

Pedro da Nóbrega Bearzoti

**Modos de Case-van Kampen em Plasmas  
Quânticos Descritos pelo Sistema de  
Wigner-Poisson**

(Case-van Kampen Modes in Quantum Plasmas Described by the  
Wigner-Poisson System)

Porto Alegre  
Rio Grande do Sul  
Brasil  
2021



Pedro da Nóbrega Bearzoti

**Modos de Case-van Kampen em Plasmas  
Quânticos Descritos pelo Sistema de Wigner-Poisson**

(Case-van Kampen Modes in Quantum Plasmas Described by the  
Wigner-Poisson System)

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Física

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Fernando Haas

Porto Alegre

Rio Grande do Sul

Brasil

2021



# Dedicatória

Dedico este trabalho acima de tudo à minha família, em especial à minha mãe, Rejane de Cássia Barbosa da Nóbrega, e ao meu pai, Paulo Bearzoti Filho. Dedico também aos colegas de confraria Alberto Magno de Lucena Lima Filho, Ana Paula Mattar, Arthur Passos El Horr, Carlos Henrique Moreira, Erich Meiners, Hu Jiawen, Ivan Araújo Lima, Mariana Marques Wolski, Matheus de Medeiros & Tadeo Zuzek por serem o alicerce da minha vida; a João de Souza Gaspar, por topar sonhar junto comigo e me dar um lugar para fugir de Porto Alegre; e a Matheus Cericatto Andretta e Yargo Rorich Ferreira por sempre estarem lá quando a realidade se torna cansativa.



# Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar ao Prof. Dr. Fernando Haas por sua orientação, por me conceder acesso à sua brilhante mente e, acima de tudo, por sua amizade e companherismo. Agradeço à CAPES/PROEX pela bolsa concedida a esse projeto. Agradeço também à minha família por todo o apoio dado durante os anos da realização deste trabalho. Agradeço ainda Luiz Vitorino dos Santos Dalagnol pelas correções, ideias e comentários. Por fim, agradeço à Luciane Carvalho pelo suporte emocional e pelas dicas de como “sobreviver” na Academia.





*“Um método é mais importante que uma descoberta,  
uma vez que o método certo leva a novas  
e ainda mais importantes descobertas”*

*(Lev Landau)*

*“On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage”*

*(Giuseppe Lodovico di Lagrangia)*



# Resumo

São deduzidos modos de Case-van Kampen para sistemas quânticos governados pelo sistema de Wigner-Poisson. Começamos fazendo uma revisão de diferentes tratamentos matemáticos para o sistema de Vlasov-Poisson, *viz.*, o tratamento de Landau, o método BGK e o tratamento de van Kampen. Em seguida, estudamos os resultados já conhecidos da aplicação do tratamento de Landau ao sistema de Wigner-Poisson. Enfim, aplicamos o tratamento de van Kampen ao mesmo sistema, e descobrimos que ele leva à mesma equação de “autovalores” de Case que o caso clássico, embora a dependência nas condições de equilíbrio seja distinta, e estudamos brevemente o comportamento das soluções no espaço de Hilbert.

**Palavras-chave:** plasmas quânticos; Wigner-Poisson; modos de Case-van Kampen.



# Abstract

Case-van Kampen modes for quantum systems that obey the Wigner-Poisson system are deduced. We start by reviewing different mathematical treatments for the Vlasov-Poisson system, *viz.*, the Landau treatment, the BGK method and the van Kampen treatment. After that, we study the already known results of using the Landau treatment on the Wigner-Poisson system. Then, we use the van Kampen treatment on the same system, and found out it reaches the same Case “eigenvalue” equation that in the classical case, although the dependence on the equilibrium conditions is different, and briefly study the behaviour of the solutions in the Hilbert space.

**Keywords:** quantum plasmas; Wigner-Poisson; Case-van Kampen modes.



# Sumário

	<b>Sumário</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>PLASMAS CLÁSSICOS</b> . . . . .	<b>17</b>
2.1	Tratamento de Landau . . . . .	17
2.2	Modos BGK . . . . .	23
2.3	Tratamento de van Kampen . . . . .	25
<b>3</b>	<b>PLASMAS QUÂNTICOS</b> . . . . .	<b>37</b>
3.1	Tratamento de Landau . . . . .	37
3.2	Tratamento de van Kampen . . . . .	39
3.3	Espaço de Hilbert . . . . .	41
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>45</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>49</b>





# 1 Introdução

Descoberto em 1946 [1] e demonstrado experimentalmente em 1964 [2], o amortecimento de Landau - o processo pelo qual perturbações em plasmas se anulam para tempos assintóticos mesmo sem colisões - é um dos fenômenos mais importantes da Física de Plasmas, devido tanto à sua aplicabilidade quanto ao estranhamento que causa, e se mostrou aplicável a um grande número de áreas e um tópico de pesquisa muito frutífero. Em um artigo publicado em 1999 [3], Ryutov escreveu que, à época, um a cada três artigos publicados em Física de Plasmas referenciava o fenômeno. Dentro da área de Plasmas, o tratamento de Landau foi também estudado pela teoria de múltiplos feixes [4] e modelos hidrodinâmicos [5]-[8], e foi aplicado a plasmas magnetizados [8]-[11]; plasmas quentes [5], [9], [12]; plasmas confinados [9], [10]; ondas ion-acústicas [9], [13]-[15]; fusão controlada [6]; plasmas sujeitos a campos gravitacionais [16]; e plasmas empoeirados [17], dentre outros tópicos. Fora da Física de Plasmas, o conceito também se mostrou útil no estudo de ciências espaciais [8], [18]-[20]; física de altas energias [21], [22]; sistemas gravitacionais [23], [24]; gases de Bose [25], [26]; ondas de gravidade em água [27]; física da matéria condensada [28]; e até mesmo sistemas biológicos [29], [30] e sociológicos [31]. Pelo seu estudo do amortecimento de Landau e, acima de tudo, pela prova matemática da existência do amortecimento de Landau não-linear [32], Cédric Villani recebeu a medalha Fields em 2010.

A interpretação física mais comum é a do elétron “surfando na onda”, introduzida por Dawson [33], ainda presente em livros-textos mais antigos como [34]. A interpretação mais correta, no entanto, é a de que o amortecimento de Landau é o resultado da mistura de fases de modos de Case-van Kampen [32].

Introduzidos por van Kampen em 1955 [35] e estudados em detalhe por Case [36], modos de Case-van Kampen são soluções do sistema de Vlasov-Poisson linearizado que formam uma base ortogonal na qual oscilações em um plasma podem ser decompostas. Eles foram estudados para plasmas cujo fundo de íons varia com o tempo [37]; oscilações não lineares [38], sistemas de Fermi-Dirac [39]; variáveis de ação-ângulo [40]; plasmas não-uniformes [41]; campos eletromagnéticos arbitrários [42]; plasmas colisionais [43].

O amortecimento de Landau para sistemas quânticos é relativamente bem discutido na literatura. Ele aparece em livros-texto [44]; foi estudado, por exemplo, para ondas de Alfvén [45]; condensados de Bose-Einstein [46]; fótons [47]; seu limite clássico [48]; usado no estudo da física da matéria condensada [49], [50]; e simulado numericamente [51].

Quanto aos modos de Case-van Kampen para sistemas quânticos, há bem menos trabalhos disponíveis. Kuzelev [52] deduziu o que chamou de *van Kampen quantum waves* (ondas quânticas de van Kampen, em tradução livre) a partir de funções de onda convencionais; Nemes, de Toledo Piza e da Providência [39] aplicaram o método de van

Kampen a um sistema de Vlasov clássico obedecendo estatísticas de Femi-Dirac; Steffen e Kull [53] aplicaram o tratamento de van Kampen ao método dos múltiplos feixes. Mas o método de van Kampen nunca foi aplicado ao sistema de Wigner-Poisson.

Neste trabalho, pretendemos aplicar o tratamento matemático de van Kampen ao sistema de Wigner-Poisson linearizado e estudar os modos de Case-van Kampen quânticos resultantes.

Tanto o método de Landau quanto o de van Kampen começam fazendo a transformada de Fourier espacial do sistema considerado. No tratamento de Landau, a questão é então tomada como um problema de valor inicial e o sistema sofre uma transformada de Laplace no tempo, e seu comportamento assintótico pode ser estudado através da transformação inversa. Já no método de van Kampen, a coordenada temporal é sujeita a uma transformada de Fourier. Substituição mútua do potencial leva a uma equação de “autovalores” cujas “autofunções” formam um conjunto completo.

No capítulo 2, faremos uma revisão dos resultados para plasmas clássicos que obedecem ao sistema de Vlasov-Poisson. Começaremos estudando o tratamento de Landau, que nos levará à dedução do amortecimento de Landau. Em seguida, veremos os modos de Bernstein-Greene-Kruskal (ou, simplesmente, modos BGK), soluções não-lineares do sistema de Vlasov-Poisson que não apresentam amortecimento. Por fim, estudaremos o método de van Kampen, sua solução geral, a ortogonalidade dos modos e sua relação tanto com o amortecimento de Landau quanto com os modos BGK.

O capítulo 3 é dedicado ao estudo dos plasmas quânticos. Estudaremos primeiro a aplicação do método de Landau ao sistema de Wigner-Poisson, com resultados já conhecidos [44], para então aplicar o método de van Kampen, que demonstraremos levar à mesma equação do caso clássico, possuindo, portanto, a mesma resposta com os mesmos resultados. Concluiremos a análise tecendo breves comentários quanto ao comportamento dos modos de Case-van Kampen quânticos no espaço de Hilbert.

Por fim, o capítulo 4 é dedicado às conclusões finais e sugestões de possíveis rumos futuros de pesquisa.

## 2 Plasmas Clássicos

### 2.1 Tratamento de Landau

O sistema de equações básicas para o estudo de plasmas clássicos através da teoria cinética é o sistema de Vlasov-Maxwell [34], [54], [55], composto pela equação de Vlasov

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - \frac{e}{m} [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0 \quad (2.1.1)$$

e pelas equações de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (2.1.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \quad (2.1.2b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.1.2c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \left[ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right], \quad (2.1.2d)$$

em que a densidade de carga  $\rho$  e a densidade de corrente  $\mathbf{J}$  são dadas, respectivamente, por

$$\rho(\mathbf{x}, t) = -e \left[ \int F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} - n_0 \right] \quad (2.1.3)$$

e

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = -e \int \mathbf{v} F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (2.1.4)$$

Nas equações acima,  $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  indica a função de distribuição dos elétrons do plasma e  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  são, respectivamente, os campos elétrico e magnético, dados pela soma dos campos auto-consistentes, gerados pelas próprias partículas que compõem o plasma, e campos externos. Os símbolos  $e$  e  $m$  são, respectivamente, a carga  $e = 1,602 \times 10^{-19} C$  e a massa  $m = m_e = 9,109 \times 10^{-31} kg$  do elétron. Além disso,  $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} F/m$  e  $\mu_0 = 1,257 \times 10^{-6} H/m$  são, respectivamente, a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo, tais que  $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ . Já  $n_0$  é a densidade dos íons, tomada por nós como uniforme. O  $\nabla_{\mathbf{v}}$  na equação (2.1.1) indica que as derivações devem ser feitas em relação à velocidade da partícula.

Seguindo os trabalhos de Vlasov [56], Landau [1], van Kampen [35] e Case [36], durante o resto do trabalho, iremos considerar apenas plasmas não-imersos em campos externos. Além disso, fora de regimes relativísticos, o campo magnético auto-consistente é geralmente desprezível quando comparado ao seu equivalente elétrico, e será, portanto, negligenciado. Além disso, consideramos na equação (2.1.3) que, para os plasmas estudados, os íons são massivos demais para se mover, sendo tratados como um fundo de

cargas positivas de densidade  $n_0$  que neutralizam a carga dos elétrons. Por fim, exceto caso assinalado do contrário, todas as integrações desse trabalho são feitas de  $-\infty$  a  $\infty$ . Com essas considerações o sistema (2.1.1)-(2.1.2) se resume ao sistema de Vlasov-Poisson

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - \frac{e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{e}{\varepsilon_0} \left[ \int F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} - n_0 \right]. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

A segunda equação do sistema acima também é frequentemente [1], [34] escrita em função do potencial eletrostático  $\phi(\mathbf{x}, t)$ , tal que  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ ,

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{\varepsilon_0} \left[ \int F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} - n_0 \right]. \quad (2.1.6)$$

A equação de Vlasov, também chamada de equação de Boltzmann não-colisional, desconsidera interações binárias (colisões) entre as partículas do plasma, levando em consideração apenas interações de longo alcance (notadamente, a interação Coulombiana entre os portadores de carga), e é válida quando o parâmetro de plasma  $\Gamma$  (também chamado de parâmetro de granulação ou parâmetro de acoplamento), definido como a razão entre as energias potencial de interação e térmica para duas partículas, for desprezível quando comparado à magnitude das outras grandezas relevantes do sistema. De modo mais formal, a equação de Vlasov será válida quando [54], [55], [34]

$$\Gamma = \frac{\langle e^2/4\pi\varepsilon_0 r \rangle}{\langle \kappa_B T \rangle} \approx \frac{e^2 n^{1/3}}{\varepsilon_0 \kappa_B T} \approx \frac{1}{n_0 \lambda_D^3} \ll 1, \quad (2.1.7)$$

sendo que  $\langle \ \rangle$  denota que o valor a ser tomado é o valor médio da quantidade em seu interior. A interpretação física da equação (2.1.7) é de que o efeito das interações binárias será desprezível quando o plasma possuir uma densidade de partículas  $n$  pequena o bastante e uma temperatura  $T$  alta o suficiente, ou, alternativamente, quando o número de partículas em uma esfera de raio igual à distância de Debye  $\lambda_D = \sqrt{\varepsilon_0 \kappa_B T / n_0 e^2}$  for grande, sendo  $\kappa_B = 1,381 \times 10^{-23} J/K$  a constante de Boltzmann.

