

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**OTIMIZAÇÃO MULTI OBJETIVO DE CASCAS DE MATERIAIS COMPOSTOS  
LAMINADOS COM ORIENTAÇÃO VARIÁVEL DE FIBRAS**

por

Pedro Bühner Santana

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Maio de 2021.

**OTIMIZAÇÃO MULTI OBJETIVO DE CASCAS DE MATERIAIS COMPOSTOS  
LAMINADOS COM ORIENTAÇÃO VARIÁVEL DE FIBRAS**

por

Pedro Bühner Santana

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de mestre

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Coorientador: Prof. Dr. Felipe Schaedler de Almeida

Aprovada por:

Prof. Dr. Domingos Alves Rade (ITA – São José dos Campos/SP)

Prof. Dr. Volnei Tita (USP – São Carlos/SP)

Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas (PROMEC/UFRGS – Porto Alegre/RS)

Prof. Dr. Fernando Marcelo Pereira

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 5 de Maio de 2021

*“Quando se faz algo fora do comum, as cenas cotidianas se tornam um pouco diferentes. Mas não se deixe enganar pelas aparências. A realidade é sempre única.”*  
*Haruki Murakami, 1Q84*

## CIP - Catalogação na Publicação

Santana, Pedro Bühner

Otimização multiobjetivo de cascas de materiais compostos laminados com orientação variável de fibras /Pedro Bühner Santana -- 2021.

142 f.

Orientador: Herbert Martins Gomes.

Coorientador: Felipe Schaedler de Almeida.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Porto Alegre, BR-RS, 2021.

1. otimização multiobjetivo. 2. cascas de material composto. 3. MOQPSO. 4. orientação variável de fibra. 5. elementos finitos. I. Gomes, Herbert Martins, orient. II. Almeida, Felipe Schaedler, coorient. III. Título.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais Jorge e Márcia que, por mais que nos encontremos fisicamente distantes, sempre me acolheram com amor, carinho e palavras de apoio em todos os momentos da minha jornada acadêmica. Vocês são meu modelo, minha inspiração e meu porto seguro para seguir em frente. Por mais que a distância nos separe, nossos corações sempre estarão próximos.

Ao meu irmão Tomás, que sempre esteve ao meu lado e ajudou a me reerguer dos tombos tomados neste caminho tortuoso. Nosso laço de amizade é indestrutível. Obrigado por sempre estar ao meu lado e sempre poderá contar comigo para o que precisar.

Ao meu amigo Dhemer Jhony, que sempre se dispôs a me ouvir e não me julgar nos meus momentos de fraqueza. Mais que um amigo, o considero parte da minha família. Se a realização deste trabalho foi possível, parte da energia e determinação para a produção dele se deve ao seu apoio.

A minha namorada Luísa Vitória pela paciência, carinho, amizade e por me tirar do fundo do poço nos momentos de desespero nos quais eu perdi a confiança em mim mesmo. Nosso relacionamento me mostrou que mesmo em solo de tempos caóticos, um jardim belo pode crescer. Obrigado por estar ao meu lado.

Ao meu orientador Herbert Martins Gomes por todo conhecimento transmitido, pelo apoio durante a graduação e no processo de transição para a pós-graduação, pela paciência ao me guiar no caminho que levou a produção desse trabalho e pelas conversas descontraídas. Obrigado pela confiança e amizade, nutro muita admiração pelo senhor como professor e indivíduo e espero continuar trilhando este caminho sob sua orientação.

Ao meu coorientador Felipe Schaedler de Almeida, por abrir meus horizontes para novos conhecimentos e por me ajudar em momentos essenciais deste trabalho, pela paciência e pelo apoio. Espero poder continuar trabalhando e aprendendo com o senhor.

A minha amiga Nadine, pelas conversas sobre os mais diversos assuntos que ajudaram a tornar essa jornada e esse último ano tétrico em algo mais leve. Sempre pode contar comigo para o que precisar.

Aos meus colegas Ewerton e José pelo companheirismo e apoio. Espero que em breve possamos voltar a nos cruzar pelos corredores da universidade.

As agências CNPq e CAPES pelo apoio financeiro dado à pesquisa na forma de Bolsa de estudos concedida.

Dedico este trabalho a minha avó Marilena. As lembranças mais doces da minha infância e adolescência estão repletas de imagens suas. Obrigado por ajudar a me tornar quem sou hoje.

## RESUMO

Os materiais compostos têm ganhado destaque como material de uso intensivo na indústria aeroespacial e mecânica devido às suas características de rigidez e baixo peso. A possibilidade de projetar peças de materiais compostos com orientação variável das fibras ao nível da camada, seguindo contornos suaves, torna este material ainda mais atrativo, evitando a subutilização da rigidez e resistência das fibras, como ocorre no projeto convencional. Este trabalho tem como objetivo apresentar uma metodologia para a otimização do comportamento estático e dinâmico de cascas de materiais laminados compostos pela definição de uma orientação variável da fibra. Curvas parametrizadas são usadas para definir a orientação variável das fibras e os pontos de controle geradores das funções de interpolação que definem o padrão das fibras são assumidos como parâmetros de projeto. Um algoritmo monoobjetivo *Particle Swarm Optimization* (PSO) e um multiobjetivo baseado no *Quantum Particle Swarm Optimization* (MOQPSO) são utilizados como otimizadores. O algoritmo MOQPSO foi selecionado devido às suas características reportadas de boa convergência, com menor propensão a ficar preso em mínimos locais. Exemplos de otimização de cascas e placas compostas quanto a cargas de flambagem, frequências naturais e curvaturas das fibras são usados para demonstrar suas capacidades. Os resultados são comparados com soluções consideradas ótimas encontradas na literatura. Ao final, os resultados da orientação das fibras encontrados no material composto foram muito semelhantes aos relatados na literatura, confirmando a validade da metodologia proposta.

**PALAVRAS-CHAVE:** Otimização multiobjetivo; Cascas de material composto; MOQPSO; orientação variável de fibra; elementos finitos.

## **ABSTRACT**

Composite materials have gained prominence as a material of intensive use in the aerospace and mechanical industry due to their characteristics of stiffness and lightweight. The possibility of designing parts with composite materials and continuous orientation of the fibers at the layer level, following smooth contours, makes this material even more attractive, as it avoids the subutilization of the stiffness and the resistance of the fibers, as occurs on the conventional project. Most of the time, all the strength reserve is underused on designs with only one orientation per laminate layer. This work aims to present a methodology for optimizing the static and dynamic behavior of composite laminated material shells by defining a variable fiber orientation. Parameterized curves are used to define the variable orientation of the fibers, and control points are assumed as design parameters. A mono-objective Particle Swarm Optimization (PSO) and the algorithm Multiobjective Quantum Particle Swarm Optimization (MOQPSO) are used as optimizers. The MOQPSO was selected due to its reported characteristics of good convergence, with less propensity to be stuck to local minima. Examples of optimization of shells and composite plates for buckling loads, natural frequencies, and fiber curvatures are used to demonstrate its capabilities. The results are compared with solutions assumed as optimal, found in the literature. In the end, the results of the orientation of the fibers found in the composite material were remarkably similar to those reported in the literature, confirming the validity of the proposed methodology.

**KEYWORDS:** multi-objective optimization, shell composite material, natural frequencies, MOQPSO, variable fiber orientation, finite elements.



# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1	Objetivo e metodologia .....	4
1.2	Organização do trabalho.....	4
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>6</b>
2.1	Técnicas de fabricação e técnicas de otimização específicas.....	6
2.2	Parametrizações e técnicas de otimização genéricas.....	10
2.3	Técnicas para redução de custo computacional .....	12
<b>3</b>	<b>MATERIAIS COMPOSTOS</b> .....	<b>16</b>
3.1	Comportamento macromecânico da lâmina .....	17
3.2	Relação tensão-deformação para materiais ortotrópicos.....	17
3.3	Materiais transversalmente isotrópicos .....	19
3.4	Transformações de coordenadas .....	20
3.5	Critério de falha de Tsai-Wu.....	22
<b>4</b>	<b>OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL</b> .....	<b>25</b>
4.1	Estrutura de um problema de otimização .....	26
4.2	Técnicas de otimização .....	26
4.3	Otimização Multiobjetivo .....	28
4.4	Particle Swarm Optimization (PSO) .....	30
4.5	Quantum-Behaved Particle Swarm Optimization (QPSO).....	32
4.6	Multi-objective Quantum-Behaved Particle Swarm Optimization (MOQPSO).....	32
<b>5</b>	<b>ANÁLISE DE CASCAS DE MATERIAIS ISOTRÓPICOS E ORTOTRÓPICOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS</b> .....	<b>36</b>
5.1	Discretização em elementos finitos.....	36
5.2	Definição de casca.....	39
5.3	Geometria do elemento finito degenerado de casca.....	41
5.4	Sistemas de coordenadas das lâminas e das fibras.....	42
5.5	Campo de deslocamentos, deformações, matrizes de rigidez, massa e geométrica.....	45
5.6	Cálculo de frequências naturais e do fator de carga crítica de flambagem .....	50
5.7	Integração explícita .....	53
5.8	Material laminado ortotrópico aplicado ao elemento finito .....	58

5.9	Deformações e tensões globais e locais .....	60
<b>6</b>	<b>VALIDAÇÃO DO PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS PARA CASCAS LAMINADAS .....</b>	<b>62</b>
6.1	Cilindro ortotrópico submetido a pressão uniforme.....	63
6.2	Análise de deslocamentos em hemisfério submetido a cargas pontuais .....	68
6.3	Análise de deslocamentos em uma calota esférica simplesmente apoiada .....	70
<b>7</b>	<b>PARAMETRIZAÇÃO DA ORIENTAÇÃO DAS FIBRAS.....</b>	<b>75</b>
7.1	Uniformização do sistema de coordenadas das fibras.....	76
7.2	Avaliação de padrões curvilíneos com o <i>software</i> desenvolvido.....	77
7.3	Geração dos pesos nodais por funções interpoladoras geradas por pontos de controle	80
7.4	Discretização das direções das fibras .....	83
7.4.1	Método dos gradientes de um campo escalar (GCE).....	83
7.4.2	Método da projeção dos vetores normais a uma malha parametrizada (PVN).....	87
7.5	Representações gráficas das fibras .....	90
<b>8</b>	<b>RESULTADOS DAS OTIMIZAÇÕES MONO E MULTI OBJETIVO.....</b>	<b>92</b>
8.1	Otimização monoobjetivo de uma placa simplesmente apoiada com pressão uniforme	93
8.2	Otimizações monoobjetivo e multiobjetivo para placa completamente engastada nos quatro bordos .....	98
8.2.1	Otimização monoobjetivo .....	99
8.2.2	Otimização multiobjetivo .....	101
8.3	Otimização monoobjetivo para flambagem de uma casca curva com furo central....	108
8.3.1	Exemplo 1 – Casca com deslocamentos prescritos nas bordas curvas .....	109
8.3.2	Exemplo 2 – Casca com uma borda curva apoiada e a outra com carga compressiva	116
<b>9</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>123</b>
9.1	Sugestões para trabalhos futuros .....	124
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>126</b>
	<b>APÊNDICE A – Pontos de Controle e Resultados para os Casos Apresentados .....</b>	<b>133</b>
	<b>ANEXO I – Funções de Forma e Funções de Base Radial de Suporte Global .....</b>	<b>139</b>
	<b>ANEXO II – Interpolação por Funções de Base Radial.....</b>	<b>141</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	a) Método Filament Winding; (b) Método Hand Lay-up.....	2
Figura 2.1	Representação da fita de material composto com sua largura [Adaptado de: Blom et al., 2009].....	9
Figura 2.2	Configurações obtidas por Guimarães et al. [Fonte: Guimarães et al., 2018].....	14
Figura 3.1	a) Lâmina com fibras unidirecionais (b) Lâmina com fibras tecidas c) Laminado composto por várias lâminas orientadas em diferentes direções [Fonte: Mendonça, 2019].....	16
Figura 3.2	(a) Sistema de coordenadas do material; (b) Sistema de coordenadas da lâmina; (c) Sistema de coordenadas global.....	20
Figura 4.1	Fronteira de Pareto e ponto utópico [Fonte: Arora, 2012].....	31
Figura 4.2	Fluxograma para otimização multiobjetivo do <i>Quantum Particle Swarm Optimization</i> (MOQPSO).....	35
Figura 5.1	Resultantes de tensões em casca para: a) membrana e (b) flexão [Fonte: Soriano, 2003].....	40
Figura 5.2	Sistema de coordenadas da lâmina [adaptado de Hughes, 2000].....	43
Figura 5.3	Rotações locais em torno dos eixos $e_1^f$ e $e_2^f$ do sistema de coordenadas das fibras.....	45
Figura 6.1	Fibras discretizadas na (a) Primeira camada e na (b) Segunda camada	64
Figura 6.2	(a) Octante do cilindro com pressão e condições de contorno; (b) malha utilizada para a análise.....	65
Figura 6.3	(a) Tensões $\sigma_x$ para cilindro; (b) Detalhe da concentração de tensões no canto vivo superior.– Resultados da análise de convergência para tensões (a) $\sigma_x$ , (b) $\sigma_y$ e (c) $\tau_{xy}$ .....	66
Figura 6.4	Resultados da análise de convergência para tensões (a) $\sigma_x$ , (b) $\sigma_y$ e (c) $\tau_{xy}$ .....	67
Figura 6.5	Elementos finitos selecionados para comparação.....	67

Figura 6.6	(a) Quadrante de domo esférico com condições de contorno de simetria submetido a cargas pontuais. (b) Malha para 16 elementos por lado.....	69
Figura 6.7	Análise de convergência para deslocamentos.....	70
Figura 6.8	Calota esférica submetida a força no seu centro [Adaptado de Rao, 1978].....	71
Figura 6.9	(a) Condições de contorno de simetria. (b) Malha utilizada para obtenção dos resultados.....	71
Figura 6.10	Análise de convergência e comparação entre o resultado obtido pelo programa desenvolvido e os obtidos com o <i>software</i> Ansys 17.0.....	72
Figura 7.1	Pontos de controle sobre a malha de elementos finitos empregada.....	80
Figura 7.2	(a) Efeitos do valor do spread baixo e (b) do valor elevado na função interpolada.....	81
Figura 7.3	(a) Configuração não rotacionada. (b) Configuração com rotação de 90°.....	86
Figura 7.4	a) Pontos de controle distribuídos na superfície de um parabolóide; (b) Configuração de fibras obtida pelo uso dos pontos de controle prescritos com o método GCE.....	87
Figura 7.5	(a) Malha envoltória (b) Malha original de elementos finitos.....	88
Figura 7.6	Representação dos vetores utilizados na determinação da direção da fibra no ponto de Gauss do elemento finito.....	89
Figura 7.7	(a) Malha envoltória; (b) configuração de fibras obtida com o método PVN.....	90
Figura 8.1	Fluxograma do processo de otimização monoobjetivo.....	93
Figura 8.2	(a) Condições de contorno e geometria do problema proposto; (b) Malha de elementos finitos utilizada.....	94
Figura 8.3	(a) 9 pontos de controle; (b) 16 pontos de controle; (c) 25 pontos de controle.....	95
Figura 8.4	Configurações obtidas em <i>streamlines</i> e discretizada nos pontos de Gauss com o método dos gradientes para: (a), (d) 3 × 3 pontos de controle; (b), (e) 4 × 4 pontos de controle; (c), (f) 5 × 5 pontos de controle com simetria.....	96

Figura 8.5	Configurações em <i>streamlines</i> para 25 pontos de controle para: (a) Método GCE; (b) Método PVN.....	97
Figura 8.6	(a) Configuração obtida por Setoodeh et al. (2006) de fibras discretizada no centroide dos elementos [Fonte: Setoodeh et al., 2006]; (b) Configuração obtida no presente estudo para 9 pontos de controle discretizada no centroide dos elementos finitos; (c) Configuração obtida no presente estudo para 16 pontos de controle discretizada.....	98
Figura 8.7	(a) Condições de contorno; (b) Malha utilizada.....	99
Figura 8.8	(a) Configuração de máxima frequência natural utilizando o método das projeções para: 9 pontos de controle; (b) 16 pontos de controle; (c) 25 pontos de controle.....	100
Figura 8.9	(a) Configuração de máxima frequência natural utilizando o método da interpolação de escalares nos nós para: 9 pontos de controle; (b) 16 pontos de controle; (c) 25 pontos de controle.....	101
Figura 8.10	(a) Fronteira de Pareto obtida para ambos os métodos desenvolvidos neste trabalho. (b) Resultado obtido por Honda et al., 2013 [fonte: Honda et al., 2013].....	102
Figura 8.11	Configuração otimizada em <i>streamlines</i> e discretizadas nos pontos de Gauss para: (a), (b) Máxima frequência natural adimensional; (c), (d) Mínima curvatura.....	103
Figura 8.12	Configurações otimizadas obtidas por Honda et al., 2013 para: (a) Mínima curvatura; (b) Máxima frequência natural adimensional.....	104
Figura 8.13	Configuração para ponto intermediário na fronteira de Pareto: (a) Configuração em <i>streamlines</i> ; (b) Configuração discretizada nos pontos de Gauss.....	105
Figura 8.14	Malha utilizada por Santana et al., 2018.....	105
Figura 8.15	Fronteira de Pareto obtida por Honda et al., 2013, sobreposta com a obtida por Santana et al., 2018 [adaptado de Santana et al., 2018].....	106
Figura 8.16	Configuração para máxima frequência natural para: (a) Primeira camada; (b) Segunda camada.....	107
Figura 8.17	Configuração para mínima frequência natural para: (a) Primeira camada; (b) Segunda camada.....	107

Figura 8.18	(a) $3 \times 3$ pontos de controle; (b) $4 \times 4$ pontos de controle.....	109
Figura 8.19	Distribuição para $5 \times 5$ pontos de controle.....	109
Figura 8.20	Estrutura com condições de contorno para o primeiro exemplo.....	110
Figura 8.21	(a) Malha utilizada no trabalho referenciado (b) Malha de elementos finitos utilizada no presente trabalho (projeção superior).....	110
Figura 8.22	Primeira camada e segunda camada para $5 \times 5$ pontos de controle simétricos utilizando o método PVN: (a), (b) <i>Streamlines</i> ; (c), (d) orientação nos pontos de Gauss.....	112
Figura 8.23	Deslocamentos para: (a) um material isotrópico; (b) laminado unidirecional otimizado $[+31^\circ/-31^\circ]_s$ ; (c) laminado otimizado, $5 \times 5$ pontos de controle simétricos com o método das projeções.....	112
Figura 8.24	Primeiro modo de flambagem para: (a) um material isotrópico; (b) laminado unidirecional otimizado $[+31/-31]_s$ ; (c) laminado otimizado ( $5 \times 5$ pontos de controle simétricos com método PVN).....	113
Figura 8.25	(a) Primeira camada e (b) segunda camada para $5 \times 5$ pontos de controle simétricos utilizando o método das interpolações.....	114
Figura 8.26	(a) Primeira e (b) segunda camadas para 16 pontos de controle para o método PVN.....	115
Figura 8.27	(a) Primeira e (b) segunda camadas, respectivamente, da configuração para 16 pontos de controle com simetria em relação ao eixo z utilizando o método das projeções.....	115
Figura 8.28	(a) Primeira e (b) segunda camadas, respectivamente, para o método PVN utilizando $3 \times 3$ pontos de controle.....	116
Figura 8.29	Condições de contorno: (a) Arsenyeva et al., 2016; (b) condições de contorno deste trabalho.....	117
Figura 8.30	Configurações obtidas utilizando $5 \times 5$ pontos com simetria e o método GCE: (a), (b) primeira camada e segunda camadas em <i>streamlines</i> ; (c), (d) primeira e segunda camadas com fibras discretizadas.....	118
Figura 8.31	(a) Deslocamentos para um material isotrópico; (b) Deslocamentos para o laminado unidirecional otimizado $[+35^\circ /-35^\circ]_s$ ; (c) Deslocamentos para o laminado otimizado ( $5 \times 5$ pontos de controle com o método GCE com imposição de simetria).....	119

Figura 8.32	Primeiro modo de flambagem para: (a) um material isotrópico; (b) laminado unidirecional otimizado $[+35^\circ / -35^\circ]_s$ ; (c) laminado otimizado ( $5 \times 5$ pontos de controle simétricos com o método GCE).....	119
Figura 8.33	Configurações com $3 \times 3$ pontos de controle com o método PVN para: (a) primeira camada da melhor configuração; (b) segunda camada.....	120
Figura 8.34	(a) Primeira camada obtida para o método GCE nos nós com $3 \times 3$ pontos de controle; (b) Segunda camada obtida para o método GCE com $3 \times 3$ pontos de controle.....	121
Figura 8.35	(a) Configurações obtidas para o método PVN com $4 \times 4$ pontos de controle para a primeira camada (b) Configurações obtidas para o método das PVN com $4 \times 4$ pontos de controle para a segunda camada.	122
Figura A.1	Disposição dos pontos de controle para grid com: (a) 9 pontos; (b) 16 pontos (c) 25 pontos com simetria para o item 8.1.....	133
Figura A.2	Disposição dos pontos de controle para grid com: (a) 9 pontos; (b) 16 pontos (c) 25 pontos com simetria para os itens 8.2.1 e 8.2.2.....	135
Figura A.3	Disposição dos pontos de controle para grid do item 8.3.1.....	137
Figura I.1	Coordenadas naturais do Elementos Finito de 8 nós.....	139
Figura I.2	Condições de contorno para: (a) item 7.2.1; (b) item 7.2.2.....	140

## LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1	Elementos Lagrangeanos com 3 graus de liberdade.....	62
Tabela 6.2	Elementos de placa com 3 graus de liberdade.....	63
Tabela 6.3	Comparativo para máximas tensões em coordenadas locais obtidas na segunda, terceira e quarta camadas com o código desenvolvido, por Kumar et al.,1997, por Reuter, 1972, e pela utilização do software comercial ANSYS 17.0.....	65
Tabela 6.4	Resultados para elementos selecionados utilizando o programa desenvolvido e o <i>software</i> comercial ANSYS 17.0.....	68
Tabela 6.5	Comparativo de deslocamentos obtidos com o software ANSYS 17.0 e com o programa desenvolvido.....	69
Tabela 6.6	Comparativo entre os resultados obtidos com o software ANSYS 17.0 e com o programa desenvolvido.....	72
Tabela 6.7	Tabela comparativa entre as tensões obtidas com o <i>software</i> comercial ANSYS 17.0 e as obtidas com o programa desenvolvido.....	73
Tabela 6.8	Tabelas com diferenças entre percentuais entre os resultados obtidos com o <i>software</i> ANSYS 17.0 e os obtidos com o programa desenvolvido.....	74
Tabela 7.1	Resultados para $\Omega$ obtidos por Honda et al., 2013 no programa desenvolvido e no software comercial ANSYS 17.0.....	79
Tabela 7.2	Resultados para $\Omega$ obtidos por Honda et al., 2013, com o programa desenvolvido e com o <i>software</i> comercial ANSYS 17.0.....	79
Tabela 8.1	Resultados de <i>compliance</i> para laminado unidirecional otimizado.....	95
Tabela 8.2	Melhores resultados obtidos com os dois métodos desenvolvidos.....	96
Tabela 8.3	Resultados para máxima frequência natural adimensionalizada obtidos no presente trabalho.....	100
Tabela 8.4	Resultados obtidos para o método das projeções ao lado dos obtidos por Honda et al., 2013.....	103



Tabela 8.5	Comparação de resultados para carga de flambagem com malhas diferentes com o programa desenvolvido e com o <i>software</i> Ansys.....	110
Tabela 8.6	Resultados obtidos para o primeiro exemplo.....	111
Tabela 8.7	Resultados obtidos para o segundo exemplo.....	117
Tabela A.1	Pontos de Controle para o item 8.1.....	134
Tabela A.2	Pontos de Controle para o item 8.2.2.....	135
Tabela A.3	Pontos de Controle para o item 8.2.1.....	136
Tabela A.4	Pontos de Controle para o item 8.3.1.....	138
Tabela A.5	Pontos de Controle para o item 8.3.2.....	138
Tabela I.1	Funções de forma para elementos finitos de casca de 8 nós.....	139
Tabela I.2	Funções de Base Radial mais comuns.....	140
Tabela I.3	Coefficientes dos polinômios obtidos por Honda et al. (2013).....	140

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

AFP	<i>Automated Fiber Placement</i>
APDL	<i>ANSYS Parametric Design Language</i>
API	<i>Application Programming Interface</i>
CLT	<i>Classical Lamination Theory</i>
CRBF	<i>Compactly Supported Radial Basis Function</i>
CTS	<i>Continuous Tow Steering</i>
DE	<i>Differential Evolution</i>
ESL	<i>Equivalent Single Layer</i>
FPF	<i>First Ply Failure</i>
FSQP	<i>Feasible Sequential Gradient Quadratic Programming</i>
FW	<i>Filament Winding</i>
MATLAB	<i>Matrix Laboratory</i>
MIA	<i>Mode Interaction Parameter</i>
NSGA-II	<i>Non-dominated Sorting Genetic Algorithm-II</i>
PSO	<i>Particle Swarm Optimization</i>
QPSO	<i>Quantum Particle Swarm Optimization</i>
RTM	<i>Resin Transfer Molding</i>
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
SR	<i>Surrogate Model</i>
SWB	<i>Swept Wing-Box</i>
TFP	<i>Tailored Fibre Placement</i>
UF	<i>Unified Formulation</i>
UFRGS	<i>Universidade Federal do Rio Grande do Sul</i>
RBF	<i>Radial Basis Function</i>



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Materiais Compostos

$C$	Matriz constitutiva no sistema global	[-]
$C^l$	Matriz constitutiva no sistema da lâmina	[-]
$C_{nm}$	Componente da matriz constitutiva de um material ortotrópico	[-]
$C^x$	Matriz constitutiva no sistema do material	[-]
$E$	Módulo elástico longitudinal	[Pa]
$G$	Módulo de elástico transversal	[Pa]
$S_{nm}$	Componente da matriz de flexibilidade para um material ortotrópico	[-]
$T$	Matriz de transformação	[-]
$\gamma_{nm}$	Deformação de engenharia, distorção	[-]
$\nu$	Coefficiente de Poisson	[-]
$\varepsilon$	Deformação no sistema global	[-]
$\varepsilon^l$	Deformações no sistema da lâmina	[-]
$\varepsilon_n$	Deformação normal	[-]
$\varepsilon^x$	Deformações no sistema do material	[-]
$\sigma$	Tensões no sistema global	[Pa]
$\sigma^l$	Tensões no sistema da lâmina	[Pa]
$\sigma_n$	Tensão normal	[Pa]
$\sigma^x$	Tensões no sistema do material	[Pa]
$\tau_{nm}$	Tensão cisalhante	[Pa]

### PSO

$c_1$	Componente cognitiva	[-]
$c_2$	Componente social	[-]

<b>R</b>	Matriz diagonal de números aleatórios	[-]
<b>X</b>	Enxame de partículas	[-]
<b><math>x_i</math></b>	Partícula	[-]
<b>v</b>	Velocidade	[-]
<b><math>\omega</math></b>	Momento de inércia	[-]

### **QPSO**

<i>Gbest</i>	Melhor posição global	[-]
<i>Mbest</i>	Melhor posição média de todas melhores posições	[-]
<i>n</i>	Tamanho do enxame	[-]
<i>Pbest</i>	Melhor posição local	[-]
<i>t</i>	Intervalo de tempo de iteração	[-]
<i>T</i>	Número total de iterações	[-]
<i>x</i>	Posição da partícula	[-]
<i>u</i>	Número aleatório distribuído no intervalo [0,1]	[-]
$\beta$	Coefficiente de contração-expansão	[-]
$\rho$	Número aleatório distribuído no intervalo [0,1]	[-]
$\varphi$	Número aleatório distribuído no intervalo [0,1]	[-]
$\psi$	Função de onda	[-]

### **Funções de Base Radial**

<i>A</i>	Matriz de interpolação direta	[-]
<i>g<sub>e</sub></i>	Valores desejados	[-]
<i>g<sub>f</sub></i>	Respostas com pontos de controle	[-]
<i>h</i>	Função polinomial	[-]
<i>M</i>	Matriz de interpolação	[-]
<i>P<sub>s</sub></i>	Matriz de restrição	[-]
<i>x</i>	Posição dos pontos a serem interpolados	[-]

$x_f$	Posição dos pontos de controle	[-]
$\beta$	Coefficientes da função h	[-]
$\gamma$	Pesos multiplicadores da função de base radial	[-]
$\varphi$	Função de base radial	[-]

### Elementos finitos

$B$	Matriz deformação-deslocamento	[-]
$b$	Forças de corpo	[N]
$C$	Matriz constitutiva em coordenadas locais	[-]
$C^l$	Matriz constitutiva em coordenadas locais	[-]
$C^x$	Matriz constitutiva em coordenadas locais	[-]
$e_{123}$	Vetores do sistema cartesiano global	[-]
$e_{123}^f$	Vetores do sistema de coordenadas das fibras	[-]
$e_{123}^l$	Vetores do sistema de coordenadas da lâmina	[-]
$F$	Derivadas das funções de forma em coordenadas naturais	[-]
$f$	Vetor de forças nos nós	[N]
$G$	Derivadas das funções de forma em coordenadas globais	[-]
$h_c$	Valor da espessura de uma camada	[m]
$h_k$	Valor acumulado de espessura	[m]
$J$	Matriz jacobiana	[-]
$J_{inf}$	Matriz jacobiana na parte inferior da casca	[-]
$J_{sup}$	Matriz jacobiana na parte superior da casca	[-]
$K$	Matriz Rigidez	[-]
$k$	Fator de correção para deformações cisalhantes	[-]
$K_g$	Matriz de rigidez geométrica	[-]
$l$	Cossenos diretores	[-]
$M$	Matriz de massa consistente	[-]

$N_a$	Funções de forma bidimensionais	[-]
$Q$	Matriz constitutiva em coordenadas globais	[-]
$T_{rot}$	Matriz de transformação das rotações	[-]
$T_{\mathcal{E}}$	Matriz de transformação local-global	[-]
$\bar{t}$	Forças de superfície	[N]
$U$	Vetor de deslocamentos nodais	[m]
$u$	Deslocamentos em $x$	[m]
$v$	Deslocamentos em $y$	[m]
$w$	Deslocamentos em $z$	[m]
$x$	Vetor posição em um ponto qualquer	[m]
$X$	Vetor posição de um ponto que define a direção da fibra na superfície de referência	[m]
$y$	Variável de dimensão	[m]
$z$	Variável de dimensão	[m]
$z_a$	Função de espessura associada a um nó	[m]
$x$	Posição de um ponto na superfície média da casca, variável de dimensão	[m]
$\Delta$	Determinante da matriz jacobiana	[-]
$\alpha$	Rotação em coordenadas locais em torno de $e_1^f$	[rad]
$\beta$	Rotação em coordenadas locais em torno de $e_2^f$	[rad]
$\varepsilon$	Deformações em coordenadas globais	[-]
$\varepsilon^l$	Deformações em coordenadas da lâmina	[-]
$\varepsilon^x$	Deformações em coordenadas do material	[-]
$\sigma$	Tensões no sistema global	[Pa]
$\sigma^l$	Tensões no sistema da lâmina	[Pa]
$\sigma^x$	Tensões no sistema do material	[Pa]
$\zeta$	Coordenada natural na direção 3	[-]
$\eta$	Coordenada natural na direção 2	[-]
$\theta_x$	Rotação global em torno do eixo $x$	[rad]
$\theta_y$	Rotação global em torno do eixo $y$	[rad]
$\theta_z$	Rotação global em torno do eixo $z$	[rad]

$\lambda$	Fator de carga crítica de flambagem	[-]
$\xi$	Coordenada natural na direção 1	[-]
$\rho$	Densidade	Kg/m <sup>3</sup>
$\omega$	Frequência natural	[rad/s]

### Parametrização das fibras

$e_3^{l_{env}}$	Vetor normal do sistema de coordenadas da lâmina da malha envoltória	[-]
$e_3^{l_{ete}}$	Vetor normal do sistema de coordenadas da lâmina da malha de finitos	[-]
$e_\psi$	Vetor posição de fibra	[-]
$proj_{e_3^{l_{env}}}$	Vetor projetado das fibras da malha envoltória na malha de finitos	[-]
$\psi$	Peso nodal	[-]
$\Omega$	Frequência natural adimensional	[-]
$S$	Função de interpolação	[-]
$\varphi$	Função de interpolação de base radial	[-]
$Pc$	Pontos de controle	[-]
PVN	Projeção dos Vetores Normais	[-]
GCE	Gradientes de um Campo Escalar	[-]



# 1 INTRODUÇÃO

Segundo Jones, 1999, o termo composto em materiais compostos significa que dois ou mais materiais são combinados em escala macroscópica para formar um terceiro material útil. Ainda segundo Mendonça, 2019, estes materiais devem funcionar como uma unidade, visando obter um conjunto de propriedades que nenhum dos dois componentes individualmente apresenta.

A flexibilidade de projeto provida por essa categoria de materiais tem ampliado o leque de ferramentas disponíveis ao engenheiro possibilitando a fabricação de estruturas leves, especificamente projetadas para atender requisitos de resistência, durabilidade, estabilidade e comportamento dinâmico. Estas aplicações se encontram em estruturas de automóveis (para-choques, chassis, suspensões), peças de estruturas náuticas (lemes, mastros, cascos), aeronáuticas (asas, fuselagem) ou mesmo espaciais (antenas, braços robóticos, paredes de tanques, fuselagem).

Entre os tipos de materiais abarcados pela ampla definição de materiais compostos apresentada no início dessa introdução, destaca-se, no contexto deste trabalho, os reforçados por fibras longas e contínuas. Sua relevância para o presente estudo se dá pela relação estreita entre resposta mecânica da estrutura e o posicionamento das fibras e pela sua disposição contínua ser passível de ser parametrizada, otimizada e, com algumas restrições geométricas, fabricada.

Esta categoria de material reforçado por fibras unidirecionais de alta resistência, segundo Mendonça, 2019, pode ser fabricada por métodos de conformação molhada (*wet layup*), na qual a conformação da peça ocorre enquanto a resina ainda está líquida e a combinação da fibra e da matriz é feita no decorrer desse processo ou empregada diretamente no projeto do componente com preformados, que já são adquiridos previamente preparados em forma de blocos, folhas ou fitas (*prepegs*). Neste caso, as fibras se encontram previamente impregnadas com resina.

Dentre as técnicas de manufatura mais tradicionais, é possível destacar o processo de deposição manual (*Hand Lay-up*), apresentado na Figura 1.1(b), que consiste em colocar manualmente mantas com fibras de reforço unidirecional sobre a superfície de um molde e aplicar resina sobre as camadas com pincel ou spray que, apesar da limitação no volume de produção, encontra boa aplicação em peças de grande dimensão sem emendas ou divisões. Já o bobinamento (*Filament Winding*), apresentado na Figura 1.1(a), que consiste em um mandril

que faz as vezes de molde sobre o qual serão enroladas as fibras, é amplamente aplicado na produção de componentes com geometria de revolução como, por exemplo, vasos de pressão e eixos para transmissão de potência. Ainda são dignos de nota o método trefilação (*pultrusion*) no qual as fibras são puxadas por um banho de resina e passam por uma forma que gera o perfil desejado. Já o processo de moldagem por membrana é um refino do método manual e consiste em envolver o composto por uma membrana que, através de vácuo e aplicação de pressão externa, proporciona uma melhora no acabamento e expulsão de bolhas de ar do material.

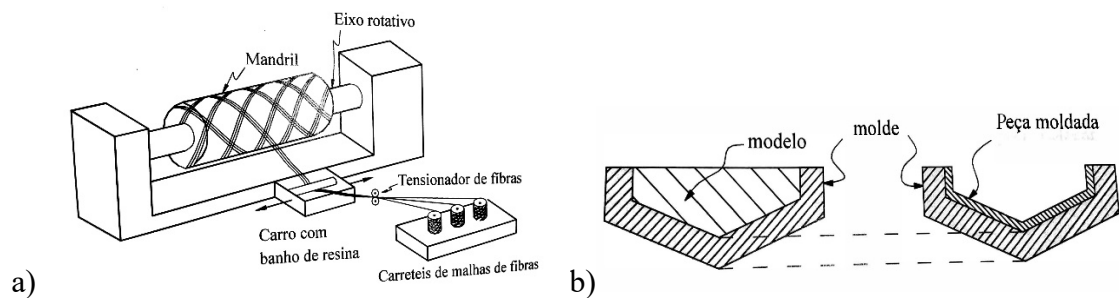


Figura 1.1– a) Método *Filament Winding*; b) Método *Hand Lay-up*.

Já entre os preformados, destaca-se o *prepreg*. Este material consiste em fitas pré-impregnadas por resina polimérica sendo reforçadas por fibras unidirecionais de vidro, aramídeas ou de carbono. São comercializadas sanduichadas entre duas folhas de papel impregnado de silicone que têm como função evitar aderência entre as fitas e são removidas no momento do uso [Mendonça, 2019]. Os *prepregs* são “empilhados” de acordo com os requisitos do projeto e podem ser moldados em qualquer formato de molde aberto. Após a moldagem, o conjunto deve ser curado sob pressão e calor.

Os métodos de produção citados acima já são consolidados e amplamente aplicados na indústria, porém, o fato de as fibras serem dispostas de forma unidirecional na matriz de cada camada faz com que boa parte das vantagens do reforço proporcionado por elas seja desperdiçado.

Entretanto, os avanços nos processos de fabricação e na precisão da robótica estão estimulando o surgimento de uma gama de métodos avançados que permitem a fabricação de peças altamente personalizadas, pois possibilitam a fabricação de lâminas reforçadas com fibras em padrões curvilíneos, uniformes ou não. As tecnologias de fabricação que têm se destacado são a TFP (*Tailored Fibre Placement*), AFP (*Automated Fiber Placement*) e CTS (*Continuous Tow Shearing*) conforme apresentado por Sobhani Aragh et al., 2021. O método TFP tem como

princípio a costura contínua, de fibra a fibra e em uma base de tecido plana, que é direcionada pelo movimento dos cabeçotes e por movimentos de translação da base.

O método AFP consiste na integração entre o processo *Filament Winding*, a utilização de fitas *prepreg* e CNC (*Computer Numerical Control*) sendo a peça fabricada pelo posicionamento do material composto em um molde por um braço robótico, uma camada por vez e geralmente com o uso de fitas estreitas. O processo CTS se diferencia do APF por realizar o posicionamento das fibras a seco e realizar a impregnação no local, o que permite uma maior precisão no posicionamento com eliminação de sobreposição de fibras e ainda permite variar gradualmente a espessura da peça.

De qualquer forma, a ideia de avaliar as regiões de maior solicitação para assim orientar as fibras do composto não é tão simples, visto que, em sendo materiais compostos ortotrópicos em essência, a distribuição dos esforços depende da própria rigidez localizada, de forma que se tem um problema inverso: A melhor orientação das fibras depende da orientação dos esforços internos em cada ponto da estrutura, que por sua vez depende das orientações das fibras.

Neste contexto, a otimização surge como ferramenta capaz de auxiliar no processo de busca de orientações ótimas, partindo da definição de funções objetivo de rigidez, segurança, comportamento dinâmico, de amortecimento, ou mesmo restrições construtivas de curvatura para as fibras e de modelos numéricos que permitam avaliar o desempenho estrutural de materiais compostos com camadas e orientações quaisquer.

Os modelos numéricos estruturais que se encontram no cerne da modelagem de materiais compostos com direção variável de fibras ou VAT (*Variable Angle Tow*) são as teorias de cascas e placas (Sobhani Aragh, et al., 2021) como os modelos ESL (*Equivalent-Single-Layer theories*). A cinemática desses modelos é insensível ao comportamento individual de cada camada e eles podem levar em conta tanto a influência de deformações normais quanto as de cisalhamento, mas apresentam descontinuidades nas tensões interlaminares que, em alguns casos, podem levar a erros grosseiros em todas as tensões. Se uma resposta precisa do comportamento individual de cada lâmina do material for necessária pode-se trabalhar como se cada uma delas fosse uma placa separada através dos modelos LWT (*Layer Wise Theory*). Ainda podem ser utilizados modelos UF (*Unified Formulation*) que, segundo Caliri et al., 2016, podem descrever quase qualquer teoria de placas da literatura através da escolha de variáveis e constantes presentes na formulação da teoria.

Selecionado o modelo numérico de cálculo estrutural, faz-se necessário definir um modelo matemático que guie a distribuição das fibras pela estrutura. A escolha, ou desenvolvimento deste modelo pode estar vinculada as dimensões da estrutura ou a restrições

dos métodos de fabricação disponíveis. Por exemplo, conforme Sobhani Aragh et al., 2021, ao assumir uma curvatura constante no plano, que cria arcos circulares convenientes de serem fabricados pelo processo AFP.

As técnicas desenvolvidas nesta dissertação são propostas iniciais e ainda se encontram em desenvolvimento. Ainda não foram adicionadas restrições de fabricação inerentes a algum método específico.

## 1.1 Objetivo e metodologia

Neste trabalho, como metodologia, optou-se por codificar sub-rotinas em MATLAB R2020b para pré-processamento e pós-processamento da análise mecânica das peças estudadas, validadas com o código comercial ANSYS 17.0 para exemplos *Benchmark* encontrados na literatura. Para a otimização multiobjetivo procedeu-se ao uso de *software* previamente desenvolvido e validado em outro trabalho que faz uso de ferramentas de dominância para o traçado das fronteiras de Pareto.

O objetivo geral deste trabalho é realizar otimizações mono e multiobjetivo de padrões curvilíneos de fibras em materiais compostos.

Como objetivos específicos têm-se:

- desenvolvimento e validação de um código para análise de laminados de cascas de materiais compostos tridimensionais;
- definição de técnicas para a parametrização necessária para controlar a orientação das fibras de forma contínua em placas e cascas tridimensionais.
- Seleção de uma função tridimensional que permita o controle dos parâmetros que definem os padrões curvilíneos de fibras

## 1.2 Organização do trabalho

Este trabalho está dividido nos seguintes capítulos que versam sobre os diversos temas aqui abordados. Este capítulo, dá uma visão sobre o tema da otimização de materiais compostos, suas possibilidades, vantagens, assim como quais os objetivos perseguidos por esta Dissertação.

No Capítulo 2 é feita uma breve revisão bibliográfica sobre o tema de materiais compostos, mais especificamente trabalhos que visam a otimização de algumas de suas propriedades estruturais mecânicas. Também são revisadas propostas diversas de

parametrização de fibras que resultem em compostos de rigidez variável projetados para a melhoria de desempenho estrutural.

No capítulo 3 é vista a fundamentação teórica necessária ao entendimento do comportamento mecânico de materiais ortotrópicos, as relações constitutivas e seu critério de falha.

Conceitos gerais sobre otimização, otimização multiobjetivo, além de detalhes dos códigos desenvolvidos são abordados no Capítulo 4.

A formulação matemática do método dos Elementos Finitos para a análise linear elástica e dinâmica de cascas empregado neste trabalho é descrito no capítulo 5, assim como a sua extensão para a consideração de laminados de materiais compostos.

A validação dos códigos desenvolvidos a partir da sua comparação com o *software* comercial ANSYS 17.0 e exemplos presentes na literatura aplicados a casos de placas e cascas de materiais laminados compostos é reservada ao capítulo 6.

No capítulo 7 explica-se a metodologia de duas propostas para parametrização da orientação da fibra e de como estas são conectadas ao programa de elementos finitos e o correspondente algoritmo de otimização multiobjetivo.

No capítulo 8 são apresentados exemplos referentes a otimizações mono e multiobjetivo aplicadas a cascas de laminados de compostos. E por fim, no Capítulo 9, são apresentadas as conclusões e considerações finais deste trabalho.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção serão referenciados trabalhos que estão relacionados de alguma forma ao tema apresentado nesta Dissertação. Sendo abordada a otimização de materiais compostos de rigidez variável por meio da orientação de suas fibras, suas variações e restrições.

### 2.1 Técnicas de fabricação e técnicas de otimização específicas

Materiais compostos reforçados por fibras vêm sendo utilizados desde os primórdios da humanidade, como, por exemplo, em tijolos de adobe que tem a palha como um material fibroso mais resistente que confere maior resistência ao barro, que é um material facilmente moldável. Seu uso atualmente estende-se desde a aplicação na engenharia civil com o concreto armado até a indústria aeroespacial, onde se estuda a possibilidade de produzir estágios primários de foguetes utilizando materiais compostos de alto desempenho.

Os compostos produzidos pelos métodos tradicionais já oferecem grandes vantagens na relação peso-resistência. Porém, os métodos de fabricação modernos têm expandido os horizontes destes materiais ao permitir que padrões de fibras variáveis sejam produzidos com boa precisão. Kim et al., 2014, desenvolveram um protótipo de cabeçote para fabricação de compostos pelo método CTS, que realiza a impregnação da resina *in situ*. Foram obtidos corpos de prova com qualidade similar a *prepregs* comerciais, com alguma variação na fração de volume de fibras. Apesar da menor precisão de deposição em relação ao método AFP, este método formou padrões curvilíneos de fibras com um raio de curvatura dez vezes menor sem a necessidade de cortes nas fibras ou bolsões de resina. Essa redução no raio de curvatura multiplica as possibilidades de projetos de compostos com orientação de fibra variável.

Clancy et al., 2018, apresentam o processo LATP (*Laser Assisted Tape Placement*). Para este estudo, foi desenvolvido um cabeçote que é acoplado a um braço robótico e possui um alimentador de fita prepreg termoplástica, um rolo e um aquecedor a laser. O funcionamento deste equipamento consiste em depositar as fitas no molde ao mesmo tempo que se realiza seu aquecimento (com o aquecedor) e consolidação (através da pressão exercida pelo rolo) *in-situ*. Neste estudo, foram utilizados três tipos de fitas levando em conta variações de parâmetros de fabricação como raio de curvatura, velocidade de deposição e largura da fita.

Os autores obtiveram sucesso na produção de laminados com trajetória variável de fibras com raio de curvatura de 400 mm com a fita CF/PEEK, o que é equivalente ao obtido

com fitas termorrígidas. Notou-se também que a dimensão das fitas é afetada pela velocidade de deposição e pelo raio de curvatura e que os maiores efeitos na colagem devido a curvatura se dão nas bordas das fitas, onde as tensões de compressão e tração são maiores. O teste *wedge peel* foi inconclusivo pois os corpos de prova falharam por outros mecanismos antes de falhar por delaminação. Isso indica que ocorre uma boa aderência entre as lâminas.

Outro processo de fabricação com boa precisão na geração de padrões curvilíneos é o TFP, que consiste em “costurar” as fibras em um tecido flexível. Bittrich et al., 2019, propõe uma metodologia específica para esse método, que independe do algoritmo de otimização selecionado e do modelo de elementos finitos, o que torna possível a utilização do método proposto em diversos casos que utilizem a mesma técnica de fabricação. São considerados parâmetros como as espessuras das fibras, dos fios de costura que as fixam no tecido e a largura do zigue-zague feito pela máquina de costura e essas variáveis são levadas em conta em uma distribuição Gaussiana de espessura. Este método é válido quando as fibras não se cruzam no tecido ou, caso ocorra o cruzamento, seja em um ângulo desprezível e permite que diversas lâminas diferentes possam ser empilhadas, desde que os gradientes de espessura das camadas inferiores sejam suficientemente pequenos. As fibras são parametrizadas por *B-splines* cúbicas com uma restrição de ângulo máximo entre as fibras de  $90^\circ$ , para evitar padrões impossíveis de serem fabricados pelo método TFP (como geometrias fechadas ou com terminações abruptas). Um método de otimização por gradiente é utilizado para definir a melhor orientação, densidade e espessura de fibras que minimizem a *compliance* e o MIA (*Mode Interaction Parameter*, Cuntze, 2006) de placas com furos ou com estricção sob tração. As otimizações resultam em uma redução de até 25% na *compliance*, que equivale analogamente a maximização da rigidez, e em um ganho de até 275% no MIA quando compara-se a estrutura com fibras de orientação variável otimizada a configuração unidirecional ótima. Também ocorrem pequenos aumentos no volume e no peso da estrutura, mas estes são irrisórios frente aos ganhos de rigidez e resistência mecânica.

Seguindo a linha da metodologia apresentada no parágrafo anterior por Bittrich et al., 2019, Almeida et al., 2019, realizam otimizações em cilindros sob compressão axial tendo como objetivo a maximização da carga crítica de flambagem. Os autores assumem como variáveis de projeto coordenadas de pontos de controle na direção circunferencial e na direção axial também é levado em conta o aumento de espessura advindo do processo de fabricação TFP onde ocorrem sobreposições.

