UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS- GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FRANCIELE MARCIANE MEINERZ

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA POR MEIO DO USO DO MATERIAL *ALGEBRA TILES*

Porto Alegre
2020

Franciele Marciane Meinerz

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA POR MEIO DO USO DO MATERIAL *ALGEBRA TILES*

Dissertação apresentada junto ao Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª Drª Luisa Rodríguez Doering

Porto Alegre
2020

Franciele Marciane Meinerz

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA POR MEIO DO USO DO MATERIAL *ALGEBRA TILES*

Dissertação apresentada junto ao Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Luisa Rodríguez Doering

Banca Examinadora:

Prof.ª Dr.ª Carmen Vieira Mathias – UFSM

Prof.ª Dr.ª Cydara Cavedon Ripoll - UFRGS

Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso - UFRGS

Prof.ª Dr.ª Luisa Rodríguez Doering – Orientadora

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e à minha irmã por acreditarem em mim. Obrigada por me incentivarem na busca pelo conhecimento e por me ensinarem a correr atrás dos meus objetivos.

Ao Alexandre, pela companhia, paciência e compreensão. Obrigada por estar sempre ao meu lado, por me incentivar a seguir em frente em busca dos meus e dos nossos sonhos.

À professora Luisa, minha orientadora, por todos os anos de ensinamento, parceria, amizade, convívio e trocas, que vão muito além do período de mestrado. Obrigada por acreditar em mim, por todos os nossos encontros e diálogos, contribuindo para a realização deste trabalho e minha formação acadêmica e docente.

Às professoras Carmen e Cydara, e ao professor Marcus, que aceitaram participar da banca examinadora e contribuir para a qualificação do presente trabalho.

Aos professores do PPG em Ensino de Matemática, da UFRGS, por me ajudarem a crescer como docente, pelo incentivo e reflexões constantes e por todos os ensinamentos.

Aos meus colegas e amigos do grupo de pesquisa Janete e Sandro, que juntamente com as professoras Cydara e Luisa, contribuíram para a minha formação acadêmica e docente com reflexões e diálogos em nossos encontros de estudos.

À coordenação e à direção do colégio em que essa pesquisa foi realizada.

Aos colegas do Colégio Província de São Pedro, principalmente às amigas do grupo de matemática, por todos os nossos diálogos e trocas.

Aos colegas da EMEF Heitor Villa Lobos, por todo o incentivo, e pela companhia na caminhada em busca de uma escola pública e de qualidade.

Aos colegas do mestrado, pelo convívio, companheirismo e por todas as trocas de experiências, que contribuíram ainda mais para a minha formação. Principalmente às amigas Roseane e Daiana, pelas grandes trocas durante o curso.

Finalmente, mas não menos importante, agradeço a todos aqueles que são ou já foram meus alunos, em especial àqueles que participaram da presente pesquisa, por me incentivarem a ser melhor a cada dia como pessoa e como professora, profissão que tanto me realiza.

Resumo: A presente pesquisa investiga como o uso do material manipulativo *Algebra Tiles* pode contribuir para o desenvolvimento, pelos alunos, do procedimento para resolução de equações do primeiro com uma incógnita na resolução de situações-problemas. Para realizar tal investigação foi criada uma sequência de atividades inspirada nas concepções sobre o ensino e aprendizagem de álgebra presentes em Lins e Gimenez (1997) e Usiskin (1995), buscando a transição entre a aritmética e a álgebra. A sequência de atividades foi fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval, a qual também foi utilizada como fundamentação para a análise dos dados obtidos na implementação da sequência. Foi realizada uma investigação matemática em sala de aula, com uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental. A partir da análise dos dados obtidos na pesquisa, observamos que o material manipulativo *Algebra Tiles* pode contribuir para o desenvolvimento do procedimento de resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita, já que, a partir da representação de uma situação-problema com o material e a sua manipulação, pode ser gerado o registro pictórico e, a partir deste último, o registro algébrico, havendo a construção natural de uma equação. Como produto da presente pesquisa (APÊNDICE C), construímos uma sequência de atividades revisada, com comentários e sugestões ao professor.

Palavras-chave: Equações do primeiro grau com uma incógnita; Material manipulativo; *Algebra Tiles*; Resolução de situações-problemas; Representação pictórica; Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval.

ABSTRACT: This research investigates how the use of the Algebra Tiles manipulative material can contribute to the development of the procedure for solving the one-variable linear equations in problem solving by the students. To carry out this investigation, a sequence of activities was created inspired by the concepts of teaching and learning algebra present in Lins and Gimenez (1997) and Usiskin (1995), seeking the transition between arithmetic and algebra. The sequence of activities was based on Duval's Theory of Semiotic Representation Registers, which was also used as a basis for analyzing the data obtained in the implementation of the sequence. A mathematical investigation was carried out in the classroom of a class of sixth year Elementary School. From the analysis of the data obtained in the research, we observed that Algebra Tiles can contribute to the development of the one-variable linear equations solving procedure, since, from the representation of the problem with the material and its manipulation, the pictorial record can be generated, and, from the latter, the algebraic record, with the natural formation of an equation. As a product of this research (APÊNDICE C), we construct a revised sequence of activities, with comments and suggestions to the teacher.

Keywords: One-variable linear equations; Manipulative material; Algebra Tiles; Problem solving; Pictorial representation; Theory of Duval Semiotic Representation Registers.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: As diferentes interpretações da álgebra escolar presentes nos PCN. 20
Figura 2: Exemplo que nos inspirou na utilização de Algebra Tiles para resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita. 34
Figura 3: ilustração dos Algebra Tiles segundo Hall (1999) 35
Figura 4: Algebra Tiles- cores usadas em nossa pesquisa. 36
Figura 5: Propriedade do cancelamento ao unir os pares de elementos opostos. 37
Figura 6: Ilustração do tapetinho para manipulação dos Algebra Tiles. 37
Figura 7: Foto da tela do Ábaco Virtual dos Números Inteiros 45
Figura 8: Atividade 1 48
Figura 9: Resolução Atividade 1 com registro em linguagem natural. 50
Figura 10: Resolução com registros em linguagem natural e numérico. 50
Figura 11: Registro algébrico na Atividade 1. 51
Figura 12: Registro algébrico item b) da Atividade 1. 52
Figura 13: Registros em linguagem materna - Atividade 1- item b. 53
Figura 14: Tabela Atividade 1.1. 54
Figura 15: Material manipulativo: Algebra Tiles. 55
Figura 16: Atividade 2. 56
Figura 17: Atividade 3. 57
Figura 18: Grupo manipulando os Algebra Tiles. 59
Figura 19: Resolução Atividade 1.1 (a) 59
Figura 20: Resolução Atividade 1.1 (a) 60
Figura 21: Resolução Atividade 1.1 (a) 62
Figura 22: Resolução Atividade 1.1 (a) 62
Figura 23: Resolução Atividade 1.1 (b) 63
Figura 24: Resolução Atividade 1.1 (b) 63
Figura 25: Resolução Atividade 1.1 (b) 64
Figura 26: Resolução Atividade 1.1 (b) 65
Figura 27: Resolução Atividade 2 (a) 66
Figura 28: Resolução Atividade 2 (a) 67
Figura 29: Resolução Atividade 2 (a) 67
Figura 30: Resolução Atividade 2 (b) 68
Figura 31: Resolução Atividade 2 (b) 69

Figura 32: Resolução Atividade 2 (c). 69
Figura 33: Resolução Atividade 2 (c). 71
Figura 34: Resolução Atividade 2.1 (a) 72
Figura 35: Resolução Atividade 2.1 (a) 73
Figura 36: Resolução Atividade 2.1 (b) 74
Figura 37: Resolução Atividade 2.1 (c) com uso dos Algebra Tiles. 75
Figura 38: Resolução Atividade 2.1 (c) no documento 76
Figura 39: Resolução Atividade 2.1 (c) 77
Figura 40: Resolução Atividade 3 79
Figura 41: Resolução Atividade 3.1 utilizando Algebra Tiles. 80
Figura 42: Resolução Atividade 3.1 utilizando uma equação do primeiro grau com uma incógnita. 81
Figura 43: Foto do quadro durante o fechamento- Atividade 1.1 (a) 84
Figura 44: Foto do quadro durante o fechamento- Atividade 1.1 (b) 85
Figura 45: Foto do quadro durante o fechamento - Atividade 2.1 (a) 86
Figura 46: Foto do quadro durante o fechamento - Atividade 2.1 (b) 87
Figura 47: Foto do quadro durante o fechamento: Atividade 2.1 (c) 88
Figura 48: Atividade 4 89
Figura 49: Resolução Atividade 4 (a) 91
Figura 50: Grupo apresentando a resolução da Atividade 4 (a) na lousa. 92
Figura 51: Resolução Atividade 4 (b) 93
Figura 52: Grupo apresentando a resolução da Atividade 4 (b) na lousa 93
Figura 53: Resolução da Atividade 4 (c). 95
Figura 54: Grupo apresentando a resolução da Atividade 4 (c) na lousa. 95
Figura 55: Grupo apresentando a resolução da Atividade 4 (d) na lousa. 96
Figura 56: Atividade 5 97
Figura 57: Relembrando os conceitos de equações. 99
Figura 58: Resolução na lousa Atividade 5.1 (b). 99
Figura 59: Verificação Atividade 5.1 (b). 100
Figura 60: Resolução Atividade 5 (a). 101
Figura 61: Resolução Atividade 5 (a). 101
Figura 62: Resolução Atividade 5 (b). 102
Figura 63: Resolução Atividade 5 (b). 102
Figura 64: Resolução Atividade 5.1 (a). 104

Figura 65: Resolução Atividade 5.1 (b)....106
Figura 66: Resolução Atividade 5.1 (b)....107
Figura 67: Resolução Atividade 5.1 (c)....108
Figura 68: Resolução Atividade 5.1 (c)....108
Figura 69: Atividade 6....109
Figura 70: Atividade 7....110
Figura 71: Resolução Atividade 6 (a)....111
Figura 72: Resolução Atividade 6 (b)....112
Figura 73: Resolução Atividade 6 (c)....113
Figura 74: Resoluções Atividade 7 (a)....114
Figura 75: Resolução Atividade 7 (b)....115
Figura 76: Resolução Atividade 7(b)....115
Figura 77: Resolução Atividade 7(c)....117

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Trabalhos correlatos. 27
Quadro 2: Resolução da equação 2x + 3 = 11 utilizando Algebra Tiles. 38
Quadro 3: Resolução da equação -3x + 1 = -5 utilizando Algebra Tiles. 39
Quadro 4: Resolução da equação 2x = 3 utilizando Algebra Tiles. 40
Quadro 5: Resolução da equação $x2 \ = 3$ utilizando Algebra Tiles. 41
Quadro 6: Distribuição dos encontros da implementação. 43

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 12

1.1. Introdução e justificativa 12

1.2. Organização do trabalho 15

2. REVISÃO TEÓRICA 17

2.1. O ensino de álgebra na escola 17

2.2. Teoria dos Registros de Representação Semiótica 23

2.3. Trabalhos correlatos 26

3. *ALGEBRA TILES*: O MATERIAL MANIPULATIVO ESCOLHIDO 33

3.1. Como conhecemos o material e o que escrevem alguns autores 33

3.2. O que são os *Algebra Tiles*? 35

3.3. Como resolver equações do primeiro grau com uma incógnita utilizando os *Algebra Tiles*. 37

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 42

4.1. Metodologia de pesquisa 42

4.2. Metodologia de ação docente 43

4.3. Os participantes da pesquisa e conhecimentos prévios à implementação da sequência de atividades 44

5. RELATO DOS ENCONTROS E ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 48

5.1. Encontro 1 48

5.1.1. Análise da Atividade 1 49

5.2. Encontros 2, 3 e 4 53

5.2.1. Análise da Atividade 1.1 58

5.2.2. Análise da Atividade 2 66

5.2.3. Análise da Atividade 2.1 71

5.2.4. Análise da Atividade 3 78

5.2.5. Análise da Atividade 3.1 80

5.3. Encontro 5 82

5.3.1. Análise do Encontro 5 82

5.4. Encontro 6 89

5.4.1. Análise da Atividade 4 90

5.5. Encontros 7 e 8 97

5.5.1. Análise da Atividade 5 100

5.5.2. Análise da Atividade 5.1 103

5.6. Encontros 9 e 10 109

5.6.1. Análise da Atividade 6 111

5.6.2. Análise da Atividade 7 113

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS 118
REFERÊNCIAS 123
APÊNDICES 125
APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO 126
APÊNDICE B – TERMO DE ASSENTIMENTO INFORMADO 127
APÊNDICE C- PRODUTO TÉCNICO 128

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos a introdução, a justificativa e a estrutura do presente trabalho, especificando o que é abordado em cada capítulo.

1.1. Introdução e justificativa

No ano de 2016, quando iniciei[1] minha jornada como professora, tive o desafio de ensinar equações e inequações do primeiro grau com uma incógnita para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Sem muita experiência, recorri aos livros didáticos para observar como os mesmos apresentavam os conteúdos nas séries finais do Ensino Fundamental. Já naquela época, pude perceber que em alguns deles era apresentada somente a "receita" para a resolução de equações e inequações, sem haver a utilização dos princípios da igualdade e da desigualdade; ou, se os princípios eram utilizados, não haviam justificativas. Isso me incomodou desde então, pois gosto de realizar a construção do conhecimento com meus alunos, dessa forma, fiquei interessada em pesquisar formas de inserir o conteúdo em sala de aula com meus alunos.

Minha ideia inicial para a pesquisa de mestrado era elaborar uma proposta com o ensino concomitante e relacionado de equações e inequações do primeiro grau com uma incógnita, visto que, na análise de alguns livros percebi que inicialmente era apresentado o conteúdo de equações e somente após a finalização do mesmo é que era apresentado o conteúdo de inequações. Segui essa ideia em sala de aula no ano de 2016, contudo, apesar da resolução dessas equações e inequações terem procedimentos similares, os alunos sentiram muitas dificuldades ao resolver inequações e parecia que era tudo novidade no estudo de inequações.

Ao longo de nossa pesquisa percebemos que elaborar, aplicar e analisar uma sequência de atividades com o ensino concomitante, ou relacionado de equações e inequações seria interessante, e continuamos a acreditar nisso, porém, antes de tudo necessitávamos de um estudo de equações mais aprofundado e uma proposta que levasse o aluno a uma compreensão do processo que culminasse no procedimento para a resolução de equações.

A partir da necessidade de auxiliar os alunos na construção do conhecimento, nos anos de 2017 e 2018, busquei meios de introduzir o conteúdo de equações em sala de aula e optei pela balança de dois pratos, que auxilia, na minha opinião, os alunos na dedução para números positivos dos princípios aditivo e multiplicativo da igualdade entre números. Contudo, eu

[1] Na introdução utilizo a primeira pessoa por se tratar da minha trajetória como professora.

iniciava o conteúdo de forma direta, ou seja, apresentando aos alunos as equações e como poderíamos resolvê-las, generalizava os princípios aditivo e multiplicativo, introduzindo o procedimento de resolução de equações por meio do uso da balança de dois pratos. A resolução de problemas era trabalhada após os alunos já saberem como resolver equações. Isso me incomodava, pois parecia que o que estávamos fazendo era totalmente novo, e não estava levando em consideração os conhecimentos prévios dos alunos pois, em geral, os alunos já sabiam resolver algumas equações (sem se dar conta). Por exemplo se perguntarmos a um aluno: "Comprei três canetas iguais por R$12,00. Quanto custou cada uma?", em geral, o mesmo responderá que o valor de cada caneta é R$4,00, fazendo uso da divisão, sem "ter sido apresentado" às equações. O que fazemos, ao estudar equações, é representar simbolicamente sentenças como a acima, de uma forma que permita a resolução de um problema, por meio de propriedades matemáticas, mesmo quando ele se torna mais complexo. Contudo, essa relação entre os conhecimentos já apropriados pelos alunos e os novos conteúdos nem sempre é feita em livros didáticos e em sala de aula, como observamos ao analisar livros do sétimo ano do Ensino Fundamental de diferentes países (Meinerz e Doering, 2019).

Segundo Lins e Gimenez (1997), o ensino e a aprendizagem de álgebra no Ensino Fundamental é um dos momentos de importante complexidade por parte dos professores e estudantes em matemática, no Brasil e também no exterior, sendo que uma das causas para essa complexidade talvez seja reflexo da introdução tardia ao pensamento algébrico em sala de aula e a falta de comunicação entre os conhecimentos prévios dos alunos e a aprendizagem de novos conteúdos. Na nossa opinião, soma-se a isso o modo como é sugerida a introdução às expressões algébricas em livros didáticos brasileiros.

Realizando a leitura das obras de alguns autores, entre eles Lins e Gimenez e Usiskin, notei que os mesmos enfatizam a importância de trabalhar com situações que abordem o cotidiano dos alunos e que tenham significado para os mesmos. Além disso, as tendências em Educação Matemática vêm cada vez mais abordando metodologias que colocam o aluno em foco, como construtor do seu próprio conhecimento, e uma dessas tendências é a resolução de problemas, também citada nos documentos oficiais

Notamos que, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), consta que um dos objetivos dos anos finais para o Ensino Fundamental é o desenvolvimento do pensamento algébrico e que o mesmo pode ser explorado por meio de situações de aprendizagem que levem os alunos a:

> "produzir e interpretar diferentes escritas algébricas, expressões, igualdades e desigualdades, identificando as equações, inequações e sistemas; resolver situações-

> problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos.” (Brasil, 1998, p. 81)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) também menciona que a tradução de situações-problema por meio de equações ou inequações do primeiro grau podem auxiliar na construção de procedimentos para resolvê-las, se utilizadas as propriedades da igualdade ou desigualdade. Dessa forma, pensamos que, na medida do possível, os alunos devem ter oportunidades, principalmente por meio de situações-problemas e com o uso das propriedades da igualdade, de compreender os procedimentos envolvidos na resolução de equações, buscando assim, o desenvolvimento do pensamento matemático.

Uma das formas de desenvolver as propriedades da igualdade para a resolução de equações com os alunos é manipulando materiais concretos. Nesta direção, concordamos com Patterson (1997) quando este afirma que “ atividades práticas que começam onde os conteúdos anteriores de matemática pararam, oferecem-nos a oportunidade de preencher a lacuna para o pensamento algébrico” (p.240, tradução das autoras). Além disso, estudos apontam que o uso do material manipulativo *Algebra Tiles* auxilia os alunos na construção do pensamento algébrico. (Leitze e Kitt, 2000), (Sarswati et al., 2016) e (Thornton, 1995).

O material manipulativo *Algebra Tiles* é utilizado em escolas dos Estados Unidos para estudar desde operações com números inteiros até a fatoração de expressões algébricas polinomiais. Segundo Hall (1999), o uso de *Algebra Tiles* e outros materiais manipulativos fornece aos professores de matemática oportunidades empolgantes de capacitar os alunos em diversas áreas do conhecimento, o que concordo plenamente, por isso sempre procuro utilizar materiais manipulativos em sala de aula, em diferentes conteúdos de matemática. Como leciono para estudantes do sexto ano, acredito que quanto mais concreto e manual o trabalho inicial, mais sucesso se obtém na passagem à abstração dos conteúdos trabalhados.

Dessa forma, colocamo-nos o desafio de tentar verificar se é possível atrelar a resolução de problemas ao uso do material manipulativo *Algebra Tiles*, a fim de que os alunos criem uma forma de resolver equações do primeiro grau com compreensão e utilizem as propriedades da igualdade, sem fazer uso de receitas para a sua resolução. Assim, em nossa pesquisa, buscamos responder a seguinte pergunta:

Como o uso do material manipulativo Algebra Tiles pode contribuir para o desenvolvimento, pelos alunos, do procedimento para resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita na resolução de situações-problemas?

Para responder a essa pergunta, desenvolvemos uma sequência de atividades voltada para o sexto[2] ano do Ensino Fundamental. Essa sequência tem como objetivo geral a introdução de conceitos de equações do primeiro grau com uma incógnita, buscando a transição entre o pensamento aritmético e o pensamento algébrico por meio do uso do material manipulativo *Algebra Tiles.* Além disso, durante a implementação da sequência é incentivada e instigada nos alunos a necessidade de utilizar os princípios aditivo e multiplicativo da igualdade na manipulação do material para verificar se os alunos conseguem criar uma forma de resolver equações com compreensão, sem ser dada uma "receita pronta".

Na implementação da sequência de atividades, também estão inseridos situações-problemas que buscam a reflexão dos alunos para a resolução de problemas somente via aritmética, procurando mostrar a necessidade do uso da álgebra para a resolução de algumas situações-problemas. Além disso, inspirando-nos em Duval (2018), propomos o uso de diferentes representações para uma mesma situação-problema, buscando mostrar aos alunos diferentes ferramentas para resolução de problemas para que eles tenham a opção de escolher a mais adequada em cada caso.

1.2. Organização do trabalho

O presente trabalho está organizado em seis capítulos. O primeiro capítulo é destinado à apresentação do tema escolhido, assim como às razões da sua escolha. Além disso, apontamos a questão de pesquisa e a organização do nosso trabalho.

No segundo capítulo, buscamos situar o leitor na literatura que embasou a construção da sequência de atividades e as análises dos dados coletados para este trabalho. Dessa forma, apresentamos as concepções sobre a álgebra escolar apresentadas por Lins e Gimenes e Usiskin. Além disso, compondo também a base teórica da sequência, apresentamos a Teoria de Registros de Representação Semiótica, proposta por Duval, a qual será a nossa principal fonte teórica para a análise dos registros dos alunos. Finalizamos o capítulo com uma seleção de dissertações com temas relacionados à nossa pesquisa.

No terceiro capítulo, apresentamos o material manipulativo *Algebra Tiles*. Explicamos como conhecemos o material e o que dizem alguns autores acerca da utilização do mesmo.

[2] Ressaltamos que a presente pesquisa foi realizada com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, visto que esse conteúdo é abordado no sexto ano, na escola em que a professora-pesquisadora leciona. No entanto, na BNCC o conteúdo de equações é estudado no sétimo ano. Desse modo, essa sequência pode ser aplicada no sétimo ano do Ensino Fundamental.

Além disso, explicamos a composição do material e como ele pode ser utilizado para resolver equações do primeiro grau com uma incógnita.

No quarto capítulo, são apresentados os procedimentos metodológicos dessa pesquisa, trazendo as características da abordagem qualitativa e como será desenvolvida a coleta de dados. Além disso, apresentamos os participantes da pesquisa e conhecimentos prévios desenvolvidos antes da implementação.

No quinto capítulo, apresentamos os relatos dos encontros e a análise da implementação da sequência de atividades.

No sexto capítulo apresentamos as considerações finais desse trabalho, sendo incluídas reflexões sobre a implementação bem como seus resultados e conclusões frente à questão de pesquisa.

2. REVISÃO TEÓRICA

Apresentamos neste capítulo uma revisão teórica sobre o ensino de álgebra e a sua relação com a aritmética baseando-nos principalmente em Usiskin (1995) e Lins e Gimenes (1997). Discorremos sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica proposta por Raymond Duval, que também serve de base para a construção da nossa sequência de atividades por acreditar na importância dos diferentes registros de representação na aprendizagem de matemática. Visando a contribuição para as diferentes atividades cognitivas ligadas à semiose, propostas em Duval (2012), expomos também o material manipulativo utilizado em nossa pesquisa: os *Algebra Tiles*. Para finalizar, apresentamos uma seleção de dissertações com temas relacionados ao da presente dissertação.

2.1. O ensino de álgebra na escola

Buscando entender um pouco mais sobre o ensino e aprendizagem de álgebra na escola, apresentamos aqui as concepções presentes em Usiskin (1995) e Lins e Gimenez (1997), nos quais são discutidas as características do processo de produção de significados para a aprendizagem de aritmética e álgebra.

Iniciamos apresentando as concepções para a educação algébrica de Usiskin, que afirma que a álgebra não é simples de ser definida. Em Usiskin (1995) salienta-se que a principal característica da álgebra escolar é a utilização de letras como símbolos para a representação de objetos, visto que o estudo da álgebra inicia no Ensino Fundamental quando os alunos passam a ter o contato com a escrita literal pela primeira vez. Contudo, o autor afirma que não podemos resumir o estudo das variáveis apenas à concepção de que as letras representam objetos, o que seria distorcer e simplificar os objetivos da álgebra escolar já que as diferentes concepções de variável trazem muitas definições, conceituações e símbolos.

Dessa forma, em Usiskin (1995) são apresentadas as diferentes concepções da álgebra classificadas em quatro diferentes categorias: i) Álgebra como aritmética generalizada; ii) Álgebra como estudo de procedimentos para resolução de certos problemas; iii) Álgebra como estudo de relações entre grandezas; e iv) Álgebra como estudo das estruturas. Na sequência descrevemos essas diferentes concepções.

i) Álgebra como aritmética generalizada: Nesta concepção é natural pensar as variáveis como partículas generalizadoras e elas são importantes para a matemática, visto que muitas vezes queremos descrever relações entre números matematicamente e as variáveis são ferramentas úteis para isso. Por exemplo, o produto de qualquer número real por zero, resulta em zero, pode ser facilmente representado por: $n \cdot 0 = 0$. Dessa forma, as ações importantes do aluno para essa concepção são traduzir e generalizar.

ii) Álgebra como estudo de procedimentos para resolução de certos problemas: Nesta concepção, as letras representam constantes ou incógnitas e elas auxiliam na resolução de problemas matemáticos. Um exemplo dado pelo autor do uso das letras como incógnita é a resolução do problema: "Adicionando três ao quíntuplo de um número, obtemos quarenta. Quem é esse número?". Espera- se que os alunos representem o problema algebricamente, chegando à expressão: $5x + 3 = 40$. Sob a concepção da álgebra como a aritmética generalizada, bastava encontrar a expressão citada, porém, sob o estudo da álgebra como estudo de procedimentos, este é apenas o começo. Além de representar algebricamente, espera-se que o estudante resolva essa equação utilizando algum procedimento.

Usiskin (1995), esclarece que os alunos apresentam dificuldades na passagem da aritmética para a álgebra na resolução desses problemas e concordamos com o autor, pois existe uma maior complexidade efetivamente envolvida nesta concepção, que é sair da atitude passiva de ler $n \cdot 0 = 0$, para a atitude de manipular a expressão $5x + 3 = 40$ para encontrar o valor da incógnita. Existe um grande passo na abstração e no desenvolvimento do pensamento matemático.

Segundo o autor, para a resolução desse problema via aritmética, seriam realizadas as operações: subtrair 3 e dividir por 5 e, na representação algébrica envolve- se a multiplicação por 5 e adição de 3, ou seja, é necessário pensar exatamente o contrário do que pensávamos aritmeticamente.

Dessa forma, como as letras representam incógnitas ou constantes, nessa concepção, ao contrário da primeira, as ações importantes para o aluno são simplificar e resolver. Assim, além de traduzir o problema algebricamente, o aluno ainda necessita saber manipular as expressões com o objetivo de descobrir a incógnita. Notamos então a maior complexidade exigida nesta concepção.

iii) Álgebra como estudo de relações entre grandezas: Nesta concepção, são abordadas as fórmulas e representações de relações entre grandezas ou quantidades. Por exemplo, quando observamos a fórmula para o cálculo da área de um triângulo, estão sendo relacionadas três grandezas: área, base e altura do triângulo. É importante destacar que nessa concepção, as letras são variáveis que realmente variam, não estamos buscando encontrar um valor específico. Os valores variam, de acordo com os valores que são atribuídos às variáveis e essa é a principal diferença entre esta concepção e as anteriores.

Em Usiskin (1995) é mencionado que os alunos observam a diferença quando são questionados sobre o que ocorre com a expressão $\frac{1}{x}$, quando x se torna cada vez maior. Claramente, o objetivo dessa questão não é encontrar um valor para x, então x não é um valor desconhecido, assim, esse exemplo não é englobado pela segunda concepção. Do mesmo modo, não é englobado pela primeira concepção, visto que, tem de se fazer uma generalização, mas não aritmética, pois não faz sentido perguntarmos o que ocorre com $\frac{1}{2}$, por exemplo, quando 2 é cada vez maior. Assim, essa fórmula é fundamentalmente um modelo algébrico e, na nossa opinião, envolve maior abstração do que as concepções anteriores.