O procedimento padrão para se estudar ondas eletrostáticas em um plasma é considerar um plasma inicialmente em equilíbrio, descrito pela função  $f_0(\mathbf{v})$ , que sofre uma pequena perturbação  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ , ficando sua função de distribuição

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{v}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (2.1.8)$$

Inserindo a equação (2.1.8) no sistema (2.1.5) e mantendo apenas os termos lineares em  $f$ , obtemos a equação de Vlasov linearizada [56], [1]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{e}{m} \nabla \phi \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 = 0. \quad (2.1.9)$$

Como o plasma se encontrava inicialmente em equilíbrio, com os efeitos eletrostáticos dos elétrons contrabalanceados pelo fundo de íons imóveis, é claro que apenas a perturbação

contribuirá para o surgimento de um campo elétrico autoconsistente, e a segunda equação do sistema (2.1.5) será

$$\nabla^2 \phi = \frac{e}{\varepsilon_0} \int f d\mathbf{v}. \quad (2.1.10)$$

As duas equações acima, junto com a condição de normalização

$$\int dv f_0(\mathbf{v}) = n_0, \quad (2.1.11)$$

fecham o sistema de Vlasov-Poisson linearizado.

A equação (2.1.9) foi deduzida em 1938 por Vlasov [56], que tentou determinar relações de dispersão entre o vetor de onda  $\mathbf{k}$  e a frequência  $\omega$  usando o espectro de ondas planas. A relação de dispersão encontrada foi

$$1 - \frac{\omega_P^2}{n_0 k^2} \mathbf{k} \cdot \int \nabla_{\mathbf{v}} f_0(\mathbf{v}) \frac{d\mathbf{v}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} = 0, \quad (2.1.12)$$

sendo  $\omega_P = \sqrt{e^2 n_0 / \varepsilon_0 m}$  é a frequência de plasma do sistema considerado. A integral acima, no entanto, diverge. Vlasov propôs como solução ao problema tomar apenas o valor principal, sem, no entanto, justificar fisicamente tal escolha. Como veremos na seção do tratamento de van Kampen, essa idéia está apenas parcialmente correta, sendo necessário também adicionar uma “função” delta de Dirac pesada por uma função  $\lambda(\omega/k)$ .

A primeira solução matemática para o sistema (2.1.9)-(2.1.10) foi dada em 1946 por Landau [1]. Landau começou supondo que a perturbação inicial,  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0)$ , é conhecida. Landau então expandiu o sistema em uma série de Fourier da forma

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \\ \phi(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Landau também denominou cada componente de Fourier da perturbação inicial como

$$g_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}) = f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, 0). \quad (2.1.14)$$

Inserindo agora o sistema (2.1.13) no sistema (2.1.9)-(2.1.10) e, sem perda de generalidade, orientando o sistema de forma que o eixo  $z$  coincida com o sentido de propagação de  $\mathbf{k}$ , obtemos, para cada componente, o sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial t} + ikv_z f_{\mathbf{k}} + ik \frac{e}{m} \phi_{\mathbf{k}} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} &= 0, \\ -k^2 \phi_{\mathbf{k}} &= \frac{e}{\varepsilon_0} \int f_{\mathbf{k}} d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Definindo agora as transformadas de Laplace  $f_p$  e  $\phi_p$  do sistema (2.1.13),

$$\begin{aligned} f_p(\mathbf{v}) &= \int_0^{\infty} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t) e^{-pt} dt, \\ \phi_p &= \int_0^{\infty} \phi_{\mathbf{k}}(t) e^{-pt} dt, \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

definidas para  $\text{Re}(p) > p_0$ , sendo  $p_0$  uma constante real; multiplicando o sistema (2.1.15) por  $e^{-pt}$ , integrando de 0 a  $\infty$  e nos atentando para o fato de que, usando (2.1.14),

$$\int_0^\infty \frac{\partial f_k}{\partial t} e^{-pt} dt = f_k e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f_k e^{-pt} dt = p f_p - g, \quad (2.1.17)$$

nós obtemos o sistema

$$\begin{aligned} (p + ikv_z) f_p + ik \frac{e}{m} \phi_p \frac{\partial f_0}{\partial v_z} &= g, \\ -k^2 \phi_p &= \frac{e}{\varepsilon_0} \int f_p d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

A primeira equação de (2.1.18) nos dá imediatamente

$$f_p(\mathbf{v}) = \frac{1}{p + ikv_z} \left[ g(\mathbf{v}) - ik \frac{e}{m} \phi_p \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \right], \quad (2.1.19)$$

que, inserida na segunda equação, nos dá, após alguma manipulação matemática,

$$\phi_p = -\frac{e}{\varepsilon_0 k^2} \frac{\int \frac{g(\mathbf{v})}{p + ikv_z} d\mathbf{v}}{1 - \frac{ie^2}{\varepsilon_0 km} \int \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \frac{d\mathbf{v}}{p + ikv_z}}. \quad (2.1.20)$$

A equação (2.1.20) pode ser simplificada notando que há dependência apenas em  $v_z$ , e, portanto, ela pode ser integrada imediatamente em  $v_x$  e  $v_y$ . Introduzindo a notação  $u \equiv v_z$  e definindo

$$g(u) = \int g(\mathbf{v}) dv_x dv_y, \quad (2.1.21)$$

podemos escrever (2.1.20) como

$$\phi_p = -\frac{e}{\varepsilon_0 k^2} \frac{\int \frac{g(u)}{p + iku} du}{1 - \frac{ie^2}{\varepsilon_0 km} \int \frac{\partial f_0(u)}{\partial u} \frac{du}{p + iku}}. \quad (2.1.22)$$

Podemos simplificá-la ainda mais introduzindo a permissividade elétrica  $\varepsilon$  do plasma

$$\varepsilon(k, p) = 1 - \frac{i\omega_p^2}{kn_0} \int \frac{\partial f_0(u)}{\partial u} \frac{du}{p + iku}, \quad (2.1.23)$$

de forma a obter, por fim,

$$\phi_p = -\frac{e}{\varepsilon_0 k^2 \varepsilon(k, p)} \int \frac{g(u)}{p + iku} du. \quad (2.1.24)$$

Formalmente falando, a equação (2.1.24) resolve o problema proposto, com o comportamento espacial e temporal do sistema sendo dado em função de uma perturbação inicial. Na prática, no entanto, é bastante difícil obter resultados analíticos, embora seja possível em certos casos como funções delta, funções degrau e “funções ressonantes”  $\sim (v^2 + a^2)^{-n}$  [34]. Para distribuições que sejam analíticas na velocidade, no entanto, o comportamento assintótico do sistema pode ser estudado usando a transformação inversa de (2.1.24)

$$\phi_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \phi_p e^{pt} dp, \quad (2.1.25)$$

sendo  $\sigma$  um número real e positivo maior do que a parte real de todas as singularidades de  $\phi_p$ , de forma que o caminho de integração é uma reta paralela ao eixo dos imaginários e localizada à direita desse e das singularidades.

A transformação (2.1.22) define  $\phi_p$  apenas no semi-plano complexo no qual  $\text{Re}(p) > 0$ . No entanto, é possível fazer a continuação analítica de  $\phi_p$  de forma a defini-la em todo o plano complexo [34], [57]. As integrais que aparecem em (2.1.20), tanto no denominador quanto no numerador, são da forma

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)dx}{x-z}, \quad (2.1.26)$$

em que  $f(x)$  é uma função integrável no eixo real e  $f(z)$  é uma função inteira no plano complexo. A função  $g(z)$  é analítica ou no semi-plano superior ou no inferior do plano complexo, mas pode ser continuada analiticamente através da seguinte fórmula geral:

$$\begin{aligned} h(z) &= \int \frac{f(x)dx}{x-z}, & \text{Im}(z) > 0, \\ h(z) &= \int \frac{f(x)dx}{x-z} + 2\pi i f(z), & \text{Im}(z) < 0. \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

A interpretação geométrica da fórmula (2.1.27) diz que o caminho de integração passa sobre o eixo  $\text{Im}(p) = 0$  quando o caminho é “fechado por cima” e passa sobre o eixo  $\text{Im}(p) = 0$  deformando-se para passar ao redor do polo simples em  $x = z$  quando o contorno é “fechado por baixo”. A continuação analítica de  $\phi_p$  permite-nos estudar a equação (2.1.25) através do teorema dos resíduos [57] [58] [59].

Vamos agora assumir duas suposições: a primeira é a de que  $\phi_p$  desaparece rápido o suficiente quando  $|p| \rightarrow \infty$ . A segunda é a de que todas as raízes de (2.1.23) (ou seja, as singularidades de (2.1.22)), localizadas nos pontos  $p = p_k$ , estão à esquerda da reta  $\text{Re}(p) = p_0$ , ou, mais simplesmente,  $\text{Im}(p_k) < p_0$ . Essas suposições nos permitem transladar o caminho de integração de (2.1.25), originalmente uma reta paralela ao eixo  $\text{Re}(p) = 0$ , para uma nova reta paralela ao eixo  $\text{Re}(p) = 0$  e à esquerda desse que se deforma para passar ao redor das singularidades de  $\phi_p$ . Em termos matemáticos, (2.1.25) toma a forma

$$\phi_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} \phi_p e^{pt} dp = -\frac{e}{\varepsilon_0 k^2 2\pi i} \int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} \frac{\int \frac{g(u)}{p+iku} du}{\varepsilon(k, p)} e^{pt} dp. \quad (2.1.28)$$

Temos então que o comportamento assintótico de (2.1.28) é governado por

$$\phi_k(t \rightarrow \infty) \sim \sum_{p=p_k} R(p_k) e^{p_k t}, \quad (2.1.29)$$

sendo  $R(p_k) = \lim_{p \rightarrow p_k} (p-p_k)\phi_p$  o resíduo de  $\phi_p$  em  $p = p_k$ . Como  $p_k$  é, em geral, um número complexo, podemos explicitar as partes reais e imaginária,

$$p_k = -i\omega - \gamma, \quad (2.1.30)$$

de forma a obter

$$\phi_k(t) \sim \sum_{p_k} R(p_k) e^{-i\omega t} e^{-\gamma t}. \quad (2.1.31)$$

A equação acima mostra que o potencial da onda perturbada tem sua amplitude amortecida com o decorrer do tempo quando  $\gamma > 0$ . A esse fenômeno, em que a perturbação perde amplitude mesmo na ausência de colisões, se dá o nome de “amortecimento de Landau”.

O mecanismo físico do amortecimento de Landau, de acordo com o modelo proposto por Dawson [33], é o de que partículas movendo-se a velocidades próximas à velocidade de fase da onda eletrostática entram em forte ressonância com esta. As partículas que se movem a uma velocidade ligeiramente menor (maior) roubam (doam) energia à onda. Para uma distribuição gaussiana e uma velocidade de fase suficientemente alta, o número de partículas que recebem energia da onda é maior do que o de partículas que fornecem energia, fazendo com que a oscilação seja amortecida [33], [34], [60]. Uma análise no espaço real poderia também mostrar que, para uma perturbação inicial de dimensões  $L \gg \lambda_D$ , depois de transcorrido um tempo  $t \gg L/v_{Te}$ , em que  $v_{Te} = \sqrt{2\kappa_B T/m}$  é a velocidade térmica do plasma, há um volume com raio  $\sim v_{Te}t$  ocupado por elétrons térmicos que cruzaram a região da perturbação inicial, responsáveis por expandir a perturbação inicial através do plasma, e há também uma distância de dimensões  $\sim \omega_p t$  preenchida pelos elétrons ressonantes que cruzaram a região de perturbação e são os responsáveis pelo amortecimento [3].

Vamos agora estudar a “relação de dispersão” advinda de se fazer  $\varepsilon = 0$ , com  $\varepsilon$  dada pela equação (2.1.23). O uso de aspas se refere ao fato de que apenas no limite assintótico ela pode realmente ser considerada uma relação de dispersão [34]. Na aproximação para ondas com comprimento de onda longo, podemos expandir o integrando para obter

$$\varepsilon \approx 1 + \frac{\omega_P^2}{p^2} = 0 \implies p \approx \pm i\omega_P, \quad (2.1.32)$$

ou seja, oscilações para as quais  $k \rightarrow 0$  são senoidais e não são amortecidas. Essas oscilações são conhecidas como ondas de Langmuir. A próxima correção é obtida expandindo (2.1.23) na forma

$$1 - \frac{i\omega_P^2}{kn_0p} \int \frac{\partial f_0(u)}{\partial u} \left[ 1 - \frac{iku}{p} - \frac{k^2u^2}{p^2} + O\left(\frac{k^3u^3}{p^3}\right) \right] du = 0. \quad (2.1.33)$$

O cálculo que segue é simples, mas um pouco longo e não revela nenhuma informação essencial sobre o processo, podendo ser conferido no artigo original de Landau [1] ou em livros-texto da área de Plasmas como [34] ou [60]. Ao fim do cabo, obtemos a relação

$$\omega^2 = \omega_P^2 + 3k^2 \langle u^2 \rangle, \quad (2.1.34)$$

sendo  $\langle u^2 \rangle = \int du f_0(u) u^2 / n_0$  a velocidade térmica média dos elétrons. A relação acima é a famosa relação de dispersão de Bohm-Gross. A existência do decremento  $\gamma$  em (2.1.30),



no entanto, adiciona mais uma correção, que rapidamente vai a zero à medida que  $k \rightarrow 0$ . A obtenção desse decremento é possível alterando o caminho de integração de um corte de ramo para um semicírculo que passa ao redor do ponto  $u = -p_k/ik$  [1], e, através de aproximações sucessivas, rende o resultado

$$\gamma = -\frac{\pi\omega_P^3}{2n_0k^2} \left( \frac{df_0}{du} \right)_{u=-\frac{p}{ik}}. \quad (2.1.35)$$

A quantidade acima é conhecida como taxa de amortecimento de Landau.

