

O Ajuste e Teste da Significância de Tendências Lineares em Dados com Distribuição Gumbel

Robin T. Clarke

IPH/UFRGS. Endereço para correspondência: Av. Venâncio Aires, 1001/704
90040-193 Porto Alegre, RS - clarke@iph.ufrgs.br

Recebido: 04/02/02 - revisão: 03/04/02 - aceito: 09/07/02

RESUMO

Os procedimentos hidrológicos extensivamente utilizados no cálculo de eventos com período de retorno de T anos em dados com distribuição Gumbel, supõem que a seqüência dos dados usados para ajustar a distribuição permanece estacionária pelo tempo. Quando se suspeita não-estacionariedade, seja como conseqüência de mudanças no uso do solo ou no clima, a abordagem comum é testar a significância da tendência por um de dois métodos: regressão linear, que supõe que os dados no registro seguem distribuição Normal cuja média possivelmente varia com tempo; ou um teste não-paramétrico como o de Mann-Kendall, que nada supõe sobre a distribuição populacional. Isto é, a hipótese de distribuição Gumbel para os dados é abandonada temporariamente enquanto se faz o teste de tendência, mas é adotada novamente nos casos em que se constata a tendência não ser significativa. Na seqüência, os eventos de período de retorno T anos são calculados. Isto não parece lógico. O presente trabalho descreve um modelo alternativo no qual a média da distribuição Gumbel possivelmente varia em tempo; supõe-se que a tendência temporal, se existir, pode ser descrita adequadamente por um único parâmetro β , o qual é estimado a partir de Máxima Verossimilhança (MV). A variância assintótica da estimativa MV, β_{MV} , é comparada com a variância da tendência β_{RL} calculada a partir de regressão linear (RL); constatou-se que a variância da estimativa RL é 64% maior. Amostras simuladas por uma distribuição Gumbel padronizada e selecionadas aleatoriamente, foram modificadas pela superposição de tendências lineares e conhecidas de diferentes gradientes, e em seguida foram comparadas às potências de três testes da significância da tendência (Máxima Verossimilhança, Regressão Linear, e o teste não-paramétrico de Mann-Kendall). O teste MV revelou-se sempre mais potente do que os outros dois testes, para qualquer valor da tendência (positiva) β . A potência do teste Mann-Kendall foi sempre menor.

Palavras-chave: tendência; distribuição Gumbel; teste de significância.

INTRODUÇÃO

A análise de eventos extremos de variáveis hidro-meteorológicas é prática muito freqüente do cotidiano de hidrólogos e meteorologistas. Quatro exemplos das variáveis utilizadas em tais análises são: a) vazão máxima anual em rios; b) a mínima anual da média de 7 vazões diárias consecutivas; c) as intensidades máximas anuais das intensidades de precipitação com duração 5 minutos, 10 minutos, ...; d) a velocidade máxima anual do vento. Análises destas variáveis servem de base para importantes decisões em projetos de barragens, no planejamento urbana, e no cálculo de riscos de seguros, sendo o objetivo das análises o cálculo da freqüência com que esses eventos são igualados ou ultrapassados. O ponto de partida para muitas destas análises é o ajuste de uma distribuição "Valor Extremo" (EV), de tipo apropriado, aos valores de uma seqüência observada de máximas (ou mínimas) anuais; após ajuste, a distribuição utiliza-se no cálculo do período de retorno de eventos extremos especificados e/ou no cálculo dos eventos de período de retorno especificado (Stedinger et al., 1993). Qualquer análise deste tipo supõe que a seqüência observada de valores máximos (ou mínimas) anuais é estacionária, com

cada valor da seqüência de uma distribuição hipotética de tipo EV cujas características estatísticas permanecem constantes no decorrer do tempo. Entretanto, se mudanças no clima (Vinnikov et al., 1990; Guttman et al., 1992; Groisman & Easterling, 1994; Changnon & Kunkel, 1995; Olsen et al., 1999; Douglas et al., 2000), ou no uso do solo (Bruijnzeel, 1990 e 1996; Sahin e Hall, 1996), causem modificações graduais na seqüência observada, a suposição básica da distribuição EV constante torna-se inválida e a previsão da freqüência de ocorrência de futuros eventos extremos é um problema muito mais complexo. Além disto, o relatório "Climate Change 2001: Impacts, Adaptation and Vulnerability" do Intergovernmental Panel for Climate Change (IPCC, 2001) alerta sobre as mudanças climáticas no século atual, enfatizando as "mudanças na variabilidade do clima e na freqüência e intensidade de alguns fenômenos climáticos". Estas previsões, que são apresentadas com uma confiança cada vez maior, implicam afirmar que a estacionariedade estatística, necessária para muitas análises hidrológicas, não pode ser suposta a priori devendo-se esperar que a disponibilidade espacial e temporal de recursos hídricos possa alterar em consonância com as mudanças do clima regional. Isto tem uma importância enorme para um país como o

Brasil, com mais de 90% da sua energia gerada por hidrelétricas e com demandas crescentes nas áreas de irrigação, abastecimento urbano e navegação.

A ênfase deste trabalho é sobre aspectos da detecção e estimação das “mudanças na frequência e intensidade de alguns fenômenos climáticos” acima citado segundo relatório do IPCC. Dois procedimentos típicos para detectar a existência de uma tendência numa seqüência de valores extremos anuais são: (1) a análise de regressão (por exemplo, Salas, 1993); e (2) métodos não-paramétricos, freqüentemente por meio do teste Mann-Kendall (Hirsch et al., 1993). Nenhum dos dois leva em conta os fatos de que (a) na ausência de qualquer tendência, os valores em uma seqüência hidrológica ou meteorológica de valores extremos anuais, pode-se esperar terem uma distribuição de tipo EV; (b) na presença de uma tendência, ela será superposta em dados com distribuição tipicamente do tipo EV. No caso do procedimento (1), supõe-se que os dados da seqüência têm distribuição Normal $N(\mu, \sigma^2)$ com μ constante quando inexistente tendência, e com μ da forma $\mu = \mu_t = \beta_0 + \beta_1 t + \dots$ quando existe tendência, sendo $t = 1, 2 \dots N$ o tempo em anos. No caso do procedimento (2), usando-se o teste Mann-Kendall, inicialmente não se supõe nenhuma forma explícita para a distribuição dos dados; entretanto, se o teste não confirmar a existência de uma tendência, uma distribuição do tipo EV é então ajustada aos dados, para que se estimem os períodos de retorno de eventos extremos. Portanto, do ponto de vista lógico, nem a análise de regressão nem testes Mann-Kendall são satisfatórios quando uma tendência, se existir, é superposta em dados cuja distribuição é fundamentalmente EV.