Os padrões curvilíneos de fibras seguem sendo definidos por B-splines construídas sobre os pontos de controle definidos previamente. Destaca-se que nestes padrões as fibras não são necessariamente paralelas como normalmente é feito.

Foram realizados testes com diversos empilhamentos neste trabalho, por exemplo, um empilhamento [VA<sub>s</sub>/45/45/VA<sub>s</sub>], onde VA<sub>s</sub> representa lâminas com trajetória de fibras variável com empilhamento simétrico, proporcionou um aumento de 47,9% na carga crítica de flambagem e resultou em uma estrutura com 251,9 g. Também é realizado um estudo de flambagem não linear com as configurações otimizadas que indicou que as estruturas obtidas com fibras com trajetórias variáveis possuem menor sensibilidade a imperfeições geométricas.

Assim como a técnica TFP tem suas limitações e parâmetros inerentes, a técnica AFP também os tem. Um desses parâmetros é a largura das fitas de *prepreg*, pois elas podem se sobrepor ou deixar regiões vazias entre si. Van Zanten et al., 2019, uma proposta para configurar a densidade de fitas antes de realizar a otimização. A técnica de parametrização dos autores consiste em utilizar uma malha de fabricação (*manufacturing mesh*) mais grosseira, separada da malha de elementos finitos (*calculation mesh*) que é refinada o suficiente para uma análise precisa de deslocamentos, tensões e deformações.

Os ângulos das fibras nos elementos da malha de elementos finitos são obtidos por uma interpolação feita a partir dos ângulos previamente definidos nos nós da malha de fabricação. O último estudo apresentado neste trabalho, é a otimização de uma placa para máxima carga crítica de flambagem. Neste caso, além de utilizar a técnica de parametrização proposta, os autores sugerem dividir a estrutura em regiões de diferente densidade de fibras que, nas fronteiras entre essas regiões se assemelha a ondas de choque. Eles concluem o trabalho sugerindo que esse tipo de abordagem pode vir a ser útil como estratégia para tratar vazios entre fitas ou a sobreposições delas.

Outra abordagem que permite a análise de vazios e sobreposições em fitas foi sugerida por Blom et al., 2009, onde os autores utilizam um método análogo a *streamlines* para construir padrões de fibras curvilíneas discretas e, assumindo uma linha central da fita onde o ângulo de orientação da fibra pode ser obtido, projetam-se dois pontos que formam uma linha, com a inclinação correta, que representa a espessura da fita conforme a Figura 2.1.



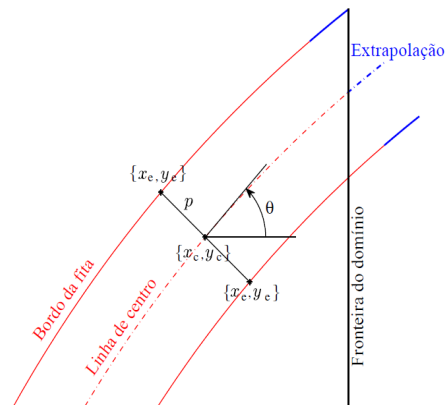


Figura 2.1– Representação da fita de material composto com sua largura [Adaptado de: Blom et al., 2009]

Os autores assumem como funções objetivo a espessura do corpo de prova, que deve ser minimizada, a suavidade da curvatura dos padrões de fitas obtidos, que deve ser maximizada, e a quantidade de sobreposições ocorridas entre as fitas. As duas primeiras funções estão relacionadas e a melhora do valor de umas delas resulta em um pior valor da outra, enquanto uma maior espessura permite uma redução nas sobreposições de fita.

São utilizadas funções lineares e polinômios para descrever um caminho base para as fibras e são realizadas otimizações tanto para as variáveis de projeto individualmente quanto multiobjetivo. Os autores concluem que o método proposto é capaz de prever a distribuição de espessura e sua influência em um laminado com fibras de orientação variável e possibilita incluir esta variável de projeto em algoritmos de otimização onde se deseja mensurar a espessura vinda de possíveis sobreposições e avaliar as possíveis imperfeições na fabricação.

Junto com a maior flexibilidade oferecida, o método CTS, já descrito, permite a variação da espessura da lâmina de compostos. Wang et al., 2021, tiram proveito dessa possibilidade realizando otimizações com uma variação do algoritmo genético, tendo como funções objetivo a redução da massa de uma asa e dos seus enrijecedores (*stringers*) e tendo como restrições diversos resultados provenientes de uma análise aeroelástica de elementos finitos. Saindo do pressuposto que será utilizado processo CTS para a fabricação da estrutura da asa, os autores assumem tanto a espessura quanto os pontos de controle de uma função linear que parametriza as fibras como variáveis de projeto e comparam os resultados obtidos com otimizações nas quais consideram a espessura das lâminas constante, tendo como variáveis de projeto somente os coeficientes já citados e mimetizando a produção pelo método AFP. O método CTS

proporcionou uma redução mais significativa na massa da estrutura, principalmente na ausência de enrijecedores (*stringers*).

O comportamento mecânico das estruturas obtidas por estes métodos de fabricação é influenciado fortemente pela distribuição das fibras no momento da fabricação. Sobhani Aragh, et al., 2021, apresentam um trabalho de revisão que inclui a apresentação de algumas delas como, por exemplo, o aparecimento de sobreposições e vazios (*gaps and overlaps*) entre fitas. Segundo Sobhani Aragh, et al., 2021 (apud Fayazbakhsh et al., 2013), vazios sempre reduzem a rigidez da estrutura enquanto sobreposições podem aumentá-la. Por exemplo, a melhora obtida para carga crítica de flambagem, se levados somente os vazios em conta, sofre um declínio de 37% para 27%. Já se levadas em conta somente sobreposições, a melhora na carga crítica de flambagem sobre para 78%.

## 2.2 Parametrizações e técnicas de otimização genéricas

Os trabalhos do item anterior levam em conta aspectos específicos de fabricação em seu desenvolvimento. Entretanto, há autores que propõem modelos mais simples sem restrições, ou com restrições mais genéricas, que podem ser modificados para se adaptar a casos específicos ou gerarem *benchmarks*. Por exemplo, Pedersen, 1991, descreve a energia de deformação (função objetivo) de estruturas bidimensionais em termos dos ângulos das fibras e da espessura das lâminas, que são tomados como variáveis de projeto. É utilizado um algoritmo de otimização por gradientes e, para cada caso, são feitas três análises: espessura e ângulos de fibras como variáveis de projeto, somente espessura como variável de projeto, somente ângulos de fibras como variáveis de projeto. O autor obtém reduções de até 4,7 vezes na *compliance* (destaca-se que neste caso, o autor assume o termo *compliance* como energia de deformação) e alguns dos seus exemplos são estudados por diversos autores que propõem novos métodos de projeto de estruturas de materiais compostos com fibras variáveis.

Em se tratando de restrições genéricas, Igarashi et al., 2011, e posteriormente Honda et al., 2013, realizam otimização multiobjetivo para configuração curvilínea de fibras em placas utilizando o algoritmo NSGA-II como otimizador, elementos finitos isoparamétricos de oito nós e uma hipersuperfície descrita por um polinômio  $f(x,y)$  de terceiro grau. A partir das direções tangenciais das curvas de nível, são obtidas as configurações de fibras para o centroide de cada elemento finito como na Equação (2.1).

$$\theta_{n,p}(x_c, y_c) = \tan^{-1} \left[ -\frac{(\partial f / \partial x)}{(\partial f / \partial y)} \right]_{x=x_c, y=y_c} \quad (2.1)$$

Neste trabalho, têm-se como variáveis de projeto os coeficientes do polinômio já citado e, como funções objetivo, têm-se a primeira frequência natural, ou o índice de falha baseado no critério de falha de Tsai-Wu, e um índice ( $\bar{\kappa}$ ) de praticidade de produção (*Practicality Index*, Honda, 2011), que consiste na curvatura média das fibras. É realizado um estudo onde busca-se maximizar a primeira frequência natural enquanto se minimiza a curvatura média e outro no qual busca-se minimizar o índice de falha e minimizar a curvatura média, em ambos casos fica caracterizada uma fronteira de Pareto, pois ao melhorar o valor de uma das funções objetivo a outra irá piorar.

A Equação (2.2) indica a equação para a curvatura em um ponto obtida a partir da superfície de definição.

$$\kappa(x^*, y^*) = \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2)} \begin{bmatrix} -f_y & f_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f_y \\ f_x \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

A curvatura indicada na Equação (2.2) é avaliada no centroide de cada elemento finito e o valor médio  $\bar{\kappa}$  é obtido pela média aritmética dos valores de curvatura em todos os elementos finitos. Os termos  $f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{xy}$  representam as derivadas do polinômio relativas aos termos apresentados nos subíndices.

No ponto de menor  $\bar{\kappa}$  da fronteira de Pareto obtida por Honda et al., 2013, as fibras se tornam praticamente unidirecionais e, no outro extremo, formam-se padrões excessivamente curvos impossíveis de serem produzidos. Nesse âmbito, cabe ao projetista selecionar na fronteira uma configuração aplicável ao seu processo de fabricação.

Arsenyeva et al., 2016, também utilizam a Equação (2.2) para o cálculo das curvaturas no centroide dos elementos finitos, porém, ao invés de utilizar as curvaturas médias em uma otimização multiobjetivo, os autores impõem uma restrição de curvatura máxima buscando reduzir o aparecimento de regiões de elevada curvatura que podem ser mascaradas pelas médias. A parametrização das fibras também é feita de forma semelhante à de Honda et al., 2013, mas ao invés de utilizar polinômios, os autores utilizam uma função de interpolação construída a partir de pontos de controle distribuídos sobre a malha de elementos finitos. As distâncias verticais entre estes pontos e a malha de elementos finitos são assumidas como

variáveis de projeto para as otimizações realizadas por um método de busca global. Vale ressaltar que o método utilizado para parametrizar as fibras neste trabalho é bastante semelhante ao aplicado nesta dissertação. Os autores realizam otimizações para minimização da *compliance* (energia de deformação) e maximização de carga crítica de flambagem com resultados de orientação de fibras progressivamente mais suaves à medida que se diminuiu o valor de restrição de curvatura máxima.

### 2.3 Técnicas para redução de custo computacional

Outro problema recorrente nos estudos de otimização de materiais compostos com orientação de fibra variável é a presença de um espaço de soluções mal-comportado com diversos mínimos locais que exigem o uso de algoritmos de otimização meta-heurísticos com grandes populações e números de iterações. Como muitas vezes os resultados estruturais utilizados como funções objetivo são provenientes de análises de elementos finitos, o custo computacional se torna muito elevado.

Uma forma reduzir esse custo, é parametrizar as fibras com variáveis de projeto que gerem um espaço de soluções convexo, possibilitando o uso de métodos de otimização por gradiente que tendem a apresentar uma rápida convergência.

Setoodeh et al., 2006, utilizam parâmetros de laminação. A utilização destes parâmetros contorna o grande número de variáveis de projeto necessárias e a não convexidade do problema inerentes à utilização direta dos ângulos de fibras. Esse melhor comportamento tem limitações, pois os parâmetros de laminação não podem ser definidos de forma aleatória, visto que, as funções trigonométricas dependentes dos ângulos que o definem estão intrinsicamente ligadas a matriz de rigidez. Logo, faz-se necessário definir um domínio viável que só se encontra definido para formas simples (Stegmann e Lund, 2005).

Stegmann e Lund, 2005, adotam outra abordagem ao buscar a redução do número de variáveis de projeto ao dividir a estrutura em regiões (*patches*) que são assumidas como variáveis de projeto e nas quais todos os elementos finitos têm as mesmas propriedades. Os autores usam um método baseado em otimização topológica multifaces denominado *discrete material optimization* onde a rigidez, ou densidade, do material é computada como uma soma ponderada de materiais candidatos. Pode-se selecionar um material entre alguns ortotrópicos com fibras orientadas a diferentes ângulos. O objetivo do processo de otimização é levar a influência de todos os materiais, exceto um deles, a zero em cada elemento finito. Para impedir

resultados intermediários, penaliza-se o resultado tornando-o não econômico. São feitas otimizações nas quais todos os elementos são tomados como variáveis de projeto e outras onde as peças em análise são divididas em regiões nas quais todos os elementos possuem as mesmas propriedades e que são utilizadas como variáveis de projeto.

Uma terceira via para reduzir o custo computacional é a utilização de Modelos Substitutos (SR, *Surrogate Model*), nos quais uma função de interpolação ou uma rede neural são utilizados para substituir a análise numérica. Nik et al., 2012, adotam uma função sugerida por Gürdal e Olmedo, 1993, na qual a direção da fibra varia linearmente ao longo do eixo  $x$ . Os coeficientes da função são as variáveis de projeto para o problema de otimização e a rigidez plana e carga crítica de flambagem, que são calculadas por uma regressão polinomial que age como um Modelo Substituto, são as funções objetivo. É realizada uma otimização multiobjetivo utilizando o algoritmo NSGA-II em duas placas, uma tem seus bordos superior e inferior livres enquanto a outra tem os deslocamentos verticais restritos em ambos os bordos. Um ganho de 20% na carga de flambagem é obtido às custas de uma perda de 62% de rigidez para a primeira placa em relação a um laminado quase-isotrópico otimizado, enquanto, para a segunda, um ganho de 116% para a carga de flambagem é atingido às custas de uma redução de 46% na rigidez em relação a um laminado quase-isotrópico otimizado. Os autores destacam o ganho computacional ao se utilizar um Modelo Substituto.

Por fim, também podem ser utilizados modelos analíticos ou semi-analíticos, que permitem análises extremamente rápidas. Guimarães et al., 2017 utilizam um modelo semi-analítico que combina a teoria clássica de laminação (CLT) com o método de Rayleigh-Ritz onde os ângulos das fibras são interpolados por um polinômio de Lagrange que são função das coordenadas  $x$  e  $y$  de placas. Inicialmente, são assumidas configurações de base com fibras unidirecionais que são acrescidas das variações provenientes dos termos de maior ordem do polinômio. Um algoritmo *Differential Evolution* (DE) é utilizado como otimizador, a primeira frequência natural é assumida como função objetivo e são testadas placas com diferentes configurações iniciais como indicado na Figura 2.2.

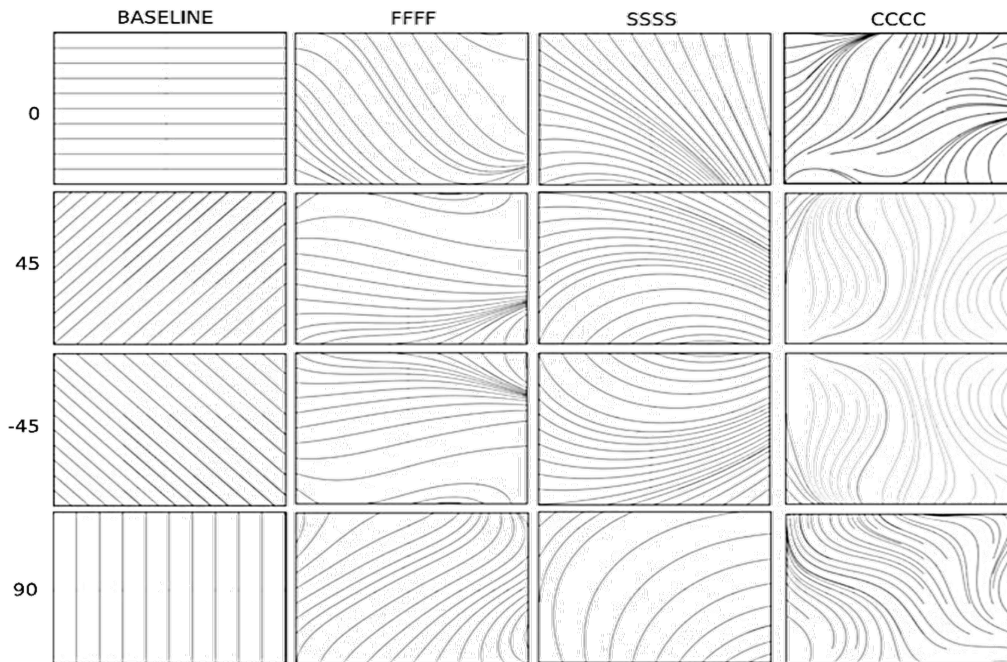


Figura 2.2 – Configurações obtidas por Guimarães et al. [Fonte: Guimarães et al., 2018].

No mesmo trabalho são realizados experimentos comparando os resultados numéricos de padrões curvilíneos aos resultados experimentais com corpos de prova, que ficam bastante próximos. Os autores concluem que o modelo semi-analítico é bastante eficiente para poucos graus de liberdade e alivia os custos computacionais da otimização e que polinômios de alto grau levam a configurações excessivamente complexas que levantam dúvidas quanto à viabilidade de produção.

Seguindo a linha do trabalho desenvolvido por Guimarães et al., 2017, Pereira et al., 2021, seguem o mesmo modelo semi-analítico para o cálculo das frequências naturais. A direção das fibras é definida por funções  $y(x)$  que variam linearmente ou de forma quadrática. Neste trabalho, busca-se maximizar a primeira frequência natural e o amortecimento associado ao primeiro modo de vibração. Assume-se que o laminado é simétrico e são utilizadas restrições nos bordos para forçar os ângulos a permanecerem entre  $90^\circ$  e  $-90^\circ$ . Também, em alguns casos, são introduzidas restrições lineares para fixar a posição das fibras em certas camadas. A rotina *paretosearch* do MATLAB 2019a que não utiliza derivadas, mas sim um algoritmo *multisearch* é utilizada como otimizador. Este método usa o conceito de dominância de Pareto para manter uma lista de soluções não dominadas nas quais novos pontos para busca são escolhidos. Também são otimizados empilhamentos com laminados convencionais para gerar uma base de comparação para os laminados com padrões curvilíneos.

Os laminados com configurações curvilíneas invariavelmente apresentaram melhores resultados que os convencionais e suas fronteiras de Pareto cobriram uma região maior para os valores ótimos. Também é ressaltado que o nível de melhora varia de acordo com as condições de contorno e com o grau dos polinômios, o que é esperado, visto que quanto maior a ordem dos polinômios, maior o espaço de soluções abrangido. Porém, o percentual de melhoria também depende das condições de contorno o que pode ser explicado pela influência delas sobre as deformações modais que regem as energias dissipadas.

### 3 MATERIAIS COMPOSTOS

Conforme Jones, 1999, materiais compostos englobam materiais que possuem fibras resistentes, contínuas ou não, envoltas por um material (matriz) menos resistente que serve para, além de sustentar as fibras, distribuir as cargas entre elas.

A ligação entre estes dois componentes é criada durante a fabricação do laminado sendo os mesmos combinados em escala macroscópica gerando um material que apresenta um conjunto de propriedades mecânicas que nenhum dos materiais presentes no material composto possui individualmente.

De forma geral, materiais compostos podem ser divididos em duas classes: compostos reforçados por partículas e compostos reforçados por fibras. Materiais reforçados por partículas não apresentam grandes ganhos em resistência, inclusive, podem ter esta propriedade prejudicada caso sejam utilizadas partículas rígidas em uma matriz muito frágil devido à concentração de tensões na matriz; porém, ocorrem ganhos em resistência térmica, resistência à abrasão superficial e aumento de dureza superficial. Já materiais reforçados por fibras possuem fibras contínuas, longas ou curtas com comprimentos na faixa de 5 mm a 25 mm, dispostas na matriz de formas variadas, podendo ser paralelas, unidirecionais, bidirecionais, em forma de tecido, picotadas ou curtas. A Figura 3.1 ilustra algumas destas possibilidades.

Neste trabalho, foi utilizado o segundo tipo de material, no qual as fibras proporcionam maior rigidez, maior resistência à ruptura, maior resistência à fadiga e menor peso específico. O ganho estrutural proveniente das fibras está relacionado com seu processo de fabricação que organiza a estrutura cristalina do material em um eixo preferencial, aumentando a resistência mecânica em algumas ordens de grandeza em relação ao material em bloco, e diminui as imperfeições internas do material.

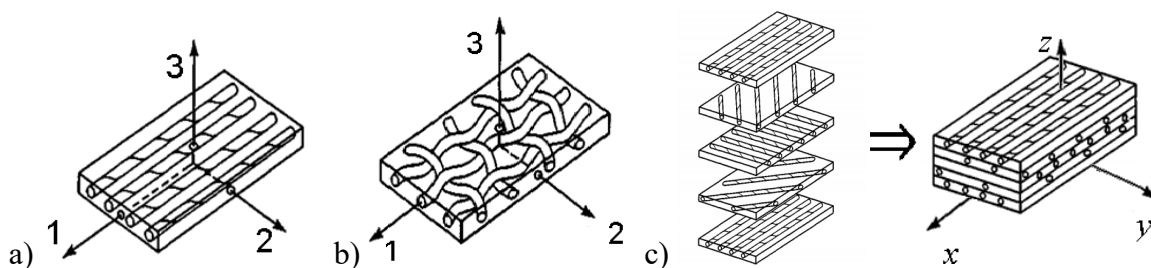


Figura 3.1 – a) Lâmina com fibras unidirecionais (b) Lâmina com fibras tecidas c) Laminado composto por várias lâminas orientadas em diferentes direções [Fonte: Mendonça, 2019].



Por ser reforçado por fibras em uma determinada direção numa lâmina, este tipo de material só apresenta boa rigidez nesta. Por esse motivo, normalmente, eles são combinados em laminados para que estas características sejam propagadas em outras direções de acordo com as necessidades impostas pelos carregamentos do projeto.

### 3.1 Comportamento macromecânico da lâmina

O comportamento macromecânico é relevante quando as propriedades mecânicas aparentes médias são consideradas. Estas propriedades podem ser obtidas diretamente através de ensaios mecânicos ou pelo estudo da micromecânica da lâmina. Conhecidas as propriedades mecânicas, que são propriedades do material, estima-se o comportamento de uma lâmina sob um conjunto de carregamentos combinados e, geralmente, aplicados fora das direções principais de ortotropia [Mendonça, 2019].

Neste trabalho, foi utilizada a lei de Hook que tem como restrição básica assumir um comportamento elástico-linear do material e representa bem o seu comportamento até o ponto de ruptura da lâmina (exceto sob cisalhamento, onde a aproximação é pobre).

### 3.2 Relação tensão-deformação para materiais ortotrópicos

A existência de dois planos de simetria para as propriedades de um material implica na existência obrigatória de um terceiro plano de simetria mutuamente ortogonal aos dois primeiros. Um material com esta característica é dito ortotrópico e sua relação tensão-deformação pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & Sim & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

A matriz da Equação 3.1 não é singular e sua inversão resulta na matriz flexibilidade.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & Sim & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Os valores da matriz da Equação 3.2 são obtidos por ensaios de tração uniaxiais na direção 1. Segundo Mendonça, 2019, isso significa que, na matriz da Equação (3.2), tem-se:  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = \tau_{12} = 0$ . O resultado do produto entre o vetor de tensões e a matriz resultaria em  $\varepsilon_1 = S_{11}\sigma$ ,  $\varepsilon_2 = S_{21}\sigma$ ,  $\varepsilon_3 = S_{31}\sigma$ . Sabe-se que em um ensaio de tensão uniaxial o módulo de elasticidade na direção 1 é dado por:

$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} \quad (3.3)$$

Pode-se então obter diretamente  $S_{11} = \frac{1}{E_1}$ . O coeficiente de Poisson para o mesmo ensaio é dado por:

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (3.4)$$

Tem-se então  $\varepsilon_2 = -\nu_{12} \frac{\sigma}{E_1}$  permitindo a obtenção de  $S_{21} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}$ . De forma similar, é possível obter  $S_{31}$  a partir de  $\varepsilon_3 = S_{31}\sigma$  e  $\nu_{12}$ . A segunda e a terceira colunas da matriz de flexibilidade podem ser obtidas por ensaios uniaxiais nas demais direções principais, enquanto a correlação de  $S_{44}$ ,  $S_{55}$  e  $S_{66}$  com  $G_{23}$ ,  $G_{31}$  e  $G_{12}$  é direta.

As 12 constantes de engenharia definidas para a matriz flexibilidade de um material ortotrópico se reduzem a 9, devido à simetria da matriz flexibilidade, ou seja:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}, \text{ para } i, j = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

Logo, a matriz flexibilidade em função das constantes de engenharia pode ser descrita como na Equação 3.6.

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{cases} \quad (3.6)$$

Da Equação 3.5 é possível concluir que as constantes  $\nu_{21}$ ,  $\nu_{31}$  e  $\nu_{32}$  podem ser facilmente obtidas de  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{13}$ ,  $\nu_{23}$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$  desde que o material seja ortotrópico.

Os valores  $C_{ij}$  da Equação 3.1 podem ser obtidos pela inversão da matriz de flexibilidade, como indicado na Equação 3.7

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_{23} & 0 & 0 \\ & & & & G_{31} & 0 \\ & & & & & G_{12} \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{cases} \quad (3.7)$$

onde  $\Delta$  é o determinante do quadrante superior esquerdo da matriz flexibilidade apresentado na Equação 3.8.

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \quad (3.8)$$

### 3.3 Materiais transversalmente isotrópicos

Normalmente, as lâminas de composto utilizadas são reforçadas por fibras unidirecionais na direção 1 e se supõe, com certa precisão, que a distribuição destas seja homogênea nas

direções 2 e 3, o que permite relacionar as propriedades entre estas duas últimas conforme a Equação 3.9 apresentada por Mendonça, 2019.

$$C_{22} = C_{23}, C_{12} = C_{13}, C_{55} = C_{66}, 2C_{44} = C_{22} - C_{23} \quad (3.9)$$

Combinando a Equação 3.7 com a Equação 3.9, obtêm-se as seguintes relações entre as constantes de engenharia para um material transversalmente isotrópico no plano 2-3 (considerando o sistema de referência adotado) apresentadas nas relações da Equação 3.10.

$$\begin{aligned} E_3 &= E_2 \\ v_{13} &= v_{12} \\ v_{23} &= v_{32} \\ G_{31} &= G_{12} \\ G_{23} &= \frac{E_2}{2(1 + v_{23})} \end{aligned} \quad (3.10)$$

### 3.4 Transformações de coordenadas

Os sistemas de coordenadas, usualmente utilizados para a análise de compostos laminados, estão ilustrados nas Figuras 3.2a, 3.2b e 3.2c.

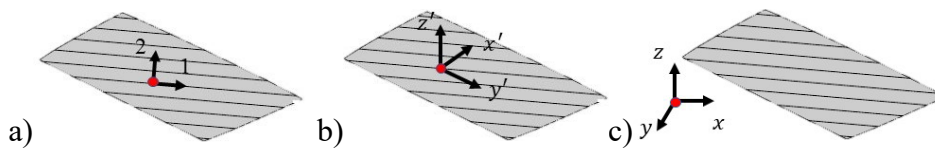


Figura 3.2– a) Sistema de coordenadas do material composto; (b) Sistema de coordenadas do laminado; (c) Sistema de coordenadas global.

A matriz constitutiva  $C^x$  para um estado triaxial de tensões pode ser obtida pela rotação da matriz constitutiva obtida na Equação 3.6 em torno do eixo 3 das coordenadas do material.

Partindo da relação tensão-deformação no sistema da lâmina definida na Equação 3.11, procura-se chegar em uma relação entre os sistemas do material e o sistema da lâmina.

$$\{\sigma^l\} = [C^l]\{\varepsilon^l\} \quad (3.11)$$

As componentes da tensão  $\{\sigma^l\}$  podem ser rotacionadas em torno do eixo 3 através da Equação 3.12 apresentada em Mendonça, 2019.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Efetuada as operações da Equação 3.11 e reorganizando as tensões  $\{\sigma^l\}$  e  $\{\sigma^x\}$  em colunas, tem-se:

$$\{\sigma^x\} = [T]^{-1}\{\sigma^l\} \quad (3.13)$$

onde  $[T]$  é a matriz de transformação. A transformação inversa da apresentada na Equação 3.13 é dada, conforme apresentado Mendonça, 2019, pela Equação (3.14).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 0 & 2\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & 0 & -2\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta)\cos(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de rotação medido em torno do eixo z a partir do eixo x até o eixo 1, positivo quando anti-horário.

As transformações das deformações são feitas conforme Mendonça, 2019 e se dão de forma análoga com a utilização da mesma matriz  $T$  como demonstrado na Equação 3.15.

$$\begin{aligned} [R]^{-1}\{\varepsilon^x\} &= [T]^{-1}[R]^{-1}\{\varepsilon^l\} \\ \{\varepsilon^l\} &= [R][T][R]^{-1}\{\varepsilon^x\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

A matriz  $R$  é uma matriz diagonal  $[R] = \text{diag}[1, 1, 1, 2, 2, 2]$  que visa, através da transformação  $R^{-1}\varepsilon^l$  converter as deformações cisalhantes de engenharia  $\gamma_{ij}$  em componentes do tensor de deformações  $\varepsilon_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2}$ .

Pode-se mostrar que  $[R][T][R]^{-1} = [T]^{-T}$ . Logo a transformação para deformações vem dada por:

$$[\varepsilon^l] = [T]^{-T}\{\varepsilon^x\} \quad (3.16)$$

Com as relações dadas anteriormente, é possível estabelecer a rotação da matriz constitutiva  $[C]$ , como demonstrado na Equação 3.17.

$$\begin{aligned} [T]\{\sigma^x\} &= [C^l][T]^{-T}\{\varepsilon^x\} \\ \{\sigma^x\} &= [T]^{-1}[C^l][T]^{-T}\{\varepsilon^x\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Estas relações permitem que se alterne entre o sistema de coordenadas local da lâmina e o sistema de coordenadas do material, sendo necessária na montagem da matriz de rigidez e obtenção das tensões nas direções principais do material, descritos mais à frente. Conforme Reddy, 2004, essas relações de transformação do sistema da lâmina para o do material e do material para o da lâmina podem ser escritas como nas Equações 3.18 e 3.19:

$$[C^l] = [T][C^x][T]^T \quad (3.18)$$

$$[C^x] = [T]^T[C^l][T] \quad (3.19)$$

### 3.5 Critério de falha de Tsai-Wu

Este critério foi proposto por Tsai e Wu e é um refinamento do critério de Gol'denblat-Kopnov é baseado na energia total de deformação de Beltrami, onde a falha de um corpo de prova submetido a uma combinação de carregamentos ocorre quando a energia de deformação por unidade de volume de qualquer parte do corpo prova atinge o valor de falha determinado em um ensaio axial de compressão ou tração do material que compõe o corpo.

Este critério de falha adiciona mais termos à equação de Hill com a intenção de melhorar a aproximação em relação a dados experimentais. Uma vantagem desse método é a liberdade para a utilização de quantos pontos forem necessários para a aproximação dos dados

experimentais, porém, devido à complexidade para a obtenção de tamanha quantidade de dados, costuma-se truncar a equação nos termos de segundo grau. Segundo Mendonça, 2019, para um estado plano de tensões e considerando que a resistência ao cisalhamento independe do sinal da tensão cisalhante quando aplicada nas direções principais do material, têm-se o critério de falha de Tsai-Wu dado como:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_6\tau_{12} + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\tau_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{16}\sigma_1\tau_{12} + F_{26}\sigma_2\tau_{12} = 1 \quad (3.20)$$

Aplicando dois estados de tensões com todas as componentes nulas exceto  $\tau_{12} = +S$  e  $\tau_{12} = -S$  tem-se que a Equação 3.20 assume a forma abaixo:

$$F_6S + F_{66}S^2 = 1 \text{ ou } -F_6S + F_{66}S^2 = 1 \quad (3.21)$$

Somando e subtraindo as equações acima e repetindo o procedimento utilizado para sua obtenção com algumas modificações, ou seja, assumindo  $\tau_{12} = \pm S$  e  $\sigma_1 = \sigma$  e  $\tau_{12} = \pm S$  e  $\sigma_2 = \sigma$  e demais tensões nulas, têm-se que  $F_{16} = F_{26} = F_6 = 0$  e  $F_{66} = \frac{1}{S^2}$ .

O processo continua com a aplicação à lâmina de um estado de tensões no qual a única componente não nula é  $\sigma_1 = X_t$  seguida a aplicação de outro estado no qual  $\sigma_1 = -X_c$  resultando assim em um sistema linear representado pelas Equações 3.22 e 3.23.

$$F_1X_t + F_{11}X_t^2 = 1 \quad (3.22)$$

$$-F_1X_c + F_{11}X_c^2 = 1 \quad (3.23)$$

O mesmo pode ser feito assumindo estados planos de tensões nos quais as únicas componentes não nulas serão  $\sigma_2 = Y_t$  ou  $\sigma_2 = -Y_c$ .

Os coeficientes  $F$  são obtidos pela solução dos sistemas lineares gerados acima e estão representados na Equação 3.24:

$$F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}, \quad F_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}, \quad F_{11} = \frac{1}{X_t X_c}, \quad F_{22} = \frac{1}{Y_t Y_c} \quad (3.24)$$

Na Equação 3.24,  $X_t$  representa a tensão de tração máxima permissível e  $X_c$  e a de compressão, ambas no eixo  $x$  do material;  $Y_t$  e  $Y_c$  representam, respectivamente, as tensões de tração e compressão no eixo  $y$  do material

Uma das dificuldades desse critério é a obtenção de  $F_{12}$ , pois este fator exige um tipo ensaio de tração biaxial, diferente das demais constantes que são realizadas com ensaios padronizados [Mendonça, 2019].

Levando em conta a dificuldade de obtenção desse valor e sua baixa influência no critério, Tsai e Hahn, 1980 utilizaram os dados experimentais já disponíveis para propor uma forma aproximada para esse fator dada pela Equação 3.22.

$$F_{12} = -\frac{1}{2} (F_{11} F_{22})^{\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

Logo, para um estado plano de tensões, têm-se o critério de falha de Tsai-Wu definido como:

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \tau_{12}^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 = 1 \quad (3.26)$$

Segundo Sun, 2000, o uso de uma única equação para prever a falha de uma lâmina oferecido pelo critério de falha de Tsai-Wu é muito atraente. Porém, ao utilizar esta abordagem, todos os mecanismos de falha devem ser incluídos simultaneamente para qualquer carregamento. Isso pode levar a dificuldades conceituais. Por exemplo, o critério de falha de Tsai-Wu sugere que uma tensão compressiva  $\sigma_2$  pode aumentar a resistência longitudinal do composto, sendo que não existe justificativa mecânica para esse fenômeno.

Ainda segundo Sun, 2000, o critério de falha de Tsai-Wu é sensível a variações de laminados mecanicamente dominados pela matriz. Devido a interação entre todas as componentes de todas as tensões, mudanças bruscas nos modos de falha fazem com que o envelope de falha seja muito irregular.



## 4 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Otimização é a busca do melhor resultado para um dado problema, ou seja, o objetivo é minimizar os custos, ou esforços, requeridos ou maximizar os ganhos. Conforme Rao, 2009, como os ganhos desejados ou os esforços requeridos podem ser expressos em função de determinadas variáveis de projeto, otimização pode ser definida como um processo no qual busca-se condições que gerem o valor máximo ou mínimo de uma função.

Segundo Rao, 2009, não há um algoritmo de otimização universal que se aplique a todos os problemas. Por isso, foi desenvolvida uma miríade destes focando em diferentes escopos onde um método pode funcionar bem enquanto outro não tanto.

A origem dos métodos de otimização está na época de Newton, Lagrange e Cauchy. Sendo as contribuições de Newton e Leibnitz para o cálculo essenciais para o desenvolvimento dos métodos de otimização que utilizam o cálculo diferencial assim como fundamentos do cálculo variacional postulados por Bernoulli, Euler, Lagrange e Weirstrass. A primeira utilização do método da descida do gradiente para solução de minimização irrestrita foi feita por Cauchy e Lagrange desenvolveu um método para problemas de otimização restritos que envolve a adição de multiplicadores. Apesar desses usos pontuais, pouco progresso foi feito na área até meados do século vinte, quando a computação entrou em cena e permitiu a implementação dos métodos de forma mais abrangente e útil.

Entre os anos 1940 e 1970 foram feitos avanços importantes como o desenvolvimento do método simplex por Dantzig em 1947, o anúncio do princípio da otimização para problemas de programação dinâmica que moldaram os métodos de otimização restritos modernos e o trabalho de Kuhn e Tucker em 1951 sobre as condições necessárias e suficientes para a solução ótima de problemas, que fundamentaram grande parte dos estudos sobre programação não linear e o desenvolvimento do *goal programming* por Charnes e Cooper em 1957, que aborda problemas multiobjetivo [Haftka e Gürdal, 1992].

Por volta dos anos 1970, começaram a surgir os algoritmos de otimização modernos, sendo o algoritmo genético proposto por John Holland em 1975, o algoritmo *Particle Swarm Optimization*, que mimetiza o comportamento de animais sociais, que se movem em bando, foi proposto por Kennedy e Eberhart em 1995.

#### 4.1 Estrutura de um problema de otimização

Um problema de otimização pode ser genericamente descrito como:

$$\text{Encontre } \{X\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \text{ que minimiza } f(\{X\}) \quad (4.1)$$

onde  $\{X\}$  representa o vetor de variáveis de projeto da qual depende a função objetivo  $f(\{X\})$ .

O problema pode não conter restrições (otimização irrestrita) ou as ter dadas como:

$$\begin{aligned} g_j(\{X\}) &\leq 0, & j &= 1, 2, \dots, m \\ l_k(\{X\}) &= 0, & k &= 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (4.2)$$

$\{g_j\}$  e  $\{l_k\}$  são as restrições de desigualdade e igualdade respectivamente e o número de variáveis de projeto  $n$  e o número de restrições  $m$  e/ou  $p$  não precisam estar relacionados.

#### 4.2 Técnicas de otimização

Várias técnicas estão disponíveis para a solução dos mais diversos tipos de problemas, sendo os métodos clássicos os primeiros a serem estudados. Estes métodos são utilizados para a busca de um ótimo para funções contínuas e diferenciáveis, o que implica uma limitação na sua aplicabilidade a problemas de engenharia, visto que vários deles apresentam descontinuidades ou não são diferenciáveis.

Segundo Rao, 2009, como condição necessária têm-se que se uma função de uma variável  $f(x)$  é definida no intervalo  $a \leq x \leq b$  e tem um mínimo relativo em  $x = x^*$  onde  $a < x^* < b$  e se a derivada  $df(x)/dx = f'(x)$  existe no ponto  $x = x^*$  então  $f'(x^*) = 0$ . Já como condição suficiente têm-se que assumindo  $f'(x^*) = f''(x^*) = \dots = f^{(n-1)}(x^*) = 0$  e  $f^n(x^*) \neq 0$ . Então  $f(x^*)$  é:

- Um ponto de mínimo de  $f(x)$ , se  $f^n(x^*) > 0$  e  $n$  for par.

- Um ponto de máximo de  $f(x)$ , se  $f^n(x^*) < 0$  e  $n$  for par.
- Não é ponto de máximo nem de mínimo, se  $n$  for ímpar.

Outra técnica com maior aplicabilidade em situações reais é a Programação Linear, que permite resolver problemas nos quais a função objetivo e as restrições, que podem aparecer como igualdades ou desigualdades, são funções lineares das variáveis de projeto. Esta técnica é utilizada em diversas áreas, desde otimização de custos de produção na indústria até projetos de engenharia como o projeto de estruturas de barras ou treliças. Dentre os métodos de otimização por programação linear, o mais utilizado é o Simplex desenvolvido por George Dantzig, na década de 1960 (Dantzig, 1963).

Um problema de programação linear pode ser escrito, de forma matricial, como:

$$\text{minimize } f(\{X\}) = [c]^T \{X\} \quad (4.3)$$

Submetido às restrições:

$$\begin{aligned} [a]\{X\} &= \{b\} \\ \{X\} &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Em sua forma padrão, este algoritmo de otimização tem como características buscar a minimização da função objetivo, ter todas as restrições do tipo igualdade e ter todas as variáveis de projeto positivas. Como em sua maior parte os problemas em engenharia são descritos por dimensões físicas, a maior parte das variáveis de projeto será não negativa; porém, caso o problema seja de otimização irrestrita, podem surgir valores negativos. Caso isso ocorra, a variável pode ser reescrita como uma diferença entre dois valores não negativos.

Dentre os demais métodos de otimização, vale ressaltar a otimização não linear e os métodos modernos de otimização (meta-heurísticos) pois estes são os mais gerais e permitem a solução de um amplo leque de problemas.

A programação não linear entra em voga quando as funções objetivo e as restrições não são funções explícitas das variáveis de projeto ou são excessivamente complicadas de se trabalhar.

Na programação não linear, utilizam-se métodos numéricos que seguem a lógica inversa da otimização clássica, na qual o foco está em otimizar as variáveis de projeto, sendo o valor da função objetivo o último passo do processo. Já nos métodos numéricos, são obtidos diversos

valores para a função objetivo para várias combinações diferentes de variáveis de projeto para então se traçar o caminho para a solução ótima. Estes métodos podem ser divididos em métodos de eliminação e interpolação onde o primeiro pode ser utilizado para minimizar até mesmo funções descontínuas enquanto o segundo utiliza polinômios para fazer aproximações da função objetivo dada.

Já os métodos modernos consistem, em sua maior parte, na mimetização do comportamento físico de moléculas ou sociais e biológicos como enxames de insetos ou método de caça de baleias. Segundo Arora, 2012, estes algoritmos se encaixam na classe de métodos de busca direta, porém, diferente de alguns algoritmos desta categoria, eles não necessitam que a função objetivo seja contínua ou diferenciável em toda sua extensão, sendo o único requerimento necessário a possibilidade de avaliar a função objetivo em qualquer ponto do espaço de procura. Estes algoritmos utilizam ideias estocásticas e números aleatórios na busca pelo valor ótimo para a função objetivo e eles tendem a convergir para o mínimo global, mas sem garantir a convergência para o ótimo global da solução final.

Ainda segundo Arora, 2012, estes algoritmos podem superar problemas que possuem múltiplos objetivos, variáveis de projeto mistas, funções objetivo irregulares ou com ruído, funções objetivo implícitas, funções objetivo com gradientes custosos ou com valores não confiáveis e incertezas no modelo e no espaço de soluções. Estes métodos normalmente começam com um conjunto de variáveis de projeto denominadas de população. Utilizando determinados processos estocásticos, eles tentam atingir um melhor resultado para a função objetivo a cada geração (iteração).

### **4.3 Otimização Multiobjetivo**

Muitos problemas de projeto de engenharia são de natureza multiobjetivo, porque frequentemente envolvem mais de um objetivo a ser otimizado. Esses objetivos impõem requisitos potencialmente conflitantes, como o desempenho técnico e econômico de um determinado sistema. O projetista pode formular um problema de otimização multiobjetivo se quiser estudar as compensações entre esses objetivos conflitantes e explorar as opções de projeto disponíveis. A otimização multiobjetivo é, do ponto de vista do projeto de engenharia, a base para todas as decisões [Rao, 2009].

Um problema multiobjetivo pode ser definido por três conjuntos um de variáveis de projeto, um de funções objetivo e um de restrições (que pode não estar presente). Basicamente, um problema multiobjetivo consiste em encontrar um vetor de variáveis que otimiza um conjunto de objetivos satisfazendo as restrições, quando presentes.

Porém, o conceito de ótimo não se aplica a este problema da mesma forma que em um de um só objetivo. Enquanto na otimização monoobjetivo as soluções são facilmente comparáveis entre si, em um problema multiobjetivo, faz-se necessário desenvolver um método que ranquee as soluções conhecido como dominância de Pareto onde têm-se uma solução  $x_1$  domina uma solução  $x_2$  se  $x_1$  é melhor em ao menos uma das funções objetivo e não pior em todas as outras funções objetivo. Nesse caso, pode-se afirmar que  $x_1$  domina  $x_2$ . Então, pode-se afirmar que uma solução não dominada é aquela que domina todas outras potenciais soluções para determinado problema e que se  $x_1$  não domina  $x_2$  e vice e versa, ambas são consideradas soluções não dominadas. Esta relação pode ser expressa abaixo onde o vetor  $\{u\} = \{u_1, \dots, u_k\}$  domina o vetor  $\{v\} = \{v_1, \dots, v_k\}$  se e somente se (para minimização):

$$\forall_i \in \{1, 2, \dots, k\}, \{u_i\} \leq \{v_i\} \wedge \exists_i \in \{1, 2, \dots, k\}: \{u_i\} < \{v_i\} \quad (4.5)$$

Uma solução é um ótimo de Pareto quando ela não é dominada por nenhuma outra solução no espaço de procura. O conjunto de vetores de soluções ótimas de Pareto definido por  $\{P_s\} = \{\{u_i\} \in \{X\} \mid \{u_B\} < \{x_A\}\}$  dá origem a valores ótimos de funções objetivo (não-dominadas) o vetor que contém essas soluções é denominado de fronteira de Pareto  $\{P_f\} = \{f(\{u_i\}) \mid \{u_i\} \in P_s\}$ . o Símbolo  $<$  indica “é dominado por”.

Na Figura 4.1, o ponto utópico representa o ponto no qual ambas as funções objetivo são minimizadas sem levar em conta o *trade-off* em relação a outra função objetivo.

Como um ponto no espaço de soluções não pode reduzir todas as funções objetivo simultaneamente, este ponto se torna inatingível.

Ainda segundo Deb, 2009 o grande desafio de um problema multiobjetivo é achar uma fronteira de Pareto que seja mais próxima o possível da verdadeira enquanto se mantêm a diversidade dela.

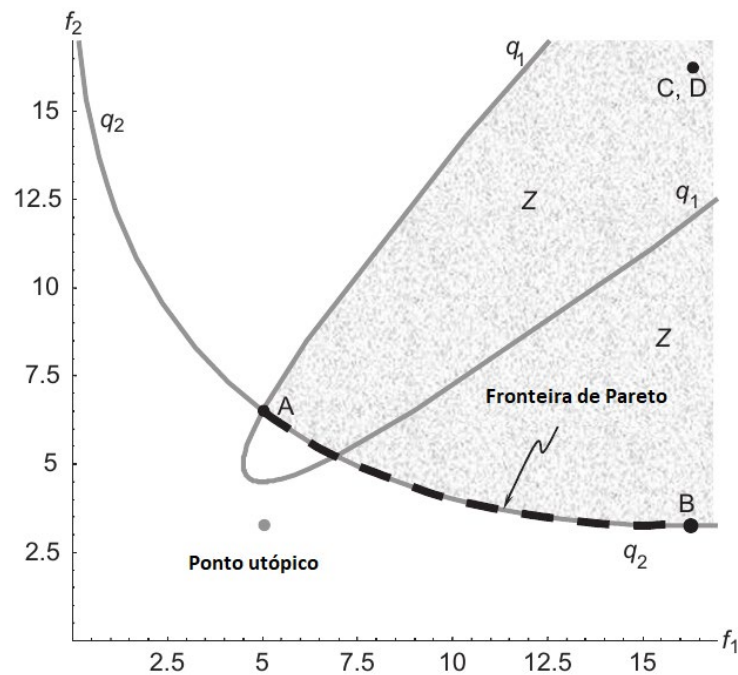


Figura 4.1– Fronteira de Pareto e ponto utópico [Fonte: Arora, 2012] .

#### 4.4 Particle Swarm Optimization (PSO)

O algoritmo PSO se inspira em estudos nas áreas de neurociências, psicologia cognitiva, etologia social e ciências do comportamento dos quais se originam o conceito de inteligência de enxame que foi introduzido no domínio da computação em 1989 sendo usado principalmente utilizado em algoritmos de otimização. Ele contorna as dificuldades da otimização por inteligência artificial ao se focar na contribuição social de cada partícula ao invés de se basear na individualidade de uma “mente”.

Este enxame computacional é tratado como uma população homogênea, onde cada indivíduo realiza uma tarefa simples e interagindo entre si e com o ambiente sem controle central (o comportamento de coletivo surge como consequência da auto-organização dos indivíduos e das interações locais, logo, apesar da simplicidade e limitações do indivíduo, seu comportamento de bando e interações entre os indivíduos deste permitem chegar aos resultados desejados).