Um exemplo para se uso das letras como parâmetros é na função de primeiro grau $y = mx + b$, há duas variáveis (‘x’ e ‘y’), onde cada letra depende da variação da outra. Em contrapartida, as letras ‘m’ e ‘b’ não são quantidades variáveis, mas representam parâmetros.

Além disso, destacamos que em Usiskin (1995) é apresentado que nesta concepção a variável pode ser tanto um argumento, como um parâmetro. “Um argumento, no sentido de representar os valores no domínio de uma função e, um parâmetro, no sentido de representar um número do qual outros números dependem” (Usiskin, 1995, p.10).

iv) Álgebra como estudo das estruturas: Nesta concepção, as variáveis são tratadas como indeterminadas, símbolos arbitrários aos quais não é atribuído um determinado valor. Por exemplo, a fatoração do polinômio $3x^2 + 4ax - 132a^2$. A concepção de variável aqui apresentada é diferente de todas as anteriores.

É importante salientar que em Usiskin (1995) menciona-se a importância da álgebra como estudo das estruturas principalmente em cursos superiores, onde são estudadas estruturas, como grupos, anéis, domínios de integridades, entre outros, que, apesar de não serem estudados no Ensino Básico, são de fundamental importância para que se possa realizar argumentações em sala de aula.

Nos PCN estão presentes as quatro concepções apresentadas em Usiskin (1995) para a álgebra.

Figura 1, extraída do próprio documento, podemos observar as diferentes interpretações da álgebra escolar propostas pelos PCN e as diferentes funções das letras. Notamos que essas estão ligadas às quatro concepções apresentadas anteriormente: i) Álgebra como aritmética generalizada; ii) Álgebra como estudo de procedimentos para resolução de certos problemas; iii) Álgebra como estudo de relações entre grandezas; e iv) Álgebra como estudo das estruturas. Contudo, concordamos com Carvalho (2010) que a quarta concepção não é compatível com a maturidade intelectual dos alunos do Ensino Fundamental. De fato, em Usiskin (1995) fica claro que a quarta concepção faz parte dos conteúdos estudados no ensino médio ou superior.

Figura 1: As diferentes concepções da álgebra escolar presentes nos PCN.

Fonte: (Brasil, 1998, p. 116).

Nos PCN, o ensino de álgebra ganha mais destaque nos anos finais do Ensino Fundamental, apesar de estar destacado que

> Os adolescentes desenvolvem de forma bastante significativa a habilidade de pensar "abstratamente", se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a Aritmética. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem de Álgebra mais sólida e rica em significados (Brasil, 1998, p.117).

Assim, notamos que os PCN já incentivam a ideia de estudar noções algébricas nos anos iniciais, fazendo articulações com a aritmética. Essa frente também foi evidenciada na BNCC, na qual vem estruturado o ensino de álgebra desde os anos iniciais, fazendo relações com a aritmética por meio da identificação de padrões geométricos, ou em sequências numéricas, relações e propriedades da igualdade, formação de sequências recursivas, sem fazer uso de letras para essas identificações. Segundo o documento, a partir do sexto ano do Ensino Fundamental essas ideias devem ser reforçadas e abordadas de maneira mais formal.

Além disso, segundo a BNCC, o ensino de Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental, entre outras finalidades, tem como objetivos: a formalização das noções de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade, compreensão da ideia de variável, estabelecimento de leis matemáticas por meio da linguagem algébrica, transitando entre as diferentes linguagens e a resolução de problemas envolvendo equações e inequações. Dessa forma, podemos notar uma aproximação com o que era proposto nos PCN.

Um ponto de afastamento entre os dois documentos está na importância que a BNCC traz para a associação entre a linguagem algébrica e a sugestão para o desenvolvimento do pensamento computacional, possibilitando a aprendizagem e o desenvolvimento de algoritmos pelos estudantes. Assim, as concepções de variável e de parâmetro se fazem presentes de maneira muito enfática e constitui mais uma oportunidade para o estudante efetivamente apropriar-se destes conceitos.

Outros autores que discutem as diferentes concepções da álgebra escolar são Lins e Gimenez. Em Lins e Gimenez (1997), eles afirmam que um dos motivos para as dificuldades na aprendizagem de álgebra é a existência da ideia de que a aritmética deve sempre preceder a álgebra. Em seus estudos, os autores buscam verificar de que modo a álgebra e a aritmética se relacionam, "mas de forma diferente das leituras tradicionais, do tipo 'álgebra é aritmética generalizada' ou 'álgebra é a estrutura da aritmética" (Lins e Gimenez, p.10, 1997). De fato, essas são considerações possíveis, mas segundo os autores, estreitas para a finalidade da educação matemática.

A álgebra escolar apresenta um momento de ruptura na educação matemática escolar. Talvez isso poderia nos fazer pensar que os alunos são muito precoces e podem não ter alcançado o desenvolvimento intelectual necessário. Mas a leitura de Lins e Gimenez (1997) para a produção de significados para a álgebra e aritmética sugere exatamente o contrário: "é preciso começar mais cedo o trabalho com álgebra, e de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra". (p.10).

Mais especificamente sobre a álgebra, assim como em Usiskin (1995), em Lins e Gimenez (1997) é relatado que não há um consenso sobre o que seja pensar algebricamente, mas que existe talvez um consenso a respeito de quais são as coisas da álgebra, o que nos leva a imaginar que pensar álgebra seja algebricamente seja pensar em alguns conteúdos específicos como equações, cálculo literal e etc. Contudo, essa visão não nos permite saber duas coisas fundamentais: "a) se há outros tópicos que deveriam também estar ali; e b) fica difícil saber de que forma organizar um currículo para a educação algébrica, e até mesmo se os tópicos tradicionais são tão relevantes quanto sua inclusão tradicional em currículos parece indicar" (Lins e Gimenez, p.89, 1997).

Muitas vezes a atividade algébrica é descrita associada a conteúdos, ou a "calcular com letras". Dessa forma, sua caracterização é dada pela ideia de que a atividade algébrica é resolver problemas (contextualizados, ou não) da álgebra, portanto acabamos tendo uma abordagem da atividade algébrica caracterizada pelo uso de notações, ou uma abordagem por meio de conteúdos. Contudo, em Lins e Gimenez (1997) afirma-se que essas abordagens por conteúdos, ou uso de notações podem deixar de lado algumas coisas que os autores gostariam de caracterizar como atividade algébrica.

Como existem diversas caracterizações e compreensões sobre a atividade algébrica, Lins e Gimenez (1997) trazem em sua pesquisa diferentes tendências da educação algébrica: i) as tendências "letristas"; ii) as tendências "letristas – facilitadoras"; e ainda, iii) a tendência de trabalhar com situações reais e que podem ser observadas no cotidiano.

i) **Tendências "letristas":** o ensino de álgebra resume-se a realizar cálculos com letras e algoritmos. Os autores afirmam que essa é a principal tendência abordada pelos livros de Matemática brasileiros. As atividades resumem-se ao desenvolvimento de técnicas e procedimentos e sua prática por meio da resolução de exercícios.

ii) **Tendências "letristas-facilitadoras":** visam a abstração por meio de situações concretas, como por exemplo o uso da área para estudar produtos notáveis e da balança de dois pratos para estudar equações. Estudos relacionados a esta tendência apresentam resultados tais que os alunos demonstram dificuldade em entender o que é feito no concreto e o que é feito no formal e sugerem que seja necessário um passo de transição entre o concreto e o formal.

iii) **Tendências que abordam situações:** estas tendências incluem a investigação de situações reais por meio da modelagem matemática e investigações de sala de aula. Neste caso, a produção do conhecimento algébrico serve ao propósito de iluminar ou organizar uma situação, como ferramenta e não como objeto primário de estudo.

Quando analisamos os diferentes tipos de caracterização algébrica, podemos notar desde a rigidez das caracterizações "puras" por conteúdos, até uma certa despreocupação com o tipo de matemática particular que está sendo apresentada, basta que seja uma atividade matemática rica e flexível. Dessa forma, acreditamos, assim como os autores Lins e Gimenez, que para repensar a educação aritmética e algébrica, é preciso observar as relações que elas têm em comum e desenvolver um currículo no qual estejam presentes as relações entre a aritmética e a álgebra.

Pensando nas concepções sobre a álgebra apresentadas em Usiskin (1995), nosso trabalho concentra-se na segunda concepção, que diz respeito à álgebra como ferramenta de estudo de procedimentos para a resolução de problemas. De fato, o autor evidencia que os alunos apresentam dificuldades na aprendizagem de álgebra e na compreensão das variáveis como incógnitas. Dessa forma, utilizamos as concepções de Lins e Gimenez sobre a transição entre a aritmética e álgebra para auxiliar nas dificuldades citadas em Usiskin (1995). Além disso, acreditando que uma forma de construir relações entre a aritmética e a álgebra é a resolução de situações-problema em sala de aula para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos.

2.2. Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Na presente seção apresentamos considerações referentes à Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Tal teoria, serviu de base para a construção da proposta didática e para a análise dos dados coletados em nossa pesquisa. Em Duval (2012) afirma-se que "os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos 'reais' ou 'físicos'. É preciso, portanto, dar representantes"(p. 268). Ou seja, o autor defende a importância das diferentes representações semióticas, que são as diferentes representações que podemos dar para um mesmo objeto matemático, como por exemplo, as frases em linguagem natural, as equações, os esquemas, formas geométricas, gráficos. Ele afirma que as diferentes representações são necessárias para o desenvolvimento da atividade matemática pelos estudantes.

Contudo, Duval (2012) afirma que é preciso tomar cuidado para não confundir os objetos estudados com suas representações, por exemplo, um ponto, um círculo, são representações para objetos matemáticos e não os objetos matemáticos em si. Mas isso implica em um paradoxo, visto que o entendimento de objetos matemáticos é um entendimento conceitual e é somente por meios das suas representações que conseguimos acessá-los. Assim, mesmo que sejam distintos o objeto de sua representação, pode ser fácil confundi-los. Por outro lado, se o indivíduo não possui um entendimento conceitual do objeto, é difícil conceber uma representação para ele.

Duval (2012) explica que este paradoxo cognitivo do pensamento matemático no ensino não é percebido, porque “existe muito mais importância às representações mentais do que às representações semióticas” (p. 269) e ele define essas representações:

> As representações mentais recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceptualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento (Duval, 2012, p.269).

Muitas vezes, as representações semióticas são consideradas apenas meios de exteriorizar representações mentais, contudo, as representações semióticas são essenciais também à atividade cognitiva do conhecimento, além de ser essencial à comunicação. Essas representações apresentam um papel importante no desenvolvimento de representações mentais, na realização de diferentes funções cognitivas e na produção de conhecimento. O autor afirma que o desenvolvimento das representações mentais depende de uma interiorização das representações semióticas e estas permitem o preenchimento de algumas funções cognitivas essenciais como a função de tratamento.

Assim, Duval (2012), utilizando os termos semiose e noesis, o primeiro sendo a apreensão ou produção de uma representação semiótica e o segundo sendo a compreensão conceitual de um objeto, afirma que não há noesis sem semiose. Dessa forma, para a compreensão dos objetos pelos indivíduos, é essencial a mobilização de diferentes registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escritas simbólicas, língua natural, etc.) e no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro.

Em Duval (2012, p. 271), afirma-se que para um sistema semiótico ser considerado um registro de representação, ele deve permitir três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose:

i**) a formação de uma representação** identificável, com regras bem estabelecidas e que possa ser entendida facilmente pelo sujeito: a formação de uma representação pode ser comparada à realização de uma tarefa de descrição por meio do desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, expressão de uma fórmula.

ii) **O tratamento** de uma representação no mesmo registro onde ela foi formada: por exemplo, considerando as representações utilizadas em nossa pesquisa, o cálculo é o tipo de tratamento próprio das expressões simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, ...) e a transformação das expressões representadas com um material manipulativo, por exemplo, em expressões equivalentes por meio da manipulação, também caracterizam o tratamento.

iii) a transformação de um registro em outro, de maneira parcial ou total, que será denominada **conversão:** por exemplo, a conversão da linguagem natural, na representação pictórica e para a representação algébrica. Salientamos que a conversão independe do tratamento, mas que é importante a mudança de registro, pois o que se espera é que essa mudança permita a realização do tratamento de maneira mais econômica e potencializada em algumas situações (Duval, 2012, p. 279).

É importante observar que Duval (2012, p.277) afirma que em geral somente as duas primeiras atividades cognitivas ligadas à semiose são levadas em consideração no ensino: a formação e o tratamento. Portanto, desconsiderando no ensino escolar o fato de que a conversão é muito importante para perceber o quanto se internaliza um conceito quando ocorre a variedade de registros. Em Duval (2018) é proposta uma justificativa para a não utilização da conversão na escola. O autor afirma que um obstáculo à operação de conversão é que para reconhecer que duas representações remetem a um mesmo objeto, é necessário fazer "uma correspondência, termo a termo, entre os conteúdos de dois registros diferentes" (p.9), como por exemplo, a relação entre as unidades de sentido de um enunciado e as unidades simbólicas da equação, ou da representação pictórica, utilizada em nossa pesquisa por exemplo. A dificuldade em fazer a correspondência das unidades entre as representações, pode levar "a um boqueio e a um abandono rápido das atividades de busca para resolver um problema ou a erros que apontam confusões ininterpretáveis" (Duval, 2018, p. 10).

Mas o que fazer para superar o obstáculo da conversão? Segundo Duval (2018), é necessário que sejam construídas situações de aprendizagem "nas quais os alunos possam comparar as variações de conteúdo das representações em um registro A com variações correlatas de conteúdo das representações em um registro B" (p.12) e segundo o autor, essa é a única forma para que os alunos aprendam a diferenciar as unidades a serem postas em correspondência para a conversão. Ainda, o autor afirma que podem ser utilizadas representações auxiliares para o entendimento das situações-problemas propostas, como por exemplo, em problemas aditivos, a imagem de uma coleção de objetos. É importante evidenciar que essas representações devem mostrar como selecionar as informações importantes do enunciado da situação-problema e como organizá-los em uma igualdade numérica.

Segundo Duval,

> Para entender como trabalhamos em matemática para resolver problemas e até mesmo para saber como utilizar um conhecimento matemático para resolver problemas reais, é preciso primeiro tomar consciência das transformações de representações

> semióticas, por meio de mudanças de registros e pelos tratamentos específicos de cada registro (Duval, 2013, p. 27).

Dessa forma, em nossa proposta, proporcionamos aos alunos, por meio da resolução de situações-problemas, o uso de diferentes registros de representação: linguagem natural, representação numérica, representação pictórica e representação algébrica; a fim de que essas diferentes representações tornem possíveis as três atividades cognitivas fundamentais, como por exemplo na atividade 1.1 que será discutida neste trabalho: incialmente, a formação de uma representação de uma situação-problema por meio do uso dos *Algebra Tiles*, o tratamento da representação por meio da manipulação do material e a conversão da representação para a representação algébrica e o respectivo tratamento. Assim, em nossa pesquisa, analisamos as resoluções dos alunos observando quais os registros de representação utilizados pelos alunos e se os mesmos transitam entre as diferentes representações realizando as atividades cognitivas ligadas à semiose.

Além disso, segundo Duval (2003), os alunos conseguem trabalhar com mais facilidade resolvendo problemas que vão da língua natural para o registro numérico do que solucionar situações-problemas que, de alguma forma, solicitam o caminho inverso. Dessa forma, incentivamos, em nossa sequência de atividades, que os alunos criem seus próprios problemas, que possam ser resolvidas utilizando uma equação, realizando o processo inverso ao que os alunos geralmente estão habituados. Nesse caso os alunos estariam fazendo o processo inverso no sentido de partir do registro algébrico e chegar na linguagem natural. Isso é importante, pois o autor afirma que a aprendizagem está associada ao fato de reconhecer o mesmo objeto em diferentes representações, o que é reiterado na BNCC.

2.3. Trabalhos correlatos

Nesta seção, apresentamos trabalhos com temática relacionada a desta dissertação, destacando as principais aproximações e distanciamentos encontrados e evidenciando os resultados obtidos nessas pesquisas. Os trabalhos analisados estão enumerados no Quadro 1. É importante esclarecer ao leitor que o conteúdo de equações do primeiro grau com uma incógnita geralmente é estudado no sétimo ano do Ensino Fundamental, por recomendação da BNCC, contudo, na escola em que será realizada a pesquisa, esse conteúdo é abordado no sexto ano.

Quadro 1: Trabalhos correlatos.

Autor	Título do trabalho	Programa	Universidade
Hummes (2014)	Aprendizagem Significativa de Equações de Primeiro Grau: Um Estudo sobre a Noção de Equivalência como Conceito Subsunçor	Mestrado Profissional em Ensino de Matemática	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Bonadiman (2007)	Álgebra no ensino fundamental: produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas	Mestrado Profissional em Ensino de Matemática	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Daniel (2007)	Um estudo de equações algébricas do 1º grau com o auxílio do software Aplusix	Mestrado em Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Klöpsch (2010)	Campo Conceitual Algébrico: Análise das noções a serem aprendidas e dificuldades correlatas encontradas pelos estudantes ao final do ensino fundamental (8ª série - 9° ano)	Mestrado em Psicologia Cognitiva	Universidade Federal de Pernambuco
Freitas (2002)	Equação do 1º grau: métodos de resolução e	Mestrado em Educação Matemática	Pontifícia Universidade

	análise de erros no ensino médio		Católica de São Paulo
Araújo (2016)	Ensino-aprendizagem de álgebra através da resolução e exploração de problemas	Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática	Universidade Estadual da Paraíba

Fonte: Acervo da autora.

Inicialmente buscamos no repositório digital LUME, da UFGRS, por trabalhos relacionados ao nosso, utilizando as palavras-chaves "equações do primeiro grau com uma incógnita", "equações" e "equações + material manipulativo", no período de 2000 até 2019. Escolhemos o trabalho de Hummes (2014), que realizou um estudo com um grupo de alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, de uma escola da Rede Municipal de Porto Alegre. A autora buscou verificar se a compreensão do conceito de equivalência, a partir de atividades que relacionam a igualdade existente entre os dois termos de uma equação com o equilíbrio de uma balança de dois pratos, pode contribuir para o entendimento do processo de resolução de uma equação do primeiro grau. A autora utilizou em sua pesquisa dois Objetos Digitais de Aprendizagem que simulavam a balança de dois pratos. Por meio dessa pesquisa, Hummes (2014) concluiu que a noção de equivalência é um conceito fundamental para a Aprendizagem Significativa dos alunos. A autora também concluiu que antes de trabalhar com o estudo de equações é importante que os alunos trabalhem com atividades que requerem a representação por símbolos (letras e outros) e a compreensão da linguagem simbólica, visto que os alunos apresentaram dificuldades em admitir que os números podem ser representados por símbolos.

Buscando entender um pouco mais sobre a importância do uso de materiais manipulativos para o ensino de Álgebra, analisamos a dissertação de mestrado de Bonadiman, (2007), também produzido na UFRGS. O objetivo do trabalho era desenvolver uma proposta de ensino e aprendizagem para o desenvolvimento do pensamento algébrico, visando a compreensão das operações nas expressões algébricas e suas propriedades. Para isso, foi desenvolvida uma proposta didática centrada na resolução de problemas e no uso de material manipulativo, buscando o uso de representações múltiplas. O material manipulativo utilizado foi inspirado nos *Algebra Tiles* e no *Lab Gear*, ambos materiais utilizados nos Estados unidos para o ensino e aprendizagem de Álgebra. O material criado é muito semelhante ao Algeplan, contendo peças na forma de quadrados e retângulos coloridos que representavam os termos de coeficiente positivo e o verso (parte branca) das peças representando os termos de coeficiente negativo, ou seja, o oposto da parte da frente.

Durante a aplicação da proposta, os alunos foram convidados inicialmente a resolver atividades que abordavam os diferentes usos das letras e, no segundo bloco de atividades, a resolver situações-problemas que abordavam expressões algébricas e suas operações. Nessas situações-problemas, a professora incentivou os alunos a fazerem uso do material manipulativo desde o início do segundo bloco, mesmo quando os alunos não pensavam ser necessário o seu uso. Ela fez isso para que os alunos entendessem o funcionamento do material desde as situações-problemas mais simples. Durante as atividades, os alunos relacionaram as áreas das peças com as expressões algébricas e operações utilizadas.

Bonadiman (2007) concluiu que o uso do material manipulativo foi favorável à compreensão dos conceitos algébricos trabalhados, auxiliando na confirmação de hipóteses levantadas pelos alunos e nas argumentações utilizadas nas resoluções das situações- problema. Além disso, a representação com material auxiliou no desenvolvimento da escrita algébrica, à medida que foram sendo substituídas por representações mentais e escrita simbólica. Baseando-se em Vygotsky (1984;1991), a autora complementa que essas representações múltiplas são importantes para a aprendizagem dos alunos.

Concordamos com a autora e acreditamos que as representações múltiplas são importantes para a aprendizagem dos alunos e, dessa forma, utilizamos o material para representar expressões algébricas com os alunos participantes desta pesquisa e pensamos em utilizar também os *Algebra Tiles* para a resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita. Já que com esse material é possível representar os termos de uma equação dos dois lados da igualdade e fazer manipulações para encontrar o valor da incógnita.

Ampliando o campo de pesquisa, utilizando as palavras-chave "equações do primeiro grau com uma incógnita", procuramos por trabalhos relacionados ao nosso no Banco de Teses e dissertações da CAPES, onde localizamos o trabalho de Daniel (2007), que realizou uma pesquisa diagnóstica com o objetivo de identificar quais os erros e analisar as estratégias que oito alunos da oitava série de uma escola estadual de São Paulo utilizam para resolver equações do primeiro grau com uma incógnita. Em sua pesquisa, o autor utilizou o software Aplusix, destinado ao ensino e aprendizagem de álgebra, que possui uma ferramenta chamada "Videocassete", que arquiva todos os passos realizados pelos alunos no software. Por meio dessa ferramenta, o autor constatou que os principais erros dos alunos na resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita estão relacionados aos conceitos de equivalência e às operações inversas.

Segundo o autor, como o software Aplusix indica quais são os erros dos alunos após a resolução, o software pode contribuir para que os estudantes aprendam com os seus próprios erros. Foi o que Daniel (2007), em um pós-teste observou com seus alunos: houve um avanço em relação ao pré-teste na resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita. Ainda foram apresentados no pós-teste erros referentes às operações inversas, mas em quantidade menor que no primeiro teste.

Klöpsch (2010), baseou-se na Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud, para aprofundar a análise dos elementos algébricos a serem aprendidos e as dificuldades apresentadas por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola privada. Para tanto, foi sistematizado um instrumento de avaliação que abordasse o conjunto de atividades matemáticas algébricas que são consideradas representantes das competências e habilidades cognitivas relacionadas à construção dos conceitos algébricos essenciais a serem aprendidos pelos estudantes até o final do Ensino Fundamental.

Por meio desta pesquisa, notou-se que os alunos participantes possuem um baixo rendimento em álgebra. Pode-se perceber que há um maior domínio do conteúdo de equações do que do conteúdo de inequações por parte dos discentes, mas que existem dificuldades em ambos. Além disso, “os resultados também apontam que uma das situações com menor índice de acerto refere-se a problemas envolvendo generalização de padrões matemáticos, um dos elementos básicos para a construção do conhecimento algébrico” (Klöpsch, 2010). É mencionado que uma das possíveis razões para a dificuldade apresentada pelos alunos, pode advir da pouca ênfase didática dada a essas situações de generalização em sala de aula, ou que a introdução desse tipo de atividades acontece tardiamente.

Outra pesquisa que buscou identificar os métodos de resolução e analisar os erros de alunos no estudo de equações do primeiro grau com uma incógnita, foi realizada por Freitas (2002) em sua dissertação de mestrado, com alunos do primeiro ano do ensino médio de uma escola privada de São Paulo. O autor buscou identificar, por meio de uma pesquisa qualitativa, quais os erros cometidos pelos alunos ao serem resolvidas equações do tipo $ax = b$ ou $ax + b = cx + d$. Foi observado que os principais erros dos estudantes estão vinculados às técnicas de resolução mecanizadas aplicadas, como: “trocar x de lado e mudar o sinal”. É importante ressaltar que Freitas (2002), propõe que, para melhor estudar as técnicas e procedimentos para a resolução de equações, os professores podem se apoiar na resolução de problemas, visto que Mason (1996) afirma que “Suspenso entre a aritmética e a álgebra está o mundo dos problemas. Às vezes podem ser resolvidos aritmeticamente, em outras usando a álgebra". Ou seja, a resolução de problemas constitui-se de um recurso possível para provocar nos alunos a passagem da aritmética para álgebra.

Observando a contribuição da resolução de problemas para o ensino e a aprendizagem de álgebra, Araújo (2016), busca identificar como a metodologia de resolução de problemas, proposta por Onuchic (1999), possibilita o entendimento de ideias e conceitos que vão desde a generalização de padrões até a resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita. A prática foi realizada com alunos do sétimo ano de uma Escola Municipal, de Itatuba, Paraíba. Inicialmente, a autora trabalha com a generalização de padrões e a introdução de variáveis na definição desses padrões; após, trabalha com problemas que buscam a descoberta de um valor desconhecido e então, trabalha com as equações do primeiro grau com uma incógnita, utilizando o apoio da balança de dois pratos. A autora afirma que foi possível observar o aparecimento das incógnitas de forma natural e que a resolução de problemas contribuiu para o entendimento de alguns conceitos e ideias relacionados à álgebra.

A relevância da introdução de conteúdos relacionados com a álgebra por meio de situações-problemas foi observada também no trabalho de Araújo (2016) e sugerida por Freitas (2002). Dessa forma, concordando com Araújo (2016) e Freitas (2002), nos valemos da resolução de situações-problemas para a introdução do conteúdo de equações do primeiro grau com uma incógnita em sala e aula e nos inspirando na ideia de Mason (1996), citado por Freitas (2002), propomos a resolução de uma mesma situação-problema de formas diferentes: aritmeticamente, pictoricamente e algebricamente, buscando a transição entre a aritmética e álgebra.

Acreditamos que essa transição deve ser feita com cuidado, pois segundo Klöpsch (2010), que observou em seu trabalho que os alunos possuem dificuldades importantes na aprendizagem de álgebra e que essas dificuldades podem estar relacionadas com a falta de relação entre a aritmética e a álgebra.

Ainda, nos estudos analisados, foram evidenciados os principais pontos de dificuldades dos alunos na resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita: técnicas de resolução mecanizadas, sem usar os princípios da igualdade. É possível notar que as principais dificuldades estão diretamente relacionadas à falta de compreensão no procedimento de resolução de equações (Daniel, 2007) e (Freitas, 2002).

Como Hummes (2014) observou que o uso da balança de dois pratos pode contribuir para o entendimento do processo de resolução de uma equação do primeiro grau, pensamos em também utilizar um material manipulativo, mas no lugar da balança de dois pratos, optamos pelos *Algebra Tiles*, que têm a vantagem de poder representar quantidades negativas.

Assim, entendendo que a resolução de situações-problemas pode auxiliar na introdução do pensamento algébrico, em nossa pesquisa desenvolvemos uma sequência de atividades voltada para o sexto ano do Ensino Fundamental de nossa escola (é importante ressaltar novamente que, em geral, o conteúdo de equações é estudado no sétimo ano, mas na escola em que foi realizada a pesquisa é estudado no sexto ano), que visa a introdução de conceitos de equações do primeiro grau com uma incógnita buscando a transição entre os registros aritmético, pictórico e algébrico por meio do uso dos *Algebra Tiles*. Além disso, durante as atividades foi incentivada e instigada nos alunos a necessidades de utilizar os princípios aditivo e multiplicativo para que se tenha a resolução, com compreensão, das equações. Tais princípios já foram estudados anteriormente, quando foi feita a revisão das propriedades da igualdade, como é proposto na BNCC.

