Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática e Estatística

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Semigrupoides Inversos: Ações, Representações e Teoria de Galois

Dissertação de Mestrado

Wesley Gonçalves Lautenschlaeger

Porto Alegre, dezembro de 2021.

Dissertação submetida por Wesley Gonçalves Lautenschlaeger[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professora Orientadora:
Thaísa Raupp Tamusiunas (PPGMat-UFRGS)

Banca Examinadora:
Antonio Paques (PPGMat-UFRGS)
Alveri Alves Sant'Ana (PPGMat-UFRGS)
Wagner de Oliveira Cortes (PPGMat-UFRGS)
Víctor Eduardo Marín Colorado (Universidad del Tolima)

Data da Apresentação: 17/12/2021.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Agradecimentos

Gosto da metáfora que compara o aprendizado com o cultivo de um jardim.

Agradeço minha mãe, Consuelo, por ter plantado as sementes da curiosidade e as cultivado por tantos anos, não só removendo todas as ervas daninhas que nasciam na sua volta como também aprendendo que algumas coisas que ela não plantou também seriam bem-vindas no jardim que ela tanto prezava.

A todas minhas professoras e meus professores da Escola Santa Rita, onde estudei o ensino fundamental e médio, por adubarem ideais e humanidade. Mesmo em meio a tantas dificuldades, vocês sempre deram seu melhor e isso foi decisivo para que eu e muitas outras pessoas chegássemos onde chegamos. É sempre importante lembrar da importância da educação pública e de qualidade.

À querida orientadora Thaísa, que chegou já num jardim com frutos verdes e teve toda a paciência e cuidado para ajudá-los a amadurecer. Obrigado por tantas semanas de seminários (sendo os últimos virtuais) e discussões que farão total diferença na minha carreira matemática, bem como por me apresentar a álgebra e todas as coisas incríveis que a acompanham.

Obrigado também aos professores e às professoras da graduação e do mestrado, com um especial agradecimento ao professor Antonio Paques, que teve papel fundamental na minha formação, assim como o sol e a chuva são decisivos no crescimento das plantas. Tive muita sorte de ser seu aluno. Outro agradecimento especial ao professor Alveri.

Aos colegas que conheci na matemática, Alessandra, Christian, Cibele, Clayton, Eloíse, Gustav, João, Juliana, Marnes e Rafael, agradeço por estarem ao meu lado nos momentos difíceis (normalmente surtando junto comigo). Agradeço também aos amigos e amigas que não são da matemática mas me acompanharam nesse período: Alexandra, Amanda, Anita, Cauan, Gabriela, Larissa e Thaís. Mesmo que o objetivo do jardim seja produzir frutos, a vida é muito mais bonita com flores na nossa volta. Obrigado por trazerem toda essa diversidade e alegria.

Falando em flores, preciso agradecer uma em especial: Gibran, meu namorado, uma flor-de-lis. Obrigado por me animar nos dias tristes, por revisar minha gramática, por me escutar falando de matemática mesmo quando tu não fazia ideia do que eu estava dizendo. Quando eu penso em paz, penso em ti.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio parcial no desenvolvimento desse trabalho.

Como as abelhas em um jardim, um dia também serei responsável por espalhar sementes por esse grande ecossistema. Manifesto um desejo de que a ciência brasileira possa resistir a esse período de chamas que estamos atravessando e se reerguer no futuro, para assim podermos ter não só pequenos jardins isolados, mas uma grande, rica e diversa floresta.

Resumo

O objetivo desta dissertação é, dado um grupoide $\mathcal{G}$, construir um semigrupoide inverso $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ que depende unicamente de $\mathcal{G}$, de forma puramente algébrica, e mostrar que as ações parciais de grupoide de $\mathcal{G}$ estão em relação biunívoca com as ações de semigrupoide inverso de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$. Construiremos também a C^*-álgebra grupoide parcial de Exel $C_p^*(\mathcal{G})$ que depende exclusivamente de $\mathcal{G}$ e mostraremos que as representações parciais em espaços de Hilbert de $\mathcal{G}$ estão em correspondência com as representações de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ em espaços de Hilbert e com as representações de C^*-álgebra de $C_p^*(\mathcal{G})$ em espaços de Hilbert. Por fim, usaremos uma generalização do Teorema Ehresmann-Schein-Nambooripad para semigrupoides inversos para traduzir a teoria de Galois para ações de grupoide para o caso de ações de semigrupoide inverso.

Abstract

The purpose of this dissertation is to construct an inverse semigroupoid $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ that only depends on a groupoid $\mathcal{G}$ in a purely algebraic way and to show that the partial groupoid actions of $\mathcal{G}$ are in biunivocal relation with the inverse semigroupoid actions of $\mathcal{S}(\mathcal{G})$. We also construct the Exel's partial groupoid C^*-algebra $C_p^*(\mathcal{G})$ that depends exclusively on $\mathcal{G}$ and we show that the partial groupoid representations of $\mathcal{G}$ on Hilbert spaces are in one-to-one correspondence with the inverse semigroupoid representations of $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ on Hilbert spaces and with the C^*-algebra representations of $C_p^*(\mathcal{G})$ on Hilbert spaces. Lastly we will use a generalization of the Ehresmann-Schein-Nambooripad Theorem for inverse semigroupoids to translate the Galois theory for groupoid actions to the case of inverse semigroupoid actions.

Sumário

Introdução

O estudo de ações parciais de grupos é recente em termos matemáticos e seu primeiro objetivo foi classificar C^*-álgebras. Exel, em [11], mostrou que existe uma relação biunívoca entre ações parciais de grupos e ações (globais) de semigrupos inversos. Já em [10], Dokuchaev e Exel discutiram quando o produto cruzado parcial de uma álgebra por um grupo é associativo, trabalhando pela primeira vez com a teoria de forma puramente algébrica.

Considerando o caso de grupoides, Bagio, Flôres e Paques em [3] apresentam a teoria de ações parciais de grupoides ordenados. Além disso, em [4], Bagio e Paques definiram os conceitos de globalização e um teorema de equivalências de Galois para ações parciais de grupoide, bem como apresentaram um contexto de Morita envolvendo produtos cruzados. Em [18], Paques e Tamusiunas apresentaram um teorema de correspondência de Galois para ações globais de grupoide. Em [5], Bagio, Paques e Pinedo relacionam uma classe de ações parciais de grupoide, as chamadas ações parciais de tipo-grupo, com a classe de ações parciais de grupo.

Grupoides, bem como semigrupos inversos, são estruturas algébricas que generalizam naturalmente o conceito de grupos. Queremos responder, inicialmente, as seguintes questões: se generalizarmos a construção de Exel para o caso em que o grupo agora é um grupoide, que estrutura obteremos? Existirá alguma relação entre as ações parciais do grupoide e as ações globais dessa estrutura? Levando em conta que essa estrutura está relacionada com grupoides, podemos construir uma teoria de Galois para ações dessa estrutura se baseando nos passos da teoria de Galois para ações globais de grupoides apresentada por Paques e Tamusiunas em [18]? A resposta para a primeira pergunta é que obteremos um semigrupoide inverso, e assim poderemos responder as outras duas perguntas afirmativamente. Semigrupoides inversos são generalizações naturais de grupoides e de semigrupos inversos, o que por si só já mostra o quanto a teoria de semigrupoides inversos pode ser interessante. Desta maneira, o foco deste trabalho é o estudo de ações globais de semigrupoides inversos.

Tendo isso em vista, os três objetivos principais desse trabalho são generalizar os resultados de Exel [11], Exel e Vieira [13] e Paques e Tamusiunas [18]. Nos dois primeiros casos, construiremos uma correspondência entre ações parciais de grupoide e ações de semigrupoide inverso, bem como estudaremos a relação entre representações dessas estruturas e representações de C^*-álgebras em espaços de Hilbert. Para o terceiro objetivo, construiremos um teorema de correspondência de Galois para ações ortogonais de semigrupoides inversos a partir da teoria de Galois para ações ortogonais de grupoides usando uma generalização do celebrado Teorema Ehresmann-Schein-Nambooripad para o caso semigrupoides inversos, apresentado por Dewolf e Pronk em [9].

Para manter uma apresentação organizada dos resultados, o trabalho será dividido em quatro capítulos. O primeiro deles apresentará resultados básicos da teoria, destacando as definições de estruturas com operação parcialmente definida, de produtos cruzados e de C^*-álgebras, assim como suas principais propriedades e consequências. No segundo capítulo, construiremos um semigrupoide $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ a partir de um grupoide $\mathcal{G}$, desenvolvendo a teoria de maneira puramente algébrica, utilizando a teoria de semigrupoides livres apresentada em Liu [17], e mostraremos que $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ é um semigrupoide inverso tal que as ações parciais de grupoide de $\mathcal{G}$ estão em correspondência um para um com as ações de semigrupoide inverso de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$.

No terceiro capítulo construiremos a C^*-álgebra grupoide parcial de Exel $C^*_p(\mathcal{G})$, que essencialmente é o produto cruzado parcial $P(\mathcal{G}) \ltimes_\alpha \mathcal{G}$ para certas C^*-álgebra $P(\mathcal{G})$ e ação parcial α bem escolhidas. Mostraremos uma relação biunívoca entre: a) as representações parciais de grupoide de $\mathcal{G}$ em um espaço de Hilbert H, b) as representações de semigrupoide inverso de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ em H e c) as representações de C^*-álgebra de $C^*_p(\mathcal{G})$ em H.

No quarto e último capítulo, usaremos o Teorema Ehresmann-Schein-Nambooripad para semigrupoides inversos para traduzir a teoria de Galois para ação de grupoide apresentada por Paques e Tamusiunas em [18] para o caso de semigrupoides inversos agindo ortogonalmente em álgebras, e discutiremos algumas de suas consequências diretas na teoria de Galois para ações de semigrupos inversos.

Capítulo 1

Pré-Requisitos

Neste capítulo pretendemos apresentar os principais resultados que são necessários para o entendimento dessa dissertação. Na primeira seção, definiremos as estruturas com operação parcial que aparecerão neste trabalho: semigrupoides, semigrupoides inversos, categorias, categorias inversas e grupoides. Demonstraremos as principais propriedades dessas estruturas, dando ênfase no estudo das ordens parciais naturais. Por fim, apresentaremos o Teorema Ehresmann-Schein-Nambooripad (ESN) para semigrupoides inversos e algumas de suas consequências.

Na segunda seção, falaremos sobre ações parciais de grupoide e ações de semigrupoide inverso. Suas principais propriedades serão provadas, e além disso usaremos as definições para construir produtos cruzados algébricos. Já na terceira seção discorreremos sobre C^*-álgebras. Construiremos o produto cruzado algébrico de uma C^*-álgebra por uma ação parcial de grupoide e mostraremos que o resultado possibilita a construção de uma C^*-álgebra envolvente, definindo o produto cruzado de uma C^*-álgebra por uma ação parcial de grupoide.

Fixemos algumas notações. Daqui em diante, R denotará um anel comutativo com unidade 1_R. Ao dizermos que um conjunto A é uma R-álgebra, queremos dizer que A é um anel (unitário e associativo, mas não necessariamente comutativo) e um R-módulo à esquerda e à direita, bem como satisfaz à propriedade de compatibilidade do produto do anel com o produto por escalares em R, isto é, $r(ab) = (ra)b = a(rb)$, para todos $a, b \in A, r \in R$.

1.1 Estruturas Algébricas com Operação Parcial

Nesta seção resumiremos os principais resultados e definições envolvendo estruturas algébricas com operação parcialmente definida, de modo a fixar notações e organizar nomenclaturas. Apresentaremos também o Teorema Ehresmann-Schein-Nambooripad (ESN) para semigrupoides inversos e outros três teoremas ESN que decorrem como consequência deste. Todos os resultados desta seção podem ser encontrados em [9], [12], [16] e [17].

Inicialmente, relembraremos o leitor e a leitora das definições de semigrupo e semigrupo inverso.

Um semigrupo é um conjunto S munido de uma operação associativa $\cdot$, normalmente denotada por concatenação. Um semigrupo *regular* é um semigrupo S onde todo elemento $s \in S$ possui ao menos um inverso $t \in S$ tal que

$$sts = s, \quad tst = t.$$

Um semigrupo regular onde todo elemento possui um *único* inverso é dito um *semigrupo inverso*. Semigrupos inversos foram amplamente estudados nas últimas décadas, bem como diversas de suas generalizações. Trabalharemos com generalizações de semigrupos inversos onde trocamos a operação associativa totalmente definida por uma operação associativa parcialmente definida.

Mais precisamente, seja $\mathcal{S}$ uma classe munida de operação parcialmente definida $\cdot$. Se $x, y \in \mathcal{S}$, escrevemos $\exists xy$ quando a operação está definida. Dizemos que $\mathcal{S}$ é um *semigrupoide* se:

$$\exists xy \text{ e } \exists yz \iff \exists x(yz) \iff \exists (xy)z, \tag{1.1}$$

para todos $x, y, z \in \mathcal{S}$. Normalmente nos referimos à equivalência (1.1) por associatividade quando fizer sentido. Essa definição puramente algébrica de semigrupoide é devida à Ruy Exel e apareceu pela primeira vez em [12, Definition 2.1].

Podemos também definir comutatividade quando esta faz sentido da seguinte forma:

$$\exists xy \text{ e } \exists yx \implies xy = yx.$$

Neste caso, dizemos que os elementos $x, y \in \mathcal{S}$ comutam. Dizemos que um elemento $f \in \mathcal{S}$ é *idempotente* se $\exists ff$ e $ff = f$. Denotamos por $E(\mathcal{S})$ o conjunto de idempotentes de $\mathcal{S}$. Definimos também os conjuntos

$$\mathcal{S}_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : \exists x_1 x_2 \cdots x_n\}.$$

Dizemos que x e y são *componíveis* em $\mathcal{S}$ se $\exists xy$. Em particular, $\mathcal{S}_2$ é precisamente o conjunto dos pares ordenados de elementos componíveis em $\mathcal{S}$.

Um *semigrupoide regular* $\mathcal{S}$ é um semigrupoide em que, para todo $x \in \mathcal{S}$, existe $y \in \mathcal{S}$ tal que $\exists xy$, $\exists yx$ e $xyx = x$. Note que o elemento $z = yxy$ possui a propriedade que $\exists xz, \exists zx$, $xzx = x$ e $zxz = z$. De fato,

$$xzx = x(yxy)x = (xyx)yx = xyx = x$$

e

$$zxz = (yxy)x(yxy) = y(xyx)yxy = y(xyx)y = yxy = z.$$

Neste caso, dizemos que z é um *inverso* de x. Se o elemento z for único, dizemos que $\mathcal{S}$ é um *semigrupoide inverso* e denotamos $z = x^{-1}$. Note que em um semigrupoide inverso, dado $f \in E(\mathcal{S})$, temos que $fff = f$, de onde segue que $f^{-1} = f$. Nosso primeiro resultado relaciona a comutatividade de idempotentes com a unicidade de inversos.

Teorema 1.1.1. *[17, Lemma 3.3.1] Seja $\mathcal{S}$ um semigrupoide regular. Então $\mathcal{S}$ é um semigrupoide inverso se, e somente se, os idempotentes de $\mathcal{S}$ comutam.*

Demonstração. Suponha que os idempotentes de $\mathcal{S}$ comutam, isto é, que para todo $(e, f), (f, e) \in E(\mathcal{S})_2$, vale que $ef = fe$. Sejam $x, y, z \in \mathcal{S}$ tais que y, z são inversos de x.

Note que $xy, yx, xz, zx \in E(\mathcal{S})$. De fato,

$$(xy)(xy) = (xyx)y = xy, \qquad (yx)(yx) = y(xyx) = yx,$$

e o fato de que os elementos $xz, zx \in E(\mathcal{S})$ é provado de forma análoga. Assim,

$$xy = (xzx)y = (xz)(xy) = (xy)(xz) = (xyx)z = xz$$

e

$$yx = y(xzx) = (yx)(zx) = (zx)(yx) = z(xyx) = zx.$$

Desta forma, temos que

$$z = z(xz) = z(xy) = (zx)y = (yx)y = y,$$

garantindo a unicidade do inverso.

Reciprocamente, suponha que $\mathcal{S}$ é um semigrupoide inverso. Sejam $e, f \in E(\mathcal{S})$ tais que $\exists ef$. Vamos provar que $\exists fe$ e que $ef = fe$. Seja x o inverso de ef, isto é, tal que $\exists xe$, $\exists fx$ e

$$efxef = ef, \qquad xefx = x.$$

Então $\exists fxe$ e fxe é tal que

$$ef(fxe)ef = e(ff)x(ee)f = efxef = ef$$

e

$$(fxe)ef(fxe) = fx(ee)(ff)xe = f(xefx)e = fxe,$$

isto é, fxe é um inverso para ef. Mais ainda,

$$(fxe)^2 = f(xefx)e = fxe,$$

isto é, $fxe \in E(\mathcal{S})$. Portanto, $ef = (fxe)^{-1} = fxe \in E(\mathcal{S})$, de onde segue que $(ef)^{-1} = ef = x$. Assim, como $\exists fxe$, temos que $\exists f(ef)e$, ou seja, $\exists fe$. Analogamente, $fe \in E(\mathcal{S})$. Note agora que

$$\begin{aligned} ef(fe)ef &= e(ff)(ee)f = efef = ef, \\ fe(ef)fe &= f(ee)(ff)e = fefe = fe, \end{aligned}$$

de onde segue que $ef = (ef)^{-1} = fe$, mostrando que os idempotentes comutam. □

Muitas das propriedades operacionais de semigrupoides inversos são análogas às de semigrupos inversos.

Proposição 1.1.2. *[17] Seja $\mathcal{S}$ um semigrupoide inverso. Valem as seguintes afirmações:*

(i) *Para todo $x \in \mathcal{S}$, $xx^{-1}, x^{-1}x \in E(\mathcal{S})$.*

(ii) *Para todo $x \in \mathcal{S}$, $(x^{-1})^{-1} = x$.*

(iii) *Se $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}_n$, então $(x_n^{-1}, \ldots, x_1^{-1}) \in \mathcal{S}_n$ e $(x_1 \cdots x_n)^{-1} = x_n^{-1} \cdots x_1^{-1}$.*

(iv) *Se $x \in \mathcal{S}$, $f \in E(\mathcal{S})$ e $\exists xf$, então $xfx^{-1} \in E(\mathcal{S})$.*

(v) *Se $x \in \mathcal{S}$, $e \in E(\mathcal{S})$ e $\exists xe$, então $\exists f \in E(\mathcal{S})$ tal que $\exists fx$ e $xe = fx$.*

(vi) *Se $x \in \mathcal{S}$, $e \in E(\mathcal{S})$ e $\exists ex$, então $\exists f \in E(\mathcal{S})$ tal que $\exists xf$ e $ex = xf$.*

Demonstração. (i): Provamos este item na demonstração do Teorema 1.1.1.

(ii): Segue da unicidade do inverso.

(iii): Suponha $n = 2$. Note que se $\exists xy$, temos que

$$xy = (xx^{-1}x)(yy^{-1}y) = x(x^{-1}x)(yy^{-1})y.$$

Pelo Teorema 1.1.1, como $\exists (x^{-1}x)(yy^{-1})$, então $\exists (yy^{-1})(x^{-1}x)$, e, em particular, $\exists y^{-1}x^{-1}$. Mais ainda, $x^{-1}x, yy^{-1} \in E(\mathcal{S})$ e portanto comutam. Agora,

$$xy(y^{-1}x^{-1})xy = x(yy^{-1})(x^{-1}x)y = (xx^{-1}x)(yy^{-1}y) = xy$$

e

$$y^{-1}x^{-1}(xy)y^{-1}x^{-1} = y^{-1}(x^{-1}x)(yy^{-1})x^{-1} = (y^{-1}yy^{-1})(x^{-1}xx^{-1}) = y^{-1}x^{-1},$$

isto é, $y^{-1}x^{-1} = (xy)^{-1}$, pela unicidade do inverso. O caso geral segue por indução em n.

(iv): Basta notar que

$$(xfx^{-1})(xfx^{-1}) = xf(x^{-1}x)fx^{-1} = (xx^{-1}x)(ff)x^{-1} = xfx^{-1}.$$

(v): Seja $f = xex^{-1} \in E(\mathcal{S})$. Então $\exists fx$ e

$$fx = (xex^{-1})x = xe(x^{-1}x) = (xx^{-1}x)e = xe.$$

O item (vi) é análogo ao item (v). □

Observação 1.1.3. O item (i) da Proposição 1.1.2 nos diz que o conjunto $\{xx^{-1} : x \in \mathcal{S}\} = \{x^{-1}x : x \in \mathcal{S}\} \subseteq E(\mathcal{S})$. A inclusão contrária também é válida. De fato, seja $e \in E(\mathcal{S})$. Então $eee = e$, de onde segue que $e^{-1} = e$. Assim,

$$e = e^2 = ee = e^{-1}e = ee^{-1},$$

como afirmamos.

Como no caso de semigrupos inversos, todo semigrupoide inverso possui uma ordem parcial natural $\preceq$ definida por

$$x \preceq y \iff \text{existe } f \in E(\mathcal{S}) \text{ tal que } \exists fy \text{ e } x = fy.$$

Proposição 1.1.4. *[17, Lemma 3.3.6] São equivalentes:*

(i) $x \preceq y$*;*

(ii) *Existe* $e \in E(\mathcal{S})$ *tal que* $\exists ye$ *e* $x = ye$*.*

(iii) $x^{-1} \preceq y^{-1}$*;*

(iv) $\exists yx^{-1}$ *e* $x = yx^{-1}x$*;*

(v) $\exists x^{-1}y$ *e* $x = xx^{-1}y$*.*

Demonstração. (i) $\iff$ (ii): Segue diretamente dos itens (v) e (vi) da Proposição 1.1.2.

(ii) $\implies$ (iii): Se $x = ye$, então $x^{-1} = ey^{-1}$, isto é, $x^{-1} \preceq y^{-1}$ por definição.

(iii) $\implies$ (iv): Se $x^{-1} \preceq y^{-1}$, então $x^{-1} = ey^{-1}$ para algum $e \in E(\mathcal{S})$ tal que $\exists ey^{-1}$. Tomando inversos, obtemos que $x = ye$. Temos que $\exists x^{-1}x$, portanto $\exists x^{-1}(ye)$, e, em particular, $\exists x^{-1}y$. Como $xe = (ye)e = ye = x$, segue que $e(x^{-1}x) = (x^{-1}x)e = x^{-1}x$. Portanto, $x = x(x^{-1}x) = ye(x^{-1}x) = yx^{-1}x$.

(iv) $\implies$ (v): Temos que $x = yx^{-1}x$. Então, pela Proposição 1.1.2(v) existe $f \in E(\mathcal{S})$ tal que $\exists fy$ e $x = fy$. Como $\exists xx^{-1}$, temos que $\exists (fy)x^{-1}$, em particular, $\exists yx^{-1}$. Desta forma, $fx = x$, de onde segue que $fxx^{-1} = xx^{-1}$. Analogamente à implicação anterior, concluímos que $x = xx^{-1}y$.

É imediato que (v) $\implies$ (ii). □

Seja P um conjunto munido de ordem parcial $\leq$. Dizemos que um subconjunto $Q \subseteq P$ é um *ideal de ordem* de P se dados $p \in P$, $q \in Q$ tais que $p \leq q$, então $p \in Q$.

Proposição 1.1.5. *Seja $\mathcal{S}$ um semigrupoide inverso. Valem as seguintes afirmações:*

(i) *A relação $\preceq$ é uma ordem parcial em $\mathcal{S}$.*

(ii) *Se $e, f \in E(\mathcal{S})$, então $e \preceq f$ se, e somente se, $\exists ef$ e $e = ef = fe$.*

(iii) *Se $x \preceq y$, $u \preceq v$, $\exists xu$, $\exists yv$, então $xu \preceq yv$.*

(iv) *$E(\mathcal{S})$ é um ideal de ordem de $\mathcal{S}$ com respeito a $\preceq$.*

Demonstração. (i): Reflexividade: $x \preceq x$ pois $x = (xx^{-1})x$.

Antissimetria: $x \preceq y$ e $y \preceq x$ nos dizem que $x = xx^{-1}y$ e $y = yy^{-1}x$. Assim, $x = xx^{-1}(yy^{-1}x) = yy^{-1}(xx^{-1}x) = yy^{-1}x = y$.

Transitividade: Se $x \preceq y$ e $y \preceq z$, temos que $x = ey$, $y = fz$. Assim, $x = e(fz) = (ef)z$, onde todos os produtos estão definidos. Como $ef \in E(\mathcal{S})$, temos que $x \preceq z$.

(ii): Se $e \preceq f$, então $\exists e^{-1}f$ e $e = ee^{-1}f = ef = fe$. Reciprocamente, se $\exists ef$ e $e = ef$, então $e \preceq f$ por definição.

(iii): Como $x \preceq y$, temos que $x = ey$, para algum $e \in E(\mathcal{S})$ tal que $\exists ey$. Como $u \preceq v$, temos que $u = fv$, para algum $f \in E(\mathcal{S})$ tal que $\exists fv$. Desta forma,

$$xu = (ey)(fv) = e(yf)v.$$

Pelo item (v) da Proposição 1.1.2, temos que $\exists i \in E(\mathcal{S})$ tal que $\exists iy$ e $yf = iy$. Assim,

$$xu = e(iy)v = (ei)yv.$$

Como $ei \in E(\mathcal{S})$, segue que $xu \preceq yv$.

(iv): Se $x \preceq e$, com $x \in \mathcal{S}$, $e \in E(\mathcal{S})$, então existe $f \in E(\mathcal{S})$ tal que $x = fe$. Mas $fe \in E(\mathcal{S})$, concluindo a demonstração. □

O elemento ef que aparece no item (ii) é ainda mais especial: ele é o *ínfimo* de e e f. Dizemos que um elemento z é o ínfimo entre x e y se $z \preceq x$, $z \preceq y$ e se $w \preceq x, y$ então

$w \preceq z$. Denotamos $z = x \wedge y$. Um conjunto parcialmente ordenado onde todo par de elementos possui um ínfimo é dito um *semirreticulado inferior*.

Vamos provar que, de fato, quando $e, f \in E(\mathcal{S})$ e $\exists ef$, então $ef = e \wedge f$ é o ínfimo de e e f. Temos claramente que $ef \preceq e, f$. Se $i \preceq e, f$, temos que $i \in E(\mathcal{S})$. Então $i = i^2 \preceq ef$ pelo item (iii) da proposição anterior.

Em um semigrupoide inverso, o conjunto de idempotentes $E(\mathcal{S})$ é uma união disjunta de semirreticulados inferiores. Para isso, note que podemos particionar $E(\mathcal{S})$ da seguinte forma:

$$e \sim f \iff \exists ef. \tag{1.2}$$

Essa relação é de equivalência, de onde segue que suas classes de equivalência geram uma partição em $E(\mathcal{S})$. Agora, cada $\sim$-classe só possui elementos componíveis e, portanto, é um semigrupo inverso. Em semigrupos inversos, os idempotentes formam um semirreticulado inferior [16, Proposition 1.4.8], provando então que o conjunto de idempotentes de um semigrupoide inverso é precisamente uma união disjunta de semirreticulados inferiores com relação a ordem parcial natural $\preceq$.

A ordem parcial natural de um semigrupoide inverso nos dá uma forma de caracterizar quando dois elementos são componíveis.

Proposição 1.1.6. *Sejam $\mathcal{S}$ um semigrupoide inverso e $x, y \in \mathcal{S}$. Então $x^{-1}x \wedge yy^{-1}$ está definido na ordem parcial natural se, e somente se, $\exists xy$.*

Demonstração. A implicação ($\Leftarrow$) segue do fato que se $\exists xy$ então $\exists x^{-1}xyy^{-1}$ e $x^{-1}xyy^{-1} = x^{-1}x \wedge yy^{-1}$.

Reciprocamente, suponha que $u = x^{-1}x \wedge yy^{-1}$ está definido. Já sabemos que $u \in E(\mathcal{S})$. Além disso, $\exists ux^{-1}x$, $\exists uyy^{-1}$ e $u = ux^{-1}x = uyy^{-1}$. Assim, $u = uyy^{-1} = (ux^{-1}x)yy^{-1}$. Portanto $\exists xy$. □

Corolário 1.1.7. *Um semigrupo inverso é um semigrupoide inverso cujo conjunto de idempotentes é um semirreticulado inferior com respeito a ordem parcial natural.*

Demonstração. Basta notar que se $\mathcal{S}$ é um semigrupoide inverso e $E(\mathcal{S})$ é um semirreticulado inferior, então $e \wedge f$ está definido para todos $e, f \in E(\mathcal{S})$. Desta forma, todos os elementos de $\mathcal{S}$ são componíveis, garantindo que $\mathcal{S}$ é de fato um semigrupo inverso. □

Um elemento e de um semigrupoide (não necessariamente inverso) $\mathcal{S}$ é dito uma *identidade* quando $\exists ex$ ou $\exists ye$ implicar $ex = x$, $ye = y$, para todos $x, y \in \mathcal{S}$ adequados. Denotamos o conjunto das identidades de um semigrupoide por $\mathcal{S}_0$. Uma *categoria* é um semigrupoide $\mathcal{C}$ onde vale o seguinte axioma: para todo $x \in \mathcal{C}$, existem $e, f \in \mathcal{C}_0$ tais que $\exists ex$, $\exists xf$. Essa definição puramente algébrica de categorias aparece, por exemplo, em [15, Section 2.3].

Proposição 1.1.8. *As identidades* e, f *em uma categoria* $\mathcal{C}$ *são únicas.*

Demonstração. Suponha que existam $e, e' \in \mathcal{C}_0$ tais que $\exists ex, \exists e'x$. Então $\exists e(e'x)$, e portanto $\exists ee'$. Desta forma, $e = ee' = e'$, pois ambas são identidades. Analogamente provamos a unicidade de f. $\square$

Nas notações acima, escrevemos $d(x) = f$, $r(x) = e$, os elementos domínio e imagem de x, respectivamente. Numa categoria, o produto xy está definido se, e somente se, $d(x) = r(y)$. De fato, se $d(x) = r(y)$, temos que $xd(x) = xr(y)$. Como $\exists r(y)y$, temos que $\exists x(r(y)y) = xy$. Reciprocamente, se $\exists xy$, então $\exists (xd(x))(r(y)y)$. Em particular, $\exists d(x)r(y)$ e, neste caso, são iguais. Isto também implica que $d(e) = r(e) = e$, para toda identidade $e \in \mathcal{C}_0$, de forma que $\exists e^2$ e $e^2 = e$. Concluímos então que $\mathcal{C}_0 \subseteq E(\mathcal{C})$. Além disso, se $\exists xy$, então $d(xy) = d(y)$, $r(xy) = r(x)$.

Observação 1.1.9. Normalmente uma categoria é definida em termos de objetos e morfismos. De forma específica, uma categoria $\mathcal{C}$ é composta, primeiramente, por uma coleção $|\mathcal{C}|$ de objetos. Para cada par ordenado de objetos (A, B) de $\mathcal{C}$ é associado um conjunto (que pode ser vazio) $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ (ou simplesmente $\mathrm{Mor}(A, B)$, quando não houver ambiguidade), chamado conjunto de morfismos de A em B. Além disso, para cada tripla ordenada (A, B, C) de objetos em $\mathcal{C}$ existe uma aplicação

$$\mathrm{Mor}(B, C) \times \mathrm{Mor}(A, B) \to \mathrm{Mor}(A, C)$$

chamada composição de morfismos. Se $g \in \mathrm{Mor}(B, C)$ e $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$, a imagem do par (g, f) é dada por $g \circ f$.

Ademais, para que $\mathcal{C}$ seja categoria, deve satisfazer os seguintes axiomas:

(i) Os conjuntos $\mathrm{Mor}(A, B)$ são dois a dois disjuntos.

(ii) Se $h \circ g$ e $g \circ f$ estão bem definidas, então

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

(iii) Para cada objeto B existe um morfismo $I_B \in \mathrm{Mor}(B, B)$ chamado identidade, para o qual

$$I_B \circ f = f, g \circ I_B = g$$

para quaisquer f, g adequados.

Podemos identificar cada objeto A da categoria $\mathcal{C}$ com seu morfismo identidade 1_A, de forma que podemos considerar $\mathcal{C} = \cup_{A,B \in |\mathcal{C}|} \mathrm{Mor}(A, B)$ como uma classe de morfismos com composição parcialmente definida. Assim, as condições (i) e (ii) são equivalentes à associatividade quando esta faz sentido e a condição (iii) é equivalente à existência das identidades. Desta forma, as duas definições de categoria apresentadas são equivalentes.

Uma *categoria inversa* é um semigrupoide inverso que é uma categoria. Embora tenhamos duas regras distintas para o produto parcial, uma em termos de domínios e imagens e outra em termos de ínfimos, temos que elas são equivalentes. Os próximos resultados explicarão essa interação entre estruturas e aparecem implicitamente em [9].

Lema 1.1.10. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria inversa. Se $e \in \mathcal{C}_0 \subseteq E(\mathcal{C})$, então e é o elemento maximal da $\sim$-classe que o contém, onde $\sim$ é a relação em $E(\mathcal{C})$ definida em (1.2).*

Demonstração. Todos os elementos do semirreticulado inferior que contém e são componíveis com e. Assim, $fe = ef = f$, para todo f na $\sim$-classe que contém e, pois e é uma identidade. Portanto, temos que $f = ef \preceq e$, para todo f na $\sim$-classe que contém e, isto é, e é maximal. □

Proposição 1.1.11. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria inversa. O produto de $\mathcal{C}$ quando vista como um semigrupoide inverso é equivalente ao produto de $\mathcal{C}$ quando vista como uma categoria. Em outras palavras, $d(x) = r(y)$ se, e somente se, $x^{-1}x \wedge yy^{-1}$ está definido.*

Demonstração. Primeiramente note que $x^{-1}x \preceq d(x)$. De fato, $x^{-1}x \in E(\mathcal{C})$ e $\exists x^{-1}xd(x)$, o que implica, pelo Lema 1.1.10, que $x^{-1}x \preceq d(x)$. Analogamente provamos que $yy^{-1} \preceq r(y)$.

Agora, se $d(x) = r(y)$, então $x^{-1}x$, yy^{-1} pertencem à mesma $\sim$-classe e, portanto, seu ínfimo está definido. Reciprocamente, se o ínfimo $x^{-1}x \wedge yy^{-1}$ está definido, temos que $d(x)$ e $r(y)$ pertencem à mesma $\sim$-classe. Como ambos são o único elemento maximal, segue que $d(x) = r(y)$. □

Um *grupoide* é uma categoria inversa $\mathcal{G}$ onde $d(x) = x^{-1}x$ e $r(x) = xx^{-1}$, para todo $x \in \mathcal{G}$. Dizemos que um grupoide é *conexo* se para todos $e, f \in \mathcal{G}_0$, existe $x \in \mathcal{G}$ tal que $d(x) = e$, $r(x) = f$. Todo grupoide pode ser escrito como uma união disjunta de grupoides conexos. Além disso, todo grupoide conexo pode ser escrito (a menos de isomorfismo) como $\mathcal{G}_0^2 \times \mathcal{G}_e$, onde

$$\mathcal{G}_0^2 = \{(e, f) : e, f \in \mathcal{G}_0\}$$

é chamado de *grupoide grosseiro* associado a $\mathcal{G}_0$ com operação $\exists(e, f)(i, j)$ se, e somente se, $e = j$ e, neste caso, $(e, f)(i, j) = (i, f)$, com $d(e, f) = e$, $r(e, f) = f$; e

$$\mathcal{G}_e = \{x \in \mathcal{G} : d(x) = r(x) = e\}$$

é chamado de *grupo de isotropia* associado ao elemento $e \in \mathcal{G}_0$. Caso $e \neq f$, temos que $\mathcal{G}_e \simeq \mathcal{G}_f$, logo a decomposição não depende da escolha da identidade. As demonstrações dos fatos envolvendo grupoides conexos podem ser encontradas em [6].

Grupoides podem ser vistos como generalizações de grupos quando deixamos de exigir que a operação do grupo esteja totalmente definida, isto é, quando trocamos uma operação totalmente definida por uma operação parcialmente definida. Reciprocamente, todo grupoide onde a operação está definida para todos os pares de elementos é um grupo. O diagrama abaixo apresenta as estruturas com operação parcialmente definida que estabelecemos até agora e compara com as estruturas particulares cujas operações estão totalmente definidas.

Operação parcialmente definida

$$\begin{tikzcd}
& \text{Semigrupoide} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{Categoria} \arrow[dr] & & \text{Semigrupoide Inverso} \arrow[dl] \\
& \text{Categoria Inversa} \arrow[d] & \\
& \text{Grupoide} &
\end{tikzcd}$$

Operação totalmente definida

$$\begin{tikzcd}
& \text{Semigrupo} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{Monoide} \arrow[dr] & & \text{Semigrupo Inverso} \arrow[dl] \\
& \text{Monoide Inverso} \arrow[d] & \\
& \text{Grupo} &
\end{tikzcd}$$

Lembramos a leitora e o leitor de que um *monoide* M é um semigrupo que possui um elemento identidade 1_M tal que $s1_M = s = 1_M s$, para todo $s \in M$. Essa identidade é única e isso segue do fato da operação ser totalmente definida em semigrupos, pois se houvesse outra identidade, digamos $1'_M$, teríamos $1_M = 1_M 1'_M = 1'_M$. Um *monoide inverso* é um semigrupo que é simultaneamente um monoide e um semigrupo inverso.

Seguem abaixo alguns exemplos das estruturas que apresentamos até agora.

Exemplo 1.1.12 (Uniões Disjuntas)**.** Sejam $S_1, \ldots, S_n$ semigrupos. Denote por $\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ a união disjunta dos S_i's. Se cada S_i for

(i) um grupo, então $\mathcal{S}$ é um grupoide;

(ii) um monoide inverso, então $\mathcal{S}$ é uma categoria inversa;

(iii) um monoide, então $\mathcal{S}$ é uma categoria;

(iv) um semigrupo inverso, então $\mathcal{S}$ é um semigrupoide inverso.

Em todos os casos, $\mathcal{S}$ é um semigrupoide.

Exemplo 1.1.13. Seja $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Considere $I_n^2 = \{(i, j) : i, j \in I_n\}$. Então I_n^2 é um grupoide com operação $(i, j)(j, k) = (i, k)$ e indefinida em outros casos. Analogamente podemos considerar $\mathbb{N}^2$ como um grupoide.

Exemplo 1.1.14. Sejam R um anel e $M(R)$ o anel de todas as matrizes com entradas em R. Temos que $M(R)$ é uma categoria com respeito a multiplicação usual de matrizes e cujas identidades são as matrizes identidades I_n, $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $M(R)$ é um grupoide com respeito a soma, onde cada componente conexa do grupoide $M(R)$ é dada pelo grupo $(M_{m\times n}(R), +)$, onde $m, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.1.15. Todo grafo direcionado Γ pode ser usado para construir um semigrupoide. De fato, considere A o conjunto das arestas de Γ e V o conjunto dos vértices de Γ. Se $a \in A$, definimos $s(a) \in V$ como o vértice de que a sai e $t(a) \in V$ como o vértice em que a chega. Dados $a, b \in A$, definimos o produto parcial ab como $\exists ab$ se, e somente se, $s(a) = t(b)$, e neste caso definimos $s(ab) = s(b)$ e $t(ab) = t(a)$. Então o conjunto $\mathcal{S} = \{a_1a_2\cdots a_n : \exists a_1a_2\cdots a_n, n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in A\}$ é um semigrupoide com operação parcial construída a partir da estrutura do grafo Γ.

Podemos equipar um grupoide com uma ordem parcial para obtermos uma nova estrutura.

Definição 1.1.16. Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide e $\leq$ uma ordem parcial definida em $\mathcal{G}$. Dizemos que $(\mathcal{G}, \leq)$ é um *grupoide ordenado* se

(i) $x \leq y$ implica $x^{-1} \leq y^{-1}$, para todos $x, y \in \mathcal{G}$;

(ii) Para todos $x, y, u, v \in \mathcal{G}$, se $x \leq y$, $u \leq v$, $\exists xu$ e $\exists yv$, então $xu \leq yv$;

(iii) Seja $x \in \mathcal{G}$ e seja $e \in \mathcal{G}_0$ tal que $e \leq d(x)$. Então existe um único elemento $(x|e)$, chamado *restrição de x em e*, tal que $(x|e) \leq x$ e $d(x|e) = e$.

(iii') Seja $x \in \mathcal{G}$ e seja $e \in \mathcal{G}_0$ tal que $e \leq r(x)$. Então existe um único elemento $(e|x)$, chamado *correstrição de x em e*, tal que $(e|x) \leq x$ e $r(e|x) = e$.

Dizemos que um grupoide ordenado é

- *indutivo* se $(\mathcal{G}_0, \leq)$ é um semirreticulado inferior;

- *localmente indutivo* se $(\mathcal{G}_0, \leq)$ é uma união disjunta de semirreticulados inferiores;
- *completamente indutivo* se $(\mathcal{G}_0, \leq)$ é um semirreticulado inferior com elemento maximal;
- *completamente localmente indutivo* se $(\mathcal{G}_0, \leq)$ é uma união disjunta de semirreticulados inferiores onde cada semirreticulado possui elemento maximal.

