

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

ANÁLISE DE PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA
USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
COM UM ACOPLAMENTO MONOLÍTICO

RICARDO LESSA AZEVEDO

Tese apresentada junto ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, como parte dos requisitos para obtenção do título de **Doutor em Engenharia**.

Porto Alegre
Dezembro de 1999

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de **Doutor em Engenharia** e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.

Prof. Armando Miguel Awruch
Orientador

Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Banca Examinadora

Prof. Armando Miguel Awruch
D. Sc. pela COPPE/UFRJ

Prof. Maria Angela Vaz dos Santos
Dr. pelo CPGEC/UFRGS

Prof. Paul William Partridge
Ph. D. pela University of Southampton

Prof. Sérgio Luiz Frey
D. Sc. pela PUC/RJ

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Armando Miguel Awruch pela orientação segura e a competência manifestada nos conhecimentos ministrados, além da agradável convivência.

Aos colegas do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, em especial aos demais participantes do Centro de Mecânica Aplicada e Computacional (CEMACOM) e do grupo de Dinâmica dos Fluidos Computacional, pelo companheirismo demonstrado neste período de relacionamento.

Ao Centro Nacional de Supercomputação (CESUP/UFRGS) pelos recursos computacionais colocados à disposição deste trabalho e pela valiosa assessoria de seu pessoal.

À Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

" Tudo flui.
A única coisa imutável é a lei de que não
há nada imutável"

Heráclito de Éfeso

Aos meus pais e irmãos pelo carinho,
compreensão e apoio, sem os quais teria sido impossível
concluir esta jornada.

RLA

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE SÍMBOLOS	x
RESUMO	xiii
ABSTRACT	xiv
1 - INTRODUÇÃO	1
1.1- PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA	1
1.2 - OBJETIVOS, CONTEÚDO E ORGANIZAÇÃO DO PRESENTE TRABALHO.	5
2 -DINÂMICA DOS FLUIDOS . ANÁLISE DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	7
2.1 – INTRODUÇÃO	7
2.2 – EQUAÇÕES QUE GOVERNAM O PROBLEMA USANDO UMA DESCRIÇÃO EULERIANA	9
2.3 – EQUAÇÕES QUE GOVERNAM O PROBLEMA USANDO UMA DESCRIÇÃO MISTA DE EULER-LAGRANGE	12
2.4 – EQUAÇÕES PARA A ANÁLISE DE FLUIDOS LEVEMENTE COMPRESSÍVEIS E INCOMPRESSÍVEIS	13
2.5 – A APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA A ANÁLISE DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS EM PROCESSOS ISOTÉRMICOS	18
2.6 – O ESQUEMA EXPLÍCITO DE TAYLOR-GALERKIN	23
2.7 – FORMA EXPLÍCITA DAS MATRIZES DE ELEMENTOS USANDO FÓRMULAS ANALÍTICAS E INTEGRAÇÃO REDUZIDA	30
2.8 – CONTROLE DOS MODOS ESPÚRIOS (“HOURGLASS CONTROL”)	37
2.9 – SUAVIZAÇÃO DE PRESSÕES	39
3 - ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS COM NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E UM ESQUEMA EXPLÍCITO	41
3.1 – INTRODUÇÃO	41
3.2 – O ESQUEMA EXPLÍCITO DE TAYLOR-GALERKIN	43
3.3 – EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS	49
3.4 – ELEMENTO FINITO HEXAÉDRICO COM INTEGRAÇÃO REDUZIDA E CONTROLE DOS MODOS ESPÚRIOS	53

4 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS	62
4.1 – ENFOQUES PARA O ACOPLAMENTO DO FLUIDO E A ESTRUTURA	62
4.2 – O MOVIMENTO DA MALHA NUMA DESCRIÇÃO ARBITRÁRIA LAGRANGEANA- EULERIANA (ALE)	68
4.3 - A VETORIZAÇÃO	69
4.3.1- Processamento vetorial e escalar	69
4.3.2 - Estratégia utilizada	72
4.3.3 – Alterações na codificação de um programa escalar para um programa vetorial ..	72
5 - APLICAÇÕES NUMÉRICAS	78
5.1 - INTRODUÇÃO	78
5.2 - ANÁLISE DINÂMICA COM NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS ELÁSTICAS	78
5.2.1 - Resposta transiente de uma viga bi-engastada com uma carga pulso no centro do vão	78
5.2.2 - Placa enrijecida simplesmente apoiada sujeita à pressão uniforme	80
5.2.3 - Casca esférica engastada sujeita a uma carga pulso no ápice	82
5.3 - ANÁLISE DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS VISCOSOS QUASE- INCOMPRESSÍVEIS	85
5.3.1 - escoamento no interior de uma cavidade	85
5.3.2 - escoamento num canal com alargamento brusco da seção transversal	88
5.4 - ANÁLISE DE PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA	91
5.4.1 - escoamento do ar em torno de uma bandeira	91
5.4.2 - escoamento de ar interagindo com uma membrana inflada	96
6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS NESTA ÁREA	106
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	109

LISTA DE FIGURAS

2.1 – Elemento hexaédrico de 8 nós	31
3.1 – Modos espúrios associados com os vetores $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3$ e \tilde{h}_4	55
4.1 - Técnica do mapeamento inverso - tabela de conectividade das equações	74
5.1 - Geometria e malha de elementos finitos da viga bi-engastada	79
5.2 - Respostas transientes para viga bi-engastada	79
5.3 - Geometria da placa quadrada simplesmente apoiada com enrijecedores	80
5.4 - Malhas e condições de contorno utilizadas no estudo da influência da distorção: a) malha sem distorção; b) malha distorcida	81
5.5 - Resultados obtidos no estudo da distorção da malha	81
5.6 - Resposta transiente obtida a para placa enrijecida	82
5.7 - Casca esférica engastada: geometria, propriedades e malha de elementos finitos	83
5.8 - Resposta transiente obtida para casca esférica	84
5.9 - Configuração deformada da casca esférica para $t = 0,116$ msec.	84
5.10 - escoamento numa cavidade: geometria e condições de contorno	85
5.11 - escoamento numa cavidade: velocidade horizontal ao longo da linha de centro vertical do plano de simetria	86
5.12 - escoamento numa cavidade: vetores velocidade no plano de simetria	87
5.13 - escoamento numa cavidade: linhas de corrente no plano de simetria	87
5.14 - escoamento numa cavidade: isobáricas em $t = 5$ seg.	88
5.15 - escoamento num canal: geometria e perfil de velocidade de entrada	89
5.16 - escoamento num canal: vistas superior e lateral da malha de elementos finitos	89
5.17 - escoamento num canal: vetores velocidade no regime estacionário: a) zona de entrada; b) zona intermediária; c) zona de saída	90
5.18 - escoamento num canal: linhas de corrente em $t = 1,1$ seg.	91
5.19 - escoamento em torno de uma bandeira: geometria, condições de contorno, propriedades, variação temporal da velocidade de entrada e inclinação inicial da bandeira	92
5.20 - escoamento em torno de uma bandeira: vista superior da malha de hexaedros	93
5.21 - escoamento em torno de uma bandeira: campo de velocidades em $t = 0,5$ seg.	94
5.22 - escoamento em torno de uma bandeira: detalhe da malha em $t = 1,32$ seg.	95
5.23 - escoamento em torno de uma bandeira: detalhe da malha em $t = 1,34$ seg.	95
5.24 - escoamento em torno de uma bandeira: detalhe da malha em $t = 1,41$ seg.	96
5.25 - escoamento de ar interagindo com uma membrana: geometria, condições de contorno, propriedades e variação temporal da velocidade de entrada	97
5.26 - escoamento de ar interagindo com uma membrana: vista frontal da malha de hexaedros	98
5.27 - escoamento de ar interagindo com uma membrana: detalhe da malha em $t = 0,9$ s.	98
5.28 - escoamento de ar interagindo com uma membrana: linhas de corrente em $t = 0,9$ seg.	99
5.29 - escoamento de ar interagindo com uma membrana: isolinhas de pressão em $t = 0,9$ seg.	99
5.30 - escoamento de ar interagindo com uma membrana: detalhe da malha em $t = 1,15$ seg.	100
5.31 - escoamento de ar interagindo com uma membrana: linhas de corrente em $t = 1,15$ seg.	100

5.32 - escoamento de ar interagindo com uma membrana: isolinhas de pressão em $t= 1,15$ seg.	101
5.33 - escoamento de ar interagindo com uma membrana: detalhe da malha em $t= 1,9$ seg.	101
5.34 - escoamento de ar interagindo com uma membrana :linhas de corrente em $t= 1,9$ seg.	102
5.35 - escoamento de ar interagindo com uma membrana: isolinhas de pressão em $t= 1,9$ seg.	102
5.36 - escoamento de ar interagindo com uma membrana: detalhe da malha em $t= 2,35$ seg.	103
5.37 - escoamento de ar interagindo com uma membrana :linhas de corrente em $t= 2,35$ seg.	103
5.38 - escoamento de ar interagindo com uma membrana: isolinhas de pressão em $t= 2,35$ seg.	104
5.39 - escoamento de ar interagindo com uma membrana: relatório de performance vetorial	105

LISTA DE SÍMBOLOS

E = módulo de elasticidade;

E_R = módulo de elasticidade utilizado na referência;

E_T = módulo de elasticidade utilizado neste trabalho;

NTN = número total de nós;

Q = fonte de calor;

T = temperatura, transposição de vetor;

T^0 = valores iniciais da temperatura;

\bar{T} = valor prescrito da temperatura na parte Γ_T do contorno;

T_∞ = valor da temperatura que circunda o corpo, na parte $\Gamma_c \cup \Gamma_r$ do contorno;

a = coeficiente de penalidade;

b = coeficiente de penalidade/ massa específica;

c = velocidade do som no meio;

c_p = coeficiente de calor específico a pressão constante;

c_v = coeficiente de calor específico a volume constante;

e = energia total específica;

f_i = componente do vetor de força de volume segundo o eixo x_i (para $i = 1,2,3$);

f_i^0 = valores iniciais da componente do vetor de força de volume segundo o eixo x_i (para $i = 1,2,3$);

h_c = coeficiente de convecção;

k = contador de iterações;

k_{ij} = componente do tensor de condutibilidade térmica;

n_i = cosseno da direção que a normal ao contorno Γ_σ num ponto forma com o eixo x_i ;

p = pressão;

p^0 = valores iniciais da pressão;

q = energia interna específica;

q_f, q_c, q_r = fluxo de calor, fluxo convectivo e fluxo radiativo, atuando nas partes Γ_q, Γ_c e

Γ_r do contorno, respectivamente;

t = tempo;

\bar{t}_i = componente da carga de superfície na direção do eixo x_i na parte Γ_σ do contorno;

\bar{t}_i^0 = valores iniciais da componente da carga de superfície na direção do eixo x_i na parte Γ_σ do contorno;

u_i = componente de deslocamento segundo o eixo x_i (para $i = 1,2,3$);

v_i = componente do vetor velocidade segundo o eixo x_i (para $i = 1,2,3$);

w_i = componentes da velocidade W com que se move a malha que serve de referência (para $i = 1,2,3$);

x = eixo coordenado equivalente a x_1 ;

y = eixo coordenado equivalente a x_2 ;

z = eixo coordenado equivalente a x_3 ;

Δt = intervalo de tempo;

Δx_i = dimensão característica do elemento "i";

Ω = domínio em estudo;

$\Omega_e \text{ max}$ = maior volume de elemento na malha de elementos finitos ;

$\Omega_e \text{ min}$ = menor volume de elemento na malha de elementos finitos ;

α = coeficiente de segurança;

δ = distância de um ponto do campo ao ponto mais próximo da superfície móvel;

$\Delta \tilde{\sigma}, \Delta \tilde{\varepsilon}, \Delta \tilde{\omega}$ = incrementos de tensões, deformações específicas e vorticidade;

∇^2 = operador laplaciano.

δ_{ij} = delta de Kroenecker ;

ε_{ij} = componentes do tensor de deformação específica (para $i, j = 1,2,3$);

$\gamma_{\sim 1}, \gamma_{\sim 2}, \gamma_{\sim 3}$ e $\gamma_{\sim 4}$ = vetores de estabilização de modos espúrios no elemento da estrutura;

$\Gamma_{\sim 1}, \Gamma_{\sim 2}, \Gamma_{\sim 3}$ e $\Gamma_{\sim 4}$ = vetores associados com os modos espúrios no elemento do fluido;

ω_{ij} = componentes do tensor de vorticidade (para $i, j = 1,2,3$);

ϕ_i = funções de interpolação para as componentes da quantidade de movimento, correspondentes aos nós 'i' ($i = 1, \dots, 8$);

γ = razão entre calores específicos;

λ = coeficiente de viscosidade volumétrica;

μ = coeficiente de viscosidade dinâmica;

$\hat{\mu}_{ij}$ = componentes do tensor de difusão de balanceamento, constituindo-se numa viscosidade dinâmica adicional;

ρ = massa específica;

$\overline{\rho v}_i$ = componente prescrita da quantidade de movimento na direção do eixo x_i na parte

Γ_v do contorno;

ρv_i^0 = valor inicial da componente da quantidade de movimento na direção do eixo x_i ;

σ_{ij} = componente do tensor de tensões;

$\sigma \mathcal{E}$ = produto do coeficiente de Stefan-Boltzmann pela emissividade;

τ_{ij} = componentes do tensor de tensões desviadoras;

Ψ_i = funções de interpolação para a pressão correspondentes aos nós 'i' ($i = 1, \dots, 8$) ;

ξ, η, ζ = coordenadas naturais ou locais do elemento finito isoparamétrico;

χ = coeficiente de amortecimento;

\bar{B}_{\sim} = matriz que contém as derivadas das funções de interpolação, incluindo os termos de controle de modos espúrios;

$\hat{B}_{\sim n}^{dil}$ = parte dilatacional do operador derivada;

$\hat{B}_{\sim n}^{dev}$ = parte desviadora do operador derivada;

C_{ijkl} = componentes do tensor constitutivo, que contém as constantes elásticas ($i, j, k, l = 1, 2, 3$);

$D_{\sim ij}, \hat{D}_{\sim ij}$ = matrizes correspondentes aos termos devidos à viscosidade, quando não é usado e quando é incluído o tensor difusivo de balanceamento, respectivamente;

$F_{\sim int}$ = vetor de forças internas;

G_{\sim} = matriz correspondente ao operador gradiente;

$J_{\sim}, J_{\sim}^{-1}, \det J_{\sim}$ = matriz Jacobiana, sua inversa e seu determinante, respectivamente;

$M_{\sim v}$ = matriz de massa das componentes de velocidade do fluido;

$M_{\sim p}$ = matriz de massa da pressão do fluido;

$M_{\sim v_L}, M_{\sim P_L}, M_{\sim L}$ = matrizes de massa discretas para as componentes de velocidade, para pressão e para a estrutura, respectivamente;

P_{\sim} = vetor de cargas para o fluido e para a estrutura;

\bar{R} = matriz de rotação;

$T_{\sim}(\sigma_{\sim})$ = matriz constitutiva que relaciona incrementos de tensões com incrementos de deformações específicas e vorticidades;

$\hat{\underline{T}}(\underline{\sigma})$ = matriz de tensões iniciais;

$\underline{\bar{t}}$ = vetor de cargas de superfície;

\underline{x} = vetor com coordenadas referidas ao sistema global;

$\underline{\hat{x}}$ = vetor com coordenadas referidas ao sistema co-rotacional.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo principal formular, implementar e aplicar um algoritmo numérico para simular problemas de interação fluido-estrutura.

Considera-se que o fluido é levemente compressível e viscoso. Considera-se também um processo isotérmico. Para analisar o escoamento transiente, emprega-se o esquema explícito de Taylor-Galerkin e o método dos elementos finitos.

Considera-se que a estrutura é constituída de um material elástico linear e que pode estar sujeito a deslocamentos finitos. Para a análise dinâmica emprega-se o método explícito de Taylor-Galerkin e o método dos elementos finitos. As equações constitutivas são expressas em termos do tensor de taxas de tensões de Truesdell.

Tanto para estrutura como para o fluido são usados elementos hexaédricos de oito nós e o acoplamento do fluido e a estrutura é implementado em forma monolítica, de maneira a evitar uma defasagem na análise do sólido ou do fluido no tempo e representar melhor os efeitos da interação.

O programa foi vetorizado com o objetivo de aproveitar as vantagens dos processadores vetoriais do CRAY T-94 do Centro Nacional de Supercomputação (CESUP) localizado na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Alguns exemplos de aplicação para validar separadamente os códigos na análise de escoamentos e de estruturas são mostrados; problemas de interação fluido-estrutura também são apresentados.

ABSTRACT

Formulation, implementation and application of a numerical algorithm to simulate fluid-structure interaction problems are the main goals here.

A slightly compressible and a viscous fluid is considered, and an isothermic process is assumed. The transient flow is analyzed using an explicit Taylor-Galerkin scheme and the finite element method.

A linear elastic material and the possibility of finite displacements are considered for the structure. The nonlinear dynamic analysis is accomplished using an explicit Taylor-Galerkin scheme and the finite element method. Constitutive equations are expressed in terms of the Truesdell rate stress tensor.

Hexahedral eight-node elements are used for both fluid and structure and a monolithical coupling is used in order to calculate both domains at the same time level and to improve the representation of the interaction effects.

The code was completely vectorized in order to use efficiently the CRAY T-94 Supercomputer of the National Supercomputing Center (CESUP) of the Federal University of Rio Grande do Sul (UFRGS).

Numerical examples to prove the accuracy of the codes to analyze separately flows and structures are shown; some fluid-structure interactions problems are also presented.

1 - INTRODUÇÃO

1.1- PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

Nas últimas três décadas esforços significativos têm sido desenvolvidos para analisar numericamente problemas de interação fluido-estrutura. O termo “interação fluido-estrutura” refere-se tanto a fluidos contidos em estruturas, como o caso de estruturas imersas em fluidos. Como exemplos de fluidos contidos em estruturas podem ser mencionados os casos de reservatórios excitados por ações sísmicas, reservatórios de combustíveis de foguetes, respostas de barragens excitadas pela aceleração do reservatório contíguo, o fluxo em sistemas de dutos flexíveis, etc. Como exemplos de estruturas total ou parcialmente imersas em fluidos pode-se mencionar o caso de estruturas “off-shore”, excitadas pela ação das ondas do mar, estruturas civis excitadas pela ação do vento, problemas de aeroelasticidade e hidroelasticidade envolvendo estruturas aeroespaciais e navais respectivamente, etc.

Desde sua origem, há mais de quarenta anos, o Método dos Elementos Finitos (M. E. F.) tem sido aplicado com bastante sucesso à análise estrutural, e hoje é uma técnica consagrada e de uso popular na Mecânica das Estruturas. Numerosos livros e trabalhos em periódicos têm contribuído para a divulgação dos enormes avanços produzidos nos últimos anos, assim como a ampla distribuição de programas comerciais (tais como ANSYS [5], NASTRAN [90], ABAQUS [1], etc.) tem favorecido a intensa aplicação do método em escritórios de projeto particulares, universidades e institutos de pesquisa.

Uma alternativa ao Método dos Elementos Finitos tem sido o Método dos Elementos de Contorno (M.E.C.), que teve um crescimento significativo nos últimos vinte anos, e, embora em alguns casos particulares resulte a técnica mais adequada, suas aplicações ainda estão bastante restritas ao ambiente universitário e de pesquisa. Convém mencionar que muitos autores têm combinado, com sucesso, ambos os métodos na solução numérica de problemas que envolvem contorno no infinito.

Já na Dinâmica dos Fluidos, não existe uma unanimidade tão marcante. Os métodos de Diferenças Finitas (M.D.F.) e Volumes Finitos (M.V.F.) têm sido usados intensivamente e com muito sucesso nesta área. Entretanto, o número de usuários do M.E.F. na Dinâmica dos Fluidos Computacional tem crescido significativamente e em forma contínua. Também na área de Mecânica dos Fluidos, tal como na área da Mecânica Estrutural, numerosos livros e artigos em periódicos tem refletido os gigantescos avanços que tem-se produzido neste

campo. Alguns programas comerciais (tais como, por exemplo, FLOTRAN [6], baseado no M.E.F., e FLUENT [45], baseado no M.V.F.) favoreceram o aumento da popularidade dos métodos numéricos na área da Mecânica dos Fluidos.

Entretanto, não foi somente a evolução dos algoritmos numéricos que permitiram abordar problemas cada vez maiores e mais complexos; também a evolução na arquitetura dos computadores foi fundamental para estes progressos que se manifestaram nas diversas áreas da Ciência e da Tecnologia. Além dos avanços nos computadores pessoais, o aparecimento de equipamentos com processadores vetoriais ou com a possibilidades de realizar computação paralela massiva tiveram um papel decisivo no desenvolvimento das ferramentas numéricas como instrumentos importantes de auxílio nos projetos de Engenharia.

Outros aspectos positivos que devem adicionar-se aos já referidos acima em relação aos avanços da Mecânica Estrutural Computacional, na Dinâmica dos Fluidos Computacional, e na arquitetura dos computadores, são o desenvolvimento na computação gráfica, de códigos multidisciplinares de pré e pós-processamento e de algoritmos de geração de movimento e adaptação de malhas e técnicas de remalhamento.

Resumindo, pode-se dizer que desde sua aparição os métodos numéricos, tais como Elementos Finitos e Elementos de Contorno na Mecânica Estrutural e Elementos Finitos, Elementos de Contorno e Volumes Finitos na Dinâmica dos Fluidos, têm sido aplicados para resolver uma variedade enorme de problemas de Engenharia e da Física. A evolução dos algoritmos numéricos, da arquitetura dos computadores e dos códigos (“softwares”) de computação gráfica e de pré e pós-processamento multidisciplinares têm contribuído para isto.

Como a natureza das equações que governam a Mecânica dos Sólidos e a Dinâmica dos Fluidos são diferentes, os primeiros códigos foram desenvolvidos especialmente para um ou outro campo separadamente, como foi evidenciado nos comentários acima. Inclusive os códigos comerciais foram projetados para resolver uma ou outra área exclusivamente.

Assim sendo, quando tinha-se que analisar um problema de interação fluido-estrutura, o problema era simplificado, decompondo o mesmo em dois subproblemas mutuamente independentes, um envolvendo apenas o fluido e o outro envolvendo apenas a estrutura. Este enfoque justifica-se às vezes; assim, por exemplo, se a estrutura é tão pesada e rígida que praticamente não se move ou deforma sob a ação de um escoamento transiente, o escoamento pode ser analisado primeiramente e a pressão obtida na interface é usada como uma carga externa prescrita atuando sobre a estrutura, que é analisada posteriormente; já se a distribuição da pressão na interface é previamente conhecida por alguma razão, ou a

distribuição da mesma é modelada no espaço e no tempo de alguma maneira (devido às complexidades para determinar seu valor), apenas a estrutura é modelada e analisada sob a ação das pressões prescritas.

Entretanto, o enfoque de não considerar o acoplamento existente entre o sólido e o fluido pode conduzir à predição de cargas erradas atuando sobre a estrutura, dependendo do tipo de estrutura e/ou das cargas atuando sobre todo o sistema.

Como exemplos de erros que podem ser cometidos por não considerar o acoplamento da estrutura e o fluido, consideram-se os seguintes casos:

- a) quando o enfoque do desacoplamento total é aplicado a um problema de golpe de aríete num sistema de dutos, é bem provável que a resposta da estrutura seja sobrestimada devido a que: (1) não é levado em conta a redução da diferença de pressão devido à flexibilidade da estrutura; (2) não é considerada a massa adicionada no sistema estrutural; (3) não é considerada a transferência de energia da estrutura ao fluido, embora o processo inverso seja considerado. Isto pode ser observado na Ref. [15].
- b) quando se faz a análise de reservatórios de armazenamento de líquidos excitados por ações sísmicas sem levar em conta o efeito do acoplamento, cargas subestimadas foram consideradas atuando no sistema. Isto pode ser observado na Ref. [83].
- c) considere-se um reservatório delgado cheio de um líquido e que sofre uma explosão. Como o líquido é levemente compressível resulta evidente que a um incremento pequeno no volume do reservatório pode corresponder uma diminuição drástica da pressão no líquido, de forma que a pressão será provavelmente sobrestimada se é considerado um reservatório rígido. Isto pode ser observado na Ref. [28].

Os exemplos apresentados acima ilustram a necessidade de desenvolver códigos que considerem, por razões de generalidade e versatilidade, modelos precisos de acoplamento entre os meios sólido e fluido para poder tratar com sucesso os problemas de “interação fluido-estrutura (I.F.E.)”.

Aspectos específicos referentes à solução numérica de problemas de interação fluido-estrutura serão abordados no capítulo 4. Nesta breve introdução serão mencionados apenas alguns dos principais grupos que tem se destacado nesta área, e se for o caso o código que os mesmos desenvolveram.

Um dos grupos mais antigos e que mais contribuíram na simulação numérica de problemas de interação fluido-estrutura é o do Department of Mechanical and Nuclear Engineering, Technological Institute, Northwestern University, localizada em Evanston – Illinois (USA). Seus trabalhos centraram-se em problemas de vibrações em reservatórios de armazenamento sujeitos à ação de sismos, e a problemas vinculados a reatores nucleares (estas últimas pesquisas foram realizadas em conjunto com o Argonne National Laboratory, Reactor Analysis and Safety Division, localizado em Argonne-Illinois (USA). O código desenvolvido usando o M.E.F. é denominado FLUSTR [72] e alguns trabalhos relevantes desse grupo são os seguintes: Liu [73], Liu e Ma [74], [75] e Belytschko e Liu [21], Liu e Chang [76], Liu e Gvildys [77].

Outro grupo que tem-se destacado na análise de problemas de interação fluido-estrutura é o do Joint Research Center (JRC) da Comunidade Européia. O primeiro código desenvolvido foi o EURDYN [37], e contribuições importantes com este programa foram realizadas por Donea et al. [38] e Donea [39]. Posteriormente, com a participação do French Commisariat à l’Energie Atomique (CEA-DMT), foi desenvolvido o programa PLEXIS-3C [27]; este programa foi posteriormente usado nas publicações de Casadei e Halleux [29], [30], [31] no contexto de um trabalho de colaboração com o Ente Nazionale per l’Energia Elettrica (ENEL) da Itália.

Alguns trabalhos nesta área foram apresentados também por Bathe e colaboradores no Massachusetts Institute of Technology (MIT), em Cambridge – Massachusetts (USA). Mencionam-se aqui algumas publicações deste grupo, tais como Olson e Bathe [94], [95], Bathe et al. [11] e Wang e Bathe [117]. Alguns desses procedimentos foram incorporados ao sistema ADINA [2].

Outros autores têm pesquisado problemas de interação fluido-estrutura na área aeroespacial. Entre eles pode-se mencionar G. P. Guruswamy (da NASA Ames Research Center, Moffett Field, California, USA) e seus colaboradores que usam diferenças finitas ou volumes finitos para analisar o escoamento e elementos finitos para realizar a análise da estrutura. Entre seus trabalhos podem-se mencionar alguns tais como os das Refs. [52], [53], [54] e [56].

Outro autor que tem realizado um proficuo trabalho nessa área é Ch. Farhat no Department of Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder, Colorado (USA). Entre os trabalhos deste autor e seus colaboradores podem-se mencionar alguns, tais como os das Refs. [41], [42], [70], [86] e [98].

No Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil/UFRGS foram também desenvolvidos alguns trabalhos nesta área, na forma de dissertações de Mestrado e teses de Doutorado, como pode-se verificar em Gonzalez [49], Petry [97] e Santos [110].

Alguns outros autores têm também feito importantes contribuições (tal como R. Löhner e colaboradores [32], [80], J. Batina e colaboradores [13], [103]) porém incluir todos os trabalhos tornaria a lista muito extensa, o que também demonstra a importância crescente do tema entre os pesquisadores dos mais importantes centros internacionais.

Comentários em relação a diferentes enfoques e alternativas serão feitos no Capítulo 4, quando forem discutidos os aspectos computacionais deste problema.

1.2 - OBJETIVOS, CONTEÚDO E ORGANIZAÇÃO DO PRESENTE TRABALHO

Neste trabalho pretende-se formular, elaborar e aplicar um código para a análise de problemas de interação fluido-estrutura.

O fluido é considerado viscoso e incompressível; o escoamento é transiente e isotérmico. Para analisar o escoamento tridimensional numericamente utiliza-se o M.E.F. mais um esquema explícito de Taylor-Galerkin e um enfoque de pseudo-compressibilidade. As equações de Navier-Stokes contemplam a possibilidade de empregar uma descrição mista arbitrária Lagrangeana- Euleriana, de forma a permitir o movimento da malha.

Para a estrutura considera-se um material elástico linear, porém introduzindo a possibilidade de existirem deslocamentos finitos (ou seja, considera-se linearidade física e não linearidade geométrica). Para efetuar a análise dinâmica utiliza-se o esquema explícito de Taylor-Galerkin e para expressar as equações constitutivas é empregado o tensor de taxas de tensões de Truesdell, sendo que o problema é resolvido utilizando uma descrição Lagrangeana atualizada.

O acoplamento do fluido e da estrutura é realizado de forma monolítica (ou forte) de maneira que o sistema completo é resolvido simultaneamente para o mesmo nível de tempo.

O programa foi totalmente vetorizado com o objetivo de aproveitar adequadamente as características dos processadores de supercomputador CRAY T-94 do Centro Nacional de Supercomputação (CESUP) instalado na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

A tese foi organizada da seguinte forma: depois da introdução feita neste Capítulo 1, são apresentadas a formulação do modelo de fluidos e a implementação do M.E.F., no Capítulo 2 e da análise dinâmica da estrutura no Capítulo 3, respectivamente; tanto para o

fluido como para a estrutura utilizam-se elementos tridimensionais hexaédricos de 8 nós. No Capítulo 4 são analisados aspectos computacionais referentes ao acoplamento do fluido e a estrutura, ao movimento da malha e à vetorização. No Capítulo 5 são apresentadas aplicações para problemas específicos de fluidos, estruturas e interação fluido-estrutura. O Capítulo 6 é dedicado às conclusões e sugestões. Finalmente, são apresentadas as referências bibliográficas.

2 - DINÂMICA DOS FLUIDOS . ANÁLISE DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

2.1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentadas as equações da Dinâmica dos Fluidos. A teoria e as deduções relativas a estas equações podem ser encontradas em uma vasta bibliografia, da qual se pode destacar os textos de Schlichting [111] e White [118], entre outros.

Para descrever o movimento de um meio contínuo pode ser utilizada a descrição Euleriana (na qual a malha de referência é fixa e o contínuo move-se através dela), a descrição Lagrangeana (na qual a malha de referência move-se de forma solidária com o contínuo) e, finalmente, a descrição mista de Euler-Lagrange (na qual a malha de referência move-se com uma velocidade diferente daquela do meio contínuo).

A descrição Lagrangeana normalmente não é utilizada para problemas envolvendo fluidos devido a sua incapacidade de manipular as fortes distorções da malha que freqüentemente provocam os escoamentos. A descrição Euleriana, por sua vez, é capaz de tratar fortes distorções mas apresenta dificuldades para considerar contornos móveis. Desta forma, a descrição mais adequada para problemas de interação fluido-estrutura é a descrição mista de Euler-Lagrange.

Conforme já foi mencionado no capítulo anterior os métodos numéricos utilizados na Mecânica dos Fluidos são Diferenças Finitas, Volumes Finitos, Elementos Finitos e Elementos de Contorno. Experiências anteriores e as características do problema a ser estudado fizeram com que se optasse neste trabalho pelo método dos Elementos Finitos.

Neste contexto, os enfoques utilizados na resolução de problemas de escoamentos de fluidos incompressíveis ou quase-incompressíveis (que são o objeto deste trabalho) são: o enfoque misto, a função de penalidade, a utilização da equação de Poisson para pressão, que substitui a equação da continuidade, e o método da pseudo-compressibilidade; os mesmos serão brevemente descritos a seguir.

O **enfoque misto** consiste numa abordagem do problema na qual as variáveis velocidade e pressão são mantidas na formulação, o que pode ser obtido diretamente do emprego do método dos Elementos Finitos a partir das expressões de resíduos ponderados

aplicadas às equações que governam o problema ou a utilização de multiplicadores de Lagrange para incorporar ao problema a equação de conservação de massa como uma restrição de incompressibilidade. Neste enfoque empregam-se funções de interpolação diferentes para velocidade e pressão, sendo os polinômios para esta última de um grau inferior ao dos que interpolam a velocidade.

O enfoque através da **função de penalidade**, por sua vez, impõe de forma aproximada a restrição de incompressibilidade de forma que o sistema de equações de conservação de quantidade de movimento resultante não contenha a pressão como incógnita principal, reduzindo assim a dimensão do problema. O campo de pressões é calculado a posteriori, a partir do campo de velocidades. O termo que contém a pressão nas equações de conservação de quantidade de movimento é substituído por um termo em função das componentes de velocidade e do coeficiente de penalidade; este termo deve ser calculado usando integração numérica reduzida. A equivalência entre o enfoque da função de penalidade e o enfoque misto foi mostrada por Sani et al. [109], Engelman et al. [40] e Malkus et al. [85].

Já a utilização da **equação de Poisson para pressão** (deduzida das equações de conservação da quantidade de movimento) foi desenvolvida com a finalidade de superar as dificuldades de convergência apresentadas pelos algoritmos anteriores e relacionadas com a restrição de incompressibilidade. À medida que a dimensão do problema cresce, o sistema de equações é mais adequadamente resolvido por métodos iterativos (como o método dos gradientes conjugados, por exemplo) do que por métodos diretos.

Finalmente, o método de **pseudo-compressibilidade**, baseado nas idéias apresentadas originalmente por Chorin [33], conduz a uma equação de conservação da massa que mantém o termo de derivada temporal da pressão, tendo como justificativa física o fato de que escoamentos reais (não ideais) sempre apresentam algum nível de compressibilidade e, portanto, um valor finito para velocidade de propagação do som.

Uma dificuldade numérica importante é a que se apresenta no tratamento de problemas com convecção dominante, onde torna-se necessário um refinamento da malha ou a aplicação de técnicas chamadas de "upwinding" para evitar oscilações espúrias das componentes de velocidade originadas pela aplicação do método de Galerkin em sua forma tradicional. Outra maneira de superar esta dificuldade, e que foi adotada neste trabalho, é o emprego de um tensor de difusão de balanceamento (Gresho et al. [51]), que introduz uma viscosidade adicional capaz de evitar o surgimento das oscilações espúrias.

Neste trabalho será empregado um método híbrido de penalidade e pseudo-compressibilidade, similar ao proposto por Ramshaw e Messina [102], no contexto de um

esquema de Taylor-Galerkin, ou seja o desenvolvimento em séries de Taylor da semi-discretização obtida pela aplicação do método de Galerkin às equações governantes do problema na forma de resíduos ponderados (ou forma fraca) obtidas via método dos Elementos Finitos.

2.2 – EQUAÇÕES QUE GOVERNAM O PROBLEMA USANDO UMA DESCRIÇÃO EULERIANA

As equações que governam o escoamento de um fluido viscoso vêm dadas por [111]:

1) Equação da conservação de massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1,2,3) \text{ em } \Omega \quad (2.2.1)$$

2) Equação da conservação de quantidade de movimento:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] = f_i$$

$$(i, j, k = 1,2,3) \text{ em } \Omega \quad (2.2.2)$$

3) Equação da conservação de energia:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(v_j \rho e)}{\partial x_j} + \frac{\partial(p v_i)}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu v_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} = Q$$

$$(i, j, k = 1,2,3) \text{ em } \Omega \quad (2.2.3)$$

4) Equação de estado:

$$p = \rho \left(e - \frac{1}{2} v_i v_i \right) (\gamma - 1) \quad (j = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (2.2.4)$$

onde:

v_i = componente do vetor velocidade segundo o eixo x_i (para $i = 1, 2, 3$)

p = pressão

ρ = massa específica

e = energia total específica

T = temperatura

c_p = coeficiente de calor específico a pressão constante

c_v = coeficiente de calor específico a volume constante

$\gamma = c_p / c_v$

k_{ij} = componente do tensor de condutibilidade térmica

μ, λ = coeficientes de viscosidade

f_i = componente do vetor de força de volume segundo o eixo x_i (para $i = 1, 2, 3$)

Q = fonte de calor

x_i = coordenadas espaciais

t = tempo

Ω = domínio em estudo

As equações (2.2.1) a (2.2.4) vêm acompanhadas das condições iniciais e de contorno, que são as seguintes:

5) Condições de contorno:

$$\rho v_i = \bar{\rho} \bar{v}_i \text{ em } \Gamma_v \quad (2.2.5)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \text{ em } \Gamma_\sigma \quad (2.2.6)$$

onde:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (2.2.7)$$

$$T = \bar{T} \text{ em } \Gamma_T \quad (2.2.8)$$

$$k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} n_i = q_f \text{ em } \Gamma_q \quad (2.2.9)$$

$$h_c \cdot (T - T_\infty) = q_c \text{ em } \Gamma_c \quad (2.2.10)$$

$$\sigma \varepsilon \cdot (T^4 - T_\infty^4) = q_r \text{ em } \Gamma_r \quad (2.2.11)$$

sendo:

$\Gamma_v, \Gamma_\sigma, \Gamma_T$ = partes do contorno onde são prescritas a quantidade de movimento, as cargas de superfície e a temperatura, respectivamente.