Dessa forma, esperamos que diminuam as dúvidas que os alunos têm na utilização de procedimentos relacionados às operações inversas na resolução de equações do primeiro grau, visto que, em nossa sequência, propusemos atividades em que os alunos devem utilizar incialmente os conhecimentos que já possuem de aritmética, posteriormente, o material manipulativo e, durante a manipulação, recorrer aos princípios da igualdade para resolução. Ainda, para finalizar objetivamos levar o aluno a construir uma relação entre a representação pictórica e algébrica, tornando natural o uso das operações inversas, nas quais os alunos sentiam dificuldades na utilização, devido à mecanização do processo de resolução de equações.

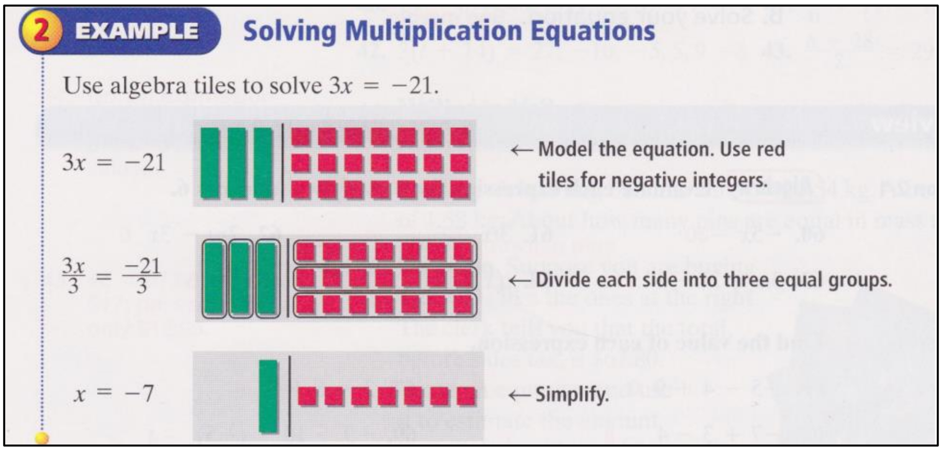
3. *ALGEBRA TILES*: O MATERIAL MANIPULATIVO ESCOLHIDO

Neste momento temos o objetivo de familiarizar o leitor ao material manipulativo *Algebra Tiles,* e esclarecer como tomamos conhecimento desse material. Além disso trazer a opinião de autores que utilizaram esse material anteriormente e a forma como ele pode ser utilizado para resolver equações do primeiro grau com uma incógnita.

3.1. Como conhecemos o material e o que escrevem alguns autores

Ao analisarmos, no grupo de pesquisa de Análise de Material Didático, da UFRGS, um livro utilizado nas escolas no *Middle School*, dos Estados Unidos, observamos que um dos recursos utilizados para a resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita em um dos exemplos apresentados era o material *Algebra Tiles*. Tal maneira de resolução nos chamou atenção, já que não tínhamos conhecimento da resolução de equações utilizando tal material manipulativo. Um ponto bastante interessante é que ele admite a representação de quantidades negativas, o que é uma das limitações da balança de dois pratos, por exemplo. Podemos observar na Figura 2 o exemplo apresentado no livro. Note que, do lado esquerdo da figura, tem-se as equações equivalentes; no centro da figura tem-se as representações utilizando *Algebra Tiles* e; no lado direito, tem-se, em palavras, o que está sendo feito em cada passo de resolução. Inicialmente, é solicitado que se resolva a equação $3x = -21$ e é apresentado o modelo, indicando que os elementos vermelhos devem ser utilizados para representar números inteiros negativos. No segundo passo da resolução, são divididos ambos os lados da igualdade em três grupos iguais. Ao realizar a simplificação, é obtida a solução $x = -7$, como observamos no terceiro passo de resolução da Figura 2.

Figura 2: Exemplo que nos inspirou na utilização de *Algebra Tiles* para resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita.



Fonte: (Charles et al., 2004)

Ao realizarmos outras pesquisas sobre os *Algebra Tiles*, notamos que eles são utilizados em escolas dos Estados Unidos para estudar diferentes conteúdos matemáticos, desde as operações com números inteiros até a fatoração de expressões algébricas polinomiais. Um material semelhante, chamado Algeplan, é utilizado aqui no Brasil para o estudo de expressões algébricas e operações com polinômios, contudo não encontramos material que abordasse o uso do Algeplan para resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita. Ainda, segundo Fanti et al (2006), "O objetivo principal do uso do Algeplan, é relacionar as figuras geométricas (quadrados e retângulos) com expressões algébricas, funcionando como um material de apoio no ensino de expressões algébricas, monômios, polinômios e fatoração de trinômios de segundo grau". Ou seja, o Algeplan busca fazer uma relação entre as áreas dos quadrados e retângulos e as expressões algébricas, não representando expressões por meio de uma igualdade. Em nosso trabalho estamos interessados na manipulação do material, para resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita, em torno de uma igualdade, por isso, decidimos usar a nomenclatura americana *Algebra Tiles*.

Inúmeros trabalhos apresentam a relevância do uso de *Algebra Tiles* para o ensino de álgebra. Em Leitze e Kitt (2000), afirma-se que

> Infelizmente, muitos alunos tentam aprender álgebra usando a memorização, e muitos professores usam métodos de ensino que incentivam a memorização. Os alunos lutam para aprender álgebra, e os professores lutam para saber como ensinar álgebra da melhor maneira para que faça sentido para seus alunos e para que os alunos se lembrem dela após o teste da próxima semana. [...] O método com o qual tivemos sucesso usa *Algebra Tiles* como modelos de material concreto em salas de aula de alunos do ensino fundamental e médio, com alunos de introdução à álgebra de nível universitário e com presidiários que estudam para testes de Desenvolvimento Educacional Geral (GED). (p.462, tradução da autora).

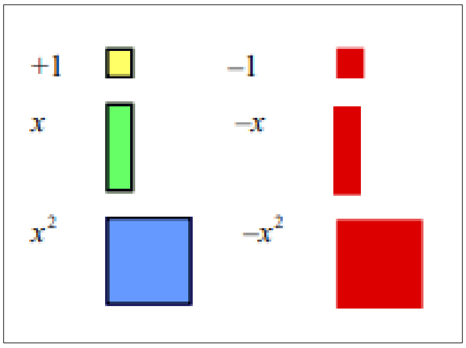
Dessa forma, podemos notar que o uso de *Algebra Tiles* teve sucesso em vários níveis diferentes de estudantes, de classes privilegiadas até as mais desfavorecidas. Em Leitze e Kitt (2000), ainda é apresentado que o sucesso desses alunos na aprendizagem dos tópicos de álgebra abordados foi alcançado como nunca havia sido anteriormente.

Thornton (1995) apresenta uma pesquisa sobre o uso do material manipulativo *Algebra Tiles* para o estudo de polinômios e fatoração de expressões algébricas polinomiais, no qual concluiu que o uso do material concreto auxiliou os estudantes na abstração dos conceitos e os encorajou na manipulação algébrica, necessária para a fatoração de expressões algébricas polinomiais. Outra pesquisa que mostrou o auxílio dos *Algebra Tiles* para a aprendizagem de álgebra foi realizada por Saraswati et al. (2016), que analisou o uso do material para o estudo de equações do primeiro grau com uma incógnita. A partir desse estudo, os autores notaram uma redução dos erros relacionados às operações aritméticas, que surgem quando os alunos resolvem equações utilizando procedimentos sem compreensão na resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita.

3.2. O que são os *Algebra Tiles*?

O material encontrado em Hall (1999) é formado por três tipos de formas: quadrados pequenos, retângulos e quadrados grandes, como observamos na Figura 3. Os quadrados pequenos representam o número +1, os retângulos representam a variável "x" e os quadrados maiores representam "x^2". O lado do bloco x^2, é igual ao comprimento do "bloco" x, cuja largura é a mesma do "bloco" unitário. Além disso, o comprimento do "bloco" x, não é um mútiplo inteiro do bloco da unidade.

Figura 3: ilustração dos Algebra Tiles segundo Hall (1999)

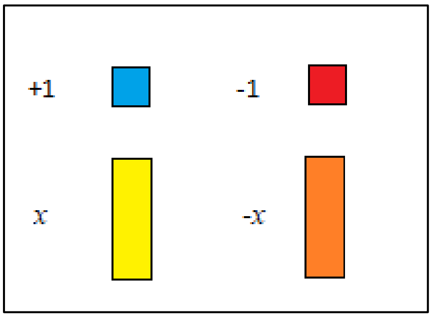


Fonte: Hall (1999)

Segundo Hall (1999), as peças são formadas pelas cores amarelo, verde e azul, como ilustrado na Figura 3 e os elementos com coeficientes negativos são representados todos pela cor vermelha. Mas é importante destacar que encontramos trabalhos (Saraswati et al, 2016) que utilizam somente as cores azul e vermelho (azul, para representar os termos com coeficiente positivo e vermelho, para representar os termos com coeficiente negativo). Como nosso foco é o estudo de equações do primeiro grau, utilizaremos apenas o retângulo (x) e o quadrado pequeno (unidade) e fizemos uma adaptação nas cores utilizadas, visto que no estudo das operações no conjunto dos números inteiros utilizamos o Ábaco Virtual dos Números Inteiros (disponível em: www.mundojogos.com.br/abaco), no qual as unidades positivas eram representadas por argolas azuis e as unidades negativas eram representadas por argolas vermelhas e acreditamos que isso facilitaria a manipulação do material pelos alunos participantes da pesquisa. Dessa forma, em nosso estudo, o +1 será representado por um quadradinho azul, o -1 por um quadradinho vermelho, o x por um retângulo amarelo e o $–x$ por um retângulo laranja, como observamos na Figura 4.

Utilizamos cores diferentes para o -1 e o $–x$, optamos por essa escolha, pois ao pensarmos na equação $-x + 1 = 5$, por exemplo, o valor de $-x$ não é necessariamente negativo. De fato, $-x$ é igual a 4 nesse exemplo. Dessa forma, para não gerar confusão e para reforçar aos alunos a ideia de que o $–x$ é o **oposto** de x, e que $-x$ não é necessariamente negativo, decidimos por trocar também a cor do retângulo que representa o $–x$, diferenciando as cores de -1 e $–x$.

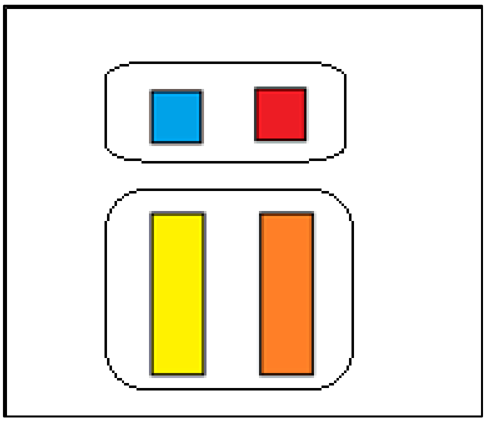
Figura 4: *Algebra Tiles*- cores usadas em nossa pesquisa.



Fonte: Acervo da autora.

Na Figura 5, apresentamos os retângulos e os quadrados unitários formando pares, para ilustrar a propriedade que, ao unirmos um elemento com o seu oposto, eles se anulam e o resultado é zero. Essa propriedade é muito importante para a resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita e reforça a propriedade essencial do oposto. Ilustramos em alguns exemplos.

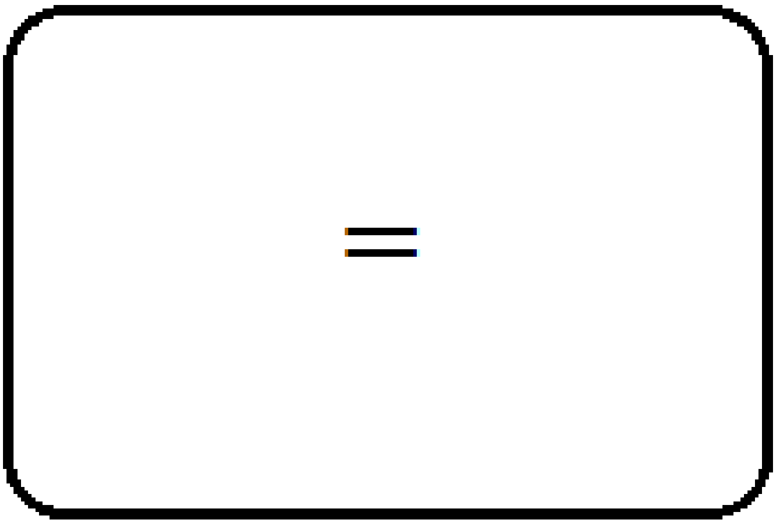
Figura 5: Propriedade do cancelamento ao unir os pares de elementos opostos.



Fonte: Acervo da autora.

Para a prática, juntamente com os *Algebra Tiles*, que foram confeccionados em papel colorido, confeccionamos tapetinhos contendo um sinal de igualdade para que os alunos manipulassem o material em cima, conforme a Figura 6. Os tapetinhos foram confeccionados com folha branca (metade de uma folha A4) e posteriormente, plastificados.

Figura 6: Ilustração do tapetinho para manipulação dos *Algebra Tiles.*

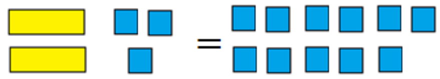
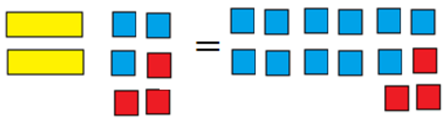
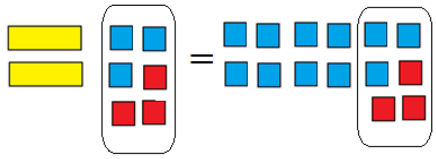
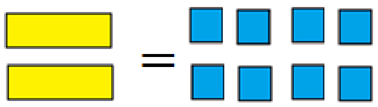
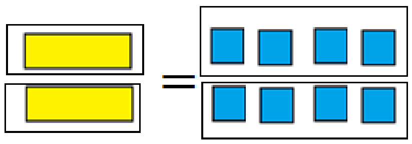
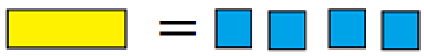


Fonte: Acervo da autora.

3.3. Como resolver equações do primeiro grau com uma incógnita utilizando os *Algebra Tiles*.

Vamos ilustrar a resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita utilizando os *Algebra Tiles* comparando com o procedimento que utiliza os princípios aditivo e multiplicativo (algebricamente). No primeiro exemplo (Quadro 2), vamos resolver a equação $2x + 3 = 11$, observe que nessa equação temos todos os elementos com coeficientes positivos e a incógnita em somente um dos lados da igualdade.

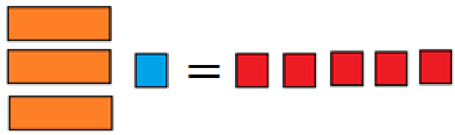
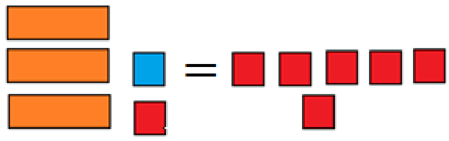
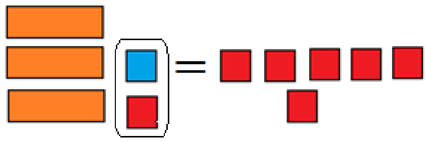
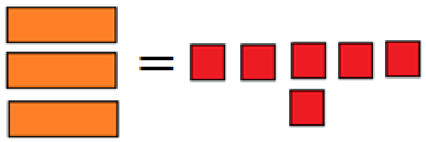
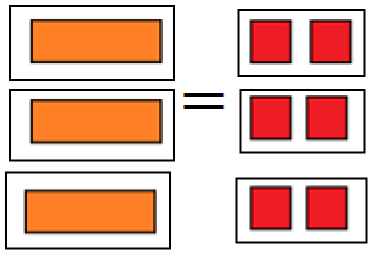
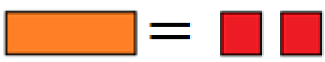
Quadro 2: Resolução da equação *2x + 3 = 11* utilizando *Algebra Tiles*.

	Vamos resolver a equação $2x + 3 = 11$	
Em palavras:	*Algebra Tiles*:	Algebricamente:
Equação inicial:		$2x + 3 = 11$
Adicionando (-3) aos dois lados da igualdade, objetivando que fique do lado esquerdo somente os termos "x"		$2x + 3 + (-3) = 11 + (-3)$
Anulando os opostos		$2x + \underbrace{[3 + (-3)]}_{0} = 8 + \underbrace{[3 + (-3)]}_{0}$
Equação equivalente		$2x = 8$
Até o momento, temos o valor de $2x$, mas queremos o valor de $1x$, então tomamos a metade dos dois lados da igualdade:		$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$
Obtemos:		$x = 4$

Fonte: Acervo da autora.

Ilustramos no Quadro 3 o exemplo de resolução da equação $-3x + 1 = -5$ em que temos coeficientes negativos em alguns termos da equação, demonstrando a possibilidade de trabalhar também com quantidades negativas, o que não é possível manipulando uma balança de dois pratos, por exemplo.

Quadro 3: Resolução da equação *-3x + 1 = -5* utilizando *Algebra Tiles*.

	Vamos resolver a equação $-3x + 1 = -5$	
	Álgebra tiles:	Algebricamente:
Equação inicial:		$-3x + 1 = -5$
Adicionando (-1) aos dois lados da igualdade, de modo que fique do lado esquerdo somente os termos "x"		$-3x + 1 + (-1)$ $= -5 + (-1)$
Anulando os pares		$-3x + [1 + (-1)] = -5 + (-1)$
Nova equação		$-3x = -6$
Até o momento, temos o valor de -3x, mas queremos o valor de 1x, então tomamos a terça parte dos dois lados da igualdade:		$\frac{-3x}{3} = \frac{-6}{3}$
Obtemos:		$-x = -2$
Note que obtemos $-x = -2$, mas queremos o valor de x. Lembrando que		$x = 2$

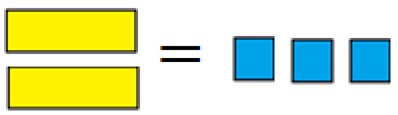
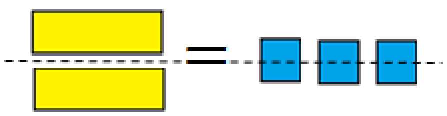
$-x$ significa “o oposto de x" e que -1 é o oposto de 1, basta que tomemos o oposto de -2, obtendo:		

Fonte: Acervo da autora.

Outra forma de resolver a equação $-x = -2$, é continuar manipulando o material até que encontre x = (número). Note que com o material não precisamos utilizar a técnica de multiplicação por -1, visto que se torna natural tomar o oposto de x em exemplos como o apresentado acima.

Apresentamos também um exemplo de resolução de equações em que a solução não é um número inteiro, no Quadro 4.

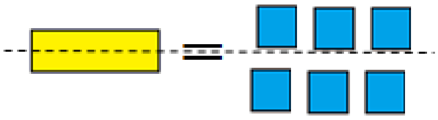
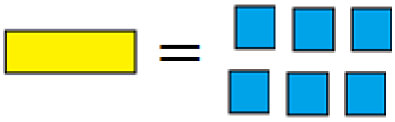
Quadro 4: Resolução da equação $2x = 3$ utilizando *Algebra Tiles*.

	Vamos resolver a equação $2x = 3$	
	Algebra Tiles:	Algebricamente:
Equação inicial:		$2x = 3$
Até o momento, temos o valor de $2x$, mas queremos o valor de $1x$, então tomamos a metade dos dois lados da igualdade:		$\frac{2x}{2} = \frac{3}{2}$
Obtemos três metades:		$x = \frac{3}{2}$

Fonte: Acervo da autora.

Apresentamos no Quadro 5 o exemplo de resolução da equação $\frac{x}{2} = 3$. Dessa forma, observamos que além de trabalhar com coeficientes negativos, também é possível trabalhar com coeficientes fracionários.

Quadro 5: Resolução da equação $\frac{x}{2} = 3$ utilizando *Algebra Tiles*.

	Vamos resolver a equação $\frac{x}{2} = 3$	
	Algebra Tiles:	Algebricamente:
Equação inicial:		$\frac{x}{2} = 3$
Até o momento, temos o valor de $\frac{x}{2}$, mas queremos o valor de $1x$, então tomamos o dobro dos dois lados da igualdade:		$\frac{x}{2} \cdot 2 = 3 \cdot 2$
Obtemos:		$x = 6$

Fonte: Acervo da autora.

Assim, podemos notar que o uso dos *Algebra Tiles* proporciona um leque de oportunidades para o estudo de equações do primeiro grau com uma incógnita, de modo que podemos ter coeficientes positivos, negativos e fracionários.

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresentamos os procedimentos metodológicos da nossa pesquisa, apresentando a metodologia de pesquisa e a metodologia de ação docente.

4.1. Metodologia de pesquisa

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a pesquisa qualitativa tem uma característica muito importante para a educação: a ênfase e o interesse direcionados ao processo; contrariando a pesquisa quantitativa, que tem seu foco voltado para os resultados ou produtos finais. Como o nosso principal interesse está voltado ao processo de construção do conhecimento, escolhemos a abordagem qualitativa como parte de nossa metodologia. Alguns aspectos importantes da pesquisa qualitativa é que a mesma se dá de forma descritiva, ou seja, "os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números" (Bogdan e Biklen, 1994); o investigador é o instrumento principal e tem como fonte direta o ambiente natural (em nosso estudo: a sala de aula), devendo o pesquisador estar presente no momento em que a pesquisa é realizada, afim de obter um melhor envolvimento com os participantes.

Dessa forma, nessa pesquisa a professora- pesquisadora tem um papel fundamental, pois a mesma coleta dados essenciais para verificar como ocorre o processo a ser analisado. Para isso, elaboramos um diário de campo, coletamos documentos escritos pelos alunos e vídeos obtidos durante a prática. Esses recursos são de fundamental relevância para a pesquisa, visto que estamos preocupados em analisar o processo. O diário de campo consiste de anotações que o investigador faz, durante o período que está no campo, de fatos que ele considera importantes para sua pesquisa. Ele será preenchido durante e ao final de cada encontro contendo uma dupla perspectiva: descritiva (descrição de tarefas, eventos ou diálogos) e interpretativa (reflexão sobre o que ocorreu durante a prática) (Fiorentini & Lorenzato, 2006, p.119). O principal objetivo do diário é ter um registro dos fatos importantes, para o momento da análise de dados.

Para complementar o diário de campo, desejamos produzimos vídeos para que as ações realizadas pelos alunos possam ser analisadas da forma mais fiel possível. Além disso, recolhemos documentos escritos pelos alunos, que são formados pelas atividades propostas na sequência de atividades. Esses documentos são muito importantes para observar como os alunos registram seus argumentos por escrito e para analisarmos quais os diferentes registros de representação desenvolvidos pelos alunos em cada atividade.

A análise dos documentos produzidos pelos alunos foi realizada posteriormente à implementação da sequência de atividades e buscamos apoio em Duval e Lins e Gimenes para refletir sobre os dados coletados. Na análise dos documentos e das falas dos alunos em sala de aula, representamos por letras maiúsculas os nomes dos alunos.

4.2. Metodologia de ação docente

Para desenvolver a implementação da sequência de atividades, fizemos uma investigação matemática em sala de aula, já que segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2005), a investigação leva os alunos a criar, testar e justificar, ou demonstrar conjecturas, o que acreditamos contribuir para o desenvolvimento do pensamento matemático e pode auxiliar os alunos a entender o processo de resolução de equações utilizando as propriedades da igualdade.

Durante a implementação, foram entregues aos alunos folhas com as atividades e envelopes com o material manipulativo *Algebra Tiles*. Nas folhas, os alunos deveriam registrar suas soluções para a posterior análise. À medida que os alunos recebiam as folhas com as atividades, eram convidados a realizar a leitura em seus grupos e iniciavam a resolução das situações-problemas propostas. Enquanto os grupos resolviam as questões, passávamos nos grupos observando e instigando os alunos na busca da resolução para as situações-problemas.

Após as resoluções nos grupos, os alunos eram convidados a apresentar suas soluções de forma oral ou na lousa, para que os colegas fizessem a análise e a discussão das diferentes resoluções. Após as análises e discussões, verificávamos se todos os alunos haviam compreendido e concordavam com as resoluções apresentadas pelos colegas. Para finalizar, a professora pesquisadora apresentava registros de conceitos importantes e procedimentos construídos por meio da resolução das situações-problemas.

A implementação da sequência de atividades se deu em 10 encontros, totalizando 17 períodos, distribuídos conforme o Quadro 6.

Quadro 6: Distribuição dos encontros da implementação.

Encontros:	Datas	Duração	Atividades
1	12/09/2019	2 períodos	Atividade 1
2, 3 e 4	13/09/2019 18/09/2019 19/09/2019	5 períodos	Atividades 1.1, 2, 2.1, 3 e 3.1

5	25/09/2019	1 período	Fechamento Atividades 1 até 3.1
6	26/09/2019	2 períodos	Atividade 4 e fechamento
7 e 8	27/09/2019 02/10/2019	3 períodos	Atividades 5 e 5.1 e fechamento
9 e 10	03/10/2019 04/10/2019	3 períodos	Atividades 6 e 7

Fonte: Acervo da autora.

4.3. Os participantes da pesquisa e conhecimentos prévios à implementação da sequência de atividades

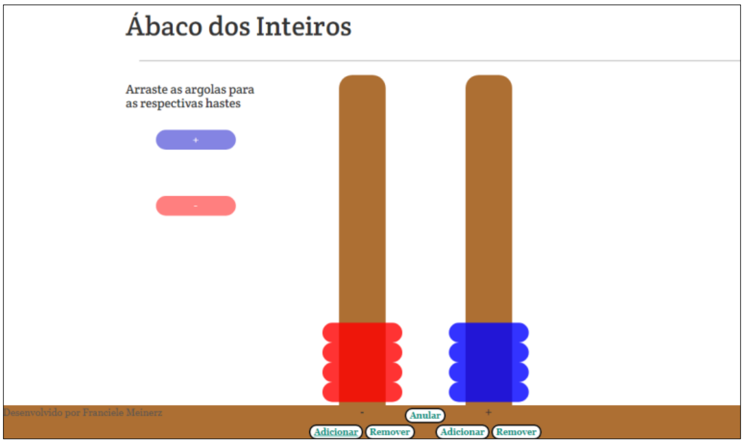
A presente pesquisa foi realizada com uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental, de uma escola privada de Porto Alegre. A escola segue a linha pedagógica montessoriana e tem uma boa estrutura de materiais disponíveis para os professores usarem em sala de aula. Essa turma foi escolhida, pois a professora-pesquisadora era a professora titular e o conteúdo de equações seria trabalhado durante o ano letivo, o que facilitava a coleta de dados e a relação com os alunos. Participaram da pesquisa 22 alunos, todos com idades entre 11 e 12 anos, que são representados por letras maiúsculas do alfabeto no nosso texto.

Para explicar um pouco sobre o trabalho realizado com a turma, comentamos nessa seção o que foi feito anteriormente à implementação da sequência de atividades: i) inicialmente, trazemos um pouco do Ábaco Virtual dos Números Inteiros ii) apresentamos um pouco sobre o estudo realizado sobre as propriedades da igualdade e iii) como utilizamos o material *Algebra Tiles* para o estudo de expressões algébricas.

i) O Ábaco dos Números Inteiros

Decidimos mencionar o Ábaco Virtual dos Números Inteiros, pois ele foi um dos motivos por optarmos pela mudança de cores e escolha das mesmas no material *Algebra Tiles*. A Figura 7 ilustra o Objeto Digital de Aprendizagem é constituído de duas hastes: a haste da esquerda para colocar as argolas que representam as unidades negativas e a haste da direita para colocar as argolas que representam as unidades positivas. Para utilizar o Ábaco dos Números Inteiros é necessário observar três regras: uma argola na haste das unidades positivas, representa uma unidade positiva; uma argola na haste das unidades negativas, representa uma unidade negativa; uma argola na haste das unidades positivas “anula” uma argola na haste das unidades negativas.