Como todo grupoide $\mathcal{G}$ é uma categoria inversa e, em particular, um semigrupoide inverso, podemos considerar a ordem parcial natural $\preceq$ em $\mathcal{G}$. Note que

$$g \preceq h \iff \text{existe } f \in E(\mathcal{G}) \text{ tal que } \exists fh \text{ e } g = fh.$$

Mas como vale $xx^{-1} = r(x)$ e $x^{-1}x = d(x)$, para todo $x \in \mathcal{G}$, temos da Observação 1.1.3 que $E(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_0$. Portanto,

$$g \preceq h \iff g = h,$$

pois o idempotente f é uma identidade. Assim, a ordem parcial natural em grupoides se reduz à igualdade. Entretanto, é fácil notar que a igualdade satisfaz as condições (i), (ii), (iii) e (iii') da Definição 1.1.16. Logo, todo grupoide pode ser visto como um grupoide ordenado com a igualdade como ordem parcial.

A ordem parcial $\leq$ normalmente é uma ordem artificial, isto é, um mesmo grupoide $\mathcal{G}$ pode ser considerado grupoide ordenado de diversas formas, a depender da escolha da ordem parcial $\leq$.

Exemplo 1.1.17. Seja X um conjunto qualquer. Definimos o grupoide

$$\mathcal{I}_g(X) = \{f : A \to B : A, B \subseteq X, f \text{ é uma bijeção}\}.$$

A operação em $\mathcal{I}_g(X)$ é a composição definida quando os domínios e contradomínios são adequados, isto é, $\exists fg$ se, e somente se, $\mathrm{dom} f = \mathrm{Im} g$, e neste caso $fg = f \circ g$. Além disso, podemos definir uma ordem parcial em $\mathcal{I}_g(X)$ por $f \leq g$ se, e somente se, $\mathrm{dom}\, f \subset \mathrm{dom}\, g$ e $f = g|_{\mathrm{dom} f}$. Assim, é fácil verificar $(\mathcal{I}_g(X), \leq)$ é um grupoide ordenado.

Temos que $\mathcal{I}_g(X)_0$ é composto por elementos da forma Id_A, a identidade do conjunto $A \subseteq X$. Assim, $\leq$ restrita a $\mathcal{I}_g(X)_0$ é tal que $\mathrm{Id}_A \leq \mathrm{Id}_B$ se, e somente se, $A \subseteq B$. Claramente temos que dados dois conjuntos $A, B \subseteq X$, vale que $\mathrm{Id}_A \wedge \mathrm{Id}_B = \mathrm{Id}_{A \cap B}$, de forma que $(\mathcal{I}_g(X), \leq)$ é um grupoide indutivo.

Exemplo 1.1.18. Sejam $(\mathcal{G}, \leq_{\mathcal{G}})$ e $(\mathcal{H}, \leq_{\mathcal{H}})$ grupoides (completamente) indutivos. Então a união disjunta $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$ é um grupoide (completamente) localmente indutivo com ordem parcial $\leq$, onde $\leq|_{\mathcal{G}} = \leq_{\mathcal{G}}$ e $\leq|_{\mathcal{H}} = \leq_{\mathcal{H}}$ e nenhum elemento de $\mathcal{G}$ se compara com nenhum elemento de $\mathcal{H}$ via $\leq$.

Exemplo 1.1.19. Seja $\mathcal{G} = \{r(x), d(x), x, x^{-1}, r(z), z\}$ o grupoide com relações $z = z^{-1}$, $x \leq z$. Temos que $x^{-1} \leq z$ e $r(x), d(x) \leq r(z)$. Então $\mathcal{G}$ é um grupoide ordenado que não é indutivo, pois $r(x) \wedge d(x)$ não existe. Além disso, como não podemos decompor $\mathcal{G}_0$ como uma união disjunta de semirreticulados inferiores, $\mathcal{G}$ também não é localmente indutivo.

A próxima proposição lista propriedades operacionais de grupoides ordenados e sua demonstração é uma aplicação da definição de grupoides ordenados.

Proposição 1.1.20. *[16, Proposition 4.1.3] Seja $(\mathcal{G}, \leq)$ um grupoide ordenado. Valem:*

(a) *Se $x \leq y$, então $d(x) \leq d(y)$ e $r(x) \leq r(y)$.*

(b) *Se $\exists xy$ e $e \in \mathcal{G}_0$ são tais que $e \leq d(y) = d(xy)$, então*

$$(xy|e) = (x|r(y|e))(y|e).$$

(c) *Se $\exists xy$ e $e \in \mathcal{G}_0$ são tais que $e \leq r(x) = r(xy)$, então*

$$(e|xy) = (e|x)(d(e|x)|y).$$

(d) *Se $\exists xy$ e $z \leq xy$, então existem elementos x', y' tais que $\exists x'y'$, $x' \leq x$, $y' \leq y$ e $z = x'y'$.*

(e) *A condição (iii') da definição de grupoide ordenado é uma consequência de (i) e (iii).*

(f) *O conjunto $\mathcal{G}_0$ é um ideal de ordem de $\mathcal{G}$.*

Demonstração. (a): Note que $d(x) = x^{-1}x$ e $r(x) = xx^{-1}$, portanto o item segue diretamente da definição de grupoide ordenado.

(b): Como $e \leq d(xy) = d(y)$, a restrição $(y|e)$ está definida. Como $(y|e) \leq y$, temos que $r(y|e) \leq r(y) = d(x)$ e, portanto, a restrição $(x|r(y|e))$ está definida, bem como o produto $(x|r(y|e))(y|e)$. Agora, como $(x|r(y|e)) \leq x$ e $(y|e) \leq y$, segue que $(x|r(y|e))(y|e) \leq xy$. Entretanto,

$$d((x|r(y|e))(y|e)) = d(y|e) = e,$$

e podemos usar a unicidade das restrições para garantir o resultado.

(c): análogo a (b).

(d): Seja $z \leq xy$. Então $d(z) \leq d(xy)$ por (a). Portanto existe $(xy|d(z))$. Agora, $d(xy|d(z)) = d(z)$ e $(xy|d(z)) \leq xy$, de forma que $z = (xy|d(z))$. Por (b),

$$(xy|d(z)) = (x|r(y|d(z)))(y|d(z)).$$

Basta considerar, então, $x' = (x|r(y|d(z)))$ e $y' = (y|d(z))$.

(e): Suponha que valem (i) e (iii) da definição de grupoide ordenado. Vamos mostrar que vale (iii'). Seja $e \leq r(x)$. Então $e \leq d(x^{-1})$, de forma que a restrição $(x^{-1}|e)$ existe. Defina $(e|x) = (x^{-1}|e)^{-1}$. Então $(e|x) \leq x$ e $r(e|x) = d(x^{-1}|e) = e$. Isso prova a existência da correstrição.

Para a unicidade, suponha $y \leq x$ e $r(y) = e$. Então $y^{-1} \leq x^{-1}$ e $d(y^{-1}) = e$. Portanto, $y^{-1} = (x^{-1}|e)$ pela definição de restrição. Mas isso implica $y = (x^{-1}|e)^{-1} = (e|x)$.

(f): Seja $x \leq e$, onde $e \in \mathcal{G}_0$. Como $d(e) = e$, temos que $d(x) \leq e$. Mas $x, d(x) \leq e$ e $d(x) = d(d(x))$, de onde segue da unicidade das restrições que $x = d(x)$. $\square$

É bem conhecido o Teorema Ehresmann-Schein-Nambooripad (ESN), que mostra uma correspondência entre a categoria de semigrupos inversos e homomorfismos de semigrupos inversos e a categoria de grupoides indutivos e homomorfismos indutivos de grupoides ordenados [16, Theorem 4.1.8]. Em [9], são apresentados dois teoremas ESN: um envolvendo categorias inversas e grupoides completamente localmente indutivos e outro envolvendo semigrupoides inversos e grupoides localmente indutivos. Como toda categoria inversa é um semigrupoide inverso, reproduziremos os resultados apenas no caso de semigrupoides inversos. Na referência, os autores usam a notação de objetos e morfismos para categorias inversas, mas aqui usaremos a notação puramente algébrica que viemos trabalhando.

Proposição 1.1.21. *[9, Adaptado de Proposition 3.8] Seja $\mathcal{S}$ um semigrupoide inverso com operação parcial denotada por concatenação. Definimos uma nova operação $\cdot$ chamada* produto restrito*, dada por $\exists x \cdot y$ se, e somente se, $x^{-1}x = yy^{-1}$ e, neste caso*

$$x \cdot y = xy.$$

Nestas condições, $\mathbb{G}(\mathcal{S}) := (\mathcal{S}, \cdot, \preceq)$ é um grupoide localmente indutivo.

Demonstração. A operação $\cdot$ define naturalmente $d(x) = x^{-1}x$ e $r(x) = xx^{-1}$. Como $\mathcal{S}$ é associativo quando faz sentido e o produto restrito $\cdot$ depende do produto em $\mathcal{S}$, claramente vale a associatividade em $\mathbb{G}(\mathcal{S})$. Além disso, o inverso x^{-1} de x em $\mathcal{S}$ é precisamente o inverso de x em $\mathbb{G}(\mathcal{S})$. Assim, é fácil notar que $\mathbb{G}(\mathcal{S})$ é um grupoide com $\mathbb{G}(\mathcal{S})_0 = E(\mathcal{S})$. A ordem parcial natural $\preceq$ de $\mathcal{S}$ satisfaz as condições (i) e (ii) de grupoide ordenado, conforme visto na Proposição 1.1.5.

Dados $x \in \mathcal{S}$, $e, f \in E(\mathcal{S})$, com $e \preceq d(x)$, $f \preceq r(x)$, temos que $\exists xe$, $\exists fx$ em $\mathcal{S}$. Definimos a restrição $(x|e)$ como $(x|e) = xe$ e a correstrição $(f|x)$ como $(f|x) = fx$. Note que $xe \preceq x$ por definição e $d(xe) = ex^{-1}xe = e$, pois $e \preceq x^{-1}x$ implica que $x^{-1}xe = e$. A boa definição da correstrição segue de forma análoga. A unicidade das restrições e correstrições segue da Proposição 1.1.4, itens (iv) e (v). Agora, como $\mathbb{G}(\mathcal{S})_0 = E(\mathcal{S})$ e $E(\mathcal{S})$ é uma união disjunta de semirreticulados inferiores, vale que o grupoide é localmente indutivo. $\square$

Proposição 1.1.22. *[9, Adaptado de Corollary 3.15] Seja $(\mathcal{G}, \leq)$ um grupoide localmente indutivo. Defina parcialmente em $\mathcal{G}$ o pseudoproduto $\star$, dado por*

$$x \star y = (x|d(x) \wedge r(y))(d(x) \wedge r(y)|y),$$

quando $d(x) \wedge r(y)$ está definido. Então $\mathbb{S}(\mathcal{G}) := (\mathcal{G}, \star)$ é um semigrupoide inverso com ordem parcial natural $\leq$.

Demonstração. A associatividade (quando faz sentido) do pseudoproduto é provada de forma completamente análoga ao caso de semigrupos [16, Lemma 4.1.6]. Isto garante que $\mathbb{S}(\mathcal{G})$ é um semigrupoide. Tomando o inverso de x em $\mathbb{S}(\mathcal{G})$ como x^{-1} em $\mathcal{G}$ temos claramente que $\mathbb{S}(\mathcal{G})$ é um semigrupoide regular. É fácil ver que os idempotentes de $\mathbb{S}(\mathcal{G})$ comutam, provando que o semigrupoide é, de fato, inverso. Resta-nos provar que $\leq$ é a ordem parcial natural de $\mathbb{S}(\mathcal{G})$.

Sejam $x \preceq y$ em $\mathbb{S}(\mathcal{G})$. Então existe $e \in E(\mathbb{S}(\mathcal{G})) = \mathcal{G}_0$ tal que $\exists e \star y$ e $x = e \star y$. Como $\exists e \star y$, temos que $f = e \wedge r(y)$ está definido com respeito a $\leq$. Assim, $x = (e|f)(f|y)$. Agora, $(e|f) \leq f \leq r(y)$ e $(f|y) \leq y$, de onde segue que $x \leq r(y)y = y$.

Agora, se $x \leq y$, temos $r(x) \leq r(y)$. Assim, está definida a correstrição $(r(x)|y)$. Mas $x \leq y$ e $r(x) = r(x)$, então $(r(x)|y) = x$, pela unicidade da correstrição. Basta agora notar que

$$\begin{aligned} r(x) \star y &= (r(x)|r(x) \wedge r(y))(r(x) \wedge r(y)|y) = (r(x)|r(x))(r(x)|y) \\ &= r(x)(r(x)|y) = (r(x)|y) = x, \end{aligned}$$

isto é, $x \preceq y$. □

Teorema 1.1.23. *[9, Corollary 3.18] Seja $\mathcal{S}$ um semigrupoide inverso. Então $\mathbb{S}(\mathbb{G}(\mathcal{S})) \simeq \mathcal{S}$. Reciprocamente, se $(\mathcal{G}, \leq)$ é um grupoide localmente indutivo, então $\mathbb{G}(\mathbb{S}(\mathcal{G}, \leq)) \simeq (\mathcal{G}, \leq)$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{S}$ um semigrupoide inverso. Já sabemos, da Proposição 1.1.21 que $\mathbb{G}(\mathcal{S})$ é um grupoide localmente indutivo com ordem parcial $\preceq$. Pela Proposição 1.1.22, temos que $\mathbb{S}(\mathbb{G}(\mathcal{S}))$ é um semigrupoide inverso com ordem parcial natural coincidindo com $\preceq$. Resta-nos provar que o produto em $\mathcal{S}$ coincide com o pseudoproduto em $\mathbb{S}(\mathbb{G}(\mathcal{S}))$. Para isso, lembre que as restrições e correstrições em $\mathbb{G}(\mathcal{S})$ são tais que $(x|e) = xe$ e $(f|x) = fx$, a concatenação representando o produto em $\mathcal{S}$. Assim,

$$\begin{aligned} x \star y &= (x|d(x) \wedge r(y)) \cdot (d(x) \wedge r(y)|y) = (x(d(x) \wedge r(y))) \cdot ((d(x) \wedge r(y))y) \\ &= x(d(x) \wedge r(y))y = xx^{-1}xyy^{-1}y = xy, \end{aligned}$$

como gostaríamos.

Reciprocamente, seja $(\mathcal{G}, \leq)$ um grupoide localmente indutivo. Temos que $\mathbb{S}(\mathcal{G})$ é um semigrupoide inverso com o pseudoproduto $\star$ e ordem parcial natural $\leq$. Assim, definindo o produto restrito $\cdot$ em $\mathbb{S}(\mathcal{G}, \leq)$, obtemos o grupoide localmente indutivo $\mathbb{G}(\mathbb{S}(\mathcal{G}, \leq))$ e ordem parcial $\leq$. Claramente as ordens parciais coincidem. Precisamos mostrar que os produtos coincidem. Temos que, se $d(x) = r(y)$, então

$$x \cdot y = x \star y = (x|d(x) \wedge r(y))(d(x) \wedge r(y)|y) = (x|d(x))(r(y)|y) = xy,$$

concluindo a demonstração. □

Para obtermos uma correspondência entre as categorias de semigrupoides inversos e grupoides localmente indutivos, precisamos das noções de morfismos entre essas estruturas.

Definição 1.1.24. Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ semigrupoides (inversos) e $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ uma aplicação. Dizemos que φ é um *homomorfismo de semigrupoides (inversos)* se $\exists xy$ em $\mathcal{S}$ implicar que $\exists \varphi(x)\varphi(y)$ em $\mathcal{T}$ e, neste caso, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

Se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ forem categorias inversas, dizemos que φ é um *homomorfismo de categorias inversas* se for um homomorfismo de semigrupoides inversos e valer $\varphi(d(x)) = d(\varphi(x))$, $\varphi(r(x)) = r(\varphi(x))$, para todo $x \in \mathcal{S}$.

Proposição 1.1.25. *Seja $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ um homomorfismo de semigrupoides inversos.*

(i) $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$*, para todo $x \in \mathcal{S}$;*

(ii) $\varphi(E(\mathcal{S})) \subseteq E(\mathcal{T})$*;*

(iii) *A função φ preserva a ordem parcial natural.*

(iv) *A função φ preserva os ínfimos entre idempotentes.*

Demonstração. (i): Como

$$\varphi(x) = \varphi(xx^{-1}x) = \varphi(x)\varphi(x^{-1})\varphi(x)$$

e

$$\varphi(x^{-1}) = \varphi(x^{-1}xx^{-1}) = \varphi(x^{-1})\varphi(x)\varphi(x^{-1}),$$

o resultado segue da unicidade do inverso em $\mathcal{T}$.

(ii): Se $f \in E(\mathcal{S})$, então

$$\varphi(f)\varphi(f) = \varphi(ff) = \varphi(f).$$

(iii): Se $x \preceq y$ em $\mathcal{S}$, então existe $f \in E(\mathcal{S})$ tal que $\exists fy$ e $x = fy$. Assim,

$$\varphi(x) = \varphi(fy) = \varphi(f)\varphi(y).$$

Como $\varphi(f) \in E(\mathcal{T})$, segue que $\varphi(x) \preceq \varphi(y)$ em $\mathcal{T}$.
(iv): Já vimos que se $e, f \in E(\mathcal{S})$ possuem ínfimo, então $e \wedge f = ef$. Assim,

$$\varphi(e \wedge f) = \varphi(ef) = \varphi(e)\varphi(f) = \varphi(e) \wedge \varphi(f). \qquad \square$$

Definição 1.1.26. Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ grupoides. Uma aplicação $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ é um *homomorfismo de grupoides* se φ for um homomorfismo de semigrupoides inversos. Se $(\mathcal{G}, \leq_{\mathcal{G}})$ e $(\mathcal{H}, \leq_{\mathcal{H}})$ forem grupoides ordenados, então dizemos que φ é um *homomorfismo de grupoides ordenados* se φ preserva as ordens. Dizemos que um homomorfismo entre grupoides (completamente) (localmente) indutivos é *indutivo* se preserva ínfimos.

Note que o item (ii) da Proposição 1.1.25 garante que um homomorfismo de grupoides é automaticamente um homomorfismo de categorias inversas, pois as identidades são os únicos idempotentes.

Proposição 1.1.27. *[16, Proposition 4.1.2] Seja $\varphi : (\mathcal{G}, \leq_{\mathcal{G}}) \to (\mathcal{H}, \leq_{\mathcal{H}})$ um homomorfismo de grupoides ordenados.*

(i) *Se $(x|e)$ está definido em $\mathcal{G}$, então $(\varphi(x)|\varphi(e))$ está definido em $\mathcal{H}$ e $\varphi(x|e) = (\varphi(x)|\varphi(e))$.*

(ii) *Se $(e|x)$ está definido em $\mathcal{G}$, então $(\varphi(e)|\varphi(x))$ está definido em $\mathcal{H}$ e $\varphi(e|x) = (\varphi(e)|\varphi(x))$.*

Demonstração. (i): Por definição, $(x|e) \leq_{\mathcal{G}} x$, de forma que $\varphi(x|e) \leq_{\mathcal{H}} \varphi(x)$. Agora,

$$d(\varphi(x|e)) = \varphi(d(x|e)) = \varphi(e),$$

pois φ é funtor de categorias inversas. Pela unicidade das restrições segue o resultado.
O item (ii) é análogo e sua demonstração será omitida. $\square$

Corolário 1.1.28. *[9, Proposition 3.10] Sejam $(\mathcal{G}, \leq_{\mathcal{G}})$ e $(\mathcal{H}, \leq_{\mathcal{H}})$ grupoides localmente indutivos, $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ um homomorfismo indutivo de grupoides ordenados. Então φ preserva pseudoprodutos. Isto é, se $\exists x \star y$ em $\mathbb{S}(\mathcal{G})$, então $\exists \varphi(x) \star \varphi(y)$ em $\mathbb{S}(\mathcal{H})$ e $\varphi(x \star y) = \varphi(x) \star \varphi(y)$.*

Demonstração. Note que se $\exists x \star y$, então o ínfimo $x^{-1}x \wedge yy^{-1}$ está definido. Isto é o mesmo que dizer que o ínfimo $\varphi(x^{-1}x) \wedge \varphi(yy^{-1})$ está definido, pois φ é indutivo. Agora,

$\varphi(x^{-1}x) = \varphi(x)^{-1}\varphi(x)$ e $\varphi(yy^{-1}) = \varphi(y)\varphi(y)^{-1}$ pela Proposição 1.1.25, o que implica que $\exists\varphi(x) \star \varphi(y)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) \star \varphi(y) &= (\varphi(x)|\varphi(x)^{-1}\varphi(x) \wedge \varphi(y)\varphi(y)^{-1})(\varphi(x)^{-1}\varphi(x) \wedge \varphi(y)\varphi(y)^{-1}|\varphi(y)) \\
&= (\varphi(x)|\varphi(x^{-1}x) \wedge \varphi(yy^{-1}))(\varphi(x^{-1}x) \wedge \varphi(yy^{-1})|\varphi(y)) \\
&= (\varphi(x)|\varphi(x^{-1}x \wedge yy^{-1}))(\varphi(x^{-1}x \wedge yy^{-1})|\varphi(y)) \\
&\overset{(*)}{=} \varphi(x|x^{-1}x \wedge yy^{-1})\varphi(x^{-1}x \wedge yy^{-1}|y) \\
&= \varphi((x|x^{-1}x \wedge yy^{-1})(x^{-1}x \wedge yy^{-1}|y)) = \varphi(x \star y),
\end{aligned}$$

onde a igualdade $(*)$ segue da Proposição 1.1.27. □

Proposição 1.1.29. *[9, Propositions 3.11 and 3.14] Seja $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ um homomorfismo de semigrupoides inversos. Então $\mathbb{G}(\varphi) : \mathbb{G}(\mathcal{S}) \to \mathbb{G}(\mathcal{T})$, definido por $\mathbb{G}(\varphi)(x) = \varphi(x)$, para todo $x \in \mathcal{S}$ é um homomorfismo indutivo de grupoides ordenados.*

Reciprocamente, se $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ é um homomorfismo indutivo de grupoides ordenados, então $\mathbb{S}(\psi) : \mathbb{S}(\mathcal{G}) \to \mathbb{S}(\mathcal{H})$ definido por $\mathbb{S}(\psi)(x) = \psi(x)$, para todo $x \in \mathcal{G}$, é um homomorfismo de semigrupoides inversos.

Demonstração. Isso é exatamente o que dizem a Proposição 1.1.25 e o Corolário 1.1.28. □

Unindo o Teorema 1.1.23 e a Proposição 1.1.29, obtemos o Teorema ESN para o caso de semigrupoides inversos.

Teorema 1.1.30 (Ehresmann-Schein-Nambooripad para Semigrupoides Inversos)**.** *[9, Corollary 3.18] A categoria de semigrupoides inversos e homomorfismos de semigrupoides inversos é equivalente à categoria de grupoides localmente indutivos e homomorfismos indutivos de grupoides ordenados.*

Como consequência do teorema acima, obtemos o seguinte corolário. Mais detalhes podem ser encontrados em [9] e [16].

Corolário 1.1.31. *As seguinte afirmações são verdadeiras:*

(i) *[9, Theorem 3.16] A categoria de categorias inversas e homomorfismos de categorias inversas é equivalente à categoria de grupoides completamente localmente indutivos e homomorfismos indutivos de grupoides ordenados.*

(ii) *[16, Theorem 4.1.8] A categoria de semigrupos inversos e homomorfismos de semigrupos inversos é equivalente à categoria de grupoides indutivos e homomorfismos indutivos de grupoides ordenados.*

(iii) *A categoria de monoides inversos e homomorfismos de monoides inversos é equivalente à categoria de grupoides completamente indutivos e homomorfismos indutivos de grupoides ordenados.*

1.2 Ações Parciais de Grupoide

As definições de ação parcial de grupoide e ação (global) de semigrupoide inverso generalizam, respectivamente, as definições de ação parcial de grupo e de ação de semigrupo inverso apresentadas em [11]. Nosso objetivo nessa seção é apresentar as principais propriedades dessas ações e construir os produtos cruzados algébricos de grupoides, grupoides ordenados e semigrupoides inversos. A principal referência para esta seção é [4].

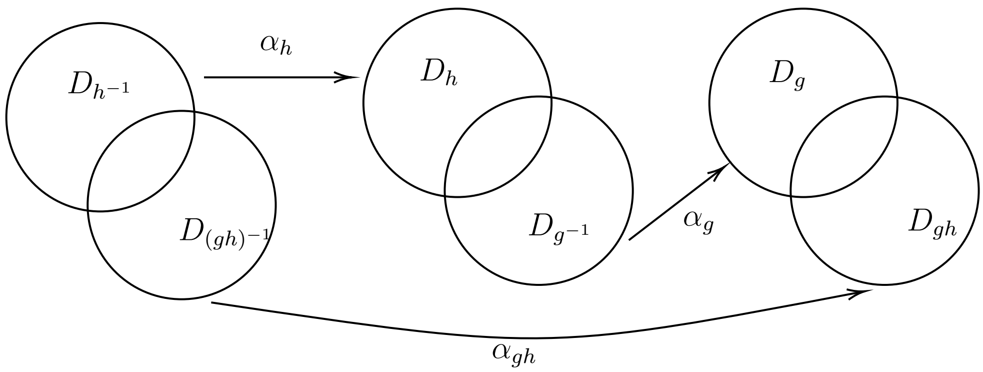
Definição 1.2.1. Uma ação parcial α de um grupoide $\mathcal{G}$ em um conjunto X é um par $\alpha = (\{D_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g\}_{g\in\mathcal{G}})$, onde, para todo $g \in \mathcal{G}$, $D_{r(g)}$ é um subconjunto de X, D_g é um subconjunto de $D_{r(g)}$ e α_g é uma bijeção. Além disso, é preciso que sejam satisfeitas as condições

(i) α_e é a aplicação identidade de D_e, para todo $e \in \mathcal{G}_0$;

(ii) $\alpha_h^{-1}(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subset D_{(gh)^{-1}}$, para todo $(g,h) \in \mathcal{G}_2$;

(iii) $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$, para todo $x \in \alpha_h^{-1}(D_{g^{-1}} \cap D_h)$, para todo $(g,h) \in \mathcal{G}_2$.

O diagrama abaixo pode ajudar a leitora ou o leitor a compreender a motivação por trás da definição de ação parcial de grupoide.



Dizemos que a ação α é *global* se $D_g = D_{r(g)}$, para todo $g \in \mathcal{G}$.

Exemplo 1.2.2. Considere o conjunto $X = \{1,2,3,4\}$ e o grupoide $\mathcal{G} = \{g, g^{-1}, r(g), d(g)\}$. Definindo

$$D_{d(g)} = \{1,2\},\ D_{r(g)} = \{3,4\},\ D_g = \{3\},\ D_{g^{-1}} = \{1\}$$

e

$$\alpha_{d(g)} = Id_{D_{d(g)}},\ \alpha_{r(g)} = Id_{D_{r(g)}},\ \alpha_g(1) = 3,\ \alpha_{g^{-1}}(3) = 1,$$

obtemos que $\alpha = (\{D_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\alpha_g\}_{g\in\mathcal{G}})$ é uma ação parcial de $\mathcal{G}$ em X.

Proposição 1.2.3. *[4, Lemma 1.1] Seja $\alpha = (\{D_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\alpha_g\}_{g\in\mathcal{G}})$ uma ação parcial de um grupoide $\mathcal{G}$ num conjunto X. Então valem*

(i) $\alpha_g^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$, *para todo* $g \in \mathcal{G}$.

(ii) $\alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}}) = D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$, *para todo* $(g,h) \in \mathcal{G}_2$.

Demonstração. (i): Faça $h = g^{-1}$ em (iii) da Definição 1.2.1 e tome $x \in \alpha_g^{-1}(D_{g^{-1}}) = D_g$. Então

$$\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x)) = \alpha_{gg^{-1}}(x) = \alpha_{r(g)}(x) = Id_{D_{r(g)}}(x) = x,$$

para todo $x \in D_g$. Assim, $\alpha_g \circ \alpha_{g^{-1}} = Id_{D_g}$. Analogamente provamos que $\alpha_{g^{-1}} \circ \alpha_g = Id_{D_{g^{-1}}}$, provando que $\alpha_{g^{-1}} = \alpha_g^{-1}$.

(ii): Usando que Im$\alpha_{h^{-1}} = D_{h^{-1}}$ e (ii) da Definição 1.2.1, temos que $\alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$.

Reciprocamente, seja $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$. Como $x \in D_{h^{-1}}$, existe $y \in D_h$ tal que $x = \alpha_{h^{-1}}(y)$. Precisamos mostrar que $y \in D_{g^{-1}}$. Note que $y = \alpha_h(x) \in \alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}})$. Mas fazendo $h = h^{-1}$ e $g = gh$ em (ii) da Definição 1.2.1, obtemos

$$\alpha_h(D_{(gh)^{-1}} \cap D_{h^{-1}}) \subseteq D_{(ghh^{-1})^{-1}} = D_{g^{-1}},$$

exatamente como gostaríamos. $\square$

Apresentamos uma definição equivalente de ação parcial que será útil em demonstrações futuras.

Proposição 1.2.4. *As condições (i)-(iii) da Definição 1.2.1 são equivalentes às condições*

(a) α_e *é a aplicação identidade de* D_e, *para todo* $e \in \mathcal{G}_0$*;*

(b) $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$, *para todo* $(g,h) \in \mathcal{G}_2$*;*

(c) $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$, *para todo* $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$, *para todo* $(g,h) \in \mathcal{G}_2$.

Demonstração. É imediato que (a) $\iff$ (i). Vamos chamar a igualdade (ii) da Proposição 1.2.3 de $(*)$. Claramente quando vale $(*)$, temos que (iii) $\iff$ (c). No que segue, provaremos que (ii) e (iii) implicam $(*)$, já que $(*) \Rightarrow$ (ii) é imediato.

Notaremos primeiramente que sempre vale $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{h^{-1}}$ para $(g,h) \in \mathcal{G}_2$. Por (ii),

$$D_{(gh)^{-1}} \supseteq \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}).$$

Portanto, $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$.

Para a inclusão reversa, aplicamos α_h de ambos os lados. Assim, obtemos

$$D_h \cap D_{g^{-1}} \subseteq \alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}).$$

Trocando h por h^{-1} e g por gh, obtemos $D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}} \subseteq \alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}})$.

Agora mostraremos que (i), (ii) e (iii) implicam (a), (b) e (c). Nestas condições, sabemos que vale $(*)$, portanto vale (c). Resta-nos apenas mostrar que (b) é satisfeita. Mas para isto basta trocar h por g^{-1} e g por h^{-1} em $(*)$, de forma que

$$\alpha_{g^{-1}}(D_{g^{-1}} \cap D_h) = \alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}.$$

Reciprocamente, verifiquemos que (a), (b) e (c) implicam (i), (ii) e (iii). Em (b), substituímos g por h e h por $(gh)^{-1}$. É imediato que obtemos $(*)$. Logo, valendo $(*)$ e (c), seguem (ii) e (iii). $\square$

Seja X um conjunto qualquer. Defina

$$\mathcal{I}_g(X) = \{\varphi : A \to B : A, B \subseteq X \text{ e } \varphi \text{ é uma bijeção}\}.$$

Temos que $\mathcal{I}_g(X)$ é um grupoide com operação parcial composição onde $\exists \varphi \circ \psi$ se, e somente se, $\mathrm{Im}\psi = \mathrm{dom}\varphi$. Além disso, $\mathcal{I}_g(X)$ é um grupoide indutivo com ordem parcial dada por $\varphi \leq \psi$ se, e somente se, $\mathrm{dom}\,\varphi \subset \mathrm{dom}\,\psi$ e $\varphi = \psi|_{\mathrm{dom}\varphi}$, conforme visto no Exemplo 1.1.17.

Lembramos que denotaremos por R um anel comutativo com unidade. Caso o conjunto X seja identificado como uma estrutura algébrica é natural que consideremos na Definição 1.2.1 as bijeções α_g como isomorfismos entre as subestruturas D_g. Por exemplo, se $X = A$ é uma R-álgebra onde um grupoide $\mathcal{G}$ age parcialmente através de α, cada D_g será um ideal de A e cada α_g será um isomorfismo entre os ideais D_g e $D_{g^{-1}}$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Neste caso $\mathcal{I}_g(A)$ será composto de isomorfismos entre ideais de A.

Definição 1.2.5. Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ grupoides. Uma aplicação $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ é um *homomorfismo parcial* se, para todo $(x, y) \in \mathcal{G}_2$, vale que $(\varphi(x), \varphi(y)) \in \mathcal{H}_2$,

$$\varphi(x^{-1})\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x^{-1})\varphi(xy)$$

e

$$\varphi(x)\varphi(y)\varphi(y^{-1}) = \varphi(xy)\varphi(y^{-1}).$$

O próximo lema caracteriza ações parciais de um grupoide $\mathcal{G}$ em um conjunto X em termos de homomorfismos parciais de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{I}_g(X)$.

Lema 1.2.6. *Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide e X um conjunto não vazio. Seja ainda $\alpha : \mathcal{G} \to \mathcal{I}_g(X)$ uma aplicação onde denotamos $\alpha(x) = \alpha_x$. Então α é uma ação parcial de grupoide de $\mathcal{G}$ em X se, e somente se,*

(i) $\alpha_x \circ \alpha_y \circ \alpha_{y^{-1}} = \alpha_{xy} \circ \alpha_{y^{-1}}$, *para todo* $(x, y) \in \mathcal{G}_2$*;*

(ii) $\alpha_e = Id_{\text{dom}(\alpha_e)}$, *para todo* $e \in \mathcal{G}_0$.

Neste caso, também vale

(iii) $\alpha_{x^{-1}} \circ \alpha_x \circ \alpha_y = \alpha_{x^{-1}} \circ \alpha_{xy}$, *para todo* $(x, y) \in \mathcal{G}_2$.

Demonstração. Vamos provar que (a), (b), (c) da Proposição 1.2.4 valem se, e somente se, (i), (ii), (iii) valem.

($\Rightarrow$) : Suponha que $\alpha = (\{D_x\}_{x\in\mathcal{G}}, \{\alpha_x\}_{x\in\mathcal{G}})$ é uma ação parcial de grupoide. Como (a) $\Leftrightarrow$ (ii), só nos falta mostrar (i). Temos que, dados $(x, y) \in \mathcal{G}_2$,

$$\text{dom}(\alpha_x \circ \alpha_y \circ \alpha_{y^{-1}}) = \text{dom}(\alpha_x \circ Id_{D_y}) = \text{dom}(\alpha_x) \cap D_y = D_y \cap D_{x^{-1}}$$

e

$$\text{dom}(\alpha_{xy} \circ \alpha_{y^{-1}}) = \alpha_y(D_{y^{-1}} \cap D_{(xy)^{-1}}).$$

Tomando $x = y$ e $y = (xy)^{-1}$ em (b) obtemos

$$\alpha_y(D_{y^{-1}} \cap D_{(xy)^{-1}}) = D_y \cap D_{x^{-1}},$$

de onde segue que

$$\text{dom}(\alpha_x \circ \alpha_y \circ \alpha_{y^{-1}}) = \text{dom}(\alpha_{xy} \circ \alpha_{y^{-1}}).$$

Similarmente,

$$\text{Im}(\alpha_x \circ \alpha_y \circ \alpha_{y^{-1}}) = \alpha_x(D_y \cap D_{x^{-1}})$$

e

$$\text{Im}(\alpha_{xy} \circ \alpha_{y^{-1}}) = \alpha_{xy}(D_{y^{-1}} \cap D_{(xy)^{-1}}) = D_{xy} \cap D_x,$$

onde a última igualdade segue de (b). Além disso, ainda de (b) obtemos

$$\alpha_x(D_y \cap D_{x^{-1}}) = D_x \cap D_{xy}.$$

Portanto,

$$\text{Im}(\alpha_x \circ \alpha_y \circ \alpha_{y^{-1}}) = \text{Im}(\alpha_{xy} \circ \alpha_{y^{-1}}).$$

Finalmente, considere $a \in D_y \cap D_{x^{-1}} = \text{dom}(\alpha_x \circ \alpha_y \circ \alpha_{y^{-1}})$. Como $a \in D_y \cap D_{x^{-1}}$, temos que $\alpha_{x^{-1}}(a) = b \in \alpha_{y^{-1}}(D_y \cap D_{x^{-1}}) = D_{y^{-1}} \cap D_{(xy)^{-1}}$. Logo,

$$\alpha_x(\alpha_y(\alpha_{y^{-1}}(a))) = \alpha_x(\alpha_y(b)) = \alpha_{xy}(b) = \alpha_{xy}(\alpha_{y^{-1}}(a)),$$

que é exatamente o que gostaríamos de demonstrar.

($\Leftarrow$) : Como $(y, y^{-1}), (y^{-1}, y) \in \mathcal{G}_2$ para todo $y \in \mathcal{G}$, temos que

$$\alpha_y \circ \alpha_{y^{-1}} \circ \alpha_y = \alpha_{yy^{-1}} \circ \alpha_y = \alpha_{r(y)} \circ \alpha_y = Id_{\text{dom}(\alpha_{r(y)})} \circ \alpha_y = \alpha_y.$$

Similarmente vemos que

$$\alpha_{y^{-1}} \circ \alpha_y \circ \alpha_{y^{-1}} = \alpha_{y^{-1}}.$$

A unicidade de elementos inversos em grupoides nos garante que $\alpha_y^{-1} = \alpha_{y^{-1}}$ em $\mathcal{I}_g(X)$. Defina $D_y = \mathrm{Im}(\alpha_y)$. Então

$$\mathrm{dom}(\alpha_y) = \mathrm{Im}(\alpha_y^{-1}) = \mathrm{Im}(\alpha_{y^{-1}}) = D_{y^{-1}}.$$

Portanto, $\alpha_y : D_{y^{-1}} \to D_y$, exatamente como queremos. Note que dado $x \in \mathcal{G}$ temos que $D_x \subseteq D_{r(x)}$. De fato,

$$\alpha_{r(x)} \circ \alpha_x \circ \alpha_{x^{-1}} = \alpha_{r(x)x} \circ \alpha_{x^{-1}} = \alpha_x \circ \alpha_{x^{-1}} = Id_{D_x},$$

de onde

$$D_{r(x)} \cap D_x = \mathrm{dom}(\alpha_{r(x)} \circ \alpha_x \circ \alpha_{x^{-1}}) = \mathrm{dom}(Id_{D_x}) = D_x.$$

Para todo $(x, y) \in \mathcal{G}_2$ temos, por (i) e (ii), que

$$\alpha_{y^{-1}} \circ \alpha_{x^{-1}} = \alpha_{y^{-1}} \circ \alpha_{x^{-1}} \circ \alpha_{r(x)} = \alpha_{y^{-1}} \circ \alpha_{x^{-1}} \circ \alpha_{xx^{-1}} = \alpha_{y^{-1}} \circ \alpha_{x^{-1}} \circ \alpha_x \circ \alpha_{x^{-1}} = \alpha_{y^{-1}x^{-1}} \circ \alpha_x \circ \alpha_{x^{-1}}.$$

Em particular, os domínios e imagens dessas bijeções são os mesmos. Desta forma,

$$\mathrm{dom}(\alpha_{y^{-1}} \circ \alpha_{x^{-1}}) = \alpha_x(D_{x^{-1}} \cap D_y).$$

De fato, dado $a \in \mathrm{dom}(\alpha_{y^{-1}} \circ \alpha_{x^{-1}})$ obtemos

$$a \in \mathrm{dom}(\alpha_{x^{-1}}) = D_x \text{ e } \alpha_{x^{-1}}(a) \in \mathrm{dom}(\alpha_{y^{-1}}) = D_y.$$

Mas $a \in D_x$ implica $\alpha_{x^{-1}}(a) \in \alpha_{x^{-1}}(D_x) = D_{x^{-1}}$. Assim, $\alpha_{x^{-1}}(a) \in D_y \cap D_{x^{-1}}$, de onde $a \in \alpha_x(D_{x^{-1}} \cap D_y)$. Logo, $\mathrm{dom}(\alpha_{y^{-1}} \circ \alpha_{x^{-1}}) \subseteq \alpha_x(D_{x^{-1}} \cap D_y)$.

Para a inclusão reversa, tome $a \in \alpha_x(D_{x^{-1}} \cap D_y)$. Precisamos mostrar que $a \in \mathrm{dom}(\alpha_{y^{-1}} \circ \alpha_{x^{-1}})$, isto é, que $a \in \mathrm{dom}(\alpha_{x^{-1}}) = D_x$ e que $\alpha_{x^{-1}}(a) \in \mathrm{dom}(\alpha_{y^{-1}}) = D_y$.