$\Gamma_q, \Gamma_c, \Gamma_r$ = partes do contorno onde são prescritos os fluxos de calor, convectivo e radiativo, respectivamente.

\bar{t}_i = componente da carga de superfície na direção do eixo x_i na parte Γ_σ do contorno.

$\overline{\rho v}_i$ = componente prescrita da quantidade de movimento na direção do eixo x_i na parte Γ_v do contorno.

σ_{ij} = componente do tensor de tensões.

n_i = cosseno de direção que a normal ao contorno Γ_σ num ponto forma com o eixo x_i .

\bar{T} = valor prescrito da temperatura na parte Γ_T do contorno.

T_∞ = valor da temperatura que circunda o corpo, na parte $\Gamma_c \cup \Gamma_r$ do contorno.

h_c = coeficiente de convecção

$\sigma \varepsilon$ = produto do coeficiente de Stefan-Boltzmann pela emissividade

q_f, q_c, q_r = fluxo de calor, fluxo convectivo e fluxo radiativo, atuando nas partes Γ_q, Γ_c e Γ_r do contorno, respectivamente.

Deve-se observar que $\Gamma_v \cup \Gamma_\sigma = \Gamma$ (contorno total) e que $\Gamma_T \cup \Gamma_q \cup \Gamma_c \cup \Gamma_r = \Gamma$ (contorno total).

6) Condições iniciais:

$$\rho v_i(x_i, t=0) = \rho v_i^0 \quad \text{em } \underline{\hspace{1cm}} \quad ; \quad (2.2.12)$$

$$\bar{t}_i(x_i, t=0) = \bar{t}_i^0 \quad \text{em } \Gamma_\sigma ; \quad (2.2.13)$$

$$f_i(x_i, t=0) = f_i^0 \quad \text{em } \underline{\hspace{1cm}} \quad ; \quad (2.2.14)$$

$$T(x_i, t=0) = T^0 \quad \text{em } \underline{\hspace{1cm}} \quad ; \quad (2.2.15)$$

$$p(x_i, t=0) = p^0 \quad \text{em } \underline{\hspace{1cm}} \quad . \quad (2.2.16)$$

2.3 – EQUAÇÕES QUE GOVERNAM O PROBLEMA USANDO UMA DESCRIÇÃO MISTA DE EULER-LAGRANGE

Para o caso em que é utilizada uma descrição mista de Euler-Lagrange as equações de conservação são as seguintes [49], [110]:

1) Equação de conservação da massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho(v_j - w_j)] + \rho \frac{\partial w_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad \text{em } \underline{\hspace{1cm}} \quad (2.3.1)$$

2) Equação de conservação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho v_i (v_j - w_j)] - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + (\rho v_i) \frac{\partial w_j}{\partial x_j} = f_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ em } \underline{\hspace{2cm}} \quad (2.3.2)$$

2) Equação de conservação de energia:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho e (v_j - w_j)] - \frac{\partial(\sigma_{ij} v_i)}{\partial x_j} + (\rho e) \frac{\partial w_j}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} = Q \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ em } \underline{\hspace{2cm}} \quad (2.3.3)$$

3) Equação de estado:

$$p = \rho \left(e - \frac{1}{2} v_i v_i \right) (\gamma - 1) \quad (i = 1, 2, 3) \text{ em } \underline{\hspace{2cm}} \quad (2.3.4)$$

onde w_i são as componentes da velocidade w com que se move a malha que serve de referência.

As condições iniciais e de contorno não se modificam, ou seja, vêm dadas pelas expressões (2.2.5) a (2.2.16)

2.4 – EQUAÇÕES PARA A ANÁLISE DE FLUIDOS LEVEMENTE COMPRESSÍVEIS E INCOMPRESSÍVEIS

Considerando um escoamento isentrópico, tem-se que:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \rho} = C \gamma \rho^{\gamma-1} = C \frac{\gamma}{\rho} \rho^\gamma = \frac{\gamma p}{\rho} = c^2 \quad (2.4.1)$$

onde c é a velocidade do som no meio e C é uma constante.

Para o ar a baixa altitude pode-se tomar:

$$c[m/s] = 20,04\sqrt{T[{}^{\circ}K]} \quad \text{e} \quad \rho = \frac{p[N/cm^2]}{\chi \left[\frac{cm^2}{Ks^2} \right] T[{}^{\circ}K]} \quad (2.4.2)$$

$$\text{sendo } \chi = 286,86 \text{ cm}^2 / K \cdot s^2 \quad (2.4.3)$$

Usando (2.4.1) na equação (2.3.1) tem-se que:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho(v_j - w_j)] + c^2 \rho \frac{\partial w_j}{\partial x_j} = 0 \quad (i, j = 1,2,3) \quad \text{em } \Omega \quad (2.4.4)$$

Pode-se escrever a equação (2.4.4) da seguinte forma:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + (v_j - w_j) \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial (v_j - w_j)}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial w_j}{\partial x_j} = 0 \quad (i, j = 1,2,3) \quad \text{em } \Omega \quad (2.4.5)$$

que é equivalente a:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} - w_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1,2,3) \quad \text{em } \Omega \quad (2.4.6)$$

e como ρ é aproximadamente constante, o último termo de (2.4.6) pode ser omitido. Se o fluido é totalmente incompressível, $c \rightarrow \infty$ e como ρ é constante, obtém-se:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \text{div} \vec{v} = 0 \quad (j = 1,2,3) \quad \text{em } \Omega \quad (2.4.7)$$

A equação de conservação da quantidade de movimento (2.3.2) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + (v_j - w_j) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + v_i \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho(v_j - w_j)] \right\} + \rho \frac{\partial w_j}{\partial x_j} = f_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ em } \overbrace{\hspace{2cm}} \quad (2.4.8)$$

e, levando em conta a expressão (2.3.1), o termo entre chaves desaparece.

Resumindo, as equações para um escoamento de um fluido viscoso levemente compressível e num processo isotérmico, são as seguintes (obtidas em (2.4.8) e (2.4.6)):

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + (v_j - w_j) \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ em } \overbrace{\hspace{2cm}} \quad (2.4.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \text{ em } \overbrace{\hspace{2cm}} \quad (2.4.10)$$

Se o problema não é isotérmico, deve ser incluída a equação de conservação da energia. Neste caso, resulta conveniente trabalhar em termos da temperatura, levando em conta que a energia interna específica vem dada por:

$$q = \left(e - \frac{1}{2} v_i v_i \right) = c_v T \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.4.11)$$

ou seja que:

$$e = q + \frac{1}{2} v_i v_i = c_v T + \frac{1}{2} v_i v_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.4.12)$$

e que introduzida em (2.3.3) permite escrever da seguinte forma a equação da conservação da energia:

$$\rho c_v \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (v_j - w_j) \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + c_v T \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial [\rho(v_j - w_j)]}{\partial x_j} \right\} + \rho \frac{\partial w_j}{\partial x_j} =$$

$$+ v_i \left\{ \rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + (v_j - w_j) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right\} + \frac{1}{2} v_i^2 \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho (v_j - w_j)}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial w_j}{\partial x_j} \right\} = Q$$

$$(i, j = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (2.4.13)$$

Como os termos entre chaves são nulos, tem-se a expressão final seguinte:

$$\rho c_v \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (v_j - w_j) \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = Q \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega$$

$$(2.4.14)$$

Por outro lado, se o fluido é totalmente incompressível, as equações que governam o problema são a (2.4.7) e (2.4.8), ou seja:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (2.4.15)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + (v_j - w_j) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (2.4.16)$$

com as condições de contorno

$$v_i = \bar{v}_i(t) \quad (i = 1, 2, 3) \text{ em } \Gamma_v \quad (2.4.17)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ em } \Gamma_\sigma \quad (2.4.18)$$

sendo

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ em } \Gamma_\sigma \quad (2.4.19)$$

e

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ em } \Gamma_\sigma \quad (2.4.20)$$

devendo-se satisfazer a condição

$$\int_{\Gamma_v} n_i \bar{v}_i(t) d\Gamma = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.4.21)$$

As condições iniciais vem dadas por

$$v_i(x_j, 0) = v_i^0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ em } \underline{\Omega} \quad (2.4.22)$$

devendo ser satisfeitas as condições:

$$\text{div} v^0 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial v_i^0}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \text{ em } \underline{\Omega} \quad (2.4.23)$$

e

$$n_i v_i^0 = n_i \bar{v}_i^0 \quad (i = 1, 2, 3) \text{ em } \Gamma_v \quad (2.4.24)$$

Se cada uma das equações representadas pela expressão (2.4.16) é derivada em relação a x_i e se efetua a soma das mesmas, obtém-se a seguinte expressão:

$$\nabla^2 p = \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial x_i} - \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(v_j - w_j) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ em } \underline{\Omega} \quad (2.4.25)$$

onde ∇^2 é o operador laplaciano.

As correspondentes condições de contorno são:

$$p = \bar{p} \text{ em } \Gamma_p \quad (2.4.26)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \left\{ -\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho(v_j - w_j) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} n_1 = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \text{ em } \Gamma_n \quad (2.4.27)$$

onde \bar{p} é um valor prescrito de p na parte Γ_p do contorno e n indica a direção normal à parte Γ_n do contorno, sendo $\Gamma_p \cup \Gamma_n = \Gamma$.

2.5 – A APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA A ANÁLISE DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS EM PROCESSOS ISOTÉRMICOS

Aplicando o método dos elementos finitos usando o princípio dos resíduos ponderados de Galerkin à equação (2.4.9), onde $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$ obtém-se a seguinte expressão matricial a nível de cada elemento:

$$\tilde{M}_{\tilde{v}} (\tilde{\rho v}) + \tilde{A}_{\tilde{j}} (\tilde{\rho v}) + \tilde{D}_{\tilde{ij}} (\tilde{\rho v}) - \tilde{G}_{\tilde{i}} \tilde{p} = \tilde{P}_{\tilde{i}} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad \text{em } \tilde{\Omega}_e \quad (2.5.1)$$

onde

$$\tilde{M}_{\tilde{v}} = \int_{\tilde{\Omega}_e} \tilde{\phi}^T \tilde{\phi} d\Omega ; \quad \tilde{A}_{\tilde{j}} = \int_{\tilde{\Omega}_e} \left[\tilde{\phi}(v_j - w_j) \right] \tilde{\phi}^T \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_j} d\Omega$$

$$(j = 1, 2, 3)$$

$$\tilde{D}_{\tilde{ii}} = \int_{\tilde{\Omega}_e} \left(\frac{2\mu + \lambda}{\rho} \right) \tilde{\phi}^T \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\tilde{\Omega}_e} \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \frac{\partial \tilde{\phi}^T}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_k} d\Omega$$

$$(i, k = 1, 2, 3)$$

com $k = 2, 3$ para $i = 1$; $k = 3, 1$ para $i = 2$ e $k = 1, 2$ para $i = 3$

$$D_{\tilde{ij}} = \int_{\Omega_e} \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \frac{\partial \phi^T}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega_e} \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial \phi^T}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d\Omega$$

para $i \neq j$

$$G_i = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi^T}{\partial x_i} \Psi d\Omega \quad (i=1,2,3)$$

$$P_i = \int_{\Omega_e} \phi^T f_i d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \phi^T \bar{t}_i d\Gamma \quad (i=1,2,3)$$

Para obter a expressão (2.5.1) as incógnitas do problema ρv_i e P foram interpoladas da seguinte forma:

$$\rho v_i = \phi^T \bar{\rho v}_i \quad (i=1,2,3) \quad ; \quad p = \Psi \bar{p} \quad (2.5.2)$$

onde ϕ e Ψ são as funções de interpolação para as componentes da quantidade de movimento e a pressão, respectivamente, sendo $\bar{\rho v}_i$ e \bar{p} os valores nodais das incógnitas.

As matrizes dos termos de viscosidade foram obtidas integrando por partes as integrais correspondentes que aparecem na expressão de Galerkin, baixando a ordem de derivação. Entretanto, isto deu origem a uma integral de contorno em Γ_σ que foi incorporada ao termo independente, levando em conta a expressão (2.2.6).

Levando em conta que a massa específica ρ é aproximadamente constante em fluidos incompressíveis, pode-se utilizar as expressões (2.4.15) ou (2.4.10) para a equação de conservação da massa, ou substituir essa pela (2.4.25).

Se a (2.4.15) é utilizada, tem-se a seguinte expressão resultante de aplicar o método de Galerkin no contexto do método dos elementos finitos:

$$G_i^T \left(\bar{\rho v}_i \right) = 0 \quad (i=1,2,3) \quad \text{em} \quad \Omega \quad (2.5.3)$$

onde \tilde{G}_i^T é a transposta de \tilde{G}_i usada em (2.5.1). Neste caso devem ser satisfeitas as condições (2.4.21), (2.4.23) e (2.4.24).

Para resolver o problema governado por (2.5.1) e (2.5.3) com as suas correspondentes condições de contorno utiliza-se o método da função de penalidade, no qual a (2.4.15) é substituída pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = -p/a \quad \text{ou} \quad \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = -p/(a/\rho) = -p/b \quad (i = 1,2,3) \text{ em } \Omega_e \quad (2.5.4)$$

onde α é um coeficiente de penalidade que pode ser função de μ .

Substituindo o termo de pressão na equação de movimento (2.4.9), usando (2.5.4), e aplicando o método dos elementos finitos, obtém-se no lugar de (2.5.1), a seguinte expressão:

$$M_{\tilde{v}}(\overline{\rho v}) + A_{\tilde{j}}(\overline{\rho v}) + D_{\tilde{ij}}(\overline{\rho v}) + K_{\tilde{ij}}(\overline{\rho v})\delta_{ij} = P_{\tilde{i}} \quad (i, j = 1,2,3) \text{ em } \Omega_e \quad (2.5.5)$$

onde $M_{\tilde{v}}$, $A_{\tilde{j}}$, $D_{\tilde{ij}}$ e $P_{\tilde{i}}$ têm o mesmo significado que o dado em (2.5.1), sendo necessário

apenas substituir o termo $G_{\tilde{i}} \bar{p}$ por $K_{\tilde{ij}} \left(\overline{\rho v} \right) \delta_{ij}$. A matriz $K_{\tilde{ij}} \delta_{ij}$ vem dada por:

$$K_{\tilde{ij}} \delta_{ij} = b \delta_{ij} \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi^T}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d\Omega \quad (i, j = 1,2,3) \quad (2.5.6)$$

Como pode-se observar, a pressão foi eliminada como incógnita e a expressão (2.5.5) pode ser resolvida através de um esquema explícito, semi-implícito ou implícito. A pressão pode-se calcular como pós-processamento, uma vez conhecidas as componentes de quantidade de movimento. Aplicando o método dos elementos finitos a (2.5.4), tem-se que:

$$-b G_{\sim i}^T \left(\overline{\rho v}_{\sim i} \right) = M_{\sim p} \bar{p} \quad (i = 1,2,3) \text{ em } \Omega_e \quad (2.5.7)$$

de onde pode-se calcular a pressão com a seguinte expressão:

$$\bar{p} = -b M_{\sim p}^{-1} G_{\sim i}^T \left(\overline{\rho v}_{\sim i} \right) \quad (i = 1,2,3) \text{ em } \Omega_e \quad (2.5.8)$$

sendo:

$$M_{\sim p} = \int_{\Omega_e} \Psi_{\sim}^T \Psi_{\sim} d\Omega \quad (2.5.9)$$

Outra alternativa é substituir (2.5.8) em (2.5.1), obtendo-se a seguinte expressão:

$$M_{\sim v} \left(\overline{\rho v}_{\sim j} \right) + A_j \left(\overline{\rho v}_{\sim j} \right) + D_{\sim ij} \left(\overline{\rho v}_{\sim j} \right) + b G_{\sim i} M_{\sim p}^{-1} G_{\sim j}^T \left(\overline{\rho v}_{\sim j} \right) \delta_{ij} = F_{\sim i} \quad (i, j = 1,2,3) \text{ em } \Omega_e \quad (2.5.10)$$

Algumas observações que convém fazer são as seguintes:

- a) Para evitar o bloqueio (“locking”) volumétrico, as matrizes $K_{\sim ij}$ em (2.5.6) devem ser integradas com integração reduzida. Ou seja, se são usados elementos tridimensionais hexaédricos de 8 nós (com função de interpolação trilineares), todos os termos são integrados com a regra de Gauss-Legendre usando 2x2x2 pontos de integração; entretanto, para o termo de penalidade utiliza-se apenas um só ponto de integração.

- b) Se é utilizada (2.5.5) e a pressão é determinada com (2.5.8), as funções de interpolação $\tilde{\psi}$ usadas em (2.5.9) devem ter ordem menor que as funções $\tilde{\phi}$ usadas para interpolar as componentes da quantidade de movimento.
- c) Existe uma equivalência entre o esquema de usar integração reduzida no termo de penalidade para evitar o bloqueio (“locking”) volumétrico (expressão (2.5.5)), e o esquema misto que consiste em usar funções de interpolação de diferente ordem para (ρv_i) e P (expressão (2.5.10)). Sani et al. [109], Engelman et al. [40] e Malkus et al. [85] mostraram esta equivalência.

A solução de (2.5.5) usando a função de penalidade com integração reduzida no termo de penalidade tem sido estudada por diversos autores tais como os de Refs. [64], [69] e [105]. Esquemas mistos têm sido apresentados também por numerosos autores tais como os de Refs. [40], [85], [91], [93], [109] e [113].

Se a expressão (2.4.10) é utilizada como a equação de conservação de massa, usando um esquema de pseudo-compressibilidade, a aplicação do método dos elementos finitos à mesma conduz à seguinte equação matricial que, junto com (2.5.1), governa o problema:

$$M_{\tilde{P}} \dot{\tilde{p}} + c^2 G_{\tilde{i}}^T (\overline{\rho v_i}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.5.11)$$

onde $M_{\tilde{P}}$ vem dada por (2.5.9) e $G_{\tilde{i}}$ é dada em (2.5.1). Neste caso, resulta conveniente resolver (2.5.1) e (2.5.11) através de um esquema explícito.

Combinando o método da penalidade, caracterizado pela expressão (2.5.4), com o da pseudo-compressibilidade, caracterizado pela expressão (2.4.10), obtém-se a seguinte equação para conservação da massa:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} - b \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i}, \quad i=1, 2, 3 \quad \text{em } \Omega \quad (2.5.12)$$

a qual pode também escrever-se em forma incremental da seguinte maneira:

$$\Delta p = p_{t+\Delta t} - p_t = c^2 \Delta t \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} - b \frac{\partial \Delta(\rho v_i)}{\partial x_i} \quad (i = 1,2,3) \text{ em } \overbrace{\hspace{2cm}} \quad (2.5.13)$$

A expressão (2.5.13) fica, depois de aplicar o método dos elementos finitos, da seguinte forma:

$$M_{\sim P} \Delta \bar{p} = c^2 \Delta t G_{\sim i}^T (\bar{\rho v}_{\sim i}) - G_{\sim i}^T (\Delta \bar{\rho v}_{\sim i}) \quad (i = 1,2,3) \quad (2.5.14)$$

onde $M_{\sim P}$ e $G_{\sim i}$ já foram definidas anteriormente.

Este enfoque que combina penalidade com pseudo-compressibilidade, foi utilizado por Ramshaw e Mousseau [100], [101] e Ramshaw e Messina [102].

Este enfoque também foi utilizado por Kawahara e Hirano [62], Petry [97], Gonzalez [49], Rogers et al. [108], Briley et al. [25] e teve sua origem no trabalho de Chorin [33] no contexto de diferenças finitas.

Finalmente, uma outra opção é usar a equação da pressão (2.4.25) no lugar da equação de continuidade. Neste caso, independentemente se a equação de conservação da quantidade de movimento é resolvida por um método explícito, implícito ou semi-implícito, a equação da pressão exige uma solução implícita. Como a intenção do presente trabalho é analisar escoamentos transientes no contexto de problemas de interação fluido-estrutura, esta alternativa foi descartada, em primeira instância, pelas seguintes razões: a) as características transientes do problema obrigam a usar intervalos de tempo Δt muito pequenos, e esta alternativa obrigaria a resolver um sistema de equações a cada passo; isto se acentua se é incorporado um modelo de turbulência de simulação direta de grandes vórtices; b) como as malhas são móveis, mesmo uma solução por um método direto implicaria na necessidade de reformular as matrizes de elemento a cada passo; c) devido à grande demanda de memória que os métodos diretos requerem, quase todos os problemas deveriam ser resolvidos por métodos iterativos, que em geral demandam muito mais tempo de processamento que os métodos diretos.

2.6 – O ESQUEMA EXPLÍCITO DE TAYLOR-GALERKIN

As equações de conservação da quantidade de movimento podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial x_i} - P = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \text{ em } \overbrace{\hspace{2cm}} \quad (2.6.1)$$

onde

$$U = \begin{Bmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \end{Bmatrix} ; \quad F_i = \begin{Bmatrix} \rho v_1 v_i + p \delta_{1i} \\ \rho v_2 v_i + p \delta_{2i} \\ \rho v_3 v_i + p \delta_{3i} \end{Bmatrix} ; \quad H_i = \begin{Bmatrix} -\tau_{1i} \\ -\tau_{2i} \\ -\tau_{3i} \end{Bmatrix} ; \quad P = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (2.6.2)$$

Expandindo U em séries de Taylor até termos de segunda ordem, tem-se finalmente que:

$$\Delta U^{n+1} = \Delta t \left[\frac{\partial U^n}{\partial t} + S_1 \frac{\partial (\Delta U)^{n+1}}{\partial t} \right] + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{\partial^2 U^n}{\partial t^2} + S_2 \frac{\partial^2 (\Delta U)^{n+1}}{\partial t^2} \right] + \dots \quad (2.6.3)$$

onde o super-índice "n" refere-se ao nível de tempo, ou seja, "n" = nΔt e "n + 1" = (n + 1)Δt.

Por outro lado, levando em conta (2.6.1), pode-se escrever que:

$$\Delta t \left[\frac{\partial (U^n)}{\partial t} + S_1 \frac{\partial (\Delta U)^{n+1}}{\partial t} \right] = -\Delta t \left\{ \left[\frac{\partial (F_i^n)}{\partial x_i} + \frac{\partial (H_i^n)}{\partial x_i} - P^n \right] + S_1 \left[\frac{\partial (F_i)^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial (\Delta H_i)^{n+1}}{\partial t} - \Delta P^{n+1} \right] \right\} \quad (2.6.4)$$

$$\frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{\partial^2 (U^n)}{\partial t^2} + S_2 \frac{\partial^2 (\Delta U)^{n+1}}{\partial t^2} \right] = -\frac{\Delta t^2}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial (F_i^n)}{\partial x_i} + \frac{\partial (H_i^n)}{\partial x_i} - P^n \right] + S_2 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial (F_i)^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial (\Delta H_i)^{n+1}}{\partial x_i} - \Delta P^{n+1} \right] \right\}$$

(2.6.5)

Trocando a ordem de derivação em (2.6.5), aplicando a regra da cadeia, desprezando termos envolvendo derivadas terceiras e considerando que os termos independentes variam linearmente no intervalo Δt , a expressão anterior pode escrever-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{\partial^2 (U_{\sim})^n}{\partial t^2} + S_2 \frac{\partial^2 (\Delta U_{\sim})^{n+1}}{\partial t^2} \right] &\cong -\frac{\Delta t^2}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial (F_{\sim i})^n}{\partial (U_{\sim})^n} \cdot \frac{\partial (U_{\sim})^n}{\partial t} \right] + S_2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial (\Delta F_{\sim i})^{n+1}}{\partial U_{\sim}^{n+1}} \cdot \frac{\partial (U_{\sim})^n}{\partial t} \right] \right\} = \\ &= \frac{\Delta t^2}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[v_i \frac{\partial (F_{\sim j})^n}{\partial x_j} \right] + S_2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[v_i \frac{\partial (\Delta F_{\sim j})^{n+1}}{\partial x_j} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

Introduzindo (2.6.4) e (2.6.6) em (2.6.3) para $S_1 = S_2 = \frac{1}{2}$, obtém-se:

$$\Delta U_{\sim}^{n+1} = -\Delta t \left\{ \left[\frac{\partial (F_{\sim i})^n}{\partial x_i} + \frac{\partial (H_{\sim i})^n}{\partial x_i} - \left(\frac{P_{\sim}^n + P_{\sim}^{n+1}}{2} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (\Delta F_{\sim j})^{n+1}}{\partial x_j} + \frac{\partial (\Delta H_{\sim j})^{n+1}}{\partial x_j} \right] - \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_i^n \cdot \frac{\partial (F_{\sim j})^n}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_i^n \cdot \frac{\partial (\Delta F_{\sim j})^{n+1}}{\partial x_j} \right) \right] \right\}$$

$$(i, j = 1, 2, 3) \quad (2.6.7)$$

Aplicando o método de Galerkin em (2.6.7) no contexto do método dos elementos finitos, obtém-se a seguinte expressão matricial a nível de elemento:

$$M_{\sim v_L} \Delta \left(\overline{\rho v}_{\sim i} \right)_{k+1}^{n+1} = -\Delta t \left\{ \left[A_{\sim j} \left(\overline{\rho v}_{\sim i} \right) + \hat{D}_{\sim ij} \left(\overline{\rho v}_{\sim j} \right) - G_{\sim i} \overline{p} \right]^n - \frac{1}{2} \left(P_{\sim}^n + P_{\sim}^{n+1} \right) - \right.$$

$$-\frac{1}{2} \left[A_{\sim j} \left(\Delta \overline{\rho v}_{\sim j} \right) + \hat{D}_{\sim ij} \left(\Delta \overline{\rho v}_{\sim j} \right) - G_{\sim i} \Delta \overline{p}_{\sim k} \right]^{n+1} + \frac{M_{\sim v} - M_{\sim v}}{\Delta t} \cdot \Delta \left(\overline{\rho v}_{\sim k} \right)^{n+1} \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ em } \underbrace{\hspace{10em}}_e \quad (2.6.8)$$

Em (2.6.8) o sub-índice k é um contador de iterações. As matrizes $M_{\sim v}$, $A_{\sim j}$, $G_{\sim i}$ e P_{\sim} foram definidas em (2.5.1). Entretanto, as matrizes $\hat{D}_{\sim ij}$ são obtidas a partir daquelas dadas em (2.5.1), substituindo μ por :

$$\hat{\mu}_{ij} = \mu + \frac{\Delta t}{2} v_i v_j = \mu + \mu_{ij}^{adic}$$

A viscosidade adicional μ_{ij}^{adic} , devido ao último termo do membro direito de (2.6.7), constitui um tensor de segunda ordem que é denominado por Gresho et al. [51] como “tensor de difusão de balanceamento” (“balance tensor diffusivity”-BTD).

Para evitar a inversão de uma matriz cheia que surgiria ao montar a equação (2.6.8), pode-se utilizar a matriz discreta (“lumped matrix”), que facilita os processos de inversão e montagem.

Com a equação de conservação da massa procede-se da mesma forma. Neste trabalho será usada a expressão (2.4.10) que será repetida a seguir:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \text{ em } \underbrace{\hspace{10em}}_e \quad (2.6.9)$$

Expandindo P em séries de Taylor, tem-se:

$$\Delta p = \Delta t \left[\frac{\partial p^n}{\partial t} + S_1 \frac{\partial (\Delta p)^{n+1}}{\partial t} \right] + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{\partial^2 p^n}{\partial t^2} + S_2 \frac{\partial^2 (\Delta p)^{n+1}}{\partial t^2} \right] + \dots \quad (2.6.10)$$

Por outro lado, levando em conta (2.6.9), pode-se escrever que:

$$\Delta t \left[\frac{\partial p^n}{\partial t} + S_1 \frac{\partial (\Delta p)^{n+1}}{\partial t} \right] = -\Delta t c^2 \left[\frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} + S_1 \frac{\partial (\Delta \rho v_i)^{n+1}}{\partial x_i} \right] \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.6.11)$$

e

$$\frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{\partial^2 p^n}{\partial t^2} + S_2 \frac{\partial^2 (\Delta p)^{n+1}}{\partial t^2} \right] = -\frac{\Delta t^2}{2} c^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \rho v_i^n}{\partial x_i} + S_2 \frac{\partial (\Delta \rho v_i)^{n+1}}{\partial x_i} \right] \cong -\frac{\Delta t}{2} c^2 \left[\frac{\partial (\Delta \rho v_i)^{n+1}}{\partial x_i} \right] \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.6.12)$$

Introduzindo (2.6.11) e (2.6.12) em (2.6.10), obtém-se:

$$\Delta p = -\Delta t c^2 \left[\frac{\partial \rho v_i^n}{\partial x_i} + \left(S_1 + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial (\Delta \rho v_i)^{n+1}}{\partial x_i} \right] \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.6.13)$$

Se $S_1 = 0$ obtém-se a mesma expressão que em (2.5.13), com $b = c^2 \frac{\Delta t}{2}$ como sugerem as referências [100], [101] e [102]. Se $S_1 = \frac{1}{2}$, resulta $b = c^2 \Delta t$.

Aplicando o método de Galerkin no contexto do método dos elementos finitos a (2.6.13) para $S_1 = \frac{1}{2}$ obtém-se a expressão (2.5.14) com $b = c^2 \frac{\Delta t}{2}$, e que é repetida a seguir.

$$M_{\sim p} \left(\Delta \bar{p} \right)_{k+1}^{n+1} = -c^2 \Delta t \left[G_{\sim i}^T \left(\bar{\rho v}_{\sim i} \right)^n + \frac{1}{2} G_{\sim i}^T \left(\Delta \bar{\rho v}_{\sim i} \right)^{n+1} \right] \quad (i = 1, 2, 3) \text{ em } \quad (2.6.14)$$

onde $M_{\sim p}$ foi definida em (2.5.9) e $G_{\sim i}^T$ em (2.5.1).

Para evitar a inversão de uma matriz cheia que surgiria ao montar (2.6.14), pode-se utilizar a matriz discreta (“lumped matrix”) no lugar da matriz consistente $M_{\sim p}$, o que facilita os processos de inversão e montagem.

Os passos computacionais do algoritmo explícito desenvolvido são os seguintes:

(a) Início do ciclo em tempo: $t = t + \Delta t$

(b) Formar as matrizes $\tilde{M}_{\tilde{v}}$ e $\tilde{M}_{\tilde{P}}$ a nível de elemento e calcular as matrizes discretas

$\tilde{M}_{\tilde{v}_L}$ e $\tilde{M}_{\tilde{P}_L}$ somando as linhas e colocando o resultado da soma na diagonal principal.

(c) Montar $\tilde{M}_{\tilde{v}_L}$ e $\tilde{M}_{\tilde{P}_L}$ para obter as matrizes discretas globais $\tilde{M}_{\tilde{v}_L}^G$ e $\tilde{M}_{\tilde{P}_L}^G$, respectivamente.

(d) Formar o vetor

$$R_{\tilde{i}} = -\Delta t \left\{ \left[A_{\tilde{j}} \left(\overline{\rho v}_{\tilde{i}} \right)^n + \hat{D}_{\tilde{ij}} \left(\overline{\rho v}_{\tilde{j}} \right)^n - G_{\tilde{i}} \left(\overline{p}_{\tilde{i}} \right)^n - \frac{1}{2} \left(P_{\tilde{i}}^n + P_{\tilde{i}}^{n+1} \right) \right] \right\} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.6.15)$$

a nível de elemento.

(e) Formar o vetor

$$T_{\tilde{i}} = -c^2 \Delta t G_{\tilde{i}}^T \left(\overline{\rho v}_{\tilde{i}} \right)^n \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.6.16)$$

a nível de elemento.

(f) Montar os vetores $R_{\tilde{i}}$ e $T_{\tilde{i}}$ para obter as matrizes globais $R_{\tilde{i}}^G$ e $T_{\tilde{i}}^G$, respectivamente.

(g) Início do ciclo de iterações: $k = k + 1$

(h) Formar o vetor

$$S_{\tilde{i}} = -\frac{\Delta t}{2} \left\{ \left[A_{\tilde{j}} \left(\overline{\rho v}_{\tilde{i}} \right)_k^{n+1} + \bar{D}_{\tilde{ij}} \left(\Delta \overline{\rho v}_{\tilde{j}} \right)_k^{n+1} - G_{\tilde{i}} \left(\Delta \overline{p}_{\tilde{i}} \right)_k^{n+1} \right] + \frac{2}{\Delta t} \left(M_{\tilde{v}} - M_{\tilde{v}_L} \right) \left(\Delta \overline{\rho v}_{\tilde{i}} \right)_k^{n+1} \right\} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.6.17)$$

a nível de elemento.

(i) Formar o vetor

$$Q_{\tilde{i}} = -c^2 \frac{\Delta t}{2} G_{\tilde{i}}^T \left(\Delta \overline{\rho v}_{\tilde{i}} \right)_k^{n+1} + \left(M_{\tilde{P}} - M_{\tilde{P}_L} \right) \left(\Delta \overline{p}_{\tilde{i}} \right)_k^{n+1} \quad (2.6.18)$$

a nível de elemento.

(j) Montar os vetores $\underline{S}_{\sim i}$ e \underline{Q}_{\sim} para obter as matrizes globais $\underline{S}_{\sim i}^G$ e \underline{Q}_{\sim}^G , respectivamente.

(k) Calcular

$$\left(\Delta \overline{\rho v}_{\sim i}\right)_{k+1}^{n+1} = \left(M_{\sim v_L}^G\right)^{-1} \left[\left(R_{\sim i}^G\right)^n + \left(S_{\sim i}^G\right)_k^{n+1} \right] \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.6.19)$$

$$\left(\Delta \overline{p}_{\sim}\right)_{k+1}^{n+1} = \left(M_{\sim p_L}^G\right)^{-1} \left[\left(T_{\sim}^G\right)^n + \left(Q_{\sim}^G\right)_{k+1}^{n+1} \right] \quad (2.6.20)$$

(l) Aplicar as condições de contorno prescritas a (2.6.19) e (2.6.20).

(m) Verificar se $\left(\Delta \overline{v}_{\sim i}\right)_{k+1}^{n+1} \cong \left(\Delta \overline{v}_{\sim i}\right)_k^{n+1}$ e $\left(\Delta \overline{p}_{\sim}\right)_{k+1}^{n+1} \cong \left(\Delta \overline{p}_{\sim}\right)_k^{n+1}$ usando as respectivas normas Euclidianas e uma tolerância previamente especificada.

(n) Se (m) é verificado, conclui-se o processo iterativo e passa-se ao próximo passo, em caso contrário volta-se ao passo (g).

(o) Calcular

$$\overline{v}_{\sim i}^{n+1} = \frac{1}{\rho} \left[\left(\overline{\rho v}_{\sim i}\right)^n + \left(\Delta \overline{\rho v}_{\sim i}\right)_{k+1}^{n+1} \right] \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.6.21)$$

$$\overline{p}_{\sim}^{n+1} = \left(\overline{p}_{\sim}\right)^n + \left(\Delta \overline{p}_{\sim}\right)_{k+1}^{n+1} \quad (2.6.22)$$

(p) Aplicar as condições de contorno prescritas a (2.6.21) e (2.6.22).

(q) Se o limite de tempo for atingido, concluir o processo, em caso contrário, voltar ao passo (a).

Fim do ciclo de tempo.

Como se trata de um esquema explícito condicionalmente estável, o passo de tempo deve satisfazer a seguinte condição:

$$\Delta t_i \leq \Delta t_{crit} = \alpha \frac{\Delta x_i}{c + |v^i|} \quad i = 1, \dots, NEL \quad (2.6.23)$$

onde α é um coeficiente de segurança (normalmente adota-se $0,2 \leq \alpha \leq 0,3$), Δx_i é uma dimensão característica do elemento i , c é a velocidade do som, $|v^i|$ é o módulo da velocidade média do elemento i e NEL é o número total de elementos na malha. Adota-se como intervalo de tempo o mínimo valor de Δt_i .