Figura 7: Foto da tela do Ábaco Virtual dos Números Inteiros



Fonte: Acervo da autora.

Com esse material estudamos a representação de números inteiros no ábaco e após, estudamos as operações de adição, subtração e multiplicação no conjunto dos números inteiros. É importante salientar a semelhança do ábaco com os *Algebra Tiles* no sentido de que, se tivermos uma argola na haste das unidades positivas e uma argola na haste das unidades negativas, elas se anulam.

Gostaríamos de reforçar um aspecto importante construído com o auxílio do ábaco e que o leitor poderá notar no desenvolvimento das atividades dos alunos: a construção da definição de subtração no conjunto dos números inteiros. Por definição, temos que toda subtração pode ser transformada em uma adição de número inteiros, do primeiro número com o oposto do segundo. Por exemplo: 6 – 2 = 6 + (-2). Do mesmo modo, se tivermos a adição 6 + (-2), ela pode ser representada como 6 – 2. Essa é uma definição matemática, que pode ser construída utilizando o ábaco, e acreditamos que essa construção é importante para o desenvolvimento dos alunos.

É importante fazer esse destaque, pois no material *Algebra Tiles*, temos sempre adições, no sentindo de que estamos juntando retângulos e quadradinhos, contudo, podemos representar a adição $3 + (-x)$ como $3 - x$, por exemplo. Ou, do mesmo modo, podemos representar a adição $x + (-4)$ como $x - 4$.

ii) Propriedades da igualdade

Como sugerem os PCN, no sexto ano é importante haver uma retomada e um aprofundamento das propriedades da igualdade, visto que elas são de fundamental importância para o estudo da resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita, dessa forma, utilizamos a balança de dois pratos como material concreto de apoio, em um estudo para introduzir as propriedades da igualdade entre números, inicialmente apenas positivos. Nesse estudo, os alunos foram convidados a fazer conjecturas, utilizando a balança de dois pratos, sobre as propriedades da igualdade e percebiam que ao adicionar ou subtrair quantidades iguais aos dois pratos da balança, a balança continuava equilibrada e, portanto, encontravam uma igualdade equivalente à igualdade anterior. Do mesmo modo, ao multiplicar ou dividir as quantidades de ambos os pratos por um mesmo valor, a balança também continuava equilibrada, encontrando uma igualdade equivalente à igualdade anterior. Fizemos isso para quantidades positivas conhecidas (inteiras e decimais) e após, efetuamos a generalização.

Foi interessante que a discussão sobre registrar/trabalhar com quantidades negativas na balança surgiu durante as discussões em sala de aula com os alunos. Inicialmente os alunos comentaram que não era possível fazer a representação de quantidades negativas nesse material. Então foi aí que falamos da importância da generalização e, após fazer a generalização, os alunos perceberam que poderiam pensar nas mesmas propriedades também para números negativos, abstraindo a ideia que foi generalizada a partir do uso da balança de dois pratos. Assim, observamos que, apesar das limitações da balança de dois pratos, por não ser possível representar quantidades negativas, ela é importante para a construção das propriedades da igualdade entre números.

Buscando mostrar a importância da linguagem simbólica aos alunos e a compreensão da mesma, e acreditando, assim como Hummes (2014), que esse conteúdo deve ser trabalhado anteriormente ao estudo de equações, procuramos estudos que trabalhassem a introdução da linguagem algébrica em sala de aula, e utilizamos as ideias apresentadas por Führ (2019) para a introdução de expressões algébricas com os alunos participantes da presente pesquisa. Führ (2019), propõe em sua dissertação de mestrado uma sequência didática inspirada na História da Matemática. Tal sequência visa mostrar aos alunos a importância do uso de símbolos matemáticos ao longo da História e, além disso, busca a elaboração de uma linguagem simbólica criada pelos próprios alunos a fim de favorecer a conversão da língua materna para a escrita simbólica. Foi possível notar no trabalho de Führ (2019), que ao longo dos encontros, a construção da linguagem simbólica, bem como as discussões em pequenos e grandes grupos contribuíram para a familiarização dos alunos com a escrita algébrica, então buscamos fazer o mesmo com nossos alunos.

iii) O uso dos *Algebra Tiles* no estudo de expressões algébricas

Para estudar o conteúdo de simplificação de expressões algébricas, utilizamos os *Algebra Tiles*. Dessa forma, o material já era conhecido dos alunos participantes da pesquisa. Utilizamos o material tanto partindo da representação feita pictoricamente com o material e os alunos traziam a nova representação na forma algébrica e também o contrário: os alunos recebiam a representação algébrica e precisavam fazer a representação utilizando os *Algebra Tiles*. No estudo de expressões algébricas notamos que o material contribuiu para evitar a misconception e que os alunos não realizassem a soma da forma: $2x + 3 = 5x$, por exemplo. Eles conseguiram notar que não era possível unir termos que não eram "semelhantes", o que meus alunos de 6º ano em anos anteriores faziam e apresentavam mais dificuldade para entender.

Assim, salientamos a importância do estudo das propriedades da igualdade entre números (agora também negativos) e do estudo de expressões algébricas antes do estudo de equações do primeiro grau com uma incógnita.

Gostaríamos de salientar que os alunos participantes dessa pesquisa já tinham familiaridade com o material, mas esse fato não impede que alunos que não tiveram a oportunidade de trabalhar com o material anteriormente não o façam durante a resolução das atividades apresentadas na nossa sequência de atividades.

5. RELATO DOS ENCONTROS E ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Neste capítulo, apresentamos um relato de cada encontro e a análise dos dados coletados no campo. A análise utiliza como base teórica a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta por Raymond Duval e concepções de Rómulo Lins e Joaquim Gimenez.

5.1. Encontro 1

Para este encontro foi planejada a Atividade 1, que foi construída pensando na relevância da utilização dos conhecimentos prévios dos alunos na inserção de um novo conteúdo e na importância que é dada para transição da aritmética à álgebra em Lins e Gimenez (1997) e na concepção de representações semióticas existentes em Duval (2012). Essa atividade tem como objetivos: resolver situações-problemas utilizando o conhecimento matemático prévio dos alunos; formar representações para as situações-problemas e; desenvolver a argumentação dos alunos de forma escrita. Ela é formada pelas situações-problemas ilustradas na Figura 8, às quais acreditamos que podem ser encontradas no cotidiano dos alunos.

Figura 8: Atividade 1

Problema: Durante o recesso de inverno, Michele e seu irmão Matheus foram até a papelaria comprar alguns materiais escolares que estavam faltando para completar seus estojos.

a) Michele comprou uma caneta colorida, que custou R$5,00, e uma borracha. Ela pagou um total de R$8,00. Quanto custou a borracha? Explique seu raciocínio detalhadamente.

b) Matheus comprou 3 lápis de escrever dos seus super-heróis favoritos, todos de mesmo valor. Ele pagou ao todo, R$6,00 pelos lápis. Quanto custou cada lápis? Explique seu raciocínio detalhadamente.

Fonte: Acervo da autora.

Este encontro teve a duração de dois períodos e, no primeiro momento, foi esclarecido aos alunos participantes que durante a pesquisa as atividades seriam realizadas em duplas ou trios e que em todas as aulas eles deveriam permanecer com os mesmos colegas. Além disso, explicamos que em todas as atividades as respostas deveriam ser justificadas da forma mais detalhada possível. Os alunos estavam empolgados em participar da pesquisa, demonstrando ânimo para o início das atividades.

No segundo momento, os alunos formaram 9 grupos (5 duplas e 4 trios) e então foram entregues as folhas com a Atividade 1, cujas situações-problemas deveriam ser resolvidas de forma livre. Os alunos leram a primeira situação-problema individualmente, nós a lemos em voz alta e então os estudantes relataram que a situação-problema era simples de ser resolvida, como havíamos previsto, e começaram a resolução. Contudo, enquanto passávamos nos grupos, os alunos relatavam que era difícil de justificar por escrito e explicar a ideia utilizada, uma vez que os cálculos que foram feitos eram considerados fáceis pelos alunos.

No final do período foram recolhidos os materiais dos alunos para dar prosseguimento às atividades no próximo encontro. O objetivo inicial era fazer ao final do encontro um fechamento, contudo, como os alunos estavam em atividades diferentes, pensamos que seria melhor deixar os alunos concluindo as atividades e em um outro momento fazer o fechamento com os alunos em grande grupo.

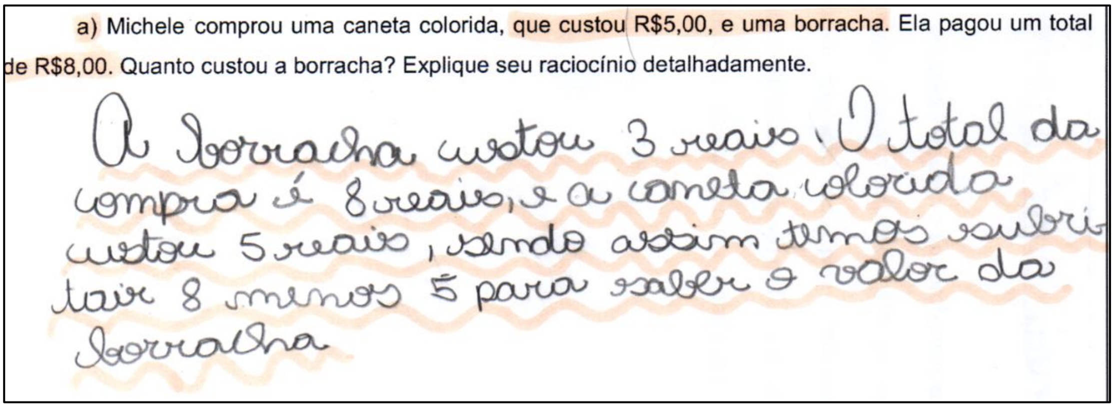
5.1.1. Análise da Atividade 1

Apresentamos aqui a análise da Atividade 1, na qual observamos quais os registros que os alunos apresentam na resolução das situações-problemas propostas, assim como verificamos se os mesmos apresentam argumentação por escrito em suas folhas de resposta.

Como mencionamos anteriormente, as situações-problemas apresentadas na Atividade 1 estão presentes no cotidiano dos alunos e os mesmos as resolveram facilmente. Contudo, relataram em suas falas durante o encontro, que era difícil de justificar por escrito o que haviam pensado. Acreditamos que este é um ponto positivo da turma, que desejou cumprir fielmente a tarefa de dar justificativas às suas resoluções.

Das nove resoluções analisadas, para o item a), todas apresentaram um registro em linguagem natural, trazendo a explicação do raciocínio utilizado na resolução da questão. Dessas nove resoluções, seis apresentaram também o registro numérico através da operação $8 - 5 = 3$ e uma delas apresentou a operação $5 + 3 = 8$. Um dos grupos apresentou juntamente com o registro na linguagem natural, o registro na forma algébrica. A Figura 9 ilustra a solução de um grupo que utilizou apenas a linguagem natural para expressar seu raciocínio.

Figura 9: Resolução Atividade 1 com registro em linguagem natural.

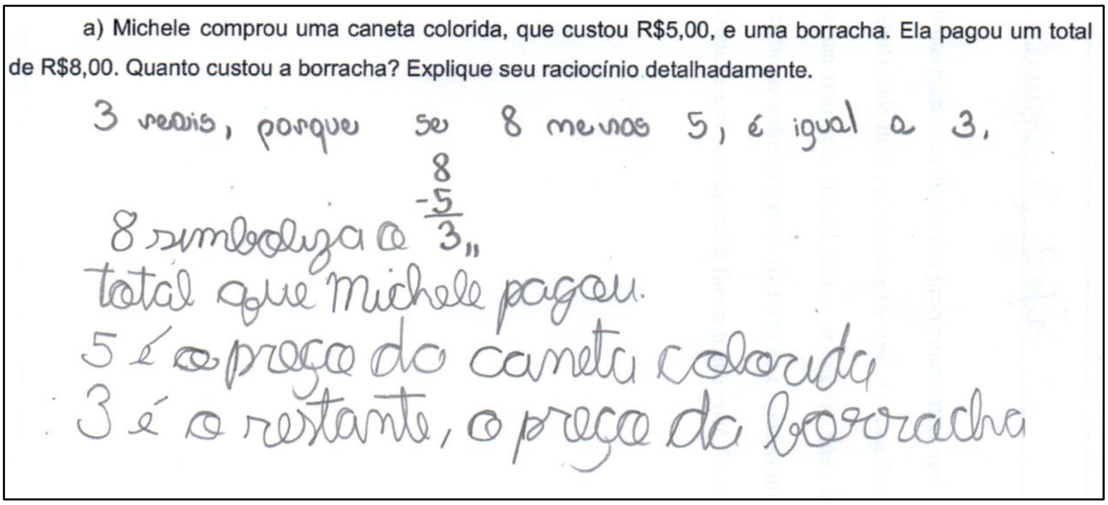

a) Michele comprou uma caneta colorida, que custou R$5,00, e uma borracha. Ela pagou um total de R$8,00. Quanto custou a borracha? Explique seu raciocínio detalhadamente.

A borracha custou 3 reais. O total da compra é 8 reais, e a caneta colorida custou 5 reais, sendo assim temos subtrair 8 menos 5 para saber o valor da borracha

Fonte: Acervo da autora.

Já a Figura 10, ilustra uma das soluções que trouxe registros na linguagem natural e na linguagem numérica. Esse grupo utilizou a linguagem natural para explicar o que significava cada um dos valores que aparecia no seu registro numérico, mostrando a preocupação em apresentar justificativas completas para as respostas.

Figura 10: Resolução com registros em linguagem natural e numérico.


a) Michele comprou uma caneta colorida, que custou R$5,00, e uma borracha. Ela pagou um total de R$8,00. Quanto custou a borracha? Explique seu raciocínio detalhadamente.

3 reais, porque se 8 menos 5, é igual a 3.

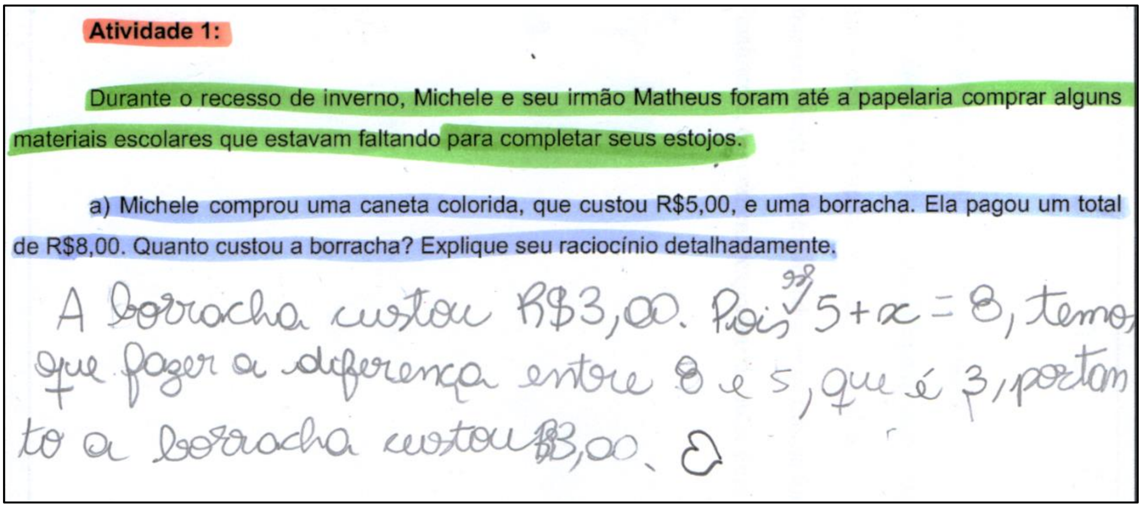
$$\begin{array}{r} 8 \\ -5 \\ \hline 3 \end{array}$$

"8 simboliza o total que Michele pagou.
5 é o preço da caneta colorida
3 é o restante, o preço da borracha

Fonte: Acervo da autora.

Como mencionamos anteriormente, um dos grupos apresentou juntamente com o registro na linguagem natural o registro algébrico: $5 + x = 8$ (Figura 11). Após apresentar esse registro, o grupo justificou que, para descobrir o valor da borracha, seria necessário descobrir a diferença entre 8 e 5, ou seja, fazer a subtração, assim como os outros grupos propuseram.

Figura 11: Registro algébrico na Atividade 1.



Atividade 1:

Durante o recesso de inverno, Michele e seu irmão Matheus foram até a papelaria comprar alguns materiais escolares que estavam faltando para completar seus estojos.

a) Michele comprou uma caneta colorida, que custou R$5,00, e uma borracha. Ela pagou um total de R$8,00. Quanto custou a borracha? Explique seu raciocínio detalhadamente.

A borracha custou R$3,00. Pois $5+x=8$, temos que fazer a diferença entre 8 e 5, que é 3, portanto a borracha custou R$3,00.

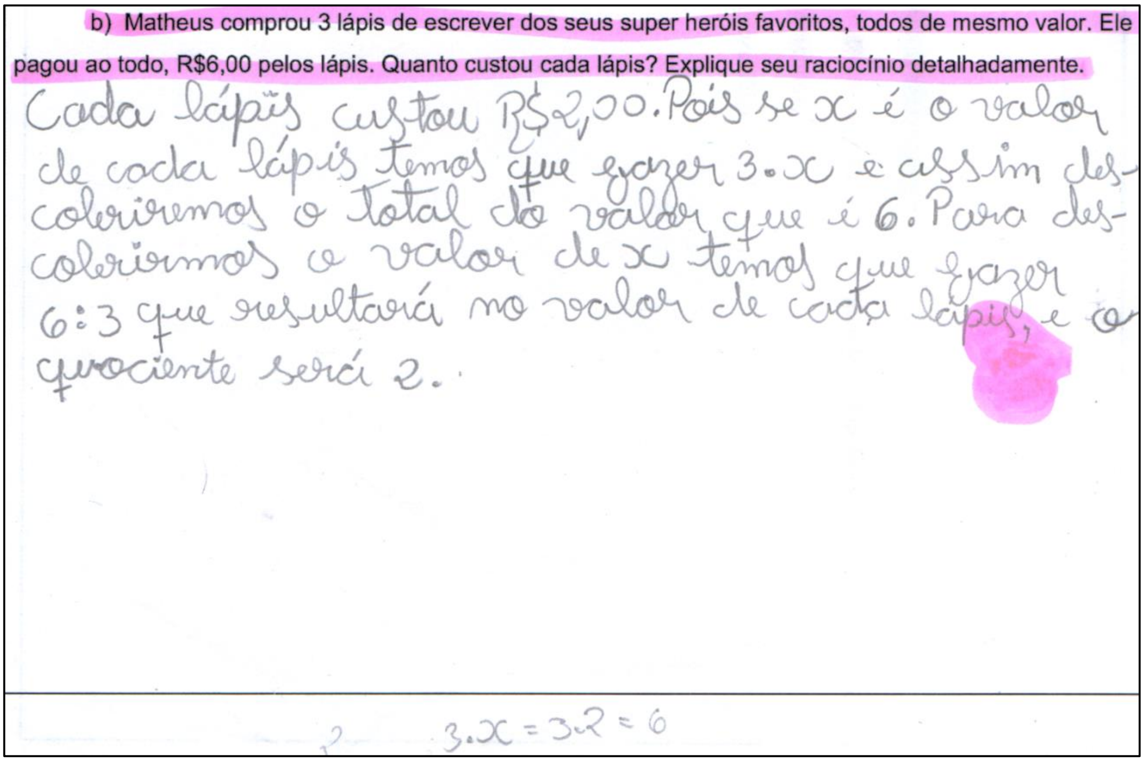
Fonte: Acervo da autora.

Acreditamos que o grupo que apresentou a operação de adição, tenha pensado da forma: “cinco, adicionado a qual número, que resulta em oito?”, visto que a sua justificativa se deu conforme segue: “A borracha custava R$3,00, pois somamos 5, que é o preço da caneta colorida, mais 3, que é o preço da borracha. Ou seja $5 + 3 = 8$, que é o total da conta de Michele”.

No item b), das nove resoluções analisadas, novamente todas continham registros com linguagem natural, sendo que três desses utilizaram apenas essa forma de registro. Quatro grupos utilizaram a operação: $6:3 = 2$, um grupo utilizou a justificativa de que $2 + 2 + 2 = 6$ e um dos grupos utilizou o registro algébrico.

É interessante observar na Figura 12 que o grupo, além de explicitar que para encontrar o valor de x é necessário fazer a operação de divisão, indica também a escrita: $3 \cdot x = 3 \cdot 2 = 6$ ao final da folha, que acreditamos ser a forma do grupo pensar “Três, multiplicado por qual número, que resulta em 6?” E descobrem que esse número é o 2.

Figura 12: Registro algébrico item b) da Atividade 1.



b) Matheus comprou 3 lápis de escrever dos seus super heróis favoritos, todos de mesmo valor. Ele pagou ao todo, R$6,00 pelos lápis. Quanto custou cada lápis? Explique seu raciocínio detalhadamente.

Cada lápis custou R$2,00. Pois se x é o valor de cada lápis temos que fazer 3.x e assim descobriremos o total do valor que é 6. Para descobrirmos o valor de x temos que fazer 6:3 que resultará no valor de cada lápis, e o quociente será 2.

$3.x = 3.2 = 6$

Fonte: Acervo da autora.

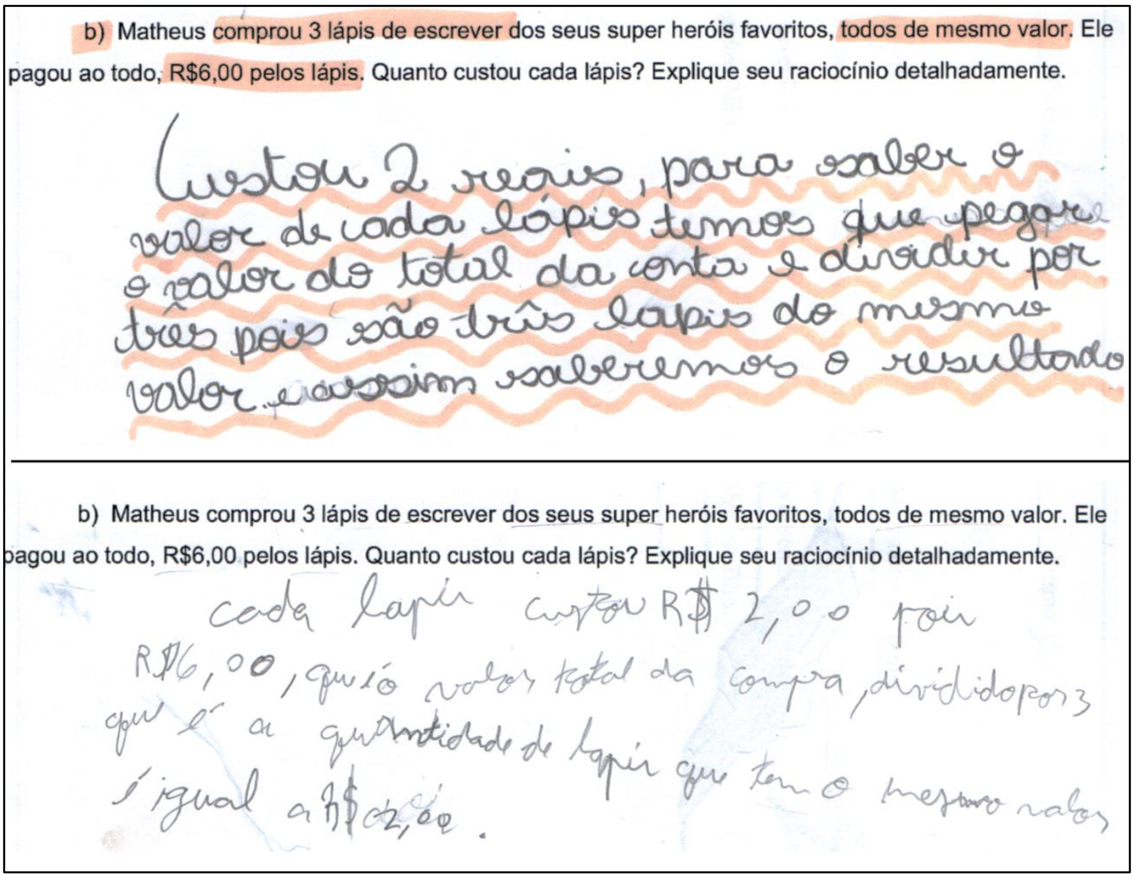
Os grupos que apresentaram seus registros utilizando a linguagem natural escreveram que deveriam dividir o total da compra (seis reais) pela quantidade total de lápis (três), para obter o valor de cada lápis. É interessante destacar que dois desses três grupos enfatizaram que os lápis tinham o mesmo valor (Figura 13) , o que justifica a possibilidade de poder efetuar a divisão por três. Se no problema não tivesse sido explicitado que os valores dos lápis eram iguais, os alunos poderiam se perguntar: será que os três lápis têm valor igual?... Caso não tivessem, a solução apresentada pelos grupos seria apenas uma possibilidade de resolução para o problema.

Os grupos que apresentaram registros numérico e com linguagem natural, assim como no item a), apresentaram suas justificativas na linguagem natural e o registro do cálculo da divisão $6{:}\,3 = 2$, na forma numérica.

Dessa forma, podemos observar que, na Atividade 1 da sequência de atividades, todos os grupos resolveram de forma correta as situações-problemas propostas, apresentando registros na linguagem natural, numérico e algébrico. Conforme nossa análise, em alguns casos a linguagem natural é trazida pelos alunos para justificar seus registros numéricos, dessa forma, podemos observar que existe uma transição entre os registros, apresentando algumas vezes o tratamento na linguagem natural e outras vezes através de cálculos, no registro numérico.

Também notamos que nosso objetivo de incentivar a argumentação foi alcançado, visto que os alunos se preocuparam em apresentar detalhadamente suas justificativas em cada item da questão.

Figura 13: Registros em linguagem materna - Atividade 1- item b.


b) Matheus comprou 3 lápis de escrever dos seus super heróis favoritos, todos de mesmo valor. Ele pagou ao todo, R$6,00 pelos lápis. Quanto custou cada lápis? Explique seu raciocínio detalhadamente.

Custou 2 reais, para saber o valor de cada lápis temos que pegar o valor do total da conta e dividir por três pois são três lapis do mesmo valor e assim saberemos o resultado

b) Matheus comprou 3 lápis de escrever dos seus super heróis favoritos, todos de mesmo valor. Ele pagou ao todo, R$6,00 pelos lápis. Quanto custou cada lápis? Explique seu raciocínio detalhadamente.

cada lapis custou R$ 2,00 pois R$6,00, que é o valor total da compra, dividido por 3 que é a quantidade de lapis que tem o mesmo valor é igual a R$ 02,00.

Fonte: Acervo da autora.

5.2. Encontros 2, 3 e 4

Para estes encontros, que totalizaram cinco períodos de prática, foram planejadas as atividades: 1.1, 2, 2.1, 3 e 3.1. Como optamos por respeitar o tempo de cada grupo na resolução das atividades, os grupos não estavam sempre resolvendo as mesmas questões. Dessa forma, decidimos fazer um bloco com essas atividades e, quando todos os grupos haviam finalizado, fizemos o fechamento em grande grupo no Encontro 5.

