Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Sobre Anéis Locais Cohen-Macaulay com Dimensão de Imersão $e + d - 2$. Uma Conjectura de Sally

Dissertação de Mestrado

CAROLINA NOELE RENZ

Porto Alegre, dia 19 de março de 2010

Dissertação submetida por Carolina Noele Renz* , como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Profª. Drª. Luisa Rodríguez Doering

Banca examinadora:
Profª. Drª. Luisa Rodríguez Doering (IM - UFRGS, ORIENTADORA)
Profª. Drª. Ada Maria de Souza Doering (IM - UFRGS)
Prof. Dr. Antônio Paques (IM - UFRGS)
Prof. Dr. Aron Simis (DMat - UFPE)

*Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Agradecimentos

Este trabalho para mim simboliza o fim de uma etapa da minha vida: o Mestrado! Creio que nesta etapa muitas pessoas foram de extrema importância para fazer destes dias não só um enorme aprendizado de Matemática, mas um aprendizado de vida, recheado de muita diversão e amizade. Espero não esquecer de ninguém, ao agradecer com muito carinho aos colegas e amigos da pós: Adriana, Andrea, Bárbara, Carlos, Daiana, Daiane, Débora, Diego C., Diego L., Diego M., Diego Z., Douglas, João, Juliana, Juliane, Kleiton, Leandro, Lucinéia, Miriam, Nicolau, Patrícia G., Patrícia K., Patropy, Raquel, Rene, Ricardo, Rodrigo (π), Samuel, Saradia, Thaísa M., Thaísa T. e Thiago.

Em especial agradeço novamente à querida Juju pela amizade e pelo apoio com a apresentação, pois mesmo estando tão longe ela se faz perto quando precisamos dela, ao Dieguinho (Marcon) colega e amigo desde a graduação que apesar da distância e da falta de tempo atendeu a todas as minhas dúvidas de Tex e aos meus choros de amiga com seu paciente ouvido, e à Miriam, responsável pelo rosa dos slides, que me deixou muito contente. Também às Paquitas (alunas do Paques) que com tanto carinho me acolheram, ao Renezinho, parceiro de muitos trabalhos e à Deinha, que muitos dramas partilhou nestes anos.

Aos amigos do tempo da graduação que mesmo os encontros esporádicos com nosso tradicional amigo secreto não servem para matar as saudades que causam: Andrea, Camila, Franciele e Roberto.

Creio que o maior agradecimento deste trabalho se deve à querida professora

Luisa, que não só me ensinou muita Matemática desde o começo de minha graduação, como suportou minhas variações de humor e minha teimosia, tornando esse trabalho mais claro e muito melhor escrito. Sua paciência, carinho e dedicação são um exemplo para a professora que desejo ser. Agradeço também aos professores Ada, Aron e Paques, pela participação neste trabalho com suas correções e sugestões.

Agradeço por fim à minha irmã querida, Camila, companheira de tudo, à prima Meli e à Lili, que também a sua maneira participaram desta realização. E aos meus queridos pais, Rosângela e Paulo, financiadores, incentivadores e responsáveis por qualquer trabalho que eu faça.

Resumo

Este trabalho desenvolve a demonstração, dada por Wang em 1977, para a conjectura de Sally, enunciada em 1983, que diz que dado um anel local noetheriano Cohen-Macaulay de dimensão d e dimensão de imersão $e + d - 2$, onde e é a sua multiplicidade, seu anel graduado associado possui profundidade maior ou igual a $d-1$. Utilizando uma propriedade demonstrada por Sally em 1979 (Sally Machine), reduzimos o problema ao caso em que a dimensão do anel é 2, e assim, demonstramos que a profundidade do anel graduado associado é positiva.

Abstract

This work develops the proof, given by Wang in 1977, for Sally's conjecture, stated in 1983. The conjecture says that given a local Noetherian Cohen-Macaulay ring of dimension d and embedding dimension $e + d - 2$, where e is its multiplicity, its associated graded ring has depth greater than or equal to $d-1$. Using a property proved by Sally, in 1979, called the Sally Machine, we reduce the problem to the 2-dimensional case proving that the depth of its associated graded ring is positive.

Índice

Introdução

Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel local e $G_A = G_A(\mathfrak{m}) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ o anel graduado associado a A em relação a $\mathfrak{m}$.

É natural perguntar quais são as relações entre G_A e A. Por exemplo, quais das propriedades de A, como ser Cohen-Macaulay ou noetheriano, entre outras, que são herdadas por G_A e vice versa, ou quais são as relações entre os invariantes de A e os invariantes de G_A, como dimensão e profundidade, entre outros.

Se A for noetheriano, um elemento de $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ pode ser expresso como uma combinação linear de produtos de n elementos de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Assim, se $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_k}$ denotam as imagens de $x_1, \ldots, x_k$ em $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, temos que $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ é gerado por $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_k}$ sobre $A/\mathfrak{m}$. Logo, podemos escrever $G_A = A/\mathfrak{m}[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_k}]$ e, portanto, G_A também é noetheriano.

Usando funções de Hilbert podemos mostrar que $\dim A = \dim G_A$, onde $\dim A$ é o supremo de todos os comprimentos das cadeias ascendentes de ideais primos de A (ver [7]).

Temos que $\operatorname{depth} A \leq \dim A$, onde $\operatorname{depth} A$ é o comprimento das A-sequências regulares maximais contidas em $\mathfrak{m}$ (ver [6]). Além disso, $\operatorname{depth} G_A \leq \operatorname{depth} A$, pois uma sequência regular em G_A mantém sua regularidade em A (ver [2] e [6]).

Assim, resulta que se G_A é um anel Cohen-Macaulay, isto é, se $\dim G_A = \operatorname{depth} G_A$, então $\operatorname{depth} G_A = \dim G_A = \dim A$, mas, como $\operatorname{depth} G_A \leq \operatorname{depth} A \leq \dim A$, temos que $\operatorname{depth} A = \dim A$. Desse modo, obtemos uma boa propriedade que é transmitida: se G_A é Cohen-Macaulay, então A é Cohen-Macaulay.

A recíproca dessa proposição nem sempre é verdadeira e tem sido objeto de estudo de vários matemáticos. Para observar maiores avanços nessa questão, consideramos, então, que $(A, \mathfrak{m})$ seja um anel local noetheriano Cohen-Macaulay, com corpo de resíduos infinito K e dimensão de Krull d.

Sejam ν a dimensão de imersão de A, e sua multiplicidade e G_A seu anel graduado associado. Abhiankar, em [1], demonstrou que $\nu \leq e + d - 1$ e J. Sally, em [10] e [11], estudou o caso em que $\nu = e + d - n$, para $n = 1, 2, 3$, provando que, se $\nu = e + d - 1$, então G_A é Cohen-Macaulay, ou seja, $\operatorname{depth} G_A = \dim G_A$ e que, para $\nu = e + d - 2$, G_A é Cohen-Macaulay se, e somente se, $m^3 = Jm^2$, para alguma redução minimal J.

Uma vez definido o caso em que G_A é Cohen-Macaulay, resta aproximar esse resultado no caso geral, restringindo $\operatorname{depth} G_A$.

Em [12], Sally demonstrou a propriedade que acabou ficando conhecida como *Sally Machine*: para $J^* = (x_1, \ldots, x_r) \subseteq A$ gerado por uma sequência superficial em A e $(B, \eta) = (A/J^*, \mathfrak{m}/J^*)$, temos que

$$\operatorname{depth} G_A \geq r + 1 \Leftrightarrow \operatorname{depth} G_B \geq 1.$$

Sally provou esse resultado para o caso $r = d - 1$, em [12], e uma prova do caso geral foi dada por Huckaba e Marley, em [5].

Depois disso, Sally conjecturou, em [10], que $\nu = e + d - 2$ implica que $\operatorname{depth} G_A \geq d - 1$. Utilizando o argumento da *Sally Machine*, podemos reduzir o problema ao caso em que $d = 2$ e demonstrar que $\operatorname{depth} G_A \geq 1$.

O objetivo desse trabalho é introduzir esse problema e dar as ferramentas para a sua resolução e demonstração desenvolvidas por Wang, em [16], [17] e [18]. Salientamos que essa mesma conjectura foi demonstrada, concomitantemente, por Rossi e Valla, em [8], utilizando argumentos diferentes, onde também é dada uma descrição das possíveis funções de Hilbert de A.

No primeiro capítulo apresentamos alguns pré-requisitos necessários à compreensão da conjectura e de sua demonstração, como funções de Hilbert e elementos regulares e superficiais. Na primeira seção do segundo capítulo, introduzimos o problema, com o desenvolvimento dos vários lemas que serão essenciais à demonstração, que é dada na segunda e última seção.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Assumiremos neste trabalho que $(A, \mathfrak{m})$ é um anel local com corpo de resíduos K. Chamaremos de dimensão de A o supremo de todos os comprimentos de todas as cadeias ascendentes de ideais primos de A e denotaremos por $\dim A$.
E chamaremos de dimensão de imersão de A a $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

1.1 Função de Hilbert

Definição 1.1.1. *Seja G um semigrupo abeliano e 0 seu elemento neutro.*
Um anel G-graduado é um anel A com uma decomposição $A = \bigoplus_{i \in G} A_i$, tal que $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$, para todo $i, j \in G$.
Um A-módulo graduado é um A-módulo M com uma decomposição $M = \bigoplus_{i \in G} M_i$, tal que $A_i M_j \subseteq M_{i+j}$, para todo $i, j \in G$.
Dizemos que $x \in M$ é um elemento homogêneo de M se existe $i \in G$ tal que $x \in M_i$ e i é dito o grau de x.

Note que A_0 é um subanel de A ($A_0 A_0 \subseteq A_0$) e que cada somando M_i de M é um A_0-módulo ($A_0M_i \subseteq M_i$).

Neste trabalho, consideraremos $G = \mathbb{Z}$, e o anel será $\mathbb{N}$-graduado, isto é, $A_i = 0$ para $i < 0$. Neste caso, definimos $A^+ = \bigoplus_{n>0} A_n$ que é chamado ideal irrelevante de A e pela definição de A^+ temos que A^+ é um ideal de A e $A/A^+ = A_0$.

Temos ainda que dado $x \in M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$, x pode ser escrito de maneira única na forma $x = \sum_{i \in G} x_i$, $x_i \in M_i$ e apenas um número finito de $x_i \neq 0$; tais $x_i's$ são chamados de termos homogêneos de x de grau i, ou componentes homogêneas de x.

Definição 1.1.2. *Sejam A anel graduado e M A-módulo graduado. Dizemos que $N \subseteq M$ é um submódulo homogêneo ou graduado se N é gerado por elementos homogêneos.*

Note que A^+ é um ideal homogêneo.

Proposição 1.1.3. *O anel $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ $\mathbb{N}$-graduado é noetheriano se e somente se A_0 é noetheriano e A é finitamente gerado como anel sobre A_0.*

Demonstração:

($\Leftarrow$) Se A_0 noetheriano e $A = A_0[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ então A é noetheriano.

($\Rightarrow$) A é noetheriano. Temos que $A_0 \simeq A/A^+$. Logo, A_0 é o quociente de um anel noetheriano por um ideal A^+ que é finitamente gerado. Assim, A_0 é noetheriano.

Como A^+ é finitamente gerado e é homogêneo, existem $x_1, \ldots, x_r$ elementos homogêneos que geram A^+. Vamos mostrar que $A = A_0[x_1, \ldots, x_r]$. Para isso, basta mostrar que $A_n \subseteq A_0[x_1, \ldots, x_r]$ para todo n.

Escrevemos d_i para o grau de x_i. Seja $y \in A_n \subseteq A^+$ ($n > 0$), logo existem $f_1, \ldots, f_r \in A$ tais que $y = \sum_{i=1}^r x_i f_i$. Seja g_i o termo homogêneo de grau $n - d_i$ de f_i, ($g_i = 0$ se $n - d_i < 0$). Assim também temos $y = \sum_{i=1}^{r} x_i \cdot g_i$, já que y é homogêneo de grau n, ou seja, as componentes homogêneas diferentes de n se anulam.

Desse modo, $A_n \subseteq x_1 A_{n-d_1} + x_2 A_{n-d_2} + \cdots + x_r A_{n-d_r}$. Como a outra inclusão é imediata, pois cada parcela está contida em A_n, temos que $A_n = x_1 A_{n-d_1} + x_2 A_{n-d_2} +$

$\cdots + x_r A_{n-d_r}$. Assim, se cada $A_{n-d_i} \subset A_0[x_1, \ldots, x_r]$ então $A_n \subset A_0[x_1, \ldots, x_r]$. Procedendo por indução obtemos o resultado desejado.

■

Sejam $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ anel noetheriano graduado e $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ é um A-módulo graduado finitamente gerado. Então cada M_n é finitamente gerado como A_0-módulo. De fato, quando $M = A$ isto decorre de $A_n \subseteq x_1 A_{n-d_1} + x_2 A_{n-d_2} + \cdots + x_r A_{n-d_r}$. No caso geral, M pode ser gerado por um número finito de elementos $\omega_i \in M$: $M = A\omega_1 + \cdots + A\omega_s$. Assim, tomando e_i como o grau de w_i, temos como acima que $M_n \subseteq A_{n-e_1}\omega_1 + A_{n-e_2}\omega_2 + \cdots + A_{n-e_s}\omega_s$, onde $A_i = 0$ para $i < 0$, e portanto M_n é um A_0 módulo finitamente gerado.
Em particular se A_0 é um anel artiniano, então $\lambda(M_n) < \infty$, onde $\lambda_A(M)$ denota o comprimento de M como A-módulo, e portanto podemos definir a série de Hilbert para M.

Definição 1.1.4. *Seja $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ um anel noetheriano graduado e seja $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ um A-módulo graduado finitamente gerado. Supomos que $\lambda(M_n) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Definimos a função de Hilbert de M como

$$H_M(n) = \lambda(M_n)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

E definimos a série de Hilbert de M como

$$P_M(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda(M_n) t^n.$$

Teorema 1.1.5. *Seja $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ um anel noetheriano $\mathbb{N}$-graduado, com A_0 artiniano e seja $M = \bigoplus_{i \geq 0} M_i$ um A-módulo $\mathbb{N}$-graduado finitamente gerado. Suponhamos* *que* $A = A_0[X_1, X_2, ..., X_r]$ *com* $grau(X_i) = d_i$. *Então a série de Hilbert de* M *é uma função racional de* t *que pode ser escrita como*

$$P_M(t) = \frac{h(t)}{\prod_{i=1}^{r}(1 - t^{d_i})} \quad e \quad h(t) \in \mathbb{Z}[t].$$

Demonstração:

Demonstramos o teorema por indução em r.

Se $r = 0$ então $A = A_0$.

Logo cada M_i é um A-módulo finitamente gerado ($A = A_0$). Assim $N_k = \bigoplus_{i \geq 0}^{\infty} T_i$, onde $T_i = M_i$ para $i \leq k$ e $T_i = 0$ para $i > k$ forma uma cadeia ascendente de submódulos de M e portanto é estacionária. Desse modo existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $M_k = 0$ para $k > n$. Assim, $P_M(t)$ é um polinômio com coeficientes em $\mathbb{Z}$ (de grau $\leq n$).

Se $r > 0$ então a multiplicação por X_r define uma aplicação A_0-linear dada por $\varphi_r : M_n \to M_{n+d_r}$.

Sejam $K_n = Ker(\varphi_r)$ e $L_{n+d_r} = coker(\varphi_r) = M_{n+d_r}/Im(\varphi_r) = M_{n+d_r}/(X_r \cdot M_n)$ então:

$$0 \longrightarrow K_n \xrightarrow{i} M_n \xrightarrow{\varphi_r} M_{n+d_r} \xrightarrow{\pi} L_{n+d_r} \longrightarrow 0 \qquad (\dagger)$$

é uma sequência exata. Sejam $K = \bigoplus K_n$, (K submódulo de M) e $L = \bigoplus L_n$, ou seja $L = (M/X_rM)_{>d_r}$ inicia com grau d_r. Assim, K e L são A-módulos finitamente gerados com $X_r \cdot K = 0$ e $X_r \cdot L = 0$. Logo K e L são $(A/(X_r \cdot A))$-módulos.