Observe-se que ao usar matrizes discretas \tilde{M}_{v_L} e \tilde{M}_{P_L} como matriz dos coeficientes de equações de conservação da quantidade de movimento e da conservação da massa discretizadas, respectivamente, foram introduzidos os termos adicionais

$$\left(\tilde{M}_{v_L} - \tilde{M}_{v_L} \right) \left(\Delta \overline{\rho v} \right)_k^{n+1} \text{ e } \left(\tilde{M}_{P_L} - \tilde{M}_{P_L} \right) \Delta \bar{P} \text{ no lado direito dessas equações.}$$

Este algoritmo, sem o emprego do tensor difusivo de balanceamento, foi usado por Gonzalez [49].

2.7 – FORMA EXPLÍCITA DAS MATRIZES DE ELEMENTOS USANDO FÓRMULAS ANALÍTICAS E INTEGRAÇÃO REDUZIDA

Para a análise do escoamento através do algoritmo indicado no parágrafo anterior, é necessário formar as matrizes $\tilde{M}_v, \tilde{M}_\rho, \tilde{M}_{v_L}, \tilde{M}_{P_L}, \tilde{A}_j, \hat{D}_{ij}, G_i$ e \tilde{P} a nível de elemento.

Neste trabalho será utilizado o elemento hexaédrico isoparamétrico, empregando-se as funções de interpolação clássicas para as componentes da velocidade e mantendo constante a pressão no elemento, ou seja que as componentes de $\tilde{\phi}$ e de $\tilde{\Psi}$ em (2.5.2) vêm dadas por:

$$\phi_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta) \quad i = 1, \dots, 8 \quad (2.7.1)$$

$$\psi_i(\xi, \eta, \zeta) = cte = 1 \quad (2.7.2)$$

onde o sub-índice i percorre os oito nós do elemento.

Os valores de ξ_i, η_i e ζ_i podem ser agrupados nos seguintes vetores:

$$\underline{\xi}^T = \{-1, +1, +1, -1, -1, +1, +1, -1\} \quad (2.7.3.a)$$

$$\underline{\eta}^T = \{-1, -1, +1, +1, -1, -1, +1, +1\} \quad (2.7.3.b)$$

$$\underline{\zeta}^T = \{-1, -1, -1, -1, +1, +1, +1, +1\} \quad (2.7.3.c)$$

As coordenadas nodais podem também ser agrupadas em vetores $\underline{x}_{\sim 1}$, $\underline{x}_{\sim 2}$ e $\underline{x}_{\sim 3}$.

Na figura seguinte mostra-se o elemento a ser usado no plano físico (espaço referido aos eixos globais x_1, x_2 e x_3) e computacional (espaço referido aos eixos ξ, η e ζ).

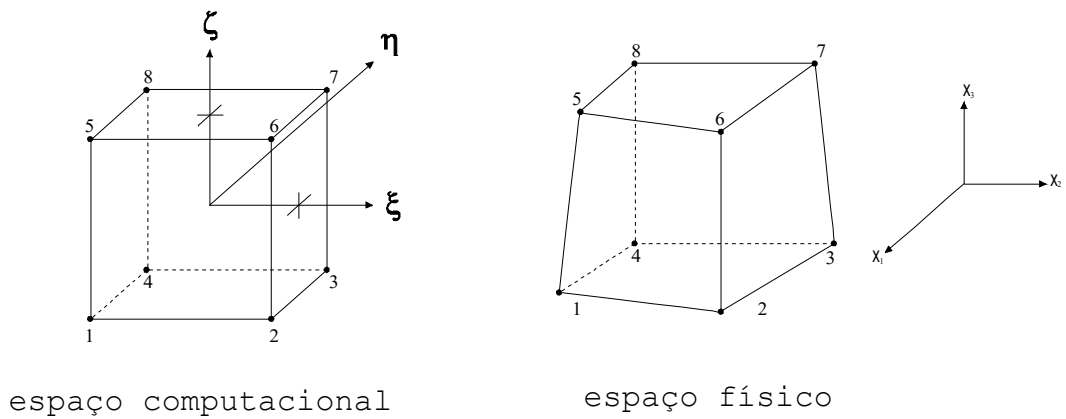


Figura 2.1 – Elemento hexaédrico de 8 nós.

Levando em conta que

$$d\Omega = \det \underline{J} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (2.7.4)$$

e que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (2.7.5)$$

Sendo \tilde{J} a matriz Jacobiana, dada por:

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\xi}_{\sim 1}} & \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\xi}_{\sim 2}} & \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\xi}_{\sim 3}} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\eta}_{\sim 1}} & \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\eta}_{\sim 2}} & \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\eta}_{\sim 3}} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\zeta}_{\sim 1}} & \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\zeta}_{\sim 2}} & \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\zeta}_{\sim 3}} \end{bmatrix} \quad (2.7.6)$$

\tilde{J}^{-1} sua inversa e $\det \tilde{J}$ o seu determinante, as integrais para o cálculo das matrizes tomam a forma:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{Z}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (2.7.7)$$

Estas integrais são resolvidas por integração numérica, usando a regra de Gauss-Legendre, o que significa que:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{Z}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \tilde{Z}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \hat{\omega}_i \hat{\omega}_j \hat{\omega}_k \quad (2.7.8)$$

onde N é o número de pontos de integração em cada direção e os $\hat{\omega}$ são os fatores de peso nos pontos de integração definidos pelas coordenadas ξ_i, η_j, ζ_k .

As matrizes indicadas acima ($\tilde{A}_j, \tilde{D}_{ij}, \tilde{G}_i, \tilde{P}_i, \tilde{M}_v$ e \tilde{M}_p) precisam de, pelo menos, $2 \times 2 \times 2 = 8$ pontos de integração.

Para diminuir o tempo computacional e a área de memória necessária (já que é muito comum empregar mais de 10.000 elementos) usa-se fórmulas de integração analítica. Estas fórmulas são exatas para hexaedros com faces paralelas e constituem uma boa aproximação para hexaedros pouco distorcidos.

Para poder definir as fórmulas que caracterizam cada termo das matrizes é necessário calcular para cada elemento a matriz Jacobiana no centro do mesmo (ou seja, o ponto de coordenadas $\xi = \eta = \zeta = 0$), a qual vem dada por:

$$\underset{\sim}{J}(0) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\xi}^T \underset{\sim}{x}_1 & \underset{\sim}{\xi}^T \underset{\sim}{x}_2 & \underset{\sim}{\xi}^T \underset{\sim}{x}_3 \\ \underset{\sim}{\eta}^T \underset{\sim}{x}_1 & \underset{\sim}{\eta}^T \underset{\sim}{x}_2 & \underset{\sim}{\eta}^T \underset{\sim}{x}_3 \\ \underset{\sim}{\zeta}^T \underset{\sim}{x}_1 & \underset{\sim}{\zeta}^T \underset{\sim}{x}_2 & \underset{\sim}{\zeta}^T \underset{\sim}{x}_3 \end{bmatrix} \quad (2.7.9)$$

onde aqui, como em (2.7.6), $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2$ e $\underset{\sim}{x}_3$ são vetores que contém as coordenadas dos vértices do elemento.

Também é necessário calcular a inversa de $\underset{\sim}{J}(0)$, que será denominada $\underset{\sim}{J}^{-1}(0)$, e o volume do elemento que vem dado por:

$$\Omega_e = 8 \det \underset{\sim}{J}(0) \quad (2.7.10)$$

Se $\underset{\sim}{J}(0)$, dada em (2.7.9), é escrita da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{J}(0) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \quad (2.7.11)$$

então tem-se que:

$$\det \underset{\sim}{J} = J_{11}J_{22}J_{33} - J_{11}J_{23}J_{32} - J_{21}J_{12}J_{33} + J_{21}J_{13}J_{32} + J_{31}J_{12}J_{23} - J_{31}J_{13}J_{22} \quad (2.7.12)$$

e

$$\underset{\sim}{\bar{J}}(0) = \underset{\sim}{J}^{-1}(0) \cdot \det \underset{\sim}{J}(0) = \begin{bmatrix} (J_{22}J_{33} - J_{23}J_{32}) & -(J_{12}J_{33} - J_{13}J_{32}) & (J_{12}J_{23} - J_{13}J_{22}) \\ -(J_{21}J_{33} - J_{23}J_{31}) & (J_{11}J_{33} - J_{13}J_{31}) & -(J_{11}J_{23} - J_{13}J_{21}) \\ (J_{21}J_{32} - J_{22}J_{31}) & -(J_{11}J_{32} - J_{12}J_{31}) & (J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}) \end{bmatrix} \quad (2.7.13)$$

de onde

$$\tilde{J}^{-1}(0) = \frac{\tilde{J}(0)}{\det \tilde{J}(0)} \quad (2.7.14)$$

Levando em conta (2.5.1), (2.5.9), (2.7.1), (2.7.2) e (2.7.9) a (2.7.14) podem-se obter expressões analíticas para as matrizes a nível de elemento envolvidas nas equações de conservação da quantidade de movimento e da continuidade. Depois de algum trabalho algébrico, obtém-se as componentes das matrizes dadas a seguir:

$$M_v(i, j) = \frac{\Omega_e}{64} \left(1 + \frac{1}{3} \xi_i \xi_j\right) \left(1 + \frac{1}{3} \eta_i \eta_j\right) \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_i \zeta_j\right) \quad (i, j = 1, \dots, 8) \quad (2.7.15)$$

$$A_\alpha(i, j) = \left[\frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 v_\alpha(k) - w_\alpha(k) \right] \frac{1}{8} [\bar{J}_{\alpha 1} \bar{J}_{\alpha 2} \bar{J}_{\alpha 3}] \begin{Bmatrix} \xi_j \left(1 + \frac{1}{3} \eta_i \eta_j\right) \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_i \zeta_j\right) \\ \eta_j \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_i \zeta_j\right) \left(1 + \frac{1}{3} \xi_i \xi_j\right) \\ \zeta_j \left(1 + \frac{1}{3} \xi_i \xi_j\right) \left(1 + \frac{1}{3} \eta_i \eta_j\right) \end{Bmatrix} \quad (i, j = 1, \dots, 8) \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (2.7.16)$$

$$G_\alpha(i) = [\bar{J}_{\alpha 1} \xi_i + \bar{J}_{\alpha 2} \eta_i + \bar{J}_{\alpha 3} \zeta_i] \quad (i, j = 1, \dots, 8) \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (2.7.17)$$

$$E_{\alpha\alpha}(i, j) = \frac{1}{\Omega_e} \left[(\bar{J}_{\alpha 1})^2 \xi_i \xi_j \left(1 + \frac{1}{3} \eta_i \eta_j\right) \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_i \zeta_j\right) + (\bar{J}_{\alpha 2})^2 \eta_i \eta_j \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_i \zeta_j\right) \left(1 + \frac{1}{3} \xi_i \xi_j\right) + (\bar{J}_{\alpha 3})^2 \zeta_i \zeta_j \left(1 + \frac{1}{3} \xi_i \xi_j\right) \left(1 + \frac{1}{3} \eta_i \eta_j\right) + (\bar{J}_{\alpha 1} \bar{J}_{\alpha 2}) (\xi_i \eta_j + \eta_i \xi_j) \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_i \zeta_j\right) + (\bar{J}_{\alpha 1} \bar{J}_{\alpha 3}) (\xi_i \zeta_j + \zeta_i \xi_j) \left(1 + \frac{1}{3} \eta_i \eta_j\right) + (\bar{J}_{\alpha 2} \bar{J}_{\alpha 3}) (\eta_i \zeta_j + \zeta_i \eta_j) \left(1 + \frac{1}{3} \xi_i \xi_j\right) \right] \quad (i, j = 1, \dots, 8) \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (2.7.18)$$

sendo

$$\hat{D}_{\sim 11} = \frac{2\hat{\mu} + \lambda}{\rho_{\sim 11}} E_{\sim 11} + \frac{\hat{\mu}}{\rho} \left(E_{\sim 22} + E_{\sim 33} \right) \quad (2.7.19)$$

$$\hat{D}_{\sim 22} = \frac{2\hat{\mu} + \lambda}{\rho_{\sim 22}} E_{\sim 22} + \frac{\hat{\mu}}{\rho} \left(E_{\sim 11} + E_{\sim 33} \right) \quad (2.7.20)$$

$$\hat{D}_{\sim 33} = \frac{2\hat{\mu} + \lambda}{\rho_{\sim 33}} E_{\sim 33} + \frac{\hat{\mu}}{\rho} \left(E_{\sim 11} + E_{\sim 22} \right) \quad (2.7.21)$$

com

$$\hat{\mu}_{\alpha\alpha} = \mu + \rho \frac{\Delta t}{2} \hat{v}_{\alpha}^2 \quad (\alpha = 1,2,3) \quad (2.7.22)$$

Em (2.7.22) \hat{v}_{α} é o valor da componente da velocidade no centro do elemento, ou seja para $\xi = \eta = \zeta = 0$, e que pode ser obtida como a média dos valores nodais de v_{α} .

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta}(i, j) = & \frac{1}{\Omega_e} \left[(\bar{J}_{\alpha 1} \bar{J}_{\beta 1}) \xi_i \xi_j \left(1 + \frac{1}{3} \eta_i \eta_j \right) \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_i \zeta_j \right) + (\bar{J}_{\alpha 2} \bar{J}_{\beta 2}) \eta_i \eta_j \left(1 + \frac{1}{3} \xi_i \xi_j \right) \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_i \zeta_j \right) + \right. \\ & + (\bar{J}_{\alpha 3} \bar{J}_{\beta 3}) \zeta_i \zeta_j \left(1 + \frac{1}{3} \xi_i \xi_j \right) \left(1 + \frac{1}{3} \eta_i \eta_j \right) + (\bar{J}_{\alpha 1} \bar{J}_{\beta 2}) \xi_i \eta_j \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_i \zeta_j \right) + (\bar{J}_{\alpha 1} \bar{J}_{\beta 3}) \xi_i \zeta_j \left(1 + \frac{1}{3} \eta_i \eta_j \right) + \\ & + (\bar{J}_{\alpha 2} \bar{J}_{\beta 1}) \eta_i \xi_j \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_i \zeta_j \right) + (\bar{J}_{\alpha 2} \bar{J}_{\beta 3}) \eta_i \zeta_j \left(1 + \frac{1}{3} \xi_i \xi_j \right) + (\bar{J}_{\alpha 3} \bar{J}_{\beta 1}) \zeta_i \xi_j \left(1 + \frac{1}{3} \eta_i \eta_j \right) + \\ & \left. + (\bar{J}_{\alpha 3} \bar{J}_{\beta 2}) \zeta_i \eta_j \left(1 + \frac{1}{3} \xi_i \xi_j \right) \right] \quad (\alpha, \beta = 1,2,3) \ ; \ (i, j = 1, \dots, 8) \quad \alpha \neq \beta \end{aligned} \quad (2.7.23)$$

sendo

$$\hat{D}_{\sim 12} = \frac{\hat{\mu}}{\rho_{\sim 12}} E_{\sim 12} + \frac{\lambda}{\rho_{\sim 21}} E_{\sim 21} \quad (2.7.24)$$

$$\hat{D}_{\sim 13} = \frac{\hat{\mu}}{\rho_{\sim 13}} E_{\sim 13} + \frac{\lambda}{\rho_{\sim 31}} E_{\sim 31} \quad (2.7.25)$$

$$\hat{D}_{\sim 23} = \frac{\hat{\mu}}{\rho_{\sim 23}} E_{\sim 23} + \frac{\lambda}{\rho_{\sim 32}} E_{\sim 32} \quad (2.7.26)$$

com

$$\hat{\mu}_{\alpha\beta} = \mu + \rho \frac{\Delta t}{2} \hat{v}_\alpha \hat{v}_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (2.7.27)$$

e

$$\hat{D}_{\alpha\beta} = \hat{D}_{\beta\alpha} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (2.7.28)$$

O vetor devido às forças de volume e superfície vem dado por:

$$P_\alpha(i) = \frac{\Omega_e}{8} f_\alpha^e + \frac{\Gamma_\sigma^e}{4} \bar{t}_\alpha^e \quad (i = 1, \dots, 8) \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (2.7.29)$$

onde f_α^e e \bar{t}_α^e são as componentes das forças do elemento e atuando no volume Ω_e e na superfície Γ_σ , respectivamente.

Finalmente

$$M_p = \Omega_e \quad (2.7.30)$$

Observe que pelo fato de que a pressão é constante no elemento (já que sua função de interpolação é de um grau inferior à utilizada para interpolar as quantidades de movimento), M_p é um escalar válido para cada elemento, da mesma forma que a pressão.

Conseqüentemente, a equação (2.6.14) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$(\Delta p_e)_{k+1}^{n+1} = -\frac{c^2 \Delta t}{\Omega_e} \left[G_{\sim i}^T \left(\bar{\rho}_{\sim} \bar{v}_i \right)_{\sim}^n + \frac{1}{2} G_{\sim i}^T \left(\Delta \bar{\rho}_{\sim} \bar{v}_i \right)_k^{n+1} \right] \quad (i = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega_e \quad (2.7.31)$$

ou, usando a notação empregada em (2.6.16) e (2.6.18), pode-se também escrever que:

$$(\Delta p_e)_{k+1}^{n+1} = \frac{1}{\Omega_e} [(T)^n + (Q)_k^{n+1}] \quad (2.7.32)$$

Como pode-se observar, para o tipo de enfoque adotado Δp_e , T e Q são escalares e não vetores, e não é necessário realizar um processo de montagem. A pressão a nível de cada elemento calcula-se diretamente com:

$$p_e^{n+1} = p_e^n + (\Delta p_e)_{k+1}^{n+1} \quad (2.7.33)$$

Em relação à matriz discreta \tilde{M}_{v_L} , obtida somando os termos de cada linha e atribuindo este valor à diagonal principal, zerando todos os outros elementos que não pertencem à diagonal principal, é fácil provar que:

$$\tilde{M}_{v_L} = \frac{\Omega_e}{8} \tilde{I}_{8 \times 8} \quad (2.7.34)$$

onde \tilde{I} é uma matriz identidade.

2.8 – CONTROLE DOS MODOS ESPÚRIOS (“HOURGLASS CONTROL”)

O enfoque utilizado no parágrafo anterior é equivalente ao de realizar uma integração numérica das expressões integrais que formam as matrizes de elemento com uma integração reduzida uniforme usando um só ponto de integração. Este procedimento resulta no aparecimento de modos de deformação singulares (ou modos espúrios, ou “hourglass”), quando utilizada para a formação dos operadores difusivos. Estes modos, quando excitados numa solução numérica, podem desestabilizar a simulação. A correção deste problema se dá através da utilização de um termo de estabilização, que resulta numa difusividade adicional, e que controla esses modos espúrios (“hourglass modes”).

Neste trabalho segue-se o esquema adotado por Christon [34]. Nesta referência a matriz de estabilização correspondente, e que deve ser somada às matrizes $\hat{D}_{\sim ii}$ ($i = 1,2,3$), vem dada por:

$$D_{\alpha\alpha}^{HC}(i,j) = \varepsilon_{HC}^e \cdot \frac{\mu}{\rho} \begin{bmatrix} \Gamma_{\sim 1i} & \Gamma_{\sim 2i} & \Gamma_{\sim 3i} & \Gamma_{\sim 4i} \\ c_1^e & c_2^e & c_3^e & c_4^e \\ o & \sim & \sim & \sim \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{\sim 1j} \\ \Gamma_{\sim 2j} \\ \Gamma_{\sim 3j} \\ \Gamma_{\sim 4j} \end{bmatrix} \quad (i, j = 1, \dots, 8) \quad (\alpha = 1,2,3) \quad (2.8.1)$$

onde, seguindo a Ref. [34] se adota:

$$\varepsilon_{HG}^e = 1; \quad c_1^e = c_2^e = c_3^e = c_4^e = c^e = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\Omega_e} \left(1 - \sqrt[3]{\frac{\Omega_e \min}{\Omega_e \max}} \right) \quad (2.8.2)$$

$$\Gamma_{\sim 1} = [1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1] \quad (2.8.3.a)$$

$$\Gamma_{\sim 2} = [1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1] \quad (2.8.3.b)$$

$$\Gamma_{\sim 3} = [1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1] \quad (2.8.3.c)$$

$$\Gamma_{\sim 4} = [-1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, -1] \quad (2.8.3.d)$$

De acordo com (2.8.1) e (2.8.2), tem-se que:

$$D_{\alpha\alpha}(i,j) = \varepsilon_{HG}^e \frac{\mu}{\rho} \left[c_1^e \Gamma_{1i} \Gamma_{1j} + c_2^e \Gamma_{2i} \Gamma_{2j} + c_3^e \Gamma_{3i} \Gamma_{3j} + c_4^e \Gamma_{4i} \Gamma_{4j} \right] =$$

$$= \frac{\mu}{\rho} c^e [\Gamma_{1i}\Gamma_{1j} + \Gamma_{2i}\Gamma_{2j} + \Gamma_{3i}\Gamma_{3j} + \Gamma_{4i}\Gamma_{4j}] = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\sqrt[3]{\Omega_e}}{2} \cdot \left(1 - \sqrt[3]{\frac{\Omega_e \min}{\Omega_e \max}}\right) \left[\sum_{k=1}^4 \Gamma_{ki}\Gamma_{kj} \right] \quad (2.8.4)$$

onde $\Omega_e \min$ e $\Omega_e \max$ são, respectivamente, o maior e o menor volume de elemento na malha de elementos finitos. Para se ter as diferentes componentes de $D_{\alpha\alpha}$, com $(\alpha = 1,2,3)$, devem-se introduzir os valores de Γ_k , com $(k = 1,2,3,4)$ e dados em (2.8.3.a), (2.8.3.b), (2.8.3.c) e (2.8.3.d), na expressão (2.8.4).

2.9 – SUAVIZAÇÃO DE PRESSÕES

No parágrafo 2.7 foi indicado que os valores de pressão são constantes a nível de elementos, variando de um elemento a outro em forma abrupta, e sendo calculados com a expressão (2.7.33).

Resulta conveniente ter uma variação mais suave dos valores das pressões, obtendo as mesmas nos pontos nodais.

Seja p_e^* o valor da pressão num ponto do elemento e obtido através da interpolação de valores nodais da pressão \bar{p} usando as funções de forma ϕ clássicas dos elementos hexaédricos de 8 nós. Seja p_e o valor da pressão no elemento e . Aplicando o princípio dos mínimos quadrados, tem-se que:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \left[\left(\phi \bar{p} \right) - p_e \right]^2 d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} (p_e^* - p_e)^2 d\Omega \quad (2.9.1)$$

e minimizando π , fica:

$$\delta\pi = \int_{\Omega_e} (p_e^* - p_e) \delta p_e^* d\Omega = \int_{\Omega_e} \left(\delta \bar{p}^T \cdot \phi \right) \left(\phi \cdot \bar{p} - p_e \right) d\Omega = 0 \quad (2.9.2)$$

de onde

$$\left[\int_{\Omega_e} (\underline{\phi}^T \underline{\phi}) d\Omega \right] \cdot \underline{\bar{p}} = \int_{\Omega_e} (\underline{\phi}^T d\Omega) \cdot p_e \quad (2.9.3)$$

ou

$$\underline{M}_{\underline{v}} \underline{\bar{p}} = \underline{P} \quad (2.9.4)$$

onde

$$\underline{M}_{\underline{v}} = \int_{\Omega_e} \underline{\phi}^T \underline{\phi} d\Omega ; \quad \underline{P} = \left(\int_{\Omega} \underline{\phi}^T d\Omega \right) p_e \quad (2.9.5)$$

A expressão (2.9.4) deve ser montada, e posteriormente o sistema é resolvido para obter as pressões nos nós. Entretanto, para evitar a inversão de uma matriz banda convém trabalhar com $\underline{M}_{\underline{v}_l}$, que é a matriz discreta.

Nesse caso, para um nó N , tem-se:

$$p^N = \frac{\sum_{e=1}^M \Omega_e p_e}{\sum_{e=1}^M \Omega_e} \quad (N = 1, \dots, NTN) \quad (2.9.6)$$

onde o somatório é realizado com todos os elementos e que contém N como um ponto nodal. A expressão (2.9.6) deve-se aplicar a todos os nós, sendo NTN o número total de nós e M o número de elementos que contém N como um nó comum.

3 -ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS COM NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E UM ESQUEMA EXPLÍCITO

3.1 – INTRODUÇÃO

Placas e cascas constituem casos particulares de sólidos tridimensionais e podem ser analisados pelo Método dos Elementos Finitos usando diferentes formulações. A análise de placas pode ser formulada usando a hipótese de Kirchoff [65], a qual é aplicada para placas finas, ou baseada na teoria de Mindlin-Reissner, [88], [107], que inclui deformações de corte transversais e é fundamentalmente aplicada a placas espessas. Ainda que tenha sido intenso o desenvolvimento para formular elementos específicos para tratar da flexão das placas, as mesmas serão consideradas como um caso particular de cascas neste trabalho.

A teoria membranal e de flexão de cascas foram formuladas inicialmente por Lamé e Clapeyron [68] em 1833 e por Aron [9] em 1874, respectivamente. Em 1927 Love [82] apresentou as bases gerais para a teoria de cascas, sendo posteriormente seguido por numerosos autores, tais como Flugge [46],[47], Green e Zerna [50], Novozilhov [92], Timoshenko e Woinowski-Krieger [116] e Gol'denveizer [48]. Soluções analíticas foram formuladas para os casos mais simples. Com a introdução do M.E.F., há quatro décadas atrás, soluções para casos com diversos graus de complexidade foram desenvolvidas.

Na análise de cascas pelo M.E.F. utilizam-se basicamente três tipos de elementos: (a) elementos planos; (b) elementos curvos baseados na teoria das cascas; (c) elementos degenerados, obtidos a partir dos elementos sólidos tridimensionais.

Quando as cascas são analisadas usando elementos planos, que aproximam a superfície da mesma através de uma superfície poliédrica, aparecem diversos inconvenientes, tais como dificuldades no acoplamento entre os efeitos de membrana e de flexão, problemas para tratar os contornos contíguos entre elementos coplanares e a existência de momentos fletores espúrios nestes contornos. Todos esses aspectos podem levar a soluções erradas.

Para melhorar a representação das cascas, muitos autores têm usado elementos curvos baseados em alguma teoria de cascas e empregado coordenadas curvilíneas. Entretanto, surgem algumas dificuldades na definição das relações entre componentes de deformações específicas e deslocamentos, na escolha de uma teoria que proporcione uma energia interna de

deformação nula quando a estrutura experimenta deslocamentos de corpo rígido e na definição correta de deslocamentos angulares ou rotações.

Quando elementos tridimensionais são utilizados para analisar cascas, não é necessário aplicar nenhuma teoria de cascas particular. Com o objetivo de reduzir o número de graus de liberdade e evitar os problemas numéricos que surgem ao usar elementos sólidos tridimensionais, elementos especiais, obtidos da degeneração desses elementos tridimensionais, foram implementados e aplicados em primeira instância por Ahmad et al. [3] e posteriormente por muitos outros autores, tais como Bathe [12], Hughes [61] e Liao e Reddy [71] introduzindo diversas alternativas e aperfeiçoamentos. Nestes elementos a condição de que a componente da tensão normal à superfície da casca é nula é imposta, conjuntamente com a hipótese de que as normais à superfície média da casca permanecem sempre retas (mas não necessariamente normais) após a deformação da casca; os nós e as incógnitas são definidas no plano médio.

Quando regras normais de quadratura são usadas em elementos tridimensionais degenerados, eles tendem a sofrer o fenômeno de “bloqueio” (“locking”) no caso de cascas delgadas, especialmente em elementos com função de interpolação de baixa ordem. Por outro lado, se uma regra de integração reduzida seletiva é utilizada para evitar o “bloqueio” por corte, bons resultados são obtidos para o caso de cascas delgadas, podendo, entretanto, aparecer mecanismos espúrios que constituem uma certa deficiência, ainda que às vezes seja possível eliminar estes modos espúrios através de condições de contorno apropriadas. A situação torna-se mais aguda ainda se regras de integração reduzida uniforme são aplicadas (Hughes [61]). Nestes casos os modos espúrios (“hourglass modes”) devem ser controlados.

Resulta conveniente mencionar alguns elementos que têm tido muito sucesso em aplicações a problemas de placas e cascas, tais como a família MITC formulada por Bathe e colaboradores [12], o elemento implementado por Mc Neal [84], Huang e Hinton [58], Park e Stanley [96], Hughes e Liu [60], Belytschko, Liu, Ong e Lam [19] e Belytschko, Stolarsky, Liu Carpenter e Ong [20] entre outros.

Entretanto, na análise computacional de estruturas de grande escala, envolvendo centenas de milhares de incógnitas, a eficiência é de crucial importância para reduzir o custo computacional e diminuir o tempo de processamento. Os elementos mais eficientes são aqueles com funções de interpolação lineares, um ponto de integração e com algum instrumento para controlar os modos espúrios (“hourglass control”) resultantes da integração reduzida. Um dos primeiros trabalhos nessa direção foi apresentado por Kosloff e Frazier [67], porém essa formulação exige a solução de 4 sistemas de 8 equações para elementos

tridimensionais com distorções, o que lhe tira eficiência em problemas dinâmicos. Flanagan e Belytschko [44], Belytschko [16] e Belytschko, Ong, Liu e Kennedy [17] apresentaram uma maneira sistemática e efetiva para controlar os modos espúrios, porém em ambas formulações é requerido um parâmetro de estabilização, cujo valor deve ser definido pelo usuário.

Alguns elementos de casca com um ponto de integração foram formulados por Belytschko, Lin e Tsay [18], Hallquist, Benson e Goudreau [57], Liu, Law, Lam e Belytschko [78], Belytschko, Wong and Chiang [22]. Belytschko e Binderman [23] implementaram o controle dos modos espúrios (“hourglass control”) em elementos tridimensionais de 8 nós onde o parâmetro de estabilização não é requerido, embora a matriz de estabilização dependa ainda do coeficiente de Poisson. Recentemente Key e Hoff [63] e Zhu e Zacharia [120] têm apresentado elementos de casca quadriláteros usando o conceito de controle dos modos espúrios (“hourglass control”) e um único ponto de integração.

Neste capítulo será apresentada a análise dinâmica com não linearidade geométrica de cascas, usando elementos hexaédricos com integração reduzida e controle dos modos espúrios, de forma que a matriz de estabilização não dependa de parâmetros a serem fornecidos pelo usuário nem das propriedades físicas do material. Estes aspectos, à exceção da não linearidade geométrica, foram tratados previamente por Schulz [112].

Consideram-se estruturas elásticas que satisfazem a lei de Hooke generalizada, e a equação constitutiva geometricamente não linear será expressa em termos do tensor de taxas de tensões de Truesdell.

3.2 – O ESQUEMA EXPLÍCITO DE TAYLOR-GALERKIN

Neste trabalho será adotado um esquema explícito para a análise dinâmica da estrutura. Ainda que os esquemas explícitos apresentem severas limitações em relação ao intervalo de tempo, oferecem facilidades em relação a vetorização do programa e à programação quando se trabalha com expressões explícitas dos vetores e matrizes a nível de elemento; por outro lado, consomem muito pouca memória quando comparados com os métodos implícitos, e são mais rápidos que esses últimos para executar um passo de tempo, especialmente em problemas não lineares. Todas estas vantagens tornam-se mais importantes a medida que o tamanho do problema estrutural e suas características não lineares crescem.

O esquema que será utilizado neste trabalho é o de Taylor-Galerkin, que já foi previamente utilizado para a análise de escoamentos. As vantagens mais destacadas deste

esquema são as seguintes: (a) a equação de equilíbrio dinâmico é expressa em termos das componentes da velocidade, o que o torna muito adequado para ser empregado no contexto de problemas de interação fluido-estrutura, sendo que as componentes dos deslocamentos podem ser obtidas a partir das componentes das velocidades, não sendo necessário calcular acelerações; (b) o esquema, ao contrário do método de diferenças centrais, é auto-iniciável, não precisando o cálculo de deslocamento em $t = -\Delta t$ para iniciar o processo de integração no tempo.

Este esquema foi também apresentado por outros autores como Schulz [112] e Tamma e Namburu [114], [115].

A equação de movimento é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + \left[\frac{\chi}{\rho} (\rho v_i) - f_i \right] = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (3.2.1)$$

onde v_i são componentes da velocidade, ρ é a massa específica, σ_{ij} são as componentes do tensor de tensões, f_i são as componentes das forças de volume, e χ é um coeficiente de amortecimento; t e x_i são as coordenadas do tempo e espaciais, respectivamente e Ω é o domínio.

As condições de contorno são:

$$v_i = \bar{v}_i \quad (i = 1, 2, 3) \text{ em } \Gamma_v \quad (3.2.2)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ em } \Gamma_\sigma \quad (3.2.3)$$

onde \bar{v}_i são os valores prescritos das componentes de velocidade na parte Γ_v do contorno, \bar{t}_i são as componentes das forças de superfície na parte Γ_σ do contorno, cuja normal dirigida para fora do domínio num ponto genérico forma com os eixos globais ângulos cujos cossenos de direção vem dados por n_j e, finalmente, $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_v = \Gamma$, onde Γ é o contorno total do domínio Ω .

As condições iniciais são:

$$u_i = u_i^0 \quad (i = 1,2,3) \text{ em } \overbrace{\quad\quad} \quad (3.2.4)$$

$$v_i = v_i^0 \quad (i = 1,2,3) \text{ em } \overbrace{\quad\quad} \quad (3.2.5)$$

onde u_i^0 e v_i^0 são os valores iniciais das componentes de deslocamentos e velocidades, respectivamente.

A expressão (3.2.1) pode ser escrita em forma compacta da seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j} S_j + Q = 0 \quad (j = 1,2,3) \text{ em } \overbrace{\quad\quad} \quad (3.2.6)$$

$$\rho v^T = \{\rho v_1, \rho v_2, \rho v_3\}$$

$$S_j^T = \{\sigma_{1j}, \sigma_{2j}, \sigma_{3j}\} \quad (3.2.7)$$

$$Q^T = \left\{ \frac{\chi}{\rho}(\rho v_1) - f_1, \frac{\chi}{\rho}(\rho v_2) - f_2, \frac{\chi}{\rho}(\rho v_3) - f_3 \right\}$$

onde o super índice T indica vetores transpostos.

Expandindo ρv em série de Taylor até termos de segunda ordem, obtém-se:

$$\Delta(\rho v)^{n+1} = (\rho v)^{n+1} - (\rho v)^n = \Delta t \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[(\rho v)^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v)^n \right] \right\} \quad (3.2.8)$$

onde os super índices $n+1$ e n correspondem aos níveis de tempo $t = (n+1) \cdot \Delta t$ e $t = n \cdot \Delta t$, respectivamente, sendo Δt o intervalo de tempo.

Introduzindo (3.2.6) e (3.2.7) em (3.2.8), tem-se que:

$$\begin{aligned}
\Delta(\rho v)_{\sim}^{n+1} &= \Delta t \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(S_{\sim j} \right)^n - Q_{\sim}^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(S_{\sim j}^n - Q_{\sim}^n \right) \right] \right\} = \\
&= \Delta t \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(S_{\sim j} \right)^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(S_{\sim j} \right)^n \right] - \left[Q_{\sim}^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} Q_{\sim}^n \right] \right\} = \\
&= \Delta t \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(S_{\sim j} \right)^{n+1/2} - Q_{\sim}^{n+1/2} \right] \right\} = \Delta t \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[S_{\sim j} \left(u^{n+1/2} \right) \right] - \frac{\chi}{\rho} \left(\rho v \right)_{\sim}^{n+1/2} + f_{\sim}^{n+1/2} \right\} \quad (3.2.9)
\end{aligned}$$

onde

$$\frac{\chi}{\rho} \left(\rho v \right)_{\sim}^{n+1/2} = \frac{\chi}{\rho} \left[\left(\rho v \right)_{\sim}^n + \frac{1}{2} \Delta \left(\rho v \right)_{\sim}^{n+1} \right] \quad (3.2.10)$$

$$f_{\sim}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left(f_{\sim}^n + f_{\sim}^{n+1} \right) \quad (3.2.11)$$

Introduzindo (3.2.10) em (3.2.9), obtém-se:

$$\left(1 + \frac{\chi}{2\rho} \Delta t \right) \Delta \left(\rho v \right)_{\sim}^{n+1} = \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial x_j} S_{\sim j} \left(u^{n+1/2} \right) - \frac{\chi}{\rho} \left(\rho v \right)_{\sim}^n + f_{\sim}^{n+1/2} \right] \quad (3.2.12)$$

Aplicando o método de resíduos ponderados clássico de Bubnov-Galerkin a (3.2.12) no contexto do M.E.F., obtêm-se a seguinte expressão matricial:

$$\beta_{\sim c} M_{\sim c} \Delta \left(\rho \bar{v} \right)_{\sim}^{n+1} = \Delta t \left[F_{\text{int}} \left(\bar{u} \right)_{\sim}^{n+1/2} - \frac{\chi}{\rho} M_{\sim c} \left(\rho \bar{v} \right)_{\sim}^n + P_{\sim}^{n+1/2} \right] = \Delta t H_{\sim} \quad (3.2.13a)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_c &= \int_{\Omega_e} \tilde{N}^T \tilde{N} d\Omega; \\
\tilde{P}^{n+1/2} &= \int_{\Omega_e} \tilde{N}^T \tilde{f}^{n+1/2} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma e}} \tilde{N}^T \tilde{t}^{n+1/2} d\Gamma \\
\tilde{F}_{\text{int}} \left(\tilde{u}^{n+1/2} \right) &= \int_{\Omega_e} \tilde{B}^T \tilde{\sigma}^{n+1/2} d\Omega; \quad \beta = 1 + \frac{\chi}{\rho} \frac{\Delta t}{2}
\end{aligned} \tag{3.2.13b}$$

sendo \tilde{N} um vetor que contém as funções de interpolação do elemento cujo domínio é Ω_e e que tem cargas de superfície \tilde{t} atuando na superfície $\Gamma_{\sigma e}$ de cada respectivo elemento e , \tilde{B} é uma matriz que contém as derivadas das funções de interpolação, \tilde{F}_{int} é o vetor de forças internas, $\tilde{\sigma}$ o vetor que contém as componentes de tensão e \tilde{M}_c é uma matriz similar à matriz de massa consistente (pois faltaria multiplicar a mesma por ρ).