## 2.2 Modos BGK

O tratamento de Landau é o tratamento padrão para se estudar a equação de Vlasov linearizada, e nos leva ao resultado do amortecimento não-colisional assintótico conhecido como amortecimento de Landau, como vimos na seção anterior. É possível, no entanto, se estudar os fenômenos não-lineares contidos na equação de Vlasov, seguindo o método proposto por Bernstein, Greene e Kruskal em 1957 [61], chegando-se aos chamados modos BGK, que não apresentam o amortecimento de Landau.

De modo geral, as premissas teóricas serão as mesmas da seção anterior, com algumas diferenças. A primeira consideração que precisamos fazer é a de que iremos trabalhar no chamado referencial da onda, que se propaga com a velocidade de fase da onda, sendo as quantidades relevantes, portanto, independentes do tempo. Diferentemente do caso anterior, não consideraremos aqui os íons como imóveis, sendo eles governados pela função de distribuição  $f = f_+(z, v)$ , em oposição à função dos elétrons  $f = f_-(z, v)$ . Iremos, no entanto, considerar que a função  $f_+(z, v)$  é conhecida previamente. Dadas essas considerações iniciais nós temos o sistema de Vlasov-Poisson

$$v \frac{\partial f_{\pm}(z, v)}{\partial z} \mp \frac{e}{m_{\pm}} \frac{\partial \phi(z)}{\partial z} \frac{\partial f_{\pm}(z, v)}{\partial v} = 0, \quad (2.2.1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z^2} = \frac{e}{\epsilon_0} \left[ \int f_-(z, v) dv - \int f_+(z, v) dv \right]. \quad (2.2.2)$$

A solução geral para (2.2.1) é dada por

$$f_{\pm} = f_{\pm}(E_{\pm}), \quad (2.2.3)$$

sendo

$$E_{\pm} = \frac{1}{2} m_{\pm} v^2 \pm e\phi \quad (2.2.4)$$

a energia total de cada partícula.

Precisamos falar agora dos elétrons aprisionados<sup>1</sup> [60] [61]. Vamos supor um potencial contínuo  $\phi(z)$  com valor máximo  $\phi = \phi_{max}$  e valor mínimo  $\phi = \phi_{min}$ , possuindo vales e

<sup>1</sup> A expressão original em inglês é *trapped electrons*. Uma tradução comum é “trapado”, mas essa palavra significa “batido contra uma superfície para fazer barulho”. Existe, no português, a expressão “trapa”, que significa “armadilha em forma de cova”, que, de fato, seria a analogia correta. No entanto, como trapa é um arcaísmo que não possui participio, optamos por usar a expressão “aprisionados”.

picos, delimitados por pontos  $z = z_0$  tais que  $\frac{d\phi}{dz}|_{z=z_0} = 0$ . Por simplicidade, consideraremos que todos os vales e picos possuem a mesma amplitude (como, por exemplo, um potencial senoidal), embora o que iremos falar seja facilmente generalizável a pulsos arbitrários. Um elétron que possui energia  $E_- < -e\phi_{\min}$  só pode existir em regiões “abaixo” dos picos (devido às suas cargas negativas), sem conseguir cruzar para outras regiões do potencial. A esse fenômeno se dá o nome de aprisionamento de elétrons, e, juntamente com o fenômeno do agrupamento (tradução livre da expressão inglesa *bunching*), é um dos fenômenos principais que governa o movimento de partículas carregadas sujeitas a um campo elétrico oscilante. Similarmente, íons sujeitos à condição  $e\phi_{\min} < E_+ < e\phi_{\max}$  estarão aprisionados nos vales do potencial. Para que as funções de distribuição  $f_{\pm}$  sejam independentes do tempo, é necessário que as partículas em cada região de confinamento estejam igualmente divididas em relação às duas direções da velocidade. Elétrons com  $E_- > -e\phi_{\min}$  e íons com  $E_+ > e\phi_{\max}$  estão livres para se mover para a direção que quiserem e sua distribuição no espaço das velocidades é arbitrária.

Com essas considerações, podemos substituir (2.2.3) e (2.2.4) na equação (2.2.2) para obter

$$\frac{d^2\phi(z)}{dz^2} = \frac{e}{\varepsilon_0} \left[ \int_{-e\phi}^{\infty} \frac{f_-(E)dE}{\sqrt{2m_-(E + e\phi(z))}} - \int_{e\phi}^{\infty} \frac{f_+(E)dE}{\sqrt{2m_+(E - e\phi(z))}} \right]. \quad (2.2.5)$$

A equação acima pode ser encarada como uma equação diferencial para o potencial  $\phi(z)$  em que as funções de distribuição são conhecidas, ou, como iremos fazer, como uma equação integral para a função dos elétrons aprisionados.

Caso conheçamos *a priori* o potencial  $\phi(z)$ , que determina a densidade de carga  $\rho(e\phi) = -\varepsilon_0 d^2\phi/dz^2$ , a função de distribuição  $f_+(E)$  dos íons e a função dos elétrons não aprisionados,  $f_-(E)$  para  $E > -e\phi_{\min}$ , podemos escrever (2.2.5) como

$$\int_{-e\phi}^{-e\phi_{\min}} \frac{f_-(E)dE}{\sqrt{2m_-(E + e\phi)}} = g(e\phi), \quad (2.2.6)$$

sendo

$$g(e\phi) = -\frac{\rho(e\phi)\varepsilon_0}{e} + \int_{e\phi}^{\infty} \frac{f_+(E)dE}{\sqrt{2m_+(E - e\phi)}} - \int_{-e\phi_{\min}}^{\infty} \frac{f_-(E)dE}{\sqrt{2m_-(E + e\phi)}} \quad (2.2.7)$$

a densidade dos elétrons aprisionados no ponto  $z$  sujeito ao potencial  $\phi(z)$ . A solução da equação (2.2.6) pode ser obtida mediante uma transformada de Laplace, *viz.*

$$f_-(E) = \frac{\sqrt{2m_-}}{\pi} \int_{e\phi_{\min}}^{-E} \frac{dg(V)}{dV} \frac{dV}{\sqrt{-E - V}}, \quad E < -e\phi_{\min}, \quad (2.2.8)$$

sendo  $V$  uma variável muda de integração com unidade de energia.

Ao substituírmos (2.2.7) em (2.2.8) e realizando algumas das integrações, obtemos [61]

$$f_-(E) = \frac{\varepsilon_0 \sqrt{2m_-}}{\pi e} \int_{e\phi_{\min}}^{-E} \frac{d\rho(V)}{dV} \frac{dV}{-E-V} + \frac{1}{\pi} \int_{-e\phi_{\min}}^{\infty} \sqrt{\frac{e\phi_{\min} - E}{V - e\phi_{\min}}} \frac{f_-(V)dV}{V - E} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{m_-}{m_+}} \int_{e\phi_{\min}}^{\infty} \frac{df_+(V)}{dV} \frac{1}{2} \ln \frac{(E+V)^2}{[\sqrt{V - e\phi_{\min}} - \sqrt{-E - e\phi_{\min}}]^4} dV, \quad E < -e\phi_{\min}. \quad (2.2.9)$$

O resultado acima é conhecido como modos de Bernstein-Greene-Kruskal, ou, simplesmente, modos BGK.

Seu limite linear pode ser obtido estudando o caso de baixas amplitudes, para os quais

$$e(\phi_{\max} - \phi_{\min}) \ll \langle mv^2/2 \rangle, \quad (2.2.10)$$

o que nos permite expandir  $f_-$  em potências de  $e(\phi_{\max} - \phi_{\min})$  e integrá-la por partes. O resultado é [61]

$$f_-(E) = \frac{\varepsilon_0 \sqrt{2m_-}}{\pi e} \left\{ 2[-e\phi_{\min} - E]^{\frac{1}{2}} N'(e\phi_{\min}) + \frac{4}{3} [-e\phi_{\min} - E]^{\frac{3}{2}} N''(e\phi_{\min}) + O\left[(-e\phi_{\min} - E)^{\frac{5}{2}}\right] \right\}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left\{ \pi f_-(-e\phi_{\min}) + 2[-e\phi_{\min} - E]^{\frac{1}{2}} \int_{-e\phi_{\min}}^{\infty} DV V^{-\frac{1}{2}} f'_-(V) - \pi[-e\phi_{\min} - E] f'_-(-e\phi_{\min}) + \right.$$

$$\left. + O\left[(-e\phi_{\min} - E)^{\frac{3}{2}}\right] \right\} + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{m_-}{m_+}} \left\{ 2[-e\phi_{\min} - E]^{\frac{1}{2}} \int_{e\phi_{\min}}^{\infty} dV V^{-\frac{1}{2}} f'_+(V) + O\left[(-e\phi_{\min} - E)^{\frac{3}{2}}\right] \right\}, \quad (2.2.11)$$

em que um apóstrofe expressa a derivada da função em relação ao seu argumento.

Tanto a expressão (2.2.9) quanto seu limite linear (2.2.11) não apresentam nenhum termo de amortecimento. Em outras palavras, a solução não-linear da equação de Vlasov não apresenta o amortecimento de Landau. Essa aparente contradição pode ser explicada usando os modos de Case-van Kampen, que estudaremos a seguir.

## 2.3 Tratamento de van Kampen

Vamos partir do sistema de equações (2.1.15):

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + ikv_z f_k + i \frac{e}{m} \phi_k k \frac{\partial f_0}{\partial v_z} = 0,$$

$$-k^2 \phi_k = \frac{e}{\varepsilon_0} \int f_k d\mathbf{v}, \quad (2.1.15)$$

só que, agora, ao invés de considerarmos o sistema como um problema de valor inicial e usar a transformada de Laplace, vamos prosseguir de maneira diferente.

Eliminando  $\phi_k$  mutuamente entre as duas equações, obtemos

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + ikv_z f_k - i \frac{\omega_P^2}{kn_0} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \int f_k(k, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v}' = 0. \quad (2.3.1)$$

van Kampen fez outra transformada de Fourier, desta vez no tempo, presumindo que cada  $f_k$  seja da forma

$$f_k(k, \mathbf{v}, t) = f_\omega(k, \mathbf{v}, \omega) e^{-i\omega t}, \quad (2.3.2)$$

sendo que  $\omega$  é uma constante real e arbitrária.

Inserindo (2.3.2) em (2.3.1), obtemos

$$\left(v_z - \frac{\omega}{k}\right) f_\omega = \frac{\omega_P^2}{k^2 n_0} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \int f_\omega(k, \mathbf{v}', \omega) d\mathbf{v}'. \quad (2.3.3)$$

Notando que  $\mathbf{k}$  aponta na direção  $z$ , podemos, como no tratamento de Landau, fazer  $f_\omega(k, u, \omega) = \int \int f_\omega(k, \mathbf{v}, \omega) dv_x dv_y$  e escrever  $f_\omega(k, u, \omega)$  como  $f_\omega(u)$  por brevidade. A equação acima pode, então, ser integrada imediatamente nos eixos  $v_x$  e  $v_y$

$$\left(u - \frac{\omega}{k}\right) f_\omega(u) = -\eta_C(u) \int f_\omega(u') du', \quad (2.3.4)$$

em que  $\eta_C(u)$  é

$$\eta_C(u) = -\frac{\omega_P^2}{k^2 n_0} \frac{\partial}{\partial u} \int f_0(\mathbf{v}) dv_x dv_y. \quad (2.3.5)$$

Escolhendo a normalização

$$\int f_\omega(u) du = 1, \quad (2.3.6)$$

a equação (2.3.4) se reduz a

$$\left(u - \frac{\omega}{k}\right) f_\omega(u) = -\eta_C(u). \quad (2.3.7)$$

A normalização (2.3.6) não é, a princípio, justificada, exceto pelo fato que a integral de  $f_\omega(u)$  não pode ser nula. É necessário resolver (2.3.7) e conferir se a solução atende à condição de normalização, razão pela qual a solução óbvia

$$f_\omega(k, u, \omega) = -\frac{\eta_C(u)}{(u - \omega/k)} \quad (2.3.8)$$

não é aceitável, como é facilmente demonstrável.

Van Kampen [35] argumentou que, uma vez que  $f_\omega(u)$  é uma função de distribuição, sua maior utilidade está no cálculo de médias, ou seja, na integração do produto de  $f_\omega(k, \mathbf{v}, \omega)$  com outras funções.  $f_\omega(k, \mathbf{v}, \omega)$  não precisa, portanto, ser uma função livre de singularidades, apenas uma distribuição de Schwartz, ou função generalizada, desde que haja uma prescrição de como se integrar ao redor dos polos. Funções de suporte compacto, para as quais  $f_0(\mathbf{v}) = 0$  para  $|\mathbf{v}| \geq v_{max}$ , em que  $v_{max}$  é a velocidade a partir da qual surgem os polos, são capazes de solucionar matematicamente o problema, mas sua validade física é discutível. Vamos denominar as soluções de (2.3.7) como  $f_\nu(u)$ , em que  $\nu = \omega/k$  é a velocidade de fase. A equação (2.3.7) se torna, então,

$$(u - \nu) f_\nu(u) = -\eta_C(u), \quad (2.3.9)$$

que, é bom lembrar, é, formalmente falando, a equação

$$(u - \nu)f_\nu(u) = -\eta_C(u) \int f_\nu(u') du' \quad (2.3.10)$$

com a normalização (2.3.6)

Juntamente com (2.3.9), é interessante estudar as soluções da equação adjunta

$$(u - \nu)\tilde{f}_\nu(u) = - \int \eta_C(u') \tilde{f}_\nu(u') du', \quad (2.3.11)$$

que, como logo veremos, será importante para se estudar a ortogonalidade dos modos resultantes.

Case [36] classificou as soluções de (2.3.9) e (2.3.11) para  $\nu \in \mathbb{R}$  e  $\nu \in \mathbb{C}$ , respectivamente, nos Casos 1 e 2, sendo aquele dividido em três subcasos.