Cada indivíduo ( $\{x_i\}$ ) será denominado de partícula e representa um ponto em um espaço com D dimensões que pode ser descrito como um vetor.

$$\{x_i\} = \{x_{i1} \ x_{i2} \ x_{i3} \ \dots \ x_{iD}\} \quad (4.6)$$

A população de  $N$  partículas candidatas a solução se denomina enxame.

$$\{X\} = [\{x_1\}\{x_2\}\{x_3\} \ \dots \ \{x_N\}] \quad (4.7)$$

Em busca da solução ótima para um determinado problema, as partículas definem trajetórias no espaço de soluções e atualizam sua posição de forma iterativa de acordo com a Equação 4.8 do movimento:

$$x_i(t + 1) = x_i(t) + v_i(t + 1) \quad (4.8)$$

onde  $t$  e  $t+1$  indicam iterações sucessivas no algoritmo e  $\{v_i\}$  é o vetor que armazena a velocidade das partículas ao longo da dimensão  $D$ . Este vetor de velocidade define como as partículas se movem no espaço de procura e é influenciado por três fatores: Um momento de inércia ( $\omega$ ), que evita movimentos de direção drásticos, uma componente cognitiva ( $c_1$ ), que contribui para a tendência de as partículas retornarem ao seu último melhor local e por fim, uma componente social ( $c_2$ ), que contribui para uma tendência de as partículas se moverem para o último melhor valor encontrado por todo o enxame. As constantes  $c_1$  e  $c_2$  podem ser tomadas como acelerações que modulam o passo e podem assumir valores no intervalo  $[-4, 4]$ , para a maior parte dos casos, assume-se o valor de 2 para ambas as constantes.

$$v_i(t + 1) = \omega(t + 1)v_i(t) + c_1(p_i - x_i(t))[R_1] + c_2(g - x_i(t))[R_2] \quad (4.9)$$

Na Equação (4.9),  $p_i$  representa o melhor valor encontrado pela partícula  $i$  e  $\{g\}$  é a partícula com melhor valor encontrado no enxame. As variáveis  $[R_1]$  e  $[R_2]$  representam matrizes diagonais de números aleatórios respeitando uma distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$  de forma que ambas as componentes (social e cognitiva) tenham uma influência estocástica na atualização de suas velocidades. As partículas se movem de forma parcialmente aleatória pois as atrações geradas pelos melhores valores globais e locais age de forma sistemática sobre elas.

#### 4.5 Quantum-Behaved Particle Swarm Optimization (QPSO)

O método *Quantum Particle Swarm Optimization* (QPSO) foi desenvolvido por Sun et al. (2004) e tem um melhor comportamento de convergência quando comparado ao PSO desenvolvido por Kennedy e Eberhart, 1995, e Bergh, 2001. Em vez de posição e velocidade, o estado das partículas no QPSO é atualizado pelo quadrado do módulo de uma função de onda  $|\psi(x, t)|^2$ , que representa a densidade de probabilidade de partículas aparecerem em uma posição. Usando o método de Monte Carlo, o estado das partículas pode ser determinado pelas Equações 4.10 a 4.13.

$$x_{ij}(t+1) = P_{ij} - \beta \cdot (mbest_j(t) - x_{ij}(t)) \cdot \ln\left(\frac{1}{u_{ij}(t)}\right), \quad \text{para } \rho \geq 0.5$$

$$x_{ij}(t+1) = P_{ij} + \beta \cdot (mbest_j(t) - x_{ij}(t)) \cdot \ln\left(\frac{1}{u_{ij}(t)}\right), \quad \text{para } \rho < 0.5$$
(4.10)

$$P_{ij}(t) = \varphi_j(t) \cdot pbest_{ij}(t) + (1 - \varphi_j(t)) \cdot gbest_{ij}(t) \quad (4.11)$$

$$mbest_j(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n pbest_{ij}(t), \quad (4.12)$$

$$\beta(t) = [\beta_1 - \beta_0] * (T - t)/T + \beta_0 \quad (4.13)$$

onde *pbest* é a melhor posição local de cada partícula, *gbest* é a melhor posição global do enxame e *mbest* é a melhor posição média de todas as melhores posições, *n* é o tamanho da população do enxame, *t* é o intervalo de tempo de iteração, *T* é o número total de iterações, e  $\beta_0$  e  $\beta_1$  são os limites superior e inferior para o coeficiente de contração-expansão  $\beta(t)$ . Além disso,  $\varphi$ ,  $\rho$  e *u* são números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo [0,1].

#### 4.6 Multi-objective Quantum-Behaved Particle Swarm Optimization (MOQPSO)

Como dito anteriormente, problemas de projeto de engenharia são multiobjetivos por natureza porque geralmente envolvem mais de um objetivo a ser otimizado e que são potencialmente conflitantes, como o desempenho técnico e econômico de um determinado sistema [Pareto, 1971]. O projetista pode formular um problema de otimização multiobjetivo se o estudo das compensações entre esses objetivos conflitantes for relevante e explorar as opções de projeto disponíveis. Otimização multiobjetivo é, do ponto de vista da engenharia, a



base para todas as decisões [Rao, 2009]. Ao contrário das otimizações simples, a otimização multiobjetivo apresenta funções de respostas múltiplas  $f(\{X_i\}) = \{f_1(\{X_i\}), f_2(\{X_i\}), \dots, f_k(\{X_i\})\}^T$  para um conjunto de variáveis de projeto  $\{X_i\} = \{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}\}^T$ .

O conceito de Frente de Pareto (Pareto, 1971) introduzido por Vilfredo Pareto resolve esse problema, resultando em um conjunto de soluções ótimas que atendem aos objetivos conflitantes, de forma que qualquer melhoria em um objetivo agravará os demais. Assim, é definido que um vetor solução  $f(\{X_A\})$  domina outro vetor solução  $f(\{X_B\})$  se, e somente se, (no caso de minimização)  $f_i(\{X_A\}) \leq f_i(\{X_B\})$  para  $i = 1, \dots, k$  (sendo  $k$  o número de funções objetivo) e pelo menos para um índice  $j$  vale  $f_j(\{X_A\}) < f_j(\{X_B\})$ . Se a regra mencionada não for violada, ambos os vetores de solução são chamados de não dominados um pelo outro. O conjunto de todos os vetores de solução não dominados, bem como suas funções objetivo correspondentes, é a chamada Fronteira de Pareto. Portanto,  $\{P_s\} = \{\{X_i\} \in \{X\} \mid \nexists \{X_j\} \succ \{X_i\}\}^T$ , ou seja, o conjunto de vetores de solução  $X_i$  que pertence ao espaço de busca  $\{X\}$  tal que não existe um vetor  $\{X_j\}$  que domina  $\{X_i\}$ . Os valores das funções objetivo correspondentes são  $P_f = \{f(\{X_i\}) \mid \{X_i\} \in \{P_s\}\}^T$ , ou seja, a função objetivo  $f(\{X_i\})$  tal que  $\{X_i\}$  pertença a  $\{P_s\}$ .

O algoritmo MOQPSO usado neste trabalho é baseado principalmente no conceito de QPSO e Frente de Pareto. As principais equações do algoritmo QPSO são modificadas para estarem em conformidade com a estrutura multiobjetivo desenvolvida. Uma estratégia de arquivo de Pareto, semelhante às utilizadas em Knowles e Corne, 1999, e Branke e Mostaghim 2006, é utilizada neste algoritmo, no qual as soluções são armazenadas em múltiplos arquivos que são submetidos a uma rotina de manutenção no final de cada iteração.

Um teste de tolerância e partículas guia são usados para evitar aglomerados de soluções na Frente de Pareto. O método da partícula guia usa uma combinação entre partículas extremas (para aumentar o espalhamento ao longo da fronteira das soluções) e partículas mais próximas (para aumentar a convergência). A seleção de tais partículas guia é baseada na soma das distâncias entre cada partícula e as demais no espaço da função objetivo, e um procedimento baseado na média geométrica dessas distâncias. A Figura 4.2 descreve o fluxograma da ligação entre MOQPSO e a análise de elementos finitos do composto com fibras de trajetória variável utilizada neste trabalho. Neste fluxograma,  $f_p$  é um arquivo no qual são armazenadas as melhores posições individuais de cada partícula,  $f_{G1}$  armazena as melhores posições globais do

enxame como um todo e  $f_{G2}$  armazena a melhor posição global filtrada pelo critério de distância entre os indivíduos.

No bloco inicial, geram-se padrões de fibras através da parametrização de funções de interpolação geradas a partir de pontos de controle definidos dentro dos limites do espaço de procura. Estes padrões de fibras são inseridos no programa de elementos finitos que retorna os valores iniciais da função objetivo dos quais são selecionadas soluções dos extremos da fronteira de Pareto para permitir a escolha das soluções guia iniciais.

Todos os mecanismos e a estrutura multiobjetivo aplicados neste algoritmo foram desenvolvidos em Grotti et al. 2017, Gomes et al., 2018 e Grotti et al., 2020 e testados através de um extenso estudo empírico utilizando onze funções de *benchmark*, sendo elas: Zitzler-1 a Zitzler-6, Viennet-2, Viennet-3, Schaffer-1, Kursawe e Fonseca [Coello et al., 2007 e Deb et al., 2002].

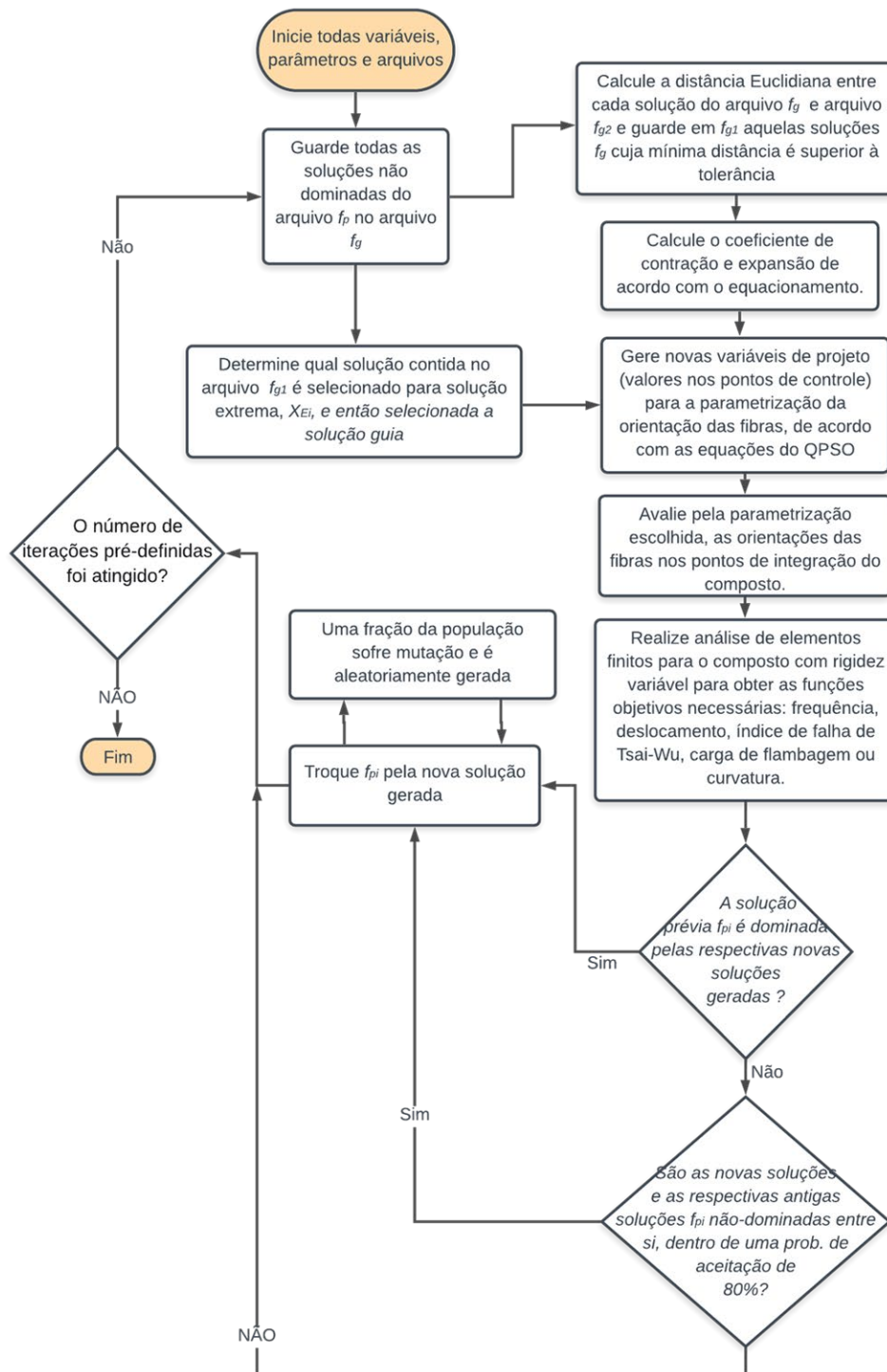


Figura 4.2 – Fluxograma para otimização multiobjetivo do Quantum *Particle Swarm Optimization* (MOQPSO).

## 5 ANÁLISE DE CASCAS DE MATERIAIS ISOTRÓPICOS E ORTOTRÓPICOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A ideia básica por trás do método dos elementos finitos é a modelagem de um problema genérico que envolve meios contínuos através da análise de partes discretas desses meios, para as quais é possível conhecer ou obter uma descrição matemática do seu comportamento. Cada elemento finito e as leis matemáticas que determinam seu comportamento contribuem para o conhecimento e a análise do problema global [Dias et al., 2018].

Neste capítulo serão apresentadas as equações que descrevem a geometria e a cinemática do elemento finito degenerado de casca, o modelo de integração explícita e as equações constitutivas do material composto com sua devida aplicação no elemento finito.

### 5.1 Discretização em elementos finitos

Há diversas abordagens possíveis para realizar a discretização em elementos finitos. Dias et al., 2018, apresentam uma abordagem direta recorrendo à aproximação do campo de deslocamentos através do princípio dos trabalhos virtuais. Neste caso, parte-se da lei de Hooke em notação de Voigt conforme a Equação (5.1).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = C \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

Onde  $C$  é a matriz constitutiva em três dimensões que representa o tensor de elasticidade que depende das constantes elásticas do material.

Pode-se definir o campo de deformações lineares a partir das derivadas de primeira ordem do campo de deslocamentos global, ou seja:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

Consequentemente, no sistema definido pela Equação (5.1), as incógnitas do sistema de equações serão os deslocamentos. A partir da Equação 5.2 é possível definir um operador matricial  $[H]$  que relaciona o campo de deformações com o campo de deslocamentos na forma:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [H]\{u\} \quad (5.3)$$

onde:

$$H = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Ao nível do elemento finito, o campo de deslocamentos real é aproximado recorrendo a um conjunto de funções de forma e aos valores dos deslocamentos nodais conforme a Equação 5.5.

$$\{u^e\} = [N^e]\{U^e\} \quad (5.5)$$

onde  $d = \{u_i \ v_i \ w_i \ \dots\}$  com  $i = 1, \dots, n_{\text{nós}}$  sendo  $n_{\text{nós}}$  o número de nós do elemento finito em questão e  $N$  é uma matriz com as funções de forma do elemento finito. Pode-se então estabelecer o campo de deformações como:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [H]\{u\} = [H]([N^e]\{U^e\}) = [B^e]\{U^e\} \quad (5.6)$$

A matriz  $[B_i^e]$  é a matriz relação deslocamentos-deformações em cada nó  $i$  do elemento finito  $e$ . A formulação específica desta matriz para o elemento utilizado neste trabalho será demonstrada mais à frente.

As Equações 5.5 e 5.6 permitem utilizar o princípio dos trabalhos virtuais que estabelece que num sistema em equilíbrio estático o trabalho realizado pelas forças internas deve ser igual ao trabalho realizado pelas forças externas [Dias et al., 2018]. Neste caso, os campos de deslocamentos e deformações podem ser calculados recorrendo a um campo de deslocamentos virtuais  $\delta d$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\delta\{u^e\} &= [N^e]\delta\{U^e\} \\ \delta\{\varepsilon^e\} &= [B^e]\delta\{U^e\}\end{aligned}\tag{5.7}$$

Desta forma, o trabalho realizado pelas forças internas por unidade de volume é dado por:

$$\delta W_{int} = \delta\{\varepsilon\}^T\{\sigma\} = \delta\{U^e\}^T[B^e]^T\{\sigma\}\tag{5.8}$$

onde  $\sigma$  representa o estado de tensões no corpo.

O trabalho das forças externas será função das forças distribuídas no domínio  $\Omega$  e na fronteira  $\Gamma$  que resultam no trabalho volumétrico e superficial das forças externas [Dias et al., 2018]. Estes trabalhos são definidos nas Equações 5.9 e Equações 5.10.

$$\delta W_{ext\Omega} = \delta\{u^e\}^T\{b\} = \delta\{U^e\}^T[N^e]^T\{b\}\tag{5.9}$$

$$\delta W_{ext\Gamma} = \delta\{u^e\}^T\{\bar{t}\} = \{\delta U^e\}^T[N_\Gamma^e]^T\{\bar{t}\}\tag{5.10}$$

Os valores totais de trabalho podem ser obtidos pela integração das Equações 5.8 e 5.9 no volume do elemento e da Equação 5.10 na superfície do elemento:

$$W_{int} = \delta\{U^e\}^T \int_{\Omega^e} [B^e]^T\{\sigma\}d\Omega\tag{5.11}$$

$$W_{ext\Omega} = \delta\{U^e\}^T \int_{\Omega^e} [N^e]^T \{b\} d\Omega \quad (5.12)$$

$$W_{ext\Gamma} = \delta[U^e]^T \int_{\Gamma_\xi^e} [N_\Gamma^e]^T \{\sigma\} \bar{t} d\Gamma \quad (5.13)$$

onde  $\bar{t}$  são as forças de superfície e  $b$  são as forças de corpo.

Igualando o trabalho das forças internas ao trabalho das forças externas, obtém-se:

$$\delta\{U^e\}^T \int_{\Omega^e} [N^e]^T \{\sigma\} d\Omega = \delta[U^e]^T \left[ \int_{\Omega^e} (N^e)^T \{b\} d\Omega + \int_{\Gamma_\xi^e} (N_\Gamma^e)^T \{\sigma\} \bar{t} d\Gamma \right] \quad (5.14)$$

Uma vez que o campo de deslocamentos virtuais é uma quantidade arbitrária não nula (com  $\delta d^e = 0$  em  $\Gamma_u^e$ ), torna-se possível eliminá-lo em ambos os lados da equação anterior. Assim, estabelece-se a equação de equilíbrio no elemento finito:

$$[K^e]\{U^e\} = \{f\} \quad (5.15)$$

A matriz de rigidez  $K^e$  é definida pela Equação 5.16 e o vetor de forças  $F$  corresponde a Equação 5.17.

$$K^e = \int_{\Omega^e} [B^e]^T [C] [B^e] d\Omega \quad (5.16)$$

$$f^e = \int_{\Omega^e} [N^e]^T \{b\} d\Omega + \int_{\Gamma_\xi^e} [N_\Gamma^e]^T \{\bar{t}\} d\Gamma \quad (5.17)$$

## 5.2 Definição de casca

Casca é um sólido caracterizado por uma espessura muito menor que as dimensões de sua superfície média sendo submetido a efeitos de flexão e membrana. A Figura 5.1 indica os principais esforços presentes em estruturas de cascas.

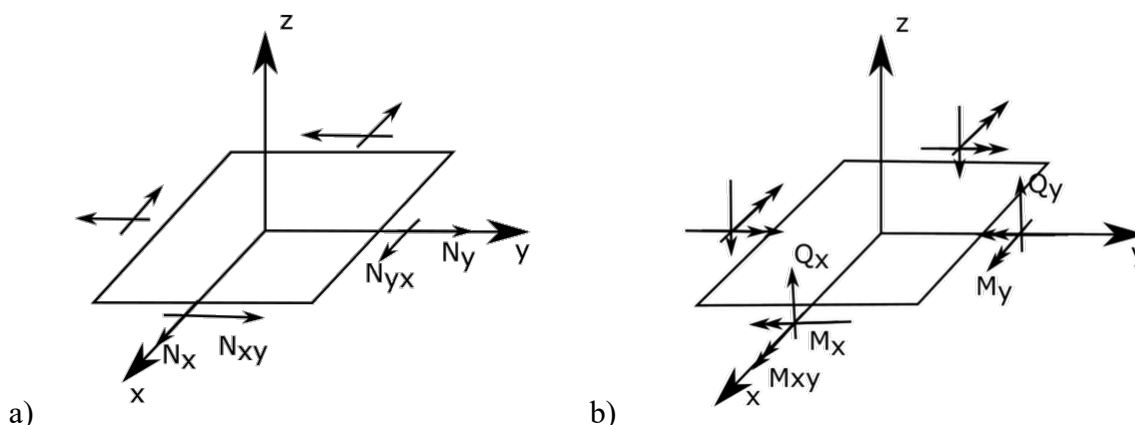


Figura 5.1 – Resultantes de tensões em casca para: a) membrana e (b) flexão [Fonte: Soriano, 2003].

Cascas são estruturas amplamente utilizadas na engenharia, mas possuem uma maior complexidade de aplicação devido a sua geometria curva e ao elevado número de parâmetros envolvidos.

As soluções analíticas para cascas são bastante limitadas, porém, este problema é contornado por através da utilização do método de elementos finitos, no qual a geometria da casca pode ser definida por uma superfície de referência definindo-se somente as coordenadas dos pontos nodais e espessura do elemento nos mesmos [Soriano, 2003].

A utilização de elementos finitos tridimensionais para a análise de cascas apresenta sérias dificuldades numéricas devido a discretização ao longo da espessura e de custo computacional, por isso, opta-se por descrever a estrutura como uma superfície.

As teorias de cascas diferem bastante entre si quanto à determinação das deformações provenientes de esforços cortantes, podendo, de acordo com Soriano, 2003, serem classificadas em teorias de cascas finas ou clássicas, teorias de primeira ordem (utilizando as hipóteses de Reissner-Mindlin), teorias de ordem superior ou teorias de camadas discretas. Nas teorias clássicas, são desprezadas deformações de esforço cortante, considerando que um segmento de reta normal a superfície média da casca permaneça retilíneo e normal a esta mesma superfície, mesmo após ocorrida uma deformação. Ao incorporar as hipóteses de Reissner-Mindlin a teoria clássica, o segmento de reta se mantém retilíneo, mas não mais normal a superfície deformada média, assim definindo a teoria FSDT (*First-order Shear Deformation*).

A formulação de elementos de casca a partir da teoria clássica de casca requer uma quantidade elevada de parâmetros nodais. Logo, é mais prático o desenvolvimento de elementos



de casca ou através da associação de elementos de estado plano de tensões com elementos de placa ou através da degeneração de elementos finitos tridimensionais curvos em superfícies com a incorporação de restrições mecânicas ou cinemáticas, incorporando as hipóteses de casca. No presente trabalho, utiliza-se as hipóteses de Reissner-Mindlin para esse fim, onde uma normal a superfície média, após a deformação desta, permanece retilínea, mas não mais necessariamente normal a esta superfície.

### 5.3 Geometria do elemento finito degenerado de casca

Segundo Hughes, 2000, apesar de virem sendo foco de muitos estudos nos últimos anos, ainda há uma grande insatisfação quanto aos modelos de casca disponíveis, mas, dentre os diversos modelos desenvolvidos, um dos mais generalistas e bastante utilizado é o de casca degenerada cujo princípio consiste em utilizar a elasticidade tridimensional com algumas hipóteses geométricas e cinemáticas.

A geometria de um elemento quadrilátero de casca pode ser definida, segundo Hughes, 2000, como:

$$(\xi, \eta, \zeta) = \bar{x}(\xi, \eta) + X(\xi, \eta, \zeta) \quad (5.18)$$

$$\bar{x}(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^{n_{\text{nó}}} N_a(\xi, \eta) \bar{x}_a \quad (5.19)$$

$$X(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{a=1}^{n_{\text{nó}}} N_a(\xi, \eta) X_a(\zeta) \quad (5.20)$$

$$X_a(\zeta) = z_a(\zeta) \hat{X}_a \quad (5.21)$$

$$z_a(\zeta) = N_+(\zeta) z_a^+ - N_-(\zeta) z_a^+ \quad (5.22)$$

$$N_+(\zeta) = \frac{1}{2}(1 + \zeta), \quad N_-(\zeta) = \frac{1}{2}(1 - \zeta) \quad (5.23)$$

Da Equação 5.18 a Equação 5.23,  $\{x\}$  representa o vetor posição de um ponto qualquer na casca;  $\{\bar{x}\}$  representa a posição de um ponto na superfície média da casca. Já  $\{X\}$ , representado pela Equação 5.20, é o vetor posição de um ponto que define a direção da fibra na superfície de referência. Nesta equação,  $N_a$  é a função de forma avaliada em um nó  $a$  e  $\{X_a\}$  é um vetor unitário que emana do nó na direção da fibra. Por fim,  $z_a$  é uma “função de espessura” associada ao nó  $a$ .

Segundo Hughes, 2000, as Equações 5.18 a 5.23 representem o mapeamento suave de um cubo biunitário para o domínio de uma casca. Se a coordenada local  $\zeta$  for fixada, a superfície definida pela Equação 5.18 é denominada lâmina. Já se forem fixadas as coordenadas  $\xi$  e  $\eta$  a linha definida pela Equação 5.18 representa a fibra que, normalmente, não é necessariamente perpendicular à lâmina, sendo denominada as vezes como pseudonormal.

É conveniente definir as coordenadas superiores e inferiores da casca em cada fibra nodal e uma coordenada paramétrica  $\bar{\zeta} \in [-1, 1]$  que define a localização da superfície de referência e permite modelar a interface entre os elementos de forma contínua como apresentado da Equação 5.24 a Equação 5.27.

$$\bar{x}_a = \frac{1}{2}(1 - \bar{\zeta})x_a^- + \frac{1}{2}(1 + \bar{\zeta})x_a^+ \quad (5.24)$$

$$\hat{X}_a = \frac{\{x_a^+\} - \{x_a^-\}}{\|\{x_a^+\} - \{x_a^-\}\|} \quad (5.25)$$

$$z_a^+ = \frac{1}{2}(1 - \bar{\zeta}) \|\{x_a^+\} - \{x_a^-\}\| \quad (5.26)$$

$$z_a^- = -\frac{1}{2}(1 + \bar{\zeta}) \|\{x_a^+\} - \{x_a^-\}\| \quad (5.27)$$

onde  $\|x\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ . As coordenadas superiores e inferiores são definidas unicamente nas interfaces entre os elementos, não havendo, desta forma, lacunas ou sobreposição entre estes [Hughes, 2000].

#### 5.4 Sistemas de coordenadas das lâminas e das fibras

Em cada ponto de integração da lâmina, faz-se necessária a definição de um sistema cartesiano de referência de forma que dois dos eixos sejam tangentes aos eixos naturais curvilíneos e um terceiro seja perpendicular à superfície da casca. Este sistema é definido por

vetores de base ortonormal  $e_1^l$ ,  $e_2^l$  e  $e_3^l$ , que é perpendicular a lâmina. Este sistema está indicado na Figura 5.2.

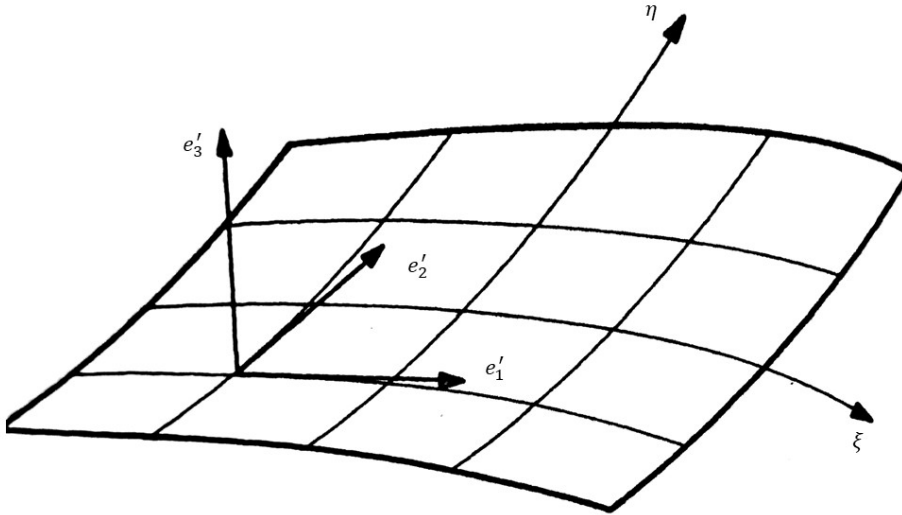


Figura 5.2 – Sistema de coordenadas da lâmina [adaptado de Hughes, 2000].

Para a montagem deste sistema, inicialmente constroem-se dois vetores tangentes as direções das coordenadas curvilíneas naturais da lâmina, conforme as Equações 5.28 e 5.29.

$$\{e_\xi\} = \frac{\{x_\xi\}}{\|\{x_\xi\}\|} \quad (5.28)$$

$$\{e_\eta\} = \frac{\{x_\eta\}}{\|\{x_\eta\}\|} \quad (5.29)$$

A partir destes dois vetores, pode-se definir o vetor normal à superfície da lâmina no ponto de integração em questão como:

$$\{e_3^l\} = \frac{e_\xi \times e_\eta}{\|e_\xi \times e_\eta\|} \quad (5.30)$$

Os vetores tangentes à lâmina são selecionados de forma que o ângulo entre  $e_1^l$  e  $e_\xi$  seja o mesmo que o ângulo entre  $e_2^l$  e  $e_\eta$ . O processo para obtenção destes vetores é realizado conforme sugerido por Hughes, 2000:

$$\{e_1^l\} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\{e_a\} - \{e_b\}) \quad (5.31)$$

$$\{e_2^l\} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\{e_a\} + \{e_b\}) \quad (5.32)$$

onde:

$$\{e_a\} = \frac{\frac{1}{2} (\{e_\xi\} - \{e_\eta\})}{\left\| \frac{1}{2} (\{e_\xi\} - \{e_\eta\}) \right\|} \quad (5.33)$$

$$\{e_b\} = \frac{\{e_3^l\} \times \{e_a\}}{\left\| \{e_3^l\} \times \{e_a\} \right\|} \quad (5.34)$$

Já o sistema de coordenadas das fibras é definido em cada um dos nós e utilizado como sistema de referência para as rotações. O único requisito que deve ser respeitado é que uma das direções do sistema seja coincidente com a direção da fibra [Hughes, 2000].

Existem diversas formas de se definir esse sistema de coordenadas, dentre elas, tem-se a técnica proposta por Hughes, 2000:

$$\{e_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \{e_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \{e_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.35)$$

onde  $\{e_1\}$ ,  $\{e_2\}$  e  $\{e_3\}$  representam o sistema cartesiano global.

Assumindo  $a_i = |\widehat{X}_i|$ ,  $i = 1, 2, 3$ , onde  $\{\widehat{X}\}$  é um vetor unitário que aponta no sentido da fibra e inicialmente,  $j=1$ . Se  $a_1 > a_2$  então assume-se que  $a_3 = a_1$  e  $j=2$ , caso  $a_2 > a_3$  tem-se  $j=3$ . Assim, pode-se definir os vetores que constituem o sistema de coordenadas das fibras conforme as Equações 5.36, 5.37 e 5.38.

$$\{e_3^f\} = \{\widehat{X}\} \quad (5.36)$$

$$\{e_2^f\} = \frac{\{\widehat{X}\} \times \{e_j\}}{\left\| \{\widehat{X}\} \times \{e_j\} \right\|} \quad (5.37)$$

$$\{e_1^f\} = \{e_2^f\} \times \{\widehat{X}\} \quad (5.38)$$

A base ortonormal obtida satisfaz a condição de que se  $\hat{X}$  estiver próximo a  $\{e_3\}$  então  $\{e_1^f\}$ ,  $\{e_2^f\}$  e  $\{e_3^f\}$  estarão próximos da base  $\{e_1\}$ ,  $\{e_2\}$  e  $\{e_3\}$  [Hughes, 2000].

### 5.5 Campo de deslocamentos, deformações, matrizes de rigidez, massa e geométrica

Segundo Dias et al. ,2018, pode-se definir os deslocamentos de um ponto na casca a partir da superfície de referência:

$$\{U^e\} = \sum_{a=1}^{n_{\text{nó}}} N_a(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_a \\ v_a \\ w_a \end{Bmatrix} + \sum_{a=1}^{n_{\text{nó}}} \frac{h}{2} \zeta N_a(\xi, \eta) \begin{bmatrix} -e_{2x}^{fa} & e_{1x}^{fa} \\ -e_{2y}^{fa} & e_{1y}^{fa} \\ -e_{2z}^{fa} & e_{1z}^{fa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (5.39)$$

Na Equação (5.39),  $\alpha$  e  $\beta$  são rotações locais calculadas em torno dos eixos  $e_1^f$  e  $e_2^f$ . Estas rotações estão esquematizadas na Figura 5.3.

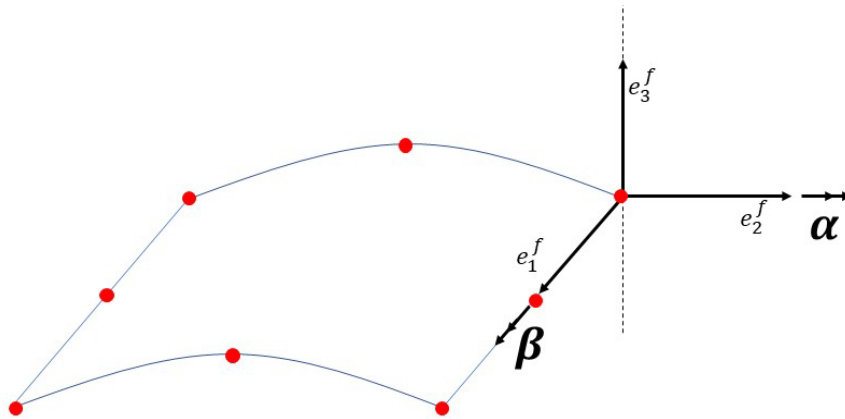


Figura 5.3 – Rotações locais em torno dos eixos  $e_1^f$  e  $e_2^f$  do sistema de coordenadas das fibras

Escrevendo de forma matricial a Equação 5.39 têm-se o seguinte campo de deslocamentos:

$$\{U^e\} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix}^e = \sum_{a=1}^{n_{\text{nó}}} \frac{h}{2} \zeta N_a(\xi, \eta) \begin{bmatrix} N_a & 0 & 0 & -\frac{h_a}{2} \zeta N_a e_{2x}^{fa} & \frac{h_a}{2} \zeta N_a e_{1x}^{fa} \\ 0 & N_a & 0 & -\frac{h_a}{2} \zeta N_a e_{2y}^{fa} & \frac{h_a}{2} \zeta N_a e_{1y}^{fa} \\ 0 & 0 & N_a & -\frac{h_a}{2} \zeta N_a e_{2z}^{fa} & \frac{h_a}{2} \zeta N_a e_{1z}^{fa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ v_a \\ w_a \\ \alpha_a \\ \beta_a \end{Bmatrix} \quad (5.40)$$

Este campo de deslocamentos pode ser utilizado em um modelo ESL (*Equivalent Single Layer*) que é, conforme Sobhani Aragh et al., 2021, cinematicamente homogêneo, ou seja, o comportamento cinemático da estrutura é o mesmo para todas as camadas, caso a estrutura seja fabricada em um material laminado composto.

O tensor de deformações de um dado ponto é dado pela Equação 5.2. Derivando a Equação 5.40 em relação a cada uma das coordenadas naturais e reescrevendo de forma matricial como apresentado por Cook, 2001:

$$F = \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ \vdots \\ w_{,\zeta} \end{Bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} N_{a,\xi} & 0 & 0 & -\zeta h_a N_{a,\xi} \frac{e_{2x}^{fa}}{2} & \zeta h_a N_{a,\xi} \frac{e_{1x}^{fa}}{2} \\ N_{a,\eta} & 0 & 0 & -\zeta h_a N_{a,\eta} \frac{e_{2x}^{fa}}{2} & \zeta h_a N_{a,\eta} \frac{e_{1x}^{fa}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -h_a N_a \frac{e_{2x}^{fa}}{2} & h_a N_a \frac{e_{1x}^{fa}}{2} \\ 0 & N_{a,\xi} & 0 & -\zeta h_a N_{a,\xi} \frac{e_{2y}^{fa}}{2} & \zeta h_a N_{a,\xi} \frac{e_{1y}^{fa}}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -h_a N_a \frac{e_{2z}^{fa}}{2} & h_a N_a \frac{e_{1z}^{fa}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ v_a \\ w_a \\ \alpha_a \\ \beta_a \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

Entretanto, as derivadas da Equação 5.41 devem ser calculadas no referencial global, porém, os deslocamentos se encontram no sistema natural. Para estabelecer a relação entre os dois referenciais, utiliza-se a matriz jacobiana de forma que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = [J^{-1}] \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

onde:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Pode-se então, segundo Dias et al. ,2018, descrever a relação entre os deslocamentos nas coordenadas globais e naturais como:

$$\begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ \vdots \\ w_{,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & J^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ \vdots \\ w_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

A matriz jacobiana apresentada na Equação 5.43 é função do vetor posição relativo ao referencial global.

Modificando a matriz [H] (Equação 5.4) para a Equação 5.45 e utilizando as Equações 5.44 e 5.41, pode-se obter a matriz deslocamento-deformação no sistema de coordenadas globais conforme a Equação 5.46.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

$$[B] = [H] \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & J^{-1} \end{bmatrix} [F] \quad (5.46)$$

Pode-se então escrever o campo de deslocamentos para o elemento finito:

$$[\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T = \sum [B_a][u_a \ v_a \ w_a \ \alpha_a \ \beta_a] \quad (5.47)$$

A matriz  $[B]$  completa será construída por um número de submatrizes  $[B_a]$ , com dimensão  $6 \times 5$ , semelhante ao de nós presentes no elemento. Segundo Cook, 2001, todas as seis deformações são incluídas, pois a superfície média da casca pode ter qualquer orientação em relação aos eixos globais. A condição de estado plano de tensões é introduzida na matriz de relações constitutivas conforme a Equação 5.48.

$$[C^I] = \begin{bmatrix} \frac{E}{(1-\nu^2)} & \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & \frac{E}{(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{kE}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{kE}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

O fator  $k$  tem valor de  $5/6$  e representa um fator de correção para as deformações cisalhantes, que possuem uma forma parabólica que difere do valor constante associado a teoria de Mindlin. Também se concebe a matriz nesta forma para que  $\sigma_3 = 0$ .

A matriz constitutiva da Equação 5.48 deve ser transformada para o sistema de coordenadas global. Isso pode ser feito pela utilização de uma matriz de rotação definida pela Equação 5.49 aplicada conforme a Equação 5.51.

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 l_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

onde:



$$\begin{aligned}
l_1 &= \cos(e_1, e_1^l), m_1 = \cos(e_1, e_2^l), m_1 = \cos(e_1, e_3^l) \\
l_2 &= \cos(e_2, e_1^l), m_2 = \cos(e_2, e_2^l), m_2 = \cos(e_2, e_3^l) \\
l_3 &= \cos(e_3, e_1^l), m_3 = \cos(e_3, e_2^l), m_3 = \cos(e_3, e_3^l)
\end{aligned} \tag{5.50}$$

$$[C] = [T_\varepsilon]^T [C^l] [T_\varepsilon] \tag{5.51}$$

Uma vez que a matriz  $[T_\varepsilon]$ , descrita na Equação 5.49, influencia diretamente as derivadas parciais, ela deve ser calculada para cada ponto de Gauss utilizado na integração numérica da matriz de rigidez do elemento [Dias et al., 2018].

A matriz rigidez do elemento é montada da seguinte forma:

$$[K]_{5nó \times 5nó} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [C] [B] \det([J]) d\xi d\eta d\zeta \tag{5.52}$$

$\begin{matrix} 5nó \times 6 & 6 \times 6 & 6 \times 5nó \end{matrix}$

O determinante da matriz jacobiana é um fator de majoração dos diferenciais  $d\xi d\eta d\zeta$  para gerar o incremento de volume  $dx dy dz$  e a matriz C é a matriz constitutiva já adaptada para o sistema de coordenadas global.

Para aplicar as condições de contorno no sistema de coordenadas global, pode-se transformar os graus de liberdade de rotação da matriz de rigidez do elemento utilizando os cossenos diretores das coordenadas das fibras através da matriz da Equação 5.53 aplicada conforme a Equação 5.54, como apresentado em Kwon e Hyochoong, 2000.

$$[T_{rot}^a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1^a & m_1^a & n_1^a \\ 0 & 0 & 0 & l_2^a & m_2^a & n_2^a \\ 0 & 0 & 0 & l_3^a & m_3^a & n_3^a \end{bmatrix} \tag{5.53}$$

A matriz de rigidez transformada do elemento pode ser escrita como:

$$[\hat{K}]^e = [T_{rot}^e]^{-T} [K^e] [T_{rot}^e]^{-1} \tag{5.54}$$

$\begin{matrix} 6nó \times 6nó & 6nó \times 6nó & 6nó \times 6nó \end{matrix}$

Estas matrizes locais são utilizadas para montar a matriz de rigidez global [K] somando os valores destas, cumulativamente, aos seus respectivos graus de liberdade globais na estrutura. O mesmo processo de montagem é utilizado para as matrizes globais de massa [M] e de rigidez geométrica [K<sub>G</sub>].

## 5.6 Cálculo de frequências naturais e do fator de carga crítica de flambagem

Pode-se reescrever a Equação 5.14 como:

$$\int_{\Omega^e} (B^e)^T C B^e U^e d\Omega - \int_{\Omega^e} (N^e)^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t^{ee}} (N_\Gamma^e)^T \bar{t} d\Gamma = 0 \quad (5.55)$$

Aplicando o princípio de D'Alambert substituindo as forças de corpo  $b$  por  $b - \rho\ddot{u}$ , onde  $\rho\ddot{u}$  é a força de inércia por unidade de volume associado a um elemento diferencial de massa  $dm = \rho dV$ , na Equação 5.55 têm-se:

$$\int_{\Omega^e} (B^e)^T C B^e U^e d\Omega + \underbrace{\int_{\Omega^e} (N^e)^T N^e \ddot{U}^e b d\Omega}_{\text{Termo de inércia}} - \int_{\Omega^e} (N^e)^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t^{ee}} (N_\Gamma^e)^T \bar{t} d\Gamma = 0 \quad (5.56)$$

O termo de inércia é denominado matriz de massa ([M]) e, para o caso particular do elemento finito aqui descrito, é obtido conforme apresentado por Hughes, 2000 e descrito na Equação 5.57.

$$[M]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_e^T u_e \rho \det(J) d\xi d\eta d\zeta \quad (5.57)$$

A Equação 5.56 pode ser reescrita como:

$$[M]\{\ddot{U}(t)\} + [K]\{U(t)\} = \{f(t)\} \quad (5.58)$$

Em sistemas lineares, pode-se usar separação de variáveis (tempo e espaço) para a solução dos deslocamentos quando aplicado um carregamento do tipo periódico  $\{f(t)\} = \{\bar{f}\}e^{i\omega t}$ , de forma que se pode assumir uma solução do tipo:

$$\{U(t)\} = [\bar{U}]e^{i\omega t} \quad (5.59)$$

onde  $[\bar{U}]$  é uma matriz contendo os modos de vibração (formas modais) para cada uma das frequências periódicas, e  $\{\omega\}$  é um vetor com as frequências naturais referentes aos respectivos modos.

Considerando o carregamento nulo na Equação 5.58,  $[M]$  como a matriz de massa global e  $[K]$  como matriz de rigidez global, e substituindo a Equação 5.59 na 5.58, e mantendo o carregamento nulo, o termo exponencial irá desaparecer, chegando-se a:

$$([K] - \omega^2[M])[\bar{U}] = \{0\} \quad (5.60)$$

que é um problema clássico linear de autovalores e autovetores que pode ser resolvido por métodos adequados que permitem obter somente alguns modos de interesse (como o método de Lanczos) evitando o custo computacional excessivo de obter todos os autovalores.

Para uma estrutura sob carregamento externo (em geral compressivo), pode-se definir o chamado fator de carga crítica de flambagem, valor este que define a proporção da carga atuante necessária para que a estrutura sofra o fenômeno da flambagem por bifurcação. Segundo Cook, 2002, este fenômeno ocorre quando um membro, ou estrutura, converte energia de deformação de membrana em energia de deformação de flexão, sem mudanças nos carregamentos externos.

Em elementos finitos, os efeitos das tensões de membrana em deflexões laterais são levados em conta por uma matriz geométrica  $[K_G^e]$  que é função da geometria do elemento, do seu campo de deslocamentos e das suas tensões de membrana. Para a montagem desta matriz, assume-se que as deformações iniciais  $\varepsilon_0$  e as tensões  $\sigma_0$  associadas permanecem constantes enquanto uma deformação adicional  $\varepsilon$  ocorre. Pode-se definir o trabalho virtual associado a esta deformação adicional como:

$$\int \{\varepsilon_n\}\{\sigma_0\}d\Omega \quad (5.61)$$

Expandindo o produto da Equação 5.61 é possível reescrevê-la como uma energia  $U_\sigma$  conforme a Equação 5.62.

$$U_\sigma = \int \frac{1}{2} (u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2) \sigma_{0x} + \dots (u_{,z} u_{,x} + v_{,z} v_{,x} + w_{,z} w_{,x}) \tau_{zx0} d\Omega \quad (5.62)$$

Assumindo:

$$\delta = \{u_{,x} \ u_{,y} \ u_{,z} \ v_{,x} \ v_{,y} \ v_{,z} \ w_{,x} \ w_{,y} \ w_{,z}\}^T \quad (5.63)$$

Pode-se reescrever a Equação (5.62) como:

$$U_\sigma = \int \{\delta\}^T [S] \{\delta\} d\Omega \quad (5.64)$$

onde, conforme Kumar e Palaninathan, 1999:

$$[S] = \begin{bmatrix} \sigma_{x0}[I_3] & \tau_{xy0}[I_3] & \tau_{xz0}[I_3] \\ \tau_{xy0}[I_3] & \sigma_{y0}[I_3] & \tau_{yz0}[I_3] \\ \tau_{xz0}[I_3] & \tau_{yz0}[I_3] & \sigma_{z0}[I_3] \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

Na matriz apresentada na Equação 5.65,  $I_3$  representa uma matriz identidade  $3 \times 3$  e as tensões utilizadas na sua montagem são as calculadas na superfície média da casca.

Assumindo o campo de deslocamentos como o dado pela Equação 5.5 e  $\delta = [G]\{U\}$ , onde  $G$  é uma matriz com as derivadas das funções de forma no sistema de coordenadas global, pode-se obter a forma final da matriz de rigidez geométrica dada pela Equação 5.66.

$$[K_G^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G^e]^T [S^e] [G^e] \det([J]) d\xi d\eta d\zeta \quad (5.66)$$

Assumindo o problema como linear, a matriz de rigidez global  $[K]$  não se modifica com o carregamento. Assumindo que os deslocamentos de flambagem  $\{D\}$  sejam relativos aos deslocamentos nodais:

$$([K] + \lambda[K_G])\{U\} = \lambda\{F\} \quad (5.67)$$

$$([K] + \lambda[K_G])\{U + D\} = \lambda\{F\} \quad (5.68)$$

Subtraindo a Equação 5.67 da 5.68 obtém-se:

$$([K] + \lambda[K_G])\{D\} = \{0\} \quad (5.69)$$

A Equação 5.69 é definida como um problema de autovalores e autovetores onde o autovetor  $\{D\}$  representa o modo de flambagem, que representa somente a proporção da forma da deformada e não sua amplitude. Já  $\lambda$  é o fator de carga crítica de flambagem.

## 5.7 Integração explícita

A metodologia descrita na Seção 5.4 se aplica a uma única camada de material isotrópico. Visando estender a aplicação para materiais laminados, Panda e Natarajan, 1981, desenvolveram um método de integração por camada no qual a coordenada  $\zeta$  é parametrizada para variar entre -1 e 1 da superfície inferior a superior de cada camada do laminado, como apresentado na Equação 5.70.

$$\xi = -1 + \frac{1}{h} \left( 2 \sum_{k=1}^{n_{camada}} h_k - h_c(1 - \xi_k) \right) \quad (5.70)$$

$$d\zeta = d\zeta_k \frac{h_c}{h} \quad (5.71)$$

Nas equações 5.70 e 5.71,  $h_k$  representa o valor acumulado de espessura das camadas já avaliadas no processo de integração,  $h_c$  representa a espessura de uma camada  $c$  e  $h$  a espessura total do laminado.