Para calcular $\tilde{F}_{\text{int}} \left(\tilde{u}^{n+1/2} \right)$, deve-se calcular previamente $\tilde{u}^{n+1/2}$, o que pode ser feito da seguinte forma:

$$\tilde{u}^{n+1/2} = \tilde{u}^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial t} = \tilde{u}^n + \frac{\Delta t}{2} \tilde{v}^n \tag{3.2.14}$$

A equação (3.2.13) pode ser modificada da seguinte forma:

$$\Delta \left(\tilde{\rho} \tilde{v} \right)_{k+1}^{n+1} = \frac{\Delta t}{\beta} \tilde{M}_L^{-1} \tilde{H} + \beta \tilde{M}_L^{-1} \left(\tilde{M} - \tilde{M} \right) \Delta \left(\tilde{\rho} \tilde{v} \right)_k^{n+1} = \tilde{M}_L^{-1} \left(\frac{\Delta t}{\beta} \tilde{H} + \beta \tilde{Z} \right) = \tilde{M}_L^{-1} \left(\tilde{H} + \tilde{Z} \right) \tag{3.2.15}$$

onde \tilde{M}_L é uma matriz diagonal similar à matriz de massa discreta (faltaria multiplicar a mesma por ρ); o sub índice k é um índice que indica o número de iterações.

Numerosos exemplos tem demonstrado que o segundo termo de (3.2.15) tem pouca influência, de forma que a fórmula de recorrência final não envolve um esquema iterativo, ficando:

$$\Delta \left(\rho \bar{v} \right) \stackrel{n+1}{\sim} = \frac{\Delta t}{\beta} \cdot \overset{-1}{M} \cdot \overset{-1}{H} = \overset{-1}{M} \cdot \overset{-1}{H} \quad (3.2.16)$$

Depois de montar, aplicar as condições de contorno e resolver (3.2.16), pode-se calcular:

$$\bar{v} \stackrel{n+1}{\sim} = \frac{1}{\rho} \left[\left(\rho \bar{v} \right) \stackrel{n}{\sim} + \Delta \left(\rho \bar{v} \right) \stackrel{n+1}{\sim} \right] \quad (3.2.17)$$

$$\bar{u} \stackrel{n+1}{\sim} = \bar{u} \stackrel{n}{\sim} + \frac{\Delta t}{2} \left(\bar{v} \stackrel{n+1}{\sim} + \bar{v} \stackrel{n}{\sim} \right) \quad (3.2.18)$$

Para preservar a estabilidade numérica é necessário tomar:

$$\Delta t \leq \Delta t_{crit} = \alpha \frac{\Delta x}{\sqrt{E/\rho}}, \quad \alpha \leq 1 \quad (3.2.19)$$

onde Δx é uma dimensão característica do elemento, E e ρ são o módulo de elasticidade e a massa específica, respectivamente, e α é um coeficiente de segurança.

O processo computacional é dado pelos seguintes passos:

- (a) Calcular $t = (n + 1)\Delta t$
- (b) Calcular $\Delta \bar{\varepsilon} \stackrel{n+1/2}{\sim}$, $\Delta \bar{\sigma} \stackrel{n+1/2}{\sim}$ e $\Delta F \stackrel{n+1/2}{\sim}_{int}$, onde $\bar{\varepsilon}$ e $\bar{\sigma}$ são vetores que contém componentes de deformações específicas e tensões representativamente.
- (c) Calcular $F \stackrel{n+1/2}{\sim}_{int} = F \stackrel{n}{\sim}_{int} + \Delta F \stackrel{n+1/2}{\sim}_{int}$
- (d) Calcular $\Delta \left(\rho \bar{v} \right) \stackrel{n+1}{\sim}$ com (3.2.16)
- (e) Calcular $\bar{v} \stackrel{n+1}{\sim}$ com (3.2.17)

- (f) Calcular \bar{u}^{n+1} com (3.2.18)
- (g) Calcular $\Delta \tilde{\varepsilon}^{n+1}$ com $\Delta \bar{u}^{n+1} = \bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n$
- (h) Calcular $\Delta \tilde{\sigma}^{n+1} = T(\tilde{\sigma}) \Delta \varepsilon^{n+1}$ onde $T(\sigma)$ é a matriz constitutiva.
- (i) Calcular $\Delta F_{\text{int}}^{n+1}$ com $\Delta \tilde{\sigma}^{n+1}$ obtida no passo anterior
- (j) Calcular $\tilde{\varepsilon}^{n+1} = \tilde{\varepsilon}^n + \Delta \tilde{\varepsilon}^{n+1}$
- (k) Calcular $\tilde{\sigma}^{n+1} = \tilde{\sigma}^n + \Delta \tilde{\sigma}^{n+1}$
- (l) Calcular $F_{\text{int}}^{n+1} = F_{\text{int}}^{n+1/2} + \Delta F_{\text{int}}^{n+1}$
- (m) Se $t < t_{\text{total}}$, retornar ao passo (a), em caso contrário ir ao passo (n)
- (n) Fim do processo.

3.3 – EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Neste trabalho, devido à consideração de deslocamentos e rotações finitas, adotou-se para relação constitutiva o tensor de taxa de tensões de Truesdell, que vem dado por (veja Prager [99]):

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} + \sigma_{ip} \dot{\omega}_{pj} + \sigma_{ip} \dot{\omega}_{pi} + \sigma_{ik} \dot{\varepsilon}_{jk} + \sigma_{jk} \dot{\varepsilon}_{ik} - \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{kk} \quad (3.3.1)$$

$$(i, j, k, l, p = 1, 2, 3)$$

onde C_{ijkl} é um tensor de quarta ordem contendo as constantes elásticas do material e

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \text{ e } \dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$(3.3.2)$$

Em (3.3.1) e (3.3.2) o ponto indica derivação em relação ao tempo.

A expressão (3.3.1) pode também ser escrita na seguinte forma (veja Hughes e Winget [59]).

$$\dot{\sigma}_{ij} = (C_{ijkl} + \hat{C}_{ijkl}) \dot{\varepsilon}_{kl} + W_{ijkl} \dot{\omega}_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (3.3.3)$$

com

$$\hat{C}_{ijkl} = -\sigma_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}(\sigma_{il}\delta_{jk} + \sigma_{jl}\delta_{ik} + \sigma_{ik}\delta_{jl} + \sigma_{jk}\delta_{il}) \quad (3.3.4)$$

e

$$W_{ijkl} = \frac{1}{2}(\sigma_{il}\delta_{jk} + \sigma_{jl}\delta_{ik} - \sigma_{ik}\delta_{jl} - \sigma_{jk}\delta_{il}) \quad (3.3.5)$$

onde os $\delta_{kl}, \delta_{jk}, \delta_{jk}, etc$ são os deltas de Kroenecker.

Em forma matricial as equações constitutivas vem dadas por:

$$\underline{\dot{\sigma}} = (\underline{C} + \underline{\hat{C}}) \underline{\dot{\varepsilon}} + \underline{W} \underline{\dot{\omega}} = \left[(\underline{C} + \underline{\hat{C}}) : \underline{W} \right] \left\{ \begin{array}{l} \underline{\dot{\varepsilon}} \\ \underline{\dot{\omega}} \end{array} \right\} \quad (3.3.6)$$

onde:

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & -\sigma_{11} & -\sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 & \sigma_{13} \\ -\sigma_{22} & \sigma_{22} & -\sigma_{22} & \sigma_{12} & \sigma_{23} & 0 \\ -\sigma_{33} & -\sigma_{33} & \sigma_{33} & 0 & \sigma_{23} & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & -\sigma_{12} & \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{2} & \frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{\sigma_{23}}{2} \\ -\sigma_{23} & 0 & 0 & \frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})}{2} & \frac{\sigma_{12}}{2} \\ 0 & -\sigma_{13} & 0 & \frac{\sigma_{23}}{2} & \frac{\sigma_{12}}{2} & \frac{(\sigma_{33} + \sigma_{11})}{2} \end{bmatrix} \quad (3.3.7)$$

$$W = \begin{bmatrix} \sigma_{12} & 0 & -\sigma_{13} \\ -\sigma_{12} & \sigma_{23} & 0 \\ 0 & -\sigma_{23} & \sigma_{13} \\ \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} & \frac{\sigma_{13}}{2} & -\frac{\sigma_{23}}{2} \\ -\frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{\sigma_{33} - \sigma_{22}}{2} & \frac{\sigma_{12}}{2} \\ \frac{\sigma_{23}}{2} & -\frac{\sigma_{12}}{2} & \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2} \end{bmatrix} \quad (3.3.8)$$

As matrizes \hat{C} e W , dadas por (3.3.7) e (3.3.8), respectivamente, correspondem ao seguinte ordenamento dos vetores de taxas de deformações e rotações:

$$\left\{ \dot{\underline{\varepsilon}}^T, \dot{\underline{\omega}}^T \right\} = \left\{ \dot{\varepsilon}_{11}, \dot{\varepsilon}_{22}, \dot{\varepsilon}_{33}, \dot{\varepsilon}_{12}, \dot{\varepsilon}_{23}, \dot{\varepsilon}_{31}, \dot{\omega}_{12}, \dot{\omega}_{23}, \dot{\omega}_{31} \right\} \quad (3.3.9)$$

Se o termo $\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{kk}$ é desconsiderado em (3.3.1), a matriz \hat{C} torna-se simétrica e vem dada por:

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & \sigma_{13} \\ & 2\sigma_{22} & 0 & \sigma_{12} & \sigma_{23} & 0 \\ & & 2\sigma_{33} & 0 & \sigma_{23} & \sigma_{13} \\ & & & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} & \frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{\sigma_{23}}{2} \\ & \text{simétrica} & & & \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} & \frac{\sigma_{12}}{2} \\ & & & & & \frac{\sigma_{33} + \sigma_{11}}{2} \end{bmatrix} \quad (3.3.10)$$

A equação constitutiva que será usada para obter a força interna pode ser escrita em forma incremental da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \underline{\sigma} \\ \underline{0} \\ \sim \end{Bmatrix}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} \left(\underline{C} + \hat{C} \right)_{6 \times 6} & \underline{W}_{6 \times 6} \\ \underline{0}_{3 \times 6} & \underline{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{\varepsilon} \\ \Delta \underline{\omega} \\ \sim \end{Bmatrix}_{9 \times 1} = \underline{A}(\underline{\sigma}) \Delta \hat{\underline{\varepsilon}} \quad (3.3.11)$$

onde $\Delta \hat{\underline{\varepsilon}}^T = \left\{ \Delta \underline{\varepsilon}^T, \Delta \underline{\omega}^T \right\}$.

Como a expressão (3.3.11) resulta numa matriz constitutiva não simétrica, o que constitui um problema para avaliação da matriz de rigidez na análise estática ou dinâmica (com métodos implícitos), convém trabalhar com o seguinte sistema de equações constitutivas:

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{\sigma} \\ \underline{0} \\ \sim \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\underline{C} + \hat{C} \right) & \underline{W} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \underline{\varepsilon} \\ \Delta \underline{\omega} \\ \sim \end{bmatrix} \quad (3.3.12)$$

com

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} & -\frac{\sigma_{13}}{2} & -\frac{\sigma_{23}}{2} \\ & \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} & -\frac{\sigma_{12}}{2} \\ \text{simétrica} & & \frac{\sigma_{33} + \sigma_{11}}{2} \end{bmatrix} \quad (3.3.13)$$

Então $T(\sigma)$, que relaciona incrementos de tensões com incrementos de deformações específicas e rotações, vem dada por:

$$\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{\sigma}) = \begin{bmatrix} C & 0 \\ \underset{\sim}{6 \times 6} & \underset{\sim}{6 \times 3} \\ 0 & 0 \\ \underset{\sim}{3 \times 6} & \underset{\sim}{3 \times 3} \end{bmatrix} + \hat{T}(\underset{\sim}{\sigma}) \quad (3.3.14)$$

onde $\hat{T}(\sigma)$ é a matriz de tensões iniciais e vem dada por:

$$\underset{\sim}{\hat{T}}(\underset{\sim}{\sigma}) = \begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & \sigma_{13} & \sigma_{12} & 0 & -\sigma_{13} \\ & 2\sigma_{22} & 0 & \sigma_{12} & \sigma_{23} & 0 & -\sigma_{12} & \sigma_{23} & 0 \\ & & 2\sigma_{33} & 0 & \sigma_{23} & \sigma_{13} & 0 & -\sigma_{23} & \sigma_{13} \\ & & & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} & \frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{\sigma_{23}}{2} & \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} & \frac{\sigma_{13}}{2} & -\frac{\sigma_{23}}{2} \\ & & & & \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} & \frac{\sigma_{12}}{2} & -\frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{\sigma_{33} - \sigma_{22}}{2} & \frac{\sigma_{12}}{2} \\ & & & & & \frac{\sigma_{33} + \sigma_{11}}{2} & \frac{\sigma_{23}}{2} & -\frac{\sigma_{12}}{2} & \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2} \\ & & \text{simétrica} & & & & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} & -\frac{\sigma_{13}}{2} & -\frac{\sigma_{23}}{2} \\ & & & & & & & \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} & -\frac{\sigma_{12}}{2} \\ & & & & & & & & \frac{\sigma_{33} + \sigma_{11}}{2} \end{bmatrix} \quad (3.3.15)$$

Observe que o termo $\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{kk}$ de (3.3.1) pode ser incluído com a seguinte operação matricial:

$$\Delta \hat{\sigma} = \left[T(\sigma) + T_v(\sigma) \right] \Delta \hat{\epsilon} \quad (3.3.16)$$

onde

$$T_v(\sigma) = \begin{bmatrix} -\sigma_{11} & -\sigma_{11} & -\sigma_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_{22} & -\sigma_{22} & -\sigma_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_{33} & -\sigma_{33} & -\sigma_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_{12} & -\sigma_{12} & -\sigma_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_{23} & -\sigma_{23} & -\sigma_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_{31} & -\sigma_{31} & -\sigma_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.17)$$

3.4 – ELEMENTO FINITO HEXAÉDRICO COM INTEGRAÇÃO REDUZIDA E CONTROLE DOS MODOS ESPÚRIOS

Para um elemento hexaédrico isoparamétrico de 8 nós as funções de interpolação vêm dadas por:

$$N_n(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_n \xi)(1 + \eta_n \eta)(1 + \zeta_n \zeta) \quad (n = 1, \dots, 8) \quad (3.4.1)$$

onde ξ_n , η_n e ζ_n são as coordenadas naturais ξ , η e ζ de um nó "n".

A matriz Jacobiana no centro do elemento é dada por:

$$J(o) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \xi^T x_1 & \xi^T x_2 & \xi^T x_3 \\ \eta^T x_1 & \eta^T x_2 & \eta^T x_3 \\ \zeta^T x_1 & \zeta^T x_2 & \zeta^T x_3 \end{bmatrix} \quad (3.4.2)$$

onde $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ e $\tilde{\zeta}$ são vetores que contém as coordenadas nodais em relação ao sistema de referência $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ e $\tilde{\zeta}$ (sistema local ou sistema de coordenadas naturais) e \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 e \tilde{x}_3 são vetores que contém as coordenadas nodais em relação ao sistema global x_1, x_2 e x_3 .

É fácil demonstrar que o determinante da matriz Jacobiana é a oitava parte do volume do elemento, ou seja que:

$$\det \tilde{J}(\mathbf{0}) = \left| \tilde{J}(\mathbf{0}) \right| = \frac{\Omega_e}{8} \quad (3.4.3)$$

A matriz $B_n(o)$ que contém as derivadas das funções de interpolação para cada nó n no centro do elemento é dada por:

$$B_n(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_n(\mathbf{0})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_n(\mathbf{0})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_n(\mathbf{0})}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1_n} \\ b_{2_n} \\ b_{3_n} \end{bmatrix} \quad (n = 1, \dots, 8) \quad (3.4.4)$$

Fazendo

$$\tilde{J}^{-1}(\mathbf{0}) = \tilde{G} \quad (3.4.5)$$

tem-se que

$$b_{\tilde{1}} = \frac{1}{8} \left\{ G_{11} \tilde{\xi} + G_{12} \tilde{\eta} + G_{13} \tilde{\zeta} \right\} \quad (3.4.6)$$

$$b_{\tilde{2}} = \frac{1}{8} \left\{ G_{21} \tilde{\xi} + G_{22} \tilde{\eta} + G_{23} \tilde{\zeta} \right\} \quad (3.4.7)$$

$$b_{\tilde{3}} = \frac{1}{8} \left\{ G_{31} \tilde{\xi} + G_{32} \tilde{\eta} + G_{33} \tilde{\zeta} \right\} \quad (3.4.8)$$

Para identificar diversos padrões dos modos espúrios (ou modos de energia zero) resultantes de um campo de deformações específicas que não é constante, devido ao uso de

um só ponto de integração, os seguintes vetores são definidos (veja Flanagan e Belytschko [44]):

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_1^T &= \{1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1\} \\
 \tilde{h}_2^T &= \{1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1\} \\
 \tilde{h}_3^T &= \{1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1\} \\
 \tilde{h}_4^T &= \{-1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, -1\}
 \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

Na figura 3.1 são indicadas esquematicamente os modos associados com os vetores $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3$ e \tilde{h}_4 (veja Koh e Kikuchi [66]):

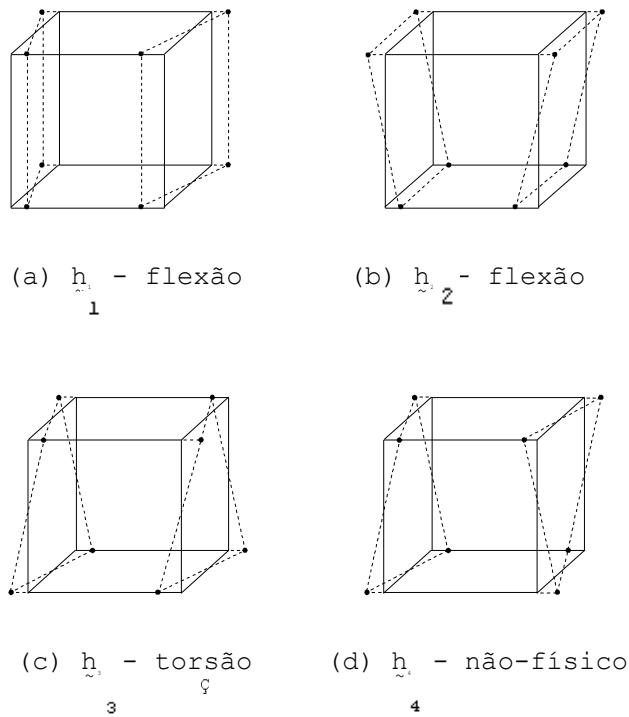


Figura 3.1 – Modos espúrios associados com os vetores $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3$ e \tilde{h}_4

As componentes de deformações específicas e de deslocamentos estão relacionados através da seguinte expressão:

$$\tilde{\varepsilon} = \sum_{n=1}^8 \hat{B}_{\tilde{n}}(\xi, \eta, \zeta) \cdot \tilde{u}_{\tilde{n}} \tag{3.4.10}$$

onde $\hat{B}_{\sim n}$ contém as derivadas das funções de interpolação para cada nó n avaliadas em cada ponto de integração e $\tilde{u}_{\sim n}$ é um vetor que contém as componentes dos deslocamentos do nó n .

Expandindo $\tilde{\varepsilon}$ em série de Taylor em torno do centro do elemento até termos bilineares e levando em conta a expressão (3.4.10), obtém-se:

$$\hat{B}_{\sim n}(\xi, \eta, \zeta) = B_{\sim n}(0) + \frac{\partial B(0)}{\partial \xi} \tilde{u}_{\sim n} \xi + \frac{\partial B(0)}{\partial \eta} \tilde{u}_{\sim n} \eta + \frac{\partial B(0)}{\partial \zeta} \tilde{u}_{\sim n} \zeta + \frac{2\partial^2 B(0)}{\partial \xi \partial \eta} \tilde{u}_{\sim n} \xi \eta + \frac{2\partial^2 B(0)}{\partial \eta \partial \zeta} \tilde{u}_{\sim n} \eta \zeta + \frac{2\partial^2 B(0)}{\partial \zeta \partial \xi} \tilde{u}_{\sim n} \zeta \xi$$

$$(n = 1, \dots, 8) \quad (3.4.11)$$

O operador $\hat{B}_{\sim n}(\xi, \eta, \zeta)$ pode ser decomposto em sua parte dilatacional e desviadora.

Para evitar o bloqueio (“locking”) volumétrico, a parte dilatacional $B_{\sim n}^{dil}(\xi, \eta, \zeta)$ é avaliada em um ponto de integração de forma que os termos lineares e bilineares desaparecem para a mesma, ficando para a parte desviadora $B_{\sim n}^{dev}(\xi, \eta, \zeta)$. Então a (3.4.11) pode-se escrever da seguinte forma:

$$\hat{B}_{\sim n}(\xi, \eta, \zeta) = B_{\sim n}^{dil}(0) + B_{\sim n}^{dev}(\xi, \eta, \zeta) = B_{\sim n}(0) + \frac{B^{dev}(0)}{\partial \xi} \tilde{u}_{\sim n} \xi + \frac{B^{dev}(0)}{\partial \eta} \tilde{u}_{\sim n} \eta + \frac{B^{dev}(0)}{\partial \zeta} \tilde{u}_{\sim n} \zeta +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 B^{dev}(0)}{\partial \xi \partial \eta} \tilde{u}_{\sim n} \xi \eta + 2 \frac{\partial^2 B^{dev}(0)}{\partial \eta \partial \zeta} \tilde{u}_{\sim n} \eta \zeta + 2 \frac{\partial^2 B^{dev}(0)}{\partial \zeta \partial \xi} \tilde{u}_{\sim n} \zeta \xi$$

$$(n = 1, \dots, 8) \quad (3.4.12)$$

Para eliminar o bloqueio por corte, convém escrever as sub-matrizes num sistema ortogonal de coordenadas que rota com o elemento e chamado sistema co-rotacional. Somente os termos lineares são conservados para as componentes de deformação por corte, eliminando assim os modos que causam o bloqueio (“locking”) por corte.

No sistema co-rotacional de coordenadas, as submatrizes de \hat{B} ficam, depois de eliminar o bloqueio (“locking”) volumétrico e por corte, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{B}_{\sim xx}(\xi, \eta, \zeta) = B_{\sim xx}(0) &+ \frac{\partial B^{dev}(0)}{\partial \xi} \xi + \frac{\partial B^{dev}(0)}{\partial \eta} \eta + \frac{\partial B^{dev}(0)}{\partial \zeta} \zeta + 2 \frac{\partial^2 B^{dev}(0)}{\partial \xi \partial \eta} \xi \eta + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 B^{dev}(0)}{\partial \eta \partial \zeta} \eta \zeta + 2 \frac{\partial^2 B^{dev}(0)}{\partial \zeta \partial \xi} \zeta \xi \end{aligned} \quad (3.14.13)$$

$$\begin{aligned} \hat{B}_{\sim yy}(\xi, \eta, \zeta) = B_{\sim yy}(0) &+ \frac{\partial B^{dev}(0)}{\partial \xi} \xi + \frac{\partial B^{dev}(0)}{\partial \eta} \eta + \frac{\partial B^{dev}(0)}{\partial \zeta} \zeta + 2 \frac{\partial^2 B^{dev}(0)}{\partial \xi \partial \eta} \xi \eta + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 B^{dev}(0)}{\partial \eta \partial \zeta} \eta \zeta + 2 \frac{\partial^2 B^{dev}(0)}{\partial \zeta \partial \xi} \zeta \xi \end{aligned} \quad (3.14.14)$$

$$\begin{aligned} \hat{B}_{\sim zz}(\xi, \eta, \zeta) = B_{\sim zz}(0) &+ \frac{\partial B^{dev}(0)}{\partial \xi} \xi + \frac{\partial B^{dev}(0)}{\partial \eta} \eta + \frac{\partial B^{dev}(0)}{\partial \zeta} \zeta + 2 \frac{\partial^2 B^{dev}(0)}{\partial \xi \partial \eta} \xi \eta + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 B^{dev}(0)}{\partial \eta \partial \zeta} \eta \zeta + 2 \frac{\partial^2 B^{dev}(0)}{\partial \zeta \partial \xi} \zeta \xi \end{aligned} \quad (3.14.15)$$

$$\hat{B}_{\sim xy}(\xi, \eta, \zeta) = B_{\sim xy}(0) + \frac{\partial B^{dev}(0)}{\partial \zeta} \zeta \quad (3.14.16)$$

$$\hat{B}_{\sim yz}(\xi, \eta, \zeta) = B_{\sim yz}(0) + \frac{\partial B^{dev}(0)}{\partial \xi} \xi \quad (3.14.17)$$

$$\hat{B}_{\sim zx}(\xi, \eta, \zeta) = B_{\sim zx}(0) + \frac{\partial B^{dev}(0)}{\partial \eta} \eta \quad (3.14.18)$$

Belytschko e Binderman [23] observaram que para passar o “patch test”, elementos distorcidos calculados com um ponto de integração é necessário substituir b_{1_n}, b_{2_n} e b_{3_n} em (3.4.4) pelas expressões de gradiente uniforme $\bar{b}_{1_n}, \bar{b}_{2_n}$ e \bar{b}_{3_n} definidas por Flanagan e Belytschko [44] e dadas por:

$$\bar{b}_{i_n} = \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} b_{i_n}(\xi, \eta, \zeta) d\Omega = \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_n(\xi, \eta, \zeta)}{\partial x_i} d\Omega$$

$$(i = 1, 2, 3; n = 1, \dots, 8) \quad (3.4.19)$$

Os vetores $\bar{b}_{\sim 1_n}, \bar{b}_{\sim 2_n}$ e $\bar{b}_{\sim 3_n}$ satisfazem as seguintes relações:

$$\bar{b}_{\sim i}^T \cdot x_{\sim j} = \delta_{ij} \quad ; \quad \sum_{n=1}^8 \bar{b}_{\sim i_n} = \mathbf{0} \quad ; \quad \bar{b}_{\sim i}^T \cdot h_{\sim 4} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$\bar{b}_{\sim i}^T \cdot h_{\sim j} = \begin{cases} \neq 0 & \text{para elementos distorcidos;} \\ 0 & \text{para elementos não distorcidos} \end{cases}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kroenecker.

A forma final da matriz \bar{B}_{\sim} no sistema co-rotacional, obtida após algum trabalho algébrico e levando em conta as equações (3.4.2) a (3.4.19) é dada pela seguinte expressão:

$$\bar{B}_{\sim} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{xx}(\xi, \eta, \zeta) \\ \bar{B}_{yy}(\xi, \eta, \zeta) \\ \bar{B}_{zz}(\xi, \eta, \zeta) \\ \bar{B}_{xy}(\xi, \eta, \zeta) \\ \bar{B}_{yz}(\xi, \eta, \zeta) \\ \bar{B}_{zx}(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix} = \bar{B}_{\sim}(0) + \bar{B}_{\sim}^{HC}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} \bar{b}_{\sim 1}^T & 0 & 0 \\ 0 & \bar{b}_{\sim 2}^T & 0 \\ 0 & 0 & \bar{b}_{\sim 3}^T \\ \bar{b}_{\sim 2}^T & \bar{b}_{\sim 1}^T & 0 \\ 0 & \bar{b}_{\sim 3}^T & \bar{b}_{\sim 2}^T \\ \bar{b}_{\sim 3}^T & 0 & \bar{b}_{\sim 1}^T \end{bmatrix} + \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \bar{f}_{\sim 1} & -\frac{1}{3} \bar{f}_{\sim 2} & -\frac{1}{3} \bar{f}_{\sim 3} \\ -\frac{1}{3} \bar{f}_{\sim 1} & \frac{2}{3} \bar{f}_{\sim 2} & -\frac{1}{3} \bar{f}_{\sim 3} \\ -\frac{1}{3} \bar{f}_{\sim 1} & -\frac{1}{3} \bar{f}_{\sim 2} & \frac{2}{3} \bar{f}_{\sim 3} \\ G_{22} \zeta \gamma_{\sim 3}^T & G_{11} \zeta \gamma_{\sim 2}^T & 0 \\ 0 & G_{33} \xi \gamma_{\sim 2}^T & G_{22} \xi \gamma_{\sim 1}^T \\ G_{33} \eta \gamma_{\sim 3}^T & 0 & G_{11} \eta \gamma_{\sim 1}^T \end{bmatrix} \quad (3.4.20)$$

onde:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\sim 1} &= G_{11} \left(\eta \gamma_{\sim 1}^T + \zeta \gamma_{\sim 2}^T + 2\eta \zeta \gamma_{\sim 4}^T \right); & \bar{f}_{\sim 2} &= G_{22} \left(\xi \gamma_{\sim 1}^T + \zeta \gamma_{\sim 3}^T + 2\xi \zeta \gamma_{\sim 4}^T \right) \\ \bar{f}_{\sim 3} &= G_{33} \left(\xi \gamma_{\sim 2}^T + \eta \gamma_{\sim 3}^T + 2\xi \eta \gamma_{\sim 4}^T \right); & G_{ii} &= [J_{\sim}^{-1}(0)]_{ii} \quad (i = 1, 2, 3) \\ \gamma_{\sim i} &= h_{\sim i} - \left(h_{\sim i}^T \cdot x_{\sim i} \right) \bar{b}_{\sim i} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

Na equação (3.4.20) $\bar{B}_{\sim}(0)$ é a matriz formada com os vetores $\bar{b}_{\sim 1}, \bar{b}_{\sim 2}$ e $\bar{b}_{\sim 3}$, calculadas como se indica na expressão (3.4.19), e $\bar{B}_{\sim}^{HC}(\xi, \eta, \zeta)$ é a matriz de estabilização, que controla os modos espúrios (“hourglass modes”). Estas matrizes são avaliadas usando quatro pontos de integração com coordenadas (a, a, a) , $(-a, -a, -a)$, $(-a, a, -a)$ e $(a, -a, -a)$, onde $a = \sqrt{3}/3$, $\gamma_{\sim 1}, \gamma_{\sim 2}, \gamma_{\sim 3}$ e $\gamma_{\sim 4}$ são os vetores de estabilização. A utilização de quatro pontos de integração é muito importante em problemas onde existe uma frente de plastificação levando em conta que torna-se difícil definir com precisão uma frente de plastificação com apenas um só ponto de integração.

Considerando que o determinante da matriz Jacobiana é constante e igual a $\frac{1}{8}$ do volume do elemento, a força elástica interna, expressada em (3.2.13b), pode ser avaliada com a seguinte expressão:

$$\underset{\sim}{F}_{int} = \int_{\underset{\sim}{\Omega}_e} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{\sigma} d\Omega = \frac{\Omega_e}{4} \sum_{i=1}^4 \underset{\sim}{B}^T(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \underset{\sim}{\sigma}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \quad (3.4.21)$$

A expressão (3.4.21) pode também ser expressa de uma forma mais conveniente, como se indica a seguir:

$$\underset{\sim}{F}_{int} = \underset{\sim}{F}^{pi} + \underset{\sim}{F}^{estab} = \frac{\Omega_e}{4} \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \text{simétrica} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ & & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)} \begin{Bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{Bmatrix} + \frac{\Omega_e}{4} \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{dev} f_{\sim 1}^T + \gamma_{\sim 3} (\sigma_{12} G_{22} \zeta + \sigma_{13} G_{33} \eta) \\ \sigma_{22}^{dev} f_{\sim 2}^T + \gamma_{\sim 2} (\sigma_{21} G_{11} \zeta + \sigma_{23} G_{33} \xi) \\ \sigma_{33}^{dev} f_{\sim 3}^T + \gamma_{\sim 1} (\sigma_{32} G_{22} \xi + \sigma_{31} G_{11} \eta) \end{bmatrix}_{(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)} \quad (3.4.22)$$

onde $\underset{\sim}{F}^{pi}$ é a força interna avaliada nos quatro pontos de integração e $\underset{\sim}{F}^{estab.}$ é o vetor de estabilização.

A eliminação do bloqueio (“locking”) por corte em elementos de placas e cascas depende do tratamento adequado das deformações de cisalhamento. Considerando que x_1, x_2 e x_3 sejam os eixos do sistema global e que \hat{x}_1, \hat{x}_2 e \hat{x}_3 os eixos do sistema co-rotacional (que coincidirá com o sistema local ξ, η e ζ para elementos não distorcidos), os vetores $\underset{\sim}{r}_1$ e $\underset{\sim}{r}_2$, coincidentes com os eixos ξ e η no centro do elemento, são definidos da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{r}_i = \underset{\sim}{\xi}^T \cdot \underset{\sim}{x}_{\sim i} \quad ; \quad \underset{\sim}{r}_i = \underset{\sim}{\eta}^T \cdot \underset{\sim}{x}_{\sim i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.4.23)$$

Um termo de correção $\underset{\sim}{r}_c$ é adicionado a $\underset{\sim}{r}_2$, de tal forma que:

$$\underset{\sim}{r}_1^T \cdot \begin{pmatrix} \underset{\sim}{r}_2 + \underset{\sim}{r}_c \\ \underset{\sim}{r}_2 + \underset{\sim}{r}_c \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{r}_c = -\frac{\underset{\sim}{r}_1^T \cdot \underset{\sim}{r}_2}{\underset{\sim}{r}_1^T \cdot \underset{\sim}{r}_1} \underset{\sim}{r}_1 \quad (3.4.24)$$

O sistema ortogonal é completado com:

$$\underset{\sim}{r}_3 = \underset{\sim}{r}_1 \times \begin{pmatrix} \underset{\sim}{r}_2 + \underset{\sim}{r}_c \\ \underset{\sim}{r}_2 + \underset{\sim}{r}_c \end{pmatrix} \quad (3.4.25)$$

onde o símbolo \times indica um produto vetorial.

Normalizando os vetores $\underset{\sim}{r}_1$, $\underset{\sim}{r}_2 + \underset{\sim}{r}_c$ e $\underset{\sim}{r}_3$ os elementos da matriz de rotação $\underset{\sim}{R}$ são obtidos, e vem dados por:

$$R_{1i} = \frac{r_{1_i}}{\left| \underset{\sim}{r}_1 \right|} \quad ; \quad R_{2i} = \frac{r_{2_i} + r_{c_i}}{\left| \underset{\sim}{r}_2 + \underset{\sim}{r}_c \right|} \quad ; \quad R_{3i} = \frac{r_{3_i}}{\left| \underset{\sim}{r}_3 \right|} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.4.26)$$

As coordenadas podem ser transformados do sistema global $\underset{\sim}{x}$ ao sistema co-rotacional $\hat{\underset{\sim}{x}}$ pela operação:

$$\hat{\underset{\sim}{x}} = \overline{\underset{\sim}{R}} \underset{\sim}{x} \quad (3.4.27)$$

onde $\overline{\underset{\sim}{R}}$ é uma matriz de ordem 24 x 24 com submatrizes $\underset{\sim}{R}$ de ordem 3 x 3 em seus blocos diagonais e zeros em todos os blocos fora do bloco diagonal. Uma expressão similar é usada

para transformar as componentes da velocidade. O vetor $\underset{\sim}{F}_{int}$, dado em (3.4.22), é expresso no sistema co-rotacional e a transformação ao sistema global obtém-se pré-multiplicando o

vetor $\underset{\sim}{F}_{int}$ referido ao sistema co-rotacional pela matriz $\overline{\underset{\sim}{R}}^T$.

