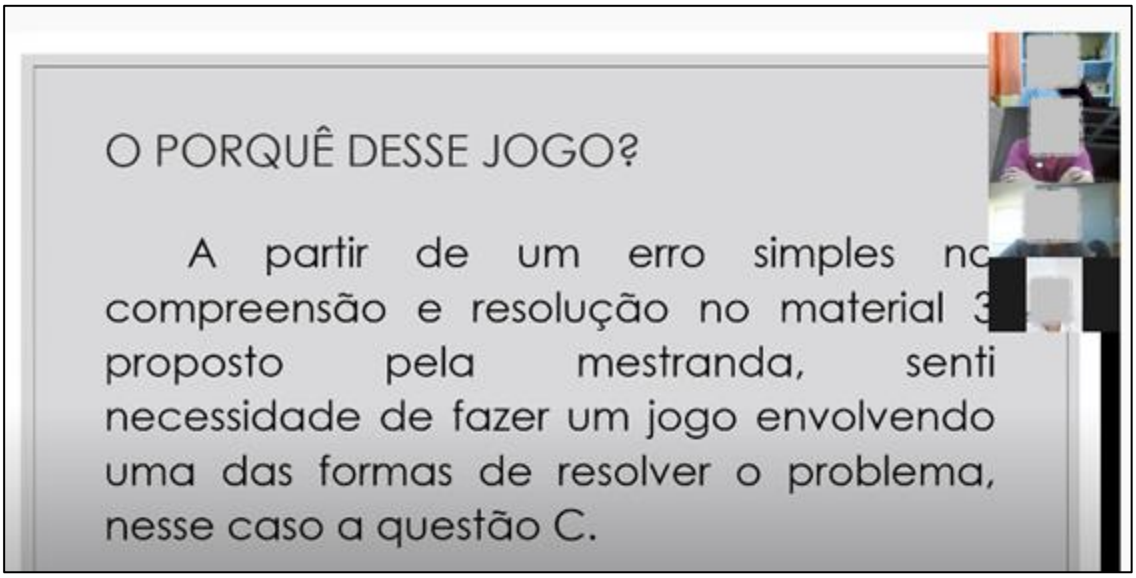
Fonte: acervo da pesquisa.

A justificativa de Geruza foi de que *“muitas vezes o que nos leva a não gostar de alguma coisa é não conhecer ela [...] e quando a gente faz a pedagogia a gente não vê... não tem aquele contexto... a gente não fala sobre a história da matemática... [...] Então eu pensei assim... para eu passar algo para alguém ele tem que conhecer o objeto, como eu vou falar de uma coisa que ele não sabe o que é?! Então eu pensei em porque não contar a história da fração?! Onde ela surgiu? Por que ela surgiu? Como? Qual a importância da gente trabalhar em sala de aula com as crianças?*

A proposta de Geruza era iniciar o estudo por meio da história das frações, que os professores participantes identificassem as frações no dia a dia, construíssem situações problema relacionadas ao dia a dia de cada um e envolvessem nessas situações problema o uso de materiais concretos como material dourado e Tangram. Ao mencionar o Tangram, Geruza retoma a atividade solucionada por Suzi no encontro anterior, na qual buscávamos (dentre outras questões) identificar quantos triângulos pequenos cabiam dentro de um triângulo grande. Geruza justificou o incentivo do uso desses materiais em sua proposta devido a sua percepção de que muitas escolas têm esses materiais parados em caixas guardadas, sem uso pelos professores e alunos.

Após a fala de Geruza, Suzi logo pediu para apresentar sua proposta. A professora explicou que para a proposta havia retomado um conhecimento estudado nos primeiros anos de sua graduação em uma disciplina de *Multimaker*. Naquele momento aprenderam a construir um jogo no programa *PowerPoint.* Assim, como trabalho final Suzi havia escolhido construir um jogo no *PowerPoint* envolvendo a atividade “Comparando quantidades” do Material 03. Suzi justificou a escolha da atividade enquanto conversávamos e apresentou sua justificativa também no material enviado (no jogo do *PowerPoint).* A Figura 58 apresenta a justificativa elaborada pela professora.

Figura 58 – Justificativa elaborada por Suzi sobre o problema escolhido como contexto para a atividade final

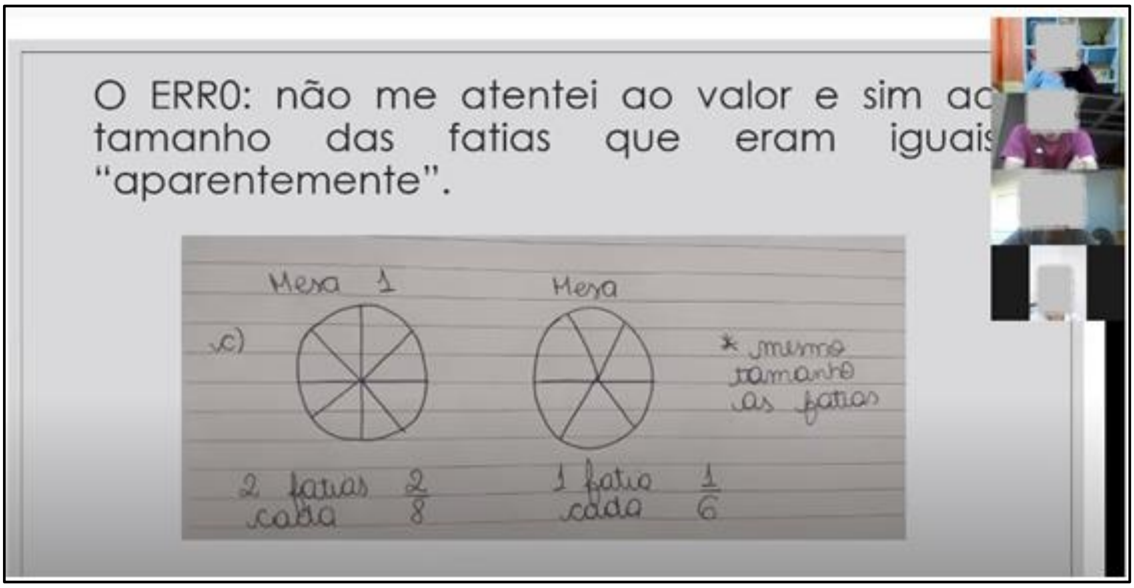


Fonte: acervo da pesquisa.

A atividade escolhida por Suzi já havia sido foco de estudo em encontros anteriores, e em meio às discussões havíamos percebido um erro na solução proposta pela própria, sendo este um dos motivos pelos quais Suzi optou pelo uso da mesma situação como trabalho final. A questão *c* comentada por Suzi trazia o seguinte contexto: *se na mesa 1 (mesa com 4 pessoas) o garçom dividisse a pizza de modo que cada pessoa recebesse* ***duas fatias*** *e na mesa 2 (mesa com 6 pessoas) dividisse a outra pizza de modo que cada pessoa recebesse* ***uma fatia****, em qual das mesas a fatia seria maior? Por quê?.*

Suzi apresentou um comentário sobre o erro, como mostra a Figura 59.

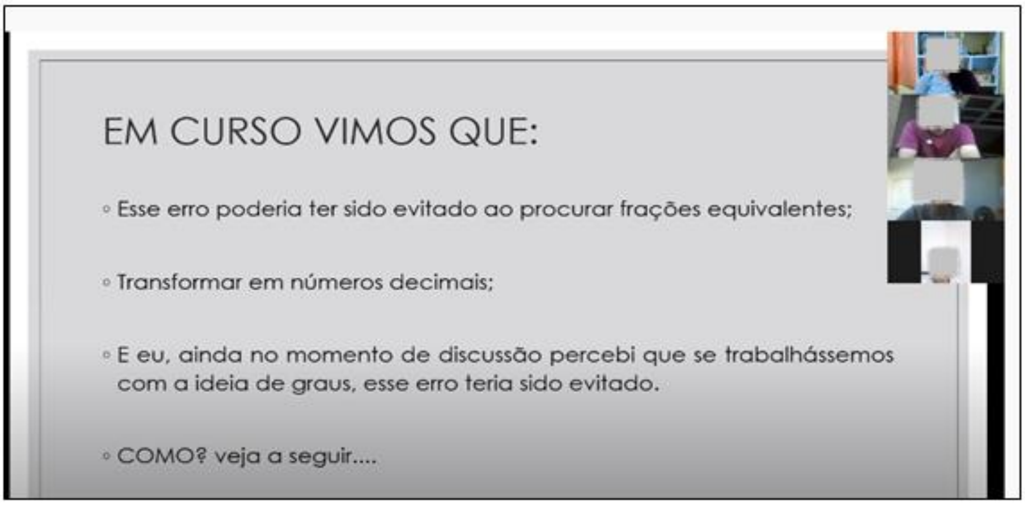
Figura 59 – Momento em que Suzi comenta sobre o erro



Fonte: acervo da pesquisa.

E em seguida apresentou as conclusões que tivemos no encontro em que discutíamos a atividade. A Figura 60 mostra as conclusões apresentadas por Suzi em seu trabalho.

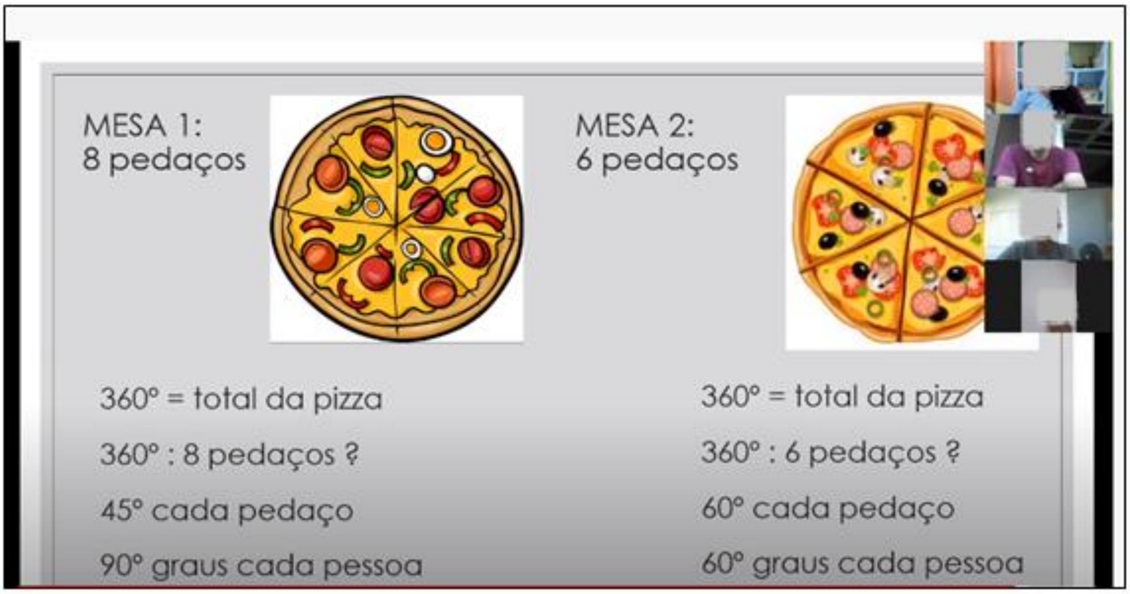
Figura 60 – Conclusões sobre o erro apresentadas por Suzi em seu trabalho final.



Fonte: acervo da pesquisa.

Suzi nos relembrou a discussão realizada por nós no encontro em que estudávamos a atividade e então explicou que a seguir apresentaria uma possibilidade de resolução da questão envolvendo graus (a sugestão dada por ela própria durante a discussão).

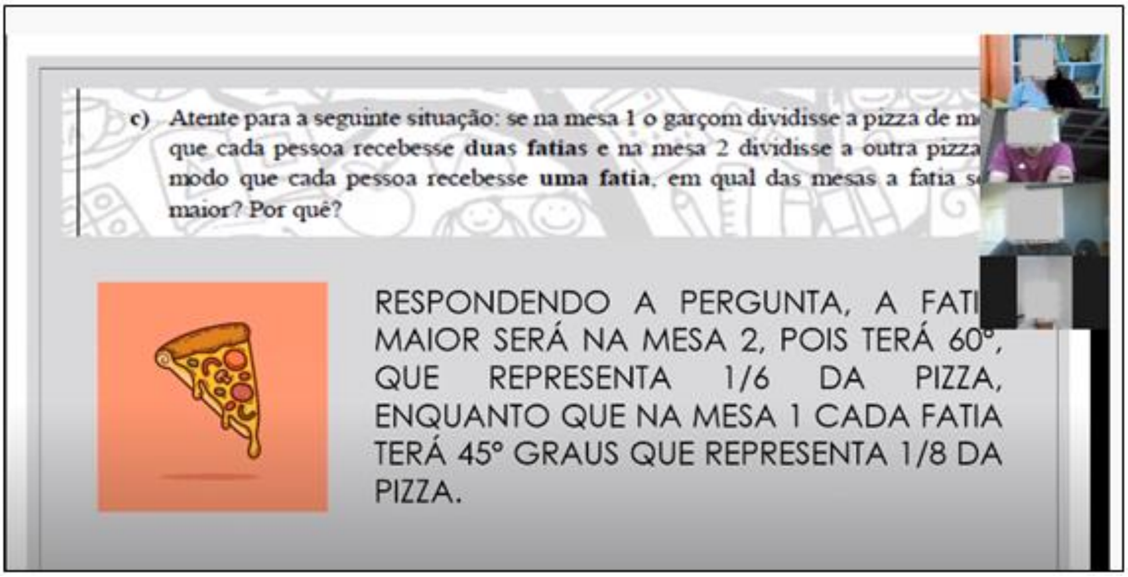
Figura 61 – A solução envolvendo graus apresentada por Suzi



Fonte: acervo da pesquisa.

Enquanto nos explicava seu raciocínio, Suzi pontuou o quão estranho seria falar que *"cada pessoa comeu 90 graus de pizza",* mas que *"estranho ou não, isso responderia a questão".* E em seguida apresentou sua conclusão. A conclusão apresentada por Suzi foi aquela da Figura 62.

Figura 62 – Conclusão para a questão proposta por Suzi

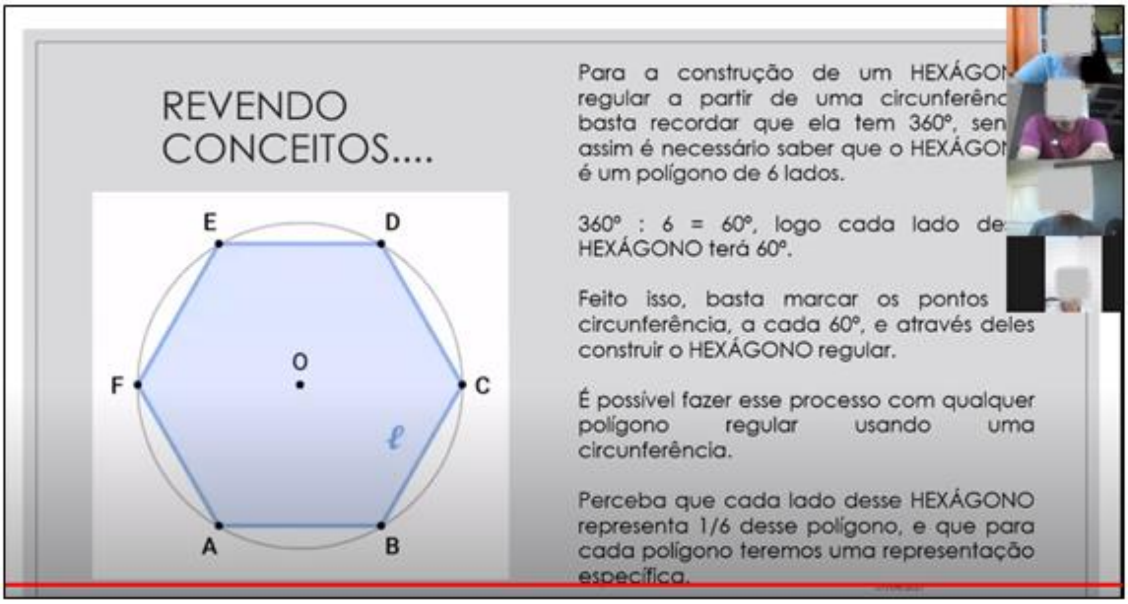


Fonte: acervo da pesquisa.

