

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Matemática e Estatística  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**O Problema de Extensão para o Laplaciano  
Fracionário**

Dissertação de Mestrado

Gleiciano Cosmo Santos

Porto Alegre, 12 de Maio de 2021.

Dissertação submetida por Gleiciano Cosmo Santos <sup>1</sup> como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Diego Marcon Farias (PPGMat-UFRGS)

Banca Examinadora:

Leonardo Prange Bonorino (PPGMat-UFRGS)

Patrícia Lisandra Guidolin (PPGMat-UFRGS)

Matheus Correia dos Santos (PPGMAp-UFRGS)

---

<sup>1</sup>Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

# Agradecimentos

Nesta página muito especial deste trabalho, gostaria de agradecer a algumas pessoas, dentre as muitas que me ajudaram a realizá-lo.

A Deus, pelo dom da vida, por ser meu guia e fortaleza.

A todos os meus familiares, que contribuíram de maneira significativa para minha educação ao longo da minha vida como também por acompanhar-me neste processo de minha formação. Em especial, a minha irmã Gleice que sempre esteve ao meu lado me incentivando e nunca deixando desistir, nas diversas crises que tive ao longo do mestrado. Ao meu pai Antônio e aos meus tios, que foram os meus pais depois da partida de minha mãe, sem dúvidas eu nunca conseguiria sem a ajuda deles, nesse momento final da dissertação eles já não se encontram nesse plano, mas eles sem dúvidas foram as mais importante da minha vida.

Não podia deixar de agradecer alguns professores que passaram na minha vida, o qual foram minhas inspirações e motivações para continuar na matemática. Começo agradecendo aos Professores Maurício Fronza Da Silva, Juliano Damião Bittencourt De Godói, Cláudia Candida Pansonato e Patrícia Lisandra Guidolin pelas as contribuições e motivações para estudar análise e geometria na iniciação científica desde a graduação.

Sobre os professores do mestrado agradeço a todos que tive aulas e pude conversar e aprender algo, em especial ao professor Leonardo Prange Bonorino, pela a atenção e dedicação nas quatro disciplinas fantástica de EDP's e Geometria que pude fazer, sem falar das várias conversas e discussões sobre vários assuntos da matemática. Sem dúvida, é uma inspiração como professor e pessoa, meu muito obrigado por tudo. Ao professor Fagner Bernardini Rodrigues, que tive o privilégio de fazer duas disciplinas sobre sistemas dinâmicos e por está sempre a disposição para conversar e tira dúvidas, não

só da matemática, mas da vida também.

Ao meu orientador Prof. Diego Marcon Farias, uma pessoa que admiro e respeito, um profissional no qual me espelho desde quando o conheci. Tive a oportunidade de cursar Geometria Riemanniana sob uma visão “analista”, ministradas por ele em 2019. O agradeço por se dispor a me ajudar quando estava numa etapa complicada do mestrado. Pela amizade e tão sempre valiosas sugestões para realizar o presente trabalho. Tenho muito orgulho de ter sido orientado por alguém tão qualificado.

Aos membros da banca, Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino, Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Patrícia Lisandra Guidolin e Prof. Dr. Matheus Correia dos Santos, por terem aceitado participar da banca examinadora.

Aos meus amigos que fiz no Departamento de Matemática da UFRGS durante esta etapa. Especialmente aqueles que estiveram ao meu lado nos momentos mais difíceis e prazerosos durante essa etapa, são eles Izabella, Josué, Hugo, Jáder, William, Marcus, G.Feltes, G.Pessil, G.Lorensi e Eduardo Ph, dentre outros que não terei como citar, pois só tenho uma quantidade finita de citações.

A todos os funcionários do Departamento de Matemática da UFRGS, principalmente, o pessoal da secretaria que estavam sempre a disposição para ajudar .

A todos os professores do Departamento de Matemática da UFRGS que contribuíram para minha formação.  
À UFRGS, pela infraestrutura e recursos oferecidos para a realização deste trabalho.

Ao CNPq e a CAPES pelo apoio financeiro durante o período de mestrado. Meus sinceros agradecimentos a todas as pessoas que de uma ou outra forma estiveram ao meu lado ao longo desta etapa.

# Resumo

Nesta dissertação, estudamos os resultados, desenvolvidos por Caffarelli e Silvestre em [5], que caracterizam o operador Laplaciano fracionário em termos de uma extensão que envolve um operador local em forma divergente. Além disso, aplicamos esta caracterização para mostrar, seguindo Caffarelli-Silvestre, uma desigualdade do tipo Harnack para funções  $s$ -harmônicas não negativas. Finalmente, mostramos que a Desigualdade de Harnack implica em regularidade de Hölder.

**Palavras-chave:** Laplaciano fracionário, Extensão  $s$ -harmônica, Desigualdade de Harnack, Regularidade Hölder

# Abstract

In this Master's thesis, we analyze results, developed by Caffarelli and Silvestre in [5], that characterize the fractional Laplacian operator in terms of an extension that involves a local operator in divergence form. In addition, we apply this characterization to show, following Caffarelli-Silvestre, a Harnack-type inequality for non-negative  $s$ -harmonic functions. Finally, we show that Harnack Inequality implies Hölder's regularity.

**Keywords:** Fractional Laplacian,  $s$ -harmonic Extension, Harnack Inequality, Hölder Regularity

# Conteúdo

<b>Agradecimentos</b>	<b>3</b>
<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>1 Noções Preliminares</b>	<b>11</b>
1.1 Espaço de Sobolev Fracionário $H^s(\mathbb{R}^n)$	11
1.2 Laplaciano Fracionário	12
1.3 Via Transformada de Fourier	16
1.4 Exemplos	23
1.4.1 Uma função $s$ -harmônica	23
1.4.2 Laplaciano fracionário constante em uma bola	26
<b>2 O Laplaciano Fracionário e o Problema de Extensão</b>	<b>29</b>
2.1 Solução Fundamental	29
2.2 Fórmula de Poisson	32
2.3 Funcional Energia	40
2.4 A Extensão e o Laplaciano Fracionário	45
2.4.1 Via Fórmula de Poisson	45
2.4.2 Via Transformada de Fourier	47
<b>3 Extensões por Reflexão</b>	<b>52</b>
3.1 Caso Divergente	52
3.2 Caso Não Divergente	54
<b>4 Desigualdade de Harnack</b>	<b>58</b>

# Introdução

Nos últimos anos, tem crescido bastante o interesse no estudo de operadores do tipo fracionário. Muitos trabalhos têm sido publicados provando existência, multiplicidade e regularidade de soluções de problemas envolvendo tais operadores. O protótipo é o Laplaciano fracionário que definimos na Seção 1.2. Do ponto de vista das aplicações, estes operadores desempenham um papel crucial na descrição de vários fenômenos, tais como: o processo de difusão de Lévy, propagação de chamas, mecânica contínua, estudos que envolvem dinâmica populacional e também teoria de jogos. Para mais detalhes a respeito das aplicações e motivações para o estudo de tais operadores, mencionamos os trabalhos de Applebaum, Vazquez e Servadei-Valdinoci [2, 17, 15]. Devido a sua importância, muitos problemas têm sido investigados como, por exemplo, nos trabalhos de Brändle-Colorado-Pablo, Servadei-Valdinoci, Iannizzoto-Pereira-Squassina, Goyal-Sreenadh, Bisci-Servadei e Xiang-Zhang-Radulescu [3, 14, 12, 11, 13, 18], bem como suas referências, onde os autores provaram resultados de existência e multiplicidade para problemas envolvendo o operador Laplaciano Fracionário e o  $p$ -Laplaciano fracionário.

Um dos principais trabalhos que desenvolveram esta teoria foi realizado por Caffarelli e Silvestre [5, 6] que, inspirados nas ideias que aparecem em Silvestre [16], mostram a existência de uma relação entre o Laplaciano Fracionário e uma equação local, definida no semi-espço superior, na forma divergente. Anteriormente, já havia sido notado por Caffarelli [6] a conexão entre a solução  $u$  do problema

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1)$$

e a função  $(-\Delta)^{1/2}f$ , onde  $(-\Delta)^{1/2}$  é o operador Laplaciano fracionário de



potência  $1/2$ . Tal relação é descrita da seguinte forma:

$$-u_y(x, 0) = (-\Delta)^{1/2} f(x). \quad (2)$$

Nesta dissertação, estudamos o resultado obtido por Caffarelli e Silvestre [5], onde, para  $s \in (0, 1)$ , é estabelecida a seguinte relação

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^a u_y(x, y) = C(-\Delta)^s f(x), \quad (3)$$

com  $u$  sendo a solução de

$$\begin{cases} \operatorname{div}(y^a \nabla u(x, y)) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4)$$

e onde  $a = 1 - 2s \in (-1, 1)$  e  $C$  é uma constante de normalização. Observe que se  $a = 0$ , retornamos ao caso anterior (1) e (2). A partir dessa técnica, foram obtidas muitas propriedades relacionadas ao Laplaciano Fracionário. Por exemplo, nesse mesmo trabalho, Caffarelli e Silvestre provam a Desigualdade de Harnack.

O objetivo desta dissertação é detalhar alguns dos resultados de Caffarelli e Silvestre [5], buscando, quando necessário, a teoria preliminar na literatura. Enfatizamos que o trabalho consiste de uma revisão bibliográfica e que os teoremas apresentados não são de nossa autoria. Apresentamos, sempre que possível, a devida referência para a publicação original.

Dividimos o trabalho em quatro capítulos. No Capítulo 1, apresentamos as definições iniciais do espaço  $H^s(\mathbb{R}^n)$ , do Laplaciano fracionário e mostramos uma caracterização do Laplaciano fracionário via transformada de Fourier. Terminamos o capítulo apresentando o cálculo explícito do laplaciano fracionário em dois exemplos.

No Capítulo 2, iniciamos o estudo da relação (3)–(4). Para isso, analisamos propriedades da equação  $\operatorname{div}(y^a \nabla u) = 0$  tais como solução via fórmula de Poisson, caracterização variacional de soluções como minimizantes do funcional energia

$$u \in H^s(\mathbb{R}^n) \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} y^a |\nabla u|^2 dx dy$$

unicidade de solução e, finalmente, provamos a relação desejada.

No Capítulo 3, mostramos que localmente é possível estender a solução do problema local para uma bola em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , não somente no semi-espaço, e provamos que soluções deste problema estendido são de classe  $C^1$  via resultado do tipo Harnack de Caffarelli-Gutierrez [7].

No Capítulo 4 provamos a Desigualdade de Harnack para uma função  $f$  não negativa, sob a hipótese de que  $(-\Delta)^s f = 0$  em  $B_r$ , isto é, encontramos uma constante  $C > 1$  que depende somente de  $s$  e da dimensão  $n$ , tal que

$$\sup_{B_{r/2}} f \leq C \inf_{B_{r/2}} f.$$

Terminamos o capítulo e esta dissertação mostrando, como corolário usual da Desigualdade de Harnack, que se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é não-negativa e satisfaz  $(-\Delta)^s f = 0$  em  $B_1$ , então  $f \in C^\alpha$  em  $\bar{B}_{1/2}$  para algum  $\alpha > 0$ .

# Capítulo 1

## Noções Preliminares

Este capítulo destina-se à apresentar e desenvolver as ferramentas que são utilizadas ao longo deste trabalho.

### 1.1 Espaço de Sobolev Fracionário $H^s(\mathbb{R}^n)$

Esta seção tem por objetivo apresentar o espaço de Sobolev fracionário. Começamos a seção definindo o espaço de Sobolev fracionário  $H^s(\mathbb{R}^n)$ , também conhecidos por espaços de Aronszajn, de Slobodeckij ou Gagliardo.

**Definição 1.1.** Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Para  $s \in (0, 1)$ , definimos o espaço de Sobolev fracionário por

$$H^s(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{n}{2} + s}} \in L^2(\Omega \times \Omega) \right\}. \quad (1.1)$$

A função  $[\cdot]_{H^s(\Omega)} : H^s(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$[u]_{H^s(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.2)$$

é uma seminorma, chamada seminorma de Gagliardo. O espaço  $H^s(\Omega)$  é um espaço de Banach com a norma dada por

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} := \sqrt{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + [u]_{H^s(\Omega)}^2}. \quad (1.3)$$

**Teorema 1.2.** Para todo  $s > 0$ , o espaço  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  das funções suaves com suporte compacto é denso em  $H^s(\mathbb{R}^n)$ .

*Demonstração.* Veja [1, Theorem 7.8]. □

## 1.2 Laplaciano Fracionário

Definimos agora o espaço de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  e o operador Laplaciano fracionário  $(-\Delta)^s u$  com  $s \in (0, 1)$  e  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Dados o multi-índice  $\alpha \in (\{0\} \cup \mathbb{N})^n$  e  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  denotamos

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \\ x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \text{ e} \\ \partial^\alpha &:= \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

**Definição 1.3.** O espaço de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , também conhecido como espaço das funções rapidamente decrescentes, é a coleção das funções  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tais que

$$\|f\|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty,$$

para quaisquer multi-índices  $\alpha, \beta \in (\{0\} \cup \mathbb{N})^n$ .

A definição acima pode ser interpretada como segue: uma função está neste espaço se ela for suave e, além disso, a própria função e todas as suas derivadas decaem mais rápido, quando  $|x| \rightarrow +\infty$ , do que o inverso de qualquer polinômio. A topologia desse espaço é gerada pelas seminormas dadas a seguir: para  $k \in \mathbb{N}$  e  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$P_k(\varphi) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^k \sum_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

**Definição 1.4.** Para  $s \in (0, 1)$ , o Laplaciano fracionário, no espaço das funções de Schwartz, é o operador linear

$$(-\Delta)^s : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

dado por

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u(x) &= c_{n,s} \text{PV} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \\ &:= c_{n,s} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(x)} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy, \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde PV é uma abreviação para “valor principal” e a constante  $c_{n,s}$  é dada explicitamente por

$$c_{n,s} := \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{n+2s}} d\zeta \right)^{-1}, \tag{1.5}$$

sendo  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ .

Veamos agora que o limite dado em (1.4) existe para todo  $s \in (0, 1)$ . De fato, seja  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Sabemos que

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x)| + |u(y)| \leq \|u\|_\infty + \|u\|_\infty = 2\|u\|_\infty,$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Além disso, como  $|\nabla u|$  é uma função limitada temos que  $u$  é de Lipschitz, donde temos  $|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|$ . Então,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{n+2s}} dy &\leq C \int_{B_1(x)} \frac{|x - y|}{|x - y|^{n+2s}} dy + 2\|u\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(x)} \frac{1}{|x - y|^{n+2s}} dy \\ &\leq \bar{C} \left( \int_{B_1(x)} \frac{1}{|x - y|^{n+2s-1}} dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(x)} \frac{1}{|x - y|^{n+2s}} dy \right). \end{aligned}$$

Agora como  $s > 0$ , temos que  $n + 2s > n$  e assim a integral

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(x)} \frac{1}{|x - y|^{n+2s}} dy$$

é sempre finita. Porém, a integral

$$\int_{B_1(x)} \frac{1}{|x - y|^{n+2s-1}} dy \tag{1.6}$$

é finita se, e somente se, se  $s \in (0, 1/2)$ . Ou seja, tem-se

$$\frac{1}{|x - y|^{n+2s-1}} \in L^1(B_1(x)),$$

quando  $s \in (0, 1/2)$ . Porém, não podemos afirmar o mesmo quando  $s \geq 1/2$ , já que não é integrável para  $s \in [1/2, 1)$ , no entanto, ainda assim existe o limite quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . É exatamente esta a razão de se tomar o PV na definição (1.4) quando  $s \in [1/2, 1)$ . Para  $s \in [1/2, 1)$ , considere  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  e localmente  $C^2(\mathbb{R}^n)$ , usando a expansão de Taylor de  $u$  em  $B_1(x)$ , temos

$$u(y) = u(x) + \nabla u(x) \cdot (y - x) + \frac{1}{2}(y - x)^T D^2 u(x(1 - \theta) + \theta y)(y - x),$$

onde  $\theta \in (0, 1)$ . Logo,

$$\frac{u(y) - u(x)}{|y - x|^{n+2s}} = \frac{\nabla u(x) \cdot (y - x)}{|y - x|^{n+2s}} + \frac{1}{2} \frac{(y - x)^T D^2 u(x(1 - \theta) + \theta y)(y - x)}{|y - x|^{n+2s}}.$$

Note que o termo

$$\frac{\nabla u(x) \cdot (y - x)}{|y - x|^{n+2s}}$$

calcula a média em uma vizinhança de  $x$  por simetria, uma vez que o termo é ímpar em relação a  $x$ , e portanto não contribui para a integral se fizermos isto de maneira simétrica. Num sentido o valor PV mata a primeira ordem da função no numerador, o que produz um crescimento linear e concentra-se nos restos de segunda ordem. Assim, temos

$$\begin{aligned} \int_{B_1(x)} \frac{u(y) - u(x)}{|y - x|^{n+2s}} dy &= \int_{B_1(x)} \frac{1}{2} \frac{(y - x)^T D^2 u(x(1 - \theta) + \theta y)(y - x)}{|y - x|^{n+2s}} dy \\ &\leq \int_{B_1(x)} K \|D^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{|y - x|^2}{|y - x|^{n+2s}} dy \\ &= K \|D^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B_1(x)} \frac{1}{|y - x|^{n+2s-2}} dy \end{aligned} \quad (1.7)$$

que é integrável, pois  $n - 2s - 2 < n$ . Logo, a definição (1.4) está bem definida e vale para todo  $s \in (0, 1)$ .

Agora, vamos ver uma outra maneira de reescrever o Laplaciano fracionário para todo  $s \in (0, 1)$

**Teorema 1.5.** Para  $s \in (0, 1)$ ,  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ , temos

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{c_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x + y) + u(x - y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy.$$

*Demonstração.* Usando (1.4) e fazendo a mudança de variável  $z = y - x$ , temos

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u(x) &= -c_{n,s} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(x)} \frac{u(y) - u(x)}{|x - y|^{n+2s}} dy \\ &= -c_{n,s} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \frac{u(z + x) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz. \end{aligned}$$

Agora, fazendo  $\tilde{z} = -z$  no último termo da igualdade temos que,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \frac{u(x + z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \frac{u(x - \tilde{z}) - u(x)}{|\tilde{z}|^{n+2s}} d\tilde{z}.$$

Ainda, para simplificar, escrevemos  $\tilde{z} = z$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} 2 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \frac{u(x-z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \frac{u(x+z) + u(x-z) - 2u(x)}{|z|^{n+2s}} dz. \end{aligned}$$

Fazendo  $y = z$ , e  $\epsilon \rightarrow 0$ , temos

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{c_{n,s}}{2} \text{PV} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy. \quad (1.8)$$

Mostramos agora a integral em (1.8) não é no sentido de “valor principal”, isto é, a integral acima é finita. Seja  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , em particular  $u \in C^2$ , assim pela Fórmula de Taylor com resto de Lagrange tomando  $y$  próximo da origem temos que

$$u(x+y) = u(x) + \nabla u(x) \cdot y + \frac{1}{2} y^T D^2 u(x + \theta_1 y) y$$

e

$$u(x-y) = u(x) - \nabla u(x) \cdot y + \frac{1}{2} y^T D^2 u(x + \theta_2 y) y,$$

onde  $\theta_1$  e  $\theta_2 \in (0, 1)$ . Somando estas expressões, obtemos

$$\begin{aligned} |u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)| &= \left| \frac{1}{2} y^T D^2 u(x + \theta_1 y) y + \frac{1}{2} y^T D^2 u(x - \theta_2 y) y \right| \\ &\leq \frac{1}{2} (\|D^2 u(x + \theta_1 y)\| |y|^2 + \|D^2 u(x - \theta_2 y)\| |y|^2) \\ &\leq \|D^2 u\|_\infty |y|^2. \end{aligned}$$

Com isso, temos

$$\frac{|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|}{|y|^{n+2s}} \leq \frac{\|D^2 u\|_\infty}{|y|^{n+2s-2}}.$$

Agora, tomando  $\delta > 0$  e integrando, temos

$$\begin{aligned} \int_{B_\delta(0)} \frac{|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|}{|y|^{n+2s}} dy &\leq \int_{B_\delta(0)} \frac{\|D^2 u\|_\infty}{|y|^{n+2s-2}} dy \\ &\leq \|D^2 u\|_\infty \int_{B_\delta(0)} \frac{1}{|y|^{n+2s-2}} dy < \infty. \end{aligned}$$

Ainda, como  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , temos que  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Logo

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} \frac{|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|}{|y|^{n+2s}} dy < \infty.$$

Portanto, dessas duas últimas estimativas obtidas acima, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|}{|y|^{n+2s}} dy < \infty.$$

E assim, de fato, podemos escrever simplesmente

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{c_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x+y) + u(x-y) - 2u(x))}{|y|^{n+2s}} dy.$$

□

### 1.3 Via Transformada de Fourier

Agora, damos uma outra representação para o espaço  $H^s(\mathbb{R}^n)$  por meio da transformada de Fourier e provamos que, quando  $s \in (0, 1)$ , esta representação coincide com aquela que foi dada por meio da seminorma de Gagliardo. Analisamos também uma caracterização para o Laplaciano fracionário em termos da transformada de Fourier.

**Definição 1.6.** Para cada  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  a transformada de Fourier está bem definida e é dada por

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}(\varphi)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} \varphi(x) dx.$$

Assim definida, a aplicação  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  é um isomorfismo, ver [8, Chapter 4], cuja inversa é dada por

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} \varphi(\xi) d\xi. \quad (1.9)$$

Juntando as duas fórmulas anteriores, temos que

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} \mathcal{F}\varphi(\xi) d\xi.$$



Até verificarmos que as definições são equivalentes, vamos usar a notação temporária  $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n)$ . Definimos

$$\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n); \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s}) |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}. \quad (1.10)$$

Uma observação a ser feita é que, diferentemente da definição via seminorma de Gagliardo, essa definição faz sentido para  $s \geq 1$ . No próximo resultado, estabelecemos uma relação entre o Laplaciano fracionário e a transformada de Fourier.

**Proposição 1.7.** *Para  $s \in (0, 1)$  e  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , tem-se*

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1} \left( |\xi|^{2s} \mathcal{F}u \right).$$

*Demonstração.* Nesta demonstração, por simplicidade, denotamos temporariamente  $\mathcal{L} = (-\Delta)^s$ . Queremos mostrar que a função  $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $M(\xi) = |\xi|^{2s}$  satisfaz

$$\mathcal{L}u = \mathcal{F}^{-1} (M(\mathcal{F}(u))). \quad (1.11)$$

Iniciamos verificando que se  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , então

$$\frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n). \quad (1.12)$$

De fato, usando que a derivada segunda satisfaz  $|D^2 u(x)| \leq \frac{C_1}{1+|x|^{n+1}}$ , visto que  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|}{|y|^{n+2s}} &\leq \frac{|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|}{|y|^{n+2s}} \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)}(y) \\ &\quad + \sup_{B_1(x)} |D^2 u| \frac{\chi_{B_1(0)}(y)}{|y|^{n+2s-2}} \\ &\leq C \left( \frac{|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|}{|y|^{n+2s}} \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)}(y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\chi_{B_1(0)}(y)}{|y|^{n+2s-2}(1+|x|^{n+1})} \right). \end{aligned}$$

Isto implica que, para qualquer  $\epsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|}{|y|^{n+2s}} dx dy \\
&= \int_{B_\epsilon(0)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|}{|y|^{n+2s}} dx dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|}{|y|^{n+2s}} dx dy \\
&\leq C \int_{B_\epsilon(0)} \frac{1}{|y|^{n+2s-2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+|x|^{n+1}} dx dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|}{|y|^{n+2s}} dx dy.
\end{aligned}$$

Agora, resta estimar cada um destes termos. Para isso, observe que

$$\begin{aligned}
\int_{B_\epsilon(0)} \frac{1}{|y|^{n+2s-2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+|x|^{n+1}} dx dy &\leq \int_{B_\epsilon(0)} \frac{1}{|y|^{n+2s-2}} \int_{B_1(0)} 1 dx dy \\
&\quad + \int_{B_\epsilon(0)} \frac{1}{|y|^{n+2s-2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} \frac{1}{|x|^{n+1}} dx dy \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Para majorar o outro termo, note que

$$\frac{|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|}{|y|^{n+2s}} \leq \frac{|u(x+y)| + |u(x-y)| + 2|u(x)|}{|y|^{n+2s}}.$$

Lembrando que  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|}{|y|^{n+2s}} dx dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \frac{1}{|y|^{n+2s}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x+y)| dx dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \frac{1}{|y|^{n+2s}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x-y)| dx dy \\
&\quad + 2 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \frac{1}{|y|^{n+2s}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| dx dy < +\infty,
\end{aligned}$$

o que mostra (1.12). Em seguida, podemos usar o Teorema de Fubini para mudar a ordem de integração em  $y$  com a transformada de Fourier em  $x$ .

Portanto, podemos aplicar a transformada de Fourier na variável  $x$  em (1.11) e obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathcal{L}u) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} \mathcal{L}u(x) \, dx \\
&= -\frac{c_{n,s}}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2f(x)}{|y|^{n+2s}} \, dy \, dx \\
&= -\frac{c_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^{n+2s} (2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)) \, dx \, dy \\
&= -\frac{c_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathcal{F}(u(\cdot+y) + u(\cdot-y) - 2u)}{|y|^{n+2s}} \, dy.
\end{aligned}$$

Por propriedades<sup>1</sup> da Transformada de Fourier, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathcal{F}(u(\cdot+y) + u(\cdot-y) - 2u)}{|y|^{n+2s}} \, dy = (\mathcal{F}u)(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\xi \cdot y} + e^{-i\xi \cdot y} - 2}{|y|^{n+2s}} \, dy.$$

Ainda, como  $e^{i\xi \cdot y} + e^{-i\xi \cdot y} = 2 \cos(\xi \cdot y)$ , temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathcal{L}u) &= -\frac{1}{2} c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\xi \cdot y} + e^{-i\xi \cdot y} - 2}{|y|^{n+2s}} \, dy (\mathcal{F}u)(\xi) \\
&= -\frac{1}{2} c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2 \cos(\xi \cdot y) - 2}{|y|^{n+2s}} \, dy (\mathcal{F}u)(\xi) \\
&= c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi \cdot y)}{|y|^{n+2s}} \, dy (\mathcal{F}u)(\xi).
\end{aligned}$$

Assim, para verificar que  $\mathcal{F}(\mathcal{L}u) = M(\xi)(\mathcal{F}u)(\xi)$ , basta provar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi \cdot y)}{|y|^{n+2s}} \, dy = \frac{|\xi|^{2s}}{c_{n,s}}. \quad (1.13)$$

Para isso, notemos que se  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$  está próximo da origem, então  $\zeta_1$  próximo de 0, e pela Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange que:

$$\frac{1 - \cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{n+2s}} \leq \frac{|\zeta_1|^2}{|\zeta|^{n+2s}} \leq \frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^{n+2s}} \leq \frac{1}{|\zeta|^{n+2s-2}}.$$

---

<sup>1</sup>De fato, usamos linearidade e o fato que

$$\mathcal{F}(f(\cdot+y))(\xi) = \frac{e^{i\xi \cdot y}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot (x+y)} f(x+y) \, dx = e^{i\xi \cdot y} \mathcal{F}(f(\cdot))(\xi).$$

Logo, devido  $n + 2s > n$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{n+2s}} d\zeta \text{ é finita e positiva.}$$

Agora, considere a função  $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$I(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi \cdot y)}{|\xi|^{n+2s}} dy.$$

Verificamos agora que  $I$  é invariante por rotação, isto é,  $I(\xi) = I(|\xi|e_1)$  onde  $e_1 = (1, \dots, 0)$  é o primeiro vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . De fato, para  $n = 1$  temos que  $e_1 = 1$ . Assim dado  $\xi \in \mathbb{R}$  temos as duas possibilidades a seguir:

- 1) Se  $|\xi| = \xi$ , então a igualdade  $I(|\xi|e_1) = I(\xi)$  é imediata.
- 2) Se  $|\xi| = -\xi$ , utilizamos que a função cosseno é par e segue que

$$\begin{aligned} I(|\xi|e_1) &= I(|\xi|) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(|\xi| \cdot y)}{|y|^{1+2s}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(-\xi \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy = I(\xi). \end{aligned}$$

Agora, para o caso em que  $n \geq 2$ , considere uma rotação  $R$  para a qual  $R(|\xi|e_1) = \xi$  e denote por  $R^T$  sua transposta. Fazendo  $\tilde{y} = R^T y$ , temos

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(R(|\xi|e_1) \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos((|\xi|e_1) \cdot (R^T y))}{|y|^{n+2s}} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos((|\xi|e_1) \cdot \tilde{y})}{|\tilde{y}|^{n+2s}} d\tilde{y} \\ &= I(|\xi|e_1). \end{aligned}$$

Por fim, calculamos

$$\begin{aligned} I(\xi) &= I(|\xi|e_1) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos((|\xi|e_1) \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(|\xi|y_1)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \frac{|\xi|^{n+2s}}{|\xi|^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{n+2s}} d\zeta = \frac{|\xi|^{2s}}{c_{n,s}}, \end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade utilizamos a mudança de variáveis  $\zeta = |\xi|y$  e  $c_{n,s}$  é a constante definida em (1.5). Isso prova (1.13), o que conclui a prova.  $\square$

A grosso modo, a proposição acima caracteriza o operador laplaciano fracionário a partir da transformada de Fourier, tomando a potência  $s$  no multiplicador associado ao operador laplaciano clássico. De fato, usando a transformada inversa de Fourier dada em (1.9), temos que

$$\begin{aligned}
-\Delta u(x) &= -\Delta (\mathcal{F}^{-1}\widehat{u}) \\
&= -\Delta \left( \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} \widehat{u} \, d\xi \right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 e^{i\xi \cdot x} \widehat{u} \, d\xi \\
&= \mathcal{F}^{-1} (|\xi|^2 \widehat{u}(\xi)),
\end{aligned}$$

assim, o laplaciano clássico atua no espaço de Fourier como um multiplicador de  $|\xi|^2$ .