4 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS

4.1 – ENFOQUES PARA O ACOPLAMENTO DO FLUIDO E A ESTRUTURA

Existem basicamente dois tipos de acoplamentos entre o fluido e a estrutura: o acoplamento forte e o acoplamento fraco. No primeiro caso o fluido e a estrutura são tratados como um único sistema, de forma que as equações resultantes são resolvidas simultaneamente, enquanto no segundo caso o fluido e a estrutura são tratados com códigos independentes que são acoplados de alguma forma.

O maior inconveniente de um acoplamento forte é que a matriz do sistema num esquema totalmente implícito pode resultar mal condicionada devido às diferenças entre as rigidezes de ambos os domínios e entre suas respectivas discretizações. Outro problema que inibe a utilização de um acoplamento forte surge do fato de que a maior frequência da malha da estrutura é, em geral, consideravelmente maior que a maior frequência correspondente à malha do fluido, o que limita a aplicação simultânea de um esquema explícito para ambos os domínios, a menos que se utilizem subciclos; nestas circunstâncias convém usar um esquema implícito para a estrutura e um esquema explícito para o fluido. Finalmente, um acoplamento forte requer modificações substanciais de programas de Dinâmica dos Fluidos Computacional (D.F.C.) e de Análise Dinâmica Computacional de Estruturas (A.D.C.E.) já prontos.

Em compensação, uma das vantagens mais importantes do acoplamento forte é que um único operador contém a integração das equações que governam o fluido, a estrutura, o movimento da malha e a interação, e o conjunto é resolvido simultaneamente no mesmo nível de tempo, evitando a defasagem no tempo na solução do escoamento e da análise estrutural. Esquemas de acoplamento forte foram utilizados, entre outros, por Blom [24], Melville et al. [87] e Felker [43].

Para entender melhor a natureza do esquema de acoplamento forte, proporciona-se a seguir uma breve explicação sobre o mesmo.

A equação de conservação da massa, discretizada em elementos finitos, pode-se escrever da seguinte maneira:

$$\frac{1}{c^2} \underset{\sim}{M}^F \underset{\sim}{\dot{p}}^F + \left(\underset{\sim}{G}^F \right)^T \left(\underset{\sim}{\rho v} \right)^F = 0 \quad \text{em} \quad \underset{\sim}{\Omega} \underset{\sim}{e}^F \quad (4.1.1)$$

que corresponde à equação (2.5.11). O superíndice F em (4.1.1) indica que a expressão é válida nos elementos do domínio do fluido.

Na superfície de interface fluido-estrutura a (4.1.1) fica:

$$\frac{1}{c^2} M_{\tilde{p}}^{F-E} \dot{\tilde{p}}^I + \left(G^{F-E} \right)^T \left(\overline{\rho v} \right)^I = 0 \quad \text{em} \quad \Omega_e^{F-E} \quad (4.1.2)$$

onde o super-índice I refere-se a valores nas faces dos elementos da superfície de interface.

A equação de conservação da quantidade de movimento, discretizada em elementos finitos, pode-se escrever da seguinte forma:

$$M_{\tilde{v}}^F \left(\overline{\rho \dot{v}} \right)^F + K^F \left(\overline{\rho v} \right)^F - G^F \tilde{p}^F = \tilde{P}^F \quad \text{em} \quad \Omega_e^F \quad (4.1.3)$$

que corresponde à equação (2.4.1). Neste caso termos convectivos e de viscosidade foram incluídos na matriz $K_{\tilde{v}}^F$, que não é simétrica.

Na superfície de interface, a (4.1.3) fica:

$$M_{\tilde{v}}^{F-E} \left(\overline{\rho \dot{v}} \right)^I + K^{F-E} \left(\overline{\rho v} \right)^I - G^{F-E} \tilde{p}^I = \tilde{P}^{F-E} \quad \text{em} \quad \Omega_e^{F-E} \quad (4.1.4)$$

Para a estrutura, a equação de equilíbrio dinâmico vem dada por:

$$M_{\tilde{v}}^E \left(\overline{\rho \dot{v}} \right)^E + \frac{1}{\rho} C^E \left(\overline{\rho v} \right)^E + \frac{1}{\rho} K^E \left(\overline{\rho u} \right)^E = P^E \quad \text{em} \quad \Omega_e^E \quad (4.1.5)$$

onde $M_{\tilde{v}}^E$ é a matriz de massa, C^E a de amortecimento, K^E a de rigidez e P^E e \tilde{u} são os vetores de cargas e deslocamentos nodais, respectivamente; o superíndice E indica que a expressão é válida no domínio da estrutura.

As equações (4.1.1) a (4.1.5) devem ser avaliadas no tempo $(n+1)$ ou seja $t = (n+1) \cdot \Delta t$.

Levando em conta que:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right) = (1 - \alpha)v^n + \alpha v^{n+1} \quad (4.1.6)$$

tem-se que, para $\alpha = 1/2$, pode-se escrever:

$$\rho u^{n+1} = \frac{\Delta t}{2} (\rho v^{n+1} + \rho v^n) + \rho u^n \quad (4.1.7)$$

Introduzindo (4.1.7) em (4.1.5), fica:

$$M_{\tilde{v}}^E \left(\frac{\dot{\tilde{v}}}{\tilde{\rho}} \right)^E + \frac{1}{\tilde{\rho}} C^E \left(\frac{\tilde{v}^{n+1}}{\tilde{\rho}} \right)^E + \frac{\Delta t}{2\tilde{\rho}} K^E \left(\frac{\tilde{v}^{n+1}}{\tilde{\rho}} \right)^E = \tilde{P}^E - \frac{1}{\tilde{\rho}} K^E \left(\frac{\Delta t}{2} \frac{\tilde{v}^n}{\tilde{\rho}} + \tilde{\rho} u^n \right)^E \quad \text{em } \Omega_e^E \quad (4.1.8)$$

ou

$$M_{\tilde{v}}^E \left(\frac{\dot{\tilde{v}}}{\tilde{\rho}} \right)^E + \hat{K}^E \left(\frac{\tilde{v}^{n+1}}{\tilde{\rho}} \right)^E = \hat{P}^E \quad \text{em } \Omega_e^E \quad (4.1.9)$$

onde

$$\hat{K}^E = \frac{1}{\tilde{\rho}} \left(C^E + \frac{\Delta t}{2} K^E \right) \quad ; \quad \hat{P}^E = \tilde{P}^E - \frac{1}{\tilde{\rho}} K^E \left(\frac{\Delta t}{2} \frac{\tilde{v}^n}{\tilde{\rho}} - \tilde{\rho} u^n \right) \quad \text{em } \Omega_e^E \quad (4.1.10)$$

Na superfície de interface tem-se:

$$M_{\tilde{v}}^{E-F} \left(\frac{\dot{\tilde{v}}}{\tilde{\rho}} \right)^I + \hat{K}^{E-F} \left(\frac{\tilde{v}}{\tilde{\rho}} \right)^I = \hat{P}^{E-F} \quad \text{em } \Omega_e^{E-F} \quad (4.1.11)$$

onde, novamente, o superíndice I refere-se a valores na face dos elementos situados na interface estrutura-fluido. Em \hat{P}^{E-F} os valores de $\frac{\rho v}{\rho v}$ e $\frac{\rho u}{\rho u}$ são também avaliados na superfície da interface.

Juntando (4.1.1) a (4.1.4) com (4.1.9) e (4.1.10), pode-se escrever a seguinte expressão matricial para todo o sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{c^2} M^E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c^2} M^{F-E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M^F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M^{F-E} + M^{E-F} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\bar{p}}^F \\ \dot{\bar{p}}^I \\ \rho v^F \\ \rho v^I \\ \rho v^E \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & (G^F)^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (G^{F-E})^T & 0 \\ -G^F & 0 & K^F & 0 & 0 \\ 0 & -G^{F-E} & 0 & K^{F-E} + \hat{K}^{E-F} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{K}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{p}^F \\ \bar{p}^I \\ \rho v^F \\ \rho v^I \\ \rho v^E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P^F \\ P^{F-E} + \hat{P}^{E-F} \\ \hat{P}^E \end{Bmatrix} \quad (4.1.12)$$

ou, em forma compacta:

$$M \dot{U} + K U = P \quad (4.1.13)$$

A matriz \tilde{K} é não linear já que \tilde{K}^F e \tilde{K}^{F-E} incluem termos convectivos e $\hat{\tilde{K}}^E$ e $\hat{\tilde{K}}^{E-F}$ incluem a matriz de rigidez geométrica, já o amortecimento não foi considerado.

Observe que para que $\frac{\rho v}{\rho v}^F$, $\frac{\rho v}{\rho v}^I$ e $\frac{\rho v}{\rho v}^E$ (e suas derivadas com relação ao tempo) sejam consistentes em \tilde{U} , as matrizes \tilde{M}^E , $\hat{\tilde{K}}^E$ e $\hat{\tilde{P}}^E$ devem ser multiplicadas pela relação entre as massas específicas do fluido e da estrutura. O mesmo vale para as matrizes \tilde{M}^{E-F} , $\hat{\tilde{K}}^{E-F}$ e $\hat{\tilde{P}}^{E-F}$.

A expressão (4.1.13) pode ser resolvida monoliticamente depois de aplicar um algoritmo de integração no tempo, implícito ou explícito, montar e impor as correspondentes condições de contorno.

Neste trabalho o acoplamento forte foi adotado, levando em conta o fato de que tanto o fluido quanto a estrutura foram discretizados usando elementos hexaédricos de 8 nós, com as mesmas incógnitas em cada nó e usando o mesmo esquema explícito para integrar no tempo, como foi visto nos capítulos 2 e 3.

Como neste trabalho utilizou-se um esquema explícito, não é necessário montar a expressão (4.1.12), então, resumidamente, os passos computacionais para resolver o problema de interação fluido-estrutura são os seguintes:

- (a) Calcular $\left(\Delta \frac{\rho v}{\rho v}^I \right)_{k+1}^{n+1}$ com (2.5.19) no domínio do fluido.
- (b) Calcular $\left(\Delta \bar{p} \right)_k^{n+1}$ com (2.5.20) no domínio do fluido.
- (c) Calcular $\left(\Delta \frac{\rho v}{\rho v}^I \right)_{k+1}^{n+1}$ com (3.2.15) no domínio da estrutura.
- (d) Calcular na superfície de interface:

$$\left(\Delta \bar{p} \frac{v^I}{v^I} \right)_{k+1}^{n+1} = \left(M_{v_L}^{F-E} + M_{v_L}^{E-F} \right)^{-1} \left[\left(R^I + H^I \right)^n + \left(S^I + Z^I \right)_k^{n+1} \right] \quad (4.1.14)$$

$$\left(\Delta \bar{p}^I \right)_{k+1}^{n+1} = \left(M_{P_L}^{F-E} \right)^{-1} \left[\left(T^I \right)^n + \left(Q^I \right)_k^{n+1} \right] \quad (4.1.15)$$

onde o super-índice I refere-se a valores avaliados na superfície de interface, que é constituída por faces comuns de elementos que pertencem ao domínio do fluido e da estrutura.

$M_{\sim v_L}^{F-E} + M_{\sim v_L}^{E-F}$ é a soma dos elementos da matriz de massa discreta do fluido e da estrutura nas faces comuns de elementos de ambos domínios. $M_{\sim P_L}^{F-E}$ é a matriz de massa discreta correspondente à pressão nos elementos de domínio do fluido com uma face comum com elementos do domínio da estrutura. Os vetores $\tilde{R}, \tilde{S}, \tilde{T}$ e \tilde{Q} têm o mesmo significado que em (2.5.19) e (2.5.20) e os vetores \tilde{H} e \tilde{Z} têm o mesmo significado que na expressão (3.2.15) Em cada um dos passos é admitido que está-se trabalhando com os vetores já montados e com as correspondentes condições de contorno impostas.

Como foi apresentado acima, uma outra possibilidade é trabalhar com um acoplamento fraco, e embora não tenha sido este o caminho empregado nesta tese, será brevemente comentado a título de ilustração.

A grande vantagem que tem um esquema de acoplamento fraco é o de poder usar os mais eficientes programas para analisar escoamentos e para realizar a análise dinâmica da estrutura sem grandes modificações e em forma independente como subrotinas. Entretanto, um dos problemas que este tipo de enfoque apresenta é como implementar a transferência de informação entre os códigos (transferência de cargas do fluido à estrutura, intervalos de tempo diferentes e movimento da superfície de interface) que resultam da possibilidade da existência de diferentes discretizações nos dois domínios e, conseqüentemente, na superfície de interface.

No acoplamento fraco um programa de controle tem a cargo dirigir as sucessivas aplicações multidisciplinares, assim como a transferência de dados, através da superfície de interface, entre os dois códigos (o de D.F.C. e o de A.D.C.E.). A principal tarefa para um enfoque baseado num acoplamento fraco é introduzir algoritmos e técnicas para a projeção das cargas e para o movimento da superfície de interface de forma a conservar a carga total e a energia total.

Em alguns trabalhos esses problemas não aparecem (Refs. [13], [41] e [54]) devido a que existe a mesma discretização em ambos os domínios; em outros trabalhos (Refs [52], [86] e [104]) estes problemas foram ignorados sob a consideração de que os elementos da superfície de interface tinham o mesmo tamanho para o fluido e a estrutura ; finalmente, existem autores (Refs. [7] e [55]) que tratam estes problemas introduzindo uma superfície virtual adicional entre as superfícies do fluido e a estrutura.

Nenhum destes enfoques é geral, e por isto convém mencionar o trabalho de Cebral e Löhner, [32], como uma significativa contribuição na formulação de esquemas de acoplamento fraco; estes autores apresentam uma quadratura Gaussiana conservativa, monotônica e adaptativa para a transferência de cargas e uma técnica de interpolação para o movimento da superfície da interface.

4.2 – O MOVIMENTO DA MALHA NUMA DESCRIÇÃO ARBITRÁRIA LAGRANGEANA- EULERIANA (ALE)

Numa descrição arbitrária Lagrangeana-Euleriana (ALE) num domínio que considera corpos ou superfícies em movimento relativo de um com respeito a outro, a questão essencial é como especificar a velocidade dos nós da malha. Em outras palavras: dada a velocidade \tilde{w}_o na superfície em movimento Γ_o , ou seja:

$$\tilde{w}|_{\Gamma_o} = \tilde{w}_o \quad (4.2.1)$$

e uma velocidade nula para a malha a certa distância dessa superfície Γ_o e em todas as outras superfícies restantes, ou seja:

$$\tilde{w}|_{\Gamma_i} = 0 \quad (4.2.2)$$

achar uma distribuição espacial \tilde{w} tal que a distorção da malha é minimizada. Se a distribuição do campo de velocidade da malha não é suave, aparecerão rapidamente elementos distorcidos forçando à realização de remalhamentos globais ou locais com a correspondente perda de precisão e de tempo de processamento.

Três famílias de métodos têm sido usadas para especificar a distribuição de velocidades de malha:

- a) Suavização de coordenadas (Refs [14], [104]);
- b) Suavização de velocidades (Ref. [81]);
- c) Utilização de funções analíticas especificadas pelo usuário (Ref. [81]).

Neste trabalho foi adotada a terceira alternativa, apenas pela facilidade de sua implementação e seu pouco requerimento de CPU. As velocidades da malha são prescritas através de funções analíticas prescritas pelo usuário e que são funções da distância da superfície móvel. Alguns algoritmos para fazer uma procura de distância δ de um ponto do

campo ao ponto mais próximo da superfície móvel foram desenvolvidos (Refs. [26] e [79]). Determinada essa distância δ , a velocidade da malha vem dada por:

$$\tilde{w} = \tilde{w}(x|_{r_0})f(\delta) \quad (4.2.3)$$

onde $x|_{r_0}$ é o ponto da superfície móvel mais próximo ao ponto em consideração. A função $f(\delta)$ toma o valor unitário para $\delta = 0$ e tende ao valor zero a medida que δ cresce. Embora este processo seja extremamente rápido, especialmente quando os mesmos valores de δ possam ser tomados em todos os intervalos de tempo, tem restrições para o seu uso geral, em particular quando existem vários corpos em movimento.

Neste trabalho, devido a que se tem trabalhado exclusivamente com malhas estruturadas, adotou-se uma função linear de δ para cada direção, e que adquire um valor unitário a uma certa distância do corpo imerso. Dentro do domínio para o qual $\tilde{w} \neq 0$ adotou-se uma descrição ALE ou uma descrição Lagrangeana e fora desse domínio trabalha-se com uma descrição Euleriana. A estrutura é analisada com uma descrição Lagrangeana atualizada.

4.3 - A VETORIZAÇÃO

4.3.1- Processamento vetorial e escalar

A vetorização é uma forma de processamento na qual elementos de um vetor são processados em grupos. Um laço que é realizado em código vetorizado tem uma velocidade de execução muito maior que aquele realizado em um código escalar (no CRAY, a relação entre velocidades é bem superior a 10)

O processamento de um vetor em um laço consiste em um processo composto de vários passos, como se fosse uma linha de montagem. Para processar um vetor, seja do modo escalar ou vetorial, um laço deve realizar o seguinte:

- Carregar os elementos da memória para um registro.
- Processar os elementos, colocando os resultados em outro registro.
- Armazenar os resultados anteriores na memória.

O código convencional (escalar) é um processo de um passo a cada tempo: cada elemento deve terminar o passo final do processo antes do próximo elemento poder começar o primeiro passo; isto é, cada laço de iteração começa quando a iteração anterior terminou.

Mas no código vetorizado, como em uma linha de montagem, cada elemento começa o primeiro passo quando o elemento anterior terminou somente o seu primeiro passo, em vez do último.

Para melhor esclarecer as diferenças existentes entre um processo escalar e vetorial considere-se o seguinte faça que adiciona cada elemento do vetor A com o correspondente elemento do vetor B e armazena os resultados no vetor C.

```
DO 10 I=1,3
  C(I) =A(I) + B(I)
10 CONTINUE
```

Em um código escalar, este laço realiza as seguintes operações:

- Lê um elemento do vetor A.
- Lê um elemento de B.
- Adiciona os elementos.
- Escreve os resultados no vetor C.
- Incrementa o contador do laço em 1.
- Repete a seqüência acima para cada elemento de cada vetor até o contador atingir o seu limite.

No processamento vetorial, o laço em questão é realizado segundo as operações vetoriais:

- Carrega uma série de elementos do vetor A para um registro vetorial e uma série de elementos do vetor B para um outro registro vetorial.
- Adiciona os correspondentes elementos dos dois registros vetoriais e coloca os resultados em um outro registro vetorial, representando o vetor C.
- Armazena o registro utilizado para o vetor C na memória.
- Esta seqüência deverá ser repetida se o vetor tiver mais elementos que o máximo usado no processo vetorial.

Os requisitos gerais para ocorrer a vetorização em laços DO, laços DO WHILE, e laços IF podem ser resumidos como a seguir:

- Somente os laços internos podem ser vetorizados.

- Versões vetorial e escalar de um determinado código devem produzir resultados equivalentes.
- Outros requisitos estão baseados nas características de hardware e limites na complexidade de um laço.

A inibição da vetorização de um laço interno podem ter várias causas:

- Alguma referência a um código externo que não pode ser vetorizado. Isto inclui: comandos I/O, referências a uma função que não tem uma versão vetorial, uma referência a uma função externa ou subrotina e algum comando RETURN, STOP ou PAUSE.
- Comandos condicionais dos tipos IF de três direções e GOTO. Estes não podem ser convertidos em instruções de hardware vetoriais.
- Outros retornos que formam um laço.
- A presença de diretivas específicas para processamento escalar ou comandos utilizados na compilação.
- Uma declaração fora de um laço para dentro deste. Tal código viola o padrão ANSI mas é permitido pelo sistema de compilação CF77.
- Dependências (construções que produzem diferentes resultados no modo escalar e vetorial), tal como recorrência e subscritos de referência ambígua (quando a informação contida no laço é insuficiente para saber se este pode ser vetorizado)

4.3.2 - Estratégia utilizada

Para analisar a performance do programa durante o trabalho de vetorização, utilizou-se as ferramentas de análise que o computador possui para tal fim.

Dois grandezas se destacam para esta análise: o tempo de CPU e o número de Megaflops. Um flop é uma operação de ponto flutuante (numero real), especificamente adição, multiplicação ou ambas (outras operações envolvem combinações destas, incluindo a divisão e funções tais como a raiz quadrada). Megaflops (Mflops) significa milhões de operações de ponto flutuante: esta unidade é freqüentemente usada como “megaflops por segundo de tempo de CPU”.

Baixos valores de Mflops indicam um código escalar enquanto que valores altos indicam um alto grau de vetorização [36]. Já o tempo de CPU é a grandeza mais adequada para comparar o desempenho de dois computadores submetidos a um mesmo programa executável.

Com base no que foi exposto acima, o primeiro passo adotado para procurar obter-se uma boa vetorização, consistiu em executar alguns exemplos com o programa na codificação original e analisar os relatórios gerados. Nesta análise apareceram as subrotinas que possuíam os maiores consumos de tempo de CPU, servindo de orientação para estabelecer as prioridades no que se refere ao trabalho de vetorização.

A estratégia principal adotada foi utilizar o mínimo possível de subrotinas já que os programas acoplados para formar o código de fluido-estrutura já tinham este comportamento (apenas uma subrotina no programa de estruturas e nenhuma subrotina no programa de fluidos)

O recurso mais utilizado para a vetorização (já nos códigos independentes) foi a inversão de laços para possibilitar a vetorização dos maiores laços. Outras alterações são descritas a seguir.

4.3.3 – Alterações na codificação de um programa escalar para um programa vetorial

As modificações no programa foram implementadas por etapas, tendo prioridade aqueles laços que consumiam major tempo de processamento. As principais modificações impostas estão descritas a seguir.

PROCESSO DE MONTAGEM

A equação governante a ser solucionada, é estabelecida para os nós da malha de elementos finitos. Para a formação das parcelas que compõem estas equações, deve-se realizar operações em termos de nós de cada elemento para, após, efetuar a montagem (assembling) dos resultados em vetores globais, que contém as variáveis de todos os nós do domínio.

No programa de versão escalar, a parte responsável por esta tarefa é codificada da seguinte maneira:

$$IK=NPE*(NE-I)$$

```

DO I= 1,NPE
  NR=KONE(IK+I)
  GV(NR)=GV(NR)+V(I)
ENDDO

```

Onde:

KONE = Vetor que contém as conectividades de cada elemento

GV = Vetor global

V = Vetor local

NPE = Número de nós do elemento

Como pode-se perceber, a codificação mostrada é escalar, pois existe recorrência no laço. Além disso, este é curto (NPE=8) não sendo apropriado para a vetorização. Para vetorizar este laço utilizou-se a técnica de mapeamento inverso, que consiste em definir uma tabela de conectividade das equações. Para isso utilizaram-se duas matrizes chamadas de NEIBOR e NEIBOL.

A primeira contém o número de todos os elementos que concorrem a um determinado nó I (elementos topologicamente conectados a uma determinada equação global). A segunda contém o número do nó desses elementos que coincidem com o nó I (identifica a equação local correspondente).

Na figura 4.1 pode ser visualizada a definição das referidas matrizes, para o caso de uma discretização regular empregando elementos quadriláteros bi-lineares.

Elemento nulo	4 3 15 1 2
4 3 7 1 2	4 3 11 1 2

$$\text{NEIBOR}(1,n) = 3 \quad \text{NEIBOL}(1,n) = 3$$

$$\text{NEIBOR}(2,n) = 7 \quad \text{NEIBOL}(2,n) = 3$$

$$\text{NEIBOR}(3,n) = 11 \quad \text{NEIBOL}(3,n) = 4$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{NEIBOR}(4,n) = 15 & \text{NEIBOL}(4,n) = 1 \\
 \text{NEIBOR}(5,n) = 0 & \text{NEIBOL}(5,n) = 0 \\
 \text{NEIBOR}(6,n) = 0 & \text{NEIBOL}(6,n) = 0 \\
 \text{NEIBOR}(7,n) = 0 & \text{NEIBOL}(7,n) = 0 \\
 \text{NEIBOR}(8,n) = 0 & \text{NEIBOL}(8,n) = 0 \\
 \text{NEIBOR}(9,n) = 0 & \text{NEIBOL}(9,n) = 0
 \end{array}$$

Figura 4.1 - Técnica de mapeamento inverso - tabela de conectividade das equações

A parte do programa na versão vetorizada responsável pela montagem é codificada da seguinte forma:

DO I= 1,NNM

K2=NEIBOR(2,I)+1

K3=NEIBOR(3,I)+1

K4=NEIBOR(4,I)+1

K5=NEIBOR(5,I)+1

K6=NEIBOR(6,I)+1

K7=NEIBOR(7,I)+1

K8=NEIBOR(8,I)+1

K9=NEIBOR(9,I)+1

L2=NEIBOL(2,I)+1

L3=NEIBOL(3,I)+1

L4=NEIBOL(4,I)+1

L5=NEIBOL(5,I)+1

L6=NEIBOL(6,I)+1

L7=NEIBOL(7,I)+1

L8=NEIBOL(8,I)+1

L9=NEIBOL(9,I)+1

GV(I) = V(K2,L2)+V(K3,L3)+.....+V(K9,L9)

ENDDO

Onde:

NNM = Número total de nós no domínio

K1...K9 = Elementos que concorrem ao nó I mais um

L1....L9 = Nós dos elementos coincidentes com o nó I mais um

V(K,L) = Vetor local que contém as variáveis de cada elemento

Sabe-se que no processo de montagem convencional, a recorrência existe porque os endereços do vetor global são chamados mais de uma vez, devido ao processo de acúmulo das variáveis de cada elemento. Com a codificação vetorizada, é garantido que o acúmulo das variáveis para uma determinada posição do vetor global é feito de uma só vez, eliminando a existência de recorrência no faço.

O vetor local que contém as variáveis para cada elemento tem uma dimensão de $(NEM+1) \times (NPE+1)$. Como cada elemento possui NPE nós, então era de se esperar que a dimensão deste vetor fosse $NEM \times NPE$. Acontece que o número máximo de elementos que podem concorrer a um determinado nó no caso de malhas estruturadas é 8 , mas existem muitos casos em que este número é menor. Quando isto ocorrer, as matrizes NEIBOR e NEIBOL são completadas com zeros nas posições restantes. Por esta razão é que a primeira posição do vetor local é nula $V(1,1)=0.0$, pois sempre que os elementos das matrizes NEIBOR e NEIBOL forem nulos, K e L terão o valor unitário. Assim a contribuição de V em GV para estas posições será nula.

ELIMINAÇÃO DA ZERAGEM DOS VETORES

No programa escalar, cada vez que determinados vetores são reinicializados, estes são zerados antes de qualquer armazenamento no seu endereço. Como exemplo, pode-se citar o caso da subrotina responsável pelo cálculo da matriz de massa consistente para o elemento hexaédrico. Parte de sua codificação está reproduzida abaixo.

```
DO I= 1,8
  DO J=I,8
    CM(I,J)=0.0D0
  ENDDO
```

```

ENDDO
C DO LOOP EM RELAÇÃO AOS PONTOS DE INTEGRAÇÃO
DO NPI=1,8
    DO I=1,8
        DO J= I,8
            CM(I,J)=CM(I,J)+DET(NPI)*ASF(NPI,I)*ASF(NPI,J)
        ENDDO
    ENDDO
ENDDO

```

Onde:

CM= Matriz de massa consistente para o elemento corrente

DET = Determinante da matriz jacobiana do elemento corrente

ASF = Função de forma para o elemento corrente

Pode-se perceber que existem laços aninhados que acumulam valores na matriz de massa consistente, obrigando a uma zeragem prévia da mesma. O laço de zeragem não seria necessário se os laços seguintes de acúmulo de valores fossem modificados, de tal maneira que os endereços da matriz CM fossem chamados apenas uma vez. Para isso, o laço externo NPI=1,8 deveria ser desenvolvido. A codificação modificada deveria ficar da forma:

```

DO I= 1,8
    DO J=1,8
        CM(I,J)=DET(1)*ASF(1,I)*ASF(1,J)+DET(2)*ASF(2,1)*ASF(2,J).....
    ENDDO
ENDDO

```

Finalmente, convém mencionar que a vetorização de um programa normalmente acarreta um aumento de memória com relação à respectiva versão escalar, devido à utilização de matrizes auxiliares na programação vetorial que não são necessárias na versão escalar.

5 - APLICAÇÕES NUMÉRICAS

5.1 - INTRODUÇÃO

Com o objetivo de mostrar que os códigos de análise estrutural e de escoamentos funcionam quando utilizados em forma isolada, são apresentados inicialmente exemplos onde são tratados problemas de análise dinâmica com não linearidade geométrica de estruturas, nos quais utiliza-se a formulação descrita no capítulo 3, e problemas clássicos de escoamentos de fluidos incompressíveis, onde a formulação utilizada é aquela descrita no capítulo 2.

Posteriormente estes códigos são acoplados monoliticamente para tratar dois casos de estruturas muito flexíveis imersas em fluidos viscosos quase-incompressíveis, simulando assim problemas típicos de interação dinâmica de fluidos e estruturas com a utilização da formulação apresentada no capítulo 4 para o acoplamento.

5.2 - ANÁLISE DINÂMICA COM NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS ELÁSTICAS

5.2.1 - Resposta transiente de uma viga bi-engastada com uma carga pulso no centro do vão

A geometria e a malha de elementos finitos utilizada (45 nós e 16 elementos) para discretizar a metade da viga, devido à simetria existente, são mostradas na figura 5.1.

As propriedades do material usadas no exemplo são $E = 2,0683 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\rho = 2714 \text{ kg/m}^3$ e $\nu = 0$, onde E é módulo de Young, ρ a massa específica e ν o coeficiente de Poisson.

A intensidade da carga, aplicada na forma de um pulso, é 2846,72 N e o passo de tempo utilizado na análise é $\Delta t = 0,09 \text{ } \mu\text{seg}$.

As condições de contorno são impostas restringindo as 3 componentes dos deslocamentos dos nós onde está localizado o engaste e as componentes de deslocamento horizontal e normal ao plano do desenho nos nós situados no centro do vão.

A resposta transiente obtida é apresentada na figura 5.2 e comparada com os resultados obtidos por Liao e Reddy [71], que usaram elementos de viga de três nós e Mondkar e Powell [89], que empregaram elementos biquadráticos de estado plano de tensões com 8 nós. Em ambas referências citadas foi usada uma formulação Lagrangeana Total com o emprego do Segundo Tensor de Tensões de Piola-Kirchoff e do Tensor de Deformações de Green-Lagrange.

De forma geral, observa-se no resultado obtido uma boa concordância com as referências, embora haja alguma discrepância em determinados instantes de tempo, provavelmente devida às diferenças entre as formulações e tipos de elementos finitos utilizados.

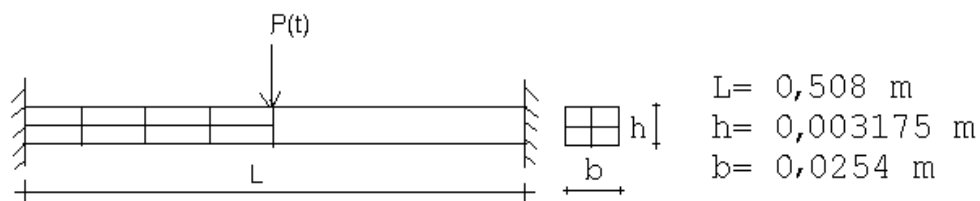


Figura 5.1 - Geometria e malha de elementos finitos da viga bi-engastada

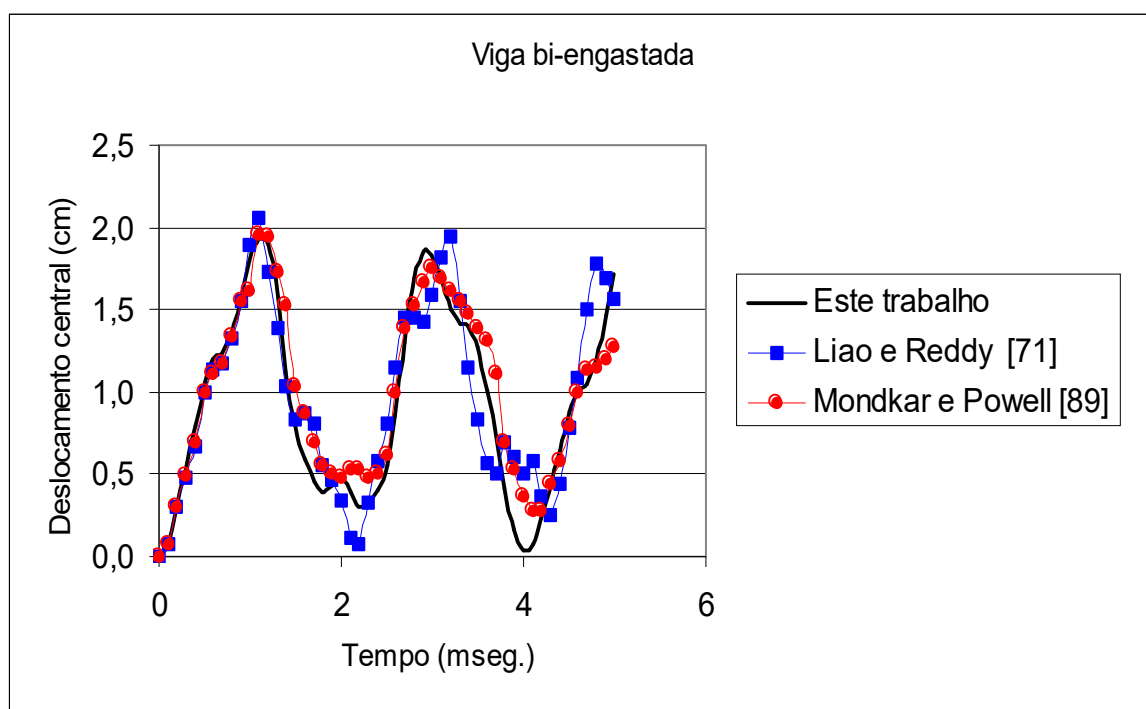


Figura 5.2 - Respostas transientes para a viga bi-engastada

5.2.2 - Placa enrijecida simplesmente apoiada sujeita à pressão uniforme

A geometria da placa enrijecida é mostrada na figura 5.3. As propriedades do material usadas no exemplo são $E= 2,0683 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\rho= 2714 \text{ kg/m}^3$ e $\nu=0,3$.

A intensidade da carga pulso uniforme é $q= 25850 \text{ N/m}^2$ e foi adotado um passo de tempo $\Delta t= 0,15 \text{ } \mu\text{seg.}$.

Inicialmente, com o objetivo de estudar a influência da distorção da malha nos resultados, um quarto da placa (sem consideração dos enrijecedores e novamente fazendo uso da simetria existente na estrutura) foi modelado com uma malha não distorcida e com uma malha distorcida, ambas com $5 \times 5 \times 2$ elementos, que são apresentadas nas figuras 5.4.a e 5.4.b, respectivamente, onde também são incluídas as condições de contorno.

Os resultados obtidos com estas malhas são apresentados, para efeito de comparação, com aqueles devidos a Liao e Reddy [71] na figura 5.5, onde observa-se uma concordância bastante boa tanto dos resultados relativos à malha não distorcida quanto àqueles relativos à malha distorcida, indicando assim que a distorção da malha não foi decisiva nos resultados.

Numa segunda etapa procedeu-se a análise da placa enrijecida utilizando uma malha não distorcida de elementos hexaédricos também para a discretização dos enrijecedores. Os resultados obtidos são novamente comparados com aqueles apresentados por Liao e Reddy [71], os quais utilizaram elementos de casca com polinômios de interpolação lagrangeanos com 9 nós para a placa e elementos de viga de 3 nós para modelar os enrijecedores.

Finalmente, a resposta transiente para a mesma placa, com enrijecedores (modelados com apenas um elemento na espessura), é apresentada na figura 5.6 e comparada com os resultados obtidos por Liao e Reddy [71].