Note que $D_{x^{-1}} \cap D_y \subseteq D_{x^{-1}}$, de onde $\alpha_x(D_{x^{-1}} \cap D_y) \subseteq \alpha_x(D_{x^{-1}}) = D_x$. Assim, $a \in D_x = \mathrm{dom}(\alpha_{x^{-1}})$ e $\alpha_{x^{-1}}(a)$ está bem definido. Como $a \in \alpha_x(D_{x^{-1}} \cap D_y)$ temos

$$\alpha_{x^{-1}}(a) \in \alpha_{x^{-1}}(\alpha_x(D_{x^{-1}} \cap D_y)) = D_{x^{-1}} \cap D_y \subseteq D_y = \mathrm{dom}(\alpha_{y^{-1}}),$$

que é exatamente o que gostaríamos de demonstrar.

Por outro lado,

$$\mathrm{dom}(\alpha_{y^{-1}x^{-1}} \circ \alpha_x \circ \alpha_{x^{-1}}) = \mathrm{dom}(\alpha_{y^{-1}x^{-1}} \circ Id_{D_x}) = \mathrm{dom}(\alpha_{y^{-1}x^{-1}}) \cap D_x = D_{xy} \cap D_x,$$

de onde segue que

$$\alpha_x(D_{x^{-1}} \cap D_y) = D_{xy} \cap D_x,$$

que é precisamente (b).

Considere $a \in D_{y^{-1}} \cap D_{y^{-1}x^{-1}}$. Como $a \in D_{y^{-1}}$, existe $b \in D_y$ tal que $\alpha_{y^{-1}}(b) = a$. Desta forma,

$$\alpha_x(\alpha_y(a)) = \alpha_x(\alpha_y(\alpha_{y^{-1}}(b))) = \alpha_{xy}(\alpha y^{-1}(b)) = \alpha_{xy}(a).$$

Como a é arbitrário, concluímos que

$$\alpha_x(\alpha_y(a)) = \alpha_{xy}(a), \forall a \in D_{y^{-1}} \cap D_{y^{-1}x^{-1}},$$

que é (c). Portanto $\alpha = (\{D_x\}_{x\in\mathcal{G}}, \{\alpha_x\}_{x\in\mathcal{G}})$ é uma ação parcial de grupoide. Além disso, dados $(x, y) \in \mathcal{G}_2$, temos

$$\alpha_{x^{-1}} \circ \alpha_x \circ \alpha_y = (\alpha_{y^{-1}} \circ \alpha_{x^{-1}} \circ \alpha_x)^{-1} = (\alpha_{y^{-1}x^{-1}} \circ \alpha_x)^{-1} = (\alpha_{(xy)^{-1}} \circ \alpha_x)^{-1} = \alpha_{x^{-1}} \circ \alpha_{xy}.$$

□

Se $\mathcal{G}$ é um grupoide ordenado, dizemos que uma ação parcial α é uma *ação parcial ordenada* se

(iv) $g \leq h$ implica $D_g \subseteq D_h$ e $\alpha_g = \alpha_h|_{D_{g^{-1}}}$, para $g, h \in \mathcal{G}$.

Exemplo 1.2.7. Seja $\mathcal{G}$ como no Exemplo 1.1.19, isto é, $\mathcal{G} = \{r(x), d(x), x, x^{-1}, r(z), z\}$ com relações $z = z^{-1}$, $x \leq z$. Considere um anel comutativo R com unidade 1_R e $A = \bigoplus_{i=1}^{5} Re_i$, onde os e_i's são idempotentes ortogonais dois a dois cuja soma é 1_A.

Quando queremos definir uma ação de um grupoide em uma álgebra, é normal considerar os subconjuntos como ideais e as bijeções como isomorfismos entre R-álgebras. Desta forma, a ação nos dará muito mais informações sobre a estrutura de A.

Defina

$$D_{r(z)} = A, \quad D_z = \bigoplus_{i=1}^{4} Re_i, \quad D_{r(x)} = Re_3 \oplus Re_4, \quad D_{d(x)} = Re_1 \oplus Re_2,$$
$$D_x = Re_3, \quad D_{x^{-1}} = Re_1,$$

$$\alpha_z(ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4) = ce_1 + de_2 + ae_3 + de_4,$$
$$\alpha_x(ae_1) = \alpha_z|_{D_{x^{-1}}}(ae_1) = ae_3,$$
$$\alpha_{x^{-1}}(ae_3) = \alpha_z|_{D_x}(ae_3) = ae_1,$$

e $\alpha_e = \mathrm{Id}_{D_e}$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$.

É fácil verificar que $\alpha = (\{D_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\alpha_g\}_{g\in\mathcal{G}})$ satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) da Definição 1.2.1, bem como a condição (iv), isto é, que α é uma ação parcial de grupoide ordenado de $\mathcal{G}$ em A.

Exemplo 1.2.8. Seja $\mathcal{G}$ como no Exemplo 1.1.19, isto é, $\mathcal{G} = \{r(x), d(x), x, x^{-1}, r(z), z\}$ com relações $z = z^{-1}$, $x \leq z$.

Considere um anel comutativo R com unidade 1_R e considere $A = \bigoplus_{i=1}^{4} Re_i$, onde os e_i's são idempotentes ortogonais cuja soma é 1_A. Defina

$$E_z = E_{r(z)} = A, \quad E_x = E_{r(x)} = Re_1 \oplus Re_3$$

e $\beta_z : E_z \to E_z$ tal que

$$\beta_z(ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4) = be_1 + ae_2 + de_3 + ce_4,\ a, b, c, d \in R.$$

Com estas definições, já temos uma ação (global) ordenada $\beta = (\{E_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\beta_g\}_{g\in\mathcal{G}})$ de $\mathcal{G}$ em A. De fato, como $x, x^{-1} \leq z$, temos que $E_x, E_{x^{-1}} \subseteq E_z$ e $\beta_x = \beta_z|_{E_{x^{-1}}}$, $\beta_{x^{-1}} = \beta_z|_{E_x}$, de onde segue que $E_{x^{-1}} = Re_2 \oplus Re_4$, $\beta_x(ae_1+be_3) = ae_2+be_4$ e $\beta_{x^{-1}}(ae_2+be_4) = ae_1+be_3$. Além disso, o isomorfismo β_e com $e \in \mathcal{G}_0$ é precisamente a aplicação identidade de E_e. Então $\beta = (\{E_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\beta_g\}_{g\in\mathcal{G}})$ é uma ação *global* ordenada de $\mathcal{G}$ em A.

Exemplo 1.2.9. Seja $\mathcal{G} = \{x, x^{-1}, d(x), r(x), y, r(y)\}$ grupoide indutivo com relações $y = y^{-1}$, $y \leq x$. Similarmente aos exemplos acima, considere R um anel comutativo com identidade 1_R e $A = \bigoplus_{i=1}^{6} Re_i$, onde os e_i's são idempotentes ortogonais dois a dois cuja soma é 1_A. Definindo

$$D_{r(y)} = Re_5 \oplus Re_6 = D_y, \quad D_{r(x)} = Re_3 \oplus Re_4, \quad D_{d(x)} = Re_1 \oplus Re_2,$$
$$D_x = Re_3, \quad D_{x^{-1}} = Re_1$$

e

$$\alpha_y(ae_5 + be_6) = be_5 + ae_6,$$
$$\alpha_x(ae_1) = ae_3,$$
$$\alpha_{x^{-1}}(ae_3) = ae_1,$$
$$\alpha_{r(x)} = \mathrm{Id}_{D_{r(x)}}, \alpha_{d(x)} = \mathrm{Id}_{D_{d(x)}}, \alpha_{r(y)} = \mathrm{Id}_{D_{r(y)}},$$

temos que $\alpha = (\{D_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\alpha_g\}_{g\in\mathcal{G}})$ é uma ação parcial de grupoide de $\mathcal{G}$ em A que não é ordenada.

Definição 1.2.10. Uma ação parcial indutiva de um grupoide ordenado $\mathcal{G}$ em um conjunto X é um homomorfismo parcial de grupoides ordenados $\alpha : \mathcal{G} \to \mathcal{I}_g(X)$ que preserva ínfimos. Isto é, uma ação parcial ordenada de grupoide $\alpha = (\{D_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\alpha_g\}_{g\in\mathcal{G}})$ tal que $D_{e\wedge f} = D_e \cap D_f$, para todos $e, f \in \mathcal{G}_0$ tal que o ínfimo $e \wedge f$ está definido.

Definição 1.2.11. [3, Section 3] Sejam A uma R-álgebra, $\mathcal{G}$ um grupoide e

$$\alpha = (\{D_x\}_{x\in\mathcal{G}}, \{\alpha_x\}_{x\in\mathcal{G}})$$

uma ação parcial de $\mathcal{G}$ em A. É natural que consideremos $D_x \lhd D_{r(x)} \lhd A$ e $\alpha_x : D_{x^{-1}} \to D_x$ um isomorfismo de R-álgebras, para todo $x \in \mathcal{G}$, como nos exemplos acima. Definimos o produto cruzado algébrico $A \ltimes^a_\alpha \mathcal{G}$ por

$$A \ltimes^a_\alpha \mathcal{G} = \left\{ \sum_{x\in\mathcal{G}}^{\text{finita}} a_x\delta_x : a_x \in D_x \right\} = \bigoplus_{x\in\mathcal{G}} D_x\delta_x$$

onde os δ_x são símbolos que representam a posição do elemento a_x na soma. A adição é a usual e o produto é dado por

$$(a_g\delta_g)(b_h\delta_h) = \begin{cases} \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}, \text{ se } (g,h) \in \mathcal{G}_2, \\ 0, \text{caso contrário,} \end{cases}$$

estendido linearmente.

O próximo resultado nos dá uma condição para o produto cruzado algébrico ser associativo.

Proposição 1.2.12. *Sejam A uma R-álgebra, $\mathcal{G}$ um grupoide e $\alpha = (\{D_x\}_{x\in\mathcal{G}}, \{\alpha_x\}_{x\in\mathcal{G}})$ uma ação parcial de $\mathcal{G}$ em A. Se A é semiprima, então o produto cruzado algébrico $A \ltimes_\alpha^a \mathcal{G}$ é associativo.*

A prova pode ser encontrada em [3, Proposition 3.1], notando que todo grupoide pode ser visto como um grupoide ordenado considerando a igualdade como ordem parcial.

Sejam $\mathcal{S}$ um semigrupoide inverso e X um conjunto. Dizemos que $\beta = (\{E_s\}_{s\in\mathcal{S}}, \{\beta_s : E_{s^{-1}} \to E_s\}_{s\in\mathcal{S}})$ é uma *ação de $\mathcal{S}$ em X* se $E_s \subseteq X$, β_s é uma bijeção, para todo $s \in \mathcal{S}$, e $\beta_s(\beta_t(x)) = \beta_{st}(x)$, para todos $(s,t) \in \mathcal{S}_2$ e $x \in E_{(st)^{-1}}$.

Seja X um conjunto. Denote por $\mathcal{I}_s(X)$ o semigrupo inverso

$$\mathcal{I}_s(X) = \{\varphi : B \to C : B, C \subseteq X \text{ e } \varphi \text{ é uma bijeção}\}.$$

A operação em $\mathcal{I}_s(X)$ é a composição entre aplicações. É fácil ver que uma ação de um semigrupoide inverso $\mathcal{S}$ em X é precisamente um homomorfismo de semigrupoides inversos $\beta : \mathcal{S} \to \mathcal{I}_s(X)$, onde $\beta_s = \beta(s)$. Além disso, claramente $\mathcal{I}_s(X) = \mathbb{S}(\mathcal{I}_g(X))$.

Proposição 1.2.13. *Sejam β uma ação de $\mathcal{S}$ em X, $(s,t) \in \mathcal{S}_2$, $(e,f) \in E(\mathcal{S})_2$. Então:*

(i) $\beta_{s^{-1}} = \beta_s^{-1}$.

(ii) $\beta_e = Id_{E_e}$.

(iii) $\beta_s(E_t \cap E_{s^{-1}}) = E_{st}$.

(iv) $E_{st} \subseteq E_s$ *e* $E_s = E_{ss^{-1}}$.

(v) $E_{ef} = E_e \cap E_f$.

Demonstração. (i): A demonstração é análoga ao caso de ação parcial de grupoides.

(ii): Note que β_e é um isomorfismo de E_e em E_e cujo quadrado coincide com ele próprio. Isso só pode ocorrer se β_e for uma identidade e, portanto, $\beta_e = \mathrm{Id}_{E_e}$.

(iii): Basta notar que

$$\beta_s(E_t \cap E_{s^{-1}}) = \mathrm{dom}(\beta_s \circ \beta_t) = \mathrm{dom}(\beta_{st}) = E_{st}.$$

(iv): A primeira afirmação segue do item (iii), pois $\beta_s(E_t \cap E_{s^{-1}}) \subseteq E_s$. Desta forma, $E_s = E_{(ss^{-1})s} \subseteq E_{ss^{-1}} \subseteq E_s$

(v): Como $\beta : X \to \mathcal{I}_s(X)$ é um homomorfismo de semigrupoides inversos, temos que β preserva ínfimos. Disto segue que o ínfimo $Id_{E_e} \wedge Id_{E_f} = Id_{E_e \cap E_f}$. Assim, $\beta(ef) = \beta(e \wedge f) = \mathrm{Id}_{E_e \cap E_f}$. $\square$

Exemplo 1.2.14. Seja $\mathcal{S} = \{x, y, z, a, b, s, s^{-1}, t, t^{-1}\}$ com $E(\mathcal{S}) = \{x, y, z, a, b\}$ representado no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, dash] & y \arrow[r, "s"] \arrow[dr, dash] & z \arrow[d, dash] \\ a \arrow[rr, "t"] & & b \end{tikzcd}$$

A tabela de operação de $\mathcal{S}$ é dada por

$\cdot$	a	b	x	y	z	s	s^{-1}	t	t^{-1}
a	a	$\nexists$	a	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	t^{-1}
b	$\nexists$	b	$\nexists$	b	b	b	b	t	$\nexists$
x	a	$\nexists$	x	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	t^{-1}
y	$\nexists$	b	$\nexists$	y	b	b	s^{-1}	t	$\nexists$
z	$\nexists$	b	$\nexists$	b	z	s	b	t	$\nexists$
s	$\nexists$	b	$\nexists$	s	b	b	z	t	$\nexists$
s^{-1}	$\nexists$	b	$\nexists$	b	s^{-1}	y	b	t	$\nexists$
t	t	$\nexists$	t	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	b
t^{-1}	$\nexists$	t^{-1}	$\nexists$	t^{-1}	t^{-1}	t^{-1}	t^{-1}	a	$\nexists$

Note que $\mathcal{S}$ é um semigrupoide inverso que não é grupoide e também não é semigrupo inverso.

Sejam R um anel comutativo com identidade 1_R e $A = \bigoplus_{i=1}^{5} Re_i$, onde os e_i's são idempotentes dois a dois ortogonais cuja soma é 1_A. Vamos construir uma ação de semigrupoide inverso de $\mathcal{S}$ em A. Defina

$$E_x = Re_1 \oplus Re_2,\ E_a = Re_1,\ E_y = Re_3 \oplus Re_4,\ E_z = Re_4 \oplus Re_5,\ E_b = Re_4,$$

$$\beta_s(ke_3 + le_4) = le_4 + ke_5, \quad \beta_t(ke_1) = ke_4,$$

onde os inversos são óbvios e $\beta_e = \mathrm{Id}_{E_e}$, para todo $e \in E(\mathcal{S})$, $k, l \in R$. Temos que $\beta = (\{E_g\}_{g\in\mathcal{S}}, \{\beta_g\}_{g\in\mathcal{S}})$ é uma ação de $\mathcal{S}$ em A.

O próximo resultado é uma consequência direta do Teorema ESN.

Corolário 1.2.15. *Existe uma correspondência de um para um entre a ações de semigrupoide inverso e ações indutivas de grupoides localmente indutivos induzidas pelos funtores* $\mathbb{S}$ *e* $\mathbb{G}$.

Normalmente vamos esquecer dos funtores $\mathbb{S}$ e $\mathbb{G}$ quando considerarmos ações de semigrupoides inversos e ações indutivas de grupoides localmente indutivos. Assim, se $\beta : \mathcal{S} \to \mathcal{I}_s(X)$ é uma ação de semigrupoide inverso, vamos denotar $\mathbb{G}(\beta) : \mathbb{G}(\mathcal{S}) \to \mathcal{I}_g(A)$ simplesmente por β.

Generalizando a definição apresentada em [13], dados um semigrupoide inverso $\mathcal{S}$ e uma ação β de $\mathcal{S}$ em uma R-álgebra A, definimos

$$L = L(A, \mathcal{S}, \beta) = \left\{ \sum_{s \in \mathcal{S}}^{\text{finita}} a\delta_s : a \in E_s \right\} = \bigoplus_{s \in \mathcal{S}} E_s \delta_s,$$

onde cada δ_s é um símbolo. A adição é a usual e o produto é dado por

$$(a\delta_s)(b\delta_t) = \begin{cases} \beta_s(\beta_{s^{-1}}(a)b)\delta_{st}, \text{ se } \exists st, \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

linearmente estendida.

A estrutura L não é sempre associativa. Para a próxima definição, vamos assumir que L é associativa e, portanto, uma R-álgebra. Uma condição suficiente para associatividade é A ser semiprima, mas esse fato será justificado mais adiante.

Nestas condições, considere $N = \langle a\delta_s - a\delta_t : s \preceq t, a \in E_s \rangle \triangleleft L$. Definimos o produto cruzado algébrico $A \ltimes_\beta^a \mathcal{S}$ como

$$A \ltimes_\beta^a \mathcal{S} = \frac{L}{N}.$$

Observação 1.2.16. O produto cruzado algébrico de um semigrupoide inverso $\mathcal{S}$ numa álgebra A semiprima por uma ação β está bem definido. De fato, se $s \preceq t$, então $\exists e \in E(\mathcal{S})$ tal que $\exists te$ e $s = te$. Logo, $E_s \subseteq E_t$, pela Proposição 1.2.13. Então podemos escrever $a\delta_t$ mesmo que $a \in E_s$.

Vamos agora definir produtos cruzados algébricos de grupoides ordenados.

Definição 1.2.17. Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide ordenado e α uma ação parcial ordenada de grupoide de $\mathcal{G}$ em A. Suponha que $A \ltimes_\alpha^a \mathcal{G}$ é associativo. Defina $N = \langle a\delta_g - a\delta_h : a \in D_g, g \leq h \rangle \triangleleft A \ltimes_\alpha^a \mathcal{G}$. Definimos o produto cruzado ordenado algébrico $A \ltimes_\alpha^o \mathcal{G}$ como

$$A \ltimes_\alpha^o \mathcal{G} = \frac{A \ltimes_\alpha^a \mathcal{G}}{N}.$$

1.3 C*-Álgebras

Uma C^*-álgebra A é uma álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos, munida de uma aplicação $^* : A \to A$ que leva um elemento $x \in A$ na imagem

$x^* \in A$, satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} (a^*)^* &= a, & (a+b)^* &= a^* + b^*, \\ (ab)^* &= b^* a^*, & (\gamma a)^* &= \overline{\gamma} a^*, \end{aligned}$$

para todos $a, b \in A$, $\gamma \in \mathbb{C}$, onde $\overline{\gamma}$ representa o conjugado de γ em $\mathbb{C}$. Como A é uma álgebra de Banach, também valem as relações

$$\begin{gathered} \|\gamma a\| = |\gamma| \|a\|, \\ \|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|, \text{ e} \\ \|ab\| \leq \|a\| \|b\|, \end{gathered}$$

para todos $a, b \in A$, $\gamma \in \mathbb{C}$, onde $\|a\|$ refere-se à norma do elemento a. Além disso, A é completo com relação à métrica $d(a,b) = \|a - b\|$. Por fim, vale a identidade abaixo, também conhecida como identidade C^*,

$$\|a\|^2 = \|a^* a\|.$$

Frequentemente chamaremos o elemento x^* de *adjunto* de x. A proposição abaixo segue diretamente da definição de C^*-álgebra.

Proposição 1.3.1. *Se $a \in A$, onde A é uma C^*-álgebra, então $\|a\| = \|a^*\|$.*

Demonstração. Suponha que $\|a\| \neq 0$. Pela identidade C^* e pela desigualdade do produto, temos que

$$\|a\|^2 = \|a^* a\| \leq \|a^*\| \|a\|.$$

Como $\|a\| \neq 0$, temos que

$$\|a\| \leq \|a^*\|.$$

Agora, novamente pela identidade C^*, obtemos

$$\|a^*\|^2 = \|(a^*)^* a^*\| = \|a a^*\| \leq \|a\| \|a^*\| \leq \|a^*\|^2,$$

de forma que essas desigualdades são, na verdade, igualdades, ou seja,

$$\|a\| \|a^*\| = \|a^*\|^2. \tag{1.3}$$

Se fosse $\|a^*\| = 0$, então $\|a\|$ também o seria, pois $\|a\| \leq \|a^*\|$ e a norma sempre assume valores não negativos. Logo, $\|a^*\| \neq 0$ e podemos dividir em (1.3) por $\|a^*\|$ e obter a igualdade desejada.

Se $\|a\| = 0$, então segue de

$$\|a^*\|^2 = \|aa^*\| \leq \|a\|\|a^*\|$$

que $\|a^*\|^2 = \|a^*\| = 0 = \|a\|$, concluindo a demonstração. $\square$

Fixaremos alguns termos relativos à teoria de C^*-álgebras na próxima definição.

Definição 1.3.2. Sejam A uma C^*-álgebra e $a, b, p, u \in A$. Dizemos que

1. a é *autoadjunto* se $a^* = a$.

2. a é *normal* se $a^*a = aa^*$.

3. p é uma *projeção* se $p^2 = p = p^*$; isto é, se p é autoadjunto e idempotente.

4. u é uma *isometria parcial* se u^*u é uma projeção.

Abaixo apresentaremos alguns exemplos de C^*-álgebras. Mais sobre a teoria de C^*-álgebras pode ser encontrado em [13] e [14].

Exemplo 1.3.3. O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos é uma C^*-álgebra com as operações usuais, $a^* = \overline{a}$ e $\|a\| = |a|$, para cada $a \in \mathbb{C}$.

Exemplo 1.3.4. O conjunto $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ das matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{C}$ também é uma C^*-álgebra. A adição, multiplicação e multiplicação por escalar são as usuais. Se $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, definimos

$$A^* = (\overline{a_{ji}}),$$

ou seja, tomamos a transposta A^T de A e trocamos cada entrada por seu conjugado complexo. Por outro lado, definimos a norma $\|A\|$ de A por

$$\|A\| = \sup\{\|A\omega\|_2 : \omega \in \mathbb{C}^n, \|\omega\|_2 \leq 1\},$$

onde $\|\cdot\|_2$ é a ℓ^2-norma usual em $\mathbb{C}^n$, isto é, se $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{C}^n$, então

$$\|\omega\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\omega_i|^2}.$$

Exemplo 1.3.5. Seja H um espaço de Hilbert complexo com produto interno denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Consideremos o conjunto $\mathcal{B}(H)$ de operadores lineares limitados em H. Lembramos que um operador linear $L : H \to H$ é limitado se existe $M \geq 0$ tal que para todo

$h \in H$,

$$\|L(h)\|_H \leq M\|h\|_H$$

onde $\|\cdot\|_H$ denota a norma induzida pelo produto interno de H. É fácil notar que $\mathcal{B}(H)$ é uma $\mathbb{C}$-álgebra com as operações de soma e multiplicação por escalares usual, enquanto a multiplicação é dada por composição. Além disso, é claro que $\mathcal{B}(H)$ é um semigrupo com respeito a composição. Resta-nos apenas munir $\mathcal{B}(H)$ de uma estrutura de C^*-álgebra. A norma $\|\cdot\|$ em $\mathcal{B}(H)$ será definida por

$$\|T\| = \sup\{\|T\omega\|_H : \omega \in H, \|\omega\|_H \leq 1\}$$

para todo $T \in \mathcal{B}(H)$. Naturalmente definimos T^* como o operador adjunto de T, isto é, T^* é tal que

$$\langle T^*(\omega), \gamma\rangle = \langle \omega, T(\gamma)\rangle,$$

para cada $\omega, \gamma \in H$.

Essas operações garantem que $\mathcal{B}(H)$ é uma C^*-álgebra. Note que esse exemplo é uma generalização do exemplo anterior para o caso de dimensão infinita.

Sejam A e B C^*-álgebras. Dizemos que um homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\phi : A \to B$ é um *-homomorfismo se $\phi(a^*) = \phi(a)^*$, para todo $a \in A$.

Um resultado clássico da teoria de C^*-álgebras é o seguinte: Sejam A e B C^*-álgebras e suponha que $\rho : A \to B$ é um *-homomorfismo. Então ρ é contrativo, isto é,

$$\|\rho(a)\|_B \leq \|a\|_A,$$

para todo $a \in A$. Sua demonstração depende da teoria de espectros e não será estudada nessa dissertação.

Outra propriedade interessante de C^*-álgebras é que dadas D, E C^*-álgebras, todo *-homomorfismo injetor de D em E é, na verdade, isométrico. Isto é, se $\pi : D \to E$ é um *-monomorfismo, então $\|a\|_D = \|\pi(a)\|_E$, para todo $a \in D$. A demonstração desse fato será omitida deste trabalho pois não pretendemos explorar a teoria de espectros de C^*-álgebras.

Seja A uma *-álgebra normada. Já sabemos, da teoria de C^*-álgebras envolventes [8], que A admite uma C^*-álgebra envolvente se suas representações são contrativas. O próximo resultado generaliza [13, Proposition 4.2].

Proposição 1.3.6. *Seja A uma C^*-álgebra semiprima. Seja $\mathcal{G}$ um grupoide que age parcialmente em A via $\alpha = (\{D_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\alpha_g\}_{g\in\mathcal{G}})$. Então o produto cruzado algébrico $A \ltimes_\alpha^a \mathcal{G}$ é uma *-álgebra normada cujas representações são contrativas.*

Demonstração. Como definido na seção anterior, consideraremos que cada D_g é um ideal de A e que cada α_g é, além de um isomorfismo de R-álgebras, *-isomorfismo, e portanto uma isometria. Como toda isometria é contínua, um *-isomorfismo também é um homeomorfismo, dado que a inversa de α_g, α_g^{-1}, também é um *-isomorfismo contínuo.

Na seção anterior discutimos quando $A \ltimes_\alpha^a \mathcal{G}$ é uma $\mathbb{C}$-álgebra, então resta-nos mostrar as igualdades restantes para afirmar que $A \ltimes_\alpha^a \mathcal{G}$ é uma $*$-álgebra normada.

Começaremos definindo

$$(a_g\delta_g)^* = \alpha_{g^{-1}}(a_g^*)\delta_{g^{-1}}$$

e estendendo linearmente. Note que * está bem definida, pois $a_g, a_g^* \in D_g$ e

$$\alpha_{g^{-1}} : D_g \to D_{g^{-1}}$$

é um isomorfismo, de forma que $\alpha_{g^{-1}}(a_g^*) \in D_{g^{-1}}$.

Sejam $x, y \in A \ltimes_\alpha^a \mathcal{G}$, $\gamma \in \mathbb{C}$. Então

$$x = \sum_{g\in\mathcal{G}} a_g\delta_g \text{ e } y = \sum_{g\in\mathcal{G}} b_g\delta_g.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(x+y)^* &= \left(\sum_{g\in\mathcal{G}} a_g\delta_g + \sum_{g\in\mathcal{G}} b_g\delta_g\right)^* = \left(\sum_{g\in\mathcal{G}} (a_g+b_g)\delta_g\right)^* \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{g\in\mathcal{G}} ((a_g+b_g)\delta_g)^* = \sum_{g\in\mathcal{G}} \alpha_{g^{-1}}((a_g+b_g)^*)\delta_{g^{-1}} \\
&= \sum_{g\in\mathcal{G}} \alpha_{g^{-1}}(a_g^*+b_g^*)\delta_{g^{-1}} = \sum_{g\in\mathcal{G}} (\alpha_{g^{-1}}(a_g^*) + \alpha_{g^{-1}}(b_g^*))\delta_{g^{-1}} \\
&= \sum_{g\in\mathcal{G}} \alpha_{g^{-1}}(a_g^*)\delta_{g^{-1}} + \sum_{g\in\mathcal{G}} \alpha_{g^{-1}}(a_g^*)\delta_{g^{-1}} \\
&= \left(\sum_{g\in\mathcal{G}} a_g\delta_g\right)^* + \left(\sum_{g\in\mathcal{G}} b_g\delta_g\right)^* = x^* + y^*
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
(\gamma x)^* &= \left(\gamma \sum_{g\in\mathcal{G}} a_g\delta_g\right)^* = \left(\sum_{g\in\mathcal{G}}(\gamma a_g)\delta_g\right)^* \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{g\in\mathcal{G}}((\gamma a_g)\delta_g)^* = \sum_{g\in\mathcal{G}} \alpha_{g^{-1}}((\gamma a_g)^*)\delta_{g^{-1}} \\
&= \sum_{g\in\mathcal{G}} \alpha_{g^{-1}}(\overline{\gamma} a_g^*)\delta_{g^{-1}} \overset{(**)}{=} \sum_{g\in\mathcal{G}}(\overline{\gamma}\alpha_{g^{-1}}(a_g^*))\delta_{g^{-1}} \\
&= \overline{\gamma}\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} \alpha_{g^{-1}}(a_g^*)\delta_{g^{-1}}\right) = \overline{\gamma}\left(\sum_{g\in\mathcal{G}}((a_g\delta_g)^*)\right) \\
&= \overline{\gamma}\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} a_g\delta_g\right)^* = \overline{\gamma}x^*,
\end{aligned}
$$

onde as igualdades $(*)$ vem da definição da aplicação *, que foi estendida linearmente, enquanto a igualdade $(**)$ segue de $\alpha_{g^{-1}}$ ser um *-homomorfismo.

Finalmente, sejam agora $x = a_g\delta_g$ e $y = b_h\delta_h$. É suficiente mostrar que $(xy)^* = y^*x^*$. Desta forma, se $(g,h) \in \mathcal{G}_2$,

$$
\begin{aligned}
(xy)^* &= ((a_g\delta_g)(b_h\delta_h))^* = (\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh})^* = \alpha_{(gh)^{-1}}(\alpha_g((\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)^*)\delta_{(gh)^{-1}} \\
&= \alpha_{(gh)^{-1}}(\alpha_g(b_h^*\alpha_{g^{-1}}(a_g)^*)\delta_{(gh)^{-1}} \overset{(*)}{=} \alpha_{(gh)^{-1}}(\alpha_g(b_h^*\alpha_{g^{-1}}(a_g^*))\delta_{(gh)^{-1}},
\end{aligned}
$$

onde a igualdade $(*)$ se justifica pois $\alpha_{g^{-1}}$ é um *-homomorfismo. Note agora que $\alpha_{g^{-1}}(a_g^*) \in D_{g^{-1}}$ e $b_h^* \in D_h$, portanto, por $D_{g^{-1}}$ e D_h serem ideais, o produto

$$
b_h^*\alpha_{g^{-1}}(a_g^*) \in D_{g^{-1}} \cap D_h,
$$

o que implica que $\alpha_g(b_h^*\alpha_{g^{-1}}(a_g^*)) \in \alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$, onde a igualdade dos conjuntos é devida à relação (b) da Proposição 1.2.4. Portanto,

$$
\begin{aligned}
(xy)^* &= \alpha_{(gh)^{-1}}(\alpha_g(b_h^*\alpha_{g^{-1}}(a_g^*))\delta_{(gh)^{-1}} \overset{(*)}{=} \alpha_{h^{-1}}(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(b_h^*\alpha_{g^{-1}}(a_g^*))))\delta_{(gh)^{-1}} \\
&= \alpha_{h^{-1}}(b_h^*\alpha_{g^{-1}}(a_g^*))\delta_{(gh)^{-1}} = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(b_h^*))\alpha_{g^{-1}}(a_g^*))\delta_{(gh)^{-1}} \\
&= (\alpha_{h^{-1}}(b_h^*)\delta_{h^{-1}})(\alpha_{g^{-1}}(a_g^*)\delta_{g^{-1}}) = (b_h\delta_h)^*(a_g\delta_g)^* = y^*x^*.
\end{aligned}
$$

A desigualdade $(*)$ é garantida pois vale (c) da Proposição 1.2.4, já que $\alpha_{h^{-1}g^{-1}}(x) = \alpha_{h^1} \circ \alpha_{g^{-1}}(x), \forall x \in D_g \cap D_{gh}$. Agora, se $(g,h) \notin \mathcal{G}_2$, $xy = 0 = y^*x^*$. Portanto, provamos a igualdade desejada.

Definimos uma norma $\|\cdot\|_{\ltimes}$ em $A \ltimes_\alpha G$ por

$$
\left\|\sum_{g\in G} a_g\delta_g\right\|_{\ltimes} = \sum_{g\in G}\|a_g\|,
$$

em que $\|\cdot\|$ denota a norma em A. Note que esta norma está bem definida pois as somas formais em $A \ltimes_\alpha G$ são finitas. Isto nos diz que $A \ltimes_\alpha G$ é uma *-álgebra normada. Sejam agora H um espaço de Hilbert e $\pi : A \ltimes_\alpha G \to \mathcal{B}(H)$. Então

$$\begin{aligned}\|\pi(a_g\delta_g)\|^2_{\mathcal{B}(H)} &= \|\pi(a_g\delta_g)^*\pi(a_g\delta_g)\|_{\mathcal{B}(H)} = \|\pi((a_g\delta_g)^*)\pi(a_g\delta_g)\|_{\mathcal{B}(H)} \\ &= \|\pi((a_g\delta_g)^*(a_g\delta_g))\|_{\mathcal{B}(H)} = \|\pi((\alpha_{g^{-1}}(a_g^*)\delta_{g^{-1}})(a_g\delta_g))\|_{\mathcal{B}(H)} \\ &= \|\pi(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g^*))a_g)\delta_{d(g)})\|_{\mathcal{B}(H)}.\end{aligned}$$

Mas $D_{d(g)}$ é uma C^*-álgebra isomorfa a $D_{d(g)}\delta_{d(g)}$, portanto suas representações são contrativas. Logo,

$$\begin{aligned}\|\pi(a_g\delta_g)\|^2_{\mathcal{B}(H)} &= \|\pi(\alpha_{g^{-1}}(a_g^*a_g)\delta_{d(g)})\|_{\mathcal{B}(H)} \leq \|\alpha_{g^{-1}}(a_g^*a_g)\delta_{d(g)}\|_{\ltimes} \\ &= \|\alpha_{g^{-1}}(a_g^*a_g)\| = \|a_g^*a_g\| = \|a_g\|^2.\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\|\pi(a_g\delta_g)\|_{\mathcal{B}(H)} \leq \|a_g\| = \|a_g\delta_g\|_{\ltimes},$$

como gostaríamos. □

A proposição acima inspira a próxima definição.

Definição 1.3.7. Sejam A uma C^*-álgebra, $\mathcal{G}$ um grupoide e α uma ação parcial de $\mathcal{G}$ em A. Definimos o produto cruzado $A \ltimes_\alpha \mathcal{G}$ de A por $\mathcal{G}$ como a C^*-álgebra envolvente de $A \ltimes_\alpha^a \mathcal{G}$.

Capítulo 2

Ações de Semigrupoide Inverso e Ações Parciais de Grupoide

Neste capítulo construiremos o semigrupoide inverso de Exel $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ de maneira puramente algébrica a partir de um grupoide $\mathcal{G}$. Além disso, provaremos que existe uma correspondência biunívoca entre as ações parciais de grupoide de $\mathcal{G}$ e as ações de semigrupoide inverso de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ e as consequências desse fato no estudo de produtos cruzados algébricos.

2.1 Semigrupoide Inverso Associado a um Grupoide

Um *semigrupoide livre* $\mathcal{S}$ é um semigrupoide em que cada elemento de $\mathcal{S}$ é uma concatenação finita de um subconjunto de $\mathcal{S}$, quando a concatenação fizer sentido.

Nosso objetivo nessa seção é generalizar a construção do semigrupo inverso $S(G)$ construído através de um grupo G, dada por Exel em [11]. O semigrupo inverso $S(G)$ é chamado de *semigrupo inverso de Exel associado ao grupo G*.

Definição 2.1.1. Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Para todo $g \in \mathcal{G}$, considere o símbolo $[g]$. Definimos o *semigrupoide de Exel associado ao grupoide* $\mathcal{G}$, denotado por $\mathcal{S}(\mathcal{G})$, como o semigrupoide livre gerado pelos símbolos $[g]$ para todo $g \in \mathcal{G}$. Temos que $\exists [g][h]$ em $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ se, e somente se, $\exists gh$ em $\mathcal{G}$. Além disso, estabelecemos as seguintes relações, para todo $(g, h) \in \mathcal{G}_2$,

(i) $[g^{-1}][g][h] = [g^{-1}][gh]$;

(ii) $[g][h][h^{-1}] = [gh][h^{-1}]$;

(iii) $[r(g)][g] = [g] = [g][d(g)]$.

Observação 2.1.2. Note que para todo $g \in \mathcal{G}$ existe $g^{-1} \in \mathcal{G}$ tal que $\exists gg^{-1}$, $\exists g^{-1}g$, $gg^{-1} = r(g)$ e $g^{-1}g = d(g)$. Portanto sempre $\exists[g][g^{-1}]$ e $\exists[g^{-1}][g]$ em $\mathcal{S}(\mathcal{G})$. Além disso,

$$[g][g^{-1}][g] = [g][g^{-1}g] = [g][d(g)] = [g].$$

Os elementos da forma $[g][g^{-1}]$ operam um papel importante na caracterização dos elementos de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$. Por esse motivo daremos uma notação especial para eles. Defina $\varepsilon_g = [g][g^{-1}]$ em $\mathcal{S}(\mathcal{G})$. A Proposição 2.1.5 provará que os ε's são idempotentes em $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ e a Proposição 2.1.10 provará que $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ é um semigrupoide inverso.

A próxima proposição segue diretamente da propriedade universal de semigrupoides livres [17, Theorem 3.1.1 and Lemma 3.2.2].

Proposição 2.1.3. *Dado um grupoide $\mathcal{G}$, um semigrupoide $\mathcal{S}$ e um homomorfismo parcial $f : \mathcal{G} \to \mathcal{S}$ tal que $f(g)f(d(g)) = f(g) = f(r(g))f(g)$ para todo $g \in \mathcal{G}$. Então existe um único homomorfismo de semigrupoides $\overline{f} : \mathcal{S}(\mathcal{G}) \to \mathcal{S}$ tal que $\overline{f}([g]) = f(g)$, para todo $g \in \mathcal{G}$.*

Seja $\mathcal{S}(\mathcal{G})^{op}$ o semigrupoide oposto de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$. Isto é, $\mathcal{S}(\mathcal{G})^{op}$ coincide com $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ exceto pela multiplicação parcialmente definida $\cdot$, que é dada por

$$[g] \cdot [h] := [h][g],$$

para todo $([g], [h]) \in \mathcal{S}(\mathcal{G})_2$. Note que $\exists[g] \cdot [h]$ se, e somente se, $\exists hg$, para todos $g, h \in \mathcal{G}$.

Proposição 2.1.4. *Existe um anti-automorfismo involutivo $^* : \mathcal{S}(\mathcal{G}) \to \mathcal{S}(\mathcal{G})$ tal que $[g]^* = [g^{-1}]$.*

Demonstração. Considere $f : \mathcal{G} \to \mathcal{S}(\mathcal{G})^{op}$, onde $f(g) = [g^{-1}]$.

Vamos mostrar que f é um homomorfismo parcial. De fato, dados $(g, h) \in \mathcal{G}_2$, temos

$$\exists gh \Leftrightarrow \exists h^{-1}g^{-1} \Leftrightarrow \exists[h^{-1}][g^{-1}] \Leftrightarrow \exists[g^{-1}] \cdot [h^{-1}] \Leftrightarrow \exists f(g) \cdot f(h).$$

Além disso, observe que

$$\begin{aligned} f(g^{-1}) \cdot f(gh) &= [g] \cdot [(gh)^{-1}] = [g] \cdot [h^{-1}g^{-1}] = [h^{-1}g^{-1}][g] \\ &= [h^{-1}][g^{-1}][g] = [g] \cdot [g^{-1}] \cdot [h^{-1}] = f(g^{-1}) \cdot f(g) \cdot f(h). \end{aligned}$$

A prova que $f(g) \cdot f(h) \cdot f(h^{-1}) = f(gh) \cdot f(h^{-1})$ é similar. Note agora que

$$\begin{aligned} f(g) \cdot f(d(g)) &= [g^{-1}] \cdot [d(g)^{-1}] = [g^{-1}] \cdot [d(g)] \\ &= [d(g)][g^{-1}] = [r(g^{-1})][g^{-1}] = [g^{-1}] = f(g) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(r(g)) \cdot f(g) &= [r(g)^{-1}] \cdot [g^{-1}] = [r(g)] \cdot [g^{-1}] = [g^{-1}][r(g)] \\ &= [g^{-1}][d(g^{-1})] = [g^{-1}] = f(g). \end{aligned}$$

Portanto, existe um único homomorfismo $\overline{f} : \mathcal{S}(\mathcal{G}) \to \mathcal{S}(\mathcal{G})^{op}$ tal que $\overline{f}([g]) = f(g) = [g^{-1}]$. Defina ${}^* : \mathcal{S}(\mathcal{G}) \to \mathcal{S}(\mathcal{G})$ por $[g]^* = \overline{f}([g])$. Temos que

$$([g]^*)^* = \overline{f}([g])^* = [g^{-1}]^* = \overline{f}([g^{-1}]) = [g].$$

Mais ainda, se $\exists gh$, então

$$([g][h])^* = \overline{f}([g][h]) = \overline{f}([g]) \cdot \overline{f}([h]) = [g^{-1}] \cdot [h^{-1}] = [h^{-1}][g^{-1}] = \overline{f}([h])\overline{f}([g]) = [h]^*[g]^*.$$

Resta-nos mostrar que * é uma bijeção. A sobrejetividade segue do fato que definimos * nos geradores de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$. A injetividade vale pois a aplicação inverso $g \mapsto g^{-1}$ é injetiva em $\mathcal{G}$. Isso completa a demonstração. $\square$

Começaremos a estudar as propriedades dos elementos do tipo ε_g, com $g \in \mathcal{G}$.

