

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

O Método de Nyström Para o Problema de Transporte Radiativo Unidimensional

por

JONATAS VOESE

Defesa submetida como requisito parcial
para a obtenção do título de
Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Fabio Azevedo
Orientador

Prof. Dr. Esequia Sauter
Co-orientador

Porto Alegre, Outubro de 2021.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

VOESE, JONATAS

O Método de Nyström Para o Problema de Transporte Radiativo Unidimensional / JONATAS VOESE.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2021.

69 p.: il.

Tese (Doutorado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2021.

Orientador: Azevedo, Fabio;

Co-orientador: Sauter, Esequia

Tese: Matemática Aplicada.

Método de Nyström, Transporte Radiativo, Acoplamento Não-Linear

O Método de Nyström Para o Problema de Transporte Radiativo Unidimensional

por

JONATAS VOESE

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de

Doutor em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Análise Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Fabio Azevedo

Co-orientador: Prof. Dr. Esequia Sauter

Banca examinadora:

Prof. Dr. Hélcio Rangel Barreto Orlande
UFRJ

Prof. Dr. Leonardo Fernandes Guidi
UFRGS

Prof^a. Dr^a. Liliane Basso Barichello
UFRGS

Defesa apresentada e aprovada em
Outubro de 2021.

Prof. Dr. Lucas da Silva Oliveira
Coordenador

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais pelo incentivo e apoio durante toda minha caminhada acadêmica;

Ao professor Dr. Fabio Souto de Azevedo e ao professor Dr. Esequia Sauter pela orientação e pelos conhecimentos compartilhados ao longo da elaboração desta tese;

A todos os meus colegas da UFRGS pela amizade e apoio. Em especial agradeço à Débora Dalmolin e à Jéssica Kanopp dos Reis pelos bons momentos vividos;

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro concedido durante o desenvolvimento deste trabalho.

Sumário

LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	ix
RESUMO	xi
ABSTRACT	xii
LISTA DE SÍMBOLOS	xiii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Problema unidimensional	9
2 PROBLEMA DE TRANSPORTE UNIDIMENSIONAL	18
2.1 Operadores e formulação integral	19
3 MÉTODO DE NYSTRÖM	22
3.1 Implementação Numérica	25
3.2 Resultados	25
3.3 Conclusões: Método de Nyström	29
4 PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA TÉRMICA UNIDIMEN- SIONAL	30
4.1 Caso 1: Perfil de temperatura estacionário	31

4.2	Caso 2: Perfil de temperatura não estacionário	38
4.3	Caso 3: Método de Crank-Nicolson	43
4.4	Caso 4: Acoplado com condições não lineares	50
5	CONCLUSÕES	58
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	60

Lista de Figuras

Figura 4.1	Densidade de radiação com perfil de temperatura estacionário e $\sigma = \kappa = 1$	33
Figura 4.2	Densidade de radiação com perfil de temperatura estacionário, $\sigma = 0.1$ e $\kappa = 0.01$	33
Figura 4.3	Densidade de radiação com perfil de temperatura estacionário crescente, $\sigma = 0.5, 1.0$ e 1.5	35
Figura 4.4	Densidade de radiação com perfil de temperatura estacionário crescente, $\kappa = 0.5, 1.0$ e 1.5	36
Figura 4.5	Densidade de radiação com perfil simétrico de temperatura.	37
Figura 4.6	Temperatura em estado estacionário para $\sigma = 0$ e $\kappa = 1$	41
Figura 4.7	Intensidade para temperatura em estado estacionário com $\sigma = 0$ e $\kappa = 1$	42
Figura 4.8	Intensidade em estado estacionário com $\sigma = 0$ e $\kappa = 0.1$	42
Figura 4.9	Temperatura em estado estacionário para os métodos Crank-Nicolson e Diferenças Progressivas.	49
Figura 4.10	Temperatura convergindo para solução constante	49
Figura 4.11	Temperatura convergindo ao estado estacionário.	52
Figura 4.12	Densidade radiativa convergindo ao estado estacionário.	52
Figura 4.13	Temperatura em estado estacionário com perfil de temperatura inicial decrescente.	53

Figura 4.14	Densidade radiativa em estado estacionário com perfil de temperatura inicial decrescente.	53
Figura 4.15	Temperatura em estado estacionário para $\rho_L = 0$ e diferentes valores de ρ_0	55
Figura 4.16	Densidade radiativa para $\rho_L = 0$ e diferentes valores de ρ_0	55
Figura 4.17	Temperatura em estado estacionário para $\rho_0 = 0$ e diferentes valores de ρ_L	56
Figura 4.18	Densidade radiativa para $\rho_0 = 0$ e diferentes valores de ρ_L	57

Lista de Tabelas

Tabela 3.1	Densidade radiativa considerando quadratura de Boole e $\rho_0 = \rho_L = 0, F_0 = F_L = \frac{1}{8}, \lambda = \sigma = L = 1$ e $S(x) = \frac{1}{8}$	26
Tabela 3.2	Densidade radiativa considerando quadratura de Gauss-Legendre e $\rho_0 = \rho_L = 0, F_0 = F_L = \frac{1}{8}, \lambda = \sigma = L = 1$ e $S(x) = \frac{1}{8}$	26
Tabela 3.3	Densidade radiativa considerando quadratura de Boole e $\rho_0 = \rho_L = 0, F_0 = F_L = 0, \lambda = \sigma = L = 1$ e $S(x) = -x^2 + x$	28
Tabela 3.4	Densidade radiativa considerando quadratura de Gauss-Legendre e $\rho_0 = \rho_L = 0, F_0 = F_L = 0, \lambda = \sigma = L = 1$ e $S(x) = -x^2 + x$	28
Tabela 4.1	Densidade radiativa ($\times 10^5$) com temperatura estacionária para dois conjuntos de parâmetros.	32
Tabela 4.2	Densidade radiativa com perfil de temperatura decrescente.	34
Tabela 4.3	Densidade radiativa ($\times 10^5$) com temperatura estacionária $T(x) = 1000 + 800x, \kappa = 0$ e $\sigma = 0.5, 1, 0$ e 1.5	36
Tabela 4.4	Densidade radiativa ($\times 10^5$) com temperatura estacionária $T(x) = 1000 + 800x, \sigma = 0$ e $\kappa = 0.5, 1, 0$ e 1.5	36
Tabela 4.5	Densidade radiativa com perfil simétrico de temperatura.	38
Tabela 4.6	Temperatura e intensidade em estado estacionário usando quadratura de 128 pontos.	41
Tabela 4.7	Temperatura ($\times 10^2$) e densidade radiativa ($\times 10^5$) para condições de fronteira não lineares.	52

Tabela 4.8	Temperatura ($\times 10^2$) em estado estacionário para diferentes valores de ρ_0	54
Tabela 4.9	Densidade radiativa ($\times 10^5$) para coeficientes de reflexão não nulos.	54
Tabela 4.10	Temperatura ($\times 10^2$) em estado estacionário para diferentes valores de ρ_L	56
Tabela 4.11	Densidade radiativa ($\times 10^5$) para diferentes valores de ρ_L	56

RESUMO

Neste trabalho consideramos o modelo unidimensional de transferência de radiação juntamente com a condução térmica em um meio participativo isotrópico. Este tipo de modelo é comum em situações que envolvem altas temperaturas e, matematicamente, é descrito pela equação de transferência radiativa acoplada a equação de condução térmica através de uma termo fonte não-linear dependente da temperatura. Nesta tese será descrita uma nova metodologia para a solução do problema acoplado: a equação de transferência radiativa será discretizada pelo método de Nyström enquanto que a equação de condução será discretizada pelo método das diferenças finitas. Esta metodologia apresenta a vantagem de ser facilmente implementada e com baixo custo computacional. As soluções obtidas serão comparadas com resultados obtidos na literatura. Por fim serão apresentados resultados numéricos para o caso de acoplamento térmico com condições de contorno não lineares e coeficientes de reflexão não nulos. Em todos os casos analisados fica evidente que a metodologia escolhida apresenta resultados condizentes com o processo condutivo-radiativo.

ABSTRACT

In this work we consider the unidimensional model of radiation transfer along with thermal conduction in a isotropic medium. This kind of model is common in situations involving high temperatures and, mathematically, it is described by the radiative transfer equation coupled to the thermal conduction equation through a temperature dependent nonlinear source term. In this thesis will be described a new methodology to the coupled problem solution: the radiative transfer equation will be discretized by the Nyström method while the conduction equation will be discretized by the finite differences method. This methodology has the advantage of being easily implemented and with low computational cost. The solutions obtained will be compared with results obtained in the literature. Finally, numerical results will be presented for the case of thermal coupling with nonlinear boundary conditions and non-zero reflection coefficients. In all cases analyzed it is evident that the chosen methodology presents results consistent with the conductive-radiative process.

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Grandeza
s_j	Abscissas da regra de quadratura
θ	Ângulo de incidência
Ω'	Ângulo de reflexão
\mathbf{u}	Campo de velocidade
κ, κ_ν	Coefficiente de absorção
σ, σ_ν	Coefficiente de espalhamento
ϵ_ν	Coefficiente de emissão
$\rho(\mu), \rho$	Coefficiente de reflexão
ρ_0, ρ_L	Coefficientes de reflexão nas bordas
a	Coefficiente de troca de calor
L	Comprimento do domínio
F_0, F_L	Condições de fronteira
k_0	Condutividade térmica
k_b	Constante de Boltzmann
\hbar	Constante reduzida de Planck
μ	Cosseno do ângulo de incidência
\hat{I}	Densidade de radiação
Ω	Direção do raio
T_0	Distribuição inicial de temperatura
b	Emissividade
I_i	Emissão interna em um volume de controle
S^2	Esfera unitária em \mathbb{R}^3
I_e	Espalhamento externo em um volume de controle
S_ν, S	Fonte
ν	Frequência
I_ν, I	Intensidade

ν_0	Parte opaca do espectro radiativo
h_s	Passo da malha espacial
h_t	Passo de tempo
ω_j	Pesos da regra de quadratura
T	Temperatura
T_∞	Temperatura em estado estacionário
T_b	Temperatura exterior
Tb_0, Tb_L	Temperatura nas bordas do domínio
j_ν	Termo de emissão
c	Velocidade da luz no vácuo

1 INTRODUÇÃO

A radiação pode ser definida como um mecanismo de transmissão de energia em formas de ondas eletromagnéticas a partir de uma determinada fonte. A emissão pode ocorrer de forma espontânea, devido à natureza e composição da fonte emissora, ou provocada por interações externas. De acordo com a frequência de emissão, ou absorção, a energia radiativa recebe nomes específicos: raios-X, infravermelho, micro-ondas, raios gama e luz visível são alguns exemplos comuns de radiação que diferem entre si apenas pelo comprimento de onda.

No decorrer deste trabalho daremos ênfase à radiação térmica, que é a radiação não-ionizante emitida devido à vibrações moleculares. De acordo com esta definição a quantidade de energia térmica radiativa emitida depende da temperatura do corpo, pois esta indica o nível de agitação molecular de um material. Por conseguinte todos os corpos com temperatura acima do zero absoluto estão constantemente emitindo radiação térmica [89].

Agora descreveremos brevemente alguns conceitos e definições úteis na descrição e compreensão do modelo matemático a ser estudado neste trabalho.

Dizemos que a radiação térmica é não-ionizante porque os fótons, emitidos neste tipo de fenômeno, não têm energia suficiente para alterar a estrutura interna da matéria, atuando apenas no estado de agitação das partículas, ou seja, modificando a temperatura do meio. Gray e Müller [33] situam os comprimentos de onda característicos da radiação térmica em uma região mediana do espectro radiativo, mais especificamente, em uma banda variando de aproximadamente $0.1 \mu\text{m}$ a $100 \mu\text{m}$. Comprimentos de onda abaixo deste intervalo caracterizam a radiação ionizante que, por ser mais energética, pode modificar a estrutura atômica da matéria, sendo este um fenômeno comum em problemas de engenharia e física nuclear.

A partir deste ponto usaremos a expressão radiação para nos referirmos especificamente à radiação térmica. Se em algum momento do texto surgir uma situação que possa gerar ambiguidades na compreensão geral dos conceitos e definições, as devidas diferenciações e esclarecimentos serão explicitamente citadas.

A radiação junto com a convecção e condução são conhecidos como mecanismos de troca de calor e se diferenciam em dois aspectos: a presença, ou não, de meio material para que ocorra a efetiva troca de energia, e o modo como o fluxo de calor depende da temperatura. Quanto ao primeiro aspecto a convecção e a condução ocorrem apenas em presença de meio material, isso porque estes mecanismos estão diretamente relacionados à movimentação e interação molecular. Por outro lado, a radiação, sendo um fenômeno de natureza eletromagnética, ocorre na presença de meio material e também no vácuo.

A diferença entre estes mecanismos levando em conta o segundo aspecto será apresentada nos próximos parágrafos, onde fizemos uma análise mais detalhada de cada um.

Ocorre condução térmica quando há interação direta entre partículas mais energéticas e menos energéticas, de modo que aquelas tendem a ceder energia para estas até que alcancem o equilíbrio. Neste tipo de mecanismo vale a Lei de Fourier, isto é, o fluxo térmico é proporcional, em magnitude, ao gradiente de temperatura porém com sentido contrário ao mesmo [47].

Já a convecção é um mecanismo de troca de calor característico de fluidos e, segundo Bergman *et. al.* [12], compreende a transferência de energia por movimentos moleculares (condução/difusão) ou pelo movimento de massa do fluido de uma região para outra (advecção). Devido a complexidade do fenômeno não há uma expressão simples que descreva o fluxo de calor, no entanto, quando há interação entre fluido e sólido o fluxo é proporcional a diferença de temperatura [12], este resultado é conhecido como Lei de resfriamento de Newton.

Diferentemente da condução e convecção, o fluxo térmico em processos radiativos é não linear. De fato, ao analisarem o problema de radiação de corpo negro, Josef Stefan e Ludwig Boltzmann, usando abordagens distintas, concluíram que o total de energia radiativa emitida por um corpo negro é proporcional à quarta potência da temperatura [72], esse resultado ficou conhecido como Lei de Stefan-Boltzmann. Uma consequência deste resultado é que na interação entre superfícies o fluxo radiativo torna-se proporcional a diferença da quarta potência das temperaturas [33].

Os mecanismos podem coexistir mas, por depender da quarta potência da temperatura, o fluxo radiativo aumenta rapidamente, dominando o processo de transferência de energia em altas temperaturas. Neste sentido Whitaker [85] menciona que a transferência de energia em processos radiativos torna-se significativa em temperaturas próximas a 200 F e pode dominar o processo de transferência para temperaturas acima de 1000 F. Como exemplos de processos em que esse mecanismo é dominante podemos citar, entre outros: entrada de veículos espaciais na atmosfera [37], decaimento radioativo em reatores nucleares [82], coleta de energia solar [51], sistemas de combustão [84], processo de resfriamento de vidro [40], turbinas a gás [68] e fornos [88].

Cabe destacar que a radiação também pode ser um mecanismo significativo em baixas temperaturas é o que ocorre, por exemplo, quando há convecção em gases com menor nível de agitação molecular ou em situações nas quais não há condução e convecção. Nesse último caso Howell [35] menciona como exemplo o controle térmico em naves espaciais.

Como vimos são várias as áreas em que o fenômeno do transporte radiativo se faz presente. Por este motivo é essencial o desenvolvimento de pesquisas que busquem esclarecer e determinar as maneiras como esse fenômeno ocorre e seus eventuais efeitos em materiais e equipamentos.

Em geral a distribuição de energia radiativa emitida ou absorvida por um corpo não é uniforme [89] e, além disso, a matéria reage de forma distinta dependendo da direção de incidência [12]. Assim, para que seja possível avaliar a taxa de transferência energética, se faz necessário definir a intensidade radiativa (I), que é uma quantidade fundamental neste tipo de problema e é definida como o total de energia emitida (ou absorvida) considerando a distribuição direcional.

Na presença de meios participativos a radiação pode ter sua intensidade reduzida ou aumentada pelos mecanismos de extinção e emissão. A extinção compreende os processos de absorção e espalhamento e ocorrem, respectivamente, quando a energia radiativa é absorvida pela matéria e quando há apenas uma mudança na direção de propagação devido à presença do meio. Já o fenômeno de emissão refere-se à energia emitida por cada ponto do meio ou proveniente de fontes externas.

Neste trabalho consideraremos somente o problema em um meio participativo isotrópico, isto é, os mecanismos descritos anteriormente são independentes da direção.

Uma relação mais genérica para a variação da intensidade é a equação de transferência radiativa, que considera a influência do meio participativo. Esta equação pode ser obtida, de maneira simplificada, a partir de um balanço de conservação de energia, isto é, a variação de intensidade é dada pela diferença entre emissão e atenuação em um volume diferencial de controle.

A absorção e espalhamento enquanto mecanismos de extinção energética são diretamente proporcionais a intensidade radiativa ([60], [35]). Assim, conforme podemos observar em Peraiah [60], ¹ temos a seguinte relação para a equação

¹Para manter a consistência de notação neste trabalho, alguns termos estão representados por símbolos diversos daqueles apresentados nas obras originais citadas.

de transferência radiativa:

$$\Omega \cdot (\nabla I_\nu) = j_\nu - \lambda_\nu I_\nu \quad (1.1)$$

onde Ω é a direção do raio, $I_\nu(\mathbf{x}, \Omega, \nu)$ é a intensidade de radiação no ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ na frequência ν na direção $\Omega \in S^2$ (esfera unitária em \mathbb{R}^3), j_ν é o termo de emissão e λ_ν é o termo de extinção que representa a soma dos coeficientes de absorção (κ_ν) e espalhamento do meio (σ_ν).

O termo de emissão j_ν também pode ser escrito em termos de dois mecanismos. Por um lado há ganho energético devido ao espalhamento externo (I_e), isto é, a energia adentra o domínio devido ao espalhamento proveniente de outras direções. Por outro lado, em um volume de controle, também ocorre a emissão interna de radiação (I_i).

O ganho de energia por espalhamento externo (I_e) é proporcional à média da intensidade radiativa em todas as direções possíveis [60], isto é,

$$I_e = \frac{\sigma_\nu}{4\pi} \int_{S^2} I_\nu d\Omega \quad (1.2)$$

O termo

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} I_\nu d\Omega = \hat{I}$$

é chamado de densidade radiativa em \mathbb{R}^3 .