A seguir, provamos que, quando  $s \in (0, 1)$ , definir o espaço  $H^s$  através da seminorma de Gagliardo é o mesmo que defini-lo via a transformada de Fourier.

**Proposição 1.8.** *Seja  $s \in (0, 1)$ . Então, o espaço de Sobolev fracionário  $H^s(\mathbb{R}^n)$  coincide com  $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n)$ . Além disso, para todo  $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ ,*

$$[u]_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 = \frac{2}{c_{n,s}} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 \, d\xi, \quad (1.14)$$

onde  $c_{n,s}$  é a constante definida em (1.5).

*Demonstração.* Considerando  $z = x - y$  e usando a Fórmula de Plancherel [8, Chapter 4], temos que

$$\begin{aligned}
[u]_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} \, dx \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(z + y) - u(y)|^2}{|z|^{n+2s}} \, dz \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{u(z + y) - u(y)}{|z|^{\frac{n}{2}+s}} \right|^2 \, dy \, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left\| \frac{u(z + \cdot) - u(\cdot)}{|z|^{\frac{n}{2}+s}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left\| \mathcal{F} \left( \frac{u(z + \cdot) - u(\cdot)}{|z|^{\frac{n}{2}+s}} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \, dz.
\end{aligned}$$

Agora, utilizando (1.13) e a propriedade de translações da transformada de Fourier, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left\| \mathcal{F} \left( \frac{u(z + \cdot) - u(\cdot)}{|z|^{\frac{n}{2} + s}} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 dz &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{i\xi \cdot z} - 1|^2}{|z|^{n+2s}} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi dz \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi \cdot z)}{|z|^{n+2s}} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 dz d\xi \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi \cdot z)}{|z|^{n+2s}} dz d\xi \\
&= \frac{2}{c_{n,s}} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 |\xi|^{2s} d\xi,
\end{aligned}$$

o que termina a prova de (1.14). Agora, para provar a equivalência entre as definições, lembre que

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); [u]_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 < \infty\}$$

e

$$\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n); \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s}) |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty \right\}.$$

Sabemos ainda que dada uma função  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$  pela Fórmula de Plancherel  $\|\mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 < \infty$ . Utilizando (1.14) e para  $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ , temos

$$\begin{aligned}
[u]_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 < \infty &\iff \int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^{2s}) |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty \\
&\iff \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s}) |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty.
\end{aligned}$$

Isso prova que as definições de  $H^s(\mathbb{R}^n)$  e  $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n)$  de fato coincidem.  $\square$

Finalmente, na próxima proposição, conclui-se a relação entre o Laplaciano Fracionário e o espaço  $H^s(\mathbb{R}^n)$ .

**Proposição 1.9.** *Para  $s \in (0, 1)$  e  $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ , temos*

$$[u]_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 = 2c_{n,s}^{-1} \|(-\Delta)^{s/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

*Demonstração.* Pela fórmula de Plancherel e as Proposições 1.7 e 1.8, temos

$$\begin{aligned}
 \|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \|\mathcal{F}(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
 &= \||\xi|^s \mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u|^2 d\xi \\
 &= \frac{c_{n,s}}{2} [u]_{H^s(\mathbb{R}^n)}. \quad \square
 \end{aligned}$$

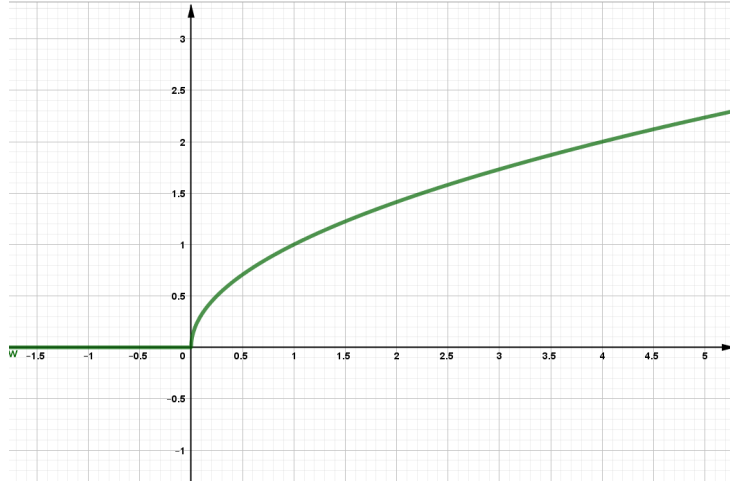
## 1.4 Exemplos

Nesta última seção, apresentamos dois exemplos explícitos, retirado de Bucur, Valdinoci [4, Sections 2.4 e 2.6] que envolvem o Laplaciano Fracionário. No primeiro caso fornecemos um exemplo de uma função que é  $s$ -harmônica em  $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$  e no segundo caso um exemplo de uma função cuja o laplaciano fracionário é constante na bola. Esperamos que esses exemplos ilustrem, em particular, que não é trivial trabalhar com o operador não local  $(-\Delta)^s$ .

### 1.4.1 Uma função $s$ -harmônica

Definimos  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$w_s(x) := x_+^s = (\max\{x, 0\})^s.$$



O objetivo desta seção é calcular  $(-\Delta)^s w_s$ . Nós vamos mostrar que

$$(-\Delta)^s w_s(x) = \begin{cases} -c_s |x|^{-s} & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (1.15)$$

para uma constante adequada  $c_s > 0$ . Em particular,  $w_s$  é  $s$ -harmônica em  $\mathbb{R}_+ = \{x > 0\}$ .

Notamos inicialmente que, por um cálculo direto,

$$2w_s(x) = |x|^s + \frac{1}{s+1} \frac{d}{dx} |x|^{s+1}. \quad (1.16)$$

Em seguida, queremos aplicar a Transformada de Fourier em ambos os lados de (1.16). Utilizando a transformada dada em [4, pps 139-140] para a função  $|x|^q$ , temos que

$$\mathcal{F}(|x|^q) = C_q |\xi|^{-1-q}, \quad (1.17)$$

onde

$$C_q := -2(2\pi)^{-1/2} \Gamma(1+q) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi q}{2}\right) \quad \text{com } q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},$$

e  $\Gamma(1+q) = q!$ , onde  $\Gamma$  é a chamada função Gama. Podemos reenunciar (1.17) em termos da transformada inversa como segue:

$$\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^q) = \frac{|x|^{-1-q}}{C_{-1-q}}, \quad (1.18)$$

onde  $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Aplicando (1.17) em (1.16), temos que

$$\begin{aligned} 2\mathcal{F}(w_s) &= \mathcal{F}(|x|^s) + \frac{i\xi}{s+1} \mathcal{F}(|x|^{s+1}) \\ &= C_s |\xi|^{-1-s} + \frac{i\xi}{s+1} C_{s+1} |\xi|^{-2-s}. \end{aligned}$$

Logo, multiplicando ambos os lados por  $|\xi|^{2s}$ :

$$2|\xi|^{2s} \mathcal{F}(w_s) = C_s |\xi|^{-1+s} + \frac{iC_{s+1}\xi}{s+1} |\xi|^{-2+s}.$$

Agora, utilizando a propriedade da derivada da transformada de Fourier, temos

$$2\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \mathcal{F}(w_s)) = C_s \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-1+s}) + \frac{C_{s+1}}{s+1} \frac{d}{dx} \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-2+s}). \quad (1.19)$$



Agora, para continuarmos, vamos precisar da representação para  $\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^q)$  dada em (1.18) para as potências  $q = s - 1$  e  $q = s - 2$ , respectivamente. Isto é, vamos usar que

$$\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{s-1}) = \frac{|x|^{-s}}{C_{-s}} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{s-2}) = \frac{|x|^{1-s}}{C_{1-s}}.$$

Utilizando isto na conta acima, segue que

$$\begin{aligned} 2\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}\mathcal{F}(w_s)) &= \frac{C_s}{C_{-s}}|x|^{-s} + \frac{C_{s+1}}{s+1} \frac{d}{dx} \left[ \frac{|x|^{1-s}}{C_{1-s}} \right] \\ &= \frac{C_s}{C_{-s}}|x|^{-s} + \frac{1-s}{1+s} \cdot \frac{C_{s+1}}{C_{1-s}} x |x|^{-1-s}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Afirmamos que as constantes  $C_q$  satisfazem a seguinte relação

$$\frac{1-s}{1+s} \cdot \frac{C_{s+1}}{C_{1-s}} = -\frac{C_s}{C_{-s}}. \tag{1.21}$$

De fato, por propriedade da função Gamma, temos que

$$\Gamma(2+s) = (1+s)\Gamma(1+s) \quad \text{e} \quad \Gamma(2-s) = (1-s)\Gamma(1-s).$$

Lembre que a função seno satisfaz

$$\text{sen} \frac{\pi(s+1)}{2} = -\text{sen} \frac{\pi(s-1)}{2}$$

e usando ainda que a função seno é ímpar, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1-s}{1+s} \cdot \frac{C_{s+1}}{C_{1-s}} &= \frac{1-s}{1+s} \cdot \frac{2(2\pi)^{-1/2}(1+s)\Gamma(1+s) \text{sen} \left( \frac{\pi(s-1)}{2} \right)}{2(2\pi)^{-1/2}(1-s)\Gamma(1-s) \text{sen} \left( \frac{\pi(s-1)}{2} \right)} \\ &= \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1-s)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \frac{C_s}{C_{-s}} &= \frac{(-2)(2\pi)^{-1/2}\Gamma(1+s) \text{sen} \left( \frac{\pi s}{2} \right)}{(-2)(2\pi)^{-1/2}\Gamma(1-s) \text{sen} \left( \frac{-\pi s}{2} \right)} \\ &= -\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1-s)} \end{aligned}$$

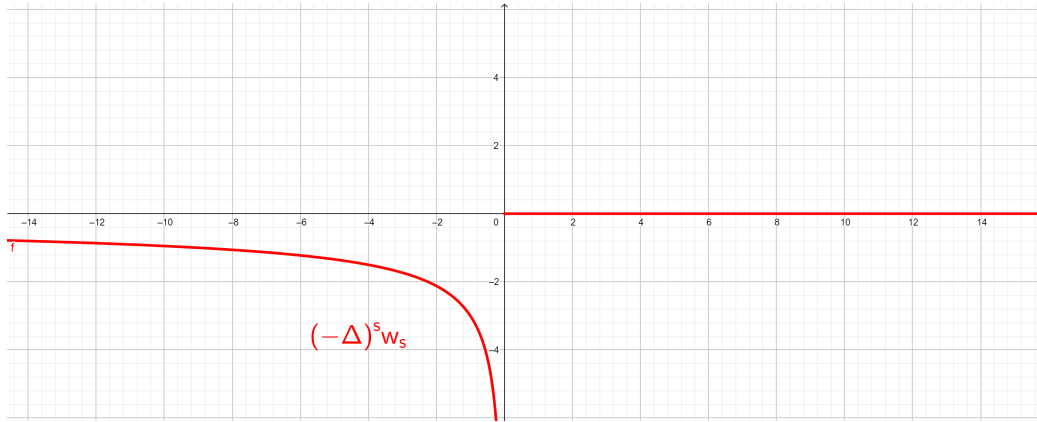
e disto concluímos o afirmado em (1.21). Por fim, substituindo (1.21) em (1.20) e utilizando a Proposição 1.7, temos

$$2(-\Delta)^s w_s = \frac{C_s}{C_{-s}} (|x|^{-s} - x|x|^{-1-s}). \quad (1.22)$$

Assim, para  $x > 0$ , segue que  $(-\Delta)^s w_s(x) = 0$  e, para  $x < 0$ , temos que  $(-\Delta)^s w_s(x) = -c_s |x|^{-s}$ , onde  $c_s = -\frac{C_s}{C_{-s}}$ . Note que  $\frac{C_s}{C_{-s}}$  é negativo e a escolha do sinal foi para termos  $c_s > 0$ . Portanto,

$$(-\Delta)^s w_s(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x > 0 \\ -c_s |x|^{-s}, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Em particular,  $w_s$  é uma função  $s$ -harmônica na semi-reta  $\{x > 0\}$ . O gráfico do Laplaciano fracionário de  $w_s$  é o seguinte:



### 1.4.2 Laplaciano fracionário constante em uma bola

Calculamos agora o Laplaciano Fracionário da seguinte função

$$u(x) = (1 - |x|^2)_+^s.$$

Vejamos que, em  $B_1(0)$ , tem-se

$$(-\Delta)^s u(x) = \frac{c_{n,s} \omega_n}{2} B(s, 1-s), \quad (1.23)$$

onde  $B$  é a função Beta especial dada por

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt.$$

e  $\omega_n$  é o volume da bola unitária em  $\mathbb{R}^n$ . Iniciamos fazendo o caso  $n = 1$ . Observando que  $u(y) = 0$  para qualquer  $y \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  e  $x \in B_1(0)$ , temos

$$\begin{aligned}
\frac{(-\Delta)^s u(x)}{c_{1,s}} &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{u(x)}{|x-y|^{1+2s}} dy + \int_{-1}^1 \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{1+2s}} dy \\
&\quad + \int_1^{\infty} \frac{u(x)}{|x-y|^{1+2s}} dy \\
&= \int_{-1}^1 \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{1+2s}} dy \\
&\quad + (1-x^2)_+^s \left( \int_{-\infty}^{-1} |x-y|^{-1-2s} dy + \int_1^{\infty} |x-y|^{-1-2s} dy \right) \\
&= \int_{-1}^1 \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{1+2s}} dy + (1-x^2)_+^s \cdot \frac{(1+x)^{-2s} + (1-x)^{-2s}}{2s}.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Um cálculo longo, mas direto, mostra que para  $x \in B_1(0)$ , tem-se [4, Equation (2.42)]

$$\text{PV} \int_{-1}^1 \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{1+2s}} dy = B(1-s, s) - (1-x^2)^{-s} \cdot \frac{(1+x)^{2s} + (1-x)^{2s}}{2s}. \tag{1.25}$$

Portanto, por (1.24) temos

$$(-\Delta)^s u(x) = c_{1,s} B(1-s, s). \tag{1.26}$$

Para o caso  $n > 1$ , consideramos  $x = (0, 0, \dots, x_n)$  com  $0 \leq x_n < 1$ . Mudamos para coordenadas polares  $y - x = th$ ,  $h \in \partial B_1$  e  $t \geq 0$ . Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{(-\Delta)^s u(x)}{c_{n,s}} &= \text{PV} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1-|x|^2)^s - (1-|y|^2)^s}{|x-y|^{n+2s}} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_{\partial B_1} \left( \text{PV} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-|x|^2)^s - (1-|x+ht|^2)^s}{|t|^{1+2s}} dt \right) dh.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Fazendo agora a mudança de variável  $t = -|x|h_n + \tau\sqrt{|h_n x|^2 - |x|^2 + 1}$  então  $dt = \sqrt{|h_n x|^2 - |x|^2 + 1} d\tau$ , onde  $h_n$  é a última coordenada de  $h$  e notando que

$$1 - |x + ht|^2 = (1 - \tau)^2 (1 - |x|^2 + |h_n x|^2).$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
& \text{PV} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - |x|^2)^s - (1 - |x + ht|^2)^s}{|t|^{1+2s}} dt \\
&= \text{PV} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - |x|^2)^s - (1 - \tau^2)^s (|h_n x|^2 - |x|^2 + 1)^s}{\left| -|x|h_n + \sqrt{|h_n x|^2 - |x|^2 + 1} \right|^{1+2s}} \sqrt{|h_n x|^2 - |x|^2 + 1} d\tau \\
&= \text{PV} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - |x|^2)^s - (1 - \tau^2)^s (|h_n x|^2 - |x|^2 + 1)^s}{\left| -|x|h_n + \sqrt{|h_n x|^2 - |x|^2 + 1} \right|^{1+2s}} \frac{\left( \sqrt{|h_n x|^2 - |x|^2 + 1} \right)^{1+2s}}{(|h_n x|^2 - |x|^2 + 1)^s} d\tau \\
&= \text{PV} \int_{\mathbb{R}} \frac{\frac{(1 - |x|^2)^s - (1 - \tau^2)^s (|h_n x|^2 - |x|^2 + 1)^s}{(|h_n x|^2 - |x|^2 + 1)^s}}{\left| \frac{-|x|h_n + \tau \sqrt{|h_n x|^2 - |x|^2 + 1}}{\sqrt{|h_n x|^2 - |x|^2 + 1}} \right|^{1+2s}} d\tau \\
&= \text{PV} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left( 1 - \frac{|x|^2 h_n^2}{|h_n x|^2 - |x|^2 + 1} \right)^s - (1 - \tau^2)^s}{\left| \tau - \frac{|x|h_n}{\sqrt{|h_n x|^2 - |x|^2 + 1}} \right|^{1+2s}} d\tau \\
&= c_{1,s}^{-1} (-\Delta)^s \bar{u} \left( \frac{|x|h_n}{\sqrt{|h_n x|^2 - |x|^2 + 1}} \right) \\
&= B(1 - s, s),
\end{aligned}$$

onde  $\bar{u}$  é a função unidimensional que já sabemos ter Laplaciano constante por (1.26). Agora, a partir de (1.27), concluímos que

$$\frac{(-\Delta)^s u(x)}{c_{n,s}} = \frac{1}{2} \int_{\partial B_1} B(1 - s, s) dh.$$

Portanto,

$$(-\Delta)^s u(x) = \frac{c_{n,s} \omega_n}{2} B(1 - s, s),$$

o que termina a prova.

# Capítulo 2

## O Laplaciano Fracionário e o Problema de Extensão

O objetivo deste capítulo é relacionar o Laplaciano Fracionário com um problema de extensão, a saber,

$$\begin{cases} \operatorname{div}(y^a \nabla u(x, y)) = 0, & \text{em } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = f(x), & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$  e  $a \in (-1, 1)$ . A solução deste problema de Dirichlet é chamada de uma extensão  $s$ -harmônica de  $f$ .

Nós começamos o capítulo apresentando uma solução fundamental para (2.1). Daí, na Seção 2.2, obtemos uma fórmula de Poisson para o problema de extensão. Em seguida, mostramos que soluções de (2.1) podem ser obtidas variacionalmente. Por fim, na Seção 2.4, apresentamos a caracterização de  $(-\Delta)^s f$  em termos da solução  $u$  de (2.1), ver (2.62).

### 2.1 Solução Fundamental

Nesta seção o objetivo é encontrar uma solução fundamental para a equação

$$\operatorname{div}(y^a \nabla u) = 0. \quad (2.2)$$

Para motivarmos as definições, abordamos as mesmas questões inicialmente para a equação de Laplace. A solução fundamental do Laplaciano já é conhecida na literatura clássica [8]: é a função  $\Psi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\Psi(x) = \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, \quad (2.3)$$

onde  $\omega_n$  é o volume da bola unitária em  $\mathbb{R}^n$  e  $n \geq 3$ . Isso significa que a função  $\Psi$  definida em (2.3) satisfaz

$$-\Delta\Psi = -\operatorname{div}(\nabla\Psi) = \delta_0 \text{ em } \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

onde  $\delta_0$  é a medida delta de Dirac em  $\mathbb{R}^n$  definida por:

$$\delta_0(E) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \in E, \\ 0, & \text{se } 0 \notin E, \end{cases} \quad (2.5)$$

onde  $E \subset \mathbb{R}^n$  mensurável. Em termos de integrais, para qualquer  $\eta$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) \, d\delta_0(x) = \eta(0). \quad (2.6)$$

Inspirados por (2.3), conjecturamos que a função  $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\phi(x, y) = \frac{1}{(n+1)(n-1)\omega_{n+1}} \frac{1}{(\sqrt{|x|^2 + y^2})^{n-1+a}}, \quad (2.7)$$

é um bom candidato para solução em (2.2). Observe que no caso de  $a = 0$ , tem-se (2.3) para  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,0)\}$ .

**Teorema 2.1.** *Seja  $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$u(x, y) = (|x|^2 + y^2)^{\frac{-n+1-a}{2}}, \quad (2.8)$$

*Então,  $u$  é solução da equação*

$$\operatorname{div}(y^a \nabla u) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \text{ com } a \in (-1, 1). \quad (2.9)$$

*Demonstração.* Notemos inicialmente que

$$\operatorname{div}_{x,y}(y^a \nabla u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial y},$$

onde

$$F_i = y^a u_{x_i} \text{ e } G = y^a u_y.$$

Com isto, temos que

$$\operatorname{div}(y^a \nabla u) = \sum_{i=1}^n y^a u_{x_i x_i} + a y^{a-1} u_y + y^a u_{yy} = y^a \left( \Delta_x u + \frac{a}{y} u_y + u_{yy} \right). \quad (2.10)$$

Agora, mostremos que  $u$  resolve (2.9) mostrando que

$$\Delta_x u + \frac{a}{y} u_y + u_{yy} = 0. \quad (2.11)$$

De fato,

$$u_{x_i} = (1 - n - a)x_i(|x|^2 + y^2)^{\frac{-1-n-a}{2}}.$$

Com isto, temos que

$$\begin{aligned} u_{x_i x_i} &= \left( (1 - n - a)x_i(|x|^2 + y^2)^{\frac{-1-n-a}{2}} \right)_{x_i} \\ &= \frac{(-n + 1 - a)}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+a+1}{2}}} \left[ \frac{(-n - a - 1)x_i^2}{(|x|^2 + y^2)} + 1 \right] \end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned} \Delta_x u &= \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} \\ &= \frac{(-n + 1 - a)}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+a+1}{2}}} \left[ \frac{(-n - a - 1)|x|^2}{(|x|^2 + y^2)} + n \right]. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\frac{a}{y} u_y = \frac{a(-n + 1 - a)}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+a+1}{2}}}$$

e

$$u_{yy} = \frac{(-n + 1 - a)}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+a+1}{2}}} \left[ \frac{(-n - a - 1)y^2}{(|x|^2 + y^2)} + 1 \right].$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta_x u + \frac{a}{y} u_y + u_{yy} &= \frac{(-n + 1 - a)}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+a+1}{2}}} \left[ \frac{(-n - a - 1)|x|^2}{(|x|^2 + y^2)} + n \right] \\ &\quad + \frac{a(-n + 1 - a)}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+a+1}{2}}} \\ &\quad + \frac{(-n + 1 - a)}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+a+1}{2}}} \left[ \frac{(-n - a - 1)y^2}{(|x|^2 + y^2)} + 1 \right]. \end{aligned}$$

Por fim, colocando em evidência os termos com mesmos expoentes, ficamos com

$$\begin{aligned}\Delta_x u + \frac{a}{y} u_y + u_{yy} &= \frac{(-n+1-a)}{(|x|^2+y^2)^{\frac{n+a+1}{2}}} [(-n-a-1) + n+1] + \frac{a(-n+1-a)}{(|x|^2+y^2)^{\frac{n+a+1}{2}}} \\ &= \frac{(-n+1-a)}{(|x|^2+y^2)^{\frac{n+a+1}{2}}} [-n-a-1+a+n+1] \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

## 2.2 Fórmula de Poisson

Buscamos uma solução para o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta_x u + \frac{a}{y} u_y + u_{yy} = 0, & \text{em } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = f(x), & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.12)$$

equivalente a (2.1), onde  $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$  e a segunda igualdade deve ser compreendida no seguinte sentido:

$$\lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) = f(x). \quad (2.13)$$

Para tanto, devemos notar que apesar de  $u$  dada por (2.8) satisfazer a primeira igualdade de (2.12), ela não satisfaz a segunda igualdade. Para obter uma solução de (2.12), vamos primeiro encontrar uma solução  $\bar{u}$  da primeira igualdade de (2.12), mas que além disso cumpra a relação

$$\lim_{y \rightarrow 0} \bar{u}(x, y) = \delta_0(x). \quad (2.14)$$

Assim, o limite dado em (2.14) é para ser considerado no sentido de medidas, isto é, para qualquer  $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , temos que mostrar por (2.6) que:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) \bar{u}(x, y) dx = \eta(0). \quad (2.15)$$

Para isto, primeiro verificamos que

$$w(x, y) = y^a u_y(x, y) \quad (2.16)$$

é solução da equação

$$\Delta_x w - \frac{a}{y} w_y + w_{yy} = 0, \quad (2.17)$$



que é a chamada de equação conjugada de (2.10). De fato,

$$\begin{aligned}\Delta_x w - \frac{a}{y}w_y + w_{yy} &= y^a(\Delta_x u)_y - \frac{a}{y}\left(\frac{ay^a}{y}u_y + y^a u_{yy}\right) \\ &\quad + a(a-1)\frac{y^a}{y^2}u_y + \frac{ay^a}{y}u_{yy} \\ &\quad + \frac{ay^a}{y}u_{yy} + y^a u_{yyy}.\end{aligned}$$

Organizando os termos correspondentes, obtemos

$$\Delta_x w - \frac{a}{y}w_y + w_{yy} = y^a \left( (\Delta_x u)_y - \frac{a^2}{y^2}u_y - \frac{a}{y}u_{yy} + \frac{a(a-1)u_y}{y^2} + 2\frac{a}{y}u_{yy} + u_{yyy} \right)$$

e finalmente, temos que

$$\begin{aligned}\Delta_x w - \frac{a}{y}w_y + w_{yy} &= y^a(\Delta_x u)_y - \frac{a}{y^2}u_y + \frac{a}{y}u_{yy} + u_{yyy} \\ &= y^a \left( \Delta_x u + \frac{a}{y}u_y + u_{yy} \right)_y \\ &= 0.\end{aligned}$$

A partir de agora, para cada  $a \in (-1, 1)$ , passamos a denotar a função  $u$  dada no Teorema 2.1 por

$$\Gamma_a(x, y) = (|x|^2 + y^2)^{\frac{1-n-a}{2}},$$

de modo que (observe a mudança de sinal)

$$(x, y) \mapsto y^{-a}\partial_y\Gamma_{-a}(x, y) \tag{2.18}$$

é solução da equação (2.17) pelo o Teorema 2.1. Afirmamos que

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) \bar{u}(x, y) dx = \eta(0), \text{ onde } \bar{u}(x, y) = \frac{y^{1-a}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{1+n-a}{2}}}. \tag{2.19}$$

Assim, para  $\epsilon > 0$ , devemos encontrar  $\delta > 0$  de tal forma que:

$$|(x, y)| < \delta \implies \left| \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) \frac{y^{1-a}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{1+n-a}{2}}} dx - \eta(0) \right| < \epsilon. \tag{2.20}$$

Como  $\eta$  é contínua, existe um  $\delta_1 > 0$  tal que:

$$|x_1 - x_0| < \delta_1 \implies |\eta(x_1) - \eta(0)| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ onde } x_1 \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, temos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) \frac{y^{1-a}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{1+n-a}{2}}} dx - \eta(0) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\eta(x) - \eta(0)) \frac{y^{1-a}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{1+n-a}{2}}} dx \right|$$

