

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**  
**FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA**

MATEUS VALENTE DE OLIVEIRA

**APLICAÇÃO DE ELEMENTOS FUZZY A UM MODELO DE CRESCIMENTO  
KALDORIANO**

Porto Alegre

2021

**MATEUS VALENTE DE OLIVEIRA**

**APLICAÇÃO DE ELEMENTOS FUZZY A UM MODELO DE CRESCIMENTO  
KALDORIANO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia.

Orientador: Prof. Dr. Alessandro Donadio Miebach.

Porto Alegre

2021

### CIP - Catalogação na Publicação

de Oliveira, Mateus Valente  
APLICAÇÃO DE ELEMENTOS FUZZY A UM MODELO DE  
CRESCIMENTO KALDORIANO / Mateus Valente de Oliveira.  
-- 2021.  
67 f.  
Orientador: Alessandro Donadio Miebach.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do  
Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas,  
Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre,  
BR-RS, 2021.

1. Modelos de crescimento. 2. Lógica fuzzy. 3.  
Modelo Kaldoriano. I. Miebach, Alessandro Donadio,  
orient. II. Título.

**MATEUS VALENTE DE OLIVEIRA**

**APLICAÇÃO DE ELEMENTOS FUZZY A UM MODELO DE CRESCIMENTO  
KALDORIANO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia.

Aprovada em: Porto Alegre, 23 de março de 2021.

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. Alessandro Donadio Miebach – Orientador  
UFRGS

---

Prof. Dr. Henrique Morrone  
UFRGS

---

Prof. Dr. Adalmir Antonio Marquetti  
PUC-RS

---

Prof. Dr. Leonel Toshio Clemente  
UFRGS

*Ao meu querido avô (in memoriam), eterno professor que incentivou,  
se preocupou, e acompanhou grande parte desta caminhada.*

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de começar agradecendo o apoio dos meus familiares, principalmente o núcleo mais próximo, consistindo em minha mãe e meu pai; pois sem a presença, incentivo e o afeto deles, a jornada de construção das habilidades necessárias para escrever este trabalho seria imensuravelmente mais difícil.

Agradeço também às contribuições acadêmicas da banca de qualificação, pois sem as críticas e sugestões feitas à época, a qualidade do texto final estaria aquém das minhas expectativas. Em especial, um muito obrigado ao professor Alessandro, pois além de me orientar pacientemente, também foi peça chave em apaziguar a inquietude que a situação de pandemia trouxe durante a elaboração desta pesquisa.

Também agradeço aos meus amigos e colegas que enriqueceram as aulas, palestras e a experiência acadêmica em geral. Fora da sala de aula, as conversas, discussões e teorias mirabolantes fizeram da experiência do mestrado uma lembrança ímpar, que será guardada com muito afeto. Também não posso deixar de agradecer à minha psicóloga Sissi, pelo acompanhamento, dicas, e por proporcionar um espaço tão rico em tempos tão complicados.

Por fim, gostaria de agradecer a universidade pública pela oportunidade de conseguir usufruir de uma jornada tão engrandecedora e diversa, ampliando infinitamente os horizontes deste que vos escreve. Sei que a presente contribuição à literatura é uma ínfima parte dos frutos que essas instituições proporcionam a sociedade, porém, ela é fruto de interações acadêmicas e humanas, proporcionada por este ambiente tão diverso e rico de experiências; por este motivo fica registrado que sempre serei defensor de uma universidade pública de qualidade e gratuita, sendo seu acesso o mais amplo possível, para que mais pessoas possam usufruir de experiências similares às minhas.

“São como as grandes histórias, Sr. Frodo, aquelas que realmente importam. Elas eram cheias de escuridão e perigo, e, às vezes, você não queria saber o fim, por que como o fim poderia ser feliz? Como o mundo poderia voltar a ser como era quando tantas coisas ruins aconteceram? Mas no final, essa sombra é apenas uma coisa passageira, até mesmo a escuridão deve passar. Um novo dia chegará, e quando o sol brilhar, ele brilhará ainda mais. Sei agora que as pessoas nessas histórias tinham muitas chances de voltar atrás, só que não o fizeram. Eles continuaram porque estavam se agarrando a algo. Que existe algo de bom neste mundo, Sr. Frodo, e pelo qual vale a pena lutar.” *Samwise Gamgee, personagem da obra fictícia O Senhor dos Anéis As duas torres.* (TOLKIEN, J.R.R, 2002)

## RESUMO

Este trabalho é um exercício de aplicação da lógica fuzzy a um modelo de crescimento kaldoriano utilizando dados de 1953 a 2001 da economia dos Estados Unidos da América. Para a construção do raciocínio, retoma-se a contribuição original de Nicholas Kaldor em 1966 sobre a correlação entre crescimento e crescimento do setor industrial, junto de uma recente crítica ao uso indiscriminado do coeficiente de Kaldor-Verdoorn sem as devidas ressalvas teóricas por Basu e Budhiraja (2020). Apresentado o modelo kaldoriano presente em Skott e Zipperer (2012), parte-se para a apresentação da lógica fuzzy e as contribuições presentes na literatura econômica que se utilizam dela para a análise de modelos de crescimento. Com a aplicação da lógica fuzzy ao modelo de Skott e Zipperer (2012), observam-se trajetórias econômicas que diferem das conclusões do exercício econométrico proposto pelos autores.

**Palavras-chave:** Modelos de crescimento. Lógica fuzzy. Modelo kaldoriano



## **ABSTRACT**

This paper is an exercise in estimating a kaldorian growth model using fuzzy logic elements to the economy of the United States of America between 1953 to 2001. In order to construct the argument, one must refer to Nicholas Kaldor original contribution in 1966 that states the correlation between economic growth and the industrial sector growth. Most recently, Basu and Budhiraja (2020) criticizes the widespread use of the Kaldor-Verdoorn coefficient without proper theoretical underpinings. After the mathematical description of the kaldorian growth model in Skott and Zipperer (2012), the paper moves to the properties and elements in fuzzy logic systems alongside contributions that uses this type of logic in economic literature. After the fuzzy estimation of the Kaldorian growth model in Skott and Zipperer (2012) we can infer that the economic trajectories found differs from the original econometric exercise.

**Keywords:** Growth models. Fuzzy logic. Kaldorian model

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Dinâmica prevista pelo modelo proposto .....	31
Figura 2 - Representação gráfica intuitiva da diferença entre as lógicas .....	32
Figura 3 - Representação gráfica das variáveis linguísticas .....	34
Figura 4 - Representação gráfica de um controle fuzzy .....	36
Figura 5 - Representação gráfica das políticas de estabilização.....	40
Figura 6 - Função de pertinência do controle Fuzzy .....	41
Figura 7 - Conjunto de regras .....	41
Figura 8 - Aplicação pontual de regras fuzzy no ciclo de Phillips.....	42
Figura 9 - Saída Fuzzy.....	42
Figura 10 - Eficiência do controle fuzzy .....	43
Figura 11 - Exemplo de função de pertinência utilizando estatísticas históricas .....	46
Figura 12 - Exemplo de função de pertinência utilizando fuzzy “c-means”.....	46
Figura 13 - Representação gráfica da base de regras do modelo de Goodwin.....	47
Figura 14 - Resultados comparativos para a parcela do trabalho na renda .....	48
Figura 15 - Resultados comparativos para a taxa de emprego .....	48
Figura 16 - Resultados comparativos do ciclo de Goodwin.....	49
Figura 17 - Funções de pertencimento no modulo fuzzy do MatLab.....	53
Figura 18 - Funções de pertencimento dos consequentes no modulo fuzzy do MatLab.....	54
Figura 19 - Representação gráfica do conjunto de regras .....	54
Figura 20 - Estrutura de defuzzificação.....	55
Figura 21 - Dados históricos e a previsão fuzzy para o período analisado .....	56

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Conjunto de operadores fuzzy .....	35
Quadro 2 - Precisão da análise fuzzy.....	49
Quadro 3 - Medidas utilizadas para construção dos conjuntos fuzzy antecedentes .....	53
Quadro 4 - Medidas utilizadas para construção dos conjuntos fuzzy consequentes .....	53

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA TEORIA ECONÔMICA.....</b>	<b>13</b>
2.1	CONTRIBUIÇÃO ORIGINÁRIA DE KALDOR .....	13
2.2	DEBATE ATUAL: CONTRIBUIÇÃO DE BASU E BUDHIRAJA.....	16
2.2.1	Função de produção.....	18
2.2.2	Tecnologia do tipo Rosenstein-Rodan.....	19
2.2.3	Tecnologia do tipo Kaldor.....	20
2.2.4	Análise no estado estacionário .....	21
2.2.5	Mercado de trabalho .....	22
2.2.6	Juntando a produção e mercado de trabalho.....	23
2.3	<b>SKOTT E ZIPPERER: MODELO KALDORIANO .....</b>	<b>25</b>
2.3.1	Dinâmica Kaldoriana.....	29
<b>3</b>	<b>ELEMENTOS DA LÓGICA FUZZY .....</b>	<b>32</b>
3.1	MODELOS DE CRESCIMENTO E LÓGICA FUZZY .....	37
3.1.1	Keller e abordagem do controle fuzzy.....	37
3.1.2	Sánchez et al. e a previsão fuzzy .....	43
<b>4</b>	<b>APLICAÇÃO DA LÓGICA FUZZY AO MODELO ESCOLHIDO.....</b>	<b>50</b>
4.1	IMPLEMENTAÇÃO .....	50
4.2	DISCUSSÃO DOS RESULTADOS .....	58
4.2.1	Comentários sobre a consistência da previsão fuzzy.....	58
4.2.2	Contextualização histórica:.....	60
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>62</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>64</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Dentro da literatura econômica, inúmeros autores se debruçaram sobre a questão do crescimento e sob quais condições pode se observar tal fenômeno. Nicholas Kaldor é um destes autores, e tem grande importância, especificamente no campo heterodoxo, para a literatura que trata sobre a importância do setor industrial para o crescimento.

A argumentação de Kaldor se baseia na correlação observada entre o crescimento do setor industrial e o crescimento da economia com um todo. O autor parte da pergunta sobre o porquê do crescimento do Reino Unido ser menor que o de países do “clube de Paris”<sup>1</sup>, procurando escapar de respostas que seriam de difícil quantificação. O autor argumenta que o crescimento acima de 3% ao ano se dá quando existe um excesso do crescimento do setor industrial em relação aos outros setores, configurando ganhos econômicos de escala. Junto desse fenômeno, também deve ocorrer uma absorção de mão de obra presente no campo pela indústria, o que o Reino Unido não possuía. (KALDOR, 1966, p. 284-288)

Desde sua contribuição em 1966, os conceitos elaborados por Kaldor tem grandes repercussões, tanto teóricas quanto empíricas. Deepankar Basu e Manya Budhiraja tentam ampliar tal debate propondo uma ampliação de um modelo já presente na literatura. Os autores afirmam, após o desenvolvimento de seu modelo, que se deve utilizar a contribuição de Kaldor (coeficiente de Kaldor-Verdoorn) com cautela; pois o coeficiente, da forma que tem sido utilizado por diversos autores, não pode ser sinônimo inequívoco de retornos crescentes de escala. (BASU; BUDHIRAJA, 2020, p. 20)

Apesar da crítica de Basu e Budhiraja (2020), as contribuições de tipo pós-keynensianas voltam aos holofotes após a crise de 2008. Skott e Zipperer, em 2012, elaboram um artigo contendo 3 tipos de modelos pós-keynesianos que analisam a economia dos Estados Unidos na segunda metade do século XX, sendo um deles inspirado na contribuição de Kaldor. (SKOTT; ZIPPERER, 2012, p. 277-278)

Nesta contribuição, os autores propõem um modelo kaldoriano dinâmico apoiado em três variáveis chave, crescimento, taxa de utilização da capacidade industrial e taxa de emprego. Após a descrição matemática do modelo, os autores performam um exercício econométrico,

---

<sup>1</sup> Instituição informal, com 22 membros permanentes, cuja missão é financiar recursos à países em dificuldades financeiras.

que obtêm resultados significativos. Porém, Skott e Zipperer (2012) julgam tais resultados preliminares, e passíveis de aprimoramentos. (SKOTT; ZIPPERER, 2012, p. 305)

Todos os modelos descritos pelos autores não incluem choques estocásticos nem setor público e resultados da balança comercial, falhando em captar os efeitos dessas fontes de flutuações presentes nos dados empíricos. (SKOTT; ZIPPERER, 2012, p. 304) Uma ferramenta que nos permite trabalhar em situações semelhantes as dificuldades enfrentadas por Skott e Zipperer é a lógica fuzzy.

A lógica fuzzy é uma extensão da teoria dos conjuntos clássicos, proposta formalmente por Lotfi Zadeh em 1965. Ao invés de trabalhar com conceitos estritos (verdadeiro ou falso), essa lógica possui uma gradação na forma de verificar conceitos como verdadeiros ou falsos, compatibilizando imprecisões e incertezas ao permitir tal flexibilização. (DERNONCOURT, 2013, p. 1-3)

A utilização desta lógica já é bastante consolidada no campo da engenharia, consistindo na análise de sistemas de controle e modelagem. Também possui aplicações em Ciência da Computação, mais especificamente como uma das pedras fundamentais na área de *soft computing*. Recentemente notam-se aplicações econômicas, que apesar de ainda estarem em fase inicial, oferecem grandes perspectivas de desenvolvimento dentro da literatura.

Uma forma de interpretação dessas informações são os sistemas baseados em regras fuzzy. Para construção do sistema, o primeiro passo é transformação das informações quantitativas em informações fuzzy, por meio das funções de pertinência. Essas funções são expressas em termos linguísticos e assumem valores entre 0 e 1. A segunda etapa reside na formulação de uma base de regras que descrevem o comportamento do sistema analisado junto de uma matriz de decisão sobre tais circunstâncias, resultando em um campo vetorial.

O último passo, é a transformação dos resultados fuzzy obtidos em dados quantitativos, a defuzzificação. Esse processo considera os gráficos obtidos com a definição das variáveis linguísticas e a interação com as regras. O retorno aos dados quantitativos se dá, convencionalmente, através de métodos como o da média dos máximos, ou o do centro de gravidade. (DERNONCOURT, 2013 p.16)

Dada a breve exposição desta introdução, o problema da presente pesquisa é a aplicação da lógica fuzzy a modelos de crescimento econômico. Como antes dito, as contribuições são recentes na literatura econômica pois é uma forma de análise que permite inserção de elementos antes não contabilizados formalmente, como incertezas e imprecisões.

Utilizando como ponto de partida o artigo de Skott e Zipperer (2012), os comportamentos de precificação dos modelos rosonianos e kaleckianos não encontraram suporte nos dados presentes no exercício econométrico. Por outro lado, o modelo kaldoriano possui bom ajuste, facilitando a comparação entre os resultados obtidos pelos autores e os obtidos via lógica fuzzy. Porém, a escolha do modelo de crescimento ser do tipo kaldoriano se dá pelo fato de a indústria ser um setor de suma importância dentro da literatura econômica, engendrando as condições necessárias para um crescimento sustentado, tanto do produto quanto da produtividade.

Desta forma, para avançarmos na discussão sobre modelos de crescimento kaldorianos e para a aplicação da lógica fuzzy nesses moldes, após esta breve introdução, o trabalho se estruturará da seguinte forma; o capítulo dois irá tratar da contribuição original de Kaldor em 1966, seguido pela contribuição de autores que discutem a interpretação do coeficiente kaldoriano e suas características, e, por fim, a apresentação do modelo kaldoriano escolhido para aplicação da lógica fuzzy.

O terceiro capítulo consiste em apresentar os fundamentos da lógica fuzzy, de forma que o leitor consiga entender como funcionam os principais módulos desta lógica, seguido de dois tipos de aplicação à modelos de crescimento presentes na literatura econômica. Já o quarto capítulo consiste na aplicação da lógica fuzzy ao modelo kaldoriano presente ao final do segundo capítulo, junto de um exercício quantitativo de tal aplicação para a economia dos Estados Unidos da América. Após tal exercício, seguem breves comentários sobre a contribuição deste trabalho para o debate na literatura econômica, junto de uma contextualização histórica dos resultados.

## 2 REVISÃO DA TEORIA ECONÔMICA

Esta sessão é dedicada à revisão da literatura econômica pertinente para a apresentação do modelo kaldoriano desenvolvido por Skott e Zipperer (2012). Começa-se com a contribuição inicial de Kaldor em 1966; seguido da crítica de Basu e Budhiraja (2020) aos desenvolvimentos teóricos que utilizam a contribuição kaldoriana e por fim, o modelo em que o ferramental fuzzy será aplicado e as suas especificações.

### 2.1 CONTRIBUIÇÃO ORIGINÁRIA DE KALDOR

Em seu artigo seminal de 1966, Nicholas Kaldor busca compreender as causas das menores taxas de crescimento do Reino Unido e propõe uma visão alternativa às explicações em voga na época. As explicações que Kaldor buscava contrapor eram baseadas em ideias de que o baixo crescimento era fruto de ineficiências da gestão, da educação tecnológica sendo deixada de lado ou das práticas restritivas dos sindicatos etc. Tais explicações para o baixo crescimento eram, na visão do autor, difíceis de serem testadas ou de se quantificar tais impactos.