Após responder o item *c* da questão utilizando graus, Suzi comentou o seguinte:

- *Tá, agora sim vem o jogo. Após a explicação toda daí sim vem o jogo. Se eu fosse fazer com uma turma essa parte toda aí não teria, eu passaria direto para o jogo. Então começaria revendo conceitos* (Figura 63). *Então eu iria subentender que esse seria um jogo de revisão* *onde eu sei que meus alunos sabem que uma circunferência tem 360 graus e que eles sabem quantos lados tem cada um dos polígonos regulares. Então eu vou trabalhar com uma turma que tem esses conceitos já trabalhados... já fixados... já sabem isso. Eles já sabem manusear o transferidor... eles já sabem sobre os 360 graus... eles já sabem sobre os polígonos regulares... eles já sabem isso. E também já sabem as ideias de frações. Então seria um exercício de revisão.*

Figura 63 – Revisão proposta por Suzi antecedendo o jogo



Fonte: acervo da pesquisa.

Após explicar os conceitos que considera que seriam revisados durante o jogo, Suzi apresentou como funcionaria o mesmo. A Figura 64 apresenta quatro momentos do jogo que exemplificam seu funcionamento. Os números de 1 a 4 foram acrescentados como forma de legenda.

Figura 64 – Mosaico de quatro telas do jogo de Suzi

Fonte: acervo da pesquisa.

A tela número 1 era a do início do jogo, naquele momento bastava que o aluno clicasse na imagem do controle de videogame e o jogo seria iniciado. Após o clique sobre a imagem o aluno seria direcionado para a tela 2, na qual era apresentada a primeira pergunta (dentre três). O aluno teria opções de respostas indicadas nas setas azuis na mesma tela das perguntas, assim, bastava que o aluno escolhesse uma das respostas/setas, clicasse na escolhida e seria redirecionado para uma nova tela. As alternativas erradas redirecionavam para a tela 3, nela, caso o aluno clicasse sobre a imagem voltaria para a questão anterior. Já as alternativas corretas redirecionavam para a tela 4, e caso o aluno clicasse sobre a imagem seria redirecionado para a questão seguinte e assim sucessivamente.

Após apresentar as questões do jogo, Suzi apresentou as habilidades que poderiam ser trabalhadas com o jogo dentre de cada um dos anos da etapa final do Ensino Fundamental. Quanto a isto, Suzi pontuou sua percepção de que para o 6º e 7º ano teríamos um número maior de habilidades sendo trabalhadas durante o jogo proposto.

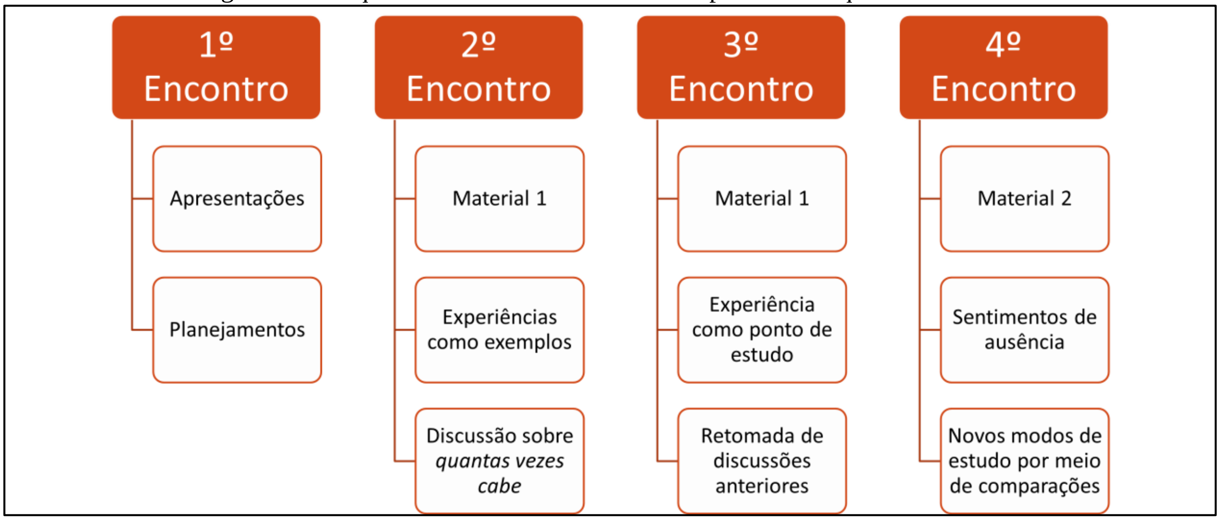
Encerrando o encontro, Suzi nos mostrou brevemente como construíamos o jogo proposto por ela e Diogo comentou sobre seu interesse em ainda enviar a atividade final nos próximos dias. Esclareci que se tivessem quaisquer dúvidas quanto à certificação e aos materiais e discussões realizadas poderiam entrar em contato comigo. E deixei em aberto um possível retorno por minha parte convidando-os para uma entrevista caso fosse necessário para a pesquisa. Felicitei-os pelo ambiente construído e pela postura reflexiva de cada um naqueles momentos de discussões e, assim, nos despedimos.

5. DIÁLOGOS COM A QUESTÃO DE PESQUISA

Buscando responder nossa questão de pesquisa “Como ocorre a construção de um grupo de estudos por professores que ensinam matemática e estudam o ensino de frações?” revisamos a seção 4 (parte da narrativa que nos conta as interações do grupo) sob o olhar de Nóvoa (1992; 2002) quanto aos espaços formativos, Crecci e Fiorentini (2018) quanto à perspectiva da aprendizagem na e da prática, Tardif (2010) e Gauthier (1998) quanto aos saberes docentes e Clandinin e Connelly (2011) quanto à pesquisa narrativa.

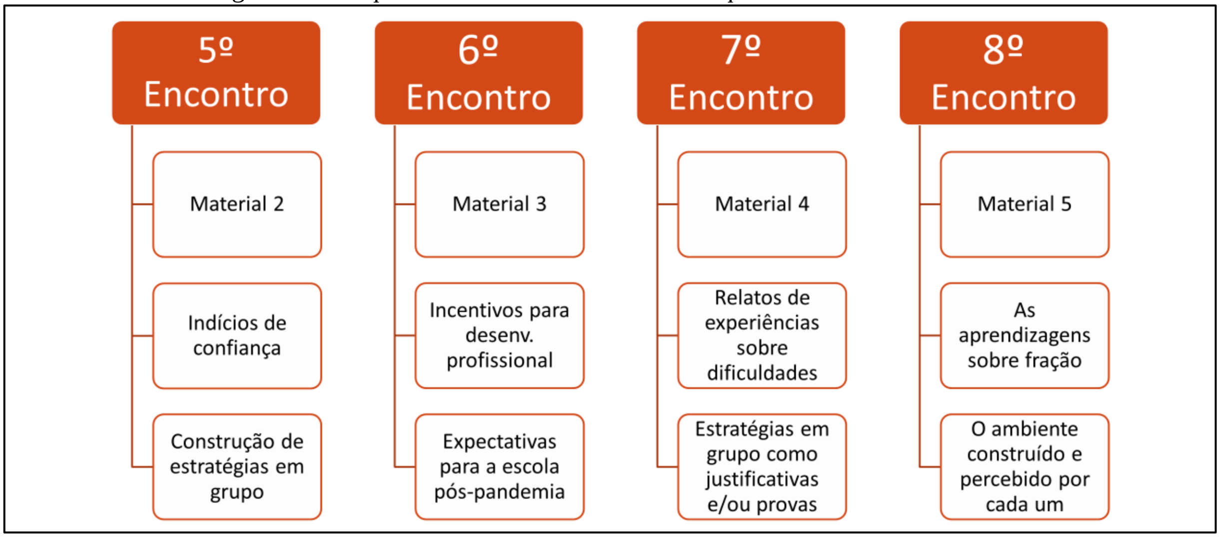
Como auxílio para as considerações a seguir, elaboramos um esquema (Figuras 65 e 66) que apresenta os temas tratados em cada um dos encontros.

Figura 65 – Esquema com os temas tratados do primeiro ao quarto encontro.



Fonte: acervo da pesquisa

Figura 66 – Esquema com os temas tratados do quinto ao último encontro.



Fonte: acervo da pesquisa.

A partir da revisão da seção 4 sob o olhar do referencial adotado, percebemos três dimensões importantes presentes na experiência narrada, a saber: o modo como se desenvolveram as interações e discussões sobre as atividades propostas, os lugares das experiências profissionais no decorrer dos encontros e as percepções e construções do ambiente por parte de cada professor. A seguir, apresentamos argumentos que esclarecem e elucidam nossa percepção quanto às três dimensões relacionadas à nossa questão de pesquisa.

5.1. AS INTERAÇÕES E DISCUSSÕES ACERCA DAS ATIVIDADES

Pontuo aqui momentos e interpretações que me fizeram perceber mudanças no decorrer dos encontros quanto ao modo de estudo das atividades, no que se refere às interações, às discussões e àquilo que os professores participantes consideravam importante apresentar em suas soluções.

Inicialmente notei a influência que minha presença como pesquisadora e participante do grupo exercia sobre as decisões de outros participantes. Percebi preocupações por parte dos professores sobre as posturas que tomariam durante os estudos e talvez tal preocupação limitasse nossas interações. Ao exemplo dessa percepção pontuo o comentário de Lize, ainda no primeiro encontro, sobre seu intuito em realizar o estudo dos materiais do melhor modo para a minha pesquisa de mestrado. Considerei como uma influência negativa ao perceber que, naquele momento, professores como Lize limitariam suas formas de estudo de modo que almejariam satisfazer objetivos da pesquisa ao invés de centrar o estudo em reflexões sobre suas práticas e objetivos profissionais/pessoais.

Ao primeiro encontro também pude notar o desejo dos professores para que todos tivessem acesso aos arquivos enviados pelos colegas com resoluções e comentários, por exemplo, quando Suzi sugeriu que utilizássemos o GoogleDrive como ferramenta de envio, assim como o Moodle, para que aqueles que tivessem dificuldades com este último sistema ainda conseguissem estudar as atividades dos colegas e enviar as suas. Percebi que as discussões sobre as plataformas e tecnologias estavam diretamente ligadas às nossas expectativas quanto a coletividade e colaboração em um espaço virtual.

Com o desenvolver das atividades e interações, percebi que a formalidade que envolvia os encontros iniciais era minimizada na medida em que as interações ocorriam. Busquei incentivar as interações entre participantes desde o primeiro estudo, ainda no segundo encontro, sobre o Material 01. Por exemplo, ao incentivar por meio de perguntas as interações entre Priscila e Suzi sobre a atividade envolvendo polegadas e as dificuldades que percebiam de seus alunos ao desvincularem as representações figurais do algébrico e/ou aritmético. Pude notar que as interações passaram a se desenvolver com mais fluidez, sem tantas mediações e incentivos meus no terceiro encontro. Um dos primeiros momentos em que pude perceber isso foi no terceiro encontro, enquanto Geruza narrava sua experiência com quatro crianças e Priscila interagia com a professora justificando que as perspectivas dos meninos ali narradas condiziam com suas experiências em sala de aula nos anos finais do Ensino Fundamental. Em outras palavras, a formalidade foi minimizada e as interações foram potencializadas conforme o papel de liderança era compartilhado com outros participantes e conforme os professores mobilizavam diferentes saberes em seus diálogos (TARDIF, 2010; GAUTHIER, 1998).

A forma de envio das resoluções e o modo como os professores desenvolviam as soluções demonstrou ser dinâmica também ao terceiro encontro. Até aquele momento percebíamos um estilo nos arquivos enviados pelos professores de modo que, em geral, tínhamos a solução de uma das questões do material destinado para aquela semana, seguida de tópicos relacionados à atividade considerados importantes pelo professor que havia desenvolvido o estudo. Em alguns casos, esses tópicos não estavam no arquivo enviado, mas emergiam no momento de discussão.

Até o terceiro encontro mantínhamos o hábito de estudo em que cada professor escolhia previamente uma atividade do material destinado para a semana seguinte, resolvia a atividade e realizava o envio de sua resolução; ao comentar sobre a atividade escolhida para estudo os professores apresentavam suas resoluções seguidas de comentários sobre a atividade, em determinados momentos os comentários eram registrados no arquivo enviado previamente, em outros momentos eram comentários complementares ao arquivo enviado. Ao terceiro encontro tivemos o relato de Geruza, mudando o hábito que estávamos tendo nos modos de estudo. Até aquele momento vinculávamos a nossas discussões experiências anteriores ao curso. Indo além, Geruza narrou a experiência que teve com quatro crianças (seus vizinhos) sobre a atividade envolvendo giros, ainda do Material 01. Nos encontros seguintes novas abordagens de estudos surgiram, como Suzi sugerindo a utilização de algumas atividades em sua prática para estudo, Diogo, no quinto encontro, abordando, durante o estudo de sua atividade, erros comuns de seus alunos e como Geruza envolvendo dois colegas de graduação e seu sobrinho em seus estudos dos Materiais 04 e 05.

Como parte das interações, houve momentos de comparações entre resoluções desde o primeiro estudo, como o comparativo então realizado por Suzi. Naquela oportunidade a professora comparou sua resolução com a enviada por sua amiga (que estava ausente no encontro). Um dos primeiros momentos em que houve comparações entre soluções foi quando

Priscila e Diogo compararam suas estratégias na atividade envolvendo a equipartição de um objeto no Material 01, ou quando compararam suas soluções na atividade envolvendo muitas pizzas e muitas pessoas no Material 02 e 03. Com o passar dos encontros, principalmente a partir do quarto encontro, as comparações entre as resoluções enviadas ocorreram com maior frequência envolvendo aqueles professores presentes. No quinto encontro comparamos possibilidades construídas por nós naquele momento, relacionadas às atividades de Nilza Bertoni. Na oportunidade comparamos nossas estratégias e a estratégia apresentada pela autora, além de discutirmos sobre elas.

Nos encontros seguintes mantivemos a prática de comparar soluções e estratégias desenvolvendo modos de justificá-las e/ou comprová-las. Por exemplo, quando Geruza e eu comparávamos nossas questões envolvendo covid-19 no Material 04 e Geruza justificou ter optado por uma estratégia diferente de modo que lhe possibilitasse uma interpretação mais precisa dos números; e quando, no sétimo encontro, buscamos construir um foguete de área pré-definida com as peças do Tangram, e então validamos em grupo uma tentativa proposta.

Após três semanas já conhecíamos o grupo definitivo de professores, sabíamos que dificilmente professores que estavam ausentes até aquele momento retornariam, por isso as ausências nos encontros e nos envios de soluções passaram a ser percebidas e comentadas pelos professores. A situação em que Suzi e Priscila comentam e lamentam a ausência de colegas no encontro e nos envios é exemplo de tal percepção. Os comentários das professoras eram indicativos da importância que, naquele momento, ambas já davam para as discussões em grupo e a responsabilidade em fazer parte de tais momentos.

Após a realização de metade de nossos encontros previstos, as apresentações das soluções proporcionavam espaços para dúvidas, desabafos e momentos de resoluções em grupo. Por exemplo, Suzi, no quinto encontro, iniciou uma fala sobre seu estudo (sobre a atividade envolvendo a prática alimentar) pontuando os aspectos em que teve dificuldade e então convidou os demais presentes a ajudá-la a resolver. A professora utilizou as ferramentas disponíveis na plataforma para reformular suas anotações e compartilhar com os colegas. Em grupo, construímos justificativas para conclusões que desenvolvíamos, ao exemplo da atividade envolvendo a prática alimentar. Nela buscávamos estabelecer relações entre dias, semanas, meses e a quantidade de alimentos. Após discussões, concluímos que o melhor seria utilizarmos os dias como unidade de tempo padrão e comparar frações. Mantivemos certa fluidez e naturalidade em buscarmos soluções em grupo e isso ficou evidente nos últimos encontros, exemplos de tais situações foram quando buscamos novas estratégias na atividade de Nilza Bertoni, ou quando, ao sétimo encontro, buscávamos construir um foguete de área pré-definida com as peças de Tangram e quando Diogo, no último encontro, solicitou que o ajudássemos a construir soluções que envolvessem mais representações fracionárias do que decimais.