Por outro lado, considerando ϵ_ν como o coeficiente de emissão do meio, o ganho de energia por emissão interna (I_i) pode ser escrito como:

$$I_i = \epsilon_\nu S_\nu \quad (1.3)$$

onde S_ν representa o termo fonte. Considerando um meio em equilíbrio termodinâmico local temos que o coeficiente de emissão deve ser igual ao coeficiente de absorção (Lei de Kirchhoff) e o termo fonte é dado pela função de Planck $B(\nu, T)$ [18], ou seja:

$$I_i = \kappa_\nu B(\nu, T) \quad (1.4)$$

onde $B(\nu, T)$ é a função de Planck, dada por:

$$B(\nu, T) = \frac{4\pi\hbar\nu^3}{c^2} \left(\exp\left(\frac{2\pi\hbar\nu}{k_b T}\right) - 1 \right)^{-1} \quad (1.5)$$

em que T é a temperatura e \hbar , k_b e c são, respectivamente, a constante reduzida de Planck, a constante de Boltzmann e a velocidade da luz no vácuo.

Por fim, considerando o termo de emissão total $j_\nu = I_e + I_i$ e usando as expressões (1.2) e (1.4), a equação (1.1), considerando um meio participativo isotrópico, pode ser reescrita como:

$$\Omega \cdot (\nabla I_\nu) + (\kappa_\nu + \sigma_\nu) I_\nu = \frac{\sigma_\nu}{4\pi} \int_{S^2} I_\nu d\Omega + \kappa_\nu B(\nu, T) \quad (1.6)$$

que é conhecida como equação de transferência radiativa. Para mais detalhes sobre os conceitos e as fórmulas envolvidas, sugerimos a leitura dos trabalhos descritos nas referências [60], [18] e [35]. A partir deste ponto, por simplicidade de notação, omitiremos o subíndice.

A emissão radiativa é diretamente influenciada pela temperatura e esta, como vimos anteriormente, é alterada pela incidência de radiação. Disto segue que a intensidade radiativa depende do nível de energia do meio, de fato, na Equação (1.6) o termo fonte traz uma relação direta com a temperatura. Assim, para uma completa descrição do modelo é necessário, em problemas que envolvem troca de calor (seja por condução, convecção e/ou radiação), resolver a equação de transferência radiativa em conjunto com a equação de condução.

Por este motivo, adotaremos neste trabalho o modelo condutivo-radiativo proposto por Frank *et. al.* [28] para descrever a distribuição de temperatura nas paredes de uma turbina a gás devido à radiação térmica considerando um domínio limitado em um meio participativo isotrópico. Este modelo tem por base a equação de transferência radiativa acoplada à equação de conservação de energia e pode ser descrito pelas expressões:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot k_0 \nabla T = \int_{\nu_0}^{\infty} \int_{S^2} \kappa(I - B(\nu, T)) d\Omega d\nu, \quad t > 0 \quad (1.7)$$

$$\Omega \cdot \nabla I + (\kappa + \sigma)I = \frac{\sigma}{4\pi} \int_{S^2} I d\Omega + \kappa B(\nu, T), \quad \nu > \nu_0 \quad (1.8)$$

onde \mathbf{u} é o campo de velocidade, k_0 é a condutividade térmica do meio, $B(\nu, T)$ é a função de Planck dada na Equação (1.5) e ν_0 representa a parte opaca do espectro radiativo, isto é, a frequência a partir da qual o contorno é semitransparente. Em outras palavras, se $\nu > \nu_0$ a radiação incidente é transmitida para o interior do domínio. Como a Equação (1.7) representa a distribuição energética na região, a integração na variável ν é realizada sobre o intervalo $[\nu_0, \infty)$ contabilizando a radiação que atravessa a borda. O caso $\nu < \nu_0$ deve ser considerado nas condições de contorno do problema.

O termo no lado direito da igualdade na Equação (1.7) é o termo fonte de radiação e representa o divergente do fluxo de calor radiativo, isto é, a diferença entre a energia emitida e absorvida por um volume de controle em toda as direções e todo espectro de frequência ([56], [35]).

As condições de contorno do problema (1.7)-(1.8) são dadas por:

$$k_0(n \cdot \nabla T) = a(T_b - T) + b\pi \int_0^{\nu_0} B(\nu, T_b) - B(\nu, T) d\nu \quad (1.9)$$

$$I(\Omega) = \rho I(\Omega') + (1 - \rho)B(\nu, T_b), \quad n \cdot \Omega < 0 \quad (1.10)$$

onde n é o vetor normal exterior, T_b é a temperatura exterior, a e b são constantes positivas, Ω' é o ângulo de reflexão que satisfaz $\Omega' = \Omega - 2(n \cdot \Omega)n$ e $\rho(\mu)$ é o coeficiente de reflexão que satisfaz $0 \leq \rho(\mu) \leq 1$.

A condição (1.9) representa a influência dos mecanismos de condução, convecção e radiação. A integração do termo radiativo no intervalo $[0, \nu_0]$ representa a faixa de frequência para a qual a borda é opaca, isto é, a radiação incidente é completamente absorvida.

Já a Equação (1.10) representa condições semirreflexivas para o contorno. O termo $\rho I(\Omega)$ descreve a fração de radiação que é refletida para o interior

do domínio, enquanto que $(1-\rho)B(\nu, T_b)$ é a fração de energia radiativa que atravessa a borda [44].

Aqui será realizada uma simplificação no modelo com respeito à dependência dos parâmetros da equação de transferência radiativa na variável frequência.

Em meios gasosos as propriedades radiativas, tais como absorção e emissão, variam muito ao longo do espectro radiativo [56]. Esta variação ocorre devido à radiação incidente que promove a transição entre estados energéticos das moléculas que compõe o gás. No entanto, segundo Howell *et. al* [35] as propriedades de absorção e emissão são significativas apenas em certas regiões de comprimento de onda.

Para tratar o comportamento anômalo da emissão e absorção em certos intervalos espectrais, surgiram os chamados modelos de bandas radiativas. Por estar fora do escopo do presente trabalho não faremos uma descrição destes modelos, mas remetemos às referências [56] e [35], as quais apresentam uma descrição detalhada dos mesmos.

Por fim, cabe salientar que o modelo proposto nesta tese é um modelo a 1 banda de radiação. Sob esta condição os coeficientes da equação de transferência radiativa são considerados constantes, a intensidade radiativa torna-se independente da frequência e o termo fonte, que é dado pela função de Planck integrada em todo espectro de frequência, pode ser aproximado pela relação de Stefan-Boltzmann tornando-o dependente apenas da temperatura (ver [35]):

$$\int_0^\infty B(\nu, T) d\nu = \frac{\sigma_s T^4}{\pi} = B(T) \quad (1.11)$$

onde $\sigma_s = 5.670373 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ é a constante de Stefan-Boltzmann.

Com estas considerações temos o modelo a 1 banda de radiação

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot k_0 \nabla T = \int_{S^2} \kappa(I - B(T)) d\Omega \quad t > 0 \quad (1.12)$$

$$\Omega \cdot \nabla I + (\kappa + \sigma)I = \frac{\sigma}{4\pi} \int_{S^2} I \, d\Omega + \kappa B(T) \quad (1.13)$$

cujas condições de contorno são dadas por

$$k_0(n \cdot \nabla T) = a(T_b - T) + b\pi[B(T_b) - B(T)] \quad (1.14)$$

$$I(\Omega) = \rho I(\Omega') + (1 - \rho)B(T_b), \quad n \cdot \Omega < 0 \quad (1.15)$$

Um fato que dificulta o estudo deste problema é o número de variáveis na equação de transferência radiativa (1.6) que totalizam seis variáveis independentes, a saber: três variáveis espaciais, duas angulares e a frequência. Por este motivo torna-se difícil, computacionalmente, obter soluções para o caso geral. Logo, para tornar matematicamente viável o estudo deste problema, algumas simplificações são feitas na geometria e dimensões do modelo.

Uma vantagem pertinente à análise do problema em geometria unidimensional é que este estudo se torna uma ferramenta útil para verificar a viabilidade dos métodos desenvolvidos, permitindo analisar as peculiaridades de sua aplicação, bem como identificar eventuais dificuldades técnicas na implementação de códigos computacionais. Por estas razões trabalharemos aqui com a versão unidimensional da equação (1.6).

Na próxima seção descreveremos o sistema acoplado unidimensional que será objeto de estudo deste trabalho, e apresentaremos algumas referências que tratam de técnicas para obter a solução da equação de transferência radiativa.

1.1 Problema unidimensional

Para obter a representação unidimensional do problema acoplado considere um meio participativo isotrópico, semitransparente, limitado em uma dimensão por dois planos paralelos separados por uma distância L e com a temperatura do meio variando apenas na direção normal à superfície. Ademais, vamos supor tam-

bém um meio cinza, ou seja, que os coeficientes do problema sejam independentes da frequência.

Como mencionamos na seção anterior, a radiação se propaga em todas as direções possíveis, mas o problema é dito unidimensional porque a temperatura depende unicamente de uma variável espacial [83] e, para manter a consistência dimensional, consideramos a intensidade radiativa em uma única dimensão do espaço. Desta forma a direção do raio pode ser descrita como o cosseno do ângulo de incidência θ em relação à normal aos planos. Ademais, vamos supor que o contorno do domínio tenha um coeficiente de reflexão ρ e que o meio externo esteja em equilíbrio termodinâmico local.

Sob estas condições a Equação (1.13) pode ser reescrita como:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} I + \lambda I = \frac{\sigma}{2} \int_{-1}^1 I d\mu + \kappa B(T) \quad (1.16)$$

onde μ é o cosseno do ângulo de incidência, σ é o coeficiente de espalhamento, κ o coeficiente de absorção e λ o coeficiente de extinção total. Todos os coeficientes são não negativos, independentes da frequência e tais que $\sigma < \lambda$.

Assim o problema de transferência radiativa originalmente definido em seis variáveis independentes fica reduzido a apenas três: uma espacial, uma angular e a frequência.

Por fim, considerando a equação de conservação de energia unidimensional e o campo de velocidades nulo em (1.12) juntamente com a expressão (1.16) obtemos o problema condutivo-radiativo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot k_0 \nabla T = 2\pi \int_{-1}^1 \kappa(I - B(T)) d\mu \quad (1.17)$$

$$\mu \frac{\partial I}{\partial x} + \lambda I = \frac{\sigma}{2} \int_{-1}^1 I d\mu + \kappa B(T) \quad (1.18)$$

com as condições:

$$T(x, 0) = T_0 \quad (1.19)$$

$$-k_0 \frac{\partial T}{\partial x} = a(Tb_0 - T) + b\pi[B(Tb_0) - B(T)] \quad (1.20)$$

$$k_0 \frac{\partial T}{\partial x} = a(Tb_L - T) + b\pi[B(Tb_L) - B(T)] \quad (1.21)$$

$$I(0, \mu, t) = \rho_0 I(0, -\mu, t) + (1 - \rho_0)B(Tb_0), \quad \mu > 0 \quad (1.22)$$

$$I(L, -\mu, t) = \rho_L I(L, \mu, t) + (1 - \rho_L)B(Tb_L), \quad \mu > 0 \quad (1.23)$$

onde ρ_0 e ρ_L são os coeficientes de reflexão das bordas, e Tb_0 e Tb_L as temperaturas nas fronteiras do domínio.

Destacamos aqui que a dependência temporal que surge nas condições de contorno da equação de transporte se deve ao termo fonte, não indicando, portanto, um processo evolutivo. No problema transiente a Equação (1.18) contém o termo $\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t}$ onde c é a velocidade da luz, este termo, conforme mencionado por Vis-kanta e Anderson [83], é muito pequeno se comparado com o tempo requerido para provocar mudanças significativas no campo radiativo. Por este motivo no escopo deste trabalho considera-se $\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t}$ desprezível.

O objeto de estudo desta Tese é o modelo acoplado (1.17) - (1.18) com as condições dadas pelas expressões (1.19) a (1.23).

Uma questão que surge ao trabalharmos com modelos matemáticos é saber se existe uma solução para o problema e se esta solução é única. Neste sentido, Kelley [39] desenvolveu a teoria de existência e unicidade para um problema unidimensional considerando condições de fronteira do tipo Dirichlet. O caso tridimensional foi analisado por Thompson *et. al.* [75] considerando emissão e reflexão no contorno do domínio e assumindo que a intensidade é independente da frequência. A dependência da frequência foi tratada posteriormente em [76] no qual foi desenvolvida a teoria para um problema mais geral, com condições de contorno semirreflexivas, mas impondo a condição restritiva $\kappa < \sigma$. Mais recentemente, Aze-

vedo *et. al.* [26] estendem a teoria de existência para o caso unidimensional sem estas condições restritivas.

Feita esta breve descrição da existência e unicidade para o problema radiativo acoplado, passaremos agora a descrever algumas referências bibliográficas para o problema de transferência radiativa e metodologias de solução da equação de transporte radiativo.

As primeiras abordagens foram incentivadas pelo problema de fechamento no estudo das equações de momento radiativo (intensidade média, fluxo radiante e tensor de pressão) ([18], [56]). Para contornar esta dificuldade foram desenvolvidos os métodos de aproximações que, ao relacionar as quantidades envolvidas, simplificam o modelo para posterior resolução numérica. Neste sentido, podemos citar as aproximações difusivas e a aproximação de Milne-Eddington.

O método de aproximação difusiva, originalmente proposto por Rosseland [65], supõe que a transferência de energia ocorre de maneira análoga a um processo difusivo, isto é, relacionando o fluxo radiativo com o gradiente de intensidade. No entanto, conforme se lê em Howell *et. al.* [35], esta é uma aproximação válida somente em meios opticamente espessos e com gradiente de temperatura pequeno.

Já a aproximação de Milne-Eddington relaciona a pressão radiativa com a densidade de energia, partindo-se da hipótese de que a intensidade local é isotrópica, isto é, independente da direção. Mais detalhes podem ser encontrados nos livros de referência [56] e [35] ou nos trabalhos de Milne [55] e Eddington [27].

Uma outra forma de contornar o problema de fechamento é aproximar a intensidade por uma expansão em série. Se a expansão for feita em termos de polinômios de Legendre obteremos o método de aproximações por harmônicos esféricos, ou método P_N , onde o índice N indica a ordem de truncamento da expansão.

Inicialmente proposto por Jeans [36] em um problema unidimensional, este método baseia-se na propriedade de ortogonalidade dos polinômios de Legendre para transformar a equação de transferência radiativa em um sistema de equações diferenciais ordinárias. Em geral, as aproximações de ordem ímpar (P_1 e P_3) são escolhidas em preferência às pares, pois estas podem apresentar problemas de fechamento quando aplicadas nas condições de contorno [53], enquanto que aquelas apresentam acurácia melhor do que as pares [21].

Este método foi extensivamente estudado por Mark ([53], [54]) e Gelbard *et. al.* [29]. Outras referências incluem a aplicação do método em casos unidimensionais em geometrias cilíndricas e esféricas [10], aplicações bidimensionais [63], aproximações de altas ordens [11] e aplicação na formulação matricial da equação de transporte [14]. Uma metodologia para simplificar o número de equações parciais resultantes da aplicação do método P_N (de ordens 1, 2 e 3) em problemas de transferência radiativa tridimensional foi proposta por Yang e Modest [87] e, posteriormente, esta mesma metodologia foi expandida para ordens arbitrárias [57].

Mais recentemente McClarren *et. al.* [52] apresentam a aplicação do método dos harmônicos esféricos para solução de problemas evolutivos de radiação térmica em domínios de 1 e 2 dimensões.

Uma das desvantagens do método P_N é a complexidade das equações para valores de N elevados e para geometrias com maiores dimensões. Uma alternativa para contornar este problema é o método SP_N , ou P_N simplificado, desenvolvido por Gelbard [30]. A ideia básica desta abordagem consiste em efetuar aproximações nas derivadas de segunda ordem nas equações P_N planares, generalizando estas equações para problemas multidimensionais.

Gelbard realizou estudos das aproximações em domínios unidimensionais em geometria planar, cilíndrica e esférica ([30], [31], [32]). Pomraning [61] realizou uma análise assintótica das equações SP_N , seguido por Larsen *et. al.* [43]

que considerou o problema com espalhamento anisotrópico. A aplicação deste método em modelos de resfriamento de vidro e comparação com outras metodologias pode ser encontrado em [45] e [44].

Uma outra metodologia que vem sendo largamente utilizada é o método das ordenadas discretas (S_N). Nesta metodologia a variável angular é discretizada em N direções, transformando a equação de transferência radiativa em um sistema linear de equações diferenciais ordinárias. O S_N foi inicialmente proposto por Wick [86] e posteriormente descrito por Chandrasekhar ([17], [18]). A análise da convergência deste método foi proposta por Anselone [1].

Com o passar do tempo algumas melhorias foram sendo adicionadas, tais como a inclusão de expressões exatas para o termo fonte [41] e o uso de quadratura dupla de Gauss no desenvolvimento do método [74]. Diversos trabalhos foram desenvolvidos após as primeiras publicações sobre a metodologia ([15], [73], [16], [46], [71], [48]), nos quais destacamos as obras de Carlson ([15], [16]), que descrevem a metodologia para geometrias planar, esférica e cilíndrica e também a extensão para problemas de transporte de nêutrons.

A partir do método das ordenadas discretas Vilhena e Barichello [80] propõem o método conhecido como LTS_N , que consiste em resolver analiticamente as equações obtidas com o S_N através da aplicação da Transformada de Laplace na variável espacial. Em Vilhena *et. al.* [81] pode ser encontrada uma breve descrição deste método, bem como algumas outras referências e modelos derivados. Já Pazos *et. al* [59] descrevem um estudo sobre a convergência do LTS_N .

Trabalhos mais recentes incluem a utilização de diagonalização matricial [69] para obter soluções em geometrias unidimensionais, e a aplicação do LTS_N em problemas condutivo-radiativos em planos paralelos com diversas formulações para o termo fonte ([79], [78]).

Outro método que faz uso das ordenadas discretas é o método Analítico das Ordenadas Discretas (*ADO*) proposto por Barichello e Siewert [9]. Este método, tendo por base a utilização de quadraturas arbitrárias definidas no semi-intervalo, consiste em encontrar expressões analíticas para intensidade na variável espacial enquanto que a variável angular é discretizada via S_N . Este método vem sendo largamente utilizado em diversos problemas, tais como, transferência radiativa [70] incluindo, neste caso, o efeito de polarização da luz [7], e também em transporte de nêutrons [8] e transferência de calor [6].