A integração da matriz rigidez para uma casca laminada se dará camada a camada, com cada uma delas sendo integrada de -1 a 1 em todas as direções naturais e somada cumulativamente de acordo com o número total de camadas conforme a Equação (5.72). Neste

caso, a matriz  $C$  deve ser assumida como a matriz constitutiva de um material ortotrópico ou transversalmente isotrópico. A obtenção desta matriz será apresentada na Seção 5.8.

$$[K^e]_{5nó \times 5nó} = \sum_{k=1}^{ncamada} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B^e]^T [C^e] [B^e] \det(J) \frac{h_k}{h} d\xi d\eta d\zeta_k \quad (5.72)$$

Apesar de apresentar bons resultados, este método se torna computacionalmente custoso para um elevado número de camadas.

Um modelo de menor custo computacional foi sugerido por Kumar e Palaninathan, 1999. Inicialmente, é necessário explicitar a dependência entre a matriz  $[B]$  e a coordenada na direção da espessura. Para tanto, substitui-se  $\frac{h_a}{2}\zeta$  por uma variável  $z$  (que não deve ser confundida com a coordenada global  $z$ ) e decompõe-se a matriz representada pela Equação 5.41 em duas parcelas que são independentes da coordenada  $\zeta$  conforme a Equação 5.73.

$$[F] = [F_1] + z[F_2] \quad (5.73)$$

onde:

$$[F_1] = \begin{bmatrix} N_{a,\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{a,\eta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_a \frac{h_a}{2} e_{2x}^a & N_a \frac{h_a}{2} e_{1x}^a \\ 0 & N_{a,\xi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{a,\eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_a \frac{h_a}{2} e_{2y}^a & N_a \frac{h_a}{2} e_{2y}^a \\ 0 & 0 & N_{a,\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{a,\eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_a \frac{h_a}{2} e_{2z}^a & N_a \frac{h_a}{2} e_{2z}^a \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

$$[F_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -N_{a,\xi} e_{2x}^a & N_{a,\xi} e_{1x}^a \\ 0 & 0 & 0 & -N_{a,\eta} e_{2x}^a & N_{a,\eta} e_{1x}^a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{a,\xi} e_{2y}^a & N_{a,\xi} e_{1y}^a \\ 0 & 0 & 0 & -N_{a,\eta} e_{2y}^a & N_{a,\eta} e_{1y}^a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{a,\xi} e_{2z}^a & N_{a,\xi} e_{1z}^a \\ 0 & 0 & 0 & -N_{a,\eta} e_{2z}^a & N_{a,\eta} e_{1z}^a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

Conforme sugerido por Kumar e Palaninathan, 1999, assume-se então que a inversa da matriz jacobiana variam linearmente com a coordenada na direção da espessura da casca como apresentado na Equação 5.76.

$$[J^{-1}] = [J_a^{-1}] + \frac{2}{h} z [J_d^{-1}] \quad (5.76)$$

onde:

$$\begin{aligned} [J_a^{-1}] &= \frac{1}{2} ([J_{\text{sup}}^{-1}] + [J_{\text{inf}}^{-1}]) \\ [J_d^{-1}] &= \frac{1}{2} ([J_{\text{sup}}^{-1}] - [J_{\text{inf}}^{-1}]) \end{aligned} \quad (5.77)$$

Assumindo:

$$[G] = [J^{-1}][F] \quad (5.78)$$

Pode-se expandir a Equação 5.78 para:

$$\begin{aligned} [G] &= ([J_A^{-1}] + z \frac{2}{h} [J_V^{-1}])([F_1] + z[F_2]) \\ [G] &= \underbrace{[J_A^{-1}][F_1]}_{G_1} + z \underbrace{([J_A^{-1}][F_2] + \frac{2}{h} [J_V^{-1}][F_1])}_{G_2} + z^2 \underbrace{\frac{2}{h} [J_V^{-1}][F_2]}_{G_3} \end{aligned} \quad (5.79)$$

O termo quadrático da Equação 5.79 pode ser relevado sem grande perda de acurácia nos resultados.

Substituindo  $\zeta$  por  $z$  e o diferencial  $dt$  por  $\frac{2}{h} dz$  na Equação 5.52, obtém-se a seguinte forma para a matriz de rigidez:

$$[K]_{5nó \times 5nó} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-\frac{2}{h}}^{\frac{2}{h}} [B]^T [C] [B] \det([J]) \frac{2}{h} dz d\xi d\eta \quad (5.80)$$

A dependência entre a espessura e a matriz jacobiana inversa também deve ser explicitada. Para tanto, começa-se tomando a raiz quadrada do determinante da matriz jacobiana nas partes superior e inferior da casca apresentados na Equação 5.81.

$$\begin{aligned} \Delta_t &= \sqrt{|J^{sup}|} \\ \Delta_b &= \sqrt{|J^{inf}|} \end{aligned} \quad (5.81)$$

A Equação 5.81 possibilita que sejam calculados os valores médios do determinante na espessura e a inclinação da função linear que o representa. O cálculo desses coeficientes é apresentado na Equação 5.82.

$$\begin{aligned} \Delta_a &= \frac{1}{2}(\Delta_t + \Delta_b) \\ \Delta_d &= \frac{1}{2}(\Delta_t - \Delta_b) \end{aligned} \quad (5.82)$$

A raiz quadrada do determinante da matriz jacobiana em qualquer ponto da espessura da casca é então dada por:

$$\Delta = \Delta_a + \frac{2}{h} \bar{z} \Delta_d \quad (5.83)$$

Logo, o determinante é expresso da seguinte forma:



$$|J| = \Delta^2 = \Delta_a^2 \left(1 + \frac{2}{h} \bar{z} \frac{\Delta_d}{\Delta_a}\right)^2 = \Delta_a^2 (1 - \bar{z}\alpha)^2 = \Delta_a^2 (1 + 2\bar{z}\alpha + \bar{z}^2\alpha^2)^2 \quad (5.84)$$

onde  $\alpha = \frac{2}{h} \frac{\Delta_d}{\Delta_a}$ . A Equação 5.84 fornece o determinante da matriz jacobiana na superfície de referência baseado somente nos valores desta matriz nas camadas superior e inferior da casca. Quando comparado ao método anterior que exigiria a montagem da matriz jacobiana para cada camada, nota-se uma grande economia computacional.

Por fim, tendo em vista que  $B = HG$ , combinando as Equações 5.74, 5.75 e 5.84:

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} ([B_1^T] + z[B_2]^T + z^2[B_3]^T) [C] ([B_1] + z[B_2] + z^2[B_3]) \Delta_a^2 (1 + 2z\alpha + z^2\alpha^2) \frac{2}{h} dz d\xi d\eta \quad (5.85)$$

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} ([B_1^T] [C][B_1] + [B_1]^T [C][B_2] + z[B_2]^T [C][B_1] + z^2[B_2]^T [C][B_2]) \Delta_a^2 (1 + 2z\alpha + z^2\alpha^2) \frac{2}{h} dz d\xi d\eta$$

Na segunda linha da Equação 5.85, já foi removida a matriz  $B_3$ . A integração na direção da fibra será feita separada da integração na lâmina. Como as matrizes  $B$  independem de  $\zeta$  e considerando a matriz  $C$  constante:

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([B_1]^T [C_1] [B_1] + [B_1]^T [C_2] [B_2] + [B_2]^T [C_2] [B_1] + [B_2]^T [C_3] [B_2]) \frac{2}{h} \Delta_a^2 d\xi d\eta \quad (5.86)$$

onde as matrizes  $[C_n]$  são as propriedades constitutivas integradas através da espessura e são demonstradas nas Equações 5.87, 5.88 e 5.89.

$$[C_1'] = \sum_{k=1}^{n_{camada}} [C'_k] \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1 + 2z\alpha + z^2\alpha^2)_k dz = \sum_{k=1}^{n_{camada}} [C'_k] (var_1 + 2\alpha var_2 + \alpha^2 var_3)_k \quad (5.87)$$

$$[C_2'] = \sum_{k=1}^{n_{camada}} [C'_k] \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z(1 + 2z\alpha + z^2\alpha^2)_k dz = \sum_{k=1}^{n_{camada}} [C'_k] (var_2 + 2\alpha var_3 + \alpha^2 var_4)_k \quad (5.88)$$

$$[C_3'] = \sum_{k=1}^{n_{camada}} [C'_k] \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2(1 + 2z\alpha + z^2\alpha^2)_k dz = \sum_{k=1}^{n_{camada}} [C'_k] (var_3 + 2\alpha var_4 + \alpha^2 var_5)_k \quad (5.89)$$

onde:

$$\begin{aligned}
var_1 &= \left( \frac{h_k}{2} - \left( -\frac{h_k}{2} \right) \right) \\
var_2 &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{h_k}{2} \right)^2 - \left( -\frac{h_k}{2} \right)^2 \right) \\
&\vdots \\
var_5 &= \frac{1}{5} \left( \left( \frac{h_k}{2} \right)^5 - \left( -\frac{h_k}{2} \right)^5 \right)
\end{aligned} \tag{5.90}$$

As matrizes  $[C_1']$ ,  $[C_2']$  e  $[C_3']$  podem ser rotacionadas para o sistema global conforme a Equação 5.49.

A matriz de rigidez geométrica é apresentada na Equação 5.91.

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G_1]^T [S_1] [G_1] + [G_1]^T [S_2] [G_2] + [S_2]^T [G_2] [S_1] + [G_2]^T [S_3] [G_2] \frac{2}{h} \Delta_A^2 d\xi d\eta \tag{5.91}$$

onde as matrizes  $[S_n]$  podem ser obtidas conforme as Equações 5.92 a 5.94.

$$[S_1] = \sum_{k=1}^n [S_k] \int_{-\frac{hc}{2}}^{\frac{hc}{2}} (1 + 2z\alpha + z^2\alpha^2)_k dz = \sum_{k=1}^n [S_k] (var_1 + 2\alpha var_2 + \alpha^2 var_3)_k \tag{5.92}$$

$$[S_2] = \sum_{k=1}^n [S_k] \int_{-\frac{hc}{2}}^{\frac{hc}{2}} z(1 + 2z\alpha + z^2\alpha^2)_k dz = \sum_{k=1}^n [S_k] (var_2 + 2\alpha var_3 + \alpha^2 var_4)_k \tag{5.93}$$

$$[S_3] = \sum_{k=1}^n [S_k] \int_{-\frac{hc}{2}}^{\frac{hc}{2}} z^2(1 + 2z\alpha + z^2\alpha^2)_k dz = \sum_{k=1}^n [S_k] (var_3 + 2\alpha var_4 + \alpha^2 var_5)_k \tag{5.94}$$

As matrizes  $[S_k]$  são obtidas no plano médio de cada camada  $k$  conforme a Equação 5.65.

## 5.8 Material laminado ortotrópico aplicado ao elemento finito

Como no material isotrópico, a hipótese de Mindlin-Reissner da inextensibilidade na espessura deve ser aplicada ao material de forma que os efeitos transversais sejam desprezados ( $\varepsilon_3 = 0$ ). Logo, assume-se que a tensão normal transversal também é zero. Esse requisito é forçado através da relação constitutiva como demonstrado nas Equações (5.95) e (5.96).

$$\sigma_3 = C_{31}\varepsilon_1 + C_{32}\varepsilon_2 + C_{33}\varepsilon_3 + C_{34}\varepsilon_4 + C_{35}\varepsilon_5 + C_{36}\varepsilon_6 = 0 \quad (5.95)$$

É possível isolar a deformação  $\varepsilon_3$  na Equação 5.95.

$$\varepsilon_3 = \frac{C_{3i}\varepsilon_i}{C_{33}} \quad (5.96)$$

Substituindo a Equação 5.96 na relação constitutiva na matriz constitutiva para um material anisotrópico, obtém-se a Equação 5.97 para os coeficientes da matriz constitutiva ajustada.

$$\hat{C} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{3j}}{C_{33}} \quad (5.97)$$

Aplicando a Equação 5.97 na matriz ortotrópica da Equação 3.1, chega-se à matriz constitutiva adaptada para o elemento degenerado representada pela matriz da Equação 5.98.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} & C_{12} - \frac{C_{13}C_{32}}{C_{33}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (5.98)$$

As propriedades mecânicas de um material composto reforçado por fibras contínuas dependem da orientação destas dentro da matriz. Por este motivo, surge a necessidade de definir o sistema de coordenadas do material, que pode não ser comum a todas as lâminas constituintes do material. Para este fim, utiliza-se a matriz de rotação definida na Equação 3.13 para realizar a rotação das relações constitutivas do sistema de coordenadas do material para o sistema de coordenadas da lâmina, como na Equação 3.18. Em seguida, a matriz constitutiva pode ser transformada para o sistema de coordenadas da lâmina conforme a Equação 5.99.

$$[C'] = [T]^T [C^m] [T] \quad (5.99)$$

A matriz constitutiva resultante da Equação 5.99 pode então ser utilizadas nas Equações 5.87 a 5.89.

## 5.9 Deformações e tensões globais e locais

Os deslocamentos para os nós do problema de elementos finitos são obtidos pela solução do sistema linear  $[K][U] = [f]$ . Estes deslocamentos e rotações são entregues no sistema global do problema.

Para a obtenção das deformações em cada lâmina, a coordenada  $\zeta$  é parametrizada conforme as equações 5.70 e 5.71 e utilizada na obtenção da matriz  $[B]$  para cada camada do laminado. Sendo assumidos valores  $\xi_k = -1$  para a parte inferior da camada,  $\xi_k = 0$  para o centro e  $\xi_k = 1$  para a parte superior.

Os deslocamentos e rotações resultantes da solução do sistema linear saem nas coordenadas globais do problema. Desta forma, as deformações no sistema global podem ser obtidas simplesmente por  $\{\varepsilon\} = [B]\{U\}$ , onde  $\{U\}$  são os deslocamentos nodais no sistema global.

Logo, as tensões no sistema global podem ser obtidas utilizando as deformações no sistema global e a matriz constitutiva da Equação 5.98 transformada para o sistema global como mostrado. As tensões em coordenadas globais são apresentadas na Equação 5.100.

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (5.100)$$

Porém, as tensões no sistema global não têm grande significado a não ser para a utilização para visualização das tensões e cálculo de carga crítica de flambagem. Para análise de critérios de falhas, é necessário que estas tensões se encontrem no sistema de coordenadas do material. Neste caso, para uma casca de material composto laminado, faz-se necessário primeiro fazer uma rotação das deformações com o uso da Equação 5.49, passando-as do sistema de coordenadas global do problema para o sistema da lâmina e, em seguida, faz-se outra

rotação com a Equação 3.14, passando as deformações do sistema da lâmina para o sistema do material conforme a Equação 5.101.

$$\{\varepsilon^x\} = [T]([T_\varepsilon][B]\{U\}) \quad (5.101)$$

As tensões locais são então dadas por:

$$\{\sigma^x\} = [C]\{\varepsilon^x\} \quad (5.102)$$

## 6 VALIDAÇÃO DO PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS PARA CASCAS LAMINADAS

Para o presente trabalho, foi desenvolvido um programa de elementos finitos para análise linear a dinâmica de cascas de material compostos laminados utilizando a linguagem de programação MATLAB. As malhas mais complexas foram geradas com o software ANSYS APDL 17.0 e seus dados geométricos foram importados para o *software* desenvolvido neste trabalho. Sua acurácia foi medida utilizando *benchmarks* tanto para casos isotrópicos quanto para ortotrópicos.

O elemento selecionado utiliza as funções de forma *Serendipity* para oito nós (que podem ser encontradas no anexo A deste trabalho) e um esquema de integração completa com  $2 \times 2$  pontos de Gauss, como estudado por Hughes et al., 1977; Hughes et al., 1978; Pugh, 1976 e Pugh et al., 1978 e utilizado por Kumar e Palaninathan, 1999. Estes esquemas estão indicados na Tabelas 6.1 e 6.2.

Tabela 6.1– Elementos Lagrangeanos com 3 graus de liberdade.

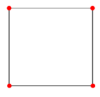
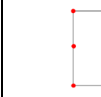
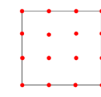
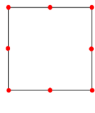
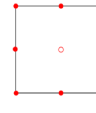
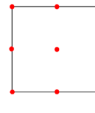
			
$w, \theta_1, \theta_2$ Funções de forma	Bilinear	Biquadrático	Bicúbico
Integração reduzida uniforme	$1 \times 1$ U1	$2 \times 2$ U2	$3 \times 3$ U3
Integração reduzida seletiva	$1 \times 1$ cisalhamento $2 \times 2$ flexão S1	$2 \times 2$ cisalhamento $3 \times 3$ flexão S2	$3 \times 3$ Cisalhamento $4 \times 4$ flexão S3

Tabela 6.2 – Elementos de placa com 3 graus de liberdade.

			
$w$ , Funções de forma	Serendipity	Serendipity	Lagrange
$\theta_1, \theta_2$ Funções de forma	Serendipity	Lagrange	Lagrange
Esquema de integração	U2	S2	S2

Vale ressaltar que não foi utilizada integração seletiva reduzida nas contribuições de membrana e cisalhamento da matriz de rigidez.

Nos exemplos apresentados a seguir, os resultados para tensões avaliadas em coordenadas locais e para deslocamentos são comparados com resultados analíticos ou numéricos presentes na literatura e a simulações numéricas realizadas no *software* comercial ANSYS 2017. Para as análises realizadas neste *software*, foi utilizado o elemento finito SHELL281 que possui oito nós, no qual utiliza-se hipóteses FSDT e usa-se uma integração tridimensional  $2 \times 2 \times 3$ .

### 6.1 Cilindro ortotrópico submetido a pressão uniforme.

Este exemplo foi utilizado por Kumar e Palaninathan, 1997 para realizar a comparação entre seus resultados numéricos e os valores analíticos obtidos por Reuter, 1972 e será aqui utilizado para verificar o código desenvolvido. Ele consiste em uma casca cilíndrica avaliada para tensões locais para três, cinco e oito camadas com um empilhamento no qual se alternam a posição das fibras em cada lâmina entre  $45^\circ$  e  $-45^\circ$  (*angle ply*). As posições das fibras para a primeira e segunda camada se encontram na Figura 6.1.

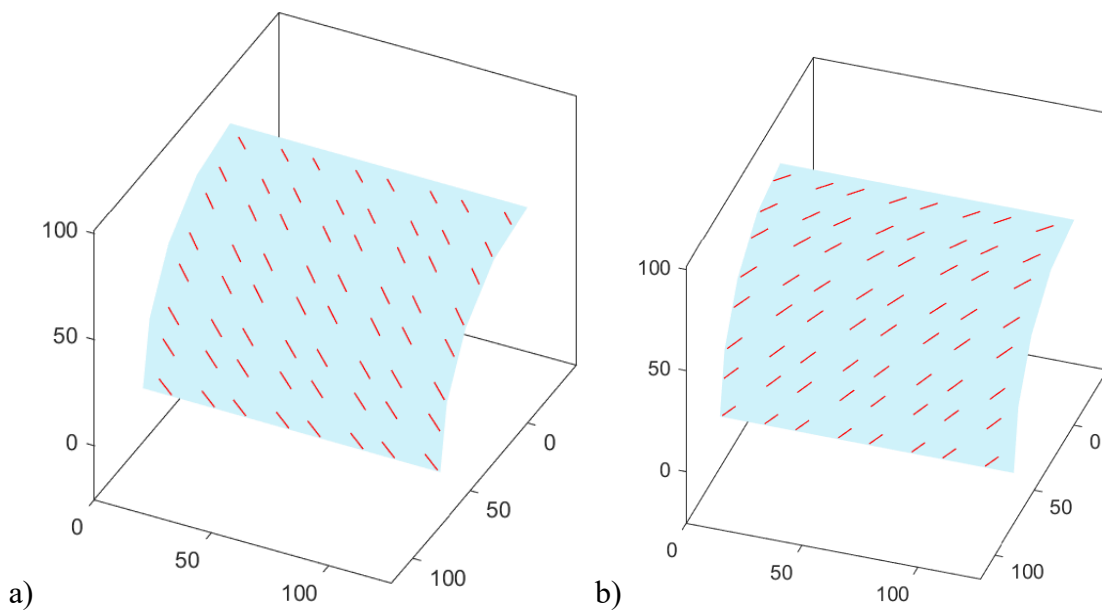


Figura 6.1– Fibras discretizadas na (a) Primeira camada e na (b) Segunda camada

O cilindro possui comprimento de 254 mm, raio de 76,2 mm e cada camada possui 0,26416 mm de espessura. O material é transversalmente isotrópico e possui propriedades  $E_1 = 27500$  MPa,  $E_2 = 12411$  MPa,  $G_{12} = 6895$  MPa e  $\nu_{12} = 0,52$ . O valor de pressão interna é de 0,0685 MPa.

Para a análise, utiliza-se um oitavo do cilindro com condições de contorno de simetria. As tensões são avaliadas no centro das camadas e é tomada a média entre os valores delas nos pontos de integração de cada elemento finito sendo selecionada a maior tensão local entre esses valores para ser verificada. O cilindro é discretizado em uma malha de  $4 \times 4$  elementos, como a apresentada por Kumar e Palaninathan, 1997. As condições de contorno utilizadas neste trabalho estão indicadas na Figura 6.2(a) e a malha utilizada indicada na Figura 6.2(b).

A Tabela 6.3 indica o comparativo para as tensões máximas no centro da camada em análise do cilindro e são referentes à média dos pontos de Gauss na segunda, terceira e quarta camadas, respectivamente.



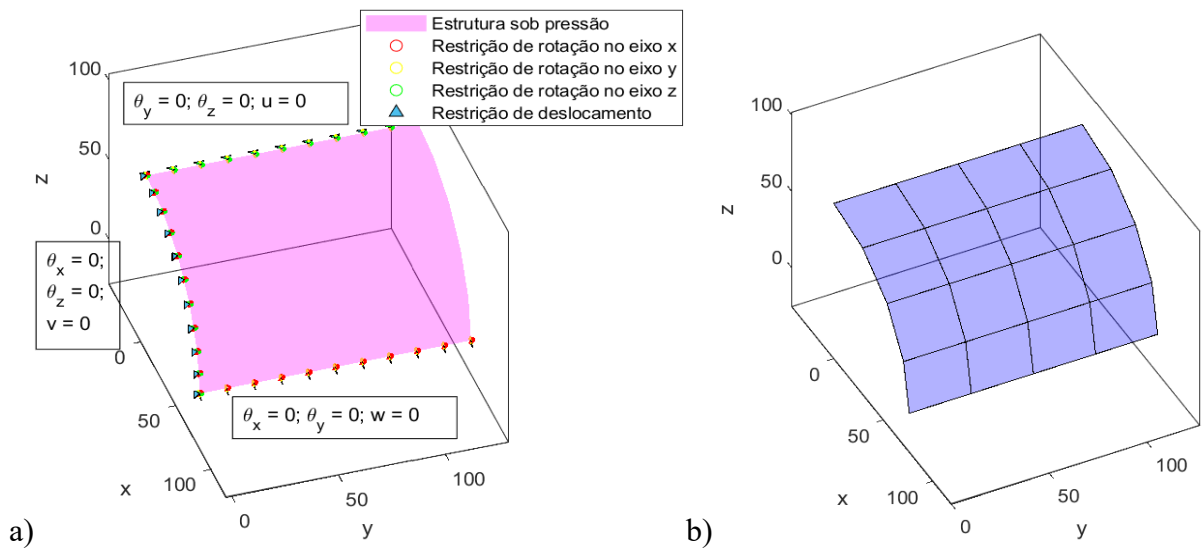


Figura 6.2 – (a) Octante do cilindro com pressão e condições de contorno; (b) malha utilizada para a análise.

Tabela 6.3 – Comparativo para máximas tensões em coordenadas locais obtidas na segunda, terceira e quarta camadas com o código desenvolvido, por Kumar et al., 1997, por Reuter, 1972, e pela utilização do software comercial ANSYS 17.0.

No. de Camadas	Estado de Tensão	Programa (MPa)	Kumar (1997) (MPa)	ANSYS 17.0 (MPa)	Reuter (1972) (MPa)
3 camadas	$\sigma_x$	4,82	4,81	4,83	4,94
	$\sigma_y$	2,25	2,28	2,26	2,24
	$\tau_{xy}$	3,29	3,32	3,30	-3,36
5 camadas	$\sigma_x$	2,72	2,75	2,71	2,84
	$\sigma_y$	1,35	1,39	1,36	1,39
	$\tau_{xy}$	1,96	2,00	1,96	2,03
8 camadas	$\sigma_x$	1,60	1,63	1,60	1,72
	$\sigma_y$	0,87	0,91	0,88	0,92
	$\tau_{xy}$	1,22	-1,26	1,23	1,33

Devido a malha utilizada no estudo anterior ser bastante grosseira, optou-se por fazer uma análise de convergência com o refinamento desta, para cinco camadas, em uma região que

apresenta tensões mais bem comportadas, visto que o ponto de máximo deslocamento apresenta grande concentração de tensões, como é possível notar nas Figura 6.3(a) e Figura 6.3(b).

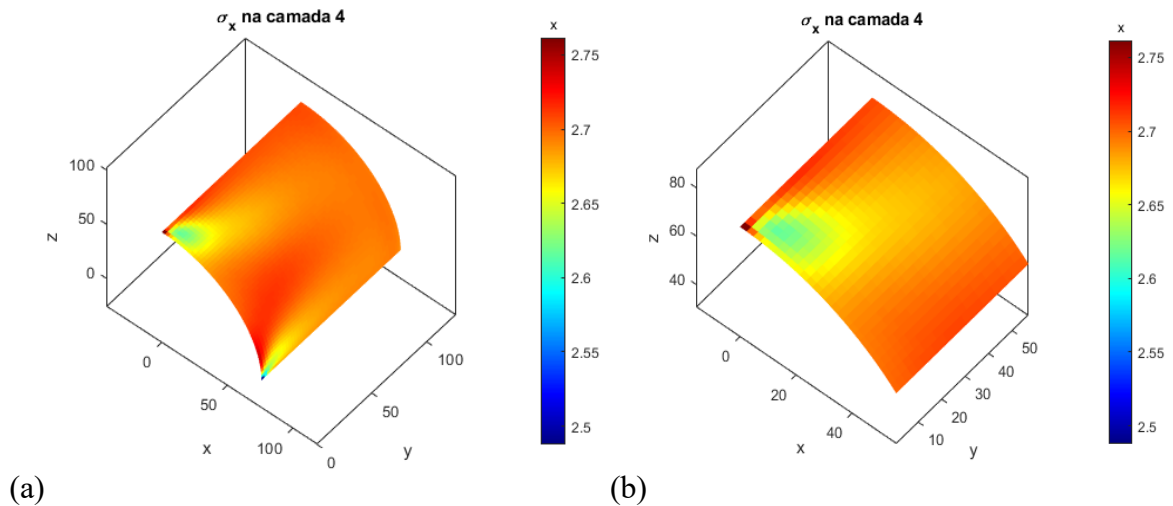


Figura 6.3 – (a) Tensões  $\sigma_x$  para cilindro; (b) Detalhe da concentração de tensões no canto vivo superior.

Esta concentração de tensões possivelmente surge devido ao comportamento ortotrópico do laminado.

Foi escolhida uma região no meio da superfície e a convergência foi medida pela razão entre os resultados com refinamento na malha ( $n$ ) e o resultado da malha mais grosseira, anterior ao refinamento ( $n - 1$ ). Este estudo de refinamento está indicado na Figura 6.4.

Também foi feita uma comparação entre os resultados obtidos pelo programa utilizado e o software ANSYS 17.0 para alguns elementos selecionados (indicados na Figura 6.5) com uma malha de 400 elementos finitos ( $20 \times 20$  elementos). A Tabela 6.4 traz as comparações de estados de tensões entre o ANSYS 17.0 e o programa aqui desenvolvido.

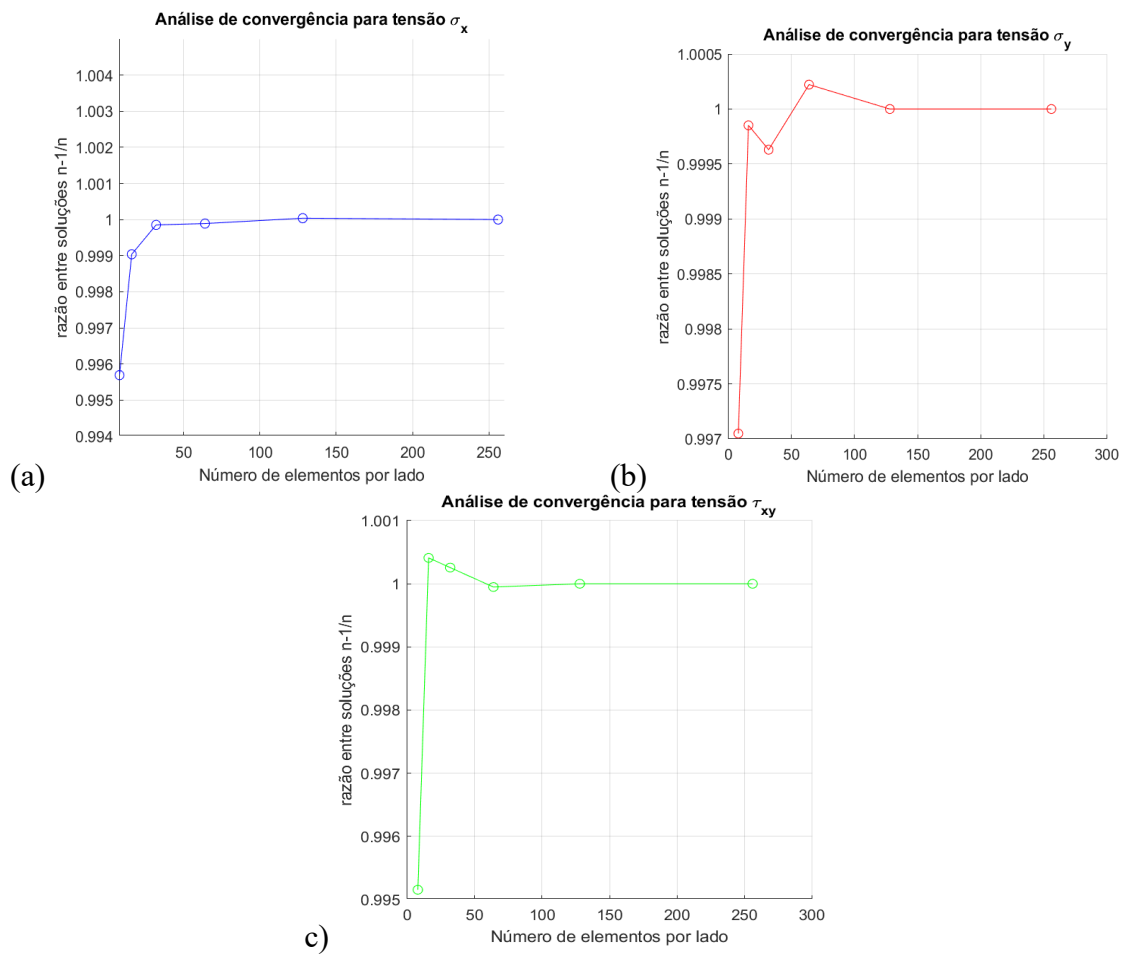


Figura 6.4 – Resultados da análise de convergência para tensões (a)  $\sigma_x$ , (b)  $\sigma_y$  e (c)  $\tau_{xy}$ .

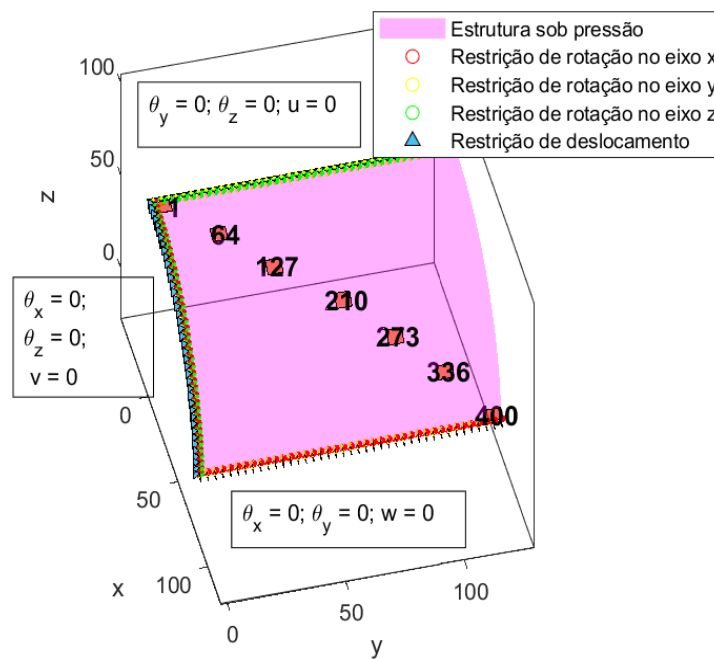


Figura 6.5 – Elementos finitos selecionados para comparação.

Tabela 6.4 – Resultados para elementos selecionados utilizando o programa desenvolvido e o *software* comercial ANSYS 17.0.

		Tensões Máximas no centro da quarta camada	Número do elemento						
			1	64	127	210	273	336	400
5 camadas	ANSYS 17.0	$\sigma_x$	2,6699	2,6580	2,6796	2,6954	2,6955	2,6907	2,6894
		$\sigma_y$	1,3837	1,3463	1,3414	1,3464	1,3495	1,3471	1,3451
		$\tau_{xy}$	1,9329	1,9596	1,9626	1,9556	1,9538	1,9545	1,9444
	Programa	$\sigma_x$	2,6779	2,6603	2,6818	2,6973	2,6974	2,6928	2,6931
		$\sigma_y$	1,3877	1,3480	1,3430	1,3480	1,3510	1,3486	1,3466
		$\tau_{xy}$	1,9323	1,9584	1,9615	1,9545	1,9528	1,9532	1,9462
8 camadas	ANSYS 17.0	$\sigma_x$	1,5771	1,5807	1,5792	1,5868	1,5827	1,5846	1,5779
		$\sigma_y$	0,8637	0,8650	0,8682	0,8701	0,8693	0,8690	0,8580
		$\tau_{xy}$	1,2210	1,2270	1,2233	1,2222	1,2226	1,2233	1,2077
	Programa	$\sigma_x$	1,5714	1,5748	1,5732	1,5809	1,5767	1,5783	1,5751
		$\sigma_y$	0,8612	0,8623	0,8656	0,8675	0,8666	0,8662	0,8571
		$\tau_{xy}$	1,2182	1,2235	1,2201	1,2190	1,2195	1,2199	1,2055

Para 5 camadas, as tensões  $\sigma_x$  apresentaram uma diferença média entre a simulação realizada no programa desenvolvido e o *software* comercial ANSYS 17.0 de 0,11%, de 0,14% para  $\sigma_y$  e de 0,06% para  $\tau_{xy}$ . Já para 8 camadas, surgiu uma diferença de 0,34% para  $\sigma_x$ , de 0,28% para  $\sigma_y$  e de 0,25% para  $\tau_{xy}$ .

## 6.2 Análise de deslocamentos em hemisfério submetido a cargas pontuais

Este problema é amplamente utilizado para testes de acuracidade em modelos de elementos finitos e consiste em utilizar um modelo de quarto de um hemisfério, com condições de contorno de simetria submetido a cargas pontuais aplicadas em dois pontos da estrutura.

Para o presente estudo, foi utilizado o exemplo apresentado por Cook, 2002, no qual o domo possui um raio de 10 polegadas e uma espessura de 0,04 polegadas (1,016 mm). O material utilizado é isotrópico, possuindo módulo de elasticidade de 68,25 (0,47 MPa) e coeficiente de Poisson de 0,3 e sendo aplicada uma carga de  $-1\text{lb}$  (4,45 N), na coordenada  $x = 0$   $y = 10$ ,  $z = 0$  e uma de  $1\text{ lb}$  (4,45 N) aplicada na coordenada  $x = 10$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ , como apresentado na Figura 6.6(b). Preferiu-se manter as unidades imperiais para facilitar a comparação com trabalho original. Na Figura 6.6(a) é indicada a malha de elementos finitos

utilizada. São medidos os deslocamentos paralelos as forças nos pontos de aplicação delas, sendo estes iguais para ambos os pontos.

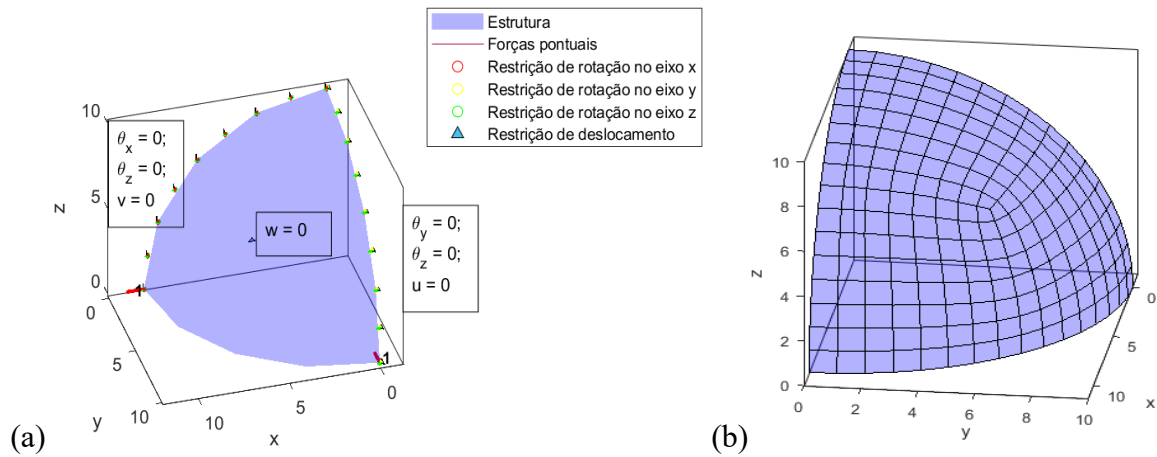


Figura 6.6 –(a) Quadrante de domo esférico com condições de contorno de simetria submetido a cargas pontuais. (b) Malha para 16 elementos por lado.

Os resultados foram comparados com a solução analítica de 0,0924 pol (2,39 mm) apresentado por Cook, 2001, e aos resultados obtidos no software ANSYS 17.0 para a mesma malha. Eles estão apresentados na Tabela 6.5. Uma análise de convergência da malha foi feita e é mostrada na Figura 6.7.

Tabela 6.5 – Comparativo de deslocamentos obtidos com o software ANSYS 17.0 e com o programa desenvolvido.

Número de elementos Finitos por lado	Deslocamentos (pol)	
	ANSYS 17.0	Programa desenvolvido
4	0,065803	0,065006
16	0,092400	0,092336
32	0,092602	0,092584
64	0,092619	0,092615
128	0,092620	0,092619

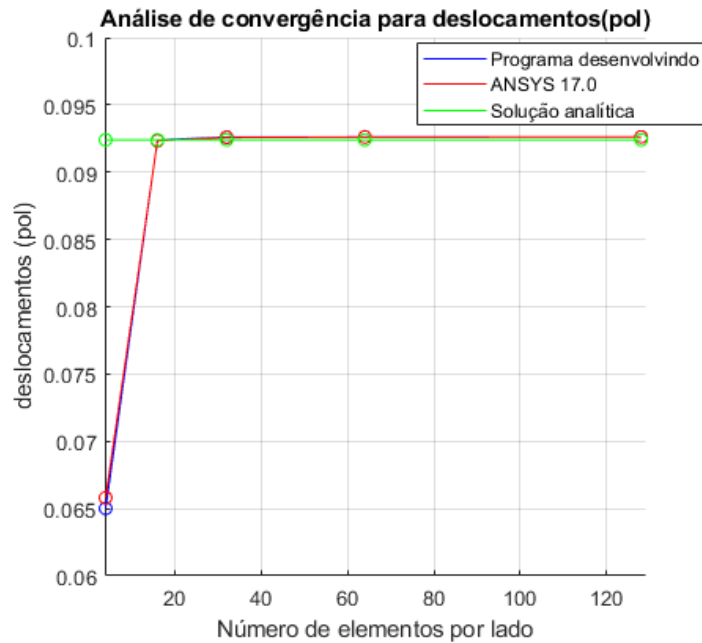


Figura 6.7 – Análise de convergência para deslocamentos.

### 6.3 Análise de deslocamentos em uma calota esférica simplesmente apoiada

Este problema consiste em um uma calota esférica simplesmente apoiada com uma força no seu ponto central. A casca é isotrópica e possui espessura de 0,1 pol (2,54 mm),  $E = 1 \times 10^6$  psi (6894,75 MPa),  $\nu = 0,3$  e está simplesmente apoiada. Para a análise utiliza-se um de seus quadrantes e condições de contorno de simetria. Como no item 6.2, preferiu-se manter as unidades imperiais para facilitar a comparação com trabalho original.

Os resultados obtidos são comparados aos de Rao, 1978, que utiliza um elemento finito de 3 graus de liberdade em uma malha de  $3 \times 3$  elementos. A estrutura completa é mostrada na Figura 6.8, o quadrante utilizado com as condições de contorno e carregamentos é apresentado na Figura 6.9(a) e a malha usada para a análise na Figura 6.9(b).

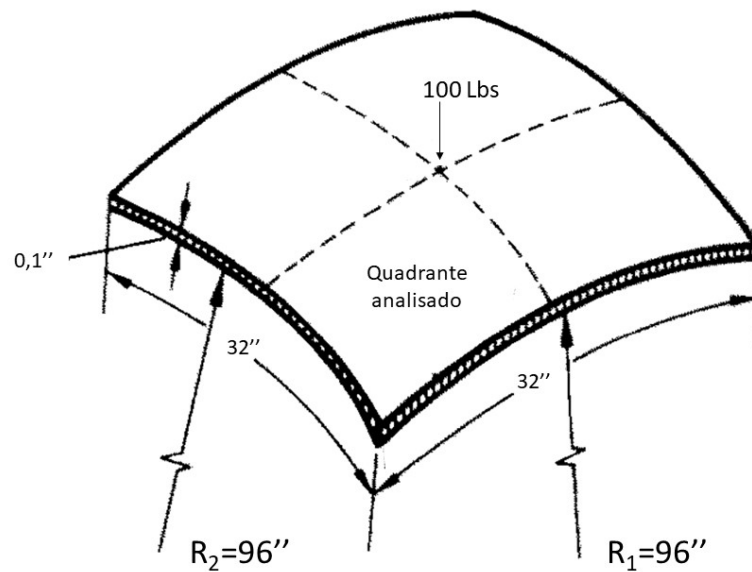


Figura 6.8 – Calota esférica submetida a força no seu centro [Adaptado de Rao, 1978].

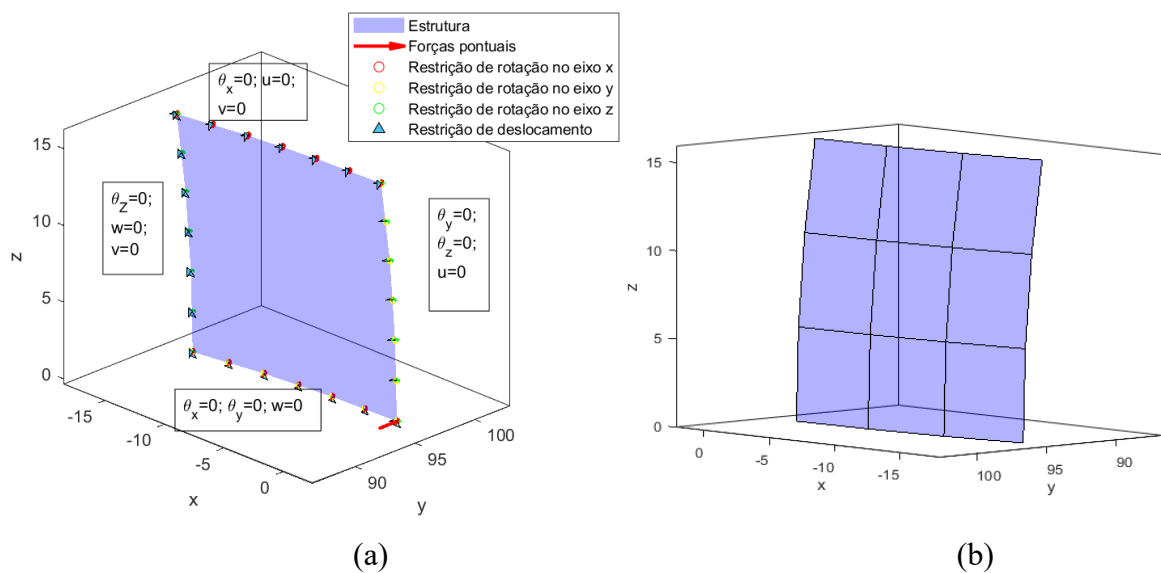


Figura 6.9 – (a) Condições de contorno de simetria. (b) Malha utilizada para obtenção dos resultados.

Para o deslocamento radial no ponto de aplicação da carga é obtido um valor de 0,038575 pol (0,9798 mm) que se aproxima bastante do resultado de 0,038661 pol (0,09819 mm) obtido por Rao, 1997 e ao resultado de 0,03867 pol (0,9822 mm) obtidos por Yang, 1973.

Também é feita uma análise de convergência que tem seus resultados apresentados na Figura 6.10 e na Tabela 6.6.

Tabela 6.6 – Comparativo entre os resultados obtidos com o software ANSYS 17.0 e com o programa desenvolvido.

Número de elementos por lado	Deslocamentos (pol × 10)	
	ANSYS 17.0	Programa desenvolvido
4	0,3838	0,3834
8	0,3912	0,3904
16	0,4021	0,4021
32	0,4044	0,4043
64	0,4051	0,4050
128	0,4054	0,4054

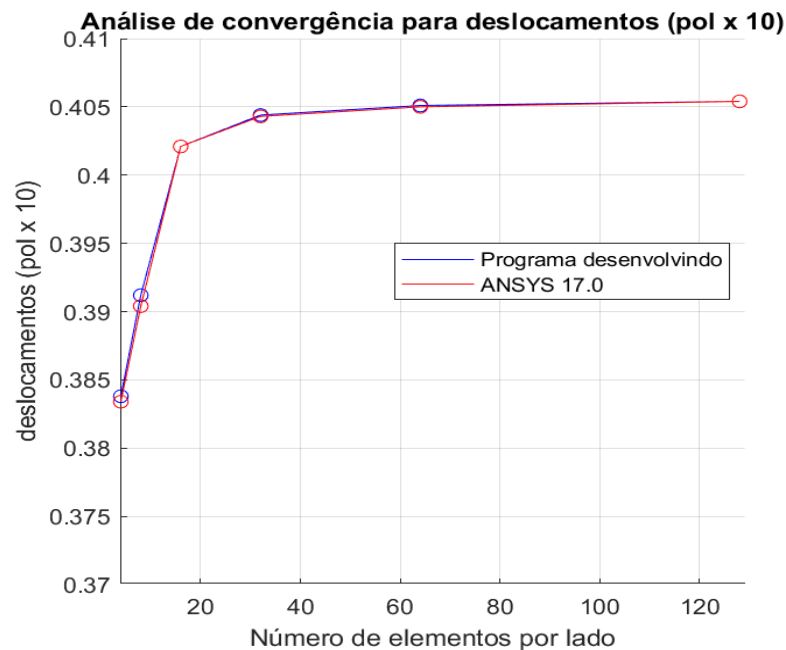


Figura 6.10 – Análise de convergência e comparação entre o resultado obtido pelo programa desenvolvido e os obtidos com o *software* Ansys 17.0.

A fim de validar o programa desenvolvido quanto a análise de tensões e deformações, também foram realizadas duas análises para esta mesma geometria. Foi empregado um material ortotrópico de mesma espessura com propriedades  $E_1 = 4000140$  psi (27500 MPa),  $E_2 = 1800063$  psi (12411 MPa),  $G_{12} = 1000035$  psi (6895 MPa) e  $\nu_{12} = 0,52$ . Os compostos têm todas as camadas de mesma espessura somando um total de 0,4 pol (1 mm) e empilhamentos



[0°/45°/0°] e [0°/45°/90°]. É utilizada uma malha de  $32 \times 32$  elementos e são comparadas as tensões máximas e mínimas em cada uma de suas três camadas. O carregamento é mantido o mesmo do caso isotrópico já apresentado.

Estas tensões são avaliadas como médias dos pontos de Gauss (tanto no programa desenvolvido quanto no ANSYS 17.0) no plano médio em cada camada.