Justificativas para as escolhas das atividades estiveram presentes desde o início do estudo dos materiais até o último encontro. Por exemplo, no relato de Suzi justificando sua escolha da atividade do Material 01 devido à atividade ser "bem prática"; Geruza, no quinto encontro, justificando sua escolha de atividade do Material 02 devido à sua experiência em escolas multisseriadas; Diogo, também no quinto encontro, justificando sua escolha de atividade devido àquela envolver conceitos de dificuldade para seus alunos. E Suzi justificando a atividade escolhida como situação de atividade final devido a esta ter sido uma de suas dificuldades.

Além das justificativas para as escolhas de atividades, a retomada de situações e de discussões ocorreu desde o primeiro estudo, tendo a questão *quantas vezes cabe* grande influência nas retomadas de discussões do primeiro ao último momento.

Nos dois últimos encontros pude perceber animação e incentivo entre os participantes. Animação em apresentar ideias próprias de cada um, por exemplo, Suzi ao comentar animada sobre seus planos para a atividade final. E incentivo quando Suzi, Diogo e Priscila incentivavam uns aos outros a buscar os espaços formativos que desejavam e a concluir as atividades finais do curso apresentando aos colegas. E, ainda, incentivo quando Suzi parabenizou Priscila por sua solução e estratégia de resolução para a atividade do Material 05 envolvendo mistura de combustíveis.

Como mencionado, percebi dinamismo nos modos de estudo das atividades. Compreendo que tal dinamismo só foi possível graças à colaboração por parte dos participantes no espaço que foi se construindo durante os encontros, de modo que os envios das soluções deixaram de ser foco principal, passando a ser um dos possíveis pontos de partida para discussões e reflexões. A responsabilidade por meio do compromisso em contribuir para as discussões foi percebida nos últimos encontros, quando houve o incentivo entre participantes e a preocupação de, mesmo sem ter concluído a atividade proposta, apresentar suas ideias para os colegas, como Priscila e Diogo fizeram no último encontro. Por esses pontos mencionados percebo a relação estreita que os modos como desenvolvemos o estudo têm com a questão desta pesquisa.

Quanto às relações entre o tema estudado e o ambiente construído, percebo por meio das falas dos professores o quão importante foram as trocas de experiências sobre frações para suas práticas. Alguns trechos das falas e comentários enviados pelos professores (seção 4.9) no último encontro ressaltam a importância do ambiente construído por nós para com as novas aprendizagens sobre frações. A fala de Geruza sobre o ambiente de estudo enfatiza tal relação entre o ambiente e as aprendizagens:

- [...] *conhecer outros professores sua experiência em sala de aula me deu mais ânimo para com meu trabalho e aprendizado também. [...].Tem muita coisa que eu ouvi aqui, de vocês, que assim... eu já tenho outra visão, até para as minhas aulas. Da maneira como eu vou usar a fração, não é mais aquela maneira antiga que é sempre a mesma, a mesma. Então já tenho outra maneira, outro modo de usar as frações no meu planejamento.*

Percebemos a fala de Geruza como um relato sobre as aprendizagens que o ambiente dinâmico e coletivo proporcionou para a professora. Quanto as interações destacamos o comentário enviado por Suzi sobre a importância delas para as aprendizagens desenvolvidas no ambiente:

- [...] *para a minha surpresa, positiva, ao decorrer [dos encontros] pude perceber que os materiais eram desenvolvidos e discutidos de forma coletiva, trazendo assim ideias não apenas de um professor e sim de diversos ao mesmo tempo*

Em geral, compreendemos que o dinamismo nos modos de estudos, as interações, trocas de experiências e demais aspectos da coletividade presente no ambiente potencializaram aprendizagens sobre frações entre nós professores, caracterizando a *partilha de saberes* e autonomia por meio de interação entre pares que Nóvoa (1992) sugere em espaços de formação mútua.

5.2. OS LUGARES DAS EXPERIÊNCIAS PROFISSIONAIS EM MEIO ÀS DISCUSSÕES

Assim como as interações e discussões acerca das atividades, as experiências narradas pelos professores participantes e a experiência daquele momento de estudo foram percebidas em diferentes lugares de nossas falas no decorrer dos encontros. Inicialmente as experiências profissionais foram abordadas nas interações entre nós relacionadas à formação inicial de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Jonas e Suzi utilizaram o assunto sobre formação inicial como ponto inicial para a primeira interação envolvendo relatos de experiências. Naquele momento Suzi contava suas perspectivas quanto ao ensino de matemática nos anos iniciais, como professora dessa etapa de ensino e como colega de estudos de professores atuantes nessa etapa. Tal interação ocorreu ainda no segundo encontro; assim, as experiências docentes acompanharam nossas discussões desde o primeiro diálogo sobre as questões dos materiais.

As interações envolvendo experiências profissionais e saberes relacionados à escola como local (TARDIF, 2010) tiveram início desde o primeiro encontro e foram retomadas diversas vezes no decorrer do estudo do Material 01. Um desses momentos foi quando Priscila, Diogo e Suzi enfatizavam as dificuldades de seus alunos em desvincularem as representações aritméticas e algébricas das geométricas, mencionadas durante o relato de Suzi anteriormente e pontuadas em diversas atividades do Material 01 como a atividade envolvendo polegadas.

Após esse primeiro contato envolvendo e comentando explicitamente suas experiências, foi comum perceber os relatos de experiências vinculados diretamente aos comentários anexos às soluções das atividades. Por exemplo, os comentários propostos por Priscila ao final da sua solução da atividade envolvendo polegadas no Material 01. Naquele momento Priscila nos apresentou dois comentários, um sugerindo o uso de aspectos históricos envolvendo o contexto da atividade e outro sugerindo o estudo de frações equivalentes naquela atividade. Priscila justificou ambos os comentários à sua experiência profissional, pois notava a dificuldade de seus alunos ao tratarem dos assuntos daqueles comentários. O mesmo foi feito por Diogo em encontros seguintes, quando comentou as dificuldades de seus alunos relacionadas às atividades estudadas no Material 02 envolvendo razão, por exemplo.

Esses foram dois dos momentos em que os relatos de experiências foram vinculados às dificuldades dos alunos no Ensino Fundamental, e tal vínculo permaneceu durante todos os encontros. Outros exemplos dessas relações foram, por exemplo, no quarto e no sétimo encontros, quando os professores narraram como estariam atuando em meio à pandemia e as dificuldades que eles e seus alunos encontravam/apresentavam naquele momento atípico. O relato de experiências narrando dificuldades da prática docente de cada participante se tornou algo frequente em nossas interações.

A partir do terceiro encontro, passei a perceber os relatos de experiências vinculados a reflexões. Um primeiro momento em que pude notar essas reflexões foi quando Diogo nos motivou a pensar nas possíveis causas que influenciavam na "desmotivação" dos alunos dos anos finais quanto à matemática. Segundo o professor, os alunos se mantinham motivados até o quarto ou quinto ano do Ensino Fundamental. O relato proposto pelo professor repercutiu em reflexões entre nós. Após esse encontro, notei que ocorreram outros momentos como esse, envolvendo reflexões sobre as experiências aconteceram. Por exemplo, ao quinto encontro, após um relato de experiência de Diogo e Priscila, nos questionamos sobre as divisões de carga horária entre as áreas de conhecimentos e quais os responsáveis por essas decisões. Entendemos os momentos como esse, em que iniciamos reflexões sobre as experiências docentes, como indícios de que percebíamos a experiência também num *"quadro conceptual de produção de* *saberes*", ou seja, de que percebíamos a experiência como ponto de partida e reflexões para novos saberes. (NÓVOA, 1992, p. 26).

Como mencionado anteriormente, Geruza no terceiro encontro narrou uma experiência com crianças para estudo do Material 01. Esse foi um dos momentos em que percebi dinamismos no modo como explorávamos as experiências. Até aquele momento nos referíamos às experiências como justificativas para comentários, observações e interações. Mas, ainda não havíamos mobilizado uma experiência como ponto de partida de estudo. Após o estudo proposto por Geruza, as experiências deixaram de ser apenas passadas e passaram a serem percebidas como possibilidades futuras. Por exemplo, Suzi planejou o uso de atividades dos materiais em sua prática docente como continuidade nos estudos que estávamos tendo. A percepção de que experiências narradas por colegas pudessem ser estratégias de resoluções de problemas do cotidiano docente também passou a ser percebida entre nós, por exemplo, ao oitavo encontro, Suzi percebeu que a solução e relato de experiência de Priscila (sobre a atividade envolvendo a mistura de combustíveis) poderia contribuir em situações de sua própria prática profissional.

Em geral, no decorrer dos encontros, percebi que as experiências assumiram diferentes lugares em nossas falas. Inicialmente os relatos de experiências foram desvinculados dos estudos dos materiais narrando dificuldades e situações atípicas. Com o desenvolver das discussões percebi um vínculo direto dos relatos de experiências às e aos comentários sobre as atividades. Inicialmente foram enfatizadas experiências anteriores ao curso. As discussões envolvendo experiências atuais ou recentes nos proporcionaram momentos em que conversamos sobre possibilidades de experiências futuras como meio de estudo. Assim, compreendo que as mudanças em nossas discussões possibilitaram que as experiências docentes ocupassem diferentes lugares em nossas falas. Ou seja, a percepção das experiências passadas e atuais como lócus de investigação e reflexão proporcionou que os professores planejassem futuras experiências investigativas em suas práticas.

Ainda nesse sentido notei ao último encontro o vínculo de nossas interações e trocas de experiências em nossas ações futuras, relacionando experiências anteriores com situações que ainda iriam acontecer. As experiências relatadas mobilizaram saberes dos professores envolvendo assuntos como as dificuldades específicas de conteúdo por parte dos alunos e problemas atuais (da época dos encontros) encontrados por professores quanto ao ensino remoto. Em diferentes momentos os relatos tiveram como intuito justificar, instigar reflexões, como busca de estratégias e partilha de angústias quanto à aprendizagem dos alunos no formato virtual de ensino. Compreendemos que tais momentos tenham potencializado a *apropriação* por parte dos professores de seus próprios saberes, favorecendo uma reconstrução dos *"sentidos da sua acção profissional"* (NÓVOA, 2002, p. 59-60).

Quanto à experiência atual daqueles momentos, pude perceber durante os comentários das atividades finais (propostas pelos professores) que as discussões e trocas de experiências possibilitaram novas reflexões a cada um de nós. Percebi os entrelaçamentos entre as experiências passadas, a nossa experiência corrente naquele momento e nossas expectativas quanto a planejamentos que colocaríamos em prática no futuro. Um momento em que pude perceber que nossa experiência corrente estaria relacionada aos nossos planejamentos para o futuro foi durante o relato de Priscila sobre as reflexões que gostaria de desenvolver em sua prática. Naquele momento Priscila almejava investigar quais os contextos em que as frações apareciam nos livros didáticos utilizados na escola em que atuava, as orientações e representações.

Compreendo que as mudanças em nossas discussões proporcionaram que as experiências fossem apresentadas em nossas falas ocupando diferentes lugares. As mudanças ocorreram conforme íamos percebendo aspectos próprios do grupo e espaço que construíamos como a coletividade e responsabilidade em participar de interações. Assim, percebo a relação entre os aspectos de coletividade e responsabilidade na participação e aprendizagem mútua como essenciais para as mudanças naquele ambiente. Penso que, conforme os professores percebiam a importância de nossas discussões e trocas de experiências, as reflexões sobre elas iam tornando-se fluidas, assim como mencionado nos parágrafos anteriores. A colaboração pode ser notada aos encontros finais, quando percebemos a importância que os professores deram aos relatos de outros, por exemplo, quando Suzi percebeu o relato de Priscila como possível solução para sua prática e comentários de Diogo sobre a positividade em participar de grupo de discussões.

Em geral, compreendo que as mudanças em nossas discussões e consecutivamente a mobilização de experiências tenham relações diretas com o espaço construído por nós e nossas percepções quanto ao mesmo.

5.3. AS PERCEPÇÕES DO AMBIENTE CONSTRUÍDO

As mudanças nos modos de estudos e em nossas discussões fizeram parte importante da constituição do espaço que construímos, constituindo-o como um espaço formativo dinâmico. Ao final, fazendo um panorama do caminho percorrido, podemos perceber aspectos relacionados a nossas expectativas quanto à pesquisa. Apresento aqui uma percepção sobre o desenvolvimento do espaço e relações com a questão de pesquisa e espaço almejado.

Compreendo, como já mencionado no decorrer da narrativa, a relação que o formato virtual de encontros exerceu sobre nossas participações e consecutivamente sobre o espaço que construímos. Percebemos em diferentes momentos que as ideias de colaboração e coletividade no ambiente virtual poderiam envolver elementos que não necessariamente se fariam presentes em ambientes físicos. Por exemplo, a liberdade, o receio e inevitavelmente as interações são impactadas pelo vínculo e familiaridade com tecnologias e ambientes virtuais. Busquei minimizar aqueles impactos que compreendia como negativos, por exemplo, as dificuldades em nos expressarmos além da linguagem oral. Percebia que, devido à pouca familiaridade com as ferramentas do software, tínhamos certa dificuldade em representarmos nossas ideias nas telas compartilhadas. A fim de minimizar tais situações propus que nos aproximássemos das ferramentas que o formato nos possibilitava.

Trabalhamos as adaptações que o ambiente digital nos propunha e vimos as interações e proximidades entre nós participantes serem potencializadas no decorrer dos encontros, principalmente após o terceiro encontro, como mencionado anteriormente. Naquele encontro acredito que tenhamos participado de momentos importantes e decisivos para o processo de constituição do espaço em que estávamos. Dentre os momentos que posso destacar, pontuo a forma dinâmica de estudo proposta por Geruza (ao apresentar seu relato de estudo com crianças de sua vizinhança), a utilização das ferramentas da plataforma possibilitando novos modos de interações e o início de reflexões relacionadas às experiências docentes instigadas por Diogo.

Percebo, ao realizar um panorama dos encontros seguintes, que o dinamismo em nosso ambiente foi potencializado a partir deste encontro (o terceiro). Por exemplo, a partir daquele momento os contatos e discussões se irradiaram para ambientes externos aos encontros, como o uso do *Whatsapp* e e-mail, e as ausências passaram a ser sentidas e comentadas, como feito por Suzi e Priscila no quarto encontro. Compreendo que o espaço dinâmico e interativo potencializado no terceiro encontro favoreceu a liberdade dos participantes e a percepção quanto à importância de nossas interações no ambiente.

A confiança e sentimento de segurança em relatar aspectos particulares da vida de cada um pôde ser percebida a partir do quinto encontro, inicialmente com o relato de Geruza sobre suas experiências e motivos que a levaram a atuar em escolas multisseriadas. Outro momento em que podemos perceber tal autonomia e confiança dos participantes foi no sétimo encontro, quando Suzi compartilhou conosco dificuldades que a pandemia lhe causava quanto ao ensino, além de conflitos com colegas de profissão. Momentos de relatos detalhados sobre a história de cada um foram presentes majoritariamente no último encontro, naquele encontro todos os professores participaram da conversa pontuando dificuldades em suas trajetórias.

Aspectos relacionados à colaboração foram potencializados a partir do sétimo encontro, quando incentivamos uns aos outros a concluirmos a atividade final (proposta elaborada por cada professor), apresentar para o grupo e a seguirem suas metas pessoais de cursos de pós-graduação. No encontro final os professores foram convidados a comentarem suas expectativas e percepções sobre o ambiente, pontuando explicitamente seus sentimentos quanto à importância das interações para aquele espaço.

Em geral, os professores relataram que esperavam aulas expositivas durante o ambiente e, ao final dos encontros, uma grande quantidade de atividades avaliativas. Contudo, perceberam a constituição de um ambiente coletivo e colaborativo. Destaco algumas palavras apresentadas pelos professores durantes os comentários acerca do ambiente construído que nos fizeram perceber a coletividade e colaboração que os professores compreendiam, são elas: *refletir, trocas de experiências, questionar o porquê, forma coletiva, compartilhar experiências e conhecimentos, roda de conversa.* Essas são algumas das palavras que nos fazem perceber que aquele ambiente que os professores detalhavam convergia para o ambiente que almejávamos como Grupo de Estudos, enfatizando aspectos como a coletividade, a colaboração e a responsabilidade com o grupo e com sua formação.

Compreendo que a mobilização das experiências no espaço de estudo potencializou um processo interativo e dinâmico de formação. Consolidando-o como um Grupo de Estudos e ainda como um espaço de formação mútua envolvendo aprendizagens docentes e estimulando a reflexão sobre a prática profissional. Dentre os temas alvos de reflexão durante nossas discussões, pontuo a desmotivação quanto à matemática por parte dos estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental e Médio, a aprendizagem em meio à pandemia de Covid-19, o papel do professor segundo a sociedade durante o ensino emergencial e os processos que envolvem a construção de matrizes curriculares estaduais e a distribuição de livros didáticos.