Ao longo dos últimos anos, técnicas que abordam o problema sob o enfoque de operadores integrais vêm sendo desenvolvidas. Para isso, a equação (1.16), originalmente uma equação íntegro-diferencial, é reescrita em sua formulação integral com auxílio de operadores. Neste contexto podemos citar o método *GFD* (*Green's Function Decomposition*) desenvolvido por Azevedo *et. al.* [24] para o caso de transferência de radiação térmica em um domínio unidimensional isotrópico. Nesta metodologia os operadores integrais são aproximados por matrizes obtidas com projeções em espaços de dimensão finita e o fluxo térmico é discretizado pelo método de Crank-Nicolson.

A versão com espalhamento anisotrópico foi analisada por Azevedo *et. al.* [25] e as estimativas para o erro de truncamento do método foram descritas em [67]. Mais recentemente Sauter *et. al.* [66] aplicam o *GFD* em problemas com condutividade térmica dependente da temperatura. Já Konzen *et. al.* [22] aplicam o método em um problema acoplado, onde a transferência radiativa é calculada pelo *GFD* e a equação de condução tratada pelo método de elementos finitos.

A formulação integral do problema radiativo é uma equação integral de Fredholm do segundo tipo. Este tipo de equação vem sendo largamente estudada ([58] [2], [4], [3]), mas destacamos aqui o método de Nyström [58], que consiste em aproximar o operador integral envolvido por uma quadratura e resolver o problema derivado nos pontos da malha espacial, posteriormente a solução é estendida a to-

dos os pontos do domínio por meio de uma fórmula de interpolação adequada ao problema. Para mais detalhes sugerimos a consulta à referência [5].

Uma abordagem semelhante foi utilizada em problemas de transporte uni e bidimensionais ([49], [50], [77]). Mais recentemente Dalmolin *et. al* [20] validam o método de Nyström em problemas de transferência radiativa em geometria unidimensional com espalhamento isotrópico. Outras referências incluem problemas de transferência radiativa com refração variável [34] e transporte de partículas neutras [23].

O autor desta Tese não tem conhecimento de referências sobre a aplicação do método de Nyström em problemas de transferência condutivo-radiativos, sendo esta uma contribuição do presente trabalho. Outras contribuições incluem a adaptação do método de Crank-Nicolson para o problema acoplado e a obtenção de resultados para o problema acoplado com condições de contorno não lineares e coeficientes de reflexão não nulos.

Temos como objetivo resolver o problema de transporte radiativo em estado estacionário em um meio participativo isotrópico com fonte interna, acoplado ao fluxo térmico em um domínio unidimensional, conforme descrito nas equações (1.17)-(1.23). Em um primeiro momento reescreveremos o problema em sua formulação integral para posteriormente resolvê-lo. Como metodologia de solução usaremos o método de Nyström para a equação de transporte e, para o fluxo térmico, aplicaremos discretização por diferenças finitas clássica.

Esta metodologia foi escolhida devido as vantagens que apresenta: em primeiro lugar, nesta abordagem não é necessário discretizar a variável angular. Em segundo lugar, uma vez escolhido um esquema de quadratura, o método de Nyström discretiza a equação integral com base nesta quadratura. Por fim, a formulação matricial do problema discretizado é rapidamente determinada e de fácil implementação.

Algumas dificuldades técnicas também foram observadas. O núcleo do operador da formulação integral apresenta uma singularidade, o que impossibilita o cálculo direto da integral na variável angular. Mas, como veremos adiante, este obstáculo pode ser contornado com a utilização de técnicas de remoção de singularidade. Ademais, para o problema acoplado, o tempo computacional torna-se maior para ordens de quadratura elevadas. No entanto isto pode ser otimizado reescrevendo o sistema em sua formulação matricial e usando pacotes de computação científica.

O presente trabalho encontra-se estruturado em 5 capítulos. No capítulo 2 serão desenvolvidos os operadores para a descrição do problema de transporte radiativo em sua forma integral. Em seguida, no capítulo 3, serão apresentados o método de Nyström, a técnica de remoção de singularidade que usamos e a discretização obtida com este método. Neste ponto serão mostrados alguns resultados gerados através de testes com diversas quadraturas e condições de fronteira e fonte, comparando as soluções obtidas com as existentes na literatura sobre o tema.

No capítulo 4 será estudado o caso acoplado e os diferentes modelos que serão testados e as eventuais simplificações realizadas. Também serão mostrados os dados utilizados nas simulações e os respectivos resultados. Por fim, no capítulo 5 serão apresentadas algumas considerações sobre os modelos utilizados e as perspectivas de trabalhos futuros.

2 PROBLEMA DE TRANSPORTE UNIDIMENSIONAL

Vimos no capítulo antecedente que a equação de transferência radiativa unidimensional é obtida ao considerarmos o fenômeno entre dois planos paralelos separados a uma distância L um do outro. Nesta geometria, considerando o modelo a 1 banda de radiação, a intensidade torna-se função de apenas duas variáveis independentes: a posição x e o cosseno do ângulo de incidência μ .

Como o objetivo desta seção é construir a formulação integral a ser usada no método de Nyström, vamos considerar a equação de transferência radiativa unidimensional com uma fonte isotrópica dependente somente da variável espacial. Sob estas condições, o domínio do problema limita-se a uma região $D = \{(x, \mu) \mid (x, \mu) \in [0, L] \times [-1, 1]\}$ e a equação de transferência radiativa assume a forma

$$\mu \frac{\partial I}{\partial x} + \lambda I = \frac{\sigma}{2} \int_{-1}^1 I d\mu + S(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad (2.1)$$

onde μ é o cosseno do ângulo de incidência, σ é o coeficiente de espalhamento e λ o coeficiente de absorção total.

Por definição, a densidade radiativa \hat{I} é escrita como:

$$\hat{I}(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(x, \mu) d\mu \quad (2.2)$$

assim, a Equação (2.1) pode ser reescrita em termos de \hat{I} como:

$$\mu \frac{\partial \hat{I}}{\partial x} + \lambda \hat{I} = \sigma \hat{I} + S(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad (2.3)$$

Por fim, para completarmos o problema (2.3) adicionamos as condições semirreflexivas, onde consideramos que $\rho_0(\mu)$ e $\rho_L(\mu)$ são os coeficientes de reflexão, respectivamente, das bordas esquerda e direita e satisfazem as relações $0 \leq \rho_0(\mu) \leq 1$

e $0 \leq \rho_L(\mu) \leq 1$. Temos ainda que $F_0(\mu)$ e $F_L(\mu)$ são funções integráveis que representam as contribuições da fronteira:

$$I(0, \mu) = \rho_0(\mu)I(0, -\mu) + (1 - \rho_0(\mu))F_0(\mu), \quad \mu > 0 \quad (2.4)$$

$$I(L, \mu) = \rho_L(\mu)I(L, -\mu) + (1 - \rho_L(\mu))F_L(\mu), \quad \mu < 0 \quad (2.5)$$

Os coeficientes de reflexão são dependentes da variável angular mas, por simplicidade de notação, omitiremos a dependência destes termos nessa variável.

A Equação (2.3) é uma equação íntegro-diferencial. Passaremos agora a descrever a metodologia para construir os operadores utilizados para obter a formulação integral do problema.

2.1 Operadores e formulação integral

Tomando $Q(x) = \sigma \hat{I} + S(x)$ na equação (2.3) temos:

$$\mu \frac{\partial I}{\partial x} + \lambda I = Q(x) \quad (2.6)$$

essa equação pode ser resolvida integrando-se ao longo da direção de um raio [56].

De onde obtemos as expressões

$$I(x, \mu) = \frac{1}{\Delta} \left((1 - \rho_0)F_0 + \rho_0(1 - \rho_L)F_L e^{-\frac{\lambda L}{\mu}} + \frac{\rho_0}{\mu} \int_0^L Q(s) e^{-\frac{\lambda s}{\mu}} ds + \frac{\rho_0 \rho_L}{\mu} \int_0^L Q(s) e^{(s-2L)\frac{\lambda}{\mu}} ds \right) e^{-\frac{\lambda x}{\mu}} + \frac{1}{\mu} \int_0^x Q(s) e^{-\frac{\lambda}{\mu}(x-s)} ds \quad (2.7)$$

$$I(x, -\mu) = \frac{1}{\Delta} \left((1 - \rho_L)F_L + \rho_L(1 - \rho_0)F_0 e^{-\frac{\lambda L}{\mu}} + \frac{\rho_0 \rho_L}{\mu} \int_0^L Q(s) e^{-(L+s)\frac{\lambda}{\mu}} ds + \frac{\rho_L}{\mu} \int_0^L Q(s) e^{(s-L)\frac{\lambda}{\mu}} ds \right) e^{\frac{\lambda}{\mu}(x-L)} + \frac{1}{\mu} \int_x^L Q(s) e^{\frac{\lambda}{\mu}(x-s)} ds \quad (2.8)$$

onde

$$\Delta = 1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda L}{\mu}}$$

Este procedimento foi descrito mais detalhadamente nas referências [24] e [67].

Uma vez obtidos os valores de $I(x, \mu)$ e de $I(x, -\mu)$ podemos calcular a densidade radiativa em cada ponto x da seguinte maneira:

$$\hat{I}(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(x, \mu) d\mu = \frac{1}{2} \int_0^1 (I(x, \mu) + I(x, -\mu)) d\mu \quad (2.9)$$

Note que nas expressões (2.7) e (2.8) existem termos que envolvem o termo fonte $Q(s)$ e termos que envolvem as condições de fronteira F_0 e F_L . Tendo isso em vista, é possível reescrever a expressão para densidade radiativa como:

$$\hat{I}(x) = L_g Q(x) + L_b F \quad (2.10)$$

onde L_g é um operador aplicado sobre o termo fonte, L_b é um operador aplicado sobre as condições de contorno e F é o vetor das funções integráveis $[F_0, F_L]$.

Para obtermos as expressões dos operadores utilizamos as equações (2.7), (2.8) e (2.9). De onde obtemos, para o operador L_g a expressão:

$$L_g Q(x) = \int_0^L K(x, s) Q(s) ds \quad (2.11)$$

onde $K(x, s)$ é núcleo do operador dado por:

$$K(x, s) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2\mu\Delta} \left(\rho_0 e^{-\frac{\lambda(s+x)}{\mu}} + \rho_0 \rho_L e^{-\frac{\lambda}{\mu}(x+2L-s)} + \rho_0 \rho_L e^{-\frac{\lambda}{\mu}(2L+s-x)} \right. \right. \\ \left. \left. \rho_L e^{-\frac{\lambda}{\mu}(2L-s-x)} \right) + \frac{1}{2\mu} e^{-\frac{\lambda}{\mu}|s-x|} \right] d\mu \quad (2.12)$$

E para o operador L_b obtemos a expressão:

$$L_b B(x) = \int_0^1 \frac{1}{2\Delta} \left((1 - \rho_0) e^{-\frac{\lambda x}{\mu}} F_0 + \rho_0 (1 - \rho_L) e^{-\frac{\lambda}{\mu}(x+L)} F_L + \right. \\ \left. + (1 - \rho_L) e^{-\frac{\lambda}{\mu}(L-x)} F_L + \rho_L (1 - \rho_0) e^{-\frac{\lambda}{\mu}(2L-x)} F_0 \right) d\mu \quad (2.13)$$

Lembramos aqui que o termo fonte do problema auxiliar (2.6) é dado por $Q(x) = \sigma \hat{I} + S(x)$. Substituindo esta relação na equação operacional (2.10) obtemos:

$$\begin{aligned} \hat{I}(x) &= L_g(\sigma \hat{I}(x) + S(x)) + L_b F(x) \\ &= \sigma L_g \hat{I}(x) + g(x) \\ (\mathbf{I}_d - \sigma L_g) \hat{I}(x) &= g(x) \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde \mathbf{I}_d representa a matriz identidade e $g(x) = L_g S(x) + L_b F(x)$.

Usando a representação do operador L_g dada em (2.11) obtemos o problema equivalente:

$$\hat{I}(x) = \sigma \int_0^L K(x, s) \hat{I}(s) ds + g(x) \quad (2.15)$$

veja que de uma equação íntegro-diferencial obtemos um problema integral. Essa expressão é conhecida como representação integral para o problema de transferência radiativa unidimensional. Note que a integração na variável angular é realizada juntamente com o cálculo do núcleo $K(x, s)$, isto é, ao se definir a malha espacial o núcleo $K(x, s)$ já pode ser calculado e, com isso, a equação integral a ser resolvida depende somente da variável espacial.

A equação acima é uma equação integral de Fredholm do segundo tipo. Este tipo de equação possui solução única sempre que o operador $(\mathbf{I}_d - \sigma L_g)$ admitir um operador inverso $(\mathbf{I}_d - \sigma L_g)^{-1}$. Em outras palavras, a Equação (2.15) admite solução única quando a série de Neumann do operador inverso convergir, o que ocorre sempre que $\|\sigma L_g\| < 1$ (ver [42]), onde $\|\cdot\|$ é a norma do espaço de definição do operador L_g .

Como referências de análise de soluções em diferentes espaços funcionais podemos citar os trabalhos de Azevedo *et. al.* [24] e Dalmolin *et. al.* [20].

Uma vez obtida a solução do problema (2.15) o termo fonte do problema auxiliar (2.3) torna-se conhecido e, conseqüentemente, a intensidade angular pode ser obtida diretamente das expressões (2.7) e (2.8). Por este motivo passaremos agora a descrever o método de Nyström para o problema de transferência radiativa unidimensional em sua formulação integral.

3 MÉTODO DE NYSTRÖM

Como vimos no capítulo anterior, o problema de transferência radiativa unidimensional, que é uma equação íntegro-diferencial, pode ser reescrito de maneira que a formulação resultante recaia em uma equação integral de Fredholm do segundo tipo. Na seção introdutória deste trabalho mencionamos, em uma breve revisão bibliográfica, que este tipo de equação vem sendo largamente estudado e damos ênfase ao método de Nyström. No presente capítulo abordaremos com mais detalhes esta metodologia aplicada ao modelo que é objeto de estudo deste trabalho.

A técnica em questão é aplicada na formulação integral do problema e constitui-se basicamente em dois passos: em um primeiro momento o termo integral é aproximado por alguma quadratura e, posteriormente, a equação resultante é avaliada em cada ponto da malha espacial, gerando um sistema linear cujas variáveis são as densidades radiativas em cada ponto. No entanto a aplicação direta do método falha, pois o núcleo do operador L_g possui uma singularidade diagonal, isto é, $K(x, s)$ é singular sempre que $x = s$.

Para contornarmos esse problema utilizamos a técnica de remoção de singularidade descrita por Kantorovich e Krylov [38], que consiste em somar e subtrair a função em que o operador está atuando, aplicada na variável livre da integral. Com esta modificação o operador pode ser reescrito como a soma entre um termo cuja singularidade foi removida e um termo que pode ser resolvido analiticamente. Esta mesma metodologia foi utilizada por [49] em problema de transporte de nêutrons. Uma descrição desta metodologia de remoção de singularidade pode também ser encontrada em Press *et. al* [62].

Aplicando estes conceitos na Equação (2.15) obtemos:

$$\begin{aligned}
\hat{I}(x) &= \sigma \int_0^L K(x, s) \hat{I}(s) ds + g(x) \\
&= \sigma \int_0^L K(x, s) (\hat{I}(s) + (\hat{I}(x) - \hat{I}(x))) ds + g(x) \\
&= \sigma \int_0^L K(x, s) (\hat{I}(s) - \hat{I}(x)) ds + \sigma \int_0^L K(x, s) \hat{I}(x) ds + g(x) \\
&= \sigma \int_0^L K(x, s) (\hat{I}(s) - \hat{I}(x)) ds + \sigma \hat{I}(x) R(x) + g(x) \tag{3.1}
\end{aligned}$$

onde $R(x) = \int_0^L K(x, s) ds$.

O primeiro termo do lado direito da igualdade não possui mais singularidade pois o termo $\hat{I}(s) - \hat{I}(x)$ compensa a singularidade do núcleo quando $x = s$, e a integral $R(x)$ pode ser resolvida analiticamente [19].

Cabe destacar aqui que a manipulação apresentada acima deve ser realizada em todos os operadores L_g da formulação integral. Posto que da Equação (2.14) sabemos que $g(x) = L_g S(x) + L_b F(x)$ segue que na Equação (3.1) devemos ter

$$g(x) = \int_0^L K(x, s) (S(s) - S(x)) ds + S(x) R(x) + L_b F(x) \tag{3.2}$$

Nesta última expressão o primeiro e o último termo podem ser resolvido numericamente com auxílio da biblioteca de integração numérica *GSL integration* da *GNU Scientific Library* e o segundo termo pode ser resolvido analiticamente.

Uma vez removida a singularidade podemos prosseguir com a aplicação do método de Nyström, cuja primeira etapa consiste em aproximar a integral na variável espacial da Equação (3.1). Assim, fazemos

$$\int_0^L K(x, s) [\hat{I}(s) - \hat{I}(x)] ds \approx \sum_{j=1}^N \omega_j K(x, s_j) [\hat{I}(s_j) - \hat{I}(x)] \tag{3.3}$$

onde $\{\omega_j\}_{j=1}^N$ e $\{s_j\}_{j=1}^N$ são, respectivamente, os pesos e abscissas do esquema de quadratura escolhido.

Substituindo (3.3) em (3.1) e desprezando o erro de truncamento, obtemos a equação

$$\hat{I}(x) = \sigma \sum_{j=1}^N \omega_j K(x, s_j) [\hat{I}(s_j) - \hat{I}(x)] + \sigma \hat{I}(x) R(x) + g(x) \quad (3.4)$$

avaliando a expressão acima em cada ponto $\{x_i\}_{i=1}^N$ da malha espacial obtemos o sistema linear de ordem $N \times N$

$$\hat{I}(x_i) = \sigma \sum_{j=1}^N \omega_j K(x_i, s_j) [\hat{I}(s_j) - \hat{I}(x_i)] + \sigma \hat{I}(x_i) R(x_i) + g(x_i) \quad (3.5)$$

Para simplificar a notação façamos $\hat{I}(x_i) = \hat{I}_i$, $K(x_i, s_j) = K_{ij}$, $R(x_i) = R_i$ e $g(x_i) = g_i$. Assim:

$$\hat{I}_i = \sigma \sum_{j=1}^N \omega_j K_{ij} [\hat{I}_j - \hat{I}_i] + \sigma \hat{I}_i R_i + g_i \quad (3.6)$$

que pode ser escrito em termos matriciais como:

$$A\hat{I} = G \quad (3.7)$$

onde $\hat{I} = [\hat{I}_1 \ \hat{I}_2 \ \cdots \ \hat{I}_N]^T$, $G = [g_1 \ g_2 \ \cdots \ g_N]^T$ e A é a matriz de ordem $N \times N$ dada por:

$$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N = \begin{cases} (1 - \sigma R_i) + \sigma \sum_{l \neq i} \omega_l K_{i,l}, & \text{se } i = j \\ -\sigma \omega_j K_{ij}, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.8)$$

A solução do sistema (3.7), obtido com a discretização pelo método de Nyström, nos fornece os resultados para a densidade radiativa do problema de transporte unidimensional (2.15). Os detalhes sobre a implementação numérica do método e os resultados obtidos com a aplicação do mesmo são descritos brevemente nas próximas seções.