Destarte, Kaldor propõe uma explicação alternativa, a de que o baixo crescimento do Reino Unido é fruto do estágio do desenvolvimento em que a economia se encontra. Para fundamentar tal tese, o autor argumenta que as rápidas taxas de crescimento ocorrem concomitantemente com o crescimento do setor secundário, principalmente o setor industrial, e que esse fenômeno de crescimento é presente em economias transitando de um estágio intermediário de desenvolvimento econômico para um estágio de maturidade.

Para Kaldor (1966), maturidade significa rendas reais per capita uniformes entre os diferentes setores de tal economia. O Reino Unido, foi a primeira economia a se industrializar e atingir tal maturidade, o que resulta na exaustão do potencial de crescimento antes de atingir níveis desejados de produtividade e renda per capita nos diferentes setores econômicos. (KALDOR, 1966, p. 282-284)

Dessa forma, Kaldor (1966) parte para as evidências empíricas, as quais mostram uma alta correlação entre a taxa de crescimento do produto e a taxa de crescimento da produção industrial. Afirma-se que existe uma correlação positiva entre a taxa de crescimento econômico e o excesso da taxa de crescimento da produção industrial em relação a taxa de crescimento de



setores não industriais. Para o autor, taxas de crescimento anuais acima de 3% só são atingidas quando existe tal excesso. Para comprovar a correlação positiva entre as taxas de crescimento econômico e o excesso da taxa de crescimento do setor industrial em relação aos setores não industriais, o autor enumera hipóteses correntes que explicariam tal correlação.

A primeira hipótese seria relacionada ao comportamento do crescimento da produtividade. A qual o diferencial de ganhos de produtividade no setor industrial seria maior que os ganhos de produtividade em outros setores, dadas as características do elevado nível de produtividade e a presença de progresso técnico que engendra ganhos de produtividade; porém Kaldor (1966) afirma ser uma hipótese que explica pequena parte das diferenças intersectoriais de produtividade. (KALDOR, 1966, p. 285)

A segunda hipótese seria a correlação entre o crescimento econômico e o tamanho do setor industrial em relação ao restante da economia, em que países com grande parcela da mão de obra empregada na indústria possuiriam maiores taxas de crescimento econômico. Esta proposição implica que o tamanho do setor industrial é mais importante que a taxa de crescimento da indústria o que é, na visão do autor, factualmente incorreto. O progresso técnico e o crescimento da produtividade não são propriedades exclusivas do setor industrial. Em diversos países analisados por Kaldor (1966), os ganhos de produtividade na agricultura e mineração foram maiores que os ganhos nas atividades industriais.

A terceira hipótese seria a presença de economias de escala, ou rendimentos crescentes, o que causa aumentos de produtividade como subproduto do aumento da produção. O aumento da divisão do trabalho é positivo por gerar mais técnica e conhecimentos específicos, culminando na melhoria de design e inovações, tanto de processo quanto as melhorias de produto. Kaldor (1966) afirma que tal ideia está presente no livro de Adam Smith, no exemplo dos alfinetes. Em que a divisão do trabalho, gera a especialização e diferenciação de tarefas, e é dependente do tamanho do mercado. Entretanto, tal fenômeno passa despercebido pelos neoclássicos. (KALDOR, 1966, p. 285-288)

Assim, o autor passa para a análise da Lei de Verdoorn, que em 1949 constatou que a relação entre as taxas de crescimento da produtividade e crescimento do produto eram dinâmicas, e não em níveis de produtividade e escala da produção, visto que o progresso técnico não é mero reflexo da produção em larga escala. Diante dessa afirmação, para comprová-la, o Kaldor (1966) realiza duas regressões, uma relacionando a produtividade e produto, e a outra relacionando emprego e produto; duas formas de ver a mesma relação em que o crescimento da

produção é o responsável pela maior parte do aumento da produtividade, obtendo resultados significativos e similares ao de Verdoorn.

Para salientar sua linha de raciocínio, Kaldor (1966) afirma que a lei de Verdoorn e a sua relação com o nível de investimentos é o que proporciona o diferencial para os retornos crescentes característicos do setor industrial, causa da diferença entre as taxas de crescimento dos países, assim:

É a taxa de crescimento da produção da indústria (junto com as atividades complementares de infraestrutura) que é mais provável a exercer influência dominante na taxa de crescimento total: parcialmente via aumento da produtividade no setor industrial e indiretamente pelo aumento de produtividade dos outros setores<sup>2</sup> (KALDOR, 1966, p. 294)

Então, o autor passa a examinar o porquê alguns países conseguem aumentar mais sua produção do que outros, e a resposta encontra-se na relação entre a oferta e a demanda de países que se encontram em um estágio intermediário de desenvolvimento. Kaldor (1966) argumenta que a reação em cadeia entre oferta e demanda é mais rápida quando o aumento da demanda é por produtos que possuem maior resposta pelo lado da oferta, dadas as condições de tecnologia e as preferências individuais. Em relação aos fatores influenciadores da demanda, tem-se o consumo, investimento doméstico e mudança na composição da balança comercial.

O comportamento do consumo é afetado por uma elevação no nível de renda per capita que aumenta o consumo de bens industrializados, de forma que há um ciclo virtuoso. Um aumento do setor industrial leva a um aumento de renda per capita, e esse aumento da renda leva a uma maior procura por produtos industrializados.

O investimento doméstico em capital possui uma dinâmica peculiar. Ao prover os bens de investimento, a indústria gera sua própria demanda no processo de expansão da oferta. Assim, Kaldor (1966) argumenta que uma expansão no setor de investimento gera uma expansão sobre a demanda de produtos dele próprio, ao prover os incentivos e meios para os investimentos em capital. (KALDOR, 1966, p.294 -296)

Já em relação a mudança na composição da balança comercial, o autor argumenta que nos estágios iniciais de industrialização a composição da balança comercial é marcada por

---

<sup>2</sup> Tradução nossa. No original: it is the growth of manufacturing production (together with the ancillary activities of public utilities and construction) which is likely to exert a dominating influence on the overall rate of economic growth: partly on account of its influence on the rate of growth of productivity in the industrial sector itself, and partly also because it will tend, indirectly, to raise the rate of productivity growth in other sectors.

importações de bens de capital em maior escala e em menor escala as importações de bens de consumo, visando a produção interna do que antes se importava. Quando se esgota a substituição de importações dos bens de consumo leves, passa-se ao segundo estágio, em que para a manutenção do ritmo de desenvolvimento do parque industrial, bens de consumo leves devem ser exportados. O terceiro estágio é marcado por uma substituição de importações dos bens de investimento, em que ocorre o ciclo virtuoso do consumo e do investimento.

O último estágio, é marcado pelo crescimento das exportações de bens de investimento, e é nesta fase que o autor afirma que as taxas de crescimento explosivas são encontradas, pois a demanda externa por produtos oriundos das indústrias pesadas é combinada com o crescimento interno da demanda gerado por tais indústrias. Pelo lado da oferta, os limitantes deste processo podem tomar duas formas, que são a falta de matérias primas e de mão de obra. (KALDOR, 1966, p.296 -299)

Finalizando a argumentação, Kaldor (1966) conclui que a lei de Verdoorn e sua implicação sobre a produção e a produtividade não mitigam a necessidade de absorção de mão de obra pela indústria, de forma que o aumento da produção absorva o “desemprego disfarçado” presente no campo. Conforme o tempo passa, tal reservatório é esgotado e diminui-se a velocidade de crescimento da economia.

Dessa forma, uma curva de oferta de trabalho elástica é pré-condição para altas taxas de crescimento. Então, o autor argumenta que é esta a razão pela qual o Reino Unido não possui altas taxas de crescimento, visto que a indústria não é capaz de absorver mais mão de obra dos outros setores. (KALDOR, 1966, p. 299-304)

## 2.2 DEBATE ATUAL: CONTRIBUIÇÃO DE BASU E BUDHIRAJA

Deepankar Basu e Manya Budhiraja (2020) <sup>3</sup>reconhecem que a lei de Kaldor-Verdoorn possui uma grande importância dentro do campo heterodoxo da economia. Tal relação captura a presença de retornos de escala crescentes ou o impacto positivo da demanda agregada sobre o progresso técnico. Recapitulando a relação na forma mais simples, tem -se:  $p = a_0 + a_1q +$

---

<sup>3</sup> A contribuição dos autores possui diversas derivações e manipulações algébricas; por motivos de concisão, neste trabalho, serão abreviadas tais manipulações e serão apresentadas as equações fundamentais em sua forma final. Caso o leitor necessite de todas as manipulações, refira-se ao texto original.

$u$  . (p) refere-se a taxa de crescimento da produtividade do trabalho, (q) a taxa de crescimento da produção, (u) referente ao erro estocástico e ( $a_1$ ) o coeficiente de Kaldor-Verdoorn, em que ( $a_1$ ) é positivo e menor que 1. (BASU; BUDHIRAJA, 2020, p. 2)

Segundo Basu e Budhiraja (2020) o fato de  $0 < a_1 < 1$  gera duas conclusões: a taxa de crescimento da produção tem impacto positivo no crescimento da taxa de produtividade do trabalho, o que implica que um aumento da demanda tem um impacto positivo na mudança tecnológica. A segunda conclusão é a de que o impacto de um aumento na taxa de crescimento da produção seria menor que a unidade no crescimento da taxa de produtividade do trabalho, engendrando junto com o aumento da produtividade, um aumento da taxa de emprego.

A questão teórica imposta pelos autores é sobre a interpretação da relação de Kaldor-Verdoorn, visto que ela é uma relação em forma reduzida, na qual o coeficiente  $a_1$  é uma função de parâmetros advindos do lado produtivo da economia e do comportamento do mercado de trabalho. Os autores proponentes do crescimento econômico liderado pela demanda (*demand-led*), utilizam implicitamente a relação de Kaldor-Verdoorn como um sinal da presença de retornos crescentes de escala, ou do impacto positivo do crescimento da demanda sobre o progresso técnico industrial. Para Basu e Budhiraja (2020) essa interpretação sofre de dois graves problemas.

O primeiro problema reside no fato da afirmação de retornos crescentes de escala ou de que o progresso técnico induzido pela demanda estimados pelo coeficiente de Kaldor-Verdoorn só é válido quando uma economia está na trajetória estável de crescimento (*Steady growth path*). O segundo problema encontra-se na incompletude da teoria que baseia tal metodologia, a qual ignora o papel do mercado de trabalho, e em especial, a elasticidade da oferta de trabalho em relação as taxas salariais na determinação do coeficiente de Kaldor-Verdoorn. (BASU; BUDHIRAJA, 2020, p. 4-5)

Dessa forma, os autores discutem duas caracterizações de tecnologia que podem gerar retornos crescentes de escala agregados: presença de economias externas de escala tema da discussão do desenvolvimento durante os anos de 1950-60 (denominada pelos autores de tecnologia do tipo Rosenstein-Rodan) e a presença de mudança tecnológica induzida pela demanda, ou efeitos de escala dinâmicos discutidos na literatura kaldoriana (tecnologia do tipo Kaldor).

Ambas as tecnologias são externas as firmas, e a análise feita por Basu e Budhiraja (2020) mostra que o coeficiente de Kaldor-Verdoorn é determinado por uma combinação entre

o parâmetro de retornos crescentes (via externalidade tecnológica ou mudança tecnológica induzida pela demanda), junto da elasticidade de substituição de fatores produtivos, a taxa de lucro e a elasticidade da oferta de trabalho. Destarte, o coeficiente de Kaldor-Verdoorn por si só não pode ser interpretado como uma fonte de informação inequívoca em relação ao parâmetro de retornos crescentes de escala. (BASU; BUDHIRAJA, 2020, p. 4-5)

Após caracterizar tais tecnologias, os autores analisam casos especiais entre as especificações das tecnologias e o mercado de trabalho e, com isso, concluem que somente sob fortes suposições o coeficiente de Kaldor-Verdoorn pode ser usado para fazer inferências diretas sobre os retornos crescentes de escala. Basu e Budhiraja (2020) utilizam para as variáveis a seguinte notação: (B) para tecnologia, (Q) para o nível da produção, (K) para o estoque de capital, (E) para o nível de emprego, (W) para os salários e (P) para a produtividade do trabalho no setor industrial. Letras minúsculas são correspondentes as taxas de crescimento das respectivas variáveis maiúsculas, por exemplo,  $(q) = \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dt}$ . (BASU; BUDHIRAJA, 2020, p. 6).

### 2.2.1 Função de produção

A função de produção utilizada por Basu e Budhiraja (2020) é de elasticidade de substituição constante, presente em Arrow *et al.* (1961).

$$Q = B [aK^\psi + (1 - a)E^\psi]^{\frac{1}{\psi}} \quad (1)$$

A escolha por uma função de produção desse tipo justifica-se, para Basu e Budhiraja (2020), pela amplitude de análise que ela proporciona, pois ela abarca as especificações mais comuns, como a função de produção de Cobb-Douglas e as funções de produção com coeficientes fixos. Esse tipo de função também separa os efeitos de escala que operam fora da firma dos que são presentes dentro da firma, pois a tecnologia (B) é dada. Assim, tem-se que os retornos são constantes ao nível da firma e que qualquer efeito de escala no agregado é resultado de efeitos de escala externos à firma. (BASU; BUDHIRAJA, 2020, p. 7)

O conceito de externalidades econômicas advém da economia do desenvolvimento “clássica” de 1950-1960, em que tais externalidades são providas de uma firma a outra sem

custos, de forma que esse fenômeno causa uma certa interdependência entre tais firmas. As externalidades econômicas tecnológicas operam por meio da função de produção das firmas, de forma que é observado rendimentos constantes no nível da firma, mas no agregado configuram-se como retornos crescentes de escala.

A interdependência entre as firmas também pode ser via mercado, que se caracteriza como externalidades econômicas pecuniárias. Quando tais externalidades existem, a presença de custos fixos de produção gera retornos crescentes de escala no nível da firma, e, portanto, no agregado. Como os custos são fixos, o comportamento maximizador de lucro das firmas só pode ser lastreado por práticas de competição imperfeita. Como exemplo de tal externalidade, os autores se utilizam do consagrado exemplo da fábrica de alfinetes de Adam Smith e da fábrica de sapatos de Rosenstein-Rodan. (BASU; BUDHIRAJA, 2020, p. 8)

Focando nas externalidades econômicas tecnológicas, os autores manipulam a equação (1), de forma a chegar na relação (2) entre a taxa de crescimento da produtividade do trabalho, o crescimento do estoque de capital, a parcela dos lucros e a taxa de crescimento emprego, dadas as restrições tecnológicas da economia.

Algebricamente:

$$p = b + \pi(k - e) \quad (2)$$

Pelo lado da produção, essa equação mostra que o crescimento da produtividade do trabalho ( $p$ ) tem que ser igual ao crescimento tecnológico, mensurado por ( $b$ ) e pelo capital deepening ( $k-e$ ), em que tais efeitos são mediados pela distribuição entre as classes, intermediado pela parcela dos lucros ( $\pi$ ). (BASU; BUDHIRAJA, 2020, p. 9)

### 2.2.2 Tecnologia do tipo Rosenstein-Rodan

Essa classificação de tecnologia utilizada pelos autores tem como inspiração os trabalhos “clássicos” da literatura do desenvolvimento, como Rosenstein-Rodan, Myrdal, Nurkse etc. Os autores admitem que existem vários mecanismos que podem ser tomados como externalidades econômicas tecnológicas resultantes em retornos crescentes de escala. Atendendo ao treinamento industrial e seus efeitos, os autores propõem uma mudança em (2), de forma

que  $B = \tilde{K}^\mu$ , em que  $(\tilde{K})$  corresponde à média do estoque de capital na indústria e  $(\mu)$  corresponde aos retornos crescentes de escala gerados pelas externalidades tecnológicas. (BASU; BUDHIRAJA, 2020, p. 10)

Assim, os autores utilizam o tamanho do estoque de capital como *proxy* para o tanto de treinamento provido aos trabalhadores; quando  $\mu > 0$  o tamanho do estoque de capital captura as externalidades tecnológicas que surgem das decisões das firmas no nível individual. Em equilíbrio, todas as firmas do setor possuirão o estoque de capital médio, de forma que  $\tilde{K}=K$  então  $B = K^\mu$ , infere-se que  $b = \mu k$ .