Logo,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (\eta(x) - \eta(0)) \frac{y^{1-a}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{1+n-a}{2}}} dx \right| \leq K_1 + K_2,$$

onde

$$K_1 := \int_{\mathbb{R}^n} (\eta(x) - \eta(0)) \frac{y^{1-a}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{1+n-a}{2}}} dx \quad (2.21)$$

e

$$K_2 := \int_{\mathbb{R}^n} (\eta(x) - \eta(0)) \frac{y^{1-a}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{1+n-a}{2}}} dx. \quad (2.22)$$

Notemos que

$$K_1 < \frac{\epsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y^{1-a}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{1+n-a}{2}}} dx = \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.23)$$

Além disso, se

$$|x_1| < \frac{\delta_1}{2} \quad \text{e} \quad |y| \geq \delta_1,$$

temos

$$|y| \leq |y - x_1| + |x_1| \leq |y - x_1| + \frac{\delta_1}{2} \leq |y - x_1| + \frac{1}{2}|y|.$$

Ou ainda,

$$|y - x_1| \geq \frac{1}{2}|y|.$$

Agora, devido  $\eta$  ser limitada, temos

$$K_2 \leq 2\|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\delta_1}(x_0, 0)} \frac{y^{1-a}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{1+n-a}{2}}} dx$$

Com isso,

$$\begin{aligned} K_2 &\leq 2\|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} y^{1-a} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\delta_1}(x_0)} \frac{1}{(|x|^2 + |y|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} dx \\ &\leq 2\|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} y^{1-a} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\delta_1}(x_0)} \frac{1}{|x|^{n+1-a}} dx \\ &\leq 2^{n+2-a} \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} y^{1-a} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\delta_1}(x_0)} \frac{1}{|x|^{n+1-a}} d\xi. \end{aligned}$$

Por  $n + 1 - a > n$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\delta_1}(x_0)} \frac{1}{|x|^{n+1-a}} dx < \infty. \quad (2.24)$$

Portanto,

$$\lim_{y \rightarrow 0} 2^{n+2-a} \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} y^{1-a} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\delta_1}(x_0,0)} \frac{1}{|x|^{n+1-a}} dx = 0. \quad (2.25)$$

Ainda, de (2.25), existe um  $\delta_2 > 0$  tal que:

$$|y| < \delta_2 \implies 2^{n+1-a} y^{1-a} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\delta_1}(x_0,0)} \frac{1}{|x|^{n+1-a}} dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.26)$$

Por fim, considerando  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  e utilizando (2.23) e (2.26), temos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) \frac{y^{1-a}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} dx - \eta(0) \right| < \epsilon \quad (2.27)$$

Agora, é possível encontrar uma fórmula de Poisson, como passamos a discutir. Denotamos

$$P_1(x, y) = \frac{y^{1-a}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+1-a}{2}}},$$

Chamamos  $P_1(x, y)$  de Núcleo de Poisson para a equação (2.12).

Afirmamos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_1(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}^n} P_1(x, 1) dx, \text{ para todo } y > 0. \quad (2.28)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} P_1(x, y) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y^{1-a}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y^{1-a}}{y^{n+1-a} (|\frac{x}{y}|^2 + 1)^{\frac{n+1-a}{2}}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y^{-n}}{(|\frac{x}{y}|^2 + 1)^{\frac{n+1-a}{2}}} dx \end{aligned}$$

Ainda, fazendo a mudança de variável  $z = \frac{x}{y}$ , temos  $dz y^n = dz$ . Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{y^{-n}}{(|\frac{x}{y}|^2 + 1)^{\frac{n+1-a}{2}}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y^{-n}}{(|z|^2 + 1)^{\frac{n+1-a}{2}}} y^n dz = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(|z|^2 + 1)^{\frac{n+1-a}{2}}} dz.$$

Renomeando  $z$  por  $x$ , segue o afirmado em (2.28). Note também que

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_1(x, y) \, dx < \infty.$$

De fato, pois por (2.28), temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} P_1(x, y) \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(|x|^2 + 1^2)^{\frac{1+n-a}{2}}} \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \cap B_1(0)} \frac{1}{(|x|^2 + 1^2)^{\frac{1+n-a}{2}}} \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} \frac{1}{(|x|^2 + 1^2)^{\frac{1+n-a}{2}}} \, dx. \end{aligned}$$

Ainda, como  $\frac{1}{(|x|^2 + 1^2)^{\frac{1+n-a}{2}}}$  é contínua, temos que a primeira integral do lado direito é finita. Para a outra integral do lado direito, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} \frac{1}{(|x|^2 + 1^2)^{\frac{1+n-a}{2}}} \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} \frac{1}{|x|^{1+n-a}} \, dx < \infty, \quad (2.29)$$

pois  $1 + n - a > n$ .

Assim, podemos normalizar  $P_1$  de modo a ter integral um fazendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_1(x, y) \, dx = \frac{1}{c_{n,a}} \quad \text{e} \quad P(x, y) = c_{n,a} P_1(x, y)$$

de tal forma que

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(x, y) \, dx = 1. \quad (2.30)$$

Consideramos, em seguida,

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} P(x - \xi, y) f(\xi) \, d\xi. \quad (2.31)$$

Mostramos agora que  $u$  definida em (2.31) é a função que estamos procurando para resolver o problema (2.12).

**Teorema 2.2.** *A função  $u$  definida em (2.31) resolve o problema (2.12). Considere  $u$  limitada e contínua em  $\mathbb{R}^n$ .*

*Demonstração.* Já sabemos que  $P(x, y)$  satisfaz a primeira igualdade de (2.12), pois  $P(x, y)$  é múltipla de  $w$  dada em (2.18). Disto, mostremos que  $u$  também satisfaz a primeira igualdade de (2.12). De fato,

$$u_{x_i}(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^n} (P(x - \xi + te_i, y) - P(x - \xi, y)) f(\xi) \, d\xi. \quad (2.32)$$

Diferenciando sob o sinal de integral, obtemos que

$$u_{x_i}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} P_{x_i}(x - \xi, y) f(\xi) d\xi \quad (2.33)$$

e, analogamente, para as demais derivadas de  $u$ , podemos passar as derivadas para  $P$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} \Delta_x u + \frac{a}{y} u_y + u_{yy} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \Delta_x P(x - \xi, y) + \frac{a}{y} P_y(x - \xi, y) + P_{yy}(x - \xi, y) \right) f(\xi) d\xi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Falta mostrar ainda que  $u$  satisfaz a segunda igualdade de (2.12). Provamos então que, dado  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , tem-se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} u(x, y) = f(x_0). \quad (2.34)$$

Para  $\epsilon > 0$ , devemos encontrar  $\delta > 0$  de tal forma que:

$$|x - x_0| < \delta \implies |u(x, y) - f(x_0)| < \epsilon. \quad (2.35)$$

Como  $f$  é contínua, existe um  $\delta_1 > 0$  tal que:

$$|\xi - x_0| < \delta_1 \implies |f(\xi) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Usando que

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(x - \xi, y) d\xi = 1,$$

temos

$$\begin{aligned} |u(x, y) - f(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} P(x - \xi, y) f(\xi) d\xi - f(x_0) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} P(x - \xi, y) (f(\xi) - f(x_0)) d\xi \right|. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Logo,

$$|u(x, y) - f(x_0)| \leq J_1 + J_2,$$

onde

$$J_1 := \int_{\mathbb{R}^n \cap B_{\delta_1}(x_0)} P(x - \xi, y) |f(\xi) - f(x_0)| d\xi \quad (2.37)$$

e

$$J_2 := \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\delta_1}(x_0)} P(x - \xi, y) |f(\xi) - f(x_0)| \, d\xi. \quad (2.38)$$

Notemos que

$$J_1 < \frac{\epsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^n} P(x - \xi, y) \, d\xi = \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.39)$$

Além disso, se

$$|x - x_0| < \frac{\delta_1}{2} \quad \text{e} \quad |\xi - x_0| \geq \delta_1,$$

temos

$$|\xi - x_0| \leq |\xi - x| + |x - x_0| \leq |\xi - x| + \frac{\delta_1}{2} \leq |\xi - x| + \frac{1}{2}|\xi - x_0|.$$

Ou ainda,

$$\frac{1}{2}|\xi - x_0| \leq |\xi - x|.$$

Agora, devido  $f$  ser limitada, temos

$$J_2 \leq 2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\delta_1}(x_0, 0)} P(x - \xi, y) \, d\xi.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} J_2 &\leq 2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} C_{n,a} y^{1-a} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\delta_1}(x_0)} \frac{1}{(|x - \xi|^2 + |y|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} \, d\xi \\ &\leq 2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} C_{n,a} y^{1-a} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\delta_1}(x_0)} \frac{1}{|x - \xi|^{n+1-a}} \, d\xi \\ &\leq 2^{n+2-a} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} C_{n,a} y^{1-a} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\delta_1}(x_0)} \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n+1-a}} \, d\xi. \end{aligned}$$

Por  $n + 1 - a > n$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\delta_1}(x_0)} \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n+1-a}} \, d\xi < \infty. \quad (2.40)$$

Portanto,

$$\lim_{y \rightarrow 0} 2^{n+2-a} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} C_{n,a} y^{1-a} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\delta_1}(x_0, 0)} \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n+1-a}} \, d\xi = 0. \quad (2.41)$$

Ainda, de (2.41), existe um  $\delta_2 > 0$  tal que:

$$|y| < \delta_2 \quad \implies \quad 2^{n+1-a} C_{n,a} y^{1-a} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\delta_1}(x_0, 0)} \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n+1-a}} \, d\xi < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.42)$$

Por fim, considerando  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  e utilizando (2.36), (2.39) e (2.41), temos que

$$|u(x, y) - f(x_0)| < \epsilon. \quad \square$$

A fim de determinar a relação entre a solução de (2.1) e o Laplaciano Fracionário consideramos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \Delta_x u + z^\alpha u_{zz} = 0, & \text{em } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = f(x), & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.43)$$

cuja equação na forma não divergente é equivalente a equação (2.9). Fazendo uma mudança de variável

$$y(z) = (1-a)z^{\frac{1}{1-a}} \text{ de forma que } z(y) = \left(\frac{y}{1-a}\right)^{1-a}. \quad (2.44)$$

Temos então a equação equivalente a (2.11):

$$\Delta_x u + z^\alpha u_{zz} = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \quad (2.45)$$

onde  $\alpha = -2a/(1-a)$ , ou seja, após a mudança de variável em (2.11), temos a equação na forma não divergente (2.45) que é equivalente a (2.11). De fato, se  $u$  satisfaz (2.11), considerando a mudança de variáveis (2.44),

$$u(x, y) = u(x, y(z)) \implies \frac{\partial}{\partial z} u(x, y(z)) = u_y(x, y(z)) \cdot y'(z).$$

Como  $y'(z) = z^{\frac{a}{1-a}}$ , assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(x, y(z)) &= \left( u_y(x, y(z)) z^{\frac{a}{1-a}} \right)_z \\ &= u_{yy}(x, y(z)) \cdot z^{\frac{2a}{1-a}} + u_y(x, y(z)) \left( z^{\frac{a}{1-a}} \right)_z \\ &= u_{yy}(x, y(z)) z^{\frac{2a}{1-a}} + u_y(x, y(z)) \left( \frac{a}{1-a} \right) z^{\frac{a}{1-a}-1} \\ &= u_{yy} z^{\frac{2a}{1-a}} + \frac{a}{1-a} u_y z^{\frac{2a-1}{1-a}}. \end{aligned}$$

Logo, segue que

$$u_{zz} = u_{yy} z^{\frac{2a}{1-a}} + u_y \left( \frac{a}{1-a} \right) z^{\frac{2a-1}{1-a}}. \quad (2.46)$$

Multiplicando (2.46) por  $z^\alpha$

$$\begin{aligned}
z^\alpha u_{zz} &= z^{-\frac{2a}{1-a}} \left( u_{yy} z^{\frac{2a}{1-a}} + u_y \left( \frac{a}{1-a} \right) z^{\frac{2a-1}{1-a}} \right) \\
&= u_{yy} + u_y \left( \frac{a}{1-a} \right) z^{\frac{2a-1}{1-a} - \frac{2a}{1-a}} \\
&= u_{yy} + u_y \left( \frac{a}{1-a} \right) z^{-\frac{1}{1-a}} \\
&= u_{yy} + u_y \left( \frac{a}{1-a} \right) \left( \frac{1-a}{y} \right) \\
&= u_{yy} + u_y \left( \frac{a}{y} \right).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$z^\alpha u_{zz} = u_{yy} + u_y \frac{a}{y}. \quad (2.47)$$

Logo,

$$\Delta_x u + z^\alpha u_{zz} = \Delta_x u + u_y \frac{a}{y} + u_{yy} = 0, \quad (2.48)$$

pois  $u$  satisfaz (2.11). Portanto, vale (2.45).

Para obter uma solução fundamental e resolver o problema (2.43), basta considerar

$$\tilde{P}(x, z) = C_{n,a} \frac{z}{\left( |x|^2 + (1-a)^2 |z|^{\frac{2}{1-a}} \right)^{\frac{n+1-a}{2}}} \quad (2.49)$$

como sendo o núcleo de Poisson de (2.43).

## 2.3 Funcional Energia

Nossa meta agora é caracterizar as soluções da equação (2.2) como pontos de mínimo de um funcional energia. Essa caracterização nos permite aplicar técnicas relacionadas ao cálculo das variações com a finalidade de obter uma relação entre o Laplaciano Fracionário e soluções de (2.2) de forma mais intuitiva. Conforme feito na seção anterior, como motivação heurística, tratamos primeiro o caso do Laplaciano. Este é o conteúdo do próximo teorema, conhecido como Princípio de Dirichlet.