Por meio das falas e comentários enviados pelos professores no encontro final, percebemos o ambiente construído por nós como um espaço acolhedor e agradável para todos os participantes. A fala de Geruza e Diogo enfatizam bem tal sentimento, ambos professores enfatizavam os motivos pelos quais gostaram do ambiente e seus interesses em participar de outras propostas como aquela. A fala dos professores, respectivamente, foi:

- *[...] o que diferencia esse curso dos outros é que cada problema solucionado ou não é questionado o porquê do resultado encontrado. Espero que venham mais cursos assim com outros temas claro e eu possa participar.*

- Gostaria de participar de outro grupo de discussão. Posso deixar minha inscrição para outro grupo? Quero mais grupos para discutir.

Percebemos que o ambiente potencializou a mobilização de saberes e novas aprendizagens relacionadas ao tema de estudo e o espaço construído por nós foi agradável e acolhedor para nós, participantes.

5.4. AS APRENDIZAGENS SOBRE FRAÇÕES PROPORCIONADAS PELO AMBIENTE

Pontuo aqui aspectos presentes nos comentários finais enviados pelos professores e em suas falas no último encontro que sinalizam parte das aprendizagens sobre frações construídas por nós durante o estudo e que estão relacionadas às seções anteriores.

As discussões e interações realizadas por nós sobre o ensino de frações foram foco em falas como a de Priscila e Geruza. Priscila pontuou parte das reflexões que nossas discussões lhe proporcionaram:

- Me chamou muito a atenção aqui no curso de ir evidenciando os diferentes significados da fração. Em muitos momentos da minha prática eu não parei para pensar nisso e nem consegui trabalhar os diferentes significados, só alguns, os mais comuns... representações das operações, parte-todo... e é isso. E outros significados ficam de lado e muitas vezes os alunos apresentam dificuldades e uma coisa está relacionada a outra.

Já Geruza enalteceu nossas discussões enfatizando que estas seriam um diferencial para o ambiente que construímos. Segundo ela, o que diferenciava o ambiente de outros cursos dos quais já havia participado era de que, em nosso espaço *"cada problema solucionado, ou não, é questionado o porquê do resultado encontrado".* Geruza considerou nossas discussões sobre cada questão como um dos pontos centrais dos encontros, segundo ela o debate era: *bem diferente e legal. Porque aí eu faço de um jeito, aí a Stephanie apresentava uma outra solução, vinha o Diogo e dava uma outra ideia... e no fim a gente chegava em um determinado ponto juntos.*

Os comentários de Priscila e Suzi são exemplos que me proporcionaram a percepção de aprendizagens sobre o ensino de frações relacionadas às nossas discussões. Desde a compreensão de diferentes significados, até a compreensão de inúmeras estratégias e interpretações para cada situação problema.

As aprendizagens mobilizadas e construídas no ambiente também foram evidenciadas nos comentários sobre os materiais e suas atividades. Os professores, em geral, em seus comentários finais enviados previamente, elogiaram os materiais e o conjunto de situações-problema que apresentavam sobre cada significado. Sobre isso, Suzi escreveu em seu comentário: *o que mais me surpreendeu foi a riqueza dos materiais e como cada um deles tem perspectivas diferentes e são contextualizados, desse modo fazem sentido ao serem trabalhados.* Já Diogo, respondendo à pergunta *"o que gostei?"*, mencionou as "*dificuldades das questões e o leque de discursão que abria cada questão".* O professor comentou conosco, enquanto sugeria alterações, que não conhecia a existência de significados de frações e que o estudo desenvolvido durante os encontros lhe despertou curiosidade sobre o assunto.

Compreendemos que conforme percebíamos e mobilizávamos a prática e experiências como um local de "produção de saberes" (NOVOA, 1992, p. 26), a perspectiva da aprendizagem na prática era potencializada em nossas discussões.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa foi inspirada pela questão "Como ocorre a construção de um grupo de estudos por professores que ensinam matemática e estudam o ensino de frações?". Para tanto propusemos o curso intitulado "Estudo e ensino de frações na escola" vinculado à UFRGS, com carga horária de 40 horas e destinado a professores que ensinavam ou já haviam ensinado matemática no Ensino Fundamental.

A proposta foi desenvolvida inicialmente no período de julho a setembro de 2020, tendo o interesse e contato de nove professores, dos quais cinco participaram de algum momento de estudo. A experiência inicial desenvolvida em 2020 nos possibilitou referências de reflexões e mudanças na proposta para que fosse novamente desenvolvida nos meses de fevereiro a abril de 2021. Neste segundo momento realizamos pequenas alterações nos materiais disponibilizados aos participantes, elaboramos novas estratégias de estudo para o grupo, nos apropriamos de novos referenciais para a pesquisa e reforçamos a divulgação da proposta almejando o alcance de um número maior de professores.

Após a segunda proposta de curso, realizada em 2021, iniciamos a construção da narrativa da pesquisa e, então, identificamos três dimensões importantes para a questão de pesquisa, foram elas: as interações e discussões envolvendo as atividades de estudo; as discussões envolvendo as experiências profissionais; e as percepções dos professores quanto ao ambiente construído por nós.

A Figura 67 apresenta um esquema com a sistematização de indícios que nos auxiliaram a desenvolver as considerações que faremos a seguir.

Figura 67 – Esquema com indícios da constituição do grupo de estudos.

Fonte: acervo da pesquisa.

As interações e discussões sobre as atividades de estudo foram dinâmicas, com variações nas maneiras de estudo, fomos de apresentações de resoluções à realização das práticas mencionadas em cada atividade. Com as mudanças no modo de estudo passamos a desenvolver reflexões sobre a experiência e as resoluções em grupo, buscando a validação de estratégias. O dinamismo das interações e discussões sobre as atividades potencializou que aspectos de coletividade fossem desenvolvidos. Por sua vez, a coletividade proporcionou que o estudo das atividades favorecesse momentos de troca de experiências e reflexões em grupo, possibilitando que nos aproximássemos de um grupo de estudo.

As experiências profissionais foram percebidas em diferentes momentos de nossas discussões, desde relatos de experiências desvinculados do estudo dos materiais a relatos diretamente relacionados e retomados em diversas ocasiões. Conforme aspectos específicos de um grupo de estudo (como a ideia de colaboração e coletividade) foram sendo construídos entre nós, as discussões passaram a ter caráter reflexivo envolvendo a prática. As experiências docentes participaram de nossas discussões, como relatos ou como reflexões, possibilitando aprendizagens *na* e *da* prática (CRECCI; FIORENTINI; 2018).

O ambiente construído por nós foi dinâmico assim como nossas interações, discussões e estudos. Compreendemos que ocorreu a constituição de um grupo de estudos devido à presença e à percepção dos próprios participantes quanto a aspectos como a coletividade, a colaboração e a responsabilidade de cada um com as discussões em grupo e as aprendizagens ali envolvidas. Contudo, percebemos que tal constituição ocorreu de forma gradativa e determinados momentos foram marcantes ao meu olhar para essa constituição, pois neles percebi: o sentimento de ausência de colegas, a confiança em narrar diferentes experiências, solicitar ajuda e reflexões em grupos, o incentivo e reconhecimento entre professores, e a percepção de que as experiências narradas pelos colegas nos proporcionavam reflexões e aprendizagens mútuas importantes para o espaço que construíamos.

Pude perceber que nossas discussões em grupo incentivaram que os professores, refletissem sobre suas práticas no ensino de frações; percebessem a existência de diferentes significados de frações; notassem ausências de situações envolvendo significados em suas práticas; dentre outras reflexões. Tais reflexões, impulsionadas pelas discussões, proporcionaram aprendizagens sobre o ensino de frações nos aproximando às ideias de aprendizagens *na* e *da* prática (CRECCI & FIORENTINI, 2018).

Além de nossas discussões, os materiais e atividades propostas e o ambiente construídos por nós favoreceram a aprendizagem no espaço. O conhecimento e compreensão sobre a existência de diferentes significados de frações, as possíveis interpretações que as situações-problema podem apresentar e as diferentes estratégias de resolução e ensino foram parte dessas aprendizagens.

Percebo que o envolvimento das experiências no espaço de estudo potencializou um processo interativo e dinâmico de formação como Nóvoa (1992; 2002) sugere. E que aspectos próprios de um grupo de estudos como a colaboração e coletividade favoreceram aprendizagens *na* e *da* prática (CRECCI & FIORENTINI, 2018) envolvendo a reflexão sobre saberes docentes, suas revalidações e considerações feitas por nós.

Aventuro-me a considerar que as experiências profissionais, as quais sustentaram inúmeros saberes docentes, foram pilar principal na constituição do grupo de estudos. O dinamismo na mobilização de experiências profissionais (que passou a envolver a experiência como ambiente de investigação) instigou novos estudos e potencializou o estudo em grupo. Percebo o potencial que as formações contínuas envolvendo a experiência profissional carregam e o quão significativas podem ser em espaços coletivos que busquem *fugir do figurino*.

Após o desenvolvimento da pesquisa retomo minhas considerações iniciais quanto à minha aprendizagem durante o processo. Inicialmente, percebia positividade em desenvolver uma pesquisa sobre formação de professores, pois compreendia que minhas considerações e perspectivas quanto à prática docente seriam reformuladas. Após a conclusão da pesquisa, ratifico minhas expectativas iniciais, percebo que desde a escolha de referencial até o encerramento dos encontros me proporcionaram momentos de reflexão, reformulações e construções de novos olhares sobre a prática e sobre espaços formativos. Pontuo o impacto positivo que o estudo e a pesquisa sobre um espaço formativo que fugia do *figurino-único* me causou. Acredito que o espaço desenvolvido nesta pesquisa tenha gerado tal sentimento de renovação/comoção e interesse pelo estudo de espaços formativos dinâmicos devido a este não ser uma expectativa inicial. Assim, fui surpreendida positivamente pelo desenvolvimento da pesquisa e participação de um espaço tão potencial como aquele construído por nós.

Concluo este texto enaltecendo as diversas situações que compuseram a experiência, os dilemas e tomadas de decisões que nos levaram a novas reflexões e ao referencial adotado que, pessoalmente, me proporcionaram um novo olhar para a formação de professores. Percebo que embora tenhamos construído a narrativa desta pesquisa nos aproximando da questão norteadora, tantas outras ficam em aberto. Espero que esta pesquisa incentive outras, que a perspectiva de referencial adotada seja percebida como uma dentre as inúmeras possíveis, que as discussões aqui mencionadas sobre o ensino de frações estimulem outras que deem espaço para professores e suas experiências, que a percepção de que podemos propor e participar de espaços formativos de aprendizagem mútua seja potencializada e que a pouca experiência docente não seja vista como empecilho para propormos ou participarmos de espaços coletivos de formação. Proponho que nos afastemos das ideias de formações docentes pré-definidas, que deixemos de seguir padrões sem antes refletirmos e reformularmos para nossa realidade e que nos aproximemos dos espaços diversos da coletividade e colaboração.

REFERÊNCIAS

BERTONI, N. E. *Educação e linguagem matemática IV* - frações e números fracionários. Brasília: Universidade Federal de Brasília, 2009.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries). Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Brasilia: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf . Acesso em: 19 de dezembro de 2020.

CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CLANDININ, D. J; CONNELLY, F. M. *Pesquisa narrativa*: experiência e história em pesquisa qualitativa. Tradução: Grupo de Pesquisa Narrativa e Educação de Professores ILEEI/UFU. Uberlândia: EDUFU, 2011.

CRECCI, V. M. *Desenvolvimento profissional de educadores matemáticos participantes de uma comunidade fronteiriça entre escola e universidade***.** Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2016. Disponível em http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/305047. Acesso em 04 out 2020.

CRECCI, V. M; FIORENTINI, D. Desenvolvimento Profissional Em Comunidades De Aprendizagem Docente. *Educação em Revista [online]*. 2018, v. 34 [Acessado 5 Outubro 2021] Disponível em: <https://doi.org/10.1590/0102-4698172761>.

CRISTOVÃO, E. M. *Estudo da aprendizagem profissional de uma comunidade de professores de matemática em um contexto de práticas de letramento docente.* Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015. Disponível em http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/254033. Acesso em 04 out 2020.

FIORENTINI, D. Mapeamento e estado da pesquisa sobre o professor que ensina matemática como campo de estudo. *In*: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (SIPEM), VII, Foz do Iguaçu, 2018. *Anais* [...]. Brasília: SBEM, 2018. Disponível em: sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII_SIPEM/paper/view/666/272. Acesso em: 27 set. 2020.

FIORENTINI, D; CRECCI, V. Metassíntese de pesquisas sobre conhecimentos/saberes na formação continuada de professores que ensinam matemática. *Zetetiké,* Campinas, v. 25, n. 1, p. 164-185, 2017.

FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M; FERREIRA, A. C.; LOPES, C. E.; FREITAS, M. T. M.; MISKULIN, R. G. S. Formação de professores que ensinam matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. *Educação em Revista*, Belo Horizonte, n. 36, p. 137-160, 2002. Dossiê: A pesquisa em Educação Matemática no Brasil.

GAUTHIER, C. *et al*. *Por uma Teoria da Pedagogia*: pesquisas contemporâneas sobre o saber docente. Ijuí: UNIJUÍ, 1998.

KENSKI, V. M *Tecnologias e ensino presencial e a distância*. Campinas: Papirus, 2003

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. *In*: LESH, R. (ed.) *Number and measurement*: papers from a research workshop. Columbus, Ohio: Eric/Smeac, 1976. p. 101-144.

KIEREN, T. E. Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. *In*: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Eds.). *Number concepts and operations in the middle grades.* Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1988. p. 162-180.

KIEREN, T. E. The rational number construct – its elements and mechanisms. *In*: KIEREN, T. (Ed.) *Recent Research on Number Learning.* Columbus: Eric/Smeac, 1980. p. 125-150.

MAGINA, S; CAMPOS, T. A Fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental. *Bolema*, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, 2008, p. 23 a 40

MANDAJI, M. S. *O processo de colaboração dos processos de coautoria em ambientes virtuais de aprendizagem*. 2011. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. *A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar.* Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, M. C. C. A teoria dos subconstrutos e o número racional como operador: das estruturas algébricas às cognitivas. *Bolema***,** Rio Claro, Ano 21, n. 31, p. 103-127, 2008.

NÓVOA, A. *Formação de professores e trabalho pedagógico*. Lisboa: Educa, 2002.

NÓVOA, A. *Os professores e a sua formação*. Lisboa: Dom Quixote, 1992

NUNES, T.; BRYANT, P.; PRETZLIK, U.; HURRY, J. *The effect of situations on children's understanding of fractions.* Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics. Oxford: 2003.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. As Diferentes "Personalidades" do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas. *Bolema*, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 79-102, 2008.

ROCKWELL, E. *La experiencia etnográfica.* Buenos Aires: Paidós, 2009.

RODRIGUES, M. U.; SILVA, L. D.; MISKULIN, R. G. S. Conceito de Comunidade de Prática: um olhar para as pesquisas na área da Educação e Ensino no Brasil. *Revista de Educação Matemática*, v. 14, n. 16, p. 16-33, 30 jun. 2017.

ROMANATTO, M. C. *Número Racional*: relações necessárias à sua compreensão. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1997.

Disponivel em http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/253377. Acesso em 04 out 2021.

ROMANATTO, M. C. Número Racional: uma teia de relações. *Zetetiké*, Campinas, v. 7, n. 12, p. 37-49, 1999.

SOARES, M. A. S. *Os números racionais e os registros de representação semiótica*: análise de planejamento das séries finais do ensino fundamental. Dissertação de Mestrado, UNIJUI/RS, 2007.

SOARES, E. F; FERREIRA, M. C. C; MOREIRA, P. C. Quatro questões sobre Números Racionais. *In:* ESCOLA DE INVERNO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (EIEMAT), II, Santa Maria, 2010. *Anais* [...]. Santa Maria, UFSM, 2018. Disponível em http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/. Acesso em set 2018.

TARDIF, M. *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis: Vozes, 2010.