Assim poderemos utilizar a hipótese de indução em $P_K(t)$ e $P_L(t)$.

De ($\dagger$) temos que $\lambda(K_n) - \lambda(M_n) + \lambda(M_{n+d_r}) - \lambda(L_{n+d_r}) = 0$ pois a soma dos comprimentos com sinais alternados se anula na sequência exata. Multiplicando por t^{n+d_r} obtemos

$t^{n+d_r}\lambda(K_n) - t^{n+d_r}\lambda(M_n) + t^{n+d_r}\lambda(M_{n+d_r}) - t^{n+d_r}\lambda(L_{n+d_r}) = 0$ e assim

$$t^{d_r}(\lambda(K_n) \cdot t^n) - t^{d_r}(\lambda(M_n) \cdot t^n) + t^{n+d_r}(\lambda(M_{n+d_r})) - t^{n+d_r}(\lambda(L_{n+d_r})) = 0 \qquad (\ddagger)$$

Como $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda(M_{i+d_r})t^{i+d_r} = P_M(t) - \Big(\lambda(M_0) + \lambda(M_1)t + \ldots + \lambda(M_{d_r-1})t^{d_r-1}\Big)$ e $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda(L_{n+d_r})t^{n+d_r} = P_L(t) - \Big(\lambda(L_0) + \lambda(L_1)t + \ldots + \lambda(L_{d_r-1})t^{d_r-1}\Big)$, ao substituirmos e somarmos em (‡) obtemos

$t^{d_r}P_K(t) - t^{d_r}P_M(t) + P_M(t) - P_L(t) - (\lambda(M_0) + \lambda(M_1)t + \ldots + \lambda(M_{d_r-1})t^{d_r-1}) +$

$\lambda(L_0) + \lambda(L_1)t + \ldots + \lambda(L_{d_r-1})t^{d_r-1} = 0$, ou seja,

$(1 - t^{d_r})P_M(t) =$ polinômio em t com coeficientes em $\mathbb{Z}$ $+P_L(t) - t^{d_r}P_K(t)$

Por hipótese de indução, existem $h_1(t), h_2(t) \in \mathbb{Z}[t]$ tais que

$(1-t^{d_r})P_M(t) = g(t)$, onde $g(t)$ é um polinômio com coeficientes em $\mathbb{Z}$ $+\dfrac{h_1(t)}{\prod_{i=1}^{r-1}(1-t^{d_i})} - \dfrac{t^{d_r}h_2(t)}{\prod_{i=1}^{r-1}(1-t^{d_i})}$. Assim, isolando $P_M(t)$ obtemos a igualdade desejada. ■

Exemplo 1.1.6. *Se $d_1 = d_2 = \cdots = d_r = 1$, ou seja, A gerado sobre A_0 por elementos de grau 1, obtemos $P_M(t) = \dfrac{f(t)}{(1-t)^r}$, $f(t) \in \mathbb{Z}$.*

Se $(1-t)$ é fator de $f(t)$, existe $d \geq 0$ tal que $P_M(t) = \dfrac{h(t)}{(1-t)^d}$ e $h(t) \in \mathbb{Z}[t]$, com $h(t)$ e $(1-t)^d$. Segue daí, que se $d > 0$, $h(1) \neq 0$. Denotamos $d = d(M)$.

Sabemos que $1/(1-t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \ldots$

Derivando $(d-1)$ vezes a expressão anterior, obtemos $\dfrac{1}{(1-t)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} d+n-1 \\ d-1 \end{pmatrix} t^n$

Assim, $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M_n)t^n = P_M(t) = \dfrac{h(t)}{(1-t)^d} = h(t)\sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} d+n-1 \\ d-1 \end{pmatrix} t^n$

Se $h(t) = h_0 + h_1t + \ldots + h_st^s$, então agrupando os coeficientes de t^n obtemos

$$\lambda(M_n) = h_0 \begin{pmatrix} d+n-1 \\ d-1 \end{pmatrix} + h_1 \begin{pmatrix} d+n-2 \\ d-1 \end{pmatrix} + \ldots + h_s \begin{pmatrix} d+n-(s+1) \\ d-1 \end{pmatrix}$$

onde $\begin{pmatrix} m \\ d-1 \end{pmatrix} = 0$ se $m < d-1$. O lado direito da igualdade acima pode ser reescrito como um polinômio em n, com coeficientes racionais, que denotaremos *por* $p_M(n)$. *Como, para todo* i,

$$\binom{d+n-i}{d-1} = \frac{(d+n-i)!}{(d-1)!(d+n-i-(d-1))!} = \frac{(d+n-i)!}{(d-1)!(n-i+1)!}$$
$$= \frac{(n+d-1)\cdot(n+d-2)\cdot\ldots\cdot(n+d-(d-1))}{(d-1)!}$$

Vemos que a maior potência de n *que aparece é* $d-1$*, da expressão acima podemos escrever*

$$p_M(n) = \frac{h(1)}{(d-1)!}n^{d-1} + \textit{termos de menor grau}$$

Acabamos de demonstrar o seguinte corolário.

Corolário 1.1.7. *Se* $d_1 = d_2 = \cdots = d_r = 1$ *e* $d = d(M) > 0$ *então existe um polinômio* $p_M(x)$ *de grau* $d-1$ *com coeficientes racionais tal que para* $n \gg 0$*,* $\lambda(M_n) = p_M(n)$.

Definição 1.1.8. *O polinômio*

$$p_M(n) = e_0\binom{n+d-1}{d-1} - e_1\binom{n+d-2}{d-2} + \ldots + (-1)^{d-1}e_{d-1}$$

tal que $p_M(n) = H(M,n)$ *para* $n \gg 0$*, é chamado de polinômio de Hilbert de* M*, e* $e_0, e_1, \ldots, e_{d-1}$ *são chamados de coeficientes de Hilbert de* M.

Observe que $e_i \neq h_i$.

Definição 1.1.9. *O polinômio* $h(t) = h_0 + h_1t + \ldots + h_st^s \in \mathbb{Z}[t]$ *conforme o exemplo, é chamado de h-polinômio de* A*,* $h(1) = e$ *é a multiplicidade de* A *e o vetor* $(h_1, h_2, \ldots, h_s)$ *o h-vetor de* A.

Definição 1.1.10. *Sejam* A *anel noetheriano e* I *ideal de* A *e* $\mathfrak{m}$ *o ideal radical de* I*. Se* $I \subseteq A$ *é um ideal tal que para algum* $\gamma > 0$ *temos* $\mathfrak{m}^\gamma \subset I \subset \mathfrak{m}$*, chamamos* I *de ideal de definição de* A.

Seja M A*-módulo finitamente gerado. Definimos* $gr_I(M) = \bigoplus_{n\geq 0} I^nM/I^{n+1}M$ *como o módulo graduado de* M *associado a* I.

Chamando as componentes homogêneas de $gr_I(A)$ de A'_i, temos que $A'_0 = A/I$ é artiniano e se $I = \sum_{i=1}^{r} x_i A'$, e θ_i é a imagem de x_i em I/I^2, então $gr_I(A) = A'_0[\theta_1, \ldots, \theta_r]$. Se além disso $M = \sum_{i=1}^{s} A\omega_i$, então $gr_I(M) = \sum_{i=0}^{s'} A'\overline{\omega_i}$, onde $\overline{\omega_i}$ é a imagem de ω em $M'_0 = M_0/IM$. Então podemos aplicar o Teorema 1.1.5 e o seu corolário a $gr_I(M)$. Assim, a função de Hilbert de um anel local $(A, \mathfrak{m})$ qualquer é por definição a função de Hilbert do módulo graduado associado a A que é a K-álgebra homogênea ($K = A/\mathfrak{m}$)

$$G_A = gr_{\mathfrak{m}}(A) = \bigoplus \tfrac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}}$$

E assim, $H_A(n) = H_{G_A}(n) = \dim\left(\frac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}}\right)$.

A função geradora de H_A é a série de potências

$$P_A(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} H_A(n) z^n$$

que é chamada a *série de Hilbert* de A.

Definição 1.1.11. *As iteradas da função de Hilbert H_A^i, $i \in \mathbb{N}$ são definidas recursivamente por:*

$$\begin{cases} H_A^i(n) = H_A(n), se \quad i = 0 \\ H_A^i = \sum_{j=0}^{n} H_A^{j-1}(n)(j), se \quad i > 0 \end{cases}$$

Para todo $n \geq 0$.

Pela definição temos $H_A^i(n) - H_A^i(n-1) = H_A^{i-1}(n)$.

Definição 1.1.12. *Definimos as iteradas da série de Hilbert do anel local A como $P_A^i(z) = \sum_{n \geq 0} H_A^i(n) z^n$.*

E observamos que $P_A^i(z) = (1-z)P_A^{i+1}(z)$, para todo $i \geq 0$, pois $(1-z)P_A^{i+1}(z) = P_A i + 1(z) - P_A^{i+1}(z)z = \sum_{n \geq 0} H_A^{i+1}(n)z^n - \sum_{n \geq 0} H_A^{i+1}(n)z^{n+1} =$

$H_A^{i+1}(0)+\sum_{n\geq 0}(H_A^{i+1}(n)-H_A^{i+1}(n-1))z^n = H_A^{i+1}(0)+\sum_{n\geq 0} H_A^i(n)z^n = \sum_{n\geq 0} H_A^i(n)z^n =$
$P_A^i(z)$

Temos ainda, sobre a dimensão de anéis, os seguintes resultados, cujas demonstrações pode ser encontrada nos Teoremas 13.4 e 13.8 de [7].

Teorema 1.1.13. *Seja* $(A, \mathfrak{m})$ *anel local noetheriano e* M A*-módulo finitamente gerado, temos então que* $\dim M = d(M) = d$.

Teorema 1.1.14. *Seja* $(A, \mathfrak{m}, k)$ *um anel noetheriano local e* G_A *seu anel graduado associado, então* $\dim A = \dim G_A$.

1.2 Anéis Cohen-Macaulay

Definição 1.2.1. *Sejam* A *um anel noetheriano e* M *um* A*-módulo. Dizemos que* $r \in A$ *é um elemento regular em* M *ou é* M*-regular se* $rz = 0$ *(para algum* $z \in M$*) implica que* $z = 0$*. Em outras palavras,* r *não é divisor de zero em* M*.*
A sequência $(r_1, \ldots, r_s)$ *de elementos de* A *é chamada sequência regular em* M *ou* M*-sequência regular se ambas as condições valem:*
(i) r_i *é um* $M/(r_1, \ldots, r_{i-1})M$ *elemento regular, para* $i = 1, \ldots, s$*;*
(ii) $M/(r_1, \ldots, r_s)M \neq 0$

Definição 1.2.2. *Sejam* A *um anel noetheriano e* I *um ideal próprio de* A*, temos que* $(x_1, \ldots, x_n) \in I$ *é uma* M*-sequência regular maximal em* I *se para todo* $w \in I$*,* $(x_1, \ldots, x_n, w)$ *não é* M*-sequência regular, isto é,* $I \subseteq \mathcal{Z}(x_1, \ldots, x_n)$*, onde* $\mathcal{Z}(C)$ *é o conjunto dos divisores de zero do conjunto* C*.*

Lema 1.2.3. *Sejam* I *e* J *ideais de um anel* A*,* M *um* A*-módulo e escrevemos* $N = M/IM$*. Então* N/JN *é isomorfo a* $M/(I+J)M$*.*

Demonstração:

Considere o homomorfismo natural $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N/JN$. O núcleo da função induzida de M para N/JN contém IM e JM, pois $N = M/IM$, portanto contém $(I+J)M$. Reciprocamente se x pertente ao núcleo, então x é levado em JN pela função $M \xrightarrow{f} N$, portanto difere de um elemento de JM por um elemento de IM. Assim, $x \in (I+J)M$. ■

Lema 1.2.4. *Sejam A um anel e i um inteiro menor do que n. Sejam M um A-módulo e $x_1, \ldots, x_n$ elementos de A. Então são equivalentes:*
(i) $(x_1, \ldots, x_n)$ é uma M-sequência regular.
(ii) $(x_1, \ldots, x_i)$ é uma M-sequência regular e $x_{i+1}, \ldots, x_n$ é uma $M/(x_1, \ldots, x_i)M$-sequência regular.

Demonstração:

Aplicando o Lema anterior com $I = (x_1, \ldots, x_i)$ e J sendo substituído sucessivamente por $(x_{i+1}), (x_{i+1}, x_{i+2}), \ldots$ obtemos a equivalência desejada. ■

Lema 1.2.5. *Sejam A um anel e $(x, y) \in A$ uma M-sequência regular. Então $x \notin \mathcal{Z}(M/yM)$.*

Demonstração:

Suponhamos que $t^* \in M/yM$ e $xt^* = 0$. Tomamos qualquer $t \in M$ sendo levado em t^*. Então $xt \in yM$, digamos $xt = yu$. Como $y \notin \mathcal{Z}(M/xM)$ (pela definição de (x, y) M-sequência regular), temos que $u \in xM$, digamos $u = xu_1$. Como $x \notin \mathcal{Z}(M)$, cancelamos x em $xt = xyu_1$, obtendo $t = yu_1$, $t^* = 0$ como desejávamos. ■

No Lema anterior não podemos concluir que (y, x) é uma M-sequência regular pois $y \notin \mathcal{Z}(M)$ pode falhar. Entretanto se supormos que $y \notin \mathcal{Z}(M)$ então podemos alterar a ordem de x e y. No próximo lema estendemos essa observação a sequências maiores.

Lema 1.2.6. *Sejam A um anel, M um A-módulo e $(x_1, \ldots, x_n)$ uma M-sequência regular. Então a sequência obtida alterando x_i e x_{i+1}, com $1 \leq i \leq n$, é uma M-sequência regular se e somente se $x_{i+1} \notin \mathcal{Z}(M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M)$.*

Demonstração:

Segue imediatamente dos Lemas 1.2.4 e 1.2.5.

Lema 1.2.7. *Sejam A um anel e M um A-módulo. Se $x_1, \ldots, x_n$ é uma M-sequência regular, então os ideais (x_1), (x_1, x_2), ..., $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ formam uma cadeia ascendente.*

Demonstração:

Suponhamos por absurdo que existe i, com $1 \leq i < n$ tal que $(x_1, \ldots, x_i) = (x_1, \ldots, x_{i+1})$. Então x_{i+1} é uma combinação linear de $x_1, \ldots, x_i$ e portanto $x_{i+1}M \subseteq (x_1, \ldots, x_i)M$. Assim, x_{i+1} se anula no módulo $M/(x_1, \ldots, x_i)M$, onde ele não é um divisor de zero por hipótese. Contradição. ∎

O Lema 1.2.7 mostra que se A é noetheriano e M é um A-módulo não nulo, então existem M-sequências regulares maximais em A. Ainda não sabemos no entanto, se duas dessas sequências possuem o mesmo comprimento. O teorema a seguir garante este resultado.

Teorema 1.2.8. *Sejam A um anel noetheriano, I um ideal de A e M A-módulo finitamente gerado. Supomos que $IM \neq M$. Então duas quaisquer M-sequências maximais contidas em I possuem o mesmo comprimento.*

Demonstração:

Basta mostrar que se $x_i, y_i \in I$, $(x_1, \ldots, x_n)$ é uma M-sequência regular maximal, e $(y_1, \ldots, y_n)$ uma M-sequência, então $(y_1, \ldots, y_n)$ é maximal. Mostraremos por indução em n.

$n = 1$: Tomamos $x = x_1$ e $y = y_1$ e x e y estão em I, não são divisores de zero em

M. Suponhamos que (x) é M-sequência regular maximal. Desse modo I consiste em divisores de zero de M/xM, pois se $t \in I$ não é divisor de zero em M/xM então (x,t) é uma M-sequência regular (a condição $(x,t)M \neq M$ segue da hipótese de $IM \neq M$).

Queremos agora provar que I consiste em divisores em zero de M/yM. Mas como $I \subseteq \mathcal{Z}(x)$, temos que $I \subseteq \bigcup_{P assoc. x} P$, e assim $I \subseteq P'$ para algum P' associado de x. Logo, $P' = (x : u)$ para algum $u \in M$, e portanto $Iu \subseteq xM$, em particular $yu = xv$ para algum $v \in M$.