Dois trabalhos recentes (Clarke, 2002a e b) tratam da detecção e estimação de tendências em seqüências de máximos anuais de variáveis hidrológicas, as quais podem ser supostas possuírem distribuição Gumbel (Clarke, 2002a) ou Weibull (Clarke, 2002b) na ausência de tendências temporais. O primeiro trabalho formula o problema da estimação de tendências em dados com distribuição de Gumbel através do ajuste de um Modelo Linear Generalizado (GLM) e apresenta um procedimento iterativo para a estimação dos parâmetros da tendência; o segundo trabalho (Clarke, 2002b) modifica este procedimento iterativo para permitir estimação de tendências e testes de significância dos parâmetros de uma tendência, em seqüências cuja distribuição fundamental é Weibull ou uma distribuição EV Generalizada (isto é, com distribuição GEV). O objetivo do presente trabalho é apresentar resultados analíticos, e de simulações, os quais complementam e estendem os resultados anteriormente apresentados para a distribuição Gumbel; um segundo trabalho apresentará os resultados correspondentes para a distribuição Weibull.

Mesmo que a ênfase do trabalho é a detecção e estimação de tendências temporais em dados com distribuição Gumbel, os resultados têm uma importante aplicação adicional, na análise de seqüências extraídas de uma distribui-

ção Gumbel para as quais nenhuma tendência existe: ou em outras palavras, em casos nos quais procura-se elucidar as relações entre uma variável Gumbel e variáveis concomitantes explicativas. Um exemplo é o seguinte: para uma seqüência de intensidades máximas anuais de precipitação (sem tendência temporal), com duração uma hora, seria interessante relacionar as intensidades observadas às condições meteorológicas – e.g., a velocidade e direção do vento – quando da ocorrência da intensidade máxima. A abordagem apresentada aqui tem relevância neste contexto também, sendo substituída a variável t , que denota tempo, pela velocidade V do vento (por exemplo). O trabalho anteriormente referenciado (Clarke, 2002a) estende esta análise a um número qualquer de variáveis concomitantes.

A variância da estimativa, obtida por regressão linear, do parâmetro de uma tendência linear: dados com distribuição Gumbel

Considera-se o caso no qual, na ausência de uma tendência temporal, os dados têm distribuição Gumbel com função densidade de probabilidade dada por:

$$f_Y(y; u, \alpha) = \alpha \exp[-\alpha(y - u) - \exp\{-\alpha(y - u)\}] \quad (1)$$

$-\infty < y < \infty$

com média $u + \gamma/\alpha$, e variância $\pi^2/6\alpha^2$. Após superposição de uma tendência linear, esta distribuição modifica-se para a forma:

$$f_Y(y; u, \alpha, \beta) = \alpha \exp[-\alpha(y - u - \beta t) - \exp\{-\alpha(y - u - \beta t)\}] \quad (1a)$$

$-\infty < y < \infty$

sendo t a variável tempo. Assim, a média da variável aleatória Gumbel Y_t é $(u + \gamma/\alpha) + \beta t$. O constante de Euler γ tem valor aproximado $\gamma \approx 0.57721\dots$. Dadas N observações y_1, y_2, \dots, y_N da variável Y aos tempos $t = t_1, t_2, \dots, t_N$, deseja-se estimar o parâmetro β em (1a) e determinar se sua magnitude justifique rejeição da hipótese nula $H_0: \beta = 0$ em favor da hipótese alternativa $H_1: \beta \neq 0$.

Ao estimar β por regressão linear, obtém-se:

$$\hat{\beta}_{RL} = \frac{\sum_i y_i (t_i - \bar{t})}{\sum_i (t_i - \bar{t})^2} \quad (2)$$

e pode-se verificar que, para as observações y_1, y_2, \dots, y_N com distribuição dada por (1a), o estimador (2) é não-tendencioso: isto é, $E[\hat{\beta}_{RL}] = \beta$, e a variância do estimador é:

$$\text{var}[\hat{\beta}_{RL}] = \frac{\pi^2}{6\alpha^2 S_{tt}} \quad (3)$$

sendo S_{tt} o denominador em (2). Se as observações y_t representam uma seqüência contínua de anos, indexada por $\{1, 2$

Tabela 1. Médias de conjuntos de 600 amostras geradas aleatoriamente a partir de uma distribuição Gumbel padronizada ($u = 0$, $\alpha = 1$) com tendência linear β superposta do tamanho indicado.

N = 30				
Médias das estimativas do parâmetro de tendência β (igual a aumentos em $E[Y]$ de 0 , $\frac{1}{2}\sigma$, σ e 2σ através o período de registro artificial igual a $N = 30$)				
	$\beta = 0$:	$\beta = 0,02137$:	$\beta = 0,04275$:	$\beta = 0,0855$:
RL:	- 0,0003789 ($\pm 0,0^2113$)	+ 0,02113 ($\pm 0,0^2108$)	+ 0,04276 ($\pm 0,0^2115$)	+ 0,08353 ($\pm 0,0^2105$)
MV:	- 0,0009326 ($\pm 0,0^3929$)	+ 0,02106 ($\pm 0,0^3888$)	+ 0,04202 ($\pm 0,0^3974$)	+ 0,08368 ($\pm 0,0^3869$)
N = 50				
Médias das estimativas do parâmetro de tendência β (igual a aumentos em $E[Y]$ de 0 , $\frac{1}{2}\sigma$, σ e 2σ através o período de registro artificial igual a $N = 50$)				
	$\beta = 0$:	$\beta = 0,01282$:	$\beta = 0,02564$:	$\beta = 0,0513$:
RL:	+ 0,0002929 ($\pm 0,0^3493$)	+ 0,01275 ($\pm 0,0^3509$)	+ 0,02583 ($\pm 0,0^3508$)	+ 0,05131 ($\pm 0,0^3528$)
MV:	+ 0,0002303 ($\pm 0,0^3399$)	+ 0,01282 ($\pm 0,0^3405$)	+ 0,02597 ($\pm 0,0^3409$)	+ 0,05125 ($\pm 0,0^3407$)