Os resultados de tensão obtidos com o *software* desenvolvido e os obtidos ANSYS 17.0 estão organizados na Tabela 6.7 e Tabela 6.8 representa a diferença percentual entre os resultados obtidos com os softwares utilizados.

Tabela 6.7 – Tabela comparativa entre as tensões obtidas com o *software* comercial ANSYS 17.0 e as obtidas com o programa desenvolvido

		Tensões	Tensão máxima (Psi)			Tensão Mínima (Psi)		
			Primeira camada	Segunda camada	Terceira Camada	Primeira camada	Segunda camada	Terceira Camada
[0°/45°/0°]	ANSYS 17.0	$\sigma_x$	641,133	48,563	27,655	-152,239	-136,53	-921,14
		$\sigma_y$	432,71	-0,3683	14,044	-87,334	-89,610	-599,12
		$\tau_{xy}$	76,743	25,300	29,631	1,405	-34,767	-51,125
	Programa	$\sigma_x$	640,545	48,441	27,605	-152,120	-135,140	-917,110
		$\sigma_y$	435,23	-0,3882	14,018	-87,334	-88,873	-599,630
		$\tau_{xy}$	76,675	25,367	29,677	1,402	-34,839	-50,802
[0°/45°/90°]	ANSYS 17.0	$\sigma_x$	546,280	48,765	27,393	-149,490	-161,780	-851,890
		$\sigma_y$	470,310	1,439	14,071	-91,401	-110,640	-624,590
		$\tau_{xy}$	78,629	109,64	53,259	1,334	-35,423	-27,467
	Programa	$\sigma_x$	548,190	48,735	27,312	-149,570	-160,820	-850,170
		$\sigma_y$	471,330	1,425	13,994	-91,317	-110,110	-623,57
		$\tau_{xy}$	78,644	109,610	52,724	1,336	-35,448	-27,413

Tabela 6.8 – Tabelas com diferenças entre percentuais entre os resultados obtidos com o *software* ANSYS 17.0 e os obtidos com o programa desenvolvido

Empilhamento	Tensões	Diferenças percentuais para tensão máxima (%)			Diferenças percentuais para tensão mínima (%)		
		Primeira camada	Segunda camada	Terceira Camada	Primeira camada	Segunda camada	Terceira Camada
[0°/45°/0° ]	$\sigma_x$	0,091	0,251	0,180	0,0781	1,018	0,437
	$\sigma_y$	0,582	5,403	0,185	0	0,822	0,085
	$\tau_{xy}$	0,088	0,264	0,155	0,213	0,207	0,631
[0°/45°/90° ]	$\sigma_x$	0,349	0,061	0,296	0,053	0,593	0,201
	$\sigma_y$	0,216	0,972	0,547	0,091	0,479	0,163
	$\tau_{xy}$	0,0190	0,0273	1,004	0,149	0,0705	0,196

## 7 PARAMETRIZAÇÃO DA ORIENTAÇÃO DAS FIBRAS

Uma característica essencial a um material laminado composto com orientação de fibras variável, é que elas sigam padrões que tornem a fabricação do material viável. Se a área da estrutura projetada for grande, é possível dividi-la em regiões de mesma orientação de fibras e fabricar “retalhos” de lâminas com reforços na orientação determinada pelo projetista para cada uma destas regiões, como proposto por Stegmann e Lund, 2005. Outra abordagem, consiste em definir a orientação das fibras em função de parâmetros que gerem padrões suaves, como os coeficientes que controlam superfícies cujas tangentes de suas curvas de nível representam a posição das fibras em determinado ponto do composto, como visto em Honda et al., 2013, e Arsenyeva et al., 2016.

Em geometrias fechadas ou irregulares, começam a surgir desafios relativos à utilização de superfícies parametrizadas e a sua capacidade de gerar padrões de fibras contínuas nestas situações.

Neste trabalho são propostas duas técnicas que mantêm o uso de uma superfície parametrizada para a determinação da orientação das fibras. Entretanto, sua definição está atrelada à geometria da malha de elementos finitos utilizada para a análise estrutural, fazendo com que seja possível utilizar as funções de forma para garantir a continuidade das fibras entre os elementos finitos adjacentes.

Apesar das suas diferenças, ambos os métodos apresentados nesta dissertação têm como ponto comum a designação de um peso ( $\psi$ ) para cada nó da malha de elementos finitos analisada. Este valor pode ser definido por uma função  $f$  apresentada de forma genérica na Equação 7.1.

$$\psi_n(x_n, y_n, z_n) = f(x, y, z)_{x=x_n, y=y_n, z=z_n} \quad (7.1)$$

onde  $x_n$ ,  $y_n$  e  $z_n$  são as coordenadas de um nó qualquer da malha.

Estes pesos nodais servem como parâmetros para gerar a superfície que determinará os padrões de orientação das fibras conforme as técnicas descritas nas Seções 7.4.1 e 7.4.2 apresentadas neste capítulo.

A função selecionada para este trabalho e detalhes sobre sua aplicação no âmbito deste estudo serão apresentados na Seção 7.3.

A Seção 7.1 trata sobre a uniformização dos sistemas de coordenadas das lâminas para os elementos finitos de casca e a Seção 7.2 tem como objetivo mostrar a capacidade de o código de elementos finitos desenvolvido replicar resultados de padrões de fibras de orientação variável presentes na literatura.

A Seção 7.5 apresenta as ferramentas gráficas utilizadas para a geração das imagens dos padrões curvilíneos de fibras obtidos.

## 7.1 Uniformização do sistema de coordenadas das fibras

Os sistemas de coordenadas das fibras dependem da conectividade dos nós e de suas coordenadas no espaço. Para uma malha regular e plana, normalmente, todos os sistemas de coordenadas locais tendem a ficar iguais. Porém, quando a malha se torna irregular ou quando se está trabalhando com uma estrutura no espaço, estes sistemas podem variar de elemento para elemento.

Para um material isotrópico com pequenos deslocamentos, isso só se torna um problema na representação das tensões em coordenadas locais. Porém, para um material ortotrópico reforçado por fibras as transformações da matriz constitutiva para a direção do material são feitas em relação aos sistemas de coordenadas das fibras. Conseqüentemente, as direções pretendidas pelo usuário podem não ser atingidas caso alguma das condições citadas acima esteja presente.

Visando uniformizar os sistemas de coordenadas locais, modifica-se a definição do vetor unitário  $e_1^l$ , pelo qual se define a direção principal do material conforme se segue:

1) Se  $e_{3,3}^l \neq 0$ :

Neste caso, o plano local não é perpendicular ao plano x-y global. Logo, convencionase que  $\{e_1^f\}$  está contido no plano x-z e apontando na direção positiva do eixo x. A nova definição de  $\{e_1^f\}$  dá-se da seguinte forma.

$$\{e_1^l\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta^2}} \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta^2}} \right\}^T, \text{ onde } \Delta = \frac{-e_{3,1}^l}{e_{3,3}^l} \quad (7.2)$$

2) Se  $e_{3,3}^l = 0$ :

Quando configurada a situação acima, o plano local é perpendicular ao plano x-y global e o vetor  $\{e_1^f\}$  pode ser definido de acordo com duas condições.

- a) Se  $e_{3,2}^l = 0$ . O plano local é paralelo ao plano y-z global fazendo com que a direção de  $\{e_1^l\}$  coincida com a direção do vetor cartesiano global  $\{e_3\}$ . O sentido é dado pelo sinal da componente  $e_{3,1}^l$ , caso  $e_{3,3}^l \leq 0$  têm-se  $\{e_1^l\} = \{e_3\}$ , se  $e_{3,1}^l > 0$  têm-se  $\{e_1^l\} = -\{e_3\}$
- b) Se  $e_{3,2}^l \neq 0$ . O plano local não é paralelo ao plano y-z global. A interseção entre o plano local e o plano x-y global define a direção do vetor  $e_1^l$ . Sua definição nesse caso se dá abaixo.

$$\{e_1^l\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta^2}} \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta^2}} \quad 0 \right\}^T, \text{ onde } \Delta = \frac{-e_{3,1}^l}{e_{3,3}^l} \quad (7.3)$$

Esta correção foi implementada no código em MATLAB para o adequado tratamento da definição de ângulos de fibras pelo usuário e seu posicionamento no modelo de elementos finitos. No programa de elementos finitos ANSYS 17.0, na linguagem de programação APDL, é necessário definir um sistema de coordenadas de referência, sem o qual a orientação das fibras do composto não ficará uniforme ou não seguirá o padrão desejado pelo usuário.

## 7.2 Avaliação de padrões curvilíneos com o *software* desenvolvido

Com a correção do sistema de coordenadas mostrada na seção 7.1, conclui-se o desenvolvimento da ferramenta de análise estrutural. A presente seção tem como objetivo aplicar padrões curvilíneos de fibras obtidos por outros autores no *software* desenvolvido com o objetivo de verificar a capacidade de produzir resultados numéricos próximos aos obtidos na literatura e por um *software* comercial para características dinâmicas (frequências naturais).

Honda et al., 2013, apresentam configurações curvilíneas desenvolvidas em placas onde a definição do ângulo é feita a partir das tangentes às curvas de nível de uma função cúbica polinomial definida sobre a área de placas discretizadas por elementos finitos isoparamétricos de oito nós. A posição da fibra em cada elemento finito é descrita pela Equação 2.1 e é definida pela tangente às curvas de nível avaliada no centroide do elemento.

Dois dos casos estudados consistem em otimizações multiobjetivo que visam a minimização da primeira frequência natural e de uma curvatura média. Tendo como variáveis de projeto os coeficientes da função polinomial apresentada na Equação (7.4), que é definida no sistema de coordenadas globais.

$$f(x, y) = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 + c_{03}y^3 \quad (7.4)$$

O material utilizado é um composto de grafite e epóxi com as seguintes propriedades:  $E_1 = 138$  GPa,  $E_2 = 8,96$  GPa,  $G_{12} = 7,10$  GPa  $\nu_{12} = 0,3$  e  $\rho = 1578$  kg/m<sup>3</sup>.

Como autores fornecem todos os coeficientes polinomiais necessários para a geração dos padrões curvilíneos obtidos, reproduziu-se tanto a técnica de parametrização descrita no trabalho quanto as malhas de elementos finitos utilizadas nos estudos, possibilitando que os resultados da análise estrutural realizada no *software* desenvolvido pudessem ser comparados com os obtidos por Honda et al., 2013 e a simulações realizadas no software comercial ANSYS 17.0 com as mesmas trajetórias de fibras apresentadas no trabalho de Honda et al., 2013.

A aplicação dos padrões curvilíneos apresentados por Honda et al., 2013 no *software* ANSYS 17.0 foi possível com a utilização da linguagem APDL em conjunto com uma biblioteca desenvolvida na linguagem Python (*pyansys*), que funciona como uma API e permite que os modelos de elementos finitos presentes no ANSYS 17.0 sejam integrados a programas desenvolvidos em Python. Esta biblioteca permitiu que os ângulos de fibras provenientes da técnica de parametrização proposta por Honda et al., 2013 (desenvolvida também em Python para esse propósito) fossem diretamente aplicados na malha de elementos finitos analisada pelo ANSYS 17.0.

As frequências naturais são adimensionalizadas e tomam a forma:

$$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D_0} \quad (7.5)$$

onde  $D_0 = E_2 h^3 / [12(1 - \nu_{12}\nu_{21})]$ .

Nos itens 7.2(a) e 7.2(b) valores de frequência natural de três pontos da fronteira de Pareto obtida pelos autores são comparados com os valores de frequência resultantes da aplicação das mesmas orientações de fibras que originam esses valores no software desenvolvido e no ANSYS 17.0 sendo organizados em tabelas para facilitar a comparação.

### (a) Placa completamente engastada

Este exemplo traz uma placa de material composto discretizada por 100 elementos finitos e constituída por 8 camadas simétricas  $[(+\theta/-\theta)_2]_s$  e completamente engastada nos quatro bordos. A placa é quadrada, possui comprimento e largura de 0,1 m e todas as camadas têm igual espessura somando um total de 1 mm. A Tabela 7.1 mostra os resultados de frequência natural adimensional obtidos por Honda et al., 2013 ao lado dos valores obtidos com software desenvolvido e aos obtidos com o ANSYS.

Tabela 7.1– Resultados para  $\Omega$  obtidos por Honda et al., 2013 no programa desenvolvido e no software comercial ANSYS 17.0.

Ponto	Honda et al., 2013	Programa desenvolvido	ANSYS 17.0
Ponto 1	93,08	93,23	92,75
Ponto 2	95,64	95,81	95,34
Ponto 3	103,9	104,08	104,12

### (b) Placa Engastada-Apoiada-Livre-Livre

Este exemplo traz uma placa de material composto semelhante a utilizada no item 7.2(a) tendo somente sua condição de contorno alterada. A Tabela 7.2 mostra os resultados de frequência natural adimensional obtidos por Honda et al., 2013 ao lado dos valores obtidos com software desenvolvido e aos obtidos com o ANSYS.

Tabela 7.2 – Resultados para  $\Omega$  obtidos por Honda et al., 2013, com o programa desenvolvido e com o *software* comercial ANSYS 17.0.

Ponto	Honda et al., 2013	Programa desenvolvido	ANSYS 17.0
Ponto 1	17,13	19,14	19,12
Ponto 2	19,41	22,18	22,15
Ponto 3	19,72	22,95	22,92

As condições de contorno utilizadas por Honda et al., 2013 e os coeficientes obtidos no trabalho desenvolvido pelos autores que foram utilizados nesta seção se encontram no ANEXO I.

### 7.3 Geração dos pesos nodais por funções interpoladoras geradas por pontos de controle

Como apresentado na parte inicial deste capítulo, os pesos nodais podem ser definidos por uma função em termos das coordenadas dos nós. Esta seção tem como objetivo apresentar alguns dos caminhos que foram seguidos no desenvolvimento do trabalho e a aplicação da função escolhida (interpolação por funções de base radial).

Inicialmente, ponderou-se utilizar um polinômio de forma semelhante à utilizada por Honda et al., 2013 e descrita na Seção 7.2, onde as superfícies são geradas por um polinômio de terceiro grau e sua variação é feita através da manipulação dos coeficientes deste. Entretanto, sua aplicabilidade a geometrias mais complexas se mostrou bastante limitada, se resumindo a formas planas, cilíndricas ou esféricas (que podem ter uma das dimensões facilmente parametrizadas em relação as outras duas).

Buscando a extensão do uso dos métodos propostos para estruturas mais genéricas, buscaram-se algoritmos que gerassem superfícies de interpolação tridimensionais. Para conectar essas funções a geometria da estrutura em análise, são distribuídos pontos pela superfície da malha e a eles são atribuídos valores peso de referência. Doravante, estes pontos serão denominados pontos de controle ( $P_c$ ) e um exemplo da sua distribuição em uma malha de elementos finitos é apresentado na Figura 7.3.

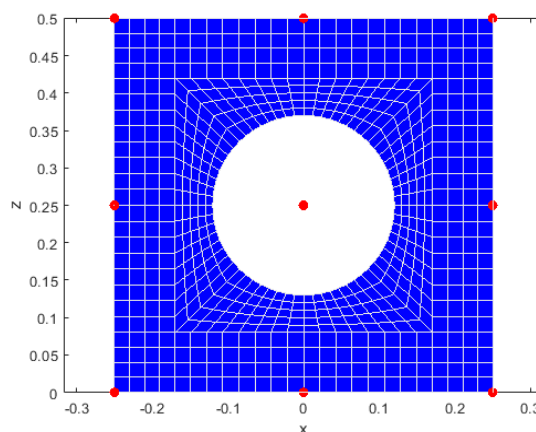


Figura 7.1 – Pontos de controle sobre a malha de elementos finitos empregada.

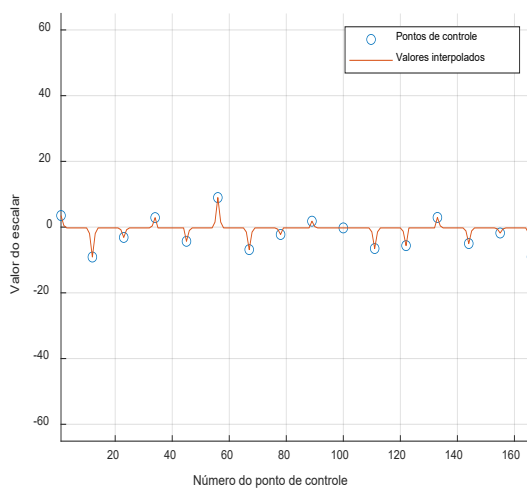


Esse conjunto de valores discretos permite construir uma função interpolante  $s(x, y, z)$  a partir dos valores atribuídos aos pontos de controle e de suas coordenadas. Cada um dos nós é avaliado nesta função e o valor resultante será designado como peso nodal para este mesmo nó. Logo, pode-se escrever a Equação 7.1 de forma mais específica como:

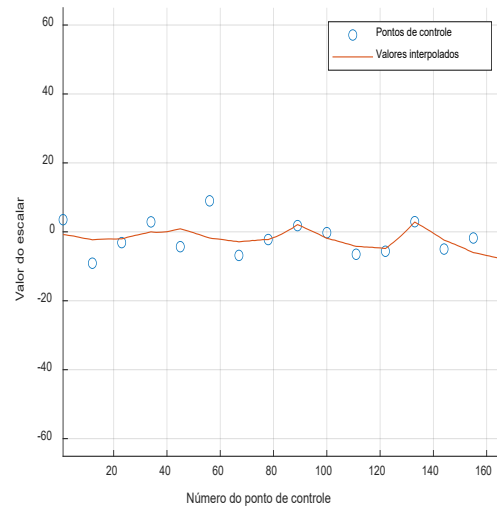
$$\psi_n(x_n, y_n, z_n) = s(x, y, z)|_{x=x_n, y=y_n, z=z_n} \quad (7.6)$$

onde  $x_n, y_n, z_n$  são coordenadas de um nó que são avaliadas na função de interpolação  $s$  para gerar os pesos nodais  $\psi_n$ .

Dentre os métodos de interpolação, foi selecionada a rede neural de base radial como uma primeira tentativa. Para a montagem da rede neural, foi utilizado o algoritmo nativo do pacote MATLAB R2020b “*newrb*”. Este algoritmo possui um fator de espalhamento (*spread*) que determina a área de influência de um neurônio no espaço de soluções e deve ser selecionado de forma tal que os neurônios próximos influenciem uns aos outros, mas que essa influência não se dê de forma excessiva em toda região abrangida pelos neurônios, sob pena de eles sempre retornarem o mesmo valor. A Figura 7.2 ilustra este comportamento frente ao valor do *spread* para a interpolação dos pontos de controle.



(a)



(b)

Figura 7.2 – (a) Efeitos do valor do *spread* baixo e (b) do valor elevado na função interpolada.

Não existe um valor ótimo para o *spread*, sendo necessária uma série de testes para encontrar o valor que melhor se ajuste ao problema. Neste trabalho, como os pontos são distribuídos de forma regular, foi medida a diagonal do quadrilátero formado pelos pontos adjacentes e feitos testes com ajustes em torno desse valor. Bons resultados foram obtidos para algumas distribuições de pontos, mas o coeficiente de espalhamento se mostrou um fator bastante inconstante e difícil de se estimar com a variação do número de pontos de controle.

Por fim, optou-se por utilizar somente a interpolação por funções de base radial (RBF, *Radial Basis Function*), utilizando o mesmo sistema de pontos de controle apresentado. Estas funções possuem como vantagens retornarem o valor do peso de referência quando avaliadas nas coordenadas dos pontos de controle, facilitando prever o comportamento da interpolante aplicada ao problema, e o fato de serem capazes de lidar com pontos esparsos, sem necessidade de estes serem equidistantes ou organizados em uma malha regular (*grid*).

O *software* utilizado para a interpolação dos valores entre os pontos de controle foi encontrado em um repositório disponível *on-line* (Chirokov, 2020). Foi selecionada uma função de base radial cúbica de suporte global (Equação 7.7) para gerar uma função interpoladora de boa precisão e eliminando a necessidade de se definir um raio de influência como no suporte compacto, que se assemelharia muito ao fator de espalhamento. Como nos estudos apresentados neste trabalho foram utilizados poucos pontos de controle, o custo computacional inerente ao uso de funções de suporte global não se torna aparente. Mais detalhes sobre a formulação de funções de interpolação de base radial e os conceitos apresentados acima podem ser encontrados no ANEXO B.

$$\varphi(r) = r^3 \quad (7.7)$$

O software utilizado para a construção das funções de interpolação utiliza o equacionamento apresentado da Equação B.1 a B.5 do ANEXO B. A forma final da equação que gera os pesos nodais está apresentada na Equação 7.8:

$$\psi_n(x_n, y_n, z_n) = \sum_{i=1}^3 \gamma_i \varphi \left( \left\| n_i \begin{Bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \dim(\{P_{C_i}\}) \end{Bmatrix} - \{P_{C_i}\} \right\| \right) + h(x) \quad (7.8)$$

onde  $n_1, n_2, n_3$  representam as coordenadas  $x, y$  e  $z$  de um nó qualquer da malha de elementos finitos. Esses valores são replicados em um vetor com dimensão equivalente à do vetor  $\{Pc_i\}$ . Este procedimento tem como objetivo avaliar as distâncias entre a coordenada  $n_i$  e cada uma das coordenadas dos pontos de controle. Os pesos  $\gamma$  e os coeficientes  $\beta$  do polinômio podem ser obtidos pela solução do sistema abaixo.

$$\begin{bmatrix} [M] & [P_s] \\ [P_s^T] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Pc \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.9)$$

onde os termos  $[M]$  e  $[P_s]$  são descritos pelas equações 7.10 e 7.11.

$$M_{ij} = \varphi(\|Pc_i - Pc_j\|), 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N \quad (7.10)$$

$$[P_s] = \begin{bmatrix} x_{Pc_1} & y_{Pc_1} & z_{Pc_1} \\ x_{Pc_2} & y_{Pc_2} & z_{Pc_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{Pc_N} & y_{Pc_N} & z_{Pc_N} \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

onde  $x_{Pc}$ ,  $y_{Pc}$  e  $z_{Pc}$  são coordenadas dos pontos de controle.

## 7.4 Discretização das direções das fibras

Selecionada a função e desenvolvido um processo que permita descrever seu comportamento em termos da geometria da estrutura em análise, prossegue-se com a apresentação das técnicas que, a partir das superfícies parametrizadas, irão definir valores de ângulos discretos nos pontos de Gauss de cada elemento finito da malha analisada.

### 7.4.1 Método dos gradientes de um campo escalar (GCE)

Nesta proposta, os pesos  $\psi$  são utilizados em conjunto com as funções de forma  $N$  do elemento finito bidimensional para gerar um campo escalar. Os gradientes destas funções de forma são avaliados nos pontos de Gauss e representam a direção da fibra neles. Esta proposta

permite aproveitar a formulação já presente do problema de elementos finitos facilitando sua implementação. As funções de forma do elemento se encontram no ANEXO A.

Através das Equações 7.12 e 7.13, é possível obter a derivada das funções de forma em relação as coordenadas naturais  $\xi$  e  $\eta$  em um dado ponto, neste caso, o ponto de integração de Gauss.

$$\frac{\partial \psi_{int}}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{nne} \psi_i \frac{\partial N}{\partial \xi} \quad (7.12)$$

$$\frac{\partial \psi_{int}}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{nne} \psi_i \frac{\partial N}{\partial \eta} \quad (7.13)$$

onde  $\psi_{int}$  é o peso em um ponto de Gauss do elemento,  $\psi_i$  é o peso nodal de um nó  $i$  qualquer e  $N_i$  representa as funções de forma avaliadas nas coordenadas naturais do mesmo nó  $i$ .

Com estas derivadas é possível montar o vetor gradiente das funções de forma no sistema de coordenadas naturais conforme a equação 7.14.

$$\left\{ \frac{\partial \psi_{int}}{\partial \xi} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_{int}}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \psi_{int}}{\partial \xi_2} \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ onde } \xi_1 = \xi, \xi_2 = \eta \quad (7.14)$$

Prossegue-se com a transformação isoparamétrica para o sistema de coordenadas globais, como de praxe, através da inversa da Equação 5.75, ou seja, a inversa da matriz jacobiana.

$$\left\{ \frac{\partial \psi_{int}}{\partial \vec{x}} \right\} = [J]^{-1} \left\{ \frac{\partial \psi_{int}}{\partial \vec{\xi}} \right\} \quad (7.15)$$

O vetor da resultante da equação 7.15 é então normalizado como mostrado na equação 7.16.

$$\{e_{\psi_{int}}\} = \frac{\left\{ \frac{\partial \psi_{int}}{\partial \vec{x}} \right\}}{\left\| \left\{ \frac{\partial \psi_{int}}{\partial \vec{x}} \right\} \right\|} \quad (7.16)$$

O vetor  $\{e_{\psi_{int}}\}$  é rotacionado  $90^\circ$  em torno do vetor  $\{e_3^l\}$  e o ângulo da fibra em cada ponto de Gauss é tomado entre o vetor  $\{e_{\psi_{int}}\}$  rotacionado e o vetor  $\{e_1^l\}$ , ajustado pelo método descrito na Seção 7.1. Essa rotação é feita através da fórmula de Rodrigues, descrita na Equação 7.17, que rotaciona um vetor  $v$  qualquer em um ângulo de  $\alpha$  ao redor de um vetor unitário  $k$ , que descreve um eixo de rotação.

$$v_{rot} = v \cos(\alpha) + (k \times v) \sin(\alpha) + k(k \cdot v)(1 - \cos(\alpha)) \quad (7.17)$$

O cálculo do ângulo da fibra no ponto de Gauss é apresentado nas Equações 7.18 e 7.19.

$$\theta_p = -\text{sinal}(dir) \arccos \left( \frac{\{e_{\psi_{int}}\} \cdot \{e_1^l\}}{\left\| \{e_{\psi_{int}}\} \right\| \left\| \{e_1^l\} \right\|} \right) \quad (7.18)$$

Onde:

$$dir = \arccos(\{e_3^l\} \cdot (\{e_{\psi_{int}}\} \times \{e_1^l\})) \quad (7.19)$$

A Equação 7.18 tem seu sinal utilizado para definir a direção dos ângulos da fibra no ponto de Gauss.

A rotação de  $\{e_{\psi_{int}}\}$  é feita porque os gradientes tendem a formar padrões radiais que saem do interior da estrutura e se propagam para suas fronteiras, como neste trabalho buscam-se padrões curvilíneos suaves que se desenvolvam no interior da estrutura, o vetor é rotacionado para ficar perpendicular ao gradiente. Esta rotação está ilustrada na Figura 7.3 que apresenta uma configuração obtida com pontos de controle aleatórios ao lado da mesma rotacionada.

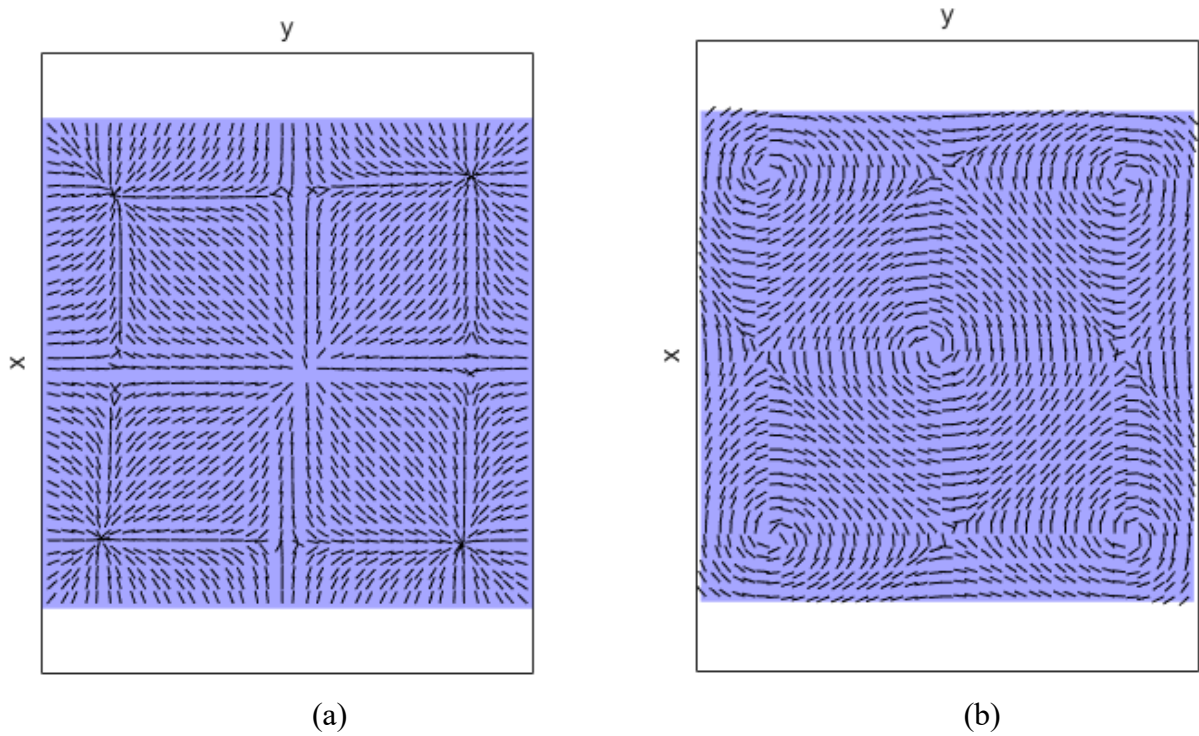


Figura 7.3 – (a) Configuração não rotacionada. (b) Configuração com rotação de 90°.

Para demonstrar os resultados do método em uma estrutura, impõe-se um vetor de números aleatórios  $v_r = \{1,9081; 0,7426; -0,2653; 0,9405; 1,4464; 0,6946; 1,2674; -0,5821; 0,8049\}$  a nove pontos de controle distribuídos na superfície de um parabolóide. A configuração resultante da aplicação do método desenvolvido com os pontos de controle assumidos se encontra na Figura 7.4.

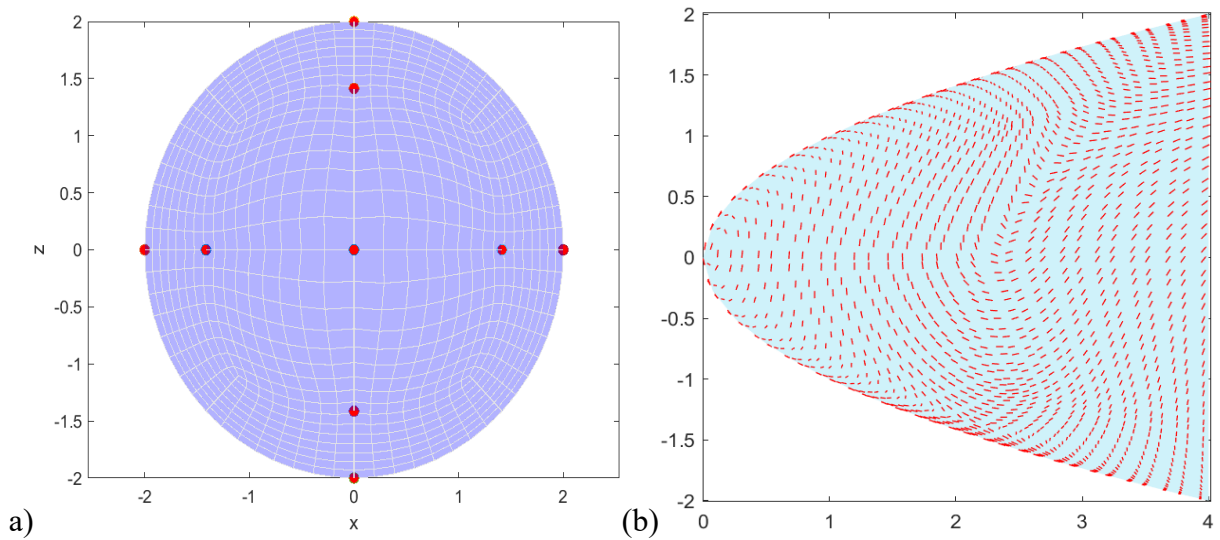


Figura 7.4 – a) Pontos de controle distribuídos na superfície de um parabolóide; (b) Configuração de fibras obtida pelo uso dos pontos de controle prescritos com o método GCE.

#### 7.4.2 Método da projeção dos vetores normais a uma malha parametrizada (PVN)

Nesta técnica, os pesos nodais  $\psi$  são utilizados para gerar uma malha envoltória através da prescrição de deslocamentos nodais normais a superfície da malha de elementos finitos. Os deslocamentos prescritos em um nó  $n$  são definidos como:

$$\begin{Bmatrix} u_{mev} \\ v_{mev} \\ w_{mev} \end{Bmatrix} = \psi_n \{e_{3n}^f\} \quad (7.20)$$

onde  $\{e_{3n}^f\}$  é a componente do sistema de coordenadas das fibras normal à superfície do elemento finito, representada pela Equação 5.30, e  $u_{mev}$ ,  $v_{mev}$  e  $w_{mev}$  são os deslocamentos em  $x$ ,  $y$  e  $z$  que geram a malha envoltória. Eles são prescritos nos nós da malha de elementos finitos como apresentado na Equação 7.21.

$$\begin{Bmatrix} x_{nmev} \\ y_{nmev} \\ z_{nmev} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_{mev} \\ v_{mev} \\ w_{mev} \end{Bmatrix} \quad (7.21)$$

Na Equação (7.21),  $x_n$ ,  $y_n$  e  $z_n$  são as coordenadas de um nó  $n$  da malha de elementos finitos enquanto  $x_{n_{mev}}$ ,  $y_{n_{mev}}$  e  $z_{n_{mev}}$  são as coordenadas de um nó  $n$  da malha envoltória gerada. A Figura 7.5 ilustra um exemplo malha envoltória distorcida e a malha de elementos finitos.

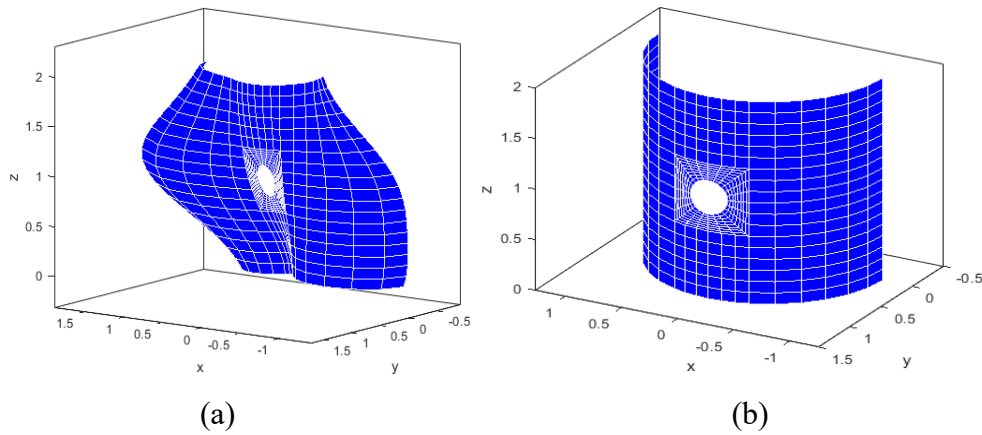


Figura 7.5 – (a) Malha envoltória (b) Malha original de elementos finitos.

A malha envoltória mantém as conectividades e numeração entre os nós da malha de elementos finitos. A direção das fibras nos pontos de Gauss da malha de elementos finitos é obtida através da projeção dos vetores  $\{e_3^{l_{env}}\}$ , que são as componentes normais da base que representa o sistema de coordenadas da lâmina da malha envoltória, nos planos aos quais os vetores  $\{e_3^{l_{ele}}\}$  são normais. A projeção descrita acima é representada pela Equação (7.22). A origem do vetor resultante dela se encontra nos pontos de Gauss e o resultado é esquematizado na Figura 7.6.

$$\{proj_{e_3^{l_{env}}}\} = \{e_3^{l_{env}}\} - \frac{\{e_3^{l_{env}}\} \cdot \{e_3^{l_{ele}}\}}{\|\{e_3^{l_{env}}\}\|^2} \{e_3^{l_{env}}\} \quad (7.22)$$

A mesma rotação realizada na Seção 7.4.1 é realizada para correção de padrões radiais e os ângulos das fibras são tomados entre os vetores corrigidos  $\{proj_{e_3^{l_{env}}}\}$  e os vetores corrigidos  $e_1^l$ .



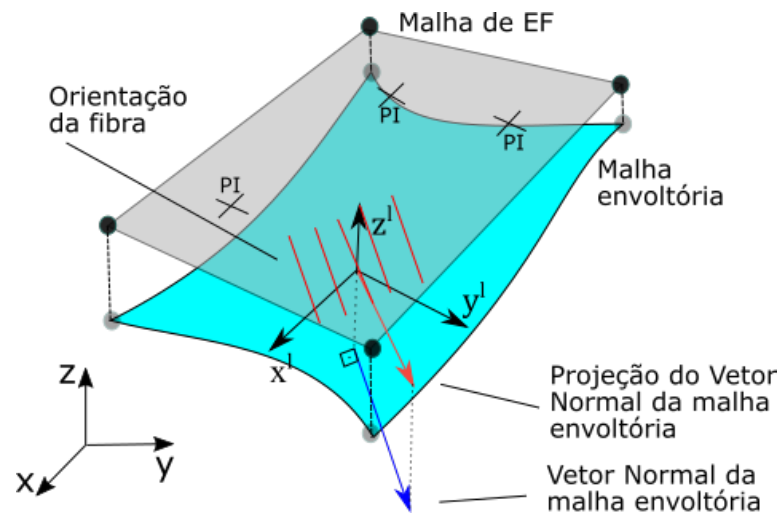


Figura 7.6 – Representação dos vetores utilizados na determinação da direção da fibra no ponto de Gauss do elemento finito.

Os ângulos das fibras nos pontos de Gauss são avaliados conforme as Equações 7.23 e 7.24.

$$\theta_p = -\text{sinal}(\text{dir}) \arccos \left( \frac{\{proj_{e_3^{l_{env}}}\} \cdot \{e_1^l\}}{\|\{proj_{e_3^{l_{env}}}\} \cdot \{e_1^l\}\| \|\{e_1^l\}\|} \right) \quad (7.23)$$

onde:

$$\text{dir} = \arccos \left( \{e_3^l\} \cdot \left( \{proj_{e_3^{l_{env}}}\} \times \{e_1^l\} \right) \right) \quad (7.24)$$

A Figura 7.7 apresenta a malha envolvente distorcida e a configuração de fibras gerada pelo método PVN usando o mesmo vetor  $v_r$  e mesmos pontos de controle utilizados para demonstrar um padrão de fibras gerado pelo método GCE.

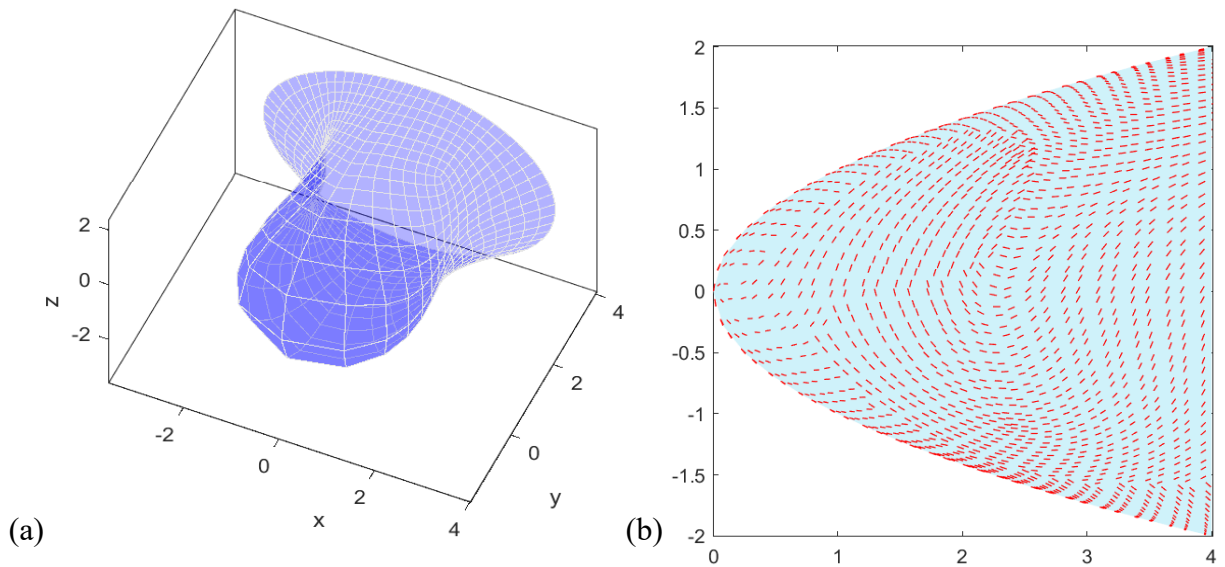


Figura 7.7 – (a) Malha envoltória; (b) configuração de fibras obtida com o método PVN.

## 7.5 Representações gráficas das fibras

Um recurso interessante na análise de laminados compostos com orientação variável de fibras é a representação gráfica dos padrões formados por elas, pois a visualização destes permite tirar conclusões acerca de sua coerência com a função objetivo, sua viabilidade, continuidade entre as fibras e outras características.

Neste trabalho, foram utilizados dois recursos gráficos diferentes para visualizar esses padrões. Um deles, consiste em ilustrar a posição das fibras diretamente nos seus respectivos pontos de Gauss e o outro em utilizar as mesmas funções de base radial descritas na Seção (7.3) e no ANEXO B.

A primeira técnica é executada imprimindo diretamente vetores que representam a direção da fibra em cada ponto de Gauss transformados para o sistema de coordenadas global. Esses vetores são obtidos por uma rotação de  $\theta_p$  do vetor corrigido  $\{e_1^l\}$  em torno do vetor  $\{e_3^l\}$  utilizando a fórmula de Rodrigues já apresentada na Equação 5.17, que, para este objetivo, pode ser reescrita para um ponto de Gauss  $p$  como:

$$v_p = \{e_{1p}^l\} \cos(\theta_p) + \left( \{e_{3p}^l\} \times \{e_{1p}^l\} \right) \sin(\theta_p) + \{e_{3p}^l\} \left( \{e_{3p}^l\} \cdot \{e_{1p}^l\} \right) (1 - \cos(\theta_p)) \quad (7.25)$$

Esses vetores são organizados em uma matriz assim como as coordenadas globais dos pontos de Gauss para serem aplicados na função “*quiver3*” da linguagem MATLAB R2020b. Esta função desenha esses vetores como segmentos de reta no espaço. Este método de visualização gera os padrões das Figuras 7.4 e 7.7.

A segunda forma utilizada neste trabalho exige que uma nuvem de pontos seja criada sobre a estrutura, pois a função “*streamline*” da linguagem MATLAB R2020b exige que os pontos utilizados para definir as origens do campo vetorial estejam ordenados. Logo, para possibilitar o uso dessa função, distribui-se pontos de forma uniforme na superfície da estrutura, e utiliza-se as RBF para interpolar os componentes dos vetores  $\{e_{\psi_{int}}\}$  ou  $\{proj_{e_3}^{l_{env}}\}$  nestes pontos que serão utilizados para gerar essa nuvem. Com as coordenadas dos pontos e os vetores interpolados nelas, pode-se usar a função “*streamline*” para gerar padrões contínuos de fibras. No entanto, esta função serve somente para propósitos visuais, não podendo ser utilizada como um guia para fabricação. Ainda é importante ressaltar que, neste trabalho, este método ainda está restrito à visualização dos padrões em um plano bidimensional. A maior densidade de linhas em um local não significa a maior densidade de fibras em determinada região, mas sim apenas a orientação das fibras naquele local. A densidade das fibras é a mesma em toda estrutura.

Estudos referentes a possibilidade de transportar esse método para estruturas tridimensionais ficam como objetivo para trabalhos futuros.

## 8 RESULTADOS DAS OTIMIZAÇÕES MONO E MULTIOBJETIVO

Foram testados diversos problemas, alguns já presentes na literatura e outros propostos para este trabalho. Os métodos desenvolvidos foram programados *in-house* em linguagem de programação MATLAB R2020b assim como o programa de elementos finitos já validado.

Em todos os casos, a parametrização dos padrões de orientação das fibras foi feita conforme apresentado nas Seções 7.3 e 7.4. Os pontos de controle citados no decorrer deste capítulo são os mesmos descritos na Seção 7.4, sendo utilizados para a formação da função RBF que parametrizará as os padrões de fibras.

Os pontos de controle descritos na Seção 7.3 são utilizados como variáveis de projeto no processo de otimização sendo atualizados a cada iteração e os algoritmos de otimização utilizados são o PSO tradicional síncrono e o MPQSO. Para acelerar o processamento, foram utilizadas versões paralelizadas de ambos os algoritmos.

Foram realizados múltiplos estudos com diferentes números de pontos de controle e população para cada caso estudado.

Para os casos monoobjetivo referentes a cascas curvas, os melhores resultados encontrados dentre as rodadas são então selecionados e, acrescidos de um pequeno ruído, utilizados como estimativa inicial para uma segunda otimização refinando assim os resultados obtidos. Este refinamento é feito para atingir o melhor resultado na região da solução para este caso que tende a ser mais custoso computacionalmente. O diagrama do processo de otimização monoobjetivo está descrito na Figura 8.1.

A inicialização das partículas se dá pela inserção de valores pseudoaleatórios, definidos dentro do intervalo desejado, nas sub-rotinas desenvolvidas para gerarem os padrões de fibras com o método PVN ou com o método GCE. Os resultados obtidos serão utilizados como vetor inicial de soluções.

Para todas as otimizações monoobjetivo, assumiu-se as componentes social e cognitiva como 2,01 e um peso inercial de 0,9 e para o MPQSO foram designados limites de coeficientes de contração superior de 1,3 e inferior de 0,3.

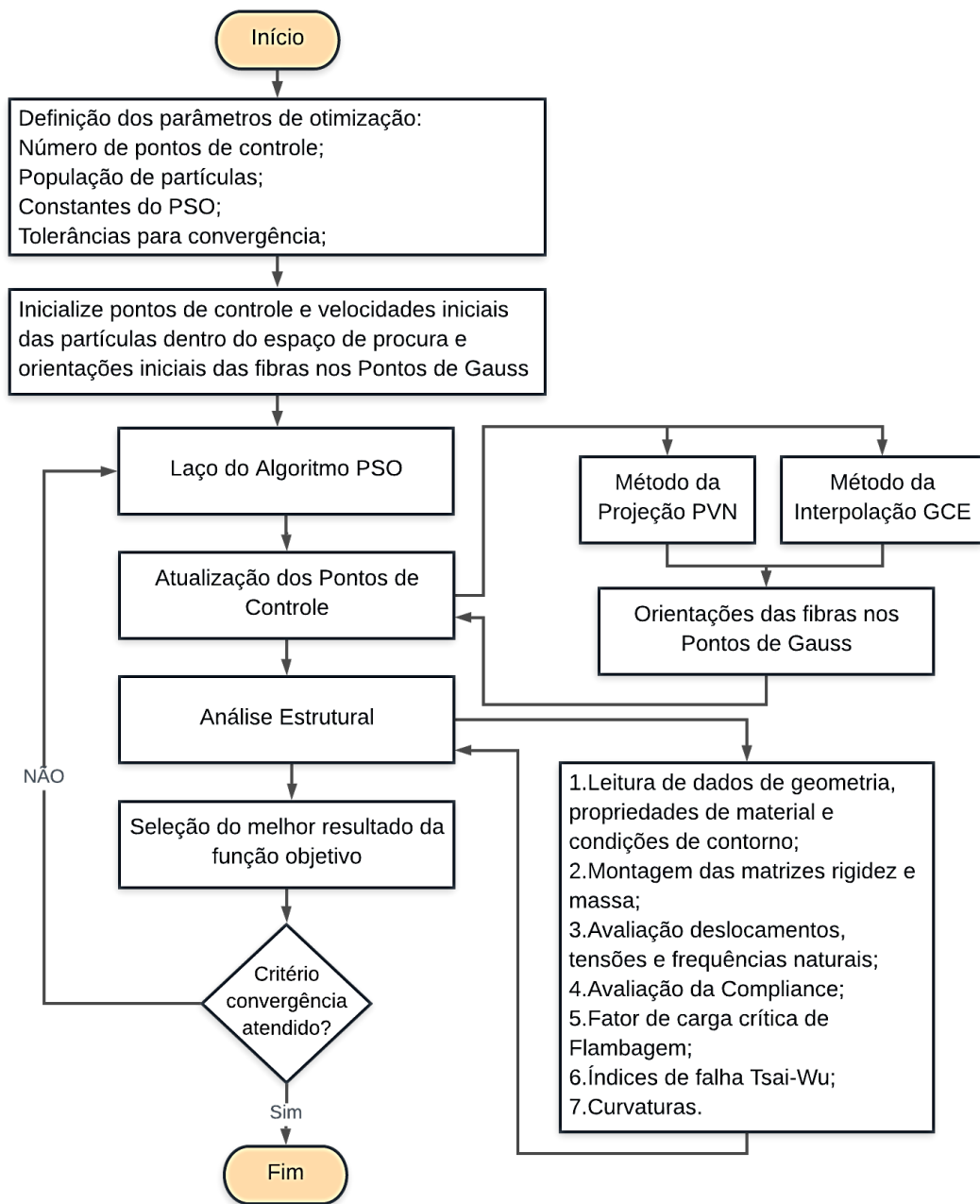


Figura 8.1 – Fluxograma do processo de otimização monoobjetivo.