A Atividade 1.1 é uma continuação da Atividade 1, utilizando as mesmas situações-problemas propostas. Essa atividade foi criada com a ideia de dar um outro olhar para as situações-problemas já resolvidas aritmeticamente, considerando nossa ideia de que é importante utilizar os conhecimentos que os alunos já possuem na inserção de novos conteúdos. Nos inspiramos em Lins e Gimenez (1997), que afirmam que é preciso trabalhar com os estudantes a transição entre a aritmética e a álgebra e, para facilitar essa transição, optamos por trabalhar com o material manipulativo *Algebra Tiles* e também o com o registro nas tabelas. Trabalhamos com esse material, incentivando os alunos no uso das ideias das resoluções da Atividade 1, resolvida aritmeticamente e assim, estimulamos os alunos a começar a relacionar a aritmética com a álgebra. Além disso, acreditamos que os diferentes registros de representação semiótica que são apresentados durante a resolução dessa atividade e a transição entre eles, segundo Duval (2018) podem auxiliar na aprendizagem dos alunos para a resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita. Ainda, em Duval (2018), é apresentada a necessidade da construção de situações de aprendizagem para que os alunos comparem as variações de conteúdo de diferentes representações semióticas, para terem um maior poder de escolha na resolução de futuras situações-problemas.

Assim, salientamos que os objetivos dessa atividade são: representar com palavras, pictoricamente e de outra forma, as situações-problemas da Atividade 1; encontrar uma forma de manipular o material para encontrar o valor desconhecido e associá-la à representação pictórica; converter a representação pictórica para outra representação e; apresentar os tratamentos nas diferentes representações.

Nessa atividade, os alunos foram convidados a completar duas tabelas, uma para o item a) e outra para o item b) da Atividade 1. Um exemplo da tabela encontra-se na Figura 14 (o mesmo modelo de tabela é também utilizado nas atividades 2.1 e 5.1). Para realizar essa atividade, além das folhas com as tabelas, os estudantes receberam um envelope com os *Algebra Tiles* e um "tapetinho" com um sinal de igualdade para que os alunos manipulassem o material sobre o mesmo.

Figura 14: Tabela Atividade 1.1.

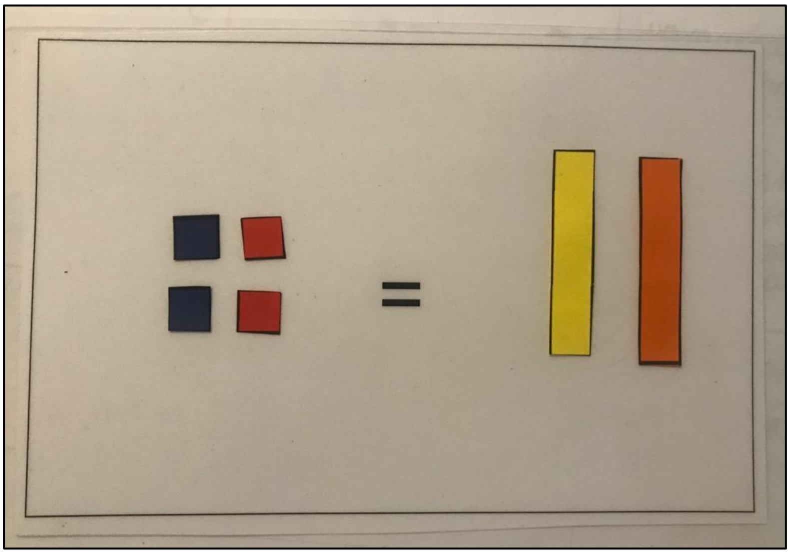
Nomes: ____ Turma: ____
Problema 1. a)

Utilizando palavras:	*Algebra Tiles:*	De outra forma:

Fonte: Acervo da Autora.

Na Figura 15, podemos observar o “tapetinho” com o sinal de igualdade e uma parte do material *Algebra Tiles*.

Figura 15: Material manipulativo: *Algebra Tiles.*



Fonte: acervo da autora.

As atividades 2 e 2.1 foram construídas com os mesmos objetivos que as atividades anteriores 1 e 1.1, mas com um nível mais complexo, pois as situações-problemas tinham mais informações a serem consideradas. Podemos observar as três situações-problemas da Atividade 2 (e que serão utilizadas também na Atividade 2.1) na Figura 16. A terceira situação-problema foi criada com a ideia de gerar um pouco de dificuldade nos alunos para resolução aritmeticamente, visto que desejamos mostrar aos alunos que algumas vezes é mais relevante resolver a situação-problema algebricamente do que aritmeticamente, ou seja, o objetivo do problema do item c é mostrar que algumas vezes pode ser difícil resolver um problema apenas utilizando aritmética.

Figura 16: Atividade 2.

Problema: Mariana e Fernanda são vizinhas e foram ao supermercado para fazer algumas compras para suas mães.

a) Mariana comprou três caixas de leite e um pacote de maçãs. O pacote de maçãs, que estava sendo vendido por unidade, custou R$4,00. No total, ela pagou R$ 10,00. Quanto custou cada caixa de leite? Explique seu raciocínio detalhadamente.

b) Já Fernanda comprou quatro pacotes de bolacha e um pacote de balas de goma para dividir com seu irmão, pagando um total de R$ 12,00. Quanto custou cada pacote de bolacha, se o pacote de balas de goma custou o dobro de cada pacote de bolacha? Explique seu raciocínio detalhadamente.

c) Quando Fernanda chegou em casa, foi contar quanto dinheiro havia sobrado em sua carteira depois das compras. Ela percebeu que tinha menos dinheiro que o seu irmão Maurício: constatou que seu irmão tinha o dobro do que ela possuía. Para que os dois ficassem com a mesma quantia para comprar lanche na escola, a mãe de Fernanda deu R$8,00 para a Fernanda e R$2,00 para o Maurício. Quantos reais Fernanda tinha na carteira ao chegar em casa? Explique seu raciocínio detalhadamente.

Fonte: Acervo da autora.

Assim como na Atividade 1.1, na atividade 2.1, os alunos receberam um envelope com os *Algebra Tiles*, o “tapetinho” com sinal de igualdade e as tabelas, uma para cada item. Nosso objetivo era que eles apresentassem os diferentes registros e tratamentos na tabela para cada situação-problema dada, mas agora com uma dificuldade a mais proposta no terceiro item: agora a incógnita aparece dos dois lados da igualdade, e os alunos tinham o desafio de obter o valor de x, ou seja, teriam que chegar em uma igualdade do tipo: x = número ou número = x .

Para finalizar esse bloco de atividades foram propostas as atividads 3 e 3.1. A Atividade 3 (Figura 17) consiste em um desafio, com várias informações e o objetivo é provocar dificuldades nos alunos no desenvolvimento da solução, para questionar a resolução de situações-problemas apenas via aritmética, assim como no item c) da atividade 2. Já a Atividade 3.1 foi criada com o propósito de resolver a Atividade 3 de outra forma, mas agora sem a tabela, pois é praticamente inviável representá-la utilizando os *Algebra Tiles,* já que os valores são maiores.

Gostaríamos de destacar que os alunos receberam as atividades na seguinte ordem durante os encontros 2 até 4: Atividade 1.1, atividades 2 e 3, Atividade 2.1 e, para finalizar, a

Atividade 3.1. Essa ordem foi importante pois gostaríamos que os alunos tentassem resolver a Atividade 3 sem ter trabalhado "tanto" com álgebra ainda, para depois eles tomarem a consciência da importância da álgebra e então resolverem a questão de outra forma, na Atividade 3.1.

Figura 17: Atividade 3.

Atividade 3: (DESAFIO)

Problema: Samuel, Pedro e Tiago tinham juntos R$560,00. Sabendo que Pedro tinha R$20,00 a mais que Samuel e que Tiago tinha quatro vezes a quantia de Samuel, quantos reais tinha cada um?

Fonte: Acervo da autora.

Os encontros iniciavam com a formação dos grupos e a entrega dos materiais (folhas das atividades, envelope com *Algebra Tiles* e "tapetinho" com o sinal de igualdade para os alunos utilizarem como base para manipular os *Algebra Tiles*). É importante salientar que ao iniciarmos a aplicação da sequência conversamos com a turma e ressaltamos a importância da presença dos alunos em todas as aulas, e obtivemos sucesso, pois, todos os alunos participantes da pesquisa estavam presentes durante esses três encontros. Antes de cada encontro, organizávamos qual atividade cada grupo precisava concluir, ou iniciar no encontro posterior, dessa forma, cada grupo recebia a sua respectiva atividade e, à medida que finalizavam, recebiam a próxima tarefa.

Durante os encontros, passávamos nas mesas para instigar os alunos na resolução das questões. A maioria dos grupos não apresentou dificuldades na manipulação do material, principalmente quando buscavam a utilização (por conta própria, ou por dica nossa) das operações usadas durante a primeira resolução das situações-problemas. A dificuldade surgia no momento de representar no papel o que haviam feito, visto que era feita a manipulação até encontrar o valor para x, então a dúvida estava em como representar todo o processo. Sugeríamos para os grupos que fizessem a representação inicial utilizando o material e em seguida desenhassem no papel a representação que estava no "tapetinho". Feita essa representação, sugeríamos que passassem uma linha na folha para após representar a próxima manipulação feita.

No final de cada encontro recolhíamos os materiais entregues aos alunos para organizar para o próximo encontro. No Encontro 4, à medida que os alunos terminavam a Atividade 3.1, eram oferecidas atividades extras para que eles ficassem ocupados enquanto os colegas finalizavam as atividades da sequência.

Apresentamos um relato mais detalhado de cada uma das atividades juntamente com as suas análises para ilustrar algumas situações ocorridas durante as aulas na próxima seção.

5.2.1. Análise da Atividade 1.1

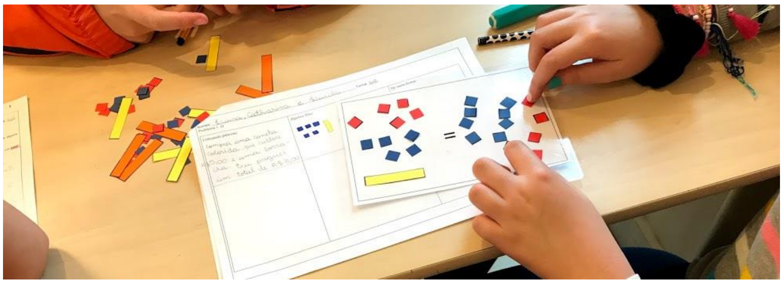
Apresentamos nesta seção a análise da Atividade 1.1, na qual analisamos quais registros de representação semiótica foram trazidos pelos alunos, se eles apresentam a conversão entre os registros no decorrer da atividade e os devidos tratamentos. Além disso, observamos se os alunos utilizam a resolução apresentada para a Atividade 1 como alguma ideia para manipular o material *Algebra Tiles*.

De forma geral, ao receber a folha os alunos representaram o problema utilizando palavras, resumindo um pouco a situação-problema expressada no item a). Após fazerem isso chegou o momento em que os alunos perguntavam o que precisavam fazer ao prosseguirem. Explicávamos que eles poderiam fazer a representação utilizando os *Algebra Tiles* de forma concreta e então desenhar essa representação na folha de respostas. Também falamos que os alunos poderiam utilizar a primeira coluna para colocar possíveis justificativas do que estavam fazendo na segunda coluna ao manipular o material. É interessante ressaltar que os alunos apresentaram a conversão entre as representações em linguagem natural e pictórica sem nos questionar como fariam isso. Feita a representação com *Algebra Tiles*, explicávamos que o objetivo/desafio era encontrar o valor de *x*, utilizando manipulações com o material e que cada etapa da manipulação seria interessante se eles expressassem na tabela. Também indicamos que eles poderiam separar cada etapa da manipulação utilizando uma linha, feita com uma régua para separar cada passo da manipulação.

Durante a resolução, enquanto circulávamos pela sala, observamos duas formas diferentes de os alunos realizarem a manipulação do material no item a) da questão. Em uma delas os alunos representavam a situação-problema utilizando os *Algebra Tiles* e afirmavam prontamente que o *x* tinha que valer 3, pois os dois lados da igualdade precisam ter valores iguais, imitando aqui o equilíbrio da balança. De outra forma, os alunos representavam a situação-problema utilizando os *Algebra Tiles* e diretamente manipulavam o material para tentar isolar *x*, ou seja, deixar em um lado da igualdade somente o retângulo amarelo que representa o *x*.

Nos grupos que presenciamos resolvendo da primeira forma, perguntávamos de que forma, utilizando o material, eles poderiam mostrar que o valor de *x* era 3. Em um desses grupos, quando fizemos essa pergunta, os alunos ficaram olhando sem saber o que responder. Então sugerimos que o grupo olhasse para o material e explicasse como ele funcionava. Um dos integrantes respondeu: "Se eu juntar um azul e um vermelho, se anulam". Então perguntamos o que poderíamos fazer com essa informação e o mesmo integrante respondeu: "Eu poderia colocar 5 vermelhas aqui", apontando para o lado em que estava a representação de cinco unidades azuis e um retângulo amarelo. Então perguntei se poderíamos acrescentar algo em apenas um dos lados da igualdade e então o colega de grupo respondeu: "Não, pois a balança cai para o lado" e então completou: "Sempre precisa somar dos dois lados para manter a igualdade". Então o grupo adicionou as unidades negativas aos dois lados, como podemos observar na Figura 18.

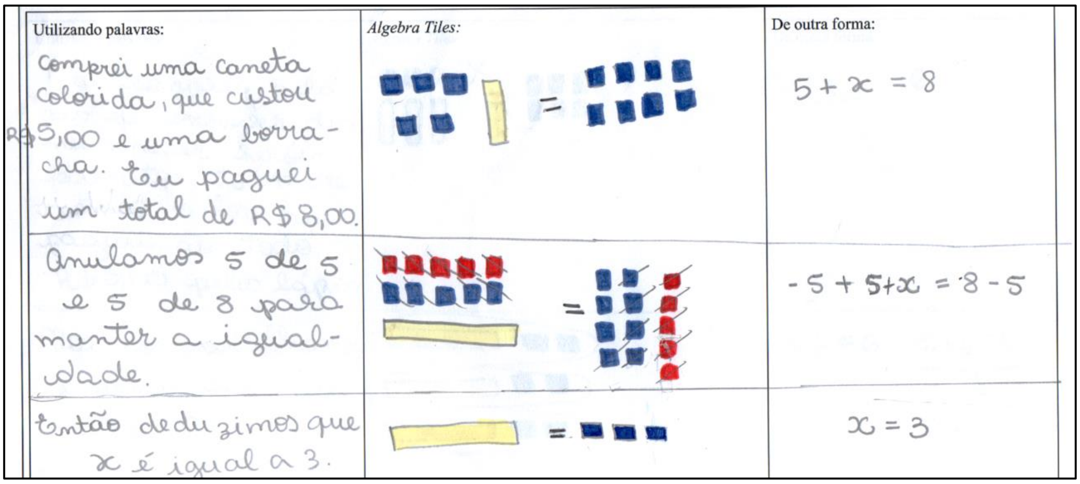
Figura 18: Grupo manipulando os *Algebra Tiles.*



Fonte: Acervo da autora.

O grupo fez o cancelamento e chegou à representação de um retângulo amarelo igual a três unidades azuis, como observamos na representação de todo o desenvolvimento feita pelo grupo na Figura 19.

Figura 19: Resolução Atividade 1.1 (a)

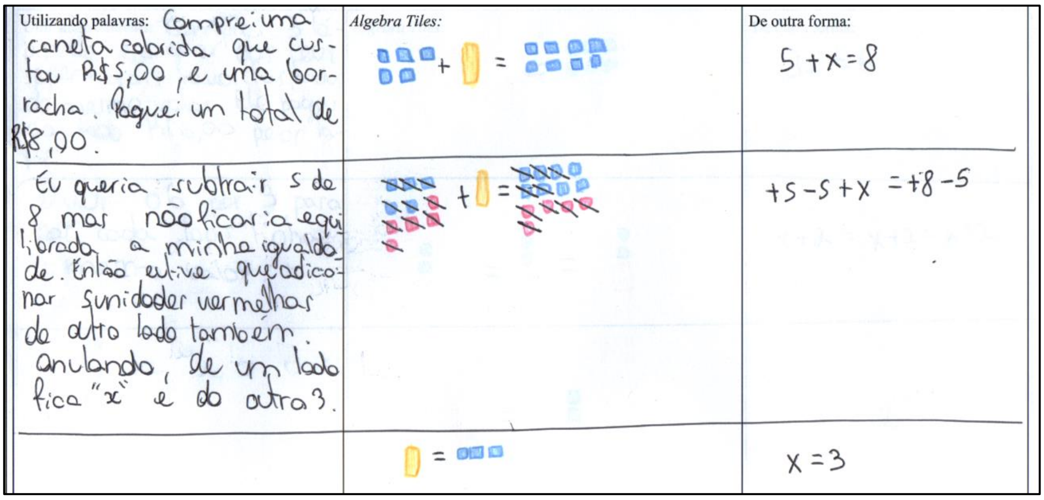


Utilizando palavras:	*Algebra Tiles:*	De outra forma:
Comprei uma caneta colorida, que custou R$5,00 e uma borracha. Eu paguei um total de R$8,00.	=	$5 + x = 8$
Anulamos 5 de 5 e 5 de 8 para manter a igualdade.	=	$-5 + 5 + x = 8 - 5$
Então deduzimos que x é igual a 3.	=	$x = 3$

Fonte: Acervo da autora.

Um dos grupos que trabalhava da segunda forma, que inclusive explicitou que precisava descobrir o valor do x, ao ser questionado sobre como fazer isso, respondeu que na resolução do problema anterior tinha feito “$8 - 5$” para descobrir o valor. Perguntamos então como que eles fariam para representar com o material e um dos alunos respondeu que poderiam colocar 5 vermelhas junto com as 8 azuis. Questionamos se poderíamos adicionar 5 unidades vermelhas em somente um dos lados da igualdade e o grupo então lembrou que não poderia, pois precisava manter o equilíbrio da igualdade. Então responderam que precisavam adicionar 5 unidades vermelhas também ao outro lado da igualdade. A resolução deste grupo pode ser observada na Figura 20.

Figura 20: Resolução Atividade 1.1 (a)



Fonte: Acervo da autora.

Observe, na Figura *20*: Resolução Atividade 1.1 (a)Figura 20, que o grupo representou a situação-problema com a equação $5 + x = 8$. Na segunda linha, para ilustrar a adição dos cinco quadradinhos vermelhos, o grupo escreveu a seguinte equação: $5 - 5 + x = 8 - 5$. Neste momento, se o grupo escrevesse “ao pé da letra” o que está representado nos *Algebra Tiles*, a equação escrita seria: $5 + (-5) + x = 8 + (-5)$. Dessa forma, notamos que o grupo pula o passo de escrever na forma de adição, já que, por meio de estudos anteriores, percebe que fazer $5 + (-5)$, é o mesmo que fazer $5 - 5$.

Podemos notar também na primeira coluna da Figura 19 e na primeira coluna da Figura 20 que os grupos explicam que anularam 5 unidades de cada lado da igualdade para manter o equilíbrio da igualdade, ou seja, fizeram o uso do princípio aditivo da igualdade. É importante notar que o uso do princípio foi utilizado, pois os alunos gostariam de fazer a mesma operação aritmética que na Atividade 1 (subtrair 5 unidades de 8), contudo, quando questionamos se poderíamos fazer a operação em apenas um lado da igualdade, os grupos afirmaram que não. Dessa forma, notamos que o uso da ideia aritmética da atividade anterior, contribui para gerar ideias de manipulação dos *Algebra Tiles*, que levaram ao uso das propriedades da igualdade, partindo ou não, do nosso incentivo.

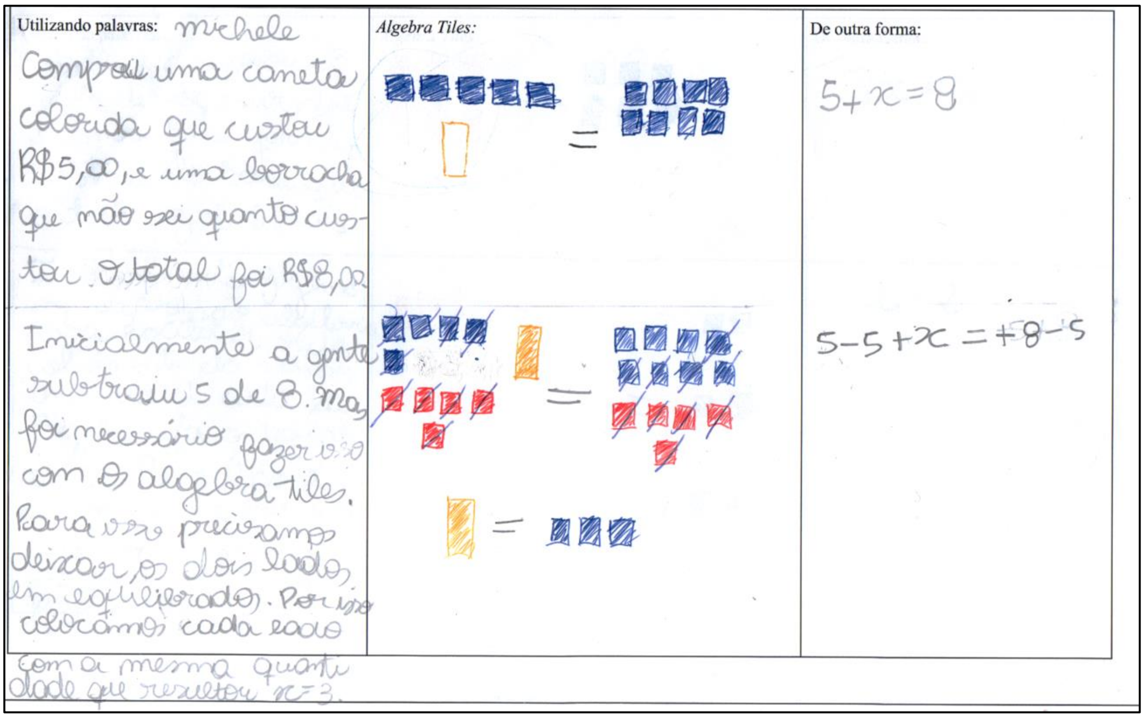
Note que não explicamos incialmente aos grupos que deveriam efetuar operações dos dois lados da igualdade, sempre respeitando as propriedades da igualdade. O que fizemos foi instigá-los a lembrar do estudo das propriedades que já havia sido feito anteriormente, para auxiliar no desenvolvimento do pensamento matemático e buscar todo o conhecimento que eles já possuem para compreender a resolução de equações.

Quanto às folhas de atividades que os alunos entregaram, das nove resoluções que recebemos, todas apresentaram os registros na linguagem natural, pictórica (representando os *Algebra Tiles*) e algébrica. Acreditamos que a escolha da conversão do registro pictórico para o registro algébrico, na última coluna, se deu de forma natural por causa do material manipulativo, que tem o retângulo amarelo representando x.

De maneira geral, após descrever a situação-problema utilizando palavras, os grupos utilizaram a primeira coluna para explicar e/ou justificar o que fizeram na segunda coluna enquanto manipulavam o material. É importante salientar que dos nove grupos, seis apresentaram justificativas para o que haviam feito na manipulação utilizando o princípio aditivo das igualdades. Nenhum dos grupos nomeou o princípio, mas expressões como as seguintes confirmam o seu uso: “Anulamos 5 de 5 e 5 de 8 para manter a igualdade” (Figura 19); “Eu queria subtrair 5 de 8, mas não ficaria equilibrada a minha igualdade. Então eu tive que adicionar 5 unidades vermelhas do outro lado também” (Figura 20); “[...] se tiramos de um lado temos que tirar do outro”; “Para isso precisamos deixar os dois lados equilibrados” (Figura 21). Essas justificativas por escrito são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos.

Observando as Figuras 19,20 e 21, como exemplos, percebemos que houve a formação do registro em linguagem natural e a conversão desse registro para o registro pictórico. Observamos também que é realizado o tratamento do registro pictórico por meio da manipulação dos *Algebra Tiles*: são obtidas igualdades equivalentes em cada passo da manipulação a partir da utilização do princípio aditivo, caracterizando o tratamento do registro pictórico inicial. Além disso, foi realizada a conversão para o registro algébrico e o tratamento nesse registro. Assim, podemos notar que as três atividades cognitivas ligadas a semiose (que é a produção ou a apreensão de uma representação semiótica), apareceram nessas resoluções: a formação de uma representação, a conversão e o tratamento.

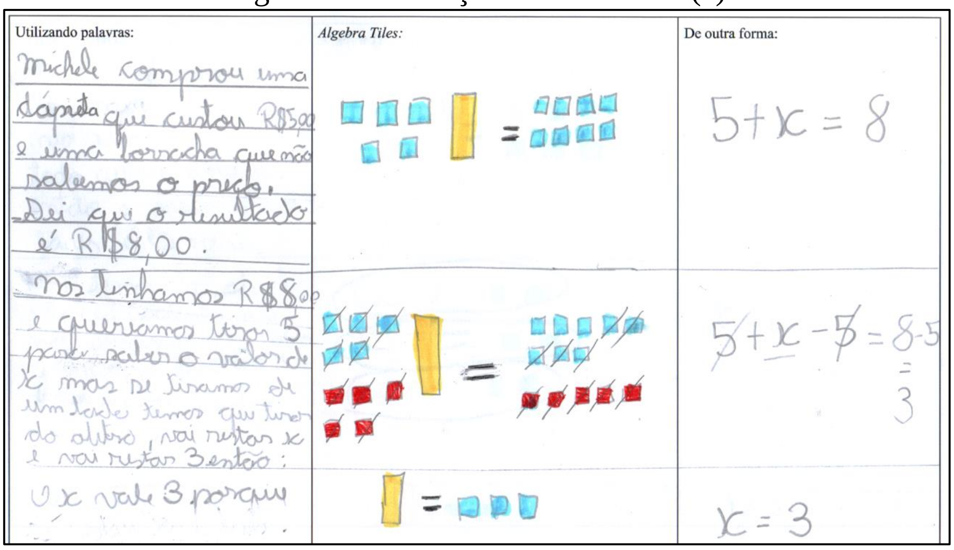
Figura 21: Resolução Atividade 1.1 (a)



Fonte: Acervo da autora.

A conversão, segundo Duval (2018), deve possibilitar uma correspondência termo a termo entre os conteúdos dos diferentes registros. Podemos notar, em outra resolução (exposta na Figura 22), que as cinco unidades azuis apareceram em correspondência com o valor da caneta; o valor da borracha, que não era conhecido inicialmente, estava representado pelo retângulo amarelo e; o valor total da compra estava representado pelas oito unidades azuis. Assim, notamos a correspondência, termo a termo, entre os dois registros.

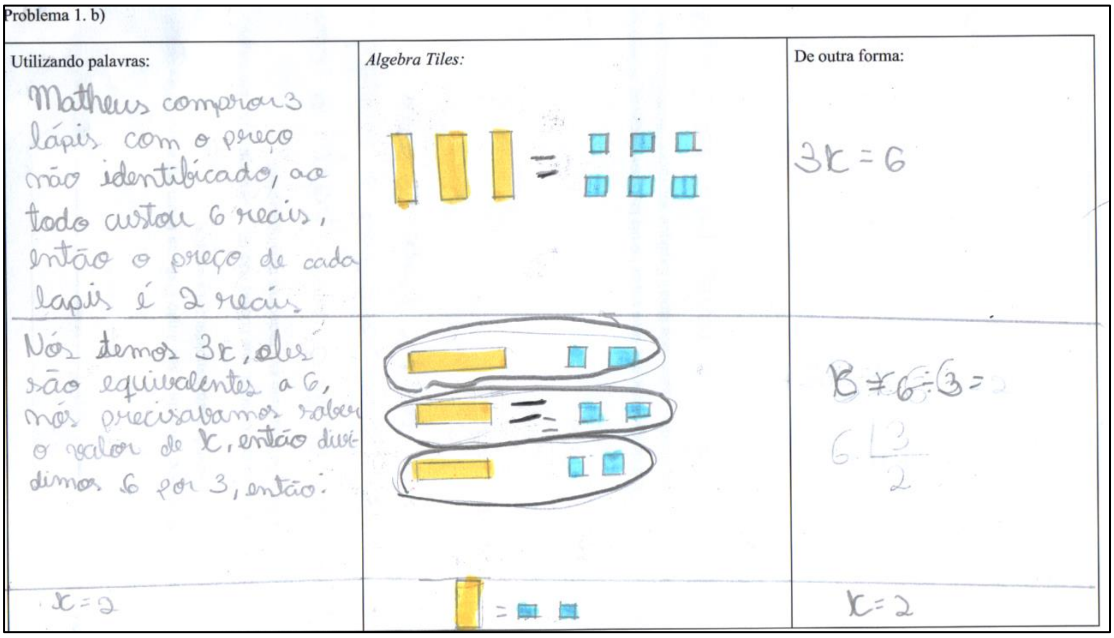
Figura 22: Resolução Atividade 1.1 (a)



Fonte: Acervo da autora.