... N }, então $S_{tt} = N(N^2 - 1)/12$. Ao estimar os três parâmetros em (1a) pelo método do Máximo da Verossimilhança (MV) e, supondo que as observações y_i sejam independentes entre si, a matriz de covariância assintótica dos três parâmetros $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3] = [\alpha, u, \beta]$, denotada por $E[-\partial^2 \ln L / \partial \theta_i \partial \theta_j]^{-1}$, é dada pelo inverso de:

$$\begin{bmatrix} N(1+I_2)/\alpha^2 & NI_1 & I_1 \sum_i t_i \\ NI_1 & N\alpha^2 & \alpha^2 \sum_i t_i \\ I_1 \sum_i t_i & \alpha^2 \sum_i t_i & \alpha^2 \sum_i t_i^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

sendo $I_1 = 1 - \gamma$, $I_2 = \pi^2/6 - 2\gamma + \gamma^2$. Com a indexação anual $\{1, 2 \dots N\}$ e denotando o estimador MV por $\hat{\beta}_{MV}$, a inversão desta matriz resulta na seguinte expressão:

$$\text{var}[\hat{\beta}_{MV}] = 12/[\alpha^2 N(N^2 - 1)] \quad (5)$$

Assim, pode-se notar que:

$$\text{var}[\hat{\beta}_{RL}] / \text{var}[\hat{\beta}_{MV}] = \pi^2/6 \approx 1,64$$

Esse resultado aproximado mostra que, quando a seqüência de observações é suficientemente extensa, a variância do estimador regressão linear do parâmetro de tendência linear β é 64% maior do que a do estimador MV.

A expressão assintótica de $\text{var}[\hat{\beta}_{MV}]$ utilizada na obtenção deste resultado é apropriada para o caso em que N tende para o infinito. Uma questão que surge imediatamente diz respeito ao comportamento das estimativas MV de β

quando a seqüência de valores anuais é do tamanho geralmente encontrado na prática; nesse contexto, é possível que um resultado assintótico não seja apropriado para amostras de pequeno tamanho. Além disso, teoricamente, os estimadores MV tem distribuição assintoticamente gaussiana, a qual é usada para calcular intervalos de confiança para os parâmetros estimados por MV; portanto, é necessário estabelecer se a suposição de Normalidade é também aceitável no caso de amostras finitas de pequeno tamanho. As seções a seguir descrevem os métodos de simulação utilizados para responder a estas perguntas.

Metodologia empregada na comparação das variâncias do coeficiente de tendência linear β estimado por: a) regressão linear; b) máxima verossimilhança; amostras de $N = 30$ e $N = 50$

Amostras de tamanho $N = 30$ e $N = 50$ foram geradas a partir de uma distribuição Gumbel padronizada com $u = 0$, $\alpha = 1$ na Equação (1); estas amostras foram consideradas como representativas dos períodos de registro hidrológico, para os quais são plausíveis tendências temporais. Na ausência de tendência, a variância da distribuição Gumbel padronizada é $\sigma^2 = \pi^2/6$ e, portanto, o desvio padrão é portanto aproximadamente $\sigma = 1,2825$. As tendências lineares superpostas em dados simulados foram correspondentes aos aumentos de $\frac{1}{2}\sigma$, σ e 2σ , distribuídos ao longo do comprimento N do registro artificial. Assim com $N = 50$ e $\sigma = 1,2825$, uma tendência com coeficiente de tendência linear igual a $\beta = 0.02565$ foi superposta aos 50 valores da distribuição Gumbel padronizada

Tabela 2. Variâncias dos conjuntos de 600 amostras aleatórias geradas a partir de uma distribuição Gumbel padronizada ($u = 0, \alpha = 1$) com tendência linear superposta β do tamanho indicado.

N = 30				
Variâncias das estimativas do parâmetro β de tendência linear (igual a aumentos em $E[Y]$ de $0, \frac{1}{2}\sigma, \sigma$ e 2σ através o período de registro artificial de tamanho $N = 30$)				
	$\beta = 0:$	$\beta = 0,02137:$	$\beta = 0,04275:$	$\beta = 0,0855:$
RL:	0,0 ³ 7624	0,0 ³ 6999	0,0 ³ 7920	0,0 ³ 6623
MV:	0,0 ³ 5178	0,0 ³ 4731	0,0 ³ 5692	0,0 ³ 4527
RL/MV:				
Razão	1,47	1,48	1,39	1,46
N = 50				
Variâncias das estimativas do parâmetro β de tendência linear (igual a aumentos em $E[Y]$ de $0, \frac{1}{2}\sigma, \sigma$ e 2σ através o período de registro artificial de tamanho $N = 50$)				
	$\beta = 0:$	$\beta = 0,01282:$	$\beta = 0,02564:$	$\beta = 0,0513:$
RL:	0,0 ³ 1459	0,0 ³ 1554	0,0 ³ 1546	0,0 ³ 1672
MV:	0,0 ⁴ 9547	0,0 ⁴ 9835	0,0 ³ 1006	0,0 ⁴ 9926
RL/MV:				
Razão	1,52	1,58	1,54	1,68

($50 \times 0,02565 = 1,2825$). Portanto, as três tendências $\beta = 0,01282, \beta = 0,02565$ e $\beta = 0,0513$, correspondentes a $\frac{1}{2}\sigma, \sigma$ e 2σ , foram em ordem crescente de magnitude, muito embora, tenham sido distintas nos casos $N = 30$ e $N = 50$ porque estes dois “registros” têm comprimentos diferentes.