Proposição 2.1.5. *Defina $\varepsilon_g = [g][g^{-1}] \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Valem as seguintes afirmações:*

(i) $\varepsilon_g^2 = \varepsilon_g = \varepsilon_g^*$.

(ii) *se $r(g) = r(h)$, então $\varepsilon_g\varepsilon_h = \varepsilon_h\varepsilon_g$.*

(iii) *se $\exists hg$, então $[h]\varepsilon_g = \varepsilon_{hg}[h]$.*

(iv) *se $\exists g^2$, então $[g]^2 = \varepsilon_g[g^2]$.*

Demonstração. (i): Note primeiramente que

$$\varepsilon_g^* = ([g][g^{-1}])^* = [g^{-1}]^*[g]^* = [g][g^{-1}] = \varepsilon_g,$$

portanto ε_g é autoadjunto. Observe agora que

$$\varepsilon_g^2 = ([g][g^{-1}])^2 = ([g][g^{-1}])([g][g^{-1}]) = ([g][g^{-1}][g])[g^{-1}] = [g][g^{-1}] = \varepsilon_g,$$

ou seja, cada ε_g é idempotente.

(ii): Agora mostraremos que dados $g, h \in \mathcal{G}$ com $r(g) = r(h)$, então $\exists \varepsilon_g\varepsilon_h$, $\exists \varepsilon_h\varepsilon_g$ e $\varepsilon_g\varepsilon_h = \varepsilon_h\varepsilon_g$. De fato, note que se $r(g) = r(h)$ então $\exists g^{-1}h$, ou seja, $\exists \varepsilon_g\varepsilon_h$. Analogamente

$\exists h^{-1}g$ implica que $\exists \varepsilon_h \varepsilon_g$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_g \varepsilon_h &= ([g][g^{-1}])([h][h^{-1}]) = ([g][g^{-1}][h])[h^{-1}] \\
&= ([g][g^{-1}h])[h^{-1}] = ([g]([g^{-1}h][h^{-1}g][g^{-1}h]))[h^{-1}] \\
&= ([g][g^{-1}h][h^{-1}g])[g^{-1}h][h^{-1}] = ([gg^{-1}h][h^{-1}g])[g^{-1}h][h^{-1}] \\
&= ([r(g)h][h^{-1}g])[g^{-1}h][h^{-1}] = ([r(h)h][h^{-1}g])[g^{-1}h][h^{-1}] \\
&= ([h][h^{-1}g])[g^{-1}h][h^{-1}] = [h]([h^{-1}g][g^{-1}hh^{-1}]) \\
&= [h]([h^{-1}g][g^{-1}r(h)]) = [h]([h^{-1}g][g^{-1}r(g)]) \\
&= [h]([h^{-1}g][g^{-1}d(g^{-1})]) = [h]([h^{-1}g][g^{-1}]) \\
&= ([h][h^{-1}][g])[g^{-1}] = ([h][h^{-1}])([g][g^{-1}]) = \varepsilon_h \varepsilon_g.
\end{aligned}$$

(iii): Dados $(h,g) \in \mathcal{G}_2$,

$$\begin{aligned}
[h]\varepsilon_g &= [h][g][g^{-1}] = ([h][h^{-1}][h])[g][g^{-1}] \overset{(*)}{=} ([h][g][g^{-1}])[h^{-1}][h] \\
&= [hg]([g^{-1}][h^{-1}][h]) = [hg][g^{-1}h^{-1}][h] = \varepsilon_{hg}[h],
\end{aligned}$$

onde $(*)$ vale pois $\exists hg$, de onde segue que $\exists \varepsilon_{h^{-1}}\varepsilon_g$ e $\varepsilon_{h^{-1}}\varepsilon_g = \varepsilon_g \varepsilon_{h^{-1}}$.

(iv): Por fim, se $\exists g^2$, então

$$[g]^2 = [g][g] = [g][g^{-1}][g][g] = [g][g^{-1}][g^2] = \varepsilon_g[g^2]. \qquad \square$$

Observação 2.1.6. Note que

$$[g] = [r(g)][g] = [gg^{-1}][g] = [g][g^{-1}][g] = \varepsilon_g[g], \text{ para todo } [g] \in \mathcal{S}(\mathcal{G}),$$

mas $\varepsilon_g \neq [r(g)]$.

Podemos estender indutivamente a proposição acima para um número finito de ε's componíveis. Dado um grupoide $\mathcal{G}$, defina $X_g = \{h \in \mathcal{G} : r(h) = r(g)\} \subseteq \mathcal{G}$. Note que $h \in X_g$ se, e somente se, $\exists h^{-1}g$. É claro que $X_g = X_{r(g)}$, se $h \in X_g$, então $X_g = X_h$, e $\mathcal{G} = \dot{\bigcup\limits_{e \in \mathcal{G}_0}} X_e$.

Mantendo essa notação, o próximo resultado garante que todo elemento de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ possui uma decomposição em termos dos elementos ε's.

Proposição 2.1.7. *Todo elemento $\alpha \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$ admite uma decomposição*

$$\alpha = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}[g],$$

onde $n \geq 0$, $r_1, \ldots, r_n, g \in X_g$. Mais ainda,

(i) *$r_i \neq r_j$ se $i \neq j$; e*

(ii) $r_i \neq g$, $r_i \notin \mathcal{G}_0$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

Dizemos que essa é a forma padrão *do elemento* $\alpha \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$*.*

Demonstração. Seja $S \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{G})$ o conjunto de elementos de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ que admitem uma decomposição na forma padrão. Como podemos ter $n = 0$, segue que $[g] \in S$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Portanto, como todos os geradores de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ estão em S, resta-nos provar que S absorve multiplicação por elementos de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$.

Seja $\alpha \in S$. Então existem $r_1, \ldots, r_n, g \in X_g$ tais que (i) e (ii) são satisfeitas. Seja ainda $h \in \mathcal{G}$ tal que $\exists\alpha[h]$, isto é, tal que $\exists gh$. Assim,

$$\begin{aligned} \alpha[h] = \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[g][h] &= \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[g][g^{-1}][g][h] \\ &= \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[g][g^{-1}][gh] \\ &= \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}\varepsilon_g[gh]. \end{aligned}$$

Se qualquer $r_i = gh$, é suficiente comutar o elemento ε_{gh} até o elemento $[gh]$ e usar a Observação 2.1.6. Então $\varepsilon_{gh}[gh] = [gh]$ na decomposição. Além disso, se $g \in \mathcal{G}_0$, então $g = r(h)$ e é suficiente notar que o elemento ε_g desaparece da decomposição e $[gh] = [h]$. Assim, temos que $\mathcal{S}(\mathcal{G}) = S$. $\square$

Proposição 2.1.8. *Para todo* $\alpha \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$*, temos que* $\alpha\alpha^*\alpha = \alpha$ *e* $\alpha^*\alpha\alpha^* = \alpha^*$*.*

Demonstração. Dado $\alpha \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$, $\alpha = \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[g]$ para certos $r_1, \ldots, r_n, g \in X_g$, satisfazendo (i) e (ii) da Proposição 2.1.7.

Observe primeiramente que * ser um anti-automorfismo e cada ε_{r_i} ser autoadjunto implicam que

$$\alpha^* = (\varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[g])^* = [g^{-1}]\varepsilon_{r_n} \cdots \varepsilon_{r_1}.$$

Como sempre $\exists[h][h^{-1}]$ e $\exists[h^{-1}][h]$ para todo $h \in \mathcal{G}$, podemos nos assegurar que $\exists\alpha\alpha^*$ e $\exists\alpha^*\alpha$.

Como cada ε é idempotente e comuta com elementos do tipo ε, obtemos

$$\alpha\alpha^*\alpha = \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}\varepsilon_g[g] = \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[g] = \alpha$$

e

$$\begin{aligned} \alpha^*\alpha\alpha^* &= ([g^{-1}]\varepsilon_{r_n} \cdots \varepsilon_{r_1})(\varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[g])([g^{-1}]\varepsilon_{r_n} \cdots \varepsilon_{r_1}) \\ &= [g^{-1}]\varepsilon_{r_n} \cdots \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[g][g^{-1}]\varepsilon_{r_n} \cdots \varepsilon_{r_1} \\ &= [g^{-1}]\varepsilon_{r_n} \cdots \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}\varepsilon_g\varepsilon_{r_n} \cdots \varepsilon_{r_1} \\ &= [g^{-1}]\varepsilon_g\varepsilon_{r_n} \cdots \varepsilon_{r_1} = [g^{-1}][g][g^{-1}]\varepsilon_{r_n} \cdots \varepsilon_{r_1} \\ &= [g^{-1}]\varepsilon_{r_n} \cdots \varepsilon_{r_1} = \alpha^*, \end{aligned}$$

que é exatamente o que gostaríamos de demonstrar. $\square$

Para provarmos que o semigrupoide de Exel $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ é um semigrupoide inverso, basta provar que se $\alpha \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$, então α^* é o *único* inverso de α em $\mathcal{S}(\mathcal{G})$. Para isso, definiremos duas aplicações especiais.

Considere a aplicação identidade em $\mathcal{G}$. É fácil ver que essa aplicação satisfaz as condições da Proposição 2.1.3. Portanto podemos estender a identidade a um homomorfismo de semigrupoides $\partial : \mathcal{S}(\mathcal{G}) \to \mathcal{G}$ onde $\partial([g]) = g$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Note que dado $\alpha = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}[g] \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$ temos que

$$\begin{aligned}\partial(\alpha) &= \partial(\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_n}[g]) = \partial([r_1][r_1^{-1}]\cdots[r_n][r_n^{-1}][g]) \\ &= \partial([r_1])\partial([r_1^{-1}])\cdots\partial([r_n])\partial([r_n^{-1}])\partial([g]) = r_1r_1^{-1}\cdots r_nr_n^{-1}g \\ &= r(r_1)r(r_2)\cdots r(r_n)g = r(g)g = g.\end{aligned}$$

Observe que pudemos "separar" os produtos usando o homomorfismo ∂, já que vale $\exists[r_i^{-1}][r_{i+1}]$ se, e somente se, $\exists r_i^{-1}r_{i+1}$ e $\exists[r_n^{-1}][g]$ se, e somente se, $\exists r_n^{-1}g$.

Defina o conjunto $\mathcal{P}_r(\mathcal{G})$ cujos elementos são os subconjuntos finitos $E \subseteq \mathcal{G}$ tais que $g \in E \Rightarrow r(g) \in E$. Seja $\mathcal{F}(\mathcal{P}_r(\mathcal{G}))$ o semigrupo de funções de $\mathcal{P}_r(\mathcal{G})$ em $\mathcal{P}_r(\mathcal{G})$. Considere os elementos de $\mathcal{F}(\mathcal{P}_r(\mathcal{G}))$ da forma

$$\phi_g : \mathcal{P}_r(\mathcal{G}) \to \mathcal{P}_r(\mathcal{G})$$

tais que

$$\phi_g(E) = \begin{cases} gE \cup \{g, r(g)\}, \text{ se } \exists gh, \forall h \in E \\ \{g, r(g)\}, \text{ se existe } h \in E \text{ tal que } \nexists gh, \end{cases}$$

para todo $g \in \mathcal{G}$. Note que ϕ_g está bem definido pois se $\exists gh$ então $d(g) = r(h)$, $gr(h) = gd(g) = g$ e $r(gh) = r(g)$. Equivalentemente, podemos escrever

$$\phi_g(E) = \begin{cases} gE \cup \{g, r(g)\}, \text{ se } E \subseteq X_{g^{-1}} \\ \{g, r(g)\}, \text{ caso contrário }. \end{cases}$$

Podemos definir, então, a aplicação $\lambda : \mathcal{G} \to \mathcal{F}(\mathcal{P}_r(\mathcal{G}))$ dada por $\lambda(g) = \phi_g$.

Como $\mathcal{P}_r(\mathcal{G})$ é um semigrupo, sempre existe $\phi_g \circ \phi_h$, para todo $(g, h) \in \mathcal{G}_2$.

Seja $(g,h) \in \mathcal{G}_2$. Então, dado $E \in \mathcal{P}_r(\mathcal{G})$,

$$\begin{aligned}
\lambda(g^{-1})\lambda(g)\lambda(h)(E) &= \phi_{g^{-1}} \circ \phi_g \circ \phi_h(E) = \phi_{g^{-1}}(\phi_g(\phi_h(E))) \\
&= \begin{cases} \phi_{g^{-1}}(\phi_g(hE \cup \{h, r(h)\})), \text{ se } E \subseteq X_{h^{-1}} \\ \phi_{g^{-1}}(\phi_g(\{h, r(h)\})), \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \phi_{g^{-1}}(ghE \cup \{g, gh, r(g)\}), \text{ se } E \subseteq X_{h^{-1}} \\ \phi_{g^{-1}}(\{gh, g, r(g)\}), \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} g^{-1}ghE \cup \{d(g), h, g^{-1}\}, \text{ se } E \subseteq X_{h^{-1}} \\ \{h, d(g), g^{-1}\}, \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} d(g)hE \cup \{d(g), h, g^{-1}\}, \text{ se } E \subseteq X_{h^{-1}} \\ \{h, d(g), g^{-1}\}, \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} r(h)hE \cup \{r(h), h, g^{-1}\}, \text{ se } E \subseteq X_{h^{-1}} \\ \{h, d(g), g^{-1}\}, \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} hE \cup \{r(h), h, g^{-1}\}, \text{ se } E \subseteq X_{h^{-1}} \\ \{h, d(g), g^{-1}\}, \text{ caso contrário,} \end{cases}
\end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned}
\lambda(g^{-1})\lambda(gh)(E) &= \phi_{g^{-1}} \circ \phi_{gh}(E) = \phi_{g^{-1}}(\phi_{gh}(E)) \\
&= \begin{cases} \phi_{g^{-1}}(ghE \cup \{gh, r(gh)\}), \text{ se } E \subseteq X_{h^{-1}} \\ \phi_{g^{-1}}(\{gh, r(g)\}), \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \phi_{g^{-1}}(ghE \cup \{gh, r(g)\}), \text{ se } E \subseteq X_{h^{-1}} \\ \phi_{g^{-1}}(\{gh, r(g)\}), \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} g^{-1}ghE \cup \{h, g^{-1}, d(g)\}, \text{ se } E \subseteq X_{h^{-1}} \\ \{h, g^{-1}, d(g)\}, \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} d(g)hE \cup \{h, g^{-1}, d(g)\}, \text{ se } E \subseteq X_{h^{-1}} \\ \{h, g^{-1}, d(g)\}, \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} r(h)hE \cup \{h, g^{-1}, r(h)\}, \text{ se } E \subseteq X_{h^{-1}} \\ \{h, g^{-1}, d(g)\}, \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} hE \cup \{h, g^{-1}, r(h)\}, \text{ se } E \subseteq X_{h^{-1}} \\ \{h, g^{-1}, d(g)\}, \text{ caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Como escolhemos E de forma arbitrária, temos que λ satisfaz a primeira condição de homomorfismo parcial. Para provarmos a segunda, sejam novamente $(g,h) \in \mathcal{G}_2$ e $E \in \mathcal{P}_r(\mathcal{G})$. Então

$$\begin{aligned}
\lambda(g)\lambda(h)\lambda(h^{-1})(E) &= \phi_g \circ \phi_h \circ \phi_{h^{-1}}(E) = \phi_g(\phi_h(\phi_{h^{-1}}(E))) \\
&= \begin{cases} \phi_g(\phi_h(h^{-1}E \cup \{h^{-1}, r(h^{-1})\})), \text{ se } E \subseteq X_h, \\ \phi_g(\phi_h(\{h^{-1}, d(h)\})), \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \phi_g(hh^{-1}E \cup \{r(h), h\}), \text{ se } E \subseteq X_h, \\ \phi_g(\{h, r(h)\}), \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \phi_g(r(h)E \cup \{r(h), h\}), \text{ se } E \subseteq X_h, \\ \phi_g(\{h, r(h)\}), \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \phi_g(d(g)E \cup \{r(h), h\}), \text{ se } E \subseteq X_h, \\ \phi_g(\{h, r(h)\}), \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} gE \cup \{g, gh, r(g)\}, \text{ se } E \subseteq X_h, \\ \{gh, g, r(g)\}, \text{ caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\lambda(gh)\lambda(h^{-1})(E) &= \phi_{gh} \circ \phi_{h^{-1}}(E) = \phi_{gh}(\phi_{h^{-1}}(E)) \\
&= \begin{cases} \phi_{gh}(h^{-1}E \cup \{h^{-1}, r(h^{-1})\}), \text{ se } E \subseteq X_h, \\ \phi_{gh}(\{h^{-1}, d(h)\}), \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} ghh^{-1}E \cup \{g, gh, r(gh)\}), \text{ se } E \subseteq X_h, \\ \{gh, g, r(g)\}, \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} gE \cup \{g, gh, r(g)\}), \text{ se } E \subseteq X_h, \\ \{gh, g, r(g)\}, \text{ caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Novamente da escolha arbitrária de E, garantimos que $\lambda(g)\lambda(h)\lambda(h^{-1}) = \lambda(gh)\lambda(h^{-1})$, isto é, λ satisfaz a segunda condição de homomorfismo parcial. Resta-nos provar que

$\lambda(r(g))\lambda(g) = \lambda(g) = \lambda(g)\lambda(d(g))$. Para isso, tome $E \in \mathcal{P}_r(\mathcal{G})$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\lambda(r(g))\lambda(g)(E) &= \phi_{r(g)} \circ \phi_g(E) = \phi_{r(g)}(\phi_g(E)) \\
&= \begin{cases} \phi_{r(g)}(gE \cup \{g, r(g)\}), & \text{se } E \subseteq X_{g^{-1}}, \\ \phi_{r(g)}(\{g, r(g)\}), & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} r(g)gE \cup \{g, r(g)\}, & \text{se } E \subseteq X_{g^{-1}}, \\ \{g, r(g)\}, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} gE \cup \{g, r(g)\}, & \text{se } E \subseteq X_{g^{-1}}, \\ \{g, r(g)\}, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \phi_g(E) = \lambda(g)(E)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lambda(g)\lambda(d(g))(E) &= \phi_g \circ \phi_{d(g)}(E) = \phi_g(\phi_{d(g)}(E)) \\
&= \begin{cases} \phi_g(d(g)E \cup \{d(g)\}), & \text{se } E \subseteq X_{g^{-1}}, \\ \phi_g(\{d(g)\}), & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} gd(g)E \cup \{g, r(g)\}, & \text{se } E \subseteq X_{g^{-1}}, \\ \{g, r(g)\}, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} gE \cup \{g, r(g)\}, & \text{se } E \subseteq X_{g^{-1}}, \\ \{g, r(g)\}, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \phi_g(E) = \lambda(g)(E).
\end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 2.1.3, existe um único homomorfismo de semigrupoides $\Lambda : \mathcal{S}(\mathcal{G}) \to \mathcal{F}(\mathcal{P}_r(\mathcal{G}))$ com $\Lambda([g]) = \phi_g$, para todo $g \in \mathcal{G}$.

Dado $\alpha = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2} \cdots \varepsilon_{r_n}[g] \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$ como na Proposição 2.1.7, temos que

$$\begin{aligned}
&\Lambda(\alpha)(\{d(g)\}) = \Lambda(\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2} \cdots \varepsilon_{r_n}[g])(\{d(g)\}) \\
&= \Lambda([r_1])\Lambda([r_1^{-1}]) \cdots \Lambda([r_n])\Lambda([r_n^{-1}])\Lambda([g])(\{d(g)\}) \\
&= \Lambda([r_1])\Lambda([r_1^{-1}]) \cdots \Lambda([r_n])\Lambda([r_n^{-1}])(\{g, r(g)\}) \\
&= \Lambda([r_1])\Lambda([r_1^{-1}]) \cdots \Lambda([r_n])(\{r_n^{-1}g, r_n^{-1}r(g), r_n^{-1}, r(r_n^{-1})\}) \\
&= \Lambda([r_1])\Lambda([r_1^{-1}]) \cdots \Lambda([r_n])(\{r_n^{-1}g, r_n^{-1}, r(r_n^{-1})\}) \\
&= \Lambda([r_1])\Lambda([r_1^{-1}]) \cdots \Lambda([r_{n-1}^{-1}])(\{r_n r_n^{-1}g, r_n r_n^{-1}, r_n r(r_n^{-1}), r_n, r(r_n)\}) \\
&= \Lambda([r_1])\Lambda([r_1^{-1}]) \cdots \Lambda([r_{n-1}^{-1}])(\{g, r_n, r(g)\}) \\
&= \cdots = \{g, r_1, \ldots, r_n, r(g)\}.
\end{aligned}$$

Essa escrita está bem definida pois $r_i \in X_g$ implica $r(r_i) = r(g)$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Usaremos os homomorfismos ∂ e Λ para provar a unicidade da decomposição dos elementos de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ na forma padrão.

Proposição 2.1.9. *A escrita dos elementos de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ na forma padrão é única a menos da ordem dos ε's.*

Demonstração. Seja $\alpha \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$ tal que $\alpha = \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[g]$, onde $r_1, \ldots, r_n, g \in X_g$ como na Proposição 2.1.7. Suponha que $\varepsilon_{l_1} \cdots \varepsilon_{l_m}[h]$ é outra decomposição de α, com $l_1, \ldots, l_m, h \in X_h$ na forma padrão. Desta forma,

$$g = \partial(\varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[g]) = \partial(\alpha) = \partial(\varepsilon_{l_1} \cdots \varepsilon_{l_m}[h]) = h, \tag{2.1}$$

Portanto $g = h$, o que implica $\varepsilon_{l_1} \cdots \varepsilon_{l_m}[h] = \varepsilon_{l_1} \cdots \varepsilon_{l_m}[g]$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \{r_1, \ldots, r_n, g, r(g)\} &= \Lambda(\varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[g])(\{d(g)\}) = \Lambda(\alpha) \\ &= \Lambda(\varepsilon_{l_1} \cdots \varepsilon_{l_m}[g])(\{d(g)\}) = \{l_1 \ldots, l_m, g, r(g)\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \{r_1, \ldots, r_n\} &= \{r_1, \ldots, r_n, g, r(g)\} \setminus \{g, r(g)\} \\ &= \{l_1 \ldots, l_m, g, r(g)\} \setminus \{g, r(g)\} = \{l_1 \ldots, l_m\}. \end{aligned}$$

Isso é suficiente para concluir a prova, pois os ε's comutam e as condições (i) e (ii) da forma padrão juntas com (2.1) e (2.2) garantem que $m = n$. $\square$

Finalmente podemos provar o principal teorema dessa seção.

Teorema 2.1.10. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Então $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ é um semigrupoide inverso.*

Demonstração. Seja $\alpha = \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[g] \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$. Já sabemos que

$$\alpha^* = [g^{-1}]\varepsilon_{r_n} \cdots \varepsilon_{r_1}$$

é tal que $\exists \alpha\alpha^*$, $\exists \alpha^*\alpha$, $\alpha\alpha^*\alpha = \alpha$ e $\alpha^*\alpha\alpha^* = \alpha^*$.

Suponha que exista $\beta \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$ tal que $\exists \alpha\beta$, $\exists \beta\alpha$, $\alpha\beta\alpha = \alpha$ e $\beta\alpha\beta = \beta$. Escrevemos β^* na forma padrão $\beta^* = \varepsilon_{l_1} \cdots \varepsilon_{l_m}[h]$. Assim, $\beta = [h^{-1}]\varepsilon_{l_m} \cdots \varepsilon_{l_1}$. Como $\exists \alpha\beta$ e $\exists \beta\alpha$, então $\exists gh^{-1}$. Mas

$$g = \partial(\alpha) = \partial(\alpha\beta\alpha) = \partial(\alpha)\partial(\beta)\partial(\alpha) = gh^{-1}g.$$

Note que $\exists h^{-1}g$, pois $\exists h^{-1}l_m$, $\exists l_m^{-1}l_{m-1}$, $\ldots$, $\exists l_2^{-1}l_1$, $\exists l_1^{-1}r_1$, $\exists r_1^{-1}r_2$, $\ldots$, $\exists r_n^{-1}g$, de onde segue que $\exists h^{-1}l_m l_m^{-1}l_{m-1} \cdots l_2^{-1}l_1 l_1^{-1}r_1 r_1^{-1}r_2 \cdots r_n^{-1}g$ e esse produto é igual a $h^{-1}g$. Portanto $\exists gh^{-1}g$. Pela lei do cancelamento e unicidade do inverso em grupoides, obtemos que $h = g$. Então $\beta = [g^{-1}]\varepsilon_{l_m} \cdots \varepsilon_{l_1}$.

Observe que

$$\begin{aligned}\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[g] = \alpha = \alpha\beta\alpha &= \varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[g][g^{-1}]\varepsilon_{l_m}\cdots\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[g]\\ &= \varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}\varepsilon_g\varepsilon_{l_m}\cdots\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[g]\\ &= \varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{l_m}\cdots\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}\varepsilon_g[g]\\ &= \varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{l_1}\cdots\varepsilon_{l_m}[g].\end{aligned}$$

Pela unicidade da decomposição de elementos de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ na forma padrão, temos

$$\{r_1,\dots,r_n\}\cup\{l_1,\dots,l_m\} = \{r_1,\dots,r_n\},$$

de onde segue

$$\{l_1,\dots,l_m\}\subseteq\{r_1,\dots,r_n\}.$$

Para a inclusão contrária, repare que

$$\begin{aligned}[g^{-1}]\varepsilon_{l_1}\cdots\varepsilon_{l_m} = \beta = \beta\alpha\beta &= [g^{-1}]\varepsilon_{l_m}\cdots\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[g][g^{-1}]\varepsilon_{l_m}\cdots\varepsilon_{l_1}\\ &= [g^{-1}]\varepsilon_{l_1}\cdots\varepsilon_{l_m}\varepsilon_g\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}\\ &= [g^{-1}]\varepsilon_g\varepsilon_{l_1}\cdots\varepsilon_{l_m}\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}\\ &= [g^{-1}]\varepsilon_{l_1}\cdots\varepsilon_{l_m}\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}.\end{aligned}$$

Os cálculos são similares ao caso $\alpha\beta\alpha$. Pela unicidade da decomposição na forma padrão, obtemos

$$\{l_1,\dots,l_m\}\supseteq\{r_1,\dots,r_n\}.$$

Então $\{l_1,\dots,l_m\} = \{r_1,\dots,r_n\}$, isto é, $\beta = \alpha^*$. $\square$

Observação 2.1.11. Seja $\mathcal{G}$ um grupoide e considere $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ o semigrupoide inverso de Exel associado a $\mathcal{G}$. Temos que $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ é, na verdade, uma categoria inversa. De fato, dado $\alpha = \varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[g]\in\mathcal{S}(\mathcal{G})$, podemos definir

$$\begin{aligned}r(\alpha) = r([r_1]) =&[r(r_1)] = [r(g)] = [r(\partial(\alpha))],\\ d(\alpha) = d([g]) &= [d(g)] = [d(\partial(\alpha))],\end{aligned}$$

de forma que $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ pode ser visto como uma categoria. A compatibilidade das estruturas segue da Proposição 1.1.11.

2.2 Correspondência entre Ações Parciais de Grupoide e Ações de Semigrupoide Inverso

Nesta seção estudaremos a interação entre ações de semigrupoide inverso de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ e ações parciais de grupoide de $\mathcal{G}$, bem como a relação entre seus produtos cruzados algébricos. O próximo lema nos dá uma caracterização dos elementos idempotentes em $\mathcal{S}(\mathcal{G})$.

Lema 2.2.1. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Um elemento $\alpha \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$ é idempotente se, e somente se, a forma padrão de α é $\alpha = \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}$.*

Demonstração. Já sabemos que elementos da forma $\varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}$, com $r_i \in X_{r_n}$, para todo $i = 1, \ldots, n$, são idempotentes, pois cada ε_{r_i} é idempotente e comuta com todos ε_{r_j}.

Agora, dado $\alpha \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$, escrevemos $\alpha = \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[g]$ na forma padrão, com $r_1, \ldots, r_n \in X_g$. Suponha que α é idempotente. Então $\exists \alpha^2$ e $\alpha^2 = \alpha$. Isto é, $d(g) = r(r_1) = r(g)$, e

$$
\begin{aligned}
\alpha^2 &= (\varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}[g])(\varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}[g]) \\
&= \varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n} \varepsilon_{gr_1} \ldots \varepsilon_{gr_n}[g]^2 \\
&= \varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n} \varepsilon_{gr_1} \ldots \varepsilon_{gr_n} \varepsilon_g [g^2].
\end{aligned}
$$

Da igualdade $\alpha^2 = \alpha$ e da unicidade da decomposição na forma padrão, obtemos $g^2 = g$, isto é, $g = r(g)$, de onde segue que $gr_i = r(g)r_i = r(r_i)r_i = r_i$. Assim, $\alpha = \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}$ como esperávamos. □

A seguinte proposição vai relacionar a ordem de um grupoide conexo finito $\mathcal{G}$ com a ordem de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$.

Proposição 2.2.2. *Seja $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0^2 \times G$ um grupoide conexo finito, onde $\mathcal{G}_0^2$ é o grupoide grosseiro associado a $\mathcal{G}_0$ e G é um grupo de isotropia de $\mathcal{G}$. Suponha que $|\mathcal{G}_0| = k$ e $|G| = n$. Então $|\mathcal{S}(\mathcal{G})| = k2^{nk-2}(nk+1)$.*

Demonstração. Sabemos que $|\mathcal{G}| = k^2 n$. Considere os conjuntos da forma X_e, com $e \in \mathcal{G}_0$. Temos que

$$|X_e| = |\mathcal{G}_0||G| = kn.$$

Além disso, $E(\mathcal{S}(\mathcal{G})) = \bigcup_{e \in \mathcal{G}_0} E_e$, onde $E_e = \{\varepsilon \in E(\mathcal{S}(\mathcal{G})) : \partial(\varepsilon) = e\}$. O Lema 2.2.1 nos garante que

$$E_e = \{\varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_m} : r_1, \ldots, r_m \in X_e, 1 \leq m \leq nk-1\} \cup \{\varepsilon_e = [e]\}.$$

Desta forma, obtemos

$$|E_e| = 1 + \sum_{i=1}^{nk-1} \binom{nk-1}{i} = (2^{nk-1} - 1) + 1 = 2^{nk-1}.$$

Note agora que

$$\mathcal{S} = \bigcup_{e \in \mathcal{G}_0} \mathcal{S}_e,$$

onde

$$\mathcal{S}_e = \{\varepsilon[g] : \varepsilon \in E_e, g \in X_e, \varepsilon_g \text{ não aparece na decomposição de } \varepsilon\}.$$

Defina $E_{e,g} = E_e \setminus \{\varepsilon \in E_e : \varepsilon_g \text{ aparece na decomposição de } \varepsilon\}$. Podemos calcular de forma análoga que $|E_{e,g}| = 2^{nk-2}$.

Portanto, $|\mathcal{S}_e| = |E_e| + \sum_{e \neq g \in X_e} |E_{e,g}| = 2^{nk-1} + 2^{nk-2}(nk-1) = 2^{nk-2}(nk+1)$. Note que essa contagem não depende do elemento $e \in \mathcal{G}_0$ escolhido, devido a simetria de um grupoide conexo. Desta forma,

$$|\mathcal{S}(\mathcal{G})| = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} |\mathcal{S}_e| = \sum_{i=1}^{k} 2^{nk-2}(nk+1) = k2^{nk-2}(nk+1). \qquad \square$$

Com essa proposição podemos calcular a ordem de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ para qualquer grupoide finito $\mathcal{G}$. De fato, como todo grupoide finito é uma união disjunta de grupoides conexos finito, suponha que $\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{G}_i$, onde cada $\mathcal{G}_i$ é um grupoide conexo. Para calcular a ordem de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$, basta notar que $\mathcal{S}(\mathcal{G}) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{S}(\mathcal{G}_i)$, de forma que $|\mathcal{S}(\mathcal{G})| = \sum_{i=1}^{n} |\mathcal{S}(\mathcal{G}_i)|$.

Exemplo 2.2.3. Seja $\mathcal{G} = \{r(g), d(g), g, g^{-1}, x, gx, xg^{-1}, gxg^{-1}\} \cup K$, onde $x = x^{-1}$, $d(x) = d(g)$ e $K = \{e, a, b, ab\}$ é o grupo de Klein. Temos que $\mathcal{G}_0 = \{d(g), r(g), e\}$ e

$$\begin{aligned} X_{r(g)} &= \{y \in \mathcal{G} : r(y) = r(g)\} = \{r(g), g, gx, gxg^{-1}\} \\ X_{d(g)} &= \{y \in \mathcal{G} : r(y) = d(g)\} = \{d(g), g^{-1}, xg^{-1}, x\} \\ X_e &= \{y \in \mathcal{G} : r(y) = e\} = K. \end{aligned}$$

Desta forma, obtemos

$$E(\mathcal{S}(\mathcal{G})) = E_{r(g)} \cup E_{d(g)} \cup E_e,$$

onde

$$\begin{aligned}
E_{r(g)} &= \{\varepsilon_g, \varepsilon_{gx}, \varepsilon_{gxg^{-1}}, \varepsilon_g\varepsilon_{gx}, \varepsilon_g\varepsilon_{gxg^{-1}}, \varepsilon_{gx}\varepsilon_{gxg^{-1}}, \varepsilon_g\varepsilon_{gx}\varepsilon_{gxg^{-1}}, [r(g)] = \varepsilon_{r(g)}\} \\
E_{d(g)} &= \{\varepsilon_{g^{-1}}, \varepsilon_{xg^{-1}}, \varepsilon_x, \varepsilon_{g^{-1}}\varepsilon_{xg^{-1}}, \varepsilon_{g^{-1}}\varepsilon_x, \varepsilon_{xg^{-1}}\varepsilon_x, \varepsilon_{g^{-1}}\varepsilon_{xg^{-1}}\varepsilon_x, [d(g)] = \varepsilon_{d(g)}\} \\
E_e &= \{\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_{ab}, \varepsilon_a\varepsilon_b, \varepsilon_a\varepsilon_{ab}, \varepsilon_b\varepsilon_{ab}, \varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_{ab}, [e] = \varepsilon_e\}.
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\mathcal{S}(\mathcal{G}) = \mathcal{S}_{r(g)} \cup \mathcal{S}_{d(g)} \cup \mathcal{S}_e,$$

onde

$$\mathcal{S}_f = \{\varepsilon[y] : \varepsilon \in E_f, y \in X_f\},$$

para todo $f \in \mathcal{G}_0$. Como a componente conexa $\mathcal{G} \setminus K \simeq \{r(g), d(g)\}^2 \times \mathbb{Z}_2$, temos que essa componente contribui com $2 \cdot 2^{2\cdot 2-2}(2 \cdot 2 + 1) = 2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$ elementos, enquanto a componente conexa K contribui com $2^{4-2}(4 + 1) = 4 \cdot 5 = 20$ elementos. Logo, $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ possui 60 elementos.

Exemplo 2.2.4. (União disjunta de grupos) Seja G_i um grupo para $i = 1, \dots, n$, e $\mathcal{G} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$ o grupoide construído via união disjunta dos G_i, onde $|G_i| = n_i$. Então $\mathcal{S}(\mathcal{G}) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{S}(G_i)$. Além disso, $|\mathcal{G}| = \sum\limits_{i=1}^{n} n_i$ e $|\mathcal{S}(\mathcal{G})| = \sum\limits_{i=1}^{n} |\mathcal{S}(G_i)| = \sum\limits_{i=1}^{n} 2^{n_i-2}(n_i + 1)$.

Podemos enunciar o principal resultado dessa seção. Os próximos resultados serão consequências da correspondência apresentada a seguir.

Teorema 2.2.5. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{G}$ um grupoide. Existe uma correspondência um para um entre*

(a) *ações parciais de grupoide de $\mathcal{G}$ em X;*

(b) *ações de semigrupoide inverso de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ em X.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Seja $\alpha : \mathcal{G} \to \mathcal{I}_s(X)$ um homomorfismo parcial, isto é, uma ação parcial de $\mathcal{G}$ em X. Pelo Lema 1.2.6 e pela Proposição 2.1.3, existe $\beta : \mathcal{S}(\mathcal{G}) \to \mathcal{I}_s(X)$ um homomorfismo de semigrupoides tal que $\beta([g]) = \alpha(g)$. Como β é um homomorfismo, já temos que β é uma ação de semigrupoide inverso de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ em X.

(b) $\Rightarrow$ (a): Seja β uma ação de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ em X. Defina $\alpha(g) = \beta([g])$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Note que se $(g, h) \in \mathcal{G}_2$ e $e \in \mathcal{G}_0$, então

$$\begin{aligned}
\alpha(g) \circ \alpha(h) \circ \alpha(h^{-1}) &= \beta([g]) \circ \beta([h])\beta([h^{-1}]) = \beta([g][h][h^{-1}]) \\
&= \beta([gh][h^{-1}]) = \beta([gh]) \circ \beta([h^{-1}]) = \alpha(gh) \circ \alpha(h^{-1}).
\end{aligned}$$

Mais ainda, como $\mathcal{G}_0 = E(\mathcal{G})$, segue que e é idempotente e $[e] = \varepsilon_e$ também o é. Assim,

$$\alpha(e) = \beta([e]) = Id_{E_{[e]}} = Id_{\mathrm{dom}(\beta([e]))} = Id_{\mathrm{dom}(\alpha(e))},$$

Isso conclui a demonstração pelo Lema 1.2.6. □

Como a ordem parcial natural de um semigrupoide inverso possui um papel importante no produto cruzado, precisamos entender como ela funciona em $\mathcal{S}(\mathcal{G})$.

Lema 2.2.6. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Se $\alpha, \beta \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$ são tais que $\alpha = \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[g]$, $\beta = \varepsilon_{l_1} \cdots \varepsilon_{l_m}[h]$ e $\alpha \preceq \beta$, então $g = h$ e $\{l_1, \ldots, l_m\} \subseteq \{r_1, \ldots, r_n\}$.*

Demonstração. Como $\alpha \preceq \beta$, existe um idempotente $\gamma \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$ tal que $\exists \beta\gamma$ e $\alpha = \beta\gamma$. Pelo Lema 2.2.1 sabemos que $\gamma = \varepsilon_{p_1} \cdots \varepsilon_{p_k}$ na forma padrão (onde $p_1, \ldots, p_k \in X_{d(h)}$). Então,

$$\varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[g] = \alpha = \beta\gamma = \varepsilon_{l_1} \cdots \varepsilon_{l_m}[h]\varepsilon_{p_1} \cdots \varepsilon_{p_k} = \varepsilon_{l_1} \cdots \varepsilon_{l_m}\varepsilon_{hp_1} \cdots \varepsilon_{hp_k}[h].$$

O resultado segue agora da unicidade da decomposição na forma padrão em $\mathcal{S}(\mathcal{G})$. □

Lema 2.2.7. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Dados $r_1, \ldots, r_n, g, h \in \mathcal{G}$, $r_i \in X_g$ para todo $i = 1, \ldots, n$, $d(g) = r(h)$, temos*

(i) $E_{[g][h]} = E_{[g]} \cap E_{[gh]}$;

(ii) $E_{\varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[g]} \subseteq E_{[g]}$.

Demonstração. (i):

$$\begin{aligned} E_{[g][h]} &= E_{[g][g^{-1}][g][h]} = E_{[g][g^{-1}][gh]} \\ &= \beta_{[g]}(E_{[g^{-1}][gh]}) = \beta_{[g]} \circ \beta_{[g^{-1}]}(E_{[gh]}) = E_{[g]} \cap E_{[gh]}. \end{aligned}$$

(ii): Segue da Proposição 1.2.13, item (iv), escrevendo

$$\varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[g] = [g]\varepsilon_{g^{-1}r_1} \cdots \varepsilon_{g^{-1}r_n}.$$ □

O próximo lema é um lema técnico que antecede o segundo resultado mais importante dessa seção. Ele nos dará duas relações importantes envolvendo produtos cruzados.

