

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SOLUÇÕES ESPECTRONODAIS PARA PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS DE
RADIAÇÃO EM MEIO COM ANISOTROPIA DE GRAU ARBITRÁRIO

por

Karine Rui

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Abril de 2021

SOLUÇÕES ESPECTRONODAIS PARA PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS DE
RADIAÇÃO EM MEIO COM ANISOTROPIA DE GRAU ARBITRÁRIO

por

Karine Rui

Mestre em Modelagem Matemática

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof^a. Dr^a. Liliane Basso Barichello

Aprovada por:

Prof. Dr. Alireza Haghighat DEM / Virginia Tech, USA

Prof. Dr. Rudnei Dias da Cunha IME / UFRGS

Prof. Dr. Francis Henrique Ramos França PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Fernando Marcelo Pereira

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 27 de Abril de 2021

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha orientadora Dr^a. Liliane Basso Barichello pela oportunidade, orientação, dedicação e conhecimento compartilhado.

Ao professor Dr. Rudnei Dias da Cunha pelos ensinamentos compartilhados e auxílio na realização deste trabalho.

Aos membros da banca avaliadora por terem contribuído e colaborado na conclusão desta tese.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC/UFRGS) pela oportunidade recebida.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) pelo apoio e pelos recursos computacionais do Centro Nacional de Supercomputação (CESUP) para a realização deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos concedida a qual possibilitou a realização desta pesquisa.

Aos meus pais e minha família pelo carinho, incentivo e suporte em todos os momentos da minha vida.

Ao meu companheiro Andrei por toda ajuda, dedicação, compreensão, apoio e suporte nesta jornada, que foi fundamental para a concretização deste trabalho.

Aos meus amigos, colegas e a todos que de alguma forma contribuíram direta ou indiretamente para que a conclusão deste estudo fosse possível.

À Deus por iluminar o meu caminho.

RESUMO

Neste trabalho, uma formulação explícita para resolver problemas de transferência radiativa em geometria cartesiana bidimensional e meios com espalhamento anisotrópico é desenvolvida. A anisotropia de ordem superior é modelada a partir da expansão da função de fase em termos de polinômios de Legendre até a ordem arbitrária L . Uma metodologia analítica de ordenadas discretas (método ADO) juntamente com uma técnica nodal são utilizadas para resolver a aproximação de ordenadas discretas da equação de transferência radiativa. Para derivar a solução, as equações de ordenadas discretas são integradas transversalmente sobre regiões do domínio reduzindo a complexidade do modelo, resultando em duas equações unidimensionais para intensidades angulares médias nas direções x e y . As equações unidimensionais, com aproximações constantes para as intensidades desconhecidas nos contornos das regiões, são então explicitamente resolvidas pelo método ADO, no que diz respeito às variáveis espaciais, cujas soluções são escritas em termos de autovalores e autofunções. O problema de autovalor é derivado para o caso geral da expansão de ordem arbitrária da função de fase e preserva uma característica relevante do método ADO, que é a ordem reduzida igual à metade do número de direções discretas. Da aplicação do método, dito ADO-Nodal, para derivação de soluções de problemas de transporte radiativo surgem sistemas de equações lineares de alta ordem e esparsos, uma vez que esta técnica não usa esquemas de varredura. A solução do sistema é determinada inicialmente por métodos diretos, através da fatoração LU de uma matriz geral. Em uma segunda etapa, um rearranjo desse sistema linear é obtido modificando a estrutura da matriz para o caso esparsa com estrutura diagonal, possibilitando sua resolução através de subrotina específica. O reordenamento das equações permitiu a resolução de sistemas de ordem superior aos obtidos anteriormente na literatura, aumentando assim a acurácia geral do método ADO para a classe de problemas investigada. Ainda na busca de alternativas para sistemas de ordem superior gerados para os casos de malhas cada vez mais refinadas, são estudadas soluções alternativas do sistema linear em paralelo e com o uso da técnica de decomposição de domínio por complemento de Schur. Resultados numéricos são obtidos para a densidade média de radiação para casos teste em que o grau de anisotropia pode ser de até doze. Uma análise comparativa com resultados disponíveis na literatura permite a verificação da formulação e indica um bom desempenho do método

proposto. Ainda, esquemas alternativos de quadratura numérica, que permitem ordem superior aos esquemas clássicos disponíveis na literatura para esse problema, são utilizados para aproximar o termo integral de espalhamento. Análises são realizadas sobre os efeitos no fluxo de calor radiativo da espessura óptica do meio, bem como a reflectividade no contorno do domínio e o albedo de espalhamento. Foram gerados resultados para malhas mais refinadas dos que os disponíveis na literatura e para diferentes espessuras ópticas do meio, bem como análises de intensidades médias por seção do domínio, na tentativa de busca de soluções benchmark para estes problemas com anisotropia.

Palavras-chave: Problemas Bidimensionais de Transferência Radiativa; Ordenadas Discretas; Método ADO; Espalhamento Anisotrópico; Sistemas Lineares Esparsos.

ABSTRACT

In this work, an explicit formulation to solve radiative transfer problems in two-dimensional Cartesian geometry and anisotropic scattering media is developed. Higher order anisotropy is modeled from the expansion of the phase function in terms of Legendre polynomials up to arbitrary order L . The Analytical Discrete Ordinates (ADO) method along with a nodal technique are used to solve the discrete ordinates approximation of the radiative transfer equation. To derive the solution, the discrete ordinates equations are transversally integrated over regions of the domain, reducing the complexity of the model, yielding two one-dimensional equations for average angular intensities in x and y directions. The one-dimensional equations, with constant approximations for unknown intensities on the contours of the regions, are explicitly solved by the ADO method, with respect to spatial variables, whose solutions are written in terms of eigenvalues and eigenfunctions. The eigenvalue problem is derived for the general case of the arbitrary order expansion of the phase function and it preserves a relevant feature of the ADO method, which is the reduced order equal to half the number of discrete directions. From the application of the so-called ADO-Nodal method, to derive solutions to radiative transport problems, high order and sparse linear systems arise, since this technique does not use sweep schemes. Firstly the system solution is determined by direct methods through the LU factorization of a general matrix. As a second step, a rearrangement of this linear system is obtained to make the system more feasible to be solved using LU factorization of a sparse matrix with a diagonal structure. The reordering of the equations allowed to solve systems of higher order than previously obtained in the literature, thereby increasing the overall accuracy of the ADO method for the class of problems being investigated. Furthermore, alternative solutions of the linear system in parallel computation and with the use of the domain decomposition technique through Schur complement are studied for dealing with higher order systems generated in refined meshes. Numerical results are obtained for the average radiation density, for test cases in which the degree of anisotropy can be up to twelve. A comparative analysis with results available in the literature allows the verification of the formulation and indicates a good performance of the proposed method. Moreover, alternative numerical quadrature schemes that allow higher order schemes than classical ones available in the literature for dealing with such problems are used to approximate

the integral scattering term. Analysis are carried out on the effects on the radiative heat flux of the optical thickness of the medium, as well as reflectivity on the boundary of the domain and the scattering albedo. In addition, results for more refined meshes than those available in the literature and different optical thicknesses of the medium as well as analysis of section average intensities were included searching for providing benchmark solutions for this class of problems.

Keywords: Two-dimensional Radiative Transfer Problems; Discrete Ordinates; ADO Method; Anisotropic Scattering; Sparse Linear Systems.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	A EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA	15
2.1	Formulação Matemática da Equação em Geometria Cartesiana	15
2.1.1	Representação da Função de Fase de Espalhamento	17
2.2	Aproximação em Ordenadas Discretas da Equação Bidimensional de Transferência Radiativa	18
2.3	Quadraturas Numéricas	20
2.3.1	Quadratura Simétrica de Nível (LQ_N)	20
2.3.2	Quadraturas Legendre-Chebyshev	22
2.3.3	Quadratura Quadruple Range (QR)	26
3	SOLUÇÃO ADO-NODAL PARA A EQUAÇÃO DE TRANS- FERÊNCIA RADIATIVA BIDIMENSIONAL	29
3.1	Esquemas Nodais para a Aproximação em Ordenadas Discretas	29
3.1.1	Equações Unidimensionais para a Intensidade Média na Variável y	30
3.1.2	Equações Unidimensionais para a Intensidade Média na Variável x	33
3.2	Soluções Homogêneas para as Equações Unidimensionais pelo Mé- todo ADO na Região r	35
3.2.1	Solução Homogênea para as Equações Unidimensionais das Intensi- dades Médias em y	36
3.2.2	Solução Homogênea para as Equações Unidimensionais das Intensi- dades Médias em x	40
3.3	Solução Particular	44
3.3.1	Solução Particular via Função de Green	46
3.3.2	Solução Particular Constante	47
3.4	Solução Geral	48

4	SISTEMA LINEAR ASSOCIADO AS SOLUÇÕES ADO-NODAL PARA AS EQUAÇÕES DAS INTENSIDADES MÉDIAS	51
4.1	Derivação das Equações que Compõem o Sistema Linear	51
4.2	Ordenamento dos Conjuntos de Equações	60
4.3	Solução do Sistema Linear via ScaLAPACK	64
4.4	Decomposição de Domínio - Complemento de Schur	68
4.5	Desempenho Computacional na Resolução do Sistema Linear	75
5	RESULTADOS NUMÉRICOS	79
5.1	Resultados ADO-Nodal para $\phi_{xr}(y)$ com Quadratura LQ_N	83
5.2	Resultados ADO-Nodal: Comparando com a Literatura	89
5.3	Desempenho ADO-Nodal: Quadraturas Alternativas com Maior Número de Direções Discretas	98
5.4	Desempenho ADO-Nodal: Refinamento da Malha	107
5.5	Fluxo de Calor Radiativo: Variando Albedo, Reflectividade e Comprimento Óptico	117
5.6	Resultados ADO-Nodal para a Intensidade Média por Seção do Domínio	122
6	CONCLUSÕES	142
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	144
	APÊNDICE A Problema Conservativo: Derivação Preliminar	160

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Sistema de coordenadas para a posição \mathbf{r} e direção $\mathbf{\Omega}$. [Adaptado de Bell e Glasstone, 1970]	16
Figura 2.2	Nomenclatura para as direções de intensidade incidente e espalhamento em termos dos ângulos polar e azimutal. [Adaptado de Howell et al., 2016]	17
Figura 2.3	Distribuição de direções na quadratura LQ_N com ordem $N = 8$ e $N_d = 10$ direções por octante. [Fonte: Lewis e Miller, 1984]	21
Figura 2.4	Configuração dos pesos por octante. [Adaptado de Lewis e Miller, 1984]	22
Figura 2.5	Distribuição de direções na quadratura $P_N T_N$ com ordem $N = 6$ e $N_d = 9$ direções por octante. [Fonte: Lathrop e Carlson, 1965]	24
Figura 2.6	Distribuição de direções na quadratura $P_N T_N S_N$ com ordem $N = 6$ e $N_d = 6$ direções por octante. [Fonte: Lathrop e Carlson, 1965]	26
Figura 3.1	Representação da divisão do domínio em regiões.	29
Figura 3.2	Ordenamento das direções da regra de quadratura para a intensidade média na variável y ($M = 12$ da LQ_N).	30
Figura 3.3	Ordenamento das direções da regra de quadratura para a intensidade média na variável x ($M = 12$ da LQ_N).	33
Figura 4.1	Domínio subdividido em uma malha de $H \times K$ regiões retangulares.	61
Figura 4.2	Distribuição dos elementos do sistema linear por configuração padrão.	62
Figura 4.3	Distribuição dos elementos do sistema linear reordenado.	64
Figura 4.4	Grade de processadores: exemplo de ordenação de oito processos mapeados em um grid de 2×4	66
Figura 4.5	Distribuição cíclica por blocos: mapeamento de uma matriz 7×7 em blocos 2×2 para uma grid de processos 2×3	67
Figura 4.6	Domínio Ω subdividido em subdomínios Ω_i com interface Γ entre eles.	69

Figura 4.7	Decomposição do domínio na malha 12×12 com a representação das células internas e de fronteira.	69
Figura 4.8	Matriz em blocos associada com a malha da Figura 4.7.	70
Figura 5.1	Representação das condições de contorno do problema.	81
Figura 5.2	Densidade média de radiação ao longo da linha central do domínio para ADO média, [Kim e Lee, 1988], [Trivic et al., 2004] e [Moghadam et al., 2016].	94
Figura 5.3	Erro relativo entre a densidade média de radiação $\phi_{xr}(y)$ para duas aproximações de ordem de quadratura LQ_N com $\tau = 1$	96
Figura 5.4	Influência da anisotropia na densidade média de radiação ao longo da direção y na linha central do domínio, malha 26×26 , LQ_{16} , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$	97
Figura 5.5	Influência da anisotropia no fluxo de calor radiativo na linha central do domínio, malha 26×26 , LQ_{16} , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$	98
Figura 5.6	Comparações de diferentes ordens das quadraturas LQ_N , QR_C e QR_T na densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$), com malhas 6×6 e 26×26 , para $L = 8$, $\omega = 0.999$ e $\tau = 1$	100
Figura 5.7	Influência do albedo de espalhamento no fluxo de calor radiativo $q(y)$ na linha central para $L = 8$, $\tau = 1$, malha 10×10 e LQ_{16} ($N_d = 36$).	118
Figura 5.8	Influência do albedo de espalhamento na densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) na linha central para $L = 8$, $\tau = 1$, malha 10×10 e LQ_{16}	119
Figura 5.9	Influência do comprimento óptico no fluxo de calor radiativo $q(y)$ ao longo da linha central ($\tau_x = 0.5\tau$) para $L = 5$, malha 6×6 , com LQ_{16} e $\omega = 0.999$	120
Figura 5.10	Influência do comprimento óptico no fluxo de calor radiativo $q(y)$ ao longo da linha central ($\tau_x = 0.5\tau$) para $L = 8$, malha 6×6 , com LQ_{16} e $\omega = 0.999$	120

Figura 5.11	Influência da reflectividade na parede no fluxo de calor radiativo na linha central para $L = 5$, malha 10×10 , com LQ_{16} ($N_d = 36$), $\omega = 0.999$ e $\tau = 1$	121
Figura 5.12	Influência da reflectividade na parede no fluxo de calor radiativo na linha central para $L = 8$, malha 10×10 , com LQ_{16} ($N_d = 36$), $\omega = 0.999$ e $\tau = 1$	122
Figura 5.13	Representação das seções do domínio.	123
Figura 5.14	Intensidade média por seção ϕ_s , seção I e II , para diferentes ordens das quadraturas, variando o albedo e o comprimento óptico para $L = 2$ e malha 26×26	126
Figura 5.15	Erro relativo percentual entre duas ordens subsequentes de quadratura para a intensidade média por seção ϕ_s , seção I e II , com malha 26×26 e $L = 2$	129
Figura 5.16	Intensidade média por seção ϕ_s com o aumento da malha para diferentes quadraturas considerando $L = 2$, $\omega = 0.999$ e $\tau = 1$	130
Figura 5.17	Erro relativo percentual entre duas malhas para a intensidade média por seção ϕ_s para diferentes quadraturas considerando $L = 2$, $\omega = 0.999$ e $\tau = 1$	131
Figura 5.18	Intensidade média por seção ϕ_s do domínio com o aumento da ordem de quadratura LQ_N para diferentes malhas e comprimentos ópticos, com $L = 2$ e $\omega = 0.999$	132
Figura 5.19	Erro relativo percentual entre duas ordens subsequentes da quadratura LQ_N para a intensidade média por seção ϕ_s do domínio com diferentes malhas e comprimentos ópticos, para $L = 2$ e $\omega = 0.999$	134

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	Dados das matrizes bloco do complemento de Schur.	74
Tabela 5.1	Coeficientes de expansão para as funções de fase. [Fonte: Kim e Lee, 1988]	81
Tabela 5.2	Espaçamento das regiões na malha para cada τ	82
Tabela 5.3	Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) na linha central ($x = 0.5$) para espalhamento isotrópico ($L = 0$) para diferentes ordens de quadratura LQ_N , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$	84
Tabela 5.4	Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) na linha central ($x = 0.5$) para espalhamento anisotrópico com função de fase $B2$, $L = 2$, para diferentes ordens de quadratura LQ_N , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$	85
Tabela 5.5	Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) na linha central ($x = 0.5$) para espalhamento anisotrópico com função de fase $B1$, $L = 5$, para diferentes ordens de quadratura LQ_N , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$	86
Tabela 5.6	Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) na linha central ($x = 0.5$) para espalhamento anisotrópico com função de fase $F2$, $L = 8$, para diferentes ordens de quadratura LQ_N , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$	87
Tabela 5.7	Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) na linha central ($x = 0.5$) para espalhamento anisotrópico com função de fase $F1$, $L = 12$, para diferentes ordens de quadratura LQ_N , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$	88
Tabela 5.8	Densidade média de radiação em $x = 0.5$, $L = 0$ e $\tau = 1$	90
Tabela 5.9	Densidade média de radiação em $x = 0.5$, $L = 2$ e $\tau = 1$	90
Tabela 5.10	Densidade média de radiação em $x = 0.5$, $L = 5$ e $\tau = 1$	91
Tabela 5.11	Densidade média de radiação em $x = 0.5$, $L = 8$ e $\tau = 1$	91
Tabela 5.12	Densidade média de radiação em $x = 0.5$, $L = 12$ e $\tau = 1$	92
Tabela 5.13	Erro relativo percentual médio [%].	93

Tabela 5.14	Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$, $L = 8$, malha 6×6 , com diferentes ordens da QR_C , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$	103
Tabela 5.15	Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$, $L = 8$, malha 26×26 , com diferentes ordens da QR_C , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$	104
Tabela 5.16	Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$, $L = 8$, malha 6×6 , com diferentes ordens da QR_T , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$	105
Tabela 5.17	Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$, $L = 8$, malha 26×26 , com diferentes ordens da QR_T , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$	106
Tabela 5.18	Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$ para o refinamento da malha com $L = 2$, LQ_{16} ($N_d = 36$), $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$	109
Tabela 5.19	Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$ para o refinamento da malha com $L = 2$, LQ_{16} ($N_d = 36$), $\tau = 5$ e $\omega = 0.999$	110
Tabela 5.20	Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$ para o refinamento da malha com $L = 2$, LQ_{16} ($N_d = 36$), $\tau = 10$ e $\omega = 0.999$	111
Tabela 5.21	Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$ para o refinamento da malha com $L = 2$, QR_C , $N_\theta = 4$ ($N_d = 32$), $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$	112
Tabela 5.22	Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$ para o refinamento da malha com $L = 8$, LQ_{16} ($N_d = 36$), $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$	113
Tabela 5.23	Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$ para o refinamento da malha com $L = 8$, QR_C , $N_\theta = 4$ ($N_d = 32$), $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$	114

Tabela 5.24	Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$ para o refinamento da malha com $L = 0$, LQ_{16} ($N_d = 36$), $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$	115
Tabela 5.25	Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$ para o refinamento da malha com $L = 5$, LQ_{16} ($N_d = 36$), $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$	116
Tabela 5.26	Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$ para o refinamento da malha com $L = 12$, LQ_{16} ($N_d = 36$), $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$	117
Tabela 5.27	Intensidade média por seção ϕ_s , seção I e II , $L = 2$, 26×26	124
Tabela 5.28	Intensidade média por seção ϕ_s , seção III e IV , $L = 2$, 26×26 . . .	125
Tabela 5.29	Intensidade média por seção ϕ_s , $L = 8$, $\omega = 0.999$, seção I e II . . .	137
Tabela 5.30	Intensidade média por seção ϕ_s , $L = 8$, $\omega = 0.999$, seção III e IV . . .	138
Tabela 5.31	Intensidade média por seção ϕ_s , $L = 8$, $\omega = 0.5$, seção I e II	139
Tabela 5.32	Intensidade média por seção ϕ_s , $L = 8$, $\omega = 0.5$, seção III e IV . . .	140
Tabela A.1	Autovalores e constante de separação para malha 4×4 , $L = 0$, $\tau = 1$ e quadratura LQ_4 calculados com $\omega = 0.999$ e $\omega = 1$	160

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

ADO	Método Analítico de Ordenadas Discretas
DOM ou S_N	Método de Ordenadas Discretas
LQ_N	Quadratura Simétrica de Nível
$P_N T_N$	Quadratura Legendre-Chebyshev Quadrangular
$P_N T_N S_N$	Quadratura Legendre-Chebyshev Triangular
QR	Quadratura Quadruple Range
QR_C	Quadratura QR Compatível
QR_Q	Quadratura QR Quadrangular
QR_T	Quadratura QR Triangular
RTE	Equação de Transferência Radiativa

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

$a_{h-1}^r, a_h^r, b_{k-1}^r, b_k^r$	Divisões do domínio x e y
$\mathbf{A}_{yr}, \mathbf{A}_{xr}$	Matrizes associadas ao problema de autovalor
$\mathbf{B}_{yr}, \mathbf{B}_{xr}$	Matrizes associadas ao problema de autovalor
$A_{j,r}, A_{j+M/2,r}$	Coefficientes da solução homogênea
$B_{j,r}, B_{j+M/2,r}$	Coefficientes da solução homogênea
$A_{j,r}(x), A_{j+M/2,r}(x)$	Coefficientes da solução particular via função de Green
$A_{j,r,n}, A_{j+M/2,r,n}$	Coefficientes da solução particular via função de Green
$B_{j,r}(y), B_{j+M/2,r}(y)$	Coefficientes da solução particular via função de Green
$B_{j,r,n}, B_{j+M/2,r,n}$	Coefficientes da solução particular via função de Green
$S_{i,r}, S_{i+M/2,r}$	Coefficientes da solução particular constante
$W_{i,r}, W_{i+M/2,r}$	Coefficientes da solução particular constante
$D_{k,r,i}, D_{k-1,r,i}$	Coefficientes das aproximações nos contornos das regiões
$C_{h,r,i}, C_{h-1,r,i}$	Coefficientes das aproximações nos contornos das regiões
C_l	Coefficiente da expansão da função de fase
E_b	Poder emissivo
H, K	Número de subdivisões do domínio nos eixos x e y
$I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}), I(x, y, \boldsymbol{\Omega})$	Intensidade de radiação
$I_{yr}(x, \boldsymbol{\Omega}), I_{xr}(y, \boldsymbol{\Omega})$	Intensidade angular média em y e x da região r
$I_{yr}^H(x, \boldsymbol{\Omega}), I_{xr}^H(y, \boldsymbol{\Omega})$	Solução homogênea média em y e x
$I_{yr}^P(x, \boldsymbol{\Omega}), I_{xr}^P(y, \boldsymbol{\Omega})$	Solução particular média em y e x
$I_b(\mathbf{r})$	Intensidade de radiação de um corpo negro
L	Ordem de expansão da função de fase
M	Número total de direções discretas da quadratura
N	Ordem de quadratura para os esquemas $LQ_N, P_N T_N$ e $P_N T_N S_N$
N_d	Número de direções discretas por octante da esfera unitária
N_θ	Ordem da quadratura unidimensional da variável polar (Q_R)
N_φ	Ordem da quadratura unidimensional da variável azimutal (Q_R)
P_l	Polinômio de Legendre de grau l
P_l^p	Polinômio de Legendre associado de ordem p e grau l

$q(r)$	Fluxo de calor de radiação
$Q_{yr}(x, \boldsymbol{\Omega}), Q_{xr}(y, \boldsymbol{\Omega})$	Termo fonte das equações nodais integradas transversalmente
r	Região considerada na malha
$U_{yr}(\nu, \boldsymbol{\Omega}), U_{xr}(\gamma, \boldsymbol{\Omega})$	Vetores auxiliares
$V_{yr}(\nu, \boldsymbol{\Omega}), V_{xr}(\gamma, \boldsymbol{\Omega})$	Vetores auxiliares
x, y	Caracterizam as posições espaciais das partículas
w_n	n-ésimo peso da quadratura numérica associado a n-ésima direção $\boldsymbol{\Omega}_n$

Símbolos Gregos

β	Coefficiente de extinção do meio
$\delta_{0,p}$	A delta de Kronecker
ϵ_w	Emissividade da superfície
θ	Ângulo polar
Θ	Ângulo de espalhamento
κ	Coefficiente de absorção
λ_r, λ_r^*	Autovalores do problema homogêneo médio
ν_r, γ_r	Constantes de separação
ρ	Reflectividade da superfície
σ_s, σ_{sr}	Coefficiente de espalhamento
τ	Comprimento óptico
$\Phi_{yr}(\nu, \boldsymbol{\Omega}), \Phi_{xr}(\gamma, \boldsymbol{\Omega})$	Autofunções do problema homogêneo
$\phi_{xr}(y)$	Densidade média de radiação ao longo da direção y
ϕ_r	Densidade média de radiação por regiões (ou nodos)
ϕ_s	Intensidade média de radiação por seção do domínio
$\Phi(\boldsymbol{\Omega}' \cdot \boldsymbol{\Omega})$	Função de fase de espalhamento
φ	Ângulo azimutal
ω	Albedo de espalhamento
$\boldsymbol{\Omega}$	Vetor direção das partículas
μ, η, ξ	componentes de $\boldsymbol{\Omega}$

1 INTRODUÇÃO

A radiação térmica é uma das formas de transferência de calor que ocorre por meio de ondas eletromagnéticas que são continuamente absorvidas, emitidas ou espalhadas pelo espaço e não necessita de um meio material para ser propagada. As taxas de transferência de calor radiativo são geralmente proporcionais às diferenças de temperaturas à quarta potência [Modest, 2013]. De acordo com Howell et al., 2016, quando temperaturas elevadas ocorrem pode se tornar totalmente dominante a transferência de calor por radiação, uma vez que ela ganha importância à medida que a temperatura aumenta.

A transferência de calor por radiação está presente em diversos mecanismos industriais de aquecimento e secagem, sendo muito significativa em aplicações relacionadas a combustão. Na indústria o fenômeno da radiação térmica é importante, como por exemplo, em motores de combustão interna, na construção de fornos, câmaras de combustão e caldeiras [Howell et al., 2016; Guo e Maruyama, 2000; Gronarz et al., 2018], onde os gases gerados na combustão encontram-se a alta temperatura e devido a isso a emissão de radiação é elevada. Adicionalmente, esse processo de transferência de calor por radiação tem grande relevância também na área de energia solar e em fenômenos naturais, como por exemplo na radiação solar [Liou, 1980], uma vez que o aquecimento, iluminação e processo da fotossíntese são efeitos da radiação solar de fundamental importância para a manutenção da vida na Terra. Também torna-se muito significativa em aplicações aeronáuticas e espaciais, por exemplo na combustão em turbinas aeronáuticas, proteções térmicas para veículos espaciais e produtos de combustão de foguetes [Modest, 2013]. Além das anteriores, aplicação em tecidos biológicos, em aplicações biomédicas usando laser [Kim e Guo, 2004; Jaunich et al., 2008] e em técnicas de tomografia óptica [Klose et al., 2002; Arridge e Schotland, 2009; Qiao et al., 2016; Abdoulaev e Hielscher, 2003; Tarvainen et al., 2008; Addoum et al., 2018; Asllanaj et al., 2018] podem ser citadas.

A presença de partículas em sistemas de engenharia de alta temperatura é predominante e seu espalhamento precisa ser considerado para determinar corretamente a transferência de calor, uma vez que o meio de espalhamento é altamente anisotrópico e tem um grande efeito na transferência radiativa [Gronarz et al., 2018; Hunter e Guo, 2012]. Desta forma, a modelagem matemática para entendimento desses problemas é uma ferramenta eficiente e necessária, e pesquisas intensas são desenvolvidas para a solução da

equação de transferência radiativa multidimensional. Especial atenção deve ser dada aos efeitos do espalhamento anisotrópico que são relevantes como parte natural dos fenômenos físicos [Jinbo et al., 2003; Hunter e Guo, 2012].

A modelagem de problemas relacionados à transferência radiativa pode ser descrita pela forma linear da equação de Boltzmann, que tem sido amplamente empregada em diversas aplicações na abordagem do transporte de partículas [Bell e Glasstone, 1970; Cercignani, 1975, 1988; Modest, 2013]. A equação de Boltzmann foi derivada, inicialmente, para a aplicação em teoria cinética dos gases, no tratamento de fenômenos em dinâmica de gases rarefeitos [Boltzmann, 1872]. Sua versão linear é utilizada em problemas de transporte de partículas de nêutrons [Duderstadt e Hamilton, 1976; Cacuci, 2010] e transferência radiativa [Chandrasekhar, 1950; Modest, 2013], quando tratando destas aplicações da radiação é designada equação de transferência radiativa (RTE) (sigla do inglês *Radiative Transfer Equation*) [Howell et al., 2016]. Esta equação é integro-diferencial e descreve de forma quantitativa a distribuição espacial, direcional, temporal e energética das partículas em meios materiais [Garcia, 2002].

Um dos trabalhos pioneiros na teoria de transporte foi apresentado por Case, 1960, chamado de método das soluções elementares, e possibilitou a obtenção da solução analítica para a equação de transporte baseada em uma expansão em autofunções singulares. Apesar do rigoroso desenvolvimento matemático, a metodologia forneceu soluções exatas da equação somente em um contexto bastante limitado: problemas unidimensionais, monoenergéticos, independentes do tempo e em meios com espalhamento isotrópico. Posteriormente, o método foi estendido para meios com espalhamento anisotrópico [Mika, 1961; Case e Zweifel, 1967; McCormick e Kušcer, 1973].

De forma geral, dentre os esquemas propostos para modelar e solucionar os problemas de transporte de partículas destacam-se duas classes de métodos na resolução da equação: os métodos probabilísticos e os métodos determinísticos. Nas abordagens probabilísticas, os métodos de Monte Carlo, em geral, tem objetivo de obter soluções aproximadas para o problema de transporte. Estes métodos são capazes de incorporar mais detalhes às simulações, consistentes com a geometria real e os aspectos físicos dos problemas. Contudo, são conhecidos, em geral, por demandarem um tempo computacional considerável devido ao longo processo iterativo para obter soluções confiáveis do ponto de vista estatístico [Fleck Jr, 1961; Howell e Perlmutter, 1964; Howell, 1969, 1998;

Soucasse et al., 2013; Zhao et al., 2015; Gentile e Yee, 2016; Wollaber, 2016; Haghghat, 2020; Li et al., 2020]. As abordagens determinísticas tem como objetivo estabelecer solução exata para as aproximações da equação de transporte. Muitas vezes as aproximações da equação de transporte íntegro-diferencial são dadas em termos de discretizações de algumas das variáveis independentes que compõem o espaço de fase. Esforços contínuos e com progresso foram realizados para resolver problemas em geometrias multidimensionais e mais complexas [Mengüç e Viskanta, 1985; Abdoulaev e Hielscher, 2003; Altaç, 2003; Altaç e Tekkalmaz, 2008; Ge et al., 2016; Moghadam et al., 2016; Zabihi et al., 2017; Aghanajafi e Abjadpour, 2016; Wang et al., 2019; Boulet et al., 2007; Hunter e Guo, 2016; Heugang et al., 2020]. Ainda, ao longo dos anos, resultados interessantes foram obtidos a partir de abordagens semi analíticas por meio da formulação integral da equação RTE [Altaç, 2003; Altaç e Tekkalmaz, 2004, 2008; Le Dez e Sadat, 2011; Le Dez et al., 2018].

Nas aplicações em sistemas de engenharia de altas temperaturas bem como na modelagem tomográfica, por exemplo, para o estudo da propagação da radiação eletromagnética em um meio, é necessária a solução da RTE. Esta equação descreve matematicamente a interação entre emissão, absorção e espalhamento de energia radiativa, descrevendo a variação da intensidade de radiação ao longo de um caminho. E a solução da equação permite determinar a intensidade de radiação no meio investigado.

Devido à complexidade matemática que envolve a solução da RTE, uma vez que a intensidade é uma função de sete variáveis independentes, a saber existem três coordenadas espaciais, duas coordenadas angulares (que definem a direção de propagação da intensidade de radiação), uma variável espectral e uma coordenada temporal, no decorrer das últimas décadas diversos esquemas de solução foram desenvolvidos com o objetivo de se obter resultados rápidos e precisos para a equação de transferência radiativa.

Por causa dos inúmeros processos e propriedades envolvidos na transferência de calor por radiação, a solução destes problemas não é trivial. E como relatado anteriormente são inúmeras variáveis envolvidas na RTE, dessa forma, os cálculos analíticos para condições semelhantes às encontradas em sistemas reais de transferência de calor são geralmente impraticáveis. Sabe-se que na troca de calor radiativo existem muito fatores que são importantes, como as propriedades espectrais da superfície e do meio participante, as propriedades direcionais da superfície, as propriedades de espalhamento do meio partici-

pante, e a geometria do problema. Desta forma, análises de um ou mais desses fatores deve ser levada em consideração em cada pesquisa de acordo com o método utilizado. Em Mishra e Prasad, 1998, Modest, 2013, Howell et al., 2016 e Zhao e Liu, 2017, encontra-se uma revisão abrangente sobre os métodos mais comuns aplicados na obtenção da solução da RTE a partir de integrações espectrais, direcionais e espaciais.

Na integração espectral da RTE (uma integração em relação ao número de onda) modelos de aproximação espectral são utilizados para resolver problemas de radiação em gases participantes. Os modelos espectrais mais comumente empregados são os modelos de banda estreita [Liu e Smallwood, 2004; Cai e Modest, 2014; Zheng et al., 2019] e modelos globais, como modelo da soma-ponderada-de-gases-cinza (WSGG) [Dorigon et al., 2013; Bordbar et al., 2014; Coelho e França, 2018; Yang et al., 2019], os modelos espectrais WSGG baseado em linha (SLW) [Pearson et al., 2014; Solovjov et al., 2017; Zhou et al., 2020], e a distribuição k de espectro total (FSK) [Modest e Zhang, 2002; Chu et al., 2016; Consalvi et al., 2020].

No processo de aproximação da dependência angular da RTE entre as abordagens usualmente aplicadas estão o método de ordenadas discretas (S_N) [Wick, 1943; Chandrasekhar, 1950], o método dos harmônicos esféricos (P_N) [Jeans, 1917] e o método dos volumes finitos (FVM) [Raithby e Chui, 1990]. No método dos harmônicos esféricos (conhecido como aproximação P_N) a dependência angular da intensidade radiativa é expandida em uma série de harmônicos esféricos, e os coeficientes de expansão são formulados em um conjunto de equações diferenciais parciais a serem resolvidas [Jeans, 1917; Ou e Liou, 1982; Garcia e Siewert, 1985; Evans, 1998; Pal e Modest, 2015; Garcia, 2017; Doicu et al., 2021]. No método de ordenadas discretas (S_N) o espaço angular é representado por um conjunto discretizado de direções e cada direção está associada a um peso de uma regra de quadratura. Após a discretização angular, as equações de ordenadas discretas resultantes para cada direção podem então ser discretizadas por técnicas tradicionais para resolver equações diferenciais parciais, como por exemplo o método das diferenças finitas e a abordagem dos volumes finitos (FVM) (considerando um volume de controle) [Chandrasekhar, 1950; Fiveland, 1984, 1988; Siewert, 2000b,a; Sanchez e McCormick, 2004; Granate et al., 2016; Tencer et al., 2017; Coelho, 2020]. No método dos volumes finitos (FVM) tanto o domínio angular quanto o domínio espacial são discretizados usando integração sobre o ângulo e o volume de controle. As intensidades de radiação nos contornos do volume de

controle são relacionadas com a intensidade no centro deste, a partir do uso de esquemas de diferenciação espacial (esquemas de interpolação), como por exemplo *step scheme*, *diamond scheme* e *exponential scheme* [Raithby e Chui, 1990; Chui et al., 1992; Chai et al., 1994; Kim e Huh, 2000; Trivic et al., 2004; Hunter e Guo, 2016; Lygidakis e Nikolos, 2016; Heugang et al., 2020].

Em algumas aplicações, como em modelagem de tomografia [Klose et al., 2002; Tarvainen et al., 2008; Addoum et al., 2018], geometrias bidimensionais estão diretamente ligadas à modelagem. Além disso, a análise de modelos bidimensionais ainda representa uma etapa importante para o desenvolvimento e validação de metodologias multidimensionais [Ge et al., 2015]. Em trabalhos recentes, formulações de harmônicos esféricos (até a ordem sete) de modelos tridimensionais são usadas para reduzir o problema à solução de problemas bidimensionais em geometria cartesiana [Ge et al., 2015, 2016]. No trabalho de Coelho, 2014, o autor apresenta uma revisão das vantagens dos métodos de ordenadas discretas e de volumes finitos para a solução de problemas de transferência radiativa em meios participantes. O autor afirma que estes dois métodos são utilizados com frequência na solução destes problemas fornecendo uma precisão relativamente boa para uma ampla gama de problemas, com requisitos computacionais moderados e são relativamente fáceis de serem integrados em códigos CFD. Neste trabalho de tese, devido a metodologia proposta ser baseada no método de ordenadas discretas, e por causa da sua versatilidade e precisão na solução de problemas de transporte, abordam-se a seguir mais detalhes relacionados ao método S_N .

Na resolução de problemas derivados da equação de Boltzmann linear, dentre uma variedade de métodos determinísticos que foram desenvolvidos, conforme relatado anteriormente, destaca-se o método de Ordenadas Discretas (às vezes referido como *DOM* ou S_N), proposto por Wick, 1943 e Chandrasekhar, 1950, desenvolvido para representar a dependência direcional da intensidade de partículas. É um método amplamente utilizado e relativamente fácil de implementar que baseia-se na discretização das direções das partículas (as variáveis angulares na RTE), na esfera unitária. A discretização do ângulo sólido lida com a representação discreta da dependência angular contínua da RTE dos parâmetros de radiação (por exemplo, intensidade radiativa e função de fase de espalhamento). O método de ordenadas discretas pode ser aplicado em abordagens de transferência radiativa, no qual o termo integral da equação é aproximado por uma quadratura numérica

e o modelo original é transformado em um conjunto de equações diferenciais que podem ser resolvidas por meio de aproximações numéricas ou analíticas.

Inicialmente o método de ordenadas discretas foi proposto para problemas unidimensionais na astrofísica [Chandrasekhar, 1950], em seguida sendo aplicado para resolver problemas multidimensionais de transporte de nêutrons [Carlson e Lathrop, 1965] e, posteriormente foi estendido com sucesso para o uso em problemas de transferência de calor por radiação [Khalil e Truelove, 1977; Fiveland, 1982; Truelove, 1987; Kayakol e Selçuk, 1999]. Fiveland, 1984 usa o método de ordenadas discretas para encontrar soluções numéricas em geometrias retangulares bidimensionais em meios que absorvem, emitem e espalham isotropicamente. Mais tarde, Fiveland, 1987 usou o método de ordenadas discretas para modelar a transferência radiativa em geometrias unidimensionais, e Fiveland, 1988 e Truelove, 1988 analisaram a transferência radiativa em geometrias tridimensionais em meios participantes, considerando o espalhamento isotrópico e anisotrópico. Também foram realizados estudos da transferência de calor na modelagem de fornos, que consideraram a variação do comprimento óptico e um perfil de temperatura não uniforme [Kim e Huh, 1999]. Em geometrias multidimensionais, esquemas numéricos têm sido usados, em geral, para lidar com as variáveis espaciais do modelo.

Ainda, a aproximação angular da RTE em ordenadas discretas em conjunto com outros métodos para a discretização espacial da equação foram aplicados, no decorrer dos anos, para resolver diferentes problemas de transporte radiativo, como em problemas acoplados de radiação-condução [Zabihi et al., 2017], em geometrias 2-D complexas [Aghanajafi e Abjadpour, 2016] e na transferência de radiação em descargas de alta pressão em meios cilíndricos [Bouaoun et al., 2005]. A aproximação em ordenadas discretas também foi abordada nos trabalhos com a equação de transferência radiativa transiente [Guo e Kumar, 2001, 2002; Moghadam et al., 2016], em aplicações de combustão de alta temperatura [Guo e Maruyama, 2000; Gronarz et al., 2018], na modelagem de tecidos do corpo humano expostos a irradiações de pulso curto [Kim e Guo, 2007], em aplicações biomédicas usando laser considerando a equação transiente em geometrias 2D irregulares [Kim e Guo, 2004; Jaunich et al., 2008] e em aplicações de tomografia [Klose et al., 2002; Abdoulaev e Hielscher, 2003; Tarvainen et al., 2008; Kim et al., 2010; Qiao et al., 2017; Tang et al., 2017; Addoum et al., 2018; Asllanaaj et al., 2018]. Mais detalhes sobre as aplicações da transferência radiativa, a partir da equação em ordenadas discretas, po-

dem ser encontrados em [Liu et al., 2002; Godoy e DesJardin, 2010; Hunter e Guo, 2011; Efremenko et al., 2013; Coelho, 2014; Ganapol, 2015]. Apesar do desenvolvimento de várias metodologias associadas à solução RTE em geometria multidimensional, um aspecto importante a notar é que, em geral, têm sido considerados modelos sem espalhamento ou principalmente com espalhamento isotrópico.

Na natureza e na ciência, como por exemplo no espalhamento da luz solar pela atmosfera e na poeira interestelar, em fornos de carvão pulverizados, em sistemas de combustão, entre outros, existem partículas minúsculas no meio que tornam os fenômenos de espalhamento ainda mais complexos. Uma das teorias mais gerais para governar o espalhamento radiativo é a teoria de Mie [Mie, 1908; Clark et al., 1957; Wiscombe, 1980] que relaciona a função de fase de espalhamento com as propriedades do meio, como o índice de refração e o tamanho das partículas. Na literatura podem ser encontrados trabalhos no campo da transferência de calor por radiação que abordam o espalhamento radiativo do meio [Lee e Buckius, 1982; Kim e Lee, 1988; Guo e Kumar, 2001; An et al., 2005].

Em 1988, no trabalho de Kim e Lee, 1988, efeitos do espalhamento anisotrópico na transferência de calor radiativa em domínios bidimensionais foram analisados. O método de ordenadas discretas foi utilizado para a solução da RTE. A função de fase de espalhamento foi expandida usando os polinômios de Legendre e os coeficientes de expansão são obtidos pela teoria de Mie. Resultados numéricos para densidade média de radiação ao longo da linha central do domínio e o fluxo de calor radiativo em problemas com grau de anisotropia até doze foram apresentados. Também uma análise dos efeitos da anisotropia das funções de fase de espalhamento, com os parâmetros da espessura óptica, do albedo de espalhamento e da reflectividade no contorno na transferência radiativa foi realizada. Mais tarde, Kim e Lee, 1989 usaram o método de ordenadas discretas para analisar a transferência radiativa em domínios bidimensionais, com espalhamento anisotrópico, expostos a um feixe incidente colimado.

Posteriormente, em 2004, Trivic et al., 2004 buscando analisar o mesmo tópico, efeitos da anisotropia, apresentaram comparações com a referência [Kim e Lee, 1988]. Segundo os autores, até aquele momento, os resultados de Kim e Lee, 1988 ainda eram os únicos sobre o assunto disponíveis na literatura. Trivic et al., 2004 utilizaram o acoplamento das equações de Mie para a avaliação da função de fase de espalhamento e o

método de volumes finitos para a solução da equação de transferência radiativa, sem usar uma expressão analítica para a função fase de espalhamento. O espalhamento de Mie é considerado em um invólucro quadrado, no qual um estudo do efeito do espalhamento anisotrópico na transferência de calor por radiação é realizado. O modelo e código tem aplicação direta a quaisquer parâmetros de partículas, sem a necessidade de expressão analítica previamente projetada para função de fase de espalhamento. Análises dos efeitos dos parâmetros de tamanho das partículas e do albedo de espalhamento no fluxo de calor radiativo e na radiação incidente foram realizadas no trabalho. A extensão da metodologia para geometrias tridimensionais foi desenvolvida por Trivic e Amon, 2008.

Mais recentemente, Moghadam et al., 2016 ao trabalhar em transferência transiente de calor, ainda usaram o trabalho de [Kim e Lee, 1988] como resultado de referência para meios com anisotropia. Os autores resolvem numericamente a RTE pelo método de volumes finitos, investigando a transferência de calor radiativa transiente em uma geometria irregular 2D preenchida com meio particulado com diâmetro de partícula uniforme. Para explicar o comportamento de espalhamento do meio os autores usam a teoria de Mie e a aproximação isotrópica equivalente. A função da fase de espalhamento é calculada aplicando a teoria de Mie e para validar o código numérico os resultados são comparados com os valores para a radiação incidente obtidos por Kim e Lee, 1988. Os parâmetros de transferência de calor calculados aplicando a teoria de Mie são comparados com aqueles obtidos pela aproximação isotrópica equivalente.

Os trabalhos de Trivic et al., 2004 e Moghadam et al., 2016 estabelecem comparações com Kim e Lee, 1988, nos quais os resultados fornecidos pelas duas referências concordam em geral em até dois dígitos significativos com os resultados dados por [Kim e Lee, 1988]. Até onde se tem conhecimento, existem poucos resultados de referência disponíveis na literatura que abordam problemas bidimensionais de transferência radiativa em meios anisotrópicos, desta forma, ressalta-se a importância de trabalhos que contribuem para a análise de modelos de radiação térmica com anisotropia em geometrias multidimensionais.

No contexto da transferência radiativa diversos estudos são realizados na busca de soluções da RTE para o tratamento de problemas multidimensionais de radiação. Os trabalhos citados até o momento resolvem numericamente a equação de transferência radiativa. Porém soluções analíticas para a RTE em geometria bidimensional e considerando

o meio com anisotropia de grau arbitrário não são disponíveis na literatura. O uso de métodos analíticos tem vantagens do ponto de vista de custo computacional e na precisão dos resultados. Nesse sentido, pesquisas nessa área continuam intensas e o uso de métodos analíticos continua sendo de grande interesse particularmente na busca de soluções de referência.

Como já mencionado, a aproximação da RTE em ordenadas discretas é uma das formas mais utilizadas para representar a variável angular na equação de transporte. E ao abordar o problema de ordenadas discretas unidimensionais, uma solução analítica foi proposta por Chandrasekhar, 1950 em seus estudos anteriores sobre transferência radiativa. Em 1999, uma versão mais recente e computacionalmente mais eficiente dessa solução foi proposta por Barichello e Siewert, 1999a, 2001 - o método analítico de ordenadas discretas, denominado método ADO (sigla do inglês *Analytical Discrete Ordinates*), cujo objetivo é resolver analiticamente o sistema de equações unidimensionais derivado das equações em ordenadas discretas. No método ADO as variáveis espaciais não são discretizadas e foram introduzidas mudanças com relação à solução de Chandrasekhar, 1950, como na reescrita dos termos exponenciais presentes na solução a fim de evitar problemas computacionais de *overflow*. Também ocorreram mudanças na forma de obtenção das chamadas constantes de separação, através de um problema de autovalores, evitando a busca de raízes de polinômios característicos. Além disso, o esquema de quadratura utilizado no método ADO para aproximar o termo integral e usado para representar as direções discretas é arbitrário e definido no semi-intervalo $[0, 1]$. Em decorrência da forma como a regra de quadratura é considerada, o problema de autovalores possui como ordem a metade do número de direções utilizadas. Todas essas mudanças levaram a uma grande melhoria no que diz respeito aos cálculos numéricos. Além disso, o método ADO não utiliza processos iterativos, e não necessita de varreduras espaciais, fornecendo uma grande vantagem em tempo computacional e também não exige espaço adicional para o armazenamento de variáveis intermediárias. A solução ADO foi considerada rápida e precisa e foi amplamente usada para resolver diversos problemas de transporte de partículas em meios unidimensionais, incluindo transferência radiativa com efeitos de polarização [Barichello e Siewert, 1999b].

Na literatura está disponível uma série de trabalhos do método ADO na resolução de problemas unidimensionais aplicados na dinâmica de gases rarefeitos [Barichello

et al., 2001; Rodrigues, 2003; Camargo e Barichello, 2004; Scherer et al., 2009a,b; Scherer e Barichello, 2010], em problemas de transferência radiativa [Barichello e Siewert, 1999a; Barichello et al., 2000, 2002; Rodrigues e Barichello, 2004; Reichert, 2009; Reichert e Barichello, 2011; Barichello, 2011; Cromianski et al., 2018] e também no transporte de nêutrons [Barichello e Siewert, 2001; Prolo Filho e Rodrigues, 2017]. Ainda, foi desenvolvida a solução unidimensional do problema adjunto de transporte para problemas de fonte-detector [Pazinatto et al., 2016; Pazinatto e Barichello, 2019]. Nestas aplicações, o método ADO demonstrou maior generalidade e eficiência computacional que outras metodologias similares. Desta forma, o método ADO tem se mostrado ser uma ferramenta muito útil na resolução de problemas de transporte de partículas.

Como uma extensão para resolver problemas de transporte bidimensionais, o método ADO foi aplicado para derivar soluções de formulações nodais do problema original, o chamado método ADO-Nodal [Barichello et al., 2009, 2011; Tres et al., 2014]. Os métodos nodais [Walters e O'Dell, 1981; Azmy, 1988b; Badruzzaman, 1990; Barros et al., 2003] são utilizados nos problemas multidimensionais para o tratamento das variáveis espaciais das equações em ordenadas discretas. A técnica nodal consiste em integrar transversalmente em uma ou mais variáveis espaciais as equações multidimensionais em ordenadas discretas, de tal forma a reduzir a complexidade do problema. Dessa forma, em problemas de transporte multidimensionais o uso de abordagens nodais possibilita a obtenção de um sistema de equações unidimensionais integradas transversalmente, e com a utilização do método ADO, diferente da grande maioria dos métodos disponíveis, essas equações são resolvidas permitindo-se obter soluções explícitas em termos das variáveis espaciais. Assim, com o uso das técnicas nodais obtêm-se soluções médias em cada uma das variáveis dependentes. Além disso, o processo de obtenção das equações nodais introduz termos de fuga transversal nos contornos dos nós, e como estes termos são desconhecidos aproximações adicionais são requeridas para o seu tratamento.

Em outras palavras, a extensão do método ADO para resolver problemas bidimensionais, juntamente com as técnicas nodais, parte de um processo de integração sobre uma região (nó) do domínio, no qual o modelo é reduzido a equações unidimensionais integradas transversalmente nas variáveis x e y , que são então resolvidas pelo método ADO. O método estabelece soluções analíticas com respeito à variável espacial para os fluxos médios de partículas. Devido à característica analítica do método, conforme proposto

inicialmente [Barichello et al., 2011], o procedimento de integração para gerar as equações nodais foi definido para todo o intervalo de definição das variáveis x e y , respectivamente. Nenhuma divisão do domínio em nós foi realizada. Mais recentemente, a ideia de soluções locais foi considerada para o tratamento de problemas em meios heterogêneos [Barichello et al., 2017] onde o domínio físico é constituído por diferentes materiais. Essa abordagem também é necessária para melhorar a representação física do problema, dada em termos de quantidades médias, e para aumentar a precisão numérica da solução.

Diversos estudos foram conduzidos sobre formas de aproximação dos termos de fuga transversal. Foram consideradas aproximações proporcionais aos fluxos médios [Barichello et al., 2011; Cabrera, 2009], combinações lineares das soluções dos problemas unidimensionais [Prolo Filho e Barichello, 2014], aproximações por constantes [Cromianski et al., 2019; Picoloto et al., 2015; Tres et al., 2014], funções lineares e funções exponenciais [Cromianski et al., 2019]. Além disso, foram consideradas soluções particulares constantes [Picoloto, 2015] e para o tratamento de termos fontes mais gerais soluções baseadas em funções de Green [Prolo Filho e Barichello, 2014; Cromianski, 2016]. Ainda, o método tem sido investigado com a utilização de esquemas arbitrários de quadraturas [Tres, 2015; Cromianski, 2016; Nenê, 2020]. A solução de problemas bidimensionais de transporte pelo método ADO-Nodal exige que um sistema linear seja resolvido a fim de determinar coeficientes constantes na solução final para os fluxos angulares médios. Métodos diretos foram usados para a solução destes sistemas [Picoloto, 2015; Cromianski, 2016] em aplicações de nêutrons. Com o uso de ordens mais elevadas de quadratura e/ou domínios divididos em menores regiões, o sistema linear é normalmente de alta ordem e esparsa (com poucas entradas não nulas). Assim, nos trabalhos com transporte de nêutrons [da Cunha et al., 2015; Moura et al., 2018; Moura, 2018] estudou-se a solução de métodos iterativos com e sem processamento em paralelo para o sistema linear.

A abordagem do método ADO em problemas bidimensionais tem sido amplamente utilizada com sucesso para resolver problemas de transporte de nêutrons [Barichello et al., 2011; Prolo Filho, 2011; Picoloto et al., 2013; Prolo Filho e Barichello, 2013, 2014; Tres et al., 2014; Picoloto et al., 2015; Barichello et al., 2015, 2016, 2017; Picoloto et al., 2017; Cromianski et al., 2019]. Nesses trabalhos foram abordados os principais problemas de transporte de nêutrons de fonte-fixa em meios homogêneos e heterogêneos com espalhamento isotrópico. Também abordou-se o problema de transporte adjunto [Pazinatto, 2019;

Barichello et al., 2020]. Recentemente, esta técnica foi utilizada para resolver problemas bidimensionais de nêutrons apenas para o caso de espalhamento linearmente anisotrópico [Picoloto et al., 2017], que é usual para aplicações de nêutrons.

A análise dos resultados obtidos pelo método ADO nesta ampla classe de problemas bidimensionais, até o momento, indica que a aplicação do método ADO em malhas mais grossas produz resultados da mesma ordem de precisão daqueles resultados que foram obtidos a partir do uso de malhas mais refinadas [Barichello et al., 2017] por outras metodologias similares. Além da obtenção de resultados com boa precisão, foi observado uma redução no tempo computacional, nestes casos, quando comparado com técnicas numéricas. Sendo assim, baseado em trabalhos anteriores, o método ADO foi aplicado com eficiência na solução de uma vasta variedade de problemas de transporte de partículas, apresentando resultados satisfatórios e comparáveis com a literatura. Porém a aplicação do método ADO em problemas bidimensionais de transporte de partículas ficou restrita a aplicações nucleares e ao espalhamento linearmente anisotrópico.

O objetivo principal deste trabalho de doutorado é a extensão da formulação ADO-Nodal para lidar com modelos de transferência radiativa com altos graus de anisotropia, contribuindo também com a pesquisa necessária deste tópico em problemas de radiação térmica. Para atingir o objetivo, a solução da equação bidimensional de transferência radiativa em ordenadas discretas e considerando grau arbitrário de anisotropia é proposta. Até o momento, problemas bidimensionais de transferência radiativa, ou particularmente considerando espalhamento anisotrópico de ordem superior a um, não haviam sido resolvidos com o método ADO-Nodal. A expansão da função de fase em termos de polinômios de Legendre de ordem arbitrária é considerada, para derivar o problema de autovalor geral necessário para estabelecer a solução geral das equações integradas transversalmente para intensidades médias ao longo de cada direção. Desta forma, as soluções são escritas explicitamente em termos das variáveis espaciais, o que permite obter quantidades relevantes para aplicações de transferência radiativa, onde os efeitos da anisotropia são de particular interesse, contribuindo assim na análise comparativa com as poucas referências disponíveis na literatura. A solução de sistemas lineares provenientes da aplicação do método ADO-Nodal em problemas bidimensionais de transporte é investigada com o intuito de resolver o problema em malhas refinadas. Ainda, explorar quadraturas de maior ordem nestes problemas de grau de anisotropia elevado, que não foram encontrados na literatura.

Tal estudo contribui assim para a busca e estabelecimento de soluções de referência.

O desenvolvimento de uma formulação concisa e precisa para a obtenção de soluções de problemas de transferência radiativa com grau arbitrário de anisotropia visa posteriormente, juntamente com os desenvolvimentos recentes na solução ADO para o problema adjunto [Barichello et al., 2020], tratar problemas em reconstruções tomográficas que são de grande interesse.

Dessa forma, no Capítulo 2 apresentam-se a equação multidimensional de transferência radiativa e a sua aproximação em ordenadas discretas, bem como a representação da função de fase de espalhamento abordada neste trabalho através da expansão em termos de polinômios de Legendre. Além disso, descrevem-se os diferentes esquemas de quadraturas numéricas multidimensionais utilizados para aproximar o termo integral da RTE em ordenadas discretas: Quadratura Simétrica de Nível (LQ_N), Quadratura Legendre-Chebyshev Quadrangular ($P_N T_N$), Quadratura Legendre-Chebyshev Triangular ($P_N T_N S_N$) e a Quadratura Quadruple Range (QR).

Na sequência, no Capítulo 3 apresenta-se o desenvolvimento da formulação ADO-Nodal para a solução da equação de transferência radiativa em ordenadas discretas, em geometria cartesiana bidimensional, considerando grau arbitrário de anisotropia. Inicialmente o domínio espacial é subdividido em r regiões retangulares e seguindo Barichello et al., 2011, consideram-se dois ordenamentos distintos para as direções das ordenadas discretas. Para a obtenção das equações unidimensionais integradas transversalmente nas variáveis espaciais x e y aplicam-se os fundamentos dos métodos nodais. Da integração transversal aparecem os termos relacionados as intensidades nos contornos de cada região que são aproximados como constantes e acoplam os sistemas de equações obtidos para cada uma das variáveis. Resolve-se o sistema de equações unidimensionais pelo método ADO, construindo-se soluções homogêneas em termos de autovalores e autofunções. O problema de autovalores é derivado para grau geral de anisotropia. Por fim, escreve-se a solução geral explicitamente em termos da variável espacial.

Continuando, no Capítulo 4, apresenta-se a derivação das equações que compõem o sistema linear a ser resolvido para a obtenção da solução das intensidades médias nas variáveis x e y . Devido aos desafios numéricos e computacionais oriundos da formulação ADO-Nodal em problemas de anisotropia geral, apresentam-se dois tipos de ordenamento do sistema linear. Um ordenamento que permite a solução do sistema por métodos diretos

através da fatoração LU de uma matriz geral, e um rearranjo desse sistema que permite ser resolvido por meio da fatoração LU de uma matriz esparsa com estrutura diagonal. Além disso, devido a limitações computacionais na solução do sistema de equações lineares de alta ordem e esparsa, em malhas mais refinadas, apresentam-se formas alternativas de solução do sistema linear. Uma solução em paralelo via ScaLAPACK e outra com o uso da decomposição de domínio por complemento de Schur. Apresenta-se também o desempenho computacional obtido na resolução do sistema linear.

No Capítulo 5, apresentam-se a descrição do problema teste e os resultados numéricos obtidos, bem como as comparações com resultados disponíveis na literatura. E no Capítulo 6 descrevem-se as conclusões e às propostas para a continuidade deste trabalho. Por fim, no Apêndice A apresenta-se uma derivação preliminar do caso conservativo do problema de transferência radiativa.

2 A EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA

Neste capítulo, apresentam-se a equação de transferência radiativa, bem como a representação da função de fase de espalhamento como uma expansão em polinômios de Legendre. Inicialmente, descreve-se a equação de transferência radiativa e, na sequência, apresenta-se uma versão da equação em ordenadas discretas para uma geometria cartesiana bidimensional. As direções discretas oriundas da discretização da variável angular são definidas através de uma quadratura numérica multidimensional. São apresentados quatro tipos de quadraturas numéricas: Quadratura Simétrica de Nível (LQ_N) [Lewis e Miller, 1984], Quadratura Legendre-Chebyshev Quadrangular ($P_N T_N$) [Longoni e Haghghat, 2001, 2002], Quadratura Legendre-Chebyshev Triangular ($P_N T_N S_N$) [Longoni e Haghghat, 2001, 2002] e a Quadratura Quadruple Range (QR) [Abu-Shumays, 1977].

2.1 Formulação Matemática da Equação em Geometria Cartesiana

A intensidade radiativa em um meio pode ser obtida através da resolução da equação de transferência radiativa (RTE), que pode ser escrita na forma de uma equação integro-diferencial. A derivação se baseia no balanço de energia radiativa, que descreve a intensidade de radiação ao longo de um caminho em uma direção $\mathbf{\Omega}$ através de um meio participante, isto é, um meio que emite, absorve e espalha radiação [Howell et al., 2016; Modest, 2013].