Após geração das amostras com estas características, os coeficientes de tendência linear β foram estimados por: a) regressão linear (RL); e b) Máxima Verossimilhança (MV); as estimativas assim obtidas são doravante denotadas por RL1, MV1. Com um único parâmetro β a ser estimado, teria sido possível utilizar qualquer dos vários procedimentos conhecidos (por exemplo Newton-Raphson, ou simplex) para solucionar a equação MV para este parâmetro; entretanto, é computacionalmente vantajoso colocar o procedimento MV de estimação na forma de um Modelo Linear Generalizado (MLG), cujos parâmetros são estimados pelo algoritmo Mínimos Quadrados com Pesos Calculados Iterativamente (em inglês: “Iteratively-Weighted Least Squares”, IWLS) apresentado por McCullagh e Nelder (1983) e Green (1984). Uma discussão sobre este procedimento, no contexto da estimação de parâmetros de tendências, bem como sobre as vantagens computacionais advindas do seu uso, foi apresentada em um trabalho recente (Clarke, 2002a). Aqui, é suficiente notar que, quando é necessário estimar mais de um parâmetro de tendência, a convergência é mais rápida com IWLS e que os softwares disponíveis comercialmente permitem o uso de IWLS junto com testes de hipóteses sobre os parâmetros da tendência. As Tabelas 1 e 2 apresentam as médias e variâncias dos conjuntos de 600 amostras geradas com os dois tamanhos de amostra ($N = 30, N = 50$) e os diferentes valores do parâmetro de tendência β , único no presente caso.

Os Erros de Tipo II dos testes, e portanto as potências dos testes, podem ser calculados diferentemente do método acima apresentado. No caso do procedimento que utiliza a regressão linear, a estatística geralmente utilizada é $t = \hat{\beta}_{RL} / \sqrt{\text{var}(\hat{\beta}_{RL})}$, sendo esta comparada com o valor tabelado da estatística t de Student com $N-2$ graus de liberdade. Quando são geradas amostras simuladas com parâmetro de tendência β positivo, a estatística t pode ser calculada e a proporção das amostras nas quais a hipótese nula $H_0: \beta = 0$ não é rejeitada, é uma estimativa do Erro Tipo II do teste. Semelhantemente para o procedimento MV: a estatística $u = \hat{\beta}_{MV} / \sqrt{\text{var}(\hat{\beta}_{MV})}$ pode ser comparada, usando a teoria Normal, com os valores tabulados $u = 1,645$ and $u = 1,96$ apropriados para testes unilateral e bilateral respectivamente, sendo $\text{var}[\hat{\beta}_{MV}] = 12/[\hat{\alpha}^2 N(N^2 - 1)]$, sendo $\hat{\alpha}$, a estimativa MV do parâmetro de escala. Para valores não-nulos de β , usados na simulação das amostras, a proporção das amostras para as quais a hipótese nula $H_0: \beta = 0$ não é rejeitada estima o Erro Tipo II do teste. Estes métodos alternativos para calcular os Erros Tipo II, e portanto as potências dos testes RL e MV, são denotados por RL2 e ML2, para distingui-los dos procedimentos RL1, ML1 anteriormente descritos. As características destes testes são apresentadas na Tabela 3, a qual mostra as diferenças entre os Erros Tipo II dos procedimentos RL1 e RL2 e entre MV1 e MV2.

Para estabelecer se é razoável considerar como Normalmente distribuídas as estimativas MV do parâmetro de tendência linear β , em amostras de tamanho $N = 30$ e $N = 50$, os quantis das 600 estimativas foram calculadas e plotadas contra os quantis da distribuição Normal padronizada. Um gráfico linear confirmaria conformidade com a

hipótese de que as estimativas têm distribuição Normal. Estes gráficos são apresentados nas Figuras 1 e 2.

Esta seção descreveu como foram obtidas as características das estimativas RL e MV do parâmetro de tendência linear β . O teste não-paramétrico Mann-Kendall (MK) de tendência, anteriormente mencionado, é um teste para a significância estatística de tendência (não necessariamente linear) sem fornecer uma estimativa da magnitude da tendência. A seção a seguir descreve os procedimentos usados na comparação das potências de testes de significância da hipótese nula $H_0: \beta = 0$, contra a hipótese alternativa unilateral $H_1: \beta > 0$, e a hipótese alternativa bilateral $H_1: \beta \neq 0$, sob as abordagens RL, MV e MK.

Metodologia empregada na comparação das potências dos testes (a) MV, (b) RL, (c) MK da hipótese nula “tendência ausente” ($\beta = 0$) contra as hipóteses alternativas $\beta > 0$ e $\beta \neq 0$

As potências dos três testes foram comparadas por simulação. No caso dos testes MV1 e RL1, a região crítica correspondente ao erro de 5% foi calculada pela simulação de 600 amostras, todas com a distribuição (1) na qual $\beta = 0$. Assim, o *tamanho* do teste foi 0,05 em todos os casos. Para cada amostra gerada, as estimativas $\hat{\beta}_{MV}$ e $\hat{\beta}_{RL}$ do coeficiente de tendência foram calculadas, juntamente com o quantil de 95% (no caso da hipótese alternativa unilateral, $H_1: \beta > 0$) ou com os quantis de 2,5% e de 97,5% (no caso da hipótese alternativa bilateral, $H_1: \beta \neq 0$). Para os procedimentos RL1 e MV1, estes quantis definiram as regiões das quais o Erro Tipo I – isto é, o erro que ocorre quando uma hipótese nula verdadeira $H_0: \beta = 0$ é rejeitada – foi conhecido e igual a 5% (isto é, em 5% de um número muito grande de amostras com a distribuição (1), a estimativa $\hat{\beta}$ do coeficiente de tendência linear cairia na região crítica, resultando na conclusão que existe uma tendência, mesmo que de fato ela não exista. Após definição das regiões críticas, grupos de 600 amostras foram geradas novamente com valores conhecidos de β , desta feita diferentes de zero, e com os valores apresentados na Tabela 1. As estimativas $\hat{\beta}_{MV}$ e $\hat{\beta}_{RL}$ foram calculadas para cada uma das amostras geradas, assim como as proporções das 600 amostras, cujas estatísticas de testes localizaram-se na região de aceitação da hipótese nula. Estas proporções são estimativas dos Erros Tipo II – isto é, as probabilidades de que amostras selecionadas aleatoriamente da distribuição (1a), com parâmetro de tendência β não nulo, resultem em estimativas $\hat{\beta}_{ML}$ e $\hat{\beta}_{LR}$ que recaiam dentro da região de aceitação da hipótese nula $H_0: \beta = 0$, mesma que esta hipótese seja de fato falsa. Assim, o tamanho da região crítica foi fixado em 5%. Entretanto o Erro Tipo II poderia ser, e o foi, constatado como diferente para os procedimentos distintos de

Tabela 3. Potências dos procedimentos de teste LR1, LR2, MK, ML1 e ML2. Todos os testes são de tamanho 0,05. Potências são para alternativas unilaterais e bilaterais, e com dois tamanhos de amostra $N = 30$ e $N = 50$.