Lema 2.2.8. *Sejam A uma R-álgebra semiprima, $\mathcal{G}$ um grupoide e*

$$\beta = (\{E_s\}_{s \in \mathcal{S}(\mathcal{G})}, \{\beta_s\}_{s \in \mathcal{S}(\mathcal{G})})$$

uma ação de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ em A. Para $r_1, \ldots, r_n, g, h \in \mathcal{G}$, tais que $\exists gh$, $r(r_i) = r(g)$, para todo $i = 1, \ldots, n$, as igualdades abaixo valem em $A \ltimes^a_\beta \mathcal{S}(\mathcal{G})$:

(i) $\overline{a\delta_{[g][h]}} = \overline{a\delta_{[gh]}}$, *para todo $a \in E_{[g][h]}$;*

(ii) $\overline{a\delta_{\varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[g]}} = \overline{a\delta_{[g]}}$, *para todo $a \in E_{\varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[g]}$.*

Demonstração. (i): Como $E_{[g][h]} \subseteq E_{[gh]}$ do Lema 2.2.7, podemos escrever $a\delta_{[gh]}$. Observe agora que

$$[g][h] \preceq [gh], \text{ pois } [g][h] = [g][h][h^{-1}][h] = [gh][h^{-1}][h] = [gh]\varepsilon_{h^{-1}}$$

e $\varepsilon_{h^{-1}}$ é idempotente. Então, $a\delta_{[g][h]} - a\delta_{[gh]} \in N$.

(ii): Já que $E_{\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[g]} \subseteq E_{[g]}$ podemos escrever $a\delta_{[g]}$. Repare que

$$\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[g] = [g]\varepsilon_{g^{-1}r_1}\cdots\varepsilon_{g^{-1}r_n}$$

e $\varepsilon_{g^{-1}r_1}\cdots\varepsilon_{g^{-1}r_n} \in E(\mathcal{S}(\mathcal{G}))$, de onde $\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[g] \preceq [g]$. Assim, $a\delta_{\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[g]} - a\delta_{[g]} \in N$. □

Teorema 2.2.9. *Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide, A uma R-álgebra semiprima e α uma ação parcial de grupoide de $\mathcal{G}$ em A. Seja ainda β a ação de semigrupoide inverso de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ em A associada a α como no Teorema 2.2.5. Então $A \ltimes_\alpha^a \mathcal{G} \simeq A \ltimes_\beta^a \mathcal{S}(\mathcal{G})$.*

Demonstração. Defina

$$\begin{aligned} \varphi : A \ltimes_\alpha^a \mathcal{G} &\to A \ltimes_\beta^a \mathcal{S}(\mathcal{G}) \\ a\delta_g &\mapsto \overline{a\delta_{[g]}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \psi : L &\to A \ltimes_\alpha^a \mathcal{G} \\ a\delta_\gamma &\mapsto a\delta_{\partial(\gamma)}. \end{aligned}$$

Vamos provar que φ e ψ são homomorfismos de R-álgebras. Sejam

$$\sum_{g\in\mathcal{G}} a_g\delta_g, \sum_{g\in\mathcal{G}} b_g\delta_g \in A \ltimes_\alpha^a \mathcal{G},$$

$a\delta_g, b\delta_h \in A \ltimes_\alpha^a \mathcal{G}$ e $r \in R$. Temos que

$$\begin{aligned} \varphi\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} a_g\delta_g + \sum_{g\in\mathcal{G}} b_g\delta_g\right) &= \varphi\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} (a_g+b_g)\delta_g\right) = \sum_{g\in\mathcal{G}} \varphi((a_g+b_g)\delta_g) \\ &= \sum_{g\in\mathcal{G}} \overline{(a_g+b_g)\delta_{[g]}} = \sum_{g\in\mathcal{G}} (\overline{a_g\delta_{[g]}} + \overline{b_g\delta_{[g]}}) \\ &= \sum_{g\in\mathcal{G}} \overline{a_g\delta_{[g]}} + \sum_{g\in\mathcal{G}} \overline{b_g\delta_{[g]}} = \sum_{g\in\mathcal{G}} \varphi(a_g\delta_g) + \sum_{g\in\mathcal{G}} \varphi(b_g\delta_{[g]}) \\ &= \varphi\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} a_g\delta_g\right) + \varphi\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} b_g\delta_g\right), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r\varphi\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} a_g\delta_g\right) &= r\sum_{g\in\mathcal{G}} \overline{a_g\delta_{[g]}} = \sum_{g\in\mathcal{G}} r(\overline{a_g\delta_{[g]}}) \\
&= \sum_{g\in\mathcal{G}} \overline{ra_g\delta_{[g]}} = \sum_{g\in\mathcal{G}} \varphi(ra_g\delta_g) \\
&= \varphi\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} ra_g\delta_g\right) = \varphi\left(r\sum_{g\in\mathcal{G}} a_g\delta_g\right)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\varphi((a\delta_g)(b\delta_h)) &= \begin{cases} \varphi(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b)\delta_{gh}), & \text{se } \exists gh \\ \varphi(0), & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \overline{\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b)\delta_{[gh]}}, & \text{se } \exists gh \\ \overline{0}, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \overline{\beta_{[g]}(\beta_{[g^{-1}]}(a)b)\delta_{[gh]}}, & \text{se } \exists gh \\ \overline{0}, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \overline{\beta_{[g]}(\beta_{[g^{-1}]}(a)b)\delta_{[g][h]}}, & \text{se } \exists gh \\ \overline{0}, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \overline{a\delta_{[g]}} \cdot \overline{b\delta_{[h]}} = \varphi(a\delta_g)\varphi(b\delta_h).
\end{aligned}
$$

Sejam agora

$$
\sum_{\gamma\in\mathcal{S}(\mathcal{G})} a_\gamma\delta_\gamma,\ \sum_{\gamma\in\mathcal{S}(\mathcal{G})} b_\gamma\delta_{[\gamma]} \in L,
$$

$a\delta_\gamma, b\delta_\lambda \in L$ e $r \in R$. Temos que

$$
\begin{aligned}
\psi\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{S}(\mathcal{G})} a_\gamma\delta_\gamma + \sum_{\gamma\in\mathcal{S}(\mathcal{G})} b_\gamma\delta_{[\gamma]}\right) &= \psi\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{S}(\mathcal{G})} (a_\gamma + b_\gamma)\delta_\gamma\right) = \sum_{\gamma\in\mathcal{S}(\mathcal{G})} \psi((a_\gamma + b_\gamma)\delta_\gamma) \\
&= \sum_{\gamma\in\mathcal{S}(\mathcal{G})} (a_\gamma + b_\gamma)\delta_{\partial(\gamma)} = \sum_{\gamma\in\mathcal{S}(\mathcal{G})} a_\gamma\delta_{\partial(\gamma)} + \sum_{\gamma\in\mathcal{S}(\mathcal{G})} b_\gamma\delta_{\partial(\gamma)} \\
&= \psi\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{S}(\mathcal{G})} a_\gamma\delta_\gamma\right) + \psi\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{S}(\mathcal{G})} b_\gamma\delta_\gamma\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r\psi\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{S}(\mathcal{G})} a_\gamma\delta_\gamma\right) &= r\sum_{\gamma\in\mathcal{S}(\mathcal{G})} a_\gamma\delta_{\partial(\gamma)} = \sum_{\gamma\in\mathcal{S}(\mathcal{G})} r(a_\gamma\delta_{\partial(\gamma)}) = \sum_{\gamma\in\mathcal{S}(\mathcal{G})} (ra_\gamma)\delta_{\partial(\gamma)} \\
&= \sum_{\gamma\in\mathcal{S}(\mathcal{G})} \psi((ra_\gamma)\delta_\gamma) = \varphi\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{S}(\mathcal{G})} r(a_\gamma\delta_\gamma\right) = \varphi\left(r\sum_{\gamma\in\mathcal{S}(\mathcal{G})} a_\gamma\delta_\gamma\right)
\end{aligned}
$$

e

$$\psi((a\delta_\gamma)(b\delta_\lambda)) = \begin{cases} \psi(\beta_\gamma(\beta_\gamma^{-1}(a)b)\delta_{\gamma\lambda}), & \text{se } \exists\gamma\lambda, \\ \psi(0), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \beta_\gamma(\beta_\gamma^{-1}(a)b)\delta_{\partial(\gamma\lambda)}, & \text{se } \exists\gamma\lambda, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha_{\partial(\gamma)}(\beta_{\partial(\gamma)^{-1}}(a)b)\delta_{\partial(\gamma)\partial(\lambda)}, & \text{se } \exists\partial(\gamma)\partial(\lambda), \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= (a\delta_{\partial(\gamma)})(b\delta_{\partial(\lambda)}) = \psi(a\delta_\gamma)\psi(b\delta_\lambda).$$

Note agora que $N \subseteq \ker\psi$. De fato, se $\gamma \preceq \lambda$, então $\partial(\gamma) = \partial(\lambda)$, de onde segue que

$$\psi(a\delta_\gamma - a\delta_\lambda) = a\delta_{\partial(\gamma)} - a\delta_{\partial(\lambda)} = a\delta_{\partial(\gamma)} - a\delta_{\partial(\gamma)} = 0.$$

Como todos os geradores de N estão no núcleo de ψ, é fácil ver que $N \subseteq \ker\psi$. Portanto, existe um único homomorfismo de R-álgebra $\overline{\psi} : A \ltimes_\beta^a \mathcal{S}(\mathcal{G}) \to A \ltimes_\alpha^a \mathcal{G}$ tal que $\overline{\psi}(\overline{a\delta_\gamma}) = a\delta_{\partial(\gamma)}$. Note agora que

$$\overline{\psi}(\varphi(a\delta_g)) = \overline{\psi}(\overline{a\delta_{[g]}}) = a\delta_{\partial([g])} = a\delta_g$$

e

$$\varphi(\overline{\psi}(\overline{a\delta_\gamma})) = \varphi(a\delta_{\partial(\gamma)}) = \overline{a\delta_{[\partial(\gamma)]}} = \overline{a\delta_\gamma},$$

onde a última igualdade segue do Lema 2.2.8. Portanto, φ e $\overline{\psi}$ são inversos um do outro, garantindo o isomorfismo desejado. $\square$

Capítulo 3

Relações Biunívocas entre Representações em Espaços de Hilbert

O principal objetivo desse capítulo é construir uma C^*-álgebra $C^*_p(\mathcal{G})$, chamada C^*-álgebra grupoide parcial de Exel, a partir de um grupoide $\mathcal{G}$ de forma que as representações parciais de grupoide em espaços de Hilbert de $\mathcal{G}$ estejam em correspondência com as representações de semigrupoide inverso em espaços de Hilbert de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ e as representações de C^*-álgebra em espaços de Hilbert de $C^*_p(\mathcal{G})$. Essa C^*-álgebra é dada em termos de um produto cruzado envolvendo uma C^*-álgebra de projeções construída a partir do grupoide $\mathcal{G}$ e uma ação parcial apropriada.

3.1 Representações em Espaços de Hilbert

Nesta seção definiremos representações parciais de grupoides em espaços de Hilbert e representações de semigrupoides inversos em espaços de Hilbert. Além disso, provaremos que existe uma relação biunívoca entre representações parciais de um grupoide $\mathcal{G}$ em um espaço de Hilbert H e as representações de semigrupoide inverso de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ no mesmo espaço de Hilbert H.

Definição 3.1.1. Sejam $\mathcal{S}$ um semigrupoide inverso e H um espaço de Hilbert. Uma representação de $\mathcal{S}$ em H é uma aplicação $\pi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}(H)$ tal que

(i) se $\exists st$, então $\pi(st) = \pi(s)\pi(t)$;

(ii) $\pi(s^{-1}) = \pi(s)^*$;

(iii) $\pi(e) = \mathrm{Id}_{\mathrm{dom}(\pi(e)))}$, para todo $e \in E(\mathcal{S})$,

onde $\mathcal{B}(H)$ é a coleção de todos os operadores lineares limitados de H.

Definição 3.1.2. Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide e H um espaço de Hilbert. Uma representação parcial de $\mathcal{G}$ em H é uma aplicação $\pi : \mathcal{G} \to \mathcal{B}(H)$ tal que

(i) $\pi(g)\pi(h)\pi(h^{-1}) = \pi(gh)\pi(h^{-1})$, para todo $(g, h) \in \mathcal{G}_2$;

(ii) $\pi(s^{-1}) = \pi(s)^*$;

(iii) $\pi(e) = \mathrm{Id}_{\mathrm{dom}(\pi(e))}$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$,

onde $\mathcal{B}(H)$ é a coleção de todos os operadores lineares limitados de H. Neste caso, também vale

$$\pi(g^{-1})\pi(g)\pi(h) = \pi(g^{-1})\pi(gh), \text{ para todo } (g, h) \in \mathcal{G}_2.$$

O próximo resultado relaciona as representações parciais de $\mathcal{G}$ em H e as representações de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ em H.

Proposição 3.1.3. *Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide e H um espaço de Hilbert. Existe uma correspondência biunívoca entre*

(a) *representações parciais de grupoide de $\mathcal{G}$ em H;*

(b) *representações de semigrupoide inverso de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ em H.*

Demonstração. Uma representação parcial de grupoide de $\mathcal{G}$ em H satisfaz as condições da Proposição 2.1.3. Portanto, existe um homomorfismo de semigrupoides $\overline{\pi} : \mathcal{S}(\mathcal{G}) \to \mathcal{B}(H)$ tal que $\overline{\pi}([g]) = \pi(g)$ para todo $g \in \mathcal{G}$. Isso já nos garante as condições (i) e (iii) de ação de semigrupoide inverso em espaços de Hilbert.

Para mostrar (ii), seja $\alpha = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2} \cdots \varepsilon_{r_n}[g] \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$ tal que $r_1, \ldots, r_n \in X_g$, como na Proposição 2.1.7. Já sabemos que podemos escrever

$$\alpha^* = [g^{-1}]\varepsilon_{r_n} \cdots \varepsilon_{r_1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\overline{\pi}(\alpha^*) &= \overline{\pi}([g^{-1}]\varepsilon_{r_n} \cdots \varepsilon_{r_1}) = \overline{\pi}([g^{-1}][r_n][r_n^{-1}] \cdots [r_1][r_1^{-1}]) \\
&= \overline{\pi}([g^{-1}])\overline{\pi}([r_n])\overline{\pi}([r_n^{-1}]) \cdots \overline{\pi}([r_1])\overline{\pi}([r_1^{-1}]) \\
&= \pi(g^{-1})\pi(r_n)\pi(r_n^{-1}) \cdots \pi(r_1)\pi(r_1^{-1}) \\
&= \pi(g)^*\pi(r_n)\pi(r_n)^* \cdots \pi(r_1)\pi(r_1)^* \\
&= (\pi(r_1)\pi(r_1)^* \cdots \pi(r_n)\pi(r_n)^*\pi(g))^* \\
&= (\pi(r_1)\pi(r_1^{-1}) \cdots \pi(r_n)\pi(r_n^{-1})\pi(g))^* \\
&= (\overline{\pi}([r_1])\overline{\pi}([r_1^{-1}]) \cdots \overline{\pi}([r_n])\overline{\pi}([r_n^{-1}])\overline{\pi}([g]))^* \\
&= \overline{\pi}([r_1][r_1^{-1}] \cdots [r_n][r_n^{-1}][g])^* = \overline{\pi}(\varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[g])^* = \overline{\pi}(\alpha)^*,
\end{aligned}$$

que é o que gostaríamos de demonstrar.

Por outro lado, dada uma representação de semigrupoide inverso ρ de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ em H, considere a aplicação

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{G} &\to \mathcal{B}(H) \\ g &\mapsto \pi(g) = \rho([g]). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que π satisfaz as condições de representação parcial de grupoide. Seja $(g, h) \in \mathcal{G}_2$. Vamos provar (i), (ii) e (iii) da Definição 3.1.2.

(i):

$$\begin{aligned} \pi(g)\pi(h)\pi(h^{-1}) &= \rho([g])\rho([h])\rho([h^{-1}]) = \rho([g][h][h^{-1}]) = \rho([gh][h^{-1}]) \\ &= \rho([gh])\rho([h^{-1}]) = \pi(gh)\pi(h^{-1}). \end{aligned}$$

(ii):

$$\pi(g^{-1}) = \rho([g^{-1}]) = \rho([g]^{-1}) = \rho([g])^* = \pi(g)^*.$$

(iii): Seja $e \in \mathcal{G}_0$,

$$\pi(e) = \rho([e]) = \rho(\varepsilon_e) = \mathrm{Id}_{\mathrm{dom}(\rho(\varepsilon_e))} = I_{\mathrm{dom}(\pi(e))}.$$

Portanto, π é uma representação parcial de grupoide de G no espaço de Hilbert H. $\square$

3.2 A C*-Álgebra Grupoide Parcial de Exel

O principal objetivo dessa seção é generalizar a definição de C^*-álgebra grupo parcial [11] para obter a definição de C^*-álgebra grupoide parcial de Exel, e estudar as representações de C^*-álgebra desse objeto em espaços de Hilbert, relacionando-as com a teoria que vimos até aqui.

Já provamos na Proposição 1.3.6 que se $\mathcal{G}$ é um grupoide agindo parcialmente em uma R-álgebra A, então o produto cruzado algébrico $A \ltimes_{\alpha}^{a} \mathcal{G}$ admite uma C^*-álgebra envolvente com relações

$$(a_g\delta_g)^* = \alpha_{g^{-1}}(a_g^*)\delta_{g^{-1}}$$

e

$$\left\| \sum_{g\in G} a_g\delta_g \right\| = \sum_{g\in G} \|a_g\|.$$

Observação 3.2.1. Já vimos que quando A é semiprima

$$A \ltimes_{\alpha}^{a} \mathcal{G} \simeq A \ltimes_{\beta}^{a} \mathcal{S}(\mathcal{G}),$$

onde β é a ação de semigrupoide inverso associada a α como no Teorema 2.2.5. Similarmente definimos o produto cruzado $A \ltimes_\beta \mathcal{S}(\mathcal{G}) = C_e^*(A \ltimes_\beta^a \mathcal{S}(\mathcal{G}))$, obtendo

$$A \ltimes_\alpha \mathcal{G} \simeq A \ltimes_\beta \mathcal{S}(\mathcal{G}).$$

Definição 3.2.2. Vamos definir uma C^*-álgebra $P(\mathcal{G})$ por geradores e relações. Os geradores são os símbolos P_E, onde $E \subseteq \mathcal{G}$ é um subconjunto finito do grupoide $\mathcal{G}$. As relações são

(i) $P_E^* = P_E$;

(ii) $P_E P_F = \begin{cases} P_{E\cup F}, \text{ se } E \cup F \subseteq X_g, \text{ para algum } g \in \mathcal{G}, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$

Observe que se $E \subseteq \mathcal{G}$ é tal que $E \nsubseteq X_g$ para todo $g \in \mathcal{G}$, então $P_E = 0$. A próxima proposição segue diretamente do fato que a união é comutativa e que $E \cup E = E$, para todo conjunto E.

Proposição 3.2.3. *$P(\mathcal{G})$ é uma C^*-álgebra abeliana com $P_\emptyset$ como unidade. Além disso, todo elemento de $P(\mathcal{G})$ é uma projeção.*

Dado $g \in \mathcal{G}$, considere a aplicação $\alpha_g : P(\mathcal{G}) \to P(\mathcal{G})$ definida por

$$\alpha_g(P_E) = \begin{cases} P_{gE}, \text{ se } \exists gx, \text{ para todo } x \in E, \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

isto é,

$$\alpha_g(P_E) = \begin{cases} P_{gE}, \text{ se } E \subseteq X_{g^{-1}}, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Se definirmos $D_g = \overline{\operatorname{span}}\{P_E : g, r(g) \in E \subseteq X_g\}$, o ideal fechado (no sentido topológico) gerado pelos elementos da forma P_E com $E \subseteq X_g$ e $g, r(g) \in E$, temos que $D_g \lhd D_{r(g)} \lhd P(\mathcal{G})$, para todo $g \in \mathcal{G}$, e a restrição de cada α_g para $D_{g^{-1}}$ nos dá uma ação parcial de $\mathcal{G}$ em $P(\mathcal{G})$. Portanto podemos definir o produto cruzado algébrico $P(\mathcal{G}) \ltimes_\alpha^a \mathcal{G}$. Nossa argumentação induz a seguinte definição:

Definição 3.2.4. A C^*-álgebra grupoide parcial de Exel $C_p^*(\mathcal{G})$ é a C^*-álgebra envolvente de $P(\mathcal{G}) \ltimes_\alpha^a \mathcal{G}$, isto é,

$$C_p^*(\mathcal{G}) = P(\mathcal{G}) \ltimes_\alpha \mathcal{G}.$$

A próxima proposição decorre da Proposição 1.2.12 e do fato que $P(\mathcal{G})$ é semiprima pois todos seus ideais são idempotentes.

Proposição 3.2.5. *$C_p^*(\mathcal{G})$ é uma C^*-álgebra associativa.*

Podemos agora dar início ao estudo de representações de C^*-álgebras em espaços de Hilbert.

Definição 3.2.6. Uma representação de C^*-álgebra de uma C^*-álgebra A em um espaço de Hilbert H é um *-homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\phi : A \to \mathcal{B}(H)$.

Definição 3.2.7. Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide, A uma C^*-álgebra e α uma ação parcial de grupoide de $\mathcal{G}$ em A. Dizemos que a tripla $(A, \mathcal{G}, \alpha)$ é um *sistema C^*-dinâmico grupoide parcial*.

Uma *representação covariante* de $(A, \mathcal{G}, \alpha)$ é uma tripla (π, u, H), onde $\pi : A \to \mathcal{B}(H)$ é uma representação de A em um espaço de Hilbert H e $u : \mathcal{G} \to \mathcal{B}(H)$ é uma aplicação dada por $u(g) = u_g$, onde u_g é uma isometria parcial tal que

(i) $u_g \pi(x) u_{g^{-1}} = \pi(\alpha_g(x))$, para todo $x \in D_{g^{-1}}$, para todo $g \in \mathcal{G}$;

(ii) $\pi(x) u_g u_h = \begin{cases} \pi(x) u_{gh}, & \text{se } (g,h) \in \mathcal{G}_2 \text{ e } x \in D_g \cap D_{gh}, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$

(iii) $u_g^* = u_{g^{-1}}$, para todo $g \in \mathcal{G}$.

A definição de representação covariante nos dá o seguinte lema técnico.

Lema 3.2.8. *Seja (π, u, H) uma representação covariante de $(A, \mathcal{G}, \alpha)$. Se $g \in \mathcal{G}$ e $x \in D_g$, então:*

(a) $\pi(x) u_g u_{g^{-1}} = \pi(x)$.

(b) $\pi(x) = u_g u_{g^{-1}} \pi(x)$.

Demonstração. Vamos provar apenas o item (a), sendo o item (b) análogo. Como $D_g = D_g \cap D_{r(g)} = D_g \cap D_{gg^{-1}}$, segue de (ii) da definição de representação covariante que

$$\pi(x) u_g u_{g^{-1}} = \pi(x) u_{r(g)}.$$

Mais ainda, de (i),

$$\pi(x) = u_g u_{g^{-1}} \pi(x) u_g u_{g^{-1}} = u_g u_{g^{-1}} \pi(x) u_{r(g)}.$$

Observe que $x \in D_g = D_g \cap D_g = D_g \cap D_{gd(g)}$, e portanto obtemos, de (ii),

$$\pi(x) u_g u_{d(g)} = \pi(x) u_g.$$

Disto e de (i) garantimos que

$$\pi(\alpha_{g^{-1}}(x)) u_{d(g)} = u_{g^{-1}} \pi(x) u_g u_{d(g)} = u_{g^{-1}} \pi(x) u_g = \pi(\alpha_{g^{-1}}(x)).$$

Mas isso é o mesmo que dizer que

$$\pi(x) u_{d(g)} = \pi(x),$$

para todo $x \in D_{g^{-1}}$, já que $\alpha_{g^{-1}}$ é um isomorfismo. Assim, trocando g por g^{-1}, temos, do fato que $d(g^{-1}) = r(g)$,

$$\pi(x)u_{r(g)} = \pi(x),$$

de onde segue o resultado. $\square$

Seja (π, u, H) uma representação covariante de $(A, \mathcal{G}, \alpha)$. Defina $\pi \times u : A \ltimes_\alpha \mathcal{G} \to \mathcal{B}(H)$ por

$$(\pi \times u)(a_g\delta_g) = \pi(a_g)u_g,$$

estendida linearmente.

Lema 3.2.9. *$\pi \times u$ é um *-homomorfismo.*

Demonstração. Sejam $a_g\delta_g, b_h\delta_h \in A \ltimes_\alpha \mathcal{G}$. Vamos mostrar que

$$(\pi \times u)((a_g\delta_g)(b_h\delta_h)) = (\pi \times u)(a_g\delta_g)(\pi \times u)(b_h\delta_h)$$

e que $(\pi \times u)((a_g\delta_g)^*) = (\pi \times u)(a_g\delta_g)^*$. Isso será suficiente, pois será suficiente estender linearmente os resultados para obter o lema.

Note primeiramente que

$$(\pi \times u)(a_g\delta_g)(\pi \times u)(b_h\delta_h) = \pi(a_g)u_g\pi(b_h)u_h.$$

Como $a_g \in D_g$, podemos usar o item (b) do Lema 3.2.8 para garantir que $\pi(a_g) = u_gu_{g^{-1}}\pi(a_g)$. Portanto,

$$(\pi \times u)(a_g\delta_g)(\pi \times u)(b_h\delta_h) = u_gu_{g^{-1}}\pi(a_g)u_g\pi(b_h)u_h.$$

Observe agora que, de (i) da definição de representação covariante,

$$(\pi \times u)(a_g\delta_g)(\pi \times u)(b_h\delta_h) = u_g\pi(\alpha_{g^{-1}}(a_g))\pi(b_h)u_h = u_g\pi(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)u_h.$$

Já que D_h e $D_{g^{-1}}$ são ideais, temos que $\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h \in D_{g^{-1}} \cap D_h$. Assim,

$$(\pi \times u)(a_g\delta_g)(\pi \times u)(b_h\delta_h) = u_g\pi(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)u_{g^{-1}}u_gu_h = \pi(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h))u_gu_h.$$

Por outro lado,

$$\pi(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h))u_gu_h = \begin{cases} \pi(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h))u_{gh}, & \text{se } (g,h) \in \mathcal{G}_2. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A igualdade acima vale pois $\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h \in D_{g^{-1}} \cap D_h$, de onde segue que se $\exists gh$, então $\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h) \in \alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$. Portanto podemos aplicar (ii).

Entretanto, se $\nexists gh$, então $(a_g\delta_g)(b_h\delta_h) = 0$, de onde segue que

$$(\pi \times u)((a_g\delta_g)(b_h\delta_h)) = (\pi \times u)(0) = (\pi \times u)(0\delta_g) = \pi(0)u_g = 0.$$

Isso é, se $\nexists gh$, então $\pi \times u$ é multiplicativa. Adicionalmente, se $\exists gh$, então

$$\begin{aligned}(\pi \times u)(a_g\delta_g)(\pi \times u)(b_h\delta_h) &= \pi(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h))u_{gh} = (\pi \times u)(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}) \\ &= (\pi \times u)((a_g\delta_g)(b_h\delta_h)).\end{aligned}$$

Portanto, $\pi \times u$ também é multiplicativa quando $\exists gh$, de onde concluímos que π é um homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras já que é linear por definição. Mais ainda,

$$\begin{aligned}(\pi \times u)(a_g\delta_g)^* &= (\pi(a_g)u_g)^* = (u_g)^*\pi(a_g)^* = u_{g^{-1}}\pi(a_g^*) \\ &= u_{g^{-1}}\pi(a_g^*)u_g u_{g^{-1}} = \pi(\alpha_{g^{-1}}(a_g^*))u_{g^{-1}} \\ &= (\pi \times u)(\alpha_{g^{-1}}(a_g^*)\delta_{g^{-1}}) = (\pi \times u)((a_g\delta_g)^*),\end{aligned}$$

isto é, $\pi \times u$ é um *-homomorfismo. □

Podemos enunciar, então, o principal resultado desse capítulo.

Teorema 3.2.10. *Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide e H um espaço de Hilbert. Existe uma correspondência de um para um entre*

(a) *representações parciais de grupoide de $\mathcal{G}$ em H;*

(b) *representações de semigrupoide inverso de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ em H;*

(c) *representações de C^*-álgebra de $C_p^*(\mathcal{G})$ em H.*

Demonstração. Já sabemos da Proposição 3.1.3 que (a) $\Leftrightarrow$ (b). Vamos provar que (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a).

(b) $\Rightarrow$ (c): Sejam $E = \{r_1, \ldots, r_n\} \subseteq \mathcal{G}$ um subconjunto finito de $\mathcal{G}$ e $\pi : \mathcal{S}(\mathcal{G}) \to \mathcal{B}(H)$ uma representação de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ em H. Defina

$$Q_E = \begin{cases} \pi(\varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}), \text{ se } E \subseteq X_g, \text{ para algum } g \in \mathcal{G}, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Note que $Q_E \in \mathcal{B}(H)$ está bem definido, pois se $E \subseteq X_g$ temos que $r(r_i) = r(g)$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Desta forma $d(r_i^{-1}) = r(r_i) = r(r_{i+1})$, de onde segue que $\exists r_i^{-1}r_{i+1}$, para todo $i = 1, \ldots, n-1$, isto é, $\exists \varepsilon_{r_i}\varepsilon_{r_{i+1}}$, para todo $i = 1, \ldots, n-1$.

É claro que $Q_E^2 = Q_E = Q_E^*$. Mais ainda, devido ao fato dos elementos da forma ε_{r_i} serem idempotentes que comutam em $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ quando componíveis, temos que

$$Q_E Q_F = \begin{cases} Q_{E\cup F}, \text{ se } E \cup F \subseteq X_g, \text{ para algum } g \in \mathcal{G}, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Definindo $\rho : P(\mathcal{G}) \to \mathcal{B}(H)$ por $\rho(P_E) = Q_E$, e estendendo linearmente, temos uma representação de C^*-álgebra de $P(\mathcal{G})$ em H. Defina também $u : \mathcal{G} \to \mathcal{B}(H)$ por

$u(g) = u_g = \pi([g])$. Vamos provar que (ρ, u, H) é uma representação covariante de $(P(\mathcal{G}), \mathcal{G}, \alpha)$. De fato, se $E = \{r_1, \ldots, r_n\} \subseteq X_g$ é um subconjunto finito de $\mathcal{G}$, de forma que $P_E \in D_{g^{-1}}$, temos que

$$\begin{aligned} u_g\rho(P_E)u_{g^{-1}} &= \pi([g])Q_E\pi([g^{-1}]) = \pi([g])\pi(\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n})\pi([g^{-1}]) \\ &= \pi([g]\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[g^{-1}]) = \pi(\varepsilon_{gr_1}\cdots\varepsilon_{gr_n}\varepsilon_g) \\ &= Q_{gE\cup\{g,r(g)\}} = \rho(P_{gE\cup\{g,r(g)\}}) = \rho(\alpha_g(P_E)). \end{aligned}$$

Além disso, se $\exists gh$ e $P_E \in D_g \cap D_{gh}$, isto é, se $g, r(g), gh \in E = \{r_1, \ldots, r_n, g, gh, r(g)\}$, então

$$\begin{aligned} \rho(P_E)u_gu_h &= Q_E\pi([g])\pi([h]) = \pi(\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}\varepsilon_g\varepsilon_{gh})\pi([g])\pi([h]) \\ &= \pi(\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}\varepsilon_g\varepsilon_{gh}[g][h]) = \pi(\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{gh}\varepsilon_g[g][h]) \\ &= \pi(\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{gh}\varepsilon_g[gh]) = \pi(\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{gh}\varepsilon_g)\pi([gh]) \\ &= Q_Eu_{gh} = \rho(P_E)u_{gh}. \end{aligned}$$

Se $\nexists gh$, então dado $P_E \in P(\mathcal{G})$ tal que $E = \{r_1, \ldots, r_n\} \subseteq X_g$, temos que

$$\begin{aligned} \rho(P_E)u_gu_h &= Q_E\pi([g])\pi([h]) = \pi(\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[g])\pi(\varepsilon_h[h]) \\ &= \pi([g]\varepsilon_{g^{-1}r_1}\cdots\varepsilon_{g^{-1}r_n})\pi(\varepsilon_h)\pi([h]) = \pi([g])\pi(\varepsilon_{g^{-1}r_1}\cdots\varepsilon_{g^{-1}r_n})\pi(\varepsilon_h)\pi([h]) \\ &= \pi([g])Q_{g^{-1}E}Q_{\{h\}}\pi([h]) = \pi([g])0\pi([h]) = 0, \end{aligned}$$

pois $r(g^{-1}r_i) = r(g^{-1}) = d(g) \neq r(h)$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por outro lado, se $E \subseteq X_k$, para $k \neq g$, podemos garantir que

$$\rho(P_E)u_g = Q_EQ_{\{g\}}\pi([g]) = 0\pi([g]) = 0,$$

com argumentação semelhante ao caso anterior.

Finalmente, dado $g \in \mathcal{G}$,

$$u_g^* = \pi([g])^* = \pi([g]^{-1}) = \pi([g^{-1}]) = u_{g^{-1}}.$$

Portanto, podemos considerar o *-homomorfismo $\rho \times u$, que é uma representação de C^*-álgebra de $C_p^*(\mathcal{G})$ em H.

(c) $\Rightarrow$ (a): Seja $\phi : C_p^*(\mathcal{G}) \to \mathcal{B}(H)$ uma representação de C^*-álgebra. Considere os elementos da forma $a_g = P_{\{r(g),g\}}\delta_g \in C_p^*(\mathcal{G})$. É fácil ver que se $(g,h) \in \mathcal{G}_2$, então

$$\begin{aligned}
a_g a_h a_{h^{-1}} &= (P_{\{r(g),g\}}\delta_g P_{\{r(h),h\}}\delta_h)P_{\{d(h),h^{-1}\}}\delta_{h^{-1}} \\
&= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(P_{\{r(g),g\}})P_{\{r(h),h\}})\delta_{gh}P_{\{d(h),h^{-1}\}}\delta_{h^{-1}} \\
&= \alpha_g(P_{\{g^{-1},d(g)\}}P_{\{r(h),h\}})\delta_{gh}P_{\{d(h),h^{-1}\}}\delta_{h^{-1}} \\
&= \alpha_g(P_{\{g^{-1},d(g),h\}})\delta_{gh}P_{\{d(h),h^{-1}\}}\delta_{h^{-1}} \\
&= P_{\{r(g),g,gh\}}\delta_{gh}P_{\{d(h),h^{-1}\}}\delta_{h^{-1}} \\
&= \alpha_{gh}(\alpha_{(gh)^{-1}}(P_{\{r(g),g,gh\}})P_{\{d(h),h^{-1}\}})\delta_g \\
&= \alpha_{gh}(P_{\{(gh)^{-1},h^{-1},d(h)\}}P_{\{d(h),h^{-1}\}})\delta_g \\
&= \alpha_{gh}(P_{\{(gh)^{-1},h^{-1},d(h)\}})\delta_g = P_{\{r(g),g,gh\}}\delta_g.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
a_{gh}a_{h^{-1}} &= P_{\{r(g),gh\}}\delta_{gh}P_{\{h^{-1},d(h)\}}\delta_{h^{-1}} = \alpha_{gh}(\alpha_{(gh)^{-1}}(P_{\{r(g),gh\}})P_{\{h^{-1},d(h)\}})\delta_g \\
&= \alpha_{gh}(P_{\{(gh)^{-1},d(h)\}}P_{\{h^{-1},d(h)\}})\delta_g = \alpha_{gh}(P_{\{(gh)^{-1},h^{-1},d(h)\}})\delta_g = P_{\{r(g),g,gh\}}\delta_g,
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$a_g a_h a_{h^{-1}} = a_{gh}a_{h^{-1}}.$$

Note agora que

$$a_g^* = (P_{\{r(g),g\}}\delta_g)^* = \alpha_{g^{-1}}(P^*_{\{r(g),g\}})\delta_{g^{-1}} = \alpha_{g^{-1}}(P_{\{r(g),g\}})\delta_{g^{-1}} = P_{\{d(g),g^{-1}\}}\delta_{g^{-1}} = a_{g^{-1}}.$$

Mais ainda,

$$a_e = P_{\{e\}}\delta_e = 1_{D_e},$$

para todo $e \in \mathcal{G}_0$.

Portanto, se definirmos $\pi : \mathcal{G} \to \mathcal{B}(H)$ por $\pi(g) = \phi(a_g)$ temos uma representação parcial de grupoide de $\mathcal{G}$ em H.

□

Capítulo 4

Teoria de Galois para Ação de Semigrupoide Inverso

Vamos construir uma teoria de Galois para semigrupoides inversos utilizando a teoria de Galois para grupoides apresentada em [18]. Para isso, usaremos o Teorema ESN para semigrupoides inversos apresentado nos pré-requisitos para traduzir a teoria do caso de grupoides localmente indutivos para o caso de semigrupoides inversos agindo ortogonalmente em álgebras.

4.1 Ações Ortogonais

Dado um semigrupoide inverso $\mathcal{S}$, o principal objetivo dessa seção é definir um tipo específico de ação de forma que os produtos cruzados de semigrupoide inverso e de grupoide localmente indutivo (de $\mathbb{G}(\mathcal{S})$) sejam isomorfos.

De agora em diante, suponha que R é um anel comutativo, A é uma R-álgebra, $\mathcal{S}$ é um semigrupoide inverso e $\beta = (\{E_s\}_{s\in\mathcal{S}}, \{\beta_s : E_{s^{-1}} \to E_s\}_{s\in\mathcal{S}})$ é uma ação de $\mathcal{S}$ em A onde cada E_s é uma R-álgebra com unidade 1_s. Além disso suponha que $E_s = 1_sA = A1_s$, isto é, que cada 1_s é um idempotente central de A.

Visando relacionar a teoria de Galois para grupoides desenvolvida em [18] com a teoria de Galois para semigrupoides inversos, vamos definir um tipo especial de ação.

Definição 4.1.1. Seja $\mathcal{S}$ um semigrupoide inverso agindo em uma R-álgebra A via ação β. Se

$$A = \bigoplus_{e\in E(\mathcal{S})} E_e, \tag{4.1}$$

dizemos que β é uma *ação ortogonal de semigrupoide inverso*.

Ações ortogonais (ordenadas/indutivas) de grupoide são definidas analogamente, levando em conta que se $\mathcal{G}$ é um grupoide então $E(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_0$. É claro que toda ação de grupo é ortogonal, pois se G é um grupo com elemento neutro e agindo em uma R-álgebra A, temos que $D_e = A$.

Observação 4.1.2. A condição (4.1) nos diz mais sobre a ação β. Como $E_{s^{-1}} = E_{s^{-1}s}$, $E_t = E_{tt^{-1}}$ e $s^{-1}s, tt^{-1} \in E(\mathcal{S})$, temos

$$E_{s^{-1}} \cap E_t = \begin{cases} 0, & \text{se } s^{-1}s \neq tt^{-1} \\ E_{s^{-1}} = E_t, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, se $\exists st$, então $E_{(st)^{-1}} = \beta_{t^{-1}}(E_{s^{-1}} \cap E_t) = 0$, sempre que $s^{-1}s \neq tt^{-1}$. Como β_{st} é um isomorfismo, $E_{st} = 0$ e β_{st} é o isomorfismo nulo quando $s^{-1}s \neq tt^{-1}$.

Além disso, note que $s \preceq t$ implica $E_s = E_t\delta_{s,t}$. De fato, existe $e \in E(\mathcal{S})$ tal que $\exists et$ e $s = et$. Mais ainda, $s \preceq t$ implica que $s^{-1} \preceq t^{-1}$, de onde segue que $E_s \subseteq E_t = E_{tt^{-1}}$. Mas $E_s = E_{et} \subseteq E_e$. Portanto $E_s \subseteq E_{tt^{-1}} \cap E_e$. Como $tt^{-1}, e \in E(\mathcal{S})$,

$$E_s = E_{et} = \begin{cases} 0, & \text{se } tt^{-1} \neq e \\ E_{et}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se $e = tt^{-1}$, então $s = et = tt^{-1}t = t$. Assim, $s \preceq t$ implica $E_s = \delta_{s,t}E_t$.

Seja $\max E(\mathcal{S})$ (resp. $\max \mathcal{S}$) o conjunto de elementos maximais de $E(\mathcal{S})$ (resp. $\mathcal{S}$) com respeito a ordem parcial natural $\preceq$. As observações acima garantem o próximo resultado.

Proposição 4.1.3. *Ações ortogonais de semigrupoide inverso de $\mathcal{S}$ em $A = \bigoplus_{e\in E(\mathcal{S})} E_e$ são precisamente homomorfismos $\beta : \mathcal{S} \to \mathcal{I}_s(A)$ tais que $E_e = \{0\}$ para todo $e \notin \max E(\mathcal{S})$. Em particular, existe uma correspondência um para um entre ações ortogonais de semigrupoide inverso e ações ortogonais indutivas de grupoide ordenado induzida pelos funtores $\mathbb{S}$ e $\mathbb{G}$.*

Exemplo 4.1.4. Sejam R um anel comutativo, $n > 0$ um inteiro e A uma R-álgebra que se decompõe como

$$A = \bigoplus_{i=1}^{nk} Re_i,$$

onde $n = \binom{m}{k}$, para inteiros positivos m, k, e os e_i's são idempotentes ortogonais tais que $\sum_i e_i = 1_A$. Sempre é possível tomar $m = n$, $k = 1$, ou $m = n, k = n-1$, mas outros casos são muito mais interessantes.