A equação de transferência radiativa, independente do tempo e expressa em termos da intensidade total de radiação, pode ser escrita como [Howell et al., 2016]

$$(\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = -\beta I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) + \kappa I_b(\mathbf{r}) + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') \Phi(\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}) d\mathbf{\Omega}', \quad (2.1)$$

onde $I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ representa a intensidade de radiação, que é uma função de posição espacial $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e direção angular $\mathbf{\Omega}$; $\beta = \kappa + \sigma_s$ é o coeficiente de extinção do meio que é a soma do coeficiente de absorção (κ) com o coeficiente de espalhamento (σ_s); $I_b(\mathbf{r})$ é a intensidade de radiação de corpo negro; e $\Phi(\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega})$ é a função de fase de espalhamento da transferência radiativa a partir da direção de entrada $\mathbf{\Omega}'$ para a direção de saída $\mathbf{\Omega}$. A integral da Equação 2.1 é avaliada sobre todas as direções $\mathbf{\Omega}$ na esfera unitária S . No lado direito da igualdade na Equação 2.1, o primeiro termo representa a redução na intensidade

radiante em razão da absorção da radiação pelo meio e do espalhamento da radiação para fora da direção de propagação, o segundo termo, indica o aumento na intensidade devido à emissão de radiação pelo meio e, o terceiro termo, representa o ganho de intensidade radiativa devido a radiação que incide sobre o meio e que é espalhada na direção Ω .

Ainda, na Equação 2.1 ($\Omega \cdot \nabla$) é o operador divergente da variação do fluxo angular de intensidade radiativa através de um volume infinitesimal do meio, e em coordenadas cartesianas é escrito como [Lewis e Miller, 1984]

$$(\Omega \cdot \nabla)I(\mathbf{r}, \Omega) = \Omega_x \frac{\partial I}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial I}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial I}{\partial z}. \quad (2.2)$$

As direções angulares dos movimentos das partículas são descritas usando os cossenos diretores $\Omega = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$, conforme a Figura 2.1, tal que

$$\Omega_x = \mu = \text{sen}(\theta) \cos(\varphi) = \sqrt{1 - \xi^2} \cos(\varphi), \quad (2.3)$$

$$\Omega_y = \eta = \text{sen}(\theta) \text{sen}(\varphi) = \sqrt{1 - \xi^2} \text{sen}(\varphi), \quad (2.4)$$

$$\Omega_z = \xi = \cos(\theta), \quad (2.5)$$

onde $\theta \in [0, \pi]$ representa o ângulo polar, medido a partir do eixo z , e $\varphi \in [0, 2\pi]$ é o ângulo azimutal, medido a partir do eixo x , e a seguinte relação é válida, $\mu^2 + \eta^2 + \xi^2 = 1$.

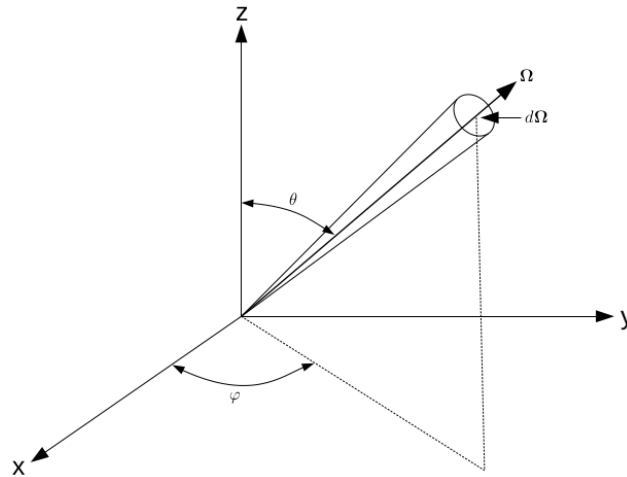


Figura 2.1 – Sistema de coordenadas para a posição \mathbf{r} e direção Ω . [Adaptado de Bell e Glasstone, 1970]

Dessa forma, a equação de transferência radiativa em estado estacionário, monoeenergética, e em coordenadas cartesianas, é reescrita como

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) + \eta \frac{\partial}{\partial y} I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) + \xi \frac{\partial}{\partial z} I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) + \beta I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \kappa I_b(\mathbf{r}) + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') \Phi(\boldsymbol{\Omega}' \cdot \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega}'. \quad (2.6)$$

2.1.1 Representação da Função de Fase de Espalhamento

A função de fase $\Phi(\boldsymbol{\Omega}' \cdot \boldsymbol{\Omega})$ descreve a distribuição direcional do espalhamento, ou seja, representa a energia radiativa que se propaga através de um meio ao longo de uma dada direção e é espalhada sobre todas as outras direções do espaço. $\Phi(\boldsymbol{\Omega}' \cdot \boldsymbol{\Omega})$ representa a probabilidade de um feixe incidente dentro do ângulo $d\boldsymbol{\Omega}'$, na direção $\boldsymbol{\Omega}'$, se espalhar dentro de $d\boldsymbol{\Omega}$, na direção $\boldsymbol{\Omega}$ [Howell et al., 2016], ver Figura 2.2. A função de fase pode ser normalizada, uma vez que a soma das densidades de probabilidade sobre todas as direções do espaço é igual à unidade:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \Phi(\boldsymbol{\Omega}' \cdot \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega}' = 1. \quad (2.7)$$

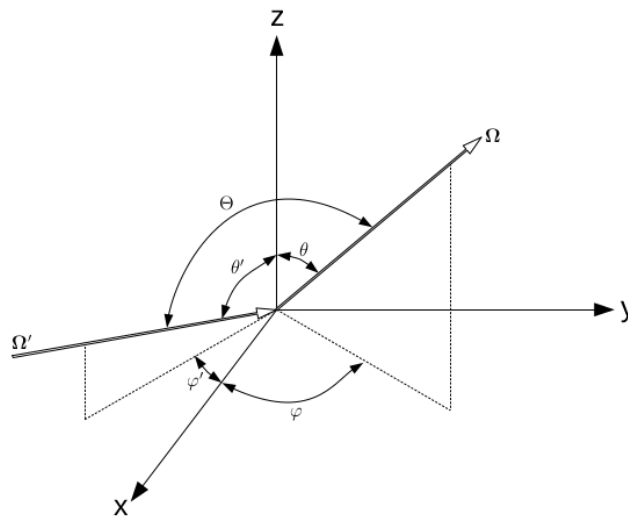


Figura 2.2 – Nomenclatura para as direções de intensidade incidente e espalhamento em termos dos ângulos polar e azimutal. [Adaptado de Howell et al., 2016]

Se a radiação incidente de partículas em um determinado ponto do meio é espalhada de igual forma em todas as direções, a função de fase é considerada isotrópica e neste caso $\Phi(\boldsymbol{\Omega}' \cdot \boldsymbol{\Omega}) = 1$. E se a radiação incidente não é espalhada uniformemente sobre todas as direções do espaço, o espalhamento é considerado anisotrópico. Nesse caso,

as características das partículas presentes no meio é que determinam a distribuição de espalhamento.

A função de fase $\Phi(\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega})$, de acordo com Chandrasekhar, 1950, pode ser representada em termos de uma expansão finita dos polinômios de Legendre, em termos do ângulo de espalhamento Θ , como

$$\Phi(\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}) = \Phi(\cos \Theta) = \sum_{l=0}^L C_l P_l(\cos \Theta), \quad (2.8)$$

onde C_l são os coeficientes da expansão; L é a ordem de expansão da função de fase e P_l representa o polinômio de Legendre de grau l . O ângulo de espalhamento Θ é definido como o ângulo entre as direções incidente e de espalhamento, conforme já mencionado. Assim, usando as Equações 2.3, 2.4 e 2.5 é possível escrever

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi' - \varphi) \\ &= \xi \xi' + \sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - \xi'^2} \cos(\varphi' - \varphi). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Através da Equação 2.9, é aplicada na Equação 2.8 o teorema de adição para harmônicos esféricos, assim a função de fase de espalhamento pode ser escrita como [Chandrasekhar, 1950; Lewis e Miller, 1984]

$$\Phi(\cos \Theta) = \Phi(\xi, \varphi; \xi', \varphi') = \sum_{l=0}^L \sum_{p=0}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi) P_l^p(\xi') \cos[p(\varphi' - \varphi)], \quad (2.10)$$

onde

$$C_l^p = C_l \frac{(l-p)!}{(l+p)!}, \quad (2.11)$$

$\delta_{0,p}$ é a delta de Kronecker (igual a 1 quando $p = 0$, e igual a zero em outros casos) e os P_l^p 's são os polinômios de Legendre associados de ordem p e grau l [Lewis e Miller, 1984].

2.2 Aproximação em Ordenadas Discretas da Equação Bidimensional de Transferência Radiativa

O método de ordenadas discretas, desenvolvido por Wick, 1943 e Chandrasekhar, 1950, tem sido amplamente utilizado como aproximação para equação de transporte. A base do método consiste na discretização da direção angular das partículas e, consequen-

temente, aproximação do termo integral da equação de transporte, fazendo uso de nós e de pesos de uma regra de quadratura numérica, da forma

$$\int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') \Phi(\boldsymbol{\Omega}' \cdot \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega}' \approx \sum_{n=1}^M w_n I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}_n) \Phi(\boldsymbol{\Omega}_n \cdot \boldsymbol{\Omega}). \quad (2.12)$$

Nesse contexto, considerando a geometria cartesiana bidimensional, com $x \in [0, a]$ e $y \in [0, b]$, uma aproximação em ordenadas discretas da Equação 2.6 é escrita para a intensidade de radiação $I(x, y, \boldsymbol{\Omega}_i)$ na forma [Howell et al., 2016; Modest, 2013]

$$\begin{aligned} \mu_i \frac{\partial}{\partial x} I(x, y, \boldsymbol{\Omega}_i) + \eta_i \frac{\partial}{\partial y} I(x, y, \boldsymbol{\Omega}_i) + \beta I(x, y, \boldsymbol{\Omega}_i) = \\ \kappa I_b(x, y) + \frac{\sigma_s}{4\pi} \sum_{n=1}^M w_n I(x, y, \boldsymbol{\Omega}_n) \Phi(\boldsymbol{\Omega}_n \cdot \boldsymbol{\Omega}_i), \end{aligned} \quad (2.13)$$

para $i = 1, \dots, M$, em que M é um número inteiro par que representa o número total de direções discretas e w_n são os pesos (normalizados para 4π) associados às direções angulares $\boldsymbol{\Omega}_n = (\mu_n, \eta_n)$ definido de acordo com um esquema de quadratura numérica. Os esquemas de quadraturas numéricas utilizados neste trabalho são brevemente descritos na próxima seção.

Segundo Cacuci, 2010, na geometria cartesiana bidimensional, definida no plano (x, y) , é conveniente representar a variação angular da intensidade usando o cosseno diretor ξ e o ângulo azimutal φ . Neste caso, a intensidade e o termo fonte são independentes de z e são simétricos em relação ao cosseno diretor ξ , de modo que

$$I(x, y, \xi, \varphi) = I(x, y, -\xi, \varphi) \quad \text{e} \quad Q(x, y, \xi, \varphi) = Q(x, y, -\xi, \varphi). \quad (2.14)$$

Assim, substituindo a expressão dada em 2.10, para $\Phi(\boldsymbol{\Omega}_n \cdot \boldsymbol{\Omega}_i)$, na Equação 2.13 e fazendo uso das propriedades 2.14 obtém-se para $i = 1, \dots, M$

$$\begin{aligned} \mu_i \frac{\partial}{\partial x} I(x, y, \boldsymbol{\Omega}_i) + \eta_i \frac{\partial}{\partial y} I(x, y, \boldsymbol{\Omega}_i) + \beta I(x, y, \boldsymbol{\Omega}_i) = \kappa I_b(x, y) + \\ \frac{\sigma_s}{4\pi} \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \sum_{n=1}^M w_n P_l^p(\xi_n) \cos[p(\varphi_n - \varphi_i)] I(x, y, \boldsymbol{\Omega}_n). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Este modelo é complementado com condições de contorno que expressam a intensidade na parede do domínio ao longo de cada direção ordenada. Em ordenadas discretas,

as condições de contorno são escritas como

$$I(x, y, \mathbf{\Omega}_i) = \epsilon_w I_{bw}(x, y) + \frac{\rho}{\pi} \sum_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega}_j > 0} w_j I(x, y, \mathbf{\Omega}_j) |\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega}_j|, \quad (2.16)$$

para (x, y) no contorno do domínio, onde ϵ_w é a emissividade da superfície; ρ é a refletividade da superfície; $\mathbf{\Omega}_i$ (com $\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega}_i < 0$, \mathbf{n} sendo o vetor unitário normal para fora no contorno do domínio) denotam as direções de fluxo de entrada e $\mathbf{\Omega}_j$ são as direções de fluxo de saída ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega}_j > 0$).

2.3 Quadraturas Numéricas

Nesta seção apresenta-se uma breve descrição dos esquemas de quadraturas numéricas utilizados neste trabalho.

2.3.1 Quadratura Simétrica de Nível (LQ_N)

A Quadratura Simétrica de Nível (LQ_N) (do inglês *Level Symmetric Quadrature*) [Carlson e Lee, 1961; Lee, 1962; Lewis e Miller, 1984] é classificada como uma quadratura completamente simétrica que possui vetores direção (μ, η, ξ) invariantes à rotação de $\pi/2$ sobre qualquer um dos eixos em torno do centro da esfera unitária. Dessa forma, cada conjunto de coordenadas é simétrico em relação à origem e o conjunto de pontos em cada eixo é o mesmo. Os pontos base são selecionados na esfera unitária de tal forma que preservam a simetria entre os oito octantes, com respeito as rotações $\pi/2$ [Cacuci, 2010]. Assim, definem-se os pontos da quadratura em apenas um dos octantes e a partir disso as direções são refletidas para os demais octantes fazendo alterações de sinais de forma consistente.

Uma vez definida a primeira ordenada, o conjunto de valores dos cossenos diretores em cada eixo é representado por [Cacuci, 2010]

$$\mu_p^2 = \mu_1^2 + (p-1) \frac{2(1-3\mu_1^2)}{N-2}, \quad 1 \leq p \leq N/2, \quad (2.17)$$

onde μ_1 é a projeção do primeiro ponto base no intervalo $0 < \mu_1^2 \leq 1/3$. A escolha de μ_1 é arbitrária, exceto para o caso $N = 2$ quando o valor será $\mu_1 = 1/\sqrt{3}$ [Lewis e Miller, 1984].

O número de direções é formado pela combinação de cossenos diretores μ, η e ξ em

toda a esfera unitária e é dado por $N(N + 2)$, onde N representa a ordem da quadratura utilizada e deve ser par. O número de direções por octante (N_d) é $N_d = N(N + 2)/8$ e essas direções estão dispostas em um padrão triangular na esfera unitária, com $N/2$ níveis diferentes por hemisfério e com $N/2 - i + 1$ pontos em cada nível i , conforme pode ser visto na Figura 2.3.

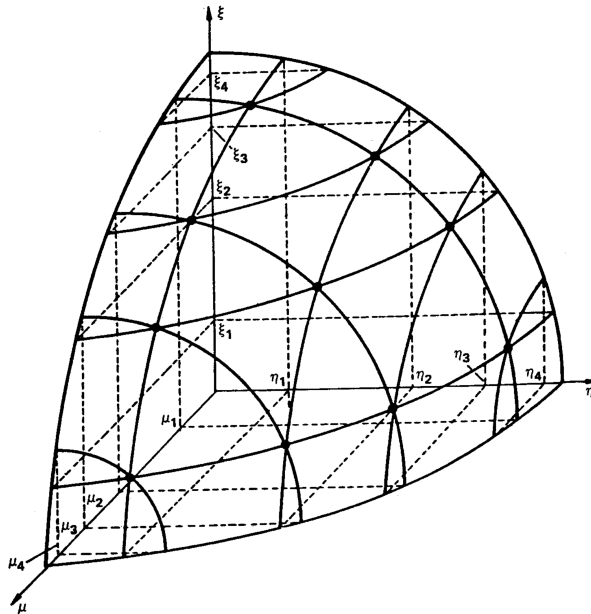


Figura 2.3 – Distribuição de direções na quadratura LQ_N com ordem $N = 8$ e $N_d = 10$ direções por octante. [Fonte: Lewis e Miller, 1984]

De acordo com Lewis e Miller, 1984 e Cacuci, 2010, em geometrias bidimensionais a dependência azimutal não é considerada, dessa forma os pontos de quadratura são projetados sobre o plano cartesiano x e y e os pontos pertencentes a $z > 0$ coincidem com os pontos pertencentes a $z < 0$. Assim, em problemas bidimensionais, o número de direções totais é reduzido para a metade das direções da esfera unitária, ou seja, $M = N(N + 2)/2$.

Os pesos em cada octante são normalizados de forma que

$$\sum_{n=1}^{N(N+2)/8} \omega_n = 1, \quad (2.18)$$

onde o índice n representa o conjunto de cossenos diretores (μ_i, η_j, ξ_k) , com $i, j, k = 1, \dots, N/2$. Estes pesos associados a cada ponto base estão sujeitos a restrições de simetria. Para $N = 2$ há apenas uma direção por quadrante e um correspondente peso,

(P_N) de grau N . Esses polinômios podem ser obtidos através da fórmula de recorrência

$$(j+1)P_{j+1}(\xi) = (2j+1)\xi P_j(\xi) - jP_{j-1}(\xi), \quad (2.19)$$

com $P_{-1}(\xi) = 0$ e $P_0(\xi) = 1$, para $-1 < \xi < 1$ e $j = 0, \dots, N$.

Os pesos associados a cada nível ξ_i , com $i = 1, \dots, N/2$ são determinados por meio da seguinte fórmula

$$\omega_i = \frac{2}{(1 - \xi_i^2) \left[\left(\frac{dP_N}{d\xi} \right)_{\xi_i} \right]^2}. \quad (2.20)$$

Por outro lado, a quadratura unidimensional de Chebyshev, usada para a discretização da variável azimutal φ , define seus valores pelas raízes do polinômio de Chebyshev (T_N) de primeira espécie, que podem ser obtidos através da fórmula de recorrência

$$T_{j+1}(\varpi) = 2\varpi T_j(\varpi) - T_{j-1}(\varpi), \quad (2.21)$$

com $T_0(\varpi) = 1$ e $T_1(\varpi) = \varpi$, para $j = 1, \dots, N$.

2.3.2.1 Quadratura Legendre-Chebyshev Quadrangular $(P_N T_N)$

A Quadratura Legendre-Chebyshev Quadrangular $(P_N T_N)$ [Lathrop e Carlson, 1965; Cacuci, 2010; Longoni e Haghghat, 2001, 2002; Longoni, 2004] é construída de forma que as ordens das quadraturas unidimensionais de Gauss-Legendre e de Gauss-Chebyshev são iguais [Lathrop e Carlson, 1965; Cacuci, 2010]. Dessa forma, para cada nível polar ξ_i , que é definido como a i -ésima raiz do polinômio de Legendre P_N de grau N , são associados N pontos provenientes da quadratura de Chebyshev. O conjunto de ângulos azimutais discretizados para cada nível ξ_i é definido através da relação [Cacuci, 2010; Tres, 2015]

$$\varpi_j = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{N - 2j + 1}{N} \right), \quad (2.22)$$

para $j = 1, \dots, N$, e N é a ordem da quadratura de Gauss-Legendre. O conjunto discreto de ângulos azimutais, obtidos pela Equação 2.22, determinam as raízes do polinômio de Chebyshev T_N de primeira espécie de grau N , uma vez que

$$T_N(\cos(\varpi)) = 0. \quad (2.23)$$

Uma vez obtidos os valores de ϖ_j , define-se o conjunto de pontos da quadratura

produto Legendre-Chebyshev $P_N T_N$ por [Cacuci, 2010; Tres, 2015]

$$\mu_{i,j} = \cos(\varpi) \sqrt{1 - \xi_i^2}, \quad (2.24)$$

e para cada nível i

$$\eta_{i,j} = \sqrt{1 - \xi_i^2 - \mu_{i,j}^2}, \quad (2.25)$$

com $i = 1, \dots, N/2$ e $j = 1, \dots, N$.

Os pesos da quadratura $P_N T_N$ são dados em termos dos pesos ω_i^l da quadratura de Gauss-Legendre como [Cacuci, 2010; Nenê, 2020]

$$w_{i,j} = \frac{\pi \omega_i^l}{N}, \quad (2.26)$$

de maneira que, para cada nível polar ξ_i , as direções correspondentes possuem o mesmo peso.

A quadratura $P_N T_N$ gera um total de $2(N \times N)$ direções discretas na esfera unitária. E na quadratura $P_N T_N$ a disposição das direções na esfera unitária assume um padrão quadrangular, conforme mostra a Figura 2.5, com um total de $N_d = N^2/4$ direções discretas por octante da esfera unitária.

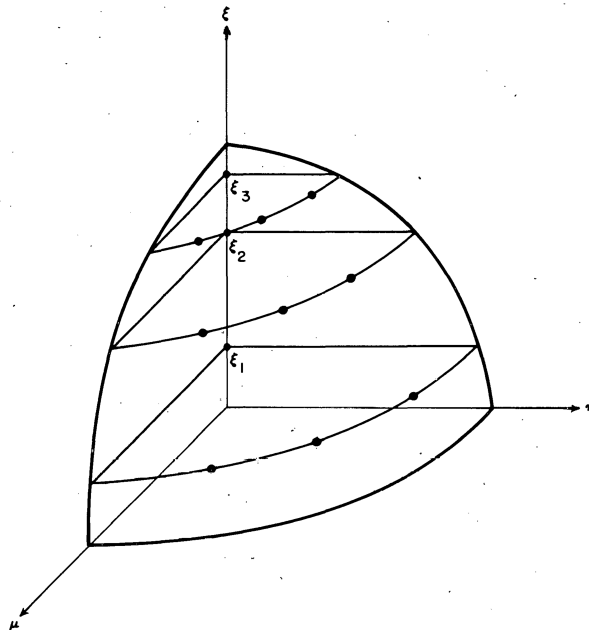


Figura 2.5 – Distribuição de direções na quadratura $P_N T_N$ com ordem $N = 6$ e $N_d = 9$ direções por octante. [Fonte: Lathrop e Carlson, 1965]

2.3.2.2 Quadratura Legendre-Chebyshev Triangular ($P_N T_N S_N$)

A Quadratura Legendre-Chebyshev Triangular ($P_N T_N S_N$) [Lathrop e Carlson, 1965; Cacuci, 2010; Longoni e Haghghat, 2001, 2002; Longoni, 2004] é construída através de uma combinação diferente das quadraturas unidimensionais de Gauss-Legendre e Gauss-Chebyshev, que apresenta uma configuração de ordenadas que se assemelha à configuração triangular da Quadratura Simétrica de Nível (LQ_N). Esta combinação é de tal forma que, novamente cada nível polar ξ_i é definido como a i -ésima raiz do polinômio de Legendre P_N de grau N . Tendo definidos os ξ_i níveis polares, a discretização da variável azimutal é feita de modo que, para o primeiro nível polar, ξ_1 , usa-se a quadratura de Gauss-Chebyshev de ordem N ; no segundo nível polar, ξ_2 , usa-se a quadratura de Gauss-Chebyshev de ordem $N - 2$; no i -ésimo nível polar, ξ_i , usa-se a quadratura de Gauss-Chebyshev de ordem $N - 2i + 2$. Considerando que a ordem N da quadratura de Gauss-Legendre deva ser par, têm-se que os níveis polares aparecem aos pares \pm , e dessa forma têm-se $N/2$ níveis polares positivos. Ainda, é considerado o primeiro nível polar, ξ_i , como sendo aquele mais próximo do centro da esfera unitária, e o último nível polar, $\xi_{N/2}$ como sendo o mais próximo da borda da esfera unitária.

O conjunto discreto de ângulos azimutais para cada nível ξ_i é determinado através da relação [Cacuci, 2010]

$$\varpi_{i,j} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{N - 2j - 2i + 3}{N - 2i + 2} \right), \quad (2.27)$$

para $j = 1, \dots, N - 2i + 2$ e $i = 1, \dots, N/2$ e N é a ordem da quadratura de Gauss-Legendre. O conjunto discreto de ângulos azimutais, obtidos pela Equação 2.27, determinam as raízes do polinômio de Chebyshev T_N de primeira espécie de grau $N - 2i + 2$, uma vez que

$$T_{N-2i+2}(\cos(\varpi_{i,j})) = 0. \quad (2.28)$$

Uma vez obtidos os valores de $\varpi_{i,j}$, define-se o conjunto de pontos da quadratura produto $P_N T_N S_N$ por [Cacuci, 2010; Tres, 2015]

$$\mu_{i,j} = \cos(\varpi_{i,j}) \sqrt{1 - \xi_i^2}, \quad (2.29)$$

e para cada nível i

$$\eta_{i,j} = \sqrt{1 - \xi_i^2 - \mu_{i,j}^2}, \quad (2.30)$$

com $i = 1, \dots, N/2$ e $j = 1, \dots, N - 2i + 2$.

Os pesos da quadratura $P_N T_N S_N$ são dados em termos dos pesos ω_i^l da quadratura de Gauss-Legendre como [Cacuci, 2010; Nenê, 2020]

$$w_{i,j} = \frac{\pi \omega_i^l}{N - 2i + 2}. \quad (2.31)$$

A quadratura $P_N T_N S_N$ gera um total de $N(N + 2)$ direções discretas na esfera unitária. E na quadratura $P_N T_N S_N$ a disposição das direções na esfera unitária assume um padrão triangular, conforme mostra a Figura 2.6, com um total de $N_d = N(N + 2)/8$ direções discretas por octante da esfera unitária.

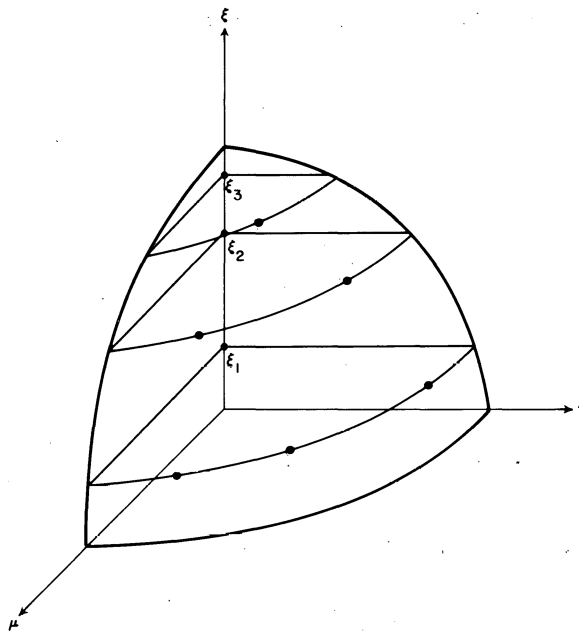


Figura 2.6 – Distribuição de direções na quadratura $P_N T_N S_N$ com ordem $N = 6$ e $N_d = 6$ direções por octante. [Fonte: Lathrop e Carlson, 1965]

2.3.3 Quadratura Quadruple Range (QR)

A quadratura Quadruple Range (QR) foi proposta na década de 70 por Abu-Shumays, 1977, desenvolvida para o tratamento de problemas bidimensionais de transporte. É uma quadratura produto, mas diferente das quadraturas Legendre-Chebyshev, sua construção é feita somente para o octante principal da esfera unitária, ou seja, o intervalo de definição para o ângulo azimutal é considerado como sendo $\varphi \in [0, \pi/2]$ e para o ângulo polar o intervalo $\theta \in [0, \pi/2]$. Na construção da quadratura QR, uma vez

que o ângulo azimutal φ é dividido em quatro intervalos, as ordenadas e seus respectivos pesos de quadratura são definidos para o octante principal, e assim são estendidos para os demais intervalos angulares por simetria [Abu-Shumays, 1977, 2001].

Devido a quadratura QR envolver a resolução de sistemas não lineares mal-condicionados, Abu-Shumays, 1977 geraram numericamente somente esquemas de baixa ordem, ou seja para a quadratura azimutal a ordem da variável azimutal de $N_\varphi \leq 22$ e para a quadratura polar a ordem polar de $N_\theta \leq 10$. Décadas depois, Spence, 2015 propôs uma abordagem utilizando polinômios ortogonais não clássicos, para contornar o problema do mal condicionamento destes sistemas não lineares.

Aspectos teóricos e computacionais para o desenvolvimento das quadraturas QR pelas duas abordagens, propostas por [Abu-Shumays, 1977, 2001; Spence, 2015], podem ser encontrados no trabalho de Nenê, 2020, bem como o acoplamento das quadraturas unidimensionais para as variáveis polar e azimutal.

Apresentam-se três acoplamentos para os esquemas de quadratura QR : acoplamento compatível [Abu-Shumays, 1977], acoplamento quadrangular [Spence, 2015] e acoplamento triangular [Abu-Shumays, 2001; Hu, 2018]. Esses acoplamentos são gerados através do produto de um conjunto de quadratura para a variável polar por um conjunto de quadratura para a variável azimutal. A forma como são combinados os graus das quadraturas unidimensionais utilizadas é que se diferenciam os acoplamentos, resultando em diferentes números de direções discretas por octante na esfera unitária para os diferentes esquemas.

2.3.3.1 Quadratura QR Compatível (QR_C)

Neste acoplamento para ser compatível com as ordens de precisão das quadraturas unidimensionais para as variáveis polar e azimutal, é necessário o dobro de coordenadas e pesos para a variável azimutal φ do que para a variável polar θ . Assim, definida a ordem N_θ da quadratura polar desejada, define-se a ordem N_φ da quadratura azimutal de forma que $N_\varphi = 2N_\theta$. Dessa forma, tem-se um total de $N_d = N_\varphi \times N_\theta = (2N_\theta) \times N_\theta = 2N_\theta^2$ direções discretas por octante da esfera unitária.

2.3.3.2 Quadratura QR Quadrangular (QR_Q)

Neste acoplamento as ordens das quadraturas unidimensionais para as variáveis polar e azimutal necessitam ser iguais. Assim, definida a ordem N_θ da quadratura polar desejada, define-se a ordem N_φ da quadratura azimutal de forma que $N_\varphi = N_\theta$. Todos os níveis polares utilizam a quadratura azimutal de mesma ordem, da mesma forma que a quadratura $P_N T_N$, e tem-se um total de $N_d = N_\theta^2$ direções discretas por octante da esfera unitária.

2.3.3.3 Quadratura QR Triangular (QR_T)

Neste acoplamento as ordens das quadraturas unidimensionais são definidas de forma semelhante à quadratura $P_N T_N S_N$, isto é, definidos os ξ_i níveis polares, $\xi_i = \cos(\theta_i)$, para uma certa ordem N_θ , no primeiro nível polar, ξ_1 , a quadratura azimutal de ordem N_θ é utilizada; no segundo nível polar, ξ_2 , a quadratura azimutal de ordem $N_\theta - 1$ é utilizada; no i -ésimo nível polar, ξ_i , a quadratura azimutal de ordem $N_\theta + 1 - i$ é utilizada. Cada nível polar utiliza uma ordem de quadratura azimutal diferente e tem-se um total de $N_d = N_\theta(N_\theta + 1)/2$ direções discretas por octante da esfera unitária.

As ordenadas e pesos da quadratura LQ_N estão tabeladas em Lewis e Miller, 1984 e Cacuci, 2010. Já a geração das ordenadas e pesos das quadraturas $P_N T_N$, $P_N T_N S_N$ e QR , conforme o número de direções requerido, foram implementadas no trabalho de Nenê, 2020, possibilitando obter tais quadraturas de forma rápida e com ordem arbitrária.

No próximo capítulo, desenvolve-se a solução ADO-Nodal para o modelo em ordenadas discretas da equação de transferência radiativa, Equação 2.15, em geometria cartesiana bidimensional.

3 SOLUÇÃO ADO-NODAL PARA A EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA BIDIMENSIONAL

Neste capítulo, apresenta-se a dedução da solução, através do método ADO-Nodal, da equação bidimensional de transferência radiativa em ordenadas discretas Equação 2.15, considerando um meio com espalhamento anisotrópico.

3.1 Esquemas Nodais para a Aproximação em Ordenadas Discretas

Com o intuito de obter a partir da equação bidimensional em ordenadas discretas, que é um sistema de equações diferenciais parciais bidimensionais, dois sistemas de equações diferenciais ordinárias unidimensionais, utilizam-se os fundamentos dos métodos nodais. Tal técnica consiste em integrar a equação em ordenadas discretas em cada uma das variáveis espaciais x e y para obtenção das equações unidimensionais integradas transversalmente.

Primeiramente, dividi-se uma placa bidimensional em $r = 1, \dots, R$ regiões retangulares, definidas por $x \in [a_{h-1}^r, a_h^r]$ e $y \in [b_{k-1}^r, b_k^r]$ com $0 \leq a_{h-1}^r < a_h^r \leq a$ e $0 \leq b_{k-1}^r < b_k^r \leq b$, onde $h = 1, \dots, H$ e $k = 1, \dots, K$ indicam o número de subdivisões consideradas nos eixos x e y , respectivamente, conforme representação na Figura 3.1. Denomina-se a divisão do domínio bidimensional $H \times K$ por malha.

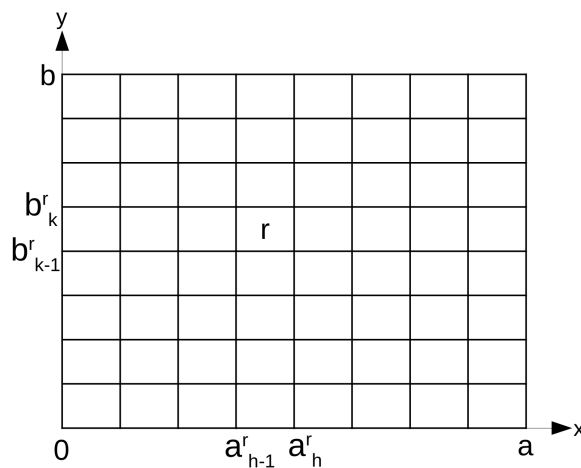


Figura 3.1 – Representação da divisão do domínio em regiões.

A formulação será derivada na forma de soluções locais para as intensidades médias em cada uma das regiões r do domínio.

3.1.1 Equações Unidimensionais para a Intensidade Média na Variável y

A fim de resolver a Equação 2.15 usando os fundamentos dos métodos nodais e obter as equações da intensidade média na variável y , considera-se o ordenamento para as direções Ω_i da regra de quadratura, seguindo Barichello et al., 2011, conforme representação na Figura 3.2, para $i = 1, \dots, M/2$ as direções tem coordenadas $\mu_i > 0$ e para $i = M/2 + 1, \dots, M$ tem coordenadas $\mu_i < 0$. Ainda, utiliza-se o fato de que $\eta_i = \eta_{i+M/2}$, conforme Figura 3.2, como é usual em vários esquemas de quadratura. Assim, considera-se o seguinte ordenamento para a intensidade média na variável y :

- $i = 1, \dots, M/4$ direções nas quais $\mu_i > 0$ e $\eta_i > 0$;
- $i = M/4 + 1, \dots, M/2$ direções nas quais $\mu_i > 0$ e $\eta_i < 0$;
- $i = M/2 + 1, \dots, 3M/4$ direções nas quais $\mu_i < 0$ e $\eta_i > 0$;
- $i = 3M/4 + 1, \dots, M$ direções nas quais $\mu_i < 0$ e $\eta_i < 0$.

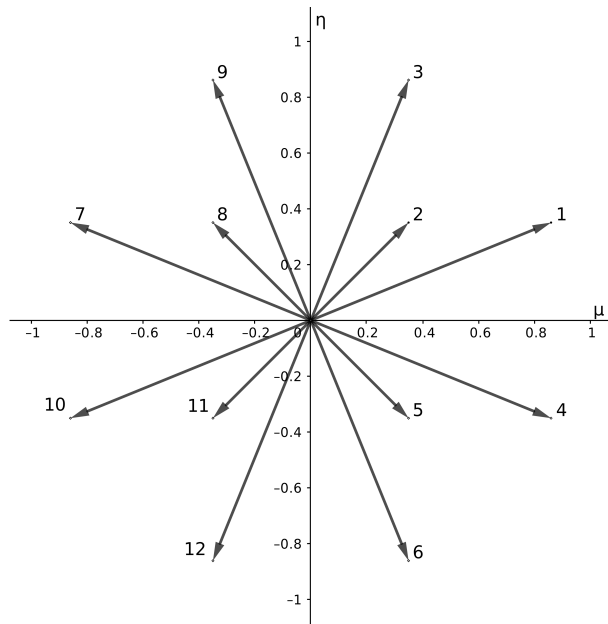


Figura 3.2 – Ordenamento das direções da regra de quadratura para a intensidade média na variável y ($M = 12$ da LQ_N).

Assim, considerando o ordenamento escolhido, multiplica-se a Equação 2.15 por $1/(b_k^r - b_{k-1}^r)$ e integra-se em relação a $y \in [b_{k-1}^r, b_k^r]$, que representa o intervalo em y da região em que se pretende determinar a intensidade angular média na variável y .

Este processo resulta em um sistema de equações diferenciais ordinárias em termos das intensidades angulares médias na variável y , I_{yr} , com dependência espacial em x ,

$$\mu_i \frac{d}{dx} I_{yr}(x, \Omega_i) + \beta_r I_{yr}(x, \Omega_i) = \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \left\{ \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \right. \\ \left. \times \sum_{n=1}^{M/2} w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{yl}^p(\Omega_n, I_{yr}(x, \Omega_n)) \right\} + Q_{yr}(x, \Omega_i), \quad (3.1)$$

com

$$Q_{yr}(x, \Omega_i) = \kappa_r I_{b_{yr}}(x) - \frac{\eta_i}{\alpha_k^r} [I_r(x, b_k^r, \Omega_i) - I_r(x, b_{k-1}^r, \Omega_i)], \quad (3.2)$$

e $\alpha_k^r = b_k^r - b_{k-1}^r$, onde

$$\mathcal{T}_{yl}^p(\Omega_n, I_{yr}(x, \Omega_n)) = \begin{cases} \cos(p\varphi_n) \cos(p\varphi_i) [I_{yr}(x, \Omega_n) + I_{yr}(x, \Omega_{n+M/2})] + \\ \quad \text{sen}(p\varphi_n) \text{sen}(p\varphi_i) [I_{yr}(x, \Omega_n) - I_{yr}(x, \Omega_{n+M/2})], & \text{se } p \text{ é par,} \\ \cos(p\varphi_n) \cos(p\varphi_i) [I_{yr}(x, \Omega_n) - I_{yr}(x, \Omega_{n+M/2})] + \\ \quad \text{sen}(p\varphi_n) \text{sen}(p\varphi_i) [I_{yr}(x, \Omega_n) + I_{yr}(x, \Omega_{n+M/2})], & \text{se } p \text{ é ímpar,} \end{cases} \quad (3.3)$$

e

$$- \mu_i \frac{d}{dx} I_{yr}(x, \Omega_{i+M/2}) + \beta_r I_{yr}(x, \Omega_{i+M/2}) = \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \left\{ \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \right. \\ \left. \times \sum_{n=1}^{M/2} w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{yl}^p(\Omega_n, I_{yr}(x, \Omega_{n+M/2})) \right\} + Q_{yr}(x, \Omega_{i+M/2}) \quad (3.4)$$

com

$$Q_{yr}(x, \Omega_{i+M/2}) = \kappa_r I_{b_{yr}}(x) - \frac{\eta_i}{\alpha_k^r} [I_r(x, b_k^r, \Omega_{i+M/2}) - I_r(x, b_{k-1}^r, \Omega_{i+M/2})], \quad (3.5)$$

onde

$$\mathcal{T}_{y_i}^p(\boldsymbol{\Omega}_n, I_{yr}(x, \boldsymbol{\Omega}_{n+M/2})) = \begin{cases} \cos(p\varphi_n) \cos(p\varphi_i) [I_{yr}(x, \boldsymbol{\Omega}_n) + I_{yr}(x, \boldsymbol{\Omega}_{n+M/2})] - \\ \quad \text{sen}(p\varphi_n) \text{sen}(p\varphi_i) [I_{yr}(x, \boldsymbol{\Omega}_n) - I_{yr}(x, \boldsymbol{\Omega}_{n+M/2})], & \text{se } p \text{ é par,} \\ -\cos(p\varphi_n) \cos(p\varphi_i) [I_{yr}(x, \boldsymbol{\Omega}_n) - I_{yr}(x, \boldsymbol{\Omega}_{n+M/2})] + \\ \quad \text{sen}(p\varphi_n) \text{sen}(p\varphi_i) [I_{yr}(x, \boldsymbol{\Omega}_n) + I_{yr}(x, \boldsymbol{\Omega}_{k+M/2})], & \text{se } p \text{ é ímpar,} \end{cases} \quad (3.6)$$

para $i = 1, \dots, M/2$ e $r = 1, \dots, R$. Sendo que nas Equações 3.1 à 3.6 define-se a intensidade angular média ao longo da direção y , na região r do domínio, por

$$I_{yr}(x, \boldsymbol{\Omega}_i) = \frac{1}{\alpha_k^r} \int_{b_{k-1}^r}^{b_k^r} I_r(x, y, \boldsymbol{\Omega}_i) dy, \quad (3.7)$$

e a intensidade do corpo negro como

$$I_{b_{yr}}(x) = \frac{1}{\alpha_k^r} \int_{b_{k-1}^r}^{b_k^r} I_{b_r}(x, y) dy, \quad (3.8)$$

para $i = 1, \dots, M$.

Em uma determinada fronteira da malha, a escolha do ordenamento das direções é de tal forma que para $i = 1, \dots, M/2$, os vetores $\boldsymbol{\Omega}_i$ representam as direções de intensidades incidentes e os vetores $\boldsymbol{\Omega}_{i+M/2}$ representam as direções de intensidades emergentes.

Neste ponto, é importante destacar que dos processos de integração surgem nas Equações 3.1 e 3.4 a dependência das intensidades (não médias) nas interfaces das regiões. Os termos relacionados as intensidades nos contornos de cada região, $I_r(x, b_k^r, \boldsymbol{\Omega}_i)$ e $I_r(x, b_{k-1}^r, \boldsymbol{\Omega}_i)$, aparecem no segundo termo no lado direito da igualdade do termo fonte, nas Equações 3.2 e 3.5. No entanto, notam-se que para as direções incidentes essas variáveis podem ser conhecidas nas fronteiras a partir das condições de contorno estabelecidas para o problema, enquanto que para outras direções, em particular nos contornos das regiões internas, estes termos são desconhecidos e precisam ser aproximados para o fechamento do sistema. Assim, como usual nos esquemas nodais, equações auxiliares são necessárias para aproximar as intensidades desconhecidas nos contornos e na literatura diferentes equações auxiliares foram propostas para aproximar essas incógnitas no método ADO [Prolo Filho e Barichello, 2014; Cromianski, 2016; Cromianski et al., 2019].

3.1.2 Equações Unidimensionais para a Intensidade Média na Variável x

Para derivar o sistema de equações diferenciais ordinárias em termos das intensidades angulares médias na variável x , I_{xr} , com dependência espacial da variável y , o procedimento é realizado de maneira semelhante. Um cuidado especial ao fato de que considera-se um ordenamento distinto do anterior para as direções da regra de quadratura. Conforme representado na Figura 3.3, seguindo Barichello et al., 2011 para o ordenamento das direções Ω_i , os índices $i = 1, \dots, M/2$ são associados para as direções onde $\eta_i > 0$ e os índices $i = M/2 + 1, \dots, M$ para direções com coordenadas $\eta_i < 0$. Ainda, utiliza-se o fato de que $\mu_i = \mu_{i+M/2}$. Assim, considera-se o seguinte ordenamento para a intensidade média na variável x :

- $i = 1, \dots, M/4$ direções nas quais $\mu_i > 0$ e $\eta_i > 0$;
- $i = M/4 + 1, \dots, M/2$ direções nas quais $\mu_i < 0$ e $\eta_i > 0$;
- $i = M/2 + 1, \dots, 3M/4$ direções nas quais $\mu_i > 0$ e $\eta_i < 0$;
- $i = 3M/4 + 1, \dots, M$ direções nas quais $\mu_i < 0$ e $\eta_i < 0$.

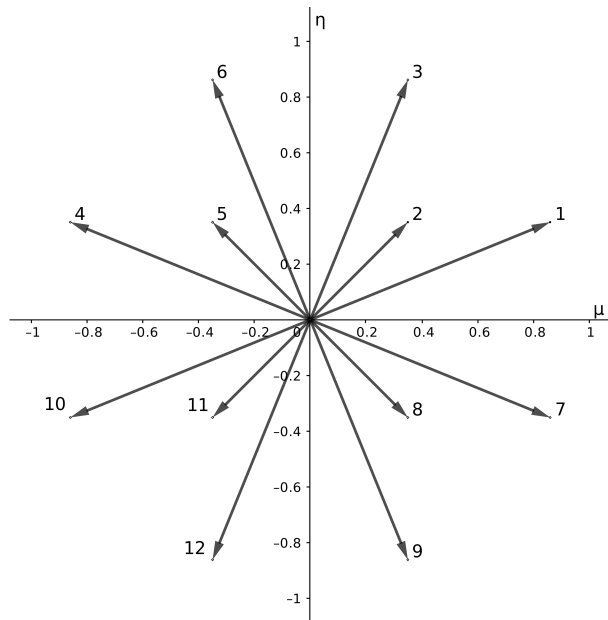


Figura 3.3 – Ordenamento das direções da regra de quadratura para a intensidade média na variável x ($M = 12$ da LQ_N).

De maneira análoga ao que foi feito para a variável y , considerando o novo ordenamento estabelecido, multiplica-se a Equação 2.15 por $1/(a_h^r - a_{h-1}^r)$ e integra-se em $x \in [a_{h-1}^r, a_h^r]$, que representa o intervalo em x da região em que se pretende determinar a intensidade angular média na variável x , resultando em

$$\eta_i \frac{d}{dy} I_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_i) + \beta_r I_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_i) = \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \left\{ \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \right. \\ \left. \times \sum_{n=1}^{M/2} w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{x_l}^p(\mathbf{\Omega}_n, I_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_n)) \right\} + Q_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_i), \quad (3.9)$$

com

$$Q_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_i) = \kappa_r I_{b_{xr}}(y) - \frac{\mu_i}{\vartheta_h^r} [I_r(a_h^r, y, \mathbf{\Omega}_i) - I_r(a_{h-1}^r, y, \mathbf{\Omega}_i)], \quad (3.10)$$

e $\vartheta_h^r = a_h^r - a_{h-1}^r$, onde

$$\mathcal{T}_{x_l}^p(\mathbf{\Omega}_n, I_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_n)) = \cos(p\varphi_n) \cos(p\varphi_i) [I_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_n) + I_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_{n+M/2})] + \\ \text{sen}(p\varphi_n) \text{sen}(p\varphi_i) [I_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_n) - I_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_{n+M/2})], \quad (3.11)$$

e

$$- \eta_i \frac{d}{dy} I_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) + \beta_r I_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) = \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \left\{ \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \right. \\ \left. \times \sum_{n=1}^{M/2} w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{x_l}^p(\mathbf{\Omega}_n, I_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_{n+M/2})) \right\} + Q_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}), \quad (3.12)$$

com

$$Q_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) = \kappa_r I_{b_{xr}}(y) - \frac{\mu_i}{\vartheta_h^r} [I_r(a_h^r, y, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) - I_r(a_{h-1}^r, y, \mathbf{\Omega}_{i+M/2})], \quad (3.13)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{x_l}^p(\boldsymbol{\Omega}_n, I_{xr}(y, \boldsymbol{\Omega}_{n+M/2})) &= \cos(p\varphi_n) \cos(p\varphi_i) [I_{xr}(y, \boldsymbol{\Omega}_n) + I_{xr}(y, \boldsymbol{\Omega}_{n+M/2})] - \\ &\quad \text{sen}(p\varphi_n) \text{sen}(p\varphi_i) [I_{xr}(y, \boldsymbol{\Omega}_n) - I_{xr}(y, \boldsymbol{\Omega}_{n+M/2})], \end{aligned} \quad (3.14)$$

para $i = 1, \dots, M/2$. Nas Equações 3.9 à 3.14 define-se a intensidade média ao longo da direção x na região r e a intensidade do corpo negro, respectivamente, como

$$I_{xr}(y, \boldsymbol{\Omega}_i) = \frac{1}{\vartheta_h^r} \int_{a_{h-1}^r}^{a_h^r} I_r(x, y, \boldsymbol{\Omega}_i) dx, \quad (3.15)$$

e

$$I_{b_{xr}}(y) = \frac{1}{\vartheta_h^r} \int_{a_{h-1}^r}^{a_h^r} I_{br}(x, y) dx, \quad (3.16)$$

para $i = 1, \dots, M$.

Como representado nas Figuras 3.2 e 3.3, cada problema unidimensional segue um ordenamento diferente, que deve ser observado na implementação da solução e que contribuirá para a obtenção das soluções homogêneas.

Aqui neste problema também nas Equações 3.9 e 3.12 aparecem termos desconhecidos, $I_r(a_h^r, y, \boldsymbol{\Omega}_i)$ e $I_r(a_{h-1}^r, y, \boldsymbol{\Omega}_i)$, que dependem das intensidades (não médias) nas interfaces das regiões. Estes termos são tratados como parte da fonte de partículas das Equações 3.10 e 3.13. Como ressaltado anteriormente, equações auxiliares são necessárias para aproximar essas intensidades desconhecidas nos contornos. Neste trabalho, utiliza-se uma aproximação clássica tanto para esses termos como para os termos citados na seção anterior, ou seja, assumem-se as intensidades desconhecidas nos contornos, em cada direção, como uma constante, que será detalhado posteriormente no texto.

3.2 Soluções Homogêneas para as Equações Unidimensionais pelo Método ADO na Região r

O uso dos métodos nodais na equação bidimensional de transferência radiativa em ordenadas discretas, permitiu a obtenção de um sistema de equações unidimensionais integradas transversalmente nas variáveis y e x , Equações 3.1, 3.4, 3.9 e 3.12. Como estas equações são lineares é possível escrever a sua solução como uma superposição das suas soluções homogêneas com as soluções particulares. Desta forma, nesta seção

desenvolvem-se soluções para as versões homogêneas das equações das intensidades médias obtidas na seção anterior. Assim, resolvem-se as equações das intensidades médias através da utilização do método ADO-Nodal [Picoloto et al., 2015]. Este método consiste em construir as soluções homogêneas em termos de autovalores e autofunções. Desta forma, a solução é obtida de forma analítica na variável espacial.

3.2.1 Solução Homogênea para as Equações Unidimensionais das Intensidades Médias em y

Consideram-se as versões homogêneas das equações para a intensidade média na variável y . Neste caso, em um primeiro momento descartam-se os termos de fonte das Equações 3.1 e 3.4, sendo esses termos posteriormente tratados nas soluções particulares. Assim, propõem-se as soluções para o problema homogêneo na região r , para $i = 1, \dots, M$, como

$$I_{yr}^H(x, \mathbf{\Omega}_i) = \Phi_{yr}(\nu_r, \mathbf{\Omega}_i) e^{-x/\nu_r}, \quad (3.17)$$

com $r = 1, \dots, R$, onde ν_r representa a constante de separação na região r , associada à autofunções $\Phi_{yr}(\nu_r, \mathbf{\Omega}_i)$ que serão determinadas. Substituindo a Equação 3.17 nas versões homogêneas das Equações 3.1 e 3.4, à fim de construir a solução do problema homogêneo integrado em y , obtém-se

$$-\frac{\mu_i}{\nu_r} \Phi_{yr}(\nu_r, \mathbf{\Omega}_i) + \beta_r \Phi_{yr}(\nu_r, \mathbf{\Omega}_i) = \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \sum_{n=1}^{M/2} w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{yl}^p(\mathbf{\Omega}_n, \Phi_{yr}(\nu_r, \mathbf{\Omega}_n)), \quad (3.18)$$

onde

$$\mathcal{T}_{yl}^p(\mathbf{\Omega}_n, \Phi_{yr}(\nu_r, \mathbf{\Omega}_n)) = \begin{cases} \cos(p\varphi_n) \cos(p\varphi_i) [\Phi_{yr}(\nu_r, \mathbf{\Omega}_n) + \Phi_{yr}(\nu_r, \mathbf{\Omega}_{n+M/2})] + \\ \quad \sin(p\varphi_n) \sin(p\varphi_i) [\Phi_{yr}(\nu_r, \mathbf{\Omega}_n) - \Phi_{yr}(\nu_r, \mathbf{\Omega}_{n+M/2})], & \text{se } p \text{ é par,} \\ \cos(p\varphi_n) \cos(p\varphi_i) [\Phi_{yr}(\nu_r, \mathbf{\Omega}_n) - \Phi_{yr}(\nu_r, \mathbf{\Omega}_{n+M/2})] + \\ \quad \sin(p\varphi_n) \sin(p\varphi_i) [\Phi_{yr}(\nu_r, \mathbf{\Omega}_n) + \Phi_{yr}(\nu_r, \mathbf{\Omega}_{n+M/2})], & \text{se } p \text{ é ímpar,} \end{cases} \quad (3.19)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\mu_i}{\nu_r} \Phi_{yr}(\nu_r, \Omega_{i+M/2}) + \beta_r \Phi_{yr}(\nu_r, \Omega_{i+M/2}) = \\ \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \sum_{n=1}^{M/2} w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{yi}^p(\Omega_n, \Phi_{yr}(\nu_r, \Omega_{n+M/2})), \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde

$$\mathcal{T}_{yi}^p(\Omega_n, \Phi_{yr}(\nu_r, \Omega_{n+M/2})) = \begin{cases} \cos(p\varphi_n) \cos(p\varphi_i) [\Phi_{yr}(\nu_r, \Omega_n) + \Phi_{yr}(\nu_r, \Omega_{n+M/2})] - \\ \quad \text{sen}(p\varphi_n) \text{sen}(p\varphi_i) [\Phi_{yr}(\nu_r, \Omega_n) - \Phi_{yr}(\nu_r, \Omega_{n+M/2})], & \text{se } p \text{ é par,} \\ -\cos(p\varphi_n) \cos(p\varphi_i) [\Phi_{yr}(\nu_r, \Omega_n) - \Phi_{yr}(\nu_r, \Omega_{n+M/2})] + \\ \quad \text{sen}(p\varphi_n) \text{sen}(p\varphi_i) [\Phi_{yr}(\nu_r, \Omega_n) + \Phi_{yr}(\nu_r, \Omega_{n+M/2})], & \text{se } p \text{ é ímpar,} \end{cases} \quad (3.21)$$

para $i = 1, \dots, M/2$ e $r = 1, \dots, R$.

Nesta etapa, definem-se a soma e subtração das autofunções como [Barichello et al., 2011]

$$U_{yr}(\nu_{jr}, \Omega_i) = \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \Omega_i) + \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \Omega_{i+M/2}), \quad (3.22)$$

e

$$V_{yr}(\nu_{jr}, \Omega_i) = \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \Omega_i) - \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \Omega_{i+M/2}), \quad (3.23)$$

tal que, somando as Equações 3.18 e 3.20 e usando as definições acima, Equações 3.22 e 3.23, para $i = 1, \dots, M/2$, escreve-se a expressão

$$\begin{aligned} -\frac{\mu_i}{\nu_r} V_{yr}(\nu_{jr}, \Omega_i) + \beta_r U_{yr}(\nu_{jr}, \Omega_i) = \\ \frac{\sigma_{sr}}{2\pi} \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \sum_{n=1}^{M/2} w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{yi}^p(\Omega_n, U_{yr}(\nu_{jr}, \Omega_n)), \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde

$$\mathcal{T}_{yi}^p(\Omega_n, U_{yr}(\nu_{jr}, \Omega_n)) = \begin{cases} \cos(p\varphi_n) \cos(p\varphi_i) U_{yr}(\nu_{jr}, \Omega_n), & \text{se } p \text{ é par,} \\ \text{sen}(p\varphi_n) \text{sen}(p\varphi_i) U_{yr}(\nu_{jr}, \Omega_n), & \text{se } p \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (3.25)$$

Por outro lado, subtraíndo as Equações 3.20 de 3.18, e considerando as definições dadas pelas Equações 3.22 e 3.23, escreve-se a expressão

$$-\frac{\mu_i}{\nu_r} U_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i) + \beta_r V_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i) = \frac{\sigma_{sr}}{2\pi} \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \sum_{n=1}^{M/2} w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{yl}^p(\boldsymbol{\Omega}_n, V_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_n)), \quad (3.26)$$

onde

$$\mathcal{T}_{yl}^p(\boldsymbol{\Omega}_n, V_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_n)) = \begin{cases} \text{sen}(p\varphi_n) \text{sen}(p\varphi_i) V_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_n), & \text{se } p \text{ é par,} \\ \text{cos}(p\varphi_n) \text{cos}(p\varphi_i) V_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_n) & \text{se } p \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (3.27)$$

As Equações 3.24 e 3.26 estabelecem relações entre $U_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i)$ e $V_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i)$. Assim, isolando $V_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i)$ na Equação 3.24 e substituindo a equação resultante na Equação 3.26 e após algumas extensas manipulações algébricas nas equações, deriva-se o seguinte problema de autovalores e autovetores de ordem $M/2$

$$[\mathbf{A}_{yr} \mathbf{B}_{yr}] \mathbf{U}_{yr} = \lambda_r \mathbf{U}_{yr}, \quad (3.28)$$

onde o autovalor λ_r é tal que

$$\lambda_r = \frac{1}{\nu_r^2}. \quad (3.29)$$

Aqui \mathbf{A}_{yr} e \mathbf{B}_{yr} são matrizes $M/2 \times M/2$ definidas como

$$\mathbf{A}_{yr}(i, j) = \begin{cases} \frac{\sigma_{sr}}{2\pi\mu_i} \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) w_j P_l^p(\xi_j) \zeta_{yl}^p(\boldsymbol{\Omega}_j) - \frac{\beta_r}{\mu_i}, & \text{se } i = j, \\ \frac{\sigma_{sr}}{2\pi\mu_i} \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) w_j P_l^p(\xi_j) \zeta_{yl}^p(\boldsymbol{\Omega}_j), & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.30)$$

onde

$$\zeta_{yl}^p(\boldsymbol{\Omega}_j) = \begin{cases} \text{sen}(p\varphi_j) \text{sen}(p\varphi_i), & \text{se } p \text{ é par,} \\ \text{cos}(p\varphi_j) \text{cos}(p\varphi_i), & \text{se } p \text{ é ímpar,} \end{cases} \quad (3.31)$$

e

$$\mathbf{B}_{yr}(i, j) = \begin{cases} \frac{\sigma_{sr}}{2\pi\mu_i} \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) w_j P_l^p(\xi_j) \Gamma_{yl}^p(\boldsymbol{\Omega}_j) - \frac{\beta_r}{\mu_i}, & \text{se } i = j, \\ \frac{\sigma_{sr}}{2\pi\mu_i} \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) w_j P_l^p(\xi_j) \Gamma_{yl}^p(\boldsymbol{\Omega}_j), & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.32)$$

onde

$$\Gamma_{yl}^p(\boldsymbol{\Omega}_j) = \begin{cases} \cos(p\varphi_j) \cos(p\varphi_i), & \text{se } p \text{ é par,} \\ \text{sen}(p\varphi_j) \text{sen}(p\varphi_i), & \text{se } p \text{ é ímpar,} \end{cases} \quad (3.33)$$

para $i = 1, \dots, M/2$ e $j = 1, \dots, M/2$.

A partir da solução do problema de autovalores, Equação 3.28, obtêm-se $\{\lambda_r^j, U_{yr}^j\}$ para $j = 1, \dots, M/2$, e as constantes de separação ν_{jr} dadas a partir da Equação 3.29. É importante destacar que de um problema envolvendo M direções discretas foi possível derivar um problema de autovalores na ordem de $M/2$. Isto ocorre devido a escolha do ordenamento das direções realizada na seção anterior, que possibilitou a construção de um problema de autovalores menor. E ainda devido à definição dos autovalores na Equação 3.29, obtêm-se as constantes de separação em pares ($\pm\nu_{jr}$).

Dessa forma, a fim de estabelecer a solução do problema homogêneo na região r , calcula-se V da Equação 3.24 e somando e subtraindo as Equações 3.22 e 3.23 é possível calcular as autofunções por meio das relações

$$\Phi_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i) = \frac{U_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i) + V_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i)}{2}, \quad (3.34)$$

e

$$\Phi_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/2}) = \frac{U_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i) - V_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i)}{2}. \quad (3.35)$$

Sendo assim, escreve-se a solução do problema homogêneo para a intensidade angular média na direção y , na região r , da seguinte forma

$$I_{yr}^H(x, \boldsymbol{\Omega}_i) = \sum_{j=1}^{M/2} [A_{j,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i) e^{-(x-a_{h-1}^r)/\nu_{jr}} + A_{j+M/2,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(a_h^r-x)/\nu_{jr}}], \quad (3.36)$$

e

$$I_{yr}^H(x, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/2}) = \sum_{j=1}^{M/2} [A_{j,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(x-a_{h-1}^r)/\nu_{jr}} + A_{j+M/2,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i) e^{-(a_h^r-x)/\nu_{jr}}], \quad (3.37)$$

para $i = 1, \dots, M/2$; $x \in [a_{h-1}^r, a_h^r]$ e $y \in [b_{k-1}^r, b_k^r]$. Os coeficientes desconhecidos $A_{j,r}$ e $A_{j+M/2,r}$ representam os coeficientes da solução homogênea relativos à região r e devem ser determinados.