Afirmamos que $v \notin yM$ e $Iv \subseteq yM$. Para verificar que $v \notin yM$ suponhamos que $v = yw$ então $yu = xv = xyw$ e como y pode ser cancelado, já que y é regular, $u = xw$, levando a contradição. Para verificar que $Iv \subseteq yM$, temos que $xIv = yIu \subseteq yxM$. Nesta inclusão o fator x é cancelável e obtemos $Iv \subseteq yM$. Se v^* denota a imagem de v em M/yM, então $v^* \neq 0$ e $Iv^* = 0$, como desejávamos.

Suponhamos agora $n > 1$ e que o teorema vale para $n-1$.

Para simplificar vamos escrever $B_i = M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$, $C_i = M/(y_1, \dots, y_{i-1})M$ para $i = 1, \dots, n$. Em particular, $B_1 = C_1 = M$. A existência dos elementos x_i, y_i mostra que $I \nsubseteq \mathcal{Z}(B_i), I \nsubseteq \mathcal{Z}(C_i)$, para qualquer i. Assim podemos deduzir a existência de um elemento z pertencendo a I mas não pertencendo a $\mathcal{Z}(B_i), \mathcal{Z}(C_i)$. Temos que como z não pertence a $\mathcal{Z}(B_n), \mathcal{Z}(B_{n-1}), \dots, \mathcal{Z}(B_1)$, o Lema 1.2.6 nos permite trazer o z para a frente dos elementos x, um de cada vez, obtendo que $(z, x_1, \dots, x_{n-1})$ é uma M-sequência regular. Evidentemente ela é maximal.

Exatamente da mesma forma obtemos $(z, y_1, \dots, y_{n-1})$ M-sequência regular, mas não sabemos se é maximal.

Agora passamos ao módulo M/zM no qual temos duas sequências regulares de comprimento $n-1$: $(x_1, \dots, x_{n-1})$ e $(y_1, \dots, y_{n-1})$, a primeira sendo maximal. Pela hipótese de indução nós obtemos que $(y_1, \dots, y_{n-1})$ é uma M/zM-sequência regular maximal, o que nos diz que $(y_1, \dots, y_{n-1}, z)$ é maximal em M. Aplicando novamente o caso $n = 1$ obtemos que $(y_1, \ldots, y_n)$ é M-sequência regular maximal e concluímos assim a demonstração do teorema.

$\blacksquare$

Definição 1.2.9. *Sejam A um anel noetheriano, I um ideal de A e M um A-módulo finitamente gerado tal que $IM \neq M$. O comprimento de todas as M-sequências regulares maximais contidas em I é chamado de grade(I, M). Se, em particular, A é um anel local e $\mathfrak{m}$ é seu ideal maximal, definimos* $\operatorname{depth}(M) = grade(\mathfrak{m}, M)$.

A demonstração formal da proposição a seguir pode ser encontrada no Teorema 131 de [6].

Proposição 1.2.10. *Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e M um A-módulo finitamente gerado. Então temos que uma sequência regular pode ser estendida a uma base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ e portanto* $\operatorname{depth} M \leq \dim M$.

Definição 1.2.11. *Seja $(A, \mathfrak{m})$ anel noetheriano local. Dizemos que A é anel Cohen-Macaulay, e tomamos como notação A C.M., quando* $\dim A = \operatorname{depth}\ A$.

1.3 Elementos Superficiais

Iniciamos essa seção com um resultado de [9] sobre a relação entre a função de Hilbert de um anel e o quociente de $(\mathfrak{m}^{n+1} : x)$ por $\mathfrak{m}^n$:

Teorema 1.3.1. *Seja A um anel local noetheriano com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e seja $x \in \mathfrak{m}$. Seja $B = A/(x)$. Então para todo $n \geq 0$, temos*

$$H_B^1(n) - H_A^0(n) = \lambda_A((\mathfrak{m}^{n+1} : x)/\mathfrak{m}^n)$$

Demonstração:

Provaremos por indução em n.

Para $n = 0$, a igualdade é clara, uma vez que ambos os lados são zero. Suponhamos que a igualdade vale para algum n. Seja $\mathfrak{m}_B = \mathfrak{m}/(x)$ o ideal maximal de B. As seguintes sequências são exatas:

$$0 \to \frac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}} \to \frac{(\mathfrak{m}^{n+1} : x)}{\mathfrak{m}^{n+1}} \to \frac{(\mathfrak{m}^{n+1} : x)}{\mathfrak{m}^n} \to 0 \tag{i}$$

$$0 \to \frac{\mathfrak{m}^{n+1} \bigcap (x)}{\mathfrak{m}^{n+2} \bigcap (x)} \to \frac{\mathfrak{m}^{n+1}}{\mathfrak{m}^{n+2}} \to \frac{\mathfrak{m}_B^{n+1}}{\mathfrak{m}_B^{n+2}} \to 0 \tag{ii}$$

$$0 \to \frac{(\mathfrak{m}^{n+2} : x)}{\mathfrak{m}^{n+1}} \to \frac{(\mathfrak{m}^{n+1} : x)}{\mathfrak{m}^{n+1}} \to \frac{\mathfrak{m}^{n+1} \bigcap (x)}{\mathfrak{m}^{n+2} \bigcap (x)} \to 0 \tag{iii}$$

Segue das sequências acima que

$$\begin{aligned}
\lambda_A\Big(\frac{(\mathfrak{m}^{n+2} : x)}{\mathfrak{m}^{n+1}}\Big) &= \lambda_A\Big(\frac{(\mathfrak{m}^{n+1} : x)}{\mathfrak{m}^{n+1}}\Big) - \lambda_A\Big(\frac{\mathfrak{m}^{n+1} \bigcap (x)}{\mathfrak{m}^{n+2} \bigcap (x)}\Big) \\
&= \lambda_A\Big(\frac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}}\Big) + \lambda_A\Big(\frac{(\mathfrak{m}^{n+1} : x)}{\mathfrak{m}^n}\Big) - \lambda_A\Big(\frac{\mathfrak{m}^{n+1}}{\mathfrak{m}^{n+2}}\Big) + \lambda_A\Big(\frac{\mathfrak{m}_B^{n+1}}{\mathfrak{m}_B^{n+2}}\Big) \\
&= H_A^0(n) + \Big(H_B^1(n) - H_A^0(n)\Big) - H_A^0(n+1) + H_B^0(n+1) \\
&= H_B^1(n+1) - H_A^0(n+1).
\end{aligned}$$

Onde a primeira igualdade decorre de (iii), a segunda de (i) e (ii), a terceira pela hipótese de indução e definição de função de Hilbert e a quarta pela definição de função de Hilbert iterada. E assim está provada a igualdade do teorema para $n+1$.

■

Introduziremos o conceito de elemento superficial conforme [3]:

Consideraremos elementos $x \in A$ tais que para todo $j \geq 0$

$$(\mathfrak{m}^{j+1} : x) = \mathfrak{m}^j$$

Temos assim que $x \in \mathfrak{m}$ e $x \notin \mathfrak{m}^2$, caso contrário $\mathfrak{m}^{j-1} \subseteq (\mathfrak{m}^{j+1} : x)$ e $\mathfrak{m}^{j-1} \supset \mathfrak{m}^j$.

Observe que considerarmos esses elementos torna-se natural após o Teorema acima, já que assim obtemos $H_B^1(n) = H_A^0(n)$.

Dessa forma, elementos com essa propriedade se comportam bem quando calculamos a função de Hilbert de um anel quocientado por eles, como veremos no que segue.

Proposição 1.3.2. *Sejam* $(A, \mathfrak{m})$ *um anel local,* $x \in \mathfrak{m}$ *e* $x \notin \mathfrak{m}^2$*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $(\mathfrak{m}^{j+1} : x) = \mathfrak{m}^j$ *para todo* $j \geq 0$*.*

(b) $P_{A/(x)}(z) = P_A(z)(1 - z)$*.*

(c) $x^* \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ *não é divisor de zero em* G_A*, onde* x^* *é a imagem de* x *em* $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$*.*

(d) $e_j(A) = e_j(A/(x))$ *para todo* $j \geq 0$

Além disso, se x *satisfaz alguma (portanto todas) as afirmações acima, então*

$$G_{\mathfrak{m}/(x)}(A/(x)) = G_{\mathfrak{m}}(A)/(x^*).$$

Demonstração:

Pelo Teorema 1.3.1,

$$P_A(z) = \sum_{j \geq 0} H_A(j) z^j = \sum_{j \geq 0} H^1_{A/(x)}(j) z^j - \sum_{j \geq 0} \lambda_A \Big(\frac{\mathfrak{m}^{j+1} : x}{\mathfrak{m}^j} \Big) z^j$$

$$= P^1_{A/(x)}(z) - \sum_{j \geq 0} \lambda_A \Big(\frac{\mathfrak{m}^{j+1} : x}{\mathfrak{m}^j} \Big) z^j.$$

Portanto, utilizando que $P^i_A(z) = (1-z)P^{i+1}_A(z)$, para todo $i \geq 0$, temos $P_{A/(x)}(z) = P_A(z) \cdot (1 - z)$ se e somente se $(\mathfrak{m}^{j+1} : x) = \mathfrak{m}^j$ para todo $j \geq 0$. Assim (a) e (b) são equivalentes.

Por [13] $x^* \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ não é divisor de zero em G_A se e somente se x não é divisor de zero em A e $(x) \bigcap \mathfrak{m}^{j+1} = x\mathfrak{m}^j$ para todo $j \geq 0$, isto é, $(\mathfrak{m}^{j+1} : x) = \mathfrak{m}^j$ para todo $j \geq 0$ e então temos $(a) \Leftrightarrow (c)$.

Além disso, se $P_{A/(x)}(z) = P_A(z)(1 - z)$, então A e $A/(x)$ possuem o mesmo h-vetor e portanto os mesmos coeficientes de Hilbert, assim $(b) \Rightarrow (d)$.

Finalmente, se $e_j(A) = e_j(A/(x))$, para todo $j \geq 0$, então A e $A/(x)$ possuem o mesmo h-vetor e portanto se tiverem a mesma dimensão terão a mesma função de Hilbert, o que é impossível pois $H_A(1) = \dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim_K \left(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2 + (x)}\right) + 1$

$= H_{A/(x)}(1) + 1.$
Onde a igualdade do meio vale pois $x \notin \mathfrak{m}^2$. Então $A/(x)$ tem dimensão $d-1$ e segue (b). A última afirmação da Proposição também é decorrente de [13].

■

Definição 1.3.3. *Dizemos que $x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ satisfazendo alguma das afirmações da Proposição anterior, e portanto todas, é um elemento superficial de A em $\mathfrak{m}$.*

Nem sempre podemos um encontrar elemento x tal que x^* não é divisor de zero em G_A, mas se supormos que o corpo de resíduos de A é infinito então temos a existência de elementos superficiais garantida. Ver [14] Proposição A.3.3.

É importante ressaltar que essa condição não é muito restritiva, pois se $K = A/\mathfrak{m}$ é um corpo finito podemos considerar $A[x]$ localizado em S, onde $S = A[x] - \mathfrak{m}[x]$, isto é, $A[x]_S$ e obtemos corpo residual infinito com $\dim A = \dim A[x]_S$ e a multiplicidade também se mantém. Este truque pode ser encontrado em [7].

Da Proposição anterior, podemos observar que um elemento superficial x de A em $\mathfrak{m}$ é também um elemento regular de A em $\mathfrak{m}$, caso contrário x seria um divisor de zero em $\mathfrak{m}$ e logo em $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, contrariando o item (c) da Proposição.

Definição 1.3.4. *Dizemos que um ideal $I \subseteq A$ é um ideal superficial se os geradores de I forem elementos superficiais.*
Um ideal próprio $J \subseteq A$ é dito superficial maximal se J é ideal superficial e nenhum elemento superficial de A pode ser acrescentado ao ideal sem que ele deixe de ser próprio.

1.4 Sistemas de Parâmetros e Reduções

Definição 1.4.1. *Seja $(A, \mathfrak{m})$ anel noetheriano local de dimensão d. Se $a_1, \ldots, a_d \in$*

$\mathfrak{m}$ gera um ideal $\mathfrak{m}$-primário, $\{a_1, \ldots, a_d\}$ é dito um sistema de parâmetros de A. Se M é um A-módulo finitamente gerado com $\dim M = r$, *existem elementos $b_1, \ldots, b_s \in \mathfrak{m}$ tais que $\lambda(M/(b_1, \ldots, b_s)M) < \infty$ e então $\{b_1, \ldots, b_s\}$ forma um sistema de parâmetros de M.*

Enunciamos agora um resultado de [19] (Teorema 3 do Apêndice 6) sobre comprimentos de ideais gerados por sistemas de parâmetros.

Proposição 1.4.2. *Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel local, são equivalentes:*
(a) A é Cohen-Macaulay.
(b) Para todo ideal $J \subseteq A$ gerado por um sistema de parâmetros temos $e(J) = \lambda_A(A/J)$

Definição 1.4.3. *O ideal $J \subseteq I$ é chamado uma redução de I se existe um inteiro $r \geq 0$ tal que $I^{r+1} = JI^r$. Dizemos que J é uma redução minimal de I se J é uma redução de I e J não possui nenhuma redução própria. Se J é uma redução minimal de I, o número de redução de I com respeito a J é*

$$r_J(I) = min\{r \geq 0 \mid I^{r+1} = JI^r\}$$

O número de redução de I é definido como

$$r(I) = min\{r_J(I) \mid J \text{ é uma redução minimal de } I\}$$

Vasconcelos demonstrou na Proposição A.3.3 de [14] que podemos obter uma redução minimal J de $\mathfrak{m}$ constituída de elementos superficiais de $\mathfrak{m}$.

Enunciamos agora um resultado de [7] (Teorema 14.13) sobre a multiplicidade de reduções.

Proposição 1.4.4. *Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local, I um ideal $\mathfrak{m}$-primário e J uma redução de I, então J é também $\mathfrak{m}$-primário, e $e(I) = e(J)$, onde $e(J)$ é a multiplicidade de J em A.*

Capítulo 2

Demonstrando a Conjectura

2.1 Lemas Básicos

Nesta seção desenvolvemos uma série de lemas necessários à demonstração da Conjectura.

Assumimos, de agora em diante, que $(A, \mathfrak{m})$ é um anel local C.M. de dimensão 2, de dimensão de imersão e, onde e é a multiplicidade de A, e com corpo de resíduos infinito. Como $A/\mathfrak{m}$ é infinito e $\dim A = 2$, podemos escolher x,$y \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ tais que x e y são elementos superficiais de $\mathfrak{m}$ e $J = (x, y)$ é uma redução minimal de $\mathfrak{m}$, graças à Proposição A.3.3 de [14].

Seja r o número de redução de J com respeito a $\mathfrak{m}$, ou seja, o menor inteiro tal que $\mathfrak{m}^{r+1} = J\mathfrak{m}^r$. Tomamos l como o menor inteiro tal que $\overline{\mathfrak{m}}^{l+1} = \overline{J}\overline{\mathfrak{m}}^l$, onde a barra indica módulo x.

Sabemos que $l \leq r$ pois $\mathfrak{m}^{r+1} = J\mathfrak{m}^r$ implica que $\overline{\mathfrak{m}}^{r+1} = \overline{J}\overline{\mathfrak{m}}^r$.

Podemos supor que $\mathfrak{m}^2 \neq J\mathfrak{m}$ pois Sally demonstrou em [10] e [11] que em dimensão $e+d-2$, G_A é Cohen-macaulay, isto é $\operatorname{depth} G_A = \dim G_A$, se e somente se $\mathfrak{m}^3 = J\mathfrak{m}^2$. Assim, no caso $\mathfrak{m}^2 = J\mathfrak{m}$ temos que $\operatorname{depth} G_A = \dim G_A = \dim A = d$.

O lema a seguir é fundamental para o desenvolvimento da demonstração e será utilizado diversas vezes.

Lema 2.1.1. $\lambda(\mathfrak{m}^{n+1}/J\mathfrak{m}^n) \leq 1$, $\forall n \geqq 1$.