WENGER, E. *Communities of practice*: learning, meaning and identity**.** Cambridge: Cambridge University, 1998.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TCLE

Você está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), da pesquisa de mestrado intitulada "(Re)construção do conceito de número racional por meio de seus diferentes significados: um grupo de estudos com professores que ensinam matemática". A pesquisadora responsável por essa pesquisa é Elisabete Zardo Búrigo que pode ser contatada no telefone (51)33086189, endereço Avenida Bento Gonçalves, 9500, prédio 43111, sala A109 e email elisabete.burigo@ufrgs.br.

Serão realizados um curso de formação continuada de professores e entrevistas, tendo como **objetivo geral** analisar as contribuições que um grupo de estudos virtual pode trazer para o desenvolvimento profissional de professores do Ensino Fundamental que ensinam Matemática quanto ao conceito de número racional por meio de seus diferentes significados e suas práticas, e como **objetivos específicos** os seguintes: identificar e interpretar a mobilização de significados de números racionais por parte do grupo de professores; investigar as contribuições de um grupo de estudos reunindo pedagogos e professores de matemática para a reformulação de um conceito matemático. A **justificativa** dessa pesquisa, em linhas gerais, refere-se à importância do conceito de número racional em interpretações de eventos do cotidiano. Nesse sentido buscaremos desenvolver, no grupo de estudos, uma investigação que relacione o conhecimento teórico e o conhecimento da prática dos professores. Os encontros do curso de formação serão previamente agendados com os participantes, utilizando uma plataforma de reuniões virtuais e o moodle da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (ambiente virtual de apoio a aprendizagem). Esses **procedimentos** ocorrerão de forma remota devido à pandemia de Covid-19. Também serão desenvolvidas atividades e conversas envolvendo o tema do curso. Não é obrigatório participar de todas as atividades, responder todas as perguntas ou submeter-se a todas as conversas.

Os **riscos** destes procedimentos serão mínimos, envolvendo possível constrangimento aos entrevistados ao relatarem o desenvolvimento de seu trabalho na escola. A fim de amenizar este desconforto será enfatizado que o ambiente do curso de extensão tem como um de seus objetivos refletir sobre a prática de diferentes perspectivas. Tão logo todos os relatos dos participantes terão a mesma importância para os estudos e reflexões. Além disso, asseguramos que cada participante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação e, ainda, seja mantido o anonimato de suas entrevistas.

Os **benefícios** esperados com este estudo relacionam-se a produção de informações importantes sobre espaços de formação contínua de professores e as práticas quanto a números racionais, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

As pessoas que estarão acompanhando os procedimentos serão os pesquisadores Elisabete Zardo Búrigo (pesquisadora responsável) e Stephanie da Silva Trindade (estudante de mestrado).

A pesquisa está organizada de modo a não acarretar despesas para os participantes. **Todas as despesas decorrentes de sua participação nesta pesquisa, caso haja, serão ressarcidas. Danos decorrentes da pesquisa serão indenizados.**

Você poderá se retirar do estudo a qualquer momento, sem qualquer tipo despesa e constrangimento.

Solicitamos a sua autorização para usar suas informações na produção de artigos técnicos e científicos, aos quais você poderá ter acesso. A sua privacidade será mantida através da não- identificação do seu nome.

Todos os registros da pesquisa estarão sob a guarda do pesquisador, em lugar seguro de violação, pelo período mínimo de 05 (cinco) anos, após esse prazo serão destruídos.

Este termo de consentimento livre e esclarecido possui 02 (duas) páginas e é feito em 02 (duas) vias, sendo que uma delas ficará em poder do pesquisador e outra com o participante da pesquisa.

Em caso de dúvida quanto à condução ética do estudo, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da Uergs (CEP-Uergs). Formado por um grupo de especialistas, tem por objetivo defender os interesses dos participantes das pesquisas em sua integridade e dignidade, contribuindo para que sejam seguidos os padrões éticos na realização de pesquisas: Comitê de Ética em Pesquisa da Uergs – CEP-Uergs - Av. Bento Gonçalves, 8855, Bairro Agronomia, Porto Alegre/RS – CEP: 91540-000; Fone/Fax: (51) 33185148 - E-mail: cep@uergs.edu.br.

Nome do participante:_______________________________________

_______________________________ Assinatura participante da pesquisa/responsável legal

_______________________________ Assinatura do pesquisador(a)

APÊNDICE B – MATERIAL 01

Programa de Pós-Graduação EM ENSINO DE MATEMÁTICA IME-UFRGS

ESTUDO E ENSINO DE FRAÇÕES NA ESCOLA
MATERIAL 01

UFRGS UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

ATIVIDADES EM CONTEXTOS DIFERENTES ENVOLVENDO FRAÇÕES

- **COM AS POLEGADAS[1]:**

É comum termos em nossas casas produtos com diferentes identificações de medida, por exemplo, centímetros, metros, quilograma (kg), litros, entre outros. Dentre esses produtos existem aqueles medidos em polegadas, vocês lembram de algum?

Normalmente produtos "grandes" são relacionados com um número inteiro de polegadas, ou, em outros casos, em representação decimal, como um celular com tela de 4,6" (quatro polegadas e seis décimos de polegadas).

- Citados alguns produtos que apresentam medidas em polegadas, se quiséssemos expressar a medida de algum deles (como uma televisão) em centímetros, como poderíamos fazer isso?

Fonte: imagem adaptada da internet

- Como podemos comparar as polegadas da televisão com os centímetros encontrados na atividade anterior?

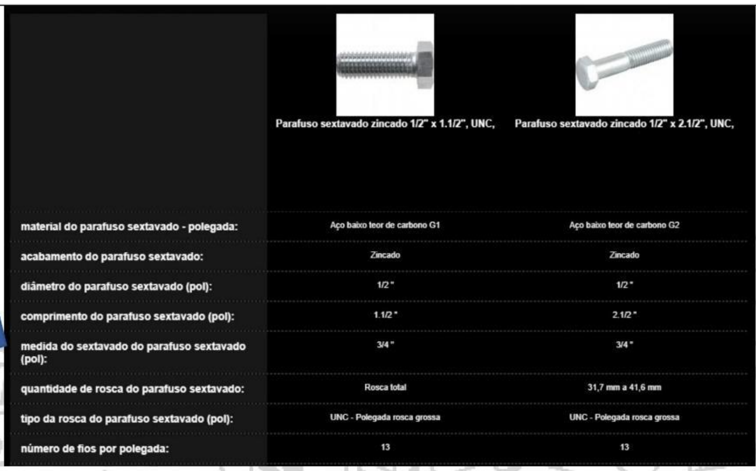
- Pela comparação realizada na atividade acima como podemos identificar a maior unidade, polegada ou centímetro?

DESAFIO:

Seguindo as discussões realizadas na atividade anterior e os produtos citados, podemos imaginar que quanto "menores" as dimensões do produto, maior a probabilidade de encontrarmos suas medidas representadas por frações de polegadas, a exemplo dos parafusos.

A figura abaixo exemplifica bem a utilização das polegadas nesse tipo de material:

[1]Atividade elaborada a partir da leitura de http://clubes.obmep.org.br/blog/aplicando-a-matematica-basica-fracoes/



	Parafuso sextavado zincado 1/2" x 1.1/2", UNC,	Parafuso sextavado zincado 1/2" x 2.1/2", UNC,
material do parafuso sextavado - polegada:	Aço baixo teor de carbono G1	Aço baixo teor de carbono G2
acabamento do parafuso sextavado:	Zincado	Zincado
diâmetro do parafuso sextavado (pol):	1/2 "	1/2 "
comprimento do parafuso sextavado (pol):	1.1/2 "	2.1/2 "
medida do sextavado do parafuso sextavado (pol):	3/4 "	3/4 "
quantidade de rosca do parafuso sextavado:	Rosca total	31,7 mm a 41,6 mm
tipo da rosca do parafuso sextavado (pol):	UNC - Polegada rosca grossa	UNC - Polegada rosca grossa
número de fios por polegada:	13	13

Fonte: print de um site de materiais de construção

Quadro com informações retiradas do site de materiais de construção

Aço baixo teor de carbono G1	Aço baixo teor de carbono G2
$\frac{1''}{2}$	$\frac{1''}{2}$
$1\frac{1''}{2}$	$2\frac{1''}{2}$
$\frac{3''}{4}$	$\frac{3''}{4}$

- Como adaptação para pensarmos nesse contexto, podemos utilizar rolinhos de papel higiênico e rolinhos de papel toalha (ou papel alumínio). Se temos um furo na parede (hipotético, devido às dimensões adaptadas aqui) medindo 15 cm de profundidade, e nossos parafusos (rolinho de papel higiênico e papel toalha) têm medidas informadas em polegadas, respectivamente 4 polegadas e 11 ½ polegadas. Como podemos identificar qual o parafuso mais adequado para o nosso furo na parede?

- Como poderíamos identificar a profundidade do furo na parede em polegadas, para facilitar a escolha de parafusos em uma próxima vez, já que esses vêm com seus comprimentos informados em polegadas?

- Qual estimativa podemos dar para a medida de 1” (uma polegada) em centímetros, com base nas informações prestadas no site? E para a medida de 1 cm em polegadas?

- **COM A EQUIPARTIÇÃO DE UM OBJETO:**

Nas questões a seguir, se necessário utilize o Tangram como auxílio.

O Tangram é um quebra-cabeça composto por 7 peças.

Essas peças se formam por meio da decomposição de um quadrado, então dentre as inúmeras figuras que podemos montar sem sobrepor as peças, o quadrado é uma delas.

Um molde em tamanho adaptado está disponível para impressão e recorte na última página deste arquivo.

Para comemorar seu aniversário na escola, Júlia levou tortas para dividir com seus colegas. Para repartir as tortas, ela e seus colegas foram organizados em pequenos grupos, cada grupo com sua torta. Desse modo, a sala estava organizada como na figura abaixo:

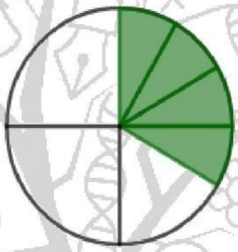
Fonte: imagem adaptada da internet

a. O grupo A era composto por Júlia, Carlos e Miguel e a torta a ser dividida neste grupo tinha formato retangular. Como a torta foi dividida igualmente entre os membros do grupo, qual foi o pedaço destinado à Júlia na figura abaixo? Por que e qual nome podemos dar a esse pedaço?

Fonte: autoral

b. Se Júlia comeu apenas metade do seu pedaço, qual fração representa a parte da torta que ela comeu? Dica: utilize uma folha de papel como suporte, desenhando, recortando ou como preferir, ou caso tenha acesso utilize os blocos lógicos.

c. O grupo B era composto por Maria, Fernanda, Bruno e Ellen e a torta a ser repartida neste grupo tinha formato circular. A torta foi dividida igualmente entre os colegas, porém Fernanda não quis todo o seu pedaço e deu parte dele para Ellen. Desse modo, se a parte que Ellen comeu está representada em verde na figura abaixo, qual fração representa?



Fonte: autoral

d. E qual fração representa a parte que Fernanda comeu da torta?

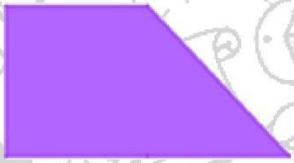
e. O grupo C era formado por Caio, Ana e Junior e a torta tinha um formato diferente do usual. Como esperado, a torta deveria ser repartida igualmente entre os colegas. Como você dividiria a torta representada na figura abaixo em três pedaços? Dica: utilize o tangram como auxílio.

Fonte: autoral

f. Como podemos representar numericamente o pedaço de torta que cada integrante do grupo C recebeu?

g. Se utilizarmos as peças do tangram para montarmos a torta do grupo C, e então representarmos numericamente o pedaço de torta que cada um recebeu, podemos estimar quantas representações teríamos? Explique.

h. O grupo D era composto por 6 alunos, Cristian, Bárbara, Lucas, Mariana, David e Sofia e sua torta tinha o mesmo formato da torta do grupo C. E, de novo, como esperado, a torta deveria ser repartida igualmente entre os participantes do grupo. Como você dividiria a torta entre eles? Dica: utilize o tangram como auxílio.



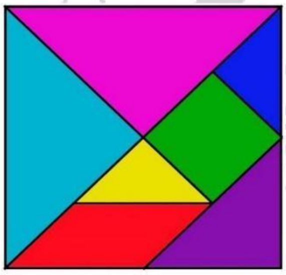
Fonte: autoral

i. Como podemos representar numericamente o pedaço de torta que cada integrante do grupo D recebeu?

j. Se utilizarmos as peças do tangram para montarmos a torta do grupo C, e então representarmos numericamente o pedaço de torta que cada um recebeu, podemos estimar quantas representações teríamos? Explique.

DESAFIO:

I. Se em um grupo com 10 pessoas, cada uma recebeu um pedaço de bolo do tamanho e formato do triângulo pequeno do tangram (representado na imagem abaixo por verde ou roxo). Como poderia ser o formato de torta destinado a esse grupo antes da divisão? Quantos e quais formatos seriam possíveis?



Fonte: imagem retirada da internet

II. E se nesse mesmo grupo, cada uma das 10 crianças recebesse um triângulo pequeno de bolo e ainda assim sobrassem duas fatias, qual poderia ser o formato do bolo? (utilize as peças do tangram)

Fonte: imagem adaptada da internet.

III. Ainda sobre o exemplo acima, como poderíamos representar, por meio de frações, as fatias destinadas aos alunos? E as fatias que sobraram?

IV. Em relação às primeiras questões envolvendo a divisão da torta: os grupos A e C dos exercícios anteriores tinham o mesmo número de alunos, e formas de tortas distintas. Com exceção destas duas características, você pôde perceber semelhanças ou distinções no modo como resolveu ambas as situações? Por exemplo, em qual questão percebeu maior dificuldade na resolução e por quê?

- **EM UMA CORRIDA[2]:**

Em uma área espaçosa (pátio da escola, quadra de esportes ou outros) divide-se a turma em duas equipes. De duas a duas, as crianças ficam de costas umas para as outras (uma criança da equipe A de costas para uma criança da equipe B), posicionadas no meio do pátio/quadra, demarcados por alguma fita ou ponto de referência, como exemplifica a imagem abaixo, na qual o X é o ponto de referência:

Fonte: adaptada da internet

[2]Atividade adaptada a partir do episódio 4 da tese de Anna Regina Lanner de Moura de 1995.

Ao som de um apito, ambas correm para lados opostos, e a novo som do apito param de correr, permanecendo no local. Cada equipe escolhe como medir a distância percorrida pelo seu colega, podendo utilizar passos, palmos, canetas, um bastão ou até mesmo cordas de tamanhos variados.

Após ambas as equipes medirem suas respectivas distâncias, a turma deve buscar identificar quem correu mais, sendo o ganhador aquele que percorrer a maior distância[3], assim marcando pontos para sua equipe. A cada rodada as equipes podem modificar a unidade utilizada para medir.

Agora:

a. Se as equipes escolheram unidades diferentes para medir, como um bastão e passos. Como procederíamos para identificar quem percorreu a maior distância?

b. Se a equipe A mediu a sua distância com passos pequenos e obteve exatos 10 passos de distância e a equipe B também utilizou passos largos para medir sua distância, obtendo uma distância de 6 passos e um pouco (um pouco sendo uma medida menor que o passo utilizado). Como poderíamos identificar quem percorreu maior distância nesse caso?

DESAFIO:

Um grupo de alunos escolheu como unidade de medida uma caneta Bic e obteve como distância $77\ \frac{1}{2}$ canetas, outro grupo escolheu como unidade um cabo de vassoura e obteve como distância $9\ \frac{1}{24}$ cabos.

I. Como saberíamos quem percorreu a maior distância?

II. Como você explicaria que $77\ \frac{1}{2}$ canetas medem uma distância menor do que $9\ \frac{1}{24}$ cabos?

III. Que tipo de atividade você poderia propor para melhorar as comparações feitas pelos alunos?

[3] Uma variação seria utilizar cordas de tamanhos variados e ganhar a equipe que necessitar da maior corda para medir.

- **COM GIROS[4]:**

Dentre as modalidades que formam o atletismo existe aquela responsável pelos lançamentos de materiais como dardo, disco e outros implementos.

Para o lançamento de disco, o atleta deve ficar dentro de uma área circular de 2,5 metros de diâmetro, segurar o disco entre as pontas dos dedos da mão e o antebraço, elevando-o na altura do ombro e assim podendo lançá-lo. Nessa modalidade não é obrigatório giro ou deslocamento, entretanto, os profissionais utilizam diferentes técnicas de giro para potencializar o lançamento.