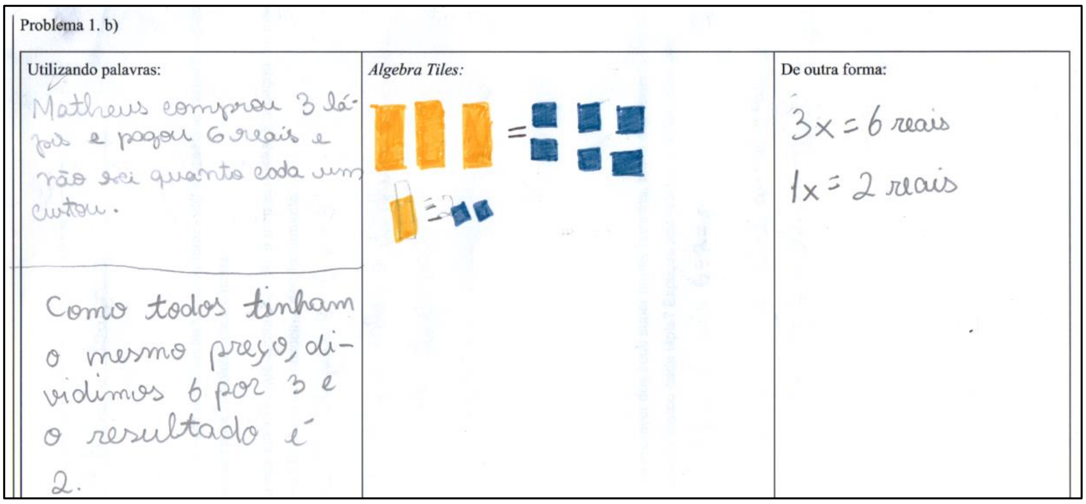
No item b) desta atividade, assim como no item a), os três registros apresentados por todos os nove grupos foram: linguagem natural, registro pictórico e registro algébrico. Nesta situação-problema os alunos já estavam mais habituados com o preenchimento da tabela e uma dúvida que praticamente todos os alunos tiveram era: como representar a divisão de seis unidades azuis entre os três retângulos amarelos no registro da atividade. Alguns grupos alinharam cada retângulo amarelo com duas unidades azuis (Figura 23), outros simplesmente colocaram um retângulo amarelo igualado a duas unidades azuis (Figura 24) e um grupo separou por barras os retângulos amarelos e as unidades azuis (Figura 25).

Figura 23: Resolução Atividade 1.1 (b)



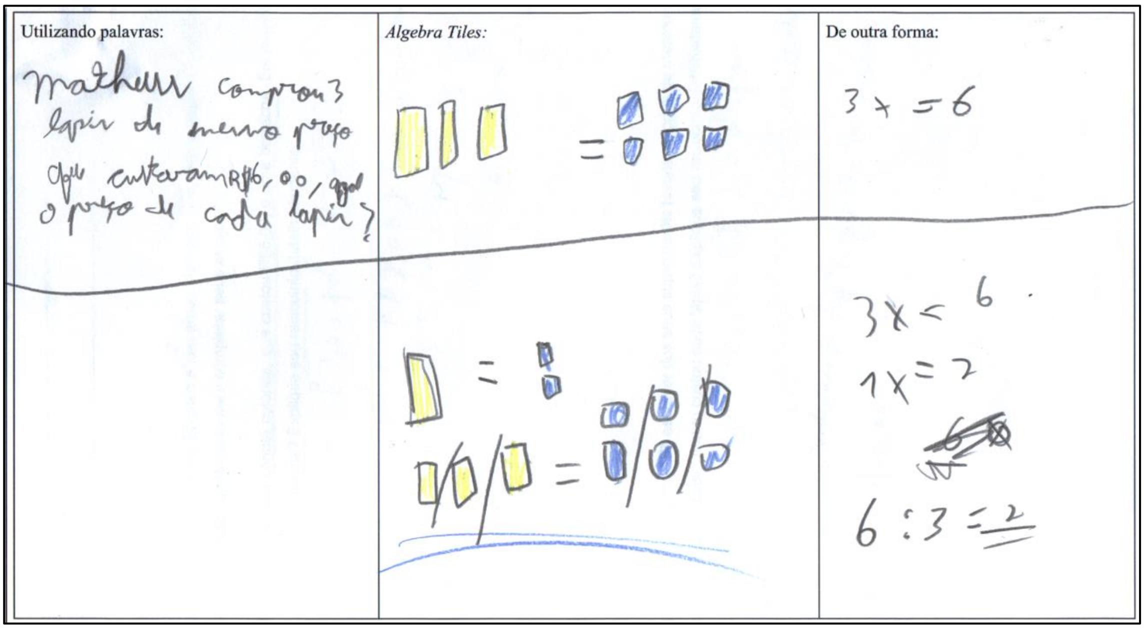
Fonte: Acervo da autora.

Figura 24: Resolução Atividade 1.1 (b)



Fonte: Acervo da autora.

Figura 25: Resolução Atividade 1.1 (b)



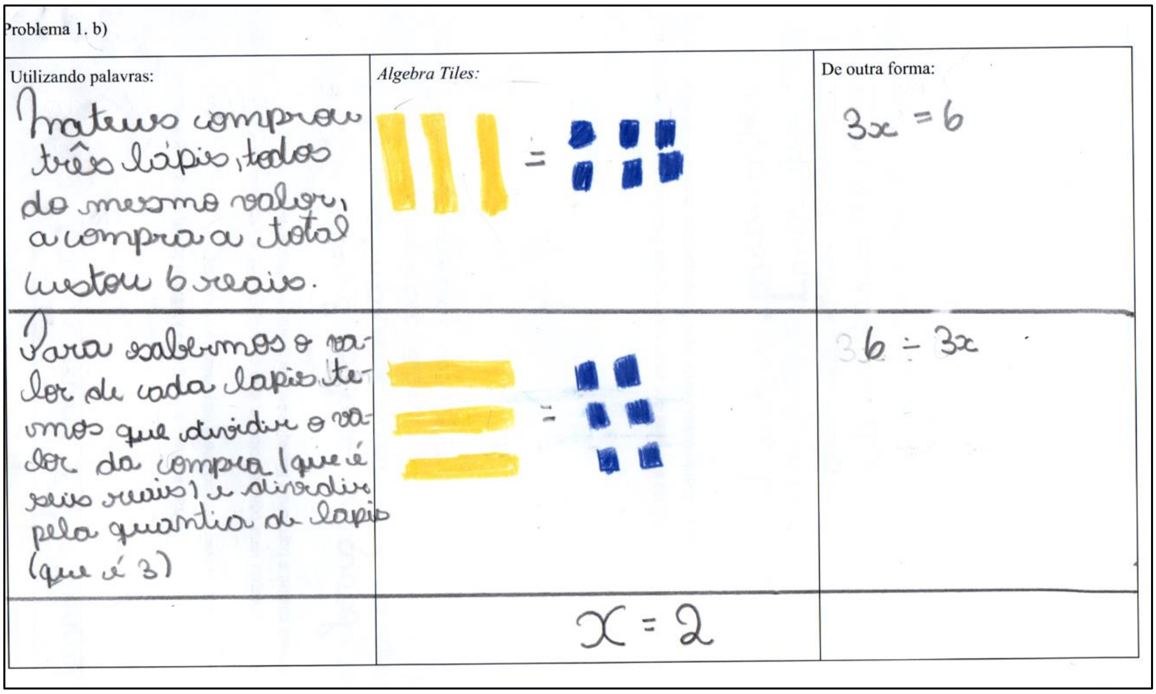
Fonte: Acervo da autora.

Dos nove grupos, após utilizar a primeira linha da primeira coluna para descrever o problema em palavras, oito apresentaram descrições e justificativas para o que haviam feito na segunda coluna e um grupo não escreveu nada além da primeira linha da coluna, como ilustra a Figura *25*. Ao contrário do item a), em que os alunos apresentaram justificativas utilizando a ideia do princípio aditivo das igualdades, no item b) não foram citadas justificativas utilizando as ideias do princípio multiplicativo das igualdades. Acreditamos que este não tenha sido citado pelos alunos pois era natural aos alunos que cada retângulo amarelo valia duas unidades azuis e, apesar de terem feito a separação dos dois lados da igualdade, como na Figura *23*, por exemplo, não viram uma necessidade de escrever que estavam separando dos dois lados da igualdade em três partes iguais.

Assim como no item a), no item b) também podemos notar a conversão do registro em linguagem natural para o registro pictórico, havendo a correspondência termo a termo e a realização do tratamento. Também observamos a conversão do registro pictórico para o registro algébrico e o tratamento deste último geralmente omitindo a operação de divisão nos dois lados da igualdade, como observamos nas Figuras 23, 24 e 25.

Um grupo, cuja resolução está na Figura 26 expressou a divisão da forma: $6 : 3x$. Assim, esse grupo pensou: como um lápis está representado por x, para saber o valor de cada lápis, basta dividir os seis reais por $3x$, com esse “$3x$” simbolizando “três lápis”, ou seja: dividir os seis reais entre os três lápis.

Figura 26: Resolução Atividade 1.1 (b)



Fonte: Acervo da autora.

A partir da análise da Atividade 1.1, observamos que nossos objetivos foram de maneira geral alcançados, visto que os alunos tiveram a oportunidade de comparar e produzir diferentes registros para uma mesma situação-problema, realizando a conversão entre os registros e os tratamentos, apresentando as três atividades cognitivas fundamentais para a semiose, que são essenciais para a aprendizagem de conceitos de matemática, segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Além disso, notamos que a resolução das situações-problemas, anteriormente ao uso do material, favoreceu no momento de entender a manipulação dos *Algebra Tiles*, e também no tratamento do registro algébrico. Dessa forma, acreditamos que essa atividade pode auxiliar os alunos na transição entre a aritmética e a álgebra, conforme é sugerido em Lins e Gimenez (1997). Ainda pudemos notar um engajamento dos alunos na apresentação de suas justificativas, trazendo à tona propriedades importantes estudadas anteriormente, como a regra do cancelamento e os princípios da igualdade, o que pode contribuir para o desenvolvimento da argumentação matemática dos alunos.

5.2.2. Análise da Atividade 2

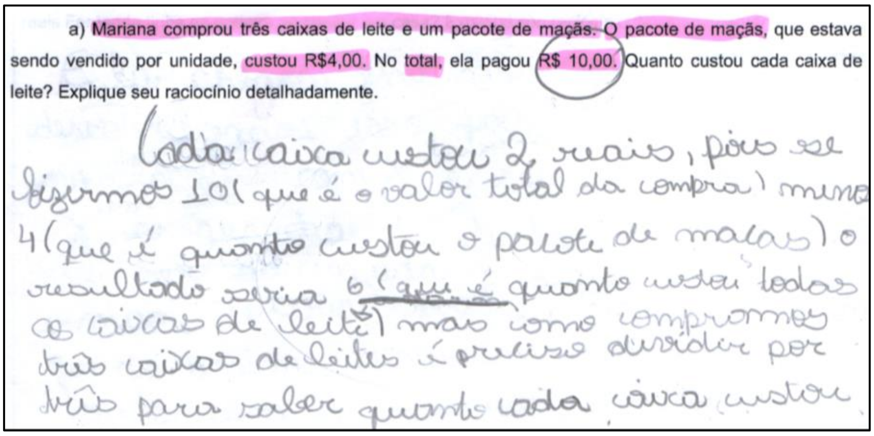
Nessa seção, apresentamos a análise da Atividade 2, na qual buscamos investigar quais os registros apresentados pelos alunos. Além disso, observamos se os alunos apresentam justificativas para suas respostas.

Os alunos resolveram os itens a) e b) com maior facilidade que o item c), alcançando um dos nossos objetivos na criação deste item da atividade, que era mostrar aos alunos que algumas vezes o uso de outras ferramentas, além da aritmética, pode ser mais conveniente para a resolução de algumas situações-problemas, pois podem tornar a resolução mais simples ou mais rápida.

Das nove resoluções analisadas para o item a), todas apresentaram o registro da solução em linguagem natural, trazendo explicações acerca do raciocínio utilizado na resolução da questão. Dessas nove, quatro apresentaram também registro numérico e uma destas, ainda apresentou o registro algébrico.

Na Figura 27, podemos observar um dos registros em linguagem natural, no qual podemos notar que o grupo se preocupou em apresentar uma argumentação detalhada sobre o que havia feito para resolver a questão.

Figura 27: Resolução Atividade 2 (a)

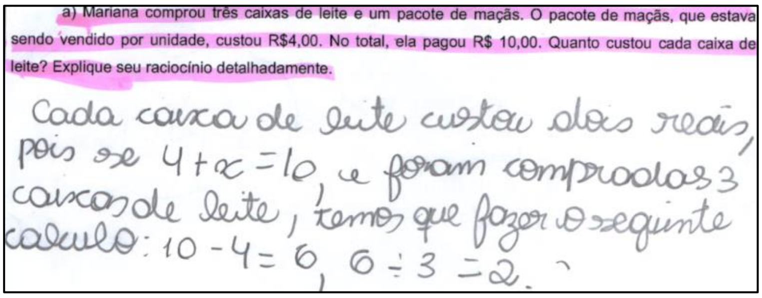

a) Mariana comprou três caixas de leite e um pacote de maçãs. O pacote de maçãs, que estava sendo vendido por unidade, custou R$4,00. No total, ela pagou R$ 10,00. Quanto custou cada caixa de leite? Explique seu raciocínio detalhadamente.

Cada caixa custou 2 reais, pois se fizermos 10 (que é o valor total da compra) menos 4 (que é quanto custou o pacote de maças) o resultado seria 6 (que é quanto custou todas as caixas de leite) mas como compramos três caixas de leites é preciso dividir por três para saber quanto cada caixa custou

Fonte: Acervo da autora.

Já na Figura 28, é apresentada uma resolução em que o grupo faz uso dos três registros: em linguagem natural, algébrico e numérico. Podemos notar que o grupo apresentou o registro algébrico, mas realizou o tratamento utilizando o registro numérico.

Figura 28: Resolução Atividade 2 (a)



a) Mariana comprou três caixas de leite e um pacote de maçãs. O pacote de maçãs, que estava sendo vendido por unidade, custou R$4,00. No total, ela pagou R$ 10,00. Quanto custou cada caixa de leite? Explique seu raciocínio detalhadamente.

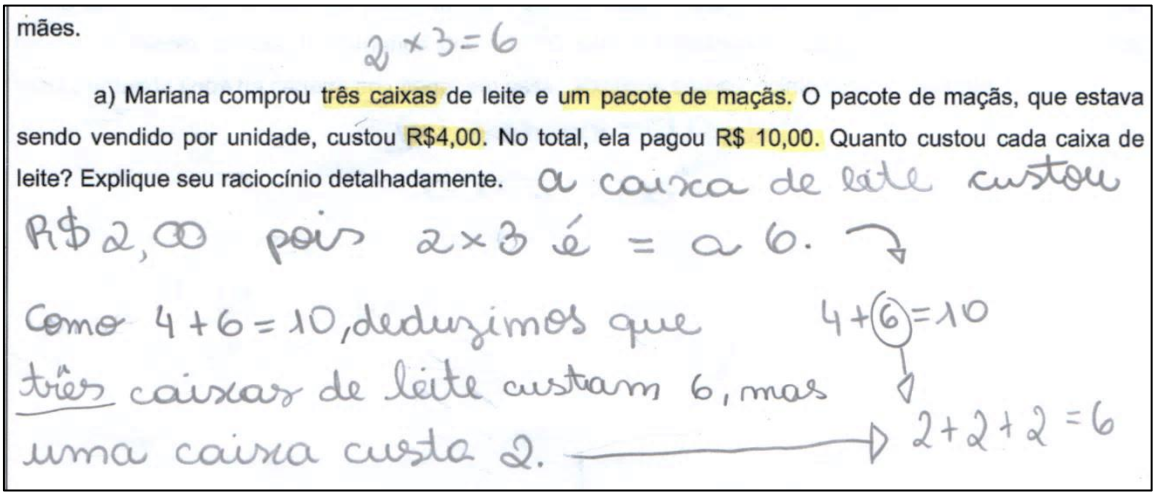
Cada caixa de leite custou dois reais, pois se $4+x=10$, e foram compradas 3 caixas de leite, temos que fazer o seguinte calculo: $10-4=6$, $6 \div 3 = 2$.

Fonte: Acervo da autora.

Um dos grupos apresentou sua solução como ilustra a

Figura *29*, trazendo os registros em linguagem natural e numérico. Notamos que o grupo utilizou a linguagem natural para explicar o registro numérico e para justificar os passos explicitados na resolução. No entanto, não conseguiram registrar o raciocínio implícito, que foi fazendo uso das operações inversas.

Figura 29: Resolução Atividade 2 (a)



mães.

$2 \times 3 = 6$

a) Mariana comprou três caixas de leite e um pacote de maçãs. O pacote de maçãs, que estava sendo vendido por unidade, custou R$4,00. No total, ela pagou R$ 10,00. Quanto custou cada caixa de leite? Explique seu raciocínio detalhadamente. a caixa de leite custou R$ 2,00 pois 2×3 é = a 6.

Como $4+6=10$, deduzimos que três caixas de leite custam 6, mas uma caixa custa 2.

$4+6=10$

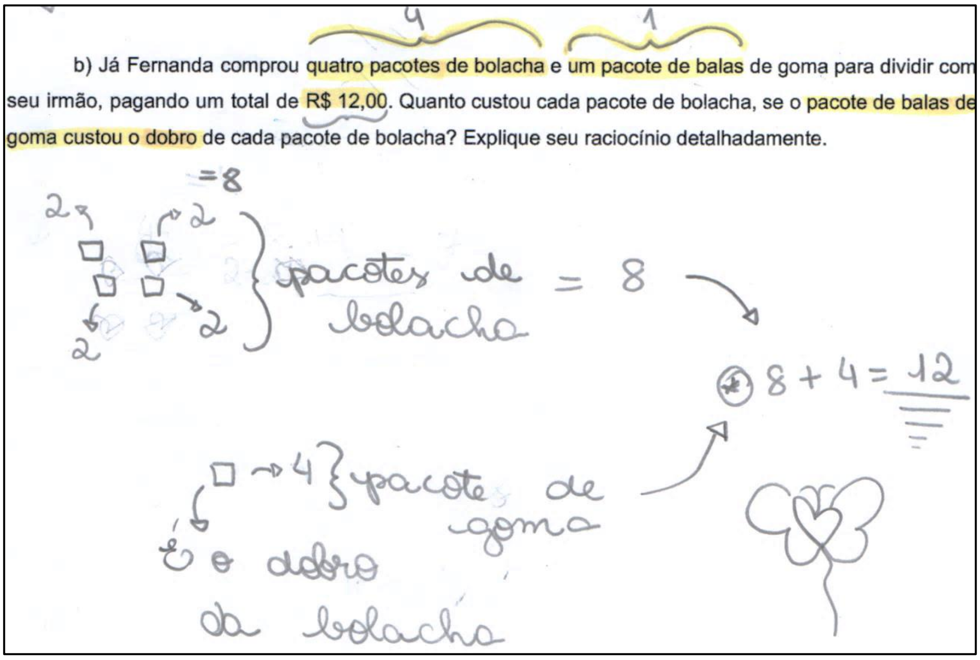
$2+2+2=6$

Fonte: Acervo do autor.

No item b) da Atividade 2, das nove resoluções analisadas, novamente todas continham registros em linguagem natural, dessas, quatro apresentaram também o registro numérico e três apresentaram registros figurais. Um dos grupos que utilizou apenas a linguagem natural escreveu a seguinte justificativa para sua resposta: “Cada pacote de Biscoito custou R$2,00, pois se cada pacote de Balas é igual ao dobro da bolacha é só fingir que ao invés de um pacote de balas tem dois de bolachas então é só dividir por seis”. Achamos interessante essa justificativa porque a ideia de substituir foi descrita como “fingir”. Ou seja, esse registro está relacionado com a ideia de substituição utilizada na resolução algébrica.

Um dos grupos que fez a ilustração da situação-problema através do registro figural tem sua resolução apresentada na Figura 30. Observamos que o grupo apresenta três tipos de registro, sendo que o registro em linguagem natural é utilizado para indicar o que está sendo representado pelos registros figurais. Podemos notar que não se tem uma justificativa escrita sobre o porquê de cada pacote de bolacha custar dois reais, mas se tem uma justificativa para o pacote de balas custar quatro reais (“É o dobro da bolacha”).

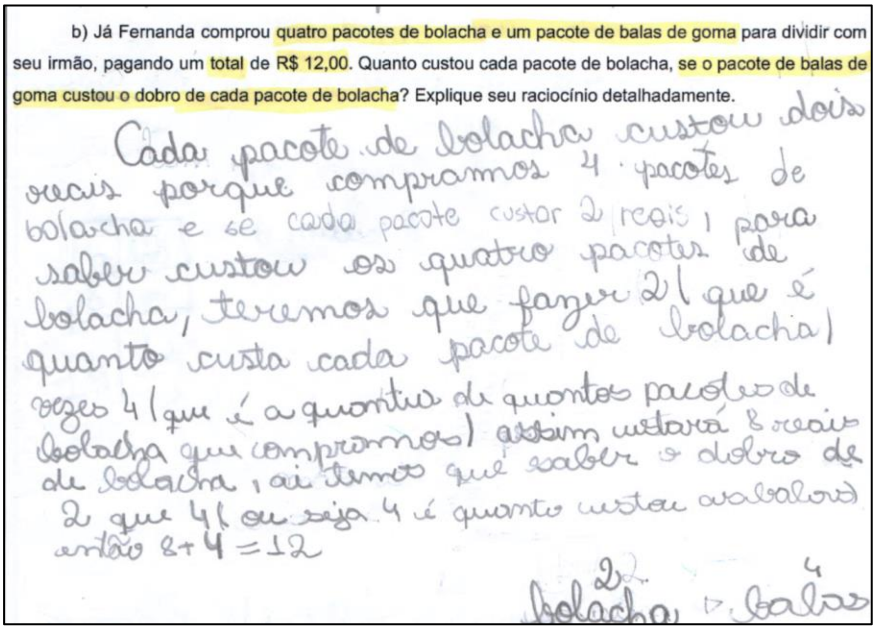
Figura 30*: Resolução Atividade 2 (b)*



Fonte: Acervo da autora.

É interessante destacar que outro grupo, que apresentou seu registro em linguagem natural, com a presença do registro numérico, expressou algo muito parecido com o que observamos na Figura 30, mas utilizando palavras, como ilustra a Figura 31.

Figura 31: Resolução Atividade 2 (b)


b) Já Fernanda comprou quatro pacotes de bolacha e um pacote de balas de goma para dividir com seu irmão, pagando um total de R$ 12,00. Quanto custou cada pacote de bolacha, se o pacote de balas de goma custou o dobro de cada pacote de bolacha? Explique seu raciocínio detalhadamente.

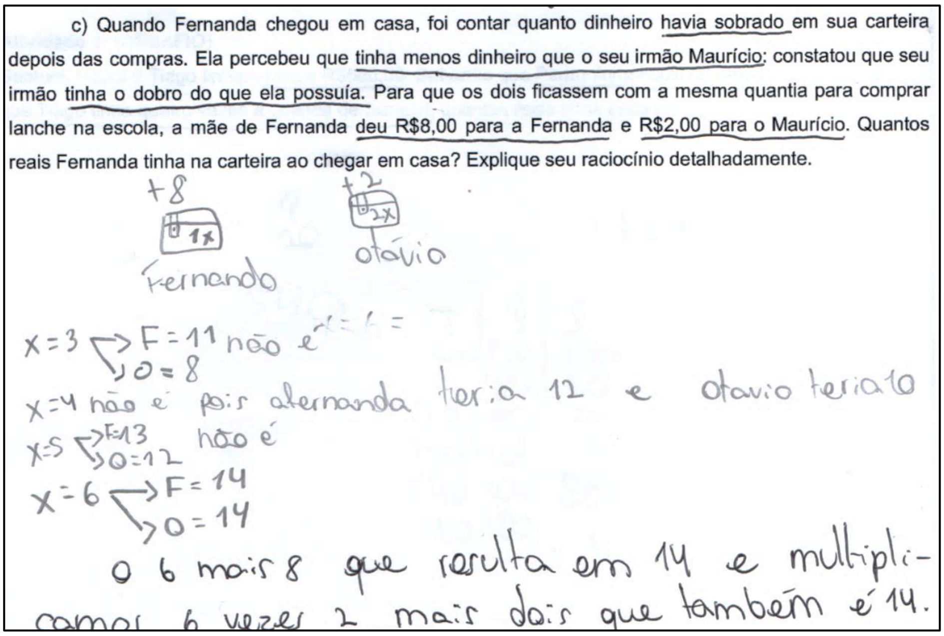
Cada pacote de bolacha custou dois reais porque compramos 4 pacotes de bolacha e se cada pacote custar 2 reais, para saber custou os quatro pacotes de bolacha, teremos que fazer 2 (que é quanto custa cada pacote de bolacha) vezes 4 (que é a quantia de quantos pacotes de bolacha que compramos) assim estará 8 reais de bolacha, aí temos que saber o dobro de 2 que 4 (ou seja 4 é quanto custou a bala) então 8+4=12

2 bolacha 4 balas

Fonte: acervo da autora.

No item c) desta atividade os alunos não apresentaram a mesma facilidade que nos itens anteriores e seis, dos nove grupos que responderam à questão, o fizeram através de tentativa e erro. A Figura 32 ilustra um exemplo em que o grupo apresenta na folha de resolução suas tentativas. O grupo enganou-se chamando o Maurício de Otávio, como podemos observar em sua resolução.

Figura 32: Resolução Atividade 2 (c).


c) Quando Fernanda chegou em casa, foi contar quanto dinheiro havia sobrado em sua carteira depois das compras. Ela percebeu que tinha menos dinheiro que o seu irmão Maurício; constatou que seu irmão tinha o dobro do que ela possuía. Para que os dois ficassem com a mesma quantia para comprar lanche na escola, a mãe de Fernanda deu R$8,00 para a Fernanda e R$2,00 para o Maurício. Quantos reais Fernanda tinha na carteira ao chegar em casa? Explique seu raciocínio detalhadamente.

+8 1x Fernando

+2 2x otávio

x=3 → F=11 não é
O=8

x=4 não é pois a Fernanda teria 12 e Otavio teria 10

x=5 → F=13
O=12 não é

x=6 → F=14
O=14

o 6 mais 8 que resulta em 14 e multiplicamos 6 vezes 2 mais dois que também é 14.