Vamos construir um semigrupo inverso S e uma ação ortogonal de semigrupo inverso β de S em A.

Seja $X = \{1, \ldots, m\}$ e considere $\mathcal{I}_s(X)$ o semigrupo inverso de bijeções parciais de X. Denote por $S = \{s \in \mathcal{I}_s(X) : \#\mathrm{dom}(s) \leq k\}$. Enumere o conjunto de k-combinações de elementos de X como $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Então $|M_i| = k$, para todo $1 \leq i \leq n$. Então, se $s \in \max S$, temos que $\operatorname{dom}(s) = M_i$, para algum $1 \leq i \leq n$.

Podemos associar os elementos e_i com as k-combinações M_j como segue:

$$\begin{aligned}
\{e_1, \ldots, e_k\} &\leftrightarrow M_1 \\
\{e_{k+1}, \ldots, e_{2k}\} &\leftrightarrow M_2 \\
&\vdots \\
\{e_{(n-1)k+1}, \ldots, e_{nk}\} &\leftrightarrow M_n
\end{aligned}$$

ordenado de forma crescente, isto é, $M_i = \{m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}\}$ com $m_{i_j} \leq m_{i_{j+1}}$. Podemos, então, definir $A_{M_i} = \bigoplus_{j=1}^{k} Re_{(i-1)k+j}$.

Para $s \in \max S$, temos que $\operatorname{dom}(s) = M_i$ e $\operatorname{Im}(s) = M_j$. Observe que $e_{(i-1)k+p}$ está associado a um $m_{i_p} \in M_i$. Sabemos que $s(m_{i_p}) = m_{j_q} \in M_j$. Denote por $\overline{s}(p) = q$. Podemos definir a aplicação $\tilde{s} : \{(i-1)k+1, \ldots, ik\} \to \{(j-1)k+1, \ldots, jk\}$ por $\tilde{s}((i-1)k+p) = (j-1)k+q = (j-1)k+\overline{s}(p)$, unicamente definida por s.

Defina $E_s = A_{M_j}$, $E_{s^{-1}} = A_{M_i}$,

$$\beta_s\left(\sum_{l=1}^{k} r_l e_{(i-1)k+l}\right) = \sum_{l=1}^{k} r_l e_{(j-1)k+\overline{s}(l)}.$$

Para $s \notin \max S$, defina $E_s = E_{s^{-1}} = \{0\}$ e β_s o isomorfismo nulo. Então $\beta = (\{E_s\}_{s\in S}, \{\beta_s\}_{s\in S})$ é uma ação ortogonal de S em A. De fato, sejam $s, t \in S$ tais que $\operatorname{dom}(s) = M_g$, $\operatorname{Im}(s) = M_h$, $\operatorname{dom}(t) = M_i$, $\operatorname{Im}(t) = M_j$. Se $j \neq g$, então $\beta_s \circ \beta t = 0 = \beta_{st}$. Agora, se $\operatorname{Im}(t) = M_g$,

$$\begin{aligned}
\beta_s\left(\beta_t\left(\sum_{l=1}^{k} r_l e_{(i-1)k+l}\right)\right) &= \beta_s\left(\sum_{l=1}^{k} r_l e_{(g-1)k+\bar{t}(l)}\right) = \sum_{l=1}^{k} r_l e_{(h-1)k+\overline{s}(\bar{t}(l))} \\
&= \sum_{l=1}^{k} r_l e_{(h-1)k+\overline{st}(l)} = \beta_{st}\left(\sum_{l=1}^{k} r_l e_{(g-1)k+l}\right).
\end{aligned}$$

O fato de que β é ortogonal é imediato. No Exemplo 4.3.21 vamos construir uma ação ortogonal usando esses passos com $m = n = 3, k = 2$.

O próximo resultado nos mostra uma relação entre ações ortogonais de grupoides ordenados e ações indutivas de grupoides ordenados.

Proposição 4.1.5. *Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide localmente indutivo e $\beta : \mathcal{G} \to \mathcal{I}_g(A)$ uma ação ortogonal de grupoide ordenado. Então β é uma ação ortogonal indutiva de grupoide ordenado.*

Demonstração. Sejam $e, f \in \mathcal{G}_0$ tais que $\exists e \wedge f$. Se $e = f$, então $E_e \cap E_f = E_e \cap E_e = E_e = E_{e\wedge f}$. Se $e \neq f$, então $e \wedge f \leq e$ e $e \wedge f \leq f$, de forma que $E_{e\wedge f} = E_f \delta_{e\wedge f, f} = E_e \delta_{e\wedge f, e}$, pois

β é ortogonal. Como $e \neq f$ não é possível que ambos os δ's acima sejam simultaneamente não nulos. Então $E_{e\wedge f} = \{0\} = E_e \cap E_f$. $\square$

Proposição 4.1.6. *Se $\beta : \mathcal{S} \to \mathcal{I}_s(A)$ é uma ação ortogonal de semigrupoide inverso, então $L(A, \mathcal{S}, \beta) = A \ltimes^a_\beta \mathcal{S}$.*

Demonstração. A demonstração segue diretamente do fato que $N = \langle au_s - au_t : s \preceq t, a \in E_s \rangle = 0$. De fato, dados $s, t \in \mathcal{S}$ tais que $s \preceq t$, temos que $E_s = E_t \delta_{s,t}$. Se $s \neq t$, então $au_s - au_t = 0u_s - 0u_t = 0$, pois $a \in E_s$ implica que $a = 0$. Se $s = t$, então $au_s - au_t = au_t - au_t = 0$, para todo $a \in E_s = E_t$. $\square$

Podemos demonstrar de forma análoga à demonstração da Proposição 4.1.6 que se β é uma ação ortogonal ordenada de um grupoide ordenado $\mathcal{G}$, então $A \ltimes^o_\beta \mathcal{G} = A \ltimes^a_\beta \mathcal{G}$.

Corolário 4.1.7. (i) *Sejam $\mathcal{S}$ um semigrupoide inverso e β uma ação ortogonal de $\mathcal{S}$ em A. Então $A \ltimes^a_\beta \mathcal{S} \simeq A \ltimes^a_\beta \mathbb{G}(\mathcal{S})$.*

(ii) *Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide localmente indutivo e β uma ação ortogonal indutiva de grupoide ordenado de $\mathcal{G}$ em A. Então $A \ltimes^a_\beta \mathcal{G} \simeq A \ltimes^a_\beta \mathbb{S}(\mathcal{G})$.*

Demonstração. Considere as aplicações naturais

$$\begin{aligned} \varphi : A \ltimes^a_\beta \mathcal{S} &\to A \ltimes^a_\beta \mathbb{G}(\mathcal{S}) \\ a\delta_s &\mapsto a\delta_s \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \psi : A \ltimes^a_\beta \mathcal{G} &\to A \ltimes^a_\beta \mathbb{S}(\mathcal{G}) \\ a\delta_g &\mapsto a\delta_g. \end{aligned}$$

Pela Proposição 4.1.6, não precisamos nos preocupar com classes de equivalência, pois no caso de ações ortogonais não realizamos um quociente na construção dos skew anéis em questão. Essas aplicações são claramente isomorfismos de R-módulos. Vamos mostrar que φ preserva o produto, o outro caso é similar. Considere $a\delta_s, b\delta_t \in A \ltimes_\beta \mathcal{S}$. Então

$$\varphi((a\delta_s)(b\delta_t)) = \begin{cases} \varphi(\beta_s(\beta_{s^{-1}}(a)b)\delta_{st}), & \text{se } \exists st, \\ \varphi(0), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Entretanto,

$$\beta_s(\beta_{s^{-1}}(a)b) = \begin{cases} \beta_s(\beta_{s^{-1}}(a)b), & \text{se } s^{-1}s = tt^{-1}, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

pois $\beta_{s^{-1}}(a)b \in E_{s^{-1}} \cap E_t = E_{s^{-1}s} \cap E_{tt^{-1}}$. Assim,

$$\varphi((a\delta_s)(b\delta_t)) = \begin{cases} \beta_s(\beta_{s^{-1}}(a)b)\delta_{s\cdot t}, & \text{se } d(s) = r(t) \text{ em } \mathbb{G}(\mathcal{S}), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que esse é exatamente o produto em $A \ltimes_\beta^a \mathbb{G}(\mathcal{S})$. Assim,

$$\varphi((a\delta_s)(b\delta_t)) = \varphi(a\delta_s)\varphi(b\delta_t). \qquad \square$$

Note que esse corolário nos diz que quando β é ortogonal, $A \ltimes_\beta^a \mathcal{S}$ é associativo se, e somente se, $A \ltimes_\beta^a \mathbb{G}(\mathcal{S})$ é associativo. Portanto, as condições de associatividade dos produtos cruzados de grupoide e de semigrupoide inverso são as mesmas.

4.2 Relação entre Subestruturas

Nesta seção vamos entender a relação entre os subsemigrupoides normais de um semigrupoide inverso $\mathcal{S}$ e os subgrupoides ordenados normais de $\mathbb{G}(\mathcal{S})$. Após isso, analisaremos as estruturas quocientes.

Dizemos que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ é um *subsemigrupoide inverso* de $\mathcal{S}$ se dados $s, t \in \mathcal{T}$, então $s^{-1} \in \mathcal{T}$ e se $\exists st$, então $st \in \mathcal{T}$. Um subsemigrupoide inverso $\mathcal{T}$ de $\mathcal{S}$ é dito *cheio* se $E(\mathcal{T}) = E(\mathcal{S})$. Todo subsemigrupoide inverso cheio é um ideal de ordem. Para verificar isso, observe que se $t \in \mathcal{T}$, $s \in \mathcal{S}$, $s \preceq t$ e $\mathcal{T}$ é um subsemigrupoide inverso cheio, temos que $s = ti$, para algum $i \in E(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{T}$ tal que $\exists ti$, de forma que $s = ti \in \mathcal{T}$. Se $\mathcal{G}$ é um grupoide ordenado, dizemos que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ é um *subgrupoide* de $\mathcal{G}$ se $g, h \in \mathcal{H}$ implicarem $g^{-1} \in \mathcal{H}$ e se $\exists gh$, então $gh \in \mathcal{H}$. Dizemos que um subgrupoide $\mathcal{H}$ é um *subgrupoide ordenado* de $\mathcal{G}$ se $e \in \mathcal{H}_0$ e $g \in \mathcal{H}$ com $e \leq d(g)$ implicam que $(g|e) \in \mathcal{H}$.

Um subgrupoide $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ é dito *amplo* se $\mathcal{H}_0 = \mathcal{G}_0$. Todo subgrupoide ordenado amplo $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ é um ideal de ordem. De fato, se $g \in \mathcal{G}$ e $h \in \mathcal{H}$ são tais que $g \leq h$, então $g = (h|d(g))$. Mas $h, d(g) \in \mathcal{H}$, de forma que $g \in \mathcal{G}$. É fácil ver que todo subgrupoide amplo ordenado de um grupoide (completamente) (localmente) indutivo é um grupoide (completamente) (localmente) indutivo, pois a ordem é mantida no conjunto de identidades.

O Teorema ESN aplicado nos morfismos de inclusão nos garante que existe uma correspondência um para um entre os subsemigrupoides inversos cheios de $\mathcal{S}$ e os subgrupoides ordenados amplos de $\mathbb{G}(\mathcal{S})$.

Vamos estudar as relações entre subsemigrupoides inversos normais e subgrupoides ordenados normais. Isso vai nos permitir entender as relações entre as estruturas quocientes.

Definição 4.2.1. Sejam $\mathcal{S}$ um semigrupoide inverso e $\mathcal{T}$ um subsemigrupoide inverso de

$\mathcal{S}$. Dizemos que $\mathcal{T}$ é *normal* se

(i) $\mathcal{T}$ é cheio;

(ii) Para todo $s \in \mathcal{S}$, $s^{-1}\mathcal{T}s = \{s^{-1}ts : t \in \mathcal{T} \text{ e } \exists s^{-1}ts\} \subseteq \mathcal{T}$.

Definição 4.2.2. [2, Definition 4.1] Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide ordenado e $\mathcal{H}$ um subgrupoide ordenado de $\mathcal{G}$. Dizemos que $\mathcal{H}$ é *normal* se

(i) $\mathcal{H}$ é amplo;

(ii) Dados $a, b \in \mathcal{G}$ tais que a e b possuem uma cota superior, isto é, tais que existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $a \leq g$, $b \leq g$, então $a^{-1}\mathcal{H}b = \{a^{-1}hb : h \in \mathcal{H}, \exists a^{-1}hb\} \subseteq \mathcal{H}$.

Observe que se tomarmos um grupoide $\mathcal{G}$, podemos considerar $\mathcal{G}$ um grupoide ordenado tomando a igualdade como ordem parcial. Nesse caso, a Definição 4.2.2 é a mesma que aparece em [18].

Em [2, Example 4.3] foi provado que existe uma correspondência um para um entre os subsemigrupos inversos normais de um semigrupo inverso S e os subgrupoides ordenados de $\mathbb{G}(S)$. Vamos provar um resultado análogo a seguir.

Proposição 4.2.3. *Sejam $\mathcal{S}$ um semigrupoide inverso e $\mathcal{T}$ um subsemigrupoide inverso normal de $\mathcal{S}$. Então $\mathbb{G}(\mathcal{T}) := \mathcal{H}$ é um subgrupoide ordenado normal de $\mathbb{G}(\mathcal{S})$.*

Reciprocamente, se $\mathcal{H}$ é um subgrupoide ordenado normal de um grupoide localmente indutivo $\mathcal{G}$, então $\mathbb{S}(\mathcal{H}) := \mathcal{T}$ é um subsemigrupoide inverso normal de $\mathbb{S}(\mathcal{G})$.

Demonstração. Sejam $\mathcal{S}$ um semigrupoide inverso e $\mathcal{T}$ um subsemigrupoide inverso normal de $\mathcal{S}$. Sejam $a, b \in \mathbb{G}(\mathcal{S})$ tais que existe $g \in \mathbb{G}(\mathcal{S})$ tal que $a \leq g$, $b \leq g$. Assim, temos que $a = ge$, $b = gf$, para certos $e, f \in E(\mathcal{S})$ tais que $\exists ge, \exists gf$. Logo, se $\exists a^{-1} \cdot h \cdot b$, com $h \in \mathcal{H}$, então

$$a^{-1} \cdot h \cdot b = a^{-1}hb = (eg^{-1})h(gf) = e(g^{-1}hg)f.$$

Como $\mathcal{T}$ é normal, temos que $g^{-1}hg \in \mathcal{T}$. Como $\mathcal{T}$ é cheio, temos que $e, f \in \mathcal{T}$, de forma que $a^{-1} \cdot h \cdot b \in \mathcal{H}$.

Reciprocamente, se $\mathcal{H}$ é um subgrupoide ordenado normal de um grupoide localmente indutivo $\mathcal{G}$, considere $s \in \mathcal{S}$, $t \in \mathcal{T}$ tais que $\exists s^{-1}ts$. Então, denotando por $e = r(s) \wedge r(t)$ e $f = d(e|t)) \wedge r(s)$, temos que

$$\begin{aligned} s^{-1}ts &= s^{-1} \star t \star s = (s^{-1} \star t) \star s = [(s^{-1}|e) \cdot (e|t)] \star s \\ &= ((s^{-1}|e) \cdot (e|t)|f) \cdot (f|s) = ((s^{-1}|e)|r((e|t)|f)) \cdot ((e|t)|f) \cdot (f|s). \end{aligned}$$

Como $((e|t)|f) \leq (e|t) \leq t$, temos que $((e|t)|f) \in \mathcal{T}$. Além disso, note que $(f|s) \leq s$ e $((s^{-1}|e)|r((e|t)|f)) \leq (s^{-1}|e) \leq s^{-1}$, o que implica, da normalidade de $\mathcal{H}$, que $s^{-1}ts \in \mathcal{T}$. $\square$

Sejam $(\mathcal{G}, \leq)$ um grupoide ordenado e $\mathcal{H}$ um subgrupoide ordenado normal de $\mathcal{G}$. Definimos a relação $\sim_{\mathcal{H}}$ por, dados $a, b \in \mathcal{G}$,

$$a \sim_{\mathcal{H}} b \Leftrightarrow \text{ existem } x, y, u, v \in \mathcal{H} \text{ tais que } \exists x \cdot a \cdot y, \exists u \cdot b \cdot v,$$
$$x \cdot a \cdot y \leq b \text{ e } u \cdot b \cdot v \leq a.$$

Por [2], essa é uma relação de equivalência e uma congruência, de onde segue que o quociente $\mathcal{G}/\mathcal{H} := \mathcal{G}/\sim_{\mathcal{H}}$ está bem definido. Defina a ordem parcial $\leq_{\mathcal{H}}$ por:

$$[a]_{\mathcal{H}} \leq_{\mathcal{H}} [b]_{\mathcal{H}} \Leftrightarrow \text{ existem } x, y \in \mathcal{H} \text{ tais que } \exists x \cdot a \cdot y \text{ e } x \cdot a \cdot y \leq b.$$

Por [2, Theorem 4.14] temos que $(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \leq_{\mathcal{H}})$ é um grupoide ordenado. A operação em $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ é dada a seguir. Se $d(g) \sim_{\mathcal{H}} r(h)$, então existem $a, b \in \mathcal{H}$ tais que $r(a) \leq d(g)$, $d(a) = r(h)$, $r(b) \leq r(h)$ e $d(b) = d(g)$. Denotando $g' = (g|r(a))$ e $h' = (r(b)|h)$, definimos

$$[g]_{\mathcal{H}} \cdot [h]_{\mathcal{H}} = [g' \cdot a \cdot h]_{\mathcal{H}} = [g \cdot b^{-1} \cdot h']_{\mathcal{H}}.$$

Essa definição não depende da escolha de a e b. De fato, para quaisquer elementos $x, y \in \mathcal{H}$ tais que $r(x) \leq d(g)$, $d(x) = r(h)$, $r(y) \leq r(h)$ e $d(y) = d(g)$, temos, denotando $g'' = (g|r(x))$, $h'' = (r(y)|h)$, que

$$[g' \cdot a \cdot h]_{\mathcal{H}} = [g'' \cdot x \cdot h]_{\mathcal{H}} \text{ e } [g \cdot b^{-1} \cdot h']_{\mathcal{H}} = [g \cdot y^{-1} \cdot h'']_{\mathcal{H}}.$$

Vamos traduzir essa definição para o caso de semigrupoides inversos. Dado um semigrupoide inverso $\mathcal{S}$ e um subsemigrupoide inverso normal $\mathcal{T}$, definimos a relação $\sim_{\mathcal{T}}$ por, dados $a, b \in \mathcal{S}$,

$$a \sim_{\mathcal{T}} b \Leftrightarrow \text{ existem } x, y, u, v \in T \text{ tais que } \exists x \cdot a \cdot y, \exists u \cdot b \cdot v,$$
$$x \cdot a \cdot y \preceq b \text{ e } u \cdot b \cdot v \preceq a.$$

Note o uso do produto restrito nessa definição. A ordem $\leq_{\mathcal{T}}$ é definida da mesma forma do caso de grupoides ordenados. Denotamos por $\mathcal{S}/\mathcal{T} := \mathcal{S}/\sim_{\mathcal{T}}$.

O quociente de um semigrupoide inverso por um subsemigrupoide inverso normal é sempre um grupoide ordenado [1, Theorem 3.6], mas em geral não é um grupoide localmente indutivo, isto é, não é um semigrupoide inverso, pois seus idempotentes nem sempre formam uma união disjunta de semirreticulados inferiores.

Se os idempotentes de $\mathcal{S}/\mathcal{T}$ formam uma união disjunta de semirreticulados inferiores, a operação em $\mathcal{S}/\mathcal{T}$, denotada por $\star$, será dada em termos da operação em $\mathbb{G}(\mathcal{S})/\mathbb{G}(\mathcal{T})$, isto é,

$$[s]_{\mathcal{T}} \star [t]_{\mathcal{T}} = ([s]_{\mathcal{T}}|[e]_{\mathcal{T}}) \cdot ([e]_{\mathcal{T}}|[t]_{\mathcal{T}}),$$

onde $[e]_{\mathcal{T}} = [s^{-1}s]_{\mathcal{T}} \wedge [tt^{-1}]_{\mathcal{T}}$, quando existir o ínfimo, e não definida caso contrário.

Note que embora estejamos usando o mesmo símbolo $\sim$ para as relações $\sim_{\mathcal{T}}$ e $\sim_{\mathcal{H}}$, elas são distintas, pois a primeira denota a relação em semigrupoides inversos com respeito ao produto restrito e a ordem parcial natural $\preceq$, enquanto a segunda denota a relação em grupoides ordenados com o produto usual e ordem parcial $\leq$ possivelmente diferente da ordem parcial natural (que no caso de grupoides é apenas a igualdade). Reservaremos sempre o símbolo $\sim_{\mathcal{T}}$ para subsemigrupoides inversos e $\sim_{\mathcal{H}}$ para subgrupoides ordenados.

Teorema 4.2.4. (i) *Sejam $\mathcal{S}$ um semigrupoide inverso e $\mathcal{T}$ um subsemigrupoide inverso normal de $\mathcal{S}$. Se $\mathcal{S}/\mathcal{T}$ é um semigrupoide inverso, então $\mathbb{G}(\mathcal{S}/\mathcal{T}) \simeq \mathbb{G}(\mathcal{S})/\mathbb{G}(\mathcal{T})$.*

(ii) *Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide localmente indutivo e $\mathcal{H}$ um subgrupoide ordenado normal de $\mathcal{G}$. Se $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ é um grupoide localmente indutivo, então $\mathbb{S}(\mathcal{G}/\mathcal{H}) \simeq \mathbb{S}(\mathcal{G})/\mathbb{S}(\mathcal{H})$.*

Demonstração. (i): Denote por $\mathcal{H} = \mathbb{G}(\mathcal{T})$. Definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{G}(\mathcal{S}/\mathcal{T}) &\to \mathbb{G}(\mathcal{S})/\mathcal{H} \\ [s]_{\mathcal{T}} &\mapsto [s]_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

• φ está bem-definida: tome $s, t \in \mathcal{S}$ tais que $[s]_{\mathcal{T}} = [t]_{\mathcal{T}}$. Como $s \sim_{\mathcal{T}} t$, existem $x, y, u, v \in \mathcal{T}$ tais que os produtos restritos estão definidos e $x \cdot s \cdot y \preceq t$ e $u \cdot t \cdot v \preceq s$. Mas esta é a mesma condição para $s \sim_{\mathcal{H}} t$. Portanto $[s]_{\mathcal{H}} = [t]_{\mathcal{H}}$.
• φ é um homomorfismo de grupoides ordenados: sejam $s, t \in \mathcal{T}$. Se $[s^{-1}s]_{\mathcal{T}} = [tt^{-1}]_{\mathcal{T}}$, então $[s^{-1}s]_{\mathcal{H}} = [tt^{-1}]_{\mathcal{H}}$, de forma que o produto está definido no domínio e na imagem. Agora, $\varphi([s]_{\mathcal{T}} \cdot [t]_{\mathcal{T}}) = \varphi([s' \cdot a \cdot t]_{\mathcal{T}}) = [s' \cdot a \cdot t]_{\mathcal{H}} = [s]_{\mathcal{H}} \cdot [t]_{\mathcal{H}}$, onde $a \in \mathcal{H}$ é tal que $aa^{-1} \leq s^{-1}s, a^{-1}a = tt^{-1}$ e $s' = (s|aa^{-1})$.

Considere $s, t \in \mathcal{T}$ tais que $[s]_{\mathcal{T}} \leq_{\mathcal{T}} [t]_{\mathcal{T}}$. Isto é, existem $x, y \in \mathcal{T}$ tais que $x \cdot s \cdot y \preceq t$. Agora, como $x, y \in \mathcal{H}$, temos que $[s]_{\mathcal{H}} \leq_{\mathcal{H}} [t]_{\mathcal{H}}$.
• φ é sobrejetiva: imediato.
• φ é injetiva: basta mostrar que $\ker \varphi = \{[s]_{\mathcal{T}} \in \mathbb{G}(\mathcal{S}/\mathcal{T}) : \varphi([s]_{\mathcal{T}}) = [s]_{\mathcal{H}} \in (\mathbb{G}(\mathcal{S})/\mathcal{H})_0\}$ $= \mathbb{G}(\mathcal{S}/\mathcal{T})_0$. Considere $[s]_{\mathcal{T}} \in \ker \varphi$. Isso implica que $[s]_{\mathcal{H}}$ é idempotente, isto é, que existe $e \in [s]_{\mathcal{H}}$ tal que e é idempotente em $\mathbb{G}(\mathcal{S})$. Assim $[s]_{\mathcal{H}} = [e]_{\mathcal{H}} \Rightarrow [s]_{\mathcal{T}} = [e]_{\mathcal{T}} \in \mathbb{G}(\mathcal{S}/\mathcal{T})_0$.
• φ preserva ínfimos: Segue do fato de que φ é um isomorfismo de grupoides ordenados.

(ii): Considere $\mathcal{T} = \mathbb{S}(\mathcal{H})$ e a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{S}(\mathcal{G}/\mathcal{H}) &\to \mathbb{S}(\mathcal{G})/\mathcal{T} \\ [s]_{\mathcal{H}} &\mapsto [s]_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Verificamos que ψ está bem definida e é uma bijeção de forma similar ao item (i). Resta-nos provar que ψ é um homomorfismo de semigrupoides inversos. Sejam $g, h \in \mathcal{G}$. Temos que

$$\psi([g]_{\mathcal{H}} \star [h]_{\mathcal{H}}) = \psi(([g]_{\mathcal{H}}|[e]_{\mathcal{H}}) \cdot ([e]_{\mathcal{H}}|[h]_{\mathcal{H}})),$$

onde $[e]_{\mathcal{H}} = [g^{-1}g]_{\mathcal{H}} \wedge [hh^{-1}]_{\mathcal{H}}$ quando definido.

Denote por x um representante da classe $([g]_H|[e]_H)$ e por y um representante da classe $([e]_H|[h]_H)$. Então

$$\psi([g]_{\mathcal{H}} \star [h]_{\mathcal{H}}) = \psi([x' \cdot a \cdot b]_{\mathcal{H}}) = [x' \cdot a \cdot y]_{\mathcal{T}},$$

onde $a \in \mathcal{T}$ é tal que $aa^{-1} \leq xx^{-1}$, $a^{-1}a = bb^{-1}$ e $x' = (x|aa^{-1})$. Assim

$$\psi([g]_{\mathcal{H}} \star [h]_{\mathcal{H}}) = [x]_{\mathcal{T}} \cdot [y]_{\mathcal{T}} = ([g]_{\mathcal{T}}|[e]_{\mathcal{T}}) \cdot ([e]_{\mathcal{T}}|[h]_{\mathcal{T}}) = [g]_{\mathcal{T}} \star [h]_{\mathcal{T}}. \qquad \square$$

Dados um grupoide (não necessariamente ordenado) $\mathcal{G}$ e um subgrupoide normal $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$, a congruência $\equiv_{\mathcal{H}}$ que define o grupoide quociente $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ em [18] é dada por

$$a \equiv_{\mathcal{H}} b \Leftrightarrow \exists b^{-1} \cdot a \text{ e } b^{-1} \cdot a \in \mathcal{H}.$$

Temos que $a \equiv_{\mathcal{H}} b \Rightarrow a \sim_{\mathcal{H}} b$ no caso de grupoides ordenados. De fato, sejam $a, b \in \mathcal{G}$ tais que $a \equiv_{\mathcal{H}} b$. Então $\exists b^{-1} \cdot a$ e $b^{-1} \cdot a \in \mathcal{H}$. Portanto, existe $h \in \mathcal{H}$ tal que $b^{-1} \cdot a = h$. Desta forma,

$$a = r(b) \cdot b \cdot h \text{ e } b = h^{-1} \cdot a \cdot d(a),$$

onde $h, h^{-1}, r(b), d(a) \in \mathcal{H}$, pois $\mathcal{H}$ é um subgrupoide normal, e portanto amplo. Assim, $r(b) \cdot b \cdot h \leq a$ e $h^{-1} \cdot a \cdot d(a) \leq b$, o que implica $a \sim_{\mathcal{H}} b$.

Entretanto, a recíproca não é sempre verdadeira. Mas todo grupoide pode ser visto como um grupoide ordenado considerando a igualdade como ordem parcial. Nesse caso, as relações $\equiv_{\mathcal{H}}$ e $\sim_{\mathcal{H}}$ são as mesmas. De fato, sejam $a, b \in \mathcal{G}$ tais que $a \sim_{\mathcal{H}} b$. Então existem $x, y, u, v \in \mathcal{H}$ tais que $\exists x \cdot a \cdot y$, $\exists u \cdot b \cdot v$, $x \cdot a \cdot y = b$ e $u \cdot b \cdot v = a$. Note que

$$x \cdot a \cdot y = b \Rightarrow a \cdot y = x^{-1} \cdot b.$$

Todavia $\mathcal{H}$ é normal em $\mathcal{G}$, de onde segue que $\mathcal{H} \cdot b = b \cdot \mathcal{H}$. Então existe $z \in \mathcal{H}$ tal que $x^{-1} \cdot b = b \cdot z$. Assim

$$a \cdot y = b \cdot z \Rightarrow b^{-1} \cdot a = z \cdot y^{-1} \in \mathcal{H},$$

isto é, $a \equiv_{\mathcal{H}} b$. Desta maneira podemos ver $\sim_{\mathcal{H}}$ como uma generalização de $\equiv_{\mathcal{H}}$. De fato, [1, Proposition 4.6] nos dá uma condição para $\equiv_{\mathcal{H}}$ e $\sim_{\mathcal{H}}$ coincidirem: $r(h) = d(h)$, para todo $h \in \mathcal{H}$. Essa condição inclui tipos bem conhecidos de grupoides, como uniões disjuntas de grupos.

Definição 4.2.5. (i) Um semigrupoide inverso $\mathcal{S}$ tal que $ss^{-1} = s^{-1}s$, para todo $s \in \mathcal{S}$, é dito um *semigrupoide inverso de Clifford.*

(ii) Um grupoide $\mathcal{G}$ tal que $r(g) = d(g)$, para todo $g \in \mathcal{G}$, é dito um *grupoide de Clifford.*

Proposição 4.2.6. *Seja $\mathcal{T}$ um subsemigrupoide inverso normal de Clifford de um semigrupoide inverso $\mathcal{S}$. Então $\mathcal{S}/\mathcal{T}$ é um semigrupoide inverso.*

Demonstração. Temos que $\mathcal{H} = \mathbb{G}(\mathcal{T})$ é Clifford em $\mathcal{G} = \mathbb{G}(\mathcal{S})$. Note que se $e, f \in \mathcal{G}_0$, então $[e]_{\mathcal{H}} \leq_{\mathcal{H}} [f]_{\mathcal{H}}$ se, e somente se, existem $g, h \in \mathcal{H}$ tais que $\exists g \cdot e \cdot h$ e $g \cdot h = g \cdot e \cdot h \leq f$. Como $\mathcal{G}_0$ é um ideal de ordem, isso significa que $gh \in \mathcal{G}_0$. Mas $\mathcal{H}$ é Clifford, então $r(g) = d(g) = e = r(h) = d(h)$, de onde segue que $e = r(g) = r(gh) = gh$. Então $e \leq f$.

Reciprocamente, se $e \leq f$ em $\mathcal{G}_0$, então $\exists e \cdot e \cdot e$ e $e^3 = e \leq f$ em $\mathcal{G}$. Então $[e] \leq_{\mathcal{H}} [f]$. Isso significa que as ordens $\leq_{\mathcal{H}}$ e $\leq$ coincidem em $\mathcal{G}_0$ e $(\mathcal{G}/\mathcal{H})_0$ quando $\mathcal{H}$ é Clifford. Assim, como $\sim_{\mathcal{H}}$ separa idempotentes quando $\mathcal{H}$ é Clifford e as ordens parciais em $E(\mathcal{S})$ e $E(\mathcal{S}/\mathcal{T})$ coincidem, temos que $\mathcal{S}/\mathcal{T}$ é um semigrupoide inverso. $\square$

4.3 Teorema de Correspondência

Sejam R um anel e A uma R-álgebra. Denotamos por $A^e = A \otimes_R A^{op}$ a álgebra envolvente de A. Note que A é um A^e-módulo à esquerda via $(x \otimes y) \cdot a = xay$, para todos $a, x, y \in A$. Dizemos que A é uma R-álgebra *separável* se é um A^e-módulo à esquerda projetivo [7].

Nesta seção assumiremos que $\mathcal{S}$ é um semigrupoide inverso finito, que A é uma R-álgebra comutativa e que β é uma ação de $\mathcal{S}$ em A. Denotamos por

$$A^\beta = \{a \in A | \beta_s(a1_{s^{-1}}) = a1_s, \text{ para todo } s \in \mathcal{S}\},$$

a subálgebra dos elementos de A invariantes por β.

Defina a aplicação traço por $tr_\beta : A \to A$ dada por $tr_\beta(a) = \sum_{s \in \mathcal{S}} \beta_s(a1_{s^{-1}})$, para todo $a \in A$. Essa aplicação é A^β-linear. Vamos provar que $tr_\beta(A) \subseteq A^\beta$ quando β é ortogonal.

Sejam $t \in \mathcal{S}$ e $a \in A$. Então

$$\begin{aligned}
\beta_t(tr_\beta(a)1_{t^{-1}}) &= \beta_t\left(\sum_{s\in\mathcal{S}} \beta_s(a1_{s^{-1}})1_{t^{-1}}\right) = \sum_{s\in\mathcal{S}} \beta_t(\beta_s(a1_{s^{-1}})1_t^{-1}) \\
&= \sum_{t^{-1}t=ss^{-1}} \beta_{ts}(a1_{(ts)^{-1}})1_t = \sum_{uu^{-1}=tt^{-1}} \beta_u(a1_u)1_t \\
&= \sum_{u\in\mathcal{S}} \beta_u(a1_u)1_t = tr_\beta(a)1_t,
\end{aligned}$$

pois $\beta_s(a1_{s^{-1}})1_{t^{-1}} \in E_s \cap E_{t^{-1}} = 0$, se $ss^{-1} \neq t^{-1}t$.

Aqui a condição de ortogonalidade foi de grande importância. Sem ela não poderíamos garantir esse fato, pois em um semigrupoide inverso arbitrário $\mathcal{S}$, dado $t \in \mathcal{S}$, $t\mathcal{S} \neq \mathcal{S}$ geralmente.

Definição 4.3.1. Dizemos que A é uma extensão β-Galois de A^β se existem $x_i, y_i \in A$, $1 \leq i \leq n$ tais que $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\beta_s(y_i1_{s^{-1}}) = \sum\limits_{e\in E(\mathcal{S})} \delta_{e,s}1_e$, para todo $s \in \mathcal{S}$. Neste caso dizemos que o conjunto $\{x_i, y_i\}_{1\leq i\leq n}$ é um sistema de coordenadas β-galoisianas da extensão $A|_{A^\beta}$.

Exemplo 4.3.2. Sejam $\mathcal{S}$ um semigrupoide inverso finito e R um anel comutativo. Defina $A = \bigoplus\limits_{s\in\mathcal{S}} Re_s$, onde os e_s's são idempotentes dois a dois ortogonais cuja soma é 1_A. Defina os conjuntos

$$\mathcal{S}_s = \{t \in \mathcal{S} : s^{-1}s = tt^{-1}\}.$$

Observe que $\mathcal{S}_s = \{s^{-1}t : t \in \mathcal{S}, tt^{-1} = ss^{-1}\}$. De fato, dado $s^{-1}t$ com $tt^{-1} = ss^{-1}$, temos que $(s^{-1}t)(s^{-1}t)^{-1} = s^{-1}tt^{-1}s^{-1} = s^{-1}ss^{-1}s = s^{-1}s$, de forma que $s^{-1}t \in \mathcal{S}_s$. Reciprocamente, dado $t \in \mathcal{S}$, temos que $tt^{-1} = s^{-1}s$, de onde segue que $t = tt^{-1}t = s^{-1}st = s^{-1}(st)$ com $(st)(st)^{-1} = stt^{-1}s^{-1} = ss^{-1}ss^{-1} = ss^{-1}$.

Vamos construir uma ação global de semigrupoide inverso β de $\mathcal{S}$ em A. Considere os ideais

$$E_{s^{-1}} = \bigoplus_{t\in\mathcal{S}_s} Re_t$$

e as aplicações

$$\begin{aligned}
\beta_s : E_{s^{-1}} &\to E_s \\
\sum a_te_t &\mapsto \sum a_te_{st}.
\end{aligned}$$

Vamos provar que de fato β_s é um isomorfismo para todo $s \in \mathcal{S}$. Claramente essas aplicações são homomorfismos de R-álgebras. Além disso,

$$\beta_s\left(\beta_{s^{-1}}\left(\sum a_te_t\right)\right) = \sum a_te_{ss^{-1}t} = \sum a_te_t,$$

pois $t \in \mathcal{S}_{s^{-1}}$ é tal que $ss^{-1} = tt^{-1}$. Analogamente provamos que $\beta_{s^{-1}} \circ \beta_s = \mathrm{Id}_{E_s}$, garantindo que cada β_s é de fato um isomorfismo de R-álgebras. A verificação de que $\beta = (\{E_s\}_{s\in\mathcal{S}}, \{\beta_s\}_{s\in\mathcal{S}})$ é uma ação de semigrupoide inverso de $\mathcal{S}$ em A agora é imediata.

Claramente $A^\beta = R\left(\sum_{s\in\mathcal{S}} e_s\right) \simeq R$. Além disso, tomando $x_s = y_s = e_s$, temos que

$$\sum_{s\in\mathcal{S}} x_s\beta_t(y_s 1_{t^{-1}}) = \sum_{s\in\mathcal{S}} e_s\beta_t\left(e_s\left(\sum_{u\in\mathcal{S}_t} e_u\right)\right) = \sum_{s\in\mathcal{S}_t} e_s\beta_t(e_s) = \sum_{s\in\mathcal{S}_t} e_s e_{ts} = \sum_{s\in\mathcal{S}_t} e_s\delta_{s,ts}.$$

Note agora que $s \in \mathcal{S}_t$ é o mesmo que dizer que $t^{-1}t = ss^{-1}$. Assim, se $s = ts$, então $ss^{-1} = tss^{-1} = tt^{-1}t = t$. Desta forma, $t^{-1}t = t \in E(\mathcal{S})$. Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{s\in\mathcal{S}} x_s\beta_t(y_s 1_{t^{-1}}) &= \begin{cases}\sum_{s\in\mathcal{S}_t} e_s, & \text{se } t \in E(\mathcal{S}),\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}\\ &= \begin{cases}1_t, & \text{se } t \in E(\mathcal{S}),\\ 0, & \text{caso contrário,}\end{cases}\end{aligned}$$

isto é, a extensão $A|_R$ é β-Galois. Entretanto, β não é uma ação ortogonal.

Exemplo 4.3.3. Sejam A uma álgebra, S um semigrupo inverso e β uma ação ortogonal de S em A como no Exemplo 4.1.4. Temos que $A^\beta = R1_A$ e a extensão $A|_{A^\beta}$ é β-Galois com sistema de coordenadas β-galoisianas dado por $x_i = y_i = e_i$, para todo $1 \leq i \leq nk$.

Exemplo 4.3.4. Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide finito e $\alpha = (\{D_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g\}_{g\in\mathcal{G}})$ uma ação parcial de $\mathcal{G}$ em A. Suponha que cada D_g é unitário com identidade 1_g e que A é uma extensão α-Galois parcial de A^α como em [4], isto é, existem x_i, y_i, $1 \leq i \leq n$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_g(y_i 1_{g^{-1}}) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g}1_e, \text{ para todo } g \in \mathcal{G}.$$

Considere o semigrupoide inverso de Exel $\mathcal{S}(\mathcal{G})$. Sabemos que as ações parciais de $\mathcal{G}$ em A estão em correspondência um para um com as ações de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ em A. Considere β a ação de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ em A associada a α, isto é, dado $s = \varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[g] \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$, $E_{s^{-1}} = D_{g^{-1}}D_{g^{-1}r_1}\cdots D_{g^{-1}r_n}$, $E_s = D_g D_{r_1}\cdots D_{r_n}$ e $\beta_s = \alpha_g|_{E_{s^{-1}} \subseteq D_{g^{-1}}}$.