Para familiarizar crianças com a prática desse esporte existem inúmeros relatos sobre a construção de disco com materiais adaptados. Dentre essas adaptações, temos a seguinte[5]:

- 2 pratinhos de bolo ou círculos de papelão variando o tamanho conforme o público que vai utilizá-lo, com jornal amassado ou 1 saco com areia dentro, para ficar mais pesado. Contornar os pratos com fita crepe ou com borracha de mangueira e envolvê-los com outro material desejado para melhorar a estética.
- O seguinte vídeo demonstra a construção acima: https://www.youtube.com/watch?v=GFUvk5_xyLw.

Tendo em mãos um disco original ou adaptado, explique para as crianças sobre esse esporte e demonstre (por vídeos ou pessoalmente) as diferentes técnicas que os esportistas profissionais utilizam, por exemplo: 1 giro com velocidade, 1 giro e meio, e/ou apenas meio giro.

Fonte: imagem retirada da internet

a. Peça para que identifiquem como seria um "meio giro" e "um giro e meio". Como saber que o movimento realizado realmente foi metade de um giro?

b. Peça que então realizem 1 giro e ¼ de giro. Novamente questione como saber se o movimento realizado está correto e é um quarto de giro?

[4] Adaptado da dissertação de Mariana Rodolfo Rocha de 2017.
[5] Construção de disco adaptado sugerido pelo estudo realizado na Universidade Estadual de Maringá vinculado ao antigo Programa Segundo Tempo do Ministério do Esporte (existente na época).

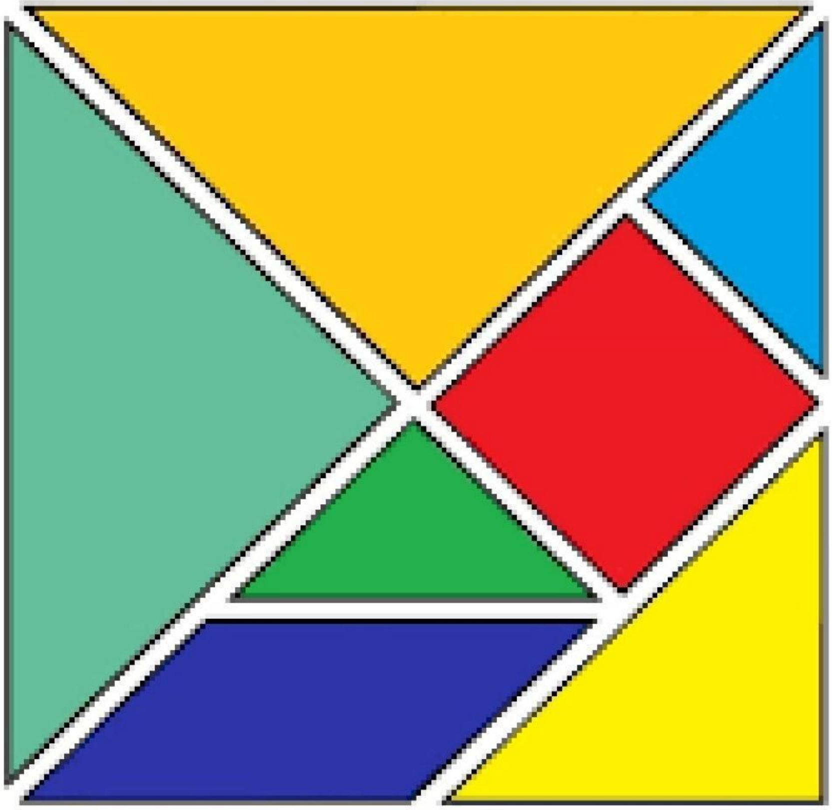
c. O que você imagina que aconteceria no nível de ensino em que atua? Como os estudantes iriam buscar resolver os questionamentos?

d. O que você poderia fazer de adaptações e intervenções nesse contexto?

e. É possível comparar os giros?

f. Como poderíamos comparar o movimento realizado entre dois alunos de tamanhos diferentes? Por exemplo, um aluno do 9ª ano e outro do 5ª ano.

TANGRAM



Sobre o material: O material 01 foi desenvolvido com o intuito de que as questões envolvessem o significado medida, considerando situações em que tal significado assume o papel de parte-todo. A primeira atividade envolvia a ideia de polegadas, o intuito era de que fugíssemos das unidades de medida padrão para responder as questões a fim de chegarmos na necessidade de comparar grandezas. Nesta discussão buscávamos nos questionar sobre *quantas vezes cabe* determinada grandeza em outra. Para as discussões sobre a segunda atividade, intitulada “equipartição de um objeto”, buscávamos que a identificação da “parte” conhecendo o “todo”, a construção do “todo” conhecendo as partes” e a percepção de que para identificarmos uma fração as “partes” precisam ser iguais em área. A atividade intitulada “Em uma corrida” nos instigava a evitar as unidades de medida oficiais como metros, centímetros, dentre outras. Para tanto, devíamos retomar as reflexões sobre a questão *quantas vezes cabe*. A última atividade do material sugeria discussões envolvendo as ideias de “todo”, metade e um quarto. A situação exemplificada na atividade evitava o uso de situações conhecidas como pizzas e figuras planas, fazendo com que pensássemos em formas de “medir” um “giro”.

APÊNDICE C – MATERIAL 02

Programa de Pós-Graduação EM ENSINO DE MATEMÁTICA IME-UFRGS

ESTUDO E ENSINO DE FRAÇÕES NA ESCOLA
MATERIAL 02

UFRGS UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

ATIVIDADES EM CONTEXTOS DIFERENTES ENVOLVENDO FRAÇÕES[1]

1. UM PROBLEMA COM MUITAS PIZZAS E MUITAS PESSOAS:

24 pessoas vão juntas a uma pizzaria e pedem 18 pizzas. Não há uma mesa onde possam se sentar todas juntas. Como distribuir as pessoas e as pizzas em mesas menores, de modo que todos possam comer igualmente?

DESAFIO:

I. Procure uma resolução deste problema diferente da primeira que você pensou. Você consegue pensar em outras resoluções diferentes para esse problema? Quantas?

II. O que precisamos levar em consideração para que todos comam igualmente? Por exemplo, devemos atentar para o número de mesas? Ou para o número de pizzas ou para o número de pessoas?

III. Neste problema temos uma relação entre número de pizzas e número de pessoas, o que podemos dizer sobre essa relação? O que as situações (formas como as pessoas vão se dividir nas mesas) têm em comum? E, o que as diferencia?

2. UM PROBLEMA UM POUCO DIFERENTE DO ANTERIOR:

Numa escola multisseriada, 6 alunos do primeiro ano e 5 alunos do segundo fazem parte de uma única turma, a turma da professora Cláudia. Já na turma do professor Bruno, são 5 alunos do terceiro ano e 8 do quarto ano. Considerando que nessa escola existam apenas essas duas turmas e professores, quais relações podemos fazer? Cite aquelas que você percebe ou imagina.

[1] Os problemas 1, 2 e 3 são adaptados de textos de Nilza Bertoni.

DESAFIO:

I. Como poderíamos responder a seguinte questão:
   a. Qual a relação entre número de professores e número de alunos na turma da professora Cláudia?
   b. E na turma do professor Bruno?
   c. E para a escola toda?

II. Como podemos explicar o fato da relação entre número de professores e número de alunos na escola ser diferente da relação entre número de professores e de alunos nas turmas?

III. Para cada aluno do primeiro ano existem quantos outros alunos (alunos do segundo, terceiro e quarto)?

IV. E o contrário, para cada alunos dos outros anos, quantos existem do primeiro ano?

V. Qual a relação entre os itens III e IV? Como podemos explicar tal relação?

VI. E se considerarmos apenas a turma da professora Cláudia, qual relação podemos estabelecer entre os alunos?

VII. O que podemos perceber ao comparar os resultados obtidos no problema anterior (número 1) com os resultados obtidos neste problema?

3. <u>UM PROBLEMA COM VÁRIOS PENSAMENTOS:</u>

Uma turma de 40 alunos teve parte de suas atividades remotas devido ao distanciamento social. Por isso, a professora responsável pela turma fez um levantamento para identificar aqueles que possuem acesso à internet ou não, sendo que aqueles alunos que não possuem acesso irão receber os materiais físicos em mãos. Com o levantamento, a professora percebeu que a relação entre o número de alunos que possuem acesso e os que não possuem é de 5 para 3. Com essas informações, como podemos saber quantos materiais físicos a professora terá que preparar? Ou seja, quantos alunos deverão receber os materiais em mãos na portaria da escola?

DESAFIO:

I. Existem diferentes modos de pensarmos para resolver esse problema, entre eles usando desenhos ou tentativas e erros. Caso você tenha utilizado uma dessas resoluções, como faria para resolver utilizando o outro modo? Consegue pensar em uma maneira diferente dessas?

II. Caso você tenha percebido diferenças entre esse problema e os outros dois anteriores, liste-os ou mencione algo que lhe chamou a atenção:

4. UM PROBLEMA ENVOLVENDO PROBABILIDADE[2]:

Algumas pessoas pensam que, quando não sabemos com certeza se algo vai acontecer, tem 50% de probabilidade de acontecer. Para essas pessoas, tanto o evento poderia acontecer como não acontecer, e como não podemos adivinhar o futuro, 50% de probabilidade seria o palpite mais certeiro. Um exemplo de pensamento dessas pessoas é a ideia de que a probabilidade de ganhar na loteria é 50% porque "ou você ganha ou perde". O que você acha desse pensamento?

Outro contexto é o seguinte: a equipe de previsão de tempo de um jornal disse que a probabilidade de chuva para amanhã é de 50%. O que isso significa para nós? Existem diferenças entre os 50% do contexto anterior e este?

Comparando chances: A urna A contém 4 bolas brancas e 4 pretas, e a B contém 3 bolas brancas e 2 pretas. Vamos tirar uma bola de cada urna, sem olhar. A chance é maior de tirar uma bola branca na urna A ou na urna B?

DESAFIO:

I. Se na urna A houvesse 2 bolas brancas e 3 pretas e na urna B 3 bolas brancas e 4 pretas. Onde teríamos maior chance de conseguir uma bola branca em um sorteio?

II. Se na urna A houvesse 4 brancas e 5 pretas, e na B 5 brancas e 6 pretas. Onde teríamos maior chance de retirar uma branca em um sorteio? A resposta e maneira de pensar foi a mesma da pergunta anterior? Por quê?

III. Para finalizar, se na urna A houvesse 2 brancas e 3 pretas e na urna B 4 brancas e 6 pretas. Onde teríamos maior chance de conseguir uma bola branca em um sorteio?

DESAFIO DAS QUATRO SITUAÇÕES:

I. Você percebe proximidades/pontos em comum entre as situações 1, 2, 3 e 4? Se sim, quais? Se não, o que as distanciam?

[2] Modificado a partir dos cadernos do GESTAR II.

II. Quanto à mobilização de ideias matemáticas, como poderíamos distingui-las?

III. Quais conceitos, ideias e/ou propriedades matemáticas você percebe? Quais destes conceitos/ideias/propriedades são abordados na etapa de ensino em que você atua?

- **NOS DADOS SOBRE COVID[3]:**

Atualmente estamos recebendo por diversas fontes e meios informações sobre a pandemia de covid-19, algumas mais detalhadas, outras nem tanto. Nessa situação, nos vemos frequentemente comparando dados obtidos, a fim de compreender melhor a situação à nossa volta. Algumas das informações que recebemos diariamente, são do tipo:

1. "De acordo com o monitoramento do Imperial College de Londres, no Reino Unido, cada 100 pessoas infectadas com o novo coronavírus (Sars-CoV-2) podem causar a infecção em mais 120 pessoas." (https://saude.ig.com.br/coronavirus/2021-01-21/taxa-de-transmissao-da-covid-19-fica-em-120-no-brasil-diz-imperial-college.html)

- A informação acima é referente ao país, na segunda quinzena de janeiro de 2021, **se** no mesmo momento do trecho destacado, o Rio Grande do Sul possuía uma taxa de contaminação de 1,31, como poderíamos comparar as informações a fim de saber qual contaminação estava mais acelerada entre estado e país?

2. "De cada sete pessoas com o coronavírus, apenas uma sabe que está ou esteve infectada. Isso é preocupante, visto que as demais seis pessoas que não sabem da infecção podem, involuntariamente, transmitir o vírus para outras pessoas', disse o coordenador geral do estudo e reitor da UFPel, Pedro Hallal." (https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2020-06/pesquisa-da-ufpel-estima-subnotificacao-de-casos-de-covid-19-no-brasil)

- A informação 1 nos diz que na segunda quinzena de janeiro de 2021, cada 100 pessoas infectadas poderiam causar infecção em mais 120 pessoas. Tendo conhecimento da informação 2, podemos estimar quantas dessas 120 pessoas não sabem que estão com o vírus, ou seja, quantas dessas pessoas não serão notificadas?

- **NA PRÁTICA ALIMENTAR**

Fazendo uma enquete com os alunos, perguntamos sobre seus costumes alimentícios. As perguntas e respostas foram as seguintes:

[3] Informações referentes a terceira semana de junho de 2020.

- Com qual frequência você costuma comer bombons? E quantos bombons (mais ou menos)?

João: de 3 em 3 dias	Bianca: 4 vezes na semana	Natalia: 1 vez na semana
8 bombons por semana	12 bombons por semana	8 bombons por mês

- Quando você costuma comer saladas?

João: 2 dias na semana Bianca: todos os dias Natalia: um dia sim outro não

- Quantos copos de refrigerante você toma (estimado) por semana?

João: 8 copos Bianca: 3 copos Natalia: 0 copos

- Quantas frutas você costuma comer por semana?

João: 5 frutas Bianca: 10 frutas Natalia: 7 frutas

Das informações obtidas, o intuito da turma era comparar os hábitos e ver aqueles "melhores ou piores".

Para pensar:

- Qual a relação entre número de bombons e de dias que podemos perceber para cada aluno? Pelas informações que eles deram, como podemos identificar aquele que come mais ou menos ou, ainda, aquele que come com maior ou menor frequência?

- Quais relações podemos estabelecer a partir das informações sobre refrigerante? Como?

- Com as informações sobre a salada, seria possível estabelecermos uma relação entre salada e dias? Se sim, como? Ou se não, quais informações faltam para isso?

- Percebendo que o número de bombons por semana era maior que o número de frutas, a professora resolveu estabelecer uma relação entre bombons e frutas. Deste modo, como poderíamos comparar bombons e frutas?

Sobre o material: O material 02 envolveu situações sobre razão. A primeira atividade, envolvendo pizzas e pessoas, possibilitava que desenvolvêssemos diferentes estratégias e respostas para a questão. Ao final, poderíamos perceber que as diferentes soluções eram razões que poderiam ser representadas por frações e todas equivalentes. Nesta atividade poderíamos envolver discussões sobre a proporcionalidade. A atividade seguinte apresentava razões entre números de alunos de turmas diferentes, de modo que as razões não eram proporcionais. Assim, poderíamos ver uma situação envolvendo razão, mas não a proporcionalidade ou equivalência entre frações. A terceira atividade (Um problema com vários pensamentos) nos direcionava a estabelecer estratégias para identificar os números envolvidos em cada grandeza da razão dada, de modo que conhecíamos apenas a razão e a soma dos elementos de cada grandeza. As três últimas atividades apresentavam situações do nosso cotidiano que envolviam a ideia de razão, como em números e interpretações dos dados de Covid-19, em situações de probabilidade e interpretações de dados alimentares.

APÊNDICE D – MATERIAL 03

ESTUDO E ENSINO DE FRAÇÕES NA ESCOLA
MATERIAL 3

Programa de Pós-Graduação EM ENSINO DE MATEMÁTICA IME-UFRGS

UFRGS UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

ATIVIDADES EM CONTEXTOS DIFERENTES ENVOLVENDO FRAÇÕES

RETOMANDO UM PROBLEMA ANTERIOR COM UM OLHAR DIFERENTE[1]

Lembremos do problema 1 no Material 2, “Um problema com muitas pessoas e muitas pizzas”. Nele buscávamos perceber a razão entre pizzas e pessoas, contudo, a pergunta que nos é feita e o modo como respondemos podem nos “distanciar” de uma razão e é a nesse “distanciamento” que iremos nos atentar nesse momento.