3.1 Implementação Numérica

Os códigos desenvolvidos para a implementação do método de Nyström foram escritos em linguagem C++. A implementação dos operadores integrais foi tratada com auxílio do pacote de integração numérica da biblioteca *GNU Scientific Library* enquanto que o pacote de álgebra linear, do mesmo repositório, foi utilizado para se obter a solução no sistema (3.7) via decomposição LU da matriz A .

Como alternativas ao esquema de integração na variável espacial foram implementadas as aproximações pelas regras de Simpson, Boole e Gauss-Legendre. Nesta etapa do desenvolvimento do código verificamos que as duas últimas quadraturas apresentaram resultados um pouco melhores se comparadas com a primeira e, por este motivo, serão discutidas somente as duas que apresentaram melhor desempenho.

A solução obtida com o método de Nyström foi comparada aos resultados dos métodos LTS_N e GFD encontrados na literatura sobre o tema.

3.2 Resultados

O autor deste trabalho está ciente de que o método de Nyström foi devidamente verificado por Dalmolin *et. al.* [20] para um problema de transporte de nêutrons. No entanto, na obra citada, os códigos foram escritos em linguagem C enquanto que nesta tese foi utilizada linguagem C++ que, embora sendo semelhante em termos de programação, é estruturalmente distinta. Tendo isto em vista optamos por também apresentar os resultados do método de Nyström com o intuito de verificar a consistência dos códigos desenvolvidos ao longo da elaboração deste trabalho.

As respostas obtidas foram comparadas com aquelas apresentadas por Vargas *et. al* [78] com o método LTS_N para 300 pontos e também comparadas com o método GFD apresentado por Azevedo *et. al.* [24] com 1600 pontos.

Para uma primeira simulação foram considerados coeficientes de reflexão nulos, condições de fronteira constantes e simétricas ($F_0 = F_L = 1/8$), fonte constante ($S = 1/8$) e $\lambda = \sigma = L = 1$. Nas tabelas (3.1) e (3.2) encontram-se os resultados, respectivamente, para a quadratura de Boole e Gauss-Legendre com N variando de 101 a 1601.

Tabela 3.1: Densidade radiativa considerando quadratura de Boole e $\rho_0 = \rho_L = 0$, $F_0 = F_L = \frac{1}{8}$, $\lambda = \sigma = L = 1$ e $S(x) = \frac{1}{8}$.

x	$LTS_{300}^{[78]}$	$GFD_{1600}^{[24]}$	$N = 101$	$N = 201$	$N = 401$	$N = 801$	$N = 1601$
0.0	0.516841	0.516841	0.516830	0.516838	0.516841	0.516841	0.516842
0.1	0.600634	0.600637	0.600633	0.600636	0.600637	0.600637	0.600637
0.2	0.647997	0.647999	0.647996	0.647998	0.647999	0.647999	0.647999
0.3	0.678715	0.678718	0.678715	0.678717	0.678718	0.678718	0.678718
0.4	0.696303	0.696308	0.696305	0.696307	0.696308	0.696308	0.696308
0.5	0.702053	0.702055	0.702053	0.702055	0.702055	0.702055	0.702056

Tabela 3.2: Densidade radiativa considerando quadratura de Gauss-Legendre e $\rho_0 = \rho_L = 0$, $F_0 = F_L = \frac{1}{8}$, $\lambda = \sigma = L = 1$ e $S(x) = \frac{1}{8}$.

x	$LTS_{300}^{[78]}$	$GFD_{1600}^{[24]}$	$N = 101$	$N = 201$	$N = 401$	$N = 801$	$N = 1601$
0.0	0.516841	0.516841	0.516842	0.516842	0.516842	0.516842	0.516842
0.1	0.600634	0.600637	0.600635	0.600637	0.600637	0.600637	0.600637
0.2	0.647997	0.647999	0.647994	0.648000	0.647999	0.647999	0.647999
0.3	0.678715	0.678718	0.678721	0.678718	0.678718	0.678718	0.678718
0.4	0.696303	0.696308	0.696308	0.696308	0.696308	0.696308	0.696308
0.5	0.702053	0.702055	0.702056	0.702056	0.702056	0.702056	0.702056

Pela análise dos resultados é possível perceber que a partir de 401 pontos os dois esquemas apresentam concordância de 5 dígitos com os resultados da literatura, indicando uma boa acurácia do método. Ademais, é de se notar também que para malhas com menor número de pontos (101 e 201) a quadratura de Boole perde um pouco a exatidão nas proximidades da fronteira ($x = 0$), alcançando neste ponto 4 dígitos, enquanto que para os outros valores analisados o comportamento é comparável ao obtido com Gauss-Legendre. Esta última apresenta resultados ligeiramente melhores uma vez que não há perda de exatidão nos pontos de fronteira, alcançando 5 dígitos de exatidão, a menos de erros de arredondamento/truncamento, com 101 pontos.

Foram realizadas simulações para um segundo caso utilizando as mesmas quadraturas e o mesmo conjunto de parâmetros, porém com a fonte variável $S(x) = -x^2 + x$. As tabelas (3.3) e (3.4) representam os resultados obtidos com a aplicação do método utilizando, respectivamente, os esquemas de Boole e Gauss-Legendre.

Neste caso também podemos observar uma boa concordância com dados da literatura. A partir de 201 pontos ambos os esquemas apresentam 5 dígitos exatos se comparados com o *GFD*. A quadratura de Boole, para uma malha de 101 pontos, como no caso anterior, apresenta uma pequena perda na acurácia nos pontos de fronteira. Já Gauss-Legendre também mostra resultados ligeiramente melhores neste caso, alcançando 5 dígitos de exatidão para $N = 101$.

Tabela 3.3: Densidade radiativa considerando quadratura de Boole e $\rho_0 = \rho_L = 0$, $F_0 = F_L = 0$, $\lambda = \sigma = L = 1$ e $S(x) = -x^2 + x$.

x	LTS ₃₀₀ ^[78]	GFD ₁₆₀₀ ^[24]	$N = 101$	$N = 201$	$N = 401$	$N = 801$	$N = 1601$
0.0	0.335952	0.335947	0.335938	0.335945	0.335947	0.335947	0.335947
0.05	0.398459	0.398461	0.398456	0.398461	0.398461	0.398461	0.398462
0.1	0.452925	0.452926	0.452924	0.452926	0.452926	0.452927	0.452927
0.15	0.502992	0.502994	0.502995	0.502993	0.502994	0.502994	0.502994
0.2	0.548165	0.548166	0.548164	0.548166	0.548166	0.548166	0.548166
0.25	0.587762	0.587727	0.587724	0.587727	0.587727	0.587728	0.587728
0.3	0.621014	0.621015	0.621014	0.621015	0.621015	0.621016	0.621016
0.35	0.647477	0.647478	0.647478	0.647478	0.647478	0.647478	0.647478
0.4	0.666684	0.666685	0.666684	0.666685	0.666686	0.666686	0.666686
0.45	0.678336	0.678332	0.678330	0.678332	0.678332	0.678332	0.678332
0.5	0.682233	0.682234	0.682233	0.682234	0.682234	0.682235	0.682235

Tabela 3.4: Densidade radiativa considerando quadratura de Gauss-Legendre e $\rho_0 = \rho_L = 0$, $F_0 = F_L = 0$, $\lambda = \sigma = L = 1$ e $S(x) = -x^2 + x$.

x	LTS ₃₀₀ ^[78]	GFD ₁₆₀₀ ^[24]	$N = 101$	$N = 201$	$N = 401$	$N = 801$	$N = 1601$
0.0	0.335952	0.335947	0.335947	0.335947	0.335947	0.335947	0.335947
0.05	0.398459	0.398461	0.398466	0.398460	0.398462	0.398461	0.398462
0.1	0.452925	0.452926	0.452922	0.452927	0.452927	0.452927	0.452927
0.15	0.502992	0.502994	0.503000	0.502992	0.502995	0.502994	0.502994
0.2	0.548165	0.548166	0.548156	0.548169	0.548167	0.548167	0.548166
0.25	0.587762	0.587727	0.587719	0.587727	0.587727	0.587728	0.587728
0.3	0.621014	0.621015	0.621023	0.621017	0.621015	0.621016	0.621016
0.35	0.647477	0.647478	0.647470	0.647478	0.647478	0.647478	0.647478
0.4	0.666684	0.666685	0.666686	0.666685	0.666685	0.666686	0.666686
0.45	0.678336	0.678332	0.678335	0.678332	0.678332	0.678332	0.678332
0.5	0.682233	0.682234	0.682235	0.682235	0.682235	0.682235	0.682235

3.3 Conclusões: Método de Nyström

De acordo com os resultados apresentados na seção anterior, pode-se observar que o método de Nyström foi devidamente verificado. A metodologia desenvolvida mostra-se eficaz como alternativa à solução do problema de transferência radiativa unidimensional. Além disso os códigos desenvolvidos nesta parte do trabalho apresentam um bom tempo de execução computacional, atingindo a marca de poucos minutos.

Agora que descrevemos e verificamos a aplicabilidade do método de Nyström na solução da equação de transferência radiativa, passaremos ao problema acoplado objeto de estudo desta tese.

4 PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA TÉRMICA UNIDIMENSIONAL

Neste capítulo apresentamos alguns resultados obtidos com a aplicação da metodologia descrita nos capítulos anteriores aplicada ao problema unidimensional de transferência radiativa com acoplamento de temperatura considerando um modelo a uma banda da radiação. Com intuito de obter estes resultados discretizamos a equação de condução usando esquemas clássicos de diferenças finitas e a equação de transferência radiativa é discretizada via método de Nyström.

O modelo matemático que é objeto de estudo desta tese e que será discretizado com a metodologia descrita anteriormente consiste no sistema acoplado

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot k_0 \nabla T = 2\pi \int_{-1}^1 \kappa(I - B(T)) d\mu \quad (4.1)$$

$$\mu \frac{\partial I}{\partial x} + \lambda I = \frac{\sigma}{2} \int_{-1}^1 I d\mu + \kappa B(T) \quad (4.2)$$

com as condições:

$$T(x, 0) = T_0 \quad (4.3)$$

$$-k_0 \frac{\partial T}{\partial x} = a(Tb_0 - T) + b\pi[B(Tb_0) - B(T)] \quad (4.4)$$

$$k_0 \frac{\partial T}{\partial x} = a(Tb_L - T) + b\pi[B(Tb_L) - B(T)] \quad (4.5)$$

$$I(0, \mu, t) = \rho_0 I(0, -\mu, t) + (1 - \rho_0)B(Tb_0), \quad \mu > 0 \quad (4.6)$$

$$I(L, -\mu, t) = \rho_L I(L, \mu, t) + (1 - \rho_L)B(Tb_L), \quad \mu > 0 \quad (4.7)$$

onde ρ_0 e ρ_L são os coeficientes de reflexão das bordas, e Tb_0 e Tb_L as temperaturas nas fronteiras do domínio.

A seguir descrevemos alguns casos de estudo e os respectivos resultados obtidos com a aplicação do método de Nyström. Cabe ressaltar que todas as discretizações e sistemas obtidos referem-se exclusivamente à variável espacial. A

variável angular é tratada internamente no cálculo do núcleo do operador integral do método de Nyström.

4.1 Caso 1: Perfil de temperatura estacionário

Neste primeiro caso consideramos um perfil de temperatura estacionário, isto é, a temperatura não varia com o tempo. Assim, uma vez escolhido um perfil estacionário, o problema recai em obter a densidade radiativa através da equação de transferência radiativa unidimensional.

Para primeira simulação foi escolhido um perfil linear, com a temperatura variando de 1000 K a 1800 K e dada por $T(x) = 1000 + 800x$ para $0 \leq x \leq 1$. As condições de contorno foram consideradas não reflexivas ($\rho = 0$).

Sob estas condições o problema se resume à equação:

$$\mu \frac{\partial I}{\partial x} + \lambda I = \frac{\sigma}{2} \int_{-1}^1 I d\mu + \kappa B(T) \quad (4.8)$$

$$I(0, \mu) = B(Tb_0) \quad (4.9)$$

$$I(L, -\mu) = B(Tb_L) \quad (4.10)$$

Para obtermos a solução aplicamos o método de Nyström, o qual, quando aplicado na Equação (4.8), resulta no sistema de ordem $N \times N$:

$$\begin{aligned} \hat{I}(x_i) = & \sigma \sum_{j=1}^N \omega_j K(x_i, s_j) [\hat{I}(s_j) - \hat{I}(x_i)] + \sigma \hat{I}(x_i) R(x_i) + \\ & + \kappa \sum_{j=1}^N \omega_j K(x_i, s_j) (B(T_j) - B(T_i)) + \kappa B(T_i) R(x_i) + L_b F \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde $\{\omega_j, s_j\}_1^N$ são os pesos e abscissas do esquema de quadratura escolhido, $B(T_j) = B(T(x_j))$ e F é vetor com as condições de contorno.

Note que, diferentemente do que ocorre em (3.2), o operador L_g atuando sobre o termo fonte não foi resolvido usando pacotes computacionais de integração

numérica e sim aproximado pela regra de quadratura escolhida. Esta pequena manipulação é necessária para garantir que o termo fonte seja calculado sobre os mesmos pontos em que o perfil de temperatura é definido.

Para as simulações numéricas usamos a quadratura de Boole com 101 pontos e o domínio de comprimento $L = 1$ ($x \in [0, 1]$). Para os coeficientes de espalhamento e absorção consideramos dois casos: $\sigma = 1$ e $\kappa = 1$ e também $\sigma = 0.1$ e $\kappa = 0.01$, lembrando que $\lambda = \sigma + \kappa$. Os resultados foram comparados com a solução de referência usada por Seaïd *et. al.* [68] para validar seus métodos numéricos. Cabe mencionar que na obra citada não há indicação de qual método foi utilizado para gerar a solução de referência.

A Tabela (4.1) mostra os resultados obtidos para a densidade radiativa com a aplicação do método de Nyström considerando o caso de temperatura estacionária e com os conjuntos de parâmetros mencionados acima.

Tabela 4.1: Densidade radiativa ($\times 10^5$) com temperatura estacionária para dois conjuntos de parâmetros.

x	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.1$
	$\kappa = 1$	$\kappa = 0.01$
0.	0.34858764796	0.90252799782
0.1	0.42500721659	0.93275703371
0.2	0.50860448810	0.95881811968
0.3	0.60457633339	0.98376105351
0.4	0.71380402995	1.00824964143
0.5	0.83640819384	1.03263182229
0.6	0.97180015525	1.05715938441
0.7	1.11844694660	1.08207336329
0.8	1.27343717156	1.10768746108
0.9	1.43182588427	1.13460021874
1.0	1.58958636493	1.16574565156

Já nas Figuras (4.1) e (4.2) é possível encontrar a comparação gráfica dos resultados obtidos pelo método de Nyström com aqueles usados como referência por Seaid *et. al.* [68] para o mesmo modelo e com o mesmo conjunto de parâmetros.

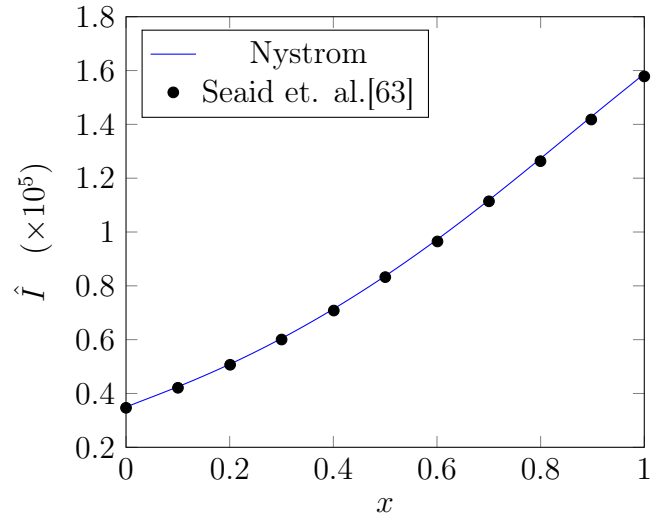


Figura 4.1: Densidade de radiação com perfil de temperatura estacionário e $\sigma = \kappa = 1$.

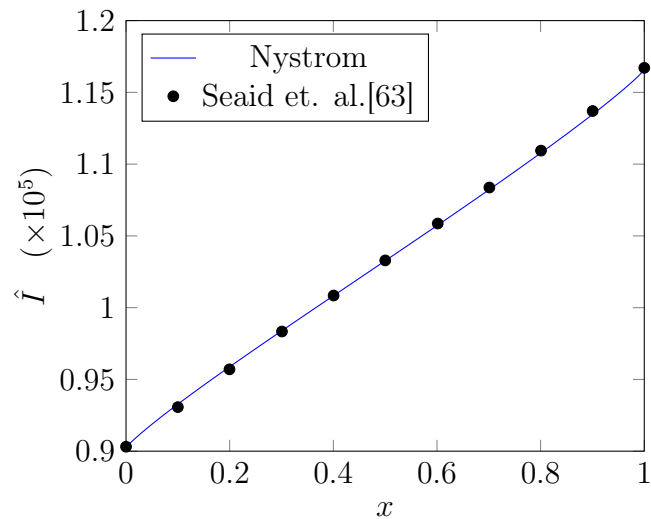


Figura 4.2: Densidade de radiação com perfil de temperatura estacionário, $\sigma = 0.1$ e $\kappa = 0.01$.

Como já era esperado, um perfil crescente de temperatura gerou um perfil crescente de densidade radiativa. Além disso, nota-se que os dados obtidos com o método de Nyström apresentam uma boa concordância com os resultados obtidos na literatura.

Ressalta-se aqui que o artigo citado acima, e usado como referência para comparar nossos resultados, apresenta somente gráficos sem, contudo, apresentar o conjunto de dados utilizados na construção dos mesmos. Assim, para que fosse possível a comparação entre os modelos, fizemos uso do aplicativo WebPlotDigitizer [64] disponível na rede mundial de computadores. Esta ferramenta permite, após uma calibragem dos eixos, extrair dados numéricos a partir da imagem do gráfico.