Vamos provar que $A^\beta = A^\alpha$. Seja $a \in A^\alpha$. Então

$$\alpha_g(a1_g^{-1}) = a1_g, \text{ para todo } g \in \mathcal{G}.$$

Dado $s = \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[g] \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$ arbitrário,

$$\begin{aligned}\beta_s(a1_{s^{-1}}) &= \alpha_g(a1_{g^{-1}}1_{g^{-1}r_1} \cdots 1_{g^{-1}r_n}) = \alpha_g(a1_{g^{-1}})\alpha_g(1_{g^{-1}}1_{g^{-1}r_1} \cdots 1_{g^{-1}r_n}) \\ &= a1_g\beta_s(1_{s^{-1}}) = a1_g1_s = a1_s,\end{aligned}$$

de forma que $A^\alpha \subseteq A^\beta$. Agora, considere $b \in A^\beta$. Temos que

$$\beta_s(b1_{s^{-1}}) = b1_s, \text{ para todo } s \in \mathcal{S}(\mathcal{G}).$$

Em particular,

$$\beta_{[g]}(b1_{[g]^{-1}}) = b1_{[g]}, \text{ para todo } g \in \mathcal{G}.$$

Mas $E_{[g]} = D_g$, $E_{[g]^{-1}} = D_{g^{-1}}$ e $\beta_{[g]} = \alpha_g$. Assim, $b \in A^\alpha$, o que nos permite concluir que $A^\beta = A^\alpha$.

Agora vamos provar que A é uma extensão β-Galois de A^β. Considere as coordenadas α-galoisianas x_i, y_i, $1 \leq i \leq n$, que foram apresentadas no início do exemplo. Com $s = \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[g] \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$ arbitrário,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i\beta_s(y_i1_{s^{-1}}) &= \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_g(y_i1_{g^{-1}}1_{g^{-1}r_1} \cdots 1_{g^{-1}r_n}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_g(y_i1_{g^{-1}})\alpha_g(1_{g^{-1}}1_{g^{-1}r_1} \cdots 1_{g^{-1}r_n}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_g(y_i1_{g^{-1}})\right)\alpha_g(1_{g^{-1}}1_{g^{-1}r_1} \cdots 1_{g^{-1}r_n}) \\ &= \left(\sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g}1_g\right)\beta_s(1_{s^{-1}}) = \left(\sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g}1_g\right)1_s \\ &= \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g}1_s.\end{aligned}$$

Repare agora que

$$\delta_{e,g}1_s = \begin{cases} 0, \text{ se } s \notin E(\mathcal{S}(\mathcal{G})) \\ 1_s, \text{ se } s \in E(\mathcal{S}(\mathcal{G})), \end{cases}$$

pois os idempotentes de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ são precisamente os elementos da forma

$$\varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[r(r_1)] = \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}.$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\beta_s(y_i1_{s^{-1}}) = \sum_{e\in E(\mathcal{S}(\mathcal{G}))} \delta_{e,s}1_e, \text{ para todo } s \in \mathcal{S}(\mathcal{G}).$$

Portanto, toda extensão α-Galois parcial dada por uma ação parcial de um grupoide $\mathcal{G}$ em uma álgebra A nos dá um exemplo de extensão β-Galois dada pela ação associada do semigrupoide inverso de Exel $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ na mesma álgebra A. Note que como $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ é uma categoria inversa, β é ortogonal se, e somente se, $E_e = \{0\}$, para todo $e \in E(\mathcal{S}(\mathcal{G}))$ tal que $e \neq [r(g)]$ para algum $g \in \mathcal{G}$, se, e somente se, $D_g = \{0\}$, para todo $g \in \mathcal{G}$ tal que $g \notin \mathcal{G}_0$. Assim, a ação parcial α seria apenas uma ação parcial trivial de $\mathcal{G}_0$ em A, o que não é um caso interessante. Portanto, não conseguimos estabelecer uma relação entre a teoria de Galois parcial para o grupoide $\mathcal{G}$ e a teoria de Galois global para o grupoide $\mathbb{G}(\mathcal{S}(\mathcal{G}))$.

Analogamente podemos definir extensões galoisianas para o contexto de grupoides localmente indutivos.

Definição 4.3.5. Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide localmente indutivo e β uma ação indutiva de grupoide ordenado de $\mathcal{G}$ em A. Dizemos que A é uma extensão β-Galois de A^β se existem $x_i, y_i \in A$, $1 \leq i \leq n$ tais que $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\beta_g(y_i1_{g^{-1}}) = \sum\limits_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g}1_e$, para todo $g \in \mathcal{G}$.

Como as ações de $\mathbb{G}(\mathcal{S})$ em A estão associadas com as ações de $\mathcal{S}$ em A e para uma ação $\beta : \mathcal{S} \to \mathcal{I}_s(A)$, $\beta_s = \mathbb{G}(\beta_s)$, para todo $s \in \mathcal{S}$, temos imediatamente o próximo resultado.

Proposição 4.3.6. *Os funtores $\mathbb{S}$ e $\mathbb{G}$ induzem uma correspondência um para um entre as extensões β-galoisianas de semigrupoides inversos e as extensões β-galoisianas de grupoides localmente indutivos.*

Com essas considerações, herdamos o seguinte resultado da teoria de Galois para ações de grupoide encontrado em [4], que caracteriza extensões galoisianas.

Teorema 4.3.7. *Sejam $\mathcal{S}$ um semigrupoide inverso e $\beta = (\{E_s\}_{s\in\mathcal{S}}, \{\beta_s : E_{s^{-1}} \to E_s\}_{s\in\mathcal{S}})$ uma ação* ortogonal *de $\mathcal{S}$ em $A = \bigoplus\limits_{e\in E(\mathcal{S})} E_e$ onde cada E_s é unitário. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *A é β-Galois sobre A^β.*

(ii) *A é um A^β-módulo projetivo finitamente gerado e a aplicação $j : A \ltimes_\beta^a \mathcal{S} \to End_{A^\beta}(A)$ dada por $j\left(\sum\limits_{s\in\mathcal{S}} a_s\delta_s\right)(x) = \sum\limits_{s\in\mathcal{S}} a_s\beta_s(x1_{s^{-1}})$ é um isomorfismo de A-módulos e de A^β-álgebras.*

(iii) *Para todo $A \ltimes_\beta^a \mathcal{S}$-módulo à esquerda M, a aplicação $\mu : A \otimes_{A^\beta} M^{\mathcal{S}} \to M^{\mathcal{S}}$ dada por $\mu(a \otimes m) = am$ é um isomorfismo de A-módulos.*

(iv) *A aplicação* $\phi : A \otimes_{A^\beta} A \to \prod\limits_{s\in\mathcal{S}} E_s$ *dada por* $\phi(a\otimes b) = (a\beta_s(b1_{s^{-1}}))_{s\in\mathcal{S}}$ *é um isomorfismo de* A*-módulos.*

(v) $AtA = A \ltimes^a_\beta \mathcal{S}$*, onde* $t = \sum\limits_{s\in\mathcal{S}} 1_s\delta_s$.

(vi) *A aplicação* $\tau' : A \otimes_{A^\beta} A \to A \ltimes^a_\beta \mathcal{S}$ *dada por* $\tau'(a\otimes b) = \sum\limits_{s\in S} a\beta_s(b1_{s^{-1}})\delta_s$ *é sobrejetiva.*

(vii) A *é um gerador da categoria de* $A \ltimes^a_\beta \mathcal{S}$*-módulos à esquerda.*

Demonstração. Temos que $\mathbb{G}(\beta)$ é uma ação de $\mathbb{G}(\mathcal{S})$ em A, e a extensão $A|_{A^\beta}$ é $\mathbb{G}(\beta)$-Galois com respeito a $\mathbb{G}(\mathcal{S})$. Pelo Corolário 4.1.7, $A \ltimes^a_\beta \mathcal{S} \simeq A \ltimes^a_\beta \mathbb{G}(\mathcal{S})$. Além disso, A, A^β, E_s e β_s se mantém inalterados na transição de β para $\mathbb{G}(\beta)$, para todo $s \in \mathcal{S}$. O resultado segue agora de [4, Theorem 5.3]. $\square$

Daqui em diante, β sempre será considerada uma ação ortogonal de $\mathcal{S}$ em A, a menos que o contrário seja dito explicitamente.

Observação 4.3.8. Como A é um anel comutativo, herdamos novamente do caso de grupoides que $tr_\beta(A) = A^\beta$. Observamos que

(i) Existe $c \in A$ tal que $tr_\beta(c) = 1_A$.

(ii) A^β é isomorfo a um somando direto de A como A^β-módulo. De fato, tr_β é uma aplicação sobrejetiva, portanto $A \simeq A^\beta \oplus \ker(tr_\beta)$.

Seja B uma A^β-subálgebra de A. Defina

$$\mathcal{T}_B = \{s \in \mathcal{S} : \beta_s(b1_{s^{-1}}) = b1_s, \text{ para todo } b \in B\}.$$

Analogamente, se β é uma ação ortogonal de um grupoide finito $\mathcal{G}$ em A e B é uma A^β-subálgebra de A, defina

$$\mathcal{H}_B = \{g \in \mathcal{G} : \beta_g(b1_{g^{-1}}) = b1_g, \text{ para todo } b \in B\}. \tag{4.2}$$

Definição 4.3.9. Dizemos que um subanel B de A é β-forte se, para todo $s, t \in \mathcal{S}$ com $ss^{-1} = tt^{-1}$, $s^{-1}t \notin \mathcal{T}_B$ e para todo idempotente não nulo $e \in E_s = E_t$, existe um elemento $b \in B$ tal que $\beta_s(b1_{s^{-1}})e \neq \beta_t(b1_{s^{-1}})e$.

Vamos começar a construir nosso caminho para o teorema de correspondência de Galois.

Lema 4.3.10. *Dados um semigrupoide inverso* $\mathcal{S}$ *e* β *uma ação ortogonal de* $\mathcal{S}$ *em* A*, suponha que* A *é* β*-Galois sobre* A^β*. Seja* B *uma* A^β*-subálgebra de* A*. Sejam* $\mathcal{T}$ *um subsemigrupoide inverso de* $\mathcal{S}$ *e* $A_\mathcal{T} = \bigoplus_{e\in E(\mathcal{T})} E_e$*. Defina* $\beta_\mathcal{T} = \{\beta_t : E_{t^{-1}} \to E_t, t \in \mathcal{T}\}$*. Então, denotando por* $\mathcal{H} = \mathbb{G}(\mathcal{T})$*,* $A_\mathcal{H} = \bigoplus_{e\in\mathcal{H}_0} E_e$ *e* $\beta_\mathcal{H} = \{\beta_h : E_{h^{-1}} \to E_h, h \in \mathcal{H}\}$ *como em [18, Theorem 4.1], temos que*

(i) $A_{\mathcal{T}} = A_{\mathcal{H}}$;

(ii) $\beta_{\mathcal{T}} = \mathbb{S}(\beta_{\mathcal{H}})$;

(iii) $\mathcal{T}_B = \mathbb{S}(\mathcal{H}_B)$.

Demonstração. (i): Basta notar que $E(\mathcal{T}) = \mathcal{H}_0$.

(ii): $\beta_{\mathcal{T}} = \{\beta_t : E_{t^{-1}} \to E_t : t \in \mathcal{T}\} = \{\mathbb{S}(\beta_h) : E_{h^{-1}} \to E_h : h \in \mathcal{H}\} = \mathbb{S}(\beta_{\mathcal{H}})$. A compatibilidade das ações segue da discussão na primeira seção deste capítulo.

(iii): $\mathcal{T}_B = \{s \in \mathcal{S} : \beta_s(b1_{s^{-1}}) = b1_s,$ para todo $b \in B\} = \mathbb{S}(\{g \in \mathbb{G}(\mathcal{S}) : \beta_g(b1_{g^{-1}}) = b1_t,$ para todo $b \in B\}) = \mathbb{S}(\mathcal{H}_B)$. □

Proposição 4.3.11. *O conjunto $\mathcal{T}_B$ é um subsemigrupoide inverso cheio de $\mathcal{S}$, para toda A^β-subálgebra B de A.*

Demonstração. Já sabemos que $\mathcal{H}_B = \mathbb{G}(\mathcal{T}_B)$ é um subgrupoide amplo de $\mathbb{G}(S)$. Precisamos apenas mostrar que $\mathcal{H}_B$ é ordenado. Sejam $x \in \mathcal{H}_B$ e $y \prec x$. Então $\beta_y = \beta_x|_{E_{y^{-1}}} = 0$. Ou seja, $y \in \mathcal{H}_B$. Como $\mathcal{H}_B$ é um subgrupoide ordenado amplo de $\mathbb{G}(\mathcal{S})$, segue que $\mathcal{T}_B$ é um subsemigrupoide inverso cheio de $\mathcal{S}$. Em particular, esse resultado mostra que $(\mathcal{S} \setminus \max \mathcal{S}) \subseteq \mathcal{T}_B$, para todo B. □

Na correspondência de Galois para ação de grupoide [18] temos a condição adicional de que os ideais E_g são não nulos, para todo $g \in \mathcal{G}$. Isso motiva o próximo resultado.

Proposição 4.3.12. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\max \mathcal{G}$ *é um subgrupoide de* $\mathcal{G}$*;*

(ii) *Se* $g \in \max \mathcal{G}$*, então* $r(g) \in \max \mathcal{G}$*;*

(iii) $\max \mathcal{G} = \{g \in \mathcal{G} : r(g) \in \max(\mathcal{G}_0)\}$.

Demonstração. Note inicialmente que se $g \in \mathcal{G}$ é tal que $r(g) \in \max \mathcal{G}_0$, então $g \in \max \mathcal{G}$. De fato, se existe $k \in \mathcal{G}$ tal que $g \leq k$, então $r(g) \leq r(k)$. Como $r(g) \in \max \mathcal{G}_0$, $r(g) = r(k)$. Pela unicidade das restrições, $g = (r(g)|k) = k$. Isso garante que sempre vale $\{g \in G : r(g) \in \max(\mathcal{G}_0)\} \subseteq \max \mathcal{G}$.

É imediato que (i) $\Rightarrow$ (ii). Para (ii) $\Rightarrow$ (i), seja $g \in \max \mathcal{G}$. Suponha que existe $k \in \mathcal{G}$ tal que $g^{-1} < k$. Então $g < k^{-1}$, o que é uma contradição. Se $g, h \in \max \mathcal{G}$ são tais que $\exists gh$, temos que $r(g) = r(gh) \in \max(\mathcal{G}_0)$, de onde segue que $gh \in \max \mathcal{G}$ pela primeira observação dessa demonstração. Assim $\max \mathcal{G}$ é um grupoide.

Claramente (iii) $\Rightarrow$ (ii). Para a recíproca, suponha que $g \in \max \mathcal{G}$. Logo, por (ii), $r(g) \in \max \mathcal{G}$. Em particular, $r(g) \in \max(\mathcal{G}_0)$. □

Fixe $\mathcal{G}$ um grupoide ordenado finito e β uma ação ortogonal de grupoide ordenado de $\mathcal{G}$ em A onde $E_g \neq 0$, para todo $g \in \max \mathcal{G}$. Então temos que $E_{r(g)} = E_g \neq 0$, para todo $g \in \max \mathcal{G}$. Mas isso implica que $r(g) \in \max \mathcal{G}$, como de outra forma teríamos que $E_{r(g)} = 0$. Então (ii) da proposição acima vale. Assim, $\max \mathcal{G}$ é um grupoide.

Exemplo 4.3.13 (Não existência de ação ortogonal de grupoide ordenado)**.** A discussão acima mostra que se $\mathcal{G}$ é um grupoide ordenado tal que existem R um anel comutativo, A uma R-álgebra e β uma ação ortogonal de grupoide ordenado de $\mathcal{G}$ em A tais que $E_g \neq 0$, para todo $g \in \max \mathcal{G}$, então $\max \mathcal{G}$ é um grupoide. Podemos reescrever essa afirmação em sua contrapositiva. Desta forma, se $\max \mathcal{G}$ não é um grupoide, então não podem existir R um anel comutativo, A uma R-álgebra e β uma ação ortogonal de grupoide ordenado de $\mathcal{G}$ em A com $E_g \neq 0$, para todo $g \in \max \mathcal{G}$.

Sejam $\mathcal{S} = \{x, y, z, a, b, s, s^{-1}, t, t^{-1}\}$ o semigrupoide inverso apresentado no Exemplo 1.2.14 e $\mathcal{G} = \mathbb{G}(\mathcal{S})$. Temos que $\max \mathcal{G} = \mathcal{G} \setminus \{a, b\}$ não é um subgrupoide de $\mathcal{G}$, pois $d(t) = a$ e $r(t) = b$ não pertencem a $\max \mathcal{G}$ embora $t \in \max \mathcal{G}$. Portanto, não podem existir R um anel comutativo, A uma R-álgebra e β uma ação ortogonal de grupoide ordenado de $\mathcal{G}$ em A.

Vamos denotar por $\mathsf{SubGr}(\mathsf{Max}\mathcal{G})$ o conjunto de todos subgrupoides amplos de $\max \mathcal{G}$ e $\mathsf{SubGr}(\mathcal{G})$ o conjunto de todos subgrupoides amplos de $\mathcal{G}$ que contém $(\mathcal{G} \setminus \max \mathcal{G})$.

Lema 4.3.14. *Existe uma correspondência bijetiva entre* $\mathsf{SubGr}(\mathsf{Max}\mathcal{G})$ *e* $\mathsf{SubGr}(\mathcal{G})$.

Demonstração. A aplicação

$$\begin{aligned} \mathsf{SubGr}(\mathsf{Max}\mathcal{G}) &\longrightarrow \mathsf{SubGr}(\mathcal{G}) \\ \mathcal{H}' &\longmapsto \mathcal{H} = \mathcal{H}' \cup (\mathcal{G} \setminus \max \mathcal{G}) \end{aligned}$$

é claramente bijetiva, com inversa dada por

$$\begin{aligned} \mathsf{SubGr}(\mathcal{G}) &\longrightarrow \mathsf{SubGr}(\mathsf{Max}\mathcal{G}) \\ \mathcal{H} &\longmapsto \mathcal{H} \cap \max \mathcal{G}. \end{aligned}$$

□

Observação 4.3.15. Se $\mathcal{G}$ é um grupoide localmente indutivo e β é uma ação ortogonal de grupoide ordenado de $\mathcal{G}$ em A tal que $E_g \neq 0$ para todo $g \in \max \mathcal{G} = \mathcal{G}'$, temos que $\beta' = \beta|_{\mathcal{G}'} = \{\{E_g\}_{g \in \mathcal{G}'}, \{\beta_g\}_{g \in \mathcal{G}'}\}$ é uma ação ortogonal de $\mathcal{G}'$ em A. Além disso, $A^\beta = A^{\beta'}$ e uma A^β-subálgebra B de A é β-forte no sentido de [18] se, e somente se, é β'-forte.

Assim, dada uma $A^{\beta'}$-subálgebra B separável, β'-forte de A, podemos usar a correspondência de Galois para o caso de ações de grupoide [18, Theorem 4.8(i)] para obter um subgrupoide amplo $\mathcal{H}'_B$ de $\mathcal{G}'$. Esse é um subgrupoide de $\mathcal{G}$, mas não é amplo nem ordenado em geral. Entretanto, podemos considerar a imagem de $\mathcal{H}'_B$ pela aplicação do Lema 4.3.14, adicionando todos elementos não maximais de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{H}'_B$, obtendo precisamente $\mathcal{H}_B$ como em (4.2). Já que $\mathbb{S}(\mathcal{H}_B) = \mathcal{T}_B$ pelo Lema 4.3.10, segue que $\mathcal{T}_B$ está bem definido. Além disso, note que $(\mathcal{S} \setminus \max \mathcal{S}) \subseteq \mathcal{T}_B$, para toda B adequada.

De agora em diante, suponha que os ideais associados aos elementos maximais de $E(\mathcal{S})$ são não nulos. Os próximos dois resultados seguem de 4.3.10 e [18].

Teorema 4.3.16. *Sejam $\mathcal{S}$ um semigrupoide inverso e β uma ação ortogonal de $\mathcal{S}$ em A. Suponha que A é β-Galois sobre A^β. Seja $\mathcal{T}$ um subsemigrupoide inverso de $\mathcal{S}$ tal que $(\mathcal{S} \setminus \max \mathcal{S}) \subseteq \mathcal{T}$. Então:*

(i) *$\beta_\mathcal{T}$ é uma ação de $\mathcal{T}$ em $A_\mathcal{T}$ e $A_\mathcal{T}$ é $\beta_\mathcal{T}$-Galois sobre $B = (A_\mathcal{T})^{\beta_\mathcal{T}}$.*

(ii) *B é A^β-separável.*

Além disso, se $\mathcal{T}$ é cheio, então:

(iii) *$A_\mathcal{T} = A$ e B é β-forte.*

(iv) *$\mathcal{T} = \mathcal{T}_B$.*

(v) *Se $\mathcal{T}$ é normal e de Clifford, então o semigrupoide inverso quociente $\mathcal{S}/\mathcal{T}$ age em B via uma ação $\overline{\beta}$ e B é $\overline{\beta}$-Galois sobre A^β.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{H} = \mathbb{G}(\mathcal{T})$ e $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \cap \max \mathbb{G}(\mathcal{S})$. Por [18, Theorem 4.1], $\beta_{\mathcal{H}'}$ é uma ação de $\mathcal{H}'$ em $A_{\mathcal{H}'} = A_\mathcal{H}$ e $A_\mathcal{H}$ é $\beta_{\mathcal{H}'}$-Galois sobre $(A_\mathcal{H})^{\beta_{\mathcal{H}'}}$. Então $\beta_\mathcal{H}$ é uma ação ortogonal indutiva de $\mathcal{H}$ em $A_\mathcal{H}$ e $A_\mathcal{H}$ é $\beta_\mathcal{H}$-Galois sobre $(A_\mathcal{H})^{\beta_\mathcal{H}}$. Também temos que $(A_\mathcal{H})^{\beta_\mathcal{H}}$ é A^β-separável. Assim, pelo Lema 4.3.10, $A_\mathcal{T} = A_\mathcal{H}$, $\beta_\mathcal{T} = \mathbb{S}(\beta_\mathcal{H})$ e os itens (i) e (ii) estão provados.

Suponha que $\mathcal{T}$ é cheio. Isso é o mesmo que dizer que $\mathcal{H}$ é amplo, de onde segue que $\mathcal{H}'$ é amplos em $\max \mathbb{G}(\mathcal{S})$ de onde segue o item (iii). Como $\mathcal{T}_B = \mathbb{S}(\mathcal{H}_B)$, o item (iv) segue do Lema 4.3.14.

Para mostrar (v), observe que se $\mathcal{T}$ é normal em $\mathcal{S}$, então $\mathcal{H}$ é normal em $\mathbb{G}(\mathcal{S})$ como na Definição 4.2.2. Mais ainda, note que essa definição implica que $\mathcal{H}$ é normal no mesmo sentido de [18]. Portanto o grupoide quociente $\mathbb{G}(\mathcal{S})/\equiv_\mathcal{H}$ está bem definido.

Como $\mathcal{T}$ é Clifford, $\equiv_\mathcal{H}$ e $\sim_\mathcal{H}$ são iguais, de onde segue que $\mathbb{G}(\mathcal{S})/\equiv_\mathcal{H}$ e $\mathbb{G}(\mathcal{S})/\mathcal{H}$ são grupoides ordenados isomorfos [1, Proposition 4.6], e portanto grupoides localmente indutivos isomorfos. Entretanto, por [18, Theorem 4.1(v)], $\max(\mathbb{G}(\mathcal{S}))/\equiv_{\mathcal{H}'} \simeq \mathbb{G}(\mathcal{S})/\equiv_\mathcal{H}$ age em B via uma ação $\overline{\beta}$. Esse isomorfismo vale pois $\mathcal{H}$ é amplo e $(\mathbb{G}(\mathcal{S}) \setminus \max \mathbb{G}(\mathcal{S})) \subseteq \mathcal{H}$. Logo $\mathbb{G}(\mathcal{S})/\mathcal{H}$ também age em B via $\overline{\beta}$, onde B é $\overline{\beta}$-Galois sobre A^β. Assim, $\mathbb{G}(\mathcal{S})/\mathcal{H} \simeq \mathbb{G}(\mathcal{S}/\mathcal{T})$, $\mathbb{S}(\overline{\beta})$ é uma ação de $\mathcal{S}/\mathcal{T}$ em B, desde que consigamos verificar que $\overline{\beta}$ é uma ação indutiva de grupoide ordenado. Vamos provar apenas que $\overline{\beta}$ é, de fato, uma ação de grupoide ordenado, pois ela já é uma ação ortogonal por definição e isso implicará que $\overline{\beta}$ é uma ação indutiva.

Antes disso, vamos relembrar a leitora e o leitor da definição de $\overline{\beta}$. Dado um sistema de representantes $\{g_i\}_{1 \le i \le n}$ de $\mathcal{G}/\equiv_\mathcal{H}$, vamos denotar por $\overline{g}$ a classe do elemento g com relação a $\equiv_\mathcal{H}$. Defina $e_g = e_{g_i} = tr_{\beta_\mathcal{H}}(1_{g_i})$, para todo $g \in \overline{g_i}$. Então $\overline{\beta} = (\{E_{\overline{g}}\}_{\overline{g} \in \mathcal{G}/\equiv_\mathcal{H}}, \{\overline{\beta}_{\overline{g}}\}_{\overline{g} \in \mathcal{G}/\equiv_\mathcal{H}})$ é dada por $E_{\overline{g}} = Be_g$ e $\overline{\beta}_{\overline{g}}(be_{g^{-1}}) = \beta_{g_i}(be_{g_i^{-1}})$.

Suponha agora que $[g_i]_\mathcal{H} \le_\mathcal{H} [g_j]_\mathcal{H}$. Isto é, suponha que existem $x, y \in \mathcal{H}$ tais que $\exists x \cdot g_i \cdot y$ e $x \cdot g_i \cdot y \le g_j$. Como β é uma ação ortogonal de semigrupoide inverso, $\mathbb{G}(\beta) := \beta$ é uma ação ortogonal indutiva de grupoide ordenado de $\mathbb{G}(\mathcal{S})$ em A. Portanto, $E_{y^{-1}} = E_{(x \cdot g_i \cdot y)^{-1}} = \delta_{x \cdot g_i \cdot y, g_j} E_{g_j^{-1}}$ e $E_x = E_{x \cdot g_i \cdot y} = \delta_{x \cdot g_i \cdot y, g_j} E_{g_j}$. Além disso, $\beta_{x \cdot g_i \cdot y} = \beta_{g_j}|_{E_{y^{-1}}}$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $x, y \in \{g_k\}_{1 \le k \le n}$. Vamos denotar $\delta = \delta_{x\cdot g_i\cdot y, g_j}$. Por um lado,

$$\begin{aligned}\beta_{x\cdot g_i\cdot y}(be_{y^{-1}}) &= \beta_{x\cdot g_i}(\beta_y(be_{y^{-1}})e_{g_i^{-1}}) = \beta_{x\cdot g_i}(be_{g_i^{-1}})\\ &= \beta_x(\beta_{g_i}(be_{g_i^{-1}})e_{x^{-1}}) = \beta_{g_i}(be_{g_i^{-1}})e_x = \beta_{g_i}(be_{g_i^{-1}})e_{x\cdot g_i\cdot y},\end{aligned}$$

pois $x, y \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_B$. Por outro lado,

$$\beta_{x\cdot g_i\cdot y}(be_{y^{-1}}) = \beta_{g_j}(be_{y^{-1}}) = \beta_{g_j}(be_{y^{-1}})e_{g_j}.$$

Repare que

$$\begin{aligned}e_{y^{-1}} &= \sum_{\substack{h\in\mathcal{H}\\ r(h)=d(y)}} 1_h = \sum_{\substack{h\in\mathcal{H}\\ r(h)=d(y)}} 1_{y^{-1}} = \sum_{\substack{h\in\mathcal{H}\\ r(h)=d(y)}} \delta 1_{g_j^{-1}}\\ &= \delta \sum_{\substack{h\in\mathcal{H}\\ r(h)=d(y)}} 1_{g_j^{-1}} = \delta \sum_{\substack{h\in\mathcal{H}\\ r(h)=d(y)}} 1_{g_j^{-1}} = \delta e_{g_j^{-1}}.\end{aligned}$$

E podemos ver que $e_x = \delta e_{g_j}$ pelos mesmo argumentos. Como

$$\beta_{g_i}(be_{g_i^{-1}})e_x = \beta_{g_j}(be_{y^{-1}})e_{g_j},$$

temos que

$$\delta\beta_{g_i}(be_{g_i^{-1}})e_{g_j} = \delta\beta_{g_j}(be_{g_j^{-1}})e_{g_j}. \tag{4.3}$$

Já que $\mathcal{T}$ é de Clifford, $r(x) = d(x) = r(g_i)$, de onde segue que $e_x = e_{x^{-1}} = e_{g_i}$. Neste caso,

$$E_{\overline{g_i}} = Be_{g_i} = Be_x = \delta Be_{g_j} = \delta E_{\overline{g_j}}. \tag{4.4}$$

Agora, (4.3) e (4.4) nos dizem que $[g_i]_{\mathcal{H}} \leq_{\mathcal{H}} [g_j]_{\mathcal{H}}$ implica $E_{\overline{g_i}} \subseteq E_{\overline{g_j}}$ e $\overline{\beta}_{\overline{g_i}} = \overline{\beta}_{\overline{g_j}}|_{E_{\overline{g_i}^{-1}}}$. Isto é, $\overline{\beta}$ é uma ação de grupoide ordenado como desejado. □

Teorema 4.3.17. *Suponha que A é β-Galois sobre A^β e seja B uma A^β-subálgebra separável, β-forte de A. Denotando por $\mathcal{T} := \mathcal{T}_B$ temos que $A^{\beta_\mathcal{T}} = B$.*

Demonstração. Por [18, Theorem 4.5], o resultado vale para $\mathcal{H} = \mathbb{G}(\mathcal{T})$. Pelo Lema 4.3.10, $\beta_\mathcal{T} = \mathbb{S}(\beta_\mathcal{H})$. Assim, $A^{\beta_\mathcal{T}} = A^{\beta_\mathcal{H}} = B$. □

Podemos então enunciar o principal resultado deste capítulo, o Teorema Fundamental da Teoria de Galois, que estende [7, Theorem 2.3].

Teorema 4.3.18. *Sejam $\mathcal{S}$ um semigrupoide inverso e β uma ação ortogonal de $\mathcal{S}$ em A. Suponha que A é β-Galois sobre A^β.*

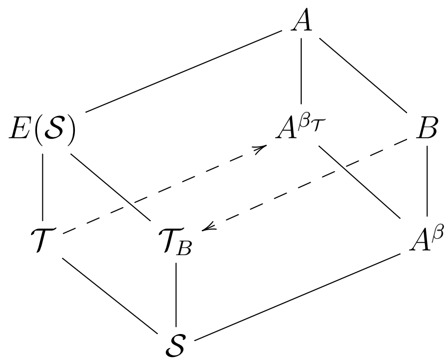
(a) ***A Correspondência de Galois:*** *existe uma correspondência um para um entre os subsemigrupoides cheios $\mathcal{T}$ de $\mathcal{S}$ tais que $(\mathcal{S} \setminus \max \mathcal{S}) \subseteq \mathcal{T}$ e as A^β-subálgebras separáveis, β-fortes B de A. Mais precisamente, sob esses hipóteses, as aplicações $\mathcal{T} \mapsto A^{\beta_\mathcal{T}}$ e $B \mapsto \mathcal{T}_B$ são inversas, isto é,*

$$A^{\beta_{\mathcal{T}_B}} = B \text{ e } \mathcal{T}_{A^{\beta_\mathcal{T}}} = \mathcal{T}.$$

(b) *Além disso, se $\mathcal{T}$ é um subsemigrupoide inverso normal de Clifford de $\mathcal{S}$ tal que $(\mathcal{S} \setminus \max \mathcal{S}) \subseteq \mathcal{T}$, então $\mathcal{S}/\mathcal{T}$ age em $A^{\beta_\mathcal{T}}$ via uma ação ortogonal $\overline{\beta}$ e $A^{\beta_\mathcal{T}}$ é $\overline{\beta}$-Galois sobre A^β.*

Demonstração. A demonstração segue dos Teoremas 4.3.16 e 4.3.17. □

Apresentamos uma representação gráfica do Teorema 4.3.18:



Nos próximos exemplos construiremos semigrupoides inversos que não são semigrupos inversos nem grupoides e agem ortogonalmente em álgebras para ilustrar a correspondência que acabamos de provar.

Exemplo 4.3.19. Sejam $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{4, 5, 6\}$. Considere $S = \mathcal{I}_s(X)$ e $T = \mathcal{I}_s(Y)$. Defina

$$U_{S,T} = \{f \text{ bijeção} : \text{dom} f \in \mathcal{P}(X), \text{Im} f \in \mathcal{P}(Y)\}$$
$$U_{T,S} = \{f \text{ bijeção} : \text{dom} f \in \mathcal{P}(Y), \text{Im} f \in \mathcal{P}(X)\}$$

conjuntos formados por bijeções parciais de $\{1, 2, 3\}$ para $\{4, 5, 6\}$ e de bijeções parciais de $\{4, 5, 6\}$ para $\{1, 2, 3\}$, respectivamente.

Considere $\mathcal{S} = S \cup T \cup U_{S,T} \cup U_{T,S}$ com operação de composição usual de funções. Claramente $\mathcal{S}$ é um semigrupoide inverso que não é semigrupo inverso nem grupoide. Usando o Teorema ESN, temos que o grupoide localmente indutivo $\mathbb{G}(\mathcal{S})$ associado a $\mathcal{S}$ tem a seguinte estrutura:

$$(\{I_{123}, I_{456}\}^2 \times S_3) \cup (\{I_{12}, I_{13}, I_{23}, I_{45}, I_{46}, I_{56}\}^2 \times \mathbb{Z}_2) \cup \{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6\}^2 \cup \{I_{\emptyset_X}, I_{\emptyset_Y}\}^2,$$

de forma que $|\mathcal{S}| = 136$. Sejam R anel comutativo com unidade 1_R e $A = \bigoplus_{i=1}^{6} Re_i$, onde os e_i's são idempotentes dois a dois ortogonais com soma 1_A.

Vamos construir uma ação ortogonal de semigrupoide inverso de $\mathcal{S}$ em A. De fato, considere

$$E_{I_{abc}} = \bigoplus_{i=1}^{3} Re_i, \quad E_{I_{def}} = \bigoplus_{i=4}^{6} Re_i,$$

e $E_s = 0$, para todo $s \in (\mathcal{S} \setminus \max \mathcal{S})_0$. Defina, para $r_i \in R$, $1 \leq i \leq 6$,

$$\beta_s \left(\sum_{i=1}^{6} r_i e_i \right) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{6} r_i e_{s(i)}, & \text{se } s \in \max \mathcal{S}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Desta forma, $\beta = (\{E_s\}_{s \in \mathcal{S}}, \{\beta_s\}_{s \in \mathcal{S}})$ é uma ação ortogonal de semigrupoide inverso de $\mathcal{S}$ em A. Entretanto, A não é uma extensão β-galoisiana de $A^\beta = R$, pois, por exemplo, se tomarmos os subsemigrupos inversos $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S} \setminus \{T_{12}^3, T_{13}^2, T_{23}^1, T_{45}^6, T_{46}^5, T_{56}^4, D_{123}^{546}, D_{123}^{654}, D_{123}^{465}, D_{456}^{213}, D_{456}^{321}, D_{456}^{132}\}$, onde

$$\begin{aligned} D_{ijk}^{lmn} : \{i,j,k\} &\to \{l,m,n\} \\ i &\mapsto l \\ j &\mapsto m \\ k &\mapsto n \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} T_{ij}^{k} : \{i,j,k\} &\to \{i,j,k\} \\ i &\mapsto j \\ j &\mapsto i \\ k &\mapsto k, \end{aligned}$$

e calcularmos suas álgebras de elementos invariantes associadas, teremos que ambos os subsemigrupos fixam toda a álgebra A. Logo, a correspondência de Galois não é biunívoca e portanto a extensão não pode ser β-galoisiana.

Exemplo 4.3.20. Sejam $\mathcal{S}, A$ como no Exemplo 4.3.19 e considere $\mathcal{U} = \mathcal{S} \setminus \max \mathcal{S}$ e $\mathcal{T} = \mathcal{U} \setminus \max \mathcal{U}$. Isto é, T é composto por todas as bijeções entre os conjuntos do tipo $\{a\}$, onde $a \in X \cup Y = \{1,2,3,4,5,6\}$ e os respectivos conjuntos vazios $\emptyset_X$ e $\emptyset_Y$. Denote por T_{ij} os elementos da forma

$$\begin{aligned} T_{ij} : \{i\} &\to \{j\} \\ i &\mapsto j. \end{aligned}$$

Vamos construir uma ação ortogonal γ de semigrupoide inverso de $\mathcal{T}$ em A, onde A será uma extensão γ-Galois sobre A^γ. Defina

$$E_{I_j} = Re_j, \text{ para todo } j \in \{1,2,3,4,5,6\},$$

$$\begin{aligned}\gamma_{T_{ij}} : E_i &\to E_j\\ re_i &\mapsto re_j,\end{aligned}$$

onde $r \in R$, $E_{I_{\emptyset_X}} = E_{I_{\emptyset_Y}} = 0$ e $\gamma_{I_{\emptyset_X}} = \gamma_{I_{\emptyset_Y}} = \gamma_{T_{\emptyset_X \emptyset_Y}} = \gamma_{T_{\emptyset_Y \emptyset_X}} = 0$. Assim, $\gamma = (\{E_t\}_{t\in\mathcal{T}}, \{\gamma_t\}_{t\in\mathcal{T}})$ é uma ação ortogonal de semigrupoide inverso de $\mathcal{T}$ em A.

Claramente $A^\gamma = R$. Além disso, se tomarmos $x_i = y_i = e_i$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, temos que

$$\sum_i x_i\gamma_t(y_i 1_{t^{-1}}) = \sum_i e_i\gamma_t(e_i 1_{t^{-1}}) = \sum_i e_j\gamma_t(e_i e_j) = e_j e_{t(j)} = \delta_{j,t(j)} e_j,$$

onde $e_j = 1_{t^{-1}}$. Desta forma, pelo fato de que qualquer elemento $t \in \max\mathcal{T}$ deixa j fixado se, e somente se, $t \in E(\mathcal{T})$, concluímos que

$$\sum_i x_i\gamma_t(y_i 1_{t^{-1}}) = \begin{cases} 1_t, & \text{se } t \in E(\mathcal{T}),\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Portanto, A é uma extensão γ-Galois de A^γ. Assim, podemos listar a correspondência entre os 333 subsemigrupoides inversos cheios de $\mathcal{T}$ que contém $\mathcal{T} \setminus \max\mathcal{T} = \{I_{\emptyset_X}, I_{\emptyset_Y}, T_{\emptyset_X\emptyset_Y}, T_{\emptyset_Y\emptyset_X}\}$ e as 333 R-subálgebras separáveis, γ-fortes de A. Seja $\mathcal{T}' = E(\mathcal{T}) \cup (\mathcal{T} \setminus \max\mathcal{T})$. Defina ainda $\mathcal{T}_{abc} = \{T_{ab}, T_{ba}, T_{ac}, T_{ca}, T_{bc}, T_{ca}\}$ onde $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$R \leftrightarrow \mathcal{T}'$
$R(e_i + e_j) \oplus \left(\bigoplus_{k\neq i,j} Re_k\right) \leftrightarrow \{T_{ij}, T_{ji}\} \cup \mathcal{T}'$
$R(e_i + e_j + e_k) \oplus \left(\bigoplus_{l\neq i,j,k} Re_l\right) \leftrightarrow \mathcal{T}_{ijk} \cup \mathcal{T}'$
$R\left(\sum_{k\neq i,j} e_k\right) \oplus Re_i \oplus Re_j \leftrightarrow \{T_{kl} : k, l \notin \{i, j\}\} \cup \mathcal{T}'$
$R\left(\sum_{j\neq i} e_j\right) \oplus Re_i \leftrightarrow \{T_{jk} : j, k \neq i\} \cup \mathcal{T}'$
$R(e_i + e_j) \oplus R(e_k + e_l) \oplus Re_m \oplus Re_n \leftrightarrow \{T_{ij}, T_{ji}, T_{kl}, T_{lk}\} \cup \mathcal{T}'$
$R(e_i + e_j) \oplus R(e_k + e_l) \oplus R(e_m + e_n) \leftrightarrow \{T_{ij}, T_{ji}, T_{kl}, T_{lk}, T_{mn}, T_{nm}\} \cup \mathcal{T}'$
$R(e_i + e_j + e_k) \oplus R(e_l + e_m) \oplus Re_n \leftrightarrow \mathcal{T}_{ijk} \cup \{T_{lm}, T_{ml}\} \cup \mathcal{T}'$
$R(e_i + e_j + e_k) \oplus R(e_l + e_m + e_n) \leftrightarrow \mathcal{T}_{ijk} \cup \mathcal{T}_{lmn} \cup \mathcal{T}'$
$R\left(\sum_{k\neq i,j} e_k\right) \oplus R(e_i \oplus e_j) \leftrightarrow \{T_{kl} : k, l \notin \{i, j\}\} \cup \{T_{ij}, T_{ji}\} \cup \mathcal{T}'$
$A \leftrightarrow \mathcal{T}$

Vamos encerrar esse trabalho com uma correspondência de Galois usando uma ação ortogonal de semigrupo inverso, de forma a exemplificar como nossa teoria pode ser restrita para este caso.