- Caso 1a:  $\eta_C(\nu) \neq 0$

Temos que a solução de (2.3.9) é dada por

$$f_\nu(u) = -\mathcal{P} \frac{\eta_C(u)}{(u - \nu)} + \lambda(\nu)\delta(u - \nu), \quad (2.3.12)$$

sendo que o símbolo  $\mathcal{P}$  indica que deve se tomar o valor principal de  $(v - \nu)^{-1}$ ,  $\lambda(\omega, k)$  é uma função arbitrária a ser determinada pela normalização (2.3.6) e  $\delta$  é a “função” delta de Dirac. Esse é o único caso possível caso  $f_0$  seja Maxwelliana, e foi o único caso estudado por van Kampen [35] e em livros-texto como, por exemplo, [60]. A normalização (2.3.6) nos impõe

$$\lambda(\nu) = 1 + \mathcal{P} \int \frac{\eta_C(u) du}{u - \nu}. \quad (2.3.13)$$

Já para (2.3.11), escolhendo a normalização

$$\int \eta_C(u') \tilde{f}_\nu(u') du' = 1, \quad (2.3.14)$$

temos que a solução será

$$\tilde{f}_\nu(u) = -\mathcal{P} \frac{1}{u - \nu} + \tilde{\lambda}(\nu)\delta(u - \nu), \quad (2.3.15)$$

com (2.3.14) impondo

$$\tilde{\lambda}(\nu)\eta_C(\nu) = 1 + \mathcal{P} \int \frac{\eta_C(u) du}{u - \nu} = \lambda(\nu) \therefore \tilde{\lambda}(\nu) = \frac{\lambda(\nu)}{\eta_C(\nu)}. \quad (2.3.16)$$

- Caso 1b:  $\eta_C(\nu) = 0$

Nós obtemos o mesmo resultado do caso anterior,

$$f_\nu(u) = -\mathcal{P} \frac{\eta_C(u)}{(u - \nu)} + \lambda(\nu)\delta(u - \nu), \quad (2.3.17)$$

com a diferença que agora não é necessário prescrever o valor principal  $\mathcal{P}$  para

$$\lambda(\nu) = 1 + \int \frac{\eta_C(u) du}{v - \nu}. \quad (2.3.18)$$

O conjunto dos  $\nu$  que solucionam os casos 1a e 1b é denominado de  $\Sigma$ . A solução da equação adjunta é

$$\tilde{f}_\nu(u) = \delta(u - \nu), \quad (2.3.19)$$

como pode ser conferido ao inserí-la em (2.3.11), que se torna nula de ambos os lados.

- Caso 1c:  $\eta_C(\nu) = \lambda(\nu) = 0$

O Caso 1c só permite um conjunto finito de soluções discretas  $\nu_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  [36]. As soluções de (2.3.9) são dadas por

$$f_{\nu_i}(u) \equiv f_i(u) = -\frac{\eta_C(u)}{u - \nu_i}, \quad (2.3.20)$$

enquanto as de (2.3.11) são, escolhendo novamente a normalização (2.3.14),

$$\tilde{f}_{\nu_i}(u) \equiv \tilde{f}_i(u) = -\frac{1}{u - \nu_i} \quad (2.3.21)$$

- Caso 2

Para  $\nu$  complexo, temos que

$$f_\nu(u) = -\frac{\eta_C(u)}{u - \nu}. \quad (2.3.22)$$

Assim como para o Caso 1c, temos que  $\nu$  forma um conjunto de pontos discretos  $\nu_j$ ,  $j = m + 1, m + 2, \dots, n$ , e, sem surpresa, temos

$$\tilde{f}_j(u) = -\frac{1}{u - \nu_j}. \quad (2.3.23)$$

De forma sintética, podemos dizer que a solução de (2.3.9) é dada pelo conjunto contínuo das soluções para  $\nu$  real

$$f_\nu(u) = -\mathcal{P} \frac{\eta_C(u)}{(u - \nu)} + \lambda(\nu) \delta(u - \nu), \quad (2.3.24)$$

sendo que  $\eta_C(\nu)$  e  $\lambda(\nu)$  não sejam simultaneamente nulos, mais o conjunto discreto das soluções para  $\nu_i$ , sendo que  $\nu_i \in \mathbb{R}$  e

$$\eta_C(\nu_i) = 0 = \lambda(\nu_i) \equiv 1 + \int \frac{\eta_C(u) du}{u - \nu_i}, \quad (2.3.25)$$

ou  $\nu_i \in \mathbb{C}$  e

$$\int \frac{\eta_C(u) du}{u - \nu_i} = 1. \quad (2.3.26)$$

Os modos (2.3.24) são conhecidos como modos de Case-van Kampen ou simplesmente modos de van Kampen.

Vamos reescrever as equações (2.3.10) e (2.3.11), respectivamente, como

$$\nu f_\nu(u) = u f_\nu + \eta_C(u) \int f_\nu(u') du' \quad (2.3.27)$$

e

$$\nu' \tilde{f}_{\nu'}(u) = u \tilde{f}_{\nu'} + \int \eta_C(u') \tilde{f}_{\nu'}(u') du'. \quad (2.3.28)$$

Multiplicando esta por  $f_\nu(u)$ , aquela por  $\tilde{f}_{\nu'}(u)$ , subtraindo uma da outra e integrando em função de  $u$ , obtemos

$$(\nu - \nu') \int \tilde{f}_{\nu'}(u) f_\nu(u) du = 0. \quad (2.3.29)$$

Em outras palavras, temos que as funções  $f_\nu(u)$  e  $\tilde{f}_{\nu'}(u)$  são ortogonais para  $\nu \neq \nu'$ . Como conhecemos essas funções, podemos estudar a ortogonalidade dos modos de van Kampen para  $\nu = \nu'$ , de forma a podermos usá-los em uma expansão de um distúrbio inicial.

Os Casos 1c e 2 geram o mesmo resultado. Temos, portanto, três situações:

- Espectros discretos (Casos 1c e 2)

Temos

$$\int \tilde{f}_i(u) f_j(u) du = \delta_{ij} C_i, \quad (2.3.30)$$

sendo

$$C_i = \int \frac{\eta_C(u) du}{(u - \nu_i)^2}. \quad (2.3.31)$$

Como  $\nu_i$  é um zero simples de

$$1 + \int \frac{\eta_C(u) du}{u - \nu_i} = 0, \quad (2.3.32)$$

temos que  $C_i \neq 0$ .

- Caso 1b

Usando (2.3.17) e (2.3.19), temos que

$$\begin{aligned} \int \tilde{f}_{\nu'}(u) f_\nu(u) du &= \lambda(\nu) \int \delta(u - \nu) \delta(u - \nu') du - \mathcal{P} \int \frac{\eta_C(u)}{u - \nu} \delta(u - \nu) \delta(u - \nu') du = \\ &= \lambda(\nu) \delta(\nu - \nu') = \\ \int \tilde{f}_{\nu'}(u) f_\nu(u) du &= C_\nu \delta(\nu - \nu') \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

sendo que o termo do valor principal se anula porque ela exclui o ponto  $u = \nu$  e, portanto, vai a zero devido às propriedades da “função” delta de Dirac. Com isso, temos que  $C_\nu = \lambda(\nu) \neq 0$ .

- Caso 1a

O Caso 1a é o mais complicado, uma vez que vamos integrar o produto de duas distribuições “complicadas”, que incluem valores principais. Temos então que

$$\begin{aligned} \int \tilde{f}_{\nu'}(u)f_{\nu}(u)du &= \int \left[ \mathcal{P} \frac{1}{u-\nu'} \mathcal{P} \frac{\eta_C(u)}{u-\nu} \right] du + \frac{\lambda(\nu)\lambda(\nu')}{\eta_C(\nu')} \int \delta(u-\nu)\delta(u-\nu')du - \\ &\quad - \frac{\lambda(\nu')}{\eta_C(\nu')} \mathcal{P} \int \frac{\eta_C(u)}{u-\nu} \delta(u-\nu')du - \lambda(\nu) \mathcal{P} \int \frac{du}{u-\nu'} \delta(u-\nu) = \\ \int \tilde{f}_{\nu'}(u)f_{\nu}(u)du &= \int \left[ \mathcal{P} \frac{1}{u-\nu'} \mathcal{P} \frac{\eta_C(u)}{u-\nu} \right] du + \frac{\lambda(\nu)\lambda(\nu')}{\eta_C(\nu')} \delta(\nu-\nu') + \\ &\quad + [\lambda(\nu) - \lambda(\nu')] \mathcal{P} \frac{1}{\nu'-\nu}. \end{aligned} \tag{2.3.34}$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima pode ser estudado usando a seguinte fórmula deduzida por Lambert, Best e Sluijter em [62]:

$$\frac{\mathcal{P}}{u-\nu} \frac{\mathcal{P}}{u-\nu'} = \frac{\mathcal{P}}{\nu-\nu'} \left[ \frac{\mathcal{P}}{u-\nu} - \frac{\mathcal{P}}{u-\nu'} \right] + \pi^2 \delta(u-\nu') \delta(\nu-\nu'), \tag{2.3.35}$$

que nos dá

$$\begin{aligned} \int \tilde{f}_{\nu'}(u)f_{\nu}(u)du &= \int \eta_C(u) \left[ \frac{\mathcal{P}}{u-\nu} - \frac{\mathcal{P}}{u-\nu'} \right] du \frac{\mathcal{P}}{\nu-\nu'} + \pi^2 \delta(\nu-\nu') \int \eta_C(u) \delta(u-\nu') du + \\ &\quad + \frac{\lambda(\nu)\lambda(\nu')}{\eta_C(\nu')} \delta(\nu-\nu') + [\lambda(\nu) - \lambda(\nu')] \mathcal{P} \frac{1}{\nu'-\nu} = \\ &= \left\{ \int \eta_C(u) \left[ \frac{\mathcal{P}}{u-\nu} - \frac{\mathcal{P}}{u-\nu'} \right] du - \lambda(\nu) + \lambda(\nu') \right\} \frac{\mathcal{P}}{\nu-\nu'} + \\ &\quad + \frac{\lambda^2(\nu) + \pi^2 \eta^2(\nu)}{\eta_C(\nu)} \delta(\nu-\nu'). \end{aligned} \tag{2.3.36}$$

Usando a definição para  $\lambda(\nu)$ , (2.3.13), podemos ver que o termo entre chaves é nulo e, com isso, temos que a ortogonalidade dos modos de Case-van Kampen é dada por

$$\int \tilde{f}_{\nu'}(u)f_{\nu}(u)du = C_{\nu} \delta(\nu-\nu'), \tag{2.3.37}$$

com

$$C_{\nu} = \frac{\lambda^2(\nu) + \pi^2 \eta^2(\nu)}{\eta_C(\nu)} \neq 0 \tag{2.3.38}$$

Vamos agora demonstrar que os modos de Case-van Kampen formam um conjunto completo, no sentido em que “qualquer” função arbitrária  $f(u)$  definida para  $-\infty < u < \infty$  pode ser decomposta na forma

$$f(u) = \sum_i a_i f_i(u) + \int A(\nu) f_{\nu}(u) d\nu. \tag{2.3.39}$$



Case [36] aponta que uma condição suficiente, mas não necessária, para a validade da análise de completeza que segue, é a de que a função decomposta atenda à condição de Hölder

$$|f(u_b) - f(u_a)| \leq A|u_b - u_a|^\mu, \quad (2.3.40)$$

em que  $A$  e  $\mu$  são constantes positivas chamadas de constante e índice de Hölder, respectivamente [63], mas Case supõe que a completeza é provavelmente válida sobre condições muito mais fracas também.

Multiplicando ambos os lados por  $\tilde{f}_i$ , integrando em função de  $v$  e usando (2.3.30), temos que

$$a_i = \frac{1}{C_i} \int \tilde{f}_i(u) f(u) du, \quad (2.3.41)$$

o que faz com que o nosso trabalho passe a ser provar que sempre é possível encontrar  $A(\nu)$  para a equação

$$f'(u) = \int A(\nu) f_\nu(u) d\nu, \quad (2.3.42)$$

com  $g'(u) = g(u) - \sum_i a_i f_i(u)$ . Inserido a solução dos casos 1a e 1b para  $f_\nu(u)$  na equação acima temos

$$f'(u) = A(u)\lambda(u) + \eta_C(u)\mathcal{P} \int \frac{A(\nu)d\nu}{\nu - u}, \quad (2.3.43)$$

sendo

$$\lambda(u) = 1 + \mathcal{P} \int \frac{\eta_C(u') du'}{u' - u}. \quad (2.3.44)$$

Definindo as funções

$$N(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{A(\nu)d\nu}{\nu - z}, \quad (2.3.45)$$

$$Q(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\eta_C(u') du'}{u' - z} \quad (2.3.46)$$

e

$$M(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'(u') du'}{u' - z}, \quad (2.3.47)$$

em que  $z$  é uma variável complexa.  $N(z)$ ,  $Q(z)$  e  $M(z)$  são, assumindo que  $A(\nu)$  exista, analíticas, com cortes de ramo (“*branch cuts*” em inglês) no plano real e somem para  $z \rightarrow \infty$ . Vamos também definir  $N^\pm(z) = \lim_{\text{Im}(z) \rightarrow 0^\pm} N(z)$ , e similarmente para  $Q^\pm(z)$  e  $M^\pm(z)$ . Nós temos então as relações

$$N^+(u) - N^-(u) = A(u), \quad (2.3.48a)$$

$$\pi i [N^+(u) + N^-(u)] = \mathcal{P} \int \frac{A(\nu)d\nu}{\nu - u}, \quad (2.3.48b)$$

$$Q^+(u) - Q^-(u) = \eta_C(u), \quad (2.3.48c)$$

$$\pi i [Q^+(u) + Q^-(u)] = \mathcal{P} \int \frac{\eta_C(\nu)d\nu}{\nu - u} = \lambda(u) - 1, \quad (2.3.48d)$$

$$M^+(u) - M^-(u) = f'(u), \quad (2.3.48e)$$

que podem ser substituídas na equação (2.3.43) resultando em

$$\{N^+(u)[1 + 2\pi iQ^+u - M^+(u)] - \{N^-(u)[1 + 2\pi iQ^-(u)] - M^-(u)\} = 0. \quad (2.3.49)$$