Realizamos também simulações para o caso com perfil de temperatura decrescente. Neste caso a temperatura das bordas esquerda e direita foram mantidas, respectivamente, a 1800 K e 1000 K. Os parâmetros de espalhamento e absorção foram escolhidos como $\sigma = 1$, $\kappa = 1$ e coeficientes de reflexão nulos. O perfil de temperatura estacionária escolhido foi $T(x) = 1800 - 800x$ para $0 \leq x \leq 1$ e a quadratura de Boole com 101 pontos foi utilizada. Note que este caso é simétrico ao caso apresentado acima, com isso espera-se que os resultados também mantenham-se simétricos com relação aos valores do primeiro caso. A Tabela (4.2) apresenta os resultados para este caso.

Tabela 4.2: Densidade radiativa com perfil de temperatura decrescente.

x	$\hat{I} (\times 10^5)$
0.	1.58958636493
0.2	1.27343717156
0.4	0.97180015525
0.6	0.71380402995
0.8	0.49971603036
1.0	0.34858764796

Veja que, como esperado, um perfil decrescente de temperatura resultou em uma densidade radiativa decrescente e, além disso, os resultados obtidos foram exatamente os simétricos do caso com temperatura crescente descritos na Tabela (4.1).

Outras simulações foram realizadas para verificar a influência dos coeficientes de absorção e espalhamento para o caso de perfil crescente de temperatura $T(x) = 1000 + 800x$. Em uma primeira simulação desconsideramos os efeitos da fonte interna ($\kappa = 0$) e fizemos o coeficiente de espalhamento variar entre os valores 0.5, 1.0 e 1.5. Os coeficientes de reflexão foram considerados nulos e a quadratura de Boole com 101 pontos foi utilizada. Os resultados são apresentados na Figura (4.3) e na Tabela (4.3).

De maneira semelhante realizamos simulações com o mesmo conjunto de parâmetros descritos acima, porém desconsiderando o efeito de espalhamento ($\sigma = 0$) e fazendo κ variar entre os valores 0.5, 1.0 e 1.5. Os resultados obtidos são apresentados na Figura (4.4) e na Tabela (4.4).

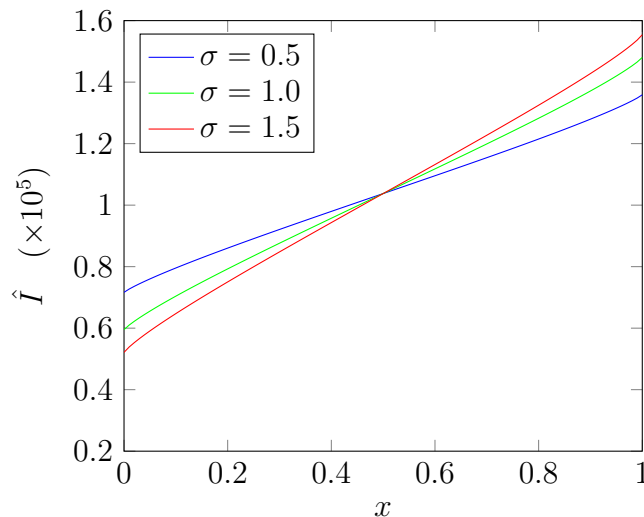


Figura 4.3: Densidade de radiação com perfil de temperatura estacionário crescente, $\sigma = 0.5, 1.0$ e 1.5 .

Tabela 4.3: Densidade radiativa ($\times 10^5$) com temperatura estacionária $T(x) = 1000 + 800x$, $\kappa = 0$ e $\sigma = 0.5, 1, 0$ e 1.5 .

x	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 1.0$	$\sigma = 1.5$
0.	0.71648339568	0.59508256978	0.52128601199
0.2	0.86029181344	0.79270075295	0.75031709545
0.4	0.97965808750	0.95737875635	0.94324214717
0.6	1.09558487979	1.11786421094	1.13200081967
0.8	1.21495115386	1.28254221435	1.32492587157
1.0	1.35875957162	1.48016039752	1.55395695515

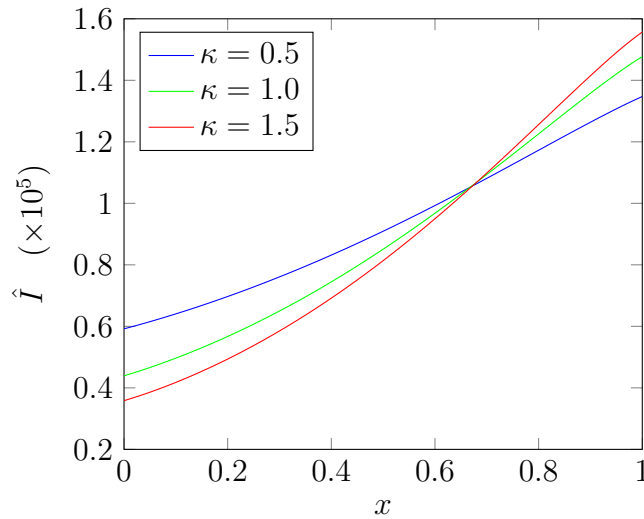


Figura 4.4: Densidade de radiação com perfil de temperatura estacionário crescente, $\kappa = 0.5, 1.0$ e 1.5 .

Tabela 4.4: Densidade radiativa ($\times 10^5$) com temperatura estacionária $T(x) = 1000 + 800x$, $\sigma = 0$ e $\kappa = 0.5, 1, 0$ e 1.5 .

x	$\kappa = 0.5$	$\kappa = 1.0$	$\kappa = 1.5$
0.	0.59193519674	0.43917138543	0.35841952333
0.2	0.69705716678	0.56714982509	0.49365293569
0.4	0.83171793309	0.74458578529	0.69176450817
0.6	0.99284401367	0.96784643156	0.94985714693
0.8	1.17270249192	1.22576291159	1.25610715955
1.0	1.34727895526	1.47698161834	1.55684869551

Em ambos os casos apresentados, a medida em que os parâmetros analisados crescem, a densidade tende a diminuir no lado esquerdo, onde a temperatura é mais baixa e a aumentar na borda direita, onde a temperatura é mais elevada.

Por fim, também realizamos simulações para o caso simétrico. Neste caso as bordas são mantidas ambas a 1400 K e o perfil de temperatura é dado por $T(x) = -x^2 + x + 1400$. Destacamos aqui que esta simulação busca apenas verificar a consistência do código, isto é, buscamos verificar se a escolha de um perfil inicial simétrico resulta em uma distribuição simétrica de radiação. Por este motivo foi escolhido o perfil simétrico com expressão mais simples dentro do domínio espacial $[0, 1]$. Os coeficientes de reflexão são considerados nulos e o espalhamento e a absorção mantidos em $\sigma = 1$ e $\kappa = 1$. A quadratura de Boole com 101 pontos também foi utilizada neste caso.

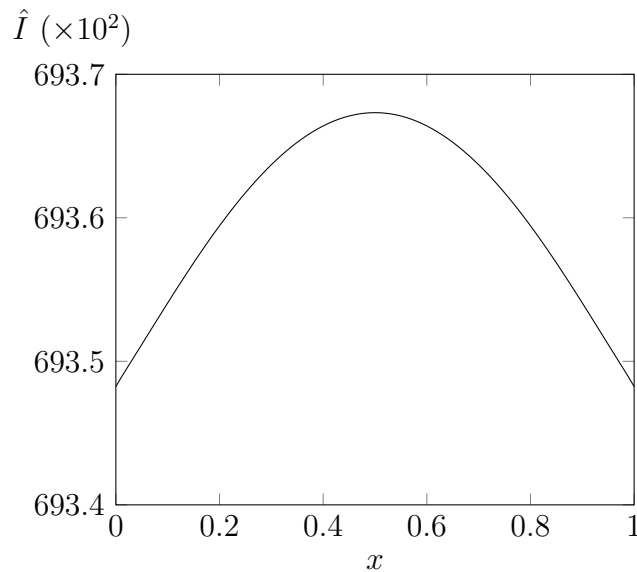


Figura 4.5: Densidade de radiação com perfil simétrico de temperatura.

Uma vez que o perfil de escolhido possui um máximo em $x = 0.5$ e a densidade radiativa aumenta de acordo com o aumento de temperatura, é de se esperar que a distribuição de radiação mantenha-se simétrica e um máximo exatamente no mesmo ponto. A Figura (4.5), que mostra o resultado deste caso, confirma

o que esperávamos. Já na Tabela (4.5) são apresentados alguns valores numéricos para as simulações deste caso.

Tabela 4.5: Densidade radiativa com perfil simétrico de temperatura.

x	$\hat{I} (\times 10^2)$
0.	693.4824084
0.1	693.5406996
0.2	693.5944548
0.3	693.6369952
0.4	693.6640222
0.5	693.6732682

De acordo com os resultados apresentados, verificamos que o método de Nyström mostra-se eficiente para obter a solução do modelo de transferência radiativa unidimensional com perfil de temperatura estacionário. Na próxima seção apresentamos os resultados para um perfil de temperatura não estacionário.

4.2 Caso 2: Perfil de temperatura não estacionário

Neste caso, a temperatura do meio é variável com o tempo. Logo, buscamos a solução do problema de transferência radiativa acoplada à equação de equilíbrio térmico. Os coeficientes de espalhamento e absorção são considerados constantes e, neste primeiro momento, o coeficiente de condutividade térmica também foi considerado constante.

Para fins de verificação, optamos por simular o problema condutivo-radiativo unidimensional descrito nos trabalhos de [22] e [68]. Nestas obras citadas, as bordas do domínio são mantidas a 1000 K e 1800 K. Para a equação de equilíbrio térmico considera-se uma condição inicial linear $T_0 = 1000 + 800x$ (com $0 \leq x \leq$

1) e condições de contorno do tipo Dirichlet. Os coeficientes de reflexão foram considerados nulos e o termo fonte representa a relação de Stefan-Boltzmann.

O modelo em questão é descrito pelas equações

$$\frac{\partial T}{\partial t} - k_0 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2\kappa\pi \int_{-1}^1 I d\mu - 4\kappa\pi B(T) \quad (4.12)$$

$$\mu \frac{\partial I}{\partial x} + \lambda I = \frac{\sigma}{2} \int_{-1}^1 I d\mu + \kappa B(T) \quad (4.13)$$

onde k_0 é a condutividade térmica do meio e $B(T)$ é o termo fonte, cuja expressão é dada em (1.11). E as condições são dadas por:

$$T(x, 0) = T_0, \quad T(0, t) = 1000, \quad T(L, t) = 1800 \quad (4.14)$$

$$I(0, \mu) = B(Tb_0), \quad I(L, -\mu) = B(Tb_L) \quad (4.15)$$

em que $Tb_0 = T(0, t) = 1000$ K e $Tb_L = T(L, t) = 1800$ K.

Anteriormente já mostramos que a equação para densidade radiativa pode ser discretizada pelo método de Nyström. Precisamos agora discretizar a equação de equilíbrio térmico. Decidimos utilizar, neste primeiro momento, a abordagem por diferenças finitas progressivas por entendermos que esta abordagem é de fácil implementação uma vez que o método é explícito e o sistema gerado não requer grandes esforços computacionais.

Considere $T_i^j = T(x_i, t_j)$, isto é, T_i^j é a temperatura calculada no ponto x_i no tempo t_j . O método das diferenças progressivas centradas em x_i , quando aplicada na Equação (4.12) resulta na expressão

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{h_t} - k_0 \left(\frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h_s^2} \right) = +4\kappa\pi h_t \left(\hat{I}_i^j - B(T_i^j) \right) \quad (4.16)$$

onde h_t e h_s são os passos escolhidos para a malha temporal e espacial, respectivamente. O termo \hat{I}_i^j , que representa a densidade radiativa no ponto x_i e no tempo t_j , é obtido pelo método de Nyström, descrito na Equação (4.11), em cada passo de tempo e considerando as condições (4.15).

Efetuada algumas manipulações algébricas na expressão acima obtemos a formulação explícita para o método de diferenças progressivas

$$T_i^{j+1} = (1 - 2\delta) T_i^j + \delta (T_{i+1}^j + T_{i-1}^j) + 4\kappa\pi h_t (\hat{I}_i^j - B(T_i^j)) \quad (4.17)$$

onde $\delta = (k_0 h_t)/h_s^2$ é parâmetro para análise de convergência do sistema. De fato, conforme descrito em [13], o método das diferenças progressivas converge sempre que $\delta \leq 0.5$. Destaca-se que o valor crítico do parâmetro de convergência descrito no trabalho citado refere-se ao caso da equação de condução linear, no modelo de estudo deste trabalho há um acoplamento não linear que pode afetar a estabilidade do método, portanto foi necessário efetuar algumas simulações para determinar o valor de convergência.

Em todos os casos analisados usamos a quadratura de Boole com 128 pontos. Então, a fim de garantir a convergência, escolhemos um passo de tempo de $h_t = 10^{-5}$ s enquanto que a discretização da variável espacial equivale a malha da quadratura utilizada no método de Nyström, isto porque é necessário garantir que as duas variáveis (temperatura e densidade) sejam calculadas nos mesmos pontos.

Uma vez escolhidos parâmetros que forneçam um sistema convergente, consideramos que o estado estacionário é atingido quando a norma da diferença entre duas iterações sucessivas seja menor que uma tolerância pré-definida, isto é, $\|T_i^{j+1} - T_i^j\|_2 \leq \epsilon$. Para as simulações desenvolvidas considerou-se $\epsilon = 10^{-8}$, ou seja

$$\left(\sum_{i=1}^N (T_i^{j+1} - T_i^j)^2 \right)^{1/2} \leq 10^{-8} \quad (4.18)$$

Como mencionado anteriormente o método desenvolvido será verificado comparando-se os resultados obtidos com aqueles descritos nos trabalhos [22] e [68]. Sendo assim, buscamos nestas referências os valores dos parâmetros utilizados nas simulações, a saber: $k_0 = 1$, $\sigma = 0$ e κ foi escolhido como 1 ([22], [68]) e 0.1 ([68]). Já as condições foram consideradas iguais as dadas em (4.14) e (4.15).

Para a primeira simulação utilizamos a quadratura de Boole com 128 pontos e $\kappa = 1$. Comparamos a temperatura em estado estacionário com a solução obtida por [22] para o mesmo problema usando Método dos Elementos Finitos (*FEM*) para a equação de equilíbrio térmico e Decomposição em Funções de Green (*GFD*) para densidade radiativa. Já a intensidade total foi comparada com a solução referência usada por Seaïd *et. al.* [68].

Na Tabela (4.6) são apresentadas, após atingir o estado estacionário, a temperatura e a intensidade em alguns pontos da malha para o caso descrito. Já a Figura (4.6) mostra os resultados para a temperatura em estado estacionário comparados com a solução via *FEM* obtida por [22]. Enquanto que na Figura (4.7) é apresentada a comparação entre os resultados obtidos para a densidade e os dados de Seaïd *et. al.* [68].

Tabela 4.6: Temperatura e intensidade em estado estacionário usando quadratura de 128 pontos.

	$x = 0.0$	$x = 0.25$	$x = 0.5$	$x = 0.75$	$x = 1.0$
T	1000	1461.07701179	1546.13481896	1618.87808885	1800
$I(\times 10^6)$	0.71536687827	1.03412649978	1.29635468102	1.55788480653	1.87389393523

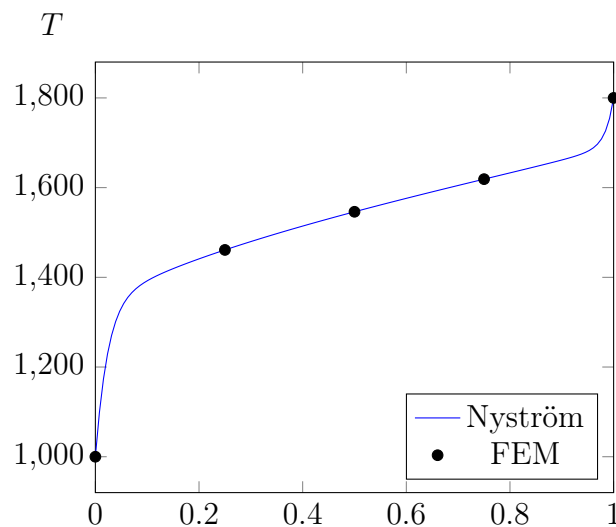


Figura 4.6: Temperatura em estado estacionário para $\sigma = 0$ e $\kappa = 1$.

Por fim, realizamos a simulação para a intensidade radiativa considerando $\kappa = 0.1$. Os resultados desta simulação e a comparação com os valores encontrados em [68] podem ser vistos na Figura (4.8). Em todas as simulações realizadas é possível perceber uma boa concordância dos resultados simulados pelo método de Nyström com os resultados encontrados na literatura. O que evidencia que o método desenvolvido é eficiente para obter a solução para o caso de transferência radiativa com acoplamento de temperatura proposto por esta tese.

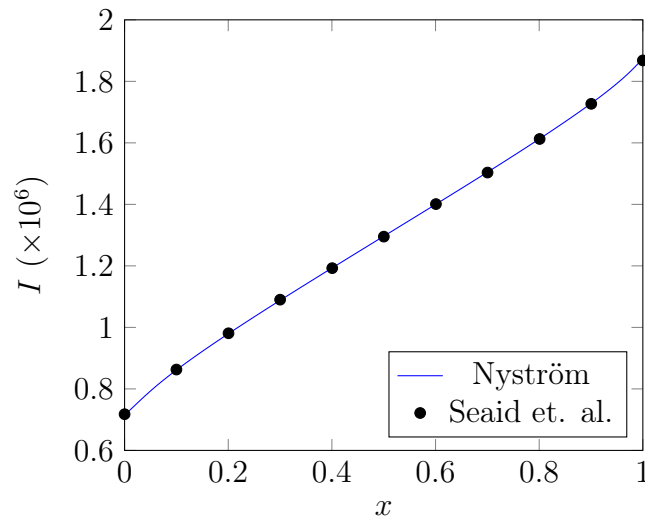


Figura 4.7: Intensidade para temperatura em estado estacionário com $\sigma = 0$ e $\kappa = 1$.