**Teorema 2.3.** *Considere uma solução  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$  contínua até a fronteira do seguinte problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{em } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = f(x), & \text{em } \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.50)$$

onde  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Suponhamos que

$$\mathcal{A} = \left\{ w \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+) : w(x, 0) = f(x) \text{ em } \mathbb{R}^n \text{ e } \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} |\nabla w|^2 dx dy < \infty \right\}$$

o conjunto das funções admissíveis é não-vazio. Então,  $u \in \mathcal{A}$  é solução de (2.50) se, e somente se, é mínimo do funcional  $J : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} |\nabla u|^2 dx dy. \quad (2.51)$$

*Demonstração.* Seja  $u$  uma solução de (2.50) e  $w \in \mathcal{A}$ . Mostramos primeiro que  $u$  é mínimo de  $J$ . Note que da igualdade de (2.50), tem-se

$$\Delta u \cdot (u - w) = 0.$$

Agora, integrando em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ , temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} \Delta u \cdot (u - w) dx dy = 0.$$

Utilizando as Identidades de Green

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} \Delta u \cdot (u - w) dx dy = - \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} \nabla u \cdot \nabla(u - w) dx dy + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial \nu}(u - w) dx$$

onde  $\nu$  é o vetor normal exterior ao hiperplano  $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Como  $u = w$  em  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ , temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial \nu}(u - w) dx = 0,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} |\nabla u|^2 dx dy = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} \nabla u \cdot \nabla w dx dy.$$

Ainda, utilizando as desigualdade de Young, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} \nabla u \cdot \nabla w dx dy \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} |\nabla u|^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} |\nabla w|^2 dx dy,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} |\nabla u|^2 dx dy \leq \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} |\nabla w|^2 dx dy$$

Portanto,

$$J(u) \leq J(w). \quad (2.52)$$

Provamos agora a recíproca. Seja  $u$  mínimo de  $J$ . Considere  $\phi \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$  e  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$h(t) = J(u + t\phi) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} (|\nabla u|^2 + 2t\nabla u \cdot \nabla \phi + t^2|\nabla \phi|^2) dx dy.$$

A função  $h$  está bem definida, pois  $\phi$  tem suporte compacto. Agora, diferenciando  $h$  em relação a  $t$ , temos que

$$h'(t) = 2 \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} \nabla u \cdot \nabla \phi dx dy + 2t \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} |\nabla \phi|^2 dx dy.$$

Ainda, como  $u$  é mínimo de  $J$ , então 0 é ponto crítico de  $h$ . Logo,  $h'(0) = 0$ , ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} \nabla u \cdot \nabla \phi dx dy = \frac{1}{2} h'(0) = 0,$$

donde

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} \nabla u \cdot \nabla \phi dx dy = - \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} \phi \Delta u dx dy. \quad (2.53)$$

Por fim, como  $\phi \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$  é uma função arbitrária, temos que

$$\Delta u = 0$$

em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ . Portanto,  $u$  resolve (2.50).  $\square$

Na prova do resultado anterior, verificamos na realidade, que qualquer ponto crítico do funcional  $J$  é uma solução de (2.50). Em outras palavras, temos o seguinte como consequência imediata.

**Corolário 2.4.** *Se uma função  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$  é um ponto crítico de  $J$ , então resolve (2.50).*

Agora, inspirados pelo Teorema 2.3, para cada  $a \in (-1, 1)$ , consideramos o funcional  $J_a : C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$J_a(u) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} y^a |\nabla u|^2 dx dy.$$

Observe que  $J_a$  torna-se se  $J$ , quando consideramos  $a = 0$ .

**Teorema 2.5.** *Considere o seguinte problema*

$$\begin{cases} \operatorname{div}(y^a \nabla u) = 0, & \text{em } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = f(x), & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.54)$$

onde  $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ ,  $a \in (-1, 1)$  e  $a = 1 - 2s$ . Suponha

$$\mathcal{B} = \left\{ w \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+) : w(x, 0) = f(x) \text{ em } \mathbb{R}^n \text{ e } \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} y^a |\nabla w|^2 dx dy < \infty \right\}$$

o conjunto das funções admissíveis é não vazio. Então,  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$  contínua até a fronteira é solução de (2.1) em  $\mathcal{B}$  se, e somente se, é mínimo do funcional  $J_a : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$J_a(u) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} y^a |\nabla u|^2 dx dy. \quad (2.55)$$

*Demonstração.* Seja  $u$  uma solução de (2.54) e  $w \in \mathcal{B}$ . Mostramos que  $u$  é mínimo de  $J_a$ . Observamos que se  $j_a(w) = +\infty$  para este  $w$  em  $\mathcal{B}$  então nada há nada a fazer. Suponhamos então que  $J_a(w)$  é finito. Primeiramente note que da igualdade de (2.54), tem-se

$$\operatorname{div}(y^a \nabla u)(u - w) = 0.$$

Agora, integrando, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} \operatorname{div}(y^a \nabla u)(u - w) dx dy = 0.$$

Como  $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ , utilizando a Identidade de Green

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} \operatorname{div}(y^a \nabla u)(u - w) dx dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} y^a \nabla u \cdot \nabla(u - w) dx dy + \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} y^a u_y(x, y)(u - w) dx. \end{aligned}$$

Assim, devido  $u = w$  em  $\mathbb{R}^n$ , temos que

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} y^a u_y(x, y)(u - w) dx = 0,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} y^a |\nabla u|^2 dx dy = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} y^a \nabla u \cdot \nabla w dx dy.$$

Ainda, utilizando as Desigualdades de Young, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} y^a \nabla u \cdot \nabla w \, dx \, dy \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} y^a |\nabla u|^2 \, dx \, dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} y^a |\nabla w|^2 \, dx \, dy,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} y^a |\nabla u|^2 \, dx \, dy \leq \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} y^a |\nabla w|^2 \, dx \, dy.$$

Portanto,

$$J_a(u) \leq J_a(w). \quad (2.56)$$

Provamos agora a recíproca. Seja  $u$  mínimo de  $J_a$ . Considere  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(t) = J_a(u + t\psi) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} y^a (|\nabla u|^2 + 2t \nabla u \cdot \nabla \psi + t^2 |\nabla \psi|^2) \, dx \, dy.$$

A função  $g$  está bem definida, pois  $\psi$  tem suporte compacto. Agora, diferenciando  $g$  em relação a  $t$ , temos que

$$g'(t) = 2 \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} y^a \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx \, dy + 2t \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} y^a |\nabla \psi|^2 \, dx \, dy.$$

Ainda, devido  $u$  ser mínimo de  $J_a$ , então 0 é ponto crítico de  $g$ . Logo,  $g'(0) = 0$ , ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} y^a \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx \, dy = 0, \quad (2.57)$$

donde temos

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} y^a \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx \, dy = - \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} \operatorname{div}(y^a \nabla u) \psi \, dx \, dy. \quad (2.58)$$

Por fim, como  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$  é uma função arbitrária, temos que

$$\operatorname{div}(y^a \nabla u) = 0$$

em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ . Portanto  $u$  resolve (2.54).  $\square$

Por fim, terminamos esta seção provando a unicidade da solução do problema (2.12). Para tal, devemos considerar que toda solução de (2.12) é tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} |\nabla u|^2 y^a \, dx \, dy < \infty. \quad (2.59)$$

Suponha que  $u$  e  $v$  resolvem (2.12), então  $u - v$  é solução de (2.12) para  $f = 0$ . Assim, pelo Teorema 2.5, temos que  $u - v$  é mínimo do funcional energia  $J_a$  definido em (2.55), logo segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} y^a |\nabla(u - v)| \, dx \, dy = 0 \quad (2.60)$$

e com isto, concluímos que  $u = v$ .

## 2.4 A Extensão e o Laplaciano Fracionário

O objetivo desta seção é relacionar a solução de (2.1) com o Laplaciano Fracionário. Fazemos primeiro, na Seção 2.4.1, uma análise via fórmula de Poisson e na sequência, na Seção 2.4.2, fazemos via transformada de Fourier.

### 2.4.1 Via Fórmula de Poisson

Para provarmos a relação desejada entre uma solução de (2.1) e o Laplaciano Fracionário, iniciamos considerando o problema dado em (2.43) que é equivalente (2.12) e para resolver esse problema é suficiente considerar (2.49) como sendo o núcleo de Poisson, e conseqüentemente a função  $u$  que resolve (2.43) é dada por

$$u(x, z) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P}(x - \xi, z) f(\xi) \, d\xi$$

que será demonstrada no próximo teorema. Tal relação será útil para provar a desigualdade de Harnack (Capítulo 4) para a solução do laplaciano fracionário  $(-\Delta)^s f = 0$  em  $B_r$ .

**Teorema 2.6.** *Seja  $u$  solução de*

$$\begin{cases} \operatorname{div}(y^a \nabla u(x, y)) = 0, & \text{em } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = f(x), & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.61)$$

onde  $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ ,  $a = 1 - 2s$  e  $0 < s < 1$ . Então

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^a u_y(x, y) = C(-\Delta)^s f(x), \quad (2.62)$$

onde  $C = -\left(\frac{1}{1-a}\right)^{-a} \frac{C_{n,a}}{C_{n,s}}$ .

*Demonstração.* Devemos notar que

$$u_z(x, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{u(x, z) - u(x, 0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{u(x, z) - f(x)}{z}. \quad (2.63)$$

Pela equação (2.30), temos que

$$\begin{aligned} u_z(x, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P}(x - \xi, z) f(\xi) \, d\xi - f(x) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P}(x - \xi, z) f(\xi) \, d\xi - \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P}(x - \xi, z) f(x) \, d\xi \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P}(x - \xi, z) (f(\xi) - f(x)) \, d\xi. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Assim, utilizando (2.49), temos que

$$u_z(x, 0) = C_{n,a} \lim_{z \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi) - f(x)}{\left( |x - \xi|^2 + (1-a)^2 |z|^{\frac{2}{1-a}} \right)^{\frac{n+1-a}{2}}} \, d\xi$$

e logo

$$u_z(x, 0) = C_{n,a} \text{PV} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi) - f(x)}{|x - \xi|^{n+1-a}} \, d\xi.$$

Assim, temos

$$u_z(x, 0) = -\frac{C_{n,a}}{C_{n,s}} (-\Delta)^{\frac{1-a}{2}} f(x). \quad (2.65)$$

Portanto,

$$u_z(x, 0) = -\frac{C_{n,a}}{C_{n,s}} (-\Delta)^s f(x). \quad (2.66)$$

Lembrando que

$$u_z = \left( \frac{1}{1-a} \right)^a y^a u_y,$$

concluimos

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^a u_y(x, y) = C (-\Delta)^s f(x). \quad \square$$

## 2.4.2 Via Transformada de Fourier

Alternativamente, também fazemos a prova do Teorema 2.6 utilizando a transformada de Fourier. Para fazer isso, provamos que os funcionais de energia correspondentes coincidem, ou seja:

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} |\nabla u|^2 y^a \, dx \, dy = K \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi. \quad (2.67)$$

onde  $K = I(\phi)$  e  $\phi$  é o mínimo do funcional dado por

$$I(\phi) = \int_0^\infty (\lambda|\phi|^2 + |\phi'|^2) y^a \, dy.$$

Para estudar a equivalência desses funcionais, estudamos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \phi''(y) + \frac{a}{y}\phi'(y) - \lambda\phi(y) & = 0, \\ \phi(0) & = 1, \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \phi(y) & = 0, \end{cases} \quad (2.68)$$

onde,  $a \in (-1, 1)$  e  $\lambda > 0$ .

**Teorema 2.7.** *O problema de valor inicial (2.68) tem uma única solução.*

*Demonstração.* Inicialmente garantimos a existência de solução para o problema (2.68). Consideremos o espaço vetorial

$$X = \left\{ \phi \in H^1((0, \infty)) : \int_0^\infty (\lambda|\phi|^2 + |\phi'|^2) y^a \, dy < \infty \right\},$$

munido da norma

$$\|\phi\|^2 = \int_0^\infty (\lambda|\phi|^2 + |\phi'|^2) y^a \, dy.$$

Esta norma provém do produto interno

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_0^\infty (\lambda\phi\psi + \phi'\psi') y^a \, dy,$$

o que torna  $X$  um espaço de Hilbert. O produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é contínuo e

$$\langle \phi, \phi \rangle \geq \|\phi\|^2.$$

Com isso, temos que  $\langle \phi, \psi \rangle$  é coerciva. Agora, aplicando o Teorema de Lax-Milgram, tem-se que existe uma única  $\phi(0) \in X$  tal que

$$\|\phi(0)\|^2 \leq \|\psi\|^2, \quad \forall \psi \in X. \quad (2.69)$$

Considere o funcional  $I : X \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$I(\phi) = \int_0^\infty (\lambda|\phi|^2 + |\phi'|^2) y^a dy. \quad (2.70)$$

Agora, por (2.69), o funcional  $I$  possui um minimizante  $\phi(0)$  que é único. Logo, olhando para a primeira variação do funcional  $I$ , temos que, dado  $h \in C_C^\infty(0, \infty)$ ,

$$\int_0^\infty (\lambda\phi h + \phi' h') y^a dy = 0. \quad (2.71)$$

Ainda, utilizando integração por partes, temos que

$$\int_0^\infty \phi' h' y^a dy = \phi' h y^a \Big|_0^\infty - \int_0^\infty (\phi'' h y^a + \phi' h a y^{a-1}) dy. \quad (2.72)$$

Assim, combinando (2.71) com (2.72), tem-se

$$\int_0^\infty (\lambda\phi y^a - \phi' a y^{a-1} - \phi'' y^a) h dy + \phi' h y^a \Big|_0^\infty = 0. \quad (2.73)$$

Note que

$$\phi' h y^a \Big|_0^\infty = 0,$$

pois  $h$  tem suporte compacto. Portanto, temos que  $\phi$  resolve (2.68).  $\square$

Fazemos em seguida a prova da equivalência dos funcionais de energia.

**Lema 2.8.** *Suponha que  $u$  é solução de (2.1). Se*

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} |\nabla u|^2 y^a dx dy < \infty,$$

então vale (2.67).