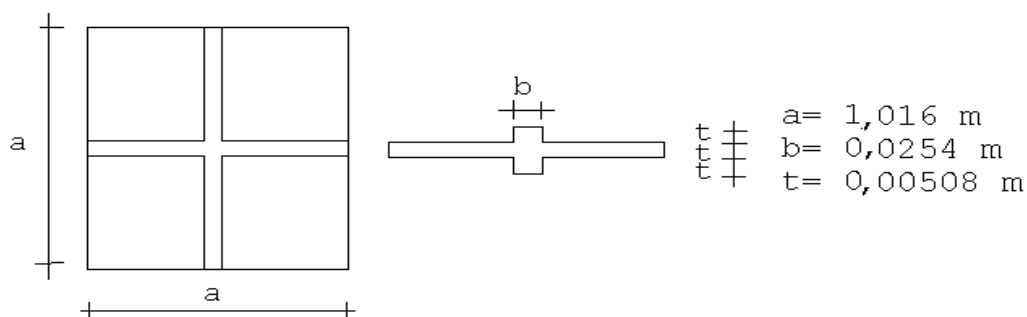


Figura 5.3 - Geometria da placa quadrada simplesmente apoiada com enrijecedores

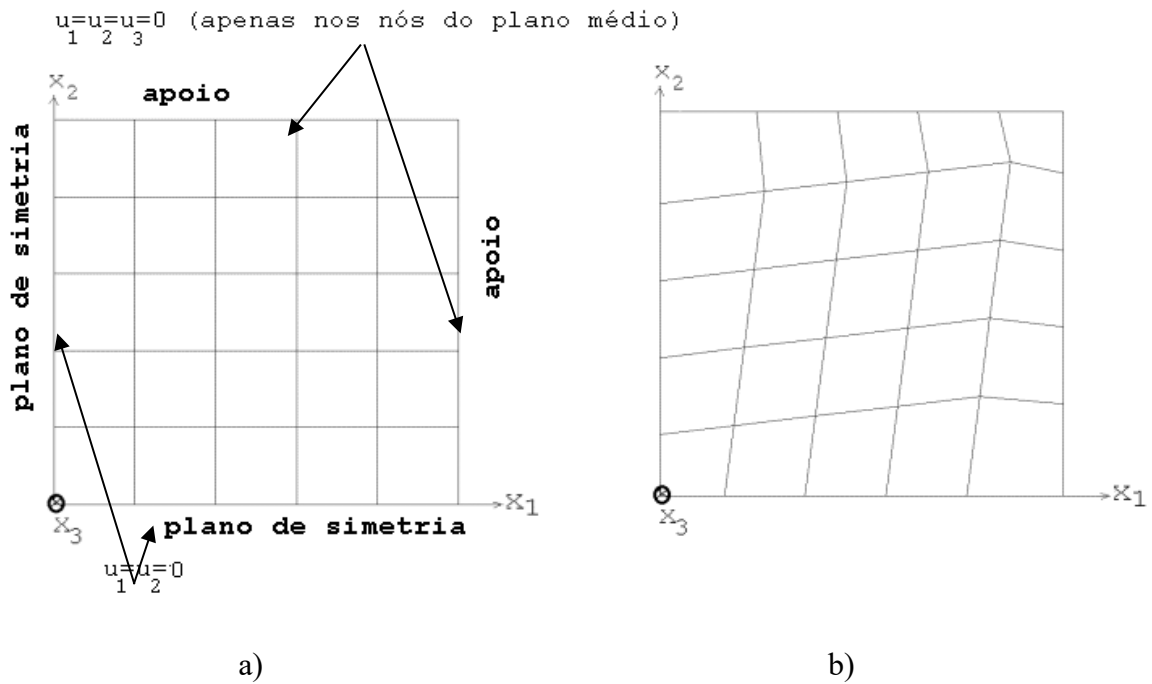


Figura 5.4 - Malhas e condições de contorno utilizadas no estudo da influência da distorção:
a) malha sem distorção; b) malha distorcida

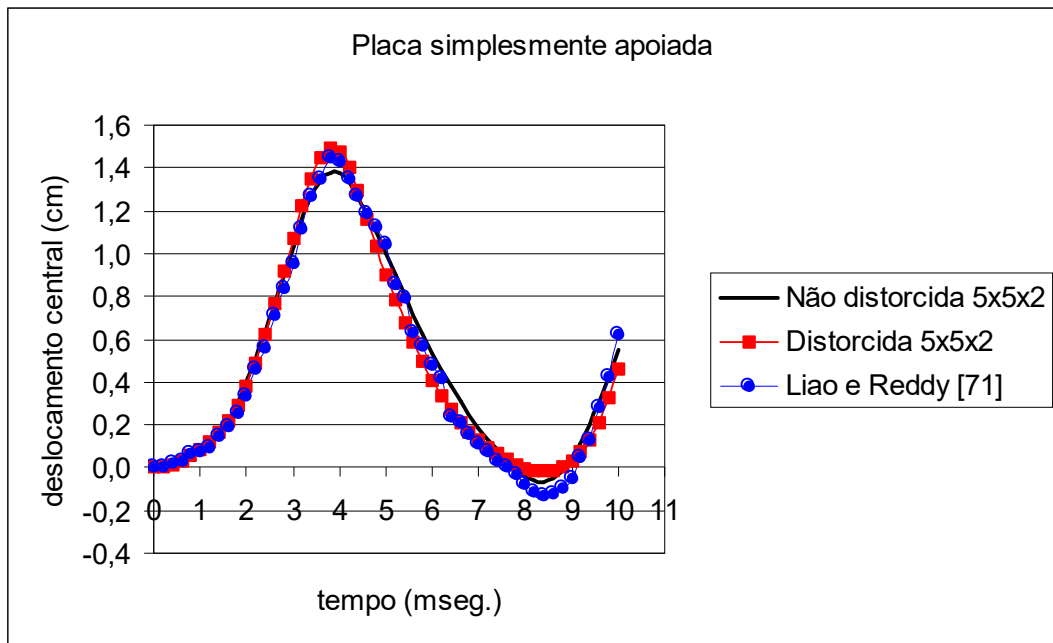


Figura 5.5 - Resultados obtidos no estudo da distorção da malha

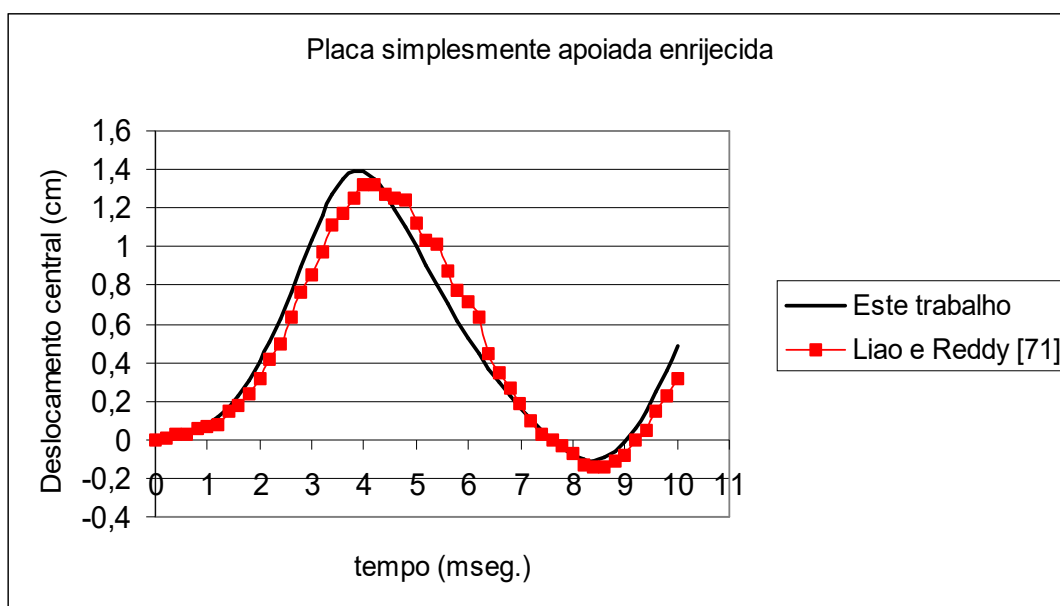


Figura 5.6 - Resposta transiente obtida para a placa enrijecida

O resultado obtido com a consideração dos enrijecedores apresenta também uma boa concordância com a Ref. [71] conforme observa-se na figura 5.6, sendo que a influência dos enrijecedores na resposta, a exemplo do que ocorre na citada referência, não foi muito acentuada. Convém observar que na Ref. [71] foi utilizada uma descrição Lagrangeana Total, o Segundo Tensor de Tensões de Piola-Kirchoff e o Tensor de Deformações de Green-Lagrange.

5.2.3 - Casca esférica engastada sujeita a uma carga pulso no ápice

A carga, a geometria, as propriedades do material e a malha de elementos finitos constituída de 750 elementos (sendo a espessura discretizada com 2 elementos) e 1263 nós, que foi gerada com o aproveitamento da dupla simetria da estrutura, são apresentadas na figura 5.7, onde também são incluídas as condições de contorno. Na região próxima ao ponto de aplicação da carga, caracterizada por um raio de 5 cm, foi utilizada uma discretização de 10x10x2 elementos com o objetivo de obter resultados mais precisos.

Na figura 5.8 é apresentada a resposta transiente não linear obtida usando o enfoque do capítulo 3 e uma comparação com os resultados publicados por Bathe et al. [10], que

usaram elementos axisimétricos de 8 nós, um esquema implícito e uma formulação Lagrangeana Total com o emprego do Segundo Tensor de Tensões de Piola-Kirchoff e o Tensor de Deformações de Green-Lagrange.

No eixo do tempo, as quantidades indicam o número de passos de tempo usados na Ref. [10], desta forma o tempo foi adimensionalizado em relação ao intervalo usado por Bathe et al. [10], ou seja 2,2 μ seg. Observa-se uma concordância bastante boa entre os resultados deste trabalho e os apresentados por Bathe et al. [10].

A figura 5.9, por sua vez, apresenta a estrutura na configuração onde o deslocamento vertical do ponto sob a carga atinge seu valor máximo e que corresponde ao tempo de 0,116 msec. (correspondente ao tempo adimensionalizado 50) evidenciando os grandes deslocamentos que são experimentados pela estrutura e, assim, o caráter altamente não linear deste problema.

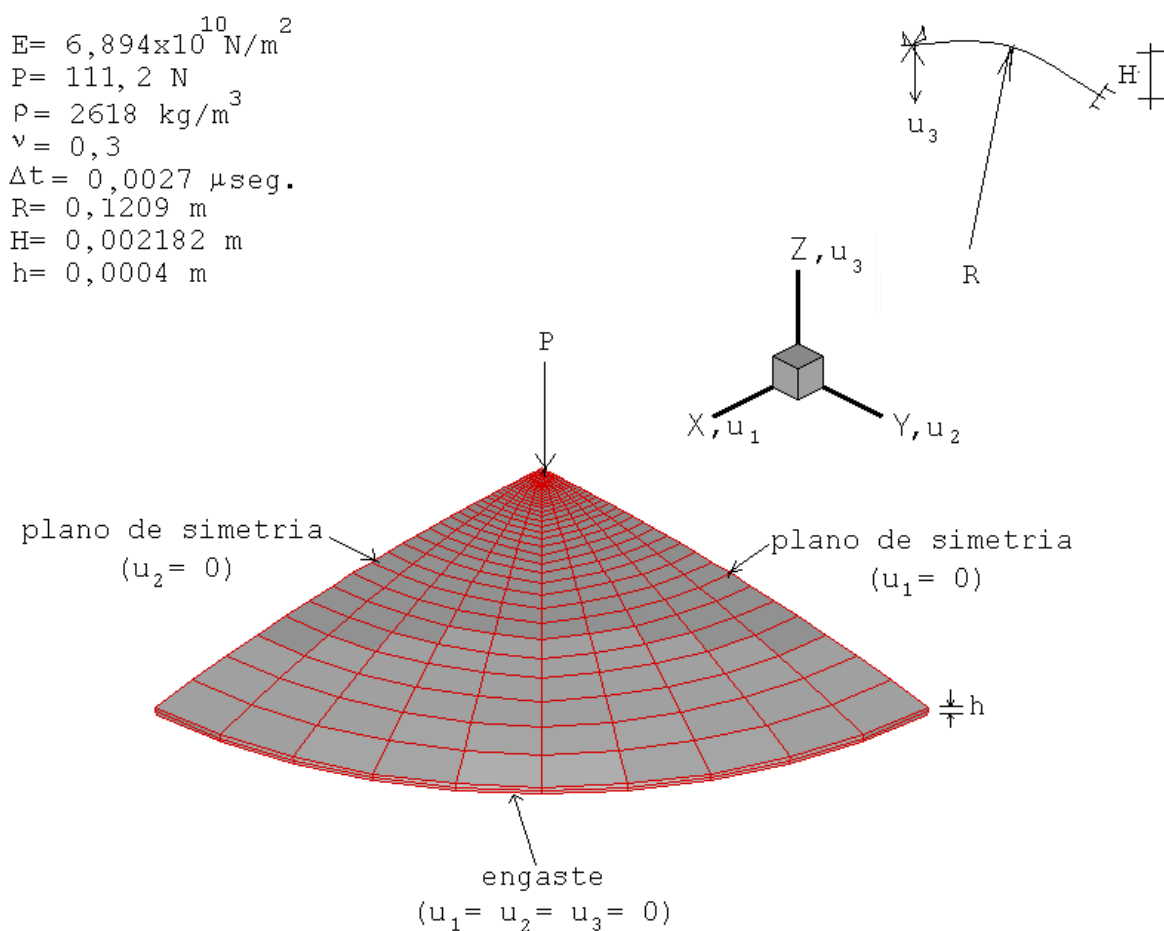


Figura 5.7 – Casca esférica engastada: geometria, propriedades e malha de elementos finitos

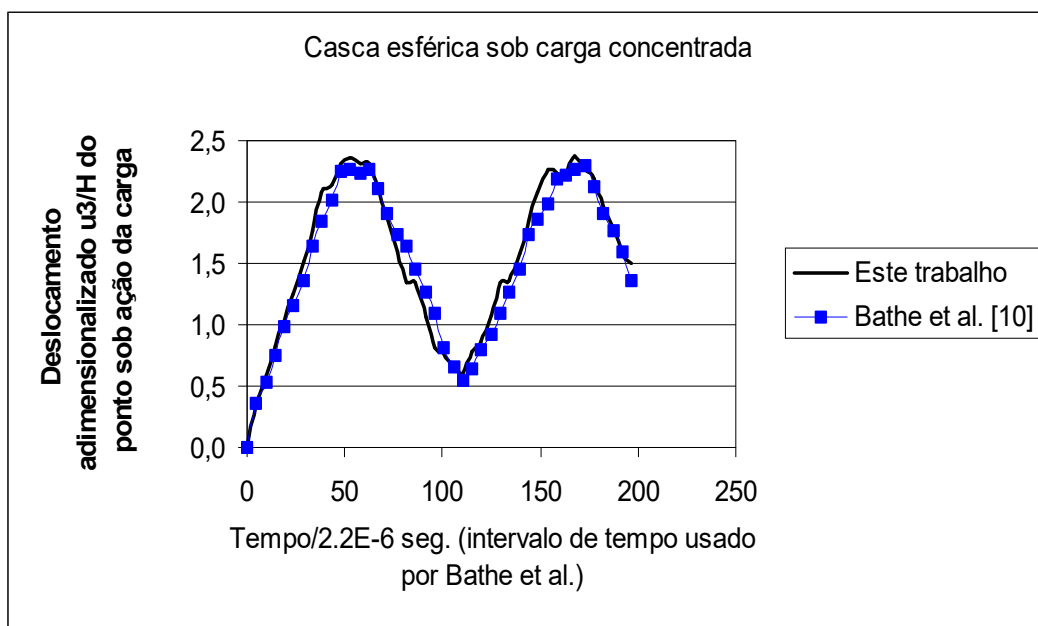


Figura 5.8 - Resposta transiente obtida para a casca esférica

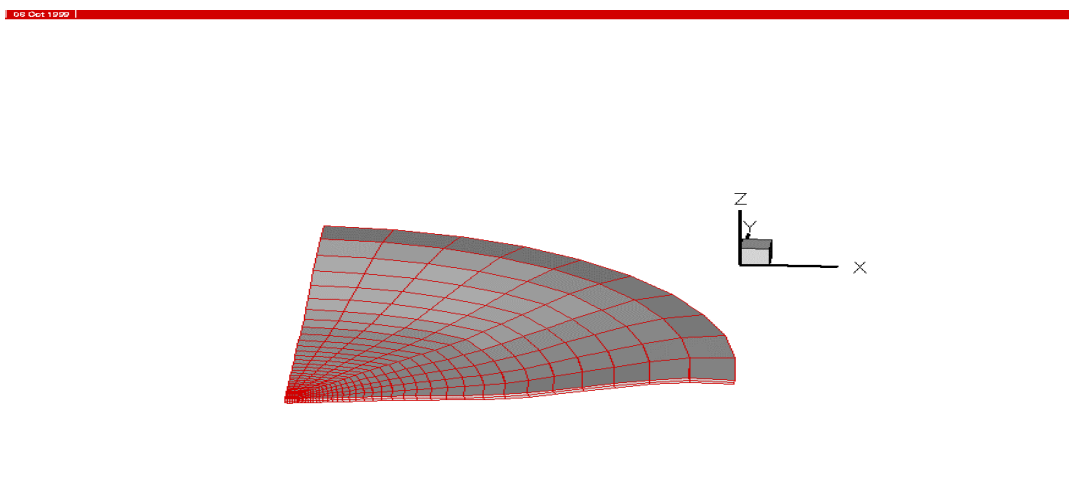


Figura 5.9 - Configuração deformada da casca esférica para $t = 0,116$ msec.

5.3 - ANÁLISE DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS VISCOSOS QUASE-INCOMPRESSÍVEIS

5.3.1 - Escoamento no interior de uma cavidade

Neste problema considera-se o movimento de um fluido viscoso quase-incompressível em uma cavidade de formato cúbico e de aresta unitária, induzido pelo movimento do topo caracterizado por uma velocidade unitária, enquanto que as demais paredes permanecem estacionárias. A velocidade tem direção paralela ao plano xz e atua sobre toda a face superior. A malha de elementos finitos utilizada consistiu de 1372 elementos hexaédricos de 8 nós e 1800 nós no total, tendo sido levada em consideração a existência de simetria em torno do plano $z=0$, o que permitiu modelar apenas a metade do domínio.

O intervalo de tempo Δt adotado foi de 0,1 msec. As propriedades do fluido (massa específica, viscosidade dinâmica e velocidade do som) são as seguintes: $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0,01 \text{ N.s/m}^2$ e $c = 150 \text{ m/s}$, o que significa que o número de Reynolds é igual a 100.

A figura 5.10 mostra a geometria, as condições de contorno do problema e a discretização empregada.

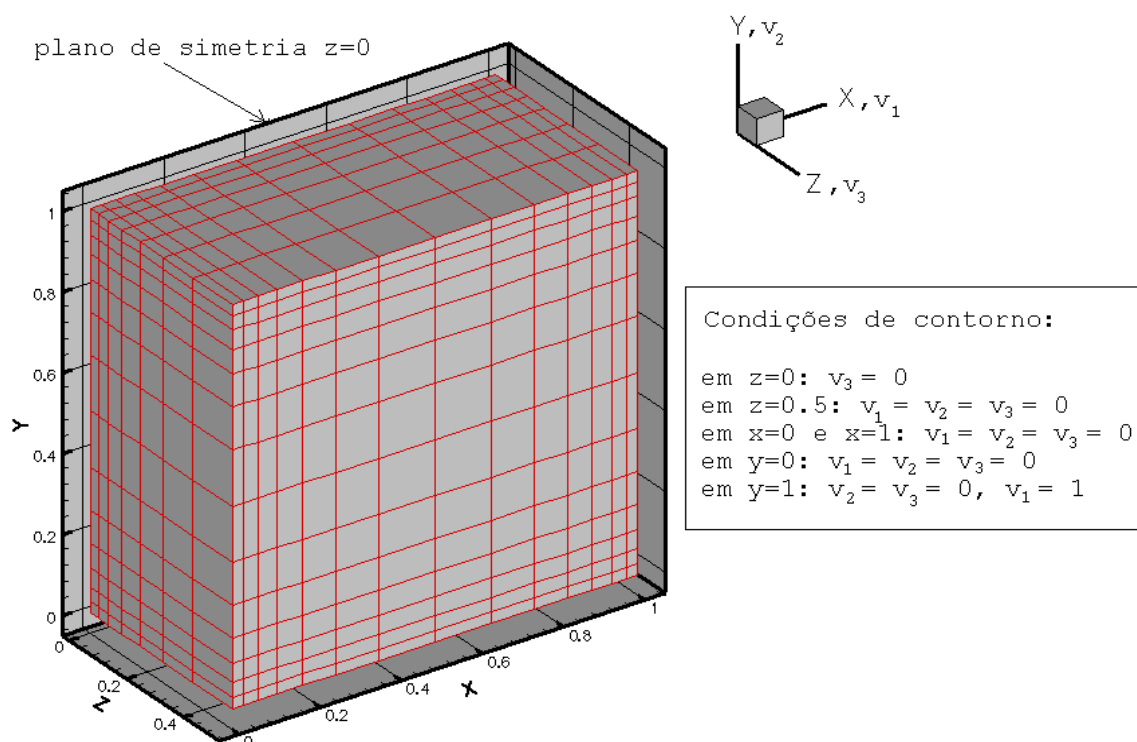


Figura 5.10 - Escoamento numa cavidade: geometria e condições de contorno

A seguir, a figura **5.11** compara os resultados obtidos pelo presente trabalho e aqueles devidos a Reddy e Gartling [106] para o campo de velocidades no plano de simetria em $t= 5$ seg. , tempo no qual o regime estacionário já foi atingido. Conforme observa-se nesta última figura, os resultados obtidos no presente trabalho apresentam uma concordância bastante boa com aqueles da referência citada.

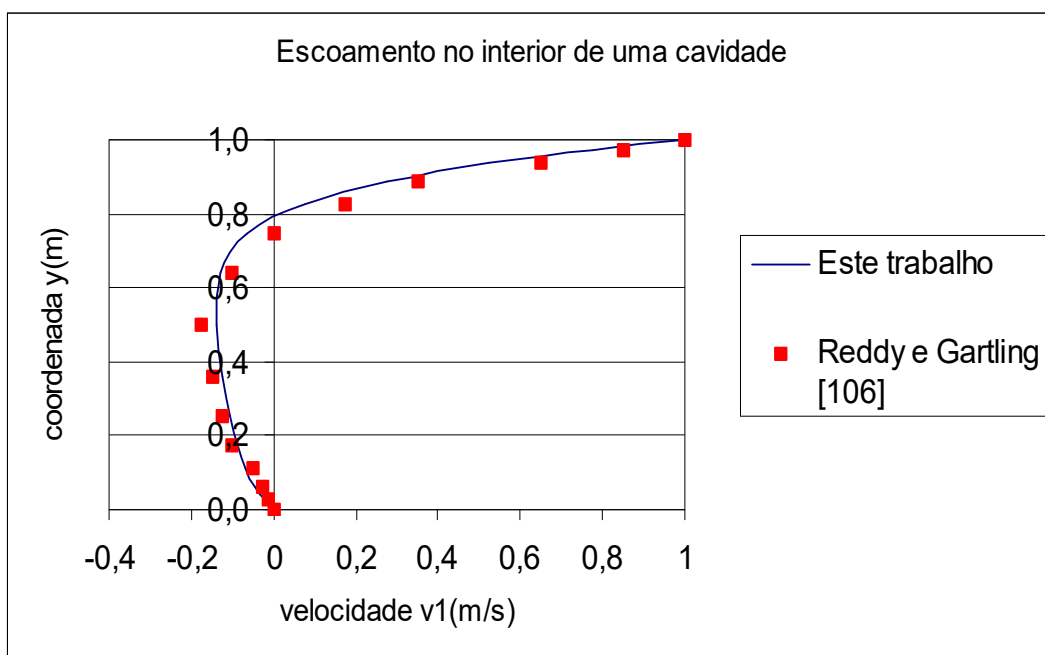


Figura 5.11 - Escoamento numa cavidade: velocidade horizontal ao longo da linha de centro vertical do plano de simetria

As figuras **5.12** , **5.13** e **5.14** mostram, respectivamente, vetores velocidade, linhas de corrente e isobáricas no plano de simetria, sendo todos resultados novamente correspondentes a $t= 5$ segundos.

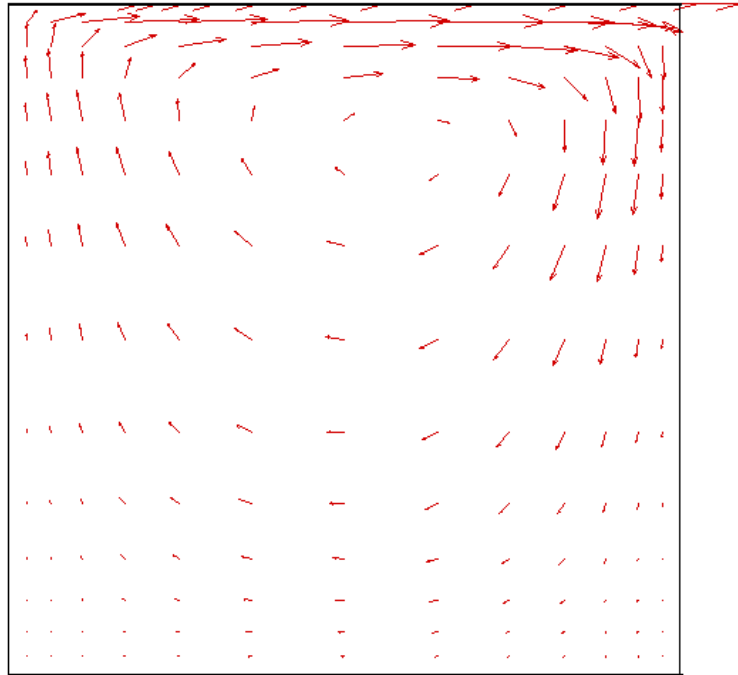


Figura 5.12 - Escoamento numa cavidade: vetores velocidade no plano de simetria

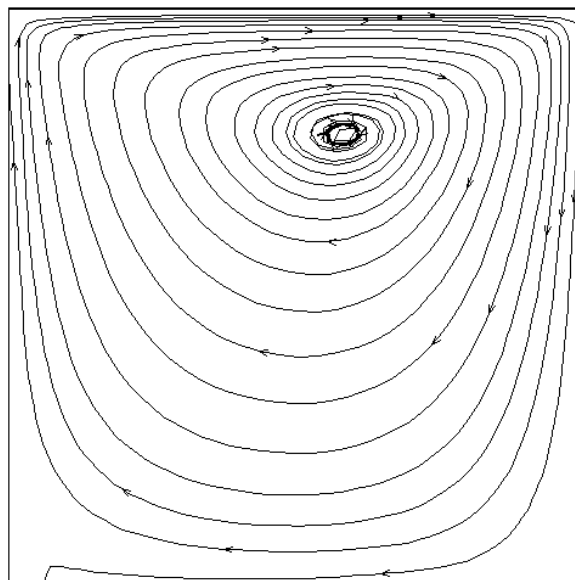


Figura 5.13 - Escoamento numa cavidade: linhas de corrente no plano de simetria

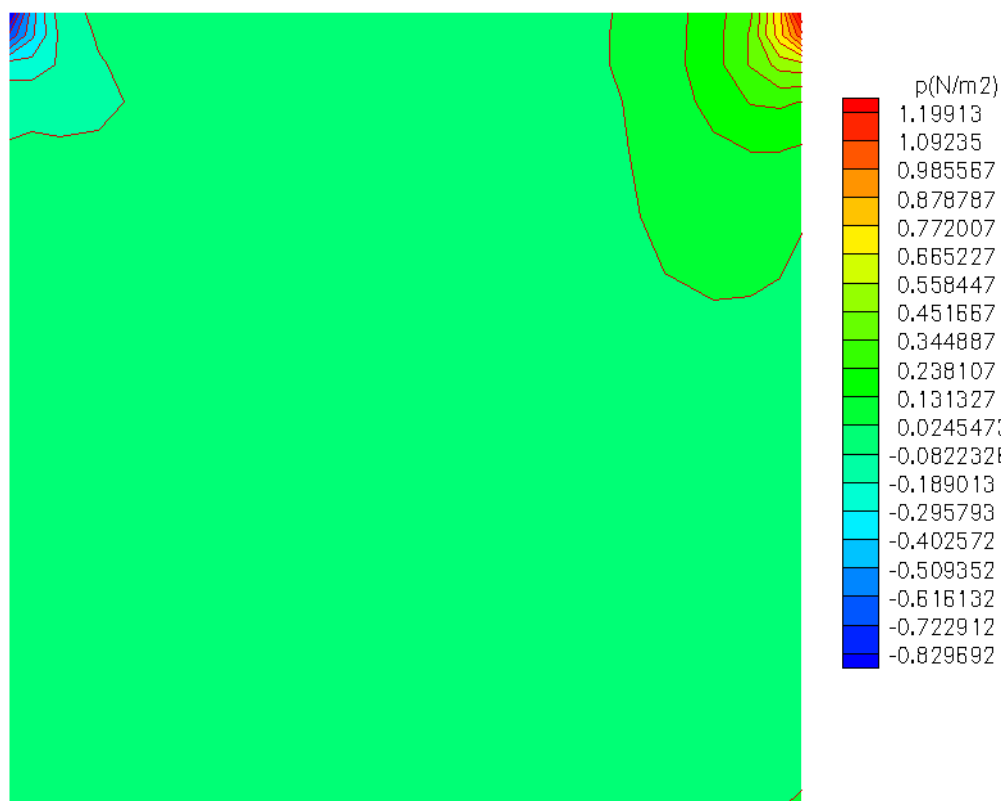


Figura 5.14 - Escoamento numa cavidade: isobáricas em $t= 5$ seg.

5.3.2 - Escoamento num canal com alargamento brusco da seção transversal

Analisa-se neste exemplo o escoamento num canal, conforme indicado na figura **5.15**, de um fluido viscoso com as seguintes propriedades: $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0,15 \text{ N.s/m}^2$ e $c = 200 \text{ m/s}$; a malha de elementos finitos empregada (constituída por 43520 elementos e 47883 nós), é ilustrada na figura **5.16**.

O número de Reynolds (igual a 648) é baseado na velocidade máxima de entrada e na altura do canal na entrada. Como condições de contorno empregou-se na entrada um perfil de velocidades ($v_1 = v(y,z)$, $v_2 = v_3 = 0$) correspondente ao escoamento plenamente desenvolvido num duto retangular, conforme é indicado na figura **5.15**, e velocidades nulas nas paredes laterais, superior e inferior, sendo a saída livre. A expressão para $v_1 = v(y,z)$ foi obtida do texto de White [118] (capítulo 3, páginas 120 e 121).

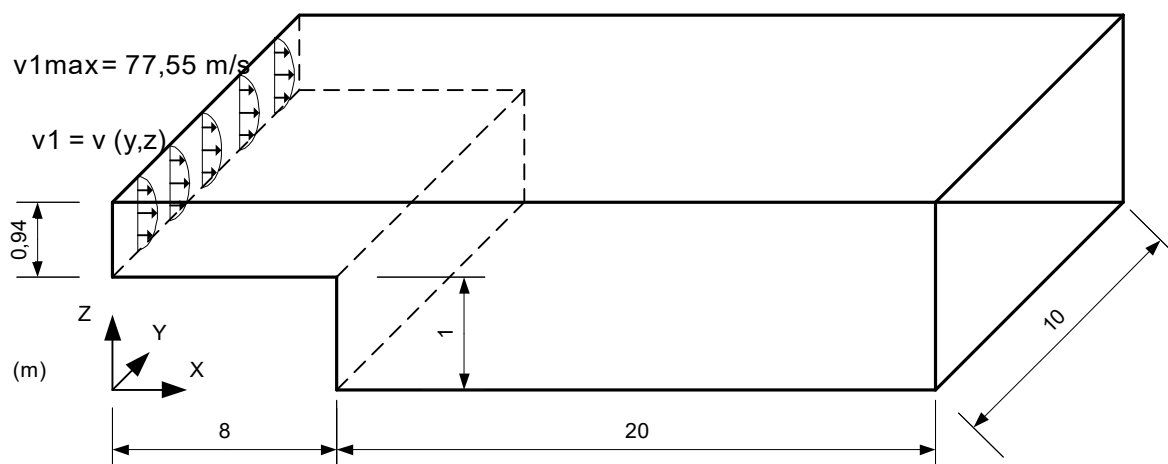


Figura 5.15 - Escoamento num canal: geometria e perfil de velocidade de entrada
Obs.: O esquema apresentado não está em escala.

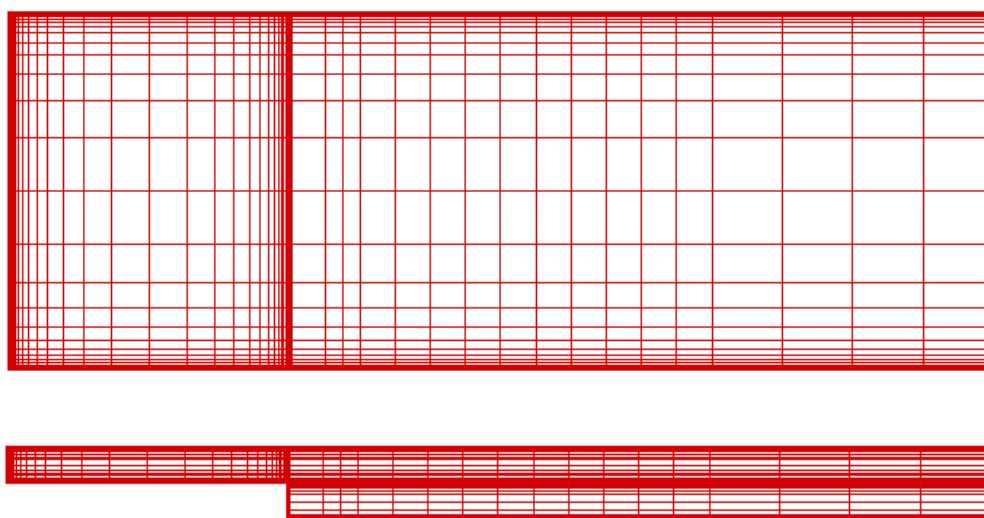
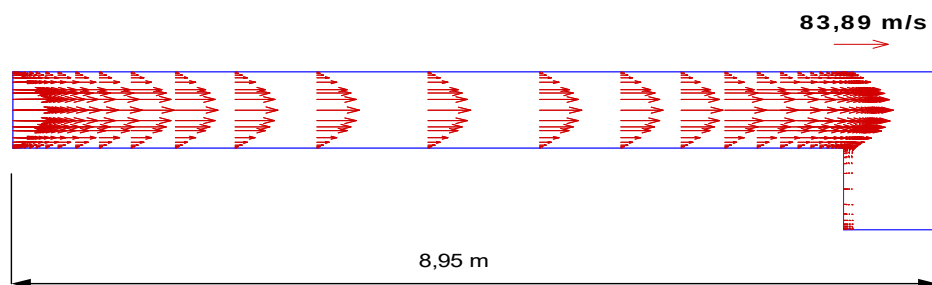


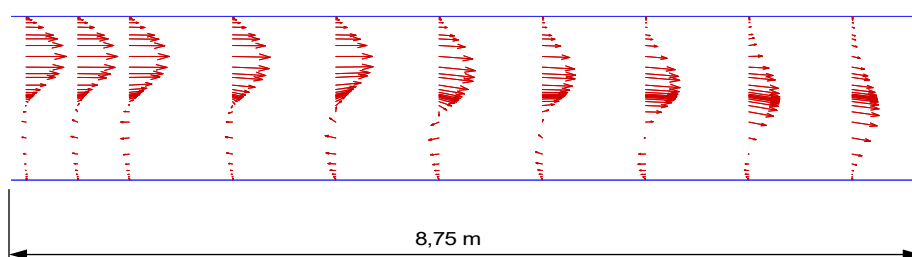
Figura 5.16 - Escoamento num canal: vistas superior e lateral da malha de elementos finitos

As figuras 5.17a, 5.17b e 5.17c apresentam, respectivamente, os resultados para vetores velocidade no plano vertical de simetria ($y=5,00 \text{ m}$) obtidos em $t=1,11 \text{ seg.}$, quando o

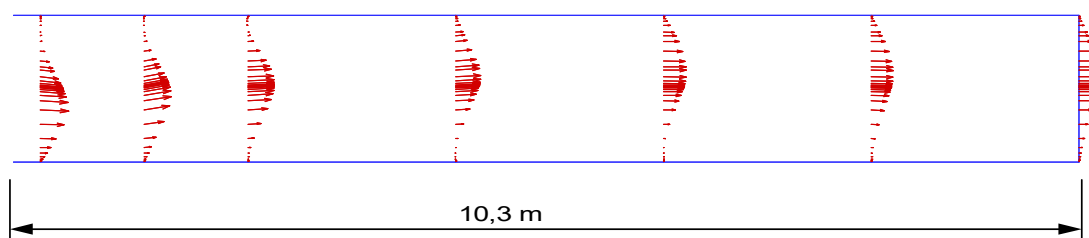
regime estacionário já foi atingido. Para efeito de melhor visualização, o domínio foi dividido em três partes: entrada, intermediária e saída, conforme pode-se observar nas figuras citadas.



a)



b)



c)

Figura 5.17 - Escoamento num canal: vetores velocidade no regime estacionário:

a) zona de entrada; b) zona intermediária; c) zona de saída

A seguir a figura **5.18** apresenta as linhas de corrente em $t=1,11$ seg. na zona intermediária, permitindo a observação mais clara de como se desenvolve o escoamento, bem como das regiões onde ocorre recirculação.