Hipótese alternativa bilateral, $H_1: \beta \neq 0$			
N = 30			
	$\beta = 0,02137$	$\beta = 0,04275$	$\beta = 0,0855$
RL1:	0,1267 ($\pm 0,0136$)	0,3633 ($\pm 0,0196$)	0,8550 ($\pm 0,0144$)
RL2:	0,1017 ($\pm 0,0123$)	0,3790 ($\pm 0,0198$)	0,8650 ($\pm 0,0140$)
MK:	0,0683 ($\pm 0,0102$)	0,1517 ($\pm 0,0146$)	0,7150 ($\pm 0,0184$)
MV1:	0,1383 ($\pm 0,0141$)	0,4483 ($\pm 0,0203$)	0,9700 ($\pm 0,0070$)
MV2:	0,1717 ($\pm 0,0154$)	0,5000 ($\pm 0,0204$)	0,9700 ($\pm 0,0070$)
N = 50			
	$\beta = 0,01282$	$\beta = 0,02564$	$\beta = 0,0513$
RL1:	0,2317 ($\pm 0,0172$)	0,6433 ($\pm 0,0196$)	0,9867 ($\pm 0,0047$)
RL2:	0,1750 ($\pm 0,0155$)	0,5133 ($\pm 0,0204$)	0,9733 ($\pm 0,0066$)
MK:	0,0500 ($\pm 0,0089$)	0,2217 ($\pm 0,0170$)	0,9093 ($\pm 0,0117$)
MV1:	0,2533 ($\pm 0,0178$)	0,7333 ($\pm 0,0180$)	0,9967 ($\pm 0,0023$)
MV2:	0,2567 ($\pm 0,0178$)	0,7383 ($\pm 0,0179$)	0,9967 ($\pm 0,0023$)
Hipótese alternativa unilateral, $H_1: \beta > 0$			
N = 30			
	$\beta = 0,02137$	$\beta = 0,04275$	$\beta = 0,0855$
RL1:	0,1800 ($\pm 0,0157$)	0,4817 ($\pm 0,0203$)	0,9100 ($\pm 0,0117$)
RL2:	0,1733 ($\pm 0,0154$)	0,4783 ($\pm 0,0204$)	0,9333 ($\pm 0,0102$)
MK:	0,0767 ($\pm 0,0109$)	0,2217 ($\pm 0,0170$)	0,8050 ($\pm 0,0162$)
MV1:	0,2350 ($\pm 0,0173$)	0,5883 ($\pm 0,0201$)	0,9850 ($\pm 0,0050$)
MV2:	0,2567 ($\pm 0,0178$)	0,6167 ($\pm 0,0198$)	0,9850 ($\pm 0,0050$)
N = 50			
	$\beta = 0,01282$	$\beta = 0,02564$	$\beta = 0,0513$
RL1:	0,3217 ($\pm 0,0191$)	0,7367 ($\pm 0,0180$)	0,9917 ($\pm 0,0037$)
RL2:	0,2767 ($\pm 0,0183$)	0,6667 ($\pm 0,0192$)	0,9917 ($\pm 0,0037$)
MK:	0,1100 ($\pm 0,0128$)	0,3313 ($\pm 0,0192$)	0,9583 ($\pm 0,0082$)
MV1:	0,3317 ($\pm 0,0192$)	0,8067 ($\pm 0,0161$)	0,9983 ($\pm 0,0017$)
MV2:	0,3583 ($\pm 0,0196$)	0,8267 ($\pm 0,0154$)	0,9983 ($\pm 0,0017$)