*Demonstração.* Inicialmente consideramos no problema (2.68),  $\lambda = 1$  e  $\phi$  a única solução do problema de valor inicial. Em seguida, consideramos  $\lambda = |\xi|^2$  e o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \varphi''(y) + \frac{a}{y}\varphi'(y) - |\xi|^2\varphi(y) &= 0, \\ \varphi(0) &= \widehat{f}(\xi), \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \varphi(y) &= 0. \end{cases} \quad (2.74)$$

Pelo Teorema 2.7, também temos única solução para (2.74). Além disso, note que

$$\widehat{f}(\xi)\phi(|\xi|y) \quad (2.75)$$

é solução de (2.74). Por outro lado, suponha que  $\widehat{u}(\xi, y)$  é uma solução de (2.1) e como a solução é única, devemos ter  $\varphi = \widehat{f}(\xi)\phi(|\xi|y)$ . Agora, como

$$\widehat{u}_{x_j}(\xi, y) = (i\xi_j)\widehat{u}(\xi, y),$$

Logo, temos

$$\widehat{u}_{x_j x_j}(\xi, y) = -|\xi_j|^2 \widehat{u}(\xi, y). \quad (2.76)$$

Ou seja,

$$\widehat{\Delta}_x u(\xi, y) = -|\xi|^2 \widehat{u}(\xi, y). \quad (2.77)$$

Ainda, como  $\widehat{u}(\xi, y)$  resolve (2.1), e equivalentemente (2.12), temos

$$\widehat{\Delta} u(\xi, y) + \frac{a}{y}\widehat{u}_y(\xi, y) + \widehat{u}_{yy}(\xi, y) = 0,$$

o que implica

$$-|\xi|^2 \widehat{u}(\xi, y) + \frac{a}{y}\widehat{u}_y(\xi, y) + \widehat{u}_{yy}(\xi, y) = 0. \quad (2.78)$$

Sendo assim, para cada  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , a equação (2.78) é uma equação diferencial ordinária em  $y$ . Dessa forma, observe que  $\widehat{u}(\xi, y)$ , por (2.78) juntamente com o fato que  $\widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi)$ , resolve também o problema de valor inicial (2.68). Assim, utilizando a unicidade do problema de valor inicial (2.68), segue que

$$\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{f}(\xi)\phi(|\xi|y) = \varphi(y). \quad (2.79)$$

Note ainda que

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} |\nabla u|^2 y^a \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty (|\nabla_x u|^2 + |u_y|^2) y^a \, dy \, dx.$$

Assim, pelo Teorema de Parseval,

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} |\nabla u|^2 y^a \, dy \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty (|\xi|^2 |\widehat{u}(\xi, y)|^2 + |\widehat{u}_y(\xi, y)|^2) y^a \, dy \, d\xi. \quad (2.80)$$

De (2.79) e (2.80), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} |\nabla u|^2 y^a \, dy \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |\xi|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 (|\phi(|\xi|y)|^2 + |\phi'(|\xi|y)|^2) y^a \, dy \, d\xi. \quad (2.81)$$

Por fim, fazendo uma mudança de variável  $\bar{y} = |\xi|y$  em (2.81),

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} |\nabla u|^2 y^a \, dy \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{1-a} |\widehat{f}(\xi)|^2 \int_0^\infty (|\phi(\bar{y})|^2 + |\phi'(\bar{y})|^2) \bar{y}^a \, d\bar{y} \, d\xi. \quad (2.82)$$

Combinando (2.70) com (2.82), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} |\nabla u|^2 y^a \, dy \, dx = I(\phi) \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

o que conclui a prova do lema.  $\square$

Terminamos o capítulo utilizando a transformada de Fourier e a equivalência dos funcionais de energia para provar o próximo teorema.

**Teorema 2.9.** *Seja  $u$  solução de (2.1) tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} |\nabla u|^2 y^a \, dy \, dx < \infty.$$

Então

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^a u_y(x, y) = C_1 (-\Delta)^s f(x),$$

onde  $C_1 = I(\phi)$ , com  $I(\phi)$  dado em (2.70) e  $\phi$  mínimo de  $I$ .

*Demonstração.* Por (2.67), temos a igualdade de dois funcionais de energia, suas equações de Euler-Lagrange devem coincidir.

Observe que o funcional energia, em termos da transformada de Fourier, pode ser escrito como  $\Phi : H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi. \quad (2.83)$$

Se  $f$  é um minimizante de  $\Phi$ , então, para toda função  $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \widehat{f}(\xi) \widehat{h}(\xi) \, d\xi = 0. \quad (2.84)$$

Logo, de (2.57) e de (2.84), segue que, para todo  $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} y^a \nabla u \cdot \nabla g \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi, 0) \, d\xi. \quad (2.85)$$

Pela Identidade de Green, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} y^a \nabla u \cdot \nabla g \, dx = \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} y^a u_y(x, y) g(x, y) \, dx. \quad (2.86)$$

Além disso, temos utilizando o teorema 1.7 que

$$C \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi, 0) \, d\xi = C \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{(-\Delta)^s f}(\xi) \widehat{g}(\xi, 0) \, d\xi.$$

Assim, pelo Teorema de Parseval

$$C \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{(-\Delta)^s f}(\xi) \widehat{g}(\xi, 0) \, d\xi = K \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^s f(x) g(x, 0) \, dx. \quad (2.87)$$

Portanto, por (2.85), (2.86) e (2.87) temos

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^a u_y(x, y) = C(-\Delta)^s f(x). \quad \square$$

# Capítulo 3

## Extensões por Reflexão

Neste capítulo aplicamos a Desigualdade de Harnack para as equações (2.11) e (2.45), para mostrar que se  $(-\Delta)^s u = 0$  em uma certa bola, então podemos refletir  $u$  e fazer-lhe uma solução de (2.11) e (2.45) em  $\{y = 0\}$  num sentido apropriado.

### 3.1 Caso Divergente

Nesta seção, tratamos do caso divergente.

**Teorema 3.1.** *Suponha que  $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  é solução da equação (2.1) tal que  $y^a |\nabla u|^2$  é localmente integrável e, para  $|x| \leq R$ ,*

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^a u_y(x, y) = 0. \quad (3.1)$$

Então, a extensão

$$\tilde{u}(x, y) = \begin{cases} u(x, y), & \text{se } y \geq 0, \\ u(x, -y), & \text{se } y < 0, \end{cases}$$

é solução fraca de

$$\operatorname{div}(|y|^a \nabla u) = 0, \quad (3.2)$$

na bola

$$B_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : |x|^2 + |y|^2 \leq R^2\}. \quad (3.3)$$

Lembramos a definição de solução fraca para (3.2): dizemos que  $\tilde{u}$  é solução quando

$$\int_{B_R} |y|^a \nabla \tilde{u} \cdot \nabla g \, dx \, dy = 0, \text{ para todo } g \in C_C^\infty(B_R). \quad (3.4)$$

A motivação desta definição é multiplicar a equação (3.2) pela “função teste”  $g$  e integrar:

$$g \cdot \operatorname{div}(|y|^a \nabla u) = 0 \implies \int_{B_R} g \cdot \operatorname{div}(|y|^a \nabla u) \, dx \, dy = 0.$$

Agora, aplicando a Identidade de Green, temos

$$\int_{\partial B_R} |y|^a \frac{\partial u}{\partial \eta} g \, dx \, dy - \int_{B_R} |y|^a \nabla u \cdot \nabla g \, dx \, dy = 0.$$

Ainda, devido  $g \in C_C^\infty(B_R)$ , temos que

$$\int_{B_R} |y|^a \nabla u \cdot \nabla g = 0.$$

*Demonstração.* Basta mostrar (3.4). Dado  $\epsilon > 0$ , temos que

$$\int_{B_R} |y|^a \nabla \tilde{u} \cdot \nabla g \, dx \, dy = \int_{B_R \setminus B_\epsilon(0)} |y|^a \nabla \tilde{u} \cdot \nabla g \, dx \, dy + \int_{B_R \cap B_\epsilon(0)} |y|^a \nabla \tilde{u} \cdot \nabla g \, dx \, dy. \quad (3.5)$$

Ainda, note que

$$\operatorname{div}(|y|^a g \nabla u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (|y|^a g u_{x_i}) + \frac{\partial}{\partial y} (|y|^a g u_y).$$

Assim, temos que

$$\operatorname{div}(|y|^a g \nabla u) = \sum_{i=1}^n |y|^a g_{x_i} u_{x_i} + \sum_{i=1}^n |y|^a g u_{x_i x_i} + |y|^a g_y u_y + |y|^a g (u_{yy} + \frac{a}{y} u_y).$$

Organizando as contas,

$$\operatorname{div}(|y|^a g \nabla u) = |y|^a g (\Delta_x u + \frac{a}{y} u_y + u_{yy}) + |y|^a \nabla g \cdot \nabla u. \quad (3.6)$$

Agora, como  $u$  resolve (2.11), temos que

$$\operatorname{div}(|y|^a g \nabla u) = |y|^a \nabla g \cdot \nabla u. \quad (3.7)$$

Fazendo o mesmo cálculo com  $u(x, -y)$  obtemos (3.7) para  $\tilde{u}$ , ou seja,

$$\operatorname{div}(|y|^a g \nabla \tilde{u}) = |y|^a \nabla g \cdot \nabla \tilde{u}. \quad (3.8)$$

Assim, fazendo uso de (3.5) e (3.8), temos

$$\int_{B_R} |y|^a \nabla \tilde{u} \cdot \nabla g \, dx \, dy = \int_{B_R \setminus B_\epsilon(0)} \operatorname{div}(|y|^a g \nabla \tilde{u}) \, dx \, dy + \int_{B_R \cap B_\epsilon(0)} |y|^a \nabla \tilde{u} \cdot \nabla g \, dx \, dy. \quad (3.9)$$

Usando o Teorema da Divergência na primeira integral do lado direito de (3.9), temos que

$$\int_{B_R \setminus B_\epsilon(0)} \operatorname{div}(|y|^a g \nabla \tilde{u}) \, dx \, dy = \int_{\partial(B_R \cap B_\epsilon(0))} \epsilon^a g \tilde{u}_y(x, \epsilon) \, dx \, dy. \quad (3.10)$$

Assim, temos

$$\int_{B_R} |y|^a \nabla \tilde{u} \cdot \nabla g \, dx \, dy = \int_{\partial(B_R \cap B_\epsilon(0))} \epsilon^a g \tilde{u}_y(x, \epsilon) + \int_{B_R \cap B_\epsilon(0)} |y|^a \nabla \tilde{u} \cdot \nabla g \, dx \, dy. \quad (3.11)$$

Note ainda que para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, por (3.1), tem-se que

$$|\epsilon^a g \tilde{u}_y(x, \epsilon) \chi_{\partial B_\epsilon}| \leq |y^a u_y(x, y)| |g|$$

que é integrável, pois  $g$  e  $u_y$  são contínuas e  $y^a$  é integrável já que  $a > -1$ . Assim, utilizando o Teorema da Convergência Dominada na primeira integral do lado direito de (3.11), concluímos que a mesma converge a zero. A segunda integral do lado direito de (3.11) converge para zero também, isto segue do fato de o integrando ser localmente integrável.  $\square$

## 3.2 Caso Não Divergente

Fazemos agora o caso não divergente.

**Teorema 3.2.** *Dada uma função contínua  $g$  sobre  $\partial B_R$ , de modo que  $g(x, z) = g(x, -z)$ , existe uma única função  $u \in C(\overline{B_R})$ , solução de*

$$\begin{cases} \Delta_x u + |z|^\alpha u_{zz} = 0, & \text{em } B_R, \\ u = g, & \text{em } \partial B_R, \end{cases} \quad (3.12)$$

no sentido da viscosidade, tal que:

- 1)  $u$  resolve a equação  $\Delta_x u + |z|^\alpha u_{zz} = 0$  em  $B_R \cup \{z \neq 0\}$  no sentido clássico;
- 2)  $u \in C^1(B_R)$ ;

$$\mathbf{3}) \quad u_z(x, 0) = 0.$$

onde  $B_R$  é definida em (3.3).

*Demonstração.* Iniciamos com a prova da unicidade: Suponha que  $u$  e  $v$  satisfazem **1)**, **2)** e **3)**. Dado  $\epsilon > 0$  arbitrário, considere  $w = u - v + \epsilon|z|$ . Note que  $w$  satisfaz **1)**. Com efeito,  $w_z = u_z - v_z + \epsilon \frac{z}{|z|}$  e assim

$$\begin{aligned} \Delta_x w + |z|^\alpha w_{zz} &= \Delta_x u - \Delta_x v + |z|^\alpha \left( u_{zz} - v_{zz} + \epsilon \left( \frac{|z| - z \left( \frac{z}{|z|} \right)}{|z|^2} \right) \right) \\ &= \Delta_x u - \Delta_x v + |z|^\alpha (u_{zz} - v_{zz}), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Delta_x w + |z|^\alpha w_{zz} = 0.$$

Como  $w$  é contínua e  $\overline{B_R}$  é compacto, existe  $x_0 \in \overline{B_R}$  onde  $w$  assume valor máximo, isto é,  $w \leq w(x_0)$  em  $\overline{B_R}$ . Note que  $x_0 \notin B_R \cap \{z \neq 0\}$ , pois poderíamos aplicar o Princípio do Máximo e concluir que  $w$  é constante, o que seria uma contradição, já que  $w = \epsilon|z|$  em  $\partial B_R$ . Além disso, temos que

$$w_{z^+} = u_z - v_z + \epsilon > u_z - v_z - \epsilon = w_{z^-},$$

onde  $w_{z^+}$  e  $w_{z^-}$  são as derivadas laterais, respectivamente de  $w$ . Desta forma, não existe ponto de máximo em  $B_R \cap \{z = 0\}$ , pois se existisse  $w_{z^+} = 0 = w_{z^-}$  no ponto. Assim, temos que  $x_0 \in \partial B_R$ . Por fim, como  $u$  e  $v$  resolvem (3.12), segue que

$$w \leq w(x_0) = u(x_0) - v(x_0) + \epsilon|z_0| \leq \epsilon R. \quad (3.13)$$

Como  $\epsilon$  é arbitrário, fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  em (3.13), temos que  $u \leq v$ . De forma análoga, obtém-se que  $v \leq u$  e concluímos que  $u = v$ .