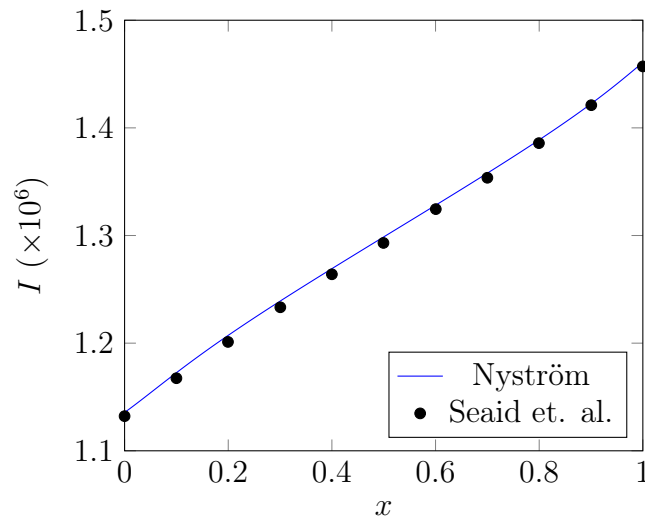


Figura 4.8: Intensidade em estado estacionário com $\sigma = 0$ e $\kappa = 0.1$

O método das diferenças progressivas tem a desvantagem de que os passos na malha temporal e espacial estão diretamente relacionados, sendo muitas vezes necessário adotar uma malha muito refinada para garantir a convergência. Basta ver os casos estudados, para uma malha espacial de 101 pontos foi necessário adotar um passo de tempo de 10^{-5} para garantir a convergência. Uma malha muito refinada pode elevar o tempo de computação necessário para alcançar o estado estacionário. De fato, os códigos gerados para este caso apresentaram um tempo de execução de aproximadamente 23 minutos.

Com o objetivo de mitigar esta desvantagem propomos na próxima seção a aplicação de um método em que as malhas espacial e temporal não sejam interdependentes. Para isso vamos considerar o método de Crank-Nicolson, que será aplicado no problema com condições de contorno não lineares considerando os efeitos da condução, convecção e radiação.

Cabe destacar aqui que embora o método escolhido seja incondicionalmente estável [13], isso não significa que as malhas possam ser escolhidas arbitrariamente. A estabilidade do método pode ser afetada, pois o modelo apresenta um acoplamento não linear e condições de contorno também não lineares. A escolha desta metodologia deve-se ao fato de que uma vez escolhida uma malha temporal que garanta a convergência a malha espacial pode ser alterada sem prejuízo da estabilidade.

4.3 Caso 3: Método de Crank-Nicolson

O objetivo desta seção é construir a discretização do problema acoplado usando o método de Crank-Nicolson. Para fins de comparação e verificação vamos, em um primeiro momento, construir a discretização em um problema com condições do tipo Dirichlet semelhante ao Caso 2 descrito anteriormente. Uma vez testado o

método faremos a adaptação para abarcar o problema com condições de contorno mais genéricas.

Então, considere o sistema acoplado descrito pelas equações (4.12) à (4.15). Com um perfil de temperatura inicial linear $T_0 = 1000 + 800x$ (com $0 \leq x \leq 1$) e a temperatura nas bordas esquerda e direita são mantidas, respectivamente, à 1000 K e 1800 K. Já sabemos que a densidade radiativa pode ser obtida via método de Nyström, resultando no sistema linear dado na Equação (4.11).

Como alternativa para discretizar a equação de equilíbrio térmico vamos utilizar o método de Crank-Nicolson que é um esquema implícito, isto é, no sistema obtido com a discretização, a temperatura em determinado tempo não depende somente dos resultados de temperatura e densidade do passo de tempo anterior. Em outras palavra, em cada passo de tempo é necessário resolver um sistema que depende da temperatura e densidade.

Considere $T_i^j = T(x_i, t_j)$ e $B_i^j = B(T(x_i, t_j))$. Aplicando Crank-Nicolson na equação (4.12) obtemos

$$\begin{aligned} T_i^{j+1} - \frac{k_0 h_t}{2h_s^2} (T_{i+1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i-1}^{j+1}) - 2\kappa\pi h_t (\hat{I}_i^{j+1} - B_i^{j+1}) = \\ T_i^j + \frac{k_0 h_t}{2h_s^2} (T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j) + 2\kappa\pi h_t (\hat{I}_i^j - B_i^j) \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde h_s e h_t são os passos escolhidos para a malha espacial e temporal. Para facilitar a notação considere $\beta = \frac{k_0 h_t}{2h_s^2}$ e $\gamma = 2\kappa\pi h_t$ e seja w_i a aproximação da temperatura no tempo $j + 1$, isto é, $w_i = T_i^{j+1}$. Reagrupando os termos semelhantes obtemos o sistema de ordem $N - 2 \times N - 2$

$$(1+2\beta)w_i - \beta(w_{i+1} + w_{i-1}) - \gamma(\hat{I}_i^{j+1} - B_i^{j+1}) = \underbrace{(1 - 2\beta)T_i^j + \beta(T_{i+1}^j + T_{i-1}^j) + \gamma(\hat{I}_i^j - B_i^j)}_{D_i} \quad (4.20)$$

o termo D_i representa a expressão que depende dos valores da densidade e temperatura no passo de tempo anterior. Destaca-se aqui que a ordem do sistema acima é de ordem $N - 2$ porque não há variação de temperatura nas bordas do domínio,

isto é, as condições de contorno são constantes e portanto não entram no cálculo do sistema acima.

Veja que para determinar a temperatura na expressão acima é necessário conhecer a densidade radiativa no mesmo passo de tempo, ou seja, para resolver o sistema precisamos de uma expressão explícita para esta variável.

Do método de Nyström sabemos que:

$$\begin{aligned} \hat{I}(x_i) = & \sigma \sum_{j=1}^N \omega_j K(x_i, s_j) [\hat{I}(s_j) - \hat{I}(x_i)] + \sigma \hat{I}(x_i) R(x_i) + \\ & + \kappa \sum_{j=1}^N \omega_j K(x_i, s_j) (B(T_j) - B(T_i)) + \kappa B(T_i) R(x_i) + L_b F \end{aligned} \quad (4.21)$$

sendo $\{\omega_j, s_j\}_1^N$ os pesos e abscissas do esquema de quadratura e F é vetor com as condições de contorno. Em termos matriciais podemos reescrever a expressão acima como

$$\mathbf{A}\hat{I} = \mathbf{Z}B(T) + L_b F \quad (4.22)$$

onde $B(T) = [B(T_1) \ B(T_2) \ \cdots \ B(T_{N-2})]^t$, $\hat{I} = [\hat{I}(x_1) \ \hat{I}(x_2) \ \cdots \ \hat{I}(x_{N-2})]^t$ e $L_b F$ é o vetor com as contribuições de fronteira. As matrizes $\mathbf{A}_{N-2 \times N-2}$ e $\mathbf{Z}_{N-2 \times N-2}$ são dadas respectivamente por:

$$[A_{ij}]_1^{N-2} = \begin{cases} (1 - \sigma R_i) + \sigma \sum_{l \neq i} \omega_l K_{i,l}, & i = j \\ -\sigma \omega_j K_{ij}, & c.c. \end{cases}$$

$$[Z_{ij}]_1^{N-2} = \begin{cases} (\kappa R_i) - \kappa \sum_{l \neq i} \omega_l K_{i,l}, & i = j \\ \kappa \omega_j K_{i,j} & c.c. \end{cases}$$

A partir da Equação (4.22) obtemos a expressão explícita para a densidade radiativa:

$$\hat{I}(x) = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z})B(T) + \mathbf{A}^{-1}L_b\tilde{B}$$

Considerando $\mathbf{M}_{N-2 \times N-2} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}$ e $\mathbf{H} = \mathbf{A}^{-1}L_b F$ temos:

$$\hat{I}(x) = \mathbf{M} \cdot B(T) + \mathbf{H} \quad (4.23)$$

onde a inversa \mathbf{A}^{-1} foi obtida por decomposição LU com auxílio da biblioteca *GSL Linalg*. Já a multiplicação de matrizes e vetores foi realizada com auxílio da biblioteca *GSL CBLAS*.

Com a expressão (4.23) podemos escrever a densidade implícita da equação (4.20) em termos de matrizes como

$$\hat{I}_i^{j+1} = \mathbf{M} \cdot B_i^{j+1} + \mathbf{H}_i^{j+1} \quad (4.24)$$

com isso, o método de Crank-Nicolson (4.20) pode ser reescrito obtendo a expressão

$$\begin{aligned} (1 + 2\beta)w_i - \beta(w_{i+1} + w_{i-1}) - \gamma((M \cdot B_i^{j+1} + H_i^{j+1}) - B_i^{j+1}) &= D_i \\ (1 + 2\beta)w_i - \beta(w_{i+1} + w_{i-1}) - \gamma((M - \mathbf{1})B_i^{j+1} + H_i^{j+1}) &= D_i \\ (1 + 2\beta)w_i - \beta(w_{i+1} + w_{i-1}) - \gamma\left(\sum_{k=1}^{N-2} (m_{ik} - \delta_{ik})B_k^{j+1} + H_i^{j+1}\right) &= D_i \\ (1 + 2\beta)w_i - \beta(w_{i+1} + w_{i-1}) - \gamma\left(\sum_{k=1}^{N-2} \alpha_{ik}B_k^{j+1} + H_i^{j+1}\right) &= D_i \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde $\mathbf{1}$ é a matriz identidade, δ_{ik} é o delta de Kronecker e $\alpha_{ik} = m_{ik} - \delta_{ik}$.

Devido ao termo fonte B^{j+1} o sistema acima é não linear e, portanto, para resolvê-lo utilizamos o método de Newton. Para fazermos uso deste método definimos a matriz jacobiana $\mathbf{J}_{N-2 \times N-2}$ do sistema acima por

$$\{\mathbf{J}\}_{i,l=1}^{N-2} = \begin{cases} (1 + 2\beta) - \gamma\left(\alpha_{il}\frac{\partial B_l}{\partial w_l}\right), & i = l \\ -\beta - \gamma\left(\alpha_{il}\frac{\partial B_l}{\partial w_l}\right), & |l - i| = 1 \\ -\gamma\left(\alpha_{il}\frac{\partial B_l}{\partial w_l}\right), & \text{c.c.} \end{cases} \quad (4.26)$$

e definimos também o vetor C de dimensão $N - 2$ e cujos elementos são dados por

$$C_i = (1 + 2\beta)w_i - \beta(w_{i+1} + w_{i-1}) - \gamma\left(\sum_{k=1}^{N-2} \alpha_{ik}B_k^{j+1} + H_i^{j+1}\right) - D_i \quad (4.27)$$

Com estas definições o método de Newton fornece a solução do sistema não linear (4.25) através da recorrência

$$\begin{cases} w^0 \\ \mathbf{J}(w^k)s^k = C(w^k) \\ w^{k+1} = w^k - s^k \end{cases} \quad (4.28)$$

onde w^0 é uma aproximação inicial para a solução, $\mathbf{J}(w^k)$ e $C(w^k)$ são, respectivamente, a matriz Jacobiana (4.26) e o vetor C (4.27) calculados na solução aproximada w^k . O termo s^k é a solução do sistema $\mathbf{J}(w^k)s^k = C(w^k)$ para cada passo da iteração. Este sistema é resolvido numericamente por decomposição LU com auxílio da biblioteca *GSL Linalg*.

O processo iterativo (4.28) é aplicado até que a diferença entre duas iterações sucessivas tenha norma menor que uma tolerância pré-definida, no caso consideramos uma tolerância de 10^{-8} , isto é:

$$\left(\sum_{i=1}^{N-2} (w_i^{k+1} - w_i^k) \right)^{\frac{1}{2}} \leq 10^{-8} \quad (4.29)$$

Em resumo, para obter a solução do problema acoplado unidimensional com o método de Crank-Nicolson procedemos de acordo com os seguintes passos:

- 1) Com a temperatura inicial T^0 obtemos, através da equação (4.23) uma densidade radiativa inicial \hat{I}^0 . Estes valores são usados para inicializar as iterações;
- 2) Com os valores de T^j e \hat{I}^j resolvemos o sistema (4.25) pelo método de Newton:
 - 2.1) Consideramos uma aproximação inicial w^0 para a solução do sistema;

- 2.2) Para a iteração k construímos a matriz Jacobiana \mathbf{J} (4.26) e o vetor C (4.27);
 - 2.3) Obtemos a solução s^k do sistema (4.28) por decomposição LU;
 - 2.4) Atualizamos a aproximação pela relação $w^{k+1} = w^k - s^k$;
 - 2.5) Repetimos os passos 2.2 a 2.4 até a aproximação w atingir a tolerância (4.29).
- 3) Obtida a solução w do sistema não linear fazemos $T^{j+1} = w$;
 - 4) Para T^{j+1} usamos a equação (4.23) para obter \hat{T}^{j+1} ;
 - 5) Para cada passo de tempo repetimos os passos 2 a 4 até a temperatura atingir o estado estacionário.

Como mencionado no início desta seção para validarmos o método vamos testá-lo com os mesmos parâmetros do Caso 2 anterior, isto é, perfil de temperatura inicial linear $T_0 = 1000 + 800x$ (com $0 \leq x \leq 1$), bordas esquerda e direita mantidas, respectivamente, à 1000 K e 1800 K e coeficientes de reflexão nulos. Além disso, usaremos quadratura de Boole com 128 pontos com $\sigma = 0$, $\kappa = 1$, condutividade térmica $k_0 = 1$ e passo de tempo $h_t = 10^{-2}$.

A figura (4.9) mostra os resultados obtidos para a temperatura em estado estacionário com o método de Crank-Nicolson em comparação com aqueles encontrados por Diferenças Progressivas para o mesmo caso (ver tabela 4.6).

Veja que os resultados obtidos apresentam uma boa concordância. De fato, numericamente a diferença entre os métodos é menor de que 10^{-6} , esta pequena discrepância deve-se ao passo de tempo utilizado. Para Diferenças Progressivas foi usado $h_t = 10^{-5}$ enquanto que para Crank-Nicolson usamos $h_t = 10^{-2}$. Fizemos uma simulação adicional com $h_t = 10^{-5}$ e os resultados para ambos os métodos concordaram em todos os 12 dígitos que usamos para a apresentação dos resultados em tela.

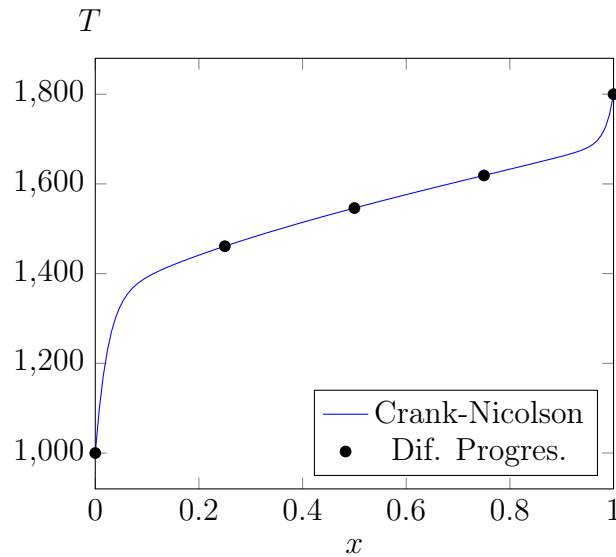


Figura 4.9: Temperatura em estado estacionário para os métodos Crank-Nicolson e Diferenças Progressivas.

Por fim, para verificar a consistência do algoritmo desenvolvido testamos a existência de solução constante, isto é, consideramos uma distribuição de temperatura inicial simétrica $T(x, 0) = -x^2 + x + 1000$ e mantivemos as temperaturas nas bordas constantes e iguais $T_{b_0} = T_{b_L} = 1000$ K. Para as simulações consideramos a quadratura de Boole com 101 pontos, coeficientes de reflexão nulos, condutividade térmica $k_0 = 1$, $\sigma = \kappa = 0.5$ e $h_t = 10^{-5}$. Por se tratar de um processo difusivo a temperatura, neste caso, deve convergir para uma distribuição constante $T = 1000$ K. A figura (4.10) que mostra os resultados para este caso evidencia que, de fato, a solução está convergindo para $T = 1000$ K.

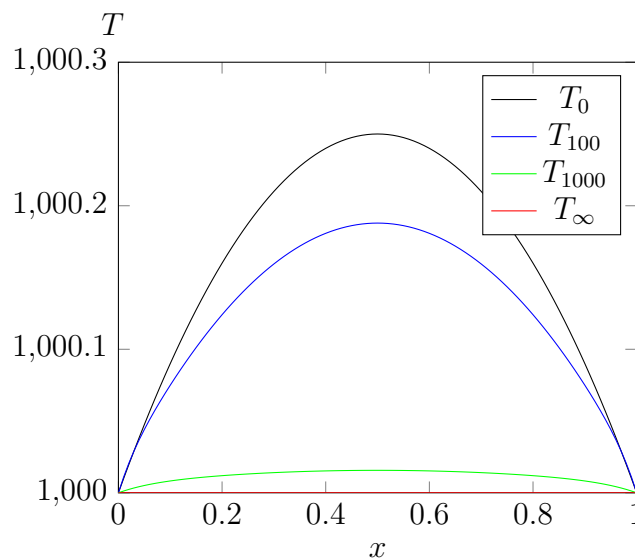


Figura 4.10: Temperatura convergindo para solução constante

Com isso efetuamos a verificação do método descrito nesta seção. Atendendo para o fato de que a vantagem do Crank-Nicolson reside no fato de que mesmo com um passo de tempo mais largo é possível obter o resultados com um erro desprezível se comparado com outros métodos. Além disso, o tempo computacional reduziu bastante se comparado ao caso anterior, chegando a um tempo de execução em torno de 3 a 5 minutos. Nosso próximo objetivo agora é adaptar o método para o problema com condições não lineares que abarcam os efeitos dos fenômenos de condução, convecção e radiação.

4.4 Caso 4: Acoplado com condições não lineares

Considere o sistema acoplado

$$\frac{\partial T}{\partial t} - k_0 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2\pi \int_{-1}^1 \kappa(I - B(T)) d\mu \quad (4.30)$$

$$\mu \frac{\partial I}{\partial x} + \lambda I = \frac{\sigma}{2} \int_{-1}^1 I d\mu + \kappa B(T) \quad (4.31)$$

onde k_0 é a condutividade térmica do meio e $\lambda = \sigma + \kappa$.