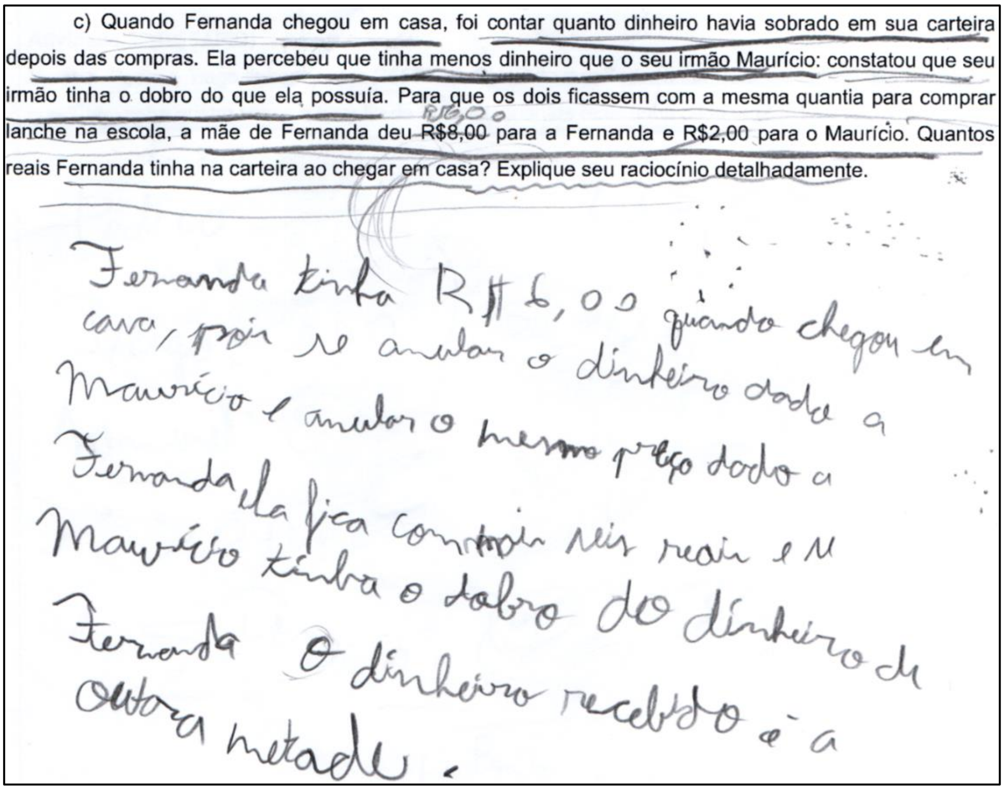
Fonte: Acervo da autora.

Podemos notar, na Figura 32, que os alunos fazem a substituição de x por diferentes valores: 3, 4, 5 e 6 e percebem que tomando $x = 6$, obtém valores iguais para Fernanda e Maurício, o que satisfaz o problema. É interessante observar que os alunos apresentaram o desenho de duas carteiras contendo: em uma delas *1x* e, na outra, *2x*, para evidenciar que Maurício tinha o dobro de Fernanda. Dessa forma, o grupo apresentou em sua resolução registros em linguagem natural, registro algébrico e registro numérico.

Nessa situação-problema, todos os nove grupos apresentaram solução em linguagem natural, quatro grupos apresentaram registro algébrico e cinco grupos apresentaram registro numérico. A Figura 33, ilustra a resolução de um grupo que utilizou apenas a linguagem natural para justificar sua resposta. Esse é um dos grupos que não resolveu a situação-problema através de tentativas. O grupo explicou que, se anulasse a diferença entre os valores dados à Fernanda e ao Maurício, Fernanda receberia seis reais a mais. Como Maurício tinha o dobro que Fernanda inicialmente e, ao anular os valores, apenas a Fernanda receberia seis reais, então essa seria a metade do que Maurício tinha na carteira, concluindo que Fernanda tinha R$6,00 quando chegou em casa.

Dessa forma, podemos observar que, na Atividade 2 da sequência de atividades, os alunos resolveram de forma correta as situações-problemas propostas, apresentando registros na linguagem natural, registros numéricos, algébricos e figurais. Notamos em nossa análise que, na maioria dos casos a linguagem natural é utilizada pelos alunos para justificar o raciocínio desenvolvido na questão, realizando o tratamento das informações no registro numérico. Em alguns casos, observamos que a linguagem natural é utilizada para justificar e fazer referências ao registro numérico, ou algébrico, apresentando transição entre os registros e realizando o tratamento no registro numérico.

Figura 33: Resolução Atividade 2 (c).



c) Quando Fernanda chegou em casa, foi contar quanto dinheiro havia sobrado em sua carteira depois das compras. Ela percebeu que tinha menos dinheiro que o seu irmão Maurício: constatou que seu irmão tinha o dobro do que ela possuía. Para que os dois ficassem com a mesma quantia para comprar lanche na escola, a mãe de Fernanda deu ~~R$8,00~~ R$6,00 para a Fernanda e R$2,00 para o Maurício. Quantos reais Fernanda tinha na carteira ao chegar em casa? Explique seu raciocínio detalhadamente.

Fernanda tinha R$ 6,00 quando chegou em casa, pois se anular o dinheiro dado a Maurício e anular o mesmo preço dado a Fernanda ela fica com seis reais e se Maurício tinha o dobro do dinheiro da Fernanda o dinheiro de outra metade recebido é a.

Fonte: Acervo da autora.

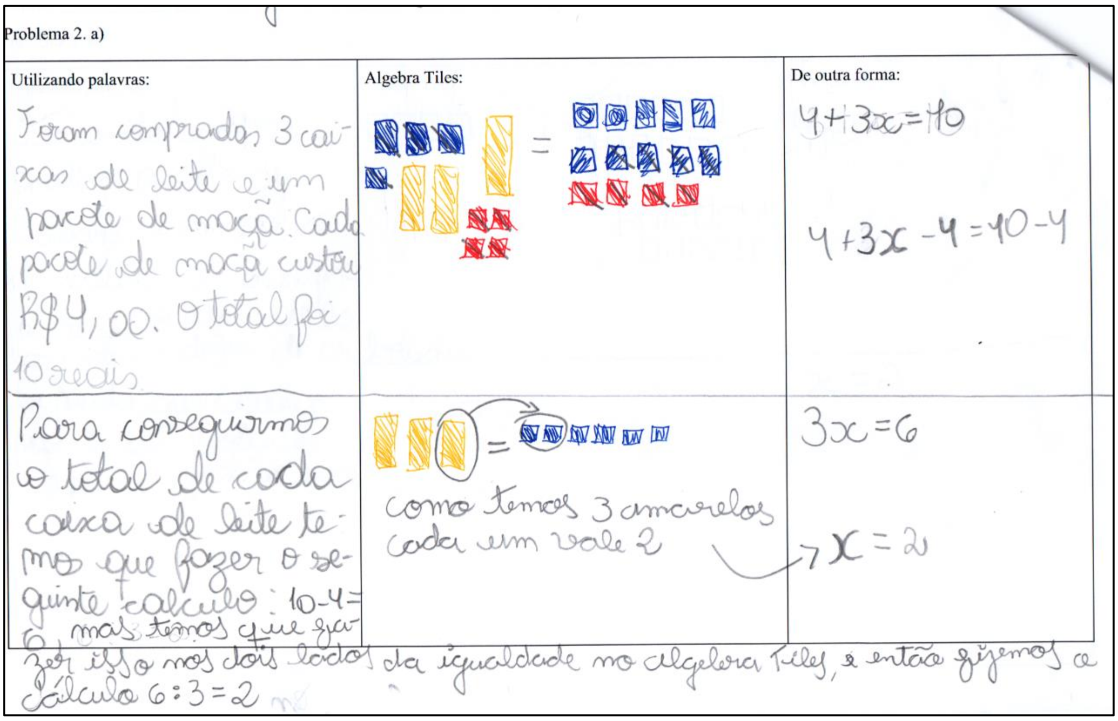
5.2.3. Análise da Atividade 2.1

Apresentamos nessa seção a análise da Atividade 2.1, na qual, assim como na Atividade 1.1, analisamos quais os registros de representação semiótica trazidos pelos alunos, se eles apresentam a conversão entre os registros no decorrer da atividade e os devidos tratamentos. Além disso, observamos se os alunos utilizam a resolução apresentada para a Atividade 2 para ter ideias de como manipular o material *Algebra Tiles*.

Nessa atividade, como os alunos já haviam completado uma tabela muito parecida anteriormente, não surgiram muitas dúvidas sobre como completá-la. Quando recebiam as folhas com as tabelas de cada item, os *Algebra Tiles* e os "tapetinhos", já sabiam o que precisava ser feito.

No item a), das nove resoluções que analisamos, todas apresentaram os registros na linguagem natural, pictórica e algébrica. Como mencionamos anteriormente, acreditamos que a escolha da conversão do registro pictórico para o registro algébrico, sem que houvéssemos solicitado, se deu por já termos estudado expressões algébricas com os *Algebra Tiles*. Assim como na atividade anterior, alguns grupos evidenciaram em suas escritas o uso do princípio aditivo e a regra do cancelamento, apesar de não os nomear. Um exemplo é ilustrado na Figura 34.

Figura 34: Resolução Atividade 2.1 (a)



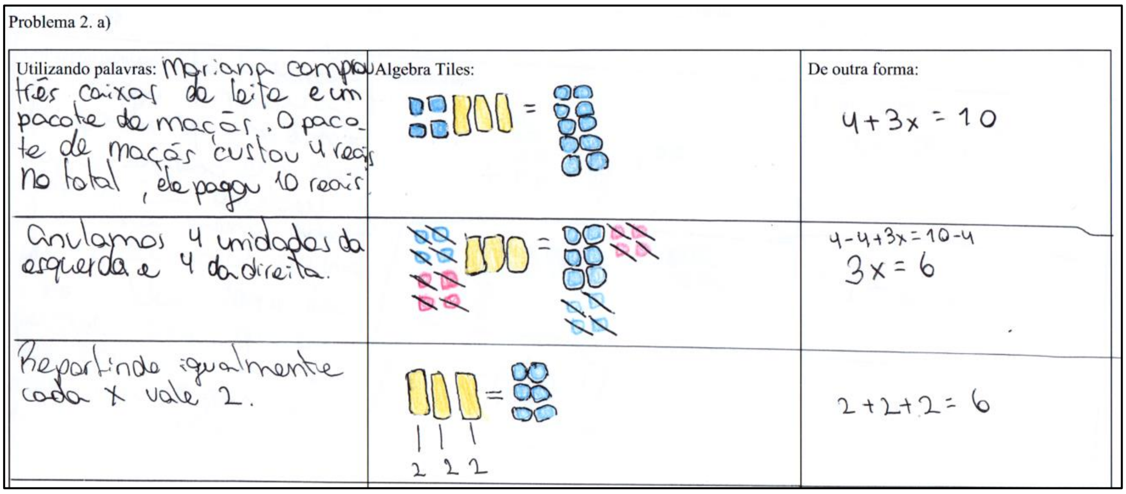
Fonte: Acervo da autora.

Neste exemplo, notamos que, na segunda linha da tabela, ao explicar que o grupo necessitava fazer o cálculo 10 – 4 = 6, o grupo faz referência à resolução que apresentou na Atividade 2 e também utilizou o princípio aditivo, observando que precisaria subtrair quatro dos dois lados da igualdade. Ainda, explicou que, como tinham 3 retângulos amarelos, cada um deles deveria valer 2 e então obteriam $x = 2$.

Observamos que, na resolução presente na Figura 34, o grupo faz a formação do registro em linguagem numérica, apresenta a conversão para o registro pictórico e realiza o tratamento. Além disso, faz a conversão para o registro algébrico e também realiza o tratamento nesse registro. Acreditamos que o material *Algebra Tiles* auxilia na transição entre a linguagem natural e o registro algébrico, principalmente quando pensamos no tratamento, visto que para realizar o tratamento no registro algébrico, notamos que são utilizadas as mesmas ideias que no tratamento do registro pictórico. Além disso, acreditamos que a forma como foi pensada a atividade, buscando utilizar os conhecimentos que os alunos já sabiam anteriormente, também contribui para a passagem entre a aritmética e a álgebra e no desenvolvimento do conhecimento sobre resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita com compreensão.

Assim como o grupo anterior, o grupo cuja resolução está presente na Figura 35, também apresenta a formação do registro em linguagem natural, faz a conversão para os registros pictórico e algébrico e realiza o tratamento em ambos os registros. Ainda, assim como o grupo anterior, podemos observar o uso do princípio aditivo e da regra do cancelamento, visto que o grupo afirma que “anulamos 4 unidades da esquerda e 4 unidades da direita”. Anular significa utilizar a regra do cancelamento e fazer isso na esquerda e na direita da igualdade é utilizar o princípio aditivo. É importante salientar que os alunos expressavam oralmente que o objetivo deles era obter *x* em um lado da igualdade e um número do outro lado da igualdade quando os questionávamos, visto que discutimos isso durante a resolução da primeira atividade, então era isso que eles buscavam ao manipular o material.

Figura 35: Resolução Atividade 2.1 (a)



Problema 2. a)

Utilizando palavras:	Algebra Tiles:	De outra forma:
Mariana comprou três caixas de leite e um pacote de maçãs. O pacote de maçãs custou 4 reais no total, ele pagou 10 reais	=	$4+3x=10$
Anulamos 4 unidades da esquerda e 4 da direita.	=	$4-4+3x=10-4$ $3x=6$
Repartindo igualmente cada x vale 2.	= 2 2 2	$2+2+2=6$

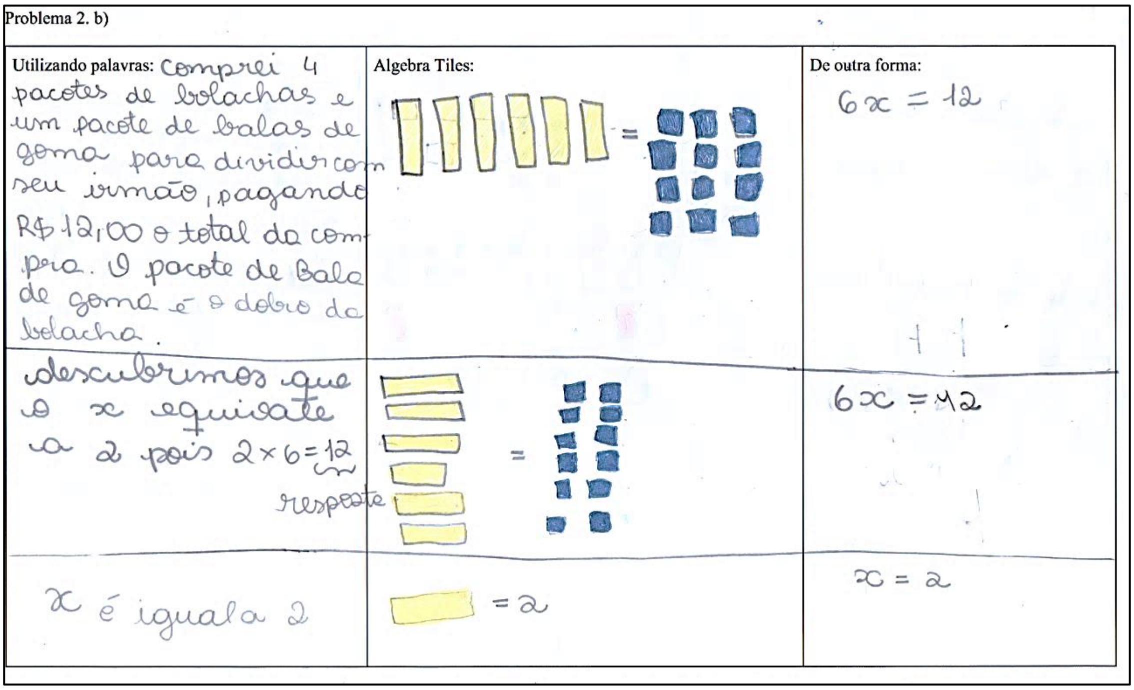
Fonte: Acervo da autora.

Outro ponto interessante que podemos observar na resolução desse grupo, é que diferentemente dos outros grupos, que fizeram indicações com flechas ou círculos, apontando que um retângulo amarelo equivale a dois quadradinhos azuis, esse grupo apontou que cada retângulo amarelo vale 2 e mostrou isso na igualdade da terceira coluna ($2+2+2=6$), apresentando algo parecido com a verificação que trabalhamos mais adiante.

Do mesmo modo que no item a), no item b) desta atividade pudemos observar os seguintes tipos de registro: linguagem natural, representações pictórica e algébrica. Além disso, ao realizar nossa análise verificamos que também estavam presentes as três atividades cognitivas importantes para semiose: a formação de uma representação, a conversão e o tratamento.

Salientamos que nessa atividade foram analisados os documentos de sete, dos nove grupos, visto que dois deles não completaram a tarefa. A representação na forma algébrica da equação que traduz a situação-problema (b), seria: $4x + 2x = 12$., contudo, podemos observar, na Figura 36, que ao representar algebricamente, o grupo faz a conversão a partir dos *Algebra Tiles* escrevendo $6x = 12$ e um outro grupo também representou do mesmo modo. Os demais grupos fizeram inicialmente a representação $4x + 2x = 12$ e depois representaram como $6x = 12$. Ao fazer a análise, achamos interessante que um dos grupos encontrou o valor de x, indicando por $x = 2$, representando o valor do pacote de bolachas e também encontrou o valor de $2x$, representando por $2x = 4$, representando o valor do pacote de balas de goma.

Figura 36: Resolução Atividade 2.1 (b)



Fonte: Acervo da autora.

O item c) desta atividade se diferencia dos demais, pois exige a inclusão de incógnita nos dois lados da igualdade e nesse item vários grupos inicialmente mostraram insegurança sobre como encontrar a solução utilizando os *Algebra Tiles*. Alguns grupos apresentaram dificuldades e, ao invés de representar $x + 8 = 2x + 2$, eles representavam como $x + 8 = x + 2$ (como podemos observar na Figura 37, imagem do lado esquerdo), então no primeiro contato com o grupo perguntamos o que estava representado no "tapetinho" e então um dos integrantes respondeu, apontando para o lado direito da igualdade:

Aluno: Aqui é a quantidade da irmã quando ela chegou em casa e aqui (apontando para o lado esquerdo da imagem), é a quantidade do irmão e quanto ele ganhou da mãe.

Pesquisadora: Mas ele tinha a mesma quantidade que ela (a irmã)?

Aluno: Não.

Pesquisadora: Quanto ele tinha?

Aluno: Doze.

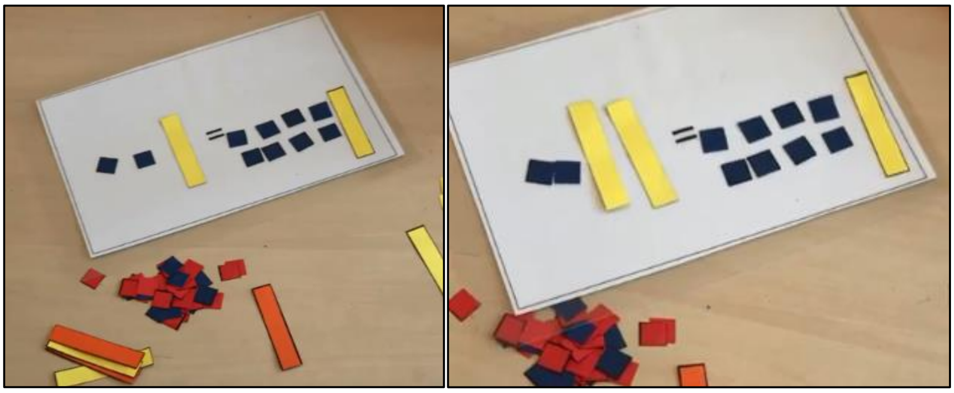
Pesquisadora: Mas quanto ele tinha? Nós sabemos incialmente?

Aluno: O dobro?!

Pesquisadora: Isso mesmo, o dobro. E como representamos o dobro?

Aluno: $2x$!

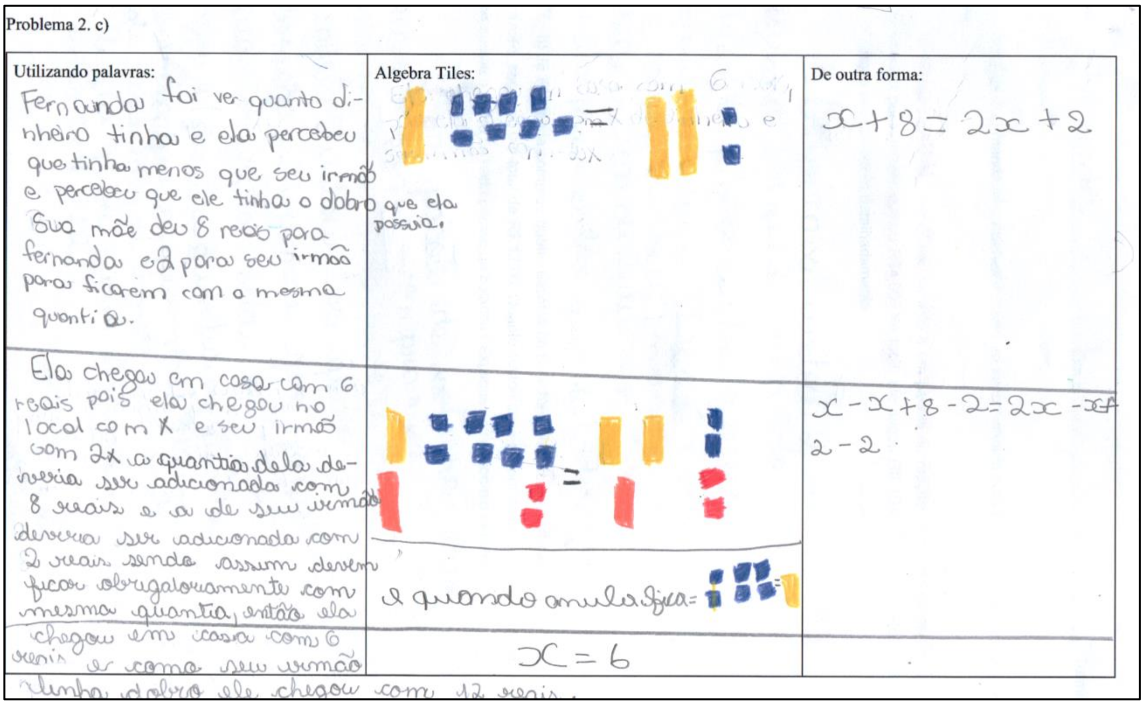
Figura 37: Resolução Atividade 2.1 (c) com uso dos *Algebra Tiles*.



Fonte: Acervo da autora.

O grupo então adicionou um retângulo amarelo, ficando com a imagem que podemos observar do lado direito na Figura 37. Após chegarem nessa configuração, questionamos o que precisavam descobrir agora. O grupo respondeu que precisava encontrar o valor de x e um dos integrantes lembrou, após conversarem um pouco, que para isso precisaria "anular x em um dos lados". O grupo adicionou um retângulo laranja em cada lado da igualdade, obtendo $x + 2 = 8$. Após, perguntamos o que era necessário fazer para obter o valor de x. O grupo respondeu que teria que utilizar duas unidades negativas e adicionou no lado esquerdo, então perguntamos se estava pronto e eles então lembraram que teriam que adicionar duas unidades negativas também do lado direito. Assim, encontraram o valor de x e solicitamos que representassem na folha de respostas, apresentando a solução da Figura 38.

Figura 38: Resolução Atividade 2.1 (c) no documento

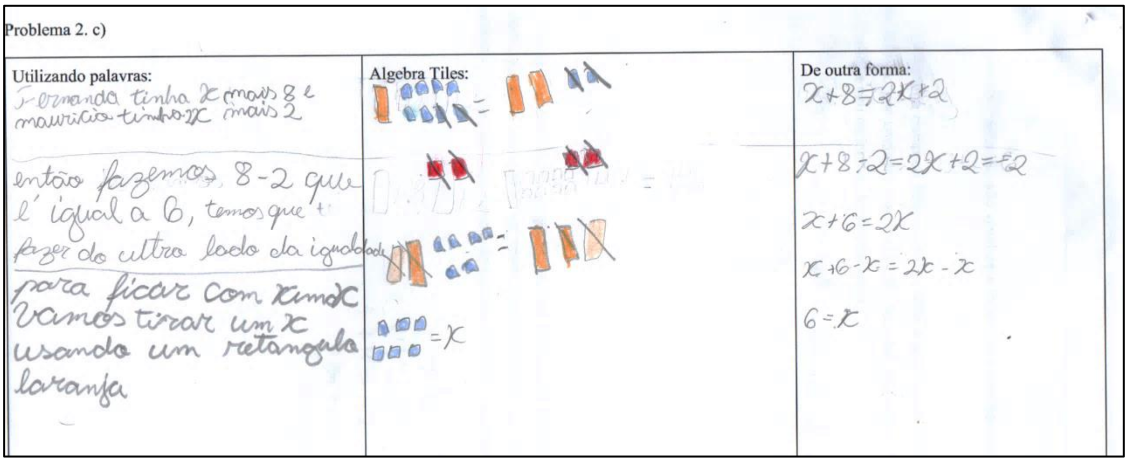


Fonte: Acervo da autora.

Notamos que o grupo apresentou na primeira coluna (Figura 38) uma reescrita para a situação-problema dada e a solução final. Na segunda coluna apresentou a conversão para o registro pictórico e o seu tratamento e, na última coluna, a conversão para o registro algébrico e o seu tratamento. Mostrando assim três etapas que caracterizam a semiose.

Um outro grupo (Figura 39), que também apresentou todas as etapas fundamentais à semiose, deixou evidente em sua escrita o uso do princípio aditivo da igualdade, quando escreve "temos que fazer do outro lado igualdade". Também escreve que quer "ficar com um *x*", o que mostra que o grupo sabe onde precisa chegar para encontrar a solução e, mais ainda, sabe que para isso precisa "tirar um *x* usando um retângulo laranja" e o faz dos dois lados da igualdade. Aplica a propriedade do cancelamento e encontra o valor de *x*. Note que o tratamento feito no registro algébrico é semelhante com o realizado no registro pictórico, indicando que a manipulação do material auxilia no desenvolvimento do tratamento no registro algébrico, fazendo igualmente o uso dos princípios da igualdade.

Figura 39: Resolução Atividade 2.1 (c)



Fonte: Acervo da autora.

Os demais grupos apresentaram soluções parecidas com as duas resoluções anteriores. Alguns grupos utilizando o cancelamento da incógnita e do termo numérico na mesma linha, como na Figura 38 e outros primeiro cancelando um e após o outro, em linhas diferentes, conforme Figura 39.

Dessa forma, podemos notar que na Atividade 2.1 existe a formação de um registro, a conversão para o registro pictórico e a conversão do registro pictórico para o registro algébrico. Além disso, observamos a realização do tratamento nos registros apresentados pelos grupos. Assim, notamos que, segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, os alunos apresentaram três atividades cognitivas que caracterizam a semiose, visto que aparece a formação de uma representação, a conversão e o tratamento. Além disso, é importante observar que segundo a mesma teoria, é fundamental aos indivíduos a mobilização de diferentes registros de representação para que os indivíduos tenham como optar pelo que lhe é mais favorável dependendo da situação-problema. Assim, salientamos que nosso objetivo em proporcionar uma atividade em que os alunos tivessem a oportunidades de poder estudar diversos tipos de representações foi alcançado.

Também foi possível notar que os alunos recorriam às suas resoluções anteriores para entender como fariam a manipulação do material. Dessa forma, acreditamos que o uso do material manipulativo e o uso de situações-problemas que os alunos já conseguiam resolver anteriormente utilizando aritmética, podem estar contribuindo para a transição entre a aritmética e álgebra. Ainda, a utilização do material, trouxe como necessidade aos alunos terem que recorrer aos princípios da igualdade e à propriedade do cancelamento, pontos importantes para a resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita.