24 pessoas foram juntas a uma pizzaria e pediram 18 pizzas. Não há uma mesa onde possam se sentar todas juntas. Como distribuir as pessoas e as pizzas em mesas menores, de modo que todos possam comer igualmente?

DESAFIO:

a) Qual caminho você tomou para resolver este problema?

b) Identifique 2 maneiras diferentes de distribuir as pessoas e as pizzas (2 modos diferentes de alojar as pessoas e as pizzas em mesas).

c) Busque uma relação entre pizzas e pessoas. Descreva o processo que você pensou para estabelecer tal relação.

d) Você acredita ser possível identificar a quantia exata de pizza que cada pessoa deverá comer para que todos possam comer igualmente? Se sim, que quantia é essa e como você identificou essa quantia?

e) Você percebe diferenças ou semelhanças entre as questões C e D? Liste aquilo que você percebe.

[1] Retomando o problema proposto por Nilza Bertoni envolvendo razão.

DIVIDINDO REFRIGERANTES

Não é incomum presenciarmos irmãos discutindo quem ficou com a maior parte ou tomou mais refrigerante que o outro, sejam em situações reais ou desenhos e filmes. Nesse contexto vamos imaginar a seguinte situação:

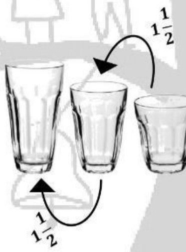
3 irmãos decidem dividir 1 litro de refrigerante, porém têm ao seu alcance apenas 3 copos diferentes uns dos outros, como mostra a figura abaixo:

a. Como os irmãos podem resolver o problema e dividir igualmente o refrigerante?

b. Como você procederia nessa situação?

DESAFIO:

I. Se os irmãos já conhecessem o tamanho dos copos e soubessem que a quantidade de refrigerante que cabe no copo médio é igual a 1 ½ do copo pequeno e a quantidade que cabe no copo grande é igual a 1 ½ do copo médio. Como dividiriam o refrigerante? A quantos copos de refrigerante cada irmão teria direito para que todos tomassem a mesma quantidade, sabendo que 1 litro de refrigerante equivale a 9 copos pequenos?



II. Você acredita que existam outras diferentes divisões para que os irmãos ganhem quantidades iguais de refrigerante? Por quê?

III. E se, por sorte ou não, os irmãos encontrassem copos iguais, cada um deles com 300 ml como na imagem abaixo. Como dividiriam o refrigerante? Cada irmão poderia tomar quantos copos?

IV. Estabeleça uma relação refrigerante por pessoa para esta situação.

V. Como você poderia adaptar essa situação para o nível de ensino em que atua?

DIVIDINDO O TEMPO

Júnior tem 3 tarefas escolares para realizar antes de sair para brincar com seus amigos. Contudo, são 13h e seu limite para retornar da brincadeira com os amigos é às 19h30, logo, ele pensou o seguinte: *vou usar metade do meu tempo para fazer as atividades da escola e a outra metade vou ter livre para encontrar o pessoal, mas então quanto tempo tenho para fazer cada uma das atividades?!*.

Para pensar:

a) Se você estivesse na situação de Júnior, como resolveria esse problema?

b) Quanto tempo Júnior deve destinar para cada atividade e quanto tempo livre terá para brincar com seus amigos?

c) Você acredita que existam outros modos de dividir o tempo como Júnior queria além da maneira encontrada nas questões A e B? Por quê?

d) É possível justificar por meio da matemática a resposta do item anterior? Se sim, na etapa de ensino em que atua como poderia abordar essa justificativa?

e) Quais dificuldades ou facilidades você imagina que aconteceriam na turma em que atua frente a esta situação?

COMPARANDO RESULTADOS[2]

Em um restaurante, na mesa 1 e na mesa 2 foram servidas pizzas do mesmo tamanho. Na mesa 1 havia quatro pessoas e na mesa 2 havia seis. Em cada mesa, o garçom partia a pizza em fatias iguais, de acordo com o número de pessoas. Em que mesa a fatia de pizza foi maior: na mesa 1 ou na mesa 2? Por quê?

DESAFIOS:

a) Qual fração da pizza as pessoas receberam em cada uma das mesas?

b) Caso o garçom partisse cada pizza de modo que cada pessoa recebesse duas fatias, em qual mesa a fatia seria maior? Compare essa resposta com a resposta do problema inicial (questão principal), o que podemos concluir?

c) Atente para a seguinte situação: se na mesa 1 o garçom dividisse a pizza de modo que cada pessoa recebesse **duas fatias** e na mesa 2 dividisse a outra pizza de modo que cada pessoa recebesse **uma fatia**, em qual das mesas a fatia seria maior? Por quê?

d) Quais adaptações ou quais materiais utilizaria para realizar esta atividade no contexto em que atua?

OS INSUMOS FARMACÊUTICOS ATIVOS E AS VACINAS PARA COVID-19

Atualmente um dos assuntos mais comentados e esperados são as vacinas para Covid-19. Somos cercados de notícias diariamente sobre as diferentes vacinas que estão sendo produzidas e/ou testadas, ao exemplo da Coronavac produzida pelo Instituto Butantan e a AstraZeneca/Oxford elaborada pela farmacêutica britânica AstraZeneca com parceria da Universidade de Oxford e produzida no Brasil pela Fiocruz.

Sobre cada uma das vacinas mencionadas, temos as seguintes notícias:

[2] Problema proposto no Caderno 2 do PNAIC.

- "O Instituto Butantan anunciou neste sábado (6) que começou a produzir 8,6 milhões de novas doses da vacina Coronavac, contra a Covid-19, a partir dos insumos que chegaram da China na noite de quarta-feira (3) a São Paulo. Segundo o instituto, os 5.400 litros da matéria-prima IFA (Insumo Farmacêutico Ativo) passarão por envase, rotulagem, embalagem e rigoroso processo de inspeção para controle da qualidade das ampolas. A previsão do Butantan é que as novas doses sejam liberadas para imunização dos brasileiros a partir de 23 de fevereiro.[...] A previsão do Butantan é receber, até abril, o total de insumos necessários para produção das 46 milhões de doses contratadas." *(notícia de 06 de fevereiro de 2021 - https://g1.globo.com/sp/sao-paulo/noticia/2021/02/06/instituto-butantan-comeca-a-produzir-86-milhoes-de-novas-doses-da-vacina-coronavac-apos-chegada-de-insumos-da-china.ghtml)*

- "A Fundação Oswaldo Cruz (Fiocruz) receberá, neste sábado (6/2), o primeiro lote de Ingrediente Farmacêutico Ativo (IFA) para a produção da vacina Covid-19 Fiocruz. O IFA saiu de Xangai nesta sexta-feira, às 7h35 (20h35 desta quinta-feira, horário de Brasília) e tem previsão de chegada no próximo sábado (6/2), às 17h50, no aeroporto internacional do Rio de Janeiro, RIOGaleão. O primeiro lote conterá cerca de 90 litros de IFA, armazenados a -55ºC, suficientes para a produção de 2,8 milhões de doses, do total de 15 milhões a serem recebidos ainda este mês. [...] Ainda que sejam necessários ajustes no início do cronograma de produção inicialmente pactuado, a Fiocruz vai escalonar sua produção ao longo dos primeiros meses para manter a meta de 100,4 milhões de doses até julho deste ano." *(notícia de 05 de fevereiro de 2021 - https://portal.fiocruz.br/noticia/fiocruz-recebe-primeiro-lote-de-ingrediente-farmaceutico-ativo-ifa)*

DESAFIO:

a) Qual a quantidade de IFA que cada uma das fabricantes necessitará para concluir a entrega de todas as vacinas previstas (Butantan 46 milhões de doses e Fiocruz 100,4 milhões)?

b) Como podemos identificar a quantidade de IFA que cada dose das respectivas vacinas utilizará?[3]

[3] Lembramos que cada uma das vacinas mencionadas utiliza seu próprio Insumo Farmacêutico Ativo (IFA), ou seja, não necessariamente ambas as vacinas têm a mesma quantidade da substância.

Sobre o material: O material 03 apresentava questões sobre a ideia de quociente. Para tanto, aproveitamos questões do material 02 para discutir sobre o papel da interpretação de situações e os significados envolvidos em cada situação. Neste material utilizamos a primeira questão para retomar uma situação já conhecida, agora com uma nova interpretação e direcionamento, nos levando à ideia de quociente. Assim, na primeira questão poderíamos envolver ideias de razão e quociente, e na segunda atividade (intitulada “Dividindo refrigerantes”) a ideia de medida e quociente. A terceira atividade (“Dividindo o tempo”) apresentava a ideia de quociente na divisão do tempo, propondo uma situação próxima ao cotidiano de crianças. A quarta atividade (“Comparando resultados”) propunha que identificássemos quocientes em forma fracionária e então realizássemos a comparação de frações. Já a última atividade apresentava a ideia de quociente em interpretações de dados de notícias e manchetes atuais sobre Covid-19.

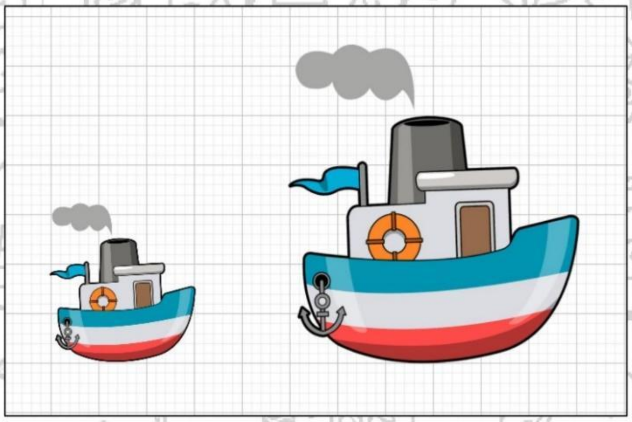
APÊNDICE E – MATERIAL 04

ESTUDO E ENSINO DE FRAÇÕES NA ESCOLA
MATERIAL 4

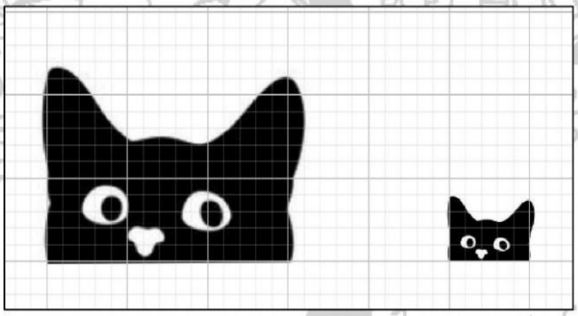
ATIVIDADES EM CONTEXTOS DIFERENTES ENVOLVENDO FRAÇÕES

COMPARANDO FIGURAS

Podemos perceber que a imagem abaixo apresenta dois navios de características idênticas com exceção de seus tamanhos. Você consegue identificar qual a relação entre os tamanhos dos navios? Se sim, como podemos expressar essa relação em números?



E entre os gatos na imagem abaixo, você consegue identificar a relação entre seus tamanhos? Se sim, qual é essa relação?

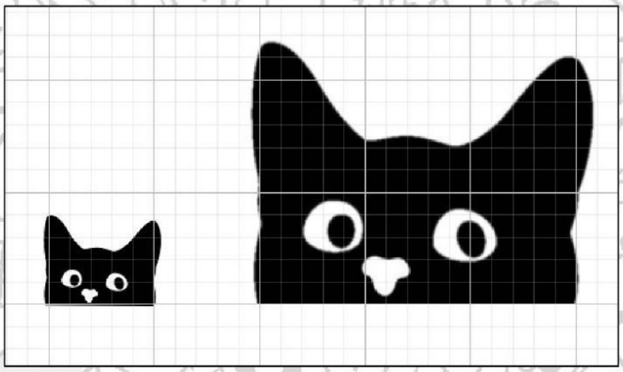


PARA PENSAR:

- Como você realizou a comparação entre os navios para identificar a relação entre seus tamanhos?
- E como fez com os gatos?

- Você percebeu algo em comum entre ambas as comparações, dos navios e dos gatos?
- Caso você propusesse essa tarefa para a turma em que atua, como faria?

DESAFIO:
Se invertêssemos as figuras, por exemplo, quanto aos gatos:



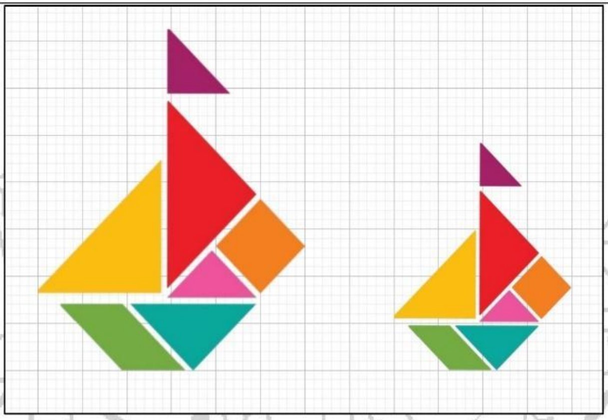
I. Qual a relação entre elas?

II. Como poderíamos representar essa relação?

III. O que há entre esta relação e a relação anterior envolvendo os gatos?

COMPARANDO FIGURAS UM POUCO DIFERENTES

Ainda comparando navios, na imagem abaixo temos dois navios com dimensões diferentes. Você consegue identificar qual a relação entre eles? Se sim, como poderíamos expressar essa relação com números?



PARA PENSAR:

- Como você realizou a comparação entre os navios para identificar a relação entre seus tamanhos?

- Pense em como poderíamos representar essa relação.

- Tente, você, construir o barco representado na imagem usando peças do Tangram. Você consegue compará-lo com algum dos barcos da imagem acima? Se sim, como podemos representar essa comparação numericamente? Se não, por quê?

SITUAÇÕES DA COVID-19

Em 07 de janeiro de 2021 em Porto Alegre havia uma disponibilidade de 126 leitos livres (entre hospitais públicos e privados), e 686 leitos ocupados. Ou seja, nesta data, no município havia 812 leitos de UTI[1].

Em 03 de Março não havia nenhum leito disponível de modo que 630 leitos estavam ocupados por Covid-19 (confirmados e suspeitos) e 312 leitos estavam ocupados por outras causas. Ou seja, nesta data havia 942 leitos, segundo o processamento de dados disponibilizado pelo município.

Segundo o Painel Covid-19 – Atualização Epidemiológica[2] disponibilizado no site da prefeitura, no dia 03 de março havia 138 pacientes em emergências aguardando na fila de espera para um leito de UTI no município.

I. Como podemos calcular a taxa de alteração de número de leitos de UTI entre 07 de janeiro e 03 de março de 2021?

[1] Dados obtidos por meio da leitura dos gráficos disponíveis no site da PROCEMPA – Companhia de Processamento de Dados de Porto Alegre https://infografico-covid.procempa.com.br/
[2] https://www2.portoalegre.rs.gov.br/sms/default.php?p_secao=1027

II. E a taxa de alteração de números de pessoas em espera na fila para um leito de UTI?

III. Como podemos identificar qual a maior taxa? Por quê?

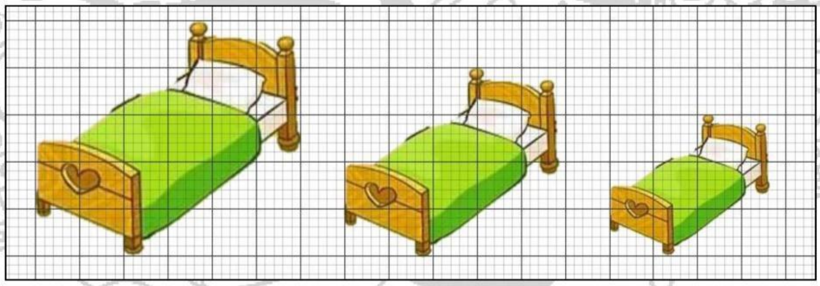
Para pensar:

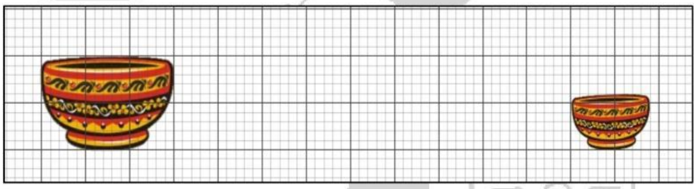
a) Se o número de leitos em UTI tivesse (hipoteticamente) que seguir a mesma taxa de crescimento do número de pessoas na fila de espera para um leito, qual deveria ser o número de leitos de UTI em 03 de março em Porto Alegre? Explique seu raciocínio.