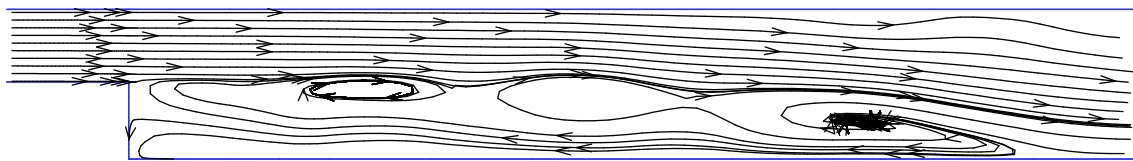


Figura 5.18 - Escoamento num canal: linhas de corrente em $t= 1,11$ seg.

Analisando as cotas das figuras anteriores, pode-se verificar que o comprimento de recolamento adimensionalizado pela diferença entre altura do canal na saída e na entrada fica entre 9 e 9,5; ficando abaixo da relação mencionada por Williams e Baker [119] para este número de Reynolds. A causa provável desta diferença é o truncamento que foi feito no comprimento total do domínio em relação à referência citada.

5.4 - ANÁLISE DE PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

5.4.1 - Escoamento do ar em torno de uma bandeira

O movimento de uma bandeira numa corrente de ar é idealizado de acordo com a figura **5.19** como um problema plano. As dimensões do domínio e as condições de contorno, assim como as propriedades do material da bandeira e do fluido são indicados na mesma

figura, onde também é indicada a variação com o tempo da velocidade de entrada ao domínio $V_{\infty T}$.

Uma vista superior da malha de hexaedros é indicada na figura 5.20 ; adotou-se uma profundidade de 0,025 m que é discretizada com um elemento apenas. A malha está composta por 2346 nós e 990 elementos , incluindo os elementos de fluido e da estrutura (a qual contém apenas 40 elementos, com 2 elementos na espessura), que estão ressaltados na figura.

Para a estrutura e o fluido foram utilizados os enfoques dos capítulos 2, 3 e 4 respectivamente. Para a estrutura foi empregada uma descrição Lagrangeana, enquanto que o domínio do fluido foi dividido numa região com uma descrição Lagrangeana e uma região com uma descrição Arbitrária Lagrangeana- Euleriana, conforme indicado na figura 5.20.

Observe-se que para iniciar o movimento a bandeira foi colocada com uma leve inclinação em relação à direção horizontal do escoamento (0,05 m de deflexão na extremidade da bandeira).

Argyris et al. [8] apresentaram um problema similar usando elementos quadriláteros bilineares com uma formulação de penalidade para o fluido e elementos de viga para a estrutura. Não são fornecidas informações em relação à área da seção transversal da viga, nem a respeito da espessura da bandeira. Em função dos dados do módulo de elasticidade e da massa específica do nylon e dos dados da citada referência para E_{RSR} e ρ_{RSR} , onde s_R é a espessura da bandeira, E_R o módulo de elasticidade e ρ_R a massa específica, concluiu-se que $s_R = 6 \times 10^{-4}$ m.

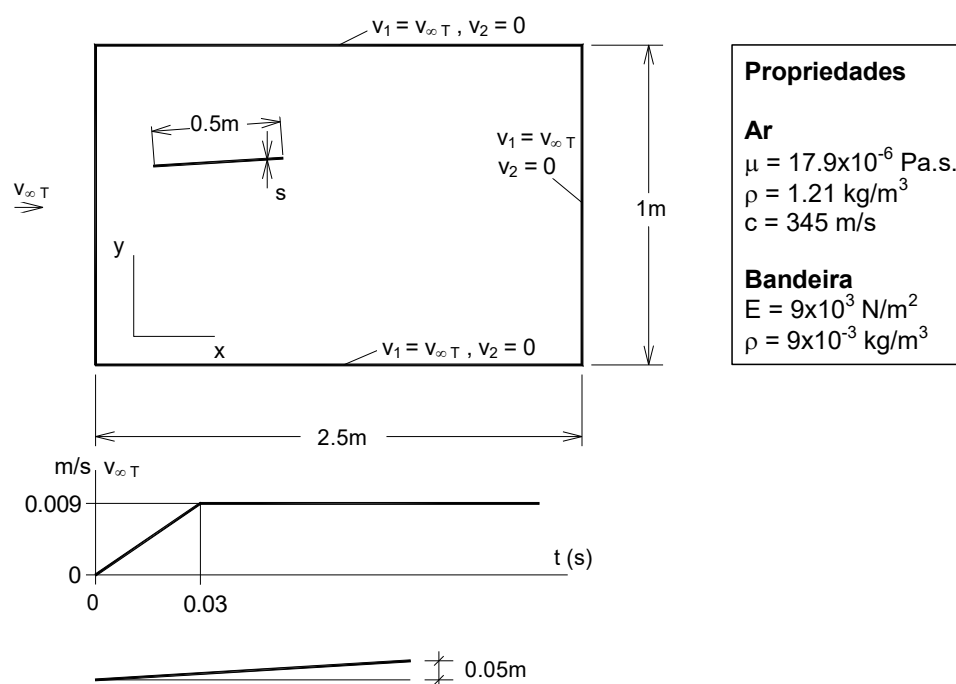


Figura 5.19 - Escoamento em torno de uma bandeira: geometria, condições de contorno, propriedades, variação temporal da velocidade de entrada e inclinação inicial da bandeira

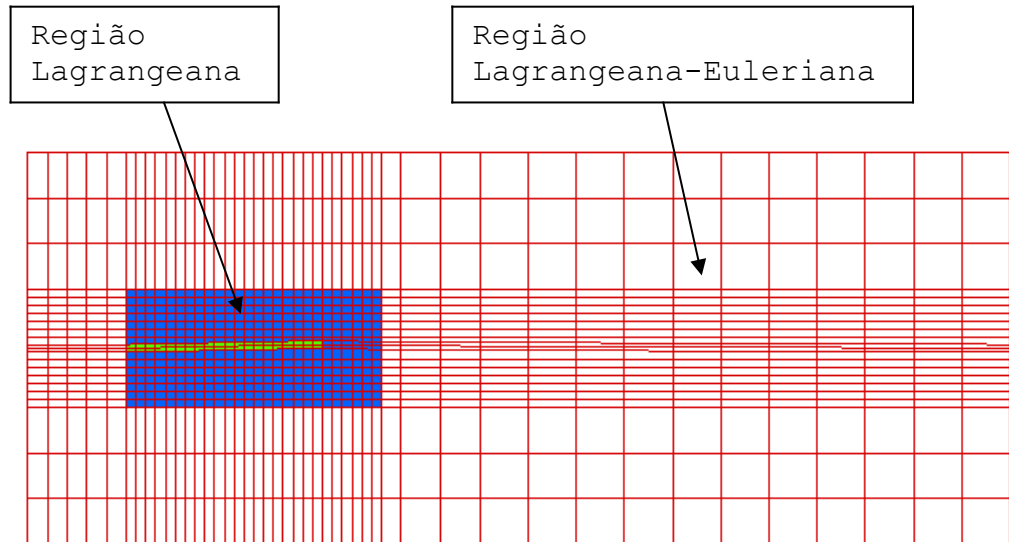


Figura 5.20 - Escoamento em torno de uma bandeira: vista superior da malha de hexaedros

Para evitar intervalos de tempo muito pequenos na estrutura (que é resolvida por um esquema explícito) adotou-se neste trabalho $s_T = 2 \times 10^{-2}$ m, ou seja 100/3 vezes maior que o valor suposto para a referência. Assim, o intervalo de tempo Δt adotado foi de 1 μ seg.

O módulo de elasticidade neste trabalho, E_T , foi calculado a partir da consideração de que as rigidezes à flexão por unidade de profundidade da referência e deste trabalho são iguais, ou seja que

$$E_R s_R^3 = E_T s_T^3 \Rightarrow E_T = \frac{E_R s_R^3}{s_T^3} = 9 \times 10^3 \text{ N/m}^2$$

Para preservar a velocidade do som na estrutura a relação entre o módulo de elasticidade e a massa específica foi mantida, ou seja

$$\rho_T = \frac{\rho_R E_T}{E_R} = 9 \times 10^{-3} \text{ N s}^2 / \text{m}^4 = 9 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$$

Para preservar o número de Reynolds, dado por

$$R_e = \frac{V_{\infty R} S_R \rho_R}{\mu} = \frac{V_{\infty T} S_T \rho_T}{\mu}$$

decidiu-se dividir $V_{\infty R}$, que é velocidade do escoamento na região não perturbada, por 100/3, que corresponde à relação S_T/S_R .

Desta forma,

$$V_{\infty T} = V_{\infty R} \frac{S_R}{S_T} = 9 \times 10^{-3} \text{ m/s}$$

Para preservar a mesma aceleração na primeira parte da curva (que é aproximadamente linear), tomou-se $t = 0,03$ seg. como tempo final deste trecho ao invés de $t = 1$ seg., como adotado na referência [8]. Observe-se também que as frequências naturais da bandeira neste trabalho são maiores que as da referência [8] e que portanto a integração pode ser feita num período menor.

Na figura 5.21 apresenta-se um detalhe do campo de velocidades em $t = 0,5$ seg. numa região próxima à bandeira; neste instante o escoamento naquela região apresenta pouca perturbação e velocidades da mesma ordem de grandeza da velocidade de entrada.

Nas figuras 5.22, 5.23 e 5.24 são apresentadas malhas deformadas correspondentes aos tempos 1,32 seg., 1,34 seg. e 1,41 seg. (que foi a última configuração obtida antes do fim da análise, devido às deformações excessivas dos elementos de fluido), tendo novamente sido ressaltados os elementos pertencentes à bandeira. Estes padrões de deformação obtidos são consistentes com alguns que figuram na referência [8].

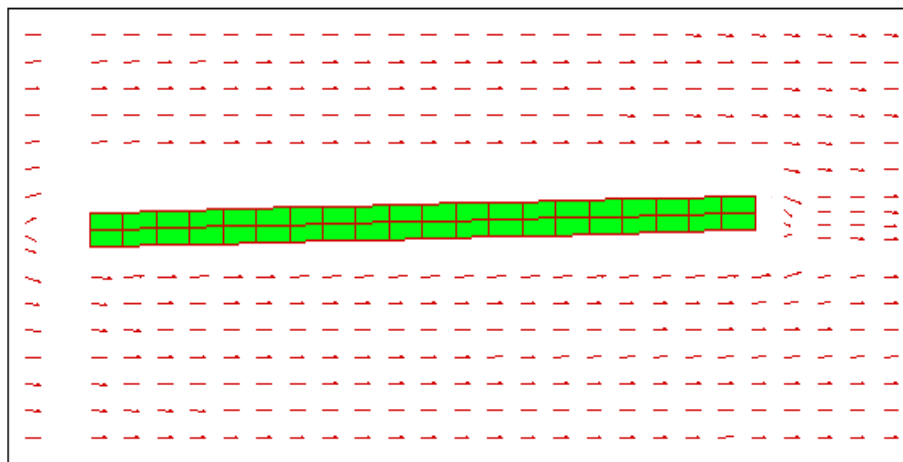


Figura 5.21 - Escoamento em torno de uma bandeira: campo de velocidades em $t=0,5$ seg.

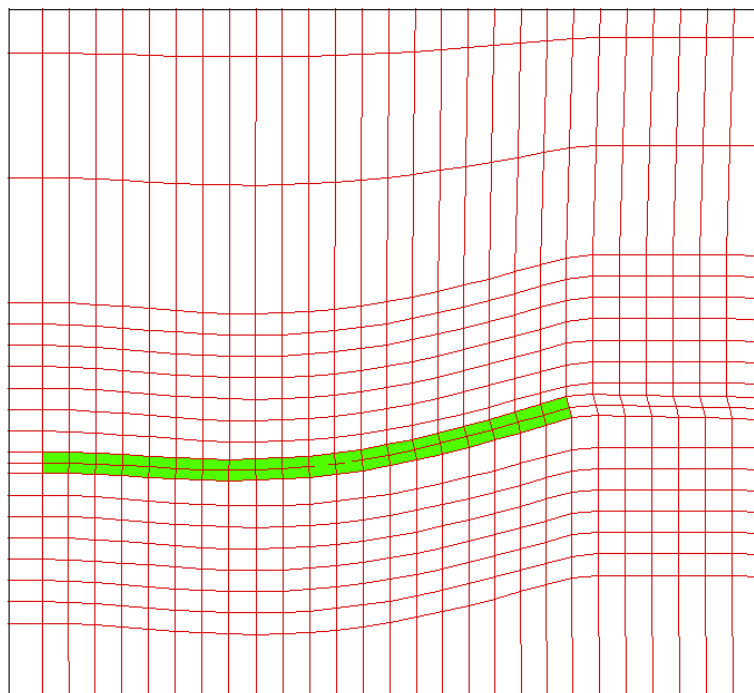


Figura 5.22 - Escoamento em torno de uma bandeira: detalhe da malha em $t=1,32$ seg.

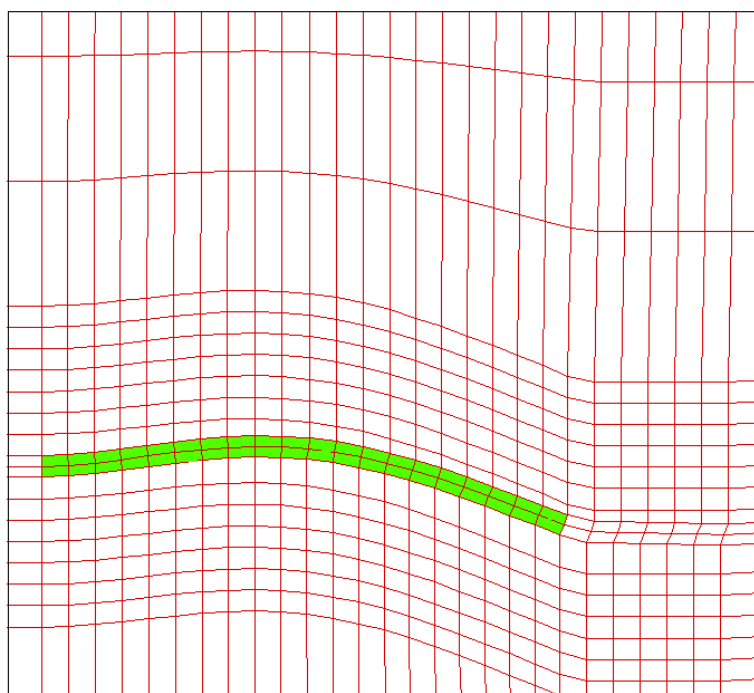


Figura 5.23 - Escoamento em torno de uma bandeira: detalhe da malha em $t= 1,34$ seg.

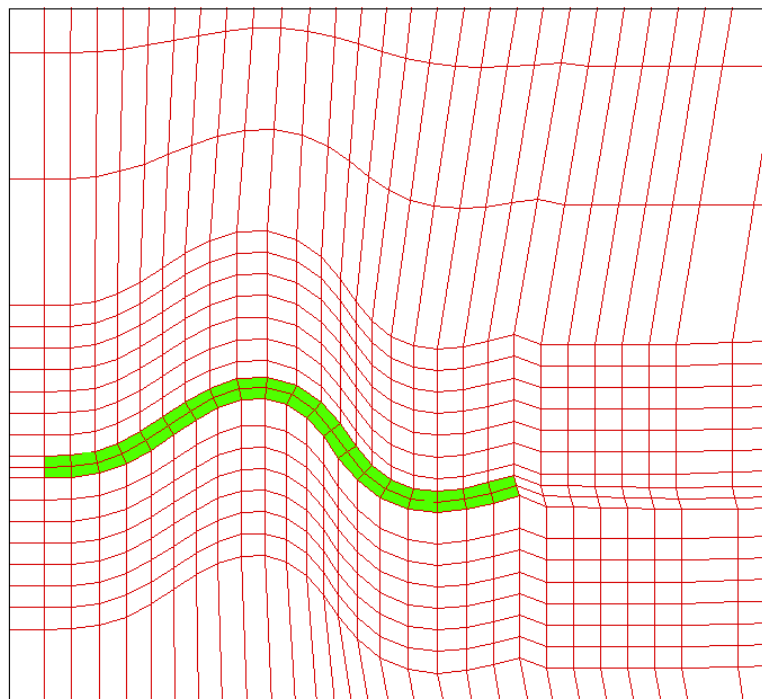


Figura 5.24 - Escoamento em torno de uma bandeira: detalhe da malha em $t= 1,41$ seg.

5.4.2 - Escoamento de ar interagindo com uma membrana inflada

Considera-se o caso de um escoamento de ar em torno de uma membrana flexível de formato semicilíndrico de 10 m de raio. As propriedades físicas do ar e da membrana, assim como a descrição do problema estão dadas na figura 5.25 . A malha de elementos finitos é apresentada na figura 5.26 , sendo composta de 3430 nós e 1632 elementos, dos quais 96 correspondem à membrana; adotou-se uma profundidade de 1 m discretizada com um elemento apenas e foram empregados dois elementos para discretizar a espessura da membrana. Um exemplo similar é apresentado na referência [8].

A partir das mesmas considerações feitas no exemplo anterior, conclui-se que a espessura da membrana, s_R , na referência [8] é de 3×10^{-3} m. Neste trabalho adotou-se $s_T = 0,10$ m, ou seja $s_T/s_R = 100/3$. Foi preservada a rigidez membranal da referência, ou seja

$$E_R s_R = E_T s_T \Rightarrow E_T = \frac{E_R s_R}{s_T} = 1 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

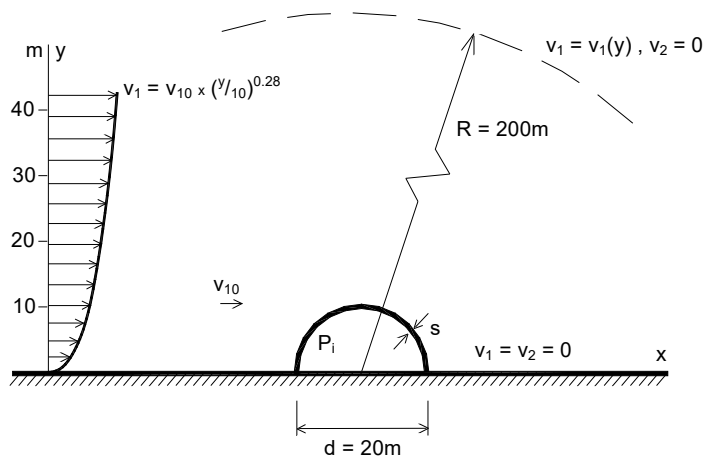
Também foi mantida a relação entre o módulo de elasticidade e a massa específica, ou seja

$$\rho_T = \frac{\rho_R E_T}{E_R} = 30 \text{ N s}^2 / \text{m}^4 = 30 \text{ kg/m}^3$$

A velocidade final do escoamento de ar a 10 m de altura foi adotada como sendo de 2,8 m/s, ou seja 10 vezes menor que a da referência, em função da flexibilidade da estrutura que foi adotada neste trabalho. Entretanto, para preservar o número de Reynolds, foi dividida por 10 a viscosidade da referência [8].

Para manter a mesma aceleração nos intervalos de tempo onde a velocidade varia aproximadamente em forma linear, diminuiu-se o período em 10 vezes. Deve-se lembrar que aqui também as frequências naturais da estrutura são maiores que as da referência [8] e, portanto, o período é menor. O intervalo de tempo Δt adotado foi de 10 μseg .

A pressão de inflação na membrana é tomada como sendo $p_i = 2,85$ Pa, ou seja sessenta por cento da pressão de estagnação do ar à velocidade de 2,8 m/s. Deve-se mencionar também que a massa de ar no interior da membrana foi considerada através de um acréscimo na massa específica do material que compõe a membrana. Valem aqui as mesmas considerações em relação aos enfoques para resolver o problema e aos tipos de descrição de movimento utilizados que foram feitas no exemplo anterior.



Propriedades

Ar

$$\mu = 17.9 \times 10^{-7} \text{ Pa.s.}$$

$$\rho = 1.21 \text{ kg/m}^3$$

$$c = 345 \text{ m/s}$$

Membrana

$$E = 1 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

$$\rho = 30 \text{ kg/m}^3$$

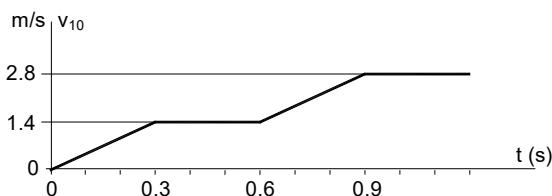


Figura 5.25 - Escoamento de ar interagindo com uma membrana: geometria, condições de contorno, propriedades e variação temporal da velocidade de entrada

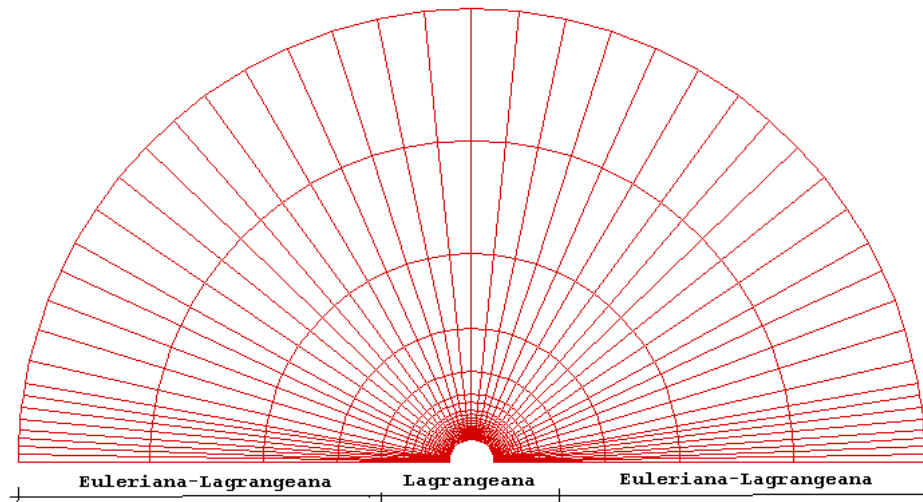


Figura 5.26 - Escoamento de ar interagindo com uma membrana: vista frontal da malha de hexaedros

As figuras seguintes permitem acompanhar as severas distorções sofridas pelos elementos da região Lagrangeana e o desenvolvimento das linhas de corrente e dos campos de pressões. A figura 5.27 apresenta um detalhe da configuração deformada da malha em $t=0,9$ seg. A figura 5.28, por sua vez, apresenta um detalhe das linhas de corrente para o mesmo tempo, enquanto que a figura 5.29 apresenta isolinhas de pressão, sendo que as linhas tracejadas indicam pressões negativas.

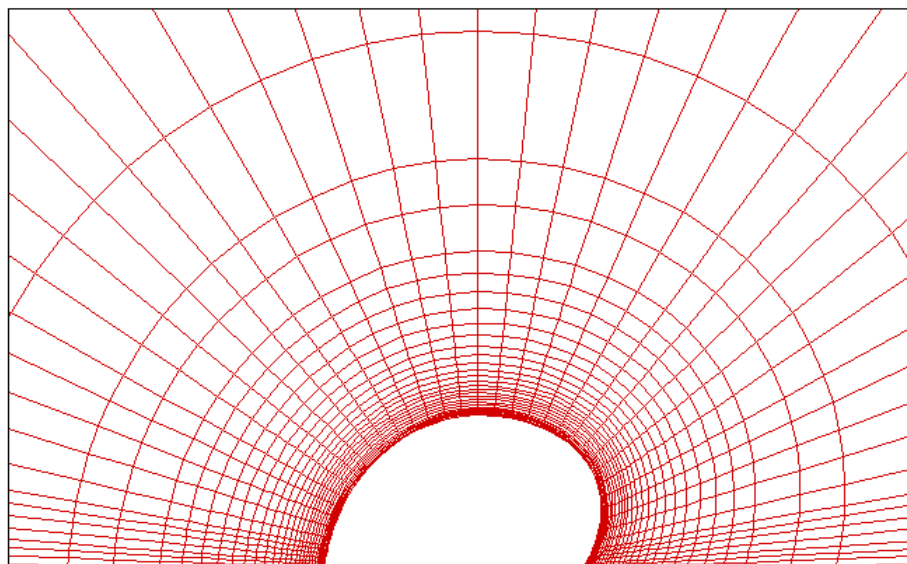


Figura 5.27-Escoamento de ar interagindo com uma membrana: detalhe da malha em $t=0,9$ s.

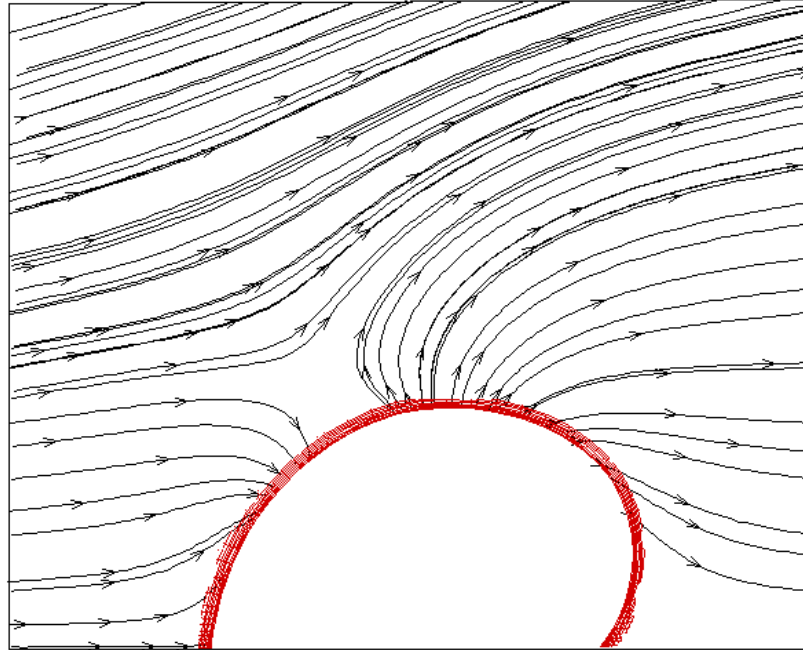


Figura 5.28 - escoamento de ar interagindo com uma membrana: linhas de corrente em $t=0,9$ seg.



Figura 5.29 - Escoamento de ar interagindo com uma membrana: isolinhas de pressão em $t=0,9$ seg..

As figuras 5.30 e 5.31 apresentam, respectivamente, um detalhe da malha em $t=1,15$ seg. e as linha de corrente para o mesmo tempo numa região próxima à membrana, enquanto que a figura 5.32 apresenta isolinhas de pressão para o mesmo tempo.

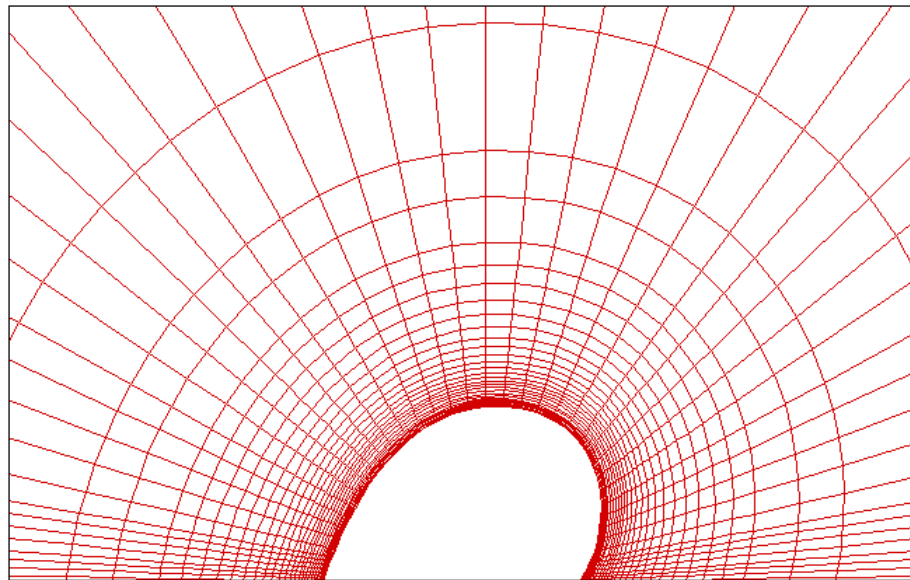


Figura 5.30 - Escoamento de ar interagindo com uma membrana: detalhe da malha em $t=1,15$ seg.

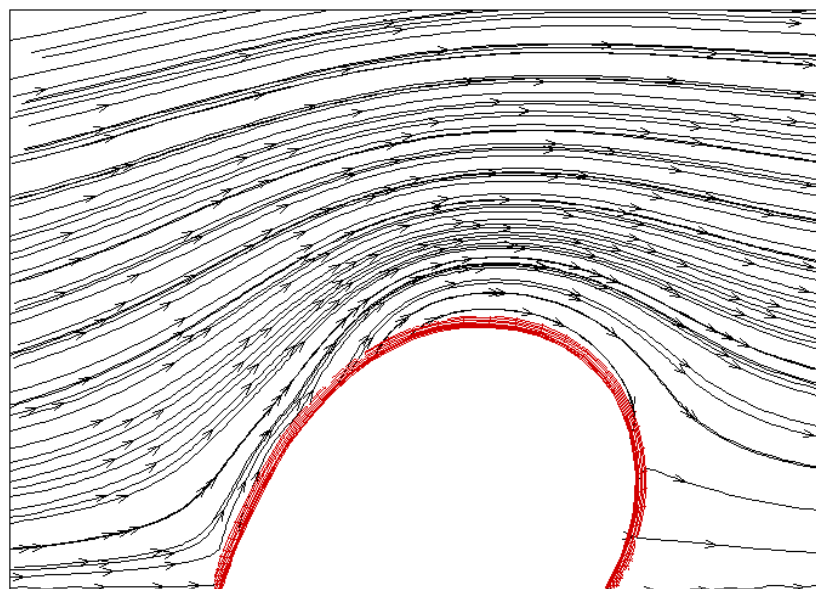


Figura 5.31 - Escoamento de ar interagindo com uma membrana: linhas de corrente em $t = 1,15$ seg.

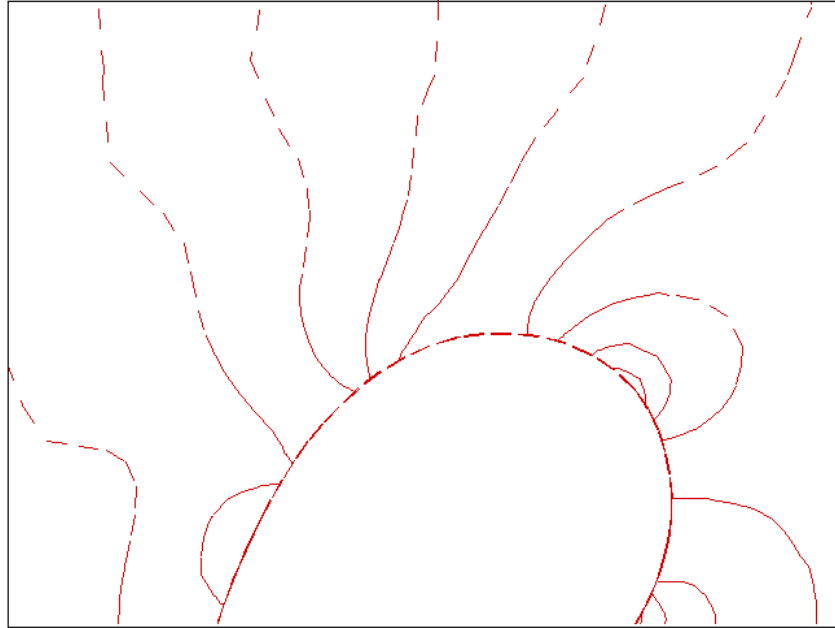


Figura 5.32 - Escoamento de ar interagindo com uma membrana: isolinhas de pressão em $t = 1,15$ seg..

A seguir as figuras **5.33**, **5.34** e **5.35** apresentam a mesma seqüência anterior de gráficos para o tempo de 1,9 seg.

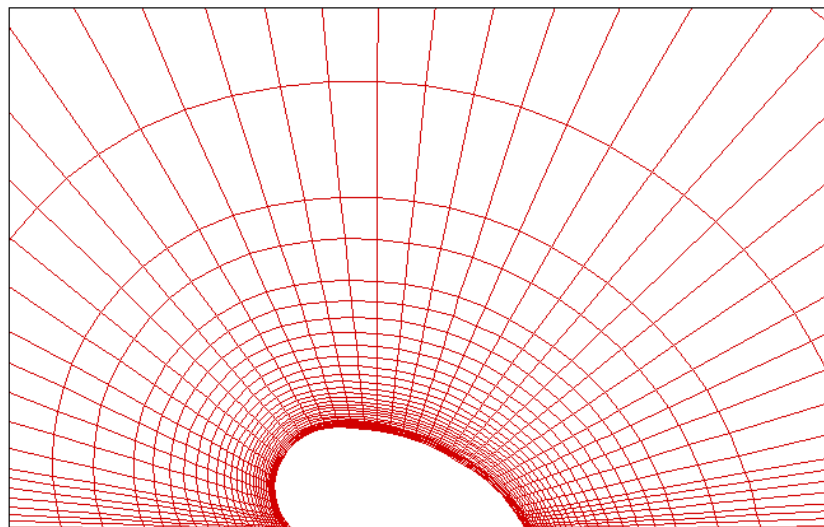


Figura 5.33 - Escoamento de ar interagindo com uma membrana: detalhe da malha em $t = 1,9$ seg

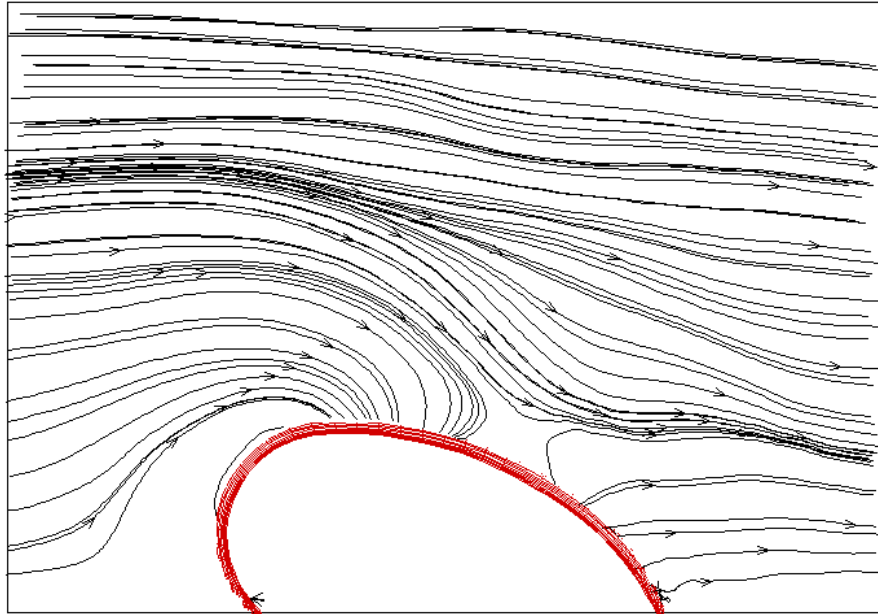


Figura 5.34 - Escoamento de ar interagindo com uma membrana :linhas de corrente em $t = 1,9$ seg.