Demonstração: Como a dimensão de imersão é e, existem $z_1, \ldots, z_{e-2} \in \mathfrak{m}$ tais que $\mathfrak{m} = (x, y, z_1, \ldots, z_{e-2})$. Além disso, J é uma redução de $\mathfrak{m}$ e portanto podemos aplicar as Proposições 1.4.2, e 1.4.4 obtendo $e = e(\mathfrak{m}) = e(J) = \lambda(A/J)$ e assim como $\lambda(\mathfrak{m}/J) = \lambda(A/J) - 1$, temos que $\lambda(\mathfrak{m}/J) = e - 1$.
Desta forma, existe um inteiro k, $1 \leq k \leq e-2$, tal que

$$\lambda\Big(\frac{J + (z_1, \ldots, z_i)}{J + (z_1, \ldots, z_{i-1})}\Big) = 1 \text{ , se } i \neq k$$

$$\text{e } \lambda\Big(\frac{J + (z_1, \ldots, z_k)}{J + (z_1, \ldots, z_{k-1})}\Big) = 2$$

Assim, temos para todo $i \neq k$

$$z_i\mathfrak{m} \subseteq (J + (z_1, \ldots, z_{i-1})) \cap \mathfrak{m}^2$$

pois $\lambda\Big(\dfrac{J + (z_1, \ldots, z_i)}{J + (z_1, \ldots, z_{i-1})}\Big) = 1$ e $z_i\mathfrak{m} \subsetneq (z_i)$.
Além disso,

$$(J + (z_1, \ldots, z_{i-1})) \cap \mathfrak{m}^2 = J\mathfrak{m} + (z_1, \ldots, z_{i-1})\mathfrak{m} \tag{1}$$

pois, se $a \in (J+(z_1, \ldots, z_{i-1}))\cap\mathfrak{m}^2$ tal que $a \notin J\mathfrak{m}$, então existem $\alpha, \beta, b_1, \ldots, b_{i-1} \in A$ tais que $a = (\alpha x+\beta y)+\sum_{j=1}^{i-1} b_j z_j \in \mathfrak{m}^2$. Como $a \notin J\mathfrak{m}$, existe $j \in \{1, \ldots, i-1\}$ tal que $b_j \notin J$ e desse modo $a \in J\mathfrak{m} + (z_1, \ldots, z_{i-1})\mathfrak{m}$. Portanto $(J + (z_1, \ldots, z_{i-1})) \cap \mathfrak{m}^2 \subseteq J\mathfrak{m} + (z_1, \ldots, z_{i-1})\mathfrak{m}$. A outra inclusão é imediata.
Assim, para todo $i \neq k$

$$z_i\mathfrak{m} \subseteq J\mathfrak{m} + (z_1, \ldots, z_{i-1})\mathfrak{m}$$

Note que do epimorfismo

$$\begin{cases} R \to \dfrac{J+(z_1,\ldots,z_k)}{J+(z_1,\ldots,z_{k-1})} \\ r \mapsto \overline{rz_k} \end{cases}$$

concluímos que

$$\frac{R}{((J+(z_1,\ldots,z_{k-1})):z_k)} \simeq \frac{J+(z_1,\ldots,z_k)}{J+(z_1,\ldots,z_{k-1})}.$$

Como $\lambda\Big(\dfrac{R}{((J+(z_1,\ldots,z_{k-1})):z_k)}\Big) = \lambda\Big(\dfrac{J+(z_1,\ldots,z_k)}{J+(z_1,\ldots,z_{k-1})}\Big) = 2$, temos que

$$\lambda\Big(\frac{\mathfrak{m}}{((J+(z_1,\ldots,z_{k-1})):z_k)}\Big) = 1$$

Portanto, existe um elemento $w \in \mathfrak{m}$ tal que

$$\mathfrak{m} = ((J+(z_1,\ldots,z_{k-1})):z_k) + (w) \qquad (\star)$$

e

$$w\mathfrak{m} \subseteq ((J+(z_1,\ldots,z_{k-1})):z_k) \qquad (\star\star)$$

De $(\star)$ e (1), obtemos

$$z_k\mathfrak{m} \subseteq (wz_k) + (J+(z_1,\ldots,z_{k-1})) \cap \mathfrak{m}^2 = (wz_k) + J\mathfrak{m} + (z_1,\ldots,z_{k-1})\mathfrak{m} \qquad (2)$$

e assim $(wz_k\mathfrak{m}) \subseteq (J+(z_1,\ldots,z_{k-1})) \cap \mathfrak{m}^2 = J\mathfrak{m} + (z_1,\ldots,z_{k-1})\mathfrak{m}$.

Usando (2) indutivamente (e $(\star)$ para o passo de indução), obtemos que $\forall n \geq 1$, $z_k\mathfrak{m}^n \subseteq J\mathfrak{m}^n + (z_1,\ldots,z_{k-1})\mathfrak{m}^n + (w^n z_k)$. Para completar a prova, usando (1) repetidamente obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m}^{n+1} &= J\mathfrak{m}^n + (z_1, \dots, z_{e-2})\mathfrak{m}^n \\
&= J\mathfrak{m}^n + (z_1, \dots, z_{e-3})\mathfrak{m}^n \\
&= \dots \\
&= J\mathfrak{m}^n + (z_1, \dots, z_k)\mathfrak{m}^n \\
&= J\mathfrak{m}^n + (z_1, \dots, z_{k-1})\mathfrak{m}^n + (w^n z_k) \\
&= \dots \\
&= J\mathfrak{m}^n + (w^n z_k)
\end{aligned}$$

e assim,

$$w^n z_k \mathfrak{m} \subseteq w^{n-1}(w z_k \mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}^{n-1}(J\mathfrak{m} + (z_1, \dots, z_{k-1})\mathfrak{m})$$

$$= J\mathfrak{m}^n + (z_1, \dots, z_{k-1})\mathfrak{m}^n = J\mathfrak{m}^n$$

Então, concluímos que $(z_1, \dots, z_{k-1})\mathfrak{m}^n \subseteq J\mathfrak{m}^n$ e assim obtemos que $\lambda(\mathfrak{m}^{n+1}/J\mathfrak{m}^n) = \lambda(J\mathfrak{m}^n + (w^n z_k)/J\mathfrak{m}^n) \leq 1$

■

Lema 2.1.2. $\mathfrak{m}^3 \subseteq J\mathfrak{m}$

Demonstração: Da prova do lema anterior sabemos que existem $z, w \in \mathfrak{m}$ tais que $\mathfrak{m}^2 = J\mathfrak{m} + (zw)$ e $\mathfrak{m}^3 = J\mathfrak{m}^2 + (zw^2)$. Como $\lambda(\mathfrak{m}^2/J\mathfrak{m}) \leq 1$, $zw^2 \in (zw)\mathfrak{m} \subseteq J\mathfrak{m}$ e assim $\mathfrak{m}^3 \subseteq J\mathfrak{m}$ como desejado.

■

Lema 2.1.3. *Seja $z \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ tal que $\mathfrak{m}^2 = J\mathfrak{m} + z\mathfrak{m}$. Se $\mathfrak{m}^3 \neq J\mathfrak{m}^2$, então para todo $w \in \mathfrak{m}^2 - J\mathfrak{m}$, $wz \in \mathfrak{m}^3 - J\mathfrak{m}^2$.*

Demonstração: Por hipótese, $\mathfrak{m}^3 = J\mathfrak{m}^2 + z\mathfrak{m}^2$, como $\mathfrak{m}^3 \neq J\mathfrak{m}^2$, temos que existe $u \in \mathfrak{m}^2 - J\mathfrak{m}$ tal que $zu \in \mathfrak{m}^3 - J\mathfrak{m}^2$. Seja $w \in \mathfrak{m}^2 - J\mathfrak{m}$, por 2.1.1 $\lambda(\mathfrak{m}^2/J\mathfrak{m}) \leq 1$, logo existe $\xi \in A$ tal que $u - \xi w \in J\mathfrak{m}$. Temos que ξ é invertível, caso contrário, $\xi \in \mathfrak{m}$ e portanto $\xi w \in \mathfrak{m}^3 \subseteq J\mathfrak{m}$ mas se $\xi w \in J\mathfrak{m}$ então $u \in J\mathfrak{m}$, o que contraria a escolha de u, logo ξ invertível. Temos então $zu - \xi zw \in J\mathfrak{m}^2$, e como $zu \notin J\mathfrak{m}^2$, temos que $zw \notin J\mathfrak{m}^2$. E assim, $zw \in \mathfrak{m}^3 - J\mathfrak{m}^2$.

■

Lema 2.1.4. *Se* $\mathfrak{m}^3 \neq J\mathfrak{m}^2$, *então* $\mathfrak{m} = (x, y, z, z_1, \ldots, z_{e-3})$, *para alguns elementos* $z, z_1, \ldots, z_{e-3} \in \mathfrak{m}$ *tais que* $z_i\mathfrak{m} \subseteq J\mathfrak{m}$, *para todo* $i \in \{1, \ldots, e-3\}$.

Demonstração: Como $\mathfrak{m}^2 \neq J\mathfrak{m}$ e a dimensão de imersão de A é e, podemos escolher $z, z_1, \ldots, z_{e-3} \in \mathfrak{m}$ tais que $\mathfrak{m} = (x, y, z, z_1, \ldots, z_{e-3})$ e $\mathfrak{m}^2 = J\mathfrak{m} + z\mathfrak{m}$. Se para algum i, $z_i\mathfrak{m} \nsubseteq J\mathfrak{m}$, então $\mathfrak{m}^2 = J\mathfrak{m} + z_i\mathfrak{m}$ e existe $u \in \mathfrak{m}$ tal que $z_iu \in \mathfrak{m}^2 - J\mathfrak{m}$. Segue do lema anterior que ambos zz_iu e z_i^2u não estão em $J\mathfrak{m}^2$. Como $\lambda(\mathfrak{m}^3/J\mathfrak{m}^2) = 1$ (pois $\lambda(\mathfrak{m}^3/J\mathfrak{m}^2) \leq 1$ e $J\mathfrak{m}^2 \subsetneq \mathfrak{m}^3$) temos que $zz_iu - \xi z_i^2u = (z - \xi z_i)z_iu \in J\mathfrak{m}^2$ para algum ξ invertível.
Note que se $(z - \xi z_i)\mathfrak{m} \nsubseteq J\mathfrak{m}$ então $\mathfrak{m}^2 = J\mathfrak{m} + (z - \xi z_i)\mathfrak{m}$ e então novamente pelo lema anterior, $(z - \xi z_i)z_iu \notin J\mathfrak{m}^2$, contradição.
Portanto $(z - \xi z_i)\mathfrak{m} \subseteq J\mathfrak{m}$ e podemos mudar o gerador z_i por $z - \xi z_i$, obtendo a propriedade desejada.

■

Lema 2.1.5. *Assuma* $\mathfrak{m}^3 \neq J\mathfrak{m}^2$ *e* $\mathfrak{m} = (x, y, z, z_1, \ldots, z_{e-3})$ *com* $z_i\mathfrak{m} \subseteq J\mathfrak{m}$, *para todo* $i \in \{1, \ldots, e-3\}$. *Se* $J^n\mathfrak{m}^k = (a_1, \ldots, a_t) + J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$ *para algum* $n \geq 0$ *e* $k \geq 1$, *então* $J^n\mathfrak{m}^{k+1} = (a_1z, \ldots, a_tz) + J^{n+1}\mathfrak{m}^k$.

Demonstração: Como $a_i \in J^n\mathfrak{m}^k$, utilizando o resultado anterior, temos que $a_ix, a_iy, a_iz_i \in J^{n+1}\mathfrak{m}^k$, para $i \in \{1, \ldots, e-3\}$, logo

$$a_i\mathfrak{m} = a_i(x, y, z, z_1, \ldots, z_{e-3}) \subseteq (a_iz) + J^{n+1}\mathfrak{m}^k + \sum_{j=1}^{e-3} z_jJ^n\mathfrak{m}^k \subseteq (a_iz) + J^{n+1}\mathfrak{m}^k$$

Segue que $J^n\mathfrak{m}^{k+1} = (a_1, \ldots, a_t)\mathfrak{m} + J^{n+1}\mathfrak{m}^k = (a_1z, \ldots, a_tz) + J^{n+1}\mathfrak{m}^k$.

■

Lema 2.1.6. *Seja l como definimos anteriormente, ou seja, o menor inteiro tal que $\overline{\mathfrak{m}}^{l+1} = \overline{J}\overline{\mathfrak{m}}^l$, onde a barra indica módulo x. Então temos que:*

(i) $l \geq 2$

(ii) $e_1(\mathfrak{m}) = \lambda(\mathfrak{m}/J) + l - 1$

(iii) *l é o menor inteiro tal que* $\mathfrak{m}^{l+1} = J\mathfrak{m}^l[mod(y)]$

(iv) $(\mathfrak{m}^k : x) = \mathfrak{m}^{k-1}$ *e* $(\mathfrak{m}^k : y) = \mathfrak{m}^{k-1}$, $\forall k \leq l$.

(v) Se $\mathfrak{m}^{l+1} \neq J\mathfrak{m}^l$ *então* $(\mathfrak{m}^{l+1} : x) \nsubseteq \mathfrak{m}^l$ *e* $(\mathfrak{m}^{l+1} : y) \nsubseteq \mathfrak{m}^l$

Demonstração: .

(i) Se $l = 1$, então $\overline{\mathfrak{m}}^2 = \overline{J}\overline{\mathfrak{m}}$ e portanto $\mathfrak{m}^2 = J\mathfrak{m} + (x\kappa)$, para algum $\kappa \in \mathfrak{m}^2$ e $(x)\kappa \subseteq J\mathfrak{m}$, assim $\mathfrak{m}^2 = J\mathfrak{m}$, o que supomos falso. Contradição, logo $l \geq 2$.

(ii) Por [17], Lema 2.1, demonstrado em [5], temos:

$$e_1(\mathfrak{m}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\Big(\frac{\mathfrak{m}^n}{J\mathfrak{m}^{n-1} + \mathfrak{m}^n \cap (x)}\Big).$$

Sabemos que $\lambda\Big(\frac{\mathfrak{m}^n}{J\mathfrak{m}^{n-1} + \mathfrak{m}^n \cap (x)}\Big) = \lambda\Big(\frac{\overline{\mathfrak{m}}^n}{\overline{J}\overline{\mathfrak{m}}^{n-1}}\Big) = 1$, para todo n tal que $2 \leq n \leq l$, pois l é o menor inteiro tal que $\lambda(\overline{\mathfrak{m}}^{l+1}/\overline{J}\overline{\mathfrak{m}}^l) = 0$ e assim $\lambda\Big(\frac{\overline{\mathfrak{m}}^{n+1}}{\overline{J}\overline{\mathfrak{m}}^n}\Big) \geq 1$, para todo n tal que $1 \leq n \leq l-1$ e $\lambda\Big(\frac{\overline{\mathfrak{m}}^{n+1}}{\overline{J}\overline{\mathfrak{m}}^n}\Big) \leq \lambda\Big(\frac{\mathfrak{m}^{n+1}}{J\mathfrak{m}^n}\Big) \leq 1$, pelo Lema 2.1.1.
Além disso, x é elemento superficial, logo $e_1(\mathfrak{m}) = e_1(\overline{\mathfrak{m}})$, e assim obtemos

$$e_1(\mathfrak{m}) = e_1(\overline{\mathfrak{m}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda\Big(\frac{\overline{\mathfrak{m}}^{n+1}}{\overline{J}\overline{\mathfrak{m}}^n}\Big) = \lambda(\mathfrak{m}/J) + \sum_{n=1}^{l-1} \lambda\Big(\frac{\overline{\mathfrak{m}}^{n+1}}{\overline{J}\overline{\mathfrak{m}}^n}\Big).$$

Assim, $e_1(\mathfrak{m}) = \lambda(\mathfrak{m}/J) + l - 1$.

(iii) Como y também é um elemento superficial de $\mathfrak{m}$, então da demonstração do item anterior temos que se l' é o menor inteiro tal que $\mathfrak{m}^{l'+1} = J\mathfrak{m}^{l'}[mod(y)]$, então $e_1(\mathfrak{m}) = \lambda(\mathfrak{m}/J) + l' - 1$. Portanto $l' = l$.

(iv) A Proposição 1.3.2 (a) garante a afirmação.