3.2.2 Solução Homogênea para as Equações Unidimensionais das Intensidades Médias em x

Para derivar o problema de autovalores e a solução homogênea do problema integrado em x , procede-se de maneira similar. Ou seja, para uma região r , propõem-se soluções do problema homogêneo para $i = 1, \dots, M$, da forma [Picoloto et al., 2015]

$$I_{xr}^H(y, \boldsymbol{\Omega}_i) = \Phi_{xr}(\gamma_r, \boldsymbol{\Omega}_i) e^{-y/\gamma_r}, \quad (3.38)$$

com $r = 1, \dots, R$, onde γ_r é a constante de separação na região r , associada com autofunções $\Phi_{xr}(\gamma_r, \boldsymbol{\Omega}_i)$.

Substituindo a Equação 3.38 nas versões homogêneas das Equações 3.9 e 3.12, obtém-se

$$-\frac{\eta_i}{\gamma_r} \Phi_{xr}(\gamma_r, \boldsymbol{\Omega}_i) + \beta_r \Phi_{xr}(\gamma_r, \boldsymbol{\Omega}_i) = \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \sum_{n=1}^{M/2} w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{x_l}^p(\boldsymbol{\Omega}_n, \Phi_{xr}(\gamma_r, \boldsymbol{\Omega}_n)), \quad (3.39)$$

onde

$$\mathcal{T}_{x_l}^p(\boldsymbol{\Omega}_n, \Phi_{xr}(\gamma_r, \boldsymbol{\Omega}_n)) = \cos(p\varphi_n) \cos(p\varphi_i) [\Phi_{xr}(\gamma_r, \boldsymbol{\Omega}_n) + \Phi_{xr}(\gamma_r, \boldsymbol{\Omega}_{n+M/2})] + \sin(p\varphi_n) \sin(p\varphi_i) [\Phi_{xr}(\gamma_r, \boldsymbol{\Omega}_n) - \Phi_{xr}(\gamma_r, \boldsymbol{\Omega}_{n+M/2})], \quad (3.40)$$

e

$$\frac{\eta_i}{\gamma_r} \Phi_{xr}(\gamma_r, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) + \beta_r \Phi_{xr}(\gamma_r, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) = \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \sum_{n=1}^{M/2} w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{x_l}^p(\mathbf{\Omega}_n, \Phi_{xr}(\gamma_r, \mathbf{\Omega}_{n+M/2})), \quad (3.41)$$

onde

$$\mathcal{T}_{x_l}^p(\mathbf{\Omega}_n, \Phi_{xr}(\gamma_r, \mathbf{\Omega}_{n+M/2})) = \cos(p\varphi_n) \cos(p\varphi_i) [\Phi_{xr}(\gamma_r, \mathbf{\Omega}_n) + \Phi_{xr}(\gamma_r, \mathbf{\Omega}_{n+M/2})] - \sin(p\varphi_n) \sin(p\varphi_i) [\Phi_{xr}(\gamma_r, \mathbf{\Omega}_n) - \Phi_{xr}(\gamma_r, \mathbf{\Omega}_{n+M/2})], \quad (3.42)$$

para $i = 1, \dots, M/2$ e $r = 1, \dots, R$.

Da mesma forma, define-se [Barichello et al., 2011]

$$U_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) = \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) + \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}), \quad (3.43)$$

e

$$V_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) = \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) - \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}), \quad (3.44)$$

e somando as Equações 3.39 e 3.41 obtém-se, para $i = 1, \dots, M/2$,

$$-\frac{\eta_i}{\gamma_r} V_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) + \beta_r U_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) = \frac{\sigma_{sr}}{2\pi} \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \sum_{n=1}^{M/2} w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{x_l}^p(\mathbf{\Omega}_n, U_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_n)), \quad (3.45)$$

onde

$$\mathcal{T}_{x_l}^p(\mathbf{\Omega}_n, U_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_n)) = \cos(p\varphi_n) \cos(p\varphi_i) U_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_n). \quad (3.46)$$

Por outro lado, subtraindo as Equações 3.41 de 3.39 obtém-se

$$\begin{aligned}
& -\frac{\eta_i}{\gamma_r} U_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i) + \beta_r V_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i) = \\
& \frac{\sigma_{sr}}{2\pi} \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \sum_{n=1}^{M/2} w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{x_l}^p(\boldsymbol{\Omega}_n, V_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_n)), \quad (3.47)
\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{T}_{x_l}^p(\boldsymbol{\Omega}_n, V_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_n)) = \text{sen}(p\varphi_n) \text{sen}(p\varphi_i) V_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_n). \quad (3.48)$$

Notam-se que as Equações 3.45 e 3.47 são relações entre U_{xr} e V_{xr} . Substituindo a Equação 3.45 na Equação 3.47 e, depois de algumas operações algébricas nas equações, deriva-se o seguinte problema de autovalores de ordem $M/2$

$$[\mathbf{A}_{xr} \mathbf{B}_{xr}] \mathbf{U}_{xr} = \lambda_r^* \mathbf{U}_{xr}, \quad (3.49)$$

com

$$\lambda_r^* = \frac{1}{\gamma_r^2}, \quad (3.50)$$

onde \mathbf{A}_{xr} e \mathbf{B}_{xr} são matrizes $M/2 \times M/2$ definidas como

$$\mathbf{A}_{xr}(i, j) = \begin{cases} \frac{\sigma_{sr}}{2\pi\eta_i} \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) w_j P_l^p(\xi_j) \zeta_{x_l}^p(\boldsymbol{\Omega}_j) - \frac{\beta_r}{\mu_i}, & \text{se } i = j, \\ \frac{\sigma_{sr}}{2\pi\eta_i} \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) w_j P_l^p(\xi_j) \zeta_{x_l}^p(\boldsymbol{\Omega}_j), & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.51)$$

onde

$$\zeta_{x_l}^p(\boldsymbol{\Omega}_j) = \text{sen}(p\varphi_j) \text{sen}(p\varphi_i), \quad (3.52)$$

e

$$\mathbf{B}_{xr}(i, j) = \begin{cases} \frac{\sigma_{sr}}{2\pi\eta_i} \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) w_j P_l^p(\xi_j) \Gamma_{xl}^p(\boldsymbol{\Omega}_j) - \frac{\beta_r}{\mu_i}, & \text{se } i = j, \\ \frac{\sigma_{sr}}{2\pi\eta_i} \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) w_j P_l^p(\xi_j) \Gamma_{xl}^p(\boldsymbol{\Omega}_j), & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.53)$$

onde

$$\Gamma_{xl}^p(\boldsymbol{\Omega}_j) = \cos(p\varphi_j) \cos(p\varphi_i), \quad (3.54)$$

para $i = 1, \dots, M/2$ e $j = 1, \dots, M/2$.

A partir da solução do problema de autovalores, Equação 3.49, obtém-se $\{\lambda_r^{*j}, U_{xr}^j\}$ para $j = 1, \dots, M/2$, e as constantes de separação γ_{jr} dadas por Equação 3.50. Então, as autofunções são expressas como,

$$\Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i) = \frac{U_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i) + V_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i)}{2}, \quad (3.55)$$

e

$$\Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/2}) = \frac{U_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i) - V_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i)}{2}. \quad (3.56)$$

Portanto, escreve-se a solução homogênea para a intensidade angular média na direção x , na região r , como

$$I_{xr}^H(y, \boldsymbol{\Omega}_i) = \sum_{j=1}^{M/2} \left[B_{j,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i) e^{-(y-b_{k-1}^r)/\gamma_{jr}} + B_{j+M/2,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(b_k^r-y)/\gamma_{jr}} \right], \quad (3.57)$$

$$I_{xr}^H(y, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/2}) = \sum_{j=1}^{M/2} \left[B_{j,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(y-b_{k-1}^r)/\gamma_{jr}} + B_{j+M/2,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i) e^{-(b_k^r-y)/\gamma_{jr}} \right], \quad (3.58)$$

para $i = 1, \dots, M/2$; $x \in [a_{h-1}^r, a_h^r]$ e $y \in [b_{k-1}^r, b_k^r]$. Aqui $B_{j,r}$ e $B_{j+M/2,r}$ representam os coeficientes arbitrários da solução homogênea na região r e devem ser determinados

posteriormente.

A partir da integração da RTE em ordenadas discretas, em y ou x , os termos oriundos da expansão da função de fase apresentaram dependência de funções trigonométricas senos ou cossenos com restrições pares ou ímpares, como pode se visto nas Equações 3.3, 3.6, 3.11 e 3.14, para as expressões $\mathcal{T}_{y_l}^p(\Omega_n, I_{yr}(x, \Omega_n))$, $\mathcal{T}_{y_l}^p(\Omega_n, I_{yr}(x, \Omega_{n+M/2}))$, $\mathcal{T}_{x_l}^p(\Omega_n, I_{xr}(y, \Omega_n))$ e $\mathcal{T}_{x_l}^p(\Omega_n, I_{xr}(y, \Omega_{n+M/2}))$, respectivamente. A manipulação algébrica destes termos para a derivação dos problemas de autovalores, com ordem arbitrária L , apresentou-se ser difícil e extensa, tornando-se muito mais complexa do que simplesmente considerar o caso isotrópico.

A derivação aqui apresentada tem uma contribuição fundamental para o método ADO, uma vez que não existia para este método a derivação de problemas de autovalores para meios com grau de anisotropia arbitrário, ou seja, o método era restrito a anisotropia linear. Neste ponto, em relação ao problema de autovalores derivado, vale ressaltar dois aspectos relevantes: (i) o problema é válido para uma ordem arbitrária L da expansão da função de fase; (ii) dadas M direções discretas, o problema de autovalores é da ordem $M/2$. Esta característica do método ADO torna-se mais relevante à medida que um número maior de direções e modelos mais complexos (como dependência de energia) são considerados.

Uma vez resolvidos os problemas de autovalores e obtidas as soluções homogêneas relacionadas à região r , o próximo passo é obter as soluções particulares. As soluções particulares possuem os termos relacionados às fronteiras de cada região r , que não são conhecidos em todas as direções discretas, sendo assim necessário aproximar esses termos desconhecidos nos contornos por equações auxiliares que serão definidas na próxima seção juntamente com a solução particular.

3.3 Solução Particular

Nas Equações 3.1, 3.4, 3.9 e 3.12 estão presentes os termos fontes devido às aproximações introduzidas para representar os termos desconhecidos nos contornos das regiões e/ou devido à radiação de um corpo negro, por exemplo. Assim, são introduzidas equações auxiliares para expressar as intensidades desconhecidas nos contornos de uma região r , para completar a definição dos termos fonte, Equações 3.2, 3.5, 3.10 e 3.13. Essas aproximações nos contornos juntamente com o termo de fonte externa geram um termo não

homogêneo do problema, desta forma uma solução particular é requerida. Na construção da solução particular, duas abordagens distintas podem ser utilizadas: uma abordagem que faz uso das funções de Green [Prolo Filho e Barichello, 2014] e que pode ser usada quando os termos não homogêneos são mais gerais, e uma outra abordagem mais simplificada, que é usada quando o termo fonte é definido como uma função constante. Nas subseções a seguir serão detalhadas as soluções particulares através dessas duas abordagens.

Como mencionado no final da Seção 3.1, em esquemas nodais equações auxiliares são necessárias para aproximar as intensidades desconhecidas nos contornos. Na literatura geral associada a métodos nodais, diferentes tipos de aproximações foram testados [Badruzzaman, 1985; Walters, 1986; Azmy, 1988a; Domínguez e Barros, 2007]. Particularmente, em problemas abordados pelo método ADO foram utilizadas as soluções gerais das equações integradas transversalmente [Prolo Filho e Barichello, 2014] e também investigadas funções lineares e exponenciais [Cromianski et al., 2019]. Neste trabalho, com base nos estudos da literatura e buscando um equilíbrio entre precisão e demanda computacional, usam-se aproximações constantes. Desta forma, expressam-se as intensidades desconhecidas nos contornos em uma dada região r , na direção i , por constantes (D 's e C 's), no topo (k), nos limites inferior ($k - 1$), direito (h) e esquerdo ($h - 1$) dos contornos, respectivamente, denotadas como

$$I_r(x, b_k^r, \Omega_i) = D_{k,r,i}, \quad (3.59a)$$

$$I_r(x, b_{k-1}^r, \Omega_i) = D_{k-1,r,i}, \quad (3.59b)$$

$$I_r(a_h^r, y, \Omega_i) = C_{h,r,i}, \quad (3.59c)$$

$$I_r(a_{h-1}^r, y, \Omega_i) = C_{h-1,r,i}. \quad (3.59d)$$

para $i = 1, \dots, M$ e $r = 1, \dots, R$.

Assim, substituindo as Equações 3.59 no termo fonte definido nas Equações 3.2 e 3.10, obtém-se

$$Q_{yr}(x, \Omega_i) = \kappa_r I_{b_{yr}}(x) - \frac{\eta_i}{\alpha_k^r} [D_{k,r,i} - D_{k-1,r,i}], \quad (3.60)$$

e

$$Q_{xr}(y, \Omega_i) = \kappa_r I_{b_{xr}}(y) - \frac{\mu_i}{\vartheta_h^r} [C_{h,r,i} - C_{h-1,r,i}]. \quad (3.61)$$

3.3.1 Solução Particular via Função de Green

O uso das funções de Green para desenvolver soluções particulares permite lidar com termos fonte mais gerais, incluindo casos em que as equações auxiliares não são funções constantes [Cromianski et al., 2019]. Desta forma, a fim de representar a solução de forma mais geral, segue-se a derivação apresentada nos trabalhos de Barichello et al., 2000, Prolo Filho, 2011, Prolo Filho e Barichello, 2014 e Cromianski, 2016, fazendo uso das funções de Green para definir soluções particulares para as equações unidimensionais integradas transversalmente.

Assim, expressa-se a solução particular para o problema integrado em y como

$$I_{yr}^P(x, \boldsymbol{\Omega}_i) = \sum_{j=1}^{M/2} \{A_{j,r}(x)\Phi_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i) + A_{j+M/2,r}(x)\Phi_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/2})\}, \quad (3.62)$$

e

$$I_{yr}^P(x, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/2}) = \sum_{j=1}^{M/2} \{A_{j,r}(x)\Phi_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/2}) + A_{j+M/2,r}(x)\Phi_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i)\}, \quad (3.63)$$

com

$$A_{j,r}(x) = \int_{a_{h-1}^r}^x \left\{ \sum_{n=1}^M Q_{yr}(\tau, \boldsymbol{\Omega}_n) A_{j,r,n} \right\} e^{\frac{-(x-\tau)}{\nu_{jr}}} d\tau, \quad (3.64)$$

e

$$A_{j+M/2,r}(x) = - \int_x^{a_h^r} \left\{ \sum_{n=1}^M Q_{yr}(\tau, \boldsymbol{\Omega}_n) A_{j+M/2,r,n} \right\} e^{\frac{-(\tau-x)}{\nu_{jr}}} d\tau, \quad (3.65)$$

com $i = 1, \dots, M/2$, $j = 1, \dots, M/2$ e $r = 1, \dots, R$. Os coeficientes $A_{j,r,n}$ e $A_{j+M/2,r,n}$ são obtidos a partir da solução do sistema linear [Prolo Filho e Barichello, 2014; Cromianski et al., 2019]

$$\begin{bmatrix} [A_{j,r,n}] \\ [A_{j+M/2,r,n}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mu_i \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i)] & [\mu_i \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/2})] \\ [-\mu_i \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/2})] & [-\mu_i \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i)] \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.66)$$

e o termo fonte $Q_{yr}(\tau, \boldsymbol{\Omega}_n)$ é definido na Equação 3.60.

Analogamente, define-se a solução particular do problema integrado na direção x , como

$$I_{xr}^P(y, \mathbf{\Omega}_i) = \sum_{j=1}^{M/2} \{B_{j,r}(y)\Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) + B_{j+M/2,r}(y)\Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2})\}, \quad (3.67)$$

e

$$I_{xr}^P(y, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) = \sum_{j=1}^{M/2} \{B_{j,r}(y)\Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) + B_{j+M/2,r}(y)\Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_i)\}, \quad (3.68)$$

com

$$B_{j,r}(y) = \int_{b_{k-1}^r}^y \left\{ \sum_{n=1}^M Q_{xr}(\tau, \mathbf{\Omega}_n) B_{j,r,n} \right\} e^{\frac{-(y-\tau)}{\gamma_{jr}}} d\tau, \quad (3.69)$$

e

$$B_{j+M/2,r}(y) = - \int_y^{b_k^r} \left\{ \sum_{n=1}^M Q_{xr}(\tau, \mathbf{\Omega}_n) B_{j+M/2,r,n} \right\} e^{\frac{-(\tau-y)}{\gamma_{jr}}} d\tau, \quad (3.70)$$

e os coeficientes $B_{j,r,n}$ e $B_{j+M/2,r,n}$ são obtidos a partir da solução do sistema linear [Prolo Filho e Barichello, 2014; Cromianski et al., 2019]

$$\begin{bmatrix} [B_{j,r,n}] \\ [B_{j+M/2,r,n}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\eta_i \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_i)] & [\eta_i \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2})] \\ [-\eta_i \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2})] & [-\eta_i \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_i)] \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.71)$$

e o termo fonte $Q_{xr}(\tau, \mathbf{\Omega}_n)$ é definido na Equação 3.61.

3.3.2 Solução Particular Constante

Ao usar as aproximações constantes, Equações 3.59, para as intensidades nos contornos das regiões, juntamente com o caso de fontes externas constantes, a escolha mais simples de uma solução particular constante pode ser mais apropriada. Assim, para $i = 1, \dots, M$ propõe-se

$$I_{yr}^P(x, \mathbf{\Omega}_i) = S_{i,r}, \quad (3.72)$$

e

$$I_{xr}^P(y, \mathbf{\Omega}_i) = W_{i,r}, \quad (3.73)$$

com $r = 1, \dots, R$.

3.4 Solução Geral

Estabelecidas as expressões das soluções homogêneas e particulares para as equações unidimensionais integradas transversalmente, escrevem-se as soluções gerais dos problemas integrados em y e x , em uma região r , explicitamente em termos das variáveis espaciais, como a soma de soluções homogêneas e particulares, da forma

$$I_{yr}(x, \mathbf{\Omega}_i) = I_{yr}^H(x, \mathbf{\Omega}_i) + I_{yr}^P(x, \mathbf{\Omega}_i), \quad (3.74)$$

e

$$I_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_i) = I_{xr}^H(y, \mathbf{\Omega}_i) + I_{xr}^P(y, \mathbf{\Omega}_i), \quad (3.75)$$

com $i = 1, \dots, M$ e $r = 1, \dots, R$, ou ainda,

$$\begin{aligned} I_{yr}(x, \mathbf{\Omega}_i) = & \sum_{j=1}^{M/2} [A_{j,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) e^{-(x-a_{h-1}^r)/\nu_{jr}} \\ & + A_{j+M/2,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(a_h^r-x)/\nu_{jr}}] + I_{yr}^P(x, \mathbf{\Omega}_i), \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} I_{yr}(x, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) = & \sum_{j=1}^{M/2} [A_{j,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(x-a_{h-1}^r)/\nu_{jr}} \\ & + A_{j+M/2,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) e^{-(a_h^r-x)/\nu_{jr}}] + I_{yr}^P(x, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}), \end{aligned} \quad (3.77)$$

para $x \in [a_{h-1}^r, a_h^r]$ e

$$\begin{aligned} I_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_i) = & \sum_{j=1}^{M/2} [B_{j,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) e^{-(y-b_{k-1}^r)/\gamma_{jr}} \\ & + B_{j+M/2,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(b_k^r-y)/\gamma_{jr}}] + I_{xr}^P(y, \mathbf{\Omega}_i), \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned}
I_{xr}(y, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/2}) = & \sum_{j=1}^{M/2} [B_{j,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(y-b_{k-1}^r)/\gamma_{jr}} \\
& + B_{j+M/2,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i) e^{-(b_k^r-y)/\gamma_{jr}}] + I_{xr}^P(y, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/2}), \quad (3.79)
\end{aligned}$$

para $y \in [b_{k-1}^r, b_k^r]$, com $i = 1, \dots, M/2$ e $r = 1, \dots, R$.

Notam-se que nas expressões da solução homogênea e nas expressões da solução particular, aparecem coeficientes que ainda não foram determinados. Sendo assim, para que a solução geral seja estabelecida, é necessário determinar todos os coeficientes desconhecidos da solução homogênea ($A_{j,r}$; $A_{j+M/2,r}$; $B_{j,r}$; $B_{j+M/2,r}$), Equações 3.36, 3.37, 3.57 e 3.58, e coeficientes da solução particular, na direção x e y . Para fazer isto, é necessário resolver um sistema linear, o qual é construído utilizando as condições de contorno conhecidas do problema e assumindo condições de continuidade entre as interfaces de cada região, juntamente com as equações da solução geral.

O número de divisões considerado no domínio na variável x é definido por H e na variável y é definido por K . Estas divisões determinam o número de regiões e consequentemente a ordem do sistema. Assim, considerando a solução particular via função de Green, a ordem do sistema linear é dada por $6M(HK) - M(H + K)$, onde $6M$ representa o número de coeficientes a serem determinados em cada região do domínio, sendo que $2M$ provém dos coeficientes da solução homogênea e $4M$ provém dos coeficientes da solução particular. Lembrando que M é o número de direções discretas. O uso das funções de Green para desenvolver soluções específicas é mais completo, uma vez que pode ser usado para lidar com problemas em que o termo fonte é mais geral e as equações auxiliares são funções e não apenas constantes, porém o seu uso resulta em um sistema de maior ordem, que demanda de alto desempenho computacional para a sua solução. No caso do termo fonte e equações auxiliares serem constantes (solução particular é constante) a ordem do sistema linear é reduzida para $4M(HK)$, obtendo-se uma redução significativa na ordem do sistema e consequentemente na quantidade total de memória computacional requerida.

Neste trabalho considera-se a solução particular constante para as equações das intensidades médias locais, uma vez que o problema teste tem fonte constante e consideram-se aproximações constantes para as intensidades desconhecidas nos contornos das regiões.

Desta forma, escreve-se a solução geral para a intensidade angular integrada na região r e direção x e y , respectivamente como

$$I_{yr}(x, \mathbf{\Omega}_i) = \sum_{j=1}^{M/2} [A_{j,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) e^{-(x-a_{h-1}^r)/\nu_{jr}} + A_{j+M/2,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(a_h^r-x)/\nu_{jr}}] + S_{i,r}, \quad (3.80)$$

$$I_{yr}(x, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) = \sum_{j=1}^{M/2} [A_{j,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(x-a_{h-1}^r)/\nu_{jr}} + A_{j+M/2,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) e^{-(a_h^r-x)/\nu_{jr}}] + S_{i+M/2,r}, \quad (3.81)$$

e

$$I_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_i) = \sum_{j=1}^{M/2} [B_{j,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) e^{-(y-b_{k-1}^r)/\gamma_{jr}} + B_{j+M/2,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(b_k^r-y)/\gamma_{jr}}] + W_{i,r}, \quad (3.82)$$

$$I_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) = \sum_{j=1}^{M/2} [B_{j,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(y-b_{k-1}^r)/\gamma_{jr}} + B_{j+M/2,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) e^{-(b_k^r-y)/\gamma_{jr}}] + W_{i+M/2,r}, \quad (3.83)$$

para $x \in [a_{h-1}^r, a_h^r]$ e $y \in [b_{k-1}^r, b_k^r]$, com $i = 1, \dots, M/2$ e $r = 1, \dots, R$. Nota-se que a solução geral para a intensidade média em cada região do domínio é explícita em termos da variável espacial.

No próximo capítulo apresenta-se a derivação das equações que compõem o sistema linear necessário para a obtenção das intensidades médias nas variáveis x e y . Ainda, apresentam-se duas configurações de ordenamento do sistema linear e bibliotecas usadas para a sua solução, além da descrição do desempenho computacional obtido.

4 SISTEMA LINEAR ASSOCIADO AS SOLUÇÕES ADO-NODAL PARA AS EQUAÇÕES DAS INTENSIDADES MÉDIAS

Neste capítulo estabelece-se um sistema de equações lineares a ser resolvido para a obtenção da solução das intensidades médias nas variáveis x e y . A solução do sistema linear determina os coeficientes desconhecidos da solução geral do problema, determinada no Capítulo 3 através das Equações 3.80, 3.81, 3.82 e 3.83. A composição do sistema permite diferentes formas de ordenamento, e aqui apresentam-se duas configurações de ordenamento do sistema linear que diferem principalmente pela forma como a matriz pode ser armazenada e conseqüentemente no tipo de biblioteca usada para a solução. Utilizam-se rotinas de fatoração LU que são fornecidas pela biblioteca LAPACK [Anderson et al., 1999], com armazenamento cheio da matriz, e providas pela biblioteca *HSL Mathematical Software Library* [HSL, 2013], aplicada a matrizes esparsas que permite resolver sistemas maiores. Devido aos desafios numéricos e computacionais para a implementação da formulação ADO-Nodal em problemas de anisotropia geral, apresentam-se ainda diferentes alternativas de solução do sistema linear: uma baseada no uso da ScaLAPACK [Blackford et al., 1997] e a decomposição de domínio via complemento de Schur [Chan e Mathew, 1994; Smith et al., 1996]. E por fim, descreve-se o desempenho computacional obtido na solução do sistema linear.

4.1 Derivação das Equações que Compõem o Sistema Linear

Para estabelecer a solução geral dos problemas bidimensionais discutidos até aqui, precisa-se determinar todos os coeficientes desconhecidos das soluções ADO-Nodal para as intensidades médias nas variáveis y e x . Determinam-se as incógnitas resolvendo um sistema de $4M(HK)$ equações lineares para as aproximações consideradas constantes. Nesta seção, deriva-se o sistema de equações lineares para a obtenção dos coeficientes presentes nas expressões das intensidades médias locais nas variáveis x e y . O sistema é gerado por conjuntos de equações obtidas a partir: (i) das condições de contorno; (ii) das condições de continuidade nas interfaces das regiões; (iii) equações auxiliares que aproximam intensidades desconhecidas nos contornos; (iv) equações que definem a solução particular (já que a fonte é desconhecida, pois depende das intensidades nos contornos). Cada um desses conjuntos deve estar associado às intensidades unidimensionais integradas, em x e

y .

Para determinar as variáveis desconhecidas da solução geral, Equações 3.80 e 3.81, primeiro substituí-se a expressão da solução particular constante, dada pela Equação 3.72, nas Equações 3.1 e 3.4. Desta forma, as soluções particulares $S_{i,r}$ para a intensidade média local em y devem satisfazer o sistema de equações

$$\beta_r S_{i,r} - \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \left\{ \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \sum_{n=1}^M w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{yl}^p(\boldsymbol{\Omega}_n, S_{n,r}) \right\} = \kappa_r I_{b_{yr}}(x) - \frac{\eta_i}{\alpha_k^r} [I_r(x, b_k^r, \boldsymbol{\Omega}_i) - I_r(x, b_{k-1}^r, \boldsymbol{\Omega}_i)], \quad (4.1)$$

para $i = 1, \dots, M$. Aqui utiliza-se o fato de que $w_i = w_{i+M/2}$; $\mu_i = -\mu_{i+M/2}$ e $\eta_i = \eta_{i+M/2}$.

Como detalhado anteriormente nas Equações 3.59a e 3.59b, as intensidades desconhecidas nos contornos das regiões são aproximadas por constantes. Integrando as Equações 3.59a e 3.59b para $x \in [a_{h-1}^r, a_h^r]$ obtém-se

$$I_{xr}(b_k^r, \boldsymbol{\Omega}_i) = D_{k,r,i}, \quad (4.2a)$$

$$I_{xr}(b_{k-1}^r, \boldsymbol{\Omega}_i) = D_{k-1,r,i}, \quad (4.2b)$$

para $i = 1, \dots, M$. Neste ponto é importante destacar que nas Equações 4.2a e 4.2b as direções seguem o ordenamento da intensidade integrada em x , enquanto que a Equação 4.1 utiliza o ordenamento da intensidade integrada em y . Assim, não é possível a direta substituição das aproximações para as intensidades desconhecidas nos contornos das regiões no sistema de equações das soluções particulares. Especial atenção deve ser dada, em particular para fins de implementação, para relacionar os índices de forma consistente, desta forma de acordo com as Figuras 3.2 e 3.3 é necessário determinar as equivalências dos índices em cada um dos ordenamentos como

- $i = 1, \dots, M/4$ no ordenamento y equivale a $i = 1, \dots, M/4$ no ordenamento x ;
- $i = M/4 + 1, \dots, M/2$ no ordenamento y equivale a $i = M/2 + 1, \dots, 3M/4$ no ordenamento x ;
- $i = M/2 + 1, \dots, 3M/4$ no ordenamento y equivale a $i = M/4 + 1, \dots, M/2$ no ordenamento x ;
- $i = 3M/4 + 1, \dots, M$ no ordenamento y equivale a $i = 3M/4 + 1, \dots, M$ no orde-

namento x .

Considerando as equivalências apresentadas acima, a partir da substituição das Equações 4.2a e 4.2b na Equação 4.1 ocorre o acoplamento dos problemas integrados nas direções x e y , assim reescreve-se a Equação 4.1, para $i = 1, \dots, M/4$, como

$$\beta_r S_{i,r} - \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \left\{ \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \sum_{n=1}^M w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{y_l}^p(\Omega_n, S_{n,r}) \right\} + \frac{\eta_i}{\alpha_k^r} (D_{k,r,i} - D_{k-1,r,i}) = \kappa_r I_{b_{yr}}(x), \quad (4.3a)$$

$$\beta_r S_{i+M/4,r} - \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \left\{ \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \sum_{n=1}^M w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{y_l}^p(\Omega_n, S_{n,r}) \right\} + \frac{\eta_{i+M/4}}{\alpha_k^r} (D_{k,r,i+M/2} - D_{k-1,r,i+M/2}) = \kappa_r I_{b_{yr}}(x), \quad (4.3b)$$

$$\beta_r S_{i+M/2,r} - \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \left\{ \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \sum_{n=1}^M w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{y_l}^p(\Omega_n, S_{n,r}) \right\} + \frac{\eta_{i+M/2}}{\alpha_k^r} (D_{k,r,i+M/4} - D_{k-1,r,i+M/4}) = \kappa_r I_{b_{yr}}(x), \quad (4.3c)$$

$$\beta_r S_{i+3M/4,r} - \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \left\{ \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \sum_{n=1}^M w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{y_l}^p(\Omega_n, S_{n,r}) \right\} + \frac{\eta_{i+3M/4}}{\alpha_k^r} (D_{k,r,i+3M/4} - D_{k-1,r,i+3M/4}) = \kappa_r I_{b_{yr}}(x). \quad (4.3d)$$

Dessa forma, substituí-se a solução geral do problema, dadas pelas Equações 3.82 e 3.83, no lado esquerdo das Equações 4.2a e 4.2b, e então realiza-se a substituição das equações resultantes nas variáveis $D_{k,r,i}$ e $D_{k-1,r,i}$ das Equações 4.3 e gera-se o sistema de equações

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{M/2} \frac{\eta_i}{\alpha_k^r} \left[e^{-(b_k^r - b_{k-1}^r)/\gamma_{jr}} - 1 \right] \left\{ \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i) B_{j,r} - \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/2}) B_{j+M/2,r} \right\} \\
& \quad + \beta_r S_{i,r} - \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \left\{ \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \right. \\
& \quad \left. \times \sum_{n=1}^M w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{y_l}^p(\boldsymbol{\Omega}_n, S_{n,r}) \right\} = \kappa_r I_{b_{yr}}(x), \quad (4.4a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{M/2} \frac{\eta_i}{\alpha_k^r} \left[e^{-(b_k^r - b_{k-1}^r)/\gamma_{jr}} - 1 \right] \left\{ -\Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/2}) B_{j,r} + \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i) B_{j+M/2,r} \right\} \\
& \quad + \beta_r S_{i+M/4,r} - \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \left\{ \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \right. \\
& \quad \left. \times \sum_{n=1}^M w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{y_l}^p(\boldsymbol{\Omega}_n, S_{n,r}) \right\} = \kappa_r I_{b_{yr}}(x), \quad (4.4b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{M/2} \frac{\eta_i}{\alpha_k^r} \left[e^{-(b_k^r - b_{k-1}^r)/\gamma_{jr}} - 1 \right] \left\{ \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/4}) B_{j,r} - \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+3M/4}) B_{j+M/2,r} \right\} \\
& \quad + \beta_r S_{i+M/2,r} - \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \left\{ \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \right. \\
& \quad \left. \times \sum_{n=1}^M w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{y_l}^p(\boldsymbol{\Omega}_n, S_{n,r}) \right\} = \kappa_r I_{b_{yr}}(x), \quad (4.4c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{M/2} \frac{\eta_i}{\alpha_k^r} \left[e^{-(b_k^r - b_{k-1}^r)/\gamma_{jr}} - 1 \right] \left\{ -\Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+3M/4}) B_{j,r} + \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/4}) B_{j+M/2,r} \right\} \\
& \quad + \beta_r S_{i+3M/4,r} - \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \left\{ \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \right. \\
& \quad \left. \times \sum_{n=1}^M w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{y_l}^p(\boldsymbol{\Omega}_n, S_{n,r}) \right\} = \kappa_r I_{b_{yr}}(x), \quad (4.4d)
\end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, M/4$.

De forma semelhante, para determinar as variáveis desconhecidas das Equações 3.82 e 3.83 da solução geral, primeiro substituí-se a expressão da solução particular constante,

dada pela Equação 3.73, nas Equações 3.9 e 3.12. Desta forma, as soluções particulares $W_{i,r}$ para a intensidade média local em x devem satisfazer o sistema de equações

$$\beta_r W_{i,r} - \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \left\{ \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \sum_{n=1}^M w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{x_l}^p(\boldsymbol{\Omega}_n, W_{n,r}) \right\} = \kappa_r I_{b_{xr}}(y) - \frac{\mu_i}{\vartheta_h^r} [I_r(a_h^r, y, \boldsymbol{\Omega}_i) - I_r(a_{h-1}^r, y, \boldsymbol{\Omega}_i)], \quad (4.5)$$

para $i = 1, \dots, M$, onde utiliza-se o fato de que $w_i = w_{i+M/2}$; $\mu_i = \mu_{i+M/2}$ e $\eta_i = -\eta_{i+M/2}$.

Assim como no caso anterior, as intensidades desconhecidas nos contornos das regiões são aproximadas por constantes, como detalhado anteriormente nas Equações 3.59c e 3.59d. Assim, integrando as Equações 3.59c e 3.59d para $y \in [b_{k-1}^r, b_k^r]$ obtém-se

$$I_{yr}(a_h^r, \boldsymbol{\Omega}_i) = C_{h,r,i}, \quad (4.6a)$$

$$I_{yr}(a_{h-1}^r, \boldsymbol{\Omega}_i) = C_{h-1,r,i}, \quad (4.6b)$$

para $i = 1, \dots, M$.

Mais uma vez, especial atenção deve ser dada ao ordenamento dos índices para associar de forma consistente. As Equações 4.6a e 4.6b seguem o ordenamento da intensidade integrada em y e a Equação 4.5 utiliza o ordenamento da intensidade integrada em x . Tendo isso em mente e após algumas manipulações algébricas análogas àquelas utilizadas para a obtenção do sistema de Equações 4.4, obtém-se um novo conjunto de equações lineares

$$\sum_{j=1}^{M/2} \frac{\mu_i}{\vartheta_h^r} \left[e^{-(a_h^r - a_{h-1}^r)/\nu_{jr}} - 1 \right] \left\{ \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i) A_{j,r} - \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/2}) A_{j+M/2,r} \right\} + \beta_r W_{i,r} - \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \left\{ \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \right. \quad (4.7a) \\ \left. \times \sum_{n=1}^M w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{x_l}^p(\boldsymbol{\Omega}_n, W_{n,r}) \right\} = \kappa_r I_{b_{xr}}(y),$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{M/2} \frac{\mu_i}{\vartheta_h^r} \left[e^{-(a_h^r - a_{h-1}^r)/\nu_{jr}} - 1 \right] \left\{ -\Phi_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/2}) A_{j,r} + \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i) A_{j+M/2,r} \right\} \\
& + \beta_r W_{i+M/4,r} - \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \left\{ \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \right. \\
& \quad \left. \times \sum_{n=1}^M w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{x_l}^p(\boldsymbol{\Omega}_n, W_{n,r}) \right\} = \kappa_r I_{b_{xr}}(y), \quad (4.7b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{M/2} \frac{\mu_i}{\vartheta_h^r} \left[e^{-(a_h^r - a_{h-1}^r)/\nu_{jr}} - 1 \right] \left\{ \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/4}) A_{j,r} - \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+3M/4}) A_{j+M/2,r} \right\} \\
& + \beta_r W_{i+M/2,r} - \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \left\{ \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \right. \\
& \quad \left. \times \sum_{n=1}^M w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{x_l}^p(\boldsymbol{\Omega}_n, W_{n,r}) \right\} = \kappa_r I_{b_{xr}}(y), \quad (4.7c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{M/2} \frac{\mu_i}{\vartheta_h^r} \left[e^{-(a_h^r - a_{h-1}^r)/\nu_{jr}} - 1 \right] \left\{ -\Phi_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+3M/4}) B_{j,r} + \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/4}) B_{j+M/2,r} \right\} \\
& + \beta_r W_{i+3M/4,r} - \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \left\{ \sum_{l=0}^L \sum_{\substack{p=0 \\ (l+p \text{ par})}}^l (2 - \delta_{0,p}) C_l^p P_l^p(\xi_i) \right. \\
& \quad \left. \times \sum_{n=1}^M w_n P_l^p(\xi_n) \mathcal{T}_{x_l}^p(\boldsymbol{\Omega}_n, W_{n,r}) \right\} = \kappa_r I_{b_{xr}}(y), \quad (4.7d)
\end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, M/4$.

Neste ponto, para que todas as variáveis desconhecidas da solução geral possam ser determinadas, necessitam-se de equações que são provenientes do uso das condições de contorno do problema e da imposição de continuidade nas interfaces das regiões.

Primeiro, integra-se para $y \in [b_{k-1}^r, b_k^r]$ as condições de contorno à esquerda e à direita do domínio, $x = 0$ e $x = a$, dada pela Equação 2.16

$$I_{yr}(0, \boldsymbol{\Omega}_i) = \epsilon_w I_{b_{yr}}(0) + \frac{\rho}{\pi} \sum_{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}_j > 0} w_j I_{yr}(0, \boldsymbol{\Omega}_j) |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}_j|, \quad (4.8a)$$

$$I_{yr}(a, \boldsymbol{\Omega}_i) = \epsilon_w I_{b_{yr}}(a) + \frac{\rho}{\pi} \sum_{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}_j > 0} w_j I_{yr}(a, \boldsymbol{\Omega}_j) |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}_j|, \quad (4.8b)$$

para $i = 1, \dots, M/2$. Por outro lado, integra-se para $x \in [a_{h-1}^r, a_h^r]$ a Equação 2.16 das

condições de contorno inferior e superior do domínio, no contorno $y = 0$ e $y = b$,

$$I_{xr}(0, \mathbf{\Omega}_i) = \epsilon_w I_{b_{xr}}(0) + \frac{\rho}{\pi} \sum_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega}_j > 0} w_j I_{xr}(0, \mathbf{\Omega}_j) |\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega}_j|, \quad (4.8c)$$

$$I_{xr}(b, \mathbf{\Omega}_i) = \epsilon_w I_{b_{xr}}(b) + \frac{\rho}{\pi} \sum_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega}_j > 0} w_j I_{xr}(b, \mathbf{\Omega}_j) |\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega}_j|, \quad (4.8d)$$

para $i = 1, \dots, M/2$.

Substituindo as Equações 3.80 e 3.81, da solução geral para o fluxo integrado em y , nas Equações 4.8a e 4.8b da condição de contorno esquerdo e direito, escrevem-se as seguintes expressões ao considerar $x = 0$

$$\sum_{j=1}^{M/2} [A_{j,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) + A_{j+M/2,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(a_h^r - 0)/\nu_{jr}}] + S_{i,r} - \frac{\rho}{\pi} \sum_{k=M/2+1}^M w_k I_{yr}(0, \mathbf{\Omega}_k) |\mu_k| = \epsilon_w I_{b_{yr}}(0), \quad (4.9)$$

chegando à expressão

$$\sum_{j=1}^{M/2} \left\{ [A_{j,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) + A_{j+M/2,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(a_h^r - 0)/\nu_{jr}}] - \frac{\rho}{\pi} \sum_{k=M/2+1}^M w_k |\mu_k| [A_{j,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_k) + A_{j+M/2,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_{k-M/2}) e^{-(a_h^r - 0)/\nu_{jr}}] \right\} + S_{i,r} - \frac{\rho}{\pi} \sum_{k=M/2+1}^M w_k |\mu_k| S_{k,r} = \epsilon_w I_{b_{yr}}(0), \quad (4.10)$$

e ao considerar $x = a$,

$$\sum_{j=1}^{M/2} [A_{j,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(a - a_h^r - 1)/\nu_{jr}} + A_{j+M/2,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_i)] + S_{i+M/2,r} - \frac{\rho}{\pi} \sum_{k=1}^{M/2} w_k I_{yr}(a, \mathbf{\Omega}_k) |\mu_k| = \epsilon_w I_{b_{yr}}(a), \quad (4.11)$$

chegando à expressão

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{M/2} \left\{ \left[A_{j,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(a-a_{h-1}^r)/\nu_{jr}} + A_{j+M/2,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{\rho}{\pi} \sum_{k=1}^{M/2} w_k |\mu_k| \left[A_{j,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_k) e^{-(a-a_{h-1}^r)/\nu_{jr}} + A_{j+M/2,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_{k+M/2}) \right] \right\} \\ & \quad + S_{i+M/2,r} - \frac{\rho}{\pi} \sum_{k=1}^{M/2} w_k |\mu_k| S_{k,r} = \epsilon_w I_{b_{yr}}(a), \quad (4.12) \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, M/2$.

De forma similar, substituindo as Equações 3.82 e 3.83, da solução geral para o fluxo integrado em x , nas Equações 4.8c e 4.8d da condição de contorno inferior e superior, escrevem-se as seguintes expressões ao considerar $y = 0$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{M/2} \left[B_{j,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) + B_{j+M/2,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(b_k^r-0)/\gamma_{jr}} \right] + W_{i,r} \\ & \quad - \frac{\rho}{\pi} \sum_{k=M/2+1}^M w_k I_{xr}(0, \mathbf{\Omega}_k) |\eta_k| = \epsilon_w I_{b_{xr}}(0), \quad (4.13) \end{aligned}$$

chegando à expressão

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{M/2} \left\{ \left[B_{j,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) + B_{j+M/2,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(b_k^r-0)/\gamma_{jr}} \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{\rho}{\pi} \sum_{k=M/2+1}^M w_k |\eta_k| \left[B_{j,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_k) + B_{j+M/2,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_{k-M/2}) e^{-(b_k^r-0)/\gamma_{jr}} \right] \right\} \\ & \quad + W_{i,r} - \frac{\rho}{\pi} \sum_{k=M/2+1}^M w_k |\eta_k| W_{k,r} = \epsilon_w I_{b_{xr}}(0), \quad (4.14) \end{aligned}$$

e ao considerar $y = b$,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{M/2} \left[B_{j,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(b-b_{k-1}^r)/\gamma_{jr}} + B_{j+M/2,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) \right] + W_{i+M/2,r} \\ & \quad - \frac{\rho}{\pi} \sum_{k=1}^{M/2} w_k I_{xr}(b, \mathbf{\Omega}_k) |\eta_k| = \epsilon_w I_{b_{xr}}(b), \quad (4.15) \end{aligned}$$

chegando à expressão

$$\sum_{j=1}^{M/2} \left\{ \left[B_{j,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(b-b_{k-1}^r)/\gamma_{jr}} + B_{j+M/2,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) \right] - \frac{\rho}{\pi} \sum_{k=1}^{M/2} w_k |\eta_k| \left[B_{j,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_k) e^{-(b-b_{k-1}^r)/\gamma_{jr}} + B_{j+M/2,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_{k+M/2}) \right] \right\} + W_{i+M/2,r} - \frac{\rho}{\pi} \sum_{k=1}^{M/2} w_k |\eta_k| W_{k,r} = \epsilon_w I_{b_{xr}}(b), \quad (4.16)$$

para $i = 1, \dots, M/2$.

Por fim, a partir da imposição de continuidade para a intensidade nas interfaces das regiões, obtêm-se as equações para o fechamento do sistema linear. Assim, têm-se que as intensidades médias ao longo da direção y devem satisfazer

$$I_{yr}(a_h^r, \mathbf{\Omega}_i) = I_{y(r+1)}(a_{h-1}^{(r+1)}, \mathbf{\Omega}_i), \quad (4.17)$$

para $i = 1, \dots, M$. Dessa forma, obtêm-se as equações

$$\sum_{j=1}^{M/2} \left[A_{j,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) e^{-(a_h^r - a_{h-1}^r)/\nu_{jr}} + A_{j+M/2,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) - A_{j,(r+1)} \Phi_{y(r+1)}(\nu_{j(r+1)}, \mathbf{\Omega}_i) - A_{j+M/2,(r+1)} \Phi_{y(r+1)}(\nu_{j(r+1)}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(a_h^{(r+1)} - a_{h-1}^{(r+1)})/\nu_{j(r+1)}} \right] + S_{i,r} - S_{i,(r+1)} = 0, \quad (4.18a)$$

e

$$\sum_{j=1}^{M/2} \left[A_{j,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(a_h^r - a_{h-1}^r)/\nu_{jr}} + A_{j+M/2,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) - A_{j,(r+1)} \Phi_{y(r+1)}(\nu_{j(r+1)}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) - A_{j+M/2,(r+1)} \Phi_{y(r+1)}(\nu_{j(r+1)}, \mathbf{\Omega}_i) e^{-(a_h^{(r+1)} - a_{h-1}^{(r+1)})/\nu_{j(r+1)}} \right] + S_{i+M/2,r} - S_{i+M/2,(r+1)} = 0, \quad (4.18b)$$

para $i = 1, \dots, M/2$.

E as intensidades médias ao longo da direção x devem satisfazer

$$I_{xr}(b_k^r, \mathbf{\Omega}_i) = I_{x(r+1)}(b_{k-1}^{(r+1)}, \mathbf{\Omega}_i), \quad (4.19)$$

para $i = 1, \dots, M$. Dessa forma, obtêm-se as equações

$$\sum_{j=1}^{M/2} \left[B_{j,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) e^{-(b_k^r - b_{k-1}^r)/\gamma_{jr}} + B_{j+M/2,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) - \right. \\ \left. B_{j,(r+1)} \Phi_{x(r+1)}(\gamma_{j(r+1)}, \mathbf{\Omega}_i) - B_{j+M/2,(r+1)} \Phi_{x(r+1)}(\gamma_{j(r+1)}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(b_k^{(r+1)} - b_{k-1}^{(r+1)})/\gamma_{j(r+1)}} \right] \\ + W_{i,r} - W_{i,(r+1)} = 0, \quad (4.20a)$$

e

$$\sum_{j=1}^{M/2} \left[B_{j,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(b_k^r - b_{k-1}^r)/\gamma_{jr}} + B_{j+M/2,r} \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) - \right. \\ \left. B_{j,(r+1)} \Phi_{x(r+1)}(\gamma_{j(r+1)}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) - B_{j+M/2,(r+1)} \Phi_{x(r+1)}(\gamma_{j(r+1)}, \mathbf{\Omega}_i) e^{-(b_k^{(r+1)} - b_{k-1}^{(r+1)})/\gamma_{j(r+1)}} \right] \\ + W_{i+M/2,r} - W_{i+M/2,(r+1)} = 0, \quad (4.20b)$$

para $i = 1, \dots, M/2$. Nota-se que nas Equações 4.18 o termo $(r + 1)$ refere-se a região do domínio à direita da região r , particionamento na horizontal, e nas Equações 4.20 o termo $(r + 1)$ refere-se a região do domínio acima da região r , particionamento na vertical. Lembrando a definição da região r para $x \in [a_{h-1}^r, a_h^r]$ e $y \in [b_{k-1}^r, b_k^r]$.

As equações obtidas nesta seção definem o sistema linear de ordem $4M(HK)$ cuja solução determina os coeficientes $A_{j,r}$, $B_{j,r}$, $S_{j,r}$ e $W_{j,r}$ da solução geral do problema para as intensidades médias na variável y , conforme as Equações 3.80 e 3.81, e para as intensidades médias na variável x , de acordo com as Equações 3.82 e 3.83. Dessa forma, o sistema linear é composto pelas Equações 4.4 e 4.7 provenientes do acoplamento das equações para as soluções particulares e das aproximações das intensidades desconhecidas nos contornos das regiões; pelas Equações 4.10, 4.12, 4.14 e 4.16 provenientes das condições de contorno do problema e por fim pelas Equações 4.18 e 4.20 oriundas da imposição de continuidade nas interfaces das regiões, completando as $4M(HK)$ equações necessárias para determinar todas as incógnitas do problema.

4.2 Ordenamento dos Conjuntos de Equações

O conjunto de equações que compõem o sistema linear, determinado na Seção 4.1, pode ser ordenado de inúmeras formas dependendo de como são enumeradas as regiões da malha e da ordem das variáveis do vetor de incógnitas. O ordenamento das equações

influencia na estrutura da matriz e como consequência a escolha de quais métodos numéricos de resolução são viáveis de serem aplicados. Neste trabalho, apresentam-se duas formas de ordenamento: primeiro uma forma a qual denomina-se de configuração padrão, e depois uma nova configuração com o reordenamento das equações.

O sistema linear busca encontrar o vetor de coeficientes desconhecidos na solução geral, ordenado da forma $\{A_{i,r}, S_{i,r}, W_{i,r}, B_{i,r}\}$ para $i = 1, \dots, M$ direções e $r = 1, \dots, R$ regiões da malha. Lembrando que o domínio é dividido em $r = 1, \dots, R$ regiões retangulares, definidas por $x \in [a_{h-1}^r, a_h^r]$ e $y \in [b_{k-1}^r, b_k^r]$ com $0 \leq a_{h-1}^r < a_h^r \leq a$ e $0 \leq b_{k-1}^r < b_k^r \leq b$, onde $h = 1, \dots, H$ e $k = 1, \dots, K$ indicam um número de subdivisões consideradas nos eixos x e y , respectivamente, como visto na Figura 4.1. As regiões de domínio são listadas da esquerda para a direita e de baixo para cima, conforme exemplificado na Figura 4.1.

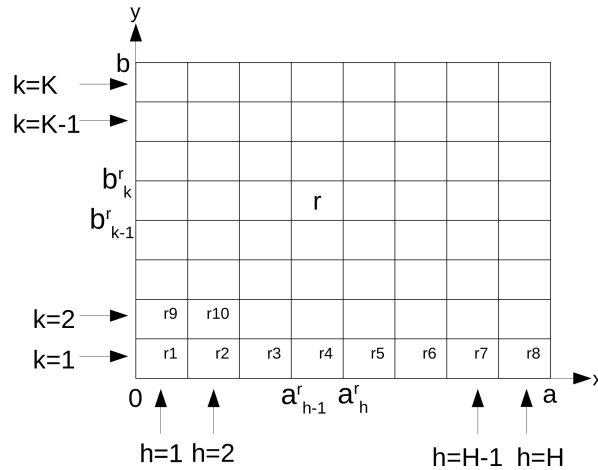


Figura 4.1 – Domínio subdividido em uma malha de $H \times K$ regiões retangulares.

O primeiro ordenamento segue uma forma denominada padrão de construção do sistema linear, presente nos trabalhos [Rui e Barichello, 2018; Barichello et al., 2018; Rui et al., 2020a,b], no qual consideram-se as equações na ordem descrita abaixo aplicando-se as condições do problema nas regiões da esquerda para a direita (intensidade média na direção x) e de baixo para cima (intensidade média na direção y):

- equação da condição de contorno em $x = 0$: Equação 4.10;
- equações de continuidade, nas interfaces das regiões na direção y : Equações 4.18;
- equação da condição de contorno em $x = a$: Equação 4.12;

- conjunto de equações lineares derivadas da solução particular na direção y incluindo equações auxiliares que aproximam intensidades desconhecidas nos contornos: Equações 4.7;
- equação da condição de contorno em $y = 0$: Equação 4.14;
- equações de continuidade nas interfaces das regiões na direção x : Equações 4.20;
- equação da condição de contorno em $y = b$: Equação 4.16;
- conjunto de equações lineares derivadas da solução particular na direção x incluindo equações auxiliares que aproximam intensidades desconhecidas nos contornos: Equações 4.4.

A configuração do sistema descrita acima, resulta em uma estrutura da matriz na qual observam-se vários elementos nulos na diagonal principal da matriz, conforme estrutura da matriz mostrada na Figura 4.2. Nessa configuração pode-se resolver o sistema linear, por exemplo, através do uso de subrotinas do pacote LAPACK (*Linear Algebra Package*) [Anderson et al., 1999], especificamente, subrotinas DGETRF/DGETRS que fazem uso da fatoração LU. Com o uso das subrotinas do LAPACK é necessário que a matriz seja toda armazenada em memória, isto é, armazenar os elementos de todas as linhas e colunas, inclusive os elementos nulos. E conforme aumenta-se a malha $H \times K$ a ordem da matriz será maior, requerendo maior capacidade de memória de armazenamento.

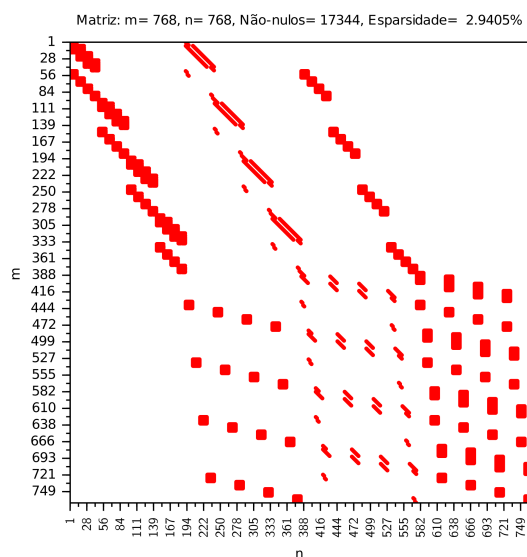


Figura 4.2 – Distribuição dos elementos do sistema linear por configuração padrão.

As matrizes de alta ordem para a resolução dos problemas de radiação, juntamente com a solução dos sistemas lineares através de métodos diretos, apresentaram-se ter uma limitação computacional. Em relação ao armazenamento das matrizes, a quantidade de memória requerida pelas subrotinas DGETRF/DGETRS da LAPACK é na ordem de $4MHK$, e outra limitação em relação ao tempo de execução que é de ordem $O(4MHK)^3$. Assim, investigou-se o uso de métodos iterativos de solução do sistema com esta estrutura, como havia sido usado anteriormente em trabalhos do ADO-Nodal em aplicações de nêutrons [da Cunha et al., 2015; Moura et al., 2018]. Contudo, devido ao condicionamento da matriz ser alto, tornou-se impossível alcançar a exatidão necessária. A partir destas dificuldades, investigou-se o uso do algoritmo de fatoração LU aplicado a matrizes esparsas com estrutura diagonal, no qual uma implementação é fornecida pela subrotina HSL_MA48 da *HSL Mathematical Software Library* [HSL, 2013]. Devido a estrutura diagonal exigida pela subrotina, estudou-se um reordenamento do sistema para se adequar ao uso da HSL_MA48.

Alterando a ordem de aplicação das condições descritas no ordenamento padrão obteve-se um reordenamento adequado do sistema. Denomina-se este novo formato como sistema reordenado. O sistema é construído linha a linha em quatro etapas. Em cada etapa descrita abaixo, percorre-se todas as regiões considerando um loop em $k = 1, K$ com outro loop aninhado para os elementos em h :

- aplicam-se as equações correspondentes ao contorno esquerdo (Equação 4.10 ou Equação 4.18a) e ao contorno direito (Equação 4.18b ou Equação 4.12);
- aplica-se o conjunto de equações lineares da solução particular na direção x (Equações 4.4);
- aplica-se o conjunto de equações lineares da solução particular na direção y (Equações 4.7);
- aplicam-se as equações para o contorno inferior (Equação 4.14 ou Equação 4.20a) e o contorno superior (Equação 4.20b ou Equação 4.16).

Na Figura 4.3 mostra-se a estrutura da matriz de acordo com a ordenação descrita acima. É possível ver que, a partir da ordenação aqui apresentada, os elementos diferentes de zero da matriz são agrupados entre as diagonais, embora nem todas as diagonais da matriz estejam preenchidas por valores diferentes de zero.

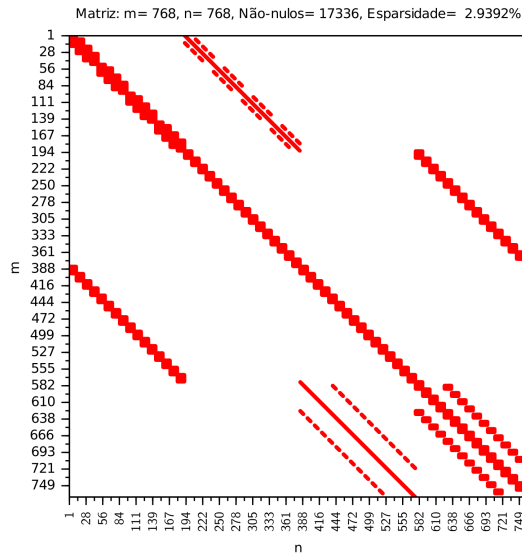


Figura 4.3 – Distribuição dos elementos do sistema linear reordenado.

Através desse reordenamento das equações é possível resolver o sistema via biblioteca HSL que permite alocar a matriz de forma esparsa, o que reduz significativamente a memória RAM necessária para tal armazenamento. Isso é fundamental possibilitando-se aumentar a quantidade de regiões nas quais o domínio é dividido, bem como aumento do número de direções discretas a serem consideradas.

Apesar deste procedimento permitir a resolução de problemas baseados em sistemas lineares de ordem superior aos casos anteriores baseados no formato padrão, ainda observam-se restrições de aplicabilidade (performance) da subrotina HSL e neste sentido formas alternativas são buscadas: como uso da subrotina ScaLAPACK [Blackford et al., 1997] e técnicas de decomposição de domínio por complemento de Schur [Chan e Mathew, 1994; Smith et al., 1996].

4.3 Solução do Sistema Linear via ScaLAPACK

O sistema linear resultante da formulação ADO-Nodal surge porque tem-se procurado evitar a resolução da equação através de técnicas de varreduras que outros métodos utilizam e que podem demandar de muito tempo computacional. Até mesmo porque resultados preliminares indicaram ótimo desempenho do método ADO-Nodal em malhas grossas. Testes aqui realizados apontam que estes sistemas lineares são potencialmente grandes e esparsos, que requerem alto poder computacional ou até mesmo que não são

possíveis de serem resolvidos através de métodos diretos, fazendo-se necessário investigar técnicas iterativas paralelas na solução de sistemas esparsos de equações lineares.

A solução do sistema linear através do uso da biblioteca LAPACK [Anderson et al., 1999], para a configuração padrão, ou pela rotina HSL [HSL, 2013], para o sistema reordenado, foi implementada em um programa e resolveu-se de forma sequencial em um modelo de processamento em memória compartilhada, esbarrando-se em uma limitação da quantidade de memória RAM disponível. Neste caso, recorreu-se à solução do sistema linear reordenado com uso de paralelismo através do uso de uma biblioteca de álgebra linear de alto desempenho, a ScaLAPACK (*Scalable LAPACK*) [Blackford et al., 1997], fazendo uso de um modelo de processamento em computadores de memória distribuída.