Substituindo tal relação em (2) obtemos (3), que os autores denominam tecnologia do tipo Rosenstein-Rodan. (BASU; BUDHIRAJA, 2020, p. 11)

$$p = (\mu + \pi) k - \pi e \quad (3)$$

### 2.2.3 Tecnologia do tipo Kaldor

A outra tecnologia especificada por Basu e Budhiraja (2020) é inspirada pela contribuição de Kaldor e a mudança tecnológica induzida pela demanda. A interpretação dos autores sobre tal contribuição é a de que ela possui uma mistura entre externalidades pecuniárias e tecnológicas, sem distinção sobre qual é enfatizada. As ideias presentes na contribuição kaldoriana podem tomar a forma de externalidades tecnológicas, similares à definição da tecnologia do tipo Rosenstein-Rodan; porém, de fato, há também a presença de externalidades pecuniárias, herdadas da economia política clássica de Adam Smith. (BASU; BUDHIRAJA, 2020, p. 11-12)

Para fins de comparação com a tecnologia do tipo Rosenstein-Rodan, os autores tratam a tecnologia do tipo Kaldor como economias de escala que operam fora da firma: então não é levado em conta o caminho percorrido por Smith, o qual conforme o aumento do tamanho de mercado para a produção, existe espaço para a especialização da produção. Utilizando-se de ideias presentes em Fingleton e McCombie (1998), Basu e Budhiraja (2020) tratam o progresso técnico como parcialmente induzido pelo aumento da produção, o qual pode ser entendido como um efeito de escala extra-firma. (BASU; BUDHIRAJA, 2020, p. 13)

Então a tecnologia kaldoriana é especificada de forma que a taxa de crescimento do parâmetro referente a tecnologia ( $p$ ) seja uma função da taxa de crescimento da produção  $b = \xi q$ . O parâmetro ( $\xi$ ) captura o efeito da mudança técnica induzida pela demanda, e como  $p = q + e$ , a equação (2) toma a forma da tecnologia do tipo Kaldor em (4).

$$p = \left( \frac{\pi}{1 - \xi} \right) k - \left( \frac{\pi - \xi}{1 - \xi} \right) e \quad (4)$$

#### 2.2.4 Análise no estado estacionário

Quando a economia se encontra em um estado de crescimento estável a relação capital-produto é constante ( $q = k$ ). Dessa forma, é possível derivar a relação entre as taxas de crescimento da produtividade e da produção, cerne da relação de Kaldor-Verdoorn. (BASU; BUDHIRAJA, 2020, p. 14)

Para a tecnologia Rosenstein-Rodan, temos a equação (3) caracterizando a produção; com  $q = k$  e utilizando-se do fato de que  $e = q - p$ , tem-se (5):

$$p = \left( \frac{\mu}{1 - \pi} \right) q \quad (5)$$

No caso da tecnologia kaldoriana, seguindo o procedimento semelhante, temos:

$$p = \left( \frac{\xi}{1 - \pi} \right) q \quad (1)$$



### 2.2.5 Mercado de trabalho

As firmas capitalistas sem poder de mercado escolhem o nível de trabalho igualando, segundo Basu e Budhiraja (2020), a taxa real de salário ( $W$ ) com o produto marginal do trabalho ( $\frac{\partial Q}{\partial E}$ ) da equação (1). (BASU; BUDHIRAJA, 2020, p. 15-16)

$$W = (1 - a)B[aC^\psi + (1 - a)]^{\frac{1-\psi}{\psi}} \quad (7)$$

Que após manipulações algébricas<sup>4</sup>, temos:

$$w = b + \frac{\pi}{\sigma} (k - e) \quad (8)$$

Dada essa caracterização em relação ao mercado de trabalho, Basu e Budhiraja (2020) utilizam (8) como base e aplicam modificações para cada um dos tipos de tecnologia abordados no artigo. Para a tecnologia do tipo Rosenstein-Rodan temos  $b = \mu k$ . Substituindo em (8) e rearranjando os termos obtém-se (9).

$$e = \left(1 + \frac{\mu\sigma}{\pi}\right)k - \frac{\sigma}{\pi}w \quad (9)$$

Do lado da oferta de trabalho, Basu e Budhiraja (2020) supõem que a elasticidade da oferta de trabalho ( $\eta$ ) é constante e positiva. Assim, a taxa de crescimento da oferta de emprego é um múltiplo constante da taxa de aumento do salário real. Quando o mercado de trabalho está equilibrado, podemos concluir que

---

<sup>4</sup> Aplica-se o logaritmo e deriva-se em relação ao tempo, resultando em uma equação intermediária, que rearranjada torna-se (8).

$$e = \left(1 + \frac{\mu\sigma}{\pi}\right)k - \frac{\sigma e}{\pi\eta} \quad (2)$$

Aplicando manipulações algébricas a (10) temos a relação entre a taxa de crescimento do emprego e a taxa de crescimento do estoque de capital que são consistentes com o equilíbrio do mercado de trabalho quando olhado sob a ótica da tecnologia do tipo Rosenstein-Rodan em (11). (BASU; BUDHIRAJA, 2020, p. 16-17)

$$e = \left[ \frac{\pi + \mu\sigma}{\pi + (\sigma/\eta)} \right] k \quad (11)$$

Quando os autores caracterizam a tecnologia do tipo Kaldor, o progresso técnico é influenciado pela demanda, ou seja,  $b = \xi q$ . Substituindo em (8) e utilizando a condição de oferta de trabalho  $e = \eta w$  temos:

$$\left(\frac{1}{\eta} + \frac{\pi}{\sigma}\right)e = \xi q + \frac{\pi}{\sigma}k \quad (12)$$

A equação (12) é a relação entre a taxa de crescimento do emprego e a taxa de crescimento do estoque de capital consistente com o equilíbrio do mercado de trabalho quando a mudança tecnológica é influenciada pela demanda. (BASU; BUDHIRAJA, 2020, p. 17)

### 2.2.6 Juntando a produção e mercado de trabalho

Após apresentarem as equações do lado da produção e as condições do mercado de trabalho, Basu e Budhiraja (2020) partem para as demonstrações do coeficiente de Kaldor-Verdoorn com ambas as tecnologias.

Para o coeficiente de Kaldor-Verdoorn com tecnologia de tipo Rosenstein-Rodan, utiliza-se a condição de equilíbrio do mercado de trabalho presente em (8) e o crescimento produtivo dadas as condições tecnológicas em (3).

$$p = \left[ \frac{\mu\pi(1 - \sigma) + (\sigma/\eta)(\pi + \mu)}{\pi + \mu\sigma} \right] e \quad (33)$$

Após manipulações algébricas e dado que  $e = q - p$ , tem-se o coeficiente  $a_1 = \frac{dp}{dq}$  no caso Rosenstein-Rodan.

$$a_1 = \frac{\mu\pi(1 - \sigma) + (\sigma/\eta)(\pi + \mu)}{\pi + \mu\sigma + \mu\pi(1 - \sigma) + (\sigma/\eta)(\pi + \mu)} \quad (14)$$

Com o resultado da equação (14), os autores propõem que “se todos os parâmetros que aparecem nesta equação forem frações positivas, o coeficiente de Kaldor-Verdoorn é positivo e menor que um ( $0 > a_1 > 1$ ).” (BASU; BUDHIRAJA, 2020, p. 18)

Já para o caso da tecnologia do tipo Kaldor, utiliza-se a equação de equilíbrio do mercado de trabalho (12) e o crescimento da produção dadas as condições da tecnologia em (4).

$$\left( \frac{1}{\eta} + \frac{\pi}{\sigma} \right) e = \left( \frac{1 - \xi}{\sigma} \right) p + \xi q \quad (15)$$

Sendo  $e = q - p$ , e manipulando a equação (15), tem-se o coeficiente  $a_1 = \frac{dp}{dq}$  no caso da tecnologia do tipo Kaldor.

$$a_1 = \frac{\sigma + \xi\eta(1 - \sigma)}{\eta + \sigma} \quad (16)$$

Como todos os parâmetros em (16) são positivos, se  $\sigma < \eta\xi/(\eta\xi - 1) < 1$ , então o coeficiente de Kaldor-Verdoorn é positivo; e, se  $\xi(1 - \sigma) < 1$ ,  $a_1$  também é menor que um.

Condensando todas essas informações, Basu e Budhiraja (2020) propõem que “se todos os parâmetros em (16) forem frações positivas,  $\eta > (1/\xi) - 1$  junto do fato de  $1 - \frac{1}{\xi} < \sigma < \frac{\eta\xi}{\eta\xi-1}$  o coeficiente de Kaldor-Verdoorn é positivo e menor que um ( $0 > a_1 > 1$ ).” (BASU; BUDHIRAJA, 2020, p. 19)

Recapitulando, os dois pontos mais importantes da contribuição de Basu e Budhiraja (2020) são referentes aos coeficientes presentes em (15) e (16).

O coeficiente de Kaldor-Verdoorn é determinado pela elasticidade de substituição dos fatores ( $\sigma$ ), juntamente com a elasticidade da oferta de trabalho ( $\eta$ ), a parcela dos lucros ( $\pi$ ) e os retornos crescentes de escala, que no caso Rosenstein-Rodan representa-se por ( $\mu$ ) e no caso Kaldoriano por ( $\xi$ ). Assim, tal coeficiente não pode ser remetido somente a retorno crescentes de escala, tanto por externalidades tecnológicas quanto por mudança técnica induzida pela demanda. (BASU, BUDHIRAJA, 2020, p. 20)

E segundo ponto reside sobre as restrições que recaem sobre os parâmetros para que o coeficiente  $a_1$  se encontre no intervalo significativo entre 0 e 1 quando utilizando a especificação da tecnologia de tipo Kaldor. Na opinião dos autores, não existem explicações intuitivas para tais restrições ao parâmetro, mas elas explicitam o fato de que o coeficiente de Kaldor-Verdoorn não estará no intervalo significativo entre 0 e 1 quando tais restrições não forem satisfeitas sob a égide da mudança tecnológica induzida pela demanda. (BASU; BUDHIRAJA, 2020, p. 20)

### 2.3 SKOTT E ZIPPERER: MODELO KALDORIANO

O modelo escolhido para a aplicação da lógica fuzzy é um dos três modelos presentes em Skott e Zipperer (2012). Os modelos partem de uma função de produção ( $Y$ ) com coeficientes fixos, com somente duas variáveis, capital ( $K$ ) e trabalho ( $L$ ), comuns a todos os modelos contidos neste trabalho dos autores. De forma algébrica temos:

$$Y = \min \{L, \sigma K\} \quad (47)$$

Em que ( $L$ ) é o nível do trabalho e a razão trabalho-produto tem o valor mínimo de 1. Assim, a firma tem duas decisões, uma é a decisão de investimento, e a outra é a decisão de produção/precificação. No estado estacionário, segundo Skott e Zipperer (2012), temos:

$$g = \phi(u, \pi, e) \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial u} \geq 0 \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial \pi} \geq 0 \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial e} \leq 0 \quad (18)$$

$$\pi = \omega(e, g, u) \quad , \quad \frac{\partial \omega}{\partial e} \geq 0 \quad , \quad \frac{\partial \omega}{\partial g} \geq 0 \quad (19)$$

Assim, ( $g$ ) é a taxa líquida de acumulação e taxa de crescimento do produto no estado estacionário, ( $u$ ) é a taxa de utilização da capacidade instalada, ( $\pi$ ) a parcela dos lucros na renda, e por fim com ( $e$ ) sendo a taxa de emprego. A taxa ( $u$ ), com uma função de produção fixa é bem definida, sendo  $u = Y/K$ . A função de produção fixa também implica que o custo marginal é igual ao custo dos salários e que a parcela dos lucros pode ser escrita como  $\pi = m/(1 + m)$ ;  $m$  sendo o *mark-up* no custo unitário dos salários.

Segundo os autores, na equação (18) a utilização e a parcela dos lucros influenciam a acumulação de forma tradicional. Na escola Clássico-marxiana e Kaleckiana um aumento em relação a variável do emprego aumenta o poder de barganha dos trabalhadores em relação à gerência, o que afeta negativamente o *animal spirits*<sup>5</sup>. A equação (19) inclui a taxa de emprego, pois via efeito da elasticidade de oferta do trabalho, a firma possui a parcela do lucro ótima como função positiva da taxa de emprego.

Os autores optam por endogeneizar as aspirações de maiores salários como uma fonte de histerese. Adota-se que os salários possuem um elemento convencional, em que são condicionados pelo passado, mudando a curva endogenamente. Assim, o crescimento estacionário pode ser determinado pela condição do mercado de produtos em combinação com a decisão de produção e de precificação.

---

<sup>5</sup> Termo originário de Jhon Maynard Keynes, o qual possui a conotação de descrever emoções que influenciam o comportamento humano, medidas em confiança do consumidor. No original consta: "Mesmo posta de lado a instabilidade devida à especulação, há a instabilidade devida à característica da natureza humana a qual uma grande proporção de nossas atividades produtivas dependerem mais de otimismo espontâneo do que de expectativas matemáticas" (KEYNES, 1936, p. 161-162)

Dessa forma, a chave para o entendimento do modelo é definida pelas equações (18) (investimento) e (19) (precificação); se as condições do crescimento estacionário forem satisfeitas, Skott e Zipperer (2012) afirmam que, por construção, as firmas estarão dispostas a expandirem o seu capital e produto a taxa  $g$  e manter o seu *mark-up*<sup>6</sup> consistente com a parcela de lucros  $\pi$ .

Caso existam incentivos positivos para o aumento da capacidade produtiva, temos que  $\frac{\partial \phi}{\partial u} > 0$ , essa decisão pode ser reescrita como  $(u = f(e, \pi, u))$ , segundo os autores. De forma análoga, se constatado o crescimento  $(\frac{\partial \omega}{\partial g} > 0)$ , a equação de precificação pode ser interpretada como a taxa de crescimento do lado esquerdo da equação (19).

Para completar o modelo, os autores especificam uma função de poupança com o intuito de ser condição de equilíbrio e maturidade para o mercado do produto:

$$\frac{S}{K} = s u \pi \quad (20)$$

$$\frac{S}{K} = s u \pi = g + \delta = \frac{I}{K} \quad (21)$$

$$g = n \quad (22)$$

( $S$ ) e ( $K$ ) são, respectivamente, a poupança e o estoque de capital brutos, ( $s$ ) é a taxa de poupança dos lucros, ( $u$ ) é a relação produto-capital, e ( $\pi$ ) como o *profit-share*; ( $I$ ) corresponde ao investimento bruto, ( $\delta$ ) a taxa de depreciação e ( $n$ ) a taxa natural de crescimento da força de trabalho. A equação (20) descreve a função de poupança utilizada; já a equação (21) é a condição de equilíbrio para a produção, em que poupança se iguala ao investimento e a equação (22) é a condição de maturidade.

A solução de crescimento estacionário para  $(u)$ ,  $(g)$ ,  $(e)$ ,  $(\pi)$  satisfaz as equações (18), (19), (21), e (22). (SKOTT; ZIPPERER, 2012, p. 281-282).

Dada a exposição anterior, devemos entrar em detalhes sobre como são satisfeitas essas condições sob uma ótica kaldoriana, em que mudanças no produto levam tempo, mas o ajuste

---

<sup>6</sup> Termo utilizado para explicitar a diferença entre o custo e o preço de venda

de preços é rápido; choques na demanda agregada são acomodados via movimento dos preços e da parcela de lucro, ao invés de alterações no nível do produto e da utilização.

Os efeitos de tal impacto dos preços e lucros são, então, seguidos por ajustes no produto. Matematicamente, essa afirmação significa que o produto se torna uma variável estável, e as firmas possuem a decisão sobre a taxa de crescimento do produto ao invés do nível de produção. (SKOTT; ZIPPERER, 2012, p. 289-290). Assim, Skott (1989a e 1989b) formaliza esses argumentos como uma relação entre o crescimento do produto e os sinais recebidos pelas firmas do mercado de bens (taxa de lucro) e do mercado de trabalho (taxa de emprego).

$$\hat{Y} = h(\pi, e) \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial \pi} > 0 \quad , \quad \frac{\partial h}{\partial e} < 0 \quad (23)$$

Os autores assumem que quando a taxa de utilização se desvia da taxa de utilização esperada ocorrem mudanças na taxa de acumulação. A utilização esperada pode variar com a taxa de crescimento, porém a sensibilidade de ( $u$ ) esperado a ( $g$ ) é pequena ou equivalente a sensibilidade de longo prazo da taxa de acumulação. Algebricamente, a função de crescimento estacionário da acumulação é:

$$g = \phi(u); \quad \frac{dg}{d\phi} \geq 0 \quad (24)$$

Em que o crescimento estacionário de ( $u$ ) pode ser encontrado substituindo ( $g$ ) por ( $n$ ) na equação (24); a solução para ( $\pi$ ) é calculada via equilíbrio no mercado de produtos, em que a taxa de lucro corresponde a razão entre a soma da taxa de crescimento ( $n$ ) com a taxa de depreciação ( $\delta$ ), dividido pelo incentivo ao investimento dado pela taxa de poupança ( $s$ ) multiplicada pela taxa da capacidade utilizada ( $u$ ) ( $\pi = \frac{n+\delta}{su}$ ).

A solução para o emprego pela se dá via equação de crescimento. Essa equação leva em conta o equilíbrio do mercado de produtos, porém tem seu limite dado pelo crescimento do mercado de trabalho  $n$ . Algebricamente:  $n = \hat{Y} = h\left(\frac{n+\delta}{su}, e\right)$ .