Supondo agora que  $N(z)$  exista e seja uma função analítica no plano complexo com cortes de ramo no eixo real, seja nula no infinito e cuja passagem pelo eixo real obedeça à equação (2.3.49). Podemos então construir a seguinte função analítica em todo o plano complexo:

$$J(z) = N(z)[1 + 2\pi iQ(z)] - M(z). \quad (2.3.50)$$

Como a função  $J(z)$  é analítica para todos os pontos e nula no infinito, pelo teorema de Liouville, então, ela é nula para todos os pontos. Temos então a equação para  $N(z)$  é

$$N(z) = \frac{M(z)}{1 - 2\pi iQ(z)}. \quad (2.3.51)$$

As únicas singularidades possíveis para  $N(z)$  são as raízes de  $1 - 2\pi iQ(z) = 1 + \int \frac{\eta_C(u')du'}{u' - z}$ , que sabemos ser  $\nu_i$ . A condição

$$M(\nu_i) = 0 \quad (2.3.52)$$

é, portanto, suficiente para que  $N(z)$  exista e, portanto, por (2.3.48a),  $A(\nu)$  exista. Expandindo, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int \frac{f'(u')du'}{u' - \nu_i} = \\ &= \int \frac{f(u')du'}{u' - \nu_i} - \sum_j a_j \int \frac{f_j(u)du}{u - \nu_i} = \\ &= \sum_j a_j \int \tilde{f}_i(u)f_j(u)du - \int \tilde{f}_i(u')f(u')du' = \\ 0 &= a_i C_i - \int \tilde{f}_i(u')f(u')du', \end{aligned} \quad (2.3.53)$$

o que nos dá a equação (2.3.41). Provamos, portanto, que o conjunto das funções  $f_\nu(u)$ ,  $\nu \in \Sigma$ , e  $f_i(u)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), é completo para funções  $f(u)$  definidas em  $\Sigma$ .

Para entendermos o significado físico dos modos de Case-van Kampen, temos que voltar aos modos BGK. Como vimos na seção anterior, a introdução do conceito de elétrons aprisionados leva à quebra da teoria linear. Em seu artigo original [61], Bernstein, Greene e Kruskal propõem o seguinte “resgate” à teoria linear: seria suficiente a uma teoria de primeira ordem reproduzir corretamente os momentos da função de distribuição, dados, em geral, por

$$N\langle v^\zeta \rangle = \int dv v^\zeta F(x, v), \quad \zeta = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.54)$$

Representando agora a função de distribuição dos elétrons com velocidade  $v > 0$  ( $v < 0$ ) por  $F^+$  ( $F^-$ ) e notando que, para os elétrons aprisionados,  $F^+ = F^- = \frac{1}{2}F$ , podemos

escrever a equação acima como

$$\begin{aligned}
N\langle v^\zeta \rangle = & \int_{-\infty}^{-w} dv F^- [m(v^2 - w^2)/2] v^\zeta + \\
& + \int_{-w}^w dv \frac{1}{2} F [m(v^2 - w^2)/2] v^\zeta + \\
& + \int_w^\infty dv F^+ [m(v^2 - w^2)/2] v^\zeta, \quad (2.3.55)
\end{aligned}$$

sendo  $w = \sqrt{2e(\phi - \phi_{min})/m}$ . A integral do meio do lado direito representa o efeito dos elétrons aprisionados no momento de ordem  $\zeta$ . Expandindo as integrais acima e mantendo apenas os termos até a primeira ordem, obtemos

$$\begin{aligned}
N\langle v^\zeta \rangle = & \int_{-\infty}^w dv v^\zeta \left[ F^-(mv^2/2) - \frac{e(\phi - \phi_{min})}{mv} \frac{\partial F^-(mv^2/2)}{\partial v} \right] + \\
& + \int_{-w}^w dv \frac{1}{2} v^\zeta \left[ F(0) + a\sqrt{w^2 - v^2} + b(w^2 - v^2) \right] + \\
& + \int_w^\infty dv v^\zeta \left[ F^+(mv^2/2) - \frac{e(\phi - \phi_{min})}{mv} \frac{\partial F^-(mv^2/2)}{\partial v} \right], \quad (2.3.56)
\end{aligned}$$

com os coeficientes  $a$  e  $b$  dados pela equação (2.2.11) [61].

A função de equilíbrio (ou de ordem zero),  $f_0(v)$  é dada por

$$f_0(v) = F^+(mv^2/2)H(v) + F^-(mv^2/2)H(-v), \quad (2.3.57)$$

em que  $H(v)$  é a função degrau de Heaviside. À medida que nos aproximamos do limite das baixas amplitudes,  $w \propto (\phi - \phi_{min}) \rightarrow 0$ , e (2.3.56) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
N\langle v^\zeta \rangle = & \int dv v^\zeta f_0(v) + \\
& + \frac{e(\phi - \phi_{min})}{m} \mathcal{P} \int dv v^{\zeta-1} \frac{\partial f_0(v)}{\partial v} + \\
& + \int_{-w}^w dv v^\zeta \frac{1}{2} \left[ -v \frac{\partial f_0(v)}{\partial v} \Big|_{v=0} + a\sqrt{w^2 - v^2} \right]. \quad (2.3.58)
\end{aligned}$$

Uma função  $F(x, v)$  capaz de gerar (2.3.58) quando inserida em (2.3.54) é

$$F(x, v) = f_0(v) - \mathcal{P} \frac{e(\phi - \phi_{min})}{mv} \frac{\partial f_0(v)}{\partial v} + c\delta(v), \quad (2.3.59)$$

com a constante  $c$  determinada por (2.3.58). A função  $F(x, v)$  acima é, claramente, um modo de Case-van Kampen. Nesse sentido, portanto, os modos de Case-van Kampen podem ser entendidos como o limite dos modos BGK para baixas amplitudes.

Vale a pena debater aqui um pouco mais da física dos elétrons aprisionados. Uma partícula carregada sujeita a um potencial que oscila com uma frequência  $\omega$  “sente”, devido ao efeito Doppler, uma frequência  $\tilde{\omega} = \omega - kv$ . Uma partícula carregada para a

qual  $\tilde{\omega} = 0$  (ou seja, uma partícula com  $v = \nu$ ) alterna entre posições de fases opostas. No referencial da onda, a partícula oscila. A essa partícula damos o nome de “aprisionada” [60]. Com isso em mente e a análise dos parágrafos anteriores, torna-se claro o significado físico dos modos de Case Van-Kampen: a parte principal representa os elétrons livres, enquanto a delta de Dirac representa os feixes de elétrons aprisionados.

Vamos agora usar a completeza dos modos de Case-van Kampen para solucionar o problema da perturbação em um plasma. Existem algumas deduções matemáticas possíveis, sumarizadas em [62], mas vamos seguir aqui a apresentada por Pécseli em [64], que mais se assemelha ao estudo feito por van Kampen [35]. Ao invés de estudar o caso geral, como fizemos ao decorrer dessa seção, mas um caso mais próximo ao que estudamos na seção sobre o tratamento de Landau, no qual um plasma se encontra inicialmente em equilíbrio estável, para o qual sabemos [62] que os fatores  $a_j$  são todos iguais a 0. Temos então que nossa função de distribuição é dada por

$$f(x, u, t) = \int \int A(k, \nu) f(k, u, \nu) \exp [ik(x - \nu t)] dk d\nu, \quad (2.3.60)$$

sendo a solução inicial

$$f(x, u, t = 0) = g(x, u) = \int \int A(k, \nu) f(k, u, \nu) e^{ikx} dk d\nu. \quad (2.3.61)$$

Fazendo a transformada de Fourier da equação acima, omitindo a dependência em  $k$  e inserindo (2.3.12) e (2.3.13), obtemos

$$g_k(u) = \eta_C(u) \mathcal{P} \int \frac{A(\nu)}{u - \nu} d\nu + A(u) \left( 1 + \mathcal{P} \int \frac{\eta_C(u)}{u - \nu'} du \right). \quad (2.3.62)$$

Vamos agora pressupor que  $A(\nu)$  seja uma função de quadrado integrável. Ela tem, então, a propriedade de poder ser decomposta em uma “parte de frequência positiva”  $A_+(\nu)$ , continuada analiticamente na metade superior do plano dos  $\nu$  complexos e uma “parte de frequência negativa”  $A_-(\nu)$ , continuada analiticamente na parte inferior do mesmo plano [35], [64]. Matematicamente, temos

$$A(\nu) = A_+(\nu) + A_-(\nu), \quad (2.3.63a)$$

$$A_+(\nu) = \int_0^\infty \Phi(p) e^{ip\nu} dp, \quad (2.3.63b)$$

$$A_-(\nu) = \int_{-\infty}^0 \Phi(p) e^{ip\nu} dp. \quad (2.3.63c)$$

As funções acima também nos permitem definir a função  $A_* = -i(A_+ - A_-)$ , que possui a propriedade [35]

$$A_*(\nu) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int \frac{A(\gamma)}{\nu - \gamma} d\gamma. \quad (2.3.64)$$

Temos também, naturalmente,

$$A_\pm(\nu) = \frac{1}{2} (A(\nu) \pm iA_*(\nu)). \quad (2.3.65)$$

A mesma análise é válida para  $g_k(k, u)$  e  $\eta_C(u)$ . Omitindo temporariamente as dependências em  $u$  e  $\nu$  por questão de clareza e substituindo (2.3.63) e (2.3.64) em (2.3.62), obtemos

$$\begin{aligned}
g_{k+} + g_{k-} &= i\pi(\eta_+ + \eta_-)(A_- - A_+) + (A_+ + A_-)(1 + i\pi(\eta_- - \eta_+)) = \\
&= \cancel{i\pi\eta_+ A_-} \overset{0}{-} i\pi\eta_+ A_+ + i\pi\eta_- A_- - \cancel{i\pi\eta_- A_+} \overset{0}{+} \\
&\quad + A_+ + A_- + \cancel{i\pi\eta_- A_+} \overset{0}{-} i\pi\eta_+ A_+ + i\pi\eta_- A_- - \cancel{i\pi\eta_+ A_-} \overset{0}{=} \\
g_{k+} + g_{k-} &= (1 - 2\pi i\eta_+)A_+ + (1 + 2\pi i\eta_-)A_-.
\end{aligned} \tag{2.3.66}$$

Como a decomposição  $g_k(u) = g_{k+}(u) + g_{k-}(u)$  apresenta unicidade [64], podemos “inverter” a equação acima e escrever

$$A = A_+ + A_- = \frac{g_{k+}}{1 - 2\pi i\eta_+} + \frac{g_{k-}}{1 + 2\pi i\eta_-}, \tag{2.3.67}$$

desde que  $1 \mp 2\pi i\eta_{\pm}(\nu)$  não possua raízes no plano superior (+) ou inferior (-) do plano dos  $\nu$  complexos [35], o que é automaticamente garantido pela nossa presunção de uma função de equilíbrio (cujos efeitos estão contidos em  $\eta$ ) estável [64].

Inserindo agora (2.3.67) em (2.3.60) e integrando em relação a  $u$ , obtemos a densidade

$$n(x, t) = \int \int \left( \frac{g_{k+}}{1 - 2\pi i\eta_+} + \frac{g_{k-}}{1 + 2\pi i\eta_-} \right) \exp[ik(x - \nu t)] dk d\nu, \tag{2.3.68}$$

que nos dá o campo elétrico

$$E(x, t) = \frac{e}{\varepsilon_0} \int \int \frac{i}{k} \left( \frac{g_{k+}}{1 - 2\pi i\eta_+} + \frac{g_{k-}}{1 + 2\pi i\eta_-} \right) \exp[ik(x - \nu t)] dk d\nu. \tag{2.3.69}$$

O lema de Riemann-Lebesgue nos diz que a transformada de Fourier de uma função Lebesgue integrável é 0 no infinito [65]. Esse é exatamente o caso do campo elétrico  $E(x, t)$  acima, que se anula para  $x \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Esse resultado é conhecido como mistura de fases [32], [64], [62], e dá uma nova interpretação ao amortecimento de Landau. Embora os modos de van Kampen individuais não sejam amortecidos, a mistura de diversos modos, correspondentes a diferentes  $\nu$  para um mesmo  $k$ , leva ao amortecimento da perturbação para tempos assintóticos.



## 3 Plasmas Quânticos

### 3.1 Tratamento de Landau

O análogo quântico do sistema de Vlasov-Poisson para uma dimensão é o sistema de Wigner-Poisson [44], dado pela equação de Vlasov quântica

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial F}{\partial x} = \int dv' K_\phi [\phi |v' - v, x, t] F(x, v', t) \quad (3.1.1)$$

e pela equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{e}{\varepsilon_0} \left( \int dv F(x, v, t) - n_0 \right), \quad (3.1.2)$$

em que o funcional  $K_\phi [\phi |v' - v, x, t]$  é igual à

$$K_\phi [\phi |v' - v, x, t] = \frac{iem}{\hbar} \int \frac{ds}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{im(v' - v)s}{\hbar}\right) \times \left( \phi\left(x + \frac{s}{2}, t\right) - \phi\left(x - \frac{s}{2}, t\right) \right). \quad (3.1.3)$$

A função  $F(x, v, t)$ , que descreve o estado do plasma, não é mais uma distribuição de probabilidades no sentido convencional, mas uma distribuição quasiprobabilística de Wigner (que iremos, por economia, doravante chamar apenas de “função de Wigner”), definidas para a função de onda  $\Psi(x, t)$  como

$$F(x, p, t) = \frac{m}{2\pi\hbar} \int ds \exp\left(\frac{imvs}{\hbar}\right) \Psi^*\left(x + \frac{s}{2}, t\right) \Psi\left(x + \frac{s}{2}, t\right). \quad (3.1.4)$$

A função de Wigner pode assumir valores negativos, e por isso não é uma distribuição de probabilidades, mas ela pode ser usada da mesma forma que uma distribuição de probabilidades comum para calcular momentos como a densidade e a corrente de probabilidade, respectivamente

$$n(x, t) = \int dv F(x, v, t), \quad (3.1.5)$$

$$J(x, t) = \int dv F(x, v, t)v. \quad (3.1.6)$$

A escolha pela notação em uma dimensão é meramente questão de conveniência, uma vez que, quando necessário, é possível facilmente generalizar para três dimensões.