5.2.4. Análise da Atividade 3

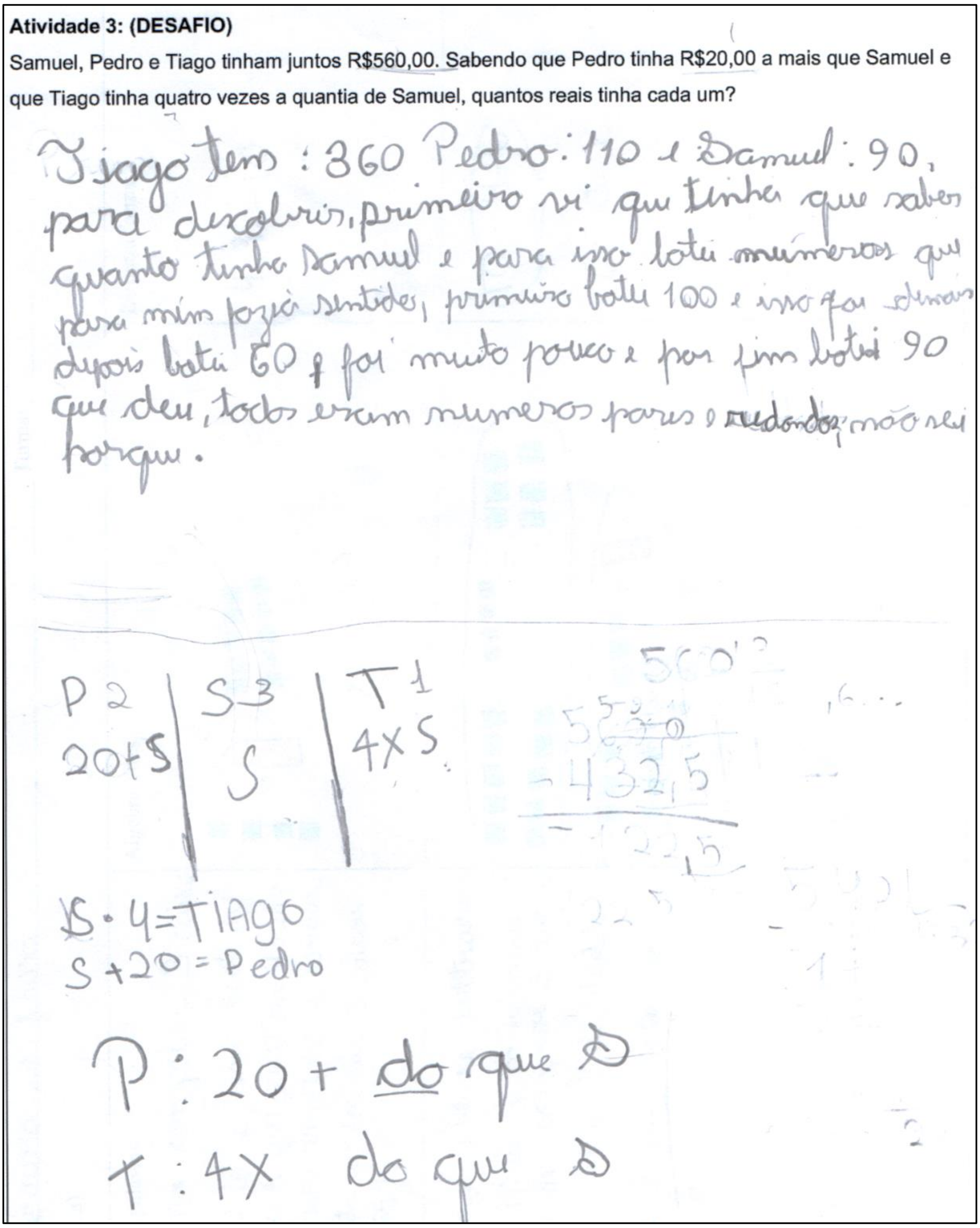
Apresentamos nessa seção a análise da Atividade 3. Buscamos investigar se os alunos sentiram dificuldades para resolver esse problema e ao conseguirem resolver, quais foram os registros utilizados.

Essa atividade foi realizada logo após a Atividade 2 e foi criada com o objetivo de provocar os alunos para que eles percebessem que nem sempre a aritmética é a ferramenta mais confortável para resolver uma situação-problema. Todos os grupos que conseguiram resolvê-la (seis dos nove grupos), o fizeram por tentativas, os outros três grupos entregaram as folhas com rascunhos, sem apresentar explicações ou solução para o problema. Enquanto os grupos resolviam, nos chamavam para falar: “Profe, essa questão é impossível! ”. Uma aluna falou: “Sora, não tem como descobrir o valor de *x*, eu acho que não tem como fazer sem álgebra!”. A aluna tentou fazer com os *Algebra Tiles*, mas como eram valores grandes ficou meio confusa e sua dupla deu a ideia de tentar resolver com números, então acabaram resolvendo por tentativas, mas já notamos que os alunos estão pensando na ideia de que a álgebra facilitaria a resolução.

Na Figura 40, podemos observar que o grupo fez registros em linguagem natural e registro algébrico. O registro numérico também apareceu, mas o grupo acabou apagando o rascunho da folha. Apesar de haver a conversão da linguagem natural para o registro algébrico, podemos notar que o grupo não apresenta o tratamento no registro algébrico. O tratamento é feito no registro numérico. É interessante notar, na explicação do grupo, que os alunos testam valores intuitivamente para resolver a questão e, ainda afirmam que “todos eram números pares e redondos”, mas não sabiam o porquê. Nós interpretamos essa escrita como se o grupo quisesse escrever que estava ciente que poderiam ser valores decimais, por exemplo, e que a tentativa e erro poderia não dar certo tão facilmente.

Podemos afirmar que nossos objetivos foram alcançados nessa questão, visto que os alunos perceberam que essa situação-problema em particular era difícil de resolver apenas utilizando a aritmética.

Figura 40: Resolução Atividade 3



Atividade 3: (DESAFIO)

Samuel, Pedro e Tiago tinham juntos R$560,00. Sabendo que Pedro tinha R$20,00 a mais que Samuel e que Tiago tinha quatro vezes a quantia de Samuel, quantos reais tinha cada um?

Tiago tem: 360 Pedro: 110 e Samuel: 90, para descobrir, primeiro vi que tinha que saber quanto tinha Samuel e para isso bati números que para mim fazia sentido, primeiro bati 100 e isso foi demais depois bati 60 e foi muito pouco e por fim bati 90 que deu, todos eram números pares e ~~redondos~~, não sei porque.

P 2 | S 3 | T 1
20+S | S | 4xS

S · 4 = TIAGO
S + 20 = Pedro

P: 20 + do que S
T: 4X do que S

Fonte: Acervo da autora.

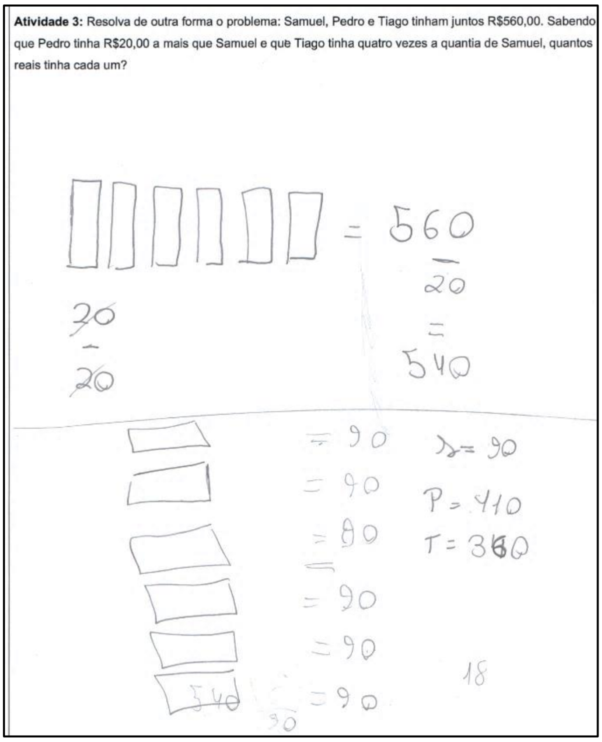
5.2.5. Análise da Atividade 3.1

Apresentamos nessa seção a análise da Atividade 3.1, na qual procuramos observar qual foi a forma que os alunos escolheram para resolver o problema da Atividade 3, agora que já tinham estudado um pouco mais sobre a resolução de equações: as atividades anteriores podem contribuir para a resolução dessa atividade? Os alunos resolveram essa atividade por meio de uma equação? Perceberam que ficou mais fácil a resolução por meio de uma equação?

Dos nove grupos, apenas cinco entregaram esta atividade completa. Desses, três grupos utilizaram uma equação para resolver, um grupo utilizou uma representação com *Algebra Tiles* e um grupo utilizou *Algebra Tiles* juntamente com uma equação. A

Figura *41*, ilustra a resolução feita utilizando *Algebra Tiles*. Claro que não teria como representar utilizando apenas com o material por causa dos valores, então o grupo fez a representação juntamente com números. Observamos que o grupo subtrai 20 unidades de cada lado, obtendo $6x = 540$. Após, representa a divisão e os valores. Este grupo, é o mesmo que apresentou a solução ilustrada na Figura 40 e acreditamos que tenham relacionado com a ideia algébrica apresentada anteriormente para montar a representação.

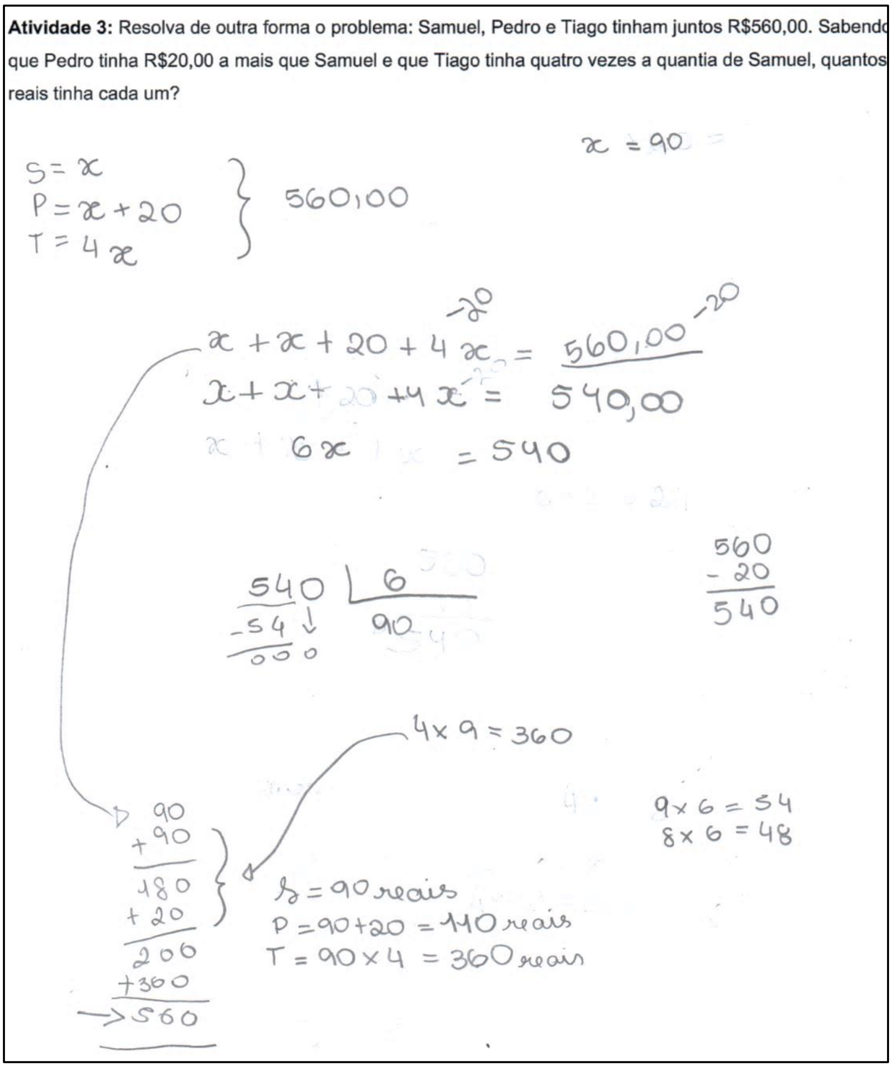
Figura 41: Resolução Atividade 3.1 utilizando *Algebra Tiles*.



Fonte: Acervo da autora.

Na Figura 42 temos um exemplo de um dos grupos que apresentou sua solução utilizando uma equação. Inicialmente, o grupo faz a conversão dos dados do problema para o registro algébrico, sem o apoio dos *Algebra Tiles*, indicando os valores de Pedro e Tiago, considerando que o valor de Samuel é x. Após, montam a equação e apresentam o tratamento no próprio registro algébrico: subtraindo 20 dos dois lados da igualdade (princípio aditivo), obtendo $x + x + 4x = 540$. Para finalizar, unem os termos semelhantes, obtendo $6x = 540$. Apresentam a divisão, para mostrar que cada x é igual a 90. Encontram os valores que cada um dos meninos possui e ainda apresentam a verificação da solução através do cálculo apresentado no canto inferior esquerdo. Além deste, outro grupo também apresentou a verificação da solução, um passo importante na resolução de equações.

Figura 42: Resolução Atividade 3.1 utilizando uma equação do primeiro grau com uma incógnita.



Fonte: Acervo da Autora.

Podemos observar que a solução ilustrada na Figura 42 está organizada e resolvida pelo grupo de forma clara, apresentando vários pontos importantes para a resolução de uma situação-problema através de uma equação: os alunos caracterizam algebricamente os valores de Pedro e Tiago relacionando com o valor de Samuel; montam a equação para a situação-problema; resolvem a equação utilizando o princípios da igualdade; calculam o valor de cada menino, sabendo o valor de Samuel que foi encontrado na resolução da equação e, finalmente, fazem a verificação da solução da equação. Conjecturamos que o fato de o grupo resolver a situação-problema já sabendo a resposta anteriormente, pode ter contribuído para a tranquilidade do grupo em relação à escrita. Talvez se o grupo tivesse que resolver a questão utilizando primeiramente álgebra, o grupo não teria a tranquilidade de fazer todos os passos apresentados.

Dessa forma, acreditamos que o uso do material manipulativo e as atividades anteriores podem contribuir na transição da aritmética para a álgebra e na construção do procedimento de resolução de equações, utilizando os princípios da igualdade. Isso porque apenas a partir das resoluções das atividades anteriores, sem definir uma técnica detalhada com os alunos, os mesmos apresentaram soluções muito boas na Atividade 3.1, mostrando o entendimento que tiveram sobre a representação de uma situação-problema algebricamente e a realização do tratamento do registro algébrico ao resolver uma equação.

5.3. Encontro 5

O Encontro 5, teve como objetivo proporcionar um fechamento das atividades anteriores. Para realizar esse fechamento, desejamos fazer a construção coletiva das tabelas das Atividades 1.1 e 2.1 na lousa, assim como discutir a resolução da Atividade 3.1. Já que observamos durante as aulas que as equações surgiram nas resoluções dos alunos, nesse encontro também temos o objetivo de trabalhar alguns conceitos importantes sobre o estudo de equações, que podem ser observados após feita a montagem da tabela: definição de equação do primeiro grau com uma incógnita, conceito de equações equivalentes (relacionando com o conceito de igualdades equivalentes), definição de incógnita e raiz (ou solução) de uma equação.

5.3.1. Análise do Encontro 5

Nesse encontro, analisamos pontos marcantes nas falas dos alunos, verificamos se eles expressam em seus comentários indícios de que observaram a importância do uso da álgebra em situações-problemas como os do item c) da Atividade 2.1 e a Atividade 3, por exemplo. Iniciamos nosso relato pela Atividade 1.1.

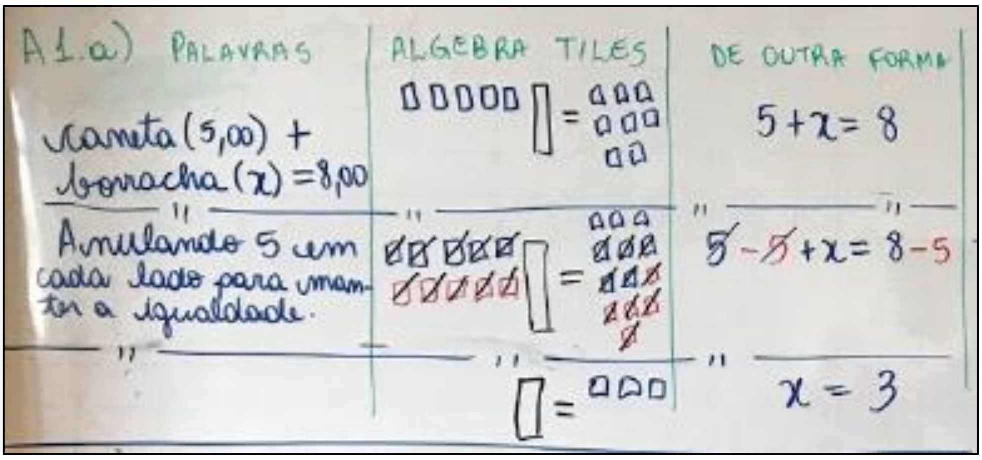
Atividade 1.1 – Situação-problema a):

Iniciamos questionando o que os grupos haviam colocado na primeira coluna da tabela e os alunos que levantaram as mãos e responderam praticamente reescrevendo o problema, ou reescrevendo a resolução que haviam apresentando na Atividade 1, o que acreditamos ser coerente, uma vez que não fizemos intervenções sobre como deveria ser preenchida exatamente a primeira coluna.

Perguntamos aos alunos se havia uma forma resumida de escrever a situação-problema. O aluno P respondeu: “Comprei uma caneta de cinco reais, uma borracha, que não sabemos o preço, vamos então chamar de ‘x’, e isso tudo dá oito reais”. Perguntamos: “Será que não tem uma forma mais resumida ainda de escrever isso?”. O aluno N respondeu: “Vamos colocar assim: caneta, daí entre parênteses, cinco reais, mais borracha, e entre parênteses x reais, é igual a oito reais”. Perguntamos para a turma se havia uma forma ainda mais resumida e os alunos responderam que achavam que assim estava bom e que essa forma era “muito melhor”, mas comentaram que quando resolveram não sabiam que podiam escrever tão resumidamente, visto que, quando resolveram as situações-problemas pela primeira vez tinham que colocar todas as justificativas e “escrever um monte”. Assim, a ideia do aluno N foi colocada na tabela, na primeira linha da primeira coluna. O fato de terem chamado o valor desconhecido de “x” é natural, visto que trabalhamos com letras para representar valores desconhecidos no estudo de expressões algébricas.

Completada a primeira linha (Figura 43), da primeira coluna, perguntamos aos alunos como podíamos fazer a representação utilizando *Algebra Tiles*. O aluno V respondeu que poderíamos colocar cinco quadradinhos azuis e um retângulo amarelo, igual a oito quadradinhos azuis. (Como não tínhamos caneta amarela, combinamos que os retângulos amarelos seriam representados na cor preta). Os colegas concordaram com a representação proposta pelo aluno V. Então perguntamos como haviam representado de outra forma. O aluno B respondeu que o grupo dele havia escrito “$5 + x = 8$”. Perguntei se alguém havia feito diferente e todos haviam feito do mesmo modo. Foi então o que escrevemos no quadro na primeira linha da terceira coluna.

Figura 43: Foto do quadro durante o fechamento- Atividade 1.1 (a)



Fonte: Acervo da autora.

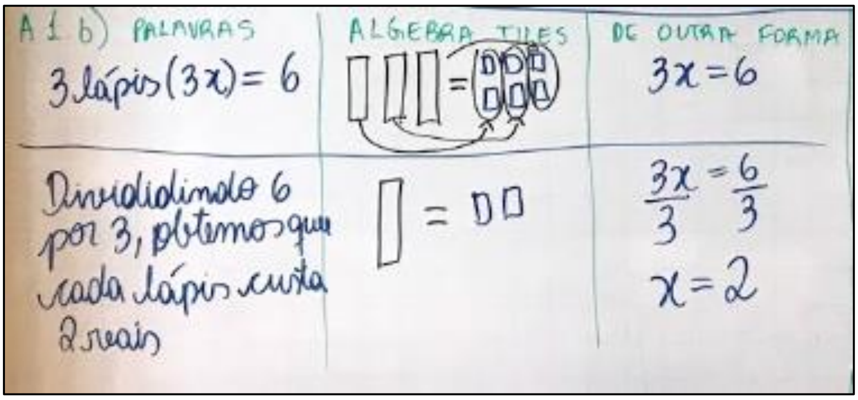
Questionamos aos alunos qual seria o próximo passo da resolução, o que eles haviam feito. Alguns alunos falaram que precisava subtrair cinco do oito, como haviam feito na resolução anterior. O aluno B então falou: “Mas tem que subtrair cinco do outro lado também, para manter a igualdade. ” (Aqui podemos observar o uso do princípio aditivo da igualdade que foi estudado com os alunos anteriormente à prática). Perguntamos como escrever no quadro o que o aluno B falou e se todos concordavam. A turma concordou e respondeu que poderíamos escrever “anulando cinco em cada lado para manter a igualdade”. Escrevemos na tabela e perguntamos como poderíamos fazer essa representação utilizando *Algebra Tiles*. O aluno M disse para colocar cinco quadradinhos vermelhos em cada lado e anular, o aluno B complementou: “isso, fazer o cancelamento”. Riscamos os quadradinhos, representando o cancelamento. Questionamos como escrever de outra forma. O aluno L respondeu: “Escreve $5 - 5 + x = 8 - 5$ e anula o $5 - 5$”. O aluno F continuou: “Pronto! Agora sobrou só $x = 3$". Os colegas todos concordaram e então concluímos a escrita utilizando os *Algebra Tiles* e a representação algébrica, que foi a escolhida por todos os grupos na última coluna.

<u>Atividade 1.1 – Situação-problema b:</u>

Lemos o problema em voz alta e perguntamos como poderíamos escrever em palavras e o aluno N perguntou: “Vamos escrever bem resumido de novo? ”. Perguntamos para a turma se poderíamos e responderam que sim. Assim, o aluno N completou: “Então coloca: três lápis, entre parênteses, coloca ‘$3x$’, igual a seis”. Foi o que escrevemos na tabela. Perguntamos como representar usando os *Algebra Tiles* e um aluno respondeu que precisava representar três retângulos amarelos, igual a seis quadradinhos azuis. Fizemos a representação no quadro e então perguntamos se havia outra forma de representar, pois um grupo havia utilizado três quadradinhos azuis e um retângulo amarelo, contudo essa representação significa $3 + x$ e não $3x$. O grupo se manifestou e representamos na lousa a forma utilizada e o próprio grupo disse que essa forma representava $3 + x$. Após chamar a atenção para esse fato, o aluno L respondeu que de outra forma poderíamos escrever: $3x = 6$.

Assim, completamos a primeira linha da tabela, como ilustrado na Figura 44. Em seguida, perguntamos o que deveríamos fazer na continuidade e o aluno S respondeu: "Como todos os lápis têm o mesmo preço e pagamos seis reais, temos que dividir o seis por três para saber o valor de cada lápis. Daí cada lápis custa dois reais". Perguntamos como escrever em palavras e o aluno S disse: "Dividindo seis por três, obtemos que cada lápis custa dois reais. Acho que assim fica bem resumido". Os colegas concordaram e então perguntei como poderíamos representar utilizando *Algebra Tiles*. Um colega respondeu que poderia utilizar as flechas que utilizamos e o aluno A disse: "Ou podemos também deixar os retângulos 'deitados' e igualar, circulando". Perguntamos se alguém havia feito diferente e o aluno E disse que o grupo dele havia feito barras para mostrar as subdivisões. Para finalizar, perguntamos como poderíamos escrever de outra forma, então o aluno V disse que precisava dividir o seis por três na igualdade. Perguntamos se podíamos somente dividir o seis, escrevendo o traço embaixo do seis e colocando o número três embaixo. Vários alunos responderam prontamente que não, pois não manteria o equilíbrio da igualdade, então era necessário dividir o "3*x*" também por 3, obtendo $x = 2$. Mas esses mesmos alunos falaram que em suas tabelas não haviam feito a divisão dos dois lados da igualdade, comentando que na verdade nem tinham representado essa parte da divisão em seus registros por escrito, já que era "tão óbvio" (palavras dos alunos).

Figura 44: Foto do quadro durante o fechamento- Atividade 1.1 (b)

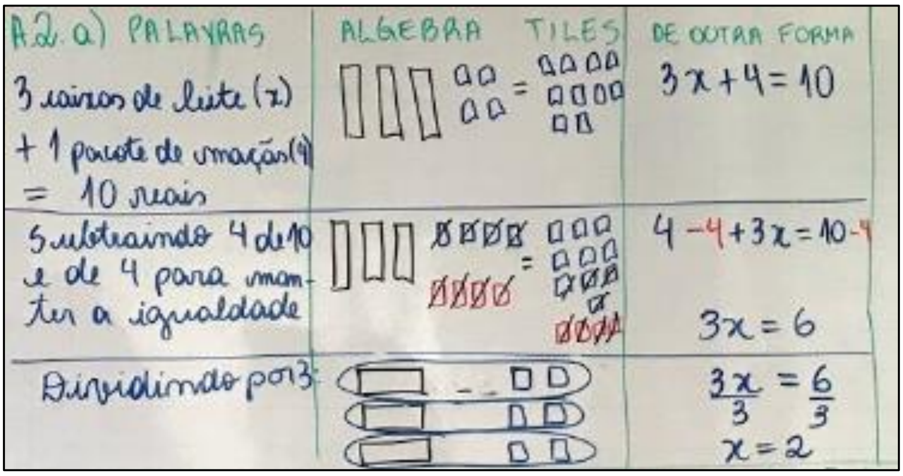


Fonte: Acervo da autora.

Atividade 2.1 – Situação-problema a:

Do mesmo modo que na Atividade 1.1, na Atividade 2.1, fomos preenchendo a tabela, conforme observamos na Figura 45, juntamente com os alunos. É importante destacar que, assim como na atividade 1.1, os alunos deram destaque aos princípios aditivo e multiplicativo, apresentando falas como "precisamos adicionar quatro unidades negativas em cada lado, para manter a igualdade" e "temos que dividir os dois lados da igualdade por três para manter o equilíbrio".

Figura 45: Foto do quadro durante o fechamento - Atividade 2.1 (a)

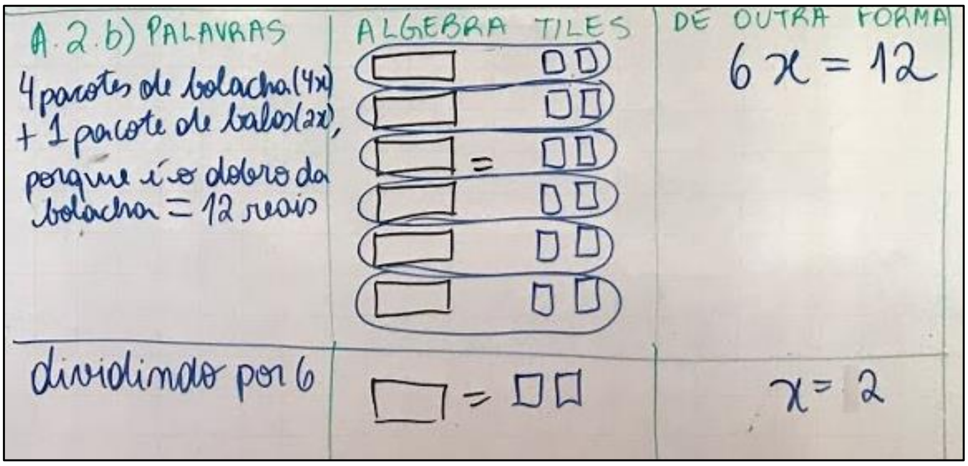


Fonte: Acervo da autora.

Atividade 2.1 – Situação-problema b:

Novamente, os alunos foram auxiliando na construção da tabela, que ficou como podemos observar na Figura 46. Inicialmente preenchemos a primeira linha da tabela, evidenciando como representaríamos cada valor desconhecido. Fizemos a representação utilizando *Algebra Tiles* e fizemos a conversão para o registro algébrico. É importante destacar que alguns alunos falaram que poderíamos escrever da forma $4x + 2x = 12$, mas nos empolgamos e representamos diretamente como $6x = 12$, como outros alunos sugeriram inicialmente. Após esse momento, os alunos falaram que precisávamos distribuir os doze reais entre os $6x$, pois queríamos descobrir o valor de um único x. os alunos comentaram as suas diferentes formas de mostrar o valor de cada x e escolhemos escrever da forma que está na Figura 46.

Figura 46: Foto do quadro durante o fechamento - Atividade 2.1 (b)



Fonte: Acervo da autora.