### 8.1 Otimização monoobjetivo de uma placa simplesmente apoiada com pressão uniforme

Este problema foi sugerido por Setoodeh et al., 2006 e consiste em uma placa quadrada simplesmente apoiada nas quatro bordas, constituída por uma camada e submetida a uma pressão uniforme em toda sua superfície. A função objetivo para este caso é a *compliance*

(energia de deformação) que é o trabalho realizado pelas forças aplicadas na estrutura calculada conforme a Equação 8.1 e que deve ser minimizada.

$$C_o = \frac{1}{2} \{F\}^T \{U\} \quad (8.1)$$

A placa possui 1 m de lado, 5 cm de espessura e está submetida a uma pressão de 1Mpa. O material utilizado possui  $E_1 = 181$  GPa,  $E_2 = 10,3$  GPa,  $G_{12} = 7,17$  GPa e  $\nu_{12}=0,28$  e a estrutura é discretizada em uma malha de  $21 \times 21$  elementos. O algoritmo de otimização utilizado é o PSO síncrono paralelo com uma população de 300 partículas. Os critérios de parada adotados são a norma entre os valores do vetor de melhor solução entre iterações sucessivas, ou o coeficiente de variação ( $\sigma/\mu$ ) dos valores da função objetivo da população menor que  $5 \times 10^{-4}$  ou ainda um número máximo de 300 iterações. A Figura 8.2 indica as condições de contorno e a malha de elementos finitos para este exemplo.

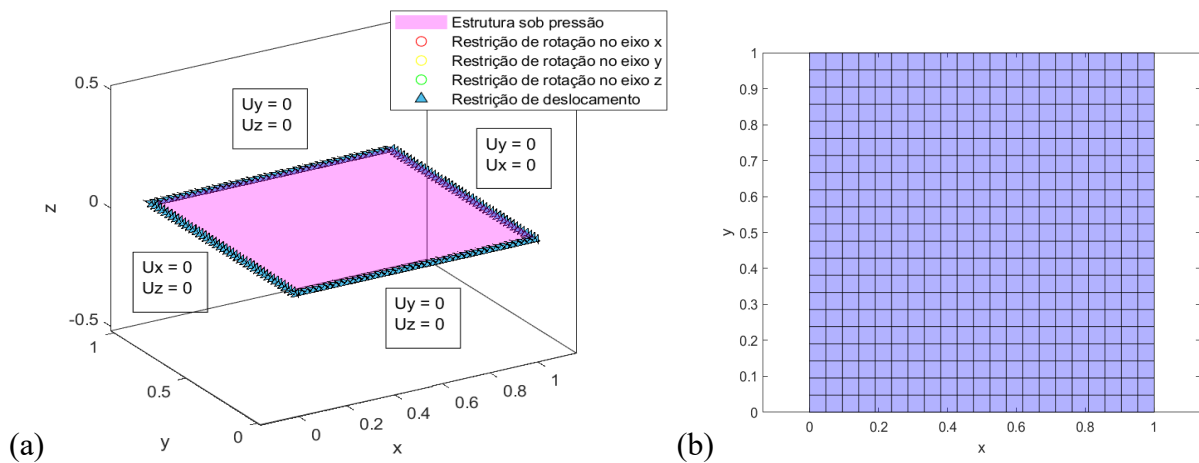


Figura 8.2 – (a) Condições de contorno e geometria do problema proposto; (b) Malha de elementos finitos utilizada

A *Compliance* é adimensionalizada conforme a Equação 8.2 e os resultados obtidos são comparados aos de Setoodeh et al., 2006.

$$\bar{C}_o = \left( \frac{E_2 h^3 C_o}{p^2 a^5} \right) 10^2 \quad (8.2)$$

Setoodeh et al., 2006, realizam otimizações utilizando parâmetros de laminação e com fibras parametrizadas. Também realizam uma otimização na qual laminados unidirecionais têm sua direção ótima determinada sendo os valores obtidos utilizados como referência.

O valor de *compliance* adimensional para o laminado com fibras unidirecionais otimizado obtido por Setoodeh et al., 2006 apresenta uma diferença nos resultados em relação ao valor obtido no programa desenvolvido. Isto pode observado na Tabela 8.1.

Tabela 8.1 – Resultados de *compliance* para laminado unidirecional otimizado.

	Setoodeh et al. (2006)	ANSYS 17.0	Programa aqui desenvolvido
<i>Compliance</i> adimensional	0,2179	0,2042	0,2042

Essa discrepância possivelmente se deve à diferença entre os elementos finitos utilizados pelos autores e o desenvolvido neste trabalho. Eles utilizam elementos de placa CLPT, que não apresentam deformações de corte e tendem a serem mais rígidos que os elementos de casca com teoria FSDT que levam esse efeito em conta. Ela ainda pode também se dar a diferenças entre as funções de forma utilizadas por Setoodeh et al., 2006 e as utilizadas no presente trabalho.

Foram realizados estudos com  $3 \times 3$ ,  $4 \times 4$  e  $5 \times 5$  pontos de controle distribuídos conforme as Figuras 8.3(a), 8.3(b), 8.3(c).

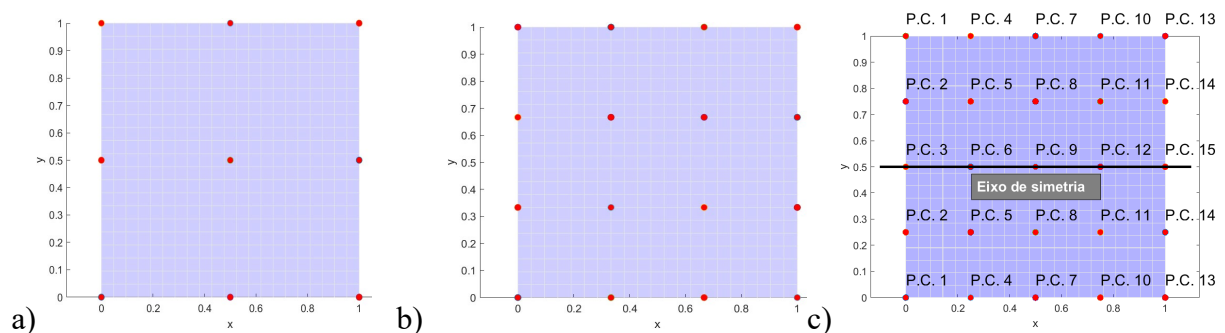


Figura 8.3 – (a) 9 pontos de controle; (b) 16 pontos de controle; c) 25 pontos de controle.

Para  $5 \times 5$  pontos de controle, é imposta uma simetria em relação a um eixo que passa pelo ponto central da placa e é paralelo ao eixo global  $x$  como apresentado na Figura 8.3(c). Foram realizadas dez rodadas do algoritmo PSO e os melhores resultados, as médias entre seus

resultados e os desvios padrão estão descritos na Tabela 8.2 abaixo. As configurações obtidas estão representadas graficamente na Figura 8.4.

Tabela 8.2– Melhores resultados obtidos com os dois métodos desenvolvidos.

	<i>Compliance</i> (adimensional)					
	PVN			GCE		
	9 pontos de controle	16 pontos de controle	25 pontos de controle	9 pontos de controle	16 pontos de controle	25 pontos de controle
Melhores valores	0,1352	0,1279	0,1256	0,1300	0,1279	0,1256
Médias	0,1352	0,1366	0,1265	0,1347	0,1353	0,1261
Desvios padrão	$2,7177 \times 10^{-6}$	0,0051	$8,6745 \times 10^{-4}$	0,0016	0,0050	$7,5662 \times 10^{-4}$

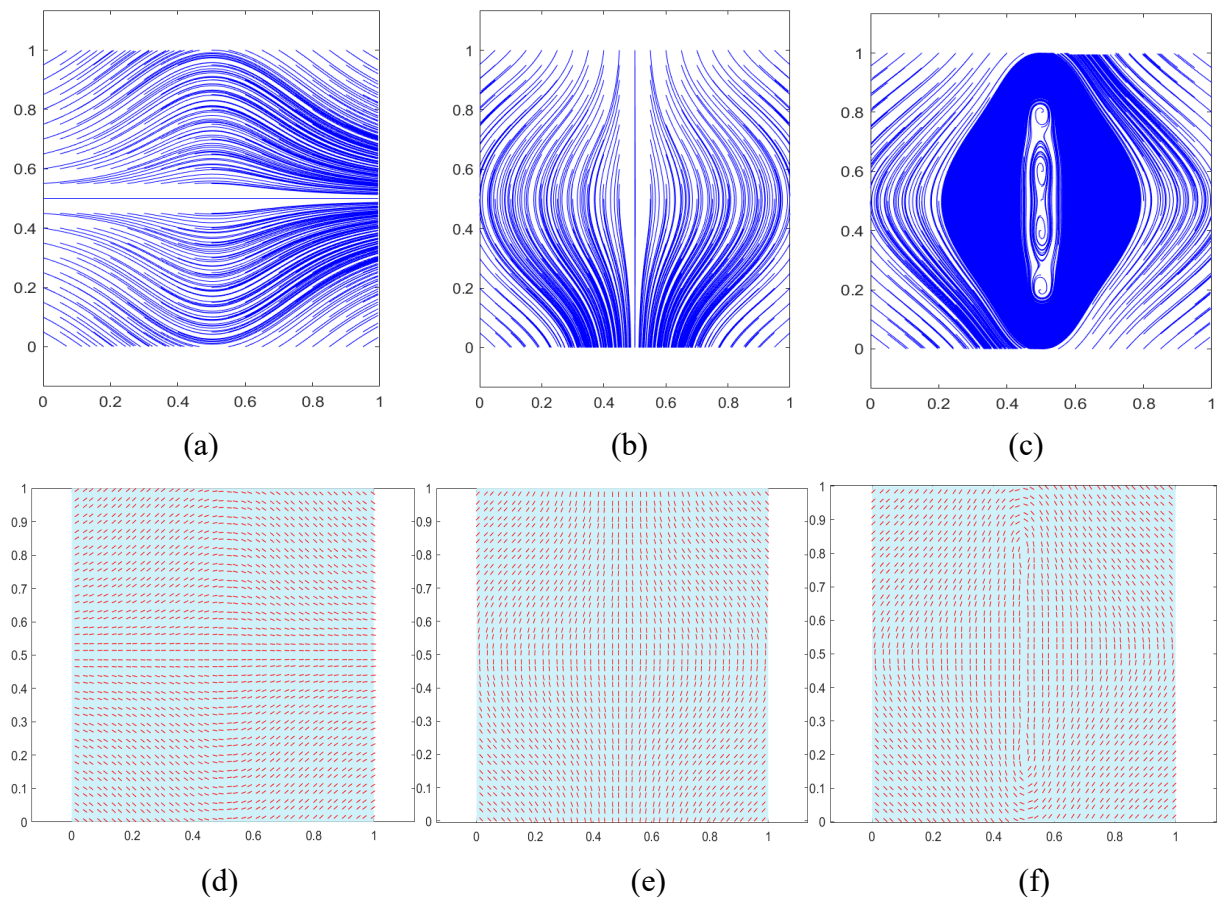


Figura 8.4 – Configurações obtidas em *streamlines* e discretizada nos pontos de Gauss com o método dos gradientes para: (a), (d)  $3 \times 3$  pontos de controle; (b), (e)  $4 \times 4$  pontos de controle; (c), (f)  $5 \times 5$  pontos de controle com simetria.



As médias são bastante próximas, assim como os desvios padrão. As divergências no resultado aparentam se dar pelo baixo número de amostras. Em termos de resultados, ambos métodos convergiram para o mesmo valor com  $4 \times 4$  e  $5 \times 5$  pontos de controle. Para  $3 \times 3$  pontos de controle, o melhor resultado foi obtido com método GCE.

Devido à proximidade dos valores obtidos entre os métodos PVN e GCE, testou-se inserir os valores dos pontos de controle obtidos com a otimização com o método PVN na subrotina que gera os padrões de fibras com o método GCE e vice-versa. Observou-se que, para todos os casos apresentados na Tabela 8.2, os resultados foram iguais. O que pode indicar que, para estruturas planas, ambos os métodos são equivalentes.

Como as condições de contorno neste caso são duplamente simétricas, o fato de o padrão se encontrar rotacionado em  $90^\circ$  não altera os resultados. Isso pode ser constatado ao comparar os padrões obtidos para  $5 \times 5$  pontos de controle com os métodos propostos que são praticamente iguais, mas com eixos de simetria trocados, como apresentado na Figura 8.5.

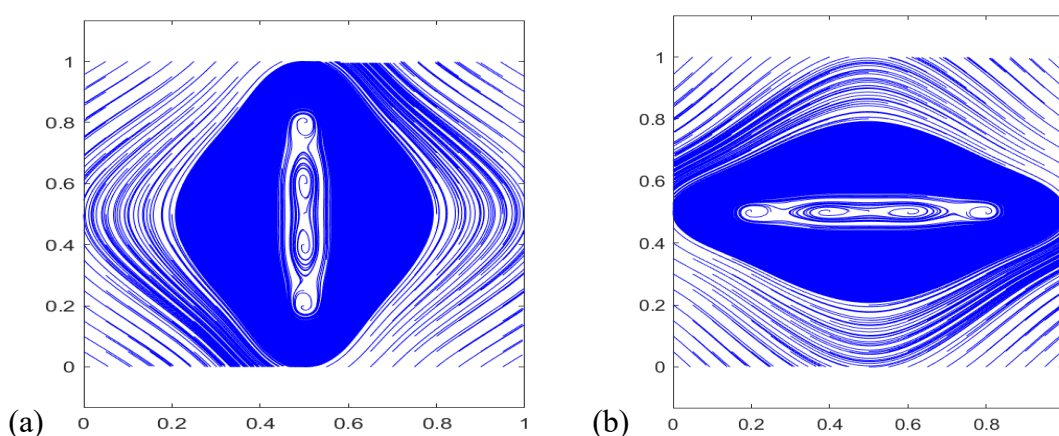


Figura 8.5 – Configurações em *streamlines* para 25 pontos de controle para: (a) Método GCE; (b) Método PVN.

O melhor resultado obtido por Setoodeh et al. (2006), para este caso, é de uma compliance adimensional de 0,1787 com utilização de quatro parâmetros de laminação. Este resultado representa uma redução de 18% quando comparado ao obtido com o laminado unidirecional otimizado descrito pelos autores.

No presente trabalho, a configuração de 9 pontos de controle resulta em uma redução de 36,34%, a de 16 pontos de controle em uma redução de 37,37% e a de  $5 \times 5$  pontos de controle, 38,49%. Uma comparação de valores direta com o autor se torna difícil, pois os modelos de análise estrutural são diferentes. A comparação se resume aos padrões de orientação de fibras, que são muito próximos aos obtidos pelos autores no estudo em que são usadas como variáveis de projeto os ângulos de fibras nos próprios elementos finitos. Pode-se constatar isto na Figura 8.6.

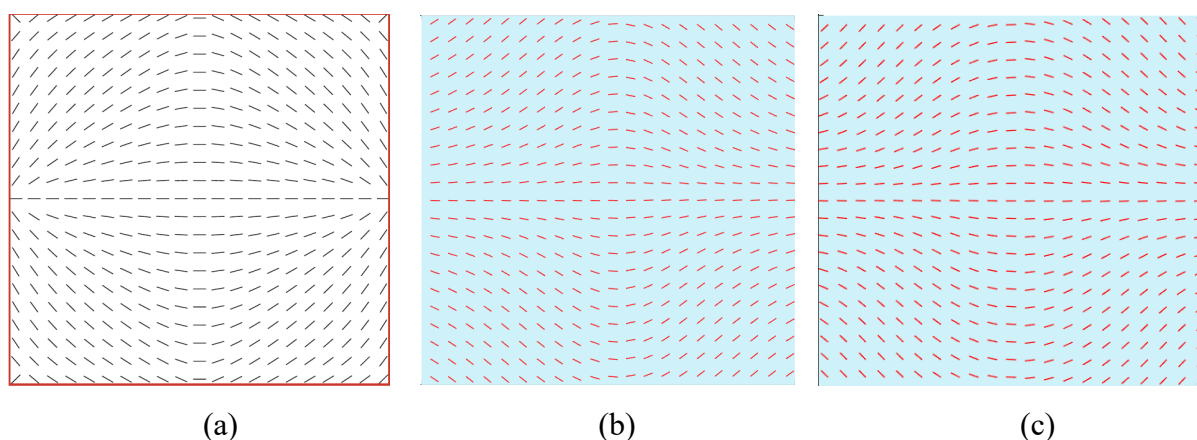


Figura 8.6 – (a) Configuração obtida por Setoodeh et al. (2006) de fibras discretizada no centroide dos elementos [Fonte: Setoodeh et al., 2006]; (b) Configuração obtida no presente estudo para 9 pontos de controle discretizada no centroide dos elementos finitos; (c) Configuração obtida no presente estudo para 16 pontos de controle discretizada.

As coordenadas dos pontos de controle e os seus valores, para este estudo, se encontram no APÊNDICE A, Tabela A.1.

## 8.2 Otimizações monoobjetivo e multiobjetivo para placa completamente engastada nos quatro bordos

Este exemplo está descrito na Seção 7.2(a), onde a capacidade do código desenvolvido gerar resultados consistentes com a literatura quando utilizadas fibras de orientação variável foi atestada. Neste trabalho, foram feitas duas análises, sendo a primeira uma otimização monoobjetivo na qual se busca maximizar a primeira frequência natural, enquanto a segunda consiste em uma otimização multiobjetivo utilizando o algoritmo MPQSO e tem como objetivo

a maximização da primeira frequência natural e a minimização da média aritmética das curvaturas, calculadas conforme a Equação 2.2 .

A placa utilizada em ambos os problemas possui 8 camadas e são definidos pontos de controle somente na primeira delas enquanto as demais camadas seguem uma configuração simétrica  $[(+\theta/-\theta)_2]_S$  baseada na orientação de fibras da primeira. As condições de contorno e a malha utilizados no problema se encontram na Figura 8.7.

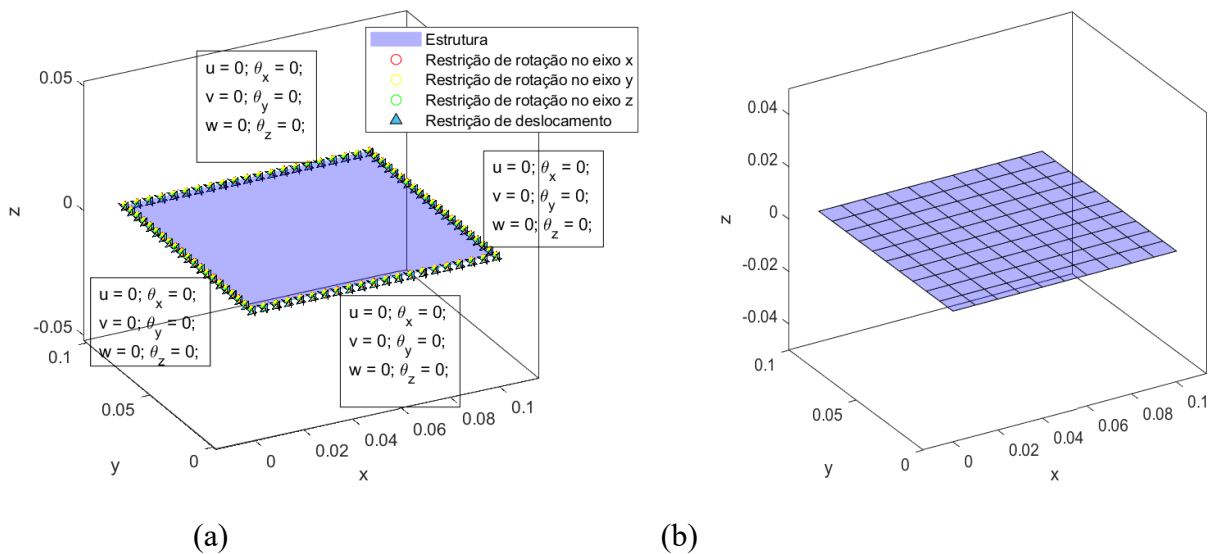


Figura 8.7 – (a) Condições de contorno; (b) Malha utilizada.

### 8.2.1 Otimização monoobjetivo

Neste estudo, buscou-se maximizar a primeira frequência natural utilizando o algoritmo PSO síncrono paralelo. Também foram exploradas diferentes quantidades de pontos de controle igualmente distribuídos sobre a primeira camada, como apresentado na Seção 0 e ilustrado na Figura 8.3.

É utilizada uma população de 100 indivíduos para as otimizações. Os critérios de parada adotados são a norma entre os valores do vetor de melhor solução entre iterações sucessivas, ou o coeficiente de variação ( $\sigma/\mu$ ) dos valores da função objetivo da população menor que  $5 \times 10^{-4}$  ou ainda um número máximo de 300 iterações. Os valores no espaço de soluções que podem ser assumidos pelos pontos de controle se encontram no intervalo  $[-5, 5]$ .

Foram executadas diversas rodadas do algoritmo de otimização e os melhores resultados foram selecionados e são apresentados na Tabela 8.3 e ilustrados pelas Figura 8.8 e Figura 8.9.

A Figura 8.8 ilustra as orientações de fibras obtidas pelo método PVN enquanto a Figura 8.9 lustra as obtidas com o GCE, ambas ilustradas por *streamlines*. Em ambas as Figuras, as três densidades de pontos de controle são apresentadas. A Tabela 8.3 resume os valores de frequência adimensionais obtidas em cada um dos casos.

Tabela 8.3 – Resultados para máxima frequência natural adimensional obtidos no presente trabalho

	Frequência natural adimensional		
	3 × 3 pontos de controle	4 × 4 pontos de controle	5 × 5 pontos de controle
PVN	107,37	112,24	112,11
GCE	107,37	112,28	111,98

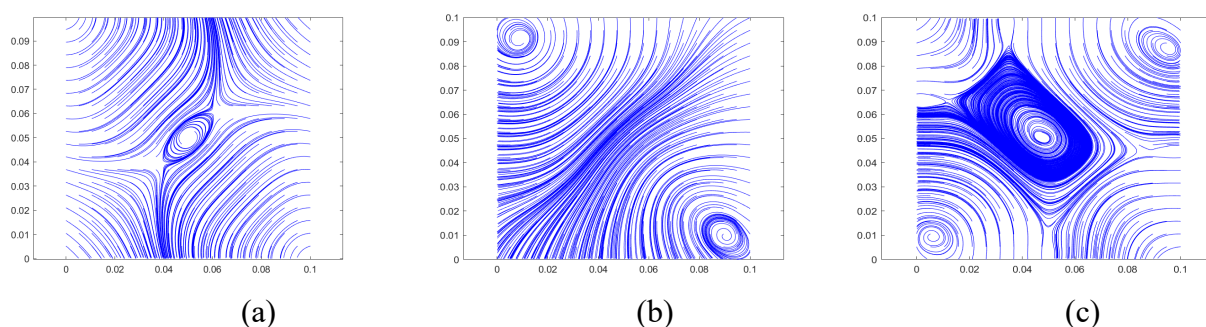


Figura 8.8 – (a) Configuração de máxima frequência natural utilizando o método das projeções para: 9 pontos de controle; (b) 16 pontos de controle; (c) 25 pontos de controle.

Observando a Tabela 8.3, os valores de frequência natural adimensionalizada ficaram bem próximos para ambos os métodos. Reforçando a possibilidade já citada de ambos os métodos serem equivalentes para estruturas planas.

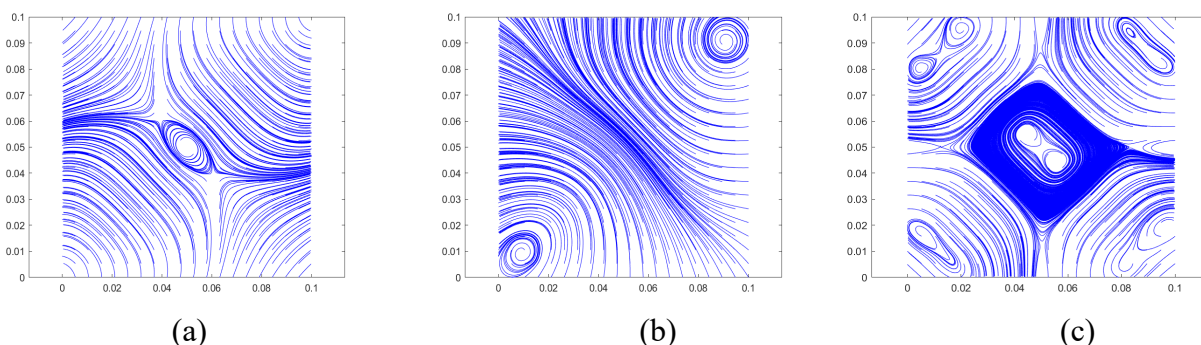


Figura 8.9 – (a) Configuração de máxima frequência natural utilizando o método da interpolação de escalares nos nós para: 9 pontos de controle; (b) 16 pontos de controle; (c) 25 pontos de controle.

Como a estrutura é duplamente simétrica e a distribuição das lâminas é simétrica, os padrões apresentados na Figura 8.8(a) e na Figura 8.9(a) serão simétricos.

A utilização de 16 pontos de controle apresentou um ganho máximo de 4,53% em relação aos resultados obtidos com 9 pontos de controle. Já os valores de frequência obtidos com o aumento para 25 pontos de controle, apresentaram um incremento muito baixo em relação aos obtidos com 16 pontos, ou uma piora.

As coordenadas dos pontos de controle que geram as configurações apresentadas neste caso encontram-se no APÊNDICE A, Tabela A.2.

## 8.2.2 Otimização multiobjetivo

Para o processo de otimização é utilizado o algoritmo MPQSO (Multiobjective Quantum-Behaved Particle Swarm Optimization), uma população de 400 partículas, para manter o número de indivíduos assumido por Honda et al., 2013, e o critério de parada adotado é o de um número máximo de 400 iterações. O algoritmo foi paralelizado para agilizar o tempo de processamento. O espaço de possíveis soluções para as variáveis de projeto está contido no intervalo  $[-1, 1]$  e são utilizados  $3 \times 3$  pontos de controle conforme Figura 8.3(a).

Como os exemplos anteriores até então vieram mantendo uma tendência aparente de semelhança entre os resultados obtidos com ambos os métodos, fixou-se a mesma semente na geração de números aleatórios dos termos do processo de otimização do algoritmo

metaheurístico utilizado. Com este parâmetro fixo, foram obtidos resultados praticamente iguais para as fronteiras de Pareto obtidas com os métodos GCE e PVN.

A Figura 8.10 traz as fronteiras de Pareto para este caso juntamente com aquela obtida pela referência Honda et al., 2013. A fronteira de Pareto de Honda et al., 2013 se mostra bastante diferente daquela aqui obtida. O que possivelmente se dá pela diferença significativa entre as funções que geram as superfícies parametrizadas utilizadas para a definição da orientação das fibras nos elementos finitos, ao modelo de análise estrutural utilizado ou ao fato de Honda et al., 2013, avaliar a posição das fibras somente no centroide do elemento finito enquanto no presente trabalho ela é avaliada nos pontos de Gauss. Porém, os valores para os valores de máxima frequência natural e de mínima frequência natural são numericamente próximos aos encontrados aqui neste trabalho.

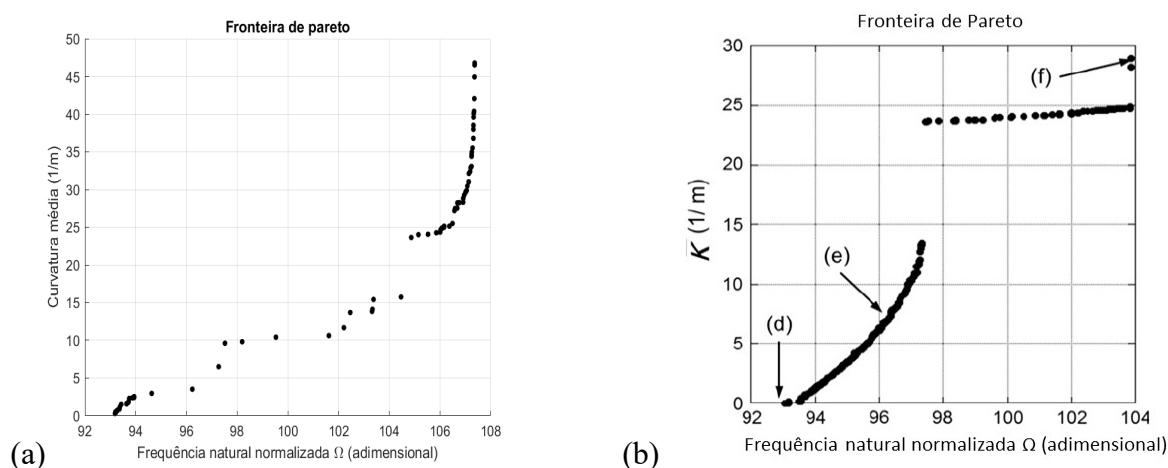


Figura 8.10 – (a) Fronteira de Pareto obtida para ambos os métodos desenvolvidos neste trabalho. (b) Resultado obtido por Honda et al., 2013 [fonte: Honda et al., 2013].

Na Figura 8.10b os pontos (d), (f) e (e) representam os pontos extremos da fronteira Pareto obtida por Honda et al., 2013 e um ponto intermediário dela, respectivamente.

Para o ponto de maior frequência natural, o método proposto atingiu uma maior frequência natural ao custo de uma maior curvatura, enquanto o ponto de mínima curvatura apresenta um valor mais distante do valor obtido por Honda et al., 2013.

A Tabela 8.4 resume os resultados obtidos para os extremos da fronteira de Pareto ao lado daqueles obtidos por Honda et al., 2013. A Figura 8.11 representa as configurações de fibras obtidas ilustradas tanto por *streamlines* quanto direções nos pontos de Gauss.

Tabela 8.4– Resultados obtidos para o método das projeções ao lado dos obtidos por Honda et al., 2013.

	Máxima frequência		Mínima curvatura	
	Frequência natural (adimensional)	Curvatura média (1/m)	Frequência natural (adimensional)	Curvatura média (1/m)
Trabalho desenvolvido	107,37	46,78	93,19	0,31
Honda et al., 2013	103,9	29,03	93,08	$5,3 \times 10^{-4}$

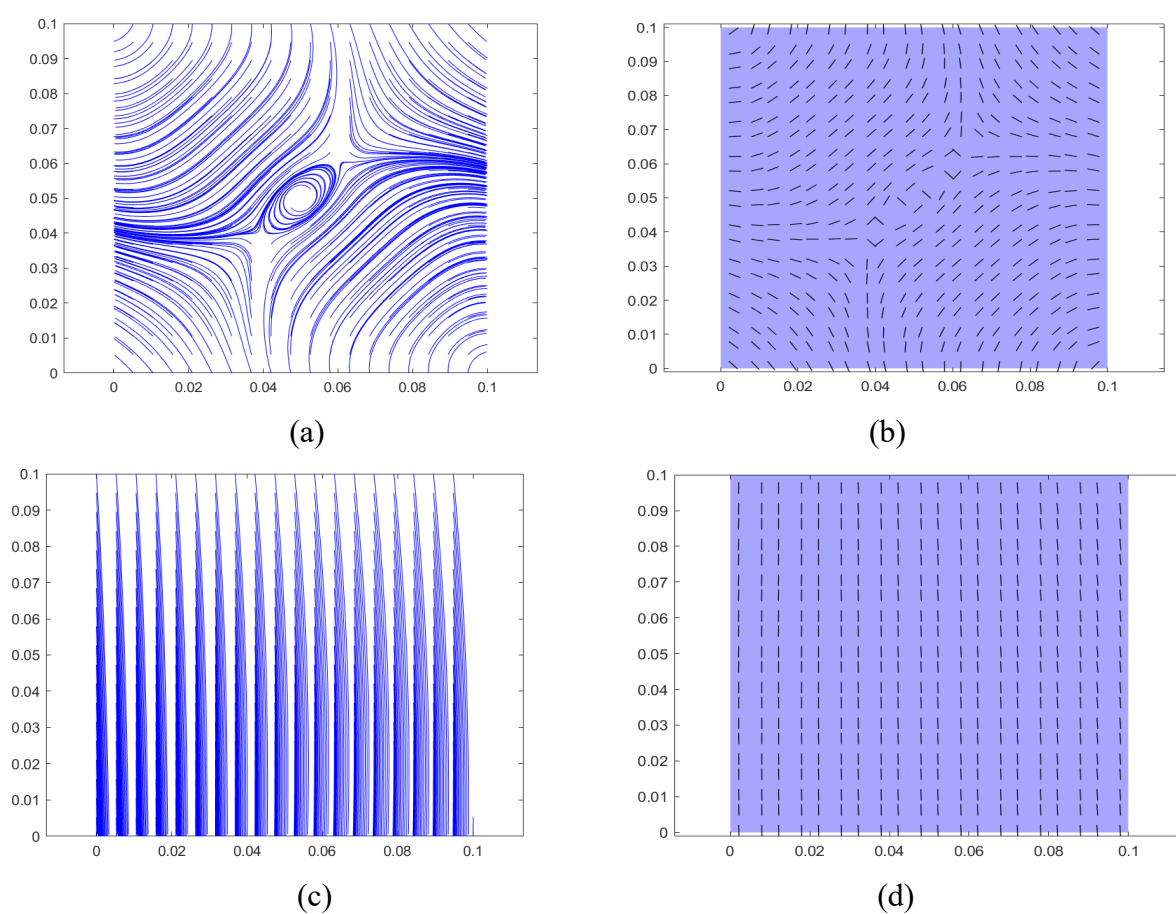


Figura 8.11 – Configuração otimizada em *streamlines* e discretizadas nos pontos de Gauss para: (a), (b) Máxima frequência natural adimensional; (c), (d) Mínima curvatura.

Na Figura 8.12 estão apresentados os resultados obtidos por Honda et al., 2013 para máxima frequência natural e mínima curvatura e mínima frequência natural e mínima curvatura.

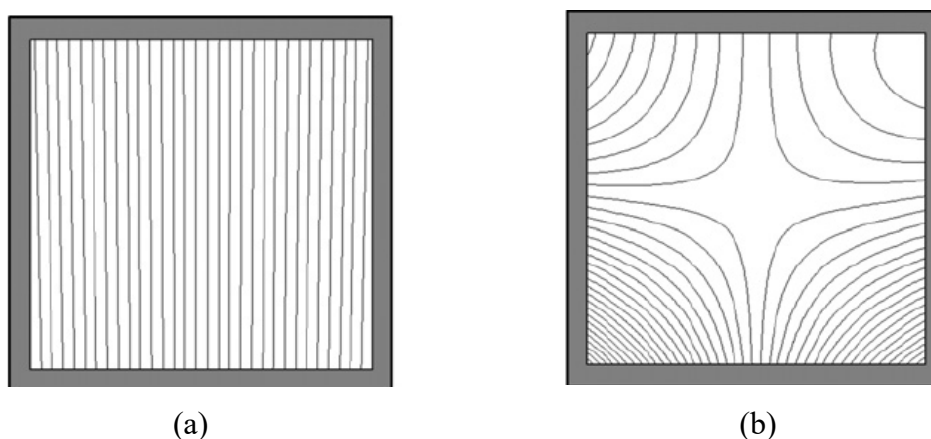


Figura 8.12 – Configurações otimizadas obtidas por Honda et al., 2013 para: (a) Mínima curvatura; (b) Máxima frequência natural adimensional.

Os resultados para os extremos da fronteira de Pareto obtida neste trabalho são numericamente próximos aos dos pontos (d) e (f) da fronteira de Pareto obtida por Honda et al., 2013, e comparando os gráficos dos padrões obtidos na Figura 8.11 com os obtidos por Honda et al., 2013, apresentados Figura 8.12, nota-se uma certa semelhança entre eles. Na região da fronteira de Pareto onde se encontra o ponto de máxima frequência natural, há um comportamento assintótico. Isso pode se dar devido à formação do padrão circular na parte central da placa, que pode gerar um salto no valor da curvatura e, provavelmente um ganho bastante baixo de frequência.

A fronteira de Pareto obtida neste trabalho atingiu um maior valor de frequência natural, porém, como já constatado, as custas de um grande aumento na curvatura. Já seu ponto de menor curvatura apresentou um maior valor de curvatura mantendo uma frequência mais alta que a obtida por Honda et al., 2013. A diferença entre os métodos de parametrização do padrão de fibras torna difícil uma comparação direta sem levar em conta outras restrições de projeto.

Ao analisar um ponto na fronteira de Pareto cujos valores de frequência e curvatura se encontram mais próximos aos encontrados no trabalho referenciado, é notável a menor curvatura assumida pelas fibras no centro da placa. A Figura 8.13 é a configuração para o ponto de frequência adimensional 104,87 e curvatura média 24,6391 1/m da fronteira de Pareto obtida aqui nesse trabalho.



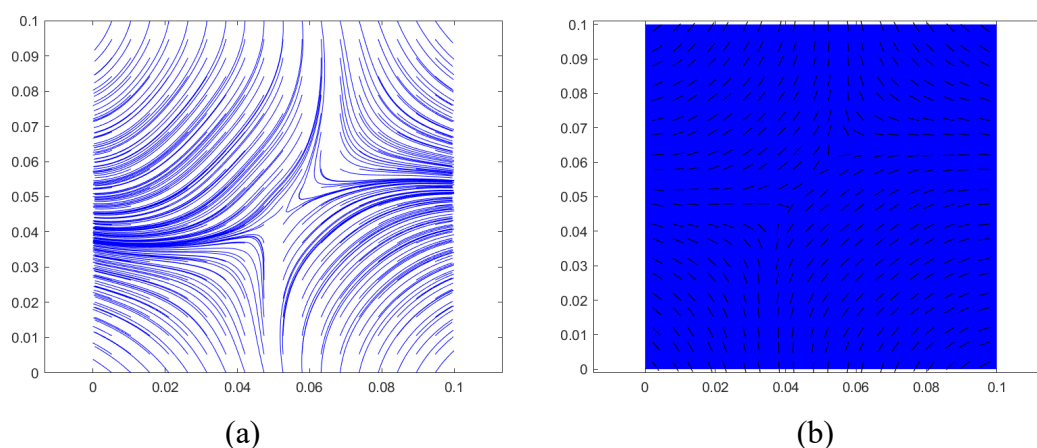


Figura 8.13 – Configuração para ponto intermediário na fronteira de Pareto: (a) Configuração em *streamlines*; (b) Configuração discretizada nos pontos de Gauss.

As coordenadas dos pontos de controle que geram as configurações apresentadas neste caso encontram-se no APÊNDICE A, Tabela A.2.

Santana et al., 2018, aplicam o mesmo algoritmo MPQSO em uma placa retangular com um furo central, condições de contorno de simetria e submetida a carregamentos axiais de tração tendo como funções objetivo a serem minimizadas o critério de falha de Tsai-Wu juntamente e curvatura média calculada conforme sugerido por Honda et al., 2013. A malha utilizada se encontra na Figura 8.14.



Figura 8.14 – Malha utilizada por Santana et al., 2018

O carregamento é aplicado distribuído nos nós da borda direita, gerando 10 Mpa de tensão axial. As tensões de falha são  $\sigma_1^t = \sigma_1^c = 144800 \text{ N/cm}^2$ ,  $\sigma_2^c = 5171 \text{ N/cm}^2$ ,  $\sigma_2^t = 20685 \text{ N/cm}^2$  e  $\tau_{12} = 9008 \text{ N/cm}^2$ .

Os autores obtiveram uma fronteira de Pareto abrangente com um extremo apresentando um índice de Tsai-Wu menor que 0,015 e uma curvatura de aproximadamente 15 enquanto o outro extremo da fronteira atinge um valor de critério de falha de Tsai-Wu de aproximadamente

0,037 e uma curvatura próxima a zero. A fronteira de Pareto obtida pelos autores é comparada a obtida por Honda et al., 2013, e está representada na Figura 8.15.

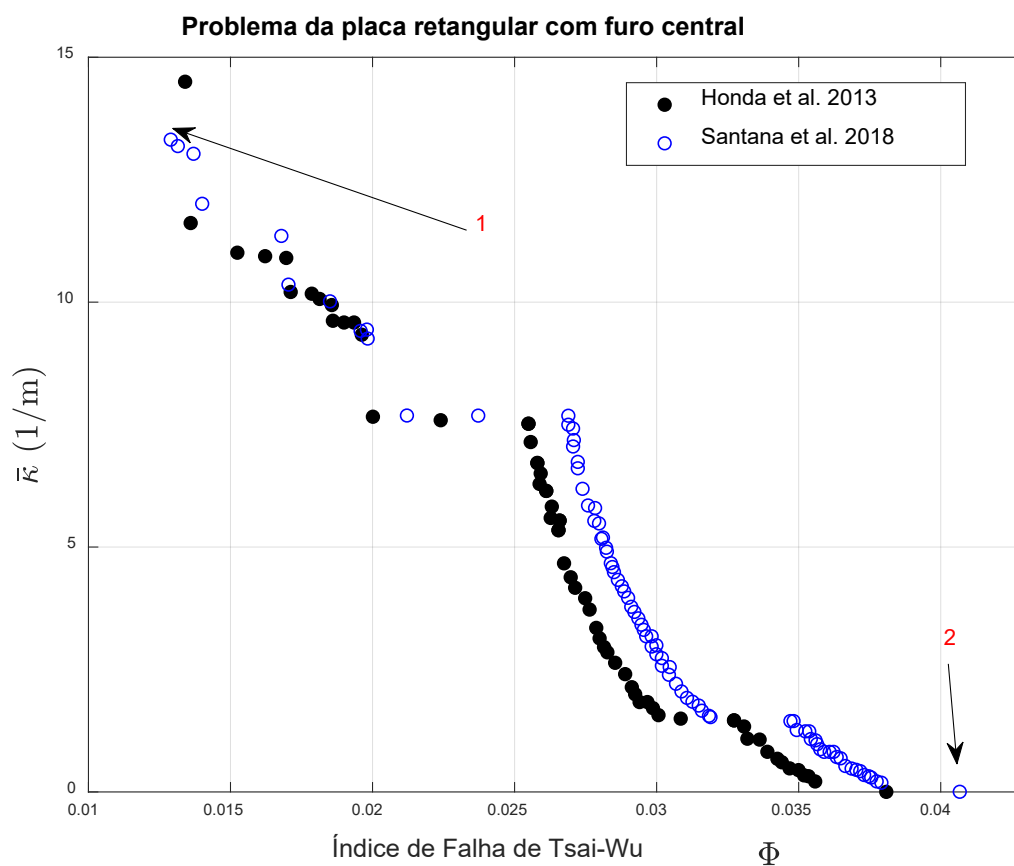


Figura 8.15 – Fronteira de Pareto obtida por Honda et al., 2013, sobreposta com a obtida por Santana et al., 2018 [adaptado de Santana et al., 2018].

Na Figura 8.15 a marcação 1 indica a configuração de máxima frequência natural e máxima curvatura a marcação 2 a configuração de mínima frequência natural e mínima curvatura. Estes padrões de fibras são apresentados nas Figuras 8.16 e 8.17.

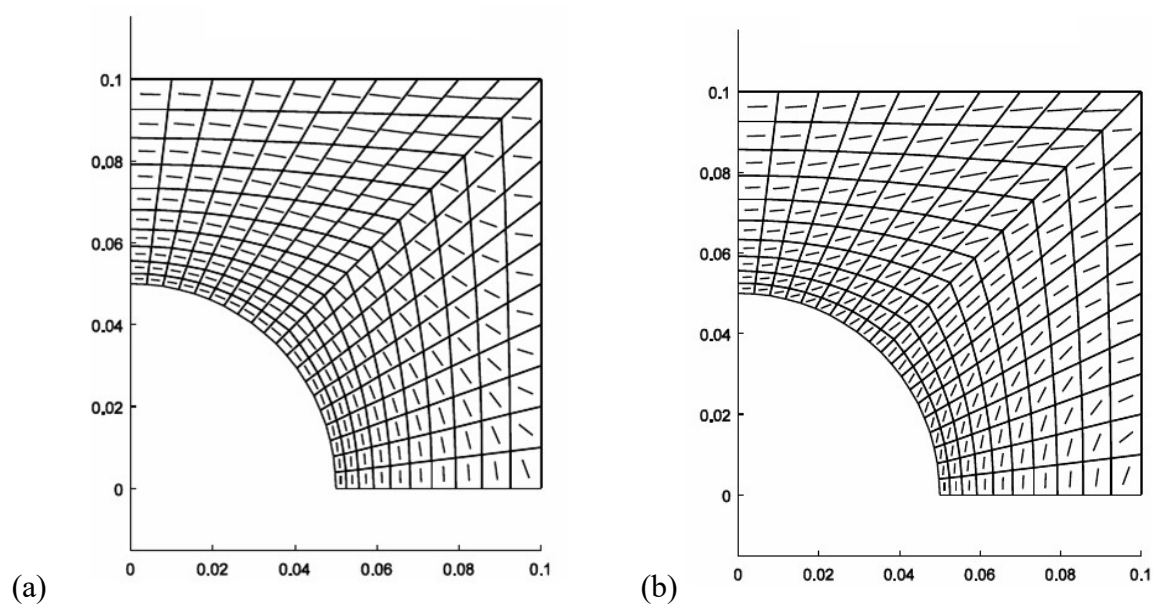


Figura 8.16 – Configuração para máxima frequência natural para: (a) Primeira camada; (b) Segunda camada.

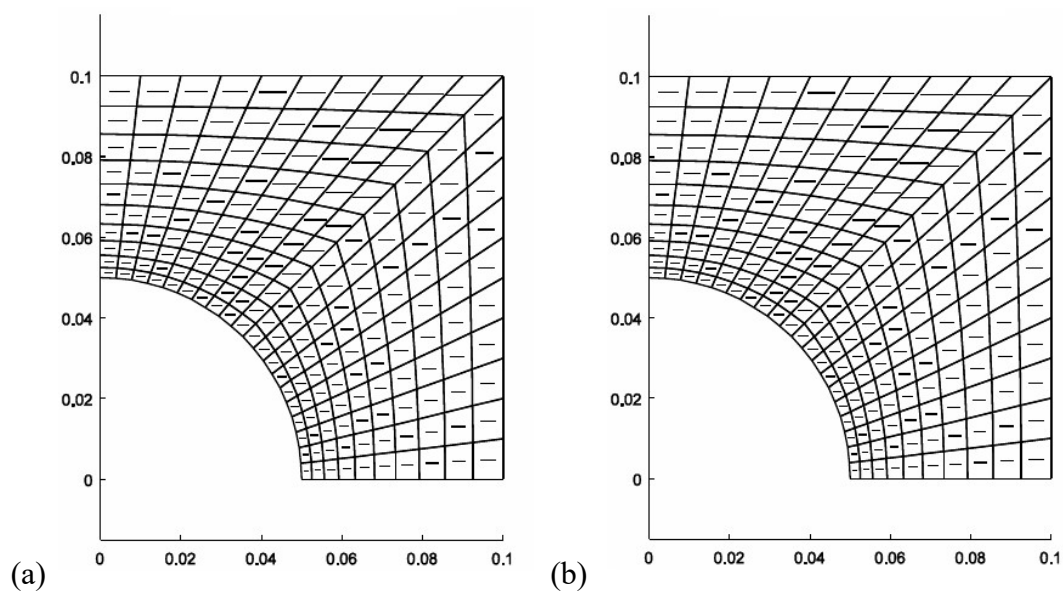


Figura 8.17– Configuração para mínima frequência natural para: (a) Primeira camada; (b) Segunda camada.