(v) Como $\overline{\mathfrak{m}}^{l+1} = \overline{J}\overline{\mathfrak{m}}^l$, temos $\mathfrak{m}^{l+1} = J\mathfrak{m}^l + ((x) \cap \mathfrak{m}^{l+1})$, e assim, se $\mathfrak{m}^{l+1} \neq J\mathfrak{m}^l$

então $(x) \cap \mathfrak{m}^{l+1} \nsubseteq J\mathfrak{m}^l$ e portanto $(\mathfrak{m}^{l+1} : x) \nsubseteq \mathfrak{m}^l$. Analogamente obtemos o resultado para y.

■

Da demonstração do item (iv) do lema anterior, obtemos:

Corolário 2.1.7. *Para todo $n \geq 1$ e para todo $k \leq l$, $(J^n\mathfrak{m}^k : x) = (J^n\mathfrak{m}^k : y) = J^{n-1}\mathfrak{m}^k$*

Como preparação para a demonstração da conjectura Wang estudou em [17] e [18] a sequência exata abaixo em um contexto mais geral do que o que será utilizado aqui.

Consideremos para $1 \leq k \leq r$ a sequência exata curta

$$0 \to T_{k,n} \to \bigoplus^{n+1} \mathfrak{m}^k/J\mathfrak{m}^{k-1} \xrightarrow{\phi_n} S_{k,n} = \frac{J^n\mathfrak{m}^k}{J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}} \to 0 \tag{3}$$

Onde $\phi_n = (y^n, y^{n-1}x, \ldots, x^n)$ e $T_{k,n} = Ker(\phi_n)$.

Lembrando que r é o menor inteiro tal que $frakm^{r+1} = J\mathfrak{m}^r$ apresentamos o seguinte lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [17] e [18].

Lema 2.1.8. *São verdadeiras as seguintes afirmações:*

(i) $e_1(\mathfrak{m}) = \lambda(\mathfrak{m}/J) + \lim_{n\to\infty} \dfrac{\lambda(\mathfrak{m}^{n+1}/J^n\mathfrak{m})}{n}$ *e para* $n \gg 0$,
$\lambda(\mathfrak{m}^{n+1}/J^n\mathfrak{m}) = \displaystyle\sum_{k=2}^{r} \lambda(S_{k,n+1-k})$.

(ii) Para todo k tal que $1 \leq k \leq r$, ou $T_{k,n} = 0$ para todo n ou $\lambda(T_{k,n})$ é um polinômio em n de grau 1 para $n \gg 0$.

(iii) $T_{1,n} = 0$, para todo n.

Utilizando o Lema 2.1.8, temos que:

Lema 2.1.9. *São verdadeiras as seguintes afirmações:*

(i) Para todo $2 \leq k \leq r$ ou $T_{k,n} = 0$, para todo n ou $\lambda(T_{k,n})$ é um polinômio mônico em n de grau 1 para $n \gg 0$.

(ii) Para todo $2 \leq k \leq l$, $T_{k,n} = 0$, para todo n.

Demonstração:

(i) Segue do lema anterior, item (ii) que $T_{k,n} = 0$ para todo n ou $\lambda(T_{k,n})$ é um polinômio em n de grau. Utilizando a soma dos comprimentos em sequências exatas em (3), obtemos que para todo k tal que $2 \leq k \leq r$

$$\lambda(T_{k,n}) = (n+1)\lambda(\mathfrak{m}^k/J\mathfrak{m}^{k-1}) - \lambda(J^n\mathfrak{m}^k/J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1})$$

E portanto, como para $k \leq r$, $\lambda(\mathfrak{m}^k/J\mathfrak{m}^{k-1}) = 1$,

$$\lambda(T_{k,n}) \leq (n+1)\lambda(\mathfrak{m}^k/J\mathfrak{m}^{k-1}) = n+1$$

Assim, o polinômio deverá ser mônico.

(ii) Seja $2 \leq k \leq l$ se para algum n, $T_{k,n} \neq 0$, então existem elementos $u_0, \ldots, u_n \in \mathfrak{m}^k$ nem todos em $J\mathfrak{m}^{k-1}$ tais que $\sum_{i=0}^{n} u_i x^{n-i} y^i \in J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1} = (J\mathfrak{m}^{k-1})J^n$ Mas $J\mathfrak{m}^{k-1}$ é 0 em $\mathfrak{m}^k/J\mathfrak{m}^{k-1}$ logo podemos supor (mudando os $u_i's$ se necessário) que $\sum_{i=0}^{n} u_i x^{n-i} y^i = u_0 x^n + u_1 x^{n-1} y + \ldots + u_n y^n = 0$

Assim, como $\{x, y\}$ forma uma sequência regular, isolando cada elemento na igualdade anterior observamos que existem elementos $w_1, \ldots, w_n$ tais que $u_0 = w_1 y$, $u_i = -w_i x + w_{i+1} y$, para todo i tal que $1 \leq i \leq n-1$ e $u_n = -w_n x$.

Assim, temos que $u_0 = w_1 y \in \mathfrak{m}^k$ e pelo Lema 2.1.6 (iv), $(\mathfrak{m}^k : y) = \mathfrak{m}^{k-1}$ então $w_1 \in \mathfrak{m}^{k-1}$. Além disso, $u_1 = -w_1 x + w_2 y \in \mathfrak{m}^k$ e $w_1 x \in \mathfrak{m}^k$, logo $w_2 y \in \mathfrak{m}^k$ e assim novamente $w_2 \in (\mathfrak{m}^k : y) = \mathfrak{m}^{k-1}$, prosseguindo desta forma obtemos $w_i \in \mathfrak{m}^{k-1}$ para todo i e então $u_i \in J\mathfrak{m}^{k-1}$, para todo i, contradição. Portanto (ii) vale.

$\blacksquare$

Lema 2.1.10. *Se $l = r$ então* $\operatorname{depth} G_A > 0$

Demonstração: Utilizando o Lema 2.1.6 (ii) para a primeira igualdade, $l = r$ para a segunda e a definição de r como o primeiro inteiro tal que $\mathfrak{m}^{r+1} = J\mathfrak{m}^r$ e portanto $\lambda(\mathfrak{m}^{r+1}/J\mathfrak{m}^r) = 0$ para a terceira, obtemos que

$$e_1(\mathfrak{m}) = \lambda(\mathfrak{m}/J) + l - 1 = \lambda(\mathfrak{m}/J) + r - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\Big(\frac{\mathfrak{m}^k}{J\mathfrak{m}^{k-1}}\Big).$$

O Teorema 3.1 de [4] garante que

$$e_1(\mathfrak{m}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\Big(\frac{\mathfrak{m}^k}{J\mathfrak{m}^{k-1}}\Big) \Leftrightarrow \operatorname{depth} G_A \geq 1$$

e assim obtemos o resultado desejado.

■

Corolário 2.1.11. *Se* $\mathfrak{m}^3 = J\mathfrak{m}^2$ *então* $\operatorname{depth} G_A > 0$.

Demonstração: Por 2.1.6, item (i), temos que $l \geq 2$. Se $\mathfrak{m}^3 = J\mathfrak{m}^2$ então $2 \leq l \leq r \leq 2$ e portanto $l = r$. Segue pelo lema anterior que $\operatorname{depth} G_A > 0$ ■

Lema 2.1.12. *Se* $\mathfrak{m}^{l+1} \neq J\mathfrak{m}^l$ *então* $\lambda(T_{l+1,n})$ *é um polinômio mônico em* n *para* $n \gg 0$.

Demonstração: Se $\mathfrak{m}^{l+1} \neq J\mathfrak{m}^l$ então $r \geq l + 1$. Da sequência exata (3) que precede o Lema 2.1.8 temos que $\lambda(S_{k,n+1-k}) = (n+2-k)\lambda(\mathfrak{m}^k/J\mathfrak{m}^{k-1}) - \lambda(T_{k,n+1-k})$, portanto

$$e_1(\mathfrak{m}) \geq \lambda(\mathfrak{m}/J) + \sum_{k=2}^{l+1} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2-k)}{n}\lambda(\mathfrak{m}^k/J\mathfrak{m}^{k-1}) - \sum_{k=2}^{l+1} \lim_{n\to\infty} \lambda(T_{k,n+1-k})$$

Pelo Lema 2.1.8 (i), se $k \leq l$, $T_{k,n} = 0$ para todo natural n, logo temos

$$\sum_{k=2}^{l+1} \lim_{n\to\infty} \lambda(T_{k,n+1-k}) = \lim_{n\to\infty} \lambda(T_{l+1,n+1-k}).$$

Observe também que $\lambda(\mathfrak{m}^k/J\mathfrak{m}^{k-1}) = 1$ pois $2 \leq k \leq l + 1$ e portanto

$$\sum_{k=2}^{l+1} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2-k)}{n}\lambda(\mathfrak{m}^k/J\mathfrak{m}^{k-1}) = l.$$

Temos assim que $e_1(\mathfrak{m}) \geq \lambda(\mathfrak{m}/J) + l - \lim_{n\to\infty} \lambda(T_{l+1,n+1-k})$.
Assim, se $T_{l+1,n} = 0$ para todo n, então $e_1(\mathfrak{m}) \geq \lambda(\mathfrak{m}/J) + l$ o que contradiz o Lema 2.1.6 (ii). Portanto, por 2.1.9 (i), $\lambda(T_{l+1,n})$ é polinômio mônico em n de grau 1 para $n \gg 0$. ■

2.2 Resultado Principal

O resultado que desejamos provar é o seguinte.

Teorema 2.2.1. *Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel local C.M. de dimensão d e dimensão de imersão $e + d - 2$ com corpo residual infinito. Então* $\operatorname{depth} G_A \geq d - 1$.

Seja $J^* = (x_1, \ldots, x_s) \subseteq A$ gerado por uma sequência superficial em A e $(B, \eta) = (A/J^*, \mathfrak{m}/J^*)$. A propriedade chamada *Sally Machine* diz que

$$\operatorname{depth} G_A \geq s + 1 \Leftrightarrow \operatorname{depth} G_B \geq 1.$$

Sally provou esse resultado para o caso $s = d - 1$, em [12], e uma prova do caso geral foi dada por Huckaba e Marley, em [5].
No nosso caso, temos $J^* = (x_1, \ldots, x_{d-2}) \subseteq A$ e $B = A/J^*$ e a propriedade nos diz que $\operatorname{depth} G_A \geq (d-2) + 1 = d - 1 \Leftrightarrow \operatorname{depth} G_B \geq 1$.
Como $\dim B = \dim A/J^* = 2$, temos que se demonstrarmos o teorema para $d = 2$, teremos, através da Sally Machine, o resultado desejado e portanto consideramos, a partir de agora, que $d = 2$.
Se $\mathfrak{m}^3 = J\mathfrak{m}^2$, pelo Lema 2.1.11 $\operatorname{depth} G_A > 0$ e portanto o Teorema 2.2.1 vale. Assim, supomos também de agora em diante que $\mathfrak{m}^3 \neq J\mathfrak{m}^2$. Se $l = r$ então pelo Lema 2.1.10 $\operatorname{depth} G_A \geq 1 = d - 1$ e o Teorema 2.2.1 vale . Vamos mostrar que $l < r$ não pode ocorrer. A seguir, supondo $l < r$, vamos obter alguns resultados.

Lema 2.2.2. *Se $l < r$ então existe $w \notin \mathfrak{m}^{l-1}$ tal que $wxy \in \mathfrak{m}^{l+1} - J\mathfrak{m}^l$.*

Demonstração: Como $l < r, \mathfrak{m}^{l+1} \neq J\mathfrak{m}^l$, logo pelo Lema 2.1.6 (v), $(\mathfrak{m}^{l+1} : y) \nsubseteq \mathfrak{m}^l$ assim, existe $u \notin \mathfrak{m}^l$ tal que $uy \in \mathfrak{m}^{l+1}$, portanto $\overline{uy} \in \overline{\mathfrak{m}}^{l+1} = \overline{J}\overline{\mathfrak{m}}^l$, onde a barra indica módulo x. Como $J = (x, y)$ temos que $\overline{J} = (\overline{y})$ e portanto $\overline{xy} \in (\overline{y})\overline{\mathfrak{m}}^l$. Como $\overline{y}$ não é divisor de zero em A/x, $\overline{u} \in \overline{\mathfrak{m}}^l$ e existe $w \in A$ tal que $wx - u \in \mathfrak{m}^l$, logo $wxy - uy \in \mathfrak{m}^{l+1}$ e assim $wxy \in \mathfrak{m}^{l+1}$.
Sabemos que $w \notin \mathfrak{m}^{l-1}$ pois caso contrário, $wx \in \mathfrak{m}^l$ e $wx - u \in \mathfrak{m}^l$ implicaria que $u \in \mathfrak{m}^l$ o que contradiz a escolha de u.
Além disso, se $wxy \in J\mathfrak{m}^l$ então $wy \in (J\mathfrak{m}^l : x)$ e pelo Corolário 2.1.7 teríamos $wy \in \mathfrak{m}^l$, ou seja, $w \in (\mathfrak{m}^l : y)$. Assim, pelo Lema 2.1.6 (iv), $w \in \mathfrak{m}^{l-1}$, o que contraria a escolha de w. Desse modo $wxy \notin J\mathfrak{m}^l$.

■

No que segue, se $l < r$ então w será o elemento tal que $wxy \in \mathfrak{m}^{l+1} - J\mathfrak{m}^l$. Dado $F \in A[X, Y]$, indicaremos $F(x, y)$ por f e para os demais polinômios, da mesma forma, a letra minúscula indicará o polinômio aplicado em x, y.
Seja t o menor inteiro positivo tal que $T_{l+1,t} \neq 0$. (para $T_{k,n}$ como foi definido na sequência exata (3) que antecede o Lema 2.1.8)

Lema 2.2.3. *Se $l < r$ então vale:*
(i) Existe um polinômio homogêneo $F \in A[X, Y]$ de grau t, com os coeficientes de X^t e de Y^t invertíveis, tal que $wf \in J^{t-1}\mathfrak{m}^l$ e $\mathfrak{m}^{l+1}f \subseteq J^{t+1}\mathfrak{m}^l$.
(ii) $wx^{t+1} \in J^{t-1}\mathfrak{m}^{l+1} - J^t\mathfrak{m}^l$ e $wJ^{t+1} \subseteq J^{t-1}\mathfrak{m}^{l+1}$.
(iii) Para todo $n \geq t - 1$, $\lambda(J^n\mathfrak{m}^{l+1}/J^{n+1}\mathfrak{m}^l) = t$ e
$J^n\mathfrak{m}^{l+1} = (wx^{n+2}, wx^{n+1}y, \ldots, wx^{n+3-t}y^{t-1}) + J^{n+1}\mathfrak{m}^l$.
(iv) Seja $2 \leq k \leq l$. Se para algum $u \in J^{t-1}\mathfrak{m}^k$, $uz^{l+1-k} \in J^t\mathfrak{m}^l$, então $u \in J^t\mathfrak{m}^{k-1}$.

Demonstração:

(i) Como observado acima, $T_{l+1,t} \neq 0$, então existem $u_0, \ldots, u_t \in \mathfrak{m}^{l+1}$ não todos em $J\mathfrak{m}^l$ tais que $\sum_{i=0}^{t} u_i x^i y^{t-i} \in J^{t+1}\mathfrak{m}^l$. Tomamos $w \notin \mathfrak{m}^{l-1}$ do lema anterior e temos $wxy \in \mathfrak{m}^{l+1} - J\mathfrak{m}^l$.

Como $\lambda(\mathfrak{m}^{l+1}/J\mathfrak{m}^l) \leq 1$ existem $\xi_0, \ldots, \xi_t$ não todos em $\mathfrak{m}$ tais que $u_i - \xi_i wxy \in J\mathfrak{m}^l$, caso contrário teríamos conjuntos de dois elementos linearmente independentes em $\mathfrak{m}^{l+1}/J\mathfrak{m}^l$. Como para todo $i \in \{0, \ldots, t\}$, $(u_i - \xi_i wxy)x^i y^{t-i} \in J^{t+1}\mathfrak{m}^l$ e $u_i x^i y^{t-i} \in J^{t+1}\mathfrak{m}^l$, temos que

$$\xi_i wxyx^i y^{t-i} \in J^{t+1}\mathfrak{m}^l \tag{4}$$

Se $\xi_0 \in \mathfrak{m}$, então $\xi_0 wxyy^t \in J^t\mathfrak{m}^{l+2} \subseteq J^{t+1}\mathfrak{m}^l$ pois pelo Lema 2.1.2 $\mathfrak{m}^3 \subseteq J\mathfrak{m}$.