Agora, passamos a mostrar a existência de soluções de (3.12). Antes disso, para cada  $\epsilon > 0$ , considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta_x u + (|z| + \epsilon)^\alpha u_{zz} = 0 & \text{em } B_R, \\ u = g, & \text{em } \partial B_R. \end{cases} \quad (3.14)$$

Sabemos, pela a Teoria de Schauder, ver [10, Seção 6.3], que o problema acima (3.14) possui solução clássica para cada  $\epsilon > 0$ . Ainda, pelo o princípio do máximo para equações uniformemente elípticas, temos que  $u^\epsilon \in L^\infty$  com normas uniformemente limitadas:

$$\sup_{B_R} u^\epsilon = \sup_{\partial B_R} u^\epsilon = \sup_{\partial B_R} g < +\infty.$$

Em (3.14) os coeficientes são constantes em relação a  $x$ . Os resultados de Caffarelli e Gutierrez [7, pps 455-456] valem independente de  $\epsilon$ . De fato, podemos reescrever o operador de (3.12) no mesmo formato de Caffarelli e Gutierrez:

$$L(u^\epsilon) = \text{tr}(\Phi D^2 u^\epsilon),$$

onde

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (|z| + \epsilon)^\alpha \end{bmatrix}.$$

No contexto de Caffarelli-Gutierrez, ver [7, Remark pp. 456], tem-se que  $\Phi$  é a matriz de cofatores da Hessiana  $D^2\phi$  de uma função estritamente convexa  $\phi$  e que as estimativas dependem de uma transformação afim  $T$  que normaliza seções da forma

$$S(x, t) := \{y \in \mathbb{R}^n, t > 0 : \phi(y) < \phi(x) + \nabla\phi(x) \cdot (y - x) + t\} \quad (3.15)$$

no sentido de encontrar bolas em  $\mathbb{R}^n$  tais que

$$B_{1/n} \subseteq T[S(x, \theta t)] \subseteq B_1,$$

onde  $\theta > 0$ . Em particular, os conjuntos  $S(x, t)$  são invariantes por translações verticais no gráfico de  $\phi$ , isto é,  $S(x, t)$  permanece inalterado quando substituímos  $\phi$  por  $\phi + \epsilon$ . Logo, por [7, Corollary, pp 455],  $u^\epsilon$  é de Hölder e, pelo o mesmo motivo, qualquer derivada com respeito a  $x$  de  $u$ . Podemos então, por exemplo, diferenciar a primeira igualdade da equação (3.14) com respeito a  $x_i$  e obter

$$\Delta_x(u_{x_i}^\epsilon) + (|z| + \epsilon)^\alpha (u_{x_i}^\epsilon)_{zz} = 0,$$

concluindo que  $u_{x_i}^\epsilon$  é de Hölder independente de  $\epsilon > 0$ . Isto se aplica também a derivada de ordem mais alta. Logo, temos que  $\Delta_x u^\epsilon$  é de Hölder independentemente de  $\epsilon$  e assim é limitada em qualquer bola menor  $B_{(1-\delta/2)R}$ . Como  $u^\epsilon \in C^2(B_R)$  e  $u^\epsilon$  é simétrico com respeito ao hiperplano  $z = 0$ , então  $u_z^\epsilon(x, 0) = 0$ . De fato,

$$\begin{aligned} u_z^\epsilon(x, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{u^\epsilon(x, z) - u^\epsilon(x, 0)}{z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{u^\epsilon(x, z) - u^\epsilon(x, 0)}{2z} + \lim_{-z \rightarrow 0} \frac{u^\epsilon(x, -z) - u^\epsilon(x, 0)}{-2z} \\ &= 0. \end{aligned}$$



Agora, devido

$$\Delta_x u + (|z| + \epsilon)^\alpha u_{zz} = 0,$$

temos que

$$|u_{zz}^\epsilon| = \frac{|\Delta_x u^\epsilon|}{(|z| + \epsilon)^\alpha}.$$

Ainda, por  $\Delta_x u^\epsilon$  ser limitado independente de  $\epsilon$ , existe  $C > 0$  tal que

$$|\Delta_x u^\epsilon| \leq C, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Logo

$$|u_{zz}^\epsilon| \leq \frac{C}{|z|^\alpha}.$$

Tomando  $\alpha = -2a/(1-a)$  e  $a \in (-1, 1)$ , temos que  $\alpha < 1$ . De fato,

$$-a < 1 \iff -2a < 1 - a \iff \alpha = \frac{-2a}{1-a} < 1.$$

Podemos assim integrar  $u_{zz}^\epsilon$  para qualquer  $(x, z)$  tal que  $|x| < 1 - 2\delta$  e  $0 < z < 1 - \delta$ . Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$|u_z^\epsilon(x, z)| = \left| \int_0^z u_{zz}^\epsilon(x, s) \right| \leq \int_0^z \frac{C}{|s|^\alpha} = \bar{C} z^{1-\alpha}.$$

Portanto,  $|u_z^\epsilon(x, z) - u_z^\epsilon(x, 0)| \leq \bar{C} z^{1-\alpha}$ . Com isso, temos que  $u_z^\epsilon \in C^\eta$  em  $B_{(1-\delta)R}$ , para  $\eta = \min(1, 1 - \alpha)$ , independentemente de  $\epsilon$  para qualquer  $\delta$ . Pelo o Teorema de Arzelá-Ascoli, podemos tomar  $\epsilon$  suficientemente pequeno e extrair uma subsequência que converge para a solução  $u$  desejada.  $\square$

# Capítulo 4

## Desigualdade de Harnack

Neste capítulo final, fazemos a prova da Desigualdade de Harnack, como consequência do estudo de soluções de (2.12) e (2.43). Para isso, utilizamos o resultado de Fabes, Kenig e Serapioni em [9, Lemma 2.3.5] que enunciamos a seguir.

**Lema 4.1.** *Seja  $u$  não negativa uma solução de  $Lu = 0$  em  $\Omega$ . Suponha que  $4p \leq \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$ . Então*

$$\max_{B_\rho(x_0)} u \leq C \min_{B_\rho(x_0)} u \quad (4.1)$$

**Teorema 4.2** (Desigualdade de Harnack). *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  não-negativa tal que  $(-\Delta)^s f = 0$  em  $B_r$ . Então, existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\sup_{B_{r/2}} f \leq C \inf_{B_{r/2}} f.$$

*Demonstração.* Seja  $u$  a extensão de  $f$  que resolve o problema (2.1). Notemos primeiro que  $u$  é não negativa, pois  $u$  é a convolução de  $f$  com o núcleo de Poisson, e pelo o núcleo de Poisson ser positivo, segue que  $u$  é não negativa. Agora, por hipótese,

$$(-\Delta)^s f = 0 \text{ em } B_r.$$

Assim, pelo Teorema 2.6, segue que  $u$  satisfaz

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^\alpha u_y(x, y) = 0.$$

Ainda, pelo Teorema 3.1,  $\tilde{u}$  é solução de

$$\text{div}(|y|^\alpha \nabla u) = 0 \text{ em } \overline{B_{r/2}},$$

onde  $\overline{B}_{r/2}$  é definida em (3.3). Assim, estamos nas hipóteses do Lema 4.1 e podemos garantir que existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\max_{\overline{B}_{r/2}} u \leq C \min_{\overline{B}_{r/2}} u,$$

desde de que  $2r \leq \text{dist}(0, \partial B_{r/2})$ . Logo, temos que

$$\sup_{\overline{B}_{r/2}} u \leq C \inf_{\overline{B}_{r/2}} u.$$

Portanto, segue o resultado.  $\square$

**Corolário 4.3.** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , não-negativa tal que  $(-\Delta)^s f = 0$  em  $B_1$ , então  $f \in C^\alpha$  em  $\overline{B}_{1/2}$  para algum  $\alpha > 0$ .*

*Demonstração.* Mostramos primeiro que existe uma constante  $0 < L < 1$  tal que

$$\sup_{B_{\frac{1}{2^n}}} f(x) - \inf_{B_{\frac{1}{2^n}}} f(x) \leq L^{n-1}(M - m), \quad (4.2)$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ , onde

$$M = \sup_{B_1} f(x) \text{ e } m = \inf_{B_1} f(x).$$

Caso  $n = 1$  é válido, pois

$$\begin{aligned} \sup_{B_{1/2}} f(x) - \inf_{B_{1/2}} f(x) &\leq L^0(M - m) \\ &= \sup_{B_1} f(x) - \inf_{B_1} f(x). \end{aligned}$$

Suponha que (4.2) é válido e mostremos que

$$\sup_{B_{\frac{1}{2^{n+1}}}} f(x) - \inf_{B_{\frac{1}{2^{n+1}}}} f(x) \leq L^n(M - m). \quad (4.3)$$

Agora, fazendo

$$\overline{f}(x) = f(x/2^n) \quad \text{e} \quad \overline{M} = \sup_{B_1} \overline{f}(x),$$

obtemos que

$$\overline{M} - \overline{f}(x) \geq 0.$$

Ainda, note que

$$(-\Delta)^s (\overline{M} - \overline{f}(x)) = 0,$$

pois a  $f$  satisfaz tal relação. Assim, pelo Teorema 4.2, existe uma constante  $C$  tal que

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} (\overline{M} - \overline{f}(x)) \leq C \inf_{B_{\frac{1}{2}}} (\overline{M} - \overline{f}(x)). \quad (4.4)$$

Seja

$$\overline{m} = \inf_{B_1} \overline{f}(x),$$

então

$$\overline{f}(x) - \overline{m} \geq 0.$$

Utilizando o mesmo argumento feito para obter (4.4), temos que

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} (\overline{f}(x) - \overline{m}) \leq C \inf_{B_{\frac{1}{2}}} (\overline{f}(x) - \overline{m}). \quad (4.5)$$

De (4.4), tem-se

$$\overline{M} - \inf_{B_{\frac{1}{2}}} \overline{f}(x) \leq C \overline{M} - C \sup_{B_{\frac{1}{2}}} \overline{f}(x). \quad (4.6)$$

Da mesma forma, fazendo uso de (4.5), obtemos que

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} \overline{f}(x) - \overline{m} \leq C \inf_{B_{\frac{1}{2}}} \overline{f}(x) - C \overline{m}. \quad (4.7)$$

Agora, combinando (4.6) e (4.7), temos

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} \overline{f}(x) - \inf_{B_{\frac{1}{2}}} \overline{f}(x) \leq \frac{C-1}{C+1} (\overline{M} - \overline{m}). \quad (4.8)$$

Ainda, note que

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} \overline{f}(x) - \inf_{B_{\frac{1}{2}}} \overline{f}(x) = \sup_{B_{\frac{1}{2^{n+1}}}} f(x) - \inf_{B_{\frac{1}{2^{n+1}}}} f(x) \quad (4.9)$$

e

$$\overline{M} - \overline{m} = \sup_{B_{\frac{1}{2^n}}} f(x) - \inf_{B_{\frac{1}{2^n}}} f(x). \quad (4.10)$$

Assim, utilizando (4.2), (4.8), (4.9) e (4.10), temos que

$$\begin{aligned} \sup_{B_{\frac{1}{2^{n+1}}}} f(x) - \inf_{B_{\frac{1}{2^{n+1}}}} f(x) &\leq L \left( \sup_{B_{\frac{1}{2^n}}} f(x) - \inf_{B_{\frac{1}{2^n}}} f(x) \right) \\ &\leq L \cdot L^{n-1}(M - m) \\ &= L^n(M - m), \end{aligned}$$

o que prova (4.3), onde  $L = \frac{C-1}{C+1}$  e assim concluimos (4.2). Agora, tome  $\alpha$  de modo que  $\frac{1}{2^\alpha} = L$ . Sejam  $x, y \in B_{\frac{1}{2}}$  e note que existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{1}{2^k} \leq |x - y| \leq \frac{1}{2^{k-1}}. \quad (4.11)$$

Além disso, de (4.2), temos que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \sup_{B_{\frac{1}{2^k}}} f(x) - \inf_{B_{\frac{1}{2^k}}} f(x) \\ &\leq L^{k-1}(M - m). \end{aligned}$$

E como

$$\frac{1}{2^{\alpha k}} \leq |x - y|^\alpha \leq \frac{1}{2^{\alpha(k-1)}},$$

segue que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \frac{L^k}{L}(M - m) \\ &= \frac{1}{2^{\alpha k}} \frac{(M - m)}{L} \\ &\leq \left( \frac{M - m}{L} \right) |x - y|^\alpha. \quad \square \end{aligned}$$

# Bibliografia

- [1] ADAMS, R. A. *Sobolev spaces*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
- [2] APPLEBAUM, D. Lévy processes—from probability to finance and quantum groups. *Notices Amer. Math. Soc.* 51, 11 (2004), 1336–1347.
- [3] BRÄNDLE, C., COLORADO, E., DE PABLO, A., AND SÁNCHEZ, U. A concave-convex elliptic problem involving the fractional Laplacian. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 143, 1 (2013), 39–71.
- [4] BUCUR, C., AND VALDINOCI, E. *Nonlocal diffusion and applications*, vol. 20 of *Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana*. Springer, [Cham]; Unione Matematica Italiana, Bologna, 2016.
- [5] CAFFARELLI, L., AND SILVESTRE, L. An extension problem related to the fractional laplacian. *Communications in Partial Differential Equations* 32, 8 (2007), 1245 – 1260.
- [6] CAFFARELLI, L. A. Further regularity for the Signorini problem. *Comm. Partial Differential Equations* 4, 9 (1979), 1067–1075.
- [7] CAFFARELLI, L. A., AND GUTIÉRREZ, C. E. Properties of the solutions of the linearized Monge-Ampère equation. *Amer. J. Math.* 119, 2 (1997), 423–465.
- [8] EVANS, L. C. *Partial differential equations*, second ed., vol. 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [9] FABES, E. B., KENIG, C. E., AND SERAPIONI, R. P. The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations. *Communications in Partial Differential Equations* 7, 1 (1982), 77–116.

- [10] GILBARG, D., AND TRUDINGER, N. S. *Elliptic partial differential equations of second order*, second ed., vol. 224 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [11] GOYAL, S., AND SREENADH, K. Nehari manifold for non-local elliptic operator with concave-convex nonlinearities and sign-changing weight functions. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* 125, 4 (2015), 545–558.
- [12] IANNIZZOTTO, A., LIU, S., PERERA, K., AND SQUASSINA, M. Existence results for fractional  $p$ -Laplacian problems via Morse theory. *Adv. Calc. Var.* 9, 2 (2016), 101–125.
- [13] MOLICA BISCI, G., AND SERVADEI, R. Lower semicontinuity of functionals of fractional type and applications to nonlocal equations with critical Sobolev exponent. *Adv. Differential Equations* 20, 7-8 (2015), 635–660.
- [14] SERVADEI, R., AND VALDINOCI, E. Variational methods for non-local operators of elliptic type. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* 7, 5 (2013), 2105–2137.
- [15] SERVADEI, R., AND VALDINOCI, E. The Brezis-Nirenberg result for the fractional Laplacian. *Trans. Amer. Math. Soc.* 367, 1 (2015), 67–102.
- [16] SILVESTRE, L. Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the laplace operator. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 60, 1 (2007), 67–112.
- [17] VÁZQUEZ, J. L. Recent progress in the theory of nonlinear diffusion with fractional Laplacian operators. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* 7, 4 (2014), 857–885.
- [18] XIANG, M., ZHANG, B., AND RĂDULESCU, V. D. Existence of solutions for perturbed fractional  $p$ -Laplacian equations. *J. Differential Equations* 260, 2 (2016), 1392–1413.