DESAFIO – CACHINHOS DOURADOS[3]

Desde anos atrás a história da Cachinhos Dourados e dos três ursos se faz presente na infância. A história relata a aventura de uma menina com cachinhos dourados que entra na casa de uma família de três ursos enquanto eles não estavam; o papai urso era o maior de todos, a mamãe urso um pouco menor e o pequeno urso o menor de todos. Quando a menina entra na casa, se depara com pratos, cadeiras e camas, todos os objetos em três tamanhos diferentes: um muito grande, um médio e outro bem pequeno.

Agora, se as tigelas de mingau têm as mesmas relações em tamanho que as camas dos ursos, como seria a tigela da mamãe urso? Desenhe.





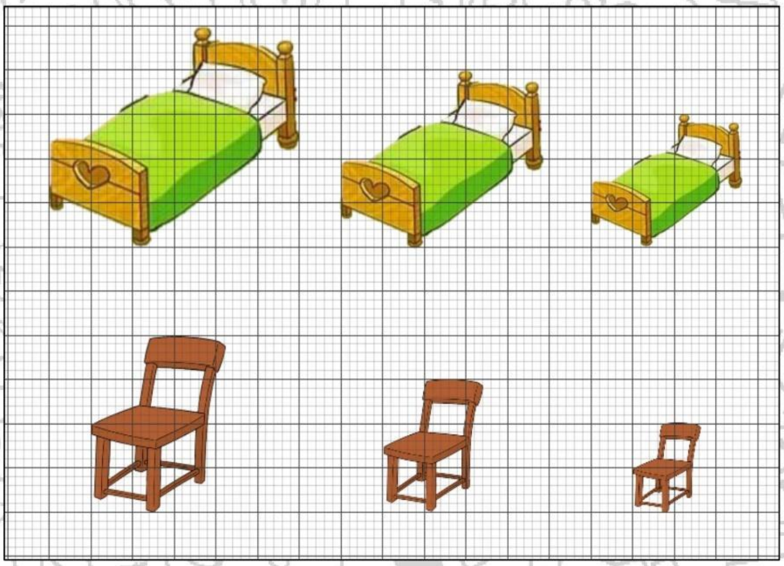
PARA PENSAR:

[3] Disponível em http://itaudeminas.mg.gov.br/arquivos/ead/livros/cachinhos-dourados-e-os-tres-ursos.pdf

- Explique a sua estratégia utilizada para identificar e desenhar a tigela solicitada anteriormente:

- Como podemos saber se a tigela desenhada tem o tamanho certo?

- Será que tudo na casa segue o mesmo padrão de tamanhos? Por exemplo, compare o padrão entre as camas e o padrão entre as cadeiras; os móveis obedecem ao mesmo padrão? Explique o que você pensou.



ESTABELECENDO RELAÇÕES

Considerando que conhecemos o Tangram e suas peças (tal assunto foi apresentado ao longo do Material 01), responda as seguintes questões:

I. Como e quais relações podemos fazer entre:

a) A área do triângulo pequeno e a área do quadrado formado por todas as peças do tangram? Descreva/explique seu raciocínio.

b) A área do paralelogramo e a área do quadrado formado por todas as peças do tangram? Descreva/explique seu raciocínio.

c) A área do paralelogramo e a área do triângulo grande? Descreva/explique seu raciocínio.

II. Analisando a seguinte figura com as peças do tangram responda as questões a seguir:

a) Como e quais as relações podemos fazer entre a área do triângulo pequeno e a área total do foguete? Descreva/explique seu raciocínio.

b) Se quiséssemos reduzir a área desse foguete a $\frac{1}{4}$, como poderíamos proceder? Quantos tangrans seriam necessários para construir o foguete que representa um quarto do foguete acima?

c) Se quiséssemos duplicar a área desse foguete, quantos tangrans seriam necessários?

d) Se quiséssemos aumentar a área desse tangram a $\frac{7}{4}$ quantos tangrans necessitaríamos? Se quiséssemos construir esse novo foguete apenas com triângulos pequenos, quantos seriam necessários?

CRIANDO DESENHOS

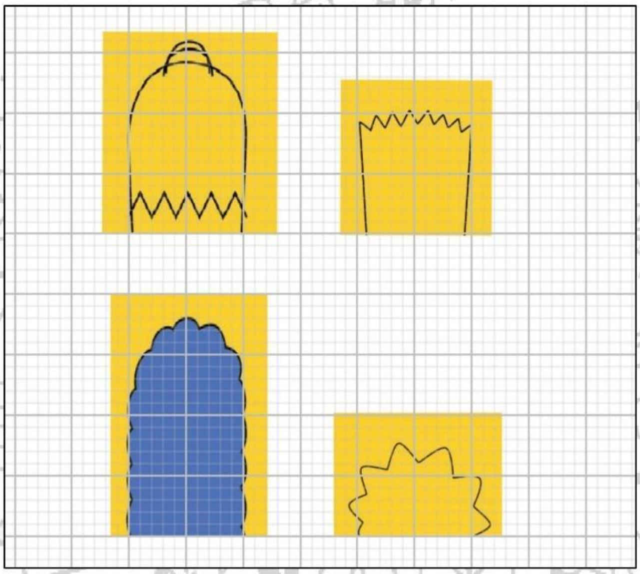
Escolha algum dos personagens abaixo e o desenhe novamente na malha quadriculada em branco:

- Desenhe uma vez de modo que a área desse novo desenho seja $\frac{5}{2}$ da área do desenho inicial.
- Faça outro desenho de modo que cada comprimento desse novo desenho seja $\frac{5}{2}$ do comprimento correspondente do desenho inicial.

Compare ambos os desenhos e responda:

a) Explique aspectos relacionados as características dos desenhos que podemos notar, por exemplo, distinções, deformidades, aproximações com o desenho original, etc.

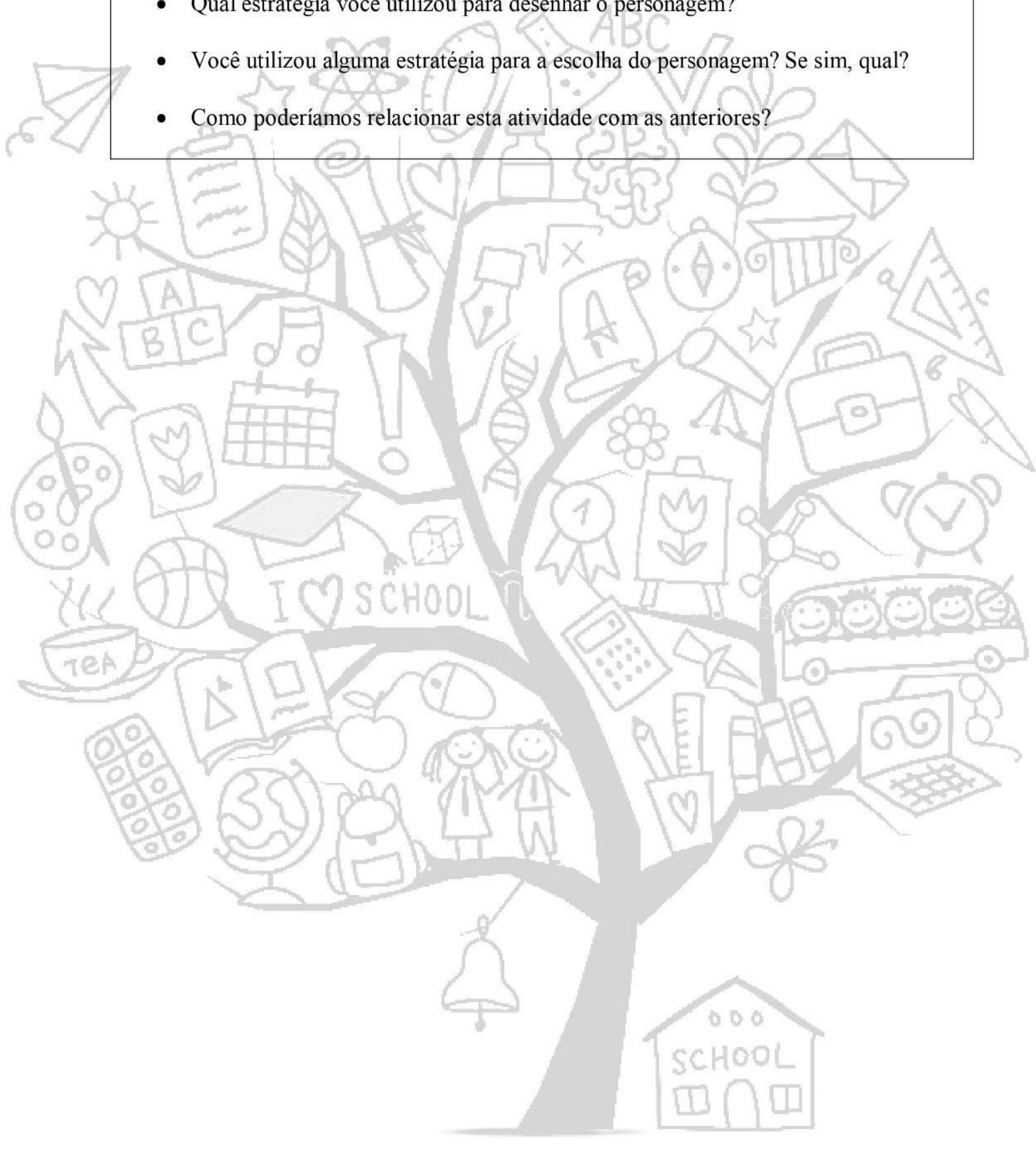
b) Como poderíamos identificar e explicar a função da fração $\frac{5}{2}$ em ambos os desenhos?



Malha em branco:

PARA PENSAR:

- Qual estratégia você utilizou para desenhar o personagem?
- Você utilizou alguma estratégia para a escolha do personagem? Se sim, qual?
- Como poderíamos relacionar esta atividade com as anteriores?



Sobre o material: O material 04 apresentava situações sobre a ideia de operador. Dentre as seis questões quatro delas envolviam a comparação e construção de figuras envolvendo a ideia de operador, são elas: *comparando figuras*, *comparando figuras um pouco diferentes*, *desafio da cachinhos dourados* e *criando desenhos.* As quatro atividades apresentavam uma sequência de raciocínio sobre a ideia de operador, a primeira delas sugeria que identificássemos a relação entre as imagens, representássemos em forma fracionária identificando assim a fração envolvida naquela ideia de operação. Essa situação envolvia números múltiplos, o que buscava facilitar a identificação da fração. A segunda atividade propunha o mesmo caminho, contudo, envolvendo números que não fossem múltiplos uns dos outros, fazendo com que validássemos nossa estratégia anterior ou então formulássemos outra. A terceira e quarta atividade, envolvendo a comparação de figuras, solicitavam a construção de figuras/desenhos. Sendo na primeira destas necessária a identificação da fração operadora antes da construção do desenho, já na última situação bastava construir o novo desenho já conhecendo a fração. Outras duas atividades compunham o material: uma delas, intitulada *estabelecendo relações,* nos aproximava às situações anteriores sobre comparação de figuras, mas agora podendo manipulá-las visto que deveríamos utilizar as peças do Tangram. A outra questão que compôs o material se distingue das demais por não envolver figuras e sim apenas números naturais: nesta situação precisávamos identificar frações operadoras envolvidas na situação em dados da Covid-19.

APÊNDICE F – MATERIAL 05

ESTUDO E ENSINO DE FRAÇÕES NA ESCOLA
MATERIAL 5

ATIVIDADES EM CONTEXTOS DIFERENTES ENVOLVENDO FRAÇÕES: em quais situações tem sentido operar? Quais operações? Por quê?

FORMANDO CORES[1]

Para obter tinta de cor laranja, devem-se misturar 3 partes de tinta vermelha com 2 partes de tinta amarela. Para obter tinta de cor verde, devem-se misturar 2 partes de tinta azul com 1 parte de tinta amarela. Para obter tinta de cor marrom, deve-se misturar a mesma quantidade de tintas laranja e verde.

Quantos litros de tinta amarela são necessários para obter 30 litros de tinta marrom?

a) Como poderíamos reescrever a questão para a linguagem de frações? Tente reescrever de duas ou mais formas diferentes mantendo as relações do enunciado inicial.

b) Como seria sua resolução?

PARA PENSAR:

I. Identifique as operações utilizadas para a resolução da questão. Tente resolver a questão utilizando outra operação ainda não utilizada. O que você pôde perceber?

II. O que aconteceria se utilizássemos a multiplicação para tentar resolver a questão?

EM UMA CORRIDA[2]

Em uma área espaçosa (pátio da escola, quadra de esportes ou outros) divide-se a turma em duplas. Em cada dupla, as crianças ficam de costas uma para a outra, posicionadas no meio do pátio/quadra, demarcados por alguma fita ou ponto de referência, como exemplifica a imagem abaixo, na qual o X é o ponto de referência:

---

[1] Adaptada a partir de questão proposta na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas de 2017, disponível no link http://www.obmep.org.br/provas_static/2017/f1n1.htm

[2] Adaptação da atividade proposta no Material 01

Fonte: adaptada da internet

Ao som de um apito, ambas correm para lados opostos, e a novo som do apito param de correr, permanecendo no local. Cada integrante da dupla escolhe como medir a distância que percorreu, podendo utilizar passos, palmos, canetas, um bastão ou até mesmo cordas de tamanhos variados.

Após todas as duplas medirem suas respectivas distâncias, a turma deve buscar identificar qual dupla correu mais, sendo os ganhadores aqueles que juntos (em dupla) somaram a maior distância.

Agora:

a. Como procederíamos para identificar a distância percorrida pela dupla? Por exemplo, se um integrante da dupla mediu sua distância com passos e o outro integrante mediu com uma corda, como proceder?

b. Se um integrante da dupla mediu sua distância com uma caneta BIC e obteve 98 canetas e o outro com um cabo de vassoura e obteve 4 cabos e meio, qual a distância total da dupla? Utilize os materiais que você tem ao seu alcance em casa para responder.

MISTURA DE COMBUSTÍVEIS

Não é difícil encontrarmos pessoas com dúvidas ou nos depararmos com dúvidas próprias sobre o uso e funcionalidade da gasolina comum e aditivada. Em geral a gasolina aditivada possui a mesma composição da gasolina comum com um acréscimo de aditivos (detergentes/dispersantes) que têm por objetivo manter limpo o sistema de alimentação de combustível do veículo evitando o acúmulo de resíduos.

Quanto às misturas de combustíveis existem diversas possibilidades, algumas dependendo das indicações do veículo, outras indiferentes às indicações. Além disto, a existência de aditivos em frascos vendidos separados do combustível aumenta as possibilidades de misturas existentes.

Considere a imagem abaixo para responder as questões a seguir (lembrando que “E” representa *empty* = vazio e “F” representa *full* = cheio):

a) Suponhamos que um determinado carro tenha a quantidade indicada pela imagem acima de gasolina comum em seu tanque. Caso o motorista queira completar o tanque com gasolina aditivada (essa gasolina aditivada tendo uma taxa de 0,5% de aditivos), qual será a taxa de aditivos no tanque todo?

b) Suponhamos que a gasolina já existente no tanque seja aditivada (com 0,5% de aditivos). O motorista deseja completar o tanque de gasolina comum e queira acrescentar o aditivo em frasco, o frentista o orienta que, para a determinada marca de aditivo, a medida correta é um frasco de 200ml para cada 40 litros de combustível.
   - Qual a taxa de aditivo por litro de combustível segundo o frentista?
   - Qual a taxa de aditivos no tanque todo após a mistura da gasolina já existente e a gasolina nova com o aditivo?

c) Caso a gasolina indicada no marcador fosse aditivada (tendo uma taxa de 0,5% de aditivos) e fosse acrescentada gasolina do mesmo tipo até o marcador indicar metade da capacidade do tanque. Qual seria a taxa de aditivos presente no tanque?

PARA PENSAR:

I. Em cada uma das situações anteriores, analise se você precisou operar com os números. Caso sim, identifique quais operações. Por que essas operações e não outras? Registre suas hipóteses ou conclusões.

Sobre o material: O Material 05, diferente dos demais, apresentava situações que nos direcionavam para diferentes significados. Nele buscávamos perceber as operações que utilizávamos em cada situação, o significado de frações envolvido e construir conjecturas sobre os motivos que nos levaram a determinadas operações e não outras.