Desse modo $\sum_{i=1}^{t} \xi_i wxyx^i y^{t-i} \in J^{t+1}\mathfrak{m}^l$. Fazendo a mudança de variável $i \to i+1$: $\sum_{i=0}^{t-1} \xi_{i+1} wxyx^{i+1} y^{t-i-1} \in J^{t+1}\mathfrak{m}^l$, e assim, $x \sum_{i=0}^{t-1} \xi_{i+1} wxyx^i y^{t-i-1} \in J^{t+1}\mathfrak{m}^l$. Utilizando o Corolário 2.1.7, obtemos $\sum_{i=0}^{t-1} \xi_{i+1} wxyx^i y^{t-i-1} \in (J^{t+1}\mathfrak{m}^l : x) = J^t\mathfrak{m}^l$ e assim podemos afirmar que $\sum_{i=0}^{t-1} \xi_{i+1} wxyx^i y^{t-i-1} \in J^t\mathfrak{m}^l$.

Como $\xi_1, \ldots, \xi_t$ não estão todos em $\mathfrak{m}$, temos que $wxy \in \mathfrak{m}^{l+1} - J\mathfrak{m}^l$ e portanto $T_{l+1,t-1} \neq 0$ o que contradiz o fato de t ter sido escolhido o menor inteiro tal que $T_{l+1,t} \neq 0$.

Então ξ_0 é invertível. Analogamente (isolando y) ξ_t é invertível.

Tomamos o polinômio homogêneo de grau t dado por $F(X,Y) = \xi_0 Y^t + \xi_1 XY^{t-1} + \ldots + \xi_t X^t$. Então como $f \in J^t$ e $wxy \in \mathfrak{m}^{l+1}$, $wxyf \in J^{t+1}\mathfrak{m}^l$, e novamente pelo Corolário 2.1.7 $wf \in J^{t-1}\mathfrak{m}^l$.

Além disso, como $\lambda(m^{l+1}/Jm^l) \leq 1$ e $wxy \in \mathfrak{m}^{l+1} - Jm^l$, temos que $m^{l+1} \subseteq (wxy) + J\mathfrak{m}^l$. Assim, $\mathfrak{m}^{l+1}f \subseteq (wxy)f + J\mathfrak{m}^l f \subseteq J^{t+1}\mathfrak{m}^l + J\mathfrak{m}^l f \subseteq J^{t+1}\mathfrak{m}^l$, o que conclui a prova de (i).

(ii) Por (i) temos que $wxyf \in J^{t+1}\mathfrak{m}^l$, assim, utilizando o Corolário 2.1.7, temos que $wxf \in (J^{t+1}\mathfrak{m}^l : x) = J^t\mathfrak{m}^l$. Desse modo, $wxf \in J^t\mathfrak{m}^l \subseteq J^{t-1}\mathfrak{m}^{l+1}$. Temos ainda que $wxy \in \mathfrak{m}^{l+1}$, $wf \in J^{t-1}\mathfrak{m}^l$ e $wxf \in J^t\mathfrak{m}^l \subset J^{t-1}\mathfrak{m}^{l+1}$. Escrevemos wx^{t+1}

como combinação dos elementos acima da seguinte maneira

$$wx^{t+1} = \xi_t^{-1} wxf - \xi_t^{-1} wxy \sum_{i=0}^{t-1} \xi_i x^i y^{t-1-i} \in J^{t-1}\mathfrak{m}^{l+1}.$$

Se $wx^{t+1} \in J^t\mathfrak{m}^l$ então, usando o Corolário 2.1.7 e o Lema 2.1.6 (iv) obtemos $wx^t \in (J^t\mathfrak{m}^l : x) = J^{t-1}\mathfrak{m}^l$ que implica que $wx^{t-1} \in (J^{t-1}\mathfrak{m}^l : x) = J^{t-2}\mathfrak{m}^l$ e assim sucessivamente obtemos $wx \in J\mathfrak{m}^l$ e $w \in \mathfrak{m}^{l-1}$ o que contradiz a escolha de w conforme o Lema 2.2.2 e portanto $wx^{t+1} \notin J^t\mathfrak{m}^l$, logo $wx^{t+1} \in J^{t-1}\mathfrak{m}^{l+1} - J^t\mathfrak{m}^l$.
Além disso, para todo i tal que $0 \leq i \leq t+1$, $wx^{t+1}y^i \in J^{t-1+i}\mathfrak{m}^{l+1}$ e aplicando o Corolário 2.1.7 i vezes obtemos $wx^{t+1-i}y^i \in J^{t-1}\mathfrak{m}^{l+1}$.
Desse modo $wJ^{t+1} \subseteq J^{t-1}\mathfrak{m}^{l+1}$.
(iii) Primeiramente, note que para todo $n \geq t-1$, $\{wx^{n+2}, wx^{n+1}y, \ldots, wx^{n+3-t}y^{t-1}\}$ é linearmente independente (LI) em $J^n\mathfrak{m}^{l+1}/J^{n+1}\mathfrak{m}^l$ pois caso contrário, existiriam $\mu_0, \ldots, \mu_{t-1}$ não todos em $\mathfrak{m}$ tais que $\sum_{i=0}^{t-1} \mu_i wx^{n+2-i}y^i \in J^{n+1}\mathfrak{m}^l$.
Em particular, $\sum_{i=0}^{t-1} \mu_i wx^{t+1-i}y^i \in J^t\mathfrak{m}^l$.
Note que $t \geq 2$ pois se $t = 1$, então $wx^{n+2} \in J^{n+1}\mathfrak{m}^l$ e $w \in \mathfrak{m}^{l-1}$, contradição.
Segue que $\sum_{i=0}^{t-1} \mu_i wxyx^{t-1-i}y^i \in J^t\mathfrak{m}^l$ e então $T_{l+1,t-1} \neq 0$, o que é impossível.
De (i) sabemos que $wf \in J^{t-1}\mathfrak{m}^l$, logo $wfJ^{n+2-t} \subseteq (J^{t-1}\mathfrak{m}^l)J^{n+2-t} = J^{n+1}\mathfrak{m}^l$. Como, para todo i tal que $t \leq i \leq n+2$, $x^{n+2-i}y^{i-t} \in J^{n+2-t}$, temos que $wfx^{n+2-i}y^{i-t} \in J^{n+1}\mathfrak{m}^l$.
Mas $wfx^{n+2-i}y^{i-t} = w(\xi_0 y^t + \xi_1 xy^{t-1} + \ldots + \xi_t x^t)x^{n+2-i}y^{i-t} = \xi_0 wx^{n+2-i}y^i + \xi_1 wx^{n+2-(i-1)}y^{i-1} + \ldots + \xi_t wx^{n-2-(i-t)}y^{i-t}$.
Desse modo, $\xi_0 wx^{n+2-i}y^i \in (wx^{n+2-(i-t)}y^{i-t}, \ldots, wx^{n+2-(i-1)}y^{i-1}) + J^{n+1}\mathfrak{m}^l$.
Usando o fato de ξ_0 ser invertível e simplificando os expoentes de x, temos que para todo i, com $t \leq i \leq n+2$, $wx^{n+2-i}y^i \in (wx^{n+2}, wx^{n+1}y, \ldots, wx^{n+3-i}y^{i-1}) + J^{n+1}\mathfrak{m}^l$.
Como todos os elementos de $J^n\mathfrak{m}^{l+1}$ são combinações de $wx^{n+2-i}y^i$ temos que $J^n\mathfrak{m}^{l+1} = (wx^{n+2}, wx^{n+1}y, \ldots, wx^{n+3-t}y^{t-1}) + J^{n+1}\mathfrak{m}^l$ e portanto,

$\{wx^{n+2}, wx^{n+1}y, \ldots, wx^{n+3-t}y^{t-1}\}$ é uma base para $J^n\mathfrak{m}^{l+1}/J^{n+1}\mathfrak{m}^l$ e portanto $\lambda(J^n\mathfrak{m}^{l+1}/J^{n+1}\mathfrak{m}^l) = t$.

(iv) Seja $2 \leq k \leq l$. Note que $T_{k,n} = 0$ $\forall n \geq 0$ então observando a sequência exata (3) obtemos $\lambda(J^{t-1}\mathfrak{m}^k/J^t\mathfrak{m}^{k-1}) = \lambda(\bigoplus^t \mathfrak{m}^k/J\mathfrak{m}^{k-1}) = \bigoplus^t \lambda(\mathfrak{m}^k/J\mathfrak{m}^{k-1}) = t$ e assim $\lambda(J^{t-1}\mathfrak{m}^k/J^t\mathfrak{m}^{k-1}) = t$.

Também, por (iii), no caso particular $n = t-1$, $\lambda(J^{t-1}\mathfrak{m}^{l+1}/J^t\mathfrak{m}^l) = t$. Segue, pelo Lema 2.1.5 que se $\{u_1, \ldots, u_t\}$ é uma base de $J^{t-1}\mathfrak{m}^k/J^t\mathfrak{m}^{k-1}$, então temos que $\{u_1z^{l+1-k}, \ldots, u_tz^{l+1-k}\}$ é uma base de $J^{t-1}\mathfrak{m}^{l+1}/J^t\mathfrak{m}^l$. Assim, se $u \in J^{t-1}\mathfrak{m}^k/J^t\mathfrak{m}^{k-1}$ então $uz^{l+1-k} \notin J^t\mathfrak{m}^l$.

■

Lema 2.2.4. *Se $l < r$, então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Seja $k \geq l+1$ e $n \geq t-1$. Então

$J^n\mathfrak{m}^k = (wx^{n+2}z^{k-l-1}, wx^{n+1}yz^{k-l-1}, \ldots, wx^{n+3-t}y^{t-1}z^{k-l-1}) + J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$

(ii) Seja $k \geq l+1$ e $n \geq t-1$. Se $ux \in J^{n+1}\mathfrak{m}^k$, então $u \in J^n\mathfrak{m}^k$.

(iii) Seja $k > 1$ e $n \geq t-1$. Se para algum j, com $0 \leq j \leq t-1$, $\{wx^{n+2}z^{k-l-1}, \ldots, wx^{n+2^-j}y^jz^{k-l-1}\}$ é linearmente dependente (LD) em $J^n\mathfrak{m}^k/J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$, então $\lambda(J^n\mathfrak{m}^k/J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}) \leq j$.

Demonstração:

(i) Segue dos lemas 2.1.5 e 2.2.3 (iii).

(ii) Provaremos por indução em k.

Suponhamos $k = l+1$. Pelo Lema 2.2.3 (iii) $J^{n+1}\mathfrak{m}^{l+1} = (wx^{n+3}, wx^{n+2}y, \ldots, wx^{n+4-t}y^{t-1}) + J^{n+2}\mathfrak{m}^l$. Se $ux \in J^{n+1}\mathfrak{m}^{l+1}$, então pela igualdade acima, existem $\xi_0, \ldots, \xi_{t-1} \in A$ tais que $\left(u - \sum_{i=0}^{t-1}\xi_i wx^{n+2-i}y^i\right)x \in J^{n+2}\mathfrak{m}^l$.

Portanto, pelo Corolário 2.1.7, $\left(u - \sum_{i=0}^{t-1}\xi_i wx^{n+2-i}y^i\right) \in J^{n+1}\mathfrak{m}^l \subseteq J^n\mathfrak{m}^{l+1}$.

Por outro lado, (ii) do Lema 2.2.3 garante que $wJ^{t+1} \subseteq J^{t-1}\mathfrak{m}^{l+1}$, como $n \geq t-1$

temos $wJ^{n+2} \subseteq J^n\mathfrak{m}^{l+1}$; assim cada parcela de $\displaystyle\sum_{i=0}^{t-1} \xi_i wx^{n+2-i}y^i \in J^n\mathfrak{m}^{l+1}$. Desse modo $u \in J^n\mathfrak{m}^{l+1}$ como desejávamos.

Suponhamos agora $k > l+1$ e $ux \in J^{n+1}\mathfrak{m}^k$.

Por (i), $J^{n+1}\mathfrak{m}^k = (wx^{n+3}z^{k-l-1}, \ldots, wx^{n+4-t}y^{t-1}z^{k-l-1}) + J^{n+2}\mathfrak{m}^{k-1}$, logo existem $\xi_0, \ldots, \xi_{t-1}$ tais que $\Big(u - \displaystyle\sum_{i=0}^{t-1} \xi_i wx^{n+2-i}y^i z^{k-l-1}\Big)x \in J^{n+2}\mathfrak{m}^{k-1}$, portanto, pela hipótese de indução, $u - \displaystyle\sum_{i=0}^{t-1} \xi_i wx^{n+2-i}y^i z^{k-l-1} \in J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1} \subseteq J^n\mathfrak{m}^k$ e assim $u \in J^m\mathfrak{m}^k$, como queríamos.

(iii) Observe que podemos supor que j é o menor inteiro tal que

$\{wx^{n+2}z^{k-l-1}, \ldots, wx^{n+2-j}y^j z^{k-l-1}\}$ é LD em $J^n\mathfrak{m}^k/J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$

Assim, olhando para a sequência (3), vemos que existem $\xi_0, \ldots, \xi_j$, com ξ_j invertível, pois já demonstramos que o primeiro e o último termo do polinômio possui coeficiente invertível, tal que $\displaystyle\sum_{i=0}^{j} \xi_i wx^{n+2-i}y^i z^{k-l-1} \in J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$.

Seja $0 \leq s \leq t-1-j$, então $\displaystyle\sum_{i=0}^{j} \xi_i wx^{n+2-i}y^{i+s} z^{k-l-1} \in J^{n+1+s}\mathfrak{m}^{k-1}$

Então, aplicando s vezes (ii), obtemos $\displaystyle\sum_{i=0}^{j} \xi_i wx^{n+2-i-s}y^{i+s} z^{k-l-1} \in J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$, isto é,

$\xi_0 wx^{n+2-s}y^s z^{k-l-1} + \xi_1 wx^{n+2-1-s}y^{1+s}z^{k-l-1} + \ldots + \xi_j wx^{n+2-j-s}y^{j+s}z^{k-l-1} \in J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$

Como ξ_j é invertível, isolando o último elemento da soma obtemos que para todo i, $j \leq i \leq t-1$, $wx^{n+2-i}y^i z^{k-l-1} \in (wx^{n+2}z^{k-l-1}, \ldots, wx^{n+3-j}y^{j-1}z^{k-l-1}) + J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$ e portanto $J^n\mathfrak{m}^k = (wx^{n+2}z^{k-l-1}, \ldots, wx^{n+3-j}y^{j-1}z^{k-l-1}) + J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$.

(Se $j = 0$, $wx^{n+2-i}y^i z^{k-l-1} \in J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$ e $J^n\mathfrak{m}^k = J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$).

Portanto obtemos $\lambda(J^n\mathfrak{m}^k/J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}) \leq j$. ∎

Corolário 2.2.5. *Seja $k > l+1$ e suponhamos que $l < r$. Se $\lambda(J^{t-1}\mathfrak{m}^k/J^t\mathfrak{m}^{k-1}) = c$, então $\lambda(J^n\mathfrak{m}^k/J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}) = c$, $\forall n \geq t-1$*

Demonstração:

Se $c = 0$, então $wx^{t+1}z^{k-l-1} \in J^{t-1}\mathfrak{m}^k = J^t\mathfrak{m}^{k-1}$ por hipótese e portanto

$wx^{n+2}z^{k-l-1} = x^{(n+2)-(t+1)}(wx^{t+1}z^{k-l-1}) \in J^{(n+2)-(t-1)}(J^t\mathfrak{m}^{k-1}) = J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$. Assim, pelo Lema 2.2.4 (iii) (com $j = 0$) $\lambda(J^n\mathfrak{m}^k/J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}) \leq 0$ e portanto $\lambda(J^n\mathfrak{m}^k/J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}) = 0$.