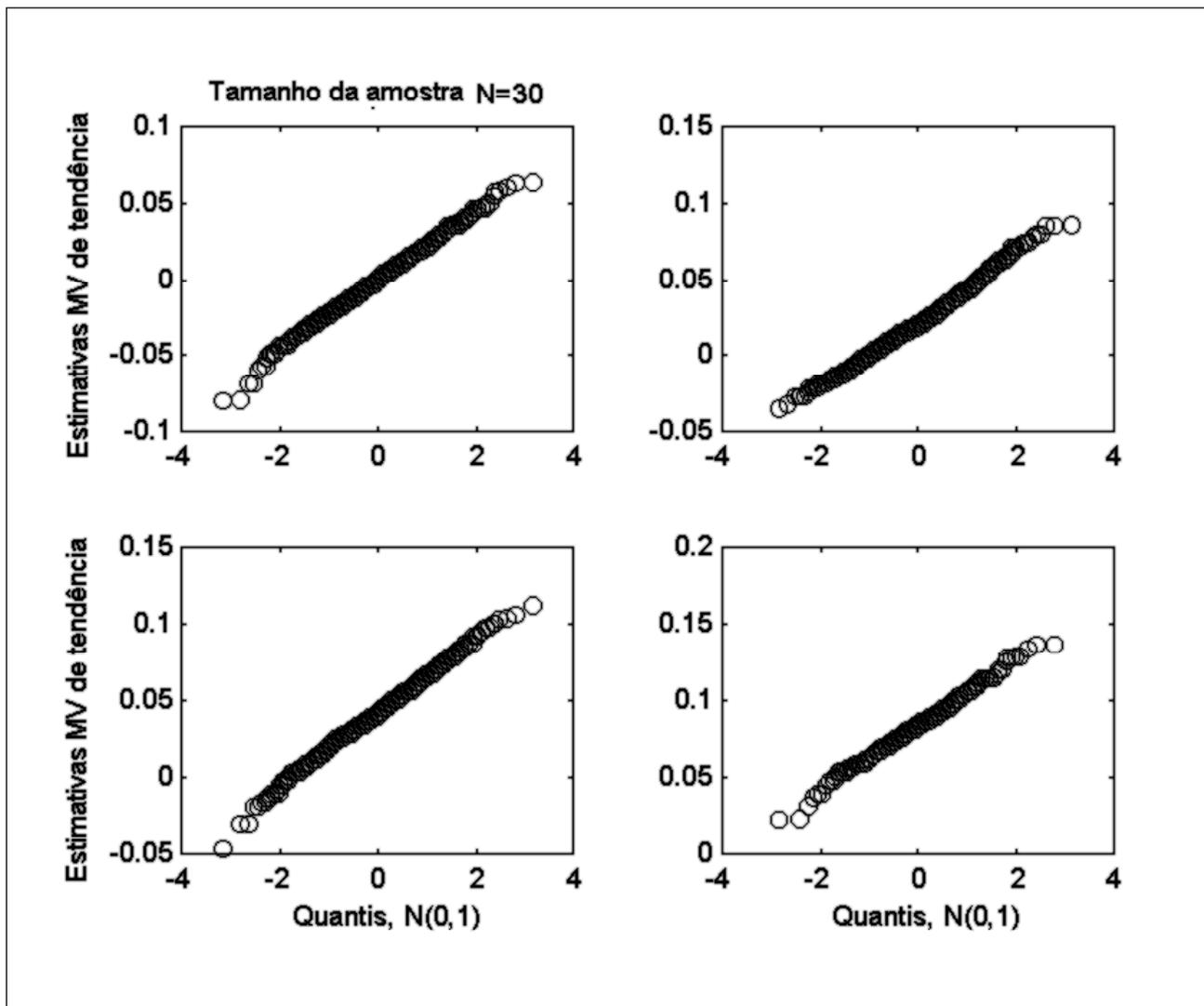


Figura 1. Gráficos em papel de probabilidade normal para as estimativas Máxima Verossimilhança do parâmetro β de tendência linear, calculadas a partir de conjuntos de 600 amostras de tamanho $N = 30$ e geradas aleatoriamente da distribuição Gumbel padronizada ($u = 0, \alpha = 1$) com tendência linear superposta: parâmetro de tendência $\beta = 0, \beta = 0,02137, \beta = 0,04275, \beta = 0,0855$.

teste e os Erros Tipo II são relacionados à potência de um teste pela relação “potência = 1 – Erro Tipo II”. Assim, quanto maior o Erro Tipo II, tanto menor será a potência do teste. Testes potentes têm pequenos Erros Tipo II, embora a magnitude do Erro do Tipo II dependa do valor verdadeiro, porém desconhecido, de β na hipótese alternativa H_1 .

No caso dos procedimentos RL2 and MV2, os valores críticos dos testes não foram determinados por simulação, mas sim pelos valores tabelados usuais da estatística t de Student no caso de RL2, e dos valores usuais da distribuição Normal $N(0,1)$ no caso do procedimento MV2, como apresentado na seção anterior. Entretanto, os Erros de Tipo II, e portanto a potência de cada teste, foram determinados pela simulação de conjuntos de 600 amostras e pela quantificação

das proporções de amostras cujas estimativas caíram fora da região crítica assim determinada.

Para o teste Mann-Kendall, o procedimento foi semelhante a o usado para RL2 e MV2, mesmo que o teste MK não forneça uma estimativa do coeficiente de tendência. No teste MK, a estatística Z é calculada de tal modo que, na ausência de tendência e com amostras do tamanho $N = 30$ e $N = 50$, usadas neste trabalho, sua distribuição de probabilidades pode ser bem aproximada pela distribuição Normal padronizada $N(0, 1)$. Assim, em cada das 600 amostras geradas com $\beta = 0$ segundo a distribuição (1), a estatística Z foi calculada e os quantis foram obtidos de forma a definir as regiões críticas de tamanho 5%. Ao comparar a estatística de teste com os desvios apropriados da distribuição Normal padronizada, as regiões críticas 5% deveriam ser