O ScaLAPACK é uma biblioteca de rotinas específicas para resolver numericamente problemas de álgebra linear, como a resolução de sistemas de equações lineares e problemas de autovalores. De forma geral é uma extensão da biblioteca LAPACK, resolvendo problemas em paralelo, em arquiteturas de memória distribuída e com mecanismos de comunicação entre os processadores. As implementações existentes permitem o uso das bibliotecas baseadas no padrão MPI (*Message Passing Interface*) e com desenvolvimento no estilo SPMD (*Single Program Multiple Date*). A distribuição dos dados é feita de forma cíclica por blocos.

Além da LAPACK, a ScaLAPACK usa as componentes BLACS (*Basic Linear Algebra Communication Subprograms*) que é uma biblioteca com as rotinas dedicadas ao mecanismo de comunicação entre os processos e PBLAS (*Parallel Basic Linear Algebra Subprograms*) que é um conjunto de rotinas para memória distribuída análogas às da BLAS (*Basic Linear Algebra Subprograms*). A subrotina usada com a ScaLAPACK para resolver o sistema linear através da decomposição LU é a PDGESV.

Os processadores são distribuídos em uma malha de processos bidimensional, no qual denotando P_r como sendo os processos por linhas e P_c os processos por colunas, então tem-se $P = P_r * P_c$ onde referencia-se cada processador pelas suas coordenadas (P_r, P_c) e P é o número de processadores utilizados. Na Figura 4.4 mostra-se o mapeamento de 8 processadores em uma grid 2×4 ($P = 8, P_r = 2, P_c = 4$). Tem-se que a coordenada $(0, 0)$ refere-se ao processador 0, a coordenada $(0, 1)$ refere-se ao processador 1, a coordenada $(0, 2)$ refere-se ao processador 2, a coordenada $(0, 3)$ refere-se ao processador 3, a coordenada $(1, 0)$ refere-se ao processador 4, a coordenada $(1, 1)$ refere-se ao processador 5, a

coordenada (1, 2) refere-se ao processador 6 e a coordenada (1, 3) refere-se ao processador 7, totalizando os 8 processos.

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	4	5	6	7

(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)
(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)

Figura 4.4 – Grade de processadores: exemplo de ordenação de oito processos mapeados em um grid de 2×4 .

Distribui-se a matriz global nos processadores através de uma distribuição cíclica por blocos, ou seja, a matriz global $M \times N$ é quebrada em blocos de tamanho $M_B \times N_B$ e é distribuída na grade de processos $P_r \times P_c$ de forma cíclica.

Na Figura 4.5 apresenta-se um exemplo de distribuição da matriz em blocos para os processadores. Dada uma matriz de dimensão 7×7 , consideram-se 6 processadores que compõem uma grid 2×3 e os blocos matriciais usados na distribuição com dimensão 2×2 . Mostra-se na Figura 4.5a a distribuição dos processadores em uma malha, cada qual representado por uma cor para melhor identificar a matriz bloco associada ao respectivo processador. Na Figura 4.5b particiona-se a matriz global em blocos e associa-se cada bloco de forma cíclica a um processador da grid de processos, resultando-se na Figura 4.5c. Por fim, agrupando os elementos correspondentes a cada processador, obtém-se a malha da Figura 4.5d. Assim, cada processador receberá um bloco da matriz global para resolver o sistema linear. Para o vetor dos termos independentes divide-se em blocos por linhas e atribuem-se os processadores da grid na ordem das linhas.

Através da implementação da ScaLAPACK em máquinas com processamento em memória distribuída espera-se avançar os estudos dos problemas aqui abordados, procurando a extensão da solução do sistema linear em malhas mais refinadas.

	0	1	2
0	0	1	2
1	3	4	5

(a) Grade 2×3 com 6 processadores.

(a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{37}
	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	a_{47}
	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{56}	a_{57}
	a_{61}	a_{62}	a_{63}	a_{64}	a_{65}	a_{66}	a_{67}
	a_{71}	a_{72}	a_{73}	a_{74}	a_{75}	a_{76}	a_{77}

(b) Matriz 7×7 particionada em blocos 2×2 .

(a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{37}
	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	a_{47}
	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{56}	a_{57}
	a_{61}	a_{62}	a_{63}	a_{64}	a_{65}	a_{66}	a_{67}
	a_{71}	a_{72}	a_{73}	a_{74}	a_{75}	a_{76}	a_{77}

(c) Distribuição cíclica por blocos.

(a_{11}	a_{12}	a_{17}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
	a_{21}	a_{22}	a_{27}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}
	a_{51}	a_{52}	a_{57}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{56}
	a_{61}	a_{62}	a_{67}	a_{63}	a_{64}	a_{65}	a_{66}
	a_{31}	a_{32}	a_{37}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}
	a_{41}	a_{42}	a_{47}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}
	a_{71}	a_{72}	a_{77}	a_{73}	a_{74}	a_{75}	a_{76}

(d) Matriz distribuída na grade de processos 2×3 .

Figura 4.5 – Distribuição cíclica por blocos: mapeamento de uma matriz 7×7 em blocos 2×2 para uma grid de processos 2×3 .

4.4 Decomposição de Domínio - Complemento de Schur

Nesta seção aborda-se a técnica de decomposição de domínio através do complemento de Schur, outra técnica investigada para resolver o sistema linear oriundo da aplicação do método ADO-Nodal na equação bidimensional de transferência radiativa. Uma das vantagens do uso de métodos de decomposição de domínio é a possibilidade de resolver problemas de grande dimensão em computadores com menor capacidade de processamento e memória, e além disso, a possibilidade de resolver problemas em computadores paralelos [Chan e Mathew, 1994].

Uma forma de resolver equações diferenciais parciais a fim de obter soluções de forma mais rápida é através do uso de técnicas de decomposição de domínio. A decomposição de domínio é uma técnica que pode ser usada para desenvolver algoritmos que sejam de natureza paralela, uma vez que os subdomínios podem ser manipulados independentemente. A essência do método é resolver o problema no domínio todo a partir das soluções obtidas nos subdomínios. Existem duas classes principais de decomposição em subdomínios que diferem conforme a partição do domínio: com sobreposição de subdomínios, *overlapping*, que incluem os métodos de Schwarz; e sem sobreposição de subdomínios, *non-overlapping*, que é conhecida como métodos de Schur ou de subestruturação [Smith et al., 1996].

Neste trabalho, utiliza-se a técnica que não possui sobreposição de domínios, pelo fato dos subproblemas serem menores e mais fáceis de programar. Para a solução dos subdomínios o uso de métodos diretos é uma tentativa para se obter uma solução mais precisa e uma convergência mais rápida.

Na busca de resolver o sistema linear de equações $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, que pode ser estendido para um ambiente paralelo, utiliza-se a decomposição de domínio através do complemento de Schur. Neste método considera-se a hipótese de que a malha está definida no domínio Ω e que este domínio é particionado em s subdomínios Ω_i sem sobreposição, para $i = 1, \dots, s$, ou seja, $\Omega = \bigcup_{i=1}^s \Omega_i$ [Saad, 2003]. Desta forma, na abordagem *non-overlapping* decompõe-se o domínio físico do problema, denominado por Ω , em s subdomínios disjuntos, Ω_i com $i = 1, \dots, s$, não sobrepostos, com interface Γ entre eles, como pode ser visto na Figura 4.6.

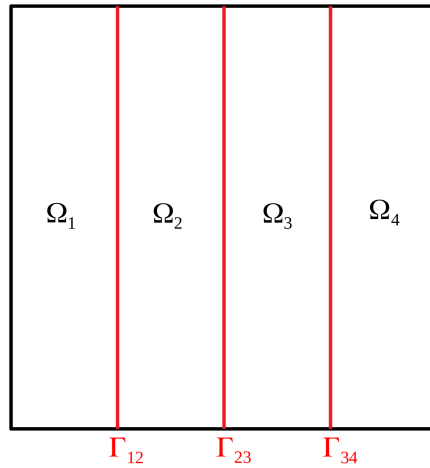


Figura 4.6 – Domínio Ω subdividido em subdomínios Ω_i com interface Γ entre eles.

Na Figura 4.7 representa-se a decomposição de domínio com divisões internas da malha. O domínio Ω de uma malha 12×12 é dividido em três subdomínios Ω_i , com $i = 1, 2, 3$, onde as regiões em azul representam as células de incógnitas internas, que pertencem ao interior do subdomínio Ω_i , e as regiões em vermelho representam as incógnitas de fronteira nas interfaces dos subdomínios.

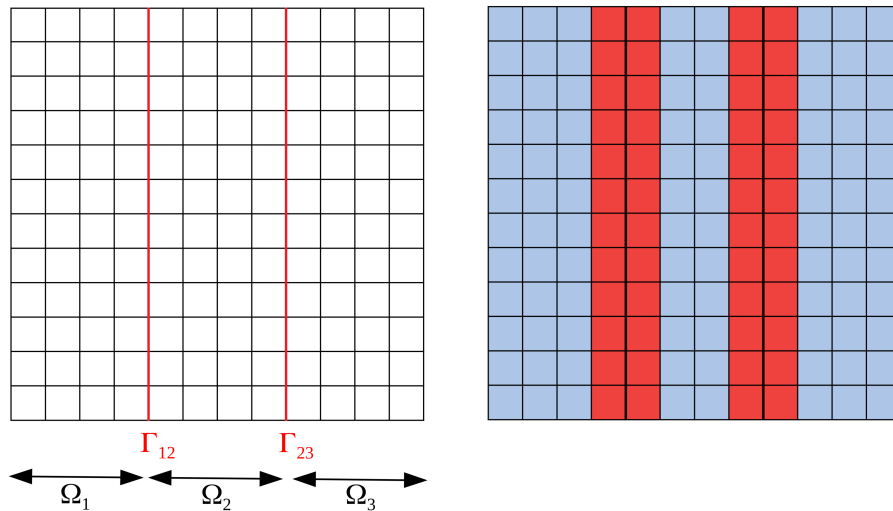


Figura 4.7 – Decomposição do domínio na malha 12×12 com a representação das células internas e de fronteira.

Mostra-se na Figura 4.8 a estrutura em blocos da matriz associada com a decomposição de domínio, representada na Figura 4.7.

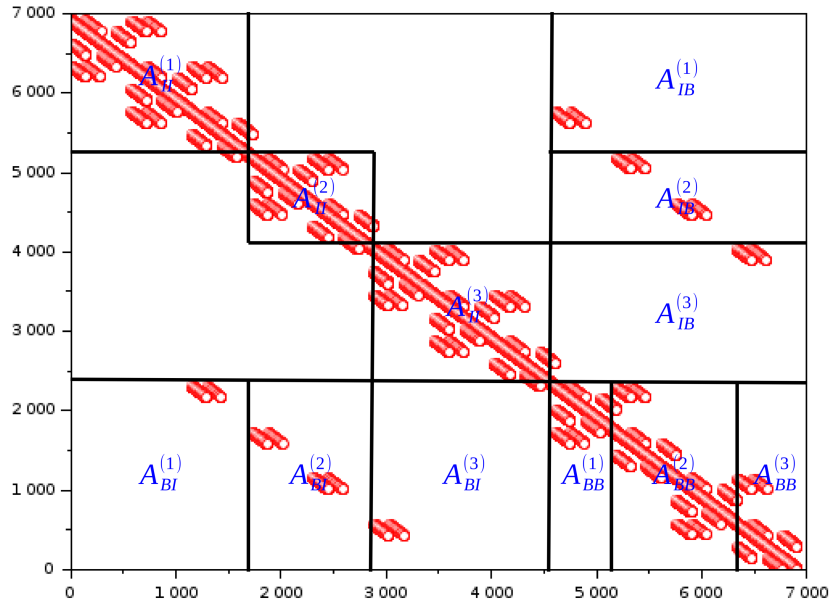


Figura 4.8 – Matriz em blocos associada com a malha da Figura 4.7.

Em cada subdomínio Ω_i ordenam-se as células locais de forma que as células pertencentes à interface Γ (fronteira com subdomínio vizinho) são listadas depois das células internas do subdomínio [Saad, 2003]. Denotam-se os nós nas interfaces como \mathbf{x}_B e os nós no interior dos subdomínios como \mathbf{x}_I .

Seguindo esta forma de ordenação, se o domínio for particionado em s subdomínios, o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ associado ao problema terá a seguinte estrutura [Smith et al., 1996; Quarteroni e Valli, 1999; Grooss, 2001; Formaggia et al., 2006]:

$$\begin{bmatrix} A_{II}^{(1)} & & & & A_{IB}^{(1)} \tilde{R}_1 \\ & A_{II}^{(2)} & & & A_{IB}^{(2)} \tilde{R}_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & A_{II}^{(s)} & A_{IB}^{(s)} \tilde{R}_s \\ \tilde{R}_1^T A_{BI}^{(1)} & \tilde{R}_2^T A_{BI}^{(2)} & \cdots & \tilde{R}_s^T A_{BI}^{(s)} & \sum_{i=1}^s \tilde{R}_i^T A_{BB}^{(i)} \tilde{R}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I^{(1)} \\ x_I^{(2)} \\ \vdots \\ x_I^{(s)} \\ \mathbf{x}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_I^{(1)} \\ b_I^{(2)} \\ \vdots \\ b_I^{(s)} \\ \mathbf{b}_B \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

no qual cada vetor $x_I^{(i)}$ representa um vetor referente às incógnitas que estão no interior do subdomínio Ω_i e \mathbf{x}_B representa o vetor de todas as incógnitas nas interfaces entre os subdomínios. E o vetor dos termos independentes é particionado de tal forma que $b_I^{(i)}$ representa os termos independentes nas células internas e \mathbf{b}_B nas células da interface. As matrizes de restrição \mathbf{R} são necessárias uma vez que cada elemento de \mathbf{x}_B não está relacionado a todos os blocos. R_i identifica as variáveis de um bloco, $x^{(i)} = R_i \mathbf{x}$, e \tilde{R}_i

identifica as variáveis de fronteira de um bloco, $x_B^{(i)} = \tilde{R}_i \mathbf{x}_B$. As matrizes de restrição \mathbf{R} são matrizes quase-identidade com elementos $(k; k) = 1$ quando a variável x_k é interna ou de fronteira.

De forma simplificada, expressa-se o sistema 4.21 como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{II} & \mathbf{A}_{IB} \\ \mathbf{A}_{BI} & \mathbf{A}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_I \\ \mathbf{b}_B \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

sendo que \mathbf{A}_{II} é um bloco da matriz correspondente aos nós internos dos subdomínios, \mathbf{A}_{BB} é a matriz correspondente a todos os nós da interface entre os s subdomínios e \mathbf{A}_{IB} e \mathbf{A}_{BI} são as matrizes que representam as ligações entre as interfaces e os subdomínios.

Define-se $n_I^{(i)}$ como sendo o número de variáveis internas de cada subdomínio, então o número total de variáveis internas do domínio Ω é $N_I = \sum_{i=1}^s n_I^{(i)}$ e define-se $n_B^{(i)}$ como sendo o número de variáveis de fronteira de cada subdomínio, então $N_B = \sum_{i=1}^s n_B^{(i)}$ é o número total de variáveis de fronteira do domínio Ω . Assim, considerando que o domínio foi dividido em s subdomínios ($i = 1, \dots, s$), cada subdomínio i tem um conjunto de variáveis internas ($x_I^{(i)}$), contendo $n_I^{(i)}$ variáveis, e um outro conjunto de variáveis de fronteira ($x_B^{(i)}$), contendo $n_B^{(i)}$ variáveis.

Do sistema 4.22 resulta as seguintes matrizes blocos:

$$\mathbf{A}_{II} = \begin{bmatrix} A_{II}^{(1)} & & & \\ & A_{II}^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{II}^{(s)} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

onde $\mathbf{A}_{II} \in \mathbb{R}^{N_I \times N_I}$ e $A_{II}^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_I^{(i)} \times n_I^{(i)}}$ com $i = 1, \dots, s$,

$$\mathbf{A}_{IB} = \begin{bmatrix} A_{IB}^{(1)} \\ A_{IB}^{(2)} \\ \vdots \\ A_{IB}^{(s)} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

onde $\mathbf{A}_{IB} \in \mathbb{R}^{N_I \times N_B}$ e $A_{IB}^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_I^{(i)} \times N_B}$ com $i = 1, \dots, s$,

$$\mathbf{A}_{BI} = \begin{bmatrix} A_{BI}^{(1)} & A_{BI}^{(2)} & \dots & A_{BI}^{(s)} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

onde $\mathbf{A}_{\mathbf{BI}} \in \mathbb{R}^{N_B \times N_I}$ e $A_{BI}^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_B \times n_I^{(i)}}$ com $i = 1, \dots, s$,

$$\mathbf{A}_{\mathbf{BB}} = \begin{bmatrix} A_{BB}^{(1)} & A_{BB}^{(2)} & \cdots & A_{BB}^{(s)} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

onde $\mathbf{A}_{\mathbf{BB}} \in \mathbb{R}^{N_B \times N_B}$ e $A_{BB}^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_B \times n_B^{(i)}}$ com $i = 1, \dots, s$, e

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_B \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_I + N_B}$, $\mathbf{x}_I \in \mathbb{R}^{N_I}$, $\mathbf{x}_B \in \mathbb{R}^{N_B}$ com

$$\mathbf{x}_I = \begin{bmatrix} x_I^{(1)} \\ x_I^{(2)} \\ \vdots \\ x_I^{(s)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_B^{(1)} \\ x_B^{(2)} \\ \vdots \\ x_B^{(s)} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

onde $x_I^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_I^{(i)}}$ e $x_B^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_B^{(i)}}$ com $i = 1, \dots, s$ e

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_I \\ \mathbf{b}_B \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

onde $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N_I + N_B}$, $\mathbf{b}_I \in \mathbb{R}^{N_I}$, $\mathbf{b}_B \in \mathbb{R}^{N_B}$ com

$$\mathbf{b}_I = \begin{bmatrix} b_I^{(1)} \\ b_I^{(2)} \\ \vdots \\ b_I^{(s)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_B = \begin{bmatrix} b_B^{(1)} \\ b_B^{(2)} \\ \vdots \\ b_B^{(s)} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

onde $b_I^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_I^{(i)}}$ e $b_B^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_B^{(i)}}$ com $i = 1, \dots, s$.

Usa-se uma fatoração direta para eliminar os blocos abaixo da diagonal $\tilde{R}_i^T A_{BI}^{(i)}$, na matriz 4.21, assim obtém-se o sistema do complemento de Schur dado por

$$\mathbf{S}\mathbf{x}_B = \mathbf{g}, \quad (4.31)$$

ou seja,

$$\left(\sum_{i=1}^s \tilde{R}_i^T S^{(i)} \tilde{R}_i \right) \mathbf{x}_B = \mathbf{b}_B - \sum_{i=1}^s \tilde{R}_i^T A_{BI}^{(i)} \left(A_{II}^{(i)} \right)^{-1} b_I^{(i)}, \quad (4.32)$$

onde

$$S^{(i)} = A_{BB}^{(i)} - A_{BI}^{(i)} \left(A_{II}^{(i)} \right)^{-1} A_{IB}^{(i)}, \quad (4.33)$$

e

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^s g^{(i)} \quad \text{com} \quad g^{(i)} = b_B^{(i)} - A_{BI}^{(i)} \left(A_{II}^{(i)} \right)^{-1} b_I^{(i)}, \quad (4.34)$$

onde $S^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_B^{(i)} \times n_B^{(i)}}$, $g^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_B^{(i)}}$ e $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{N_B}$ para $i = 1, \dots, s$.

A matriz $S^{(i)}$, definida pela Equação 4.33, é conhecida como a matriz local do complemento de Schur. Dessa forma, expressa-se a matriz global em termos das matrizes locais do complemento de Schur $S^{(i)}$ de cada subdomínio Ω_i , para $i = 1, \dots, s$ da forma

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^s S^{(i)}, \quad (4.35)$$

onde $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{N_B \times N_B}$. A matriz \mathbf{S} definida pela Equação 4.35 está associada com as variáveis na interface entre os subdomínios e é conhecida como matriz global do complemento de Schur.

Uma vez resolvido o sistema de complemento de Schur e obtido os valores \mathbf{x}_B na interface, retorna-se para cada bloco e resolve-se para as variáveis internas $x_I^{(i)}$ individualmente a cada subdomínio, da forma:

$$A_{II}^{(i)} x_I^{(i)} = b_I^{(i)} - A_{IB}^{(i)} \tilde{R}_i \mathbf{x}_B, \quad (4.36)$$

para $i = 1, \dots, s$.

Obtém-se a solução final do sistema pelo ordenamento dos elementos do vetor solução \mathbf{x} composto pelas soluções internas de cada subdomínio $x_I^{(i)}$ e das variáveis de interface \mathbf{x}_B .

Neste trabalho, para a decomposição do domínio consideram-se as equações para o sistema detalhadas na Seção 4.1, e como uma tentativa inicial considerou-se o particionamento em s subdomínios da malha de tal forma que cada subdomínio i tenha quatro colunas de variáveis, conforme mostrado anteriormente na Figura 4.7. Dessa forma, decompõe-se uma malha 8×8 em dois subdomínios, uma malha 12×12 em três subdomínios, uma malha 16×16 em quatro subdomínios, uma malha 20×20 em cinco subdomínios, e assim sucessivamente. Assim, os subdomínios nos extremos esquerda e direita da malha, Ω_1 e Ω_s , contém três colunas de variáveis internas e uma coluna de variáveis de fronteira, e os subdomínios que ficam compreendidos entre dois subdomínios Ω_i contém duas colunas de variáveis internas e duas colunas de variáveis de fronteira. Efetuou-se a escolha de particionamento do domínio dessa forma para além de garantir

que cada subdomínio tenha colunas de variáveis internas, também garantir que a solução do sistema seja possível computacionalmente, pois desta forma tem-se que o número de variáveis internas sempre é maior ou igual ao número de variáveis de fronteira, garantindo assim que a matriz \mathbf{S} não requeira mais memória para ser armazenada do que a própria matriz \mathbf{A} . Usando esse particionamento da malha, na Tabela 4.1 apresenta-se o número total s de subdomínios i da malha, o número de variáveis internas, $n_I(i)$, e o número de variáveis de fronteira, $n_B(i)$, de cada subdomínio. Também apresenta-se o tamanho da matriz \mathbf{S} do complemento de Schur e da matriz completa \mathbf{A} para a malha $(H \times K)$ abordada na Seção 4.2.

Tem-se que a quantidade de variáveis de um subdomínio compreendido entre outros dois subdomínios é de $8MH$ variáveis internas e $8MH$ variáveis de fronteira, a quantidade de variáveis de um subdomínio nos extremos esquerda ou direita da malha é de $12MH$ variáveis internas e $4MH$ variáveis de fronteira. E a quantidade total de variáveis do domínio é de $24MH + 8MH(s - 2)$ variáveis internas e $8MH(s - 1)$ variáveis de fronteira. Lembrando que H é o número de subdivisões consideradas no eixo x (igual ao do eixo y) e M é o número de direções discretas da quadratura.

A partir da análise da Tabela 4.1 fica evidente que, com a decomposição de domínio via complemento de Schur, a dimensão do sistema linear $\mathbf{S}\mathbf{x}_B = \mathbf{g}$ a ser resolvido é muito menor que a dimensão do sistema linear original $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Tabela 4.1 – Dados das matrizes bloco do complemento de Schur.

Malha	s	i	$n_I^{(i)}$	$n_B^{(i)}$	matriz \mathbf{S}	matriz completa $4M(HK)$
8×8	2	1	$96M$	$32M$	$64M \times 64M$	$256M \times 256M$
		2	$96M$	$32M$		
12×12	3	1	$144M$	$48M$	$192M \times 192M$	$576M \times 576M$
		2	$96M$	$96M$		
		3	$144M$	$48M$		
16×16	4	1	$192M$	$64M$	$384M \times 384M$	$1024M \times 1024M$
		2	$128M$	$128M$		
		3	$128M$	$128M$		
		4	$192M$	$64M$		
20×20	5	1	$240M$	$80M$	$640M \times 640M$	$1600M \times 1600M$
		2	$160M$	$160M$		
		3	$160M$	$160M$		
		4	$160M$	$160M$		
		5	$240M$	$80M$		

Neste trabalho construíram-se as matrizes blocos necessárias para calcular $S^{(i)}$, dada pela Equação 4.33, de tal forma que apenas são acessadas as linhas ou colunas quando necessário, ou seja não são armazenadas como matrizes. Dessa forma, a memória requerida para armazenamento e solução do sistema é reduzida, porém o tempo computacional é alto uma vez que é preciso percorrer muitas vezes as linhas ou colunas das matrizes blocos quanto for o número de variáveis de fronteira. Uma forma viável (com menor tempo computacional) de resolução do sistema linear via complemento de Schur é através da paralelização do código.

4.5 Desempenho Computacional na Resolução do Sistema Linear

A resolução de sistemas lineares esparsos e de grande porte, que surgem quando o método ADO-Nodal é usado para derivar soluções de problemas bidimensionais de transferência radiativa, considerando um grau arbitrário de anisotropia, é um aspecto computacional relevante neste trabalho. Sabe-se que soluções de sistemas lineares esparsos que possuem elevado número de incógnitas requerem elevado esforço computacional, muitas vezes para o armazenamento das matrizes esparsas.

As principais etapas computacionais envolvidas na implementação da solução ADO-Nodal para avaliar a solução da RTE são: a geração dos nós e pesos dos esquemas de quadratura; a solução dos problemas de autovalor; e a solução do sistema linear. Sendo que a solução do sistema linear é a parte que demanda de mais tempo computacional.

Em um primeiro momento, para gerar os resultados numéricos, que serão apresentados no próximo capítulo, implementou-se um programa em Fortran 90 onde são usadas as clássicas subrotinas do pacote LAPACK [Anderson et al., 1999], especificamente, subrotina DGEEV para solução dos problemas de autovalores e subrotinas DGETRF/DGETRS para a resolução do sistema linear. Com relação às subrotinas para resolver os sistemas lineares, elas são baseadas em métodos diretos (fatoração LU com pivotamento parcial). Para os testes considerou-se a configuração padrão de ordenamento do sistema linear descrita na Seção 4.2. As implementações foram executadas em um computador Intel Core *i7*, com um processador de 3.60 GHz e 8.00 GiB de memória RAM. Escolheu-se o esquema clássico de Quadratura Simétrica de Nível (LQ_N) [Lewis e Miller, 1984] para descrever as ordenadas discretas, e geraram-se resultados computacionalmente possíveis até a malha 8×8 (64 regiões) e $N = 12$ ($M = 84$ direções discretas da LQ_N), ou seja um

sistema linear de ordem 21504×21504 .

Na busca de recursos computacionais de alto desempenho que resolvessem sistemas lineares maiores, simulações numéricas foram realizadas em um cluster SGI ALTix no Centro Nacional de Supercomputação (CESUP/UFRGS) equipado com 6 unidades de processamento, cada uma com oito processadores quadcore e 128 *GiB* de memória RAM e interconectados por uma rede Ethernet. Ainda fazendo uso das rotinas do LAPACK para a solução do sistema linear, geraram-se resultados até a malha 10×10 (100 regiões) e $N = 16$ ($M = 144$ direções da LQ_N), ou seja um sistema linear de ordem 57600×57600 . Executou-se o programa computacional de forma sequencial, não realizando simulações de processamento em paralelo.

Percebeu-se que mesmo com o uso do recurso computacional do CESUP o avanço em relação ao refinamento da malha foi pouco. Com o intuito de obter soluções benchmark que requerem número de dígitos de concordância maior necessita-se refinar ainda mais a malha e conseqüentemente necessita-se de maior demanda computacional.

Em um segundo momento, não restringiu-se apenas em soluções de sistemas lineares via métodos diretos, através do uso de subrotinas LAPACK. Desta forma, recorreu-se ao uso de métodos iterativos especificamente para resolver o sistema linear, para obter as constantes desconhecidas das soluções gerais do problema em estudo. Na abordagem ADO-Nodal, mas tratando de problemas de transporte de nêutrons, estudos da solução dos sistemas lineares através de métodos iterativos já vinham sendo realizados, como pode ser visto nos trabalhos de da Cunha et al., 2015 e Moura et al., 2018. Seguindo a metodologia de solução do sistema usada nos trabalhos citados anteriormente, neste trabalho usou-se o pacote de software NUMERICO, de da Cunha, 2017, escrito em Fortran 95, o qual faz uso de métodos iterativos bem conhecidos, como o *Generalized Minimum Residuals* (GMRES) e o *Loose Generalized Minimum Residuals* (LGMRES). Estes métodos são usados para resolver sistemas que trabalham com a estrutura esparsa das matrizes. Para os testes considerou-se o sistema linear com configuração padrão e o reordenado, descritos na Seção 4.2. Porém, no problema de radiação aqui abordado considerou-se um coeficiente de espalhamento muito próximo de um, ou seja $\sigma_s = 0.999$, e o sistema linear resultante mostrou-se ser altamente mal-condicionado. Neste caso, a solução via métodos iterativos teve pouca precisão ou não convergiu.

Como a tentativa de usar métodos iterativos falhou, assim como o armazenamento

completo na memória do computador das matrizes que representam o sistema linear, recorreu-se a técnicas que otimizam o uso de memória disponível para o armazenamento dessas matrizes. Neste sentido, a partir do reordenamento do sistema descrito na Seção 4.2, aplicou-se o uso de subrotinas da *HSL Mathematical Software Library* [HSL, 2013]. Entre seus pacotes mais conhecidos estão aqueles para a solução de sistemas lineares esparsos de equações, como o HSL_MA48, que faz uso da fatoração LU aplicada a matrizes esparsas com estrutura diagonal. Sua interface é em Fortran e a proposta é baseada no armazenamento apenas dos valores não nulos, que são relevantes para a solução do sistema. Realizaram-se simulações numéricas no CESUP, executando o programa computacional de forma sequencial onde se resolveram os sistemas lineares usando a subrotina HSL_MA48. Geraram-se resultados computacionalmente possíveis até a malha 40×40 (1600 regiões) e $N = 16$ ($M = 144$) com o uso da quadratura LQ_N , ou seja um sistema linear de ordem 921600×921600 . E com o uso da quadratura Quadruple Range Compatível (QR_C) [Abu-Shumays, 1977] geraram-se resultados até a malha 40×40 (1600 regiões) e ordem polar $N_\theta = 4$ ($M = 128$), ou seja um sistema linear de ordem 819200×819200 .

Ainda, com o uso da HSL_MA48 para a solução do sistema linear reordenado realizaram-se simulações em um computador Intel Core *i7*, com um processador de 2.8 GHz e 16.00 GiB de memória RAM. Geraram-se resultados com a malha 50×50 (2500 regiões) e $N = 16$ ($M = 144$) com o uso da quadratura LQ_N , ou seja um sistema linear de ordem 1440000×1440000 . E com o uso da quadratura Quadruple Range Compatível (QR_C) [Abu-Shumays, 1977] geraram-se resultados com a malha 60×60 (3600 regiões) e ordem polar $N_\theta = 4$ ($M = 128$), ou seja um sistema linear de ordem 1843200×1843200 . Os resultados foram gerados considerando anisotropia de segunda ordem e espessura do domínio igual a um. Resultados com a QR_C e malha 60×60 considerando anisotropia de segunda ordem e espessura do domínio igual a cinco não foram possíveis computacionalmente, o mesmo ocorreu com a LQ_N considerando a mesma malha 50×50 , mas para ordem de anisotropia igual a oito e espessura do domínio igual a um. Nota-se que a dimensão do sistema linear não depende do grau de anisotropia considerado e nem da espessura óptica do domínio. Neste caso deparou-se com restrições do uso da HSL, por apresentar problemas de alocação de memória de rotinas internas da HSL_MA48, mesmo trabalhando com problemas com mesmo número de elementos não nulos da matriz. A partir destes resultados, observou-se que a solução do sistema linear obtida até o momento

está limitada a uma determinada ordem, dependendo dos recursos computacionais e do problema abordado.

Neste sentido, buscando-se a extensão e o aprimoramento da presente formulação, estudou-se a solução destes sistemas lineares fazendo uso de bibliotecas de álgebra linear de alto desempenho como a ScaLAPACK, através do processamento em paralelo utilizando MPI, bem como a decomposição do domínio via complemento de Schur. O programa computacional que resolve o sistema linear em vários processadores através da ScaLAPACK foi implementado em Fortran e está rodando corretamente em computadores com memória compartilhada. Simulações numéricas em paralelo estão sendo realizadas em um cluster SGI Altix no Centro Nacional de Supercomputação (CESUP/UFRGS) equipado com 64 unidades de processamento, cada uma com dois processadores dodeca-core e 64 *GiB* de memória RAM e interconectados por uma rede InfiniBand. A partir dos recursos do processamento em memória distribuída, busca-se poder avançar os estudos em malhas mais refinadas. Já para a decomposição do domínio via complemento de Schur implementou-se o programa computacional que resolve o sistema linear de forma sequencial e está rodando corretamente. Realizaram-se testes preliminares em computadores com memória compartilhada até a malha 20×20 . Neste caso, a quantidade de memória necessária em todo o programa é bem pequena, mas devido à enorme quantidade de tempo computacional requerida estuda-se a possibilidade de paralelizar esta técnica e assim poder obter soluções para sistemas de alta ordem.

No capítulo seguinte, apresentam-se os resultados numéricos da formulação ADO-Nodal para a equação bidimensional de transferência radiativa, em ordenadas discretas, obtidos através das técnicas de resolução do sistema linear apresentadas neste capítulo.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, apresentam-se os resultados numéricos obtidos através da solução da equação de transferência radiativa em geometria cartesiana bidimensional, considerando o meio com espalhamento anisotrópico. A formulação, obtida da aplicação do método ADO juntamente com os fundamentos dos esquemas nodais, foi desenvolvida no Capítulo 3 e o sistema linear apresentado no Capítulo 4.

A partir da solução geral da aproximação em ordenadas discretas da RTE calcula-se uma quantidade de interesse como sendo a densidade média de radiação ao longo da direção y , avaliada como

$$\phi_{xr}(y) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{M/2} w_n [I_{xr}(y, \boldsymbol{\Omega}_n) + I_{xr}(y, \boldsymbol{\Omega}_{n+M/2})], \quad (5.1)$$

onde as intensidades angulares médias na variável x , $I_{xr}(y, \boldsymbol{\Omega}_n)$ e $I_{xr}(y, \boldsymbol{\Omega}_{n+M/2})$, são definidas pelas Equações 3.82 e 3.83 respectivamente.

Calcula-se a média da Equação 5.1 na região r no intervalo $[b_{k-1}^r, b_k^r]$, e define-se a densidade média para cada uma das regiões r do domínio, como

$$\phi_r = \frac{1}{b_k^r - b_{k-1}^r} \int_{b_{k-1}^r}^{b_k^r} \phi_{xr}(y) dy, \quad (5.2)$$

integrando a Equação 5.1 e após algumas operações algébricas obtém-se a densidade média de radiação por regiões (ou nodos) como:

$$\phi_r = \frac{1}{4[b_k^r - b_{k-1}^r]} \sum_{n=1}^{M/2} w_n \left\{ \sum_{j=1}^{M/2} \gamma_{jr} (1 - e^{-(b_k^r - b_{k-1}^r)/\gamma_{jr}}) \left[B_{j,r} (\Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i) + \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/2})) + B_{j+M/2,r} (\Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_{i+M/2}) + \Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \boldsymbol{\Omega}_i)) \right] + (W_{i,r} + W_{i+M/2,r}) [b_k^r - b_{k-1}^r] \right\}. \quad (5.3)$$

Ainda, considerando que o domínio é dividido em seções que englobam mais de uma região, a intensidade média por seção do domínio é dada por:

$$\phi_s = \frac{\sum_{r=1}^{N_r} \phi_r (a_h^r - a_{h-1}^r) (b_k^r - b_{k-1}^r)}{\sum_{r=1}^{N_r} (a_h^r - a_{h-1}^r) (b_k^r - b_{k-1}^r)}, \quad (5.4)$$

onde N_r é o número de regiões na correspondente seção do domínio.

Além da densidade média de radiação, a partir da intensidade, também calcula-se o fluxo de calor radiativo, na direção y , dado por:

$$q(r) = \int_{4\pi} I(r, \boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{\Omega} d\boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad q(y) = \sum_{i=1}^M w_i \eta_i I_{xr}(y, \boldsymbol{\Omega}_i). \quad (5.5)$$

Com o intuito de verificar a formulação apresentada neste trabalho, primeiramente estabelecem-se comparações com os resultados fornecidos por Kim e Lee, 1988. No trabalho, os autores usam a aproximação em ordenadas discretas S_N para a discretização da variável angular da RTE em geometria bidimensional, juntamente com o método dos volumes finitos para a discretização da variável espacial e assim obter a solução da RTE. O conjunto de ordenadas necessárias e os pesos angulares correspondentes foram retirados do código TWOTRAN [Lathrop e Brinkley, 1973] mas não foram listados na referência [Kim e Lee, 1988]. Kim e Lee, 1988 listam em tabelas resultados numéricos apenas para o caso em que o domínio foi subdividido em 26×26 volumes de controle e a densidade média de radiação foi calculada usando uma aproximação S_{14} .

Usando este como caso teste principal, considera-se um quadrado em termos de espessura óptica com dimensão igual à um ($\tau = 1$) em ambas as variáveis x e y , e o meio puramente espalhador (albedo $\omega = 1$, ou seja, $\beta = 1$ e $\kappa = 0$). Procurando evitar o aparecimento de autovalores degenerados, consistente com problemas conservativos neste tipo de solução, assume-se o albedo $\omega = 0.999$ como uma aproximação ao caso exatamente igual à unidade. O problema conservativo foi preliminarmente investigado e encontra-se no Apêndice A detalhes da sua derivação.

As condições de contorno são dadas apenas em função do poder emissivo da superfície, assim considera-se somente a emissão de radiação no contorno, sem considerar a reflectividade da superfície ($I_{bw} = E_{bw}/\pi$). Considera-se um domínio quadrado com superfície negra, assim $\epsilon_w = 1$ e $\rho = 0$. As paredes e o meio são mantidos frios e têm poderes emissivos uniformes prescrito de zero, $E_{b1} = E_{b2} = E_{b4} = E_b = 0$, com exceção da parede inferior (parede 3) que é mantida quente e seu poder emissivo constante é igual a unidade, $E_{b3} = 1$, conforme representação na Figura 5.1. De acordo com Kim e Lee, 1988, o efeito da anisotropia na transferência de calor por radiação é mais significativo para ambientes não simétricos.

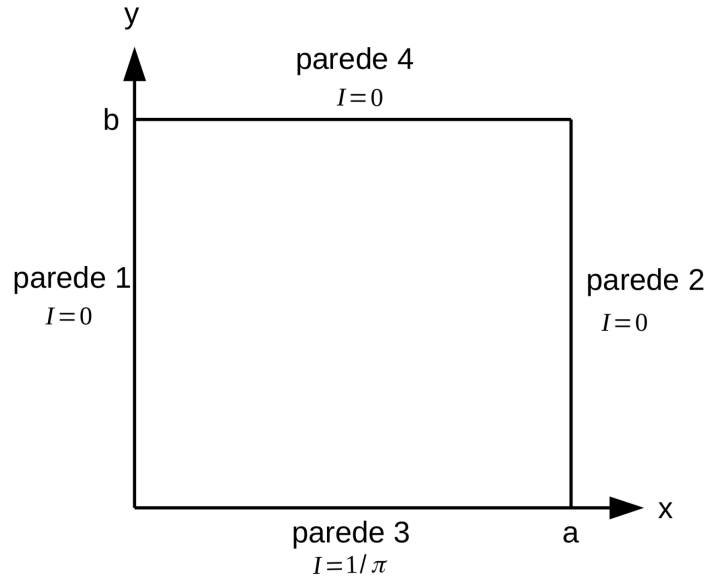


Figura 5.1 – Representação das condições de contorno do problema.

Para a função de fase de espalhamento, consideram-se cinco casos com diferentes graus de anisotropia: um isotrópico ($L = 0$) e quatro outros casos anisotrópicos denotados por $B2$, $B1$, $F2$ e $F1$ com graus de anisotropia $L = 2, 5, 8$ e 12 , respectivamente. De acordo com os autores [Kim e Lee, 1988] F indica que a função de fase tem espalhamento fortemente dirigido para frente (*forward scattering*) e B tem espalhamento fortemente na direção para trás (*backward scattering*). Na Tabela 5.1 apresentam-se os valores, extraídos de Kim e Lee, 1988, dos coeficientes de expansão C_l para as funções de fase.

Tabela 5.1 – Coeficientes de expansão para as funções de fase. [Fonte: Kim e Lee, 1988]

l	$F1 (L = 12)$	$F2 (L = 8)$	$B1 (L = 5)$	$B2 (L = 2)$
0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1	2.53602	2.00917	-0.56524	-1.20000
2	3.56549	1.56339	0.29783	0.50000
3	3.97976	0.67407	0.08571	
4	4.00292	0.22215	0.01003	
5	3.66401	0.04725	0.00063	
6	3.01601	0.00671		
7	2.23304	0.00068		
8	1.30251	0.00005		
9	0.53463			
10	0.20136			
11	0.05480			
12	0.01099			

Para se obter o conjunto de ordenadas e seus respectivos pesos angulares que serão usados para representar as direções discretas, considera-se inicialmente a quadratura Simétrica de Nível (LQ_N) [Lewis e Miller, 1984]. Não é possível garantir que neste trabalho o mesmo conjunto de quadratura da literatura é usado, mas é apropriado escolher o clássico esquema de quadratura LQ_N para descrever o conjunto de ordenadas discretas, que entende-se ser similar ao usado por Kim e Lee, 1988, que referenciam o esquema usado no código TWOTRAN.

Conforme relatado no capítulo anterior, na Seção 4.5, realizou-se a implementação da metodologia proposta na linguagem de programação computacional Fortran. A resolução dos sistemas lineares do problema para malhas até 10×10 foram efetuadas por meio de subrotinas da LAPACK, usando a configuração padrão do sistema descrita na Seção 4.2. A partir do reordenamento do sistema, apresentado na mesma Seção 4.2, fez-se uso da biblioteca HSL para a solução em malhas mais refinadas.

Primeiro concentra-se a análise no problema teste com comprimento óptico $\tau = 1$, o qual possui resultados numéricos na literatura. Depois investiga-se a solução ADO-Nodal em outros valores de espessura do domínio. Nota-se que o uso de diferentes comprimentos ópticos τ representa um espaçamento diferente para as regiões de cada malha $H \times K$ analisada, conforme Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Espaçamento das regiões na malha para cada τ .

$H \times K$	$\tau = 1$	$\tau = 5$	$\tau = 10$
4×4	0.25	1.25	2.5
6×6	0.166667	0.833333	1.666667
10×10	0.1	0.5	1
20×20	0.05	0.25	0.5
26×26	0.038462	0.192308	0.384615
30×30	0.033333	0.166667	0.333333
40×40	0.025	0.125	0.25
50×50	0.02	0.1	0.2
60×60	0.016667	0.083333	0.166667

A partir do problema teste com $\tau = 1$, apresentam-se os valores ADO-Nodal para a densidade média de radiação até a malha 10×10 com diferentes ordens da quadratura LQ_N . Depois, apresentam-se os resultados ADO-Nodal para as malhas 25×25 e 26×26 e fazem-se comparações com a literatura.

Ainda, analisa-se o desempenho do método ADO-Nodal a partir de esquemas de quadratura alternativos que permitem um elevado número de direções discretas. Mais adiante, investiga-se o refinamento da malha juntamente com outras espessuras do domínio. Depois, graficamente apresentam-se resultados do fluxo de calor radiativo para diferentes albedos de espalhamento, comprimentos ópticos e reflectividades no contorno do domínio.

Por fim, investiga-se a solução ADO-Nodal a partir da intensidade média por seção do domínio ϕ_s fazendo uso de diferentes comprimentos ópticos, albedos de espalhamento e alternativos esquemas de quadraturas numéricas para malhas variadas.

5.1 Resultados ADO-Nodal para $\phi_{xr}(y)$ com Quadratura LQ_N

Considerando o problema teste para a espessura do domínio $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$, a partir da Equação 5.1 calcula-se a densidade média de radiação ao longo da direção y . Os resultados numéricos para essa grandeza foram gerados através da solução do sistema linear via subrotinas da LAPACK.

Nas Tabelas 5.3 à 5.7, listam-se os resultados numéricos para a densidade média de radiação ao longo da direção y , $\phi_{xr}(y)$, na linha central do domínio ($x = 0.5$) para diferentes ordens de expansão do espalhamento e várias ordens da quadratura LQ_N . Ainda, consideram-se três configurações de malha ($H \times K$), sendo o domínio dividido em 16 regiões (malha 4×4), 36 regiões (malha 6×6) e 100 regiões (malha 10×10). Na Tabela 5.3 apresentam-se os valores calculados da $\phi_{xr}(y)$ para o espalhamento isotrópico, e nas Tabelas 5.4, 5.5, 5.6 e 5.7 os valores da $\phi_{xr}(y)$ considerando o espalhamento anisotrópico usando a função de fase $B2$ ($L = 2$), $B1$ ($L = 5$), $F2$ ($L = 8$) e $F1$ ($L = 12$), respectivamente.

A análise dos dados das Tabelas 5.3 à 5.7 permite verificar que os valores gerados a partir da formulação ADO-Nodal, para a densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) na linha central do domínio, concordam em geral em dois dígitos significativos, para todas as configurações de malha. Observa-se essa concordância à medida que a ordem de quadratura LQ_N é aumentada para qualquer grau de anisotropia.

Tabela 5.3 – Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) na linha central ($x = 0.5$) para espalhamento isotrópico ($L = 0$) para diferentes ordens de quadratura LQ_N , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$.

y	N = 4			N = 8			N = 12			N = 16		
	4 × 4	6 × 6	10 × 10	4 × 4	6 × 6	10 × 10	4 × 4	6 × 6	10 × 10	4 × 4	6 × 6	10 × 10
0.00	0.627	0.630	0.630	0.628	0.630	0.630	0.627	0.630	0.630	0.627	0.629	0.630
0.02	0.610	0.613	0.616	0.606	0.609	0.611	0.604	0.606	0.609	0.603	0.605	0.607
0.06	0.578	0.581	0.589	0.567	0.569	0.577	0.562	0.563	0.570	0.559	0.560	0.567
0.10	0.548	0.550	0.562	0.531	0.532	0.544	0.524	0.524	0.536	0.521	0.521	0.531
0.14	0.519	0.521	0.528	0.498	0.498	0.499	0.491	0.490	0.489	0.487	0.486	0.486
0.18	0.492	0.489	0.495	0.468	0.463	0.458	0.461	0.456	0.449	0.458	0.453	0.447
0.22	0.466	0.450	0.453	0.440	0.425	0.418	0.434	0.420	0.413	0.431	0.418	0.414
0.26	0.436	0.414	0.403	0.411	0.390	0.379	0.406	0.387	0.382	0.404	0.388	0.385
0.30	0.392	0.380	0.357	0.373	0.358	0.344	0.370	0.359	0.353	0.369	0.360	0.357
0.34	0.351	0.348	0.322	0.337	0.331	0.333	0.336	0.333	0.337	0.336	0.335	0.336
0.38	0.313	0.314	0.291	0.304	0.307	0.321	0.304	0.310	0.320	0.305	0.312	0.316
0.42	0.278	0.283	0.272	0.274	0.284	0.302	0.275	0.287	0.297	0.276	0.288	0.292
0.46	0.245	0.253	0.264	0.245	0.262	0.276	0.248	0.264	0.269	0.249	0.264	0.266
0.50	0.215	0.227	0.256	0.220	0.241	0.251	0.223	0.243	0.243	0.225	0.242	0.242
0.54	0.202	0.220	0.238	0.210	0.228	0.223	0.213	0.227	0.227	0.214	0.226	0.230
0.58	0.190	0.213	0.221	0.200	0.214	0.197	0.201	0.211	0.212	0.202	0.210	0.217
0.62	0.179	0.207	0.204	0.189	0.201	0.182	0.189	0.196	0.198	0.189	0.196	0.202
0.66	0.167	0.199	0.186	0.178	0.187	0.176	0.177	0.182	0.185	0.176	0.181	0.186
0.70	0.156	0.183	0.169	0.167	0.172	0.170	0.165	0.168	0.172	0.164	0.168	0.170
0.74	0.145	0.165	0.169	0.156	0.157	0.157	0.153	0.156	0.156	0.151	0.156	0.157
0.78	0.134	0.147	0.168	0.144	0.143	0.145	0.141	0.144	0.141	0.140	0.144	0.145
0.82	0.124	0.131	0.156	0.131	0.130	0.134	0.130	0.132	0.130	0.129	0.133	0.134
0.86	0.113	0.117	0.136	0.120	0.121	0.124	0.118	0.122	0.122	0.118	0.123	0.124
0.90	0.103	0.105	0.117	0.108	0.114	0.115	0.107	0.113	0.113	0.107	0.112	0.113
0.94	0.093	0.093	0.105	0.097	0.105	0.107	0.097	0.102	0.101	0.097	0.101	0.101
0.98	0.083	0.082	0.093	0.086	0.096	0.099	0.086	0.092	0.089	0.087	0.089	0.088
1.00	0.078	0.076	0.087	0.080	0.092	0.095	0.081	0.086	0.083	0.081	0.083	0.081

Tabela 5.4 – Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) na linha central ($x = 0.5$) para espalhamento anisotrópico com função de fase $B2$, $L = 2$, para diferentes ordens de quadratura LQ_N , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$.

y	N = 4			N = 8			N = 12			N = 16		
	4 × 4	6 × 6	10 × 10	4 × 4	6 × 6	10 × 10	4 × 4	6 × 6	10 × 10	4 × 4	6 × 6	10 × 10
0.00	0.664	0.667	0.668	0.663	0.666	0.666	0.663	0.665	0.665	0.663	0.665	0.665
0.02	0.645	0.648	0.651	0.640	0.642	0.645	0.638	0.640	0.642	0.636	0.638	0.641
0.06	0.609	0.612	0.620	0.597	0.598	0.607	0.592	0.593	0.600	0.589	0.590	0.597
0.10	0.574	0.577	0.589	0.557	0.558	0.571	0.550	0.551	0.562	0.547	0.547	0.557
0.14	0.541	0.544	0.550	0.520	0.520	0.521	0.513	0.512	0.512	0.510	0.509	0.509
0.18	0.511	0.508	0.514	0.487	0.482	0.477	0.480	0.475	0.468	0.477	0.472	0.466
0.22	0.481	0.466	0.469	0.456	0.441	0.434	0.450	0.436	0.430	0.447	0.435	0.430
0.26	0.448	0.426	0.415	0.424	0.403	0.393	0.419	0.401	0.395	0.417	0.401	0.401
0.30	0.402	0.389	0.366	0.383	0.369	0.355	0.380	0.369	0.364	0.379	0.371	0.368
0.34	0.358	0.354	0.330	0.344	0.338	0.341	0.343	0.341	0.345	0.344	0.344	0.345
0.38	0.317	0.319	0.296	0.309	0.312	0.327	0.309	0.315	0.326	0.310	0.317	0.322
0.42	0.280	0.285	0.275	0.276	0.287	0.306	0.278	0.290	0.301	0.279	0.291	0.296
0.46	0.245	0.255	0.266	0.246	0.263	0.278	0.249	0.266	0.270	0.250	0.266	0.268
0.50	0.213	0.226	0.256	0.219	0.241	0.251	0.222	0.242	0.242	0.224	0.241	0.242
0.54	0.200	0.218	0.236	0.208	0.226	0.221	0.210	0.225	0.225	0.211	0.224	0.228
0.58	0.186	0.210	0.217	0.196	0.210	0.194	0.197	0.208	0.209	0.197	0.207	0.214
0.62	0.173	0.202	0.198	0.183	0.195	0.177	0.184	0.191	0.193	0.183	0.190	0.197
0.66	0.161	0.194	0.179	0.171	0.181	0.170	0.170	0.175	0.178	0.169	0.175	0.179
0.70	0.149	0.176	0.162	0.159	0.164	0.163	0.157	0.161	0.164	0.156	0.161	0.162
0.74	0.137	0.156	0.160	0.147	0.148	0.149	0.144	0.147	0.147	0.142	0.147	0.149
0.78	0.125	0.137	0.158	0.134	0.133	0.135	0.131	0.134	0.131	0.130	0.135	0.135
0.82	0.114	0.120	0.146	0.120	0.119	0.123	0.119	0.121	0.119	0.118	0.122	0.123
0.86	0.102	0.105	0.125	0.108	0.110	0.113	0.107	0.111	0.110	0.106	0.111	0.112
0.90	0.091	0.093	0.104	0.095	0.101	0.102	0.095	0.100	0.100	0.095	0.099	0.101
0.94	0.080	0.081	0.092	0.083	0.092	0.094	0.083	0.089	0.088	0.084	0.087	0.087
0.98	0.069	0.069	0.080	0.072	0.082	0.085	0.072	0.078	0.075	0.073	0.075	0.074
1.00	0.063	0.063	0.074	0.066	0.077	0.080	0.067	0.072	0.069	0.067	0.069	0.067

Tabela 5.5 – Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) na linha central ($x = 0.5$) para espalhamento anisotrópico com função de fase $B1$, $L = 5$, para diferentes ordens de quadratura LQ_N , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$.

y	N = 4			N = 8			N = 12			N = 16		
	4 × 4	6 × 6	10 × 10	4 × 4	6 × 6	10 × 10	4 × 4	6 × 6	10 × 10	4 × 4	6 × 6	10 × 10
0.00	0.645	0.648	0.649	0.645	0.648	0.648	0.645	0.647	0.647	0.645	0.647	0.647
0.02	0.628	0.631	0.634	0.623	0.625	0.628	0.621	0.623	0.626	0.620	0.622	0.624
0.06	0.594	0.597	0.604	0.582	0.584	0.592	0.577	0.578	0.585	0.574	0.575	0.582
0.10	0.561	0.564	0.576	0.544	0.545	0.558	0.538	0.538	0.549	0.534	0.534	0.544
0.14	0.530	0.533	0.539	0.509	0.509	0.510	0.502	0.501	0.501	0.499	0.497	0.497
0.18	0.501	0.499	0.505	0.477	0.473	0.467	0.470	0.465	0.459	0.467	0.462	0.457
0.22	0.474	0.458	0.461	0.448	0.433	0.426	0.442	0.428	0.422	0.439	0.427	0.422
0.26	0.442	0.420	0.409	0.418	0.396	0.386	0.413	0.394	0.389	0.411	0.394	0.391
0.30	0.397	0.385	0.361	0.378	0.364	0.350	0.375	0.364	0.358	0.375	0.366	0.363
0.34	0.355	0.351	0.326	0.341	0.335	0.337	0.340	0.337	0.341	0.340	0.340	0.341
0.38	0.315	0.316	0.293	0.307	0.310	0.324	0.307	0.313	0.323	0.308	0.314	0.319
0.42	0.279	0.284	0.273	0.275	0.286	0.304	0.277	0.289	0.299	0.278	0.289	0.294
0.46	0.245	0.254	0.265	0.246	0.263	0.277	0.248	0.265	0.270	0.250	0.265	0.267
0.50	0.214	0.226	0.256	0.219	0.241	0.251	0.223	0.243	0.243	0.224	0.242	0.242
0.54	0.201	0.219	0.237	0.209	0.227	0.222	0.211	0.226	0.226	0.212	0.225	0.229
0.58	0.188	0.212	0.219	0.198	0.212	0.195	0.199	0.209	0.210	0.199	0.208	0.215
0.62	0.176	0.204	0.201	0.186	0.198	0.180	0.187	0.194	0.195	0.186	0.193	0.200
0.66	0.164	0.197	0.182	0.174	0.184	0.173	0.174	0.178	0.181	0.173	0.178	0.182
0.70	0.152	0.179	0.165	0.163	0.168	0.166	0.161	0.164	0.168	0.159	0.165	0.166
0.74	0.140	0.160	0.164	0.151	0.153	0.153	0.148	0.151	0.151	0.147	0.152	0.153
0.78	0.129	0.142	0.163	0.138	0.138	0.140	0.136	0.139	0.136	0.135	0.139	0.140
0.82	0.118	0.125	0.151	0.126	0.125	0.129	0.124	0.127	0.124	0.123	0.127	0.128
0.86	0.107	0.111	0.130	0.113	0.115	0.118	0.112	0.116	0.116	0.112	0.116	0.118
0.90	0.097	0.099	0.110	0.101	0.107	0.108	0.101	0.106	0.107	0.101	0.105	0.107
0.94	0.086	0.087	0.098	0.090	0.098	0.100	0.090	0.095	0.094	0.090	0.094	0.094
0.98	0.075	0.075	0.086	0.078	0.089	0.092	0.079	0.084	0.082	0.079	0.082	0.081
1.00	0.070	0.069	0.080	0.073	0.084	0.088	0.074	0.079	0.075	0.074	0.076	0.074

Tabela 5.6 – Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) na linha central ($x = 0.5$) para espalhamento anisotrópico com função de fase $F2$, $L = 8$, para diferentes ordens de quadratura LQ_N , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$.

y	N = 4			N = 8			N = 12			N = 16		
	4 × 4	6 × 6	10 × 10	4 × 4	6 × 6	10 × 10	4 × 4	6 × 6	10 × 10	4 × 4	6 × 6	10 × 10
0.00	0.553	0.554	0.554	0.556	0.558	0.558	0.557	0.559	0.559	0.557	0.559	0.559
0.02	0.541	0.543	0.546	0.539	0.541	0.544	0.538	0.539	0.542	0.537	0.538	0.541
0.06	0.519	0.521	0.529	0.508	0.510	0.518	0.504	0.505	0.512	0.501	0.501	0.508
0.10	0.498	0.500	0.512	0.480	0.481	0.494	0.474	0.474	0.485	0.470	0.470	0.480
0.14	0.478	0.480	0.487	0.455	0.455	0.455	0.448	0.446	0.445	0.444	0.442	0.441
0.18	0.459	0.456	0.463	0.433	0.427	0.421	0.425	0.418	0.410	0.421	0.415	0.408
0.22	0.441	0.424	0.427	0.412	0.394	0.386	0.405	0.388	0.381	0.402	0.386	0.381
0.26	0.418	0.394	0.382	0.390	0.364	0.352	0.383	0.361	0.354	0.381	0.361	0.357
0.30	0.379	0.365	0.339	0.356	0.337	0.321	0.352	0.337	0.330	0.351	0.338	0.334
0.34	0.342	0.338	0.307	0.324	0.314	0.316	0.322	0.317	0.320	0.322	0.319	0.320
0.38	0.307	0.306	0.277	0.294	0.295	0.309	0.294	0.298	0.309	0.295	0.300	0.305
0.42	0.274	0.277	0.261	0.267	0.276	0.295	0.268	0.280	0.290	0.270	0.281	0.285
0.46	0.243	0.249	0.259	0.241	0.258	0.274	0.244	0.261	0.266	0.246	0.261	0.263
0.50	0.214	0.223	0.256	0.218	0.240	0.252	0.222	0.242	0.243	0.224	0.242	0.242
0.54	0.205	0.222	0.243	0.213	0.232	0.226	0.216	0.231	0.230	0.217	0.230	0.233
0.58	0.196	0.220	0.231	0.207	0.223	0.202	0.209	0.220	0.218	0.210	0.218	0.224
0.62	0.186	0.217	0.216	0.200	0.213	0.190	0.201	0.208	0.208	0.201	0.207	0.213
0.66	0.177	0.214	0.199	0.193	0.203	0.188	0.192	0.196	0.198	0.191	0.195	0.199
0.70	0.168	0.200	0.183	0.185	0.190	0.186	0.183	0.185	0.188	0.181	0.185	0.186
0.74	0.159	0.184	0.188	0.176	0.177	0.176	0.173	0.175	0.175	0.171	0.176	0.176
0.78	0.152	0.169	0.192	0.166	0.165	0.167	0.164	0.166	0.162	0.162	0.167	0.166
0.82	0.145	0.154	0.184	0.157	0.154	0.159	0.155	0.156	0.153	0.154	0.158	0.158
0.86	0.138	0.142	0.165	0.148	0.148	0.151	0.146	0.149	0.148	0.146	0.150	0.151
0.90	0.130	0.132	0.146	0.139	0.144	0.144	0.138	0.143	0.143	0.138	0.142	0.143
0.94	0.123	0.121	0.136	0.130	0.139	0.141	0.130	0.135	0.133	0.130	0.133	0.133
0.98	0.116	0.111	0.126	0.121	0.133	0.137	0.122	0.127	0.123	0.122	0.124	0.122
1.00	0.112	0.106	0.121	0.117	0.130	0.134	0.118	0.123	0.119	0.119	0.119	0.117

Tabela 5.7 – Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) na linha central ($x = 0.5$) para espalhamento anisotrópico com função de fase $F1$, $L = 12$, para diferentes ordens de quadratura LQ_N , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$.

y	N = 4			N = 8			N = 12			N = 16		
	4 × 4	6 × 6	10 × 10	4 × 4	6 × 6	10 × 10	4 × 4	6 × 6	10 × 10	4 × 4	6 × 6	10 × 10
0.00	0.529	0.530	0.530	0.531	0.533	0.533	0.533	0.536	0.535	0.534	0.536	0.536
0.02	0.527	0.529	0.532	0.518	0.520	0.523	0.518	0.520	0.522	0.517	0.519	0.521
0.06	0.524	0.527	0.537	0.494	0.495	0.505	0.489	0.490	0.498	0.487	0.487	0.494
0.10	0.520	0.525	0.541	0.472	0.472	0.487	0.464	0.463	0.476	0.460	0.459	0.470
0.14	0.517	0.523	0.532	0.451	0.450	0.451	0.441	0.439	0.437	0.436	0.434	0.432
0.18	0.514	0.514	0.522	0.431	0.425	0.417	0.420	0.414	0.403	0.416	0.409	0.400
0.22	0.510	0.490	0.496	0.413	0.392	0.382	0.402	0.383	0.374	0.398	0.381	0.374
0.26	0.498	0.467	0.452	0.392	0.362	0.346	0.382	0.356	0.348	0.379	0.355	0.351
0.30	0.461	0.443	0.407	0.358	0.333	0.313	0.351	0.331	0.323	0.350	0.332	0.329
0.34	0.424	0.417	0.376	0.326	0.308	0.312	0.322	0.310	0.317	0.321	0.313	0.317
0.38	0.386	0.383	0.345	0.295	0.291	0.310	0.293	0.294	0.309	0.294	0.297	0.304
0.42	0.348	0.348	0.330	0.265	0.273	0.298	0.266	0.278	0.292	0.267	0.279	0.285
0.46	0.309	0.313	0.331	0.237	0.256	0.277	0.240	0.260	0.266	0.242	0.261	0.262
0.50	0.270	0.278	0.333	0.210	0.238	0.255	0.215	0.242	0.242	0.218	0.241	0.241
0.54	0.259	0.278	0.307	0.208	0.232	0.225	0.213	0.232	0.229	0.214	0.231	0.233
0.58	0.248	0.278	0.280	0.205	0.226	0.195	0.208	0.222	0.218	0.209	0.220	0.226
0.62	0.236	0.278	0.257	0.201	0.219	0.183	0.203	0.212	0.208	0.203	0.210	0.216
0.66	0.225	0.278	0.236	0.196	0.212	0.186	0.197	0.202	0.201	0.196	0.200	0.203
0.70	0.213	0.262	0.215	0.191	0.197	0.188	0.190	0.190	0.193	0.188	0.190	0.190
0.74	0.201	0.242	0.239	0.185	0.183	0.180	0.182	0.180	0.178	0.179	0.180	0.180
0.78	0.194	0.221	0.264	0.176	0.169	0.171	0.173	0.169	0.164	0.170	0.171	0.170
0.82	0.188	0.201	0.262	0.166	0.155	0.164	0.163	0.160	0.156	0.162	0.162	0.163
0.86	0.182	0.186	0.234	0.156	0.151	0.157	0.154	0.155	0.154	0.154	0.155	0.157
0.90	0.177	0.174	0.206	0.147	0.151	0.151	0.146	0.151	0.151	0.146	0.150	0.151
0.94	0.170	0.163	0.196	0.138	0.150	0.152	0.139	0.146	0.142	0.139	0.143	0.141
0.98	0.164	0.151	0.185	0.130	0.149	0.153	0.131	0.141	0.133	0.132	0.136	0.131
1.00	0.161	0.145	0.180	0.126	0.148	0.153	0.128	0.138	0.129	0.129	0.133	0.126

5.2 Resultados ADO-Nodal: Comparando com a Literatura

Na literatura encontram-se resultados numéricos para a densidade média de radiação na linha central do domínio calculados em malhas 25×25 e 26×26 , para o problema teste com espessura do domínio $\tau = 1$. A partir do reordenamento do sistema linear ADO-Nodal obtém-se a sua solução para malhas mais refinadas através da biblioteca HSL.