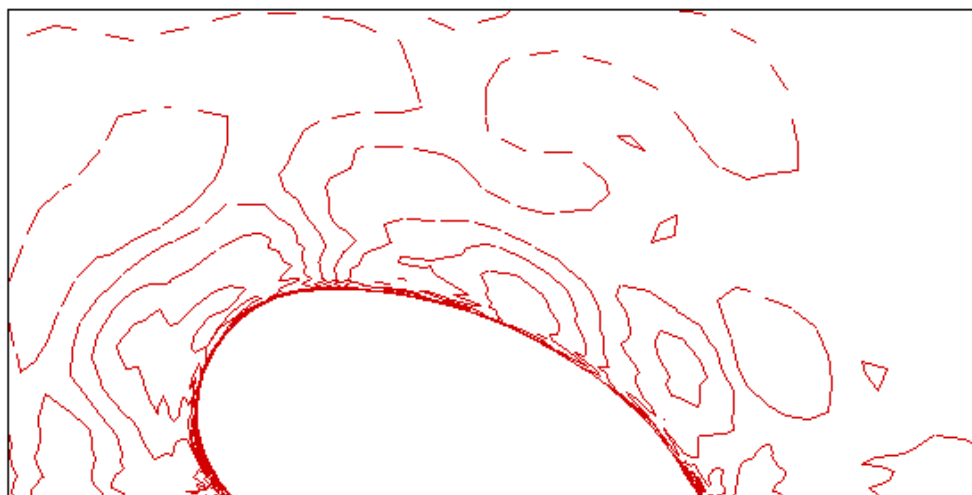


Figura 5.35 - Escoamento de ar interagindo com uma membrana: isolinhas de pressão em $t=1,9$ seg..

Finalmente, as figuras 5.36 , 5.37 e 5.38 apresentam detalhes da malha, das linhas de corrente e isolinhas de pressão em $t=2,35$ seg. O final da simulação, devido à incapacidade da malha de acompanhar a excessiva deformação da estrutura, ocorreu em $t= 2,5$ seg..

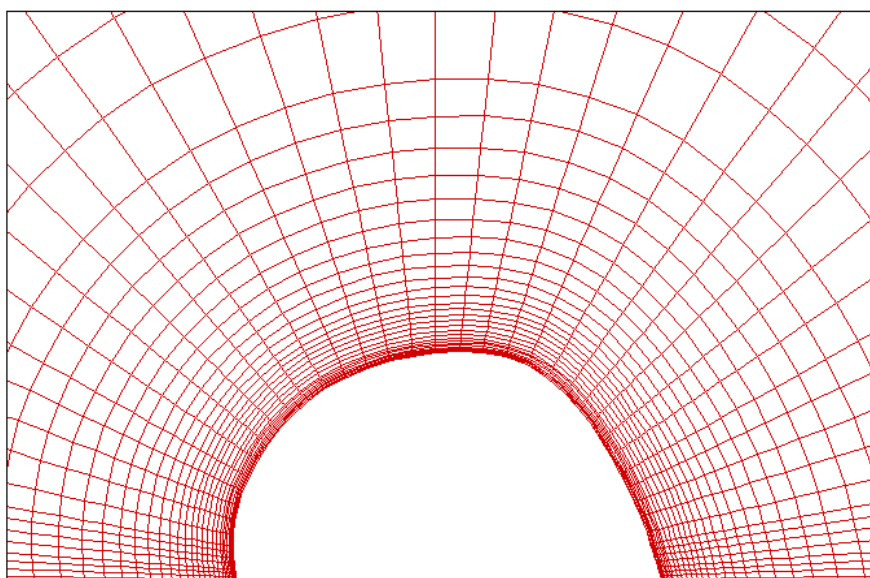


Figura 5.36 - Escoamento de ar interagindo com uma membrana: detalhe da malha em $t=2,35$ seg.

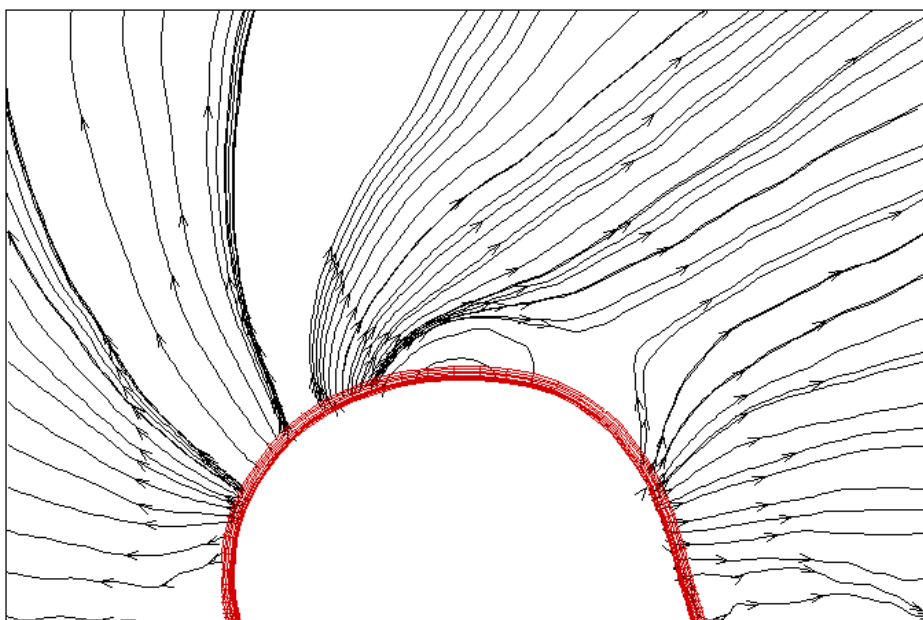


Figura 5.37 - Escoamento de ar interagindo com uma membrana: linhas de corrente em $t = 2,35$ seg

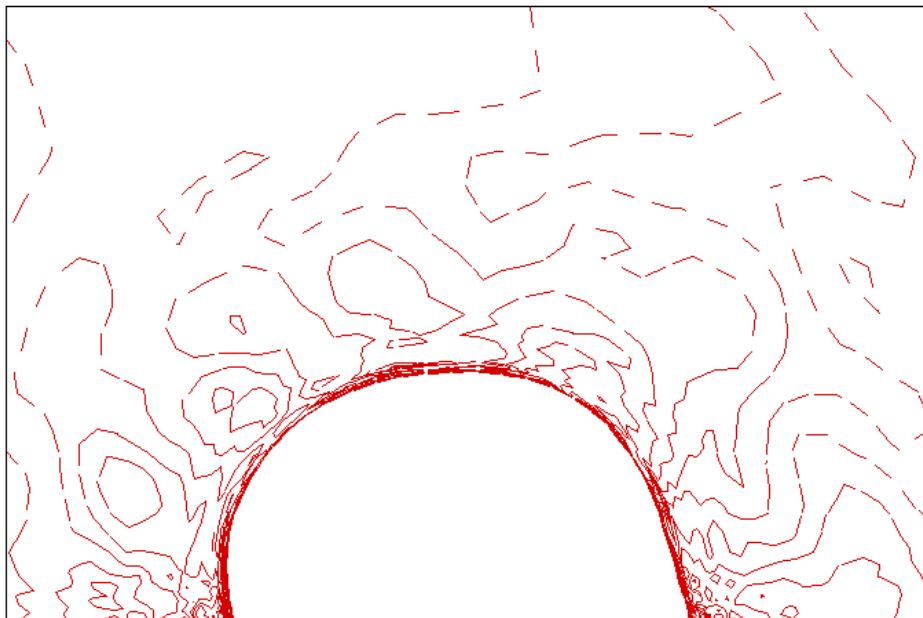


Figura 5.38 - Escoamento de ar interagindo com uma membrana: isolinhas de pressão em $t = 2,35$ seg..

Resulta um tanto difícil reproduzir o exemplo da referência [8] e comparar seus resultados com os apresentados neste trabalho, devido a diversas causas, entre as quais pode-se mencionar as seguintes:

- a) a membrana é tratada na citada referência através de um elemento de viga, porém não é dada nenhuma informação a respeito de sua formulação, nem da seção transversal da mesma;
- b) embora seja dado o valor do produto do módulo de Young e da espessura da membrana, valor que foi preservado neste trabalho, não existe informação suficiente que permita, ao mesmo tempo, preservar a rigidez à flexão;
- c) apesar do número de Reynolds da referência [8] ter sido mantido, considerando o escoamento em torno de um corpo rígido, a natureza altamente não linear da interação do

fluido com uma estrutura muito flexível (que também foi tratada de uma forma diferente com relação ao trabalho de Argyris et al. [8]) deixa dúvidas com respeito a se as características do problema foram preservadas reduzindo a velocidade do vento e a viscosidade do fluido e mantendo a relação entre a pressão de inflação e a velocidade do vento a 10 m de altura.

Considera-se que a melhor forma de validar um problema deste tipo seria comparando os resultados numéricos obtidos com os que resultam de um modelo experimental.

Apresenta-se na figura 5.39 alguns dados relativos à performance vetorial do programa desenvolvido, obtidos através da ferramenta de análise de performance hpm [35], disponível no supercomputador. Destacam-se entre os dados apresentados o número de operações de ponto flutuante por segundo (em torno de 800 Mflops), e o comprimento médio dos vetores para todas as operações (em torno de 126) que estão bastante próximos dos valores considerados ótimos, indicando o bom nível de vetorização do código.

CPU seconds	55336.02
Million inst/sec (MIPS)	36.72
Avg. Clock periods/inst :	12.26
% CP not issuing	92.22
Inst.buffer fetches/sec	0.40M
Floating ops/sec	799.95M
Vector Floating ops/sec	799.18M
CPU mem. References/sec	833.45M
Avg CP/mem. Reference	29
VEC mem. References/sec	831.62M
type of vector operation	ops/CPUsec
Vector Logical	53.44M
Vector Integer Add	26.25M
Vector Floating Multiply	420.77M
Vector Floating Add	374.96M
Vector Floating Reciprocal	3.45M
Vector Memory Read	634.91M
Vector Memory Write	196.71M
Average Vector Length for all Operations	126.45

Figura 5.39 - Escoamento de ar interagindo com uma membrana: relatório de performance vetorial

6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS NESTA ÁREA

No capítulo anterior foram resolvidos em primeiro lugar, e em forma separada, problemas relativos à Dinâmica dos Fluidos e Dinâmica das Estruturas. Em ambos os casos os códigos desenvolvidos tiveram muito bom desempenho, tanto em termos de resultados quanto no que se refere a sua performance. Em relação a este último aspecto, verificou-se que os níveis de vetorização obtidos em todos os casos em que foi utilizado o CRAY T-94 do Centro de Supercomputação da UFRGS (CESUP/UFRGS) foram excelentes, superando os 800 Mflops.

Os esquemas adotados para analisar escoamentos de fluidos viscosos incompressíveis e o comportamento dinâmico das estruturas foram implementados visando resolver problemas de interação fluido-estrutura, de tal forma que o acoplamento entre ambos os meios não implicasse em modificações substanciais dos códigos individuais e que esse acoplamento fosse do tipo forte ou monolítico. Isto permitiu que tanto o domínio do fluido como o da estrutura fossem analisados em forma simultânea, como se estivesse tratando-se de um domínio único, e não de uma maneira seqüencial (como é o caso da maioria dos esquemas para resolver problemas acoplados). Os exemplos apresentados, embora bidimensionais, foram analisados com um código com capacidade para resolver problemas tridimensionais e mostram a potencialidade do mesmo para abordar problemas mais complexos de interação fluido-estrutura. Também neste caso o desempenho em relação à vetorização foi excelente, superando os 800 Mflops.

Algumas das características interessantes nos códigos desenvolvidos, e que podem ser mencionadas, são as seguintes:

- a) Tanto para o fluido como para a estrutura foram usados elementos hexaédricos trilineares de 8 nós;
- b) As matrizes dos elementos para o código que analisa escoamentos foram obtidas de forma analítica; para avaliar a matriz Jacobiana, sua inversa e seu determinante foi empregado um ponto de integração. Para analisar o escoamento foi utilizada uma formulação baseada na hipótese de que o fluido é levemente compressível. Para integrar no tempo emprega-se o esquema explícito de Taylor-Galerkin;

- c) No caso da estrutura, a integração no tempo foi também realizada através do método explícito de Taylor-Galerkin, que é auto-iniciável e compatível com o esquema de integração no tempo utilizado na análise do escoamento. A não linearidade geométrica foi incluída utilizando-se o tensor de taxas de tensão de Truesdell com uma formulação co-rotacional. As matrizes de elemento foram obtidas com integração reduzida, utilizando uma matriz de estabilização para controlar os modos espúrios (“hourglass”) e o bloqueio (“locking”) volumétrico, membranal e de corte;
- d) A descrição Lagrangeana foi utilizada para analisar o comportamento dinâmico da estrutura; já o fluido foi analisado com uma descrição Lagrangeana e uma descrição arbitrária Lagrangeana-Euleriana; existindo a possibilidade de utilizar esta descrição apenas nas proximidades da estrutura e uma descrição Euleriana pura em regiões próximas à fronteira do domínio.

Como sugestões para trabalhos que futuramente venham a dar continuidade a esta linha de investigação podem ser citadas as seguintes :

- a) Utilização de métodos implícitos de integração no tempo para o sub-domínio estrutural, o que permitiria o uso de passos de tempo maiores sem a necessidade de observar a condição de estabilidade;
- b) Utilização de passo de tempo variável para diversos grupos de nós e elementos com o emprego de subciclos para possibilitar que esses grupos de nós e elementos tenham passos de tempo próximos a seus intervalos de tempo críticos;
- c) Investigação de estratégias mais sofisticadas para a movimentação da malha de forma a permitir a abordagem de problemas com múltiplas estruturas, o que não é possível com a estratégia atual;
- d) Investigar técnicas de adaptação de malhas, tanto para o domínio do fluido como para o da estrutura;
- e) Comparar os resultados obtidos com o programa de simulação numérica de problemas de interação fluido-estrutura com resultados experimentais;
- f) Testar o comportamento da estrutura substituindo o tensor de taxas de Truesdell pelo tensor de Piola-Kirchoff (utilizando-se neste caso uma descrição Lagrangeana total, no lugar da descrição Lagrangeana atualizada empregada neste trabalho);
- g) Analisar estruturas imersas constituídas por materiais compósitos;
- h) Testar um esquema semi-implícito para a análise dos escoamentos de forma a permitir o emprego de intervalos de tempo maiores;

- i) O desenvolvimento de programas de pré-processamento que permitam checar os dados de entrada na busca de qualquer inconsistência seria de grande importância, especialmente no caso de problemas de maior porte onde este controle se torna bastante difícil;
- j) Inclusão de um modelo de turbulência, como, por exemplo, Simulação Direta de Grandes Vórtices (“Large Eddy Simulation – LES”), para abordar problemas com altos números de Reynolds;
- k) Utilizar o código para analisar problemas de grande porte e com geometrias complexas;
- l) Incluir a equação de energia para tratar problemas não isotérmicos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ABAQUS **Standard User's Manual** Version 5.8, 1998, HIBBITT, KARLSSON AND ORENSEN, INC. 1080, Main Street, Pawtucket, RI 02860-4847.
2. ADINA – **User's Manual**, ADINA R&D INC., 71 Elton Avenue, Watertown, Massachussetts (MA 02472), USA.
3. AHMAD, S.; IRONS, B. M. ; ZIENKIEWICZ, O. C. Analysis of thick and thin shells structures by curved finite elements. **Int. J. Num. Meth. Engng.**, V. 2, p. 419-451, 1970.
4. ALVES, J. L. D. Análise transiente de grandes deformações em computadores de arquitetura vetorial/paralela. **Tese de Doutorado**; COPPE, UFRJ, RJ (Brasil), 1991.
5. ANSYS **User's Manual** Revision 5.0, 1992 SWANSON ANALYSIS SYSTEMS, INC. P. O. box 65, Johnson Road, Houston, PA 15342-0065.
6. ANSYS/FLOTRAN **User's Manual** Revision 5.0, 1992, SWANSON ANALYSIS SYSTEMS, INC. P. O. BOX 65, Johnson Road, Houston, PA 15342-0065.
7. APPA, K. Finite surface spline. **J. of Aircraft**, V. 26, p. 495-496, 1989.
8. ARGYRIS, J. H.; DOLTSINIS, J. St.; FISCHER, H.; WÜSTENBERG, H. Τα παντα ρει **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.**, V 51, p. 289-362, 1985.
9. ARON, H. **J. f. Math. (Crelle)**, Bd. 78, 1874.
10. BATHE, K. J.; OZDEMIR, H. ; WILSON, E. L., **Static and Dynamic Geometric and Material Nonlinear Analysis**, Report No. UCSESM 74-4, University of California at Berkeley (USA), 1974.
11. BATHE, K-J.; NITIKITPAIBOOM, C.; WANG, X. A mixed displacement-based finite element formulation for acoustic fluid-structure interaction problems. **Computers & Structures**, V. 56, p. 225-237, 1995.
12. BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1996.
13. BATINA, J. T.; BENNET, R. M.; SEIDAL, D. A.; CUNNINGHAM, S. R.; BLAND, S. R. Recent advances in transonic computational aeroelasticity. **Computers & Structures**, V. 30, p. 29-37, 1988.
14. BATINA, J. T. Unsteady Euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes. **AIAA J.**, V. 28, p. 1381-1388, 1990.
15. BELYTSCHKO, T.; SCHUMANN, U. Fluid-Structure integrations in light water reactor systems. **Nuclear Engng Design**, V 60, p. 173-195 (1980).
16. BELYTSCHKO, T. Correction of article by D. P. Flanagan and T. Belytschko. **Int. J. Num. Meth. Engng.** V. 19, p. 467-468, 1983.

17. BELYTSCHKO, T.; ONG, J. S-J.; LIU, W. K. ; KENNEDY, J. M. Hourglass control in linear and nonlinear problems. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.**, V. 43, p. 251-276, 1984.
18. BELYTSCHKO, T.; LIN, J. I. ; TSAY, C. S. Explicit algorithms for the nonlinear dynamics of shells. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.**, V 42 p. 225-251, 1984.
19. BELYTSCHKO, T. ; LIU, W. K.; ONG, J. S. J. ; LAM, D. Implementation and application of a 9-node Lagrange-shell element with spurious mode control. **Computers & Structures**, V. 20, p. 121-128, 1985.
20. BELYTSCHKO, T.; STOLARSKY, H.; LIU, W. K. ; CARPENTER, N. ; ONG, J.S-J. Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng**, V. 51, p. 221-258, 1985.
21. BELYTSCHKO, T.; LIU, W. K. Computer methods for transient fluid-structure analysis of nuclear reactors. **J. Nuclear Safety**, V 26, p. 14-31, 1985.
22. BELYTSCHKO, T.; WONG, B. L. ; CHIANG, H. Y. Advances in one-point quadrature. **Int. J. Num. Meth. Engng**, V. 96, p. 93-107, 1992.
23. BELYTSCHKO, T. ; BINDERMAN, L. P. Assumed strain stabilization of the eight-node hexaedrical element. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng**. V. 105, p. 225-260, 1993.
24. BLOM, F. J. A monolithical fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.**, V. 167, p. 396-391, 1998.
25. BRILEY, W. R.; BUGGELM, R. C.; Mc DONALD, H. Solution of the incompressible Navier-Stokes equations using artificial compressibility methods. **Lectures notes in Physics** (ed. by Dwoyer, D. L.; Hussaini, M. Y.; Voigt, B.), V. 323, p. 156-160, Springer Verlag, Berlin, Germany, 1989.
26. BONET, J. ; PERAIRE, J. An alternate digital tree algorithm for geometric searching and intersection problems. **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, V. 31, p. 1-17, 1991.
27. BUNG, H.; CASADEI, F.; HALLEUX, J. P.; LEPAREUX, M. PLEXIS-3C: a computer code for fast dynamic problems in structures and fluids. In: **10th Int. Conf. In Struct. Mech. In Reactor Technology, SMIRT-10**, Anaheim (USA), August 14-19, 1989.
28. CASADEI, F.; HALLEUX, J. P. An algorithm for permanent fluid-structure interaction in explicit transient dynamics. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.**, V 128, p. 231-289, 1995.
29. CASADEI, F.; HALLEUX, J. P. Fluid Structure sliding in complex transient dynamic problems, **Euromech 306 Colloquium of Mechanics of Contact-Impact**, Prague, September, 7-9, 1993.
30. CASADEI, F.; HALLEUX, J. P. Automatic coupling of transient fluid/gas flows with deformable structures of arbitrary shapes. **3rd World Congress in Computational Mechanics**, Chiba (Japan), August 1-5, 1994.
31. CASADEI, F.; HALLEUX, J. P. On the treatment of fluid-structure interactions of the permanent type in PLEXIS-3C. **2nd Int. Conf. On Computational Structures Technology**, Athens, (Greece) August, 30 – September, 1, 1994.

32. CEBRAL, J. R.; LÖHNER, R; Conservative load projection and tracking for fluid-structure problems. **AIAA J.**, V 35, p. 687-692, 1997.
33. CHORIN, A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. **J. Comp. Physics**, V. 2, p. 12-26, 1967.
34. CHRISTON, M. A. A domain-decomposition message-passing approach to transient viscous incompressible flow using explicit time integration. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.**, V. 148 p. 329-352, 1997.
35. CRAY RESEARCH, INC.; **CF77 Optimization Guide**; SG-3773 6.0, 1993.
36. CRAY RESEARCH, INC.; **UNICOS Performance Utilities Reference Manual**; SR-2040 7.0, 1992.
37. DONEA, J.; FASOLLI-STELLA, P.; GIULIANI, S.; HALLEAUX. J. P.; JONES, A. V. The computer code EURO-DYN-AM (release 1) for transient dynamic fluid-structure interaction. **EUR Report 6751 EN**, 1980.
38. DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEAUX. J. P. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.**, V 33, p. 689-723, 1982.
39. DONEA, J. Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element methods. **Comp. Meth. In Transient Analysis** Chapter 10 (Ed. by Belytschko, T.; Hughes T. J. R.), North Holland, Amsterdam (Netherlands), 1983.
40. ENGELMAN, M.; SANI, R. L.; GRESHO, P. M.; BERCOVIER, M. Consistent vs. Reduced integration penalty methods for incompressible medias using general old and new elements. **Int. J. Num. Meth. Fluids.**, V. 2 p. 25-42, 1982.
41. FARHAT, C.; LIN, T. Y. Structure-attached corotational fluid grid for transient aeroelastic computations. **AIAA J.**, V 31, p. 597-599, 1993.
42. FARHAT, C.; LESSOINE, M.; LE TALLEC, P. Load and motion transfer algorithms for fluid-structure interaction problems with non-matching discrete interfaces: Momentum and energy conservation, optimal discretization and application to elasticity. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.** V 157, p. 95-114, 1998.
43. FELKER, F. F. Direct Solution of two-dimensional Navier-Stokes equations for static aeroelasticity problems. **AIAA J.**, V. 31, p. 148-153, 1993.
44. FLANAGAN, D. P. ; BELYTSCHKO, T. A uniform strain hexaedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control. **Int. J. Num. Meth. Engng.**, V. 17, p. 679-706, 1981.
45. **FLUENT User's Manual** Version 5.0, 1998. FLUENT WORLDWIDE CORPORATE HEADQUARTERS., Centera Resource Park, 10. Cavendish Court, Lebanon, NH 03766-142.
46. FLUGGE, W. **Static und Dynamik der Schalen**, Springer Verlag, Berlin, Deutschland, 1934.
47. FLUGGE, W. **Stresses in Shells**, Springer Verlag, NY, USA, 1960.
48. GOL'DENVEIZER, A. L. **Theory of Elastic Thin Shells**, Pergamon Press, USA, 1961.

49. GONZALEZ, L. A. S. Análise de escoamentos quase-incompressíveis e das vibrações introduzidas em objetos imersos. **Dissertação de Mestrado**, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil (CPGEC – UFRGS), 1993.
50. GREEN, A. E. ; ZERNA, W. **Theoretical Elasticity**, Oxford University Press, UK, 1954.
51. GRESHO, P. M.; CHAM, S. T.; LEE, R. L.; UPSON, G. D. A modified finite element method for solving the time dependent incompressible Navier-Stokes equations. Part I: Theory. **Int. J. Num. Meth. Fluids.**, V. 4 p. 557-598, 1984.
52. GURUSWAMY, G. P. Unsteady aerodynamic and aeroelastic calculations of wings using Euler equations. **AIAA J.**, V 28, p. 461-469, 1990.
53. GURUSWAMY, G. P. Vertical flow computations on swept flexible wings using Navier-Stokes equations. **AIAA J.**, V 28, p. 2077-2084, 1990.
54. GURUSWAMY, G. P. ENSAERO – A multidisciplinary program for fluid/structural interaction studies of aerospace vehicles. **Comp. Syst. In Engng.**, V 1 p. 237-257, 1990.
55. GURUSWAMY, G. P. ; BYUN, C. Fluid-structural interaction using Navier-Stokes flow equation coupled with shell finite element structures. **AIAA Paper** 93-3087, 1993.
56. GURUSWAMY, G. P.;BYUM, C. Direct coupling of Euler flow equations with plate finite element structures. **AIAA J.**, V 33, p. 375-377, 1995.
57. HALLQUIST, J. O.; BENSON, D. J. ; GOUDREAU, G. L. Implementation of a modified Hughes-Liu shell into a fully vectorized explicit finite element code. **Finite Elements for Nonlinear Problems**, Ed. By Bergan, P. et al. Springer Verlag, Berlin, Germany, p. 465-469, 1986.
58. HUANG, E. C. ; HINTON, E. Elastic-plastic and geometrically nonlinear analysis of plates and shells using a new nine-mode element. **Finite Element for Nonlinear Problems**, Ed. By Bergan, P. et al. Springer Verlag, Berlin, Germany. p. 283-297, 1986.
59. HUGHES, T. J. R. ; WINGET, J. M. Finite rotations effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis. **Int. J. Num. Meth. Engng**, V. 15, p. 1862-1867, 1980.
60. HUGHES, T. J. R. ; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells. Part I – Three dimensional shells **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.**, V. 26 p. 167-181, 1981.
61. HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method**, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1987.
62. KAWAHARA, M.; HIRANO, H. A finite element method for high Reynolds viscous fluid flow using a two steps explicit scheme. **Int. J. Num. Meth. Fluids.**, V. 3 p. 137-163, 1983.
63. KEY, S. W. ; HOFF, C. C. An improved constant membrane and bending stress shell element for explicit transient dynamics. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.** V. 124, p. 33-47, 1995.

64. KIKUCHI, M.; ODEN, J. T.; SONG, Y. J. Convergence of Modified Penalty Methods and Smoothing Schemes of pressure for Stokes flow problems. **Finite Elements in Fluids**, V. 5, p. 107-125, 1984.
65. KIRCHOFF, G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. **J. Reine and Angewante Mathematik (Crelle)**. V. 40, p. 51-58, 1850.
66. KOH, B. C. ; KIKUCHI, N. New improved hourglass control for bilinear and trilinear elements in anisotropic linear elasticity. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.** V. 65, p. 1-46, 1987.
67. KOSLOFF, D. ; FRAZIER, G. A. Treatment of hourglass patterns in low-order finite element codes. **Int J. Num. Analyt. Meth. Geomech.**, V. 2 p. 57-72, 1978.
68. LAMÉ, G. ; CLAPEYRON, B. P. E. Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes. **Mém... por divers savants**, t. 4, Paris, France, 1833.
69. LANGE, C. F. Simulação de escoamentos não isotérmicos pelo método dos elementos finitos com função de penalidade. **Dissertação de Mestrado**, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), UFRGS, 1992.
70. LESSOINE, M.; FARHAT, C. Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact in aeroelastic computations. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.** V 134, p. 71-90, 1996.
71. LIAO, C. L. ; REDDY, J. N. An incremental total Lagrange formulation for general anisotropic shell-type structures. **Research Report No VPI-E-87.22**, Dept. of Engng. Science and Mechanics, Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia, USA, 1987.
72. LIU, W. K. FLUSTR, A fluid-structure interaction finite element computer program. User's manual. NorthWestern University, Department of Mechanical and Nuclear Engng., Evanston, Illinois (USA), 1981.
73. LIU, W. K. Finite element procedures for fluid-structure interactions and application to liquid storage tanks. **Nuclear Engng. Design**, V 65, p. 221-238 (1981).
74. LIU, W. K.; MA, D. C. Coupling effect between liquid sloshing and flexible fluid-filled systems. **Nuclear Engng Design**, V 72, p. 345-357 (1982).
75. LIU, W. K.; MA, D. C. Computer implementation aspects for fluid-structure interaction problems. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.**, V 31, p. 129-148, 1982.
76. LIU, W. K.; CHANG, H. A method of computation for fluid-structure interaction **Computers & Structures**, V 20, p. 311-320, 1985.
77. LIU, W. K.; GVILDYS, J. Fluid-structure interaction of tanks with an eccentric core barrel. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.**, V 58, p. 51-77, 1986.
78. LIU, W. K.; LAW, E. S.; LAM, D. ; BELYTSCHKO, T. Resultant stress degenerated shell element. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.** V. 55, p. 259-300, 1986.
79. LÖHNER, R. Some useful data structures for the generation of unstructured grids. **Commun. Appl. Numer. Methods**, V. 4, p. 123-135, 1988.

80. LÖHNER, R.; YANG, C.; CEBRAL, J. R.; BAUM, J. D.; LUO, H.; PELESSONE, D.; CHARMAN, C. Fluid-structure interaction using a loose coupling algorithm and adaptive unstructured grids. **Comp. Fluid Dynamics Review** 1995, J. Wiley and Sons, NY (USA), p. 755-776, 1995.
81. LÖHNER, R. ; YANG, C. Improved ALE mesh velocities for moving bodies. **Commun. Appl. Numer. Methods**, V. 12, p. 599-608, 1996.
82. LOVE, A. E. H. **Mathematical Theory of Elasticity**, Cambridge University Press, UK, 4th edition, 1927.
83. MA, D. C.; LUI, W. K.; GVILDIS, J.; CHANG, J. Seismic behavior of liquid-filled shells. **Nuclear Engng Design**, V 70, p. 437-455 (1982).
84. Mc NEAL, R. H. A simple quadrilateral shell element. **Computers & Structures**, V. 8, p. 175-183, 1978.
85. MALKUS, M.; SANI, R. L.; GRESHO, P. M.; BERCOVIER, M. Consistent vs. Reduced integration penalty methods for incompressible media using general old and new elements. **Int. J. Num. Meth. Fluids.**, V. 15 p. 63-81, 1978.
86. MAMAN, N. ; FARHAT, C. Matching fluid-structures meshes for aeroelastic calculations: a parallel approach. **Computers & Structures**, V. 54, p. 779-785, 1995.
87. MELVILLE, R. B.; MORTON, S. B. ; RIZETTA. Implementation of a fully implicit aeroelastic Navier-Stokes solver. **AIAA Paper** 97-2039, 1997.
88. MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates. **J. of Appl. Mechanics**, V. 18, p. 31-38, 1951.
89. MONDKAR, D. P. ; POWELL, G. H., Finite element analysis of nonlinear static and dynamic response, **Int. J. Num. Meth. Engng.**, vol. 11, p. 499-520, 1977.
90. MSC/NASTRAN **Quick Reference Guide** Version 70.5, 1998. Mc NEAL – SCHWENGLER CORPORATION 815 Colorado Boulevard, Los Angeles, CALIFORNIA 90001-1277.
91. MUYAKORN, P. S.; TAYLOR, C.; LEE, R. L.; GRESHO, P. M. A comparison of various mixed-interpolations finite elements in the velocity-pressure formulation of the Navier-Stokes equations. **Comp. & Fluids**, V. 6, p. 25-35, 1978.
92. NOVOZILHOV, V. V. **The Theory or Thin Shells**, P. Noordhoff Ltd., Groningen, Netherlands, 1959.
93. ODEN, J. T.; JAQUOTTE, O. P. Stability of some mixed finite element methods for stokesian flows. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.**, V. 43 p. 231-247, 1984.
94. OLSON, L. G.; BATHE, K-J A study of displacement based fluid finite elements for calculating frequencies of fluid and fluid-structure systems. **Nuclear Engng. Design**, V 76, p. 137-151, 1983.
95. OLSON, L. G.; BATHE, K-J. Analysis of fluid-structure interactions. A direct symmetric coupled formulation based on the fluid velocity potential. **Computers & Structures**, V. 21, p. 21-32, 1985.

96. PARK, K. C. ; STANLEY, G. M. A curved C^0 shell element based an assumed natural-coordinates strains. **J. Appl. Mechanics**, V. 53, p. 278-290, 1986.
97. PETRY, A. Análise numérica da interação fluido-estrutura através do método dos elementos finitos. **Dissertação de Mestrado**, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil (CPGEC), UFRGS, 1993.
98. PIPERNO, S.; FARHAT, C.; LARROTUROU, B. Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.** V 124, p. 79-111, 1995.
99. PRAGER, W. **Introduction to Mechanics of Continua**, Ginn & Company, Boston, (USA), 1961.
100. RAMSHAW, V. D.; MOUSSEAU, V. A. Accelerated artificial compressibility method for Steady-State incompressible flow calculations. **Comp. & Fluids**, V. 18, p. 361-367, 1990.
101. RAMSHAW, V. D.; MOUSSEAU, V. A. Compressibility method for steady-state low speed calculations. **Comp. & Fluids**, V. 20, p. 177-186, 1991.
102. RAMSHAW, V. D.; MESSINA, G. L. A hybrid penalty-pseudocompressibility method for transient incompressible fluid flow. **Comp. & Fluids**, V. 20, p. 165-175, 1991.
103. RAUSCH, R. D.; BATINA, J. T.; YANG, T. Y. Euler flutter analysis of airfoils using unstructured dynamic meshes, AIAA Paper n° 89-13834. 30th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Mobile, Alabama, USA, April 3-5, 1989.
104. RAUSCH, R. D.; BATINA, J. T. ; YANG, T. Y. Three-dimensional time-marching aeroelastic analyses using an unstructured-grid Euler method. **AIAA J.**, V. 31, p. 1626-1633, 1993.
105. REDDY, J. N. Penalty finite element analysis of 3-D Navier-Stokes equations. **Comp. Meth. In Appl. Mech. Engng.**, V 35, pp 87-106, 1982.
106. REDDY, J. N.; GARTLING, D. K. **The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics**, CRC Press, Boca Raton, Florida, USA, 1994
107. REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. **J. of Appl. Mechanics**, V. 12, p. 69-76, 1945.
108. ROGERS, S. E.; KWAK, D.; KAUL, U. On the accuracy of the pseudocompressibility method in solving incompressible Navier-Stokes equations. **Appl. Meth. Modelling.** V. 11, p. 35-44, 1987.
109. SANI, R. L.; GRESHO, P. M.; LEE, R. L.; GRIFFITHS, D. F. The Cause (?) and cure of spurious pressure generated by certain FEM solutions of the incompressible Navier-Stokes Equations: Part I. **Int. J. Num. Meth. Fluids.**, V. 1 p. 17-43, 1981.
110. SANTOS, M. A. V. Simulação Numérica de escoamentos Compressíveis e sua interação com estruturas deformáveis. **Tese de Doutorado**, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil (CPGEC – UFRGS), 1993.
111. SCHLICHTING, H. **Boundary Layer Theory**, Mc Grow Hill, NY, USA, 1979 (2nd Ed.)

112. SCHULZ, S. L. Elementos finitos tri-lineares com integração reduzida e controle de modos espúrios na análise linear de placas e cascas. **Dissertação de Mestrado**, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), UFRGS, 1997.
113. TAYLOR, C.; HOOD, C. A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique. **Comp. & Fluids**, V. 1, p. 73-100, 1973.
114. TAMMA, K. K. ; NAMBURU, R. R. A new finite element based Lax-Wendroff/Taylor-Galerkin methodology for computational dynamics. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.** V. 71, p. 137-150, 1988.
115. TAMMA, K. K.; NAMBURU, R. R. A robust self-starting explicit computational methodology for structural dynamics applications: architecture and representation. **Int. J. Num. Meth. Engng.**, V. 29, p. 1441-1454, 1990.
116. TIMOSHENKO, S. ; WOINOWSKI-KRIEGER, S. **Theory of Plates and Shells**, Mc Graw Hill, NY, USA, 1959.
117. WANG, X.; BATHE, K-J. Displacement/pressure based mixed finite element formulations for acoustic fluid-structure interaction problems. **Int. J. Num. Meth. Engng.**, V 40, p. 2001-2017, 1997.
118. WHITE, F. **Viscous Fluid Flow**, Mc Graw Hill, NY, USA, 1991.
119. WILLIAMS, P. T. ; BAKER, A. J. Numerical simulations of laminar flow over a 3D backward-facing step. **Int. J. Num. Meth. Fluids.**, V. 24 p. 1159-1183, 1997
120. ZHU, Y. ; ZACHARIA, T. A new one-point quadrature quadrilateral shell element with drilling degree of freedom. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.** V. 136, pp 165-203, 1996.