Este estudo mostrou um deslocamento da fronteira de Pareto para a direita que ainda há de ser investigado, porém, os resultados obtidos para os padrões curvilíneos foram semelhantes aos obtidos por Honda et al., 2013.

### 8.3 Otimização monoobjetivo para flambagem de uma casca curva com furo central

Este problema foi abordado por Arsenyeva et al., 2016 e consiste em um setor de uma casca cilíndrica com um furo central. A casca tem um raio de 0,75 m, um furo com raio de 0,12 m, lados iguais de 0,5 m e quatro camadas de mesma espessura que somam 1 mm. O material do laminado possui  $E_1 = 130$  GPa,  $E_2 = 10$  GPa,  $G_{12} = 5$  GPa e  $\nu_{12} = 0,35$ . A função objetivo do problema é o fator de carga crítica de flambagem, que deve ser maximizado. Todos os compostos estudados possuem quatro lâminas que seguem os empilhamentos  $[+\theta/-\theta]_s$  ou  $[\theta, \theta + 90^\circ]_s$ , onde  $\theta$  é o ângulo no centro do elemento. Em todos os casos, a carga aplicada na estrutura de referência foi tal que resultou em  $\lambda$  unitário.

Inicialmente, para se ter uma base para comparação, realiza-se uma otimização tradicional seguindo o mesmo empilhamento. Neste ponto, ocorre uma divergência quanto ao trabalho citado. Arsenyeva et al., 2016, ao realizar a otimização levando em conta o laminado tradicional, obtiveram um ângulo ótimo de  $92^\circ$  enquanto no presente trabalho o mesmo procedimento gerou um valor de  $35^\circ$ .

Devido à dificuldade de interpretar o diagrama que apresenta as condições de contorno da estrutura, assumiram-se duas possibilidades de condições de contorno neste capítulo.

Todas as otimizações são feitas usando o PSO síncrono paralelo. Os critérios de parada adotados são a norma entre os valores do vetor de melhor solução entre iterações sucessivas, ou o coeficiente de variação ( $\sigma/\mu$ ) dos valores da função objetivo da população menor que  $5 \times 10^{-3}$ . A Figura 8.18 ilustra as distribuições de pontos de controle utilizados nos casos apresentados neste capítulo para  $3 \times 3$  e  $4 \times 4$  pontos de controle. Para  $5 \times 5$  pontos de controle, assumiu-se simetria em relação a um eixo que passa pelo ponto central da casca e é paralelo a coordenada  $z$ , ou seja, as variáveis de projeto são reduzidas a 15 pontos como é mostrado na Figura 8.18.

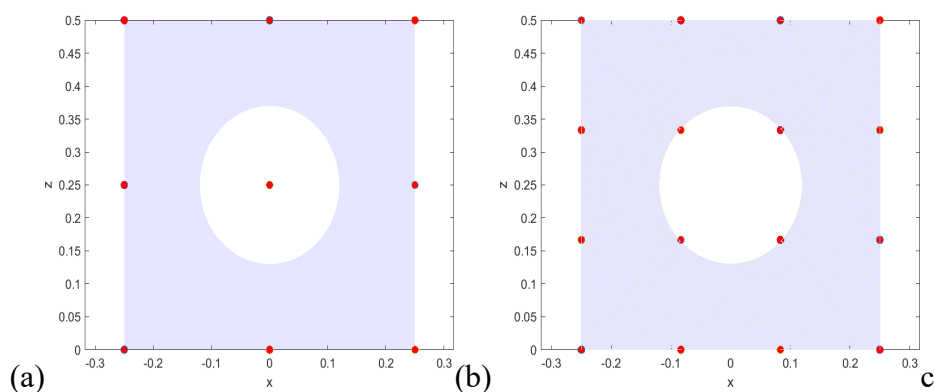


Figura 8.18 – (a)  $3 \times 3$  pontos de controle; (b)  $4 \times 4$  pontos de controle

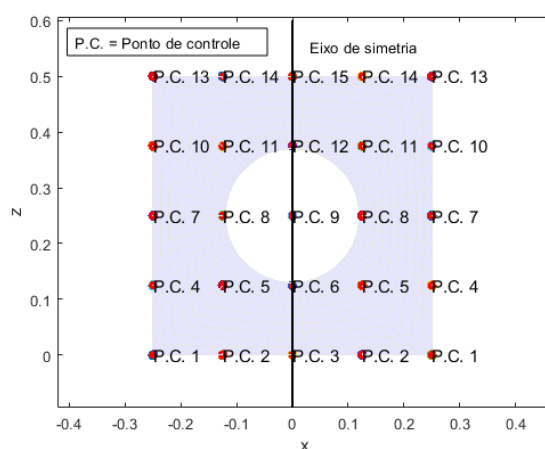


Figura 8.19 – Distribuição para  $5 \times 5$  pontos de controle.

### 8.3.1 Exemplo 1 – Casca com deslocamentos prescritos nas bordas curvas

No primeiro exemplo, são prescritos deslocamentos de 0,11 mm na direção  $z$  e nas bordas curvas da estrutura de uma casca a submetendo a compressão. Estas bordas têm seus demais graus de liberdade restritos de forma que elas mantenham sua curvatura original enquanto as bordas laterais são mantidas simplesmente apoiadas. O laminado unidirecional otimizado para essas condições de contorno possui orientação  $[31^\circ/-31^\circ]_s$ . As condições de contorno neste caso estão indicadas na Figura 8.20.

A malha mais refinada sugerida pelos autores foi replicada no software ANSYS APDL 17.0 e com as condições de contorno propostas (malhas indicadas na Figura 8.21). Foram testados os elementos SHELL181 (elemento de quatro nós utilizado na referência) e SHELL281 e os resultados são comparados com os aqueles gerados pelo programa desenvolvido com uma malha menos refinada. Estes mesmos resultados estão indicados na Tabela 8.5.

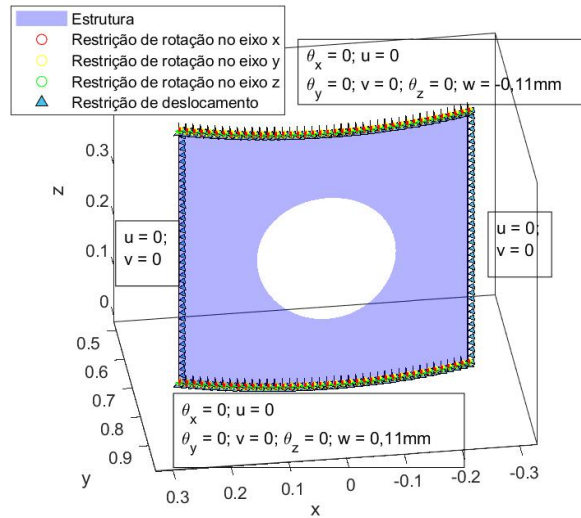


Figura 8.20 – Estrutura com condições de contorno para o primeiro exemplo.

Tabela 8.5– Comparação de resultados para carga de flambagem com malhas diferentes com o programa desenvolvido e com o *software* Ansys.

Ângulos de fibras	Fator de carga crítica de flambagem (adimensional)		
	Malha utilizada	Malha da referência (SHELL 181)	Malha da referência (SHELL 281)
$[45^\circ/-45^\circ]_s$	1,000	1,005	0,999
$[31^\circ/-31^\circ]_s$	1,252	1,248	1,251

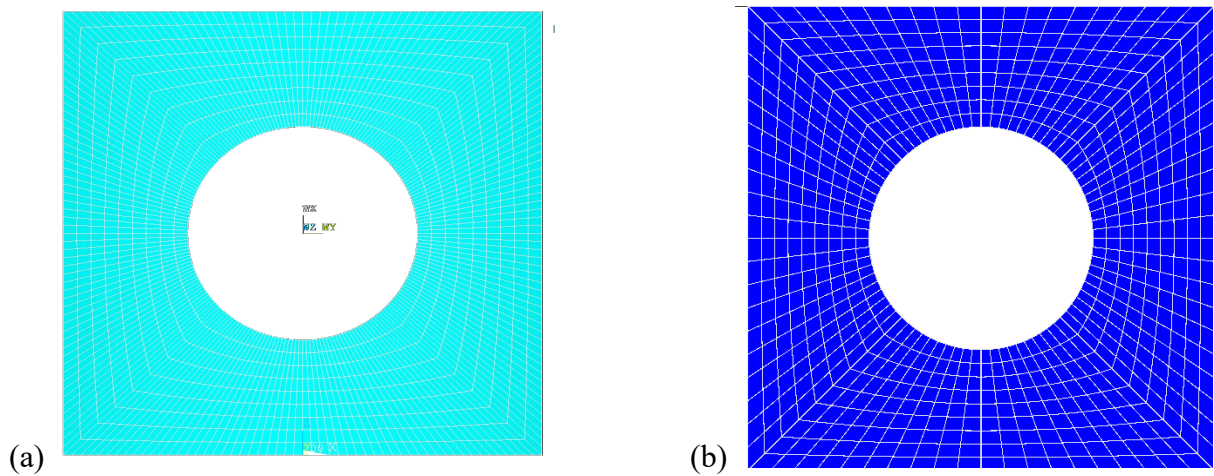


Figura 8.21 – (a) Malha utilizada no trabalho referenciado (b) Malha de elementos finitos utilizada no presente trabalho (projeção superior).

Constatou-se que a utilização dos 1944 elementos da malha sugerida na referência seria um peso computacional desnecessário levando em conta a diferença de 1% em relação ao  $\lambda$  utilizando um elemento finito SHELL281 com uma malha refinada. Portanto, prosseguiu-se com a utilização da malha proposta de 720 elementos finitos.

Neste caso, para qualquer número de pontos de controle, as quatro camadas se distribuem na espessura do laminado como  $[\theta, -\theta]_s$ . Os melhores resultados foram selecionados e organizados na Tabela 8.6.

Tabela 8.6– Resultados obtidos para o primeiro exemplo.

	Referência	Otimizado	PVN			GCE		
	$[45^\circ/-45^\circ]_s$	$[31^\circ/-31^\circ]_s$	3×3 pontos de controle	4×4 pontos de controle	5×5 pontos de controle	3×3 pontos de controle	4×4 pontos de controle	5×5 pontos de controle
$\lambda$	1,00	1,2573	1,4998	1,5215	1,6260	1,4082	1,4901	1,5879

O melhor resultado foi obtido com os  $5 \times 5$  pontos de controle simétricos (Figura 8.18(a)) e pelo método PVN, que proporciona um incremento de 62,6% em relação à referência e de 29,32% no fator de carga crítica de flambagem em relação ao laminado unidirecional otimizado.

Na Figura 8.22 é mostrada a configuração final das fibras obtidas para a primeira e segunda camada, usando  $5 \times 5$  pontos de controle simétricos e o método PVN e na Figura 8.23 são comparados, para este exemplo, os campos de deslocamento para um material isotrópico (apenas um E, G e  $\nu$ ), laminado unidirecional otimizado  $[+31^\circ/-31^\circ]_s$ , e um laminado otimizado, utilizando  $5 \times 5$  pontos de controle simétricos com o método PVN.

Na Figura 8.24 são comparados para este exemplo o primeiro modo de flambagem para um material isotrópico, laminado unidirecional otimizado  $[+31^\circ/-31^\circ]_s$ , e um laminado otimizado, utilizando  $5 \times 5$  pontos de controle simétricos com o método PVN.

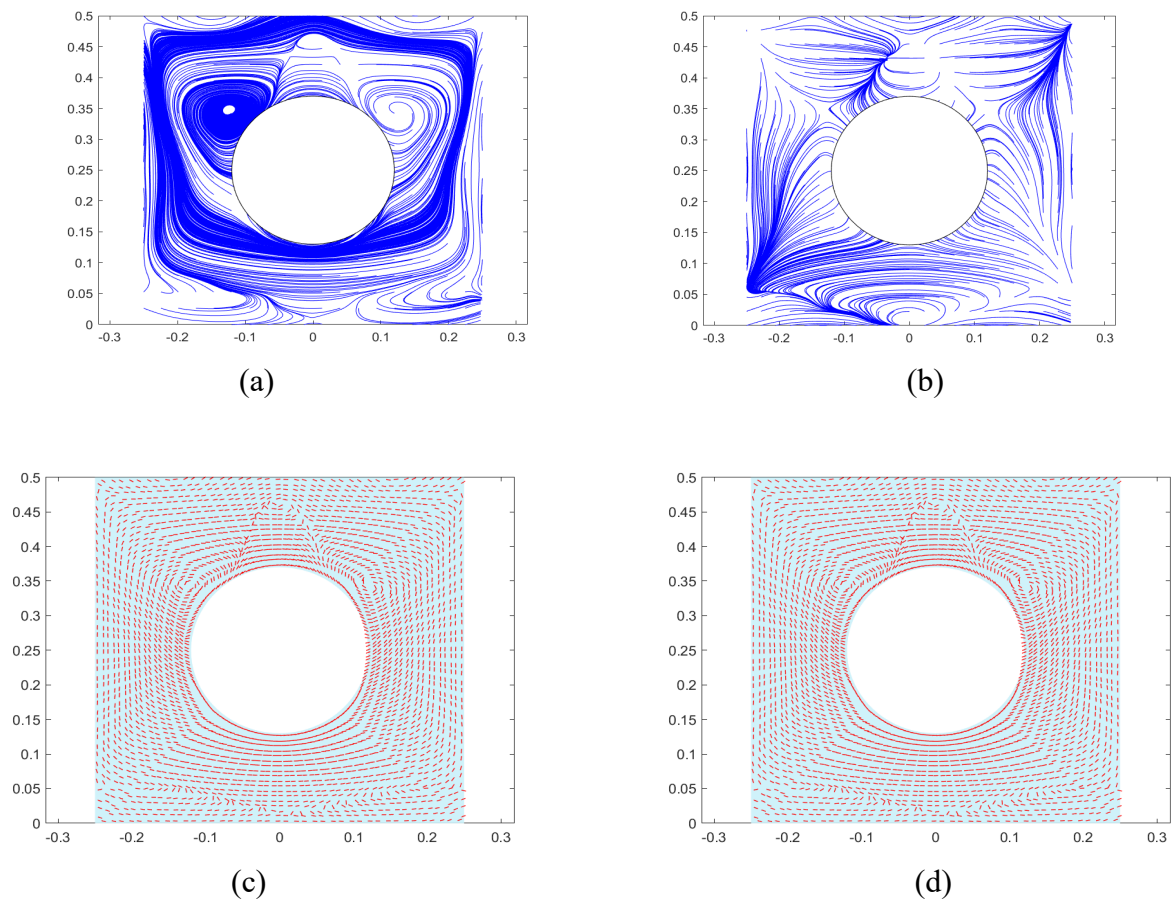


Figura 8.22 – Primeira camada e segunda camada para  $5 \times 5$  pontos de controle simétricos utilizando o método PVN: (a), (b) *Streamlines*; (c), (d) orientação nos pontos de Gauss.

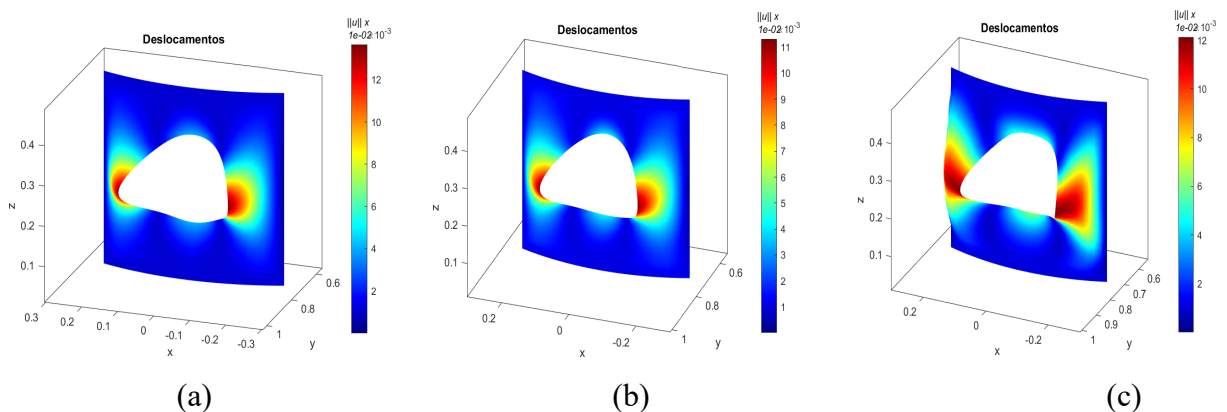


Figura 8.23 – Deslocamentos para: (a) um material isotrópico; (b) laminado unidirecional otimizado  $[+31^\circ/-31^\circ]_S$ ; (c) laminado otimizado,  $5 \times 5$  pontos de controle simétricos com o método das projeções.



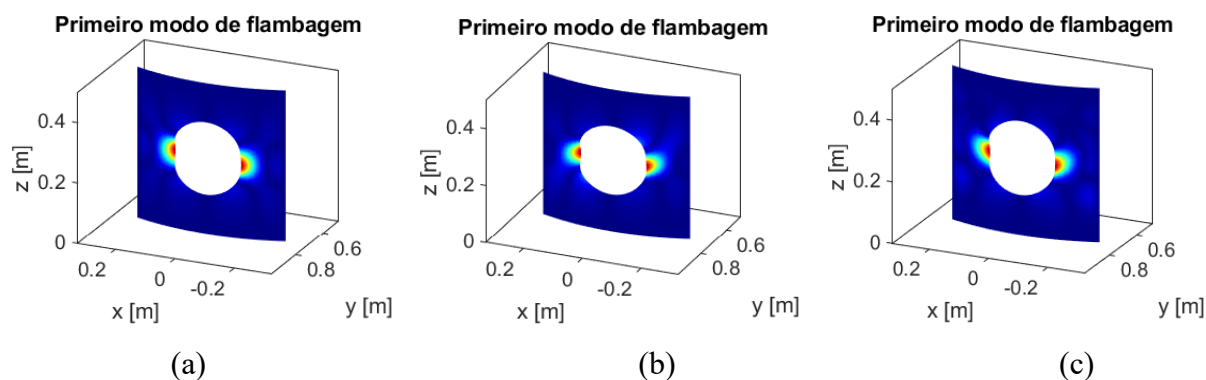


Figura 8.24 – Primeiro modo de flambagem para: (a) um material isotrópico; (b) laminado unidirecional otimizado  $[+31/-31]_s$ ; (c) laminado otimizado ( $5 \times 5$  pontos de controle simétricos com método PVN).

Os campos de deslocamento não apresentaram grandes mudanças quando comparados um material isotrópico e o laminado unidirecional otimizado, como pode se constatar na Figura 8.22. Já o laminado com fibras curvilíneas reorganiza esse campo redistribuindo os esforços.

O padrão obtido possui fibras que tendem a ficar paralelas aos bordos curvos. Isso pode acontecer pela restrição de deslocamentos nessas regiões, as quais podem impedir que a flambagem se dê na sua proximidade. Já no entorno do círculo se encontram regiões críticas para este fenômeno, que são reforçadas por fibras.

Repetindo a distribuição de  $5 \times 5$  pontos de controle distribuídos pela superfície, utilizando a mesma condição de simetria apresentada na Figura 8.18 e utilizando o método GCE é obtido um resultado de menor fator de carga crítica de flambagem. O padrão resultante final das fibras é mostrado na Figura 8.25.

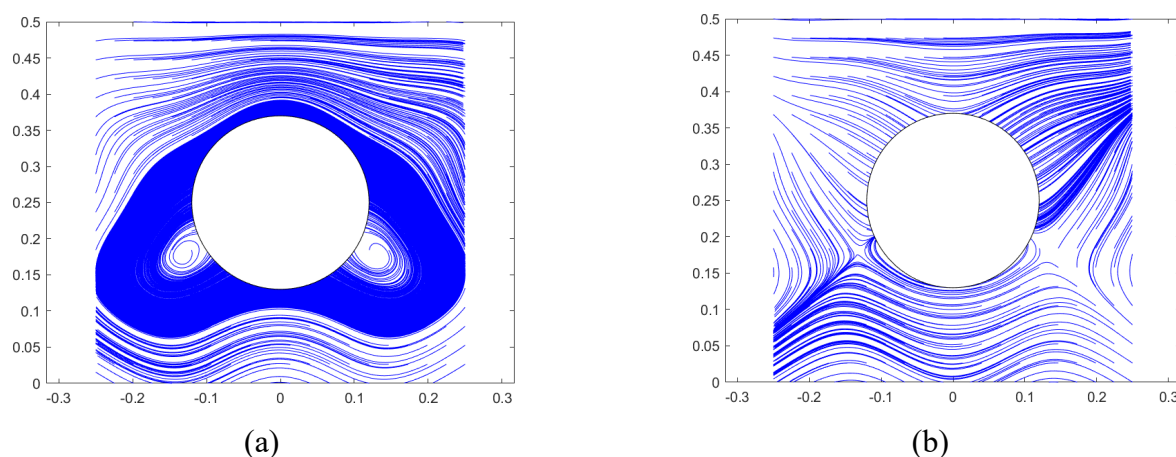


Figura 8.25 – (a) Primeira camada e (b) segunda camada para  $5 \times 5$  pontos de controle simétricos utilizando o método das interpolações.

Os estudos realizados neste exemplo mostraram que, apesar de o método GCE ter retornado um valor ligeiramente inferior de  $\lambda$ , ele apresentou menos variabilidade. Isso sugere que este método seja mais estável caso o número de pontos de controle aumente.

O melhor resultado, sem imposição de simetria, foi obtido com o método PVN para 16 pontos de controle distribuídos de forma equidistante sobre a superfície. Levando a um incremento de 54,20% em relação ao laminado de referência  $[+45^\circ/-45^\circ]_s$  e um incremento de aproximadamente 23% em relação ao laminado unidirecional otimizado  $[+31^\circ/-31^\circ]_s$ . A Figura 8.19 indica a posição dos pontos de controle que resultou na otimização com melhor fator de carga crítica de flambagem com o método PVN.

Na Figura 8.26 estão indicadas as orientações das fibras para a primeira e segunda camadas utilizando para 16 pontos de controle e com uso do método PVN.

Impondo uma condição de simetria a um eixo semelhante ao dos 25 pontos de controle e utilizando o método das projeções obtêm-se um  $\lambda$  de 1,5509 ou seja, ocorre um leve ganho de 1,93% em relação aos resultados obtidos ao deixar todos os pontos de controle livres como variáveis de projeto. A Figura 8.27 ilustra, para este caso, a orientação final obtida para as fibras.

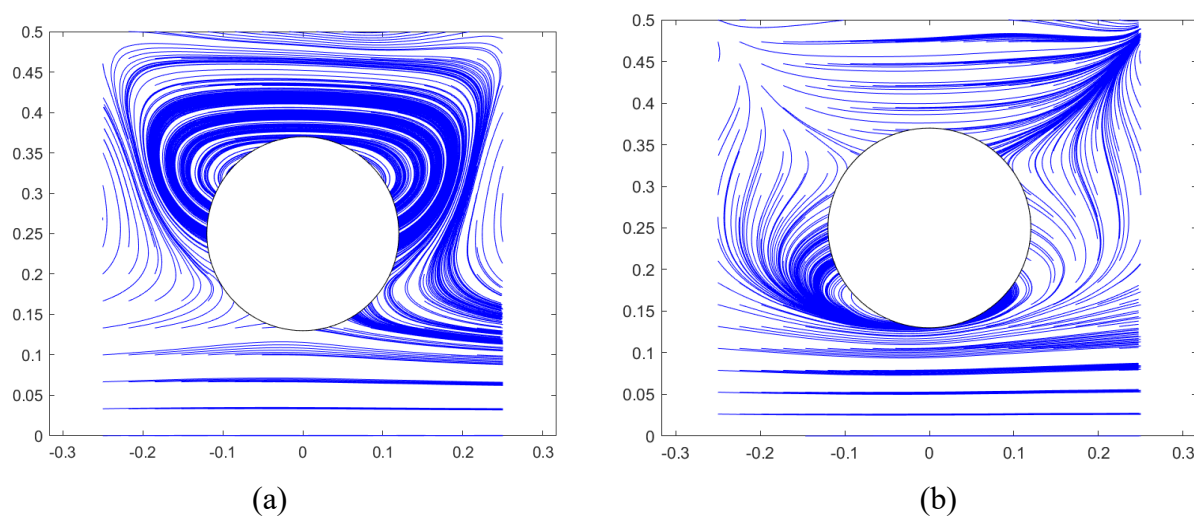


Figura 8.26 – (a) Primeira e (b) segunda camadas para 16 pontos de controle para o método PVN.

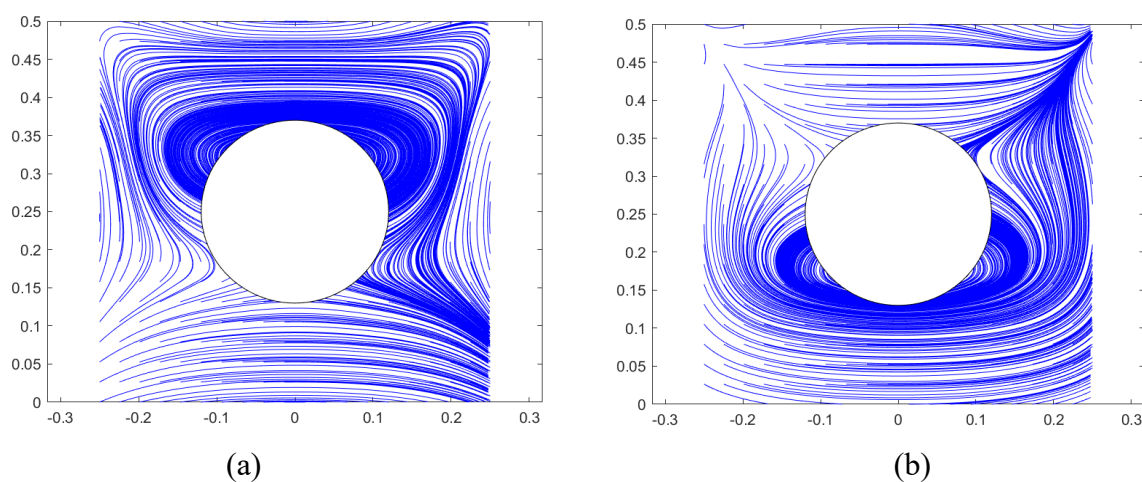


Figura 8.27 – (a) Primeira e (b) segunda camadas, respectivamente, da configuração para 16 pontos de controle com simetria em relação ao eixo  $z$  utilizando o método das projeções.

Novamente é visível a mesma tendência do surgimento de fibras paralelas às bordas curvas. Nesta configuração, as fibras na parte inferior e superior do furo ficam mais suaves.

A utilização de menos pontos de controle leva a trajetórias menos curvas e a estruturas com menor carga crítica de flambagem, o que pode ser devido ao menor grau de liberdade oferecido pela função de interpolação. A Figura 8.28 indica os resultados de orientação de fibras obtidas para a utilização do método PVN e para  $3 \times 3$  pontos de controle (para a primeira e para segunda camadas do laminado).

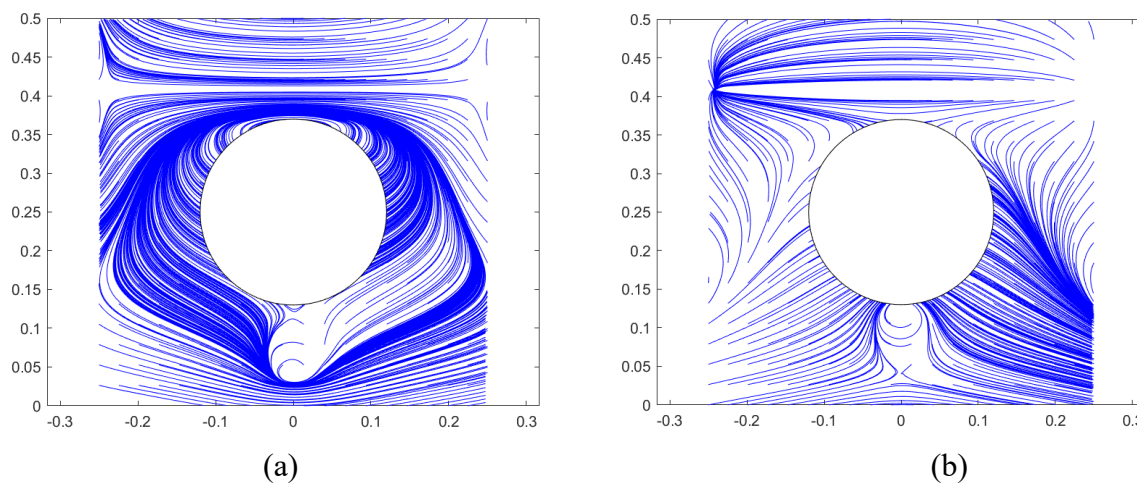


Figura 8.28 – (a) Primeira e (b) segunda camadas, respectivamente, para o método PVN utilizando  $3 \times 3$  pontos de controle.

Para estruturas tridimensionais, os resultados de orientação de fibras diferem quando se utiliza o método PVN ou GCE, diferente do que acontece para as placas, onde as orientações resultam muito semelhantes.

As coordenadas dos pontos de controle que geram as configurações apresentadas neste caso encontram-se no APÊNDICE A, Tabela A.4.

### 8.3.2 Exemplo 2 – Casca com uma borda curva apoiada e a outra com carga compressiva

O segundo exemplo se assemelha mais ao diagrama apresentado por Arsenyeva et al., 2016, e consiste em apoiar a estrutura em uma das bordas curvas e submetê-la a um carregamento uniaxial de compressão de 1168,5 N distribuído nos nós da outra borda curva enquanto as bordas retas são mantidas apoiadas. A mesma malha do exemplo anterior é utilizada e o laminado com fibras unidirecionais otimizado para este caso possui configuração  $[+35^\circ/-35^\circ]_s$ . Neste estudo, para  $4 \times 4$  pontos de controle, a distribuição de camadas se dá na forma  $[\theta/\theta + 90^\circ]_s$  como feito por Arsenyeva et al., 2016. As condições de contorno utilizadas neste trabalho e as utilizadas por Arsenyeva et al., 2016 estão postas lado a lado na Figura 8.29.

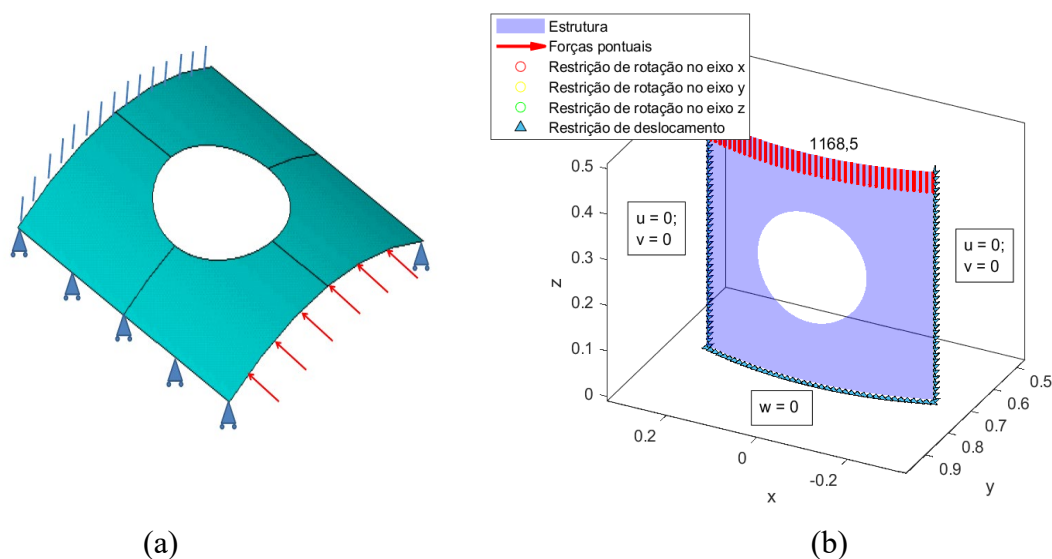


Figura 8.29 – Condições de contorno: (a) Arsenyeva et al., 2016; (b) condições de contorno deste trabalho.

A Tabela 8.7 apresenta os coeficientes de flambagem para as configurações obtidas com as distribuições sugeridas de pontos de controle.

Tabela 8.7 – Resultados obtidos para o segundo exemplo.

	Referência	Otimizado	PVN			GCE		
			3×3 pontos de controle	4×4 pontos de controle	5×5 pontos de controle	3×3 pontos de controle	4×4 pontos de controle	5×5 pontos de controle
$\lambda$	[+45°/-45°] <sub>s</sub> 1,00	[+35°/-35°] <sub>s</sub> 1,0364	1,8130	1,7477	1,8257	1,6596	1,7280	1,8741

O melhor resultado foi obtido com o método GCE e com  $5 \times 5$  pontos de controle simétricos. Sua configuração final é apresentada na Figura 8.30. Como observado no exemplo anterior, o método GCE aparentemente tende a apresentar melhor comportamento com o aumento do número de pontos de controle. Seus resultados mantiveram boa consistência entre múltiplas análises independentes de otimização, enquanto o método PVN apresentou uma variabilidade bastante alta entre os resultados.

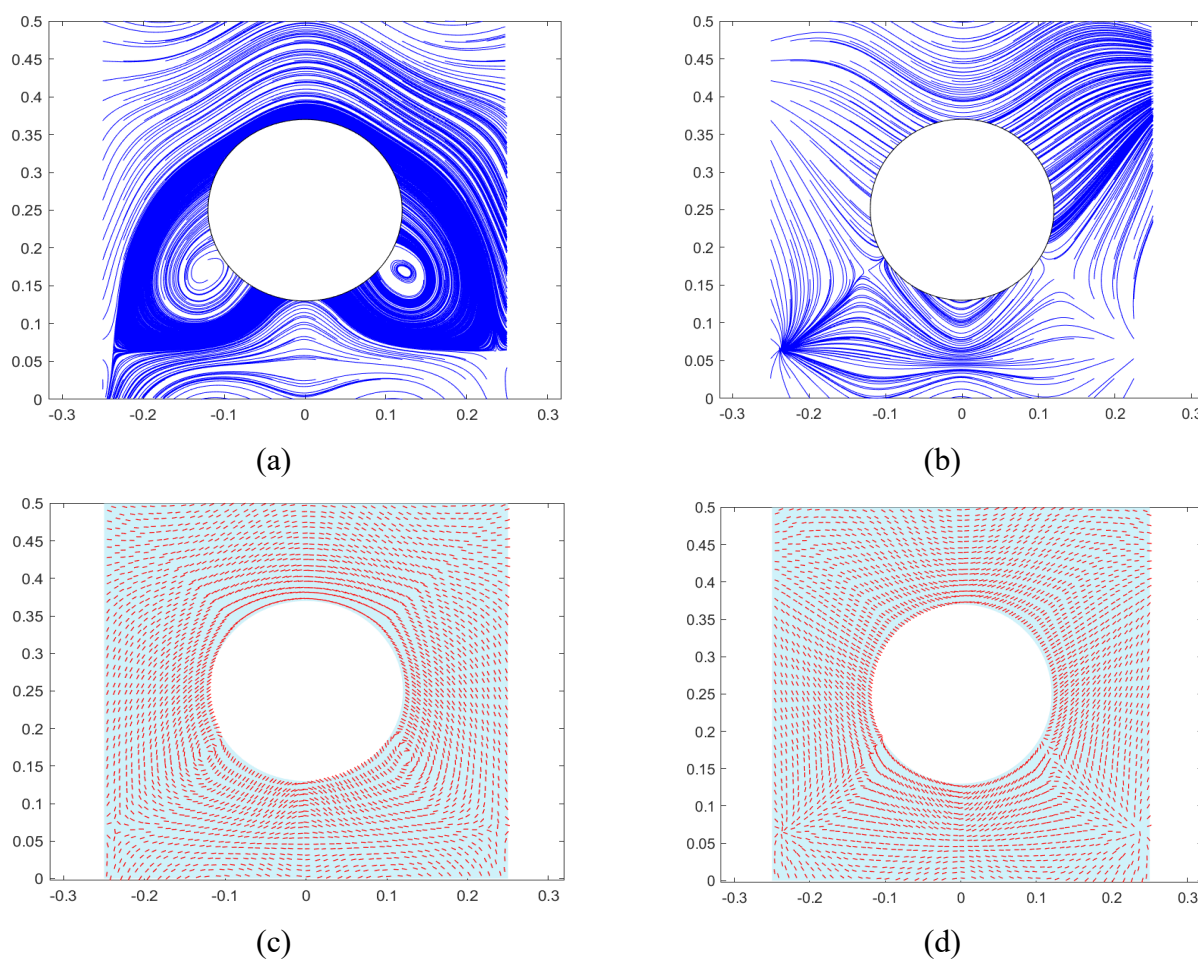


Figura 8.30 – Configurações obtidas utilizando  $5 \times 5$  pontos com simetria e o método GCE: (a), (b) primeira camada e segunda camadas em *streamlines*; (c), (d) primeira e segunda camadas com fibras discretizadas.

Na Figura 8.31 são comparados, para este exemplo, os campos de deslocamento para um material isotrópico, laminado unidirecional otimizado  $[+35^\circ/-35^\circ]_S$ , e um laminado otimizado, utilizando  $5 \times 5$  pontos de controle simétricos com o método GCE.

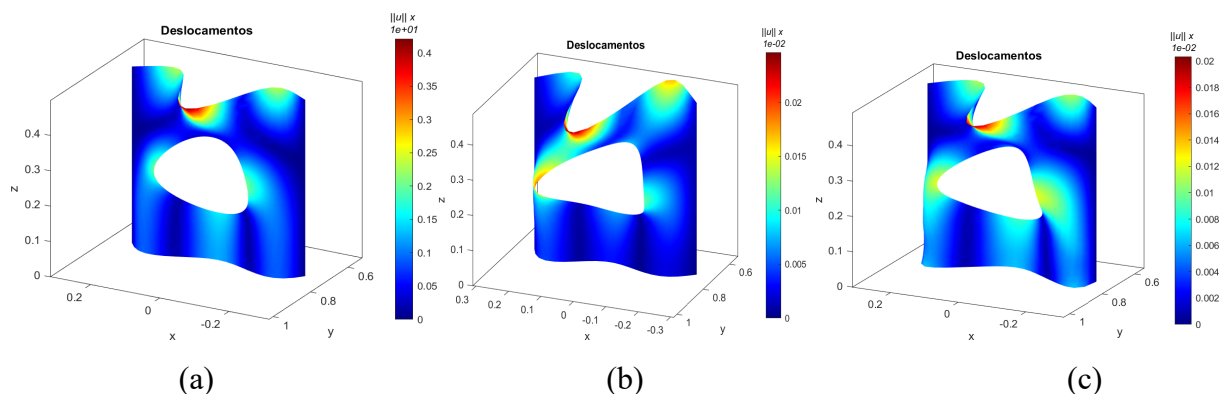


Figura 8.31 – (a) Deslocamentos para um material isotrópico; (b) Deslocamentos para o laminado unidirecional otimizado  $[+35^\circ / -35^\circ]_s$ ; (c) Deslocamentos para o laminado otimizado ( $5 \times 5$  pontos de controle com o método GCE com imposição de simetria).

Na Figura 8.32 são comparados para este exemplo o primeiro modo de flambagem para um material isotrópico, laminado unidirecional otimizado  $[+35^\circ / -35^\circ]_s$ , e um laminado otimizado, utilizando  $5 \times 5$  pontos de controle simétricos com o método GCE.

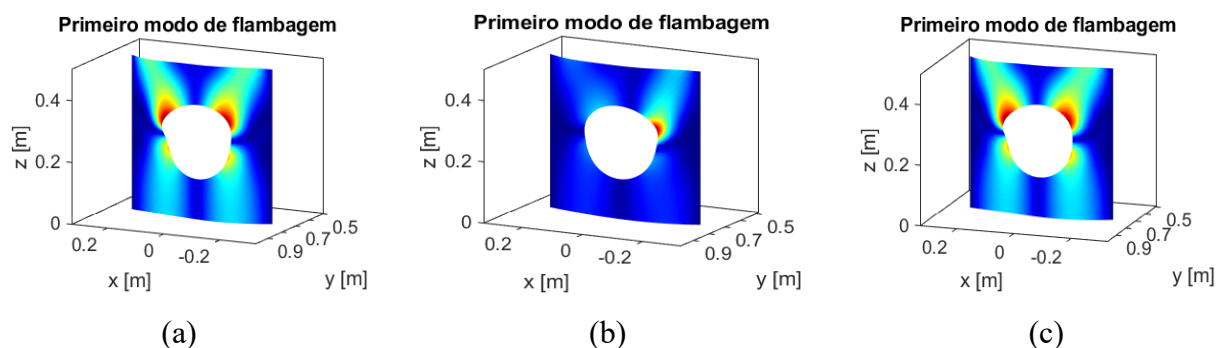


Figura 8.32 – Primeiro modo de flambagem para: (a) um material isotrópico; (b) laminado unidirecional otimizado  $[+35^\circ / -35^\circ]_s$ ; (c) laminado otimizado ( $5 \times 5$  pontos de controle simétricos com o método GCE).

Nas Figuras 8.30(b) e 8.30(d), nota-se a formação de um padrão de fibras que se orientam paralelas ao bordo curvo superior aumentando a rigidez nesta região (a área entre a borda curva superior e o furo circular na linha vertical central). Isto pode acontecer pelos deslocamentos em  $x$  e  $y$  para as bordas estarem permitidos. A estrutura estará submetida a maiores esforços nessa região, dada a menor quantidade de material para suportar as cargas de compressão.

Nota-se, observando as Figuras 8.32b e 8.32c que, ao contrário do caso anterior, ocorre uma mudança significativa no modo de flambagem entre o composto com fibras unidirecionais otimizado e o composto com padrões de fibras com trajetórias variáveis.

Seguindo o padrão do primeiro exemplo, também são enrijecidas as regiões do furo próximas das diagonais limitando as deformações perpendiculares à casca em pontos críticos onde a estrutura pode flambar devido às cargas de tração. Este enrijecimento também aparece na borda inferior com fibras praticamente horizontais que saem da parte inferior do furo até o bordo inferior e em fibras que saem das diagonais inferiores do furo central e seguem praticamente verticais até a parte inferior do setor cilíndrico.

O melhor resultado, com todos os pontos de controle variando livremente está apresentando na Figura 8.33. Ele foi obtido com  $3 \times 3$  pontos e com a utilização do método PVN, apresentando um incremento na carga crítica de flambagem de 81,30% em relação ao laminado de referência  $[+45^\circ/-45^\circ]_s$  de 74,93% em relação ao laminado de fibras unidirecionais otimizado.

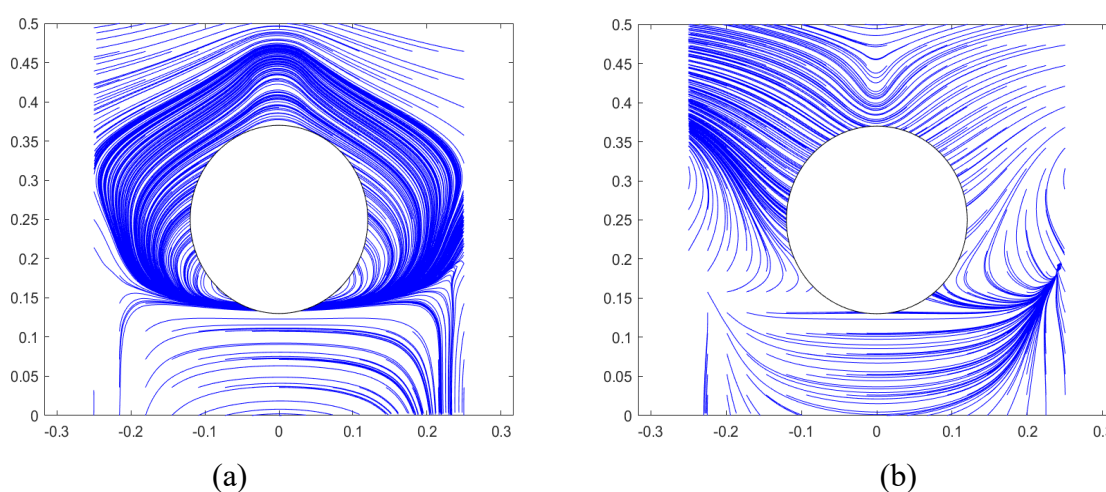


Figura 8.33 – Configurações com  $3 \times 3$  pontos de controle com o método PVN para: (a) primeira camada da melhor configuração; (b) segunda camada.

Utilizando o mesmo número de pontos de controle para o método dos GCE resultou em um  $\lambda$  pior. Neste caso, não se nota os reforços verticais próximos as diagonais inferiores do círculo e as fibras que saem de sua extremidade inferior até o bordo curvo. O resultado para  $9 \times 9$  pontos de controle gerado pelo método GCE se encontra na Figura 8.34.



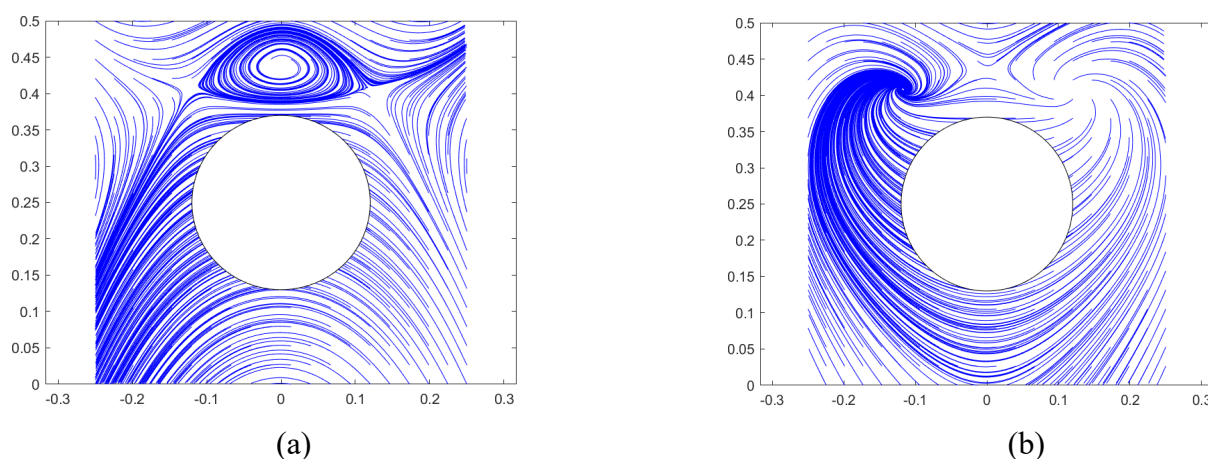


Figura 8.34 – (a) Primeira camada obtida para o método GCE nos nós com 3x3 pontos de controle; (b) Segunda camada obtida para o método GCE com 3x3 pontos de controle.

O resultado para  $4 \times 4$  pontos de controle, quando utilizando o método PVN, se mostrara pior do que para  $3 \times 3$  pontos. Isto pode se dar pelo aumento do espaço de soluções devido a maior liberdade da função de interpolação gerada, o que pode fazer com que o algoritmo de otimização tenha dificuldade de encontrar o ótimo em um espaço mais complexo ou ainda pela disposição dos pontos de controle, que pode não ser capaz de gerar uma função de interpolação propícia para a geração de uma configuração de fibras desejável.

Para verificar se menos variáveis de projeto fornecem condições que permitam alcançar um melhor valor de função objetivo, foi imposta simetria em relação ao eixo vertical central. Então realizou-se a otimização nos mesmos moldes do problema livre desta restrição de simetria. Este processo resultou em um  $\lambda$  de 1,7724 que, apesar de uma pequena melhora, continuou inferior ao obtido com  $3 \times 3$  pontos de controle, o que reforça a possibilidade de que essa quantidade de pontos de controle distribuída de forma uniforme não gera uma função que permita alcançar uma boa solução. Este resultado está apresentado na Figura 8.35.