Portanto, um aumento na taxa de poupança gera uma queda tanto na parcela dos lucros quanto na taxa de emprego; um aumento no *animal spirits* (aumento em  $h$  e/ou na função  $\phi$ ), gera um aumento da taxa de emprego; um movimento ascendente de  $\phi$  leva a um aumento da parcela dos lucros; um aumento do poder de barganha dos trabalhadores (uma queda em  $h$ ) reduz o nível de emprego, mas a parcela dos lucros não é alterada. (SKOTT; ZIPPERER, 2012, p. 290)

### 2.3.1 Dinâmica kaldoriana

As firmas desejam atingir a sua taxa de utilização esperada, porém, na visão de Skott e Zipperer (2012) a taxa de acumulação é predeterminada; e ela depende da diferença entre a taxa esperada de crescimento da acumulação ( $g^d$ ) e a taxa de acumulação realizada ( $g$ ).

$$\frac{dg}{dt} = \frac{d}{dt} \hat{K} = \lambda(g^d - g) \quad (25)$$

A mudança da taxa de utilização depende da diferença entre o crescimento do produto e da acumulação, então a taxa  $g^d$  inclui tanto a taxa de utilização quanto a taxa de crescimento do produto:

$$g^d = \chi(u, \hat{Y}) \quad ; \quad \frac{\partial \chi}{\partial u} > 0 \quad , \quad 0 \leq \frac{\partial \chi}{\partial \hat{Y}} < 1 \quad (26)$$

Dessa forma, parte do crescimento do produto será em resposta a choques de demanda, que são vistos como momentâneos, e os autores assumem que  $\frac{\partial \hat{Y}}{\partial g^d} < 1$ . As equações (25) e (26) são consistentes com a equação (24) de crescimento estacionário, dessa forma obtém-se  $g = \hat{Y} = g^d$ , e substituindo essa igualdade em (26), temos  $g = \chi(u, g)$ ; destarte, a relação de crescimento estacionário torna-se  $g = \phi(u)$  em que  $\frac{dg}{d\phi} = \frac{\partial \chi}{\partial u} / (1 - \frac{\partial \chi}{\partial \hat{Y}})$ . Sendo o modelo dinâmico representado por  $(g, u, e)$ :



$$\frac{dg}{dt} = \lambda[\chi(u, h(\pi, e)) - g] \quad (27)$$

$$\frac{de}{dt} = e[h(\pi, e) - n] \quad (28)$$

$$\frac{du}{dt} = u[h(\pi, e) - g] \quad (29)$$

Em que  $\pi = \frac{g+\delta}{su}$ . No ponto estacionário, a matriz jacobiana do sistema é:

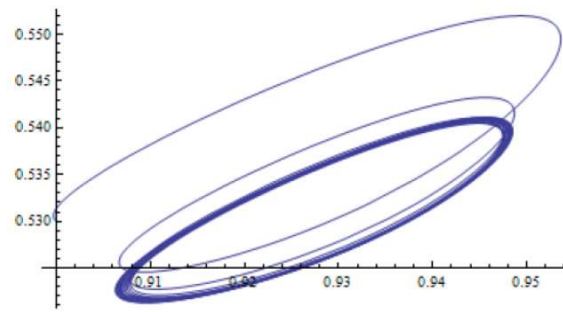
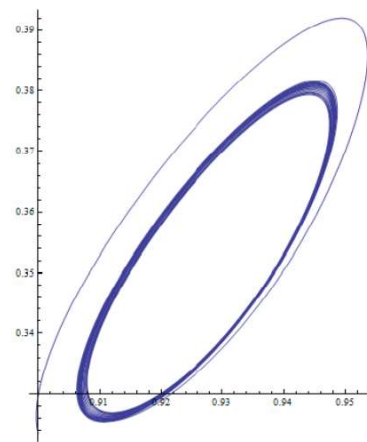
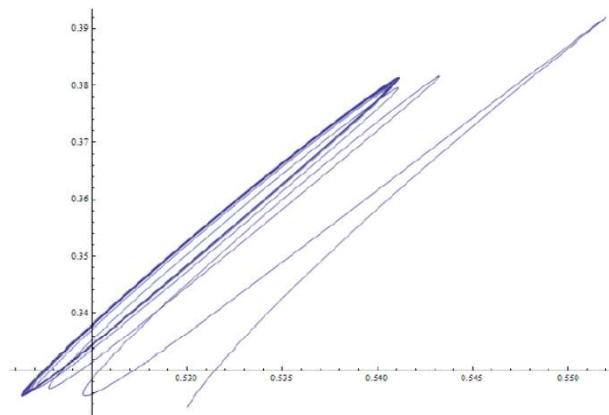
$$J(g, u, e) = \begin{pmatrix} \lambda \left[ \frac{\partial \chi}{\partial \hat{Y}} \frac{\partial h}{\partial \pi} \frac{1}{su} - 1 \right] & \lambda \left[ \frac{\partial \chi}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial \pi} \frac{n + \delta}{su^2} \right] & \lambda \frac{\partial \chi}{\partial \hat{Y}} \frac{\partial h}{\partial e} \\ u \left[ \frac{\partial h}{\partial \pi} \frac{1}{su} - 1 \right] & -u \frac{\partial h}{\partial \pi} \frac{n + \delta}{su^2} & u \frac{\partial h}{\partial e} \\ e \frac{\partial h}{\partial \pi} \frac{1}{su} & -e \frac{\partial h}{\partial \pi} \frac{n + \delta}{su^2} & \frac{\partial h}{\partial e} \end{pmatrix} \quad (30)$$

Os autores afirmam que, em geral, as condições de estabilidade local não serão satisfeitas, e que o modelo pode produzir ciclos de limites estáveis, conforme exemplos na figura 1 abaixo. A simulação utilizada por Skott e Zipperer (2012) assume uma função de acumulação linear, mas a função de crescimento tem forma de “S”<sup>7</sup>.

Os ajustes de custos do produto são provavelmente convexos, conforme a função de  $\hat{Y}$ ; a taxa de crescimento será mais sensível a valores médios da parcela de lucro do que a valores extremos, tanto para valores próximos de 1 quanto para próximos de 0, valores limites para o *profit-share*. Também assumem que as variações marginais no emprego têm efeitos pequenos, a não ser se a economia estiver próxima do pleno emprego.

<sup>7</sup> As equações utilizadas pelos autores se encontram, originalmente, na nota de rodapé 24. Skott e Zipperer (2012) definem as equações  $\chi(u, \hat{Y}) = 0,3(u - 0,5) + 0,7\hat{Y}$  e  $\hat{Y} = h(\pi, e) = \frac{0,4}{1+e^{-15(\pi-0,2-0,04(1-e)^{-0,5})}} - 0,17$ . Com valores iniciais  $\lambda = 1$ ;  $n=0,03$ ;  $s=0,7$ ;  $\delta = 0,1$ .

Figura 1 - Dinâmica prevista pelo modelo proposto

 $e - u$  dynamics $e - \pi$  dynamics $u - \pi$  dynamics

Fonte: Skott e Zipperer (2012, p. 292).

### 3 ELEMENTOS DA LÓGICA FUZZY

O objetivo deste capítulo é apresentar elementos que fazem parte da lógica *fuzzy*, de forma que o leitor consiga entender suas origens, fundamentos e aplicações mais gerais, para que seja possível aplicá-la ao modelo econômico kaldoriano que foi apresentado anteriormente.

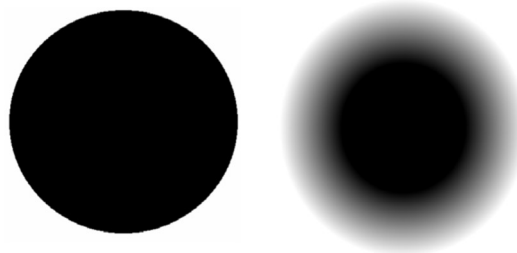
Na teoria de conjuntos clássicos, o conceito de pertinência é bem definido. Dado um conjunto  $A$  em um universo  $X$ , os elementos desse universo simplesmente pertencem ou não à  $A$ . Na forma de função característica, temos:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se e somente se } x \in A \\ 0 & \text{se e somente se } x \notin A \end{cases} \quad (31)$$

Lotfi Zadeh em 1965, baseado na combinação da lógica aristotélica e teoria dos conjuntos desenvolvida por Jan Łukasiewicz no início de século XX, realiza a generalização da lógica convencional binária (doravante lógica *crisp*) e propõe a lógica *fuzzy*, na qual um elemento possui um grau de pertinência a certo conjunto.

Como intuitivamente representado na Figura 2, em que o círculo a esquerda, com limites bem definidos, representa a lógica *crisp*. E o da direita a lógica *fuzzy*, com graduações de pertinência, em que a parte branca significa um grau nulo de pertinência, e na medida em que cresce o grau de pertinência, de branco torna-se gradativamente cinza até chegar ao preto. (DERNONCOURT, 2013, p. 1)

Figura 2 - Representação gráfica intuitiva da diferença entre as lógicas



Fonte: Dernoncourt (2013, p 7).

Primeiro, necessitamos cobrir as principais definições dos conjuntos *fuzzy*, segundo capítulo 1 de De Barros e Bassanezi (2010):

Denomina-se por  $U$  um conjunto clássico, em que um subconjunto fuzzy  $F$  de  $U$  é caracterizado por uma função de pertinência  $\varphi_F: U \rightarrow [0,1]$ .

Seja  $F$  um subconjunto composto de elementos  $x$  de um conjunto clássico  $U$ , acompanhados de um valor de pertinência a  $F$ , simbolizado por  $\varphi_F(x)$ . Então o subconjunto fuzzy  $F$  de  $U$  é dado por um conjunto clássico de pares ordenados:

$$F = \{(x, \varphi_F(x)), \text{ com } x \in U\}.$$

O subconjunto clássico de  $U$  definido por:

$$\text{supp } F = \{x \in U: \varphi_F(x) > 0\}.$$

A união entre  $A$  e  $B$  é o subconjunto fuzzy de  $U$  cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A \cup B}(x) = \max \{ \varphi_A(x), \varphi_B(x) \}, x \in U.$$

A intersecção entre  $A$  e  $B$  é subconjunto fuzzy de  $U$  cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A \cap B}(x) = \min \{ \varphi_A(x), \varphi_B(x) \}, x \in U.$$

O complementar de  $A$  é o subconjunto fuzzy  $A'$  de  $U$  cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x), x \in U$$

Os subconjuntos fuzzy  $A$  e  $B$  de  $U$  são iguais se as funções de pertinência coincidirem, ou seja,  $\varphi_A(x) = \varphi_B(x)$ , para todo  $x \in U$ .

Seja  $A$  um subconjunto fuzzy de  $U$  e  $\alpha \in [0,1]$ . O  $\alpha$  – nível de  $A$  é o subconjunto clássico de  $U$  definido por:

$$[A]^\alpha = \{x \in U: \varphi_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha < 1.$$

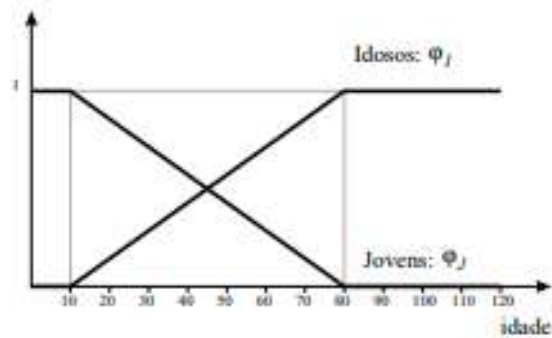
Um subconjunto fuzzy é dito normal se todos os seus  $\alpha$  – níveis forem não vazios, ou seja, se  $[A]^\alpha \neq \emptyset$ . (DE BARROS; BASSANEZI, 2010, p. 7-30)

Explicada a diferença entre as lógicas, e as definições acima, podemos adentrar o tópico das variáveis linguísticas, ou termos *fuzzy*. Isso consiste em informações qualitativas como

baixo, médio, alto, bom, médio, ruim, jovem, idoso etc. A construção de tais informações se dá por meio das funções de pertinência, em que se definem valores entre 0 e 1 para o pertencimento de tais características.

A figura 3 possui um exemplo em que existem dois conjuntos fuzzy, idosos e jovens; observa-se que para valores menores do que 10, só estão presentes valores considerados “jovem”, a partir de 10 anos há a sobreposição entre as funções de pertinência entre jovens e idosos. No passar dos anos, deixa de se pertencer ao grupo dos jovens e passa-se a pertencer mais ao grupo dos idosos. Ao chegar na marca de 80 anos, a sobreposição entre jovens e idosos termina, e tal indivíduo pode ser considerado 100% idoso.

Figura 3 - Representação gráfica das variáveis linguísticas



Fonte: De Barros; Bassanezi (2010, p. 23).

Assim, fez-se necessária a criação de operadores específicos para se usar dentro da lógica fuzzy para que se possibilitem operações de união (ou), intersecção (e) e complemento (não) dos atributos das variáveis linguísticas. Os conjuntos de operadores mais utilizados são os operadores probabilísticos clássicos e os operadores de Zadeh.

Quadro 1 - Conjunto de operadores fuzzy

Nome	Intersecção(E)	União (OU)	Complemento (NÃO)
	$\mu A \cap B (x)$	$\mu A \cup B (x)$	$\mu \bar{A} (x)$
Operadores Zadeh Min/Max	$\min (\mu A (x), \mu B (x))$	$\max (\mu A (x), \mu B (x))$	$1 - \mu A (x)$
Probabilísticos	$\mu A (x) \times \mu B (x)$	$\mu A (x) + \mu B (x) - \mu A (x) \times \mu B (x)$	$1 - \mu A (x)$

Fonte: Démoncourt, (2013, p.11).

Avançando na construção da lógica *fuzzy*, faz-se necessário a definição de regras expressas nas variáveis linguísticas, tomando a forma de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF). Por exemplo, uma pessoa que deseja dar uma gorjeta ao garçom, irá definir se ela será alta, média ou baixa dependendo da qualidade do serviço e se a comida está do seu gosto. Para tanto, necessita-se de um sistema de inferência, que no caso deste trabalho será o método de Mamdani, em que a definição da veracidade do argumento se dá pela função  $\min (fa(x), fb(x))$ . Ou seja, para que a gorjeta seja alta, deve se analisar o mínimo entre a qualidade do serviço e o mínimo da qualidade da comida.

Assim, como argumentam De Barros e Bassanezi (2010), um controlador fuzzy possui os seguintes módulos:

O módulo de fuzzificação, onde as entradas do sistema são modeladas por conjuntos fuzzy e seus respectivos domínios, definindo uma a uma as funções de pertinência para cada conjunto.

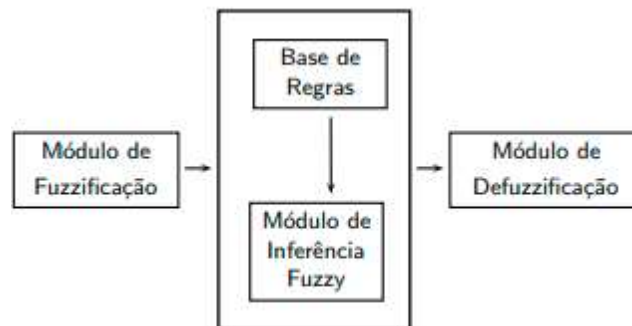
O módulo da base de regras é composto pelas proposições fuzzy. Tais proposições definem o comportamento do sistema, e usualmente são descritas na forma linguística se/então. Ainda utilizando o exemplo da gorjeta, uma possível regra que descreve o comportamento do cliente seria: “Se a comida estava boa e o serviço foi excelente, então a gorjeta será alta”.

O terceiro módulo é o de inferência fuzzy, em que se “traduzem” as proposições linguísticas para a matemática usando técnicas da lógica fuzzy, obtendo as relações que modelam a base de regras. Esse módulo é crucial para o sucesso do processo, pois ele é responsável por fornecer a cada entrada fuzzy seu respectivo controle.

Por fim, o módulo de defuzzificação é onde ocorre o processo de representação do conjunto fuzzy resultante das interações entre as regras e o método de inferência em um valor numérico. (DE BARROS; BASSANEZI, 2010, p. 117-119)

Para ilustrar graficamente os módulos de um controle fuzzy, os autores se utilizam da figura 4.

Figura 4 - Representação gráfica de um controle fuzzy



Fonte: De Barros; Bassanezi (2010, p. 119)

Assim como a definição do sistema de inferência, a escolha do método parte do pesquisador, mas os mais utilizados são o de média dos máximos e o método do centro de gravidade/massa. O primeiro, o método de média das máximas, retorna a média das abcissas que atingiram o maior valor dadas as resultantes da interação do módulo *fuzzy*. O segundo método, o do centro de massa, define que o valor resultante entre as regras deve ser a abscissa correspondente ao centro de massa da distribuição dos resultados obtidos através das regras.