Como no caso clássico, vamos considerar que o plasma é descrito por uma função  $F(x, v, t) = f_0(v) + f(x, v, t)$ . Fazendo agora a transformada de Fourier no espaço,

$$f(x, v, t) = \int f_k(v, t) e^{ikx} dk, \quad (3.1.7)$$

$$\phi(x, t) = \int \phi_k(t) e^{ikx} dk, \quad (3.1.8)$$

substituindo no sistema (3.1.1)-(3.1.2) e linearizando, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_k}{\partial t} + ikvf_k &= \frac{iem}{\hbar} \phi_k(t) \int dv' f_0(v') \int \frac{ds}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{im(v'-v)s}{\hbar}\right) \times (e^{iks/2} - e^{-iks/2}) = \\
&= \frac{iem}{\hbar} \phi_k(t) \int dv' f_0(v') \times \\
&\quad \times \int \frac{ds}{2\pi\hbar} \left\{ \exp\left[i\left(v'-v + \frac{\hbar k}{2m}\right) \frac{ms}{\hbar}\right] - \exp\left[i\left(v'-v - \frac{\hbar k}{2m}\right) \frac{ms}{\hbar}\right] \right\} = \\
&= -\frac{ie}{\hbar} \phi_k(t) \int dv' f_0(v') \left[ \delta\left(v'-v + \frac{\hbar k}{2m}\right) - \delta\left(v'-v - \frac{\hbar k}{2m}\right) \right] = \\
\frac{\partial f_k}{\partial t} + ikvf_k &= \frac{ie}{\hbar} \phi_k(t) \left[ f_0\left(v + \frac{\hbar k}{2m}\right) - f_0\left(v - \frac{\hbar k}{2m}\right) \right], \tag{3.1.9}
\end{aligned}$$

$$-k^2 \phi_k(t) = \frac{e}{\varepsilon_0} \int dv f_k(v, t). \tag{3.1.10}$$

Em concordância ao que realizamos para um plasma clássico, vamos considerar o problema de valor inicial  $f_k(v, 0) = g(v)$ , definir as transformadas de Laplace

$$\begin{aligned}
f_p(v) &= \int_0^\infty f_k e^{-pt} dt, \\
\phi &= \int_0^\infty \phi_k e^{-pt} dt,
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

multiplicar (3.1.9) e (3.1.10) por  $e^{-pt}$  e integrar de 0 ao infinito para obter o sistema

$$(p + ikv)f_p(v) + \frac{ie}{\hbar} \phi_p \left[ f_0\left(v + \frac{\hbar k}{2m}\right) - f_0\left(v - \frac{\hbar k}{2m}\right) \right] = g, \tag{3.1.12}$$

$$-k^2 \phi_p = \frac{e}{\varepsilon_0} \int dv f_p(v, t); \tag{3.1.13}$$

Repare a leitora ou o leitor que, no limite  $\hbar \rightarrow 0$ , o sistema acima se torna o sistema (2.1.18), como era de se esperar. Isolando  $f_p(v)$  e substituindo na expressão para  $\phi_p$  obtemos, respectivamente,

$$f_p(v) = \frac{g - \frac{ie}{\hbar} [f_0(v + \hbar k/2m) - f_0(v - \hbar k/2m)] \phi_p}{p + ikv} \tag{3.1.14}$$

e

$$\phi_p = \frac{e}{k^2 \varepsilon_0} \frac{\int \frac{g(v)}{p + ikv} dv}{1 - \frac{ie^2}{\hbar k^2 \varepsilon_0} \int \frac{f_0(v + \hbar k/2m) - f_0(v - \hbar k/2m)}{p + ikv} dv}. \tag{3.1.15}$$

Definindo a permissividade elétrica de um plasma quântico  $\varepsilon_Q$  na forma

$$\varepsilon_Q \equiv 1 - \frac{im\omega_P^2}{n_0 \hbar k^2} \int \frac{f_0(v + \hbar k/2m) - f_0(v - \hbar k/2m)}{p + ikv} dv, \tag{3.1.16}$$

podemos escrever (3.1.15) como

$$\phi_p = \frac{e}{k^2 \varepsilon_0} \frac{1}{\varepsilon_Q} \int \frac{g(v) dv}{p + ikv}. \tag{3.1.17}$$



O cálculo a partir daqui é idêntico ao realizado na seção 1.1, e será ignorado por questão de brevidade. Fazendo as contas, obtemos a relação de dispersão [44]

$$\omega^2 = \omega_P^2 + 3k^2 \langle v^2 \rangle + \frac{\hbar^2 k^4}{4m^2}, \quad (3.1.18)$$

conhecida como relação de dispersão de Bohm-Pines, o equivalente da relação de Bohm-Gross (2.1.34) para um gás de elétrons degenerados; e a taxa de amortecimento quântica  $\gamma_Q$  [44]

$$\gamma_Q = -\frac{\pi\omega_P^3}{4n_0k^2} \left( \frac{f_0(ip/k + \hbar k/2m) - f_0(ip/k - \hbar k/2m)}{\hbar k/2m} \right). \quad (3.1.19)$$

Imediatamente é possível notar que, no limite  $\hbar \rightarrow 0$ , ambos os resultados se tornam suas contrapartes clássicas, isso é, (3.1.18) se torna (2.1.34) e (3.1.19), a taxa de amortecimento de Landau (2.1.35).

## 3.2 Tratamento de van Kampen

Vamos agora partir das equações (3.1.9) e (3.1.10)

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + ikvf_k = -\frac{ie}{\hbar}\phi_k(t) \left[ f_0 \left( v + \frac{\hbar k}{2m} \right) - f_0 \left( v - \frac{\hbar k}{2m} \right) \right], \quad (3.1.9)$$

$$-k^2\phi_k(t) = \frac{e}{\varepsilon_0} \int dv f_k(v, t). \quad (3.1.10)$$

Vamos, como para o caso clássico, isolar  $\phi_k(t)$  para obter

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + ikvf_k = \frac{ie^2}{\hbar k^2 \varepsilon_0} \left[ f_0 \left( v + \frac{\hbar k}{2m} \right) - f_0 \left( v - \frac{\hbar k}{2m} \right) \right] \int dv' f_k(v', t) \quad (3.2.1)$$

e realizar a transformação de Fourier no tempo

$$f_k(v, t) = \int f_\omega(v) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.2.2)$$

para obter, por fim

$$(kv - \omega)f_\omega = \frac{m\omega_P^2}{n_0\hbar k^2} \left[ f_0 \left( v + \frac{\hbar k}{2m} \right) - f_0 \left( v - \frac{\hbar k}{2m} \right) \right] \int dv' f_\omega(v'). \quad (3.2.3)$$

Escolhendo a normalização

$$\int dv f_\omega(v) = 1, \quad (3.2.4)$$

e definindo  $\nu = \omega/k$ , podemos escrever a equação acima como

$$(v - \nu)f_\omega(v) = -\eta_Q(v), \quad (3.2.5)$$

sendo a função eta de Case quântica  $\eta_Q(v)$  definida como

$$\eta_Q(v) = -\frac{m\omega_P^2}{n_0\hbar k^3} \left[ f_0 \left( v + \frac{\hbar k}{2m} \right) - f_0 \left( v - \frac{\hbar k}{2m} \right) \right]. \quad (3.2.6)$$

Fazendo o limite clássico  $\hbar \rightarrow 0$  em  $\eta_Q(v)$ , obtemos

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \eta_Q(v) = -\frac{\omega_P^2}{k^2 n_0} \frac{df_0(v)}{dv}. \quad (3.2.7)$$

Por completeza de argumento, vamos calcular a função eta de Case clássica  $\eta_C(v)$  para o caso unidimensional. O sistema de Vlasov-Poisson se torna

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{df_0}{dv} = 0, \quad (3.2.8a)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{e}{\varepsilon_0} \int dv f_1(x, v, t). \quad (3.2.8b)$$

Fazendo as expansões  $f_1(x, v, t) = f_\omega(v) e^{i(kx - \omega t)}$  e  $\phi(x, t) = \phi_\omega e^{i(kx - \omega t)}$  e inserindo no sistema acima, nós obtemos

$$(kv - \omega) f_\omega(v) + \frac{ek}{m} \phi_\omega \frac{df_0}{dv} = 0, \quad (3.2.9a)$$

$$-k^2 \phi_\omega = \frac{e}{\varepsilon_0} \int dv f_\omega(v). \quad (3.2.9b)$$

Eliminando  $\phi_\omega$  mutuamente, obtemos

$$(v - \omega/k) f_\omega(v) = \frac{\omega_P^2}{k^2 n_0} \frac{df_0}{dv} \int dv' f_\omega(v'), \quad (3.2.10)$$

o que sugere que, no caso unidimensional,

$$\eta_C(v) = -\frac{\omega_P^2}{k^2 n_0} \frac{df_0}{dv} = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \eta_Q(v), \quad (3.2.11)$$

o que demonstra que, para  $\hbar \rightarrow 0$ ,  $\eta_Q(v) \rightarrow \eta_C(v)$ .

Temos, com isso, que a equação (3.2.6) é idêntica à equação (2.3.9) e, portanto, as soluções  $f_{\nu Q}(v)$  possuem a mesma forma do modos de Case-van Kampen clássicos  $f_\nu(u)$  e uma mesma primeira análise pode ser feita.

Em particular, isso sugere uma interpretação física similar, de que nos modos quânticos o termo do valor principal representa os elétrons livres, enquanto a delta de Dirac representa um feixe de elétrons aprisionados, responsáveis pela singularidade que surge na matemática do tratamento de Landau. Deve ser levado em consideração, no entanto, que, diferentemente do caso clássico, aqui os elétrons podem tunelar, escapando da região de confinamento. Mais investigações nesse sentido seriam necessárias.

Vale a pena enfatizar, no entanto, de que os modos clássicos e quânticos não são idênticos, *stricto sensu*. Embora ambos possuam a mesma forma

$$f(v) = -\eta(v) \frac{\mathcal{P}}{v - \nu} + \left( 1 + \mathcal{P} \int \frac{\eta_C(v')}{v' - \nu} dv' \right) \delta(v - \nu), \quad (3.2.12)$$

explicitando as funções eta de Case  $\eta_C(u)$  e  $\eta_Q(v)$ , temos

$$f_{\nu C}(u) = \frac{\omega_P^2}{k^2 n_0} \frac{\partial f_{0z}(u)}{\partial u} \left( \frac{\mathcal{P}}{u - \nu} \right) + \left( 1 - \frac{\omega_P^2}{k^2 n_0} \int \frac{\partial f_{0z}/\partial u'}{u' - \nu} du' \right) \delta(u - \nu), \quad (3.2.13)$$

$$f_{\nu Q}(v) = -\frac{m\omega_P^2}{n_0\hbar k^3} \left[ f_0\left(v + \frac{\hbar k}{2m}\right) - f_0\left(v - \frac{\hbar k}{2m}\right) \right] \left( \frac{\mathcal{P}}{v - \nu} \right) + \left( 1 + \frac{m\omega_P^2}{n_0\hbar k^3} \mathcal{P} \int \frac{f_0(v' + \hbar k/2m) - f_0(v' - \hbar k/2m)}{v' - \nu} dv' \right) \delta(v - \nu), \quad (3.2.14)$$

sendo

$$f_{0z}(u) = \int f_0(\mathbf{v}) dv_x dv_y. \quad (3.2.15)$$

Já demonstramos que  $\eta_Q(v) \rightarrow \eta_C(u)$  quando  $\hbar \rightarrow 0$ , de modo que (3.2.14) tende a (3.2.13) no mesmo limite. As  $f_0$  também não são as mesmas. Para plasmas clássicos, o comum é se escolher como função de equilíbrio a distribuição de Maxwell-Boltzmann

$$f_0(\mathbf{v}) = f_{MB}(v) = n_0 \left( \frac{m\beta}{2\pi} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\beta v^2}{2}\right), \quad (3.2.16)$$

sendo  $\beta = (\kappa_B T)^{-1}$ , em que  $\kappa_B$  é a constante de Boltzmann e  $T$ , a temperatura. Já para um gás de férmions degenerado em um semi-condutor que obedece um Hamiltoniano do tipo  $H = \mathcal{E}(\mathbf{p}) + \Phi$ , sendo o potencial  $\Phi$  constante (como no nosso caso de um fundo de íons imóveis), partindo do operador densidade no espaço de Hilbert e o transformando segundo a correspondência de Weyl, Camiola, Luca e Romano [66] acharam o seguinte par de expressões para a função de Wigner no espaço de Fourier das velocidades em três dimensões:

$$f_{0+}(v) = -\frac{e^{-\beta(\mathcal{E} + \Phi - \Phi_F)}}{\beta \sqrt{\frac{\mathcal{E} + \Phi - \Phi_F}{(2\pi)^3}}} I_1 \left( \beta \sqrt{\frac{\mathcal{E} + \Phi - \Phi_F}{(2\pi)^3}} \right) + \delta(\beta) + \frac{1}{\mathcal{E} + \Phi + \Phi_F} \delta'(\beta), \quad (3.2.17a)$$

$$f_{0-}(v) = \frac{e^{-\beta(\mathcal{E} + \Phi - \Phi_F)}}{\beta \sqrt{\frac{\mathcal{E} + \Phi - \Phi_F}{(2\pi)^3}}} I_1 \left( \beta \sqrt{\frac{\mathcal{E} + \Phi - \Phi_F}{(2\pi)^3}} \right), \quad (3.2.17b)$$

sendo  $\Phi_F$  o semi-nível de Fermi e  $I_1(x)$  é a função modificada de Bessel da primeira espécie de ordem 1. Os autores descartaram (3.2.17a) como desprovida de significado físico devido à presença das deltas de Dirac, mas, devido à forma dos nossos modos de Case-van Kampen, é bem possível que essa expressão seja correta, o que demandaria mais investigações que fogem ao escopo do trabalho atual.