Nas Tabelas 5.8 à 5.12, apresentam-se resultados ADO-Nodal para diferentes ordens de expansão do espalhamento e várias ordens da quadratura LQ_N para $\omega = 0.999$ e $\tau = 1$. Listam-se os resultados numéricos para a densidade média de radiação por região ϕ_r (regiões que incluem o ponto central $x = 0.5$) para a malha 25×25 , chamados aqui de ADO média, e os resultados numéricos para a densidade média de radiação ao longo da direção y , $\phi_{xr}(y)$, na linha central do domínio para a malha 26×26 , chamados aqui de ADO linha. Também são listados os resultados apresentados por Kim e Lee, 1988, usando malha 26×26 e a aproximação S_{14} . E os outros dois resultados encontrados na literatura para este caso teste, os trabalhos de Trivic et al., 2004 e Moghadam et al., 2016, em ambos os casos eles usaram uma configuração de malha espacial 25×25 em uma técnica de volumes finitos e a discretização angular da RTE também foi baseada em volumes de controle.

A análise dos dados das Tabelas 5.3 à 5.12 permite verificar que os valores gerados pela formulação aqui proposta e os dados disponíveis em [Kim e Lee, 1988] apresentam comportamento semelhante, embora, como mencionado anteriormente, o esquema de quadratura usado em cada metodologia não é garantido ser o mesmo o que já pode trazer alguma diferença. Notam-se que os resultados concordam, em geral, de um a dois dígitos significativos. Uma melhor concordância é encontrada à medida que se é aumentada a ordem de quadratura até $N = 16$ (o caso limite usual para o esquema LQ_N). Vale destacar que os resultados fornecidos nas outras duas referências [Trivic et al., 2004; Moghadam et al., 2016] também concordam, em geral, até dois dígitos significativos com os resultados fornecidos em [Kim e Lee, 1988]. Embora as três referências listem resultados com vários dígitos, não está claro que todos eles possam ser considerados corretos.

Tabela 5.8 – Densidade média de radiação em $x = 0.5$, $L = 0$ e $\tau = 1$.

y	ADO média ϕ_r 25 × 25				ADO linha $\phi_{xr}(y)$ 26 × 26				Kim e Lee 26 × 26	Trivic et al. 25 × 25	Moghadam et al. 25 × 25
	N = 4	N = 8	N = 12	N = 16	N = 4	N = 8	N = 12	N = 16	S_{14}		
0.00					0.630	0.630	0.630	0.630	0.626625		
0.02	0.617	0.615	0.613	0.612	0.617	0.615	0.613	0.612	0.600355	0.590398	0.599530
0.06	0.592	0.584	0.578	0.573	0.592	0.584	0.578	0.573	0.556250	0.546130	0.559019
0.10	0.566	0.546	0.532	0.523	0.566	0.547	0.532	0.523	0.512708	0.505758	0.515640
0.14	0.538	0.498	0.479	0.475	0.538	0.496	0.477	0.474	0.474531	0.470171	0.473927
0.18	0.496	0.440	0.438	0.445	0.498	0.437	0.437	0.446	0.441868	0.438055	0.436937
0.22	0.443	0.397	0.418	0.426	0.440	0.399	0.420	0.426	0.412683	0.408335	0.405248
0.26	0.375	0.384	0.394	0.390	0.371	0.386	0.395	0.388	0.385379	0.380588	0.377859
0.30	0.323	0.371	0.362	0.355	0.326	0.369	0.360	0.355	0.359364	0.354705	0.353372
0.34	0.333	0.345	0.334	0.333	0.335	0.343	0.335	0.334	0.334617	0.330623	0.330672
0.38	0.344	0.324	0.311	0.313	0.342	0.326	0.310	0.311	0.311256	0.308242	0.309122
0.42	0.304	0.295	0.290	0.291	0.299	0.295	0.288	0.292	0.289369	0.287434	0.288479
0.46	0.272	0.265	0.277	0.273	0.276	0.264	0.279	0.272	0.268964	0.268062	0.268740
0.50	0.250	0.250	0.250	0.250	0.257	0.252	0.248	0.248	0.249999	0.250000	0.250000
0.54	0.218	0.234	0.223	0.230	0.210	0.231	0.224	0.230	0.232387	0.233130	0.232367
0.58	0.206	0.213	0.213	0.214	0.201	0.210	0.215	0.212	0.216013	0.217343	0.215911
0.62	0.205	0.199	0.199	0.199	0.207	0.201	0.197	0.200	0.200763	0.202538	0.200647
0.66	0.185	0.176	0.181	0.186	0.178	0.178	0.187	0.186	0.186516	0.188617	0.186538
0.70	0.159	0.160	0.178	0.170	0.165	0.162	0.177	0.170	0.173155	0.175489	0.173501
0.74	0.155	0.150	0.163	0.160	0.158	0.151	0.161	0.161	0.160570	0.163064	0.161418
0.78	0.142	0.137	0.150	0.149	0.141	0.138	0.150	0.148	0.148657	0.151253	0.150144
0.82	0.144	0.131	0.136	0.139	0.145	0.132	0.135	0.138	0.137300	0.139965	0.139512
0.86	0.143	0.123	0.122	0.129	0.138	0.122	0.123	0.128	0.126371	0.129099	0.129330
0.90	0.135	0.115	0.111	0.117	0.135	0.115	0.111	0.117	0.115699	0.118525	0.119384
0.94	0.133	0.107	0.098	0.106	0.128	0.106	0.099	0.105	0.105067	0.108045	0.109454
0.98	0.115	0.096	0.088	0.093	0.115	0.096	0.088	0.093	0.094238	0.097355	0.099330
1.00					0.113	0.093	0.082	0.087	0.088360		

Tabela 5.9 – Densidade média de radiação em $x = 0.5$, $L = 2$ e $\tau = 1$.

y	ADO média ϕ_r 25 × 25				ADO linha $\phi_{xr}(y)$ 26 × 26				Kim e Lee 26 × 26	Trivic et al. 25 × 25	Moghadam et al. 25 × 25
	N = 4	N = 8	N = 12	N = 16	N = 4	N = 8	N = 12	N = 16	S_{14}		
0.00					0.668	0.666	0.665	0.665	0.660444		
0.02	0.652	0.649	0.647	0.645	0.652	0.648	0.647	0.645	0.632666	0.621197	0.630658
0.06	0.623	0.614	0.608	0.603	0.622	0.614	0.608	0.603	0.585263	0.573665	0.586791
0.10	0.592	0.572	0.558	0.550	0.593	0.573	0.558	0.549	0.538400	0.529995	0.540154
0.14	0.561	0.520	0.502	0.498	0.560	0.518	0.500	0.497	0.496928	0.491188	0.495285
0.18	0.515	0.459	0.458	0.465	0.516	0.457	0.457	0.466	0.461070	0.456008	0.455250
0.22	0.459	0.414	0.435	0.442	0.455	0.415	0.437	0.442	0.428843	0.423408	0.420652
0.26	0.387	0.398	0.408	0.403	0.383	0.400	0.409	0.402	0.398681	0.392974	0.390520
0.30	0.333	0.382	0.373	0.366	0.336	0.380	0.371	0.366	0.369998	0.364593	0.363474
0.34	0.341	0.353	0.343	0.342	0.344	0.351	0.343	0.343	0.342773	0.338196	0.338408
0.38	0.350	0.330	0.317	0.319	0.349	0.332	0.316	0.317	0.317122	0.313675	0.314682
0.42	0.308	0.299	0.294	0.295	0.303	0.299	0.292	0.295	0.293117	0.290889	0.292042
0.46	0.274	0.267	0.279	0.275	0.278	0.266	0.281	0.274	0.270764	0.269693	0.270468
0.50	0.250	0.250	0.250	0.250	0.258	0.252	0.248	0.248	0.249999	0.249945	0.250039
0.54	0.216	0.232	0.222	0.228	0.207	0.229	0.223	0.229	0.230725	0.231515	0.230846
0.58	0.202	0.210	0.210	0.210	0.198	0.207	0.212	0.209	0.212815	0.214282	0.212941
0.62	0.200	0.194	0.194	0.194	0.202	0.196	0.192	0.195	0.196136	0.198132	0.196327
0.66	0.175	0.173	0.181	0.179	0.172	0.172	0.181	0.180	0.180560	0.182956	0.180954
0.70	0.151	0.152	0.171	0.163	0.158	0.155	0.169	0.163	0.165955	0.168650	0.166726
0.74	0.147	0.142	0.154	0.152	0.150	0.142	0.153	0.152	0.152204	0.155115	0.153516
0.78	0.132	0.127	0.140	0.140	0.132	0.128	0.141	0.139	0.139191	0.142253	0.141172
0.82	0.133	0.120	0.125	0.128	0.134	0.121	0.125	0.128	0.126801	0.129968	0.129517
0.86	0.131	0.112	0.110	0.117	0.126	0.110	0.112	0.116	0.114907	0.118156	0.118357
0.90	0.122	0.102	0.098	0.104	0.122	0.102	0.098	0.104	0.103343	0.106692	0.107482
0.94	0.118	0.094	0.085	0.092	0.114	0.092	0.086	0.092	0.091917	0.095394	0.096693
0.98	0.100	0.082	0.074	0.079	0.100	0.082	0.074	0.079	0.080447	0.084011	0.085831
1.00					0.098	0.078	0.068	0.073	0.074333		

Tabela 5.10 – Densidade média de radiação em $x = 0.5$, $L = 5$ e $\tau = 1$.

y	ADO média ϕ_r 25 × 25				ADO linha $\phi_{xr}(y)$ 26 × 26				Kim e Lee 26 × 26	Trivic et al. 25 × 25	Moghadam et al. 25 × 25
	N = 4	N = 8	N = 12	N = 16	N = 4	N = 8	N = 12	N = 16	S_{14}		
0.00					0.649	0.648	0.647	0.647	0.643562		
0.02	0.635	0.632	0.630	0.629	0.635	0.632	0.630	0.629	0.616569	0.605738	0.614522
0.06	0.607	0.599	0.593	0.588	0.607	0.599	0.593	0.588	0.570840	0.559842	0.572443
0.10	0.579	0.559	0.545	0.537	0.579	0.560	0.545	0.536	0.525645	0.517819	0.527509
0.14	0.550	0.509	0.490	0.487	0.549	0.507	0.489	0.485	0.485822	0.480619	0.484273
0.18	0.505	0.450	0.448	0.455	0.507	0.447	0.447	0.456	0.451563	0.446966	0.445811
0.22	0.451	0.406	0.427	0.434	0.448	0.407	0.428	0.434	0.420857	0.415800	0.412717
0.26	0.381	0.391	0.401	0.396	0.378	0.393	0.402	0.395	0.392118	0.386699	0.384006
0.30	0.328	0.376	0.368	0.360	0.331	0.375	0.366	0.361	0.364761	0.359557	0.358285
0.34	0.337	0.349	0.339	0.338	0.339	0.347	0.339	0.338	0.338761	0.334306	0.334444
0.38	0.347	0.327	0.314	0.316	0.346	0.329	0.313	0.314	0.314241	0.310843	0.311840
0.42	0.306	0.297	0.292	0.293	0.301	0.297	0.290	0.294	0.291279	0.289034	0.290226
0.46	0.273	0.266	0.278	0.274	0.277	0.265	0.280	0.273	0.269885	0.268737	0.269591
0.50	0.250	0.250	0.250	0.250	0.258	0.252	0.248	0.248	0.250002	0.249819	0.250024
0.54	0.217	0.233	0.222	0.229	0.208	0.230	0.224	0.230	0.231539	0.232156	0.231623
0.58	0.204	0.212	0.211	0.212	0.199	0.209	0.214	0.210	0.214376	0.215634	0.214453
0.62	0.202	0.197	0.197	0.196	0.205	0.199	0.194	0.198	0.198395	0.200143	0.198524
0.66	0.178	0.176	0.184	0.182	0.175	0.175	0.184	0.183	0.183463	0.185583	0.183790
0.70	0.155	0.156	0.175	0.167	0.161	0.159	0.173	0.167	0.169461	0.171854	0.170165
0.74	0.151	0.146	0.158	0.156	0.153	0.147	0.157	0.156	0.156275	0.158861	0.157526
0.78	0.137	0.132	0.145	0.144	0.137	0.133	0.145	0.143	0.143791	0.146513	0.145724
0.82	0.138	0.125	0.130	0.133	0.139	0.126	0.130	0.133	0.131900	0.134714	0.134587
0.86	0.137	0.117	0.116	0.123	0.132	0.116	0.117	0.122	0.120471	0.123365	0.123922
0.90	0.129	0.108	0.104	0.111	0.128	0.108	0.105	0.110	0.109337	0.112336	0.113519
0.94	0.126	0.100	0.091	0.099	0.121	0.099	0.092	0.099	0.098291	0.101439	0.103167
0.98	0.108	0.089	0.081	0.086	0.107	0.089	0.081	0.085	0.087135	0.090400	0.092687
1.00					0.106	0.085	0.075	0.079	0.081141		

Tabela 5.11 – Densidade média de radiação em $x = 0.5$, $L = 8$ e $\tau = 1$.

y	ADO média ϕ_r 25 × 25				ADO linha $\phi_{xr}(y)$ 26 × 26				Kim e Lee 26 × 26	Trivic et al. 25 × 25	Moghadam et al. 25 × 25
	N = 4	N = 8	N = 12	N = 16	N = 4	N = 8	N = 12	N = 16	S_{14}		
0.00					0.554	0.558	0.559	0.559	0.557988		
0.02	0.547	0.547	0.546	0.545	0.547	0.547	0.546	0.545	0.535868	0.527234	0.536840
0.06	0.532	0.526	0.520	0.515	0.532	0.526	0.519	0.514	0.498624	0.489494	0.503624
0.10	0.516	0.496	0.480	0.472	0.517	0.497	0.481	0.471	0.461528	0.455536	0.466700
0.14	0.499	0.454	0.434	0.429	0.499	0.452	0.432	0.428	0.429650	0.426196	0.430908
0.18	0.464	0.401	0.399	0.406	0.467	0.398	0.397	0.406	0.403170	0.400071	0.399591
0.22	0.417	0.362	0.385	0.393	0.414	0.364	0.387	0.393	0.379963	0.376030	0.373455
0.26	0.350	0.357	0.367	0.362	0.346	0.358	0.368	0.361	0.358333	0.353633	0.351482
0.30	0.298	0.350	0.340	0.332	0.302	0.348	0.338	0.333	0.337640	0.332782	0.332195
0.34	0.317	0.328	0.318	0.316	0.319	0.326	0.318	0.317	0.317857	0.313427	0.311405
0.38	0.338	0.313	0.299	0.300	0.336	0.315	0.298	0.299	0.299127	0.295486	0.297435
0.42	0.300	0.288	0.283	0.284	0.295	0.289	0.280	0.284	0.281556	0.278847	0.281038
0.46	0.269	0.262	0.273	0.270	0.273	0.260	0.276	0.269	0.265191	0.263393	0.265231
0.50	0.250	0.250	0.250	0.250	0.259	0.253	0.248	0.248	0.250021	0.249016	0.250147
0.54	0.219	0.238	0.226	0.233	0.209	0.234	0.227	0.234	0.235981	0.235615	0.235934
0.58	0.210	0.220	0.220	0.221	0.204	0.216	0.222	0.219	0.222990	0.223104	0.222704
0.62	0.215	0.208	0.209	0.209	0.218	0.211	0.207	0.210	0.210952	0.211400	0.210506
0.66	0.192	0.192	0.201	0.198	0.189	0.190	0.200	0.199	0.199764	0.200425	0.199332
0.70	0.169	0.174	0.195	0.186	0.177	0.177	0.193	0.186	0.189331	0.190109	0.189123
0.74	0.171	0.168	0.182	0.179	0.174	0.169	0.180	0.180	0.179558	0.180382	0.179782
0.78	0.159	0.157	0.172	0.171	0.159	0.158	0.172	0.170	0.170359	0.171175	0.171188
0.82	0.168	0.155	0.160	0.163	0.169	0.155	0.159	0.163	0.161635	0.162420	0.163200
0.86	0.174	0.150	0.148	0.156	0.167	0.148	0.150	0.155	0.153281	0.154042	0.155661
0.90	0.169	0.145	0.140	0.147	0.169	0.144	0.140	0.146	0.145179	0.145943	0.148394
0.94	0.173	0.141	0.130	0.138	0.166	0.139	0.131	0.138	0.137162	0.137972	0.141198
0.98	0.156	0.132	0.122	0.128	0.156	0.132	0.123	0.127	0.129025	0.129869	0.133846
1.00					0.157	0.131	0.117	0.123	0.125029		

Tabela 5.12 – Densidade média de radiação em $x = 0.5$, $L = 12$ e $\tau = 1$.

y	ADO média ϕ_r 25 × 25				ADO linha $\phi_{xr}(y)$ 26 × 26				Kim e Lee 26 × 26 S_{14}	Trivic et al. 25 × 25	Moghadam et al. 25 × 25
	N = 4	N = 8	N = 12	N = 16	N = 4	N = 8	N = 12	N = 16			
0.00					0.530	0.533	0.535	0.536	0.537238		
0.02	0.533	0.527	0.527	0.526	0.533	0.527	0.527	0.526	0.518740	0.507442	0.519407
0.06	0.540	0.513	0.507	0.501	0.540	0.513	0.507	0.501	0.484921	0.472158	0.490733
0.10	0.546	0.489	0.471	0.461	0.547	0.490	0.471	0.460	0.449798	0.440141	0.456089
0.14	0.549	0.450	0.424	0.418	0.548	0.447	0.422	0.417	0.419550	0.412549	0.421347
0.18	0.525	0.392	0.389	0.397	0.529	0.390	0.387	0.397	0.394810	0.388023	0.390839
0.22	0.480	0.351	0.378	0.388	0.475	0.353	0.381	0.388	0.373385	0.365416	0.365777
0.26	0.399	0.351	0.363	0.357	0.393	0.353	0.365	0.356	0.353413	0.344299	0.345202
0.30	0.339	0.350	0.336	0.327	0.345	0.347	0.334	0.328	0.334146	0.324600	0.327464
0.34	0.394	0.329	0.315	0.313	0.397	0.326	0.316	0.314	0.315545	0.306302	0.311171
0.38	0.453	0.316	0.297	0.298	0.450	0.318	0.296	0.296	0.297782	0.289344	0.295505
0.42	0.410	0.291	0.282	0.283	0.402	0.292	0.278	0.283	0.281022	0.273632	0.280168
0.46	0.371	0.263	0.275	0.270	0.379	0.261	0.278	0.270	0.265367	0.259059	0.265196
0.50	0.318	0.250	0.250	0.250	0.337	0.254	0.248	0.247	0.250859	0.245526	0.250780
0.54	0.237	0.236	0.224	0.233	0.218	0.232	0.225	0.235	0.237473	0.232940	0.237142
0.58	0.228	0.218	0.220	0.221	0.216	0.213	0.224	0.220	0.225155	0.221221	0.224465
0.62	0.251	0.208	0.211	0.210	0.258	0.212	0.207	0.212	0.213820	0.210291	0.212856
0.66	0.219	0.190	0.204	0.201	0.213	0.188	0.203	0.202	0.203371	0.200080	0.202348
0.70	0.186	0.172	0.200	0.190	0.203	0.176	0.198	0.190	0.193714	0.190521	0.192906
0.74	0.200	0.167	0.186	0.184	0.209	0.169	0.185	0.185	0.184751	0.181552	0.184443
0.78	0.189	0.157	0.177	0.177	0.188	0.157	0.178	0.175	0.176397	0.173112	0.176839
0.82	0.220	0.157	0.165	0.170	0.224	0.158	0.164	0.169	0.168568	0.165143	0.169950
0.86	0.249	0.155	0.153	0.164	0.233	0.152	0.155	0.163	0.161186	0.157587	0.163622
0.90	0.255	0.152	0.146	0.155	0.253	0.152	0.146	0.154	0.154161	0.150377	0.157694
0.94	0.279	0.152	0.136	0.147	0.263	0.149	0.138	0.147	0.147404	0.143422	0.152000
0.98	0.255	0.145	0.131	0.138	0.255	0.145	0.131	0.138	0.140816	0.136584	0.146370
1.00					0.266	0.146	0.126	0.134	0.138057		

Comparando os resultados ADO por média ϕ_r , malha 25×25 , e ADO por linha $\phi_{xr}(y)$, malha 26×26 , presentes nas Tabelas 5.8 à 5.12, obtêm-se em média dois dígitos em concordância para LQ_{16} e um erro relativo percentual médio de 0.3% para todos os casos de anisotropia. E comparando resultados ADO com $N = 12$ e $N = 16$ em geral concordam em até dois dígitos significativos, com erro relativo percentual médio de 2% para ambas análises ADO por média e ADO por linha. Observa-se que com a formulação ADO é possível utilizar duas formulações para o cálculo do perfil em $x = 0.5$, a formulação de linha $\phi_{xr}(y)$ ou a formulação média ϕ_r e não notou-se uma diferença significativa entre essas abordagens.

Na Tabela 5.13 apresenta-se a média do erro relativo percentual entre a densidade média de radiação por região ϕ_r , obtida neste trabalho pela formulação ADO por média com a malha 25×25 e LQ_{16} , com os resultados encontrados na literatura por [Kim e Lee, 1988; Trivic et al., 2004; Moghadam et al., 2016]. Também apresenta-se a média do erro relativo percentual entre a densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$), obtida neste trabalho pela formulação ADO por linha com a malha 26×26 e LQ_{16} , com os

resultados encontrados na literatura por [Kim e Lee, 1988; Trivic et al., 2004; Moghadam et al., 2016]. Ainda, calcula-se a média do erro relativo percentual entre os resultados apresentados pelas referências. Todos os valores usados para o cálculo do erro relativo estão presentes nas Tabelas 5.8 à 5.12.

Em geral os erros relativos entre ambas formulações ADO média e por linha com os resultados da literatura fica em torno de 1% a 2%. Comparando os erros relativos do ADO média, ADO linha, [Trivic et al., 2004] e [Moghadam et al., 2016] com [Kim e Lee, 1988] observa-se que o erro relativo obtido com ADO média e ADO linha é próximo do encontrado com as outras referências ou um pouco melhor, exceto para $L = 8$. Vale ressaltar que o erro relativo obtido entre [Trivic et al., 2004] e [Moghadam et al., 2016] é relativamente abaixo de 1%, exceto para $L = 12$, uma vez que as duas referências usam a mesma abordagem de volumes finitos e a mesma discretização angular para a solução da RTE.

Tabela 5.13 – Erro relativo percentual médio [%].

y	ADO média $LQ_{16}, 25 \times 25$			ADO linha $LQ_{16}, 26 \times 26$			Kim ¹		Trivic ²
	Kim ¹	Trivic ²	Moghadam ³	Kim ¹	Trivic ²	Moghadam ³	Trivic ²	Moghadam ³	Moghadam ³
$L = 0$	1.174	1.954	1.643	1.056	2.003	1.700	1.346	1.148	0.806
$L = 2$	1.207	2.326	2.011	1.103	2.386	2.071	1.650	1.399	0.802
$L = 5$	1.192	2.120	1.925	1.080	2.177	1.981	1.481	1.352	0.812
$L = 8$	1.186	1.595	1.343	1.051	1.486	1.358	0.784	0.933	0.941
$L = 12$	1.341	2.476	1.578	1.259	2.396	1.608	2.216	1.080	2.400

¹ Kim e Lee, 1988 ² Trivic et al., 2004 ³ Moghadam et al., 2016

Na Figura 5.2 mostra-se uma comparação entre os resultados gerados com a formulação ADO por média aqui apresentada (obtidos com LQ_{16} e malha 25×25 , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$) e os que foram encontrados listados nas referências [Kim e Lee, 1988], [Trivic et al., 2004] e [Moghadam et al., 2016].

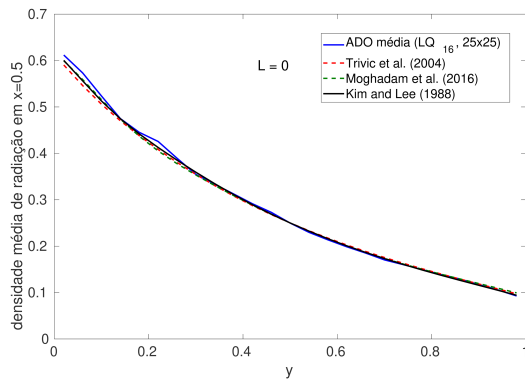
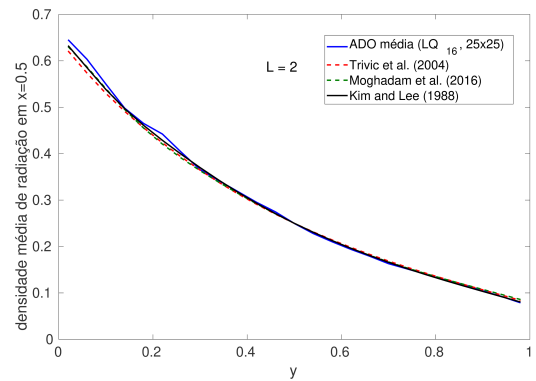
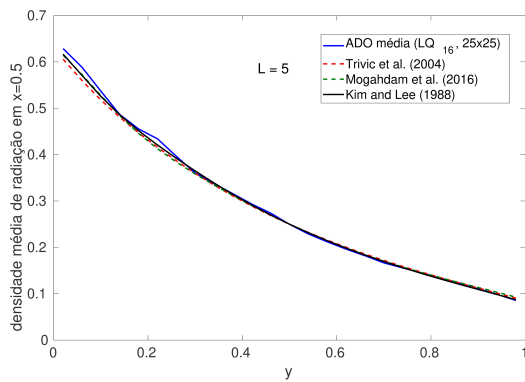
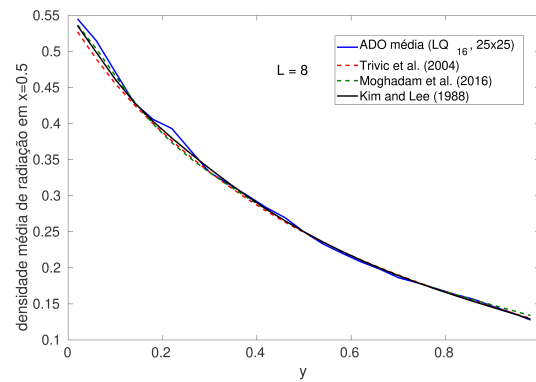
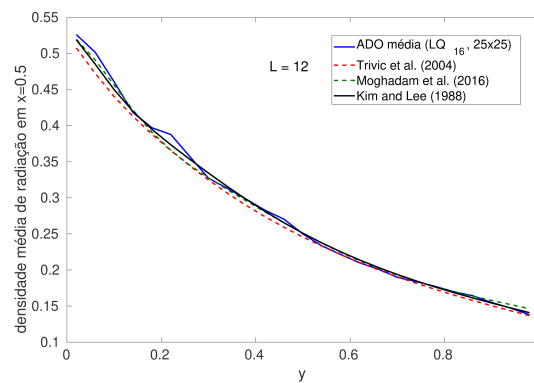
(a) $L = 0$ (b) $L = 2$ (c) $L = 5$ (d) $L = 8$ (e) $L = 12$

Figura 5.2 – Densidade média de radiação ao longo da linha central do domínio para ADO média, [Kim e Lee, 1988], [Trivic et al., 2004] e [Moghadam et al., 2016].

A partir dos dados apresentados nas Tabelas 5.3 à 5.12, para a densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) na linha central do domínio, verifica-se que se a ordem de quadratura LQ_N é aumentada, para qualquer grau de anisotropia, os valores gerados a partir da formulação ADO-Nodal concordam em dois dígitos significativos, em geral, para todas as configurações de malha. Pode-se ver na Figura 5.3, para dois valores diferentes do coeficiente de espalhamento, $\omega = 0.999$ e $\omega = 0.5$, com $\tau = 1$, o erro relativo entre os resultados ADO gerados a partir de duas aproximações de ordem de quadratura subsequentes LQ_N diminui para valores menores que 2%.

A normalização da função de fase também é verificada, seguindo os resultados fornecidos em [Kim e Lee, 1988]. O erro de normalização médio é menor que 0.1% para todas as funções de fase consideradas, quando a ordem de quadratura LQ_N é maior ou igual a $N = 8$. Em [Kim e Lee, 1988], os autores observaram que a aproximação S_{14} , para a função de fase $F1$, indicou um erro de normalização médio de 1.76454%.

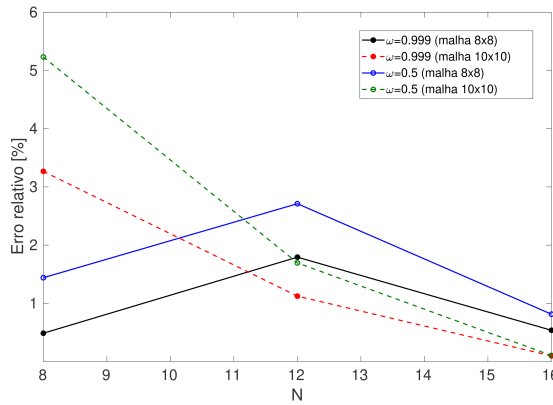
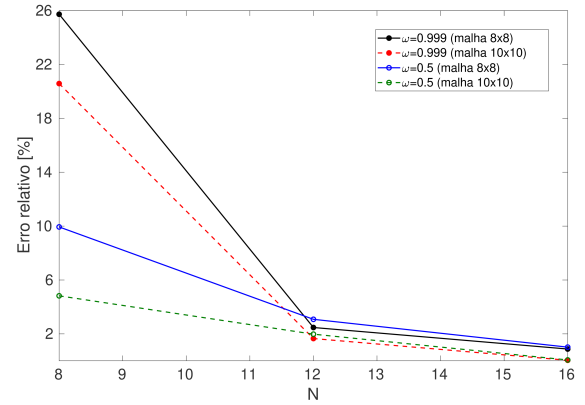
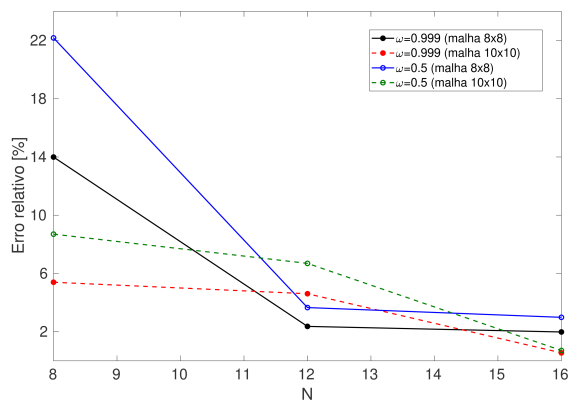
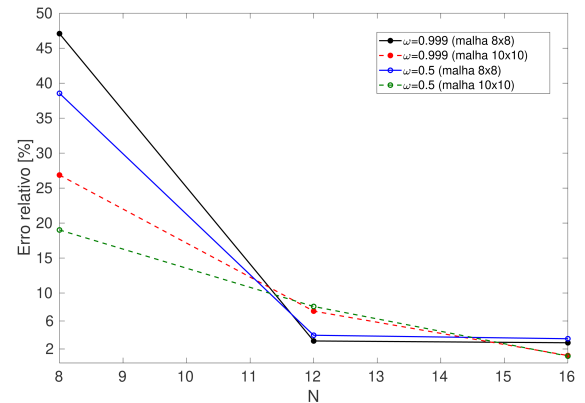
(a) $L = 5$ e $y = 0.34$ (b) $L = 12$ e $y = 0.34$ (c) $L = 5$ e $y = 0.66$ (d) $L = 12$ e $y = 0.66$

Figura 5.3 – Erro relativo entre a densidade média de radiação $\phi_{xr}(y)$ para duas aproximações de ordem de quadratura LQ_N com $\tau = 1$.

Apresentam-se na Figura 5.4 os resultados obtidos pelo método ADO por linha, para analisar o efeito da anisotropia na densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$), na linha central do domínio. Os resultados estão presentes nas Tabelas 5.8 à 5.12 e foram gerados com a quadratura LQ_{16} para a malha 26×26 , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$. Observa-se que a densidade média de radiação para função de fase de espalhamento com menor grau de anisotropia varia mais significativamente. Pode ser visto na Figura 5.4 que até certo valor do eixo y (aproximadamente até $y = 0.5$), quanto menor o grau de anisotropia, maior a densidade média de radiação ao longo da direção y , $\phi_{xr}(y)$, na linha central. A partir desse valor do eixo y , a situação se inverte, isto é, quanto maior o grau de anisotropia, maior é a densidade média de radiação $\phi_{xr}(y)$: observa-se que é o mesmo comportamento relatado por [Kim e Lee, 1988].

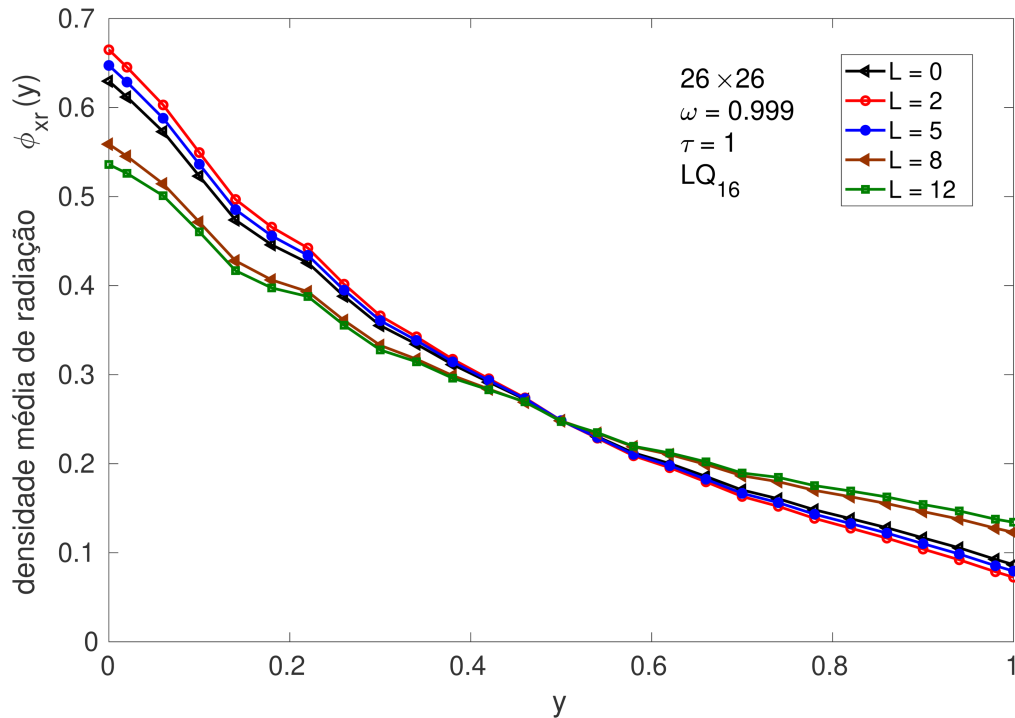


Figura 5.4 – Influência da anisotropia na densidade média de radiação ao longo da direção y na linha central do domínio, malha 26×26 , LQ_{16} , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$.

Apresentam-se na Figura 5.5 os resultados do fluxo líquido de calor radiativo na direção y , $q(y)$, sobre o plano vertical ao longo da linha central ($x = 0.5$), para a ordem de quadratura LQ_{16} com malha 26×26 , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$, e os diferentes graus de anisotropia. Analisando a Figura 5.5 observa-se um comportamento semelhante ao mostrado em [Kim e Lee, 1988], no qual, em relação ao meio de espalhamento isotrópico,

o meio de espalhamento para frente ($L = 8$ e $L = 12$) transfere (transporta) mais calor radiativo através do meio, enquanto um meio de espalhamento para trás ($L = 2$ e $L = 5$) transporta menos calor radiativo (irradiante).

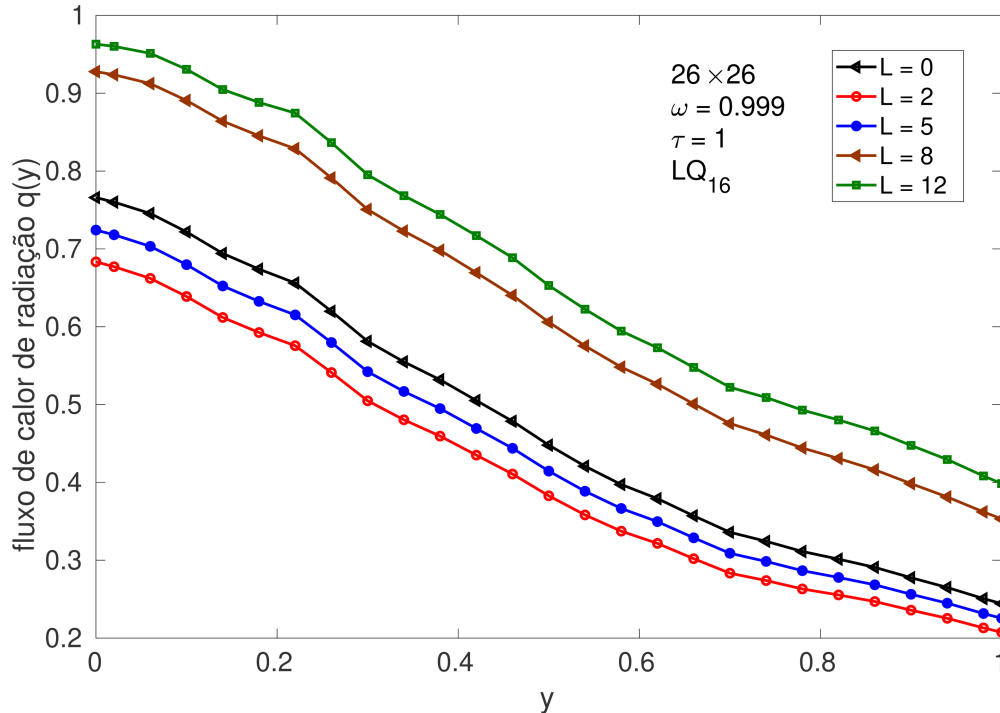


Figura 5.5 – Influência da anisotropia no fluxo de calor radiativo na linha central do domínio, malha 26×26 , LQ_{16} , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$.

5.3 Desempenho ADO-Nodal: Quadraturas Alternativas com Maior Número de Direções Discretas

Para investigar o desempenho do método ADO-Nodal na solução de problemas em meio de espalhamento anisotrópico com número maior de direções angulares por octante, utilizam-se diferentes esquemas de quadratura. Uma vez que com a quadratura LQ_N [Lewis e Miller, 1984] somente é possível utilizar até $N_d = 36$ direções, usa-se o esquema de quadratura Quadruple Range (QR) [Abu-Shumays, 1977, 2001; Spence, 2015] com acoplamentos compatível QR_C e triangular QR_T . Estes esquemas permitem um elevado número de direções discretas. Enfatiza-se que o uso de aproximações de ordenadas discretas de ordem superior são mais apropriadas para descrever modelos com anisotropia. Notam-se que as referências [Kim e Lee, 1988; Trivic et al., 2004; Moghadam et al., 2016] que tratam do espalhamento anisotrópico não utilizaram as quadraturas aqui analisadas.

Na Figura 5.6 apresenta-se uma comparação de diferentes ordens das quadraturas LQ_N , QR_C e QR_T no cálculo da densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) na linha central ($x = 0.5$) do domínio, para a anisotropia $L = 8$, $\omega = 0.999$ e $\tau = 1$. Considera-se uma configuração de malha grossa 6×6 (espaçamento $\approx 10^{-1}$) e uma malha mais refinada 26×26 (espaçamento $\approx 10^{-2}$).

Nas Figuras 5.6a e 5.6b apresenta-se a comparação de diferentes ordens da quadratura LQ_N para a malha 6×6 e 26×26 respectivamente. Observa-se que com a malha mais refinada os valores para $N = 12$ ($N_d = 21$) e $N = 16$ ($N_d = 36$) não são tão próximos como para a malha mais grossa. E a curva de resultados apresenta alguns picos, não sendo tão suave quanto a curva da densidade com malha mais grossa.

Nas Figuras 5.6c e 5.6d apresenta-se a comparação de diferentes ordens da quadratura QR_C para a malha 6×6 e 26×26 respectivamente. Observa-se que com a quadratura QR_C e malha mais refinada alguns pontos da curva de densidade média para $N_\theta = 4$ ($N_d = 32$) e $N_\theta = 5$ ($N_d = 50$) estão mais afastados do que os observados com a quadratura LQ_N para malha 26×26 .

Nas Figuras 5.6e e 5.6f apresenta-se a comparação de diferentes ordens da quadratura QR_T para a malha 6×6 e 26×26 respectivamente. Aqui já observa-se que a curva de valores com malha 26×26 para $N_\theta = 8$ ($N_d = 36$) e $N_\theta = 10$ ($N_d = 55$) está bem próxima uma da outra.

A partir da análise da Figura 5.6 pode-se afirmar que na comparação de diferentes ordens das quadraturas LQ_N , QR_C e QR_T para uma malha grossa 6×6 obtém-se uma convergência da curva da densidade de radiação calculada com valores iguais ou inferiores a $N_d = 36$ direções por octante. Já para malhas mais refinadas, como a malha 26×26 , maiores ordens de quadratura são necessárias para observar a concordância. Na quadratura LQ_N existe a limitação de ordem $N = 16$ ($N_d = 36$) e para este caso teste com a quadratura QR_C não foi possível computacionalmente obter resultados para ordens maiores que $N_\theta = 5$ ($N_d = 50$) com a malha 26×26 , e para a quadratura QR_T foi possível obter resultados apenas para ordens menores ou iguais a $N_\theta = 10$ ($N_d = 55$) para a mesma malha. Através da análise da Figura 5.6 observa-se a importância de poder trabalhar com esquemas de quadraturas que permitem ordens superiores da quadratura e conseqüentemente um maior número de direções por octante.

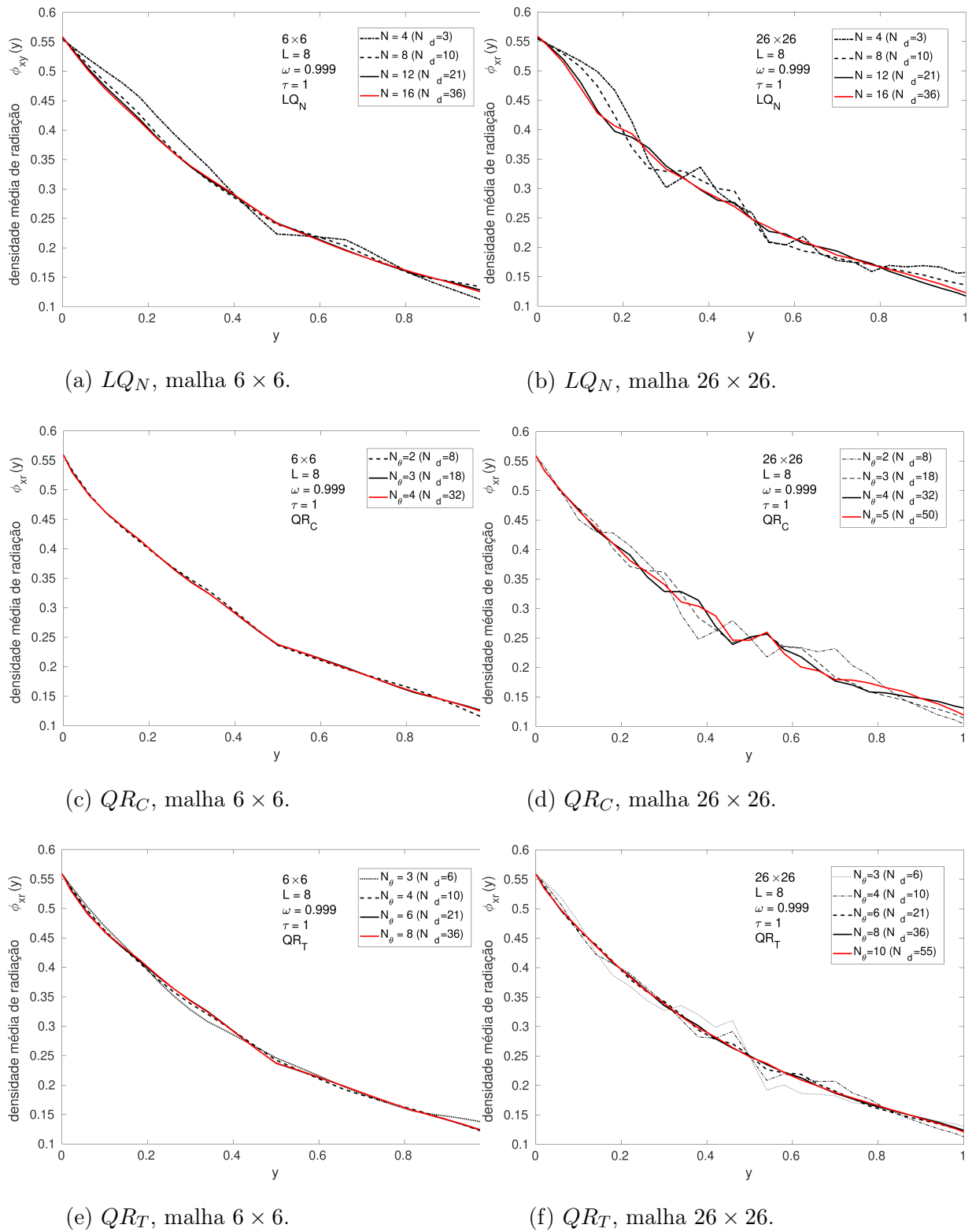


Figura 5.6 – Comparações de diferentes ordens das quadraturas LQ_N , QR_C e QR_T na densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$), com malhas 6×6 e 26×26 , para $L = 8$, $\omega = 0.999$ e $\tau = 1$.

Nas Tabelas 5.14 à 5.17 apresentam-se os resultados ADO-Nodal obtidos utilizando a quadratura QR , com acoplamento compatível QR_C e com acoplamento triangular QR_T , para a densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$), na linha central do domínio ($x = 0.5$). Considera-se anisotropia $L = 8$ e as malhas 6×6 e 26×26 , com $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$.

Na Tabela 5.14 apresentam-se os resultados para a malha 6×6 com a quadratura QR_C para ordem polar igual a $N_\theta = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ totalizando $N_d = 8, 18, 32, 50, 72, 98, 128$ direções por octante, respectivamente. Na Tabela 5.15 apresentam-se os resultados para a malha 26×26 com a quadratura QR_C para ordem polar até $N_\theta = 5$ ($N_d = 50$). Na Tabela 5.16 apresentam-se os resultados para a malha 6×6 com a quadratura QR_T para ordem polar igual a $N_\theta = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$ totalizando as direções por octante como $N_d = 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105$, respectivamente. Na Tabela 5.17 apresentam-se os resultados para a malha 26×26 com a quadratura QR_T para ordem polar até $N_\theta = 10$ ($N_d = 55$). Os resultados da densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) com a quadratura LQ_N , para $L = 8$ e malhas 6×6 e 26×26 , foram listados anteriormente nas Tabelas 5.6 e 5.11, respectivamente, para ordens $N = 4, 8, 12, 16$ totalizando $N_d = 3, 10, 21, 36$ direções por octante.

Comparando os resultados obtidos pelo método ADO-Nodal com malha fixa 6×6 a partir de duas ordens subsequentes de quadratura, observa-se para a quadratura QR_C em geral de dois a três dígitos em concordância com ordem até $N_d = 50$, aumentando para quatro dígitos com ordem de $N_d = 50$ até $N_d = 98$ e chegando a cinco dígitos em concordância com $N_d = 98$ e $N_d = 128$. Com a quadratura QR_T observa-se em geral dois dígitos em concordância com ordem até $N_d = 21$, aumentando para três dígitos em concordância com ordem de $N_d = 21$ até $N_d = 55$, chegando a quatro dígitos com ordem de $N_d = 55$ até $N_d = 105$. Já com a quadratura LQ_N para a malha 6×6 , observa-se em geral dois dígitos em concordância com o aumento do número de direções por octante.

Considerando os resultados com malha fixa 26×26 a partir de duas ordens subsequentes de quadratura, observa-se com a quadratura QR_C em geral um dígito em concordância com o aumento do número de direções por octante até $N_d = 50$. Com a quadratura QR_T observa-se em geral dois dígitos em concordância com o aumento do número de direções por octante até $N_d = 55$. Já com a quadratura LQ_N para a malha 26×26 , observa-se em geral um dígito em concordância com ordem até $N_d = 21$, aumentando

para dois dígitos em concordância com ordem de $N_d = 21$ até $N_d = 36$.

A partir dos resultados tabelados calcula-se o erro relativo entre os resultados $\phi_{xr}(y)$ para duas ordens subsequentes de quadratura com a malha fixa. Apresentam-se a seguir os erros obtidos de acordo com a quadratura analisada para a malha 6×6 :

- Quadratura QR_C : o erro relativo entre $N_d = 18$ e $N_d = 32$ é de 0.336%, entre $N_d = 32$ e $N_d = 50$ é de 0.060% e reduz para 0.002% entre $N_d = 98$ e $N_d = 128$.
- Quadratura QR_T : o erro relativo entre $N_d = 10$ e $N_d = 15$ é de 0.712%, entre $N_d = 45$ e $N_d = 55$ é de 0.029% e reduz para 0.006% entre $N_d = 91$ e $N_d = 105$.
- Quadratura LQ_N : o erro relativo entre $N_d = 21$ e $N_d = 36$ é de 0.690%.

E a seguir, apresentam-se os erros relativos obtidos de acordo com a quadratura analisada para a malha 26×26 :

- Quadratura QR_C : o erro relativo entre $N_d = 32$ e $N_d = 50$ é de 3.235%.
- Quadratura QR_T : o erro relativo entre $N_d = 10$ e $N_d = 15$ é de 3.162% e reduz para 0.677% entre $N_d = 45$ e $N_d = 55$.
- Quadratura LQ_N : o erro relativo entre $N_d = 21$ e $N_d = 36$ é de 1.930%.

Pode-se notar que ao considerar a malha grossa 6×6 com um número de direções por octante fixo, por exemplo $N_d = 50$ para QR_C , $N_d = 55$ para QR_T e $N_d = 36$ para LQ_N , o erro relativo é muito menor em comparação com o erro da malha mais refinada 26×26 , e os valores da densidade $\phi_{xr}(y)$ concordam em um número maior de dígitos significativos. Através da análise dos resultados tabulados, percebe-se a importância de considerar a ordem de quadratura mais alta, uma vez que os valores concordam em maior número de dígitos com o aumento do número de direções por octante. A obtenção de resultados a partir de um número baixo de direções angulares pode levar ao chamado efeito raio que é uma oscilação não física nos valores da intensidade de radiação. Conforme observado na literatura [Chai et al., 1993] o efeito raio é mais proeminente para meios opticamente finos e é efetivamente mitigado em meios com alta espessura óptica. De acordo com Modest, 2013, o efeito raio também é reduzido quando se trabalha com malhas grossas ou se aumenta o tamanho das regiões, e no caso de usar malhas refinadas é sugerido o uso de ordem de quadratura mais elevada para reduzir as oscilações oriundas do efeito raio.

Vale ressaltar que a escolha da ordem de quadratura e/ou a dimensão da malha está limitada aos recursos computacionais disponíveis, uma vez que conforme se refina a malha e/ou se aumenta o número de direções por octante o tamanho do sistema linear torna-se consideravelmente grande, e conseqüentemente é necessário uma maior demanda de memória computacional.