Para concluir esta seção, deve-se enfatizar que o pesquisador tem um papel fundamental ao desenhar o sistema *fuzzy* com as funções de pertinência, o módulo de inferência junto da matriz de decisão e a forma de defuzzificação. De forma que, esquematicamente, temos os dados em questão, que passam pela fuzzificação ao se determinar as variáveis linguísticas, a escolha dos operadores é determinante para a inferência, e a defuzzificação é o método em que se retornam os resultados obtidos nesse processo linguístico em resultados quantitativos, de forma que a base de conhecimento *fuzzy* tem papel chave em todas as partes do processo. (DERNONCOURT, 2013 p.16)

Assim, a análise *fuzzy* nos proporciona um ferramental em que conseguimos tornar os sistemas de inferência teóricos mais próximos à realidade de ambientes que possuem informações difusas, ou que são feitas em ambientes flexíveis e não-lineares; sendo essa característica uma área em que a ciência econômica por si só não tem conseguido remediar ao propor modelos econômicos. Assim, pode-se inferir que e que a ferramenta *fuzzy* possui atrativos para certos tipos de análises econômicas.

### 3.1 MODELOS DE CRESCIMENTO E LÓGICA FUZZY

Nesta segunda parte do capítulo, serão analisados dois artigos que propõem a lógica fuzzy como uma forma de controle e/ou previsão na literatura econômica que discute modelos de crescimento, semelhantes ao modelo kaldoriano do capítulo 2. O primeiro artigo, “Fuzzy control of macroeconomic models” é uma tentativa de André Keller (2009) em verificar se os resultados obtidos nos modelos econômicos via controle fuzzy são melhores do que quando utilizado o controle proporcional integral derivativo (PID). O segundo artigo, “Goodwin economic cycle via p-fuzzy system” é um esforço de Sánchez et al. (2020) para propor uma metodologia simples e abrangente para auxiliar na resolução de problemas que envolvam equações diferenciais ordinárias, ampliando o leque de opções metodológicas dentro do campo econômico.

#### 3.1.1 Keller e abordagem do controle fuzzy

Keller define modelos macroeconômicos como tentativas de descrever a dinâmica economia de curto ou longo prazo, em que as variáveis podem ser classificadas em três tipos: as endógenas, que descrevem o estado da economia; as variáveis de controle, que são os objetos das políticas econômicas; e as variáveis exógenas, que são advindas de um ambiente incontrolável. Dadas as variáveis exógenas, o problema da dinâmica de estabilização consiste em descobrir os controles para que se minimize alguma função quadrática que defina o objetivo.

Apesar deste método levar em conta choques estocásticos, a abordagem de minimização encontra dificuldades explicativas quando as incertezas são importantes ou quando o cálculo probabilístico não consegue compensar dados imprecisos. Dessa forma, como argumenta o autor, a lógica fuzzy contribui com uma solução pragmática a esse problema, visto que opera em números fuzzy.



Assim, a contribuição do autor busca explorar o controle de dinâmicas macroeconômicas utilizando algoritmos fuzzy; O modelo que Keller sujeita a tal controle é o modelo de flutuação linear de Phillips. (KELLER, 2009, p.115)

O modelo de Phillips é apresentado por Keller (2009) da seguinte forma:

$$Z(t) = C(t) + I(t) + G(t), \quad (31)$$

$$C(t) = c.Y(t) - u(t), \quad (32)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\beta \left( I(t) - v \frac{dY(t)}{dt} \right), \quad (33)$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = -\alpha (Y(t) - Z(t)). \quad (34)$$

Neste modelo todas as variáveis são contínuas e medidas em relação à sua diferença do valor de equilíbrio. A demanda agregada ( $Z$ ) consiste na soma do consumo ( $C$ ), do investimento ( $I$ ) e do gasto autônomo do governo ( $G$ ) em (31). Já o consumo (32) depende da renda ( $Y$ ) e da propensão marginal ao consumo ( $c$ ) e é afetada negativamente por uma mudança espontânea na variável ( $u$ ), em que é definida por  $u(t) = 0$ , para  $t < 0$  e  $u(t) = 1$  para  $t \geq 1$ .

Na equação (33) temos a aceleração linear do investimento, em que o investimento é relacionado com a variação da demanda. O coeficiente ( $v$ ) é responsável pela aceleração enquanto o ( $\beta$ ) demonstra a velocidade de resposta do investimento a mudanças produtivas e a defasagem de aceleração corresponde a  $\left(\frac{1}{\beta}\right)$  anos. Por fim, a equação (34) denota o ajuste gradual contínuo da produção à demanda; a taxa ( $Y$ ) de mudança da produção é, a qualquer momento, proporcional à diferença entre a demanda e a produção. O coeficiente ( $\alpha$ ) é correspondente a velocidade do ajuste da produção a mudanças de demanda. A defasagem temporal deste modelo é exponencial simples quando utilizada. (KELLER, 2009, p.117-118)

Dada a descrição do modelo, Keller (2009) ilustra o comportamento do modelo sem regulação, (em que  $G = 0$  e  $u = 1$ ) e é descrito pela equação diferencial de segunda ordem em  $Y$  (35):

$$Y'' + (\alpha(1 - c) + \beta - \alpha\beta v) Y' + \alpha\beta(1 - c)Y(t) = -\alpha\beta \quad (35)$$

As condições iniciais são, quando  $t > 0$ ,  $Y(0) = 0$ ,  $Y' = -\alpha$ . Já os parâmetros iniciais são  $c = \frac{3}{4}$ ,  $v = \frac{3}{5}$ ,  $\alpha = 4$ , ( $t = \frac{1}{\alpha} = 3$  meses) e  $\beta = 1$ . Assim temos a equação diferencial na sua forma reduzida em (36):

$$5Y'' - 2Y' + 5Y(t) = -20 \quad (36)$$

Seguida de sua resposta em (37), com  $Y(0) = 0$  e  $Y'(0) = -4$  como condições iniciais.

$$Y(t) = -4 + 2e^{t/5} \left( 2 \cos \frac{2\sqrt{6}}{5} - \sqrt{6} \operatorname{sen} \frac{2\sqrt{6}}{5} \right); t > 0 \quad (37)$$

Completa a descrição do modelo de Phillips e da sua dinâmica sem regulação, Keller (2009) passa a propor o controle de tal dinâmica via políticas de estabilização proporcionais integrais derivativas, que, já estão presentes na contribuição de Phillips (1954).

Tal proposição consiste em três políticas aditivas; uma proporcional (política P), outra proporcional integral (política PI) e a última proporcional integral derivativa (política PID), que consistem em adições à equação (31). (KELLER, 2009, p. 118)

Tais políticas, inspiradas na teoria do controle, são utilizadas para o controle dos mecanismos de retroalimentação que atuam sobre algum sistema. Keller (2009), define que os três elementos de tal controle são responsáveis por três ações distintas:

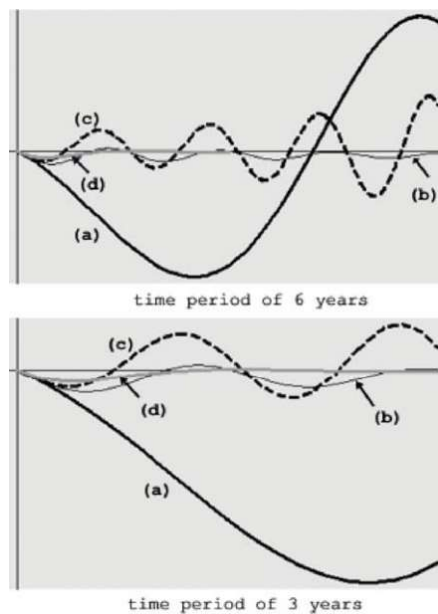
Elemento P: é proporcional ao erro no instante  $t$ , que se interpreta como o erro presente, e a resposta a tal erro é denominada ação proporcional  $K_p e(t)$  ;

Elemento I: é proporcional à integral do erro até o instante  $t$ , que se interpreta como a soma dos erros passados, e a resposta a tal erro é a ação integral  $K_I = \int_0^t e(t) dt$ ;

Elemento D: é proporcional à derivada do erro no instante  $t$ , que se interpreta como uma previsão do erro futuro, e a resposta a tal erro é a ação derivativa  $K_d \frac{d}{dt} e(t)$ .

Assim, ao aplicar as três políticas de estabilização ao ciclo de Phillips, Keller (2009) conclui que a curva que não possui políticas de estabilização gera flutuações explosivas, dado o coeficiente de aceleração  $v$ , representada graficamente na figura 5 pela curva (a). A política P corrige o nível de produção, porém falha em controlar as oscilações geradas, correspondente a curva (b); o elemento I contribui com um aumento das oscilações, tornando a política de estabilização PI inviável por si só, remetente à curva (c). Ao adicionar a estabilização do elemento D, estabiliza-se o sistema com a política PID, representada graficamente pela curva (d). (KELLER, 2009, p. 119-120)

Figura 5 - Representação gráfica das políticas de estabilização

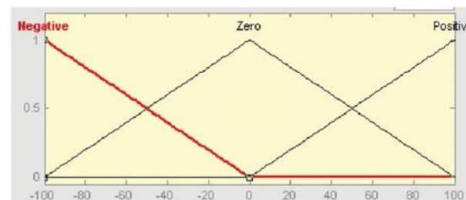


Fonte: Keller (2009, p. 119).

Já no design do controle via lógica fuzzy, o autor descreve tal ferramenta como um “tomador de decisão artificial que opera em tempo real dentro de um circuito fechado”, em que esse controle tem quatro componentes: O primeiro é o módulo de fuzzificação das variáveis crisp em valores fuzzy; o segundo consiste em regras “se-então”, que quantifica a expertise do pesquisador sobre o fenômeno de forma linguística para que se otimize o controle; o terceiro componente é um mecanismo dinâmico que decide a relevância das regras, o método de inferência; e, por fim, uma interface de defuzzificação que converte a conclusão obtida em termos fuzzy em um resultado numérico. (KELLER, 2009, p. 115)

Keller define a função de pertinência de forma triangular, em que o erro assume valores negativos, zero ou positivos em um intervalo de  $[-100;100]$ .

Figura 6 - Função de pertinência do controle Fuzzy



Fonte: Keller (2009, p.116)

As regras possuem como seu objeto de análise os inputs do erro e da derivada do erro resultantes do modelo de Phillips. Os resultados das regras, dadas a combinação entre erro e derivada do erro, podem ser *negative large*, zero ou *positive large*.

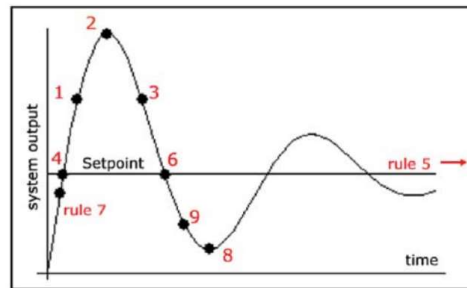
Figura 7 - Conjunto de regras

		change in error		
		NL	ZE	PL
error	control action	NL	ZE	PL
	NL	NL <sup>1</sup>	ZE <sup>2</sup>	PL <sup>3</sup>
	ZE	ZE <sup>4</sup>	ZE <sup>5</sup>	PL <sup>6</sup>
PL	ZE <sup>7</sup>	PL <sup>8</sup>	PL <sup>9</sup>	

Fonte: Keller (2009, p.116)

Para ilustrar em que ponto da oscilação cada regra fuzzy é aplicada, Keller se utiliza da Figura 8, a qual os pontos numerados se referem as regras presentes na Figura 7.

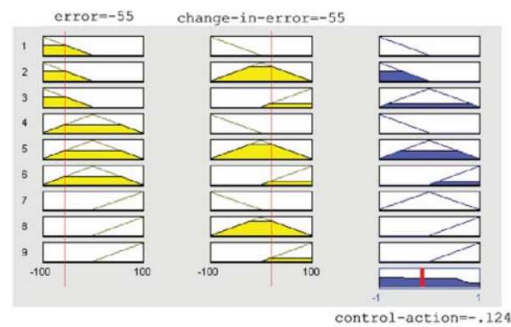
Figura 8 - Aplicação pontual de regras fuzzy no ciclo de Phillips



Fonte: Keller (2009, p.117)

Tais entradas produzem a saída  $v$ , presente na equação (33), que é resposta à situação dos objetos, ou seja, a ação de controle proposta.

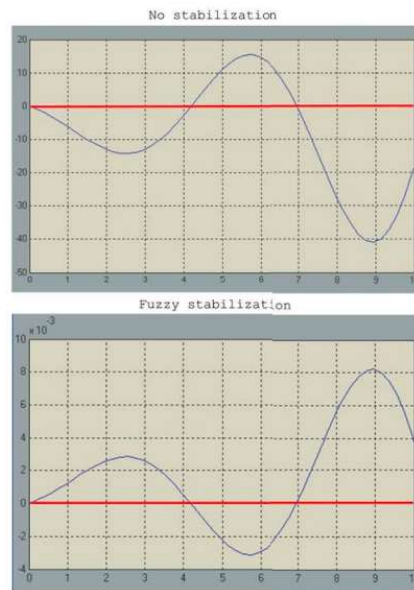
Figura 9 - Saída Fuzzy



Fonte: Keller (2009, p.117)

A eficiência do controle fuzzy proposto pelo autor é verificada empiricamente, de forma que no período de seis anos o intervalo das flutuações passa de  $[-12,12]$  para  $[-3,3] \cdot 10^{-3}$ , conforme ilustrado na figura 10.

Figura 10 - Eficiência do controle fuzzy



Fonte: Keller (2009, p.121)

### 3.1.2 Sánchez et al. e a previsão fuzzy

Outra contribuição na literatura sobre a utilização da ferramenta fuzzy é apresentar uma solução numérica de um sistema p-fuzzy do ciclo econômico de Goodwin proposta por Sánchez et al. em 2020. O modelo de Goodwin consiste em um modelo dinâmico baseado na acumulação de capital descrita em Marx, composto de duas equações diferenciais ordinárias não lineares, que representam a interação entre a taxa de emprego e a parcela da renda referente aos salários em uma economia.

As premissas econômicas que baseiam o modelo são que um aumento dos salários implica uma redução nos lucros. Essa redução de lucros causa uma diminuição nos investimentos e na poupança, o que arrefece o mercado de trabalho. De outro lado, a força de trabalho cresce via incorporação de novos trabalhadores, e o progresso técnico substitui o trabalhador, liberando-o; com tal crescimento da força de trabalho, os salários crescem menos que a produtividade e há o aumento na lucratividade, que por sua vez incentiva os investimentos e a acumulação de capital, diminuindo o desemprego e aumentando os salários. As contribuições anteriores a esse trabalho são diferenciadas em dois tipos pelos autores; a primeira em aumentar o escopo e a precisão matemática de modificações do modelo. A outra vertente

foca em testes do modelo de Goodwin de forma empírica. (SÁNCHEZ et al., 2020, p. 4079-4080)

Dessa forma, Sánchez et al. (2020) constroem o raciocínio por partes, primeiro descrevendo as ferramentas básicas, depois adequando-as ao modelo de Goodwin, e finalmente comparando os resultados obtidos da predição com a série histórica da Alemanha entre os anos de 1991 e 2016. Os autores utilizam a abordagem do problema do valor inicial (PVI) e do método numérico de resolução de equações diferenciais ordinárias (EDO) de Euler.

Portanto, temos a seguinte estrutura de um PVI:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = f(x, y), x(0) = x_0, \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = g(x, y), y(0) = y_0 \end{cases} \quad (38)$$

Seguindo para a solução numérica de um sistema EDO, os autores se valem da seguinte formulação do método de Euler, em que  $h$  representa o passo (tempo) e  $f(x_n, y_n)$ , e  $g(x_n, y_n)$  são as variações específicas:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hx_n f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= y_n + hy_n g(x_n, y_n), \end{aligned} \quad (39)$$

Assim, Sánchez et al. (2020) passam para a definição do sistema fuzzy baseado em regras, que consiste em um módulo de fuzzificação, que atrela o input real a uma função característica de pertinência, o conjunto de regras condicionais (se-então), o método de inferência (Mamdani) e por fim há o retorno representado por um valor real com a aplicação do módulo de defuzzificação, que no caso é o centroide/centro de gravidade.

Adicionalmente à explicação sobre as regras fuzzy, há também a explicação de sistemas parcialmente fuzzy (p-fuzzy), em que sua dinâmica é dada por um campo direcional/ campo vetorial baseado no conhecimento a priori do sistema de regras fuzzy; destarte, o estado das variáveis em questão e as suas respectivas variações são os termos linguísticos sujeitos a interação via o sistema de regras, em que o estado das variáveis é o *input*, e o *output* é a variação.