### 3.3 Espaço de Hilbert

A função de Wigner  $f(x, v)$  é a representação no espaço de fase do operador densidade  $\rho$  do espaço de Hilbert [67], e esta pode ser obtida daquela para um espaço  $2n$ -dimensional a partir da fórmula

$$\rho(t) = m \int d^n s \int \int d^n x d^n v \left| x + \frac{s}{2} \right\rangle f(x, v, t) e^{imv \cdot s / \hbar} \left\langle x - \frac{s}{2} \right|, \quad (3.3.1)$$

que é um caso especial da correspondência de Weyl. Para as nossas funções

$$f(x, v, t) = \sum_k f_k(v, t) e^{ikx} = \sum_k \sum_j a_j e^{ik(x-\nu_j t)} f_j(v) + \int \int A(\nu) e^{ik(x-\nu t)} f_\nu(v) dk d\nu, \quad (3.3.2)$$

temos que a fórmula acima se torna

$$\begin{aligned} \rho(t) = m \int d^n s \int \int d^n x d^n v \left| x + \frac{s}{2} \right\rangle & \left[ \sum_k \sum_j a_j e^{ik(x-\nu_j t)} f_j(v) + \right. \\ & \left. + \int \int A(\nu) e^{ik(x-\nu t)} f_\nu(v) dk d\nu \right] e^{imv \cdot s / \hbar} \left\langle x - \frac{s}{2} \right|. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Como estamos trabalhando com a função de Wigner de um único corpo, que confinamos a uma dimensão,  $n = 1$ , e obtemos

$$\begin{aligned} \rho(t) = m \int ds \int \int dx dv \left| x + \frac{s}{2} \right\rangle & \left[ \sum_k \sum_j a_j e^{ik(x-\nu_j t)} f_j(v) + \right. \\ & \left. + \int \int A(\nu) e^{ik(x-\nu t)} f_\nu(v) dk d\nu \right] e^{imv \cdot s / \hbar} \left\langle x - \frac{s}{2} \right| = \\ \rho(t) = m \int ds \int \int dx dv \left| x + \frac{s}{2} \right\rangle & e^{imv \cdot s / \hbar} \left[ - \sum_k \sum_j a_j e^{ik(x-\nu_j t)} \frac{\eta_Q(v)}{v - \nu_j} + \right. \\ & \left. + \int \int A(\nu) e^{ik(x-\nu t)} \left( -\mathcal{P} \frac{\eta_Q(v)}{v - \nu} + \lambda(\nu) \delta(v - \nu) \right) dk d\nu \right] \left\langle x - \frac{s}{2} \right|. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

A fórmula acima é geral e depende da função de equilíbrio original, mas a princípio expressa corretamente o operador densidade na representação da posição do espaço de Hilbert de uma perturbação formada pela mistura de modos de Case-van Kampen quânticos, e dele podemos extrair as informações termodinâmicas da perturbação.

Para o caso estável, no qual  $a_j = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \rho(t) = m \int ds \int \int dx dv \left| x + \frac{s}{2} \right\rangle & e^{imv \cdot s / \hbar} \times \\ & \times \int \int A(\nu) e^{ik(x-\nu t)} \left( -\mathcal{P} \frac{\eta_Q(v)}{v - \nu} + \lambda(\nu) \delta(v - \nu) \right) dk d\nu \left\langle x - \frac{s}{2} \right|. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Pelo lema de Riemann-Lebesgue, temos que  $\rho(t) \rightarrow 0$  a medida que  $t \rightarrow \infty$ , como era de se esperar, demonstrando que a forma dos modos de Case-van Kampen no espaço de Hilbert encerram em si o amortecimento de Landau, ao menos para o caso de equilíbrio estável.

Mais investigações, que fogem ao escopo desse trabalho, seriam necessárias para determinar as propriedades gerais de (3.3.4) e comparar as previsões extraídas dessa com os resultados já consagrados da literatura sobre a função densidade de plasmas quânticos.

Questões interessantes seriam estudar se é possível se obter a taxa de amortecimento quântica (3.1.19) a partir de (3.3.4) e seu comportamento para  $\hbar \rightarrow 0$ .

Outra questão interessante seria usar a correspondência de Weyl que mapeia uma função  $g(x, p)$  no espaço de fase para um operador  $\mathcal{O}(\mathfrak{x}, \mathfrak{p})$  no espaço de Hilbert, sendo  $\mathfrak{x}$  e  $\mathfrak{p}$  os operadores de posição e momento, respectivamente [67],

$$\mathcal{O}(\mathfrak{x}, \mathfrak{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int g(x, p) \exp [i\tau(\mathfrak{p} - p) + i\sigma(\mathfrak{x} - x)] d\tau d\sigma dx dp \quad (3.3.6)$$

para o operador de Case  $g(x, p) = p/m - \nu$ , e estudar seus autovalores e autovetores.



## 4 Conclusão

Começamos o trabalho fazendo uma revisão dos resultados clássicos. Em primeiro lugar estudamos o tratamento de Landau para o sistema de Vlasov-Poisson linearizado. Para uma plasma inicialmente em equilíbrio estável que sofreu uma pequena perturbação, fizemos a suposição de que o estado inicial era conhecido e expandimos o sistema em uma série de Fourier no espaço para, em seguida, fazer uma transformada de Laplace, mudando do espaço dos tempos  $t$  para o espaço das frequências complexas  $p$ . Com isso, conseguimos chegar a uma expressão para o potencial da perturbação e para a permissividade elétrica do plasma. A expressão para o potencial pode ser estudada para tempos assintóticos fazendo a transformação reversa, que terá seu comportamento para  $t \rightarrow \infty$  dominado pelos resíduos do potencial no espaço dos  $p$ , cujas singularidades são as raízes da permissividade. Fazendo algumas suposições sobre as singularidades, que são equivalentes à fazer considerações sobre a forma do equilíbrio, obtemos como resultado para o potencial no espaço dos  $t$  é uma função que decai exponencialmente para tempo crescente, no fenômeno conhecido como amortecimento de Landau. A partir do estudo das raízes da permissividade elétrica, obtemos uma relação de dispersão para tempos assintóticos. Para ondas de alta frequência, encontramos as famosas ondas de Langmuir, que vibram com frequência  $\omega_p$ . Na próxima correção, encontramos a relação de dispersão conhecida como relação de dispersão de Bohm-Gross. Conseguimos também calcular a taxa de decremento da perturbação, conhecida como taxa de amortecimento de Landau.

Em seguida estudamos os modos de Bernstein-Greene-Kruskal, ou modos BGK, soluções não lineares do sistema de Vlasov-Poisson dadas em termo da energia total. Seguindo a teoria de Bernstein, Greene e Kruskal, incluímos no cálculo os efeitos dos elétrons aprisionados, elétrons de baixa energia que, como o nome indica, estão aprisionados “abaixo” dos picos do potencial ao qual estão sujeitos. No referencial do laboratório, o elétron aprisionado alterna entre posições de fase oposta, enquanto que, no referencial da onda, oscila. Essa inclusão transforma a equação de Poisson em uma equação íntegro-diferencial, que pode ser encarada tanto como uma equação diferencial para o potencial gerado por uma distribuição conhecida de elétrons e íons, quanto como uma equação integral para a função de distribuição dos elétrons aprisionados, para uma densidade de carga e distribuição dos íons e dos elétrons livres conhecidas. Seguimos por esta última abordagem e, através da transformada de Laplace, conseguimos chegar em uma expressão não linear para a distribuição de probabilidade dos elétrons aprisionados em função de sua energia total, expressão essa conhecida como modo BGK, que não apresenta amortecimento. Ao fazer o limite de baixas amplitudes, chegamos em uma expressão que também não apresenta amortecimento de Landau.

Para resolver esse aparente paradoxo, mudamos o tema da revisão para o trata-

mento matemático de van Kampen. Assim como no caso do tratamento de Landau, nós começamos expandindo o sistema numa série de Fourier no espaço. Ao contrário do que fez Landau, no entanto, eliminamos mutuamente o potencial entre as equações de Vlasov e de Poisson e fizemos uma transformada de Fourier temporal na equação resultante. Com isso, conseguimos uma equação integral para a distribuição dos elétrons. Normalizando a distribuição à unidade e definindo a função  $\eta$  de Case, que contém os efeitos da distribuição de equilíbrio, obtemos uma equação dependente da velocidade de fase do elétron com forma similar a uma equação de autovalor, a equação de “autovalores” de Case. A solução deve atender à normalização adotada, e as soluções que atendem essa condição, conhecidas como modos de Case-van Kampen, possuem uma parte principal, dependente das condições de equilíbrio, e uma “função” delta de Dirac, sendo esta pesada por uma função da velocidade de fase. De posse dos modos de Case-van Kampen, provamos que eles são ortogonais entre si e que, portanto, eles podem ser usados como uma base para decompor qualquer oscilação arbitrária. A interpretação física dos modos foi estudada ao se olhar de novo para o limite linear dos modos BGK para os elétrons aprisionados e constatando que ele leva a modos que também possuem um termo de delta de Dirac, indicando que o termo principal se refere à contribuição dos elétrons livres, enquanto o termo da delta representa a contribuição dos elétrons com velocidade próxima à velocidade de fase que se encontram aprisionados. Apesar dos modos individuais não serem amortecidos, nós demonstramos através do lema de Riemann-Lebesgue que a soma desses modos leva ao amortecimento de uma perturbação inicial para tempos assintóticos.

Em seguida começamos uma revisão do tratamento de Landau quando aplicado a sistemas quânticos descritos pelo sistema de Wigner-Poisson, cujos resultados já eram conhecidos da literatura. Assim como no caso clássico, expandimos a distribuição (neste caso, uma função de Wigner) dos elétrons em uma série de Fourier no espaço e fizemos uma transformada de Laplace temporal. O procedimento matemático adotado foi o mesmo, definindo uma permissividade elétrica e fazendo a transformada inversa de Laplace para estudar o comportamento assintótico do sistema, que apresenta amortecimento da perturbação. Estudando as raízes da permissividade, encontramos a função de dispersão de Bohm-Pines, que se reduz à função de dispersão de Bohm-Gross no limite  $\hbar \rightarrow 0$ , bem como uma taxa de amortecimento que também se reduz à sua contraparte clássica no mesmo limite.

Diferentemente do caso clássico, não exploramos os modos BGK quânticos (ou modos QBGK) por não serem tão pertinentes à discussão quanto seus equivalentes clássicos, que nos ajudaram a elucidar o significado físico dos modos de Case-van Kampen, mas nada nos impede de tecer alguns comentários a respeito do assunto agora. A literatura sobre os modos QBGK é relativamente parca. Lange, Toomire e Zweifel [68] demonstraram que o sistema de Wigner-Poisson com condições de contorno periódicas sempre possui soluções de equilíbrio únicas em termo de alguma constante de movimento, e chamaram essas



soluções de modos BGK quânticos, ou modos QBGK. Demeio [69] expandiu a ideia aplicando métodos perturbativos próximos à solução clássica e estudou as órbitas resultantes no espaço de fase, concluindo que algumas possuem apenas uma pequena correção em relação à órbita clássica, enquanto outras apresentavam forte comportamento quântico. Haas e Shukla [70] obtiveram soluções não-lineares exatas dos modos QBGK propostos por Lange, Toomire e Zweifel para a equação de Vlasov quântica e para o sistema de Wigner-Poisson unidimensionais. Mais recentemente, Haas [71] estudou soluções do sistema de Wigner-Poisson unidimensional dadas em função da energia e demonstrou que, no limite semi-clássico, elas podem ser expandidas em uma série infinita imediatamente integrável em uma cadeia recursiva de quadraturas. Em uma análise distinta, Haas, Manfredi e Feix [72] estudaram soluções estacionárias para plasmas de um e dois feixes governados pelo sistema de Schrödinger-Poisson, que podem ser considerados como análogos quânticos dos modos BGK clássicos.

Voltando ao trabalho, aplicamos o tratamento de van Kampen ao sistema de Wigner-Poisson. Assim como no caso do tratamento de Landau, conseguimos, apesar da diferença em forma das equações de Vlasov clássica e quântica, aplicar o mesmo tratamento matemático, isto é, expandimos a função de Wigner dos elétrons em séries de Fourier no espaço e no tempo; definimos uma função  $\eta$ , que se reduz à sua contraparte clássica no limite  $\hbar \rightarrow 0$ ; e normalizamos a amplitude da expansão à unidade. Com isso, obtivemos modos de Case-van Kampen quânticos idênticos em forma aos modos clássicos, embora, obviamente, distintos, uma vez que suas funções  $\eta$  não são idênticas.

Por fim, tecemos breves comentários à respeito da natureza dos modos de Case-van Kampen quânticos no espaço de Hilbert convencional. Nós deduzimos uma forma geral para o operador densidade da perturbação a partir da transformada de Weyl-Wigner dos modos de Case-van Kampen quânticos. Demonstramos que, graças ao lema de Riemann-Lebesgue, o operador densidade tende a se anular para tempos assintóticos.

Nossos resultados abrem uma interessante via de investigação na área de plasmas quânticos, que seria o estudo dos diversos cenários para os quais modos de Case-van Kampen clássicos se mostraram úteis, como os exemplos citados no Capítulo 1. Outro futuro ramo de pesquisa possível é estudar a relação dos resultados obtidos com os já conhecidos por outros métodos, como [39], [52], e [53]; a comparação com os resultados obtidos por simulações numéricas.