Tabela 5.14 – Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$, $L = 8$, malha 6×6 , com diferentes ordens da QR_C , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$.

y	$N_d = 8$	$N_d = 18$	$N_d = 32$	$N_d = 50$	$N_d = 72$	$N_d = 98$	$N_d = 128$
0.00	0.5593	0.5595	0.5594	0.5594	0.5594	0.5594	0.5594
0.02	0.5539	0.5314	0.5302	0.5297	0.5295	0.5295	0.5296
0.06	0.4928	0.4910	0.4907	0.4910	0.4911	0.4912	0.4912
0.10	0.4606	0.4609	0.4613	0.4615	0.4615	0.4615	0.4615
0.14	0.4344	0.4365	0.4369	0.4368	0.4367	0.4367	0.4367
0.18	0.4111	0.4139	0.4142	0.4140	0.4140	0.4140	0.4140
0.22	0.3875	0.3885	0.3881	0.3879	0.3879	0.3879	0.3879
0.26	0.3661	0.3645	0.3638	0.3638	0.3639	0.3639	0.3639
0.30	0.3468	0.3429	0.3421	0.3423	0.3424	0.3424	0.3424
0.34	0.3288	0.3240	0.3237	0.3240	0.3241	0.3241	0.3241
0.38	0.3060	0.3021	0.3025	0.3026	0.3026	0.3025	0.3025
0.42	0.2822	0.2797	0.2803	0.2803	0.2802	0.2802	0.2802
0.46	0.2587	0.2578	0.2585	0.2583	0.2583	0.2583	0.2583
0.50	0.2364	0.2373	0.2380	0.2378	0.2378	0.2378	0.2378
0.54	0.2261	0.2285	0.2286	0.2285	0.2285	0.2285	0.2285
0.58	0.2160	0.2188	0.2183	0.2183	0.2183	0.2183	0.2183
0.62	0.2060	0.2088	0.2078	0.2079	0.2079	0.2079	0.2079
0.66	0.1963	0.1986	0.1974	0.1976	0.1976	0.1976	0.1976
0.70	0.1877	0.1876	0.1871	0.1873	0.1872	0.1872	0.1872
0.74	0.1790	0.1765	0.1767	0.1767	0.1767	0.1767	0.1767
0.78	0.1703	0.1659	0.1666	0.1665	0.1665	0.1665	0.1665
0.82	0.1618	0.1561	0.1572	0.1570	0.1569	0.1569	0.1569
0.86	0.1511	0.1487	0.1494	0.1493	0.1493	0.1493	0.1493
0.90	0.1388	0.1415	0.1413	0.1412	0.1412	0.1412	0.1412
0.94	0.1263	0.1335	0.1326	0.1326	0.1327	0.1327	0.1327
0.98	0.1136	0.1249	0.1233	0.1235	0.1235	0.1235	0.1235
1.00	0.1072	0.1200	0.1182	0.1184	0.1184	0.1184	0.1184

Tabela 5.15 – Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$,
 $L = 8$, malha 26×26 , com diferentes ordens da QR_C , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$.

y	$N_d = 8$	$N_d = 18$	$N_d = 32$	$N_d = 50$
0.00	0.5594	0.5593	0.5592	0.5592
0.02	0.5405	0.5351	0.5337	0.5336
0.06	0.4977	0.4951	0.4986	0.4989
0.10	0.4507	0.4700	0.4678	0.4657
0.14	0.4301	0.4445	0.4335	0.4371
0.18	0.4282	0.4020	0.4105	0.4107
0.22	0.4065	0.3711	0.3908	0.3813
0.26	0.3778	0.3647	0.3539	0.3617
0.30	0.3487	0.3617	0.3291	0.3411
0.34	0.2893	0.3255	0.3285	0.3111
0.38	0.2478	0.2843	0.3139	0.3040
0.42	0.2620	0.2643	0.2697	0.2876
0.46	0.2797	0.2425	0.2393	0.2464
0.50	0.2509	0.2500	0.2515	0.2463
0.54	0.2180	0.2563	0.2569	0.2599
0.58	0.2363	0.2350	0.2308	0.2239
0.62	0.2335	0.2328	0.2181	0.2007
0.66	0.2267	0.2087	0.1961	0.1946
0.70	0.2321	0.1833	0.1771	0.1796
0.74	0.2032	0.1737	0.1704	0.1786
0.78	0.1876	0.1590	0.1586	0.1736
0.82	0.1647	0.1515	0.1569	0.1656
0.86	0.1455	0.1447	0.1516	0.1594
0.90	0.1325	0.1358	0.1477	0.1476
0.94	0.1198	0.1295	0.1427	0.1385
0.98	0.1110	0.1203	0.1345	0.1264
1.00	0.1043	0.1144	0.1313	0.1196

Tabela 5.16 – Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$,
 $L = 8$, malha 6×6 , com diferentes ordens da QR_T , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$.

y	$N_d = 6$	$N_d = 10$	$N_d = 15$	$N_d = 21$	$N_d = 28$	$N_d = 36$	$N_d = 45$	$N_d = 55$	$N_d = 66$	$N_d = 78$	$N_d = 91$	$N_d = 105$
0.00	0.5593	0.5590	0.5591	0.5592	0.5593	0.5594	0.5594	0.5594	0.5594	0.5594	0.5594	0.5594
0.02	0.5392	0.5361	0.5344	0.5332	0.5323	0.5315	0.5310	0.5305	0.5302	0.5299	0.5297	0.5296
0.06	0.5024	0.4962	0.4933	0.4918	0.4909	0.4906	0.4904	0.4905	0.4906	0.4907	0.4908	0.4909
0.10	0.4697	0.4628	0.4605	0.4599	0.4600	0.4603	0.4607	0.4610	0.4612	0.4614	0.4615	0.4615
0.14	0.4406	0.4346	0.4337	0.4344	0.4353	0.4360	0.4364	0.4367	0.4368	0.4368	0.4368	0.4368
0.18	0.4115	0.4086	0.4097	0.4114	0.4128	0.4136	0.4140	0.4141	0.4142	0.4141	0.4141	0.4141
0.22	0.3798	0.3821	0.3850	0.3868	0.3878	0.3882	0.3882	0.3882	0.3881	0.3880	0.3880	0.3879
0.26	0.3520	0.3588	0.3627	0.3641	0.3645	0.3643	0.3641	0.3640	0.3639	0.3638	0.3638	0.3638
0.30	0.3279	0.3384	0.3428	0.3437	0.3434	0.3430	0.3426	0.3424	0.3423	0.3423	0.3423	0.3423
0.34	0.3079	0.3205	0.3248	0.3252	0.3248	0.3243	0.3240	0.3239	0.3239	0.3239	0.3239	0.3240
0.38	0.2931	0.3019	0.3035	0.3033	0.3028	0.3026	0.3025	0.3025	0.3025	0.3025	0.3026	0.3026
0.42	0.2777	0.2822	0.2815	0.2806	0.2802	0.2801	0.2802	0.2802	0.2802	0.2802	0.2802	0.2802
0.46	0.2620	0.2621	0.2594	0.2583	0.2580	0.2581	0.2582	0.2583	0.2583	0.2583	0.2583	0.2583
0.50	0.2462	0.2423	0.2383	0.2371	0.2371	0.2375	0.2377	0.2378	0.2378	0.2378	0.2378	0.2378
0.54	0.2343	0.2296	0.2278	0.2277	0.2280	0.2283	0.2285	0.2285	0.2285	0.2285	0.2285	0.2285
0.58	0.2220	0.2170	0.2172	0.2179	0.2183	0.2184	0.2184	0.2184	0.2183	0.2183	0.2183	0.2183
0.62	0.2094	0.2045	0.2066	0.2079	0.2082	0.2082	0.2081	0.2080	0.2079	0.2079	0.2079	0.2079
0.66	0.1968	0.1923	0.1961	0.1979	0.1982	0.1980	0.1978	0.1977	0.1976	0.1976	0.1976	0.1976
0.70	0.1853	0.1832	0.1862	0.1873	0.1874	0.1873	0.1873	0.1872	0.1872	0.1872	0.1872	0.1872
0.74	0.1747	0.1748	0.1764	0.1767	0.1767	0.1767	0.1767	0.1767	0.1767	0.1767	0.1767	0.1767
0.78	0.1649	0.1666	0.1669	0.1666	0.1664	0.1664	0.1665	0.1665	0.1665	0.1665	0.1665	0.1665
0.82	0.1558	0.1586	0.1579	0.1570	0.1568	0.1569	0.1570	0.1570	0.1570	0.1570	0.1569	0.1569
0.86	0.1509	0.1503	0.1493	0.1490	0.1490	0.1492	0.1493	0.1493	0.1493	0.1493	0.1493	0.1493
0.90	0.1472	0.1413	0.1405	0.1408	0.1412	0.1413	0.1413	0.1413	0.1413	0.1413	0.1412	0.1412
0.94	0.1427	0.1317	0.1311	0.1321	0.1326	0.1328	0.1328	0.1327	0.1327	0.1327	0.1327	0.1327
0.98	0.1375	0.1218	0.1214	0.1229	0.1234	0.1235	0.1235	0.1235	0.1235	0.1235	0.1235	0.1235
1.00	0.1346	0.1167	0.1164	0.1180	0.1185	0.1185	0.1185	0.1184	0.1184	0.1184	0.1184	0.1184

Tabela 5.17 – Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$,
 $L = 8$, malha 26×26 , com diferentes ordens da QR_T , $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$.

y	$N_d = 6$	$N_d = 10$	$N_d = 15$	$N_d = 21$	$N_d = 28$	$N_d = 36$	$N_d = 45$	$N_d = 55$
0.00	0.5592	0.5591	0.5591	0.5592	0.5592	0.5592	0.5592	0.5592
0.02	0.5464	0.5432	0.5403	0.5381	0.5365	0.5355	0.5348	0.5343
0.06	0.5183	0.5062	0.4990	0.4962	0.4959	0.4964	0.4970	0.4976
0.10	0.4773	0.4596	0.4582	0.4621	0.4652	0.4666	0.4669	0.4668
0.14	0.4253	0.4229	0.4345	0.4396	0.4390	0.4375	0.4368	0.4367
0.18	0.3866	0.4065	0.4147	0.4107	0.4077	0.4082	0.4093	0.4098
0.22	0.3685	0.3899	0.3863	0.3804	0.3835	0.3859	0.3853	0.3843
0.26	0.3444	0.3647	0.3560	0.3590	0.3631	0.3606	0.3590	0.3595
0.30	0.3273	0.3411	0.3313	0.3427	0.3390	0.3358	0.3387	0.3395
0.34	0.3355	0.3113	0.3164	0.3203	0.3141	0.3181	0.3188	0.3170
0.38	0.3203	0.2825	0.3000	0.2943	0.2958	0.3014	0.2960	0.2978
0.42	0.2990	0.2804	0.2866	0.2779	0.2836	0.2795	0.2801	0.2820
0.46	0.3104	0.2916	0.2899	0.2707	0.2745	0.2634	0.2705	0.2644
0.50	0.2486	0.2498	0.2516	0.2509	0.2499	0.2503	0.2495	0.2486
0.54	0.1922	0.2086	0.2067	0.2270	0.2251	0.2355	0.2299	0.2376
0.58	0.2010	0.2198	0.2126	0.2217	0.2187	0.2226	0.2215	0.2222
0.62	0.1865	0.2123	0.2096	0.2190	0.2114	0.2131	0.2126	0.2095
0.66	0.1850	0.2069	0.1984	0.2023	0.2005	0.1990	0.2004	0.1989
0.70	0.1824	0.2073	0.1959	0.1903	0.1918	0.1869	0.1902	0.1879
0.74	0.1709	0.1874	0.1810	0.1777	0.1807	0.1774	0.1790	0.1789
0.78	0.1677	0.1768	0.1698	0.1650	0.1715	0.1677	0.1691	0.1703
0.82	0.1575	0.1603	0.1612	0.1571	0.1615	0.1603	0.1596	0.1612
0.86	0.1514	0.1470	0.1511	0.1485	0.1523	0.1525	0.1507	0.1530
0.90	0.1455	0.1368	0.1454	0.1419	0.1436	0.1451	0.1430	0.1441
0.94	0.1393	0.1266	0.1379	0.1350	0.1350	0.1376	0.1351	0.1359
0.98	0.1346	0.1187	0.1306	0.1269	0.1260	0.1287	0.1271	0.1268
1.00	0.1301	0.1130	0.1273	0.1227	0.1207	0.1240	0.1221	0.1213

5.4 Desempenho ADO-Nodal: Refinamento da Malha

A partir do reordenamento do sistema linear apresentado no Capítulo 4, investiga-se o uso de configurações de malhas mais refinadas através da solução do sistema linear esparsos de equações usando a subrotina HSL_MA48. Geram-se resultados ADO-Nodal com $L = 2$ e $\omega = 0.999$, para diferentes malhas até 50×50 com a quadratura LQ_N com $N = 16$ ($N_d = 36$) para diferentes comprimentos ópticos $\tau = 1, 5, 10$. E resultados até a malha 60×60 com a quadratura QR_C com $N_\theta = 4$ ($N_d = 32$) para $\tau = 1$, enquanto na literatura [Kim e Lee, 1988; Trivic et al., 2004; Moghadam et al., 2016] para este problema com $\tau = 1$ apenas resultados até malha 26×26 são encontrados.

Apresentam-se nas tabelas a seguir os valores obtidos pela solução ADO-Nodal para a densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$), na linha central do domínio ($x = 0.5$), para diferentes malhas considerando $\omega = 0.999$. Resultados com a quadratura LQ_{16} e grau de anisotropia $L = 2$ são apresentados na Tabela 5.18 para $\tau = 1$, na Tabela 5.19 com $\tau = 5$ e na Tabela 5.20 para $\tau = 10$. Ainda, para o mesmo grau de anisotropia $L = 2$, apresentam-se os valores da densidade $\phi_{xr}(y)$ na Tabela 5.21 considerando a quadratura QR_C com $N_\theta = 4$ para $\tau = 1$. E considerando o grau de anisotropia $L = 8$ e $\tau = 1$, na Tabela 5.22 apresentam-se os resultados com a quadratura LQ_{16} , e Tabela 5.23 com a quadratura QR_C com $N_\theta = 4$. Ainda, nas Tabelas 5.24, 5.25 e 5.26 apresentam-se os valores da densidade $\phi_{xr}(y)$ para diferentes malhas considerando $\omega = 0.999$, $\tau = 1$ e quadratura LQ_{16} com grau de anisotropia $L = 0$, $L = 5$ e $L = 12$, respectivamente.

A partir dos resultados obtidos pela formulação ADO-Nodal entre as diferentes malhas, calcula-se o erro relativo entre duas malhas subsequentes. Observa-se para $L = 2$ e quadratura LQ_N à medida que a malha é refinada de 4×4 para 50×50 :

- para $\tau = 1$ (Tabela 5.18): erro relativo é reduzido de 3.83% para 0.58%.
- para $\tau = 5$ (Tabela 5.19): o erro relativo é reduzido de 6.22% para 0.04%
- para $\tau = 10$ (Tabela 5.20): o erro relativo é reduzido de 7.31% para 0.03%.

Assim, observa-se uma redução significativa do erro relativo com o aumento da malha, principalmente à medida que o comprimento óptico é maior. A seguir, apresenta-se o erro

relativo para $L = 2$ e quadratura QR_C à medida que a malha é refinada de 4×4 para 60×60 :

- para $\tau = 1$ (Tabela 5.21): erro relativo é reduzido de 4.40% para 1.18%.

Ao analisar as tabelas para $L = 8$ com $\tau = 1$, obtém-se o erro relativo à medida que a malha é refinada de 4×4 para 40×40 :

- quadratura LQ_N (Tabela 5.22): erro relativo é reduzido de 3.47% para 0.83%.
- quadratura QR_C (Tabela 5.23): erro relativo é reduzido de 3.74% para 1.46%.

Observa-se uma menor redução do erro relativo com o aumento da malha ao analisar os resultados obtidos com a quadratura QR_C com $N_\theta = 4$ ($N_d = 32$) comparado com o erro relativo obtido com a quadratura LQ_N para $N = 16$ ($N_d = 36$) em ambas anisotropias $L = 2$ e $L = 8$. Ainda, ao analisar o erro relativo com quadratura LQ_{16} e $\tau = 1$ à medida que a malha é refinada de 4×4 para 40×40 , obtêm-se os seguintes erros de acordo com o grau de anisotropia:

- $L = 0$ (Tabela 5.24): erro relativo é reduzido de 3.61% para 0.80%.
- $L = 5$ (Tabela 5.25): erro relativo é reduzido de 3.72% para 0.81%.
- $L = 12$ (Tabela 5.26): erro relativo é reduzido de 3.57% para 0.98%.

Ainda, nas Tabelas 5.18 à 5.23, em relação ao número de dígitos significativos dos resultados ADO obtidos entre as diferentes malhas para $L = 2$ e $L = 8$, com $\tau = 1$, observa-se em geral a concordância em dois dígitos tanto para a quadratura LQ_N quanto para a quadratura QR_C com o refinamento da malha. E nas Tabelas 5.24 à 5.26, para $L = 0, 5, 12$, com $\tau = 1$ e quadratura LQ_{16} , também observa-se em geral a concordância em dois dígitos significativos com o refinamento da malha. Já para $L = 2$ com LQ_N , $\tau = 5$ e $\tau = 10$ observa-se de três a quatro dígitos significativos em concordância com o aumento da malha. Assim, observa-se um aumento do número de dígitos significativos com o aumento da malha à medida que o comprimento óptico é maior.

Tabela 5.18 – Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$ para o refinamento da malha com $L = 2$, LQ_{16} ($N_d = 36$), $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$.

y	4×4	10×10	20×20	26×26	30×30	40×40	50×50
0.00	0.6625	0.6648	0.6648	0.6649	0.6649	0.6649	0.6649
0.02	0.6365	0.6407	0.6443	0.6453	0.6457	0.6462	0.6463
0.06	0.5891	0.5965	0.6023	0.6029	0.6045	0.6048	0.6068
0.10	0.5471	0.5572	0.5535	0.5495	0.5497	0.5462	0.5431
0.14	0.5099	0.5086	0.4995	0.4968	0.4952	0.4955	0.4969
0.18	0.4766	0.4663	0.4623	0.4657	0.4685	0.4747	0.4731
0.22	0.4470	0.4304	0.4361	0.4422	0.4404	0.4355	0.4388
0.26	0.4173	0.3982	0.4094	0.4016	0.3989	0.4016	0.3966
0.30	0.3795	0.3680	0.3688	0.3661	0.3693	0.3651	0.3700
0.34	0.3437	0.3447	0.3362	0.3425	0.3412	0.3444	0.3449
0.38	0.3101	0.3216	0.3165	0.3173	0.3183	0.3156	0.3132
0.42	0.2789	0.2956	0.2970	0.2954	0.2947	0.2948	0.2973
0.46	0.2501	0.2678	0.2740	0.2739	0.2747	0.2756	0.2738
0.50	0.2239	0.2423	0.2479	0.2484	0.2513	0.2475	0.2503
0.54	0.2109	0.2279	0.2278	0.2287	0.2230	0.2279	0.2267
0.58	0.1972	0.2136	0.2096	0.2089	0.2113	0.2064	0.2085
0.62	0.1833	0.1974	0.1938	0.1955	0.1953	0.1943	0.1943
0.66	0.1693	0.1794	0.1793	0.1796	0.1808	0.1818	0.1810
0.70	0.1555	0.1623	0.1650	0.1632	0.1650	0.1660	0.1669
0.74	0.1422	0.1485	0.1530	0.1521	0.1506	0.1520	0.1523
0.78	0.1298	0.1353	0.1397	0.1386	0.1385	0.1369	0.1381
0.82	0.1179	0.1233	0.1271	0.1276	0.1266	0.1250	0.1252
0.86	0.1062	0.1120	0.1156	0.1164	0.1158	0.1149	0.1139
0.90	0.0949	0.1006	0.1029	0.1041	0.1039	0.1041	0.1036
0.94	0.0837	0.0872	0.0900	0.0921	0.0921	0.0926	0.0926
0.98	0.0727	0.0740	0.0777	0.0786	0.0790	0.0803	0.0803
1.00	0.0673	0.0673	0.0716	0.0725	0.0727	0.0732	0.0747

Tabela 5.19 – Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$ para o refinamento da malha com $L = 2$, LQ_{16} ($N_d = 36$), $\tau = 5$ e $\omega = 0.999$.

y	4×4	10×10	20×20	26×26	30×30	40×40	50×50
0.00	0.8555	0.8593	0.8601	0.8602	0.8602	0.8603	0.8603
0.10	0.8102	0.8162	0.8182	0.8186	0.8187	0.8189	0.8190
0.30	0.7357	0.7438	0.7455	0.7458	0.7461	0.7462	0.7466
0.50	0.6720	0.6806	0.6804	0.6796	0.6798	0.6794	0.6790
0.70	0.6142	0.6193	0.6195	0.6192	0.6192	0.6192	0.6193
0.90	0.5608	0.5645	0.5642	0.5646	0.5649	0.5653	0.5653
1.10	0.5115	0.5128	0.5132	0.5137	0.5136	0.5135	0.5136
1.30	0.4646	0.4635	0.4653	0.4648	0.4649	0.4647	0.4644
1.50	0.4141	0.4188	0.4198	0.4199	0.4198	0.4198	0.4200
1.70	0.3675	0.3782	0.3788	0.3790	0.3792	0.3795	0.3796
1.90	0.3249	0.3406	0.3414	0.3420	0.3420	0.3419	0.3417
2.10	0.2867	0.3060	0.3073	0.3073	0.3074	0.3076	0.3078
2.30	0.2529	0.2734	0.2759	0.2759	0.2761	0.2761	0.2760
2.50	0.2247	0.2439	0.2464	0.2468	0.2469	0.2469	0.2471
2.70	0.2022	0.2182	0.2199	0.2204	0.2202	0.2206	0.2206
2.90	0.1796	0.1941	0.1958	0.1961	0.1963	0.1961	0.1963
3.10	0.1580	0.1722	0.1737	0.1740	0.1741	0.1742	0.1742
3.30	0.1379	0.1516	0.1533	0.1536	0.1537	0.1539	0.1539
3.50	0.1195	0.1327	0.1346	0.1347	0.1349	0.1350	0.1351
3.70	0.1035	0.1156	0.1172	0.1174	0.1174	0.1176	0.1176
3.90	0.0901	0.0994	0.1010	0.1012	0.1012	0.1013	0.1013
4.10	0.0767	0.0846	0.0858	0.0860	0.0860	0.0861	0.0861
4.30	0.0635	0.0703	0.0715	0.0716	0.0717	0.0717	0.0717
4.50	0.0506	0.0567	0.0577	0.0579	0.0579	0.0580	0.0580
4.70	0.0381	0.0435	0.0443	0.0445	0.0445	0.0446	0.0446
4.90	0.0256	0.0297	0.0305	0.0306	0.0306	0.0307	0.0307
5.00	0.0191	0.0223	0.0229	0.0230	0.0230	0.0230	0.0231

Tabela 5.20 – Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$ para o refinamento da malha com $L = 2$, LQ_{16} ($N_d = 36$), $\tau = 10$ e $\omega = 0.999$.

y	4×4	10×10	20×20	26×26	30×30	40×40	50×50
0.00	0.9176	0.9203	0.9209	0.9210	0.9210	0.9211	0.9211
0.20	0.8691	0.8734	0.8745	0.8746	0.8747	0.8747	0.8747
0.60	0.7901	0.7956	0.7960	0.7961	0.7962	0.7961	0.7962
1.00	0.7193	0.7244	0.7245	0.7243	0.7244	0.7243	0.7243
1.40	0.6530	0.6566	0.6572	0.6571	0.6571	0.6571	0.6571
1.80	0.5906	0.5941	0.5943	0.5943	0.5943	0.5944	0.5944
2.20	0.5317	0.5352	0.5357	0.5358	0.5358	0.5358	0.5358
2.60	0.4753	0.4803	0.4814	0.4815	0.4815	0.4815	0.4815
3.00	0.4196	0.4302	0.4314	0.4315	0.4315	0.4316	0.4316
3.40	0.3691	0.3842	0.3856	0.3857	0.3859	0.3859	0.3860
3.80	0.3235	0.3421	0.3438	0.3441	0.3441	0.3443	0.3443
4.20	0.2828	0.3041	0.3058	0.3061	0.3062	0.3063	0.3064
4.60	0.2472	0.2690	0.2714	0.2717	0.2718	0.2719	0.2719
5.00	0.2173	0.2376	0.2401	0.2404	0.2405	0.2407	0.2407
5.40	0.1922	0.2095	0.2118	0.2121	0.2122	0.2124	0.2124
5.80	0.1679	0.1838	0.1861	0.1865	0.1866	0.1867	0.1868
6.20	0.1455	0.1609	0.1629	0.1632	0.1633	0.1634	0.1635
6.60	0.1251	0.1397	0.1417	0.1420	0.1421	0.1422	0.1423
7.00	0.1067	0.1205	0.1224	0.1227	0.1228	0.1229	0.1229
7.40	0.0907	0.1031	0.1047	0.1049	0.1050	0.1051	0.1052
7.80	0.0773	0.0868	0.0884	0.0886	0.0887	0.0888	0.0888
8.20	0.0639	0.0720	0.0732	0.0734	0.0735	0.0736	0.0736
8.60	0.0511	0.0579	0.0590	0.0592	0.0592	0.0593	0.0593
9.00	0.0388	0.0446	0.0455	0.0457	0.0457	0.0458	0.0458
9.40	0.0271	0.0319	0.0325	0.0326	0.0327	0.0327	0.0328
9.80	0.0157	0.0189	0.0194	0.0195	0.0195	0.0195	0.0196
10.0	0.0096	0.0117	0.0120	0.0121	0.0121	0.0121	0.0121

Tabela 5.21 – Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$ para o refinamento da malha com $L = 2$, QR_C , $N_\theta = 4$ ($N_d = 32$), $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$.

y	4×4	10×10	20×20	26×26	30×30	40×40	50×50	60×60
0.00	0.6627	0.6644	0.6641	0.6642	0.6642	0.6641	0.6641	0.6641
0.02	0.6294	0.6319	0.6336	0.6341	0.6344	0.6352	0.6360	0.6351
0.06	0.5798	0.5849	0.5887	0.5883	0.5882	0.5895	0.5909	0.5929
0.10	0.5397	0.5482	0.5469	0.5467	0.5482	0.5464	0.5423	0.5406
0.14	0.5046	0.5073	0.5049	0.5022	0.5010	0.5004	0.5005	0.5037
0.18	0.4733	0.4699	0.4669	0.4693	0.4720	0.4790	0.4825	0.4767
0.22	0.4456	0.4352	0.4355	0.4400	0.4381	0.4306	0.4275	0.4313
0.26	0.4193	0.4000	0.4041	0.3950	0.3885	0.3898	0.3864	0.3876
0.30	0.3824	0.3675	0.3653	0.3624	0.3676	0.3729	0.3842	0.3808
0.34	0.3459	0.3422	0.3417	0.3534	0.3583	0.3587	0.3486	0.3518
0.38	0.3113	0.3175	0.3222	0.3316	0.3218	0.3151	0.3235	0.3227
0.42	0.2789	0.2931	0.2920	0.2820	0.2826	0.2833	0.2740	0.2749
0.46	0.2493	0.2684	0.2585	0.2459	0.2538	0.2577	0.2670	0.2652
0.50	0.2236	0.2454	0.2425	0.2512	0.2521	0.2546	0.2470	0.2464
0.54	0.2109	0.2287	0.2495	0.2504	0.2415	0.2338	0.2347	0.2314
0.58	0.1967	0.2121	0.2236	0.2199	0.2240	0.2361	0.2283	0.2344
0.62	0.1821	0.1955	0.1923	0.2026	0.2008	0.2006	0.2053	0.2091
0.66	0.1676	0.1783	0.1693	0.1768	0.1800	0.1757	0.1765	0.1756
0.70	0.1535	0.1621	0.1615	0.1542	0.1581	0.1577	0.1565	0.1556
0.74	0.1404	0.1499	0.1413	0.1434	0.1412	0.1446	0.1431	0.1415
0.78	0.1291	0.1378	0.1324	0.1281	0.1293	0.1338	0.1324	0.1276
0.82	0.1177	0.1257	0.1251	0.1221	0.1188	0.1190	0.1222	0.1215
0.86	0.1063	0.1130	0.1160	0.1131	0.1104	0.1090	0.1111	0.1137
0.90	0.0951	0.1008	0.1041	0.1053	0.1032	0.1009	0.1003	0.1017
0.94	0.0840	0.0892	0.0970	0.0965	0.0968	0.0921	0.0904	0.0890
0.98	0.0730	0.0769	0.0837	0.0848	0.0857	0.0852	0.0819	0.0783
1.00	0.0672	0.0704	0.0755	0.0798	0.0819	0.0779	0.0769	0.0751

Tabela 5.22 – Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$ para o refinamento da malha com $L = 8$, LQ_{16} ($N_d = 36$), $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$.

y	4×4	10×10	20×20	26×26	30×30	40×40
0.00	0.5569	0.5588	0.5588	0.5589	0.5589	0.5588
0.02	0.5367	0.5406	0.5443	0.5453	0.5456	0.5461
0.06	0.5008	0.5080	0.5137	0.5143	0.5159	0.5163
0.10	0.4701	0.4798	0.4756	0.4713	0.4716	0.4680
0.14	0.4438	0.4407	0.4309	0.4278	0.4261	0.4262
0.18	0.4212	0.4079	0.4029	0.4064	0.4093	0.4161
0.22	0.4017	0.3810	0.3864	0.3932	0.3913	0.3858
0.26	0.3812	0.3570	0.3692	0.3609	0.3578	0.3609
0.30	0.3510	0.3345	0.3363	0.3329	0.3365	0.3318
0.34	0.3223	0.3198	0.3104	0.3175	0.3160	0.3192
0.38	0.2951	0.3046	0.2984	0.2990	0.3001	0.2972
0.42	0.2696	0.2850	0.2858	0.2839	0.2833	0.2833
0.46	0.2458	0.2627	0.2688	0.2690	0.2691	0.2703
0.50	0.2237	0.2420	0.2477	0.2481	0.2517	0.2474
0.54	0.2173	0.2333	0.2334	0.2342	0.2278	0.2331
0.58	0.2096	0.2242	0.2198	0.2190	0.2217	0.2163
0.62	0.2008	0.2128	0.2088	0.2102	0.2103	0.2092
0.66	0.1913	0.1995	0.1989	0.1991	0.2004	0.2013
0.70	0.1813	0.1864	0.1886	0.1864	0.1885	0.1895
0.74	0.1712	0.1762	0.1806	0.1798	0.1781	0.1795
0.78	0.1622	0.1661	0.1713	0.1701	0.1699	0.1682
0.82	0.1539	0.1578	0.1623	0.1628	0.1618	0.1599
0.86	0.1458	0.1507	0.1540	0.1552	0.1544	0.1536
0.90	0.1379	0.1433	0.1450	0.1462	0.1460	0.1462
0.94	0.1302	0.1326	0.1354	0.1378	0.1377	0.1383
0.98	0.1224	0.1219	0.1265	0.1275	0.1280	0.1295
1.00	0.1186	0.1165	0.1219	0.1229	0.1232	0.1237

Tabela 5.23 – Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$ para o refinamento da malha com $L = 8$, QR_C , $N_\theta = 4$ ($N_d = 32$), $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$.

y	4×4	10×10	20×20	26×26	30×30	40×40
0.00	0.5582	0.5592	0.5591	0.5592	0.5592	0.5592
0.02	0.5294	0.5314	0.5332	0.5337	0.5340	0.5348
0.06	0.4908	0.4955	0.4990	0.4986	0.4985	0.4999
0.10	0.4620	0.4697	0.4680	0.4678	0.4693	0.4675
0.14	0.4382	0.4388	0.4363	0.4335	0.4322	0.4316
0.18	0.4177	0.4114	0.4080	0.4105	0.4133	0.4205
0.22	0.4004	0.3861	0.3860	0.3908	0.3887	0.3810
0.26	0.3832	0.3594	0.3634	0.3539	0.3471	0.3484
0.30	0.3540	0.3345	0.3324	0.3291	0.3364	0.3400
0.34	0.3247	0.3172	0.3162	0.3285	0.3360	0.3341
0.38	0.2965	0.2998	0.3042	0.3139	0.3038	0.2967
0.42	0.2700	0.2820	0.2804	0.2697	0.2704	0.2713
0.46	0.2454	0.2632	0.2525	0.2393	0.2474	0.2513
0.50	0.2239	0.2454	0.2422	0.2515	0.2525	0.2550
0.54	0.2176	0.2344	0.2561	0.2569	0.2475	0.2393
0.58	0.2090	0.2230	0.2348	0.2308	0.2351	0.2480
0.62	0.1993	0.2110	0.2073	0.2181	0.2162	0.2160
0.66	0.1891	0.1981	0.1881	0.1961	0.1996	0.1948
0.70	0.1787	0.1857	0.1849	0.1771	0.1812	0.1808
0.74	0.1685	0.1776	0.1681	0.1704	0.1680	0.1717
0.78	0.1606	0.1693	0.1633	0.1586	0.1599	0.1648
0.82	0.1531	0.1609	0.1601	0.1569	0.1532	0.1535
0.86	0.1457	0.1520	0.1548	0.1516	0.1486	0.1472
0.90	0.1382	0.1434	0.1463	0.1477	0.1453	0.1427
0.94	0.1307	0.1348	0.1434	0.1427	0.1431	0.1378
0.98	0.1229	0.1255	0.1332	0.1345	0.1355	0.1350
1.00	0.1187	0.1203	0.1263	0.1313	0.1338	0.1291

Tabela 5.24 – Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$ para o refinamento da malha com $L = 0$, LQ_{16} ($N_d = 36$), $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$.

y	4×4	10×10	20×20	26×26	30×30	40×40
0.00	0.6275	0.6296	0.6295	0.6296	0.6296	0.6296
0.02	0.6032	0.6072	0.6108	0.6118	0.6122	0.6127
0.06	0.5594	0.5666	0.5723	0.5729	0.5744	0.5748
0.10	0.5211	0.5308	0.5270	0.5230	0.5232	0.5197
0.14	0.4874	0.4856	0.4764	0.4737	0.4721	0.4723
0.18	0.4576	0.4466	0.4424	0.4458	0.4486	0.4548
0.22	0.4312	0.4138	0.4194	0.4256	0.4238	0.4189
0.26	0.4044	0.3845	0.3958	0.3881	0.3852	0.3879
0.30	0.3694	0.3570	0.3581	0.3551	0.3584	0.3542
0.34	0.3363	0.3365	0.3278	0.3342	0.3329	0.3361
0.38	0.3052	0.3159	0.3106	0.3114	0.3123	0.3096
0.42	0.2762	0.2920	0.2933	0.2916	0.2909	0.2910
0.46	0.2494	0.2662	0.2723	0.2722	0.2728	0.2738
0.50	0.2249	0.2424	0.2479	0.2483	0.2514	0.2476
0.54	0.2137	0.2297	0.2296	0.2304	0.2247	0.2296
0.58	0.2016	0.2169	0.2129	0.2122	0.2147	0.2097
0.62	0.1890	0.2022	0.1986	0.2002	0.2001	0.1990
0.66	0.1763	0.1857	0.1854	0.1857	0.1869	0.1879
0.70	0.1636	0.1699	0.1724	0.1704	0.1724	0.1733
0.74	0.1513	0.1571	0.1615	0.1606	0.1591	0.1605
0.78	0.1398	0.1448	0.1493	0.1482	0.1482	0.1465
0.82	0.1288	0.1339	0.1378	0.1383	0.1373	0.1356
0.86	0.1180	0.1237	0.1272	0.1281	0.1275	0.1265
0.90	0.1074	0.1134	0.1155	0.1167	0.1165	0.1166
0.94	0.0970	0.1005	0.1034	0.1055	0.1055	0.1060
0.98	0.0866	0.0876	0.0917	0.0926	0.0930	0.0943
1.00	0.0814	0.0812	0.0857	0.0866	0.0869	0.0873

Tabela 5.25 – Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$ para o refinamento da malha com $L = 5$, LQ_{16} ($N_d = 36$), $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$.

y	4×4	10×10	20×20	26×26	30×30	40×40
0.00	0.6450	0.6472	0.6472	0.6473	0.6473	0.6473
0.02	0.6199	0.6240	0.6276	0.6286	0.6290	0.6295
0.06	0.5743	0.5817	0.5874	0.5880	0.5895	0.5899
0.10	0.5342	0.5441	0.5404	0.5364	0.5365	0.5331
0.14	0.4987	0.4972	0.4881	0.4853	0.4837	0.4840
0.18	0.4672	0.4566	0.4525	0.4559	0.4586	0.4649
0.22	0.4393	0.4222	0.4279	0.4340	0.4322	0.4273
0.26	0.4110	0.3914	0.4027	0.3949	0.3922	0.3948
0.30	0.3746	0.3626	0.3635	0.3607	0.3639	0.3598
0.34	0.3401	0.3407	0.3321	0.3385	0.3371	0.3403
0.38	0.3078	0.3188	0.3136	0.3144	0.3154	0.3126
0.42	0.2776	0.2938	0.2952	0.2936	0.2928	0.2929
0.46	0.2497	0.2670	0.2732	0.2731	0.2738	0.2747
0.50	0.2243	0.2423	0.2479	0.2483	0.2514	0.2475
0.54	0.2122	0.2288	0.2287	0.2295	0.2238	0.2287
0.58	0.1994	0.2153	0.2112	0.2105	0.2130	0.2080
0.62	0.1861	0.1997	0.1961	0.1977	0.1977	0.1966
0.66	0.1727	0.1825	0.1823	0.1826	0.1838	0.1847
0.70	0.1595	0.1660	0.1686	0.1667	0.1686	0.1696
0.74	0.1467	0.1527	0.1571	0.1563	0.1547	0.1561
0.78	0.1347	0.1399	0.1444	0.1433	0.1432	0.1416
0.82	0.1232	0.1284	0.1323	0.1328	0.1318	0.1302
0.86	0.1120	0.1177	0.1212	0.1221	0.1215	0.1205
0.90	0.1010	0.1068	0.1090	0.1102	0.1100	0.1102
0.94	0.0901	0.0937	0.0965	0.0986	0.0986	0.0991
0.98	0.0794	0.0806	0.0845	0.0854	0.0858	0.0871
1.00	0.0741	0.0740	0.0784	0.0793	0.0796	0.0800

Tabela 5.26 – Densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) em $x = 0.5$ para o refinamento da malha com $L = 12$, LQ_{16} ($N_d = 36$), $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$.

y	4×4	10×10	20×20	26×26	30×30	40×40
0.00	0.5343	0.5361	0.5360	0.5361	0.5361	0.5360
0.02	0.5173	0.5211	0.5251	0.5261	0.5265	0.5270
0.06	0.4865	0.4939	0.5002	0.5010	0.5027	0.5031
0.10	0.4596	0.4699	0.4653	0.4604	0.4607	0.4566
0.14	0.4361	0.4321	0.4205	0.4168	0.4148	0.4149
0.18	0.4157	0.3996	0.3935	0.3974	0.4009	0.4088
0.22	0.3981	0.3736	0.3797	0.3878	0.3856	0.3789
0.26	0.3792	0.3508	0.3653	0.3556	0.3517	0.3559
0.30	0.3499	0.3288	0.3318	0.3278	0.3324	0.3264
0.34	0.3215	0.3171	0.3057	0.3145	0.3123	0.3160
0.38	0.2940	0.3038	0.2960	0.2961	0.2979	0.2945
0.42	0.2675	0.2848	0.2852	0.2830	0.2824	0.2821
0.46	0.2420	0.2621	0.2684	0.2695	0.2689	0.2706
0.50	0.2178	0.2406	0.2474	0.2474	0.2522	0.2468
0.54	0.2141	0.2335	0.2340	0.2349	0.2271	0.2334
0.58	0.2091	0.2260	0.2205	0.2196	0.2229	0.2164
0.62	0.2030	0.2158	0.2106	0.2120	0.2122	0.2108
0.66	0.1959	0.2029	0.2024	0.2021	0.2037	0.2045
0.70	0.1880	0.1900	0.1921	0.1895	0.1918	0.1931
0.74	0.1794	0.1800	0.1854	0.1847	0.1829	0.1841
0.78	0.1702	0.1702	0.1770	0.1754	0.1753	0.1734
0.82	0.1616	0.1627	0.1684	0.1693	0.1682	0.1658
0.86	0.1535	0.1571	0.1607	0.1626	0.1614	0.1606
0.90	0.1460	0.1511	0.1529	0.1542	0.1542	0.1544
0.94	0.1390	0.1410	0.1437	0.1469	0.1465	0.1474
0.98	0.1323	0.1310	0.1364	0.1377	0.1383	0.1400
1.00	0.1291	0.1261	0.1329	0.1343	0.1344	0.1347

5.5 Fluxo de Calor Radiativo: Variando Albedo, Reflectividade e Comprimento Óptico

Analisa-se os efeitos do albedo de espalhamento (ω), da reflectividade (ρ) na parede do domínio e do comprimento óptico (τ) na transferência radiativa a partir da estimativa do fluxo de calor radiativo líquido ao longo da linha central ($x = 0.5$).

Na Figura 5.7 apresentam-se os fluxos de calor radiativo $q(y)$ calculados com diferentes albedos de espalhamento (ω), para a anisotropia $L = 8$ com a ordem de quadratura LQ_{16} , malha 10×10 e $\tau = 1$. Nota-se que à medida que o albedo (ω) aumenta, a absorção torna-se menos importante enquanto o espalhamento é predominante, de modo que

quando o albedo é maior o fluxo de calor também é maior, exceto próximo da parede quente ($y = 0$) onde o fluxo de calor $q(y)$ tem um valor maior para valores menores do albedo (ω). Este efeito de espalhamento do albedo foi explicado por [Kim e Lee, 1988]. Observa-se também na Figura 5.7 que quanto menor o albedo a inclinação da curva do fluxo de calor radiativo ao longo da linha central é mais pronunciada, devido a ter mais absorção do que espalhamento e nesse caso a transferência de calor por radiação é reduzida.

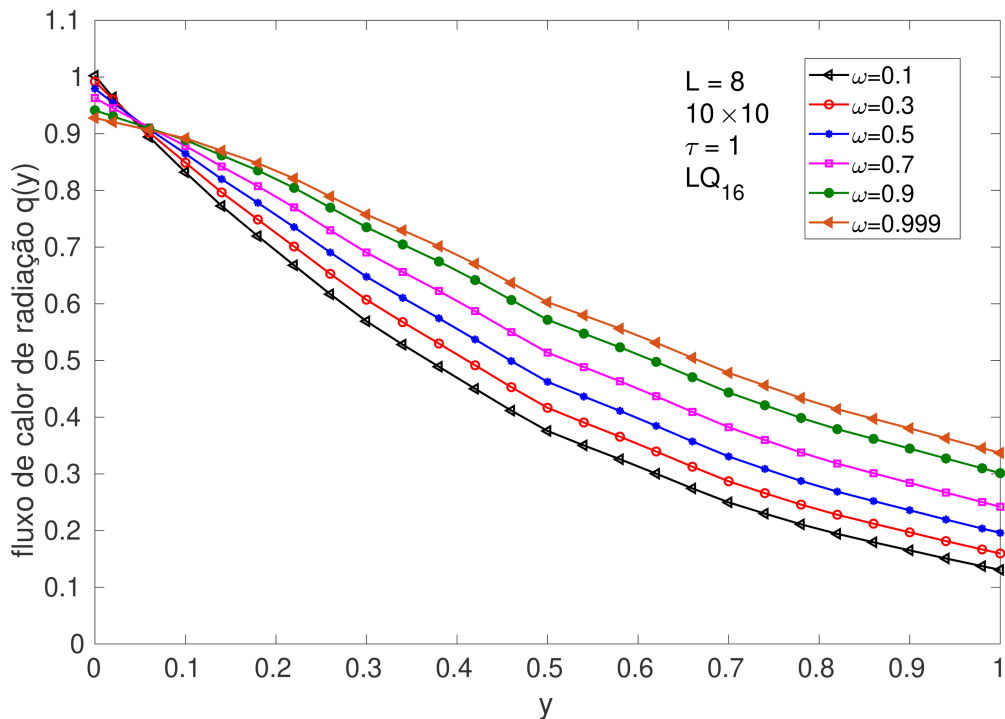


Figura 5.7 – Influência do albedo de espalhamento no fluxo de calor radiativo $q(y)$ na linha central para $L = 8$, $\tau = 1$, malha 10×10 e LQ_{16} ($N_d = 36$).

A Figura 5.8 mostra a densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) na linha central ($x = 0.5$) do domínio para diferentes albedos de espalhamento com a anisotropia $L = 8$ para a ordem de quadratura LQ_{16} , malha 10×10 e $\tau = 1$. Observa-se que quanto maior o albedo de espalhamento ω , maior é a densidade média de radiação ao longo da linha central.

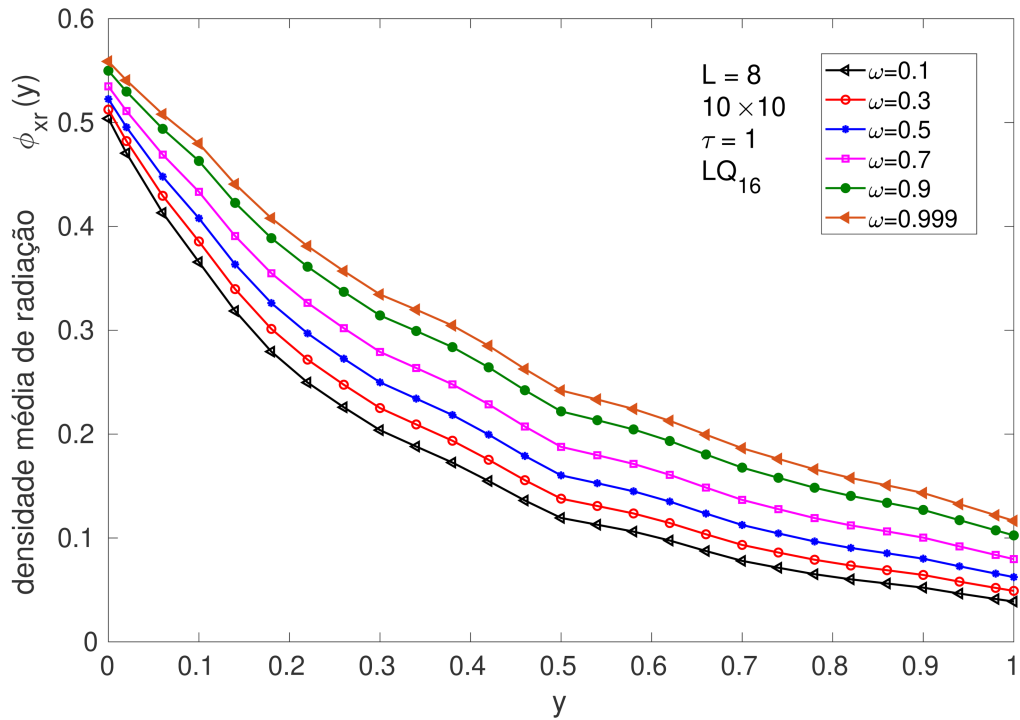


Figura 5.8 – Influência do albedo de espalhamento na densidade média de radiação ao longo da direção y ($\phi_{xr}(y)$) na linha central para $L = 8$, $\tau = 1$, malha 10×10 e LQ_{16} .

Utilizam-se diferentes comprimentos ópticos τ na estimativa do fluxo de calor radiativo ao longo da linha central ($\tau_x = 0.5\tau$), para a malha 6×6 e $\omega = 0.999$ com a ordem de quadratura LQ_{16} . Na Figura 5.9 apresentam-se os fluxos de calor radiativo $q(y)$ para a anisotropia $L = 5$ e na Figura 5.10 para a anisotropia $L = 8$. Observa-se que o fluxo de calor radiativo é maior para comprimentos ópticos menores e a distribuição angular do fluxo de calor radiativo $q(y)$ torna-se mais plana à medida que o comprimento óptico τ aumenta. Com a ordem de anisotropia $L = 5$ observa-se uma maior variação no fluxo de calor radiativo $q(y)$ na parede quente ($y = 0$) à medida que o comprimento óptico τ aumenta, em relação a anisotropia $L = 8$.

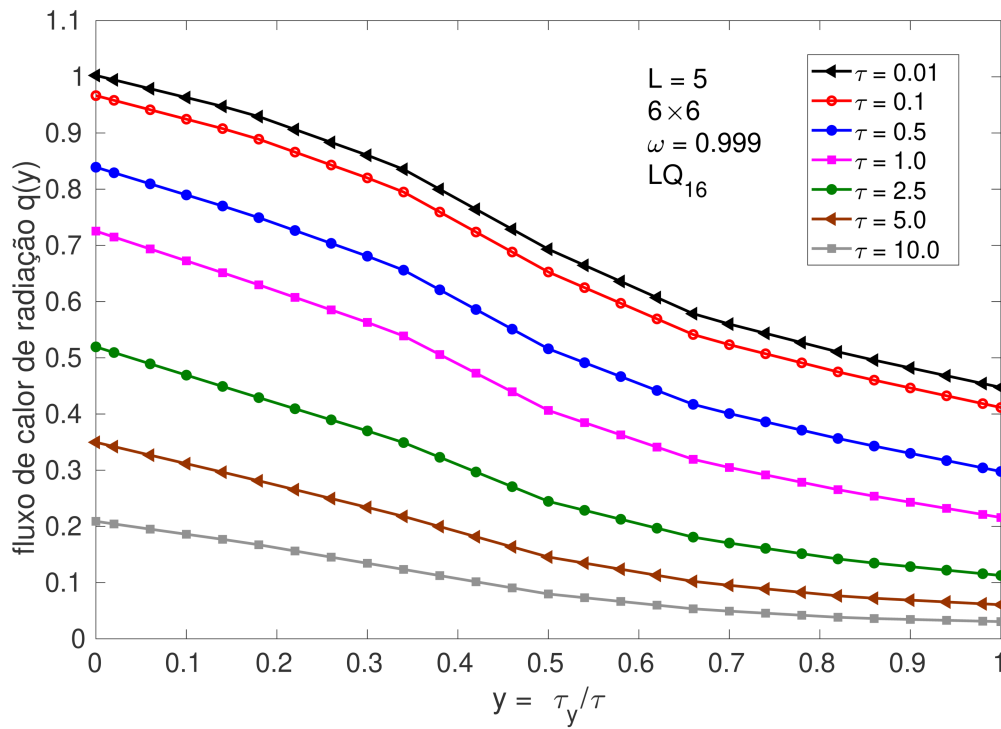


Figura 5.9 – Influência do comprimento óptico no fluxo de calor radiativo $q(y)$ ao longo da linha central ($\tau_x = 0.5\tau$) para $L = 5$, malha 6×6 , com LQ_{16} e $\omega = 0.999$.

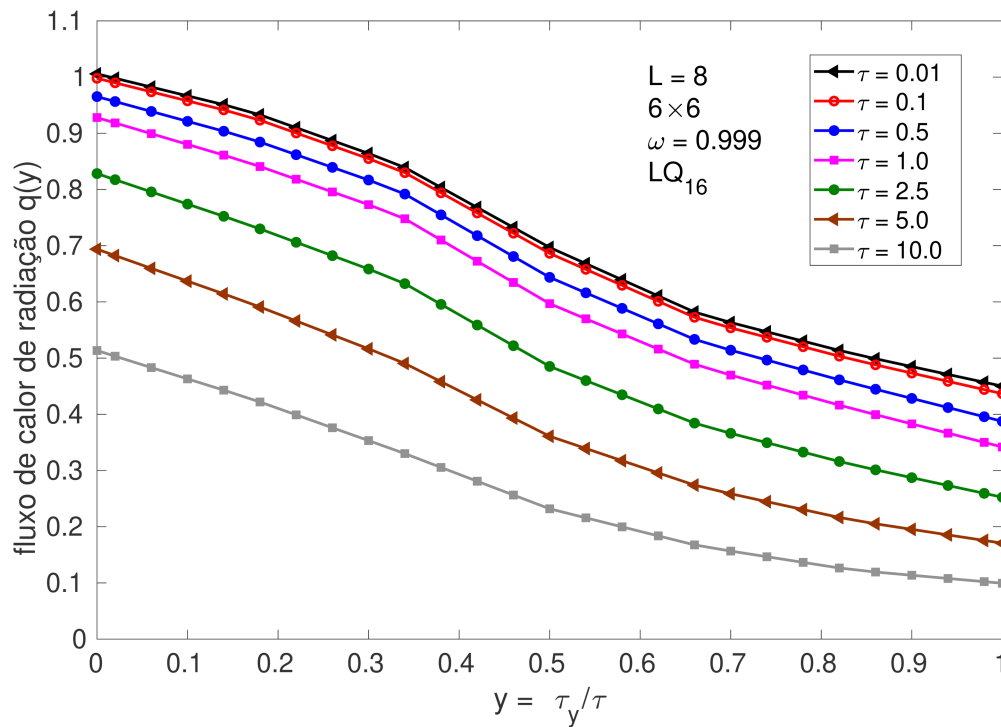


Figura 5.10 – Influência do comprimento óptico no fluxo de calor radiativo $q(y)$ ao longo da linha central ($\tau_x = 0.5\tau$) para $L = 8$, malha 6×6 , com LQ_{16} e $\omega = 0.999$.

Analisa-se também a reflectividade na parede, ρ , considerando um meio cinza e puramente espalhador. Apresenta-se o fluxo de calor radiativo $q(y)$ ao longo da linha central ($x = 0.5$) para malha 10×10 , com quadratura LQ_{16} , $\omega = 0.999$ e $\tau = 1$ para diferentes valores de reflectividade (ρ). Na Figura 5.11 apresenta-se o fluxo $q(y)$ para o grau de anisotropia $L = 5$ e na Figura 5.12 para anisotropia $L = 8$. Nota-se que à medida que a reflectividade ρ aumenta, a emissividade da superfície ($\epsilon_w = 1 - \rho$) torna-se menor, e pode-se observar que a distribuição angular do fluxo de calor radiativo $q(y)$ torna-se mais uniforme e o fluxo diminui.

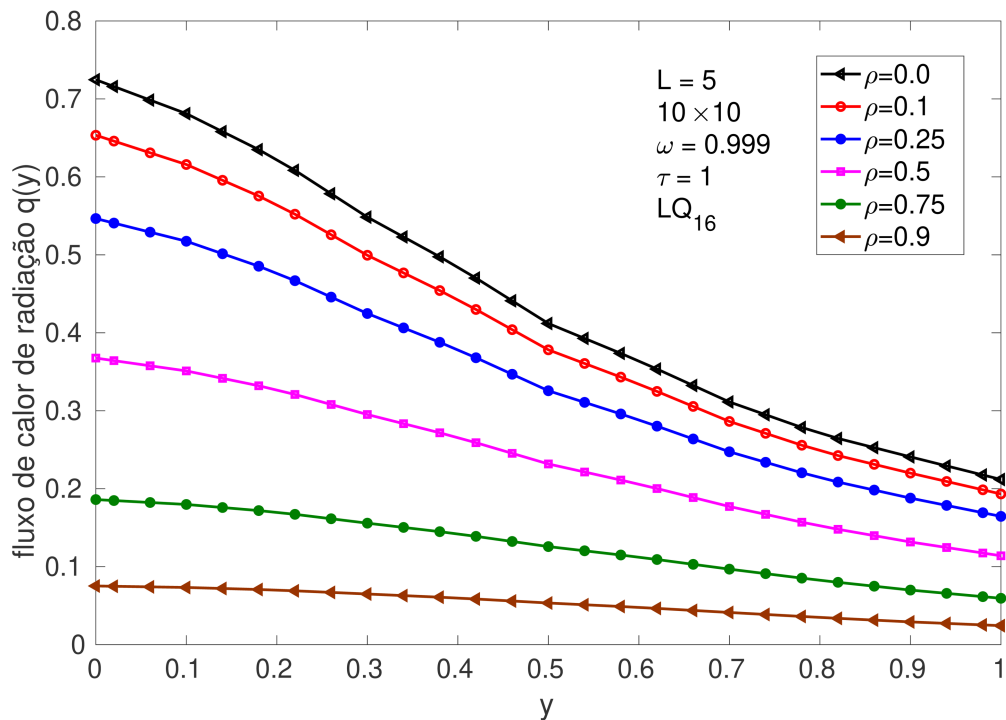


Figura 5.11 – Influência da reflectividade na parede no fluxo de calor radiativo na linha central para $L = 5$, malha 10×10 , com LQ_{16} ($N_d = 36$), $\omega = 0.999$ e $\tau = 1$.

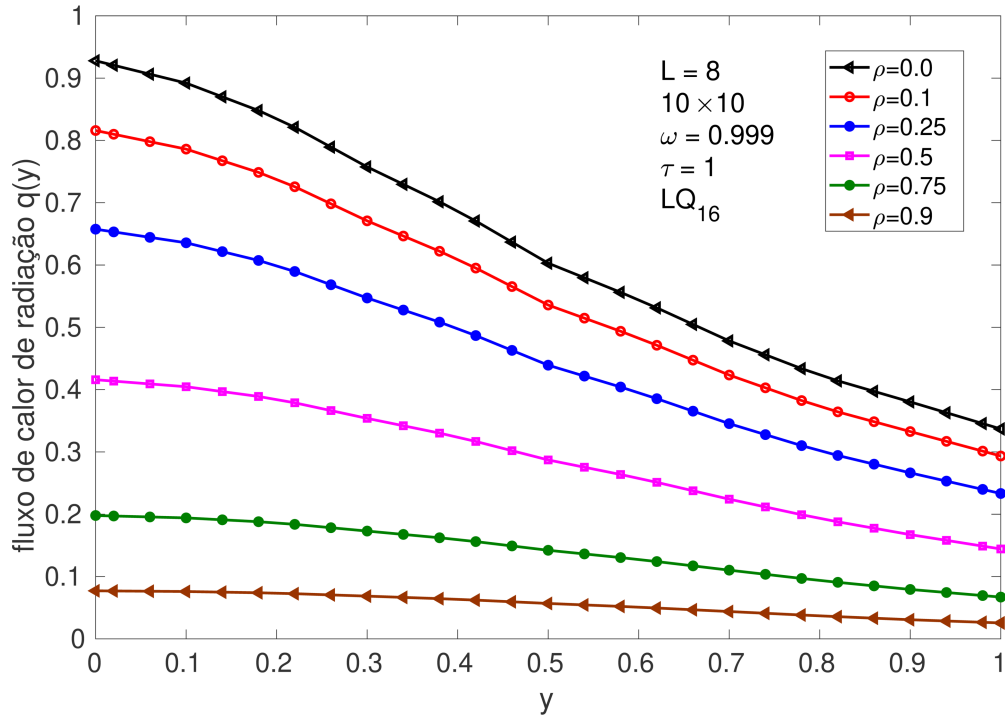


Figura 5.12 – Influência da reflectividade na parede no fluxo de calor radiativo na linha central para $L = 8$, malha 10×10 , com LQ_{16} ($N_d = 36$), $\omega = 0.999$ e $\tau = 1$.

5.6 Resultados ADO-Nodal para a Intensidade Média por Seção do Domínio

Para investigar o comportamento da solução ADO-Nodal com relação ao refinamento da malha e ordem de quadratura analisa-se outra grandeza, a saber a intensidade média por seção do domínio, ϕ_s , determinada através da Equação 5.4. Apresenta-se esta quantidade considerando diferentes quadraturas, espessuras ópticas τ e o albedo de espalhamento ω .

Considera-se que o domínio é dividido em quatro seções, conforme Figura 5.13, a saber: seção *I* entre $[0, a/2] \times [0, b/2]$; seção *II* entre $[a/2, a] \times [0, b/2]$; seção *III* entre $[0, a/2] \times [b/2, b]$ e seção *IV* entre $[a/2, a] \times [b/2, b]$.

Devido as condições de contorno impostas, o problema possui simetria em $x = a/2$, assim obtêm-se que os resultados gerados considerando a seção *I* são iguais aos resultados com a seção *II* e os valores obtidos na seção *III* são coincidentes aos da seção *IV*.

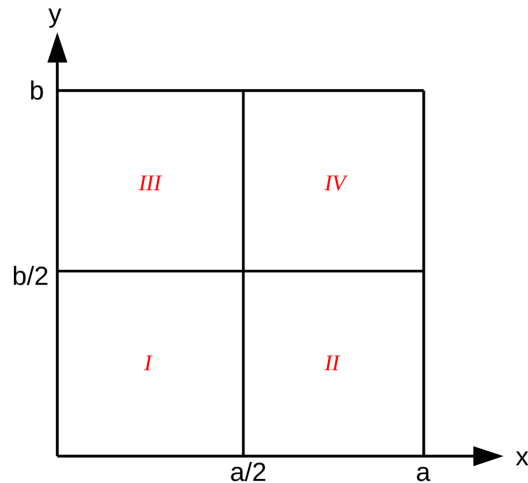


Figura 5.13 – Representação das seções do domínio.

Nas Tabelas 5.27 e 5.28 apresentam-se os resultados para a intensidade média por seção ϕ_s , com anisotropia $L = 2$ para uma malha 26×26 , com $\omega = 0.999$ e $\omega = 0.5$ e três diferentes espessuras ópticas $\tau = 1, 5, 10$ para as quadraturas LQ_N [Lewis e Miller, 1984], $P_N T_N S_N$ [Longoni e Haghighat, 2001, 2002] e QR com acoplamento triangular (QR_T) [Hu, 2018]. Na Tabela 5.27 apresentam-se os resultados ϕ_s considerando a seção I (ou II) do domínio e na Tabela 5.28 considerando a seção III (ou IV). Até onde se sabe, embora o método usado na referência [Kim e Lee, 1988] também seja de caráter nodal, a análise das quantidades médias por seção para este problema não está disponível na literatura.

Analisando nas Tabelas 5.27 e 5.28 as intensidades médias por seção ϕ_s obtêm-se de dois a cinco dígitos significativos em concordância à medida que é aumentado o número de direções por octante para cada quadratura. Ao comparar os valores obtidos considerando o número de direções por octante $N_d = 36$, pela formulação ADO, observa-se até três dígitos significativos em concordância entre as quadraturas. Além disso, observa-se que com a quadratura QR_T o método apresentou bom desempenho, com mais dígitos em concordância do que as outras quadraturas analisadas.

Os valores apresentados na Tabela 5.27 são representados graficamente na Figura 5.14. Observa-se que para todas as quadraturas analisadas a intensidade média por seção ϕ_s está convergindo com o aumento das direções por octante.

Tabela 5.27 – Intensidade média por seção ϕ_s , seção *I* e *II*, $L = 2$, 26×26 .

N_d	$\omega = 0.999$			$\omega = 0.5$		
	$\tau = 1$	$\tau = 5$	$\tau = 10$	$\tau = 1$	$\tau = 5$	$\tau = 10$
Quadratura Simétrica de Nível LQ_N						
3	0.37683	0.40810	0.41355	0.28648	0.13887	0.077694
6	0.37241	0.40735	0.41326	0.28130	0.13735	0.076744
10	0.37099	0.40708	0.41314	0.27931	0.13661	0.076287
21	0.36995	0.40688	0.41306	0.27788	0.13603	0.075945
36	0.36941	0.40680	0.41302	0.27716	0.13578	0.075801
Quadratura Legendre-Chebyshev Triangular $P_N T_N S_N$						
3	0.37829	0.40859	0.41376	0.28805	0.13936	0.077963
6	0.37280	0.40741	0.41328	0.28141	0.13733	0.076736
10	0.37099	0.40707	0.41313	0.27915	0.13654	0.076248
15	0.37012	0.40692	0.41307	0.27805	0.13613	0.076003
21	0.36961	0.40684	0.41304	0.27739	0.13589	0.075864
28	0.36931	0.40679	0.41302	0.27701	0.13574	0.075776
36	0.36914	0.40676	0.41301	0.27677	0.13564	0.075718
Quadratura Quadruple Range Triangular QR_T						
3	0.36865	0.40551	0.41244	0.27736	0.13602	0.076105
6	0.36971	0.40650	0.41290	0.27575	0.13550	0.075602
10	0.36849	0.40663	0.41296	0.27606	0.13533	0.075527
15	0.36840	0.40664	0.41297	0.27586	0.13529	0.075511
21	0.36849	0.40665	0.41297	0.27591	0.13529	0.075510
28	0.36852	0.40665	0.41297	0.27590	0.13529	0.075510
36	0.36848	0.40665	0.41297	0.27587	0.13528	0.075510

Tabela 5.28 – Intensidade média por seção ϕ_s , seção III e IV, $L = 2$, 26×26 .