Para o presente trabalho, os autores fazem uso de tal sistema para lidar com o PVI, de forma que as funções  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  são parcialmente conhecidas e ao desenhar as regras, leva-se em conta as características que descrevem o fenômeno; dessa forma, a solução para  $(x(t), y(t))$  em (38) é estimada via uma sequência  $(x_n, y_n)$  em (39). (SÁNCHEZ et al., 2020, p. 4080)

O modelo de Goodwin é baseado em sete premissas que delimitam os parâmetros do sistema de equações diferenciais que geram a dinâmica característica do modelo. A primeira equação define o comportamento da taxa de emprego ( $v$ ) e a segunda descreve a parcela dos salários na renda ( $u$ ), então temos:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -(\gamma + \alpha)u + \rho v u, \\ \frac{dv}{dt} = \left(\frac{1-u}{\sigma}\right) - (\alpha + \beta), \end{cases} \quad (40)$$

Os autores apontam que o sistema (40) é similar ao modelo de Lotka-Volterra, em que ( $u$ ) possui o papel de predador e ( $v$ ) possuindo o papel da presa. Reescrevendo o sistema em taxas de crescimento específicas, temos:

$$\begin{cases} \frac{1}{u} \frac{du}{dt} = -(\gamma + \alpha) + \rho v, \\ \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = \left(\frac{1-u}{\sigma}\right) - (\alpha + \beta), \end{cases} \quad (41)$$

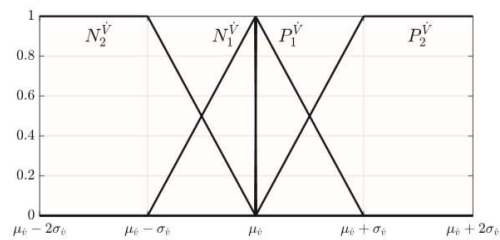
Podemos observar que para cada variação em ( $v$ ), a variação específica  $\frac{1}{u} \frac{du}{dt}$  é constante, o que também ocorre em relação a ( $u$ ). Com todas as partes do raciocínio explicadas, Sánchez et al. passam a delimitar as funções de pertinência, regras e, por último, o campo vetorial que é o resultado da interação delas.

As entradas  $V$  e  $U$ , respectivamente a taxa de emprego e a parcela dos salários na renda, assumem quatro formas em termos linguísticos; “baixo”, “médio baixo”, “médio alto”, e “alto”. As saídas, os crescimentos específicos  $\frac{1}{U} \frac{dU}{dt} = \dot{U}$  e  $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \dot{V}$ , assumem as formas linguísticas “negativo baixo”, “negativo alto”, “positivo baixo”, “positivo alto”. A determinação das funções de pertinência das quatro variáveis pode ser feita a partir dos conhecimentos de experts



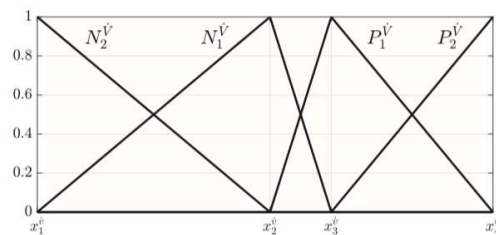
e/ou utilizando um conjunto de dados disponíveis; a opção dos autores foi a de ajuste via série histórica de U e V de determinado país. Utilizam-se de dois métodos para o ajuste fuzzy, o primeiro levando em conta medidas estatísticas dos dados, e o segundo método utiliza uma clusterização denominada fuzzy c-means. (SÁNCHEZ et al., 2020, p.4081-4082)

Figura 11 - Exemplo de função de pertinência utilizando estatísticas históricas



Fonte: Sánchez et al. (2020, p. 4083)

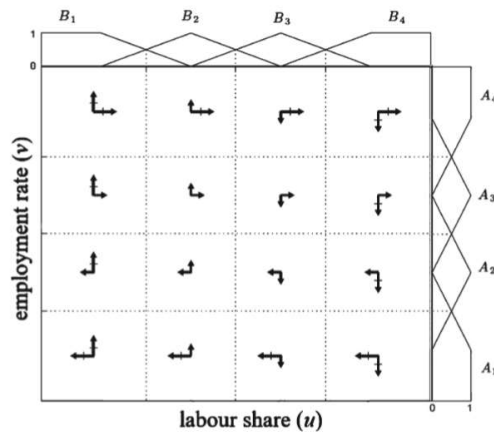
Figura 12 - Exemplo de função de pertinência utilizando fuzzy “c-means”



Fonte: Sánchez et al. (2020, p. 4084)

Dada toda a construção do raciocínio até então, Sánchez et al. (2020) elabora o conjunto de regras que se fará necessário para a simulação fuzzy do modelo de Goodwin. Retomando a propriedade de que quando existe uma variação em v, a variação do crescimento específico em u é constante; obtém-se 16 regras do tipo: “Se V é “baixo” e U é “baixo”, então  $\dot{V}$  é “positivo alto” e  $\dot{U}$  é “negativo baixo”. Assim, pode-se obter uma base de regras que, graficamente, toma a forma de um campo direcional, o qual é representado por setas que apontam o sentido e a magnitude dos crescimentos específicos de dada combinação da taxa de emprego e da parcela dos salários na renda. O próximo passo adotado pelos autores é a utilização do método de inferência de Mamdani e o método centróide de defuzzificação, para retornar das variáveis linguísticas das regras para variáveis quantitativas.

Figura 13 - Representação gráfica da base de regras do modelo de Goodwin



Fonte: Sánchez et al. (2020, p. 4083)

Para a validação do modelo proposto em seu trabalho, Sánchez et al. (2020) analisa os dados da Alemanha de 1991 a 2016. Para tanto, utiliza-se a base de dados da AMECO, base de dados macroeconômicos anuais da União Europeia. Para a parcela da renda referente ao trabalho (labour share)  $u_h$  é calculado utilizando o total recebido pelos empregados dividido pela soma das compensações ao trabalhador somado ao lucro operacional, em que o lucro operacional inclui depreciação e a correção para o rendimento dos autônomos. Para a taxa de emprego  $v_h$  é utilizado a soma dos empregados e autônomos divididos pela soma dos empregados, autônomos e desempregados. Ambas as variáveis são normalmente distribuídas, segundo testes empreendidos pelos autores.

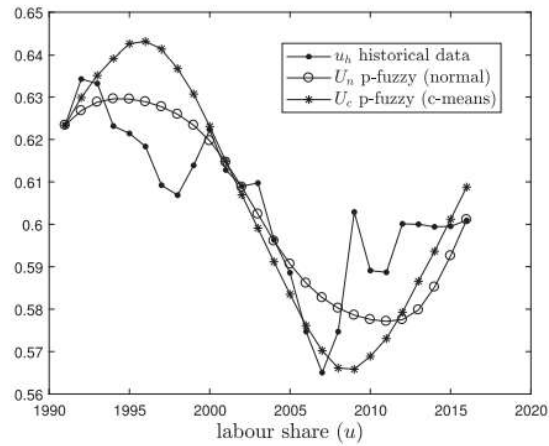
$$u_h = \frac{\text{Total recebido pelos empregados}}{\text{Compensações ao trabalhador} + \text{Lucro operacional}} \quad (42)$$

$$v_h = \frac{\text{Empregados} + \text{Autonomos}}{\text{Empregados} + \text{Autonomos} + \text{Desempregados}} \quad (43)$$

Assim, os autores comparam a série histórica dos dados com os resultados obtidos via a metodologia p-fuzzy utilizando-se do método de Euler, descrito na equação (39) com passo anual ( $h = 1$ ). As trajetórias dinâmicas do método, segundo os autores, reproduzem qualitativamente o comportamento das variáveis reais; tanto com a função de pertinência

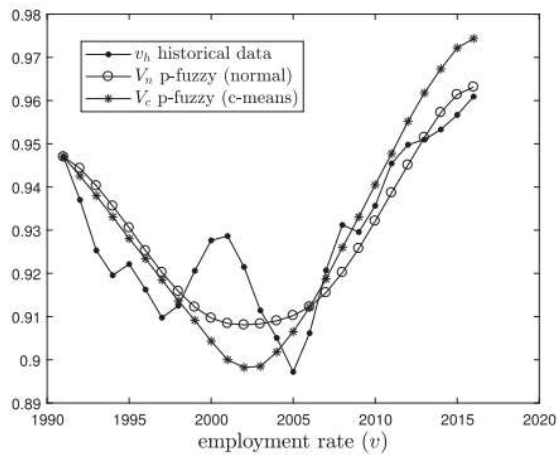
definidas via medidas estatísticas quanto via c-means. da série histórica, tira-se que a média dos valores  $u_h$  e  $v_h$  são 0,6045 e 0,9285 respectivamente. (SÁNCHEZ et al., 2020, p. 4085 4086)

Figura 14 - Resultados comparativos para a parcela do trabalho na renda



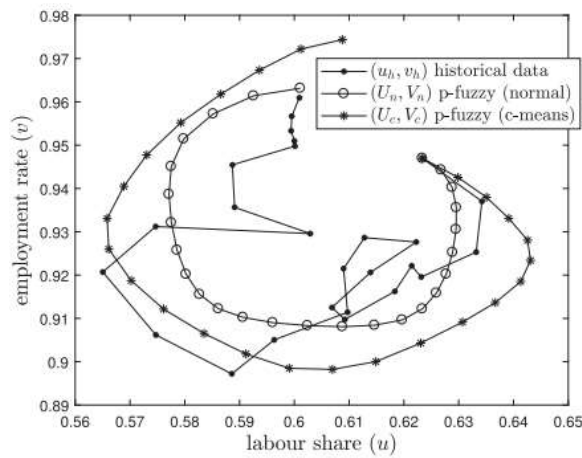
Fonte: Sánchez et al. (2020, p.4086)

Figura 15 - Resultados comparativos para a taxa de emprego



Fonte: Sánchez et al. (2020, p. 4086)

Figura 16 - Resultados comparativos do ciclo de Goodwin



Fonte: Sánchez et al. (2020, p. 4086)

Quadro 2 - Precisão da análise fuzzy

	p-fuzzy ( $U_n ; V_n$ )	p-fuzzy ( $U_c ; V_c$ )
Valores médios	(0,0636; 0,9288)	(0,6050; 0,9297)
Porcentagem de erro	(1,26%; 0,35%)	(0,71%; 1,79%)
$\ E\ _2^8$	(0,0605; 0,0480)	(0,0810; 0,0609)

Fonte: Sánchez et al. (2020, p. 4086)

Concluindo, Sánchez et al. (2020) propõe que a principal contribuição do trabalho é a formalização de um método prático e objetivo que faz uso de um sistema de regras fuzzy para a obtenção de uma solução numérica em um sistema parcialmente fuzzy. As soluções encontradas utilizando os dois métodos distintos de definição das funções de pertinência possuem uma porcentagem de erro inferior a 2%; ademais, o comportamento qualitativo presente na série histórica é observado de forma exitosa em ambas as simulações. (SÁNCHEZ et al., 2020, p. 4089-4089)

<sup>8</sup> Raiz quadrada do erro médio

## 4 APLICAÇÃO DA LÓGICA FUZZY AO MODELO ESCOLHIDO

Essa sessão é destinada a explicar o modo como os elementos fuzzy discutidos anteriormente serão adaptados ao modelo kaldoriano discutido no final do capítulo 2 proposto por Skott e Zipperer (2012). Para tanto, a análise irá considerar a distribuição entre wage-share e profit-share constante<sup>9</sup>. Os elementos fuzzy serão, então, aplicados em um único plano, composto das variáveis emprego (e) e a utilização da capacidade instalada (u).

Para tentar aproximar a análise feita por este trabalho e a análise de Skott e Zipperer (2012), são utilizadas as mesmas bases de dados e mesma metodologia enquanto ao tratamento das variáveis. Para medir as condições do mercado de trabalho, ou seja, da variável (e), os autores se utilizam de 1 menos a taxa de desemprego ajustada sazonalmente do Bureau of Labor Statistics<sup>10</sup> (BLS).

Referente a medição da taxa de utilização (u), Skott e Zipperer (2012) realizam o exercício econométrico com duas séries, a “Net fixed assets” mensurada pelo Bureau of Economic Analysis (BEA) e a “Industrial capacity index” mensurada pelo Federal Reserve (Fed). Para este trabalho, é utilizada a série mensurada pelo Fed<sup>11</sup>, que coincide com a periodicidade da série medida para a variável (e).

Em relação ao software utilizado para o desenho das relações fuzzy, utiliza-se o módulo Fuzzy do MatLab R2012b, com a licença e acesso condicionados ao pertencimento do quadro de alunos da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Ambas as variáveis são medidas de 1953 a 2001 de forma trimestral para a economia dos Estados Unidos da América.

### 4.1 IMPLEMENTAÇÃO

Como discutido no capítulo 2, Skott e Zipperer (2012) representam o modelo Kaldoriano dinâmico em (g, u, e) por meio das equações (27), (28) e (29).

---

<sup>9</sup> Esta simplificação facilita a implementação fuzzy, pois permite a representação em duas dimensões ao invés de três. Esta simplificação também tem certo respaldo teórico em GOLLIN (2002) que argumenta no sentido dos seus resultados empíricos implicarem em retornos dos fatores aproximadamente constantes pelo tempo e espaço analisados neste artigo.

<sup>10</sup> <https://data.bls.gov/cgi-bin/surveymost?bls>

<sup>11</sup> <https://www.federalreserve.gov/datadownload/Build.aspx?rel=G17>

$$\frac{dg}{dt} = \lambda[\chi(u, h(\pi, e)) - g] \quad (27)$$

$$\frac{de}{dt} = e[h(\pi, e) - n] \quad (28)$$

$$\frac{du}{dt} = u[h(\pi, e) - g] \quad (29)$$

Com essas equações, podemos adequá-las a um Problema de Valor Inicial (PVI) e propor uma solução numérica para um sistema de equações diferenciais ordinárias de Euler, conforme Sánchez et al. (2020). Dessa forma, pode-se reescrever as equações (28) e (29) conforme (44).

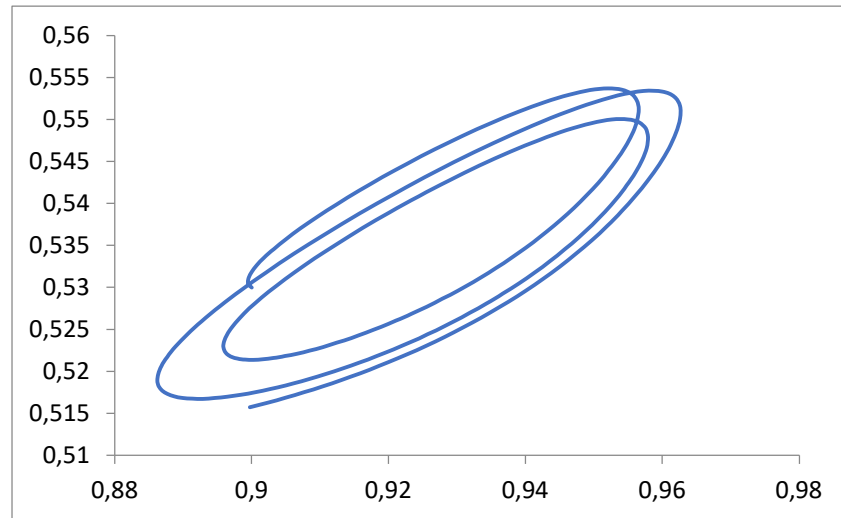
$$\begin{cases} \frac{de}{dt} = f(e, u), e(0) = e_0, \\ \frac{du}{dt} = g(e, u), u(0) = u_0 \end{cases} \quad (44)$$

Após a manipulação das relações presentes em (44), devemos adequá-las para a solução numérica do método de Euler. Onde ( $h$ ) é o passo, e as funções  $f$  e  $g$  as variações específicas:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n + h e_n f(e_n, u_n), \\ u_{n+1} &= u_n + h u_n g(e_n, u_n), \end{aligned} \quad (45)$$

Quando adequadas aos parâmetros iniciais da relação, presentes na nota de rodapé 24 em Skott e Zipperer (2012), obtém-se a solução numérica de Euler para o espaço  $(e, u)$ :

Gráfico 1 - Espaço (e,u) via solução numérica de Euler



Fonte: Elaboração própria.

Podemos observar que dados os pontos iniciais  $u_0 = 0,53$  e  $e_0 = 0,9$ , a solução possui sentido horário e inclinação positiva conforme apontado por Skot e Zipperer (2012). Dadas tais constatações, passamos a formular a implementação dos elementos fuzzy nesta relação, de forma que as funções  $f(e_n, u_n)$  e  $g(e_n, u_n)$  sejam a parte da previsão obtida através da inferência fuzzy.

Usando Sánchez et al. (2020) como referência na construção das funções trapezoidais de pertinência, utiliza-se, para ambas as variáveis, as médias históricas ( $\mu_u = 0,816$  e  $\mu_e = 0,942$ ) e seus respectivos desvios padrões ( $\sigma_u = 0,045$  e  $\sigma_e = 0,015$ ). Assim, temos que identificar cada variável uma letra, neste caso o conjunto A é referente a variável (e) e B é referente a variável (u). Para classificá-las, são usados números que indicam uma gradação, em que 1 é o menor nível possível, e 4 é o maior nível possível.

Dessa forma, A1 e B1 referem-se ao conjunto fuzzy “baixo”, que corresponde ao conjunto dos menores valores encontrados, que são por volta de 4 desvios padrões abaixo da média histórica. Por conseguinte, A2 e B2 correspondem ao conjunto fuzzy “médio baixo”, que variam entre o espaço de 3 desvios padrões abaixo da média até um desvio padrão acima.