Tomamos $c > 0$. Como, por hipótese $\lambda(J^{t-1}\mathfrak{m}^k/J^t\mathfrak{m}^{k-1}) = c$, pelo Lema 2.2.4 (iii)

$$\{wx^{t+1}z^{k-l-1}, \dots, wx^{t+2-c}y^{c-1}z^{k-l-1}\} \tag{5}$$

é LI em $J^{t-1}\mathfrak{m}^k/J^t\mathfrak{m}^{k-1}$, e também

$$\{wx^{t+1}z^{k-l-1}, \dots, wx^{t+2-c}y^{c-1}z^{k-l-1}, wx^{t+1-c}y^c z^{k-l-1}\} \tag{6}$$

é LD em $J^{t-1}\mathfrak{m}^k/J^t\mathfrak{m}^{k-1}$.

Se $\{wx^{n+2}z^{k-l-1}, \dots, wx^{n+3-c}y^{c-1}z^{k-l-1}\}$ é LD em $J^n\mathfrak{m}^k/J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$ para algum $n > t-1$, então existem $\xi_0, \dots, \xi_{c-1}$ não todos em $\mathfrak{m}$ tais que $\sum\limits_{i=0}^{c-1}\xi_i wx^{n+2-i}y^i z^{k-l-1} \in J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$.

Entretanto pelo Lema 2.2.4 (ii), $\sum\limits_{i=0}^{c-1}\xi_i wx^{t+1-i}y^i z^{k-l-1} \in J^t\mathfrak{m}^{k-1}$, o que contradiz (5). Assim obtemos um conjunto LI em $J^n\mathfrak{m}^k/J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$ de c elementos e portanto $\lambda(J^n\mathfrak{m}^k/J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}) \geq c$.

Por outro lado, de (6), existem $\xi_0, \dots, \xi_c$ não todos em $\mathfrak{m}$ tais que $\sum\limits_{i=0}^{c}\xi_i wx^{t+1-i}y^i z^{k-l-1} \in J^t\mathfrak{m}^{k-1}$. Então, para $n \geq t-1$, obtemos

$x^{n-(t-1)}\sum\limits_{i=0}^{c}\xi_i wx^{t+1-i}y^i c^{k-l-1} = \sum\limits_{i=0}^{c}\xi_i wx^{n+2-i}y^i z^{k-l-1} \in J^{n-(t-1)}J^t\mathfrak{m}^{k-1} = J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$.

Portanto $\{wx^{n+2}z^{k-l-1}, \dots, wx^{n+2-c}y^c z^{k-l-1}\}$ é LD em $J^n\mathfrak{m}^k/J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$.

Assim, como o Lema 2.2.4 (iii) garante que $\lambda(J^n\mathfrak{m}^k/J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}) \leq c$, temos que $\lambda(J^n\mathfrak{m}^k/J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}) = c$.

$\blacksquare$

Se $l < r$, definimos para $k \geq l+1$, $c_k = \lambda(S_{k,t-1})$ e $N = max\{k \mid c_k \neq 0\}$, onde $S_{k,t-1}$ é a imagem por ϕ_{t-1} na sequência (3), ou seja, $S_{k,n} = \dfrac{J^n\mathfrak{m}^k}{J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}}$.

Pelo Lema 2.2.3 (iii) e Corolário 2.2.5 temos que $\lambda(S_{k,n}) = c_k$, $\forall n \geq t-1$. Além disso, o Lema 2.1.5 garante que $\lambda(J^{t-1}\mathfrak{m}^N/J^t\mathfrak{m}^{N-1}) \leq \lambda(J^{t-1}\mathfrak{m}^{N-1}/J^t\mathfrak{m}^{N-2}) \leq \ldots \leq \lambda(J^{t-1}\mathfrak{m}^{l+1}/J^t\mathfrak{m}^l) = t$, assim $c_N \leq c_{N-1} \leq \cdots \leq c_{l+1} = t$.

Corolário 2.2.6. *Assuma $l < r$. Seja $l+1 \leq k \leq N$. Então existe um polinômio homogêneo $F \in A[X,Y]$ de grau c_k com o coeficiente de Y^{c_k} invertível tal que $wz^{k-l-1}fJ^{t-c_k} \subseteq J^{t-1}\mathfrak{m}^{k-1}$ e $fJ^{t-c_k}\mathfrak{m}^k \subseteq J^{t+1}\mathfrak{m}^{k-1}$.*

Demonstração:

Se $k = l+1$, $c_k = c_{l+1} = t$ e o corolário é exatamente a afirmação (i) do Lema 2.2.3.

Suponhamos $k > l+1$. Como $c_k = \lambda(J^{t-1}\mathfrak{m}^k/J^t\mathfrak{m}^{k-1})$ sabemos que $\{wx^{t+1}z^{k-l-1}, \ldots, wx^{t+1-c_k}y^{c_k}z^{k-l-1}\}$ é LD em $J^{t-1}\mathfrak{m}^k/J^t\mathfrak{m}^{k-1}$ e $\{wx^{t+1}z^{k-l-1}, \ldots, wx^{t+2-c_k}y^{c_k-1}z^{k-l-1}\}$ é LI em $J^{t-1}\mathfrak{m}^k/J^t\mathfrak{m}^{k-1}$. Observamos que podemos construir o polinômio F homogêneo de grau c_k com coeficiente de Y^{c_k} invertível tal que $wx^{t+1-c_k}z^{k-l-1}f \in J^t\mathfrak{m}^{k-1}$ da mesma maneira que construímos o polinômio do Lema 2.2.3 (i).
Assim pelo Lema 2.2.4 (ii) $wx^{t-c_k}z^{k-l-1}f \in J^{t-1}\mathfrak{m}^{k-1}$. Além disso, $wx^{t-c_k}y^iz^{k-l-1}f \in J^{t-1+i}\mathfrak{m}^{k-1}$, para $0 \leq i \leq t-c_k$. Portanto, pelo Lema 2.2.4 (ii), aplicado i vezes temos, $wx^{t-c_k-i}y^iz^{k-l-1}f \in J^{t-1}\mathfrak{m}^{k-1}$.
Desse modo $wz^{k-l-1}fJ^{t-c_k} \subseteq J^{t-1}\mathfrak{m}^{k-1}$.
Para ver que $fJ^{t-c_k}\mathfrak{m}^k \subseteq J^{t+1}\mathfrak{m}^{k-1}$, observamos que

$$wxyz^{k-l-1}x^{t-1}f = (wz^{k-l-1}fx^{t-c_k})xyx^{c_k-1} \in (J^{t-1}\mathfrak{m}^{k-1})J^{c_k+1} = J^{t+c_k}\mathfrak{m}^{k-1},$$

e assim, pelo Lema 2.2.4 (ii), aplicado (c_k-1) vezes, temos que $wxyz^{k-l-1}x^{t-c_k}f \in J^{t+1}\mathfrak{m}^{k-1}$. Entretanto, tomando a potência de J igual a zero no Lema 2.1.5, temos que $\mathfrak{m}^k = (wxyz^{k-l-1}) + J\mathfrak{m}^{k-1}$, portanto obtemos $fx^{t-c_k}\mathfrak{m}^k = fx^{t-c_k}[(wxyz^{k-l-1}) + J\mathfrak{m}^{k-1}] \subseteq J^{t+1}\mathfrak{m}^{k-1}$. Novamente por 2.2.4 (ii) aplicado i vezes, obtemos $fx^{t-c_k-i}\mathfrak{m}^k \subseteq$

$J^{t+1-i}\mathfrak{m}^{k-1}$, multiplicando por $y^i \in J^i$, obtemos $fx^{t-c_k-i}y^i\mathfrak{m}^k \subseteq J^{t+1}\mathfrak{m}^{k-1}$, para todo i tal que $0 \leq i \leq t - c_k$. Então, $fJ^{t-c_k}\mathfrak{m}^k \subseteq J^{t+1}\mathfrak{m}^{k-1}$.

■

Observação: Temos que dados $F_n = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1}Y + \ldots + a_0Y^n$ e $F_m = b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1}Y + \ldots + b_0Y^m$ polinômios em $A[X,Y]$ tais que a_n, a_0, b_m, b_0 invertíveis e $n \geq m$, existem $G, H \in A[X,Y]$ tais que $F_n = F_mG + X^{n+1-m}H$.

Este resultado pode ser facilmente constatado tomando $G = c_{n-m}X^{n-m} + c_{n-m-1}X^{n-m-1}Y + \ldots + c_0Y^{n-m}$ e $H = d_{m-1}X^{m-1} + d_{m-2}X^{m-2}Y + \ldots + d_0Y^{m-1}$, substituindo os polinômios em $F_n = F_mG + X^{n+1-m}H$ para obter o sistema e constatando que as últimas $n+1-m$ igualdades formam um sistema homogêneo, e como b_0 é invertível, determinamos os coeficientes de G e após os coeficientes de H.

Lema 2.2.7. *Suponha $l < r$. Seja $l+1 \leq k < N$. Sejam F_k o polinômio de grau c_k e F_{k+1} o polinômio de grau c_{k+1} satisfazendo a conclusão do Corolário 2.2.6. Então $F_{k+1} \mid F_k$ em $K[X,Y]$.*

Demonstração:

Lembramos, inicialmente, que $c_{k+1} \leq c_k$ (observação anterior ao Corolário 2.2.6), que F_k e F_{k+1} são homogêneos e que tanto os coeficientes de Y^{c_k} e X^{c_k} em F_k, como os coeficientes de $X^{c_{k+1}}$ e $Y^{c_{k+1}}$ em F_{k+1} são invertíveis. Suponhamos que F_{k+1} não é um fator de F_k em $K[X,Y]$.

De acordo com a observação anterior ao Lema podemos encontrar G e $H \in A[X,Y]$ com $F_k = F_{k+1}G + X^{c_k+1-c_{k+1}}H$ tais que G e H são homogêneos e o grau total de H é $c_{k+1} - 1$ e o de G é $c_k - c_{k+1}$. Além disso, nem todos os coeficientes de H estão em $\mathfrak{m}$, pois o coeficiente de $Y^{c_{k+1}}$ é invertível, assim como o de X^{c_k}.

Seja $n \geq t - (1 + c_k - c_{k+1})$.

Como, pelo corolário anterior, $wx^{t-c_k}z^{k-l-1}f_k \in J^{t-1}\mathfrak{m}^{k-1}$ e $wx^{t-c_{k+1}}z^{k-l}f_{k+1} \in$

$J^{t-1}\mathfrak{m}^k$, temos que

$$wx^{n+2-c_k}z^{k-l}f_k = (wx^{t-c_k}z^{k-l-1}f_k)(x^{n+2-t}z) \in (J^{t-1}\mathfrak{m}^{k-1})J^{n+2-t}\mathfrak{m} = J^{n+1}\mathfrak{m}^k$$

e $wx^{n+2-c_k}z^{k-l}f_{k+1}g = (wx^{t-c_{k+1}}z^{k-l}f_{k+1})(x^{n+2-c_k-t+c_{k+1}})g$
$\in (J^{t-1}\mathfrak{m}^k)J^{n+2-c_k-t+c_{k+1}}J^{c_k-c_{k+1}} = J^{n+1}\mathfrak{m}^k$, já que $g \in J^{c_k-c_{k+1}}$.
Desse modo

$$wx^{n+2-c_k}z^{k-l}(x^{c_k+1-c_{k+1}}h) = wx^{n+2-c_k}z^{k-l}(f_k - f_{k+1}g) =$$

$$(wx^{n+2-c_k}z^{k-1}f_k) - (wx^{n+2-c_k}z^{k-l}f_{k+1}g) \in J^{n+1}\mathfrak{m}^k,$$

ou seja,

$$wx^{n+3-c_{k+1}}z^{k-l}h \in J^{n+1}\mathfrak{m}^k.$$

Assim, supondo $h = h_0x^{c_{k+1}-1} + h_1x^{c_{k+1}-2}y + \ldots + h_{c_{k+1}-1}y^{c_{k+1}-1}$, onde nem todos $h_i \in \mathfrak{m}$, temos

$$wx^{n+3-c_{k+1}}z^{k-l}h = wx^{n+3-c_{k+1}}z^{k-l}(h_0x^{c_{k+1}-1} + h_1x^{c_{k+1}-2}y + \ldots + h_{c_{k+1}-1}y^{c_{k+1}-1})$$

$$= h_0wx^{n+2}z^{k-l} + h_1wx^{n+1}yz^{k-l} + \ldots + h_{c_{k+1}-1}x^{n+3-c_{k+1}}y^{c_{k+1}-1}z^{k-l} \in J^{n+1}\mathfrak{m}^k.$$

Desse modo, o conjunto $\{wx^{n+2}z^{k-l}, \ldots, wx^{n+3-c_{k+1}}y^{c_{k+1}-1}z^{k-l}\}$ é LD em $J^n\mathfrak{m}^{k+1}/J^{n+1}\mathfrak{m}^k$ e portanto, pelo Lema 2.2.4 (iii), temos $\lambda(J^n\mathfrak{m}^{k+1}/J^{n+1}\mathfrak{m}^k) \leq c_{k+1} - 1 < c_{k+1}$, o que contradiz a definição de c_{k+1}.
Portanto F_{k+1} é um fator de F_k em $K[X,Y]$.

■

Corolário 2.2.8. *Suponha $l < r$. Então existem polinômios homogêneos F_k, para $k = l+1, \ldots, N$, de grau c_k com o coeficiente de Y^{c_k} invertível, tais que $wz^{k-l-1}f_kJ^{t-c_k}$
$\subseteq J^{t-1}\mathfrak{m}^{k-1}$ e $f_kJ^{t-c_k}\mathfrak{m}^k \subseteq J^{t+1}\mathfrak{m}^{k-1}$, para todo k tal que $l+1 \leq k \leq N$. Além disso $F_N \mid F_{N-1} \mid \ldots \mid F_{l+1}$ em $A[X,Y]$.*

Demonstração:

Pelo Corolário 2.2.6 podemos determinar polinômios homogêneos F_k, para $k = l+1, \ldots, N$ de grau c_k com o coeficiente de Y^{c_k} invertível tal que $wz^{k-l-1}f_kJ^{t-c_k} \subseteq J^{t-1}\mathfrak{m}^{k-1}$ e $f_kJ^{t-c_k}\mathfrak{m}^k \subseteq J^{t+1}\mathfrak{m}^{k-1}$

Além disso, pelo Lema 2.2.7, $F_N \mid F_{N-1} \mid \ldots \mid F_{l+1}$ em $K[X,Y]$.

Assim, existem $F'_{N-1}, \ldots, F'_{l+1} \in A[X,Y]$ tais que $F_N \mid F'_{N-1} \mid \ldots \mid F'_{l+1}$ em $A[X,Y]$ onde $F'_k \equiv F_k(\mathfrak{m}(X,Y)^{c_k})$.

Para demonstrar o corolário, resta mostrar que $wz^{k-l-1}f'_kJ^{t-c_k} \subseteq J^{t-1}\mathfrak{m}^{k-1}$ e $f'_kJ^{t-c_k}\mathfrak{m}^k \subseteq J^{t+1}\mathfrak{m}^{k-1}$, $\forall l+1 \leq k \leq N$, ou seja, que as propriedades valem para esses f'_k.

Temos, pelo Corolário 2.2.6, que $wz^{k-l-1}f_kJ^{t-c_k} \subseteq J^{t-1}\mathfrak{m}^{k-1}$, logo $wxz^{k-l-1}f_kJ^{t-c_k} \subseteq J^t\mathfrak{m}^{k-1}$. Como $f_k \in J^{c_k}$, utilizando o Lema 2.2.3 (ii) para a segunda inclusão, obtemos

$$wxz^{k-l-1}J^{c_k}\mathfrak{m}J^{t-c_k} = (z^{k-l-1}\mathfrak{m})w(xJ^t) \subseteq (z^{k-l-1}\mathfrak{m})(wJ^{t+1})$$

$$\subseteq (\mathfrak{m}^{k-l-1}\mathfrak{m})(J^{t-1}\mathfrak{m}^{l+1}) \subseteq J^{t-1}\mathfrak{m}^{k+1} = J^{t-1}\mathfrak{m}^{k-2}\mathfrak{m}^3 \subseteq J^t\mathfrak{m}^{k-1}.$$

Temos então que $wxz^{k-l-1}f'_kJ^{t-c_k} \subseteq J^t\mathfrak{m}^{k-1}$ pois $f_k - f'_k \in J^{c_k}\mathfrak{m}$.