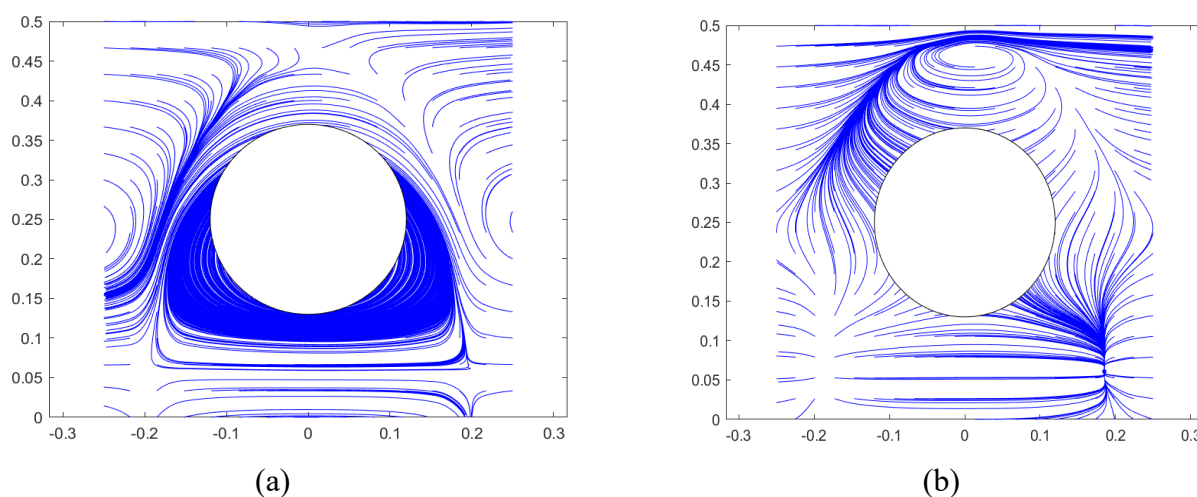


Figura 8.35 – (a) Configurações obtidas para o método PVN com  $4 \times 4$  pontos de controle para a primeira camada (b) Configurações obtidas para o método das PVN com  $4 \times 4$  pontos de controle para a segunda camada.

O incremento de carga crítica mais significativo obtido neste segundo exemplo pode se dar devido a menor quantidade de restrições impostas na estrutura. Imagina-se que isso resulte em um campo de deformações mais complexo que aumenta significativamente as vantagens de se utilizar padrões curvilíneos de fibras.

As coordenadas dos pontos de controle que geram as configurações apresentadas neste caso encontram-se no APÊNDICE A, Tabela A.5.

## 9 CONCLUSÕES

Esta Dissertação propôs o desenvolvimento e a implementação de um código para otimização multiobjetivo em elementos finitos para placas e cascas de material composto com orientação variável das fibras. Para tanto foi desenvolvido algoritmo em linguagem de programação MATLAB R2020b para a análise por elementos finitos, posteriormente validados em termos de deslocamentos, frequências naturais e tensões com o *software* comercial ANSYS 17.0. Funções objetivo do tipo frequências naturais, cargas de flambagem, curvatura das fibras foram utilizadas nas otimizações com o código desenvolvido e posteriormente comparadas com exemplos conhecidos da literatura.

As principais conclusões a que se chegou com este trabalho podem ser listadas e resumidas como a seguir:

- O modelo em elementos finitos desenvolvido em linguagem de programação MATLAB R2020b pode representar com boa acurácia o caso tanto de placas quanto de cascas de elementos em material composto com orientação variável, como atestado pelas comparações com o *software* comercial ANSYS 17.0;

- As duas propostas de parametrização da orientação das fibras mostraram-se viáveis em programas de elementos finitos permitindo uma flexibilidade de padrões finais de orientações de fibras nos exemplos analisados;

- Nos exemplos das otimizações de placas de material composto, para função objetivo de carga de flambagem e curvatura, a maior flexibilidade oferecida pelas duas propostas de parametrização das orientações das fibras possibilitou fronteiras de Pareto ligeiramente mais espalhadas, com valores extremos de frequências e de curvaturas levemente melhores do que aqueles indicados na literatura (que utilizou polinômios de 3<sup>a</sup>. ordem com termos cruzados). Neste caso, alguns dos padrões de orientação das fibras resultaram diferentes daqueles apresentados pela literatura, entretanto com função objetivo melhor;

- Ambas as propostas de parametrização podem ser aplicadas a códigos de elementos finitos diversos, inclusive, programas comerciais que permitam acessar as variáveis necessárias por uma API como, por exemplo, o software ANSYS 17.0 com a biblioteca *pyansys*;

- Para o exemplo da casca curva, aparentemente o método GCE apresentou maior estabilidade à medida que o número de pontos de controle foi aumentado, podendo indicar que talvez ele apresente maior estabilidade e permita a utilização de algoritmos de otimização

menos robustos enquanto o método das PVN apresentou melhores resultados em um dos casos, mas apresenta menor consistência entre os resultados e pode exigir uma população maior ou algoritmos de otimização mais avançados;

- No item 8.1 foi constatado que, para placas, ambos métodos propostos são equivalentes e o melhor resultado foi obtido com 25 pontos de controle com eixo de simetria que proporcionou uma redução de 38,49% na *compliance* em relação ao laminado unidirecional ótimo, já para o item 8.2.1 o melhor resultado foi atingido com a utilização de 25 pontos de controle, enquanto a configuração para 9 pontos de controle condiz com o ponto de máxima frequência natural da fronteira de Pareto do item 8.2.2 no qual os resultados obtidos para a primeira frequência natural nos extremos da fronteira são muito próximos aos obtidos por Honda et al. ,2013. Para a máxima frequência, nota-se um pequeno ganho de frequência natural às custas de um aumento mais significativo para a curvatura média;

- Para o item 8.3.1 o melhor resultado foi atingido com 25 pontos de controle simétricos e com o método das projeções, proporcionando um aumento de 23% no fator de carga crítica de flambagem em relação ao laminado unidirecional ótimo. Já para o item 8.3.2 o melhor valor foi proporcionado pelo método dos gradientes com a utilização de 25 pontos de controle com eixo de simetria e resultou um aumento de 74,93% da carga de flambagem em relação ao laminado unidirecional ótimo;

- A qualidade das soluções obtidas com os métodos aqui propostos aparentemente depende de diversos parâmetros do problema como: número de pontos de controle, condições de contorno e carregamentos;

- Os resultados obtidos mostram que a utilização de padrões com fibras de trajetória variável leva a melhores resultados de função objetivo nos problemas apresentados neste trabalho e que o grau de melhora relativo à configuração unidimensional ótima depende das condições de contorno da estrutura;

## 9.1 Sugestões para trabalhos futuros

Como sugestões para trabalhos futuros, listam-se a seguir os seguintes temas que poderão ser investigados com mais detalhes:

- Avaliação de outros algoritmos de otimização mono e multiobjetivo para a solução dos mesmos problemas analisados neste trabalho e o comparativo da sua acurácia e robustez na solução destes problemas;

- Avaliação de outras propostas de parametrização de orientação das fibras de material composto em comparação com as duas aqui propostas e implementadas;

- Implementação de restrições mais realistas de projeto (maior número de camadas, limitações mais restritivas de curvaturas em função da técnica de construção, tratamento de vazios e sobreposição de fitas nas lâminas). Também a investigação de novas funções objetivos, como, por exemplo, o amortecimento;

- Desenvolvimento e aplicação de modelos substitutivos para o método de elementos finitos para subsequente ganho em velocidade computacional;

- Estudo mais aprofundado da influência da distribuição e quantidade dos pontos de controle, de forma a distribuí-los mantendo os resultados ótimos com um menor número de pontos a fim de aliviar o número de variáveis de projeto e o custo computacional das otimizações.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANSYS. **Mechanical APDL 2017 R2**: Element Reference. <https://www.ansys.com/>, Acesso em 01-03-2020.

Almeida J.H.S, Bittrich L., Jansen E., Tita V. e Spickenheuer A. Buckling optimization of composite cylinders for axial compression: A design methodology considering a variable-axial fiber layout. **Composite Structures**, vol. 222, p. 110928, 2019.

Arora, J. S. **Introduction to optimum design**. Academic Press, Elsevier, 2012.

Arsenyeva, A. L. e Duddeck, F. Optimization of fiber-steered composites by using the iso-contour method with maximum curvature constraint. **ECCM17 - 17th European Conference on Composite Materials**, Munich, Germany, 2016.

Bergh, F. V. D. **An analysis of particle swarm optimizers**, Ph.D. Thesis, Dept. of Comp. Science. The University of Pretoria, Pretoria, South Africa. 2001.

Biancolini, M. E. **Fast Radial Basis Functions for Engineering Applications**. Cham Springer International Publishing, 2017.

Bittrich, L., Spickenheuer, A. e Almeida, J. H. S. Optimizing Variable-Axial Fiber-Reinforced Composite Laminates: The Direct Fiber Path Optimization Concept. **Mathematical Problems in Engineering**, vol. 2019, p. 1–11, 2019.

Blom, A. W., Abdalla, M. M. e Gürdal, Z. Optimization of course locations in fiber-placed panels for general fiber angle distributions. **Composites Science and Technology**, vol. 70, p. 564–570, 2010.

Branke, J. e Mostaghim, S. About selecting the personal best in multi-objective particle swarm optimization, **Parallel Problem Solving from Nature-PPSN IX**, p. 523–532, 2006.

Caliri, M.F., Ferreira, A.J.M. e Tita, V. A review on plate and shell theories for laminated and sandwich structures highlighting the Finite Element Method. **Composite Structures**, vol. 156, p. 63–77, 2016.

Charnes, A. e Cooper, W. W. Management Models and Industrial Applications of Linear Programming. **Management Science**, vol. 4, p. 38–91, 1957.

Chirokov, A. **Scattered Data Interpolation and Approximation using Radial Base Functions**. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/10056-scattered-data-interpolation-and-approximation-using-radial-base-functions>. Acesso em 13-11-2020.

Clancy G.J, Peeters D., Oliveri V., Jones D., O'Higgins R. e Weaver P.M. Steering of Carbon Fiber/Thermoplastic Pre-preg Tapes using Laser-Assisted Tape Placement. **2018 AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference**, 2018

Coello, C. A. C., Lamont, G. B. e van Veldhuizen, D. A. **Evolutionary Algorithms for Solving Multi-objective Problems**. Second Edition. Springer Verlag Publisher. 175-228, 2007. ISBN: 978-0-387-33254-3.

Cook R. D., Malkus D. S., e Plesha M. E., **Concepts and applications of finite element analysis**. Wiley, New York, 4rd edition, 2001.

Cuntze, R. G., Efficient 3D and 2D failure conditions for UD laminae and their application within the verification of the laminate design. **Composites Science and Technology**, v. 66, n. 7-8, p. 1081–1096, 2006.

Barazanchy, D., Van Tooren, M. J. e Elham, A. A new framework for optimization of variable stiffness plates. **58th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures**, 2017.

Dantzig, G. B. **Linear Programming and Extensions**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.

Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S. e Meyarivan, T. A Fast and Elitist Multi-objective Genetic Algorithm: NSGA-II. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, 2002; 6(2)

Deb, K. **Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms**, John Wiley & Sons; 1ª Edição, 2009.

Gomes, H. M., Grotti, E., Backes, A. D. e Awruch, M. D. F. Numerical study on suspension parameters optimization for bus traveling on poor road condition, **SAE Technical Paper**, p.36-0062, 2018

Grotti, E., Awruch, M. D. F. e Gomes, H. M. Multi-objective Optimization of Vehicle Suspension Parameters with QPSO algorithm, **Proceedings of Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications**, São José do Rio Preto, São Paulo, 2017.

Grotti, E., Mizushima, D. M., Backes, A. D. e Gomes, H. M. A novel multi-objective quantum particle swarm algorithm for suspension optimization. **Comp. Appl. Math.** 2020;

Guimarães, T. A. M., Pereira, D. A. e Rade, D. A. Dynamic Behavior and Optimization of Tow Steered Composite Plates. **Lecture Notes in Mechanical Engineering Proceedings of DINAME 2017**, p. 169-184, 2018

Gürdal, Z., Olmedo, R. **In-plane response of laminates with spatially varying fiber orientations: variable stiffness concept.** AIAA Journal, vol. 31, p. 751–8, 1993.

Haftka, R. T.; Gürdal, Z., **Elements of structural optimization.** Dordrecht: Kluwer, 1993.

Holland, J. H., Genetic Algorithms. **Scientific American**, vol. 267, p. 66–72, 1992.

Honda, S., Igarashi, T. e Narita, Y. Multi-objective optimization of curvilinear fiber shapes for laminated composite plates by using NSGA-II, **Composites Part B: Engineering**, , vol. 45(1), p. 1071-1078, 2013.

Hopfield, J. J. e Tank, D. W. Neural computation of decision in optimization problems, **Biological Cybernetics**, Springer Verlag, vol. 52(3): 141-152, 1985.

Hughes, T. J. R. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis.** New York: Dover Publication, Inc., 2000.

Hughes, T. J. R., Taylor, R. L. e Kanoknukulchai, W. A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 11(10), p. 1529–1543, 1977.

Hughes, T. J. R., Cohen, M. e Haroun, M. Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates. **Nuclear Engineering and Design**, vol. 46(1), p. 203–222, 1978.

Igarashi, T., Honda, S. e Narita, Y. Multi-objective Optimization of Fibrous Composite Reinforced by Curvilinear Fibers. **The Proceedings of the Dynamics & Design Conference**, 2011a.

Jones, R. M. **Mechanics of Composite Materials.** 2nd ed., Nova York, Londres, Taylor & Francis, Cop, 1999.



Kim, B. C.; Weaver, P. M. e Potter, K. Manufacturing characteristics of the continuous tow shearing method for manufacturing of variable angle tow composites. **Composites Part A: Applied Science and Manufacturing**, vol. 61, p. 141–151, 2014.

Kennedy, J. e Eberhart, R. Particle Swarm Optimization. **Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks. IV.** p.1942–1948, 1995.

Knowles, J. e Corne, D. The Pareto archived evolution strategy: A new baseline algorithm for Pareto multi-objective optimisation, **Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation**, 1999a.

Kuhn, H.W. e Tucker, A.W., Nonlinear Programming. **Proceedings of the 2nd Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability**, University of California Press, p. 481-492, 1951.

Kwon, Y. W. e Hyochoong B., **The finite element method using MATLAB**. Boca Raton, Fl: Crc Press, 2000.

Lund, E. e Stegman, J. On structural optimization of composite shell structures using a discrete constitutive parameterization. **In: American society for composites 18th technical conference, ASC 18, Gainesville, FL**, p. 1–10, 2003b.

MATLAB, **MATrix LABoratory, R2012a**. The MathWorks Inc., Natick, MA, 2000. [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com). Acessado em 01-09-2020.

Mendonça, P. T. R. **Materiais compostos e estruturas-sanduiche: Projeto e análise**. 2nd Ed., Florianópolis (SC), Orsa Maggiore, 2019.

Nik, M. A., Fayazbakhsh, K., Pasini, D. e Lessard, L. Surrogate-Based Multi-Objective Optimization of a Composite Laminate with Curvilinear Fibers. **Composite Structures**, vol. 94(8), p. 2306-2313, 2012.

Panda, S. e Natarajan, R. Analysis of laminated composite shell structures by finite element method. **Computers & Structures**, vol. 14(3-4), p. 225–230, 1981.

Pareto V. **Manuale di Economia Politica**, Societa Editrice Libreria, Milano, Italy, 1906. Traduzido em inglês por A.S. Schwier como *Manual of Political Economy*, Macmillan, New York, 1971.

Pedersen, P. On Thickness and Orientational Design with Orthotropic Materials. *Structural Optimization*, vol. 3(2), p. 69–78, 1991.

Pereira, D. A., Sales, T. P. e Rade, D. A., Multi-Objective Frequency and Damping Optimization of Tow-Steered Composite Laminates. **Composite Structures**, vol. 256, p. 112-932, 2021.

Kumar, W. P. Prema. e Palaninathan, R, Finite element analysis of laminated shells with exact through-thickness integration. **Computers & Structures**, vol. 63(1), p. 173–184, 1997a.

Kumar, W. P Prema. e Palaninathan, R. Explicit through-thickness integration schemes for geometric nonlinear analysis of laminated composite shells. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 32(4), p. 235–256, 1999b.

Pugh, E.D.L, **The static and Dynamic Analysis of Mindlin Plates by Isoparametric Finite Elements**, Master's thesis, Department of Civil Engineering, University College of Swansea, Reino Unido, 1976.

Pugh, E. D. L., Hinton e E., Zienkewicz, O. C. A study of quadrilateral plate bending elements with “reduced” integration. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 12(7), p. 1059–1079, 1978.

Raftka, R. T. e Gürdal, Z. **Elements of Structural optimization**, Kluwer Academic Publishers, 1992.

Rao, S. S., **Engineering Optimization: Theory and Practice**, 4th Edition, Wiley, 2009.

Rao, K. P. **A rectangular laminated anisotropic shallow thin shell finite element**. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 15:13-33, 1978.

Reddy, S. N. **An Introduction to the Finite Element Method**. 3<sup>rd</sup> Edition, McGraw-Hill, New York, 2004.

Reuter, R. C. Analysis of Shells Under Internal Pressure. **Journal of Composite Materials**, vil. 6(1), p. 94–112, 1972a.

Santana, P. B., Awruch, M. D. F., Grotti, E. e Gomes, H. M. Multiobjective Optimization of Composite Materials for Continuous Fiber Orientation. **In: ENGOPT2018 International Conference on Engineering Optimization**. Switzerland: Springer, vol. 1, p. 1035-1039, 2018, Lisboa.

Setoodeh, S., Abdalla, M. A. e Gürdal, Z. Design of Variable–Stiffness Laminates Using Lamination Parameters. **Composites Part B: Engineering**, vol. 37(4-5), p. 301–309, 2006.

Sobhani Aragh B., Borzabadi Farahani E., Xu B. X., Ghasemnejad H. e Mansur W. J., Manufacturable insight into modelling and design considerations in fibre-steered composite laminates: State of the art and perspective, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 379, p. 113752, 2021.

Soriano, H. L. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. São Paulo, EdUSP, 2003.

Stegmann, J. e Lund, E., Discrete material optimization of general composite shell structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 62(14), p. 2009–2027, 2005a.

Sun, C.T., **Comprehensive Composite Materials**, Amsterdam: Elsevier, vol. 1, p. 641–666, 2000.

Sun, J., Feng, B., Xu, W. Particle swarm optimization with particles having quantum behavior, **Proceedings of Congress on Evolutionary Computation**; p. 325-331, 2004, Portland, OR, USA.

Dias, F. T., Cruz, J. P., Valente, R. A. F., Sousa, R. J. A., **Método Dos Elementos Finitos. Técnicas De Simulação Numérica Em Engenharia**. 2<sup>nd</sup> Ed., Lisboa, ETEP, 2018.

Tsai, S. W., Hahn, H. T., **Introduction to Composite Materials**, Technomic Publishing Company, Inc., 1980.

Van Rossum, G., **Python tutorial**, Technical Report CS-R9526, Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI), Amsterdam, 1995

Van Zanten, F. J., Pupo, C., Barazanchy, D. Optimization of 3D Curved Fiber Steered Shells. **AIAA Scitech 2019 Forum**, 2019.

Wang, Z., Wan, Z., Groh, R. M J., Wang, X. Aeroelastic and Local Buckling Optimization of a Variable-Angle-Tow Composite Wing-Box Structure. **Composite Structures**, vol. 258, p. 113201, 2021a.

Yang, T. Y. High Order Rectangular Shallow Shell Finite Element. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, vol. 99(1), p. 157–181, 1973a.

## APÊNDICE A – Pontos de Controle e Resultados para os Casos Apresentados

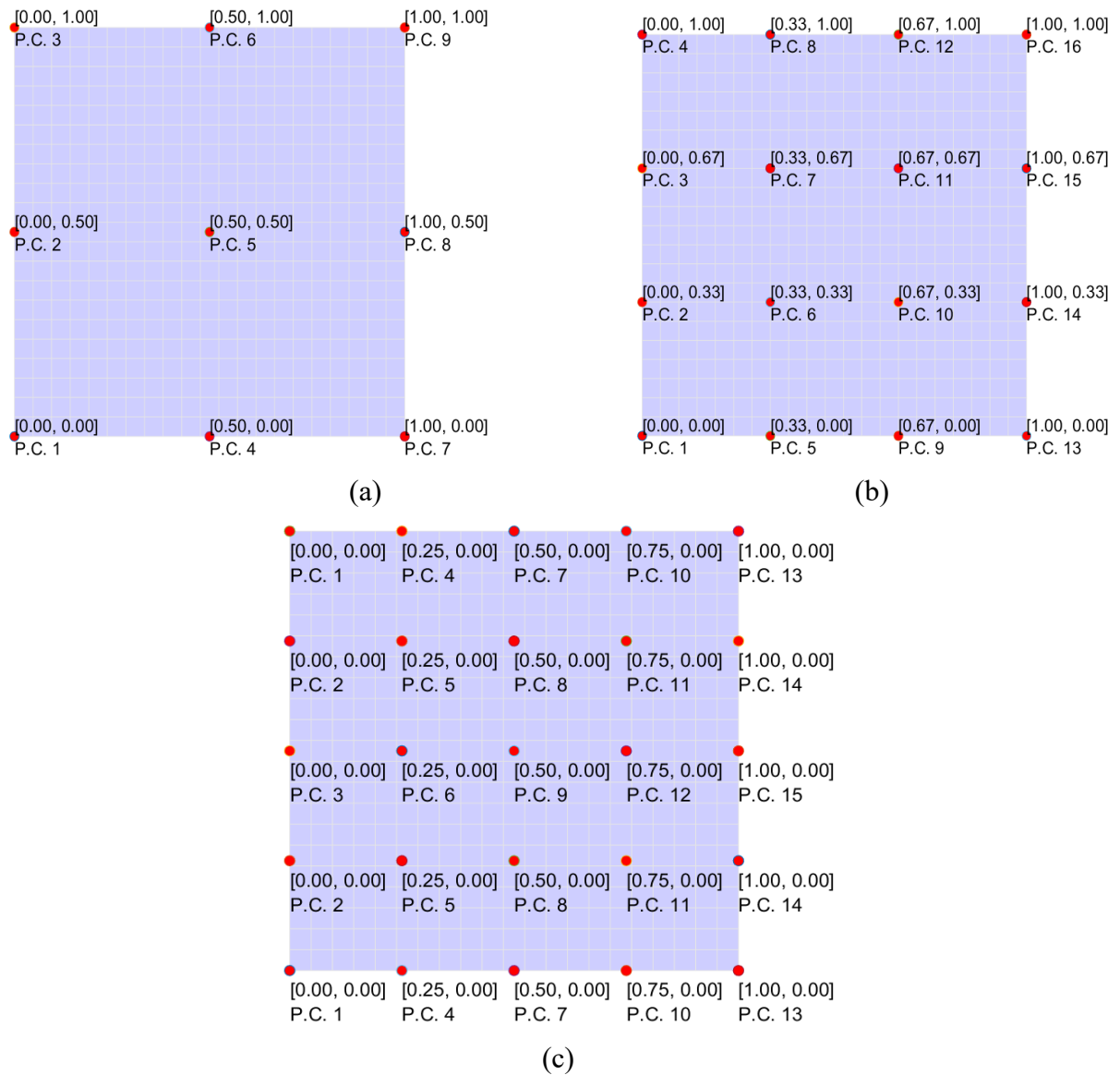


Figura A.1– Disposição dos pontos de controle para grid com: (a) 9 pontos; (b) 16 pontos (c) 25 pontos com simetria para o item 8.1

Tabela A.1 – Pontos de Controle para o item 8.1.

Pontos de controle para o item 8.1						
Pontos de controle	Método das projeções			Método dos gradientes		
	a	b	c	a	b	c
P.C. 1	-4,994153	-5,000000	-4,994095	-4,854676	2,486286	-4,993477
P.C. 2	2,493382	-3,323980	$-3,013489 \times 10^{-1}$	$7,206208 \times 10^{-2}$	-2,749673	$-3,703459 \times 10^{-1}$
P.C. 3	-4,997006	-3,318296	3,848469	4,998802	-3,076458	1,767140
P.C. 4	2,707013	-4,933410	$-4,038239 \times 10^{-1}$	-1,965832	5,000000	$-2,665774 \times 10^{-1}$
P.C. 5	4,999563	-2,628942	3,200731	$7,206232 \times 10^{-2}$	-2,059417	3,262185
P.C. 6	2,707612	-1,107078	4,784620	2,109958	-4,904816	4,063527
P.C. 7	-5,000000	-1,108087	1,717444	-4,854674	-4,999929	3,915605
P.C. 8	2,492308	-2,627728	3,995536	$7,206224 \times 10^{-2}$	-2,047962	4,858908
P.C. 9	-5,000000	2,537760	4,782712	4,998803	-1,966811	4,856987
P.C. 10		$9,970699 \times 10^{-1}$	$-4,064845 \times 10^{-1}$		-5,000000	$-2,677759 \times 10^{-1}$
P.C. 11		$9,995252 \times 10^{-1}$	3,200100		-4,910403	3,262431
P.C. 12		2,535003	4,784605		-2,176884	4,063973
P.C. 13		4,996528	-5,000000		5,000000	-4,999802
P.C. 14		3,239968	$-3,034427 \times 10^{-1}$		-3,132193	$-3,708908 \times 10^{-1}$
P.C. 15		3,234283	3,847844		-2,771094	1,768177
P.C. 16		4,896074			2,211710	

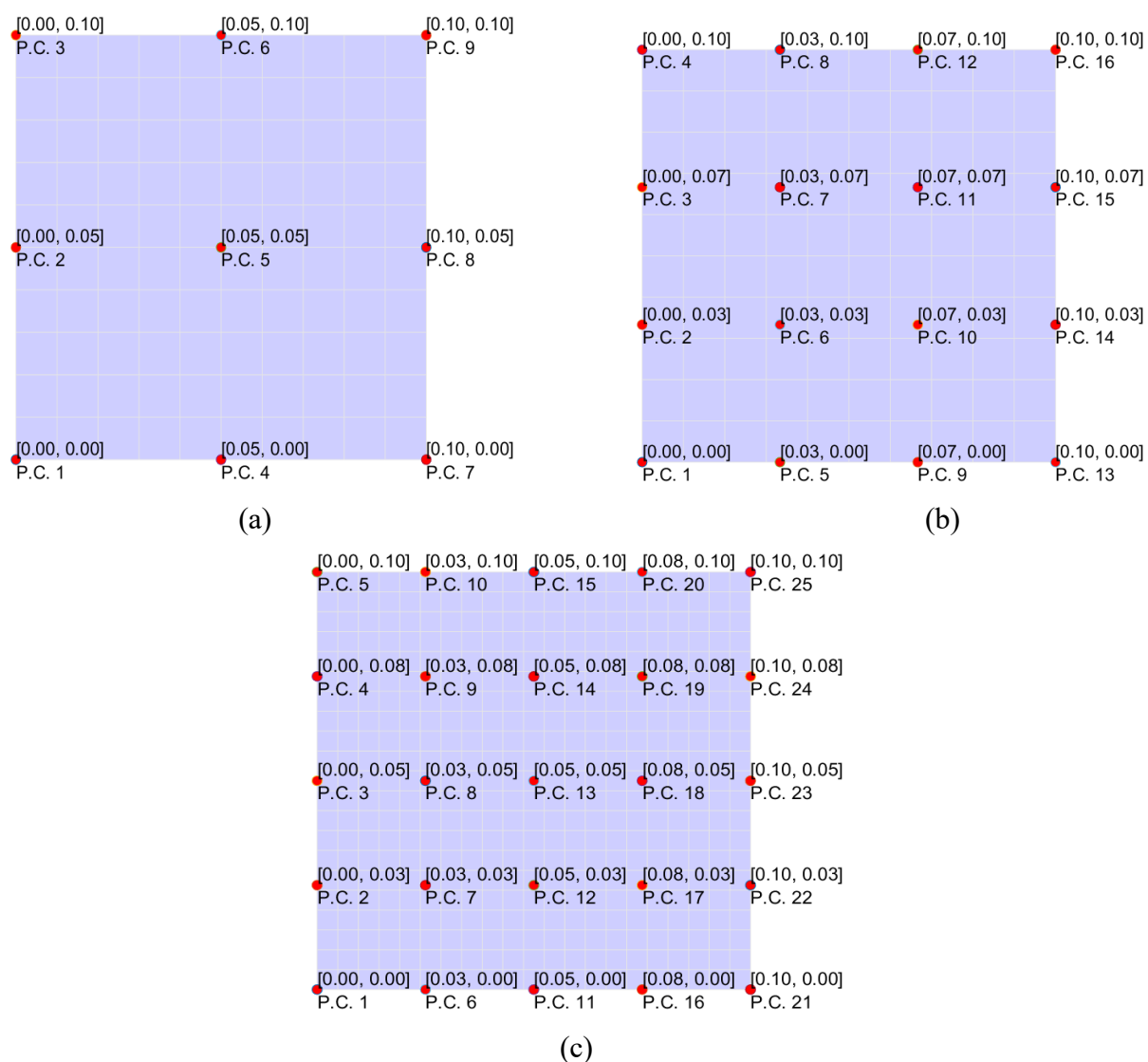


Figura A.2 – Disposição dos pontos de controle para grid com: (a) 9 pontos; (b) 16 pontos (c) 25 pontos com simetria para os itens 8.2.1 e 8.2.2

Tabela A.2 – Pontos de Controle para o item 8.2.2

Pontos de controle para o item 8.2.2		
Pontos de controle	Máxima frequência	Mínima frequência
P.C. 1	-0,99914	-0,99138
P.C. 2	0,50954	-0,99157
P.C. 3	0,92228	-1,00000
P.C. 4	0,51195	-0,067573
P.C. 5	0,25938	-0,042669
P.C. 6	0,51388	-0,013623
P.C. 7	0,94562	0,84242
P.C. 8	0,51743	0,90823
P.C. 9	-0,98957	0,99549

Tabela A.3 – Pontos de Controle para o item 8.2.1

Pontos de controle para o item 8.2.1						
Pontos de controle	Método das projeções			Método dos gradientes		
	a	b	c	a	b	c
P.C. 1	4,175750	1,159945	-2,368166	4,993068	4,000000	-7,057177×10 <sup>-1</sup>
P.C. 2	-2,992304	-6,971166×10 <sup>-1</sup>	-1,399056	-1,820904	3,197134	-4,724844
P.C. 3	-5,000000	-4,015609	2,420764	-3,716565	5,063172×10 <sup>-1</sup>	4,406067
P.C. 4	-2,992303	-5,000000	-1,347908	-1,824058	-8,110423×10 <sup>-1</sup>	-3,816704
P.C. 5	-1,787651	2,158977	-3,571506	-6,805897×10 <sup>-1</sup>	3,189321	2,105054
P.C. 6	-2,992297	8,853191×10 <sup>-1</sup>	-1,668187	-1,822106	2,724104	-4,999882
P.C. 7	-5,000000	-3,554715	-2,567374×10 <sup>-1</sup>	-3,770972	-6,594858×10 <sup>-1</sup>	4,217795×10 <sup>-1</sup>
P.C. 8	-2,992297	-4,016424	2,893952	-1,833585	-1,645811	4,454901
P.C. 9	4,175774	4,433269	3,745923×10 <sup>-1</sup>	4,999677	4,553617×10 <sup>-1</sup>	1,210236
P.C. 10		3,656972	-6,853992×10 <sup>-1</sup>		-6,85887×10 <sup>-1</sup>	-4,455094
P.C. 11		8,795136	2,789743		-2,944154	4,445721
P.C. 12		-7,017933×10 <sup>-1</sup>	3,413710		-3,556555	4,401783
P.C. 13		5,000000	5,000000		-8,411987×10 <sup>-1</sup>	5,000000
P.C. 14		4,430632	2,715086		-1,668326	4,538239
P.C. 15		2,146172	2,161172		-3,563303	5,000000
P.C. 16		1,135442	3,587326		-4,000000	-4,383721
P.C. 17			3,705193			8,327221×10 <sup>-1</sup>
P.C. 18			3,083438			4,363042
P.C. 19			-2,369561			3,162411×10 <sup>-1</sup>
P.C. 20			-5,000000			-5,000000
P.C. 21			2,605768			3,825558
P.C. 22			3,569872			-4,999972
P.C. 23			2,318867			4,343429
P.C. 24			-4,483928			-5,000000
P.C. 25			-5,000000			3,139529×10 <sup>-1</sup>



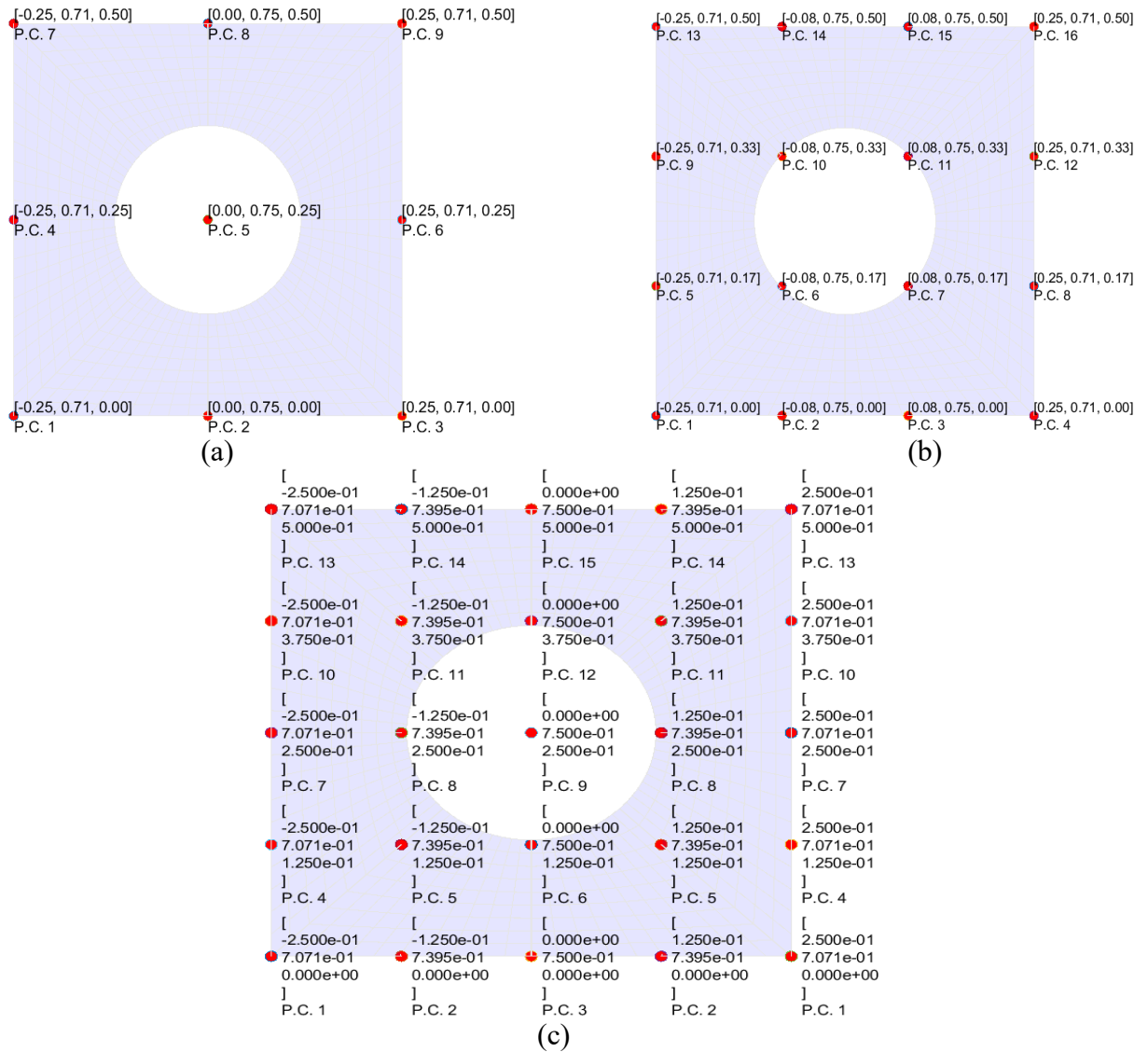


Figura A.3 – Disposição dos pontos de controle para grid do item 8.3.1

Tabela A.4 – Pontos de Controle para o item 8.3.1

Pontos de controle para o item 8.3.1						
Pontos de controle	Método das projeções			Método dos gradientes		
P.C. 1	-3,573396	4,881175	-1,825429	4,046227e-1	2,916035	5,000000
P.C. 2	-5,000000	4,999933	-3,290242	-1,299926	3,329359	1,718554
P.C. 3	-3,577907	5,000000	-1,943824	-2,801009e-1	-2,338707	4,983464
P.C. 4	5,246218×10 <sup>-1</sup>	4,960695	-3,796304×10 <sup>-1</sup>	-3,875152	-1,992616	-2,682393
P.C. 5	-4,101742	7,802935×10 <sup>-1</sup>	2,767503	-2,370367	2,841777	-4,578170
P.C. 6	5,144987	2,336253	5,000000	-3,994621	-1,500031	-3,462593
P.C. 7	9,884163×10 <sup>-1</sup>	1,981834	-1,204845	-3,590823e-1	1,994809	-1,332593
P.C. 8	3,680170	5,047032×10 <sup>-1</sup>	3,823181	4,756782	-1,997539	-4,597946
P.C. 9	9,762249×10 <sup>-1</sup>	3,724919×10 <sup>-1</sup>	1,472347	-7,487809e-1	3,619331	-4,273364
P.C. 10		3,301366	-2,531938×10 <sup>-1</sup>		1,600944	-4,08290×10 <sup>-1</sup>
P.C. 11		3,104400	3,828921		-8,209676×10 <sup>-1</sup>	-1,407222
P.C. 12		4,539663×10 <sup>-2</sup>	1,955338		-2,720357	-3,359601
P.C. 13		7,849666×10 <sup>-1</sup>	3,795748×10 <sup>-1</sup>		-4,550841	4,996578
P.C. 14		4,048913×10 <sup>-1</sup>	-3,025276×10 <sup>-1</sup>		-4,999285	4,999986
P.C. 15		-9,178429×10 <sup>-3</sup>	2,502084		5,000000	4,999828
P.C. 16		3,802670×10 <sup>-1</sup>			4,634337	

Tabela A.5 – Pontos de Controle para o item 8.3.2

Pontos de controle para o item 8.3.2						
Pontos de controle	Método das projeções			Método dos gradientes		
P.C. 1	-7,908106×10 <sup>-1</sup>	2,397603	-3,649271	-1,230322	3,215811	-1,201308
P.C. 2	3,493982	4,9592	4,993571	4,9595	5,000000	4,881007
P.C. 3	-7,729685×10 <sup>-1</sup>	4,9212	-4,437408	-1,2303	5,000000	3,032494
P.C. 4	-2,951536×10 <sup>-1</sup>	2,1189	-2,912445	-4,5462	3,189115	-2,103325×10 <sup>-1</sup>
P.C. 5	-3,154621	5,0000	-1,911843	-1,7460	3,640630	-4,998431
P.C. 6	-2,965386×10 <sup>-1</sup>	3,2751×10 <sup>-1</sup>	-2,661680	-4,5462	-4,378430	-1,409028×10 <sup>-1</sup>
P.C. 7	-3,170275	8,4930×10 <sup>-3</sup>	-2,578968	-3,1452	-4,364781	1,739381
P.C. 8	-4,177596	4,9940	-2,993017	-3,4807	3,541596	-4,116773
P.C. 9	-3,158472	4,793745	-3,209230	-3,145200	5,000000	-5,000000
P.C. 10		1,2609	-2,342796		9,625863×10 <sup>-1</sup>	3,152201
P.C. 11		1,0463	-2,970035		1,002022	1,054025
P.C. 12		4,9154	-4,990991		5,000000	-1,612189
P.C. 13		1,6485	1,453296		2,650333	4,999925
P.C. 14		1,6499	2,730236		2,914114	5,000000
P.C. 15		1,5883	-3,923136		2,887264	3,261671
P.C. 16		1,6079			2,505075	

## ANEXO I – Funções de Forma e Funções de Base Radial de Suporte Global

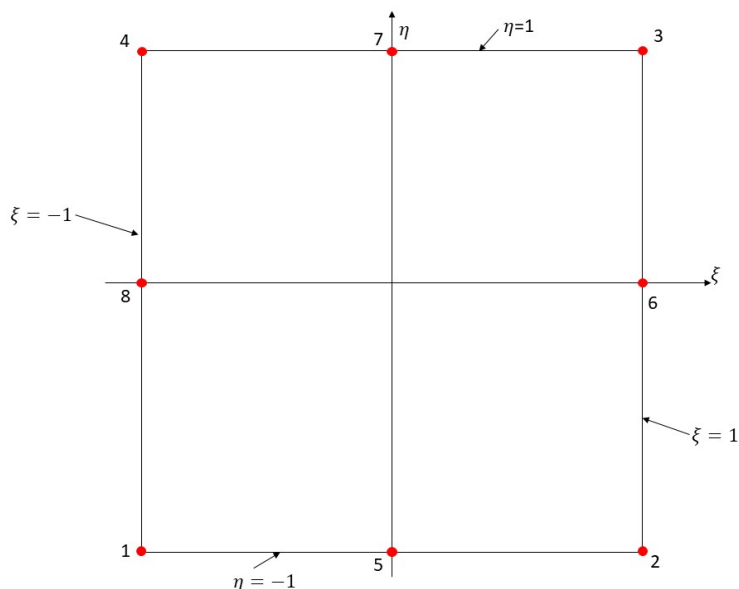


Figura I.1– Coordenadas naturais do Elementos Finito de 8 nós.

Tabela I.1– Funções de forma para elementos finitos de casca de 8 nós.

$N_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta)$	$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \eta)$
$N_2(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \xi + \eta)$	$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \eta)$
$N_3(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \xi - \eta)$	$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \eta)$
$N_4(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi - \eta)$	$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \eta)$

Tabela I.2 – Funções de Base Radial mais comuns.

Função de base radial	$\varphi(r)$
<i>Spline</i> ( $R_n$ )	$r^n$
Multiquadrática	$\sqrt{1+r^2}$
Multiquadrática inversa	$\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$
Inversa quadrática	$\frac{1}{1+r^2}$
Gaussiana	$e^{-r^2}$

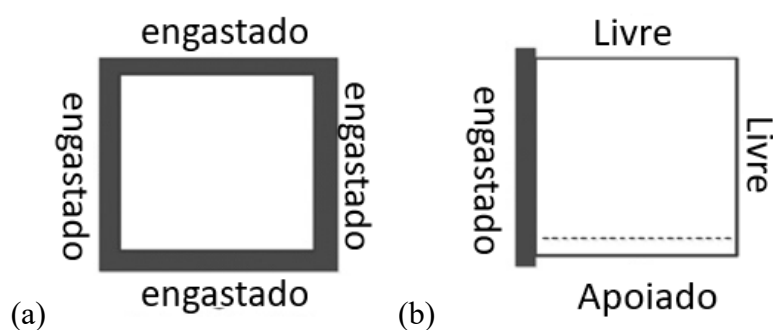


Figura I.2 – Condições de contorno para: (a) item 7.2.1; (b) item 7.2.2.

Tabela I.3 – Coeficientes dos polinômios obtidos por Honda et al., 2013.

Item	Coeficientes dos polinômios								
7.2.1	-2,0	0,0	-0,1	0,8	0,0	-0,9	-0,3	-0,3	0,0
	0,1	0,0	-0,3	1,0	0,0	-1,7	-2,0	2,0	-0,1
	0,0	0,0	0,0	-0,2	0,0	0,2	0,6	2,0	0,0
7.2.2	-1,3	2,0	-1,3	1,4	0,9	-1,5	1,9	-0,4	1,8
	-0,2	0,3	-1,5	1,3	0,8	-1,9	0,4	1,7	1,8
	-0,2	0,3	-2,0	0,6	1,3	-0,9	-2,0	0,6	-0,8

## ANEXO II – Interpolação por Funções de Base Radial

Um estudo mais detalhado sobre funções de base radial e suas aplicações pode ser encontrado em Biancolini, 2017. Neste anexo serão abordados os conceitos básicos que foram utilizados no desenvolvimento de parte dessa dissertação.

Funções de base radial surgiram como um método de interpolação para dados esparsos e sua grande vantagem reside no fato de elas serem capazes de gerar uma função de interpolação em qualquer ponto discreto do espaço que retorna os valores exatos nos pontos de controle que a geraram. O comportamento da interpolação construída depende do tipo de função de base radial selecionada e um valor interpolado pode ser obtido por:

$$s(x) = \sum_{i=1}^N \gamma_i \varphi(\|\{x\} - \{x_{f_i}\}\|) + h(x) \quad (\text{II.1})$$

A Equação II.1 é definida para uma variável de dimensão arbitrária e representa uma transformação  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e o valor em um dado ponto  $x$  é calculado levando em conta as interações com todos os pontos de controle  $x_f$  através da distância entre  $x$  e cada ponto  $x_{f_i}$  gerada pela função de base radial  $\varphi$ , caracterizando uma transformação  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , e multiplicada pelos pesos  $\gamma_i$ . Também pode aparecer uma função polinomial  $h(x)$  para garantir que o a interpolação tenha unicidade e o grau desse polinômio é definido de acordo com a função de base radial adotada.

A interpolação de base radial existe se for possível encontrar pesos e coeficientes do polinômio tal que os valores exatos da função desejada condigam com os pontos de controle:

$$s(x_{f_i}) = g_{f_i}, 1 \leq i \leq N \quad (\text{II.2})$$

Para uma função de base radial positivo definida de ordem  $m \leq 2$ , uma função linear para uma ou várias variáveis  $k$  pode ser utilizada como função  $h(x)$  com coeficientes  $\beta$ .

Os valores para os pesos  $\gamma$  e os coeficientes  $\beta$  são obtidos através do sistema abaixo.

$$\begin{bmatrix} [M] & [P_s] \\ [P_s^T] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

Na Equação II.3,  $g_f$  representa o vetor com os valores de resposta dos pontos de controle,  $M$  é a matriz de interpolação contendo as interações radiais entre todos os pontos originais e  $P_s$  é a matriz de restrição que balanceia a contribuição do polinômio, sendo

constituída por uma coluna de 1 e a posição dos pontos de controle nas demais colunas. Essas matrizes estão representadas nas Equações II.4 e II.5, respectivamente.

$$M_{ij} = \varphi \left( \left\| x_{f_i} - x_{f_j} \right\| \right), 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N \quad (\text{II.4})$$

$$[P_s] = \begin{bmatrix} x_{s_1} & y_{s_1} & z_{s_1} & \dots & w_{s_1} \\ x_{s_2} & y_{s_2} & z_{s_2} & \dots & w_{s_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{s_N} & y_{s_N} & z_{s_N} & \dots & w_{s_N} \end{bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

O vetor  $\{g\}$  pode ser substituído por uma matriz retangular e resolvido coluna a coluna, obtendo-se dessa forma os valores de  $\gamma$  e  $\beta$  para cada uma delas.

Também é possível mapear diretamente os valores da função calculados em um conjunto de pontos desejados  $x_e$  através de uma matriz capaz de interpolar diretamente os pontos desejados como uma transformação linear de  $g_f$  nos pontos de controle. Essa matriz está definida na Equação II.6.

$$A_{ij} = \varphi \left( x_{e_i} - x_{s_j} \right), 1 \leq i \leq N_e, 1 \leq j \leq N_s \quad (\text{II.6})$$

No caso de uma função de base radial sem o termo polinomial, os valores desejados  $g_e$  podem ser escritos como uma função linear dos pontos de controle  $g_f$ .

$$\{g_e\} = [A][M]^{-1}\{g_f\} \quad (\text{II.7})$$

Esta abordagem não é muito conveniente devido ao alto custo computacional da inversão da matriz ou do custo de memória para manter a matriz inversa avaliada.

A complexidade da interpolação está fortemente atrelada ao tipo de funções de base radial selecionadas que, de forma genérica, podem ser divididas em suporte global e compacto.

Quando se utiliza o suporte global, todos os pontos de interpolação interagem entre si, logo, uma boa acurácia é obtida, porém, o problema se torna bastante custoso pois uma matriz densa é utilizada para determinar os coeficientes da interpolação. Já ao se utilizar o suporte compacto, somente ligações entre pontos próximos são levadas em conta através da definição de um raio de interação que delimita a área de atuação da função de base radial.

Algumas das funções de suporte global estão listadas nos ANEXO I na Tabela I.2.