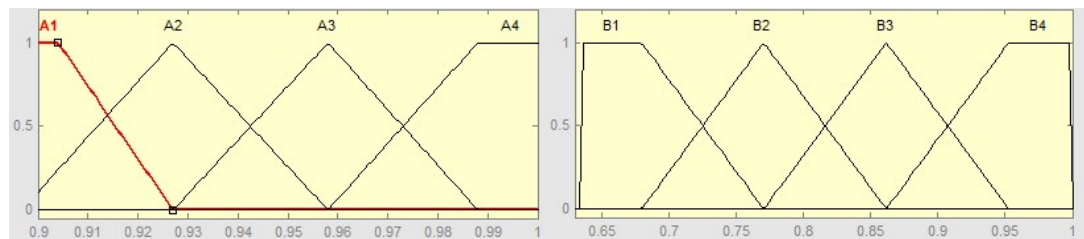
Já A3 e B3 referem-se ao conjunto fuzzy “médio alto”, e se encontra no espaço de um desvio padrão abaixo da média até 3 desvios padrões acima. Por fim, A4 e B4: correspondem ao conjunto fuzzy “alto”, que captam valores até 4 desvios padrões acima da média, conforme quadro 3 e figura 17.

Quadro 3 - Medidas utilizadas para construção dos conjuntos fuzzy antecedentes

Conjunto fuzzy	Medidas da função de pertinência
A1 e B1	$(\mu - 4\sigma, \mu - 4\sigma, \mu - 3\sigma, \mu - \sigma,)$
A2 e B2	$(\mu - 3\sigma, \mu - \sigma, \mu + \sigma)$
A3 e B3	$(\mu - \sigma, \mu + \sigma, \mu + 3\sigma)$
A4 e B4	$(\mu + \sigma, \mu + 3\sigma, \mu + 4\sigma, \mu + 4\sigma,)$

Fonte: Elaboração própria

Figura 17 - Funções de pertinência no modulo fuzzy do MatLab



Fonte: Elaboração própria

Para a construção das funções de pertinência trapezoidais dos termos fuzzy da saída, toma-se o crescimento entre os períodos como aproximação numérica da função de crescimento especificada no começo do capítulo, ou seja,  $\frac{de}{dt} = \frac{e_{t+1} - e_t}{e_t}$  para o crescimento do emprego e  $\frac{du}{dt} = \frac{u_{t+1} - u_t}{u_t}$  para o crescimento da utilização da capacidade instalada.

Dessa forma, conseguimos mensurar o crescimento e definir estatisticamente a função de pertinência das saídas. Para tanto, assumem valores como “negativo” (BB) “negativo baixo” (B), “positivo baixo” (A) “positivo” (AA), sendo  $\mu_C$  e  $\sigma_C$  a média do crescimento e o desvio padrão do crescimento da variável em questão.

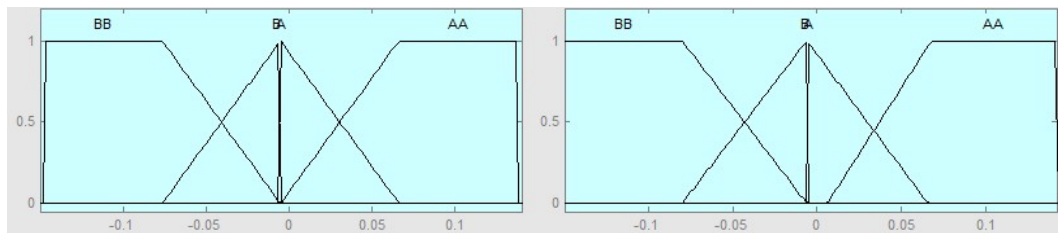
Quadro 4 - Medidas utilizadas para construção dos conjuntos fuzzy consequentes

Conjunto fuzzy	Medidas da função de pertinência
BB	$(\mu_C - 2\sigma_C, \mu_C - 2\sigma_C, \mu_C - \sigma_C, \mu,)$
B	$(\mu_C - \sigma_C, \mu_C, \mu_C)$
A	$(\mu_C, \mu_C, \mu_C + \sigma_C)$
AA	$(\mu_C, \mu_C + \sigma_C, \mu_C + 2\sigma_C, \mu_C + 2\sigma_C)$

Fonte: Elaboração própria



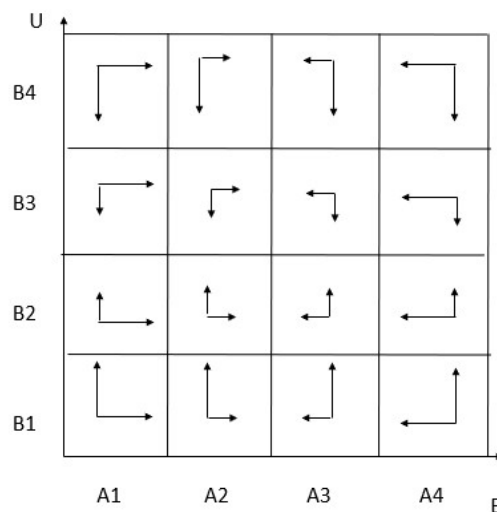
Figura 18 - Funções de pertinência dos consequentes no módulo fuzzy do MatLab



Fonte: Elaboração própria

Com a construção das funções de pertinência, o próximo passo é montar o conjunto de regras que irá combinar as entradas, ou antecedentes, com as saídas, os consequentes. Tais regras tomam a seguinte forma: “Se  $e$  é A1 e  $u$  é B1 então  $\frac{de}{dt}$  é AA e  $\frac{du}{dt}$  é AA”. Desta forma, é possível construir um conjunto composto por 16 regras “se-então”, que usualmente são representadas em forma de campos vetoriais, onde a magnitude do crescimento é representada pelo comprimento dos vetores.

Figura 19 - Representação gráfica do conjunto de regras



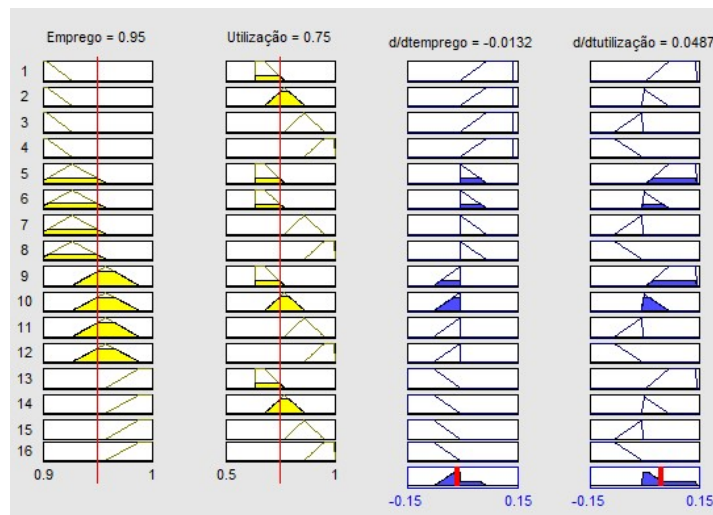
Fonte: Elaboração própria

Com a base de regras descrevendo o comportamento do sistema, podemos passar para o módulo de inferência de Mamdani, que irá, junto módulo de defuzzificação pelo centro de gravidade, nos retornar valores numéricos para  $\frac{de}{dt}$  e  $\frac{du}{dt}$ . Na aplicação feita através do módulo fuzzy no MatLab, as entradas se encontram em amarelo e as saídas se encontram em azul.

Cada linha presente no módulo é referente a sua respectiva regra e a interação com os dados de entrada. Utilizando a figura 20 como base, a linha 1 corresponde ao exemplo utilizado acima, em que “Se  $e$  é A1 e  $u$  é B1 então  $\frac{de}{dt}$  é AA e  $\frac{du}{dt}$  é AA”. Assim sucessivamente até todas as regras serem contabilizadas.

O valor relacionado ao resultado defuzzificado via método de centro de gravidade se encontra presente acima da coluna 3 e 4 na figura 20; ele resulta do quadro abaixo da linha 16, que representa o resultado fuzzy da iteração dos valores de entrada, contabilização de todas as regras e método de inferência.

Figura 20 - Estrutura de defuzzificação



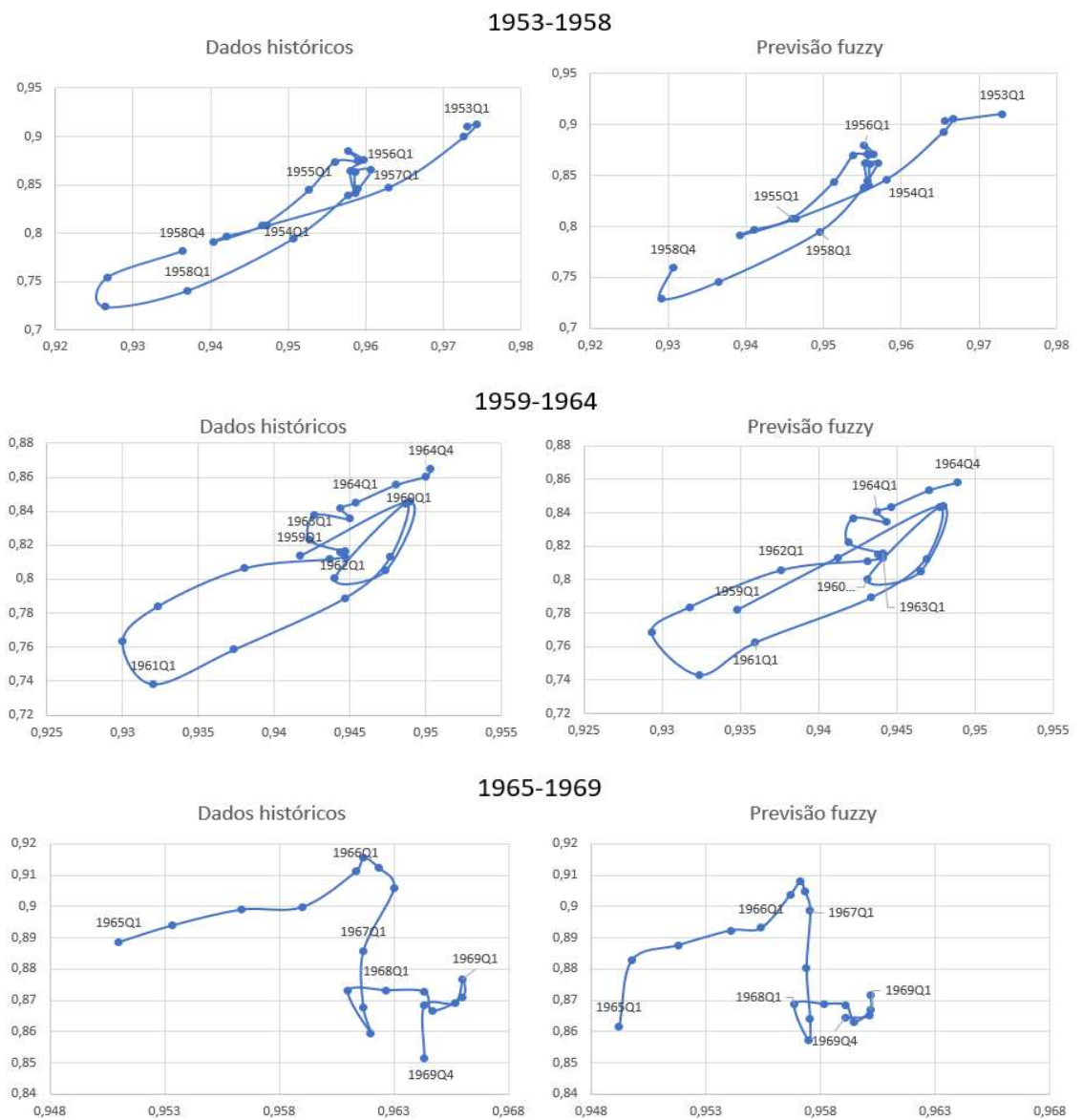
Fonte: Elaboração própria

Ao obter o resultado defuzzificado, volta-se ao Problema do Valor Inicial, pois possuímos os valores numéricos referentes às funções  $f(e_n, u_n)$  e  $g(e_n, u_n)$ . Assim, podemos reescrever a equação 45 na forma que foi aplicada a esta relação, obtendo (46):

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n + 0,1 e_n f(e_n, u_n), \\ u_{n+1} &= u_n + 0,1 u_n g(e_n, u_n), \end{aligned} \quad (46)$$

Usando os dados de 1953Q1 como ponto inicial da previsão, ou seja,  $e_0$  e  $u_0$  obtemos as séries referentes as previsões fuzzy de ambas as variáveis, que resultam nos gráficos comparativos a seguir. A escolha de segmentar o período analisado se dá por dois motivos: o primeiro motivo é devido ao fato que são identificados períodos consistentes com a dinâmica prevista pelo modelo, e períodos nos quais tal dinâmica desaparece. O segundo motivo do fracionamento em períodos menores se dá pelo fato da visualização da trajetória ser mais nítida, sendo assim, mais palatável à interpretação.

Figura 21 - Dados históricos e a previsão fuzzy para o período analisado



1970-1974



1975-1979

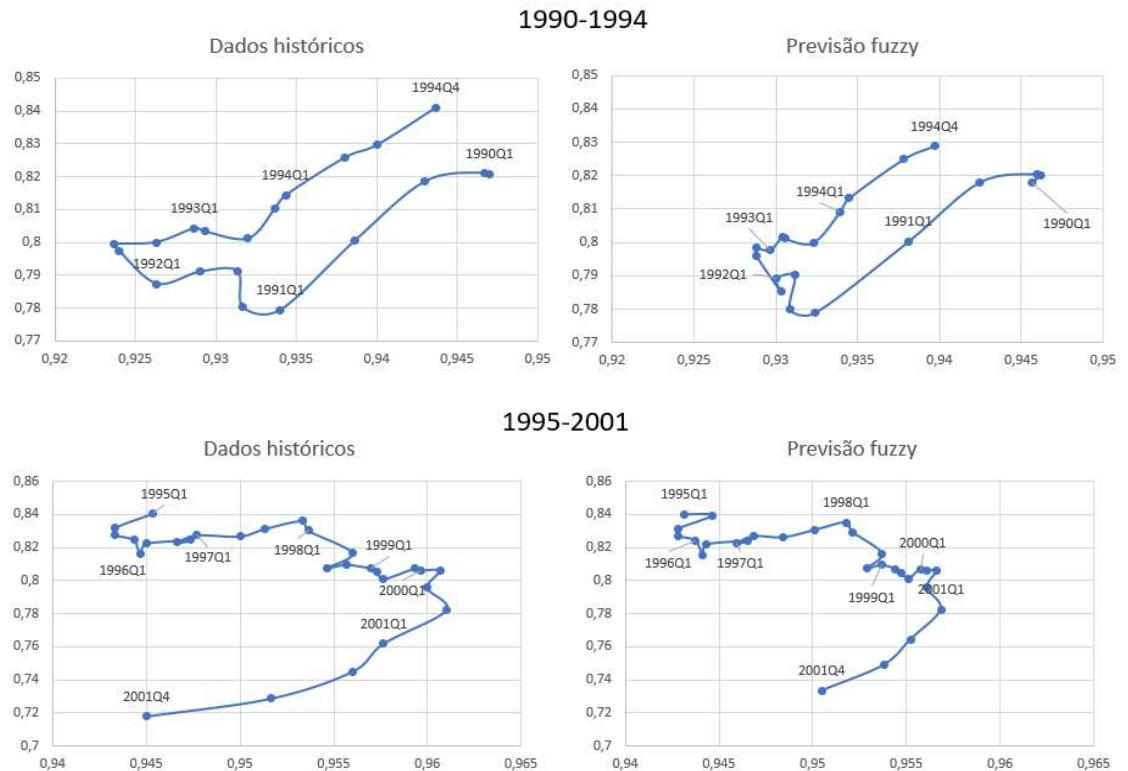


1980-1984



1985-1989





Fonte: Elaboração própria

## 4.2 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nesta parte do capítulo serão discutidos a consistência da previsão fuzzy, junto das vantagens e desvantagens de tal abordagem; também será feita uma breve contextualização histórica para a explicação dos resultados obtidos.

### 4.2.1 Comentários sobre a consistência da previsão fuzzy

O modelo de previsão fuzzy utilizado neste trabalho é inspirado pelo artigo de Sánchez et al. (2020) descrito ao fim do capítulo 3. Tal metodologia consiste em utilizar dados históricos como a base descritiva das funções de pertencimento e das regras que definem a interação entre as variáveis. Ao fim do processo fuzzy, é imperativo fazer uso de um método de aproximação numérica (no caso deste trabalho foi escolhido o método de Euler) para a resolução das Equações Diferenciais Ordinárias que descrevem o modelo.

Assim, podemos dizer que é bastante razoável a escolha deste método visto que a previsão para um período seguinte toma em conta o período passado adicionado a um peso (passo) e a multiplicação entre o valor obtido pela previsão (neste caso pela ferramenta fuzzy) e o valor histórico. Matematicamente, retoma-se a equação 45.