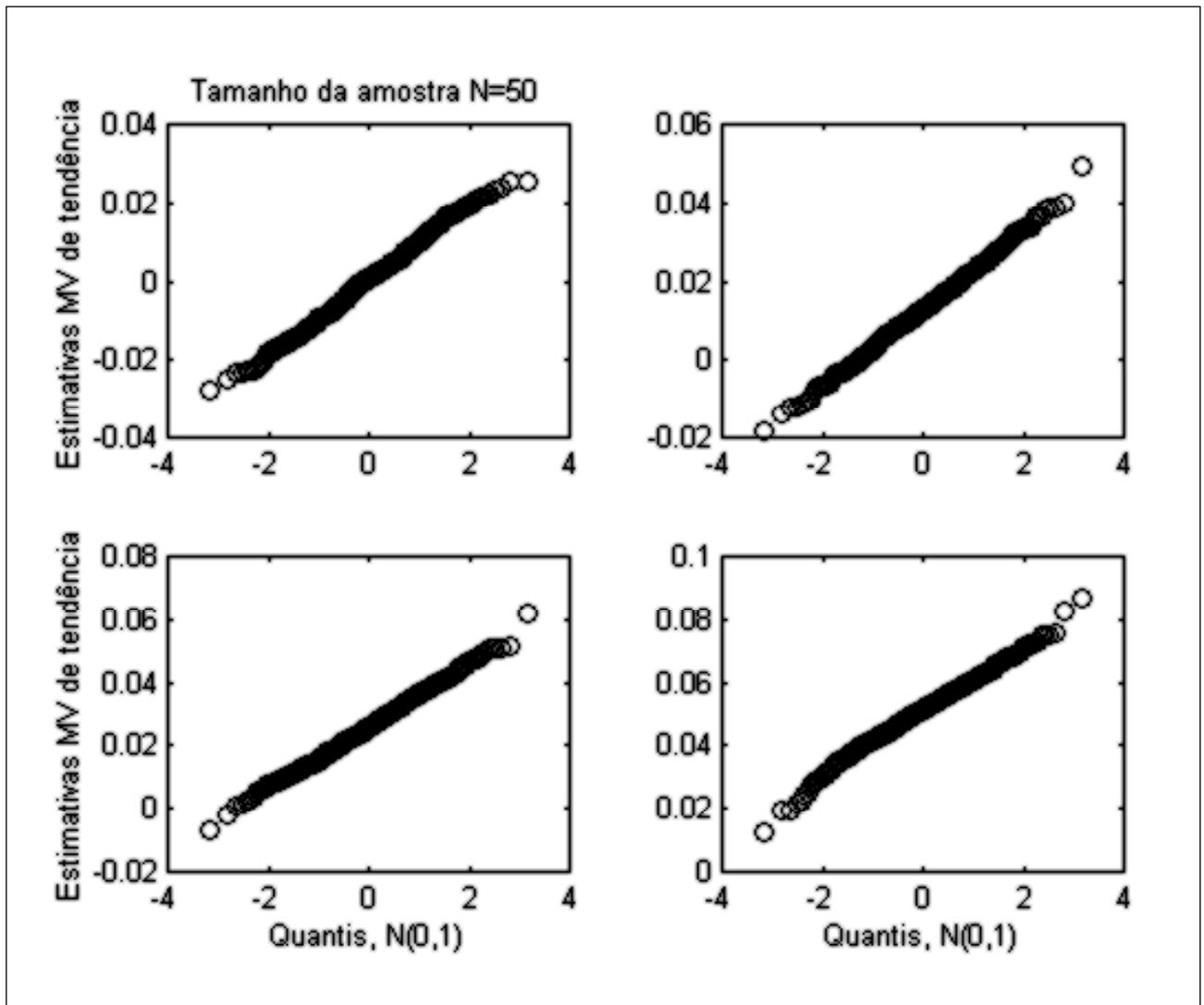


Figura 2. “Normal plots” para as estimativas Máxima Verossimilhança do parâmetro β de tendência linear, calculadas a partir de conjuntos de 600 amostras de tamanho $N = 50$ e geradas aleatoriamente da distribuição Gumbel padronizada ($u = 0, \alpha = 1$) com tendência linear superposta: parâmetro de tendência $\beta = 0, \beta = 0,01282, \beta = 0,02565, \beta = 0,05130$.

$|Z| > 1.96$ no caso do teste bilateral ($H_1: \beta \neq 0$) e $Z > 1.645$ para o teste unilateral ($H_1: \beta > 0$). Neste estudo as 600 amostras selecionadas da distribuição (1) resultaram, no caso de testes bilaterais, em regiões críticas de $-1.76 < Z < 1.94$ e $-1.924 < Z < 1.974$ para as amostras com $N = 30$ e $N = 50$ respectivamente e, no caso de testes unilaterais, as regiões críticas foram $Z > 1.647$ e $Z > 1.601$ com $N = 30$ e $N = 50$. Igualmente ao caso dos procedimentos MV e RL, os conjuntos de 600 amostras com os valores de β apresentados na Tabela 1 foram utilizados para estabelecer as proporções, das 600 amostras geradas, nas quais a estatística Z do teste MK ficou fora da região crítica, sendo esta proporção uma estimativa do Erro de Tipo II. A Tabela 3 apresenta a potência para amostras dos tamanhos $N = 30$ e $N = 50$, com hipóteses alternativas H_1 unilaterais e bilaterais, obtidos para os cinco testes RL1, MV1, MK, RL2 e MV2.

DISCUSSÃO

As Tabelas 1 e 2 apresentam as médias e variâncias dos valores estimados do único parâmetro de tendência linear β , estimado por RL e por MV, e com os tamanhos de amostra $N = 30$ e $N = 50$, obtidas pela geração de conjuntos de 600 amostras artificiais. Para os dois tamanhos de amostra, a Tabela 1 mostra que as estimativas MV são efetivamente não-tendenciosas (mesmo que com $N = 30$ e $\beta = 0$, a média das estimativas MV de β é bem maior que o dobro das estimativas RL, anteriormente demonstradas a ser não-tendenciosas). Entretanto com $N = 30$ e valores positivos de β , as médias RL e MV são quase iguais. Por outro lado, a Tabela 2 mostra que existem diferenças marcantes entre as variâncias que resultam das dois procedimentos de estimação; para ambos os tamanhos de amostra $N = 30$ e $N = 50$,

e com todos os valores do parâmetro de tendência β , as variâncias pelo procedimento MV são bem menores do que as variâncias das estimativas RL; observe que para cada tamanho de amostra, a razão $\text{var}[\hat{\beta}_{RL}]/\text{var}[\hat{\beta}_{MV}]$ é menor do que seu valor assintótico 1,64, sendo aproximadamente 1,45 com $N = 30$, e maior, 1,58 aproximadamente, com $N = 50$. Isto sugere que, quando o tamanho do registro N é menor do que os mais apropriados para a estimação do valor assintótico, ainda existe um ganho considerável na precisão das estimativas MV relativamente à precisão obtida com RL, mesmo que a redução na variância seja menor do que no caso assintótico.

Um ponto interessante refere-se às variâncias de $\hat{\beta}_{LR}$ e de $\hat{\beta}_{ML}$ quando a tendência verdadeira é zero, ou seja $\beta = 0$. Demonstrou-se que $\text{var}[\hat{\beta}_{RL}] = 2\pi^2/[N(N^2 - 1)] = 0,0^373189$ e $0,0^315798$ quando $N = 30$ e $N = 50$ respectivamente, sendo os valores de tempo t separados por intervalos iguais; as variâncias de $\hat{\beta}_{RL}$ obtidas com os dois conjuntos de 600 amostras simuladas são próximas a estes valores, $0,0^37624$ e $0,0^31459$ respectivamente. Da mesma forma, $\text{var}[\hat{\beta}_{MV}] = 2/[\alpha^2N(N^2 - 1)]$; com $N = 30$, $N = 50$ e $\alpha = 1$, esta variância tem valores $0,0^34449$ e $0,0^496038$. As variâncias de $\hat{\beta}_{MV}$ obtidas nas simulações foram $0,0^35178$ e $0,0^49547$ respectivamente.

Sobre a Normalidade das estimativas MV de β , as Figuras 1 e 2 não evidenciam ser inapropriada a suposição de Normalidade da distribuição das estimativas $\hat{\beta}_{MV}$, mesmo com amostras tão pequenas quanto $N = 30$.

A Tabela 3, que apresenta as potências dos procedimentos RL1, RL2, MK, ML1 e ML2, mostra que os Erros Tipo II são maiores no caso do teste Mann-Kendall, sendo a diferença entre este e RL, MV especialmente grande para valores maiores do coeficiente de tendência linear β . Como era de se esperar, a potência é maior quando $N = 50$ do que quando $N = 30$, porque mais “dados” permitem maior discriminação; com todos os cinco testes, a potência aumenta com os valores maiores de β , como também era de se esperar. Para todos os valores de β e para os dois tamanhos de amostra, os testes MV são mais potentes do que ambos os procedimentos MK or RL; as diferenças entre MV e RL não são muito grandes quando β é pequeno, mas são maiores quando β também é maior.