Assim, utilizando o Lema 2.2.4 (ii), temos $wz^{k-l-1}f'_kJ^{t-c_k} \subseteq J^{t-1}\mathfrak{m}^{k-1}$. Além disso, como $f_kJ^{t-c_k}\mathfrak{m}^k \subseteq J^{t+1}\mathfrak{m}^{k-1}$ e utilizando o Lema 2.1.2 ($\mathfrak{m}^3 \subseteq J\mathfrak{m}$), $J^{c_k}\mathfrak{m}J^{t-c_k}\mathfrak{m}^k = J^t\mathfrak{m}^{k-2}\mathfrak{m}^3 \subseteq J^{t+1}\mathfrak{m}^{k-1}$, obtemos então que $f'_kJ^{t-c_k}\mathfrak{m}^k \subseteq J^{t+1}\mathfrak{m}^{k-1}$ usando novamente que $f_k - f'k \in J^{c_k}\mathfrak{m}$.

■

No que segue, se $l < r$, então F_k, $k = l+1, \ldots, N$, são polinômios satisfazendo a conclusão do Corolário 2.2.8.

Lema 2.2.9. *Assuma que $l < r$. Sejam $l+1 < k \leq N$ e $n \geq t-1$. Então vale:*

(i) Se $c_{k-1} = c_k$ e se $uz \in J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$ para algum $u \in J^n\mathfrak{m}^{k-1}$, então $u \in J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-2}$.

(ii) Se $D = c_{k-1} - c_k > 0$ e se $uz \in J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$ para algum $u \in J^n\mathfrak{m}^{k-1}$, então $u \in (wx^{n+2-c_k}z^{k-l-2}f_k, \ldots, wx^{n+3-c_k-D}y^{D-1}z^{k-l-2}f_k) + J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-2}$

Note que $n \geq t-1$, logo $n+3 \geq t+2$, assim $n+3-t \geq 2$, e como $t \geq c_i$, para $i = l+1, \ldots, N$ (pela definição de c) temos que $n+3-c_{k-1} \geq n+3-t \geq 2$ e assim $n+3-c_k-D = n+3-c_{k-1} \geq 2$.

E pelo Lema 2.2.3 (ii), para todo i tal que $0 \leq i \leq D-1$,

$$wx^{n+2-c_k-i}y^iz^{k-l-2}f_k \in wJ^{n+2}\mathfrak{m}^{k-l-2} = wJ^{t+1}J^{n-t+1}\mathfrak{m}^{k-l-2} \subseteq J^n\mathfrak{m}^{k-1}.$$

Demonstração:

(i) Como $c_k = c_{k-1}$, pelo Lema 2.1.5, temos que se $\{u_1, \ldots, u_{k-1}\}$ é base de $J^n\mathfrak{m}^{k-1}/J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-2}$, então $\{u_1z, \ldots, u_{k-1}z\}$ é base de $J^n\mathfrak{m}^k/J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$. Então se $uz = 0$ em $J^n\mathfrak{m}^k/J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$, então $u = 0$ em $J^n\mathfrak{m}^{k-1}/J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-2}$.

(ii) Observe primeiramente que $\{wx^{n+2-c_k}z^{k-l-2}f_k, \ldots, wx^{n+3-c_k-D}y^{D-1}z^{k-l-2}f_k\}$ é LI em $J^n\mathfrak{m}^{k-1}/J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-2}$. Caso contrário, existe um polinômio homogêneo G de grau $D-1$ com coeficientes não todos em $\mathfrak{m}$ tal que $wx^{n+3-c_k-D}z^{k-l-2}f_kg \in J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-2}$ e assim o conjunto $\{wx^{n+2}z^{k-l-2}, \ldots, wx^{n+3-c_k-D}y^{c_k+D-1}z^{k-l-2}\}$ seria LD em $J^n\mathfrak{m}^{k-1}/J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-2}$ pois os coeficientes de F_kG não estão todos em $\mathfrak{m}$.

Se $k = l+2$, então $\{wx^{n+2}, \ldots, wx^{n+3-t}y^{t-1}\}$ é LD em $J^n\mathfrak{m}^{l+1}/J^{n+1}\mathfrak{m}^l$ o que contradiz o Lema 2.2.3 (iii).

Se $k > l+2$, então pelo Lema 2.2.4 (iii) $c_{k-1} = \lambda(J^n\mathfrak{m}^{k-1}/J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-2}) \leq c_k + D - 1 < c_{k-1}$, uma contradição.

Além disso, se $u \notin (wx^{n+2-c_k}z^{k-l-2}f_k, \ldots, wx^{n+3-c_k-D}y^{D-1}z^{k-l-2}f_k) + J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-2}$, então existem elementos $u_1, \ldots, u_{c_{k-1}}$ tais que $J^n\mathfrak{m}^{k-1} = (wx^{n+2-c_k}z^{k-l-2}f_k, \ldots$
$\ldots, wx^{n+3-c_k-D}y^{D-1}z^{k-l-2}f_k, u, u_1, \ldots, u_{c_{k-1}}) + J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-2}$.

Como, para todo i tal que $0 \leq i \leq D-1$,

$$(wx^{n+2-c_k-i}y^iz^{k-l-2}f_k)z \in wz^{k-l-1}f_kJ^{t-c_k}J^{n+2-t} \subseteq J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1},$$

pelo Corolário 2.2.8 e $uz \in J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$ por hipótese, temos então pelo Lema 2.1.5

que $J^n\mathfrak{m}^k = \sum_{i=0}^{D-1}(wx^{n+2-c_k-i}y^iz^{k-l-2}f_kz) + (uz) + (u_1z, \ldots, u_{c_k-1}z) + J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1} = (u_1z, \ldots, u_{c_k-1}z) + J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$. E segue que $c_k = \lambda(J^n\mathfrak{m}^k/J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}) \leq c_k - 1$, contradição.

■

Lema 2.2.10. *Assuma $l < r$. Seja $l + 1 < k \leq N$ e $n \geq t - 1$. Se para algum u e algum inteiro $j \geq 1$, $uf_k \in J^n\mathfrak{m}^{k-1}$ e $uf_kz \in J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}, \ldots, uf_kz^j \in J^{n+j}\mathfrak{m}^{k-1}$, então $uf_{k-1}z^i \in J^{n+1+i+c_{k-1}-c_k}\mathfrak{m}^{k-2}$, para todo i tal que $0 \leq i \leq j - 1$.*

Demonstração:

Primeiramente mostraremos que $uf_k \in J^n\mathfrak{m}^{k-1}$ e $uf_kz \in J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1}$ então $uf_{k-1} \in J^{n+1+c_{k-1}-c_k}\mathfrak{m}^{k-2}$. Se $c_{k-1} = c_k$, então $F_{k-1} = \xi F_k$ para algum ξ invertível, portanto, pelo Lema 2.2.9 (i) $uf_{k-1} = \xi uf_k \in J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-1} = J^{n+1+c_{k-1}-c_k}\mathfrak{m}^{k-2}$.
Se $D = c_{k-1} - c_k > 0$ então pelo Lema 2.2.9 (ii)
$uf_k \in (wx^{n+2-c_k}z^{k-l-2}f_k, \ldots, wx^{n+3-c_k-d}y^{D-1}z^{k-l-2}f_k) + J^{n+1}\mathfrak{m}^{k-2}$.
Multiplicando por f_{k-1}/f_k obtemos que $uf_{k-1} \in J^{n+1+c_{k-1}-c_k}\mathfrak{m}^{k-2}$ pois para $0 \leq i \leq D - 1$, $wx^{n+2-c_k-i}y^iz^{k-l-2}f_{k-1} \in J^{n+1+c_{k-1}-c_k}\mathfrak{m}^{k-2}$. (Note que pelo Corolário 2.2.6 $wx^{n+2-c_k-i}y^iz^{k-l-2}f_{k-1} \in wz^{k-l-2}f_{k-1}J^{t-c_{k-1}}J^{n+2-t+c_{k-1}-c_k} \subseteq J^{t-1}J^{n+2-t+c_{k-1}-c_k}\mathfrak{m}^{k-2} = J^{n+1+c_{k-1}-c_k}\mathfrak{m}^{k-2}$).
Agora, repetindo este procedimento, obtemos a afirmação desejada.

■

Lema 2.2.11. *Assuma $l < r$. Seja $n \geq t - 1$ e $u \in J^n\mathfrak{m}^N$. Então $uf_{l+1} \in J^{n+N+c_{l+1}-l}\mathfrak{m}^l$.*

Demonstração: [Note que $c_{l+1} = t$ pelo Lema 2.2.3 (iii)]
Se $N = l + 1$, então utilizando o Corolário 2.2.8 com $k = l + 1$ e $c_k = t$ para a primeira inclusão, obtemos

$$uf_{l+1} \in f_{l+1}J^n\mathfrak{m}^{l+1} \subseteq J^{t+1}\mathfrak{m}^lJ^n = J^{n+N+c_{l+1}-l}\mathfrak{m}^l.$$

Assuma $N > l+1$. Note que $c_{N+1} = 0$ e $J^n\mathfrak{m}^{N+i} = J^{n+i}\mathfrak{m}^N$ portanto $uz^i \in J^{n+i}\mathfrak{m}^N$, para todo i tal que $i \leq N-l-1$. Assim, pelo Corolário 2.2.6, $uz^if_N \in J^{n+i+1+c_N}\mathfrak{m}^{N+1}$, para todo i tal que $i \leq N-l-1$. Segue do Lema 2.2.10 ($n+1+c_N \geq t-1$) que $uz^if_{N-1} \in J^{n+i+2+c_{N-1}}\mathfrak{m}^{N-2}$, para todo i tal que $i \leq N-l-2$.
Repetindo o procedimento obtemos que $uf_{l+1} \in J^{n+N-l+c_{l+1}}\mathfrak{m}^l$.

$\blacksquare$

Demonstração do Teorema 2.2.1 no caso d=2:

Suponhamos $l < r$, *e* t,c_k *e* N *como já definimos,* w *elemento tal que* $wxy \in \mathfrak{m}^{l+1} - J\mathfrak{m}^l$. *Seja* F_k, $k = l+1,\ldots,N$, *polinômio como no Corolário 2.2.8.*
Afirmação: Existem $w_0, w_1, \ldots, w_{t-1} \in A$ *tais que* $w = w_ix^i[mod(\mathfrak{m}^{l-1})]$ *e* $w_if_{l+1} \in J^{t-1}\mathfrak{m}^{l-i}$, *para* $0 \leq i \leq t-1$.
Para mostrar a afirmação usaremos indução em i:
Se $i = 0$, $w = w_0$ *e basta tomar* $k = l+1$ *no Corolário 2.2.8.*
Supomos que a afirmação é verdadeira para i, com $0 \leq i \leq l-2$. *Seja* $n \geq t-1$.
Como $c_{N+j} = 0$, $\forall\ j \geq 1$, *temos que*

$$w_ix^{n+N}z^{i+1} \in w_ix^ix^{t+1}\mathfrak{m}^{n+N-t} \subseteq J^{t-1}\mathfrak{m}^{l+1}\mathfrak{m}^{n+N-t} = J^{t-1}\mathfrak{m}^{n+N+l+1-t} = J^{n+l}\mathfrak{m}^N.$$

Onde a inclusão vale pelo Lema 2.2.3 (ii).
Então, pelo Lema 2.2.11, $w_ix^{n+N}z^{i+1}f_{l+1} \in J^{n+N+c_{l+1}}\mathfrak{m}^l$. *Assim, pelo Corolário 2.1.7,* $w_iz^{i+1}f_{l+1} \in J^{c_{l+1}}\mathfrak{m}^l = J^t\mathfrak{m}^l$. *Pela hipótese de indução* $w_if_{l+1} \in J^{t-1}\mathfrak{m}^{l-i}$.
Como $2 \leq l-i \leq l$, *pelo Lema 2.2.3 (iv),* $w_if_{l+1} \in J^t\mathfrak{m}^{l-i-1}$.
Então $\overline{w_i}\overline{y^t} \in \overline{y^t}\overline{\mathfrak{m}}^{l-i-1}$, *onde a barra indica módulo x (pois o coeficiente de* Y^t *em* F_{l+1} *é invertível pelo Corolário 2.2.10), então existe* w_{i+1} *tal que* $w_i - w_{i+1}x \in \mathfrak{m}^{l-i-1}$ *e segue que* $w \equiv x^{i+1}w_{i+1}[mod(\mathfrak{m}^{l-1})]$.
Além disso, $w_{i+1}xf_{l+1} \in J^t\mathfrak{m}^{l-i-1}$, *portanto obtemos* $w_{i+1}f_{l+1} \in J^{t-1}\mathfrak{m}^{l-i-1}$ *pelo Corolário 2.1.7, o que nos garante a afirmação.*

Da afirmação, vemos que $w - w_i x^i \in \mathfrak{m}^{l-1}$ *e portanto* $wf_{l+1} - w_i f_{l+1} x^i \in J^t \mathfrak{m}^{l-1}$. *Mas da afirmação também temos que* $w_i f_{l+1} \in J^{t-1}\mathfrak{m}^{l-i}$, *logo* $w_i f_{l+1} x^i \in J^{t-1}\mathfrak{m}^{l-i}(J\mathfrak{m}^{i-1}) = J^t \mathfrak{m}^{l-1}$. *Assim temos que* $wf_{l+1} \in J^t\mathfrak{m}^{l-1}$ *o que assegura que* $w \in \mathfrak{m}^{l-1}$ *(pois podemos aplicar o Corolário 2.1.7 aos elementos homogêneos de* f_{l+1} *que possui grau* t*), mas isso contradiz o Lema 2.2.2 e portanto* $l = r$ *e pelo Lema 2.1.10 temos que* $\operatorname{depth} G_A > 0$.

■

Referências Bibliográficas

[1] S. Abhyankar, Local rings of high embedding dimension, Amer. J. Math, 89 (1967), 1073-1077.

[2] W. Bruns; J. Herzog, Cohen-Macaulay rings, Cambridge University Press, Cambrigde, 1993.

[3] J. Elias; M. E. Rossi; G. Valla, On the coefficients of the Hilbert polynomial, J. Pure and Appl. Algebra, 108 (1996), 35-60.

[4] S. Huckaba A d-dimensional extension of a lemma of Huneke's and formulas for the Hilbert coefficients, Proc. Amer. Math. Soc., 124 (1996), 1393-1401.

[5] S. Huckaba; T. Marley, Hilbert coefficients and the depth of associated graded rings, J. London Math. Soc., 56 (1997), 64-76.

[6] I. Kaplansky, Commutative Rings, Polygonal Publishing House Washington, New Jersey, 1970.

[7] H. Matsumura, Comutative Ring Theory, Cambridge University Press, Cambrigde, 1986.

[8] M. E. Rossi; G. Valla, A conjecture of J. Sally, Communications in Algebra,24 (13) (1996), 4249-4261.

[9] B. Singh, *Effect of a permissible blowing-up on the local Hilbert functions, Invent. Math, 26 (1974), 201-212.*

[10] J. Sally, *Cohen-macaulay local rings of embedding dimension* $e + d - 2$*, J. Algebra, 83 (1983), 393-408.*

[11] J. Sally, *On the associated graded ring of a local Cohen-macaulay ring, J. Math Kyoto Univ, 17 (1977), 19-21.*

[12] J. Sally, *Super regular sequences, Pac. J. of Math, 84 (1979), 475-481.*

[13] P. Valabrega; G. Valla, *Form rings and regular sequences, Nagoya Math J., 72 (1978), 93-101.*

[14] W. Vasconcelos, *Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry, Springer, 1998.*

[15] M. Vaz Pinto, *Structure of Sally Modules and Hilbert functions, dissertation to PHD, New Jersey, 1995.*

[16] H.-J Wang, *On Cohen-macaulay local rings with embedding dimension* $e+d-2$*, J. of Algebra, 190(1997), 226-240.*

[17] H.-J Wang, *Hilbert coefficients and the associated graded rings, Proc. of the American Math Soc., 128 (1999), 963-973.*

[18] H.-J Wang, *An interpretation of depth*$(G(I))$ *and* $e_1(I)$ *via the Sally module, Communications in Algebra, 25 (1997), 303-309.*

[19] O. Zariski; P. Samuel, *Comutative Algebra, volume II, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1960.*