N_d	$\omega = 0.999$			$\omega = 0.5$		
	$\tau = 1$	$\tau = 5$	$\tau = 10$	$\tau = 1$	$\tau = 5$	$\tau = 10$
Quadratura Simétrica de Nível LQ_N						
3	0.12278	0.88532(-1) ^a	0.76281(-1)	0.77252(-1)	0.52752(-2) ^b	0.22211(-3) ^c
6	0.12719	0.89264(-1)	0.76534(-1)	0.80721(-1)	0.52941(-2)	0.22063(-3)
10	0.12860	0.89524(-1)	0.76633(-1)	0.81689(-1)	0.53043(-2)	0.22221(-3)
21	0.12965	0.89711(-1)	0.76700(-1)	0.82416(-1)	0.53267(-2)	0.22345(-3)
36	0.13018	0.89788(-1)	0.76723(-1)	0.82817(-1)	0.53389(-2)	0.22382(-3)
Quadratura Legendre-Chebyshev Triangular $P_N T_N S_N$						
3	0.12132	0.88058(-1)	0.76084(-1)	0.76040(-1)	0.51522(-2)	0.21626(-3)
6	0.12680	0.89204(-1)	0.76514(-1)	0.80324(-1)	0.52785(-2)	0.22049(-3)
10	0.12861	0.89530(-1)	0.76636(-1)	0.81677(-1)	0.53064(-2)	0.22266(-3)
15	0.12947	0.89677(-1)	0.76687(-1)	0.82308(-1)	0.53249(-2)	0.22344(-3)
21	0.12999	0.89757(-1)	0.76714(-1)	0.82687(-1)	0.53362(-2)	0.22379(-3)
28	0.13028	0.89803(-1)	0.76730(-1)	0.82889(-1)	0.53424(-2)	0.22399(-3)
36	0.13045	0.89833(-1)	0.76740(-1)	0.83006(-1)	0.53462(-2)	0.22412(-3)
Quadratura Quadruple Range Triangular QR_T						
3	0.13095	0.91097(-1)	0.77320(-1)	0.83821(-1)	0.58854(-2)	0.24757(-3)
6	0.13168	0.90082(-1)	0.76838(-1)	0.84113(-1)	0.53593(-2)	0.22513(-3)
10	0.13110	0.89953(-1)	0.76782(-1)	0.83493(-1)	0.53591(-2)	0.22482(-3)
15	0.13119	0.89941(-1)	0.76775(-1)	0.83529(-1)	0.53620(-2)	0.22449(-3)
21	0.13110	0.89933(-1)	0.76775(-1)	0.83437(-1)	0.53591(-2)	0.22451(-3)
28	0.13107	0.89932(-1)	0.76775(-1)	0.83414(-1)	0.53589(-2)	0.22454(-3)
36	0.13111	0.89933(-1)	0.76775(-1)	0.83447(-1)	0.53593(-2)	0.22454(-3)

^a 0.88532(-1) lê-se 0.88532×10^{-1} ^b 0.52752(-2) lê-se 0.52572×10^{-2}

^c 0.22211(-3) lê-se 0.22211×10^{-3}

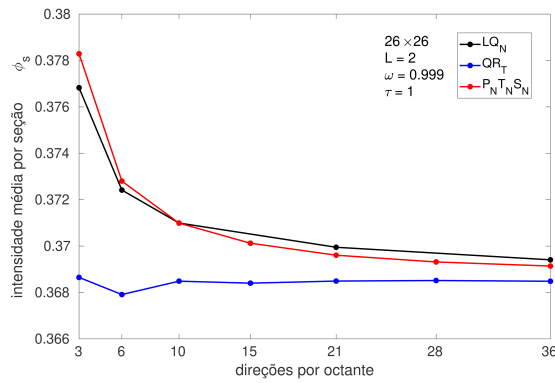
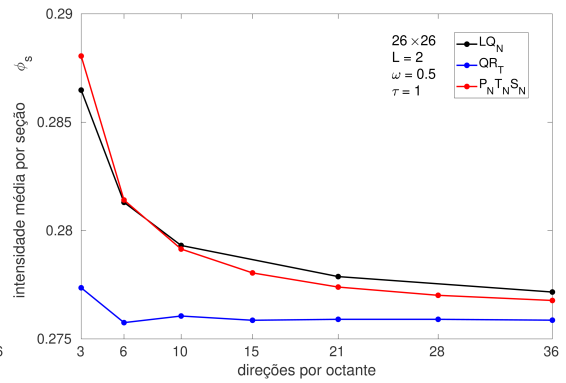
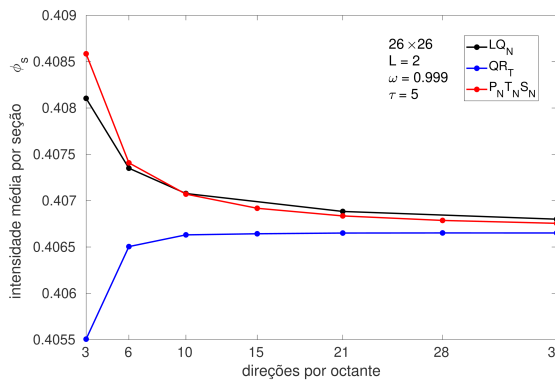
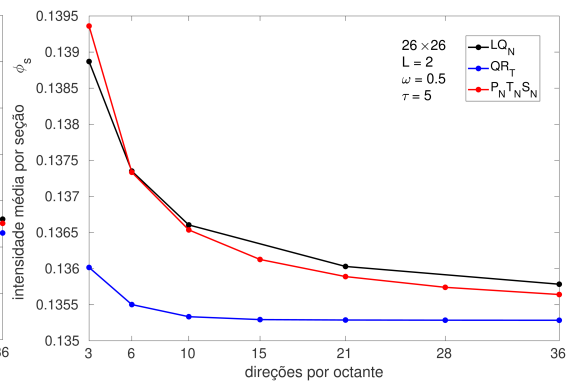
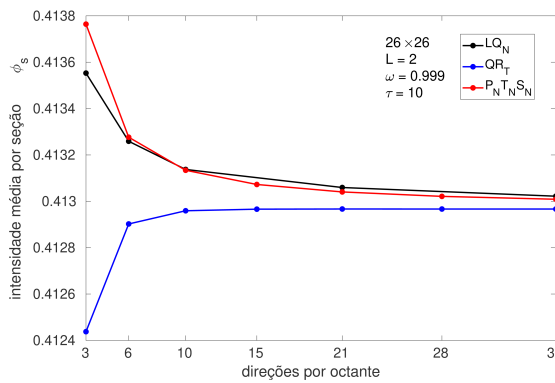
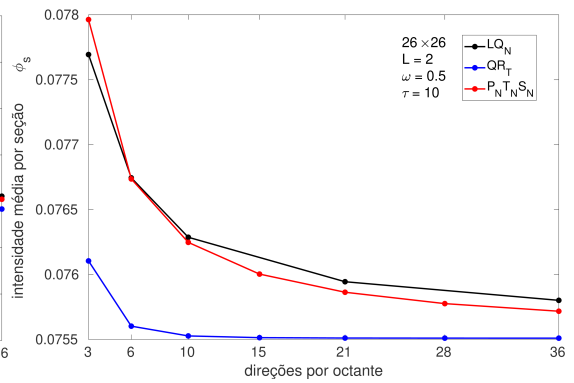
(a) $\tau = 1$ e $\omega = 0.999$.(b) $\tau = 1$ e $\omega = 0.5$.(c) $\tau = 5$ e $\omega = 0.999$.(d) $\tau = 5$ e $\omega = 0.5$.(e) $\tau = 10$ e $\omega = 0.999$.(f) $\tau = 10$ e $\omega = 0.5$.

Figura 5.14 – Intensidade média por seção ϕ_s , seção *I* e *II*, para diferentes ordens das quadraturas, variando o albedo e o comprimento óptico para $L = 2$ e malha 26×26 .

Na Figura 5.15 apresenta-se o erro relativo percentual entre duas aproximações de ordem de quadratura subsequentes para a intensidade média por seção ϕ_s considerando os valores apresentados na Tabela 5.27 para as três quadraturas.

Considerando a quadratura LQ_N obtém-se o erro relativo percentual entre as direções por octante $[21] \times [36]$ conforme os albedos:

- $\omega = 0.999$:
 - para $\tau = 1$ o erro relativo percentual é menor que 0.15%.
 - para $\tau = 5$ o erro relativo percentual é menor que 0.02%.
 - para $\tau = 10$ o erro relativo percentual é menor que 0.009%.
- $\omega = 0.5$:
 - para $\tau = 1$ o erro relativo percentual é menor que 0.26%.
 - para $\tau = 5$ o erro relativo percentual é menor que 0.18%.
 - para $\tau = 10$ o erro relativo percentual é menor que 0.19%.

Considerando a quadratura $P_N T_N S_N$ obtém-se o erro relativo percentual entre as direções por octante $[28] \times [36]$ conforme os albedos:

- $\omega = 0.999$:
 - para $\tau = 1$ o erro relativo percentual é menor que 0.05%.
 - para $\tau = 5$ o erro relativo percentual é menor que 0.008%.
 - para $\tau = 10$ o erro relativo percentual é menor que 0.003%.
- $\omega = 0.5$:
 - para $\tau = 1$ o erro relativo percentual é menor que 0.09%.
 - para $\tau = 5$ o erro relativo percentual é menor que 0.07%.
 - para $\tau = 10$ o erro relativo percentual é menor que 0.08%.

Considerando a quadratura QR_T obtém-se o erro relativo percentual entre as direções por octante $[28] \times [36]$ conforme os albedos:

- $\omega = 0.999$:

- para $\tau = 1$ o erro relativo percentual é menor que 0.009%.
 - para $\tau = 5$ o erro relativo percentual é menor que 0.00009%.
 - para $\tau = 10$ o erro relativo percentual é menor que 0.00003%.
- $\omega = 0.5$:
- para $\tau = 1$ o erro relativo percentual é menor que 0.014%.
 - para $\tau = 5$ o erro relativo percentual é menor que 0.0008%.
 - para $\tau = 10$ o erro relativo percentual é menor que 0.0003%.

Observa-se que na maioria dos casos analisados nas diferentes quadraturas o comprimento óptico $\tau = 10$ e o albedo $\omega = 0.999$ apresentaram o menor erro relativo.

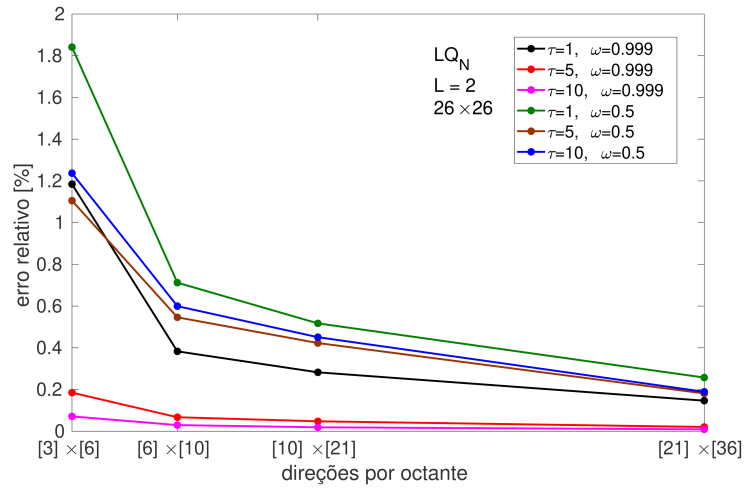
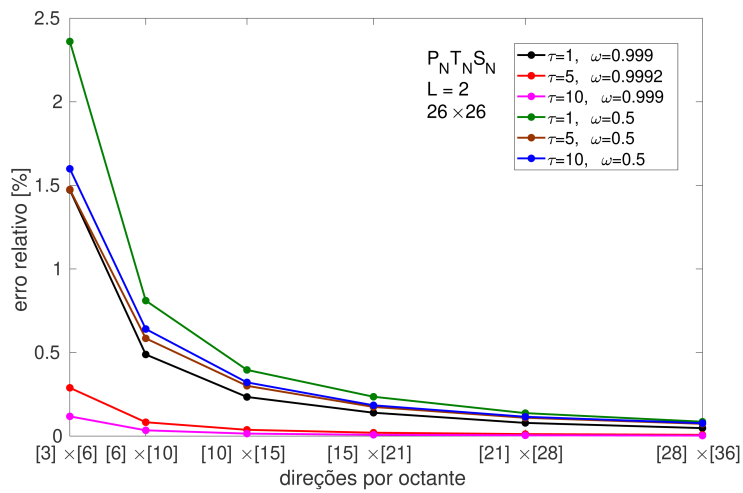
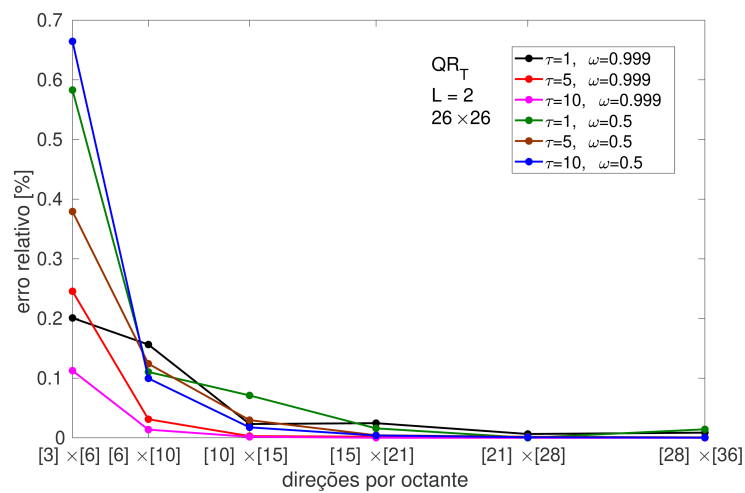
(a) LQ_N (b) $P_N T_N S_N$ (c) QR_T

Figura 5.15 – Erro relativo percentual entre duas ordens subsequentes de quadratura para a intensidade média por seção ϕ_s , seção I e II , com malha 26×26 e $L = 2$.

Na Figura 5.16 apresentam-se os valores da intensidade média por seção ϕ_s para $L = 2$, $\omega = 0.999$ e $\tau = 1$. Na Figura 5.16a considera-se a seção *I* (ou *II*) do domínio e na Figura 5.16b considera-se a seção *III* (ou *IV*). As quadraturas utilizadas são LQ_N [Lewis e Miller, 1984], $P_N T_N S_N$ [Lathrop e Carlson, 1965; Cacuci, 2010; Longoni e Haghghat, 2001, 2002], $P_N T_N$ [Lathrop e Carlson, 1965; Cacuci, 2010; Longoni e Haghghat, 2001, 2002], QR [Abu-Shumays, 1977, 2001; Spence, 2015] com acoplamento compatível QR_C [Abu-Shumays, 1977], com acoplamento quadrangular QR_Q [Spence, 2015] e com acoplamento triangular QR_T [Hu, 2018]. Considera-se o número de direções por octante $N_d = 36$ exceto para QR_C cujo número de direções é $N_d = 32$. Geram-se resultados para as malhas 4×4 , 10×10 , 20×20 , 26×26 e 30×30 .

Observa-se que para todas as quadraturas analisadas a partir da malha 26×26 a intensidade média por seção ϕ_s está convergindo. Os valores da intensidade ϕ_s concordam em até quatro dígitos com o aumento da malha de 26×26 para 30×30 em todas as quadraturas.

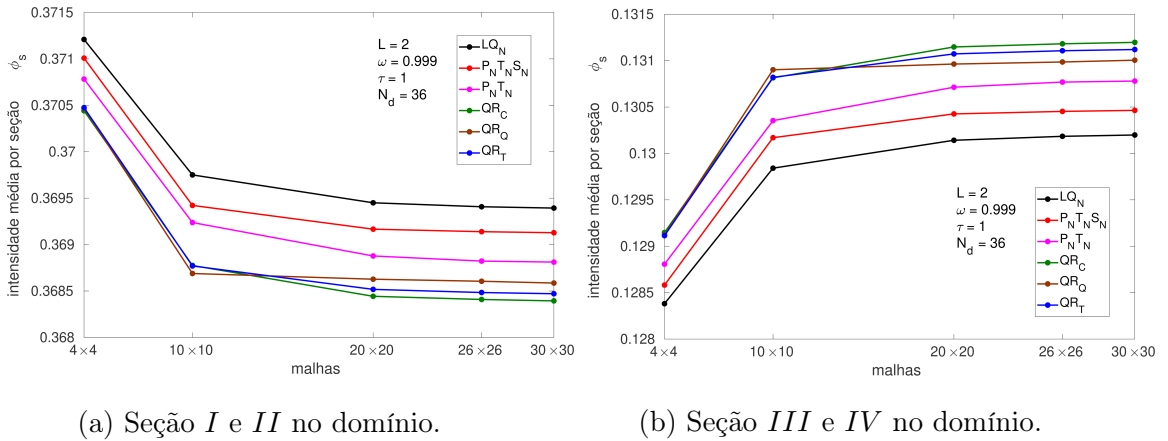


Figura 5.16 – Intensidade média por seção ϕ_s com o aumento da malha para diferentes quadraturas considerando $L = 2$, $\omega = 0.999$ e $\tau = 1$.

Na Figura 5.17 apresenta-se o erro relativo percentual calculado entre duas malhas para a intensidade média por seção ϕ_s mostrada na Figura 5.16. Considera-se $L = 2$, $\omega = 0.999$ e $\tau = 1$ para diferentes quadraturas com $N_d = 36$ para as seções *I* (ou *II*) e *III* (ou *IV*) do domínio. Abaixo, apresenta-se o erro relativo percentual entre as malhas para todas as quadraturas de acordo com a seção do domínio:

- Seção *I* (ou *II*):

- entre as malhas 10×10 e 20×20 o erro relativo é menor que 0.1%.
 - entre as malhas 20×20 e 26×26 o erro relativo é menor que 0.016%.
 - entre as malhas 26×26 e 30×30 o erro relativo é menor que 0.006%.
- Seção *III* (ou *IV*):
- entre as malhas 10×10 e 20×20 o erro relativo é menor que 0.3%.
 - entre as malhas 20×20 e 26×26 o erro relativo é menor que 0.045%.
 - entre as malhas 26×26 e 30×30 o erro relativo é menor que 0.015%.

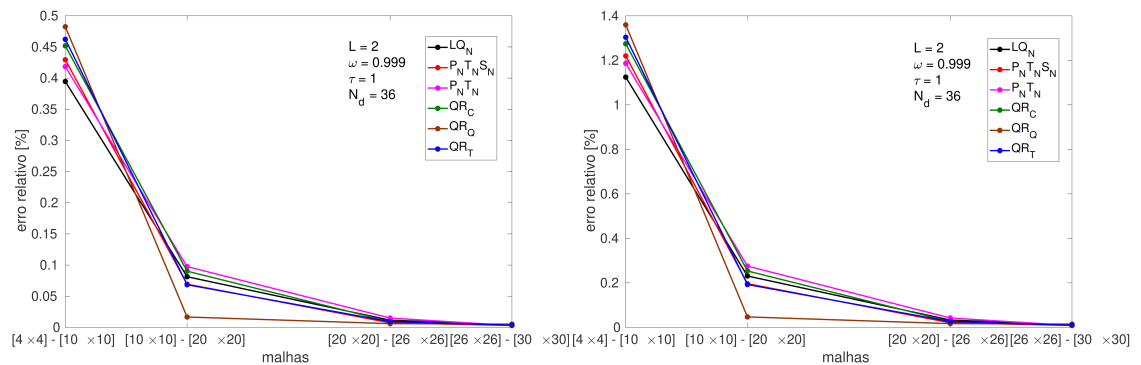
(a) Seção *I* e *II* no domínio.(b) Seção *III* e *IV* no domínio.

Figura 5.17 – Erro relativo percentual entre duas malhas para a intensidade média por seção ϕ_s para diferentes quadraturas considerando $L = 2$, $\omega = 0.999$ e $\tau = 1$.

Na Figura 5.18 apresenta-se a intensidade média por seção ϕ_s com o aumento da ordem de quadratura LQ_N para $L = 2$, $\omega = 0.999$ e comprimento óptico $\tau = 1, 5, 10$, considerando a seção *I* (ou *II*) do domínio para as malhas 10×10 , 20×20 e 26×26 . Fixando a malha e aumentando a ordem de quadratura têm-se de dois a três dígitos em concordância para $\tau = 1$ e de três a quatro dígitos para $\tau = 5$ e $\tau = 10$.

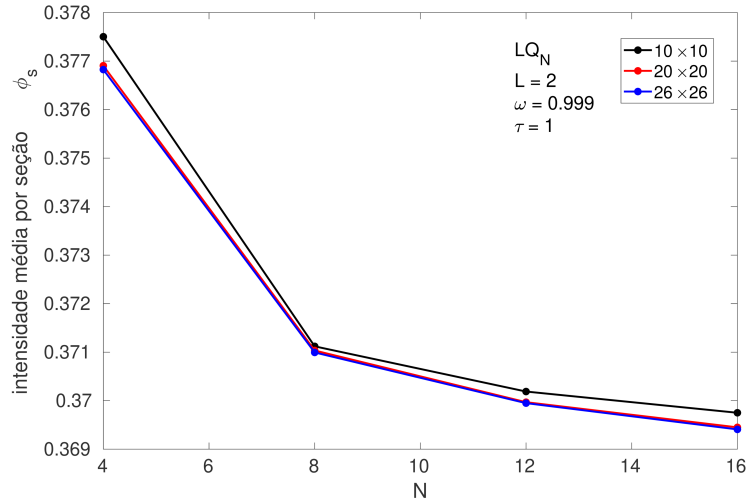
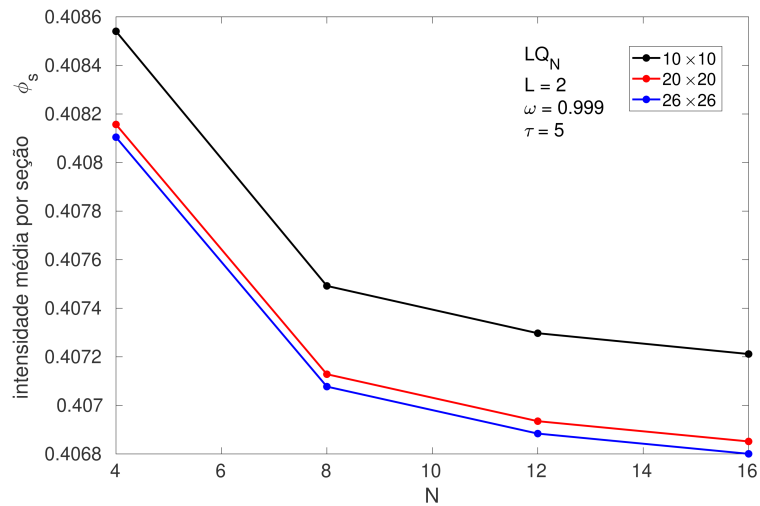
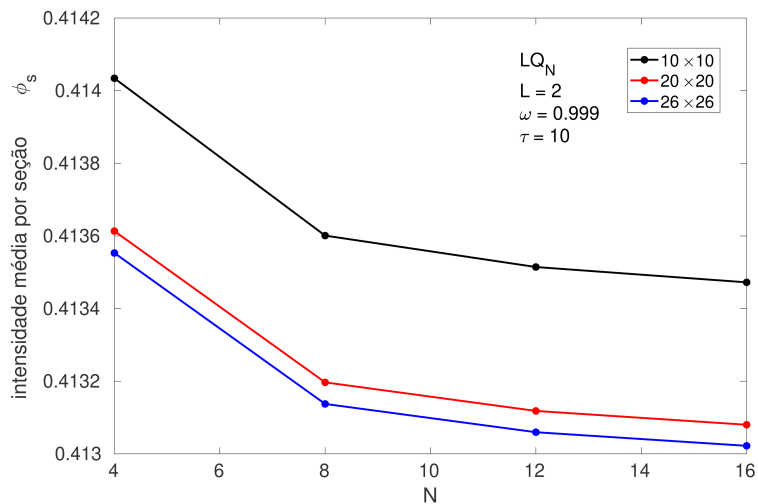
(a) Seção *I* e *II* no domínio com $\tau = 1$.(b) Seção *I* e *II* no domínio com $\tau = 5$.(c) Seção *I* e *II* no domínio com $\tau = 10$.

Figura 5.18 – Intensidade média por seção ϕ_s do domínio com o aumento da ordem de quadratura LQ_N para diferentes malhas e comprimentos ópticos, com $L = 2$ e $\omega = 0.999$.

Na Figura 5.19 apresenta-se o erro relativo percentual entre duas aproximações subsequentes de ordem de quadratura LQ_N para a intensidade média por seção ϕ_s apresentada na Figura 5.18. Considera-se $L = 2$, $\omega = 0.999$ e comprimento óptico $\tau = 1, 5, 10$ na seção I (ou II) do domínio para as malhas 10×10 , 20×20 e 26×26 . Abaixo, apresenta-se o erro relativo percentual entre as ordens de quadratura para todas as malhas de acordo com o comprimento óptico:

- entre $N = 8$ e $N = 12$:

- para $\tau = 1$ o erro relativo é menor que 0.29%.
- para $\tau = 5$ o erro relativo é menor que 0.05%.
- para $\tau = 10$ o erro relativo é menor que 0.02%.

- entre $N = 12$ e $N = 16$:

- para $\tau = 1$ o erro relativo é menor que 0.15%.
- para $\tau = 5$ o erro relativo é menor que 0.02%.
- para $\tau = 10$ o erro relativo é menor que 0.01%.

Observa-se que com o aumento do comprimento óptico τ o erro relativo entre as ordens da quadratura é menor, e isso ocorre em todas as quadraturas analisadas.

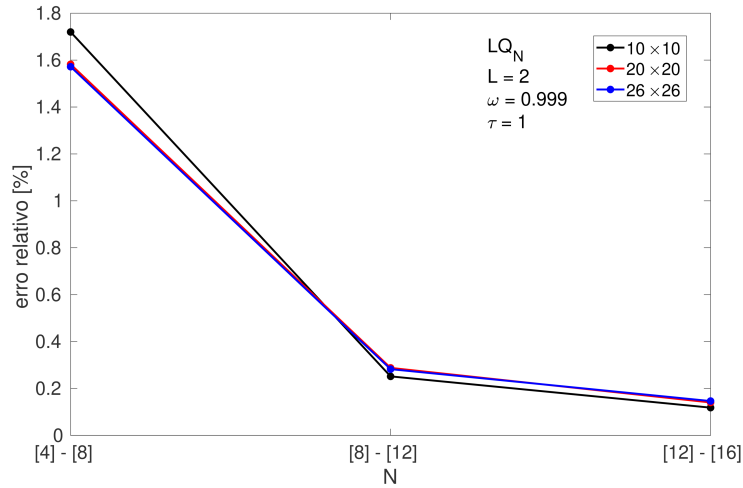
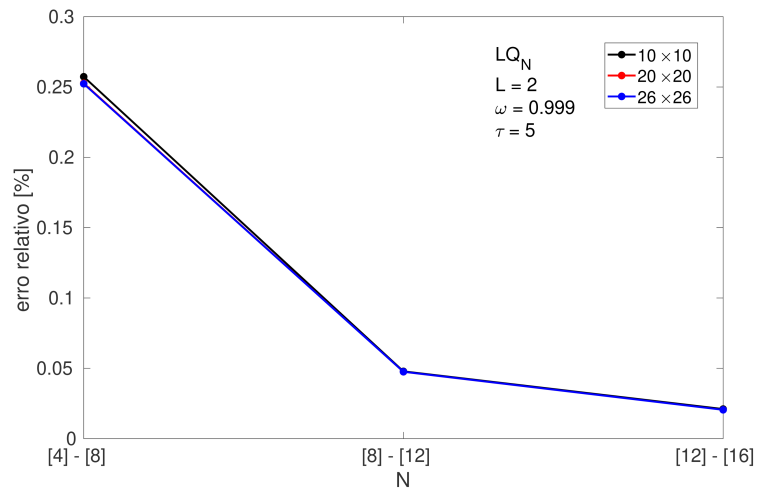
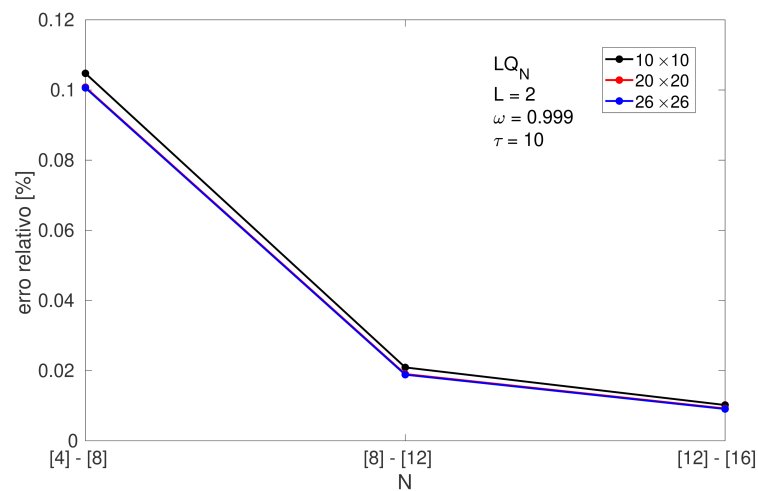
(a) Seção *I* e *II* no domínio com $\tau = 1$.(b) Seção *I* e *II* no domínio com $\tau = 5$.(c) Seção *I* e *II* no domínio com $\tau = 10$.

Figura 5.19 – Erro relativo percentual entre duas ordens subsequentes da quadratura LQ_N para a intensidade média por seção ϕ_s do domínio com diferentes malhas e comprimentos ópticos, para $L = 2$ e $\omega = 0.999$.

Nas Tabelas 5.29 à 5.32 apresentam-se os resultados para a intensidade média por seção ϕ_s do domínio, com grau de anisotropia $L = 8$, considerando $\omega = 0.999$ e $\omega = 0.5$ e três diferentes espessuras ópticas $\tau = 1, 5, 10$. Consideram-se cinco configurações de malha: 4×4 , 10×10 , 20×20 , 26×26 e 30×30 . E também diferentes números de direções por octante para as quadraturas LQ_N [Lewis e Miller, 1984], $P_N T_N$ [Longoni e Haghighat, 2001, 2002], $P_N T_N S_N$ [Longoni e Haghighat, 2001, 2002] e QR [Abu-Shumays, 1977, 2001; Spence, 2015] com acoplamento compatível QR_C , acoplamento quadrangular QR_T e com acoplamento triangular QR_T . Na Tabela 5.29 apresentam-se os resultados ϕ_s considerando a seção I (ou II) do domínio e na Tabela 5.30 considerando a seção III (ou IV), ambas para $\omega = 0.999$. E na Tabela 5.31 apresentam-se os resultados ϕ_s considerando a seção I (ou II) do domínio e na Tabela 5.32 considerando a seção III (ou IV), ambas para $\omega = 0.5$.

Apresentam-se a seguir as análises obtidas nas Tabelas 5.29 e 5.30 onde o albedo considerado é $\omega = 0.999$:

- Em uma primeira análise, fixa-se o número de direções por octante e faz-se a comparação entre as intensidades médias por seção ϕ_s conforme o aumento das malhas nas diferentes quadraturas. Verifica-se para a seção I e II de três a quatro dígitos de concordância com o refinamento da malha para todas as quadraturas e comprimentos ópticos. Na região III e IV , observa-se uma convergência de até quatro dígitos.
- Na segunda análise, fixa-se a malha e faz-se uma comparação entre as intensidades médias por seção ϕ_s de acordo com o aumento do número de direções por octante.
 - Observa-se para a seção I e II uma convergência de dois a três dígitos com a quadratura LQ_N conforme aumento do número de direções para os três comprimentos ópticos. Com as quadraturas $P_N T_N S_N$ e $P_N T_N$ a convergência está em três a quatro dígitos, e em cinco a seis dígitos de concordância com a quadratura QR .
 - Na região III e IV , observa-se para a quadratura LQ_N uma convergência de três dígitos nos três comprimentos ópticos. Com as quadraturas $P_N T_N S_N$ e $P_N T_N$ a convergência está de dois a três dígitos com $\tau = 1$ chegando a quatro dígitos com um maior aumento das direções, e de três a quatro dígitos para

$\tau = 5, 10$, chegando a cinco dígitos com um maior aumento das direções para $\tau = 10$. Para a quadratura QR a convergência está em quatro dígitos com $\tau = 1$ chegando a cinco dígitos com um maior aumento das direções, e em cinco dígitos para $\tau = 5, 10$, chegando a seis com um maior aumento das direções.

Ainda, apresentam-se a seguir as análises obtidas nas Tabelas 5.31 e 5.32 onde o albedo considerado é $\omega = 0.5$:

- Na primeira análise, fixa-se o número de direções por octante e faz-se a comparação entre as intensidades médias por seção ϕ_s conforme o aumento das malhas nas diferentes quadraturas. Verifica-se para a seção *I* e *II* a convergência de três a quatro dígitos para $\tau = 1, 10$ com o refinamento da malha para todas as quadraturas e de cinco a seis dígitos de concordância para $\tau = 5$. Na região *III* e *IV*, observa-se uma convergência de três a quatro dígitos com $\tau = 1, 5$ e de dois a três dígitos com $\tau = 10$.
- Na segunda análise, fixa-se a malha e faz-se uma comparação entre as intensidades médias por seção ϕ_s de acordo com o aumento do número de direções por octante.
 - Observa-se para a seção *I* e *II* uma convergência de dois a três dígitos com a quadratura LQ_N conforme aumento do número de direções para os três comprimentos ópticos. Com as quadraturas $P_N T_N S_N$ e $P_N T_N$ a convergência está em três dígitos e chegando a quatro dígitos com um maior aumento das direções. E para a quadratura QR a convergência está em quatro dígitos com $\tau = 1$ chegando a cinco dígitos com um maior aumento das direções, e de cinco a seis dígitos para $\tau = 5, 10$, fixando em seis dígitos com um maior aumento das direções.
 - Na região *III* e *IV*, observa-se para a quadratura LQ_N uma convergência de dois a três dígitos nos três comprimentos ópticos. Com as quadraturas $P_N T_N S_N$ e $P_N T_N$ a convergência está em dois dígitos com $\tau = 1$ chegando a três dígitos com um maior aumento das direções, e de três a quatro dígitos para $\tau = 5, 10$. Para a quadratura QR a convergência está em dois a três dígitos com $\tau = 1$ chegando a cinco dígitos com um maior aumento das direções, e de quatro a

cinco dígitos para $\tau = 5, 10$, chegando a seis dígitos com um maior aumento das direções.

Nota-se que com a malha fixa e o aumento do número de direções por octante a quadratura QR apresentou um melhor desempenho.

Tabela 5.29 – Intensidade média por seção ϕ_s , $L = 8$, $\omega = 0.999$, seção I e II .

N_d	$\tau = 1$					$\tau = 5$					$\tau = 10$				
	4×4	10×10	20×20	26×26	30×30	4×4	10×10	20×20	26×26	30×30	4×4	10×10	20×20	26×26	30×30
Quadratura Simétrica de Nível LQ_N															
3	0.35275	0.34993	0.34923	0.34913	0.34911	0.374134	0.372516	0.372263	0.372228	0.372217	0.391324	0.389364	0.389051	0.389007	0.388991
6	0.34587	0.34333	0.34320	0.34319	0.34317	0.371847	0.370392	0.370180	0.370152	0.370141	0.390182	0.388301	0.387992	0.387948	0.387932
10	0.34312	0.34131	0.34133	0.34129	0.34129	0.371105	0.369713	0.369504	0.369475	0.369464	0.389790	0.387943	0.387638	0.387594	0.387577
21	0.34118	0.34008	0.33993	0.33992	0.33991	0.370643	0.369275	0.369063	0.369033	0.369022	0.389537	0.387714	0.387414	0.387370	0.387353
36	0.34053	0.33952	0.33927	0.33923	0.33922	0.370458	0.369096	0.368884	0.368855	0.368844	0.389438	0.387622	0.387325	0.387281	0.387265
Quadratura Legendre-Chebyshev Quadrangular $P_N T_N$															
4	0.34528	0.34216	0.34134	0.34121	0.34116	0.372581	0.371009	0.370758	0.370724	0.370712	0.390604	0.388683	0.388373	0.388330	0.388314
9	0.34135	0.33945	0.33966	0.33962	0.33959	0.370953	0.369566	0.369362	0.369332	0.369321	0.389716	0.387873	0.387569	0.387525	0.387509
16	0.34043	0.33954	0.33945	0.33945	0.33945	0.370544	0.369186	0.368977	0.368947	0.368936	0.389488	0.387666	0.387367	0.387323	0.387307
25	0.34010	0.33921	0.33893	0.33890	0.33888	0.370374	0.369017	0.368807	0.368777	0.368766	0.389397	0.387583	0.387287	0.387244	0.387228
36	0.33994	0.33885	0.33854	0.33849	0.33848	0.370287	0.368932	0.368723	0.368693	0.368683	0.389352	0.387542	0.387248	0.387204	0.387189
49	0.33985	0.33863				0.370238	0.368884				0.389327	0.387518			
64	0.33979	0.33852				0.370208	0.368855				0.389311	0.387504			
81	0.33975	0.33863				0.370188	0.368884				0.389301	0.387518			
100	0.33971	0.33842				0.370174	0.368822				0.389293	0.387487			
Quadratura Legendre-Chebyshev Triangular $P_N T_N S_N$															
3	0.35458	0.35191	0.35121	0.35110	0.35106	0.375570	0.373925	0.373665	0.373629	0.373616	0.392387	0.390396	0.390081	0.390037	0.390021
6	0.34634	0.34397	0.34382	0.34376	0.34373	0.372014	0.370563	0.370351	0.370322	0.370311	0.390272	0.388388	0.388079	0.388035	0.388019
10	0.34309	0.34145	0.34136	0.34134	0.34132	0.371108	0.369716	0.369505	0.369476	0.369465	0.389783	0.387939	0.387634	0.387590	0.387574
15	0.34162	0.34036	0.34020	0.34018	0.34016	0.370736	0.369361	0.369149	0.369119	0.369108	0.389584	0.387756	0.387456	0.387412	0.387395
21	0.34088	0.33975	0.33954	0.33950	0.33949	0.370542	0.369175	0.368963	0.368933	0.368922	0.389482	0.387663	0.387365	0.387321	0.387305
28	0.34049	0.33936	0.33914	0.33912	0.33911	0.370427	0.369064	0.368854	0.368824	0.368813	0.389423	0.387608	0.387312	0.387269	0.387253
36	0.34025	0.33910	0.33891	0.33889		0.370354	0.368994	0.368785	0.368755		0.389385	0.387573	0.387279	0.387235	
45	0.34011	0.33893				0.370304	0.368946				0.389360	0.387549			
55	0.34001	0.33880				0.370268	0.368912				0.389341	0.387532			
66	0.33944	0.33871				0.370242	0.368887				0.389328	0.387520			
78	0.33989	0.33864				0.370222	0.368868				0.389318	0.387510			
91	0.33984	0.33859				0.370207	0.368853				0.389310	0.387503			
105	0.33981	0.33854				0.370195	0.368842				0.389304	0.387497			
Quadratura Quadruple Range Compatível QR_C															
18	0.33965	0.33825	0.33827	0.33826		0.370117	0.368768	0.368565	0.368536		0.389265	0.387461	0.387170	0.387128	
32	0.33955	0.33829	0.33801	0.33798		0.370119	0.368767	0.368561	0.368533		0.389264	0.387460	0.387170	0.387128	
50	0.33957	0.33826				0.370119	0.368768				0.389265	0.387461			
72	0.33957	0.33828				0.370119	0.368768				0.389265	0.387461			
98	0.33957	0.33828				0.370119	0.368768				0.389265	0.387461			
Quadratura Quadruple Range Quadrangular QR_Q															
9	0.33888	0.33851	0.33840	0.33843	0.33841	0.370244	0.368944	0.368742	0.368713	0.368703	0.389376	0.387586	0.387291	0.387247	0.387231
16	0.33965	0.33883	0.33860	0.33858	0.33857	0.370112	0.368761	0.368552	0.368522	0.368511	0.389255	0.387453	0.387163	0.387120	0.387105
25	0.33963	0.33802	0.33770	0.33767	0.33767	0.370110	0.368755	0.368549	0.368520	0.368510	0.389263	0.387459	0.387169	0.387127	0.387111
36	0.33958	0.33819	0.33821	0.33820		0.370118	0.368769	0.368566			0.389264	0.387460	0.387169		
49	0.33957	0.33834				0.370119	0.368768				0.389264	0.387460			
64	0.33957	0.33830				0.370119	0.368767				0.389265	0.387461			
81	0.33957	0.33827				0.370119	0.368768				0.389265	0.387461			
100	0.33957	0.33827				0.370119	0.368768				0.389265	0.387461			
Quadratura Quadruple Range Triangular QR_T															
6	0.33838	0.33726	0.33711	0.33714	0.33714	0.369521	0.368227	0.368026	0.367998	0.367988	0.388995	0.387212	0.386913	0.386868	0.386852
10	0.33893	0.33818	0.33799	0.33799	0.33798	0.370043	0.368701	0.368492	0.368462	0.368451	0.389221	0.387426	0.387134	0.387091	0.387075
15	0.33939	0.33821	0.33796	0.33793	0.33793	0.370100	0.368748	0.368540	0.368511	0.368500	0.389256	0.387454	0.387164	0.387122	0.387106
21	0.33956	0.33822	0.33808	0.33806	0.33805	0.370111	0.368762	0.368558	0.368529	0.368518	0.389262	0.387458	0.387168	0.387126	0.387111
28	0.33959	0.33826	0.33812	0.33809	0.33809	0.370116	0.368766	0.368561	0.368533	0.368522	0.389264	0.387460	0.387169	0.387127	0.387112
36	0.33959	0.33828	0.33809	0.33806	0.33805	0.370118	0.368767	0.368562	0.368533	0.368522	0.389264	0.387460	0.387169	0.387127	0.387112
45	0.33958	0.33828		0.33808		0.370119	0.368767		0.368534		0.389264	0.387460		0.387128	
55	0.33957	0.33827		0.33808		0.370119	0.368767				0.389265	0.387461			
66	0.33957	0.33827				0.370119	0.368768				0.389265	0.387461			
78	0.33957	0.33827				0.370119	0.368768				0.389265	0.387461			
91	0.33957	0.33828				0.370119	0.368768				0.389265	0.387461			
105	0.33957	0.33828				0.370119	0.368768				0.389265	0.387461			

Tabela 5.30 – Intensidade média por seção ϕ_s , $L = 8$, $\omega = 0.999$, seção III e IV.

N_d	$\tau = 1$					$\tau = 5$					$\tau = 10$				
	4 × 4	10 × 10	20 × 20	26 × 26	30 × 30	4 × 4	10 × 10	20 × 20	26 × 26	30 × 30	4 × 4	10 × 10	20 × 20	26 × 26	30 × 30
Quadratura Simétrica de Nível LQ_N															
3	0.14693	0.14975	0.15045	0.15055	0.15057	0.123984	0.125613	0.125868	0.125903	0.125915	0.104121	0.106142	0.106466	0.106511	0.106527
6	0.15379	0.15633	0.15646	0.15647	0.15648	0.126161	0.127628	0.127841	0.127870	0.127881	0.105011	0.106952	0.107273	0.107319	0.107336
10	0.15654	0.15834	0.15832	0.15836	0.15836	0.126891	0.128294	0.128506	0.128536	0.128546	0.105384	0.107288	0.107606	0.107652	0.107669
21	0.15847	0.15957	0.15972	0.15973	0.15974	0.127348	0.128726	0.128941	0.128971	0.128982	0.105628	0.107508	0.107820	0.107865	0.107882
36	0.15912	0.16013	0.16038	0.16041	0.16043	0.127528	0.128900	0.129114	0.129144	0.129156	0.105718	0.107579	0.107899	0.107944	0.107961
Quadratura Legendre-Chebyshev Quadrangular $P_N T_N$															
4	0.15438	0.15750	0.15833	0.15846	0.15850	0.125448	0.127031	0.127284	0.127318	0.127331	0.104633	0.106615	0.106937	0.106982	0.106998
9	0.15830	0.16020	0.16000	0.16003	0.16006	0.127040	0.128437	0.128644	0.128674	0.128685	0.105452	0.107353	0.107669	0.107715	0.107732
16	0.15922	0.16011	0.16020	0.16020	0.16020	0.127443	0.128812	0.129024	0.129054	0.129065	0.105673	0.107551	0.107861	0.107907	0.107924
25	0.15955	0.16044	0.16072	0.16075	0.16077	0.127612	0.128979	0.129191	0.129222	0.129233	0.105760	0.107630	0.107937	0.107983	0.107999
36	0.15971	0.16079	0.16111	0.16116	0.16117	0.127698	0.129063	0.129274	0.129304	0.129315	0.105803	0.107670	0.107975	0.108020	0.108036
49	0.15980	0.16101				0.127746	0.129110				0.105828	0.107692			
64	0.15986	0.16113				0.127776	0.129139				0.105843	0.107706			
81	0.15990	0.33863				0.127796	0.368884				0.105853	0.387518			
100	0.15993	0.16122				0.127810	0.129172				0.105860	0.107722			
Quadratura Legendre-Chebyshev Triangular $P_N T_N S_N$															
3	0.14513	0.14781	0.14781	0.14862	0.14865	0.122730	0.124384	0.124645	0.124681	0.124694	0.103457	0.105502	0.105828	0.105873	0.105889
6	0.15331	0.15568	0.15584	0.15589	0.15592	0.125996	0.127458	0.127672	0.127702	0.127713	0.104928	0.106871	0.107192	0.107238	0.107255
10	0.15657	0.15820	0.15829	0.15832	0.15833	0.126888	0.128290	0.128504	0.128534	0.128545	0.105390	0.107292	0.107609	0.107655	0.107672
15	0.15803	0.15929	0.15945	0.15947	0.15949	0.127255	0.128641	0.128855	0.128886	0.128896	0.105582	0.107466	0.107779	0.107825	0.107841
21	0.15876	0.15990	0.16011	0.16015	0.16016	0.127447	0.128825	0.129039	0.129069	0.129080	0.105680	0.107555	0.107865	0.107910	0.107927
28	0.15916	0.16029	0.16050	0.16053	0.16054	0.127560	0.128933	0.129146	0.129176	0.129187	0.105737	0.107607	0.107915	0.107960	0.107977
36	0.15939	0.16054	0.16074	0.16076		0.127633	0.129003	0.129214	0.129244		0.105773	0.107641	0.107946	0.107991	
45	0.15954	0.16072				0.127682	0.129050				0.105797	0.107663			
55	0.15964	0.16085				0.127717	0.129083				0.105815	0.107679			
66	0.15971	0.16094				0.127743	0.129108				0.105827	0.107691			
78	0.15976	0.16101				0.127763	0.129126				0.105837	0.107700			
91	0.15980	0.16106				0.127778	0.129141				0.105845	0.107707			
105	0.15984	0.16110				0.127790	0.129153				0.105851	0.107713			
Quadratura Quadruple Range Compatível QR_C															
18	0.16000	0.16140	0.16138	0.16139		0.127867	0.129226	0.129431	0.129459		0.105889	0.107749	0.108050	0.108094	
32	0.16009	0.16136	0.16164	0.16166		0.127865	0.129226	0.129434	0.129463		0.105888	0.107748	0.108049	0.108093	
50	0.16008	0.16138				0.127865	0.129225				0.105888	0.107747			
72	0.16008	0.16137				0.127865	0.129225				0.105888	0.107747			
98	0.16007	0.16137				0.127865	0.129225				0.105888	0.107747			
Quadratura Quadruple Range Quadrangular QR_Q															
9	0.16077	0.16113	0.16124	0.16122	0.16123	0.127748	0.129057	0.129261	0.129291	0.129301	0.105810	0.107654	0.107960	0.108006	0.108023
16	0.16000	0.16082	0.16104	0.16106	0.16108	0.127872	0.129233	0.129444	0.129474	0.129485	0.105898	0.107756	0.108056	0.108100	0.108117
25	0.16001	0.16163	0.16195	0.16198	0.16198	0.127873	0.129238	0.129446	0.129475	0.129486	0.105889	0.107749	0.108050	0.108094	0.108110
36	0.16006	0.16146	0.16144	0.16145		0.127866	0.129224	0.129429			0.105889	0.107748	0.108050		
49	0.16008	0.16131				0.127865	0.129225				0.105888	0.107748			
64	0.16008	0.16135				0.127865	0.129226				0.105888	0.107747			
81	0.16008	0.16138				0.127865	0.129225				0.105888	0.107747			
100	0.16008	0.16138				0.127865	0.129225				0.105888	0.107747			
Quadratura Quadruple Range Triangular QR_T															
6	0.16127	0.16240	0.16254	0.16251	0.16252	0.128494	0.129800	0.130003	0.130032	0.130042	0.106224	0.108063	0.108374	0.108420	0.108437
10	0.16072	0.16147	0.16165	0.16166	0.16167	0.127940	0.129292	0.129504	0.129534	0.129545	0.105930	0.107781	0.108084	0.108129	0.108145
15	0.16026	0.16144	0.16169	0.16171	0.16172	0.127883	0.129245	0.129455	0.129484	0.129495	0.105896	0.107754	0.108054	0.108098	0.108115
21	0.16009	0.16143	0.16157	0.16159	0.16160	0.127872	0.129231	0.129437	0.129467	0.129477	0.105890	0.107750	0.108050	0.108094	0.108110
28	0.16005	0.16138	0.16153	0.16155	0.16156	0.127867	0.129227	0.129434	0.129463	0.129474	0.105889	0.107748	0.108050	0.108093	0.108110
36	0.16006	0.16137	0.16156	0.16158	0.16159	0.127866	0.129226	0.129433	0.129463	0.129473	0.105888	0.107748	0.108049	0.108093	0.108109
45	0.16007	0.16137		0.16157		0.127865	0.129226		0.129462		0.105888	0.107748		0.108093	
55	0.16007	0.16137		0.16157		0.127865	0.129226				0.105888	0.107747			
66	0.16008	0.16137				0.127865	0.129225				0.105888	0.107747			
78	0.16008	0.16137				0.127865	0.129225				0.105888	0.107747			
91	0.16008	0.16137				0.127865	0.129225				0.105888	0.107747			
105	0.16008	0.16137				0.127865	0.129225				0.105888	0.107747			

Tabela 5.31 – Intensidade média por seção ϕ_s , $L = 8$, $\omega = 0.5$, seção I e II .

N_d	$\tau = 1$					$\tau = 5$					$\tau = 10^a$				
	4 × 4	10 × 10	20 × 20	26 × 26	30 × 30	4 × 4	10 × 10	20 × 20	26 × 26	30 × 30	4 × 4	10 × 10	20 × 20	26 × 26	30 × 30
Quadratura Simétrica de Nível LQ_N															
3	0.28392	0.28118	0.28059	0.28051	0.28049	0.150168	0.149855	0.149834	0.149832	0.149832	0.883028	0.883362	0.883765	0.883840	0.883869
6	0.27703	0.27472	0.27461	0.27460	0.27458	0.148274	0.147992	0.147985	0.147985	0.147985	0.871740	0.871928	0.872329	0.872413	0.872446
10	0.27404	0.27242	0.27241	0.27238	0.27237	0.147429	0.147138	0.147130	0.147130	0.147130	0.866512	0.866633	0.867013	0.867098	0.867132
21	0.27202	0.27097	0.27081	0.27080	0.27079	0.146814	0.146507	0.146496	0.146497	0.146497	0.862744	0.862823	0.863169	0.863251	0.863285
36	0.27131	0.27030	0.27006	0.27003		0.146555	0.146242	0.146230	0.146230		0.861206	0.861270	0.861597	0.861676	
Quadratura Legendre-Chebyshev Quadrangular $P_N T_N$															
4	0.27757	0.27475	0.27410	0.27399	0.27396	0.148834	0.148530	0.148514	0.148512	0.148512	0.875152	0.875401	0.875794	0.875872	0.875903
9	0.27257	0.27091	0.27106	0.27103	0.27100	0.147105	0.146810	0.146802	0.146803	0.146803	0.864621	0.864728	0.865094	0.865176	0.865210
16	0.27130	0.27044	0.27033	0.27033	0.27032	0.146596	0.146288	0.146276	0.146276	0.146276	0.861491	0.861561	0.861899	0.861979	0.862012
25	0.27084	0.26992	0.26964	0.26961	0.26959	0.146376	0.146061	0.146047	0.146048	0.146048	0.860180	0.860237	0.860557	0.860633	0.860666
36	0.27062	0.26950	0.26920	0.26915		0.146264	0.145947	0.145932	0.145933		0.859513	0.859563	0.859873	0.859947	
49	0.27050	0.26925				0.146200	0.145882				0.859128	0.859175			
64	0.27041	0.26912				0.146160	0.145842				0.858887	0.858931			
81	0.27036	0.26925				0.146133	0.145882				0.858725	0.859175			
100	0.27032	0.26902				0.146115	0.145796				0.858612	0.858654			
Quadratura Legendre-Chebyshev Triangular $P_N T_N S_N$															
3	0.28570	0.28302	0.28242	0.28233	0.28230	0.150916	0.150576	0.150549	0.150546	0.150545	0.886803	0.887109	0.887495	0.887566	0.887593
6	0.27713	0.27495	0.27482	0.27476	0.27474	0.148277	0.147989	0.147981	0.147980	0.147980	0.871711	0.871888	0.872284	0.872367	0.872399
10	0.27384	0.27234	0.27225	0.27222	0.27221	0.147366	0.147070	0.147061	0.147061	0.147061	0.866108	0.866223	0.866596	0.866681	0.866715
15	0.27237	0.27119	0.27102	0.27100	0.27099	0.146922	0.146616	0.146605	0.146605	0.146605	0.863402	0.863488	0.863838	0.863921	0.863955
21	0.27163	0.27053	0.27032	0.27028	0.27027	0.146668	0.146357	0.146345	0.146346	0.146346	0.861885	0.861956	0.862290	0.862370	0.862404
28	0.27122	0.27010	0.26989	0.26987	0.26986	0.146511	0.146196	0.146184	0.146185	0.146185	0.860948	0.861009	0.861332	0.861410	0.861443
36	0.27097	0.26982	0.26963	0.26961		0.146406	0.146090	0.146077	0.146078		0.860328	0.860383	0.860698	0.860774	
45	0.27081	0.26962				0.146333	0.146016				0.859895	0.859946			
55	0.27070	0.26948				0.146280	0.145963				0.859581	0.859630			
66	0.27061	0.26937				0.146240	0.145923				0.859345	0.859392			
78	0.27055	0.26929				0.146210	0.145892				0.859164	0.859210			
91	0.27050	0.26923				0.146186	0.145868				0.859022	0.859067			
105	0.27046	0.26918				0.146167	0.145848				0.858908	0.858952			
Quadratura Quadruple Range Compatível QR_C															
18	0.27015	0.26878	0.26878	0.26876		0.146042	0.145723	0.145706	0.145705		0.858137	0.858174	0.858466	0.858533	
32	0.27011	0.26885	0.26858	0.26855		0.146040	0.145720	0.145701	0.145701		0.858160	0.858197	0.858490	0.858557	
50	0.27013	0.26883				0.146041	0.145721				0.858161	0.858199			
72	0.27014	0.26885				0.146041	0.145721				0.858162	0.858199			
98	0.27014	0.26885				0.146041	0.145721				0.858162	0.858199			
Quadratura Quadruple Range Quadrangular QR_Q															
9	0.26956	0.26911	0.26898	0.26899	0.26898	0.146082	0.145765	0.145753	0.145754	0.145754	0.857874	0.857872	0.858183	0.858262	0.858296
16	0.27025	0.26931	0.26908	0.26905	0.26904	0.146026	0.145701	0.145683	0.145683	0.145683	0.858090	0.858127	0.858414	0.858483	0.858513
25	0.27022	0.26861	0.26832	0.26829	0.26829	0.146035	0.145714	0.145696	0.145696	0.145696	0.858149	0.858186	0.858475	0.858541	
36	0.27015	0.26878	0.26878	0.26876		0.146040	0.145722	0.145704	0.145704		0.858156	0.858194	0.858486	0.858553	
49	0.27013	0.26890				0.146041	0.145721				0.858160	0.858197			
64	0.27013	0.26887				0.146041	0.145720				0.858161	0.858198			
81	0.27013	0.26884				0.146041	0.145721				0.858162	0.858199			
100	0.27014	0.26884				0.146041	0.145721				0.858162	0.858199			
Quadratura Quadruple Range Triangular QR_T															
6	0.26952	0.26848	0.26833	0.26835	0.26835	0.146120	0.145835	0.145831	0.145832	0.145833	0.858576	0.858618	0.858975	0.859063	0.859100
10	0.26980	0.26899	0.26880	0.26880	0.26879	0.146072	0.145749	0.145735	0.145736	0.145737	0.858198	0.858227	0.858529	0.858605	0.858637
15	0.27010	0.26888	0.26864	0.26862	0.26861	0.146045	0.145721	0.145705	0.145705	0.145706	0.858170	0.858204	0.858492	0.858561	0.858591
21	0.27019	0.26884	0.26870	0.26868	0.26867	0.146041	0.145721	0.145704	0.145704	0.145704	0.858166	0.858203	0.858491	0.858558	0.858586
28	0.27019	0.26885	0.26871	0.26868	0.26868	0.146041	0.145722	0.145703	0.145703	0.145703	0.858164	0.858201	0.858493	0.858559	0.858587
36	0.27017	0.26886	0.26867	0.26864	0.26863	0.146041	0.145721	0.145703	0.145702	0.14702	0.858163	0.858200	0.858493	0.858560	0.858587
45	0.27015	0.26885	0.26865			0.146041	0.145721				0.858163	0.858200			
55	0.27014	0.26885	0.26865			0.146041	0.145721				0.858162	0.858199			
66	0.27014	0.26885				0.146041	0.145721				0.858162	0.858199			
78	0.27014	0.26885				0.146041	0.145721				0.858162	0.858199			
91	0.27014	0.26885				0.146041	0.145721				0.858162	0.858199			
105	0.27014	0.26885				0.146041	0.145721				0.858162	0.858199			

^a Todos os números das colunas com $\tau = 10$ são multiplicados por 10^{-1}

Tabela 5.32 – Intensidade média por seção ϕ_s , $L = 8$, $\omega = 0.5$, seção III e IV.