CONCLUSÃO

Discute-se neste trabalho o caso no qual as seqüências de dados hidrológicos podem ser supostas independentes e com distribuição de Gumbel, possivelmente com média que varia com tempo. Foi suposto que a tendência temporal na média desta distribuição Gumbel pode ser adequadamente representada por um único parâmetro β , a ser estimado pelo método do Máximo da Verossimilhança (MV). A variância assintótica do estimador MV, denotado por $\hat{\beta}_{MV}$, foi com-

parada com a variância do estimador $\hat{\beta}_{RL}$ no qual a tendência é estimada por regressão linear (RL); assintoticamente (isto é, quando o tamanho da amostra de dados é suficientemente grande) a variância de $\hat{\beta}_{LR}$ é 64% maior do que a variância de $\hat{\beta}_{ML}$. Tendências lineares de diferentes valores foram superpostas às amostras aleatórias com distribuição Gumbel padronizada, e as potências de três procedimentos para testar a significância de tendência (Máxima Verossimilhança, Regressão Linear e o teste não-paramétrico Mann-Kendall) foram comparadas. O procedimento MV sempre foi mais potente, tendo procedimento MK sido o menos potente por uma margem substancial.

AGRADECIMENTOS

O autor oferece seus sinceros agradecimentos aos dois revisores anônimos, pelas muitas correções ao texto em português.

REFERÊNCIAS

- BRUIJNZEEL, L. A. (1990). *Hydrology of moist tropical forests and effects of conversion: a state of knowledge review*. IHP/IAHS/UNESCO: Paris p.224.
- BRUIJNZEEL, L. A. (1996). Predicting the hydrological impacts of land cover transformation in the humid tropics: the need for integrated research. In: *Amazonian Deforestation and Climate*, p.15-55, Eds. J. H. C. Gash; C* Nobre, J. M. Roberts and R. L. Victoria. John Wiley & Sons Limited, Chichester.
- CHANGNON, S. A. & KUNKEL, K. E. (1995). Climate-related fluctuations in midwestern floods during 1921-1985. *J. Water Resour. Plann. Mgmt*, 121(4), 326-334.
- CLARKE, R. T. (2002a). Estimating time trends in Gumbel-distributed data by means of generalized linear models. *Water Resour. Res.* (a ser publicado)
- CLARKE, R. T. (2002b). Estimating trends in data from the weibull and a GEV distribution. *Water Resour. Res.* (a ser publicado)
- DOUGLAS, E. M.; VOGEL, R. M. & KROLL, C. N. (2000). Trends in floods and low flows in the United States: impact of spatial correlation. *J. Hydrology* 240, 1-2, 90-105.
- GREEN, P. J. (1984). Iteratively reweighted least squares for maximum likelihood estimation, and some robust and resistant alternatives (with discussion). *J. R. Statist. Soc B* 46, 149-92.
- GROISMAN, P. Y. & EASTERLING, D. R. (1994). Variability and trends in total precipitation and snowfall over the United States and Canada. *J. Clim.*, 7, 184-205.
- GUTTMAN, N. B.; WALLIS, J. R. & HOSKING, J. R. M. (1992). Regional temporal trends of precipitation quantiles in the US. Research report RC 18453 (80774) IBM Research Division, Yorktown Heights, NY.
- HIRSCH, R. M.; HELSEL, D. R.; COHN, T. A. & GILROY, E. J. (1993). Statistical analysis of hydrologic data, Chapter 17 of

- Handbook of Hydrology*, Ed. In Chief: D R Maidment, p.17.1-17.55.
- IPCC (2001). Report, Climate Change. *Report of working group II impact, adaptation and vulnerability*. <http://www.ipcc.ch>.
- MCCULLAGH, P. & NELDER, J. A. (1983). *Generalized linear models* (2nd edition) Chapman & Hall, London.
- OLSEN, J. R.; STEDINGER, J. R.; MATALAS, N. C. & STAKHIV, E. Z. (1999). Climate variability and flood frequency estimation for the upper Mississippi and lower Missouri rivers. *J. Am. Water Resour. Assoc.*, 35(6), 1509-1520.
- SAHIN, V. & HALL, M. J. (1996). The Effects of afforestation and deforestation on water yields. *Jour. of Hydrol.*, 178, p.293-309.
- SALAS, J. D. (1993). Analysis and modeling of hydrologic time series, Chapter 19 of *Handbook of Hydrology*. Ed. In Chief: D R Maidment, p.19.1-19.72.
- STEDINGER, J. R.; VOGEL, R. M. & FOUFOULA-GEORGIU, E. (1993). Frequency analysis of extreme events, Chapter 18 of *Handbook of Hydrology*. Ed. In Chief: D R Maidment, p.18.1-18.66.
- VINNIKOV, K. Y.; GROISMAN, P. Y. & LUGINA, K. M. (1990). Empirical data on contemporary global climate change (temperature and precipitation). *J. Clim.*, 3, 662-677.

Fitting and Testing the Significance of Linear Trends in Gumbel-Distributed Data

ABSTRACT

The widely-used hydrological procedures for calculating events with T-year return periods from data that follow a Gumbel distribution assume that the data sequence from which the Gumbel distribution is fitted remains stationary in time. If non-stationarity is suspected, whether as a consequence of changes in land-use practices or climate, it is common practice to test the significance of trend by either of two methods: linear regression, which assumes that data in the record have a Normal distribution with mean value that possibly varies with time; or a non-parametric test such as that of Mann-Kendall, which makes no assumption about the distribution of the data. Thus, the hypothesis that the data are Gumbel-distributed is temporarily abandoned while testing for trend, but is re-adopted if the trend proves to be not significant, when events with T-year return periods are then calculated. This is illogical. The paper describes an alternative model in which the Gumbel distribution has a (possibly) time-variant mean, the time-trend in mean value being determined, for the present purpose, by a single parameter β estimated by Maximum Likelihood (ML). The large-sample variance of the ML estimate $\hat{\beta}_{ML}$ is compared with the variance of the trend β_{LR} calculated by linear regression; the latter is found to be 64% greater. Simulated samples from a standard Gumbel distribution were given superimposed linear trend of different magnitudes, and the power of each of three trend-testing procedures (Maximum Likelihood, Linear Regression, and the non-parametric Mann-Kendall test) were compared. The ML test was always more powerful than either the Linear Regression test, or Mann-Kendall, whatever the (positive) value of the trend β ; the power of the MK test was always least, for all values of β .

Key words: trend; Gumbel distribution; significance test.