A temperatura $T(x, t)$ satisfaz as condições:

$$T(x, 0) = T^0$$

$$-k_0 \frac{\partial}{\partial x} T(0, t) = a(Tb_0 - T) + b\pi(B(Tb_0) - B(T)) \quad (4.32)$$

$$k_0 \frac{\partial}{\partial x} T(L, t) = a(Tb_L - T) + b\pi(B(Tb_L) - B(T)) \quad (4.33)$$

Tb_0 e Tb_L representam a temperatura nas bordas, a e b são constantes. Já a densidade radiativa satisfaz as condições semirreflexivas

$$I(0, \mu, t) = \rho_0 I(0, -\mu, t) + (1 - \rho_0) B(Tb_0) \quad (4.34)$$

$$I(L, -\mu, t) = \rho_L I(L, \mu, t) + (1 - \rho_L) B(Tb_L) \quad (4.35)$$

No interior da malha vale a mesma expressão encontrada para o caso anterior dada pela Equação (4.25). Precisamos agora discretizar as condições de

fronteira. Para isso aplicados diferenças progressivas centradas em T_0^{j+1} na Equação (4.34) e diferenças regressivas em T_{N-1}^{j+1} na Equação (4.35). Assim, obtemos o sistema de ordem N

$$(k_0 + ah_s)w_0 + bh_s\pi B_0 - k_0w_1 - h_s[aTb_0 + b\pi B(Tb_0)] = 0 \quad (4.36)$$

$$(1 + 2\beta)w_i - \beta(w_{i+1} + w_{i-1}) - \gamma \left(\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{ik} B_k^{j+1} + H_i^{j+1} \right) - D_i = 0 \quad (4.37)$$

$$(k_0 + ah_s)w_{N-1} + bh_s\pi B_{N-1} - k_0w_{N-2} - h_s[aTb_L + b\pi B(Tb_L)] = 0 \quad (4.38)$$

Como no caso anterior, o sistema é não linear e precisa ser resolvido via método de Newton. A matriz jacobiana $\mathbf{J}_{N \times N}$ neste caso e dada por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} (k_0 + ah_s) + bh_s\pi \frac{\partial B_0}{\partial w_0} & -k_0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \{\tilde{J}\}_{i=1}^{N-2} & & \\ 0 & 0 & \cdots & -k_0 & (k_0 + ah_s) + bh_s\pi \frac{\partial B_{N-1}}{\partial w_{N-1}} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

onde $\{\tilde{J}\}$ é dada por:

$$\{\tilde{J}\}_{j=0}^{N-1} \begin{cases} (1 + 2\beta) - \gamma \left(\alpha_{ij} \frac{\partial B_j}{\partial w_j} \right), & i = j \\ -\beta - \gamma \left(\alpha_{ij} \frac{\partial B_j}{\partial w_j} \right), & |j - i| = 1 \\ -\gamma \left(\alpha_{ij} \frac{\partial B_j}{\partial w_j} \right), & \text{c.c.} \end{cases}$$

Já os elementos do vetor C são dados pelo conjunto de expressões (4.36) - (4.38).

Os passos para resolver o sistema são os mesmos descritos no caso anterior.

Para a primeira simulação foi considerada a quadratura de Boole com 101 pontos, perfil de temperatura inicial linear $T(x, 0) = 1000 + 800x$ para $x \in [0, 1]$, $\sigma = \kappa = 0.5$, $a = b = 1$, $k_0 = 1$ e $h_t = 10^{-5}$. Além disso os coeficientes de reflexão foram considerados nulos e as temperaturas das bordas esquerda e direita foram mantidas, respectivamente, à 1000 K e 1800 K.

A Tabela (4.7) mostra os resultados para temperatura e densidade em estado estacionário obtidos com o método descrito nesta seção. Já as Figuras (4.11)

e (4.12) mostram algumas etapas no processo de convergência até o estado estacionário.

Tabela 4.7: Temperatura ($\times 10^2$) e densidade radiativa ($\times 10^5$) para condições de fronteira não lineares.

	$x = 0.0$	$x = 0.25$	$x = 0.5$	$x = 0.75$	$x = 1.0$
T	10.3575643362	14.6254456985	15.4683789596	16.190068396	17.9678989896
\hat{I}	0.579166502148	0.826723642278	1.03362715276	1.24013630117	1.48720033271

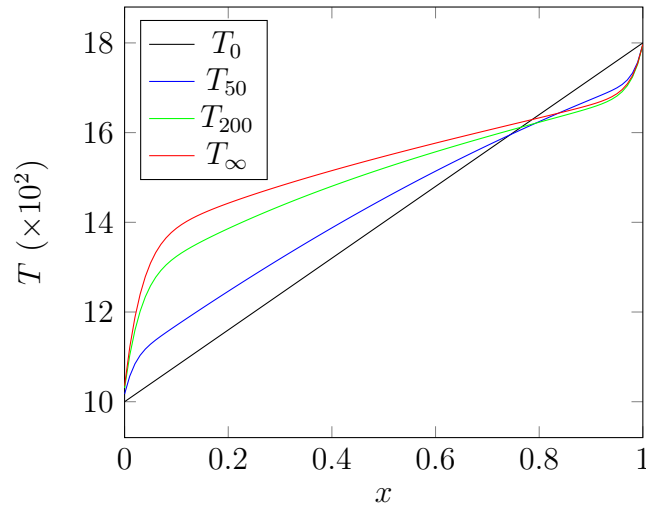


Figura 4.11: Temperatura convergindo ao estado estacionário.

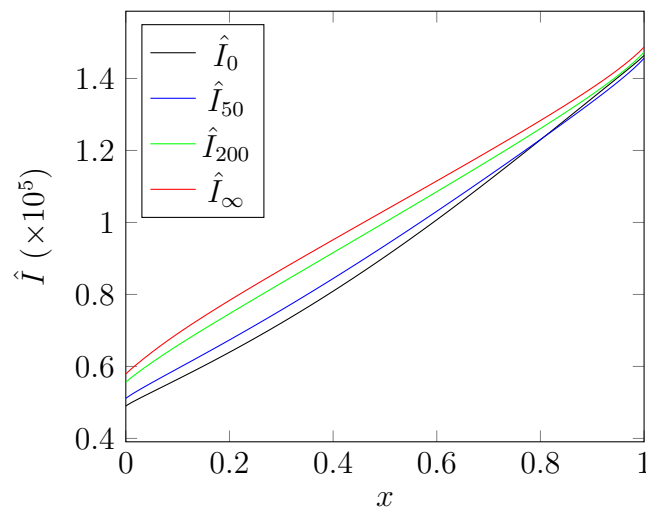


Figura 4.12: Densidade radiativa convergindo ao estado estacionário.

Para a segunda simulação testamos um perfil de temperatura inicial decrescente $T(x, 0) = 1800 - 800x$. Usamos o mesmo conjunto de parâmetros do caso acima porém consideramos que as temperaturas nas bordas esquerda e direita foram mantidas, respectivamente, à 1800 K e 1000 K. O resultado desta simulação é mostrado nas Figuras (4.13) e (4.14).

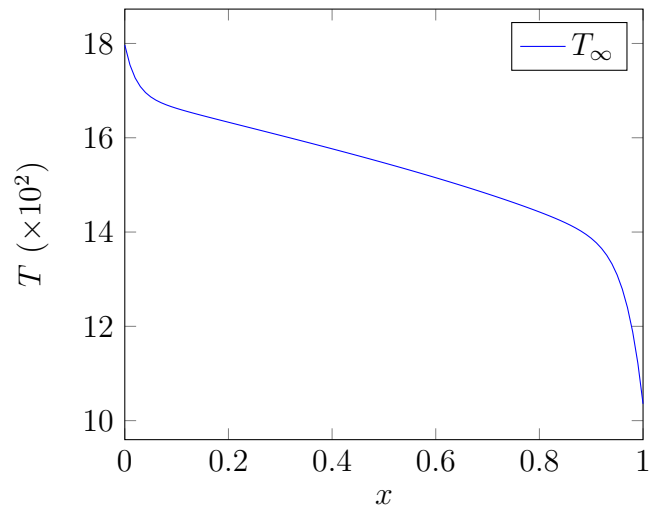


Figura 4.13: Temperatura em estado estacionário com perfil de temperatura inicial decrescente.

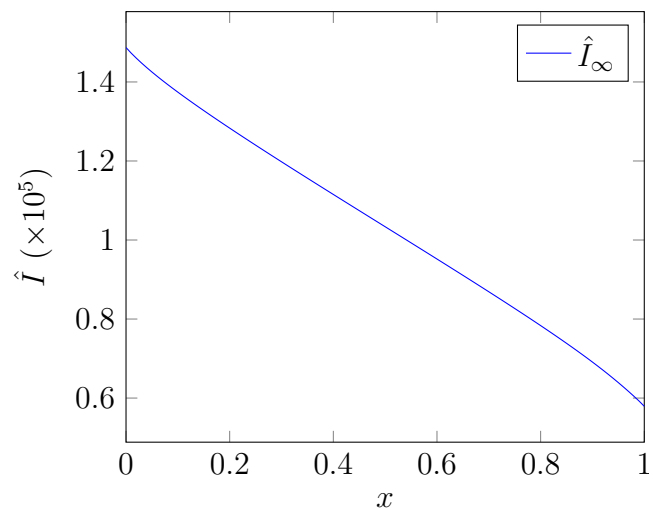


Figura 4.14: Densidade radiativa em estado estacionário com perfil de temperatura inicial decrescente.

Como esperado, os resultados numéricos obtidos são exatamente simétricos ao caso com perfil inicial crescente. O que evidencia que o algoritmo desenvolvido mostra-se eficiente em simular o caso de transferência radiativa unidimensional com condições de contorno não lineares.

Por fim, testamos a influência dos parâmetros de reflexão. Consideramos um perfil de temperatura inicial decrescente $T(x, 0) = 1800 - 800x$ com bordas à 1800 K e 1000 K. Consideramos a quadratura de Boole com 101 pontos, $\sigma = \kappa = 0.5$, $a = b = 1$, $k_0 = 1$ e $h_t = 10^{-5}$. Para os testes variamos os coeficientes de reflexão (ρ_0, ρ_L) .

As Tabelas (4.8) e (4.9) mostram os resultados para temperatura e densidade radiativa após alcançar o estado estacionário considerando diferentes valores de ρ_0 .

Tabela 4.8: Temperatura ($\times 10^2$) em estado estacionário para diferentes valores de ρ_0 .

ρ_0	$x = 0.0$	$x = 0.25$	$x = 0.5$	$x = 0.75$	$x = 1.0$
0.0	17.9678989896	16.190068396	15.4683789596	14.6254456985	10.3575643362
0.5	17.9352855784	14.8844139194	14.2477499438	13.5293314245	10.2544689203
1.0	17.863441986	11.0623041761	10.8214730134	10.6199813831	10.0355763115

Tabela 4.9: Densidade radiativa ($\times 10^5$) para coeficientes de reflexão não nulos.

ρ_0	$x = 0.0$	$x = 0.25$	$x = 0.5$	$x = 0.75$	$x = 1.0$
0.0	1.48720033271	1.24013630117	1.03362715276	0.826723642278	0.579166502148
0.5	1.07744243303	0.885788759008	0.743983015722	0.60549230094	0.441894966055
1.0	0.32495603507	0.268925896775	0.247454735012	0.229753608175	0.210335006306

Já as Figuras (4.15) e (4.16) mostram o comportamento da temperatura e densidade, respectivamente, para os valores de ρ_0 utilizados.

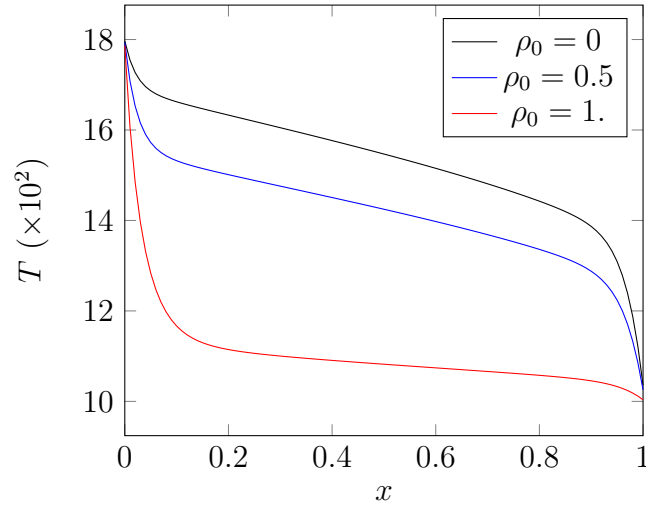


Figura 4.15: Temperatura em estado estacionário para $\rho_L = 0$ e diferentes valores de ρ_0 .

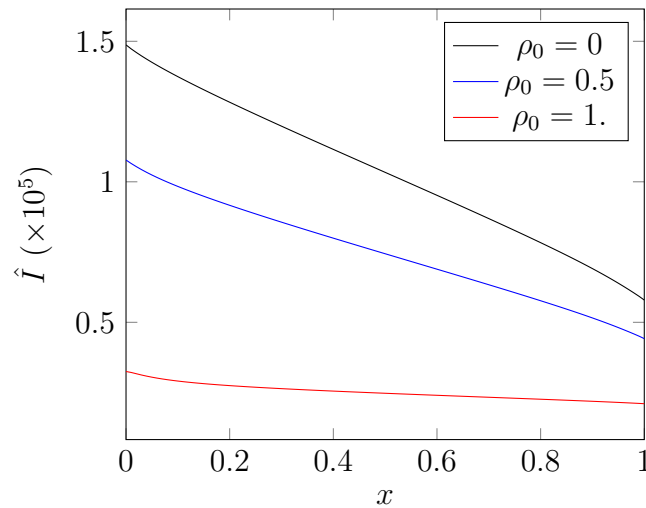


Figura 4.16: Densidade radiativa para $\rho_L = 0$ e diferentes valores de ρ_0 .

De maneira semelhante fizemos simulações com diferentes valores de ρ_L mantendo ρ_0 nulo. As Tabelas (4.10), (4.11) e as Figuras (4.17) e (4.18) mostram os resultados obtidos nestas simulações.

Tabela 4.10: Temperatura ($\times 10^2$) em estado estacionário para diferentes valores de ρ_L .

ρ_L	$x = 0.0$	$x = 0.25$	$x = 0.5$	$x = 0.75$	$x = 1.0$
0.5	17.9789929687	16.8582831292	16.4371377876	15.9654263065	10.57840952
1.0	17.9971077471	17.8494611993	17.7956301621	17.7295257371	10.8909773206

Tabela 4.11: Densidade radiativa ($\times 10^5$) para diferentes valores de ρ_L .

ρ_L	$x = 0.0$	$x = 0.25$	$x = 0.5$	$x = 0.75$	$x = 1.0$
0.5	1.62343031668	1.45783493536	1.31766726333	1.17315341899	0.975940662779
1.0	1.85640389981	1.8321518441	1.81017867836	1.78356721859	1.71324109948

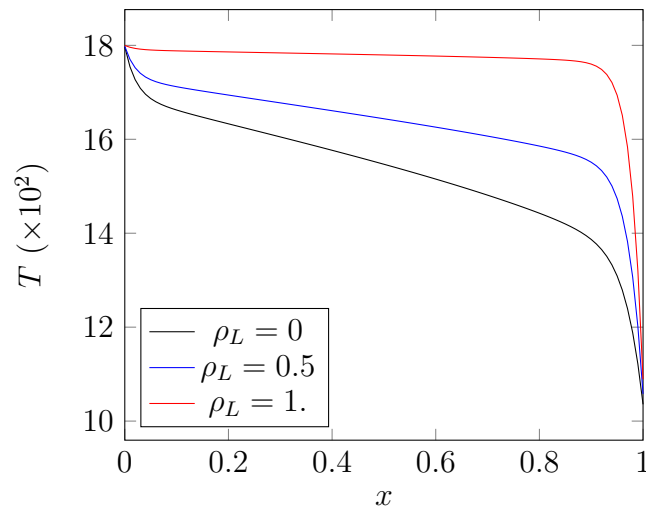


Figura 4.17: Temperatura em estado estacionário para $\rho_0 = 0$ e diferentes valores de ρ_L .

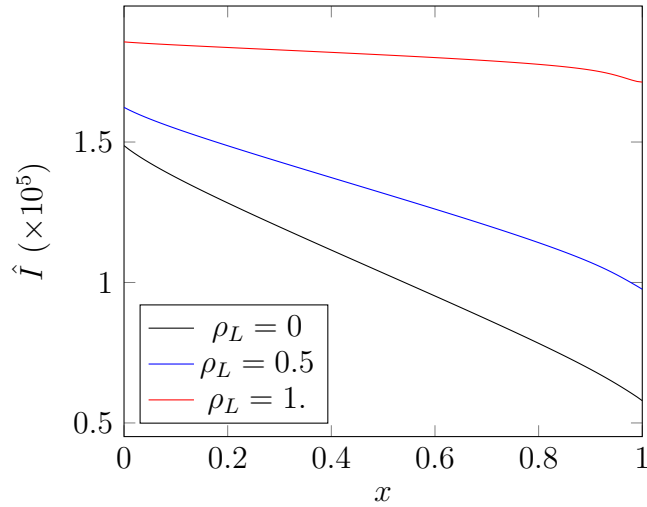


Figura 4.18: Densidade radiativa para $\rho_0 = 0$ e diferentes valores de ρ_L .

O comportamento destes parâmetros se justifica pelas condições de contorno da densidade radiativa. Analisando a condição (4.34) vemos que na medida em que ρ_0 aumenta, a influência do termo radiativo vai diminuindo causando um decréscimo na temperatura e, conseqüentemente, diminuindo a densidade. Por outro lado, aumentando o coeficiente de reflexão ρ_L o fluxo radiativo para o interior do domínio aumenta, ocasionando o acréscimo da temperatura e densidade.

Os resultados apresentados nesta seção demonstram que o método de Crank-Nicolson associado ao método de Nyström é eficiente para obter a solução do problema de transferência radiativa unidimensional com acoplamento de temperatura e condições de contorno não lineares. Os algoritmos desenvolvidos nesta parte do código para o caso analisado (101 pontos) apresentaram um tempo de execução em torno de 15 segundos. Tendo em vista a complexidade do problema não linear, entendemos ser este um bom tempo de execução.

5 CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi obter resultados para o problema de transferência radiativa em um modelo a uma banda de radiação com acoplamento de temperatura em um domínio unidimensional. Com este intuito foi desenvolvida a teoria para a equação de transporte radiativo unidimensional com auxílio do método de Nyström e posteriormente foi descrito o acoplamento com a equação de condução via métodos clássicos de discretização por diferenças finitas.

A fim de verificar o método desenvolvido comparamos nossos resultados com aqueles obtidos na literatura.