Exemplo 4.3.21. Vamos construir uma ação ortogonal usando o Exemplo 4.1.4 com $m = 3$, $k = 2$. Seja $X = \{1, 2, 3\}$. Vamos construir $\mathcal{I}_s(X)$, o semigrupo inverso de bijeções de X. Esse conjunto possui 34 elementos, a saber $I_\emptyset, I_1, I_2, I_3, I_{12},\ I_{13},\ I_{23},\ I_{123}, T_{12},\ T_{21},$ $T_{13},\ T_{31}, T_{23}, T_{32}, S_{12}, S_{13}, S_{23}, D_{12}^{13},\ D_{13}^{12},\ D_{12}^{23},\ D_{23}^{12},\ D_{13}^{23},\ D_{23}^{13},\ P_{12}^{13},\ P_{13}^{12}, P_{12}^{23}, P_{23}^{12}, P_{13}^{23}, P_{23}^{13},$ $T_{12}^{3},\ T_{13}^{2},\ T_{23}^{1},\ S_{123},\ S_{132}$, definidos por

$$\begin{aligned} T_{ij} : \{i\} &\to \{j\} \\ i &\mapsto j \end{aligned} \qquad \begin{aligned} S_{ij} : \{i,j\} &\to \{i,j\} \\ i &\mapsto j \\ j &\mapsto i \end{aligned}$$

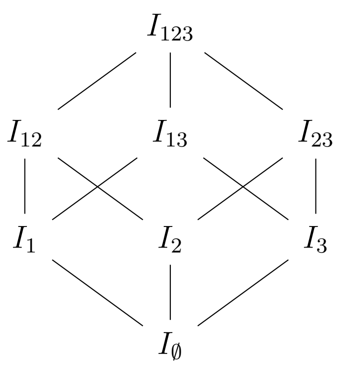
$$\begin{aligned} D_{ij}^{jk} : \{i,j\} &\to \{j,k\} \\ i &\mapsto k \\ j &\mapsto j \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P_{ij}^{jk} : \{i,j\} &\to \{j,k\} \\ i &\mapsto j \\ j &\mapsto k \end{aligned}$$

Uma boa forma de lembrar a diferença entre os D's e os P's é lembrar que sempre existe um único elemento na interseção entre o domínio e a imagem dessas bijeções. As bijeções tipo-D fixam esse elemento, enquanto as bijções tipo-P não.

$$\begin{aligned} S_{ijk} : \{i,j,k\} &\to \{i,j,k\} \\ i &\mapsto j \\ j &\mapsto k \\ k &\mapsto i \end{aligned} \qquad \begin{aligned} T_{ij}^{k} : \{i,j,k\} &\to \{i,j,k\} \\ i &\mapsto j \\ j &\mapsto i \\ k &\mapsto k \end{aligned}$$

As aplicações tipo-I são as identidades e, portanto, compõe $E(\mathcal{I}_s(X))$. É fácil ver que $\{I_{123}, T_{12}^3, T_{13}^2, T_{23}^1, S_{123}, S_{132}\} \simeq S_3$, o grupo de simetrias do triângulo. Vamos identificar esses dois conjuntos.

O diagrama de ordem do semirreticulado inferior $E(\mathcal{I}_s(X))$ é o seguinte:



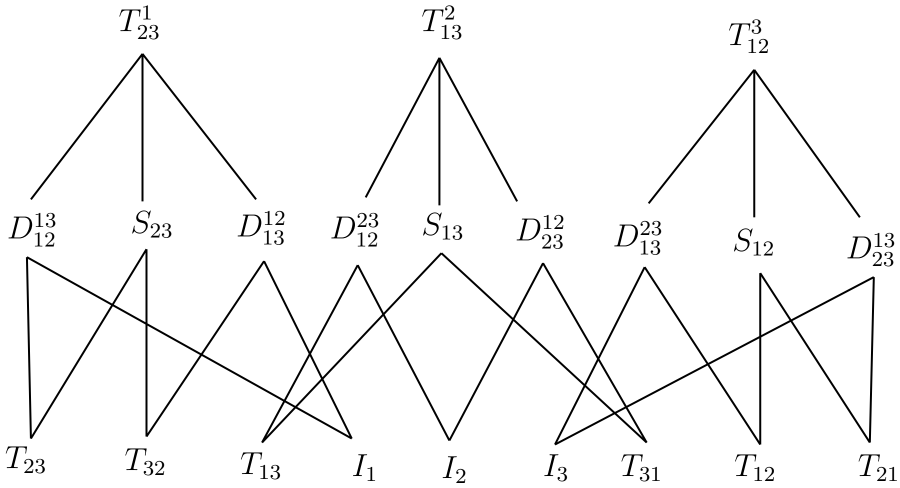
Abaixo apresentamos a tabela de operação de $\mathcal{I}_s(X)$, dada pela composição.

$\cdot$	$I_\emptyset$	I_1	I_2	I_3	I_{12}	I_{13}	I_{23}	I_{123}	T_{12}	T_{21}	T_{13}	T_{31}
$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$
I_1	$I_\emptyset$	I_1	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	I_1	I_1	$I_\emptyset$	I_1	T_{12}	$I_\emptyset$	T_{13}	$I_\emptyset$
I_2	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	I_2	$I_\emptyset$	I_2	$I_\emptyset$	I_2	I_2	$I_\emptyset$	T_{21}	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$
I_3	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	I_3	$I_\emptyset$	I_3	I_3	I_3	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	T_{31}
I_{12}	$I_\emptyset$	I_1	I_2	$I_\emptyset$	I_{12}	I_1	I_2	I_{12}	T_{12}	T_{21}	T_{13}	$I_\emptyset$
I_{13}	$I_\emptyset$	I_1	$I_\emptyset$	I_3	I_1	I_{13}	I_3	I_{13}	T_{12}	$I_\emptyset$	T_{13}	T_{31}
I_{23}	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	I_2	I_3	I_2	I_3	I_{23}	I_{23}	$I_\emptyset$	T_{21}	$I_\emptyset$	T_{31}
I_{123}	$I_\emptyset$	I_1	I_2	I_3	I_{12}	I_{13}	I_{23}	I_{123}	T_{12}	T_{21}	T_{13}	T_{31}
T_{12}	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	T_{12}	$I_\emptyset$	T_{12}	$I_\emptyset$	T_{12}	T_{12}	$I_\emptyset$	I_1	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$
T_{21}	$I_\emptyset$	T_{21}	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	T_{21}	T_{21}	$I_\emptyset$	T_{21}	I_2	$I_\emptyset$	T_{23}	$I_\emptyset$
T_{13}	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	T_{13}	$I_\emptyset$	T_{13}	T_{13}	T_{13}	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	I_1
T_{31}	$I_\emptyset$	T_{31}	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	T_{31}	T_{31}	$I_\emptyset$	T_{31}	T_{32}	$I_\emptyset$	I_3	$I_\emptyset$
T_{23}	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	T_{23}	$I_\emptyset$	T_{23}	T_{23}	T_{23}	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	T_{21}
T_{32}	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	T_{32}	$I_\emptyset$	T_{32}	$I_\emptyset$	T_{32}	T_{32}	$I_\emptyset$	T_{31}	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$
S_{12}	$I_\emptyset$	T_{21}	T_{12}	$I_\emptyset$	S_{12}	T_{21}	T_{12}	S_{12}	I_2	I_1	T_{23}	$I_\emptyset$
S_{13}	$I_\emptyset$	T_{31}	$I_\emptyset$	T_{13}	T_{31}	S_{13}	T_{13}	S_{13}	T_{32}	$I_\emptyset$	I_3	I_1
S_{23}	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	T_{32}	T_{23}	T_{32}	T_{23}	S_{23}	S_{23}	$I_\emptyset$	T_{31}	$I_\emptyset$	T_{21}
D_{12}^{13}	$I_\emptyset$	I_1	$I_\emptyset$	T_{23}	I_1	D_{12}^{13}	T_{23}	D_{12}^{13}	T_{12}	$I_\emptyset$	T_{13}	T_{21}
D_{13}^{12}	$I_\emptyset$	I_1	T_{32}	$I_\emptyset$	D_{13}^{12}	I_1	T_{32}	D_{13}^{12}	T_{12}	T_{31}	T_{13}	$I_\emptyset$
D_{12}^{23}	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	I_2	T_{13}	I_2	T_{13}	D_{12}^{23}	D_{12}^{23}	$I_\emptyset$	T_{21}	$I_\emptyset$	I_1
D_{23}^{12}	$I_\emptyset$	T_{31}	I_2	$I_\emptyset$	D_{23}^{12}	T_{31}	I_2	D_{23}^{12}	T_{32}	T_{21}	I_3	$I_\emptyset$
D_{13}^{23}	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	T_{12}	I_3	T_{12}	I_3	D_{13}^{23}	D_{13}^{23}	$I_\emptyset$	I_1	$I_\emptyset$	T_{31}
D_{23}^{13}	$I_\emptyset$	T_{21}	$I_\emptyset$	I_3	T_{21}	D_{23}^{13}	I_3	D_{23}^{13}	I_2	$I_\emptyset$	T_{23}	T_{31}
P_{12}^{13}	$I_\emptyset$	T_{21}	$I_\emptyset$	T_{13}	T_{21}	P_{12}^{13}	T_{13}	P_{12}^{13}	I_2	$I_\emptyset$	T_{23}	I_1
P_{13}^{12}	$I_\emptyset$	T_{31}	T_{12}	$I_\emptyset$	P_{13}^{12}	T_{31}	T_{12}	P_{13}^{12}	T_{32}	I_1	I_3	$I_\emptyset$
P_{12}^{23}	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	T_{12}	T_{23}	T_{12}	T_{23}	P_{12}^{23}	P_{12}^{23}	$I_\emptyset$	I_1	$I_\emptyset$	T_{21}
P_{23}^{12}	$I_\emptyset$	T_{21}	T_{32}	$I_\emptyset$	P_{23}^{12}	T_{21}	T_{32}	P_{23}^{12}	I_2	T_{31}	T_{23}	$I_\emptyset$
P_{13}^{23}	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	T_{32}	T_{13}	T_{32}	T_{13}	P_{13}^{23}	P_{13}^{23}	$I_\emptyset$	T_{31}	$I_\emptyset$	I_1
P_{23}^{13}	$I_\emptyset$	T_{31}	$I_\emptyset$	T_{23}	T_{31}	P_{23}^{13}	T_{23}	P_{23}^{13}	T_{32}	$I_\emptyset$	I_3	T_{21}
S_{123}	$I_\emptyset$	T_{31}	T_{12}	T_{23}	P_{13}^{12}	P_{23}^{13}	P_{12}^{23}	S_{123}	T_{32}	I_1	I_3	T_{21}
S_{132}	$I_\emptyset$	T_{21}	T_{32}	T_{13}	P_{23}^{12}	P_{12}^{13}	P_{13}^{23}	S_{132}	I_2	T_{31}	T_{23}	I_1
T_{13}^2	$I_\emptyset$	T_{31}	I_2	T_{13}	D_{23}^{12}	S_{13}	D_{12}^{23}	T_{13}^2	T_{32}	T_{21}	I_3	I_1
T_{12}^3	$I_\emptyset$	T_{21}	T_{12}	I_3	S_{12}	D_{23}^{13}	D_{13}^{23}	T_{12}^3	I_2	I_1	T_{23}	T_{31}
T_{23}^1	$I_\emptyset$	I_1	T_{32}	T_{23}	D_{13}^{12}	D_{12}^{13}	S_{23}	T_{23}^1	T_{12}	T_{31}	T_{13}	T_{21}

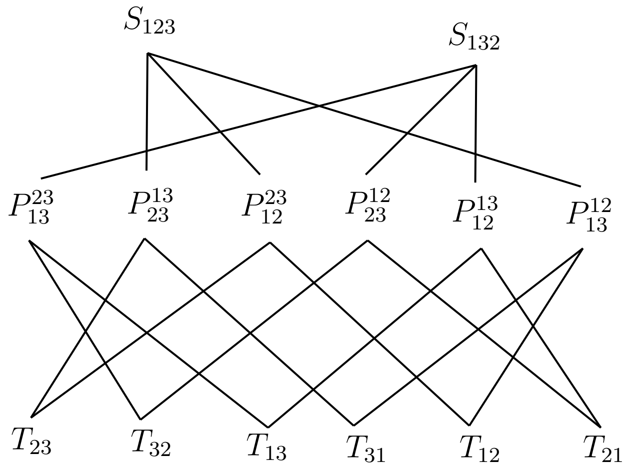
$\cdot$	T_{23}	T_{32}	S_{12}	S_{13}	S_{23}	D_{12}^{13}	D_{13}^{12}	D_{12}^{23}	D_{23}^{12}	D_{13}^{23}	D_{23}^{13}
$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$
I_1	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	T_{12}	T_{13}	$I_\emptyset$	I_1	I_1	T_{13}	$I_\emptyset$	T_{12}	$I_\emptyset$
I_2	T_{23}	$I_\emptyset$	T_{21}	$I_\emptyset$	T_{23}	T_{23}	$I_\emptyset$	I_2	I_2	$I_\emptyset$	T_{21}
I_3	$I_\emptyset$	T_{32}	$I_\emptyset$	T_{31}	T_{32}	$I_\emptyset$	T_{32}	$I_\emptyset$	T_{31}	I_3	I_3
I_{12}	T_{23}	$I_\emptyset$	S_{12}	T_{13}	T_{23}	D_{12}^{13}	I_1	D_{12}^{23}	I_2	T_{12}	T_{21}
I_{13}	$I_\emptyset$	T_{32}	T_{12}	S_{13}	T_{32}	I_1	D_{13}^{12}	T_{13}	T_{31}	D_{13}^{23}	I_3
I_{23}	T_{23}	T_{32}	T_{21}	T_{31}	S_{23}	T_{23}	T_{32}	I_2	D_{23}^{12}	I_3	D_{23}^{13}
I_{123}	T_{23}	T_{32}	S_{12}	S_{13}	S_{23}	D_{12}^{13}	D_{13}^{12}	D_{12}^{23}	D_{23}^{12}	D_{13}^{23}	D_{23}^{13}
T_{12}	T_{13}	$I_\emptyset$	I_1	$I_\emptyset$	T_{13}	T_{13}	$I_\emptyset$	T_{12}	T_{12}	$I_\emptyset$	I_1
T_{21}	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	I_2	T_{23}	$I_\emptyset$	T_{21}	T_{21}	T_{23}	$I_\emptyset$	I_2	$I_\emptyset$
T_{13}	$I_\emptyset$	T_{12}	$I_\emptyset$	I_1	T_{12}	$I_\emptyset$	T_{12}	$I_\emptyset$	I_1	T_{13}	T_{13}
T_{31}	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	T_{32}	I_3	$I_\emptyset$	T_{31}	T_{31}	I_3	$I_\emptyset$	T_{32}	$I_\emptyset$
T_{23}	$I_\emptyset$	I_2	$I_\emptyset$	T_{21}	I_2	$I_\emptyset$	I_2	$I_\emptyset$	T_{21}	T_{23}	T_{23}
T_{32}	I_3	$I_\emptyset$	T_{31}	$I_\emptyset$	I_3	I_3	$I_\emptyset$	T_{32}	T_{32}	$I_\emptyset$	T_{31}
S_{12}	T_{13}	$I_\emptyset$	I_{12}	T_{23}	T_{13}	P_{12}^{13}	T_{21}	P_{12}^{23}	T_{12}	I_2	I_1
S_{13}	$I_\emptyset$	T_{12}	T_{32}	I_{13}	T_{12}	T_{31}	P_{13}^{12}	I_3	I_1	P_{13}^{23}	T_{13}
S_{23}	I_3	I_2	T_{31}	T_{21}	I_{23}	I_3	I_2	T_{32}	P_{23}^{12}	T_{23}	P_{23}^{13}
D_{12}^{13}	$I_\emptyset$	I_2	T_{12}	P_{12}^{13}	I_2	I_1	I_{12}	T_{13}	T_{21}	P_{12}^{23}	T_{23}
D_{13}^{12}	I_3	$I_\emptyset$	P_{13}^{12}	T_{13}	I_3	I_{13}	I_1	P_{13}^{23}	T_{32}	T_{12}	T_{31}
D_{12}^{23}	T_{23}	T_{12}	T_{21}	I_1	P_{12}^{23}	T_{23}	T_{12}	I_2	I_{12}	T_{13}	P_{12}^{13}
D_{23}^{12}	T_{23}	$I_\emptyset$	P_{23}^{12}	I_3	T_{23}	P_{23}^{13}	T_{31}	I_{23}	I_2	T_{32}	T_{21}
D_{13}^{23}	T_{13}	T_{32}	I_1	T_{31}	P_{13}^{23}	T_{13}	T_{32}	T_{12}	P_{13}^{12}	I_3	I_{13}
D_{23}^{13}	$I_\emptyset$	T_{32}	I_2	P_{23}^{13}	T_{32}	T_{21}	P_{23}^{12}	T_{23}	T_{31}	I_{23}	I_3
P_{12}^{13}	$I_\emptyset$	T_{12}	I_2	D_{12}^{13}	T_{12}	T_{21}	S_{12}	T_{23}	I_1	D_{12}^{23}	T_{13}
P_{13}^{12}	T_{13}	$I_\emptyset$	D_{13}^{12}	I_3	T_{13}	S_{13}	T_{31}	D_{13}^{23}	T_{12}	T_{32}	I_1
P_{12}^{23}	T_{13}	I_2	I_1	T_{21}	D_{12}^{23}	T_{13}	I_2	T_{12}	S_{12}	T_{23}	D_{12}^{13}
P_{23}^{12}	I_3	$I_\emptyset$	D_{23}^{12}	T_{23}	I_3	D_{23}^{13}	T_{21}	S_{23}	T_{32}	I_2	T_{31}
P_{13}^{23}	I_3	T_{12}	T_{31}	I_1	D_{13}^{23}	I_3	T_{12}	T_{32}	D_{13}^{12}	T_{13}	S_{13}
P_{23}^{13}	$I_\emptyset$	I_2	T_{32}	D_{23}^{13}	I_2	T_{31}	D_{23}^{12}	I_3	T_{21}	S_{23}	T_{23}
S_{123}	T_{13}	I_2	D_{13}^{12}	D_{23}^{13}	D_{12}^{23}	S_{13}	D_{23}^{12}	D_{13}^{23}	S_{12}	S_{23}	D_{12}^{13}
S_{132}	I_3	T_{12}	D_{23}^{12}	D_{12}^{13}	D_{13}^{23}	D_{23}^{13}	S_{12}	S_{23}	D_{13}^{12}	D_{12}^{23}	S_{13}
T_{13}^2	T_{23}	T_{12}	P_{23}^{12}	I_{13}	P_{12}^{23}	P_{23}^{13}	P_{13}^{12}	I_{23}	I_{12}	P_{13}^{23}	P_{12}^{13}
T_{12}^3	T_{13}	T_{32}	I_{12}	P_{23}^{13}	P_{13}^{23}	P_{12}^{13}	P_{23}^{12}	P_{12}^{23}	P_{13}^{12}	I_{23}	I_{13}
T_{23}^1	I_3	I_2	P_{13}^{12}	P_{12}^{13}	I_{23}	I_{13}	I_{12}	P_{13}^{23}	P_{23}^{12}	P_{12}^{23}	P_{23}^{13}

$\cdot$	P_{12}^{13}	P_{13}^{12}	P_{12}^{23}	P_{23}^{12}	P_{13}^{23}	P_{23}^{13}	S_{123}	S_{132}	T_{13}^{2}	T_{12}^{3}	T_{23}^{1}
$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$	$I_\emptyset$
I_1	T_{13}	T_{12}	T_{12}	$I_\emptyset$	T_{13}	$I_\emptyset$	T_{12}	T_{13}	T_{13}	T_{12}	I_1
I_2	T_{21}	$I_\emptyset$	T_{23}	T_{21}	$I_\emptyset$	T_{23}	T_{23}	T_{21}	I_2	T_{21}	T_{23}
I_3	$I_\emptyset$	T_{31}	$I_\emptyset$	T_{32}	T_{32}	T_{31}	T_{31}	T_{32}	T_{31}	I_3	T_{32}
I_{12}	P_{12}^{13}	T_{12}	P_{12}^{23}	T_{21}	T_{13}	T_{23}	P_{12}^{23}	P_{12}^{13}	D_{12}^{23}	S_{12}	D_{12}^{13}
I_{13}	T_{13}	P_{13}^{12}	T_{12}	T_{32}	P_{13}^{23}	T_{31}	P_{13}^{12}	P_{13}^{23}	S_{13}	D_{13}^{23}	D_{13}^{12}
I_{23}	T_{21}	T_{31}	T_{23}	P_{23}^{12}	T_{32}	P_{23}^{13}	P_{23}^{13}	P_{23}^{12}	D_{23}^{12}	D_{23}^{13}	S_{23}
I_{123}	P_{12}^{13}	P_{13}^{12}	P_{12}^{23}	P_{23}^{12}	P_{13}^{23}	P_{23}^{13}	S_{123}	S_{132}	T_{13}^{2}	T_{12}^{3}	T_{23}^{1}
T_{12}	I_1	$I_\emptyset$	T_{13}	I_1	$I_\emptyset$	T_{13}	T_{13}	I_1	T_{12}	I_1	T_{13}
T_{21}	T_{23}	I_2	I_2	$I_\emptyset$	T_{23}	$I_\emptyset$	I_2	T_{23}	T_{23}	I_2	T_{21}
T_{13}	$I_\emptyset$	I_1	$I_\emptyset$	T_{12}	T_{12}	I_1	I_1	T_{12}	I_1	T_{13}	T_{12}
T_{31}	I_3	T_{32}	T_{32}	$I_\emptyset$	I_3	$I_\emptyset$	T_{32}	I_3	I_3	T_{32}	T_{31}
T_{23}	$I_\emptyset$	T_{21}	$I_\emptyset$	I_2	I_2	T_{21}	T_{21}	I_2	T_{21}	T_{23}	I_2
T_{32}	T_{31}	$I_\emptyset$	I_3	T_{31}	$I_\emptyset$	I_3	I_3	T_{31}	T_{32}	T_{31}	I_3
S_{12}	D_{12}^{13}	I_2	D_{12}^{23}	I_1	T_{23}	T_{13}	D_{12}^{23}	D_{12}^{13}	P_{12}^{23}	I_{12}	P_{12}^{13}
S_{13}	I_3	D_{13}^{12}	T_{32}	T_{12}	D_{13}^{23}	I_1	D_{13}^{12}	D_{13}^{23}	I_{13}	P_{13}^{23}	P_{13}^{12}
S_{23}	T_{31}	T_{21}	I_3	D_{23}^{13}	I_2	D_{23}^{12}	D_{23}^{13}	D_{23}^{12}	P_{23}^{12}	P_{23}^{13}	I_{23}
D_{12}^{13}	T_{13}	S_{12}	T_{12}	I_2	D_{12}^{23}	T_{21}	S_{12}	D_{12}^{23}	P_{12}^{13}	P_{12}^{23}	I_{12}
D_{13}^{12}	S_{13}	T_{12}	D_{13}^{23}	T_{31}	T_{13}	I_3	D_{13}^{23}	S_{13}	P_{13}^{23}	P_{13}^{12}	I_{13}
D_{12}^{23}	T_{21}	I_1	T_{23}	S_{12}	T_{12}	D_{12}^{13}	D_{12}^{13}	S_{12}	I_{12}	P_{12}^{13}	P_{12}^{23}
D_{23}^{12}	D_{23}^{13}	T_{32}	S_{23}	T_{21}	I_3	T_{23}	S_{23}	D_{23}^{13}	I_{23}	P_{23}^{12}	P_{23}^{13}
D_{13}^{23}	I_1	T_{31}	T_{13}	D_{13}^{12}	T_{32}	S_{13}	S_{13}	D_{13}^{12}	P_{13}^{12}	I_{13}	P_{13}^{23}
D_{23}^{13}	T_{23}	D_{23}^{12}	I_2	T_{32}	S_{23}	T_{31}	D_{23}^{12}	S_{23}	P_{23}^{13}	I_{23}	P_{23}^{12}
P_{12}^{13}	T_{23}	I_{12}	I_2	T_{12}	P_{12}^{23}	I_1	I_{12}	P_{12}^{23}	D_{12}^{13}	D_{12}^{23}	S_{12}
P_{13}^{12}	I_{13}	T_{32}	P_{13}^{23}	I_1	I_3	T_{13}	P_{13}^{23}	I_{13}	D_{13}^{23}	D_{13}^{12}	S_{13}
P_{12}^{23}	I_1	T_{21}	T_{13}	I_{12}	I_2	P_{12}^{13}	P_{12}^{13}	I_{12}	S_{12}	D_{12}^{13}	D_{12}^{23}
P_{23}^{12}	P_{23}^{13}	I_2	I_{23}	T_{31}	T_{23}	I_3	I_{23}	P_{23}^{13}	S_{23}	D_{23}^{12}	D_{23}^{13}
P_{13}^{23}	T_{31}	I_1	I_3	P_{13}^{12}	T_{12}	I_{13}	I_{13}	P_{13}^{12}	D_{13}^{12}	S_{13}	D_{13}^{23}
P_{23}^{13}	I_3	P_{23}^{12}	T_{32}	I_2	I_{23}	T_{21}	P_{23}^{12}	I_{23}	D_{23}^{13}	S_{23}	D_{23}^{12}
S_{123}	I_{13}	P_{23}^{12}	P_{13}^{23}	I_{12}	I_{23}	P_{12}^{13}	S_{132}	I_{123}	T_{12}^{3}	T_{23}^{1}	T_{13}^{2}
S_{132}	P_{23}^{13}	I_{12}	I_{23}	P_{13}^{12}	P_{12}^{23}	I_{13}	I_{123}	S_{123}	T_{23}^{1}	T_{13}^{2}	T_{12}^{3}
T_{13}^{2}	D_{23}^{13}	D_{13}^{12}	S_{23}	S_{12}	D_{13}^{23}	D_{12}^{13}	T_{23}^{1}	T_{12}^{3}	I_{123}	S_{132}	S_{123}
T_{12}^{3}	D_{12}^{13}	D_{23}^{12}	D_{12}^{23}	D_{13}^{12}	S_{23}	S_{13}	T_{13}^{2}	T_{23}^{1}	S_{123}	I_{123}	S_{132}
T_{23}^{1}	S_{13}	S_{12}	D_{13}^{23}	D_{23}^{12}	D_{12}^{23}	D_{23}^{13}	T_{12}^{3}	T_{13}^{2}	S_{132}	S_{123}	I_{123}

O diagrama de ordem de $\mathcal{I}_s(X)$ pode ser dividido em duas partes:



e



Como $I_{123} = \max\{E(\mathcal{I}_s(X))\}$, temos que toda ação ortogonal de $\mathcal{I}_s(X)$ em uma álgebra A é, na verdade, uma ação de S_3 em A.

Considere o subsemigrupo inverso de $\mathcal{I}_s(X)$ dado por $S = \mathcal{I}_s(X) \setminus S_3$. Vamos construir uma ação de S em uma R-álgebra $A = \bigoplus_{i=1}^6 Re_i$, onde R é um anel comutativo, $e_ie_j = \delta_{i,j}e_i$ e $\sum_{i=1}^6 e_i = 1_A$.

Defina $E_{I_{12}} = Re_1 \oplus Re_2$, $E_{I_{13}} = Re_3 \oplus Re_4$ e $E_{I_{23}} = Re_5 \oplus Re_6$. Assim $A = E_{I_{12}} \oplus E_{I_{13}} \oplus E_{I_{23}} = \bigoplus\limits_{e \in E(S)} E_e$.

Os isomorfismos são dados por

$$\begin{array}{ccc} \beta_{D_{12}^{13}} : E_{I_{12}} \to E_{I_{13}} & \beta_{D_{12}^{23}} : E_{I_{12}} \to E_{I_{23}} & \beta_{D_{13}^{23}} : E_{I_{13}} \to E_{I_{23}} \\ ae_1 + be_2 \mapsto ae_3 + be_4 & ae_1 + be_2 \mapsto be_5 + ae_6 & ae_3 + be_4 \mapsto ae_5 + be_6 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \beta_{P_{12}^{13}} : E_{I_{12}} \to E_{I_{13}} & \beta_{P_{12}^{23}} : E_{I_{12}} \to E_{I_{23}} & \beta_{P_{13}^{23}} : E_{I_{13}} \to E_{I_{23}} \\ \quad ae_1 + be_2 \mapsto be_3 + ae_4 & \quad ae_1 + be_2 \mapsto ae_5 + be_6 & \quad ae_3 + be_4 \mapsto be_5 + ae_6 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \beta_{S_{12}} : E_{I_{12}} \to E_{I_{12}} & \beta_{S_{13}} : E_{I_{13}} \to E_{I_{13}} & \beta_{S_{23}} : E_{I_{23}} \to E_{I_{23}} \\ \quad ae_1 + be_2 \mapsto be_1 + ae_2 & \quad ae_3 + be_4 \mapsto be_3 + ae_4 & \quad ae_5 + be_6 \mapsto be_5 + ae_6 \end{array}$$

e os inversos são óbvios. Note que na nossa notação D significar fixar e P significa mudar, mas nos isomorfismos entre $E_{I_{13}}$ e $E_{I_{23}}$ essa definição é trocada. Assim, $\beta = (\{E_s\}_{s\in S}, \{\beta_s\}_{s\in S})$ é uma ação de S em A e $A^\beta = R1_A \simeq R$. Mais ainda, A é β-Galois sobre R com sistema de coordenadas β-Galois igual a $\{x_i = y_i = e_i\}_{i=1,\ldots,6}$. Esses são os únicos ideais que importam para nós, pois $\max S = \{I_{12}, I_{13}, I_{23}, S_{12}, S_{13}, S_{23}, D_{12}^{13}, D_{13}^{12}, D_{12}^{23}, D_{23}^{12}, D_{13}^{23}, D_{23}^{13}, P_{12}^{13}, P_{13}^{12}, P_{12}^{23}, P_{23}^{12}, P_{13}^{23}, P_{23}^{13}\}$.

Vamos calcular as A^β-subálgebras entre R e A que são separáveis e β-fortes, bem como os subsemigrupos inversos associados. Considere $T = (S \setminus \max S) \cup E(S) = \{I_\emptyset, I_1, I_2, I_3, I_{12}, I_{13}, I_{23}, T_{12}, T_{21}, T_{13}, T_{31}, T_{23}, T_{32}\}$. A correspondência nos dá:

$A \leftrightarrow T_A = T$

$B_1 = R(e_1 + e_2) \oplus Re_3 \oplus Re_4 \oplus Re_5 \oplus Re_6 \leftrightarrow T_{B_1} = T \cup \{S_{12}\}$

$B_2 = Re_1 \oplus Re_2 \oplus R(e_3 + e_4) \oplus Re_5 \oplus Re_6 \leftrightarrow T_{B_2} = T \cup \{S_{13}\}$

$B_3 = Re_1 \oplus Re_2 \oplus Re_3 \oplus Re_4 \oplus R(e_5 + e_6) \leftrightarrow T_{B_3} = T \cup \{S_{23}\}$

$B_4 = R(e_1 + e_3) \oplus R(e_2 + e_4) \oplus Re_5 \oplus Re_6 \leftrightarrow T_{B_4} = T \cup \{D_{12}^{13}, D_{13}^{12}\}$

$B_5 = R(e_1 + e_6) \oplus R(e_2 + e_5) \oplus Re_3 \oplus Re_4 \leftrightarrow T_{B_5} = T \cup \{D_{12}^{23}, D_{23}^{12}\}$

$B_6 = Re_1 \oplus Re_2 \oplus R(e_3 + e_5) \oplus R(e_4 + e_6) \leftrightarrow T_{B_6} = T \cup \{D_{13}^{23}, D_{23}^{13}\}$

$B_7 = R(e_1 + e_4) \oplus R(e_2 + e_3) \oplus Re_5 \oplus Re_6 \leftrightarrow T_{B_7} = T \cup \{P_{12}^{13}, P_{13}^{12}\}$

$B_8 = R(e_1 + e_5) \oplus R(e_2 + e_6) \oplus Re_3 \oplus Re_4 \leftrightarrow T_{B_8} = T \cup \{P_{12}^{23}, P_{23}^{12}\}$

$B_9 = Re_1 \oplus Re_2 \oplus R(e_3 + e_6) \oplus R(e_4 + e_5) \leftrightarrow T_{B_9} = T \cup \{P_{13}^{23}, P_{23}^{13}\}$

$C_1 = R(e_1 + e_2) \oplus R(e_3 + e_4) \oplus Re_5 \oplus Re_6 \leftrightarrow T_{C_1} = T \cup \{S_{12}, S_{13}\}$

$C_2 = R(e_1 + e_2) \oplus Re_3 \oplus Re_4 \oplus R(e_5 + e_6) \leftrightarrow T_{C_2} = T \cup \{S_{12}, S_{23}\}$

$C_3 = Re_1 \oplus Re_2 \oplus R(e_3 + e_4) \oplus R(e_5 + e_6) \leftrightarrow T_{C_3} = T \cup \{S_{13}, S_{23}\}$

$C_4 = R(e_1 + e_3) \oplus R(e_2 + e_4) \oplus R(e_5 + e_6) \leftrightarrow T_{C_4} = T \cup \{S_{23}, D_{12}^{13}, D_{13}^{12}\}$

$C_5 = R(e_1 + e_6) \oplus R(e_2 + e_5) \oplus R(e_3 + e_4) \leftrightarrow T_{C_5} = T \cup \{S_{13}, D_{12}^{23}, D_{23}^{12}\}$

$C_6 = R(e_1 + e_2) \oplus R(e_3 + e_5) \oplus R(e_4 + e_6) \leftrightarrow T_{C_6} = T \cup \{S_{12}, D_{13}^{23}, D_{23}^{13}\}$

$C_7 = R(e_1 + e_4) \oplus R(e_2 + e_3) \oplus R(e_5 + e_6) \leftrightarrow T_{C_7} = T \cup \{S_{23}, P_{12}^{13}, P_{13}^{12}\}$

$C_8 = R(e_1 + e_5) \oplus R(e_2 + e_6) \oplus R(e_3 + e_4) \leftrightarrow T_{C_8} = T \cup \{S_{13}, P_{12}^{23}, P_{23}^{12}\}$

$C_9 = R(e_1 + e_2) \oplus R(e_3 + e_6) \oplus R(e_4 + e_5) \leftrightarrow T_{C_9} = T \cup \{S_{12}, P_{13}^{23}, P_{23}^{13}\}$

$C_{10} = R(e_1 + e_3 + e_5) \oplus R(e_2 + e_4 + e_6) \leftrightarrow T_{C_{10}} = T_{B_4} \cup T_{B_6} \cup T_{B_8}$

$C_{11} = R(e_1 + e_3 + e_6) \oplus R(e_2 + e_4 + e_5) \leftrightarrow T_{C_{11}} = T_{B_4} \cup T_{B_5} \cup T_{B_9}$

$C_{12} = R(e_1 + e_4 + e_5) \oplus R(e_2 + e_3 + e_6) \leftrightarrow T_{C_{12}} = T_{B_7} \cup T_{B_8} \cup T_{B_9}$

$C_{13} = R(e_1 + e_4 + e_5) \oplus R(e_2 + e_3 + e_5) \leftrightarrow T_{C_{13}} = T_{B_5} \cup T_{B_6} \cup T_{B_7}$

$F_1 = R(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \oplus Re_5 \oplus Re_6 \leftrightarrow T_{F_1} = T_{C_1} \cup T_{B_4} \cup T_{B_7}$
$F_2 = R(e_1 + e_2 + e_5 + e_6) \oplus Re_3 \oplus Re_4 \leftrightarrow T_{F_2} = T_{C_2} \cup T_{B_5} \cup T_{B_8}$
$F_3 = Re_1 \oplus Re_2 \oplus R(e_3 + e_4 + e_5 + e_6) \leftrightarrow T_{F_3} = T_{C_3} \cup T_{B_6} \cup T_{B_9}$
$F_4 = R(e_1 + e_2) \oplus R(e_3 + e_4) \oplus R(e_5 + e_6) \leftrightarrow T_{F_4} = T_{C_1} \cup T_{C_2}$
$J_1 = R(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \oplus R(e_5 + e_6) \leftrightarrow T_{J_1} = T_{F_1} \cup T_{F_4}$
$J_2 = R(e_1 + e_2 + e_5 + e_6) \oplus R(e_3 + e_4) \leftrightarrow T_{J_2} = T_{F_2} \cup T_{F_4}$
$J_3 = R(e_1 + e_2) \oplus R(e_3 + e_4 + e_5 + e_6) \leftrightarrow T_{J_3} = T_{F_3} \cup T_{F_4}$
$R \leftrightarrow T_R = S$.

Considere $U = T_{J_1}$. Quando visto como um grupoide, possui quatro componentes conexas: $G_\emptyset = \{I_\emptyset\}$, $G_1 = T \setminus \{I_\emptyset, I_{12}, I_{13}, I_{23}\} \simeq \{I_1, I_2, I_3\}^2$, o grupoide grosseiro associado a $\{I_1, I_2, I_3\}$, $G_{12,13} = \{I_{12}, I_{13}, S_{12}, S_{13}D^{13}_{12}, D^{12}_{13},\ P^{13}_{12}, P^{12}_{13}\} \simeq \{I_{12}, I_{13}\}^2 \times \mathbb{Z}_2$ e $G_{23} = \{I_{23}, S_{23}\} \simeq \mathbb{Z}_2$. Como U é um subsemigrupo inverso cheio de S, temos que β_U é uma ação de U em $A_U = A$ e A é β_U-Galois sobre $(A_U)^{\beta_U} = J_1$. Esse exemplo é interessante pois o grupoide $\max \mathbb{G}(U) = G_{12,13} \cup G_{23}$ não é conexo, em contraposição ao Exemplo 4.1.4 onde $\max \mathbb{G}(S)$ é sempre conexo.

Referências Bibliográficas

[1] N. Alyamani and N. D. Gilbert. Ordered groupoid quotients and congruences on inverse semigroups. In *Semigroup Forum*, volume 96, pages 506–522. Springer, 2018. 70, 73, 81

[2] N. AlYamani, N. D. Gilbert, and E. C. Miller. Fibrations of ordered groupoids and the factorization of ordered functors. *Appl. Categor. Struct.*, 24:121–146, 2016. 69, 70

[3] D. Bagio, D. Flores, and A. Paques. Partial actions of ordered groupoids on rings. *J. Algebra Appl.*, 9(03):501–517, 2010. 1, 27, 28

[4] D. Bagio and A. Paques. Partial groupoid actions: globalization, Morita theory, and Galois theory. *Communications in Algebra*, 40(10):3658–3678, 2012. 1, 21, 75, 77, 78

[5] D. Bagio, A. Paques, and H. Pinedo. Restriction and extension of partial actions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 224(10):106391, 2020. 1

[6] D. Bagio, A. Paques, and H. Pinedo. On partial skew groupoid rings. *International Journal of Algebra and Computation*, 31(01):1–17, 2021. 11

[7] S. U. Chase, D. K. Harrison, and A. Rosenberg. *Galois theory and cohomology of commutative rings*, volume 52. Am. Math. Soc., 1965. 73, 82

[8] K. De Commer. *C*-algebras*. Vrije Universiteit Brussel, 2013. 33

[9] D. Dewolf and D. Pronk. The Ehresmann-Schein-Nambooripad theorem for inverse categories. *Theory and Applications of Categories*, 33(27):813–831, 2018. 2, 3, 11, 16, 17, 19, 20

[10] M. Dokuchaev and R. Exel. Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 357(5):1931–1952, 2005. 1

[11] R. Exel. Partial actions of groups and actions of inverse semigroups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 126(12):3481–3494, 1998. 1, 21, 37, 57

[12] R. Exel. Semigroupoid C∗-algebras. *Journal of mathematical analysis and applications*, 377(1):303–318, 2011. 3, 4

[13] R. Exel and F. Vieira. Actions of inverse semigroups arising from partial actions of groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 363(1):86–96, 2010. 1, 30, 32, 33

[14] J. M. G. Fell and R. S. Doran. *Representations of *-Algebras, Locally Compact Groups, and Banach *-Algebraic Bundles.* Academic Press, Inc., 1988. 32

[15] V. Gould and T. Stokes. Constellations and their relationship with categories. *Algebra universalis*, 77(3):271–304, 2017. 9

[16] M. V. Lawson. *Inverse semigroups, the theory of partial symmetries.* World Scientific, 1998. 3, 9, 15, 16, 17, 19, 20

[17] V. Liu. *Free inverse semigroupoids and their inverse subsemigroupoids.* PhD thesis, University of Alabama Libraries, 2016. 2, 3, 5, 6, 7, 38

[18] A. Paques and T. Tamusiunas. The Galois correspondence theorem for groupoid actions. *Journal of Algebra*, 509:105–123, 2018. 1, 2, 64, 69, 72, 78, 79, 80, 81, 82