# Referências

- 1 LANDAU, L. D. On the vibration of the electronic plasma. *Journal of Physics (URSS)*, v. 10, p. 25–34, 1965.
- 2 MALMBERG, J. H.; WHARTON, W. B. Collisionless damping of electrostatic plasma waves. *Phys. Rev. Lett.*, v. 13, n. 6, p. 184–186, 1964.
- 3 RYUTOV, D. D. Landau damping: half a century with great discovery. *Plasma Phys. Control. Fusion*, v. 41, p. A1–A12, 1999.
- 4 ANDERSON, D.; FEDELE, R.; M, L. A tutorial presentation of the two stream instability and Landau damping. *Am. J. Phys.*, v. 69, n. 12, p. 1262–1266, 2001.
- 5 GOSWAMI, P.; PASSOT, T.; SULEM, P. L. A Landau fluid model for warm collisionless plasmas. *Phys. Plasmas*, v. 12, n. 10, 2005.
- 6 BONDESON, A.; CHU, M. S. Inertia and ion Landau damping of low-frequency magnetohydrodynamical modes in tokamaks. *Phys. Plasmas*, v. 3, n. 8, p. 3013–3022, 1996.
- 7 PASSOT, T.; SULEM, P. L. A fluid description for Landau damping of dispersive mhd waves. *Nonlin. Processes Geophys.*, v. 11, n. 2, p. 245–258, 2004.
- 8 HUNANA, P. et al. Reduction of compressibility and parallel transfer by Landau damping in turbulent magnetized plasmas. *Astrophys. J.*, v. 743, n. 2, p. 128, 2011.
- 9 SWANSON, D. G. *Plasma Waves*. Londres: IOP Publishing, 2003.
- 10 ZAKERI-KHATIR, H.; AGHAMIR, F. M. Landau damping in a bounded magnetized plasma column. *Chin. Phys. B*, v. 24, n. 2, 2015.
- 11 PÉCSELI, H. L.; RASMUSSEN, J. J. Nonlinear electron waves in strongly magnetized plasmas. *Plasma Phys.*, v. 22, p. 421–438, 1980.
- 12 PAOLONI, F. J. et al. Landau damping of low- and high-power slow electrostatic waves. *Phys. Rev. Letters*, v. 39, n. 17, p. 1081–1084, 1977.
- 13 ARMSTRONG, R. J.; WEBER, W. J.; TRULSEN, J. Collisional and Landau damping of ion-acoustic waves in a two electron temperature plasma. *Phys. Lett. A*, v. 74, n. 5, p. 319–322, 1979.
- 14 IZEKI, H.; KIWAMOTO, Y. Observations of nonlinear Landau damping of ion-acoustic waves. *Phys. Rev. Letters*, v. 27, n. 11, p. 718–721, 1971.
- 15 GHOSH, S.; BHARUTHRAM, R. Ion acoustic solitary wave in electron-positron-ion plasma: effect of Landau damping. *Astrophys. Space Sci.*, v. 331, n. 1, p. 163–168, 2010.
- 16 PARKINSON, D.; SCHINDLER, K. Landau damping of long wavelength ion acoustic waves in a collision-free plasma with a gravity field. *J. Plasma Phys.*, v. 3, n. 1, p. 13–20, 1969.

- 17 LEE, M.-J.; JUNG, Y.-D. Temperature effects on the propagation and Landau damping of the dust surface waves. *Phys. Plasmas*, v. 26, 2019.
- 18 LERCHE, I.; SCHILICKEISER, R. Linear Landau damping and wave energy dissipation in the interstellar medium. *Astron. Astrophys.*, v. 366, n. 3, p. 1008–1015, 2001.
- 19 J, B.; INAN, U. S.; F, B. T. Landau damping and resultant unidirectional propagation of chorus waves. *Geophys. Res. Lett.*, v. 33, n. 3, 2006.
- 20 SHAHMANSOURI, M.; LEE, M.-J.; JUNG, Y.-D. Anisotropic temperature effects on Landau damping in kappa–maxwellian astrophysical plasmas. *Astropart. Phys.*, v. 120, 2020.
- 21 XIAOFEI, Z.; JIARONG, L. Nonlinear Landau damping in quark-gluon plasma. *Phys. Rev. C*, v. 52, n. 2, p. 964–974, 1995.
- 22 GORDON, B. et al. Transverse interactions and transport in relativistic quark-gluon and electromagnetic plasmas. *Phys. Rev. Lett.*, v. 64, n. 16, p. 1867–1870, 1990.
- 23 KANDRUP, H. E. Violent relaxation, phase mixing, and gravitational Landau damping. *Astrophys. J.*, v. 500, n. 1, p. 120–128, 1998.
- 24 MORETTI, F.; BOMBACIGNO, F.; MONTANI, G. Gravitational Landau damping for massive scalar modes. *Eur. Phys. J. C*, v. 80, n. 12, 2020.
- 25 PITAEVSKII, L. P.; STRINGARI, S. Landau damping in dilute bose gases. *Phys. Lett. A*, v. 235, n. 4, p. 398–402, 1997.
- 26 NATU, S. S.; WILSON, R. M. Landau damping in a collisionless dipolar bose gas. *Phys. Rev. A*, v. 88, n. 6, 2013.
- 27 ONORATO, M. et al. Landau damping and coherent structures in narrow-banded 1+1 deep water gravity waves. *Phys. Rev. E*, v. 67, n. 4, 2003.
- 28 BUCZEK, P.; ERNST, A.; SANDRATSKII, L. M. Different dimensionality trends in the Landau damping of magnons in iron, cobalt, and nickel: Time-dependent density functional study. *Phys. Rev. B*, v. 84, n. 17, 2011.
- 29 STROGATZ, S. H.; MIROLLO, R. E.; MATTHEWS, P. C. Coupled nonlinear oscillators below the synchronization threshold: Relaxation by generalized Landau damping. *Phys. Rev. Lett.*, v. 68, n. 18, p. 2730–2733, 1992.
- 30 FERNANDEZ, B.; DERARD-VARET, D.; GIACOMIN, G. Landau damping in the Kuramoto model. *Annales Henri Poincaré*, v. 17, p. 1793–1823, 2016.
- 31 QIU, T. et al. Landau damping effects in the synchronization of conformist and contrarian oscillators. *Sci. Rep.*, v. 5, 2016.
- 32 MOUHOT, C.; VILLANI, C. On Landau damping. *Acta Mathematica*, v. 207, n. 1, p. 29–201, 2011.
- 33 DAWSON, J. On Landau damping. *Phys. Fluids*, v. 4, n. 7, p. 869–874, 1961.

- 34 MONTGOMERY, D. C.; TIDMAN, D. A. *Plasma Kinetic Theory*. New York, NY: McGraw-Hill, 1964.
- 35 VAN KAMPEN, N. G. On the theory of stationary waves in plasmas. *Physica*, v. 21, n. 6-10, p. 949–963, 1955.
- 36 CASE, K. M. Plasma oscillations. *Ann. Phys.*, v. 7, n. 3, p. 349–364, 1959.
- 37 BATEMAN, G.; KRUSKAL, M. D. Linear time-dependent Vlasov equation/Case-van Kampen modes. *Phys. Fluids*, v. 15, n. 2, p. 277–283, 1972.
- 38 BEST, R. W. B. Nonlinear Plasma Oscillations in terms of van Kampen Modes. *Physica*, v. 64, p. 387–402, 1973.
- 39 NEMES, M. C.; DE TOLEDO PIZA, A. F. R.; DA PROVIDÊNCIA, J. Van Kampen waves in extended Fermi systems and the Random Phase Approximation. *Physica A*, v. 146, n. 1-2, p. 282–294, 1987.
- 40 MORRISON, P. J.; PFIRSCH, D. Dielectric energy versus plasma energy, and Hamiltonian action-angle variables for the Vlasov equation. *Phys. Fluids B*, v. 4, n. 10, p. 3038–3057, 1992.
- 41 TRACY, E. R.; BRIZARD, A. J.; KAUFMAN, A. N. Generalized Case-van Kampen modes in a multidimensional non-uniform plasma with application to gyroresonance heating. *J. Plasma Phys.*, v. 55, n. 3, p. 449–486, 1996.
- 42 IGNATOV, A. M. Electromagnetic van Kampen Waves. *Plasma Phys. Rep.*, v. 43, n. 1, p. 29–36, 2017.
- 43 TIMOFEEV, A. V. Effect of Collisions on van Kampen Waves. *Plasma Phys. Rep.*, v. 43, n. 5, p. 594–597, 2017.
- 44 HAAS, F. *Quantum Plasmas: An hydrodynamic approach*. New York, NY: Springer, 2011.
- 45 KUMAR, S.; LU, J. Y. Quantum treatment of kinetic Alfvén wave. *Astrophys. Space. Sci.*, v. 341, p. 597–599, 2012.
- 46 MENDONÇA, J. T.; TERÇAS, H.; GAMMAL, A. Quantum Landau damping in dipolar Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, v. 97, 2018.
- 47 MENDONÇA, J. T.; SERBETO, A. Photon and electron Landau damping in quantum plasmas. *Phys. Scr.*, v. 91, n. 9, 2016.
- 48 BRODIN, G.; ZAMANIAN, J.; MENDONÇA, J. T. The transition from the classical to the quantum regime in nonlinear Landau damping. *Phys. Scr.*, v. 90, 2015.
- 49 YANNOULEAS, C.; BROGLIA, R. A. Landau damping and wall dissipation in large metal clusters. *Ann. Phys.*, v. 217, n. 1, p. 105–141, 1992.
- 50 CASTILLO-LÓPEZ, S. G. et al. Electrodynamics of superlattices with ultra-thin metal layers: quantum Landau damping and band gaps with nonzero density of states. *Opt. Mater. Express*, v. 9, n. 2, p. 673–686, 2019.

- 51 SUH, N.-D.; FEIX, M. R.; BERTRAND, P. Numerical simulation of the quantum Liouville-Poisson system. *J. Comput. Phys.*, v. 94, n. 2, p. 403–418, 1991.
- 52 KUZELEV, M. V. On the theory of Langmuir waves in a quantum plasma. *J. Exp. Theor. Phys.*, v. 110, n. 4, p. 710–721, 2010.
- 53 STEFFEN, W.; KULL, H.-J. Relaxation of plasma waves in Fermi-degenerate quantum plasmas. *Phys. Rev E*, v. 93, n. 3, 2016.
- 54 AKHIEZER, A. I. et al. *Plasma Electrodynamics: Volume i: Linear theory*. Oxford: Pergamon, 1975.
- 55 KRALL, N. A.; TRIVELPIECE, A. W. *Principles of Plasma Phys.* New York, NY: McGraw-Hill, 1973.
- 56 VLASOV, A. A. On the vibrational properties of an electron gas. *Soviet Physics Uspekhi*, v. 10, p. 721–733, 1968.
- 57 NICHOLSON, D. R. *Introduction to Plasma Theory*. New York, NY: John Wiley and Sons, 1983.
- 58 ARFKEN, G. B.; WEBER, H.-J. *Mathematical Methods for Physicists*. Amsterdam: Elsevier Acad. Press, 2011.
- 59 WREDE, R. C.; SPIEGEL, M. R. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Advanced Calculus*. New York, NY: McGraw Hill, 2002.
- 60 STIX, T. H. *Waves in plasmas*. New York, NY: American Institute of Physics, 1992.
- 61 BERNSTEIN, I. B.; GREENE, J. M.; KRUSKAL, M. D. Exact nonlinear plasma oscillations. *Phys. Rev.*, v. 108, n. 3, p. 546–550, 1957.
- 62 LAMBERT, A. J. D.; BEST, R. W. B.; SLUIJTER, F. W. Van Kampen and Case formalism applied to linear and weakly nonlinear initial value problems in unmagnetized plasma. *Contrib. Plasma Phys.*, v. 22, p. 101–133, 1982.
- 63 MUSKHELISHVILI, N. I. *Singular Integral Equations: Boundary problems of functions theory and their applications to mathematical physics*. Groningen: Wolters-Noordhoff, 1977.
- 64 PÉCSELI, H. L. Linear plasma oscillation described by superposition of normal modes. *Phys. Fluids*, n. 2, p. 378–383, 1974.
- 65 APOSTOL, T. M. *Mathematical Analysis: Second edition*. Londres: Pearson, 1974.
- 66 CAMIOLA, V. D.; LUCA, L.; ROMANO, V. Equilibrium Wigner function for fermions and bosons in the case of a general energy dispersion relation. *Entropy*, v. 22, n. 9, p. 1023–1035, 2020.
- 67 ZACHOS, C. K.; FAIRLIE, D. B.; CURTRIGHT, T. L. *Quantum mechanics in phase space: An overview with selected papers*. [S.l.]: World Scientific, 2005.
- 68 LANGE, H.; TOOMIRE, B.; ZWEIFEL, P. F. Quantum BGK modes for the Wigner-Poisson system. *Transport Theor. Stat. Phys.*, v. 25, n. 6, p. 713–722, 1996.

- 
- 69 DEMEIO, L. Quantum corrections to classical BGK modes in phase space. *Transport Theor. Stat. Phys.*, v. 36, n. 1-3, p. 137–158, 2007.
- 70 HAAS, F.; SHUKLA, P. K. Nonlinear stationary solutions of the Wigner and Wigner-Poisson equations. *Phys. Plasmas*, v. 15, p. 112302, 2008.
- 71 HAAS, F. Bernstein-Greene-Kruskal approach for the quantum Vlasov equation. *EPL*, v. 132, n. 2, p. 20006, 2020.
- 72 HAAS, F.; MANFREDI, G.; FEIX, M. Multistream model for quantum plasmas. *Phys. Rev. E*, v. 62, n. 2, p. 2763–2772, 2000.