Em um primeiro momento verificamos a viabilidade do método de Nyström, simulando o caso com perfil de temperatura estacionário. Posteriormente consideramos o caso de perfil não estacionário acoplando a equação de transferência radiativa com a equação de equilíbrio térmico. Neste último caso a discretização para a equação condutiva foi realizada pelo método das Diferenças Progressivas.

Os resultados obtidos pela metodologia desenvolvida, tanto para o perfil estacionário quanto para o perfil evolutivo de temperatura, mostram uma boa concordância com os valores obtidos na literatura sobre o tema.

Pelo fato de o método das Diferenças Progressivas ser condicionalmente estável, adaptamos o algoritmo desenvolvido usando o método de Crank-Nicolson. Os resultados obtidos neste caso também mostraram-se igualmente satisfatórios.

Por fim, realizamos simulações para o caso do sistema acoplado com condições não lineares. Mesmo sem encontrar resultados semelhantes na literatura, é possível concluir que o método apresenta resultados condizentes com o processo condutivo-radiativo.

De maneira geral todos os casos abordados mostram que os algoritmos e o método aplicado são eficientes na modelagem do problema de transferência radiativa com acoplamento de temperatura em modelos de uma banda de radiação. E além disso, os códigos desenvolvidos apresentaram tempos de execução variando de segundos até poucos minutos, o que evidencia que esta metodologia apresenta um baixo tempo computacional de execução

Embora a quadratura de Legendre tenha apresentado resultados melhores com baixo número de pontos para a equação de transferência radiativa, declinamos dela porque a discretização do problema acoplado exige que a mesma malha seja usada tanto para a equação de transferência radiativa quanto para a equação condutiva. Uma vez que esta última foi tratada via método de Crank-Nicolson, precisamos de uma malha que tenha nós igualmente espaçados. Por este motivo optamos, dentre as quadraturas testadas, por aquela que apresentasse os melhores resultados e que comportasse as características exigidas, isto é, a quadratura de Boole.

O uso de uma malha com 101 pontos se deve à discretização por diferenças progressivas usada na equação condutiva no Caso 2. Mas como a quadratura escolhida apresenta resultados de 4 a 5 casas de precisão não vemos óbice à utilização da mesma com poucos pontos, já que, neste caso, os resultados se mantêm precisos. De fato, a comparação dos resultados obtidos com a metodologia desenvolvida e os dados obtidos na literatura mostram que, mesmo com uma malha não muito refinada, há uma boa concordância entre eles.

Com tudo que foi apresentado podemos dizer que o objetivo do trabalho foi alcançado, isto é, a metodologia e os algoritmos desenvolvidos na implementação mostraram desempenho satisfatório para obter a solução do problema condutivo-radiativo proposto nesta tese. Como continuação deste trabalho estamos considerando realizar as simulações para coeficientes de condutividade térmica variável e coeficientes de reflexão não constantes.

Referências Bibliográficas

- [1] ANSELONE, P. M. Convergence of the wick-chandrasekhar approximation technique in radiative transfer. *Astrophysical Journal* 130 (1959), 881.
- [2] ANSELONE, P. M., AND MOORE, R. H. Approximate solutions of integral and operator equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 9 (1964), 268–277.
- [3] ATKINSON, K. The numerical solution of fredholm integral equations of the second kind with singular kernels. *Numerische Mathematik* 19 (1972), 248 – 259.
- [4] ATKINSON, K. E. The numerical solution of fredholm integral equations of the second kind. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 4, 3 (1967), 337 – 348.
- [5] ATKINSON, K. E. *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*. Cambridge University Press, 1997.
- [6] BARICHELLO, L., RODRIGUES, P., AND SIEWERT, C. An analytical discrete-ordinates solution for dual-mode heat transfer in a cylinder. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer* 73, 6 (2002), 583–602.
- [7] BARICHELLO, L. B., AND SIEWERT, C. A discrete-ordinates solution for a polarization model with complete frequency redistribution. *The Astrophysical Journal* 513, 1 (1999), 370–382.
- [8] BARICHELLO, L. B., AND SIEWERT, C. A new version of the discrete-ordinates method. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Computational Heat Transfer* (2001).

- [9] BARICHELLO, L. B., AND SIEWERT, C. E. A discrete ordinates solution for a non-grey model with complete frequency distribution. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer* 62 (1999), 665 – 675.
- [10] BAYAZITOĞLU, Y., AND HIGENYI, J. Higher order differential equations of radiative transfer: P₃ approximation. *AIAA Journal* 17 (1979), 424–431.
- [11] BENASSI, M., GARCIA, R. D. M., KARP, A. H., AND SIEWERT, C. E. A high-order spherical harmonics solution to the standard problem in radiative transfer. *The Astrophysical Journal* 280 (1984), 853–864.
- [12] BERGMAN, T. L., INCROPERA, F. P., DEWITT, D. P., AND LAVINE, A. S. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. John Wiley & Sons, 2011.
- [13] BURDEN, R. L., AND FAIRES, J. D. *Análise Numérica*. Cengage Learning, 2013.
- [14] CALDEIRA, A. D. Application of the p_n method to the matrix form transport equation. *Ann. Nucl. ENergy* 32, 17 (2005), 1889–1894.
- [15] CARLSON, B. G. Solution of the transport equation by S_N approximations. Tech. rep., Los Alamos Scientific Laboratory, Report LA-1895, 1955.
- [16] CARLSON, B. G., AND LATHROP, K. D. Transport theory: the method of discrete ordinates. Tech. rep., Los Alamos Scientific Laboratory, Report LA-3251, 1965.
- [17] CHANDRASEKHAR, S. On the radiative equilibrium of a stellar atmosphere II. *Astrophysical Journal* 100 (1944), 76–86.
- [18] CHANDRASEKHAR, S. *Radiative Transfer*. Dover Publications, 1960.
- [19] DALMOLIN, D. Formulação integral e simulações numéricas para a equação do transporte unidimensional. Tese de Doutorado - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, RS/Brasil, 2021.

- [20] DALMOLIN, D., DE AZEVEDO, F. S., AND SAUTER, E. Nyström method in transport theory. In *International Nuclear Atlantic Conference - INAC* (2017).
- [21] DAVISON, B. *Neutron Transport Theory*. Oxford University Press, 1957.
- [22] DE ALMEIDA KONZEN, P. H., SAUTER, E., AND AZEVEDO, F. S. Green function formulation and finite element discretization for solving the heat radiative transfer in a slab. *Journal of Computational and Theoretical Transport* 46, 5 (2016), 368 – 385.
- [23] DE AZEVEDO, F. S., SAUTER, E., KONZEN, P. H. A., THOMPSON, M., AND BARICHELLO, L. B. Integral formulation and numerical simulations for the neutron transport equation in x-y geometry. *Annals of Nuclear Energy* 112 (2018), 735 – 747.
- [24] DE AZEVEDO, F. S., SAUTER, E., THOMPSON, M., AND VILHENA, M. T. Existence theory and simulations for one-dimensional radiative flows. *Annals of Nuclear Energy* 38 (2011), 1115–1124.
- [25] DE AZEVEDO, F. S., SAUTER, E., THOMPSON, M., AND VILHENA, M. T. Solution of the radiative heat transfer equation with internal energy sourcer in a slab by the green’s function decomposition method for anisotropic scattering. *Progress in Nuclear Energy* 65 (2013), 64–69.
- [26] DE AZEVEDO, F. S., THOMPSON, M., SAUTER, E., AND VILHENA, M. T. Existence theory for a one-dimensional problem arising from the boundary layer analysis of radiative flows. *Progress in Nuclear Energy* 53 (2011), 1105–1113.
- [27] EDDINGTON, A. S. *The Internal Constitution of the Stars*. Cambridge University Press, 1988.

- [28] FRANK, M., SEAİD, M., JANICKA, J., KLAR, A., PINNAU, R., AND THÖMMES, G. A comparison of approximate models for radiation in gas turbines. *Prog. Comput. Fluid Dynam.* 4 (2004), 191–197.
- [29] GELBARD, E., DAVIS, J., AND PEARSON, J. Iterative solutions to the P_l and double- P_l equations. *Nuclear Science and Engineering* 5 (1959), 36–44.
- [30] GELBARD, E. M. Application of spherical harmonics method to reactor problems. Tech. rep., WAPD-T-20, Bettis Atomic Power Laboratory, 1960.
- [31] GELBARD, E. M. Simplified spherical harmonics equations and their use in shielding problems. Tech. rep., WAPD-T-1182, Bettis Atomic Power Laboratory, 1961.
- [32] GELBARD, E. M. Applications of the simplified spherical harmonic equations in spherical geometry. Tech. rep., WAPD-TM-294, Bettis Atomic Power Laboratory, 1962.
- [33] GRAY, W., AND MULLER, R. *Engineering Calculations in Radiative Heat Transfer*. Pergamon Press, 1974.
- [34] HOU, M.-F., AND WU, C.-Y. Integral equation method applied to radiative transfer in a 2 – D absorbing-scattering refractive medium. *International Communications in Heat and Mass Transfer* 43 (2013), 63–68.
- [35] HOWELL, J. R., MENGÜÇ, M. P., AND SIEGEL, R. *Thermal Radiation Heat Transfer*, 6^a ed. CRC Press, 2016.
- [36] JEANS, J. H. The equations of radiative transfer of energy. *Monthly Notices Royal Astronomical Society* 78 (1917), 28–36.
- [37] KADANOFF, L. P. Radiative transport within an ablating body. *Journal of Heat Transfer* 83, 2 (1961), 215–224.

- [38] KANTOROVICH, L. V., AND KRYLOV, V. I. *Approximate methods of higher analysis*. Interscience, 1958.
- [39] KELLEY, C. T. Existence and uniqueness of solutions of nonlinear systems of conductive-radiative heat transfer equations. *Transport Theory and Statistical Physics* 25, 2 (1996), 249–260.
- [40] KLAR, A., AND SIEDOW, N. Boundary layers and domain decomposition for radiative heat transfer and diffusion equations: applications to glass manufacturing process. *European Journal of Applied Mathematics* 9 (1998), 351–372.
- [41] KOURGANOFF, V. Exact source functions by an extension of chadrasekhar’s limite process. *Astrophysical Journal* 113 (1951), 419–431.
- [42] KYTHE, P. K., AND PURI, P. *Computational methods for linear integral equations*, 2^a ed. Springer Science + Business Media New York, 2002.
- [43] LARSEN, E. W., MOREL, J. E., AND MCGHEE, J. M. Asymptotic derivation of the multigroup P_1 and simplified P_N equations with anisotropic scattering. *International Conference on Mathematics and Computations Reactor Physics, and Environmental Analyses* (1995).
- [44] LARSEN, E. W., THÖMMES, G., AND KLAR, A. New frequency-averaged approximations to the equations of radiative heat transfer. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 64, 2 (2003), 565–582.
- [45] LARSEN, E. W., THÖMMES, G., KLAR, A., SEAD, M., AND GÖTZ, T. Simplified PN approximations to the equations of radiative heat transfer and applications. *Journal of Computational Physics* 183, 2 (2002), 652 – 675.
- [46] LATHROP, K. D. Ray effects in discrete ordinates equations. *Nuclear Science and Engineering* 32 (1968), 357–369.

- [47] LIENHARD, IV, J. H., AND LIENHARD, V, J. H. *A Heat Transfer Textbook*, 3^a ed. Phlogiston Press, 2008.
- [48] LIOU, K.-N. A numerical experiment on chadraseskhar’s discrete-ordinate method for radiative transfer: Applications to cloudy and hazy atmospheres. *Journal of the Atmospheric Sciences* 30, 7 (1973), 1303 – 1326.
- [49] LOYALKA, S. K. A numerical method for solving integral equations of neutron transport. *Nuclear Science and Engineering* 56, 3 (1975), 317–319.
- [50] LOYALKA, S. K., AND TSAI, R. W. A numerical method for solving integral equations of neutron transport—II. *Nuclear Science and Engineering* 58, 2 (1975), 193–202.
- [51] LUMSDAINE, E. Transient solution and criteria for achieving maximum fluid temperature in solar energy applications. *Solar Energy* 13 (1970), 3–19.
- [52] MACCLARREN, R. G., HOLLOWAY, J. P., AND BRUNNER, T. A. On solutions to the P_N equations for thermal radiative transfer. *Journal of Computational Physics* (2008).
- [53] MARK, J. C. The spherical harmonics method 1 (general development of the theory). Tech. Rep. CRT-340 (Revised), National Research Council of Canada, Atomic Energy Repts., 1957.
- [54] MARK, J. C. The spherical harmonics method 2 (application to problems with plane & spherical symmetry). Tech. Rep. CRT-338 (Revised), National Research Council of Canada, Atomic Energy Repts., 1958.
- [55] MILNE, F. A. Thermodynamics of the star. In *Handbuch der Astrophysik*. Springer, 1930, pp. 65–255.

- [56] MODEST, M. F. *Radiative Heat Transfer*, 2 ed. Academic Press, 2003.
- [57] MODEST, M. F., AND YANG, J. Elliptic pde formulation and boundary conditions of the spherical harmonics method of arbitrary order for general three-dimensional geometries. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer* (2008).
- [58] NYSTRÖM, E. Über die praktische auflösung von integralgleichungen mit anwendungen auf randwertaufgaben. *Acta Mathematica* 54 (1930), 185–204.
- [59] PAZOS, R. P., AND VILHENA, M. T. Convergence in transpor theory. *Applied Numerical Mathematics* 30 (1999), 79–92.
- [60] PERAIAH, A. *An Introduction to Radiative Transfer: Methods and applications in astrophysics*. Cambridge University Press, 2004.
- [61] POMRANING, G. C. Asymptotic and variational derivations of the simplified P_N equations. *Ann. Nucl. Energy* 20, 9 (1993), 623–637.
- [62] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., AND FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, 3^a ed. Cambridge University Press, 2007.
- [63] RATZEL, A. C., AND HOWELL, J. R. Two-dimensional radiation in absorbing-emitting media using the P_N approximation. *Journal of Heat Transfer* 105 (1983), 333–340.
- [64] ROHATGI, A. Webplotdigitizer: Version 4.5, 2021.
- [65] ROSSELAND, S. *Theoretical astrophysics: Atomic theory and the analysis of stellar atmospheres and envelopes*. Clarendon Press, 1936.

- [66] SAUTER, E., DE AZEVEDO, F. S., AND THOMPSON, M. Existence theory for one-dimensional quasilinear coupled conductive-radiative flows. *Applied Mathematics and Computation* 233 (2014), 545–556.
- [67] SAUTER, E., DE AZEVEDO, F. S., THOMPSON, M., AND DE VILHENA, M. T. M. B. Solution of the one-dimensional transport equation by the vector green function method: Error bounds and simulation. *Applied Mathematics and Computation* 219 (2013), 11291–11301.
- [68] SEAİD, M., FRANCK, M., KLAR, A., PINNAU, R., AND THÖMMES, G. Efficient numerical methods for radiation in gas turbines. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 170 (2004), 217 – 239.
- [69] SEGATTO, C. F., VILHENA, M. T., AND LEITE, S. Q. B. The LTS_N angular multigrid approach in a slab. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer* 95, 3 (2005), 415–422.
- [70] SIEWERT, C. A concise and accurate solution to chandrasekhar’s basic problem in radiative transfer. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 64, 2 (2000), 109–130.
- [71] STEVENS, P. N. Use of the discrete ordinates S_N method in radiation shielding calculations. *Nuclear Engineering and Design* 13 (1970), 395 – 408.
- [72] STEWART, S. M., AND JOHNSON, R. B. *Blackbody radiation: A history of thermal radiation computational aids and numerical methods*. CRC Press, 2016.
- [73] STONES, P. H. Approximate integral equations for the temperature in non-gray model atmospheres. *Astrophysical Journal* 137 (1963), 628 – 640.

- [74] SYKES, F. B. Approximate integration of the equation of transfer. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 111 (1951), 377–386.
- [75] THOMPSON, M., SEGATTO, C., AND DE VILHENA, M. T. Existence theory for the solution of a stationary nonlinear conductive-radiative heat-transfer problem in three space dimensions. *Transport Theory and Statistical Physics* 33 (2004), 563–576.
- [76] THOMPSON, M., VILHENA, M. T. D., AND BODMANN, B. E. J. Existence theory for radiative flows. *Transport Theory and Statistical Physics* 37 (2008), 307–326.
- [77] TSAI, R. W., AND LOYALKA, S. K. A numerical method for solving the integral equation of neutron transport: III. *Nuclear Science and Engineering* 61, 4 (1976), 536–540.
- [78] VARGAS, R. F., SEGATTO, C. F., AND VILHENA, M. T. Solution of the radiative heat transfer equation with internal energy sources in a slab by the LTS_N method. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer* 105 (2007), 1–7.
- [79] VARGAS, R. F., AND VILHENA, M. T. A closed-form solution for the one-dimensional radiative conductive problem by the decomposition and LTS_N methods. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer* 61 (1999), 303–308.
- [80] VILHENA, M. T., AND BARICHELLO, L. B. A new analytical approach to solve the neutron transport equation. *Kerntechnik* 56, 5 (1991), 334–336.
- [81] VILHENA, M. T., BARICHELLO, L. B., ZABADAL, J., SEGATTO, C. F., AND CARDONA, A. V. General solution of one-dimensional approximations to the transport equation. *Progress in Nuclear Energy* 33 (1998), 99–115.

- [82] VISKANTA, R. Influence of internal thermal radiation on heat transfer in UO_2 fuel elements. *Nuclear Science and Engineering* 21, 1 (1965), 13–19.
- [83] VISKANTA, R., AND ANDERSON, E. E. Heat transfer in semitransparent solids. *Advances in heat transfer* 11 (1975), 317–441.
- [84] VISKANTA, R., AND MENGÜÇ, M. P. Radiation heat transfer in combustion systems. *Progress Energy and Combustion Science* 13 (1987), 97–160.
- [85] WHITAKER, S. *Elementary Heat Transfer Analysis*. Elsevier Science & Technology Books, 1976.
- [86] WICK, G. C. Über ebene diffusionsprobleme. *Zs. F. Phys* 121, 11 (1943), 702–718.
- [87] YANG, J., AND MODEST, M. F. Elliptic pde formulation of general, three-dimensional high-order P_N -approximations for radiative transfer. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer* (2007).
- [88] ZHANG, Y., LI, Q., AND ZHOU, H. *Theory and Calculation of Heat Transfer in Furnaces*. Academic Press, 2016.
- [89] ÇENGEL, Y. A., AND GHAJAR, A. J. *Heat and Mass Transfer: Fundamentals & Applications*. McGraw-Hill, 2014.