N_d	$\tau = 1$					$\tau = 5$					$\tau = 10$				
	4×4^a	10×10^a	20×20^a	26×26^a	30×30^a	4×4^a	10×10^a	20×20^a	26×26^a	30×30^a	4×4^b	10×10^c	20×20^c	26×26^c	30×30^c
Quadratura Simétrica de Nível LQ_N															
3	0.87120	0.89580	0.90130	0.90206	0.90225	0.109745	0.115329	0.116123	0.116229	0.116265	0.874555	0.100484	0.102297	0.102547	0.102638
6	0.92180	0.94224	0.94303	0.94310	0.94325	0.111813	0.117028	0.117766	0.117867	0.117906	0.875914	0.100420	0.102249	0.102508	0.102603
10	0.94044	0.95440	0.95419	0.95450	0.95451	0.112288	0.117449	0.118218	0.118327	0.118366	0.883118	0.100871	0.102672	0.102933	0.103028
21	0.95295	0.96157	0.96291	0.96298	0.96309	0.112750	0.117875	0.118663	0.118773	0.118814	0.889872	0.101287	0.103041	0.103299	0.103394
36	0.95678	0.96506	0.96725	0.96756		0.113017	0.118104	0.118886	0.118998		0.892296	0.101437	0.103164	0.103419	
Quadratura Legendre-Chebyshev Quadrangular $P_N T_N$															
4	0.93101	0.95721	0.96352	0.96449	0.96480	0.110933	0.116327	0.117113	0.117219	0.117256	0.868338	0.099769	0.101570	0.101820	0.101911
9	0.95296	0.96701	0.96521	0.96549	0.96574	0.112217	0.117342	0.118091	0.118200	0.118240	0.881436	0.100718	0.102518	0.102777	0.102872
16	0.95719	0.96415	0.96506	0.96504	0.96504	0.112745	0.117842	0.118620	0.118730	0.118770	0.889234	0.101223	0.102976	0.103234	0.103329
25	0.95869	0.96611	0.96862	0.96891	0.96907	0.113049	0.118113	0.118893	0.119004	0.119045	0.892198	0.101415	0.103140	0.103394	0.103489
36	0.95948	0.96890	0.97165	0.97210		0.113214	0.118256	0.119024	0.119134		0.893685	0.101515	0.103222	0.103473	
49	0.96000	0.97056				0.113309	0.118331				0.894557	0.101574			
64	0.96037	0.97137				0.113368	0.118379				0.895114	0.101611			
81	0.96066	0.26925				0.113407	0.145882				0.895490	0.859175			
100	0.96088	0.97195				0.113435	0.118436				0.895755	0.101654			
Quadratura Legendre-Chebyshev Triangular $P_N T_N S_N$															
3	0.85770	0.88146	0.88706	0.88792	0.88820	0.106653	0.112441	0.113268	0.113379	0.113418	0.838925	0.097227	0.099055	0.099307	0.099398
6	0.91737	0.93654	0.93764	0.93811	0.93836	0.111378	0.116621	0.117371	0.117476	0.117515	0.872434	0.100101	0.101933	0.102193	0.102288
10	0.94027	0.95313	0.95383	0.95405	0.95417	0.112246	0.117422	0.118200	0.118309	0.118349	0.884307	0.100939	0.102730	0.102990	0.103086
15	0.95005	0.95994	0.96131	0.96152	0.96165	0.112671	0.117811	0.118599	0.118710	0.118750	0.889288	0.101256	0.103014	0.103272	0.103367
21	0.95461	0.96378	0.96566	0.96596	0.96606	0.112933	0.118039	0.118822	0.118933	0.118974	0.891725	0.101408	0.103141	0.103397	0.103492
28	0.95691	0.96623	0.96814	0.96835	0.96841	0.113099	0.118174	0.118948	0.119058	0.119098	0.893113	0.101495	0.103212	0.103465	0.103559
36	0.95817	0.96787	0.96958	0.96973		0.113208	0.118260	0.119025	0.119135		0.893994	0.101550	0.103256	0.103507	
45	0.95892	0.96898				0.113282	0.118317				0.894593	0.101588			
55	0.95941	0.96976				0.113333	0.118358				0.895021	0.101615			
66	0.95977	0.97032				0.113371	0.118388				0.895337	0.101634			
78	0.96004	0.97074				0.113399	0.118411				0.895578	0.101649			
91	0.96025	0.97105				0.113421	0.118429				0.895765	0.101661			
105	0.96044	0.97130				0.113439	0.118444				0.895914	0.101670			
Quadratura Quadruple Range Compatível QR_C															
18	0.96132	0.97318	0.97296	0.97307		0.113492	0.118474	0.119203	0.119308		0.897334	0.101771	0.103441	0.103681	
32	0.96222	0.97291	0.97539	0.97562		0.113554	0.118544	0.119287	0.119392		0.896819	0.101724	0.103396	0.103638	
50	0.96208	0.97308				0.113550	0.118536				0.896855	0.101727			
72	0.96201	0.97295				0.113550	0.118536				0.896852	0.101727			
98	0.96201	0.97295				0.113550	0.118536				0.896851	0.101727			
Quadratura Quadruple Range Quadrangular QR_Q															
9	0.96621	0.96828	0.96930	0.96910	0.96924	0.112281	0.117312	0.118101	0.118215	0.118256	0.885069	0.100699	0.102442	0.102703	0.102800
16	0.96065	0.96877	0.97084	0.97107	0.97117	0.113640	0.118648	0.119412	0.119522	0.119563	0.898415	0.101814	0.103476	0.103721	0.103813
25	0.96131	0.97512	0.97778	0.97804	0.97804	0.113585	0.118561	0.119301	0.119406	0.119444	0.896611	0.101714	0.103381	0.103622	
36	0.96186	0.97372	0.97350	0.97362		0.113546	0.118525	0.119254	0.119360		0.896888	0.101731	0.103401	0.103642	
49	0.96206	0.97230				0.113548	0.118534				0.896864	0.101727			
64	0.96208	0.97278				0.113550	0.118541				0.896852	0.101727			
81	0.96206	0.97305				0.113550	0.118536				0.896852	0.101727			
100	0.96203	0.97303				0.113550	0.118536				0.896852	0.101727			
Quadratura Quadruple Range Triangular QR_T															
6	0.97398	0.98223	0.98346	0.98321	0.98323	0.114274	0.119207	0.119985	0.120096	0.120136	0.901595	0.102311	0.104077	0.104342	0.104440
10	0.96748	0.97398	0.97562	0.97568	0.97576	0.113493	0.118537	0.119318	0.119430	0.119472	0.898185	0.101789	0.103464	0.103714	0.103807
15	0.96317	0.97346	0.97567	0.97587	0.97592	0.113581	0.118570	0.119322	0.119430	0.119469	0.896994	0.101723	0.103387	0.103630	0.103721
21	0.96179	0.97340	0.97459	0.97476	0.97486	0.113574	0.118545	0.119278	0.119384	0.119424	0.896808	0.101725	0.103392	0.103633	0.103722
28	0.96163	0.97300	0.97426	0.97448	0.97456	0.113555	0.118533	0.119273	0.119379	0.119419	0.896853	0.101728	0.103398	0.103639	0.103728
36	0.96178	0.97290	0.97457	0.97480	0.97489	0.113549	0.118536	0.119278	0.119384	0.119423	0.896862	0.101727	0.103400	0.103641	0.103730
45	0.96193	0.97293		0.97467		0.113549	0.118537		0.119382		0.896857	0.101727		0.103641	
55	0.96201	0.97296		0.97464		0.113550	0.118537				0.896854	0.101727			
66	0.96205	0.97297				0.113550	0.118536				0.896853	0.101727			
78	0.96205	0.97297				0.113550	0.118536				0.896852	0.101727			
91	0.96205	0.97296				0.113550	0.118536				0.896852	0.101727			
105	0.96204	0.97296				0.113550	0.118536				0.896852	0.101727			

^a Todos os números da coluna são multiplicados por 10^{-1} ^b Todos os números da coluna são multiplicados por 10^{-3} ^c Todos os números da coluna são multiplicados por 10^{-2}

No decorrer do trabalho depararam-se com certas dificuldades em relação à solução do sistema linear com os recursos computacionais disponíveis, e isso impactou na geração dos resultados numéricos. Apesar de algumas restrições de uso, neste capítulo apresentaram-se todos os resultados obtidos.

Conforme relatado no capítulo anterior na Seção 4.5 utilizaram-se três diferentes máquinas computacionais para geração de todos os resultados apresentados, sendo uma delas um recurso compartilhado. Com relação ao tempo computacional na geração da densidade média de radiação ao longo da direção y nota-se que, para a configuração

de malha 4×4 , LQ_{16} , o tempo computacional para gerar todos os valores listados nas Tabelas 5.3 à 5.7 (uma coluna) varia de 5 segundos (tempo de CPU), caso $L = 0$, a 3 minutos (caso $L = 12$). Para a configuração de malha 6×6 , o tempo computacional varia de 52 segundos ($L = 0$) a 5 minutos ($L = 12$), em um computador Intel Core *i7*, 3.60 GHz , 8.00 GiB de memória RAM. Os casos das malhas entre 10×10 e 40×40 foram executados em um computador de tempo compartilhado (CESUP) e, portanto, não têm-se informações precisas sobre o tempo computacional. Em relação a configuração de malha 50×50 , LQ_{16} , o tempo computacional ficou em torno de 53 horas e para malha 60×60 , $QR_C (N_\theta = 4)$, o tempo computacional ficou em torno de 72 horas, ambos casos gerados para $L = 2$ em um computador Intel Core *i7*, 2.8 GHz , 16.00 GiB de memória RAM. Ainda, usando a mesma máquina na geração dos resultados da intensidade média de radiação por seção do domínio, nota-se que, para a configuração de malha 26×26 , $QR_T (N_d = 55)$, o tempo computacional ficou em torno de 15 horas.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, a formulação ADO-Nodal foi estendida para resolver numericamente problemas bidimensionais de transferência radiativa em ordenadas discretas em meios com ordem arbitrária de anisotropia. Para tornar isso possível, o problema de autovalor associado foi derivado para este caso geral da expansão de ordem arbitrária da função de fase e preservou uma característica importante do método ADO, que é resolver um problema de ordem reduzida, ou seja, igual a metade do número de direções discretas, quando comparada a outras abordagens que fazem uso da discretização angular em ordenadas discretas. Devido à característica analítica do método, soluções explícitas em termos das variáveis espaciais foram obtidas para as equações unidimensionais integradas transversalmente, nas direções x e y , com aproximações constantes em cada direção para as intensidades desconhecidas nos contornos do domínio e das regiões, diferentemente de abordagens comumente usadas onde as variáveis espaciais costumam ser discretizadas.

A principal contribuição deste trabalho foi a derivação e verificação da formulação, em particular o problema de autovalor, que por si só era de difícil e extensa manipulação algébrica. Nesse contexto, a formulação foi testada em problemas com grau de anisotropia até doze, para diferentes ordens do esquema de quadratura LQ_N . Comparações com resultados disponíveis na literatura foram satisfatórias para testar a formulação e indicam um bom desempenho da solução ADO-Nodal. Além disso, através da formulação ADO-Nodal foi possível calcular a densidade média de radiação de duas formas, a formulação de linha $\phi_{xr}(y)$ e a formulação média ϕ_r , as quais apresentaram resultados numéricos sem maiores diferenças significativas entre eles.

A abordagem do método ADO-Nodal na equação de transferência radiativa requer a resolução de um sistema linear cuja ordem pode rapidamente ficar bastante elevada, dependendo do número de regiões em que o domínio é dividido e do número de direções discretas da quadratura considerada. Nesse contexto, foram estudados alguns esquemas alternativos de solução do sistema linear, como por exemplo os baseados no armazenamento esparsa da matriz, técnicas paralelas e decomposição de domínio. A partir de um reordenamento do sistema linear e do uso de rotinas esparsas de solução com estrutura diagonal foi possível estender os resultados ADO-Nodal para malhas mais refinadas com o espaçamento variando de 10^{-1} até 10^{-2} . Além disso, permitiu o uso de esquemas alter-

nativos de quadratura, que permitem considerar ordens superiores (com número maior de direções discretas dos esquemas clássicos disponíveis na literatura para esse problema), para melhorar o desempenho computacional da formulação ADO-Nodal, bem como para gerar novos resultados na literatura para o problema de teste aqui discutido. Além da quadratura Simétrica de Nível (LQ_N) diferentes esquemas de quadraturas numéricas foram aplicados às equações em ordenadas discretas: quadratura Legendre-Chebyshev Quadrangular ($P_N T_N$), quadratura Legendre-Chebyshev Triangular ($P_N T_N S_N$) e a quadratura Quadruple Range (QR) com acoplamento compatível (QR_C), acoplamento quadrangular (QR_Q) e com acoplamento triangular (QR_T), de forma que foi possível contornar o problema de limitação do número de direções encontrado pela LQ_N , e utilizar ordens superiores em esquemas de quadratura. De maneira geral, o método ADO-Nodal se mostrou bastante preciso em malhas grossas mesmo com o uso de ordens baixas das quadraturas numéricas e com malhas mais refinadas foi necessário um maior número de direções discretas para analisar a convergência. Ainda, o presente estudo permitiu estender a utilização da aplicação do método ADO-Nodal com malhas mais refinadas do que abordadas em trabalhos anteriores. É preciso destacar que a escolha da dimensão da malha e da ordem de quadratura para a solução do sistema linear via métodos diretos foi limitada ao recurso computacional disponível.

Em relação a análise do problema de anisotropia, este trabalho contribuiu na geração de novos resultados, para densidade média de radiação ao longo da direção y na linha central do domínio, que não foram encontrados na literatura para a classe de problemas discutida neste trabalho. Esses resultados originais incluem malhas mais refinadas e diferentes comprimentos ópticos, além de utilizar esquemas de quadratura alternativos com ordens superiores. É importante destacar que as aproximações de ordenadas discretas de ordem superior são mais apropriadas para descrever modelos com anisotropia, principalmente modelos com expansões de ordem superior das funções de fase, desta forma o uso de esquemas de quadraturas de altas ordens são fundamentais. Ademais, as referências que tratam do espalhamento anisotrópico não utilizaram as quadraturas aqui analisadas, nem disponibilizaram resultados tabelados para malhas mais refinadas que 26×26 e outros comprimentos ópticos e albedo de espalhamento. Além disso, neste trabalho estendeu-se a análise da intensidade média de radiação por seção do domínio para problemas anisotrópicos, que não estão disponíveis na literatura.

Adicionalmente, nos resultados com diferentes configurações de malhas e comprimentos ópticos, que configuram diferentes espessuras das regiões da malha, observou-se um aumento do número de dígitos significativos com o refinamento da malha à medida que o comprimento óptico é maior. Além disso, no cálculo da intensidade média por seção verificou-se uma boa concordância em dígitos na solução ADO-Nodal à medida que o número de direções por octante e o comprimento óptico eram maiores, e observou-se um melhor desempenho da quadratura Quadruple Range (QR). Os melhores resultados numéricos observados no cálculo das intensidades médias por seção podem estar relacionados ao fato de que nas intensidades em uma linha no domínio oscilações oriundas do efeito raio estão presentes. Esse desempenho é esperado, pois de acordo com a literatura [Lewis e Miller, 1984] resultados mais precisos são obtidos quando se considera integração nas variáveis espaciais.

Os estudos para obtenção de soluções benchmark para este problema continuam e pesquisas complementares sobre o armazenamento de matrizes para resolver sistemas lineares, originados de problemas com o uso de malhas mais refinadas em conjunto com o uso de quadraturas de alta ordem, necessitam ser realizadas. Uma alternativa na abordagem computacional de sistemas lineares ainda maiores é a implementação de técnicas paralelas em combinação com métodos de decomposição de domínio via complemento de Schur. O problema de radiação abordado aqui pelo método ADO-Nodal provou ser bastante desafiador, neste sentido outro ponto que pode ser explorado é utilizar esta formulação aprimorada com rearranjo do sistema para refazer os problemas de transporte de nêutrons, já abordados pelo método ADO-Nodal, para realizar uma análise comparativa do comportamento/desempenho numérico para ambas as áreas. Esses estudos, além de ampliarem a classe de problemas que podem ser abordados pela metodologia ADO, avançam no sentido de permitir, por exemplo, tratar problemas de interesse nas reconstruções tomográficas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abdoulaev, G. S. e Hielscher, A. H. Three-dimensional optical tomography with the equation of radiative transfer, **Journal of Electronic Imaging**, vol. 12(4), p. 594–601, 2003.

Abu-Shumays, I. K. Compatible product angular quadrature for neutron transport in x-y geometry, **Nuclear Science and Engineering**, vol. 64(2), p. 299–316, 1977.

Abu-Shumays, I. K. Angular quadratures for improved transport computations, **Transport Theory and Statistical Physics**, vol. 30(2-3), p. 169–204, 2001.

Addoum, A., Farges, O., e Asllanaj, F. Optical properties reconstruction using the adjoint method based on the radiative transfer equation, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 204, p. 179–189, 2018.

Aghanajafi, C. e Abjadpour, A. Discrete ordinates method applied to radiative transfer equation in complex geometries meshed by structured and unstructured grids, **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, vol. 38(3), p. 1007–1019, 2016.

Altaç, Z. Radiative transfer in absorbing, emitting and linearly anisotropic-scattering inhomogeneous cylindrical medium, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 77, p. 177–192, 2003.

Altaç, Z. e Tekkalmaz, M. Solution of the radiative integral transfer equations in rectangular participating and isotropically scattering inhomogeneous medium, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 47, p. 101–109, 2004.

Altaç, Z. e Tekkalmaz, M. Benchmark solutions of radiative transfer equation for three-dimensional rectangular homogeneous media, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 109, p. 587–607, 2008.

An, W., Ruan, L. M., Qi, H., e Liu, L. H. Finite element method for radiative heat transfer in absorbing and anisotropic scattering media, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 96, p. 409–422, 2005.

Anderson, E., Bai, Z., Bischof, C., Blackford, S., Demmel, J., Dongarra, J., Du Croz, J., Greenbaum, A., Hammarling, S., McKenney, A., e Sorensen, D. **LAPACK Users' guide**. SIAM, Philadelphia, 1999.

Arridge, S. R. e Schotland, J. C. Optical tomography: forward and inverse problems, **Inverse Problems**, vol. 25(12), p. 123010, 2009.

Asllanaj, F., Addoum, A., e Roche, J. R. Fluorescence molecular imaging based on the adjoint radiative transport equation, **Inverse Problems**, vol. 34(7), p. 075009, 2018.

Azmy, Y. Y. Comparison of three approximations to the linear-linear nodal transport method in weighted diamond-difference form, **Nuclear Science and Engineering**, vol. 100(3), p. 190–200, 1988a.

Azmy, Y. Y. The weighted diamond-difference form of nodal transport methods, **Nuclear Science and Engineering**, vol. 98, p. 29–40, 1988b.

Badruzzaman, A. An efficient algorithm for nodal-transport solutions in multidimensional geometry, **Nuclear Science and Engineering**, vol. 89(3), p. 281–290, 1985.

Badruzzaman, A. Nodal methods in transport theory, **Advances in Nuclear Science and Technology**, vol. 21, p. 293–331, 1990.

Barichello, L. B. **Explicit formulations for radiative transfer problems**. In Thermal Measurements and Inverse Techniques, chapter 15, p. 542–563. CRC Press, 2011.

Barichello, L. B., Cabrera, L. C., e Prolo Filho, J. F. **An analytical discrete ordinates solution for two-dimensional problems based on nodal schemes**. In International Nuclear Atlantic Conference - INAC2009, Rio de Janeiro, Brazil, 2009.

Barichello, L. B., Cabrera, L. C., e Prolo Filho, J. F. An analytical approach for a nodal scheme of two-dimensional neutron transport problems, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 38, p. 1310–1317, 2011.

Barichello, L. B., Camargo, M., Rodrigues, P., e Siewert, C. E. Unified solutions to classical flow problems based on the BGK model, **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP**, vol. 52, p. 517–534, 2001.

Barichello, L. B., da Cunha, R. D., Picoloto, C. B., e Tres, A. An analytical approach for a nodal formulation of a two-dimensional fixed-source neutron transport problem in heterogeneous medium, **Kerntechnik**, vol. 80(2), p. 167–173, 2015.

Barichello, L. B., Garcia, R. D. M., e Siewert, C. E. A spherical-harmonics solution for radiative-transfer problems with reflecting boundaries and internal sources, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 60(2), p. 247–260, 1998.

Barichello, L. B., Garcia, R. D. M., e Siewert, C. E. Particular solutions for the discrete-ordinates method, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 64, p. 219–226, 2000.

Barichello, L. B., Pazinato, C. B., e Rui, K. An analytical discrete ordinates nodal solution to the two-dimensional adjoint transport problem, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 135, p. 106959, 2020.

Barichello, L. B., Picoloto, C. B., e da Cunha, R. D. The ADO-nodal method for solving two-dimensional discrete ordinates transport problems, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 108, p. 376–385, 2017.

Barichello, L. B., Rodrigues, P., e Siewert, C. E. An analytical discrete-ordinates solution for dual-mode heat transfer in a cylinder, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 73, p. 583–602, 2002.

Barichello, L. B., Rui, K., e Pazinato, C. B. **Advances in the ADO-Nodal method for the solution of particle transport problems in two-dimensional media**. In PHYTRA4 - The Fourth International Conference on Physics and Technology of Reactors and Applications, Marrakech, Morocco, 2018.

Barichello, L. B. e Siewert, C. E. A discrete-ordinates solution for a non-grey model with complete frequency redistribution, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 62, p. 665–675, 1999a.

Barichello, L. B. e Siewert, C. E. A Discrete-Ordinates Solution for a Polarization Model with Complete Frequency Redistribution, **The Astrophysical Journal**, vol. 513(1), p. 370–382, 1999b.

Barichello, L. B. e Siewert, C. E. **A new version of the discrete-ordinates method**. In Proceedings of the 2nd International Conference on Computational Heat and Mass Transfer (COPPE/EE/UFRJ), Rio de Janeiro, Brasil, vol. 1, p. 340–347, 2001.

Barichello, L. B., Tres, A., Picoloto, C. B., e Azmy, Y. Y. Recent Studies on the Asymptotic Convergence of the Spatial Discretization for Two-Dimensional Discrete Ordinates Solutions, **Journal of Computational and Theoretical Transport**, vol. 45(4), p. 299–313, 2016.

Barros, R. C., Filho, H. A., Orellana, E. T. V., da Silva, F. C., do Couto, N., Dominguez, D. S., e Hernández, C. R. G. The application of spectral nodal methods to discrete ordinates and diffusion problems in cartesian geometry for neutron multiplying systems, **Progress in Nuclear Energy**, vol. 42(4), p. 385–426, 2003.

Bell, G. I. e Glasstone, S. **Nuclear Reactor Theory**. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1970.

Blackford, L. S., Choi, J., Cleary, A., D’Azevedo, E., Demmel, J., Dhillon, I., Dongarra, J., Hammarling, S., Henry, G., Petitet, A., et al. **ScaLAPACK users’ guide**. SIAM, 1997.

Boltzmann, L. **Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen**. In Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaften, vol. 66, p. 275–370. Vienna, 1872.

Bordbar, M. H., Węcel, G., e Hyppänen, T. A line by line based weighted sum of gray gases model for inhomogeneous CO₂-H₂O mixture in oxy-fired combustion, **Combustion and Flame**, vol. 161(9), p. 2435–2445, 2014.

Bouaoun, M., Elloumi, H., Charrada, K., Rhouma, M. B. E. H., e Stambouli, M. Discrete ordinates method in the analysis of the radiative transfer in high intensity discharge lamps, **Journal of Physics D: Applied Physics**, vol. 38, p. 4053–4065, 2005.

Boulet, P., Collin, A., e Consalvi, J. L. On the finite volume method and the discrete ordinates method regarding radiative heat transfer in acute forward anisotropic scattering media, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 104, p. 460–473, 2007.

Cabrera, L. C. **Solução espectral para modelos bidimensionais da equação linear de Boltzmann**. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - UFRGS, Porto Alegre, 2009.

Cacuci, D. G. **Handbook of Nuclear Engineering**. Springer Science & Business Media, New York, 2010.

Cai, J. e Modest, M. F. Improved full-spectrum k-distribution implementation for inhomogeneous media using a narrow-band database, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 141, p. 65–72, 2014.

Camargo, M. e Barichello, L. B. Unified Approach for Variable Collision-Frequency Models in Rarefied Gas Dynamics, **Transport Theory and Statistical Physics**, vol. 33, p. 227–260, 2004.

Carlson, B. G. e Lathrop, K. D. **Transport Theory—The Method of Discrete Ordinates**. Technical report, Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, Los Alamos, New Mexico, 1965.

Carlson, B. G. e Lee, C. E. **Mechanical Quadrature and the Transport Equation**. Technical report, Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, Los Alamos, New Mexico, 1961.

Case, K. M. Elementary solutions of the transport equation and their applications, **Annals of Physics**, vol. 9, p. 1–23, 1960.

Case, K. M. e Zweifel, P. F. **Linear Transport Theory**. Addison-Wesley Publishing Company, Boston, 1967.

Cercignani, C. **Theory and Application of the Boltzmann Equation**. Scottish Academic Press, New York, 1975.

Cercignani, C. **The Boltzmann Equation and its Applications**. Springer-Verlag, New York, 1988.

Chai, J. C., Lee, H. S., e Patankar, S. V. Ray effect and false scattering in the discrete ordinates method, **Numerical Heat Transfer, Part B Fundamentals**, vol. 24(4), p. 373–389, 1993.

Chai, J. C., Lee, H. S., e Patankar, S. V. Finite volume method for radiation heat transfer, **Journal of Thermophysics and Heat Transfer**, vol. 8(3), p. 419–425, 1994.

Chan, T. F. e Mathew, T. P. Domain decomposition algorithms, **Acta Numerica**, vol. 1, p. 61–143, 1994.

Chandrasekhar, S. **Radiative transfer**. Oxford University Press, London, 1950.

Chu, H., Gu, M., Consalvi, J. L., Liu, F., e Zhou, H. Effects of total pressure on non-grey gas radiation transfer in oxy-fuel combustion using the LBL, SNB, SNBCK, WSGG, and FSCK methods, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 172, p. 24–35, 2016.

Chui, E. H., Raithby, G. D., e Hughes, P. M. J. Prediction of radiative transfer in cylindrical enclosures with the finite volume method, **Journal of Thermophysics and Heat transfer**, vol. 6(4), p. 605–611, 1992.

Clark, G. C., Chu, C.-M., e Churchill, S. W. Angular distribution coefficients for radiation scattered by a spherical particle, **Journal of the Optical Society of America**, vol. 47(1), p. 81–84, 1957.

Coelho, F. R. e França, F. H. R. WSGG correlations based on HITEMP2010 for gas mixtures of H₂O and CO₂ in high total pressure conditions, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 127(Part B), p. 105–114, 2018.

Coelho, P. J. Advances in the discrete ordinates and finite volume methods for the solution of radiative heat transfer problems in participating media, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative transfer**, vol. 145, p. 121–146, 2014.

Coelho, P. J. Discrete ordinates solution of the radiative transfer equation in media with strong forward and backward scattering subjected to collimated irradiation, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 254, p. 107087, 2020.

Consalvi, J.-L., Andre, F., Coelho, F. R., Franca, F. H. R., Nmira, F., Galtier, M., Solovjov, V., e Webb, B. W. Assessment of engineering gas radiative property models in high pressure turbulent jet diffusion flames, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 253, p. 107169, 2020.

Cromianski, S. R. **Um estudo sobre equações auxiliares em formulações nodais explícitas para solução da equação de transporte de nêutrons bidimensional**. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - UFRGS, Porto Alegre, 2016.

Cromianski, S. R., Camargo, M., Rodrigues, P., e Barichello, L. B. Avaliação de Propriedades Radiativas em Meios Homogêneos Unidimensionais: Reflectância e Transmittância, **Trends in Applied and Computational Mathematics**, vol. 18(3), p. 531–547, 2018.

Cromianski, S. R., Rui, K., e Barichello, L. B. A study on boundary fluxes approximation in explicit nodal formulations for the solution of the two-dimensional neutron transport equation, **Progress in Nuclear Energy**, vol. 110, p. 354–363, 2019.

da Cunha, R. D. **NUMERICO: a software library for Numerical Analysis**. Fortran 95 version, 2015-2017.

da Cunha, R. D., Tres, A., e Barichello, L. B. **A Study on the Parallel, Iterative Solution of Systems of Linear Equations Appearing on Analytical Nodal Schemes for Two-Dimensional Cartesian Geometry Discrete Ordinates Problems**. In Joint International Conference on Mathematics and Computation (M&C), Supercomputing in Nuclear Applications (SNA) and the Monte Carlo (MC) Method, Nashville, Tennessee, 2015.

Doicu, A., Mishchenko, M. I., Efremenko, D. S., e Trautmann, T. Spectral spherical harmonics discrete ordinate method, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 258, p. 107386, 2021.

Domínguez, D. S. e Barros, R. C. The spectral Green's function linear-nodal method for one-speed X, Y-geometry discrete ordinates deep penetration problems, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 34, p. 958–966, 2007.

Dorigon, L. J., Duciak, G., Brittes, R., Cassol, F., Galarca, M., e França, F. H. R. WSGG correlations based on HITEMP2010 for computation of thermal radiation in non-isothermal, non-homogeneous H₂O/CO₂ mixtures, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 64, p. 863–873, 2013.

Duderstadt, J. J. e Hamilton, L. J. **Nuclear Reactor Analysis**. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1976.

Efremenko, D., Doicu, A., Loyola, D., e Trautmann, T. Acceleration techniques for the discrete ordinate method, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 114, p. 73–81, 2013.

Evans, K. F. The spherical harmonics discrete ordinate method for three-dimensional atmospheric radiative transfer, **Journal of the Atmospheric Sciences**, vol. 55(3), p. 429–446, 1998.

Fiveland, W. A. A discrete ordinates method for predicting radiative heat transfer in axisymmetric enclosures, **ASME Paper**, vol. 82-HT-20, p. 1–8, 1982.

Fiveland, W. A. Discrete-ordinates solutions of the radiative transport equation for rectangular enclosures, **Journal of Heat Transfer**, vol. 106, p. 699–706, 1984.

Fiveland, W. A. Discrete ordinate methods for radiative heat transfer in isotropically and anisotropically scattering media, **Journal of Heat Transfer**, vol. 109, p. 809–812, 1987.

Fiveland, W. A. Three-dimensional radiative heat-transfer solutions by the discrete-ordinates method, **Journal of Thermophysics and Heat Transfer**, vol. 2(4), p. 309–316, 1988.

Fleck Jr, J. A. **The calculation of nonlinear radiation transport by a Monte Carlo method**. Technical report, Lawrence Radiation Laboratory, University of California, Livermore, 1961.

Formaggia, L., Sala, M., e Saleri, F. **Domain decomposition techniques**. In Numerical Solution of Partial Differential Equations on Parallel Computers, p. 135–163. Springer, 2006.

Ganapol, B. D. The response matrix discrete ordinates solution to the 1D radiative transfer equation, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 154, p. 72–90, 2015.

Garcia, R. D. M. **Métodos para solução da equação de transporte de partículas integro-diferencial**. In Escola de verão em teoria de transporte de partículas nêutras, PUC, Porto Alegre, RS, 2002.

Garcia, R. D. M. A P_N particular solution for the radiative transfer equation in spherical geometry, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 196, p. 155–158, 2017.

Garcia, R. D. M. e Siewert, C. E. Benchmark results in radiative transfer, **Transport Theory and Statistical Physics**, vol. 14(4), p. 437–483, 1985.

Ge, W., Modest, M. F., e Marquez, R. Two-dimensional axisymmetric formulation of high order spherical harmonics methods for radiative heat transfer, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 156, p. 58–66, 2015.

Ge, W., Modest, M. F., e Roy, S. P. Development of high-order P_N models for radiative heat transfer in special geometries and boundary conditions, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 172, p. 98–109, 2016.

Gentile, N. A. e Yee, B. C. Iterative implicit Monte Carlo, **Journal of Computational and Theoretical Transport**, vol. 45(1-2), p. 71–98, 2016.

Godoy, W. F. e DesJardin, P. E. On the use of flux limiters in the discrete ordinates method for 3D radiation calculations in absorbing and scattering media, **Journal of Computational Physics**, vol. 229, p. 3189–3213, 2010.

Granate, P., Coelho, P. J., e Roger, M. Radiative heat transfer in strongly forward scattering media using the discrete ordinates method, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 172, p. 110–120, 2016.

Gronarz, T., Johansson, R., e Kneer, R. Modeling of anisotropic scattering of thermal radiation in pulverized coal combustion, **Journal of Heat Transfer**, vol. 140(6), p. 062701, 2018.

Grooss, J. **Parallel elliptic PDE solver**. Master’s thesis, Informatics and Mathematical Modeling (IMM), Technical University of Denmark (DTU), Kgs. Lyngby, Denmark, 2001.

Guo, Z. e Kumar, S. Discrete-ordinates solution of short-pulsed laser transport in two-dimensional turbid media, **Applied Optics**, vol. 40(19), p. 3156–3163, 2001.

Guo, Z. e Kumar, S. Three-dimensional discrete ordinates method in transient radiative transfer, **Journal of Thermophysics and Heat Transfer**, vol. 16(3), p. 289–296, 2002.

Guo, Z. e Maruyama, S. Radiative heat transfer in inhomogeneous, nongray, and anisotropically scattering media, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 43, p. 2325–2336, 2000.

Haghighat, A. **Monte Carlo Methods for Particle Transport**. CRC Press, 2nd edition, 2020.

Heugang, S. A. N., Tagne, H. T. K., e Pelap, F. B. Discrete Transfer and Finite Volume Methods for Highly Anisotropically Scattering in Radiative Heat Analysis, **Journal of Computational and Theoretical Transport**, vol. 49(5), p. 195–214, 2020.

Howell, J. R. **Application of Monte Carlo to heat transfer problems**. In *Advances in Heat Transfer*, vol. 5, p. 1–54. Elsevier, 1969.

Howell, J. R. The Monte Carlo method in radiative heat transfer, **Journal of Heat Transfer**, vol. 120, p. 547–560, 1998.

Howell, J. R., Mengüç, M. P., e Siegel, R. **Thermal Radiation Heat Transfer**. CRC Press, New York, 6 edition, 2016.

Howell, J. R. e Perlmutter, M. Monte Carlo solution of thermal transfer through radiant media between gray walls, **Journal of Heat Transfer**, vol. 86(1), p. 116–122, 1964.

HSL. **A collection of Fortran codes for large scale scientific computation.** <https://www.hsl.rl.ac.uk>, 2013, Acesso em: 27-04-2021.

Hu, X. **Asymptotic Convergence of the Angular Discretization Error in the Discrete Ordinates Approximation of the Particle Transport Equation.** PhD thesis, Graduate Faculty of North Carolina State University, Raleigh, North Carolina, 2018.

Hunter, B. e Guo, Z. Comparison of the discrete-ordinates method and the finite-volume method for steady-state and ultrafast radiative transfer analysis in cylindrical coordinates, **Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals**, vol. 59, p. 339–359, 2011.

Hunter, B. e Guo, Z. Phase-function normalization in the 3-D discrete-ordinates solution of radiative transfer—part I: conservation of scattered energy and asymmetry factor, **Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals**, vol. 62, p. 203–222, 2012.

Hunter, B. e Guo, Z. Improved treatment of anisotropic scattering in radiation transfer analysis using the finite volume method, **Heat Transfer Engineering**, vol. 37(3-4), p. 341–350, 2016.

Jaunich, M., Raje, S., Kim, K., Mitra, K., e Guo, Z. Bio-heat transfer analysis during short pulse laser irradiation of tissues, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 51, p. 5511–5521, 2008.

Jeans, J. H. The equations of radiative transfer of energy, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol. 78(1), p. 28–36, 1917.

Jinbo, H., Liming, R., e Heping, T. Effect of anisotropic scattering on radiative heat transfer in two-dimensional rectangular media, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 78, p. 151–161, 2003.

Kayakol, N. e Selçuk, N. **Effect of angular quadrature schemes on the predictive accuracy of discrete ordinates method for radiative transfer.** In Proceedings of the International Conference on Computational Heat and Mass Transfer, 1999.

Khalil, E. E. e Truelove, J. S. Calculation of heat transfer in a large gas fired furnace, **Letters in Heat and Mass Transfer**, vol. 4, p. 353–365, 1977.

Kim, H. K., Lee, J. H., e Hielscher, A. H. PDE-constrained fluorescence tomography with the frequency-domain equation of radiative transfer, **Journal of Selected Topics in Quantum Electronics**, vol. 16(4), p. 793–803, 2010.

Kim, K. e Guo, Z. Ultrafast radiation heat transfer in laser tissue welding and soldering, **Numerical Heat Transfer, Part A: Applications**, vol. 46, p. 23–40, 2004.

Kim, K. e Guo, Z. Multi-time-scale heat transfer modeling of turbid tissues exposed to short-pulsed irradiations, **Computer Methods and Programs in Biomedicine**, vol. 86, p. 112–123, 2007.

Kim, S. H. e Huh, K. Y. Assessment of the finite-volume method and the discrete ordinate method for radiative heat transfer in a three-dimensional rectangular enclosure, **Numerical Heat Transfer: Part B: Fundamentals**, vol. 35, p. 85–112, 1999.

Kim, S. H. e Huh, K. Y. A new angular discretization scheme of the finite volume method for 3-D radiative heat transfer in absorbing, emitting and anisotropically scattering media, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 43, p. 1233–1242, 2000.

Kim, T.-K. e Lee, H. Effect of anisotropic scattering on radiative heat transfer in two-dimensional rectangular enclosures, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 31(8), p. 1711–1721, 1988.

Kim, T.-K. e Lee, H. S. Radiative transfer in two-dimensional anisotropic scattering media with collimated incidence, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 42(3), p. 225–238, 1989.

Klose, A. D., Netz, U., Beuthan, J., e Hielscher, A. H. Optical tomography using the time-independent equation of radiative transfer—Part 1: forward model, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 72, p. 691–713, 2002.

Lathrop, K. D. e Brinkley, F. W. **TWOTRAN-II: An Interfaced, Exportable Version of the TWOTRAN Code for Two-Dimensional Transport**. Technical report, Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, LA-4848-MS, Los Alamos, New Mexico, 1973.

Lathrop, K. D. e Carlson, B. G. **Discrete ordinates angular quadrature of the neutron transport equation**. Technical report, Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, LA-3186, 1965.

Le Dez, V. e Sadat, H. Radiative heat transfer in a semi-transparent medium enclosed in a two-dimensional square cavity, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 112, p. 847–863, 2011.

Le Dez, V., Sadat, H., e Prax, C. Radiative heat transfer in a semi-transparent medium enclosed in a two-dim, **International Journal of Thermal Sciences**, vol. 134, p. 392–409, 2018.

Lee, C. E. **The Discrete S_N Approximation to Transport Theory**. Technical report, Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, Los Alamos, New Mexico, 1962.

Lee, H. e Buckius, R. O. Scaling anisotropic scattering in radiation heat transfer for a planar medium, **Journal of Heat Transfer**, vol. 104, p. 68–75, 1982.

Lewis, E. E. e Miller, W. F. **Computational Methods of Neutron Transport**. John Wiley & Sons, New York, 1984.

Li, G.-J., Zhong, J.-Q., e Wang, X.-D. An improved Monte Carlo method for radiative heat transfer in participating media, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 251, p. 107081, 2020.

Liou, K.-N. **An Introduction to Atmospheric Radiation**. vol. 26. Academic Press, Inc, New York, 1980.

Liu, F. e Smallwood, G. J. An efficient approach for the implementation of the SNB based correlated-k method and its evaluation, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 84(4), p. 465–475, 2004.

Liu, L. H., Ruan, L. M., e Tan, H. P. On the discrete ordinates method for radiative heat transfer in anisotropically scattering media, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 45, p. 3259–3262, 2002.

Longoni, G. **Advanced Quadrature Sets, Acceleration and Preconditioning Techniques for the Discrete Ordinates Method in Parallel Computing Environments**. PhD thesis, Graduate School of the University of Florida, Florida, 2004.

Longoni, G. e Haghghat, A. **Development of New Quadrature Sets with the “Ordinate Splitting” Technique**. In ANS International Meeting on Mathematical Methods for Nuclear Applications (M&C 2001), CD, Salt Lake City, Utah, USA, 2001.

Longoni, G. e Haghghat, A. **Development and Application of the Regional Angular Refinement Technique and its Application to Non-Conventional Problems**. In PHYSOR 2002: International Conference on the New Frontiers of Nuclear Technology: Reactor Physics, Safety and High-Performance Computing, CD, Seoul, Korea, 2002.

Lygidakis, G. N. e Nikolos, I. K. Assessment of different spatial/angular agglomeration multigrid schemes for the acceleration of FVM radiative heat transfer computations, **Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals**, vol. 69(5), p. 389–412, 2016.

McCormick, N. J. e Kuščer, I. **Singular eigenfunction expansions in neutron transport theory**. In *Advances in Nuclear Science and Technology*, p. 181–282. Elsevier, 1973.

Mengüç, M. P. e Viskanta, R. Radiative transfer in three-dimensional rectangular enclosures containing inhomogeneous, anisotropically scattering media, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 33(6), p. 533–549, 1985.

Mie, G. Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen, **Annalen der Physik**, vol. 330(3), p. 377–445, 1908.

Mika, J. R. Neutron transport with anisotropic scattering, **Nuclear Science and Engineering**, vol. 11(4), p. 415–427, 1961.

Mishra, S. C. e Prasad, M. Radiative heat transfer in participating media—A review, **Sadhana**, vol. 23(Part 2), p. 213–232, 1998.

Modest, M. F. **Radiative Heat Transfer**. Academic Press, 3 edition, 2013.

Modest, M. F. e Zhang, H. The full-spectrum correlated-k distribution for thermal radiation from molecular gas-particulate mixtures, **Journal of Heat Transfer**, vol. 124(1), p. 30–38, 2002.

Moghadam, E. K., Isfahani, R. N., e Azimi, A. Numerical Investigation of the Transient Radiative Heat Transfer inside a Hexagonal Furnace Filled with Particulate Medium, **American Journal of Mechanical Engineering**, vol. 4(2), p. 42–49, 2016.

Moura, F. W. **Soluções iterativas de sistemas lineares esparsos derivados de formulações nodais da equação de transporte de partículas bidimensional**. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - UFRGS, Porto Alegre, 2018.

Moura, F. W., Barichello, L. B., da Cunha, R. D., e Picoloto, C. B. **On the Influence of Quadrature Schemes for the Iterative Solution of Linear Systems in Explicit Two-Dimensional Discrete Ordinates Nodal Formulations**. In PHY-SOR 2018: Reactor Physics Paving the Way towards More Efficient Systems, Cancun, Mexico, p. 123–132, 2018.

Nenê, J. S. **Polinômios ortogonais e a integração numérica na esfera unitária**. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - UFRGS, Porto Alegre, 2020.

Ou, S.-C. S. e Liou, K.-N. Generalization of the spherical harmonic method to radiative transfer in multi-dimensional space, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 28(4), p. 271–288, 1982.

Pal, G. e Modest, M. F. Advanced differential approximation formulation of the P_N method for radiative transfer, **Journal of Heat Transfer**, vol. 137(7), p. 072701, 2015.

Pazinatto, C. B. **Soluções Explícitas do Problema Adjunto de Transporte de Partículas com Aplicações em Estimativas de Fontes**. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - UFRGS, Porto Alegre, 2019.

Pazinatto, C. B. e Barichello, L. B. On the use of the adjoint operator for source reconstruction in particle transport problems, **Inverse Problems in Science and Engineering**, vol. 27, p. 513–539, 2019.

Pazinatto, C. B., Barros, R. C., e Barichello, L. B. Analytical adjoint discrete ordinates formulation for monoenergetic slab-geometry source-detector calculations, **International Journal of Nuclear Energy Science and Technology**, vol. 10(2), p. 107–122, 2016.

Pearson, J. T., Webb, B. W., Solovjov, V. P., e Ma, J. Effect of total pressure on the absorption line blackbody distribution function and radiative transfer in H₂O, CO₂, and CO, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 143, p. 100–110, 2014.

Picoloto, C. B. **Formulações espectralnodais em cálculos neutrônicos multidimensionais**. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - UFRGS, Porto Alegre, 2015.

Picoloto, C. B., da Cunha, R. D., Barros, R. C., e Barichello, L. B. An analytical approach for solving a nodal formulation of two-dimensional fixed-source neutron transport problems with linearly anisotropic scattering, **Progress in Nuclear Energy**, vol. 98, p. 193–201, 2017.

Picoloto, C. B., Tres, A., da Cunha, R. D., e Barichello, L. B. **Two-dimensional neutron transport problems with reflective boundary conditions: an analytical approach**. In Proceedings of the International Nuclear Atlantic Conference - INAC2013, Recife, Brazil, 2013.

Picoloto, C. B., Tres, A., da Cunha, R. D., e Barichello, L. B. Closed-form solutions for nodal formulations of two dimensional transport problems in heterogeneous media, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 86, p. 65–71, 2015.

Prolo Filho, J. F. **Abordagens espectralnodais para modelos multidimensionais em transporte de partículas**. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - UFRGS, Porto Alegre, 2011.

Prolo Filho, J. F. e Barichello, L. B. **An analytical discrete ordinates solution for a nodal model of a two-dimensional neutron transport problem**. In Proceedings of the 23rd International Conference on Mathematics & Computational Methods Applied to Nuclear Science & Engineering, p. 2350–2360, Sun Valley, USA, 2013.

Prolo Filho, J. F. e Barichello, L. B. General expressions for auxiliary equations of a nodal formulation for two-dimensional transport calculations, **Journal of Computational and Theoretical Transport**, vol. 43, p. 352–373, 2014.

Prolo Filho, J. F. e Rodrigues, M. P. A Closed Form Solution for a One-Dimensional Multi-Layered Neutron Transport Problem by Analytical Discrete Ordinates Method, **Defect and Diffusion Forum**, vol. 372, p. 50–59, 2017.

Qiao, Y., Qi, H., Chen, Q., Ruan, L., e Tan, H. An efficient and robust reconstruction method for optical tomography with the time-domain radiative transfer equation, **Optics and Lasers in Engineering**, vol. 78, p. 155–164, 2016.

Qiao, Y.-B., Qi, H., Ren, Y.-T., Sun, J.-P., e Ruan, L.-M. Application of SQP algorithm for fluorescence tomography with the time-domain equation of radiative transfer, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 193, p. 21–30, 2017.

Quarteroni, A. e Valli, A. **Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations**. Oxford University Press, Oxford, UK, 1999.

Raithby, G. D. e Chui, E. H. A finite-volume method for predicting a radiant heat transfer in enclosures with participating media, **Journal of Heat Transfer**, vol. 112, p. 415–423, 1990.

Reichert, J. T. **Abordagens analíticas para problemas de transporte de radiação com dependência espectral**. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFRGS, Porto Alegre, 2009.

Reichert, J. T. e Barichello, L. B. **An analytical approach to the solution of the transport equation for photons**. In International Conference on Mathematics and Computational Methods Applied to Nuclear Science and Engineering (M&C2011), Rio de Janeiro, Brazil, 2011.

Rodrigues, P. **Dinâmica de gases rarefeitos e transferência radiativa: aplicações em geometria cilíndrica**. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - UFRGS, Porto Alegre, 2003.

Rodrigues, P. e Barichello, L. B. An integral equation approach to radiative transfer in cylindrical media, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 83, p. 765–776, 2004.

Rui, K. e Barichello, L. B. **Radiative transfer in two-dimensional anisotropic media: an analytical-nodal formulation**. In ENCIT2018 - 17th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering. Águas de Lindóia, São Paulo, 2018.

Rui, K., Barichello, L. B., e da Cunha, R. D. **On the use of explicit formulations in the high order discrete ordinates solution of the radiative transfer equation in anisotropic scattering media**. In ENCIT2020 - 18th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering. Online Conference, 2020a.

Rui, K., Barichello, L. B., e da Cunha, R. D. Recent Studies On Two-Dimensional Radiative Transfer Problems in Anisotropic Scattering Media, **Journal of Computational and Theoretical Transport**, vol. 49(5), p. 233–266, 2020b.

Saad, Y. **Iterative Methods for Sparse Linear Systems**. SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, 2nd edition, 2003.

Sanchez, R. e McCormick, N. J. Discrete Ordinates Solutions for Highly Forward Peaked Scattering, **Nuclear Science and Engineering**, vol. 147(3), p. 249–274, 2004.

Scherer, C. S. e Barichello, L. B. An analytical approach to the unified solution of kinetic equations in rarefied gas dynamics. III. Evaporation and condensation problems, **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik**, vol. 61, p. 95–117, 2010.

Scherer, C. S., Prolo Filho, J. F., e Barichello, L. B. An analytical approach to the unified solution of kinetic equations in rarefied gas dynamics. I. Flow problems, **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik**, vol. 60, p. 70–115, 2009a.

Scherer, C. S., Prolo Filho, J. F., e Barichello, L. B. An analytical approach to the unified solution of kinetic equations in rarefied gas dynamics. II. Heat transfer problems, **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik**, vol. 60, p. 651–687, 2009b.

Siewert, C. A discrete-ordinates solution for radiative-transfer models that include polarization effects, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 64, p. 227–254, 2000a.

Siewert, C. E. A concise and accurate solution to Chandrasekhar's basic problem in radiative transfer, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 64, p. 109–130, 2000b.

Smith, B. F., Bjorstad, P. E., e Gropp, W. D. **Domain decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations**. Cambridge University Press, New York, 1996.

Solovjov, V. P., Andre, F., Lemonnier, D., e Webb, B. W. The rank correlated SLW model of gas radiation in non-uniform media, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 197, p. 26–44, 2017.

Soucasse, L., Rivière, P., e Soufiani, A. Monte Carlo methods for radiative transfer in quasi-isothermal participating media, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 128, p. 34–42, 2013.

Spence, P. J. The generation of arbitrary order, non-classical, Gauss-type quadrature for transport applications, **Journal of Computational Physics**, vol. 296, p. 25–57, 2015.

Tang, J., Han, B., Han, W., Bi, B., e Li, L. Mixed Total Variation and L^1 Regularization Method for Optical Tomography Based on Radiative Transfer Equation, **Computational and Mathematical Methods in Medicine**, vol. 2017, 2017.

Tarvainen, T., Vauhkonen, M., e Arridge, S. R. Gauss–Newton reconstruction method for optical tomography using the finite element solution of the radiative transfer equation, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 109, p. 2767–2778, 2008.

Tencer, J., Carlberg, K., Larsen, M., e Hogan, R. Accelerated solution of discrete ordinates approximation to the Boltzmann transport equation for a gray absorbing–emitting medium via model reduction, **Journal of Heat Transfer**, vol. 139(12), p. 122701, 2017.

Tres, A. **Análise de esquemas de aproximações angulares para a equação de transporte bidimensional em ordenadas discretas via formulações nodais**. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - UFRGS, Porto Alegre, 2015.

Tres, A., Picoloto, C. B., Prolo Filho, J. F., da Cunha, R. D., e Barichello, L. B. Explicit formulation of a nodal transport method for discrete ordinates calculations in two-dimensional fixed-source problems, **Kerntechnik**, vol. 79(2), p. 155–162, 2014.

Trivic, D. N. e Amon, C. H. Modeling the 3-D radiation of anisotropically scattering media by two different numerical methods, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 51, p. 2711–2732, 2008.

Trivic, D. N., O’Brien, T. J., e Amon, C. H. Modeling the radiation of anisotropically scattering media by coupling Mie theory with finite volume method, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 47, p. 5765–5780, 2004.

Truelove, J. S. Discrete-ordinate solutions of the radiation transport equation, **Journal of Heat Transfer**, vol. 109, p. 1048–1051, 1987.

Truelove, J. S. Three-dimensional radiation in absorbing-emitting-scattering media using the discrete-ordinates approximation, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 39(1), p. 27–31, 1988.

Walters, W. F. The relation between finite element methods and nodal methods in transport theory, **Progress in Nuclear Energy**, vol. 18(1-2), p. 21–26, 1986.

Walters, W. F. e O'Dell, R. D. **Nodal methods for discrete-ordinates transport problems in (x,y) geometry**. Technical report, Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, Los Alamos, New Mexico, 1981.

Wang, C.-A., Shen, T.-R., Gao, J.-Y., e Tan, J.-P. Development of RTE solver for radiative transfer in absorbing-emitting medium using finite volume based CFD library OpenFOAM, **International Journal of Thermal Sciences**, vol. 140, p. 36–42, 2019.

Wick, G. C. über ebene Diffusionsprobleme, **Zeitschrift für Physik**, vol. 121, p. 702–718, 1943.

Wiscombe, W. J. Improved Mie scattering algorithms, **Applied Optics**, vol. 19(9), p. 1505–1509, 1980.

Wollaber, A. B. Four decades of implicit Monte Carlo, **Journal of Computational and Theoretical Transport**, vol. 45(1-2), p. 1–70, 2016.

Yang, X., He, Z., Dong, S., e Tan, H. Evaluation of the non-gray weighted sum of gray gases models for radiative heat transfer in realistic non-isothermal and non-homogeneous flames using decoupled and coupled calculations, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 134, p. 226–236, 2019.

Zabihi, M., Lari, K., e Amiri, H. Coupled radiative-conductive heat transfer problems in complex geometries using embedded boundary method, **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, vol. 39, p. 2847–2864, 2017.

Zhao, J. M. e Liu, L. H. **Radiative Transfer Equation and Solutions**. In Handbook of Thermal Science and Engineering, p. 1–46. Springer, 2017.

Zhao, J. M., Tan, J. Y., e Liu, L. H. Monte Carlo method for polarized radiative transfer in gradient-index media, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, vol. 152, p. 114–126, 2015.

Zheng, S., Yang, Y., e Zhou, H. The effect of different HITRAN databases on the accuracy of the SNB and SNBCK calculations, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 129, p. 1232–1241, 2019.

Zhou, Y., Duan, R., Zhu, X., Wu, J., Ma, J., Li, X., e Wang, Q. An improved model to calculate radiative heat transfer in hot combustion gases, **Combustion Theory and Modelling**, vol. 24(5), p. 829–851, 2020.

APÊNDICE A – Problema Conservativo: Derivação Preliminar

Nesta seção apresenta-se uma derivação preliminar para o problema conservativo ($\omega = 1$). Descrevem-se as tentativas de modificações necessárias para estender a solução ADO-Nodal para o caso conservativo. Mostra-se uma ideia inicial do estudo, é apenas uma tentativa que não levou a bons resultados numéricos e que ainda está sendo investigada.

Ao assumir o albedo igual à unidade, $\omega = 1$, na formulação ADO-Nodal e resolver o problema de autovalores na variável x e y , que foi derivado no Capítulo 3, obtém-se que um dos autovalores tende a zero ($\lambda_1 \rightarrow 0$ e $\lambda_1^* \rightarrow 0$) o que implica que a constante de separação tende ao infinito ($\nu_1 \rightarrow \infty$ e $\gamma_1 \rightarrow \infty$) e seu valor se distancia dos demais autovalores, como pode ser visto na Tabela A.1.

Tabela A.1 – Autovalores e constante de separação para malha 4×4 , $L = 0$, $\tau = 1$ e quadratura LQ_4 calculados com $\omega = 0.999$ e $\omega = 1$.

$\omega = 0.999$		$\omega = 1$	
λ	ν	λ	ν
0.0029978610009672	18.263930832918238	0.0000003000001764	1825.7418046544692
1.3245556274230521	0.86889019999999983	1.3245556274230514	0.86889020000000006
3.6066815970078836	0.52655785774280228	3.6037961981466222	0.52676861126026764
8.1622764746829564	0.35002119999999998	8.1622764746829546	0.35002120000000003
8.1622764746829581	0.35002119999999998	8.1622764746829581	0.35002119999999998
8.1622764746829599	0.35002119999999992	8.1622764746829599	0.35002119999999992

Neste caso, para evitar autovalores degenerados é consistente assumir o albedo $\omega = 0.999$ como uma aproximação para o caso exatamente igual à unidade, como foi abordado neste trabalho. Vale salientar que embora seja possível de fato modificar a solução desenvolvida para $\omega = 1$, para encontrar uma solução adequada ao caso conservativo, pode-se afirmar que ao considerar valores próximos a unidade, como $\omega = 0.999$, todos os problemas de interesse podem ser resolvidos com a solução discutida no Capítulo 3.

Entretanto, para que a solução ADO-Nodal seja válida para o caso de um meio conservativo, isto é $\omega = 1$, modificações são necessárias no desenvolvimento geral da solução ADO-Nodal. Segundo Case e Zweifel, 1967, soluções adicionais linearmente independentes devem ser derivadas e adicionadas à solução geral para descrever precisamente o caso conservativo (espalhamento puro), quando autovalores degenerados são esperados. No caso de problemas em meios unidimensionais o caso conservativo foi abordado nos

trabalhos de Barichello et al., 1998, 2000.

Do ponto de vista analítico e computacional, o problema com o caso conservativo é que a maior constante de separação, por exemplo ν_1 ou γ_1 , torna-se infinita e, portanto, a forma de solução exponencial proposta para o problema homogêneo, introduzida pelas Equações 3.17 e 3.38, nem sempre gera as duas formas independentes da solução que são necessárias. A seguir descreve-se a tentativa sobre as modificações que são necessárias na solução ADO-Nodal para o caso especial $\omega = 1$.

Para abordar o caso conservativo, seguindo os trabalhos [Barichello et al., 1998; Siewert, 2000b], desconsidera-se a maior constante de separação, ν_1 e γ_1 , encontrada na solução ADO-Nodal em x e y , e incluem-se na solução as duas soluções (exatas) que podem ser associadas a uma constante de separação infinita. Seguindo Case e Zweifel, 1967, propõem-se e verificam-se as seguintes soluções exatas:

$$I_{yr}(x, \Omega_i) = c_1, \quad (\text{A.1})$$

$$I_{yr}(x, \Omega_i) = c_2(x - \mu_i). \quad (\text{A.2})$$

Para verificar que as Equações A.1 e A.2 são soluções, primeiro inserem-se essas soluções propostas na equação abaixo:

$$\mu_i \frac{d}{dx} I_{yr}(x, \Omega_i) + \beta_r I_{yr}(x, \Omega_i) = \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \sum_{n=1}^M w_n I_{yr}(x, \Omega_n). \quad (\text{A.3})$$

Assim, considera-se a Equação A.1 como solução e substitui-se na Equação A.3:

$$\mu_i \frac{d}{dx} c_1 + \beta_r c_1 = \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \sum_{n=1}^M w_n c_1, \quad (\text{A.4})$$

$$\mu_i 0 + \beta_r c_1 = \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} c_1 \sum_{n=1}^M w_n, \quad (\text{A.5})$$

$$\beta_r c_1 = \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} c_1 (4\pi), \quad (\text{A.6})$$

$$\beta_r c_1 - \sigma_{sr} c_1 = 0. \quad (\text{A.7})$$

Como o meio é puramente espalhador, então $\beta_r = \sigma_{sr} = 1$, assim $c_1 = 0$, logo é uma solução da equação.

Agora considera-se a Equação A.2 como solução e substitui-se na Equação A.3:

$$\mu_i \frac{d}{dx} c_2(x - \mu_i) + \beta_r c_2(x - \mu_i) = \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} \sum_{n=1}^M w_n c_2(x - \mu_i), \quad (\text{A.8})$$

$$\mu_i c_2 + \beta_r c_2 x - \beta_r c_2 \mu_i = \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} c_2 \sum_{n=1}^M w_n (x - \mu_i), \quad (\text{A.9})$$

$$c_2(\mu_i - \beta_r \mu_i) + \beta_r c_2 x = \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} c_2 x \sum_{n=1}^M w_n - \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} c_2 \sum_{n=1}^M w_n \mu_i, \quad (\text{A.10})$$

$$c_2(\mu_i - \beta_r \mu_i) + \beta_r c_2 x = \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} c_2 x (4\pi) - \frac{\sigma_{sr}}{4\pi} c_2 (0), \quad (\text{A.11})$$

$$c_2(\mu_i - \beta_r \mu_i) + \beta_r c_2 x = \sigma_{sr} c_2 x. \quad (\text{A.12})$$

Como o meio é puramente espalhador, $\beta_r = \sigma_{sr} = 1$, temos que

$$c_2(\mu_i - \mu_i) + c_2 x = c_2 x, \quad (\text{A.13})$$

$$c_2 x = c_2 x, \quad (\text{A.14})$$

logo é uma solução da equação.

Assim, para $I_{yr}(x, \mathbf{\Omega}_i)$ são soluções $I_{yr}(x, \mathbf{\Omega}_i) = c_1$ e $I_{yr}(x, \mathbf{\Omega}_i) = c_2(x - \mu_i)$. De forma similar, determinam-se soluções exatas para $I_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_i)$ como sendo $I_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_i) = c_3$ e $I_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_i) = c_4(y - \eta_i)$.

Como mencionado anteriormente, a maior constante de separação do problema de autovalores é desconsiderada e as soluções exatas para a equação são adicionadas na solução geral do problema, assim reescrevem-se as Equações 3.80 e 3.81 e obtêm-se as soluções gerais para o problema conservativo como

$$\begin{aligned} I_{yr}(x, \mathbf{\Omega}_i) = & A_{1,r} c_1 + A_{1+M/2,r} c_2 (x - \mu_i) + \sum_{j=2}^{M/2} [A_{j,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) e^{-(x-a_{h-1}^r)/\nu_{jr}} \\ & + A_{j+M/2,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(a_h^r-x)/\nu_{jr}}] + S_{i,r}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} I_{yr}(x, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) = & A_{1,r} c_1 + A_{1+M/2,r} c_2 (x - \mu_{i+M/2}) + \sum_{j=2}^{M/2} [A_{j,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) e^{-(x-a_{h-1}^r)/\nu_{jr}} \\ & + A_{j+M/2,r} \Phi_{yr}(\nu_{jr}, \mathbf{\Omega}_i) e^{-(a_h^r-x)/\nu_{jr}}] + S_{i+M/2,r}, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

e

$$\begin{aligned}
I_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_i) = & B_{1,r}c_3 + B_{1+M/2,r}c_4(y - \eta_i) + \sum_{j=2}^{M/2} [B_{j,r}\Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_i)e^{-(y-b_{k-1}^r)/\gamma_{jr}} \\
& + B_{j+M/2,r}\Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2})e^{-(b_k^r-y)/\gamma_{jr}}] + W_{i,r}, \quad (\text{A.17})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{xr}(y, \mathbf{\Omega}_{i+M/2}) = & B_{1,r}c_3 + B_{1+M/2,r}c_4(y - \eta_{i+M/2}) + \sum_{j=2}^{M/2} [B_{j,r}\Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_{i+M/2})e^{-(y-b_{k-1}^r)/\gamma_{jr}} \\
& + B_{j+M/2,r}\Phi_{xr}(\gamma_{jr}, \mathbf{\Omega}_i)e^{-(b_k^r-y)/\gamma_{jr}}] + W_{i+M/2,r}. \quad (\text{A.18})
\end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, M/2$ e $r = 1, \dots, r$.

A derivação apresentada foi apenas uma tentativa preliminar de solução do problema conservativo, cujos resultados numéricos não foram satisfatórios. Desta forma, este estudo segue sendo investigado na busca de soluções adicionais do problema que descrevam precisamente o caso conservativo.