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n + he_n f(e_n, u_n), \\ u_{n+1} &= u_n + hu_n g(e_n, u_n), \end{aligned} \quad (45)$$

Portanto, a ferramenta fuzzy aparenta ser vantajosa para a predição dos movimentos econômicos; lembra-se o fato de que todos os passos da construção se tal implementação são tomados levando em consideração as características históricas (médias e desvios padrões) das variáveis analisadas. Ademais, ainda existe a possibilidade de certo “*fine-tuning*”, pois ao alterar os valores presentes em (h), aumenta-se e/ou diminui-se o peso da previsão fuzzy.

Outro aspecto visto como uma limitação em relação a previsões fuzzy é o fato de o design do sistema ser feito de acordo com as escolhas do pesquisador, sendo elas a definição das funções de pertencimento e a definição das regras que definem o sistema de interação entre as variáveis de entrada e de saída. Neste trabalho, como em Sánchez et al. (2020) foram tomadas tais decisões baseadas nas médias e desvios padrões históricos, diminuindo o espaço para possíveis erros ou “vieses de seleção” ao construir o sistema de previsão.

Skott e Zipperer (2012) utilizam em sua verificação empírica uma regressão de Mínimos Quadrados que tem como variável dependente o crescimento do PIB e as seguintes variáveis explicativas: 1) o desvio da taxa de lucro da tendência de longo prazo e 2) o desvio da tendência de longo prazo de um indicador não-linear<sup>12</sup> do mercado de trabalho durante 1953 até 2001. Os autores, em sua conclusão, consideram os resultados do estudo econométrico como preliminares, deixando explícito que podem existir correlações não captadas pelas variáveis propostas, e que dados ao nível das firmas poderiam corroborar a hipótese apresentada no trabalho. Porém, os resultados obtidos foram todos significativos ao nível de confiança de 95%.

Como será discutido mais adiante, sabe-se que existe uma mudança qualitativa na forma de operação do capitalismo na segunda metade do século XX. Do final da segunda guerra mundial até o choque do petróleo existiam certas condições que favoreciam o investimento

---

<sup>12</sup> Tal indicador é  $E = (1 - e)^{-0,5}$

descrito por Kaldor dentro dos países. A partir dos anos 70, existe um processo de globalização produtiva e a economia dos Estados Unidos da América se adapta ao neoliberalismo, sofrendo o processo de financeirização.

A regressão utilizada por Skott e Zipperer (2012) ignora tal mudança estrutural, porém o ferramental aplicado neste trabalho nos permite utilizar aproximações para a compreensão do período de forma que sejam possíveis recortes menores, como exemplo, os recortes utilizados na sessão de implementação que são em torno de 5 anos cada.

A lógica fuzzy não possui limitação em relação ao tamanho da amostra, pois ela pode ser composta de poucas observações ou milhares; ou seja, possui a vantagem de trabalhar-se em recortes antes não possíveis via métodos quantitativos mais estabelecidos na literatura econômica, mitigando as lacunas de análise de recortes menores, como no caso dos mínimos quadrados.

#### **4.2.2 Contextualização histórica**

O período analisado por Skott e Zipperer (2012) e por este trabalho é marcado por dois períodos distintos qualitativamente do capitalismo do século XX. O primeiro período se encontra nos dois primeiros gráficos, que ainda representam as condições dos “anos dourados” do capitalismo, os quais as regras firmadas no acordo de Bretton-Woods prevaleciam.

Para Luiz Gonzaga Belluzzo (2005), a ideia central dos reformadores de Bretton Woods reforçava a necessidade de criação de regras monetárias capazes de propiciar o ajustamento dos balanços de pagamentos, ou seja, o adequado abastecimento de liquidez para a cobertura de eventuais déficits, de forma a evitar a propagação das forças deflacionárias. Tratava-se, também de construir um ambiente econômico internacional desenhado para propiciar um ambiente favorável a políticas nacionais de desenvolvimento, industrialização e progresso social. Ao buscar estes objetivos, a economia americana, entre 1945 e 1971, funcionou como “reguladora” do sistema capitalista. Isto significa que os Estados Unidos cumpriam o papel de fonte autônoma de demanda efetiva e provedor de liquidez para a economia global. (BELLUZZO, 2005).

O segundo período se inicia com a deterioração da situação engendrada pelo acordo em 1945, visto que após a recuperação da Alemanha e do Japão, a participação dos Estado Unidos da América no PIB mundial caiu de 35% para 27%; adicionado a essa situação, o país possuía um déficit na balança de pagamentos e uma piora da dívida pública dados os gastos com a

Guerra do Vietnam. A falta de confiança no dólar leva os países que antes se lastreavam no papel moeda a exigirem a conversão do dólar em ouro, causando um impasse para os EUA, que sob a presidência de Richard Nixon, em 1971, quebra o acordo de Bretton-Woods ao revogar a conversibilidade do papel moeda em ouro. Kellermann, Herr e Dullien (2011) propõem que tal instabilidade deve ser observada como uma liberalização crescente e gradual dos movimentos de capitais internacionais, fragilizando a defesa do sistema acordado em Bretton-Woods, dando o espaço antes ocupado por taxas de câmbio fixas para taxas de câmbio flutuantes, engendrando um novo período do capitalismo no século XX. (KELLERMANN; DULLIEN; HERR. 2011, p. 15)

Concluída esta breve contextualização, os dados obtidos através da simulação fuzzy retratam bem tal dicotomia, em que nos anos de 1953-1958 e 1959-1964 podemos observar a presença dos ciclos propostos por Skott e Zipperer (2012) consistentes com este período da economia dos EUA, possuindo uma dinâmica kaldoriana. Neste período, o crescimento estava relacionado com o investimento industrial pois ainda são presentes as características econômicas acordadas em 1945, sendo essas as taxas de câmbio fixas, que incentivam investimentos industriais verticais e crescimento da produtividade dentro do país.

No entanto, entre 1965-1969, já aparece o desgaste de tal regime de acumulação presente na era de ouro do capitalismo, sendo visível nos dados históricos e da previsão fuzzy. A partir do choque de Nixon em 1971 seguido pelo choque do petróleo em 1973, temos o período da estagflação em que muda-se o paradigma de grandes produções industriais nacionais para uma produção globalizada, em que começam a ser montadas as cadeias globais de valor junto de taxas cambiais flutuantes. O panorama do mercado interno é semelhante, de forma que se percebe a adoção de políticas em direção à financeirização e políticas de cunho neoliberal.

Com tais mudanças em efeito, perdem-se as condições kaldorianas de crescimento nos Estados Unidos da América, e, desta forma, não podemos mais nos apoiar no crescimento industrial como fonte do crescimento do PIB. Tal fato pode ser observado graficamente, pois a partir de 1970, a presença de ciclos anti-horários bem definidos como os das décadas de 1950-60 desaparece até o final do período observado.



## 5 CONCLUSÃO

Em vias de conclusão, o presente trabalho teve como ponto de partida a contribuição originária de Kaldor em 1966, que ecoa pela heterodoxia econômica até os dias de hoje. A relação entre indústria e crescimento é um assunto de suma importância quando se discute desenvolvimento. Kaldor (1966) argumenta que o crescimento da taxa de produção industrial é a causa mais provável da aceleração do crescimento observado durante o período em que tal contribuição fora escrita.

Basu e Budhiraja (2020) criticam o uso indiscriminado da contribuição kaldoriana presente no coeficiente de Kaldor-Verdoorn, visto que tal coeficiente é uma mistura de sinais econômicos, não podendo ser remetido somente a retornos crescentes de escala. O segundo ponto dentro da crítica dos autores é em relação às restrições que o coeficiente de Kaldor-Verdoorn necessita para estar no intervalo significativo, essas restrições são relativas ao efeito da demanda sobre a mudança técnica e a elasticidade da oferta de trabalho.

Recapitulando os resultados obtidos e a contextualização histórica da aplicação da lógica fuzzy ao modelo kaldoriano, infere-se que com a mudança estrutural do capitalismo no final dos anos de 1960 e início dos anos 1970, perderam-se as condições objetivas que favoreciam a dinâmica kaldoriana antes observada. Com a dominância dos ideais neoliberais e dada a natureza dos ajustes implementados mundo a fora, pode se afirmar que o nível geral de incertezas e instabilidades aumentou em comparação com o período anterior, perdurando até os dias de hoje.

A comparação dos resultados obtidos através da implementação da lógica fuzzy com o exercício econométrico feito por Skott e Zipperer (2012) deixa claro o fato de que o método empregado pelos autores é incapaz de captar tal mudança na estrutura do capitalismo. Ao escolher as médias e desvios padrões como forma de construção das funções de pertinência, e utilizando-se do modelo de Skott e Zipperer (2012), esperava-se mais períodos em que a dinâmica kaldoriana fosse presente.

Portanto, podemos tirar duas conclusões: a primeira é que crítica de Basu e Budhiraja (2020) parece fazer certo sentido, visto que com a mudança de paradigma vivida no fim dos anos 60, existem mudanças nas variáveis definidoras do coeficiente de Kaldor-Verdoorn. A segunda conclusão é que a ferramenta fuzzy nos proporcionou meios de inferir que existem

relações não observadas quando utilizados recortes econométricos tão grandes quanto os utilizados pelo exercício de Skott e Zipperer (2012).

Num cenário marcado pela volatilidade advinda do maior grau de incerteza, a ferramenta fuzzy pode ser grande aliada, como descrito durante a exposição de seus fundamentos feita no capítulo 3.

A lógica fuzzy opera em ambientes que possuem maiores flexibilidades que os métodos tradicionalmente utilizados na análise econômica. Esse fato proporciona as vantagens explicitadas no capítulo 4, as quais são que a utilização das medidas históricas proporciona uma aderência ao movimento real das variáveis, e que tal ferramental não possui problemas com o tamanho das amostras, sendo elas pequenas ou grandes.

A grande desvantagem da utilização da lógica fuzzy está na construção das funções de pertinência e na definição das regras, os quais são feitos pelo próprio pesquisador, o que pode acarretar viés. O intuito deste trabalho não é a substituição ou o prevalectimento desta lógica acima das outras, mas sim propor uma nova forma de análise que nos permita ampliar a capacidade objetiva de enxergar elementos antes não tão bem descritos.

Dentro dos métodos e ferramentas empíricas empregadas à economia, a lógica fuzzy ainda se encontra em estágio inicial. Inspirado pela contribuição de Sánchez et al. (2020), este trabalho tenta adicionar maior variedade à temas e escolas econômicas que são analisadas através dessa lógica; pois ao proporcionar um modo de análise que leve em consideração a aproximação da forma em que as decisões econômicas são tomadas, isto é, a definição do comportamento do sistema em variáveis linguísticas, existem praticamente infinitas possibilidades para a adaptação desta lógica dentro da literatura econômica.

## REFERÊNCIAS

- BASU, Deepankar; BUDHIRAJA, Manya. **What to Make of the Kaldor-Verdoorn Law?** UMass Amherst Economics Working Papers, Amherst, 2020. Disponível em: [https://scholarworks.umass.edu/econ\\_workingpaper/286](https://scholarworks.umass.edu/econ_workingpaper/286). Acesso em: 15 Jul 2020
- BELLUZZO, Luiz Gonzaga: As transformações da economia capitalista no pós-guerra e a origem dos desequilíbrios globais, em: CARNEIRO, Ricardo. **A supremacia dos mercados e a política econômica do governo Lula**. São Paulo: Unesp, 2005. Disponível em: <https://www.eco.unicamp.br/images/publicacoes/Livros/geral/A-supremacia-dos-mercados-e-a-politica-economica-do-Governo-Lula.pdf>. Acesso em: 15 Dez. 2020
- Bureau of Labor Statistics – BLS. **Civillian unemployment** (Seasonally adjusted). Disponível em: <https://data.bls.gov/cgi-bin/surveymost?bls>. Washington D.C, Acesso em: 2 dez. 2020.
- CHENCI, Gabriel P.; RIGNEL, Diego GS; LUCAS, Carlos A. Uma introdução à lógica Fuzzy. **Revista Eletrônica de Sistemas de Informação e de Gestão Tecnológica**, Franca, v. 1, n. 1, 2011. Disponível em: <https://periodicos.unifacef.com.br/index.php/resiget/article/view/153>. Acesso em: 10 fev. 2020
- DE BARROS, Laécio Carvalho; BASSANEZI, Rodney Carlos. **Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática**. Grupo de Biomatemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2010. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/256373655\\_Topicos\\_de\\_Logica\\_Fuzzy\\_e\\_Biomatematica](https://www.researchgate.net/publication/256373655_Topicos_de_Logica_Fuzzy_e_Biomatematica) Acesso em: 22 ago. 2020
- DERNONCOURT, Franck. **Introduction to fuzzy logic**. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 2013. v. 21, Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/267041266\\_Introduction\\_to\\_fuzzy\\_logic](https://www.researchgate.net/publication/267041266_Introduction_to_fuzzy_logic) Acesso em: 15 fev 2020
- DULLIEN, Sebastian; HERR, Hansjörg; KELLERMANN, Christian: **Decent Capitalism: a blueprint for reforming our economies**. Londres: Pluto Press. (2011)
- GOLLIN, Douglas. Getting income shares right. **Journal of political Economy**, Chicago, Estados Unidos da América, v. 110, n. 2, p. 458-474, 2002. Disponível em: <https://www.journals.uchicago.edu/doi/abs/10.1086/338747?journalCode=jpe>. Acesso em: 27 mar 2021
- Federal Reserve - FED. **Industrial production and Capacity utilization**. Washington D.C, Estados Unidos 2020. Disponível em: <https://www.federalreserve.gov/datadownload/Build.aspx?rel=G17>. Acesso em 2 dezembro 2020
- KALDOR, Nicholas. Causes of the slow rate of economic growth in the United Kingdom. In: TARGETTI, F.; THIRLWALL, A. P. (Eds.) **The Essential Kaldor**. London, Duckworth, (1989), 1966.

KELLER, André A. Fuzzy control of macroeconomic models. **International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences**, Zielona Góra, Polônia v. 5, n. 2, p. 115 - 123, 2009. Disponível em: [https://www.researchgate.net/profile/Andre-Keller/publication/228659938\\_Fuzzy\\_Control\\_of\\_Macroeconomic\\_Models/links/0912f50b8771e899d2000000/Fuzzy-Control-of-Macroeconomic-Models.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Andre-Keller/publication/228659938_Fuzzy_Control_of_Macroeconomic_Models/links/0912f50b8771e899d2000000/Fuzzy-Control-of-Macroeconomic-Models.pdf). Acesso em: 10 fev 2020

KEYNES, John Maynard. **The general theory of employment, interest, and money**. Berlim, Alemanha: Springer, 2018.

LAVOIE, Marc. **Introduction to post-Keynesian economics**. Berlim, Alemanha: Springer, 2009.

PHILLIPS, Andrew W, Stabilisation Policy in a Closed Economy, **The Economic Journal**, Oxford v. 64, Issue 254, p. 290–323. 1954. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2226835?seq=1> Acesso em: 10 set 2020

SÁNCHEZ, Daniel Eduardo et al. Goodwin economic cycle via p-fuzzy system. **Journal of Intelligent & Fuzzy Systems**, Amsterdam v. 38, n. 4, p. 4079-4090, 2020 Disponível em: <https://content.iospress.com/articles/journal-of-intelligent-and-fuzzy-systems/ifs182762> Acesso em: 22 mar 2020

SKOTT, Peter.: **Conflict and effective demand in economic growth**. Cambridge: Cambridge University Press, 1989a.

SKOTT, Peter.: Effective demand, class struggle and cyclical growth. **International Economic Review**, Philadelphia, v.30, n.1, p. 231 – 247, 1989b. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2526560?seq=1> Acesso em: 17 mar 2020

SKOTT, Peter; ZIPPERER, Ben. An empirical evaluation of three post-Keynesian models. **European Journal of Economics and Economic Policies: Intervention**, Cheltenham Reino Unido, v. 9. p. 277-308, 2012. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/276190713\\_An\\_empirical\\_evaluation\\_of\\_three\\_post-Keynesian\\_models](https://www.researchgate.net/publication/276190713_An_empirical_evaluation_of_three_post-Keynesian_models) Acesso em: 10 dez 2019

THE Lord of the rings - The two towers. Direção: Peter Jackson. Produção: Barrie Osborne, Fran Walsh e Peter Jackson. Los Angeles. New Line Cinema, 2002. 1 DVD (179 min.)

ZADEH, Lotifi. Fuzzy sets. **Information and Control**, Amsterdam, v. 8, n.3, p. 338 – 353, 1965. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001999586590241X> Acesso em: 15 fev 2020

ZIPPERER, Ben; SKOTT, Peter. Cyclical patterns of employment, utilization, and profitability. **Journal of Post Keynesian Economics**, Oxfordshire v. 34, n. 1, p. 25-58, 2011. Disponível em: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.2753/PKE0160-3477340102> Acesso em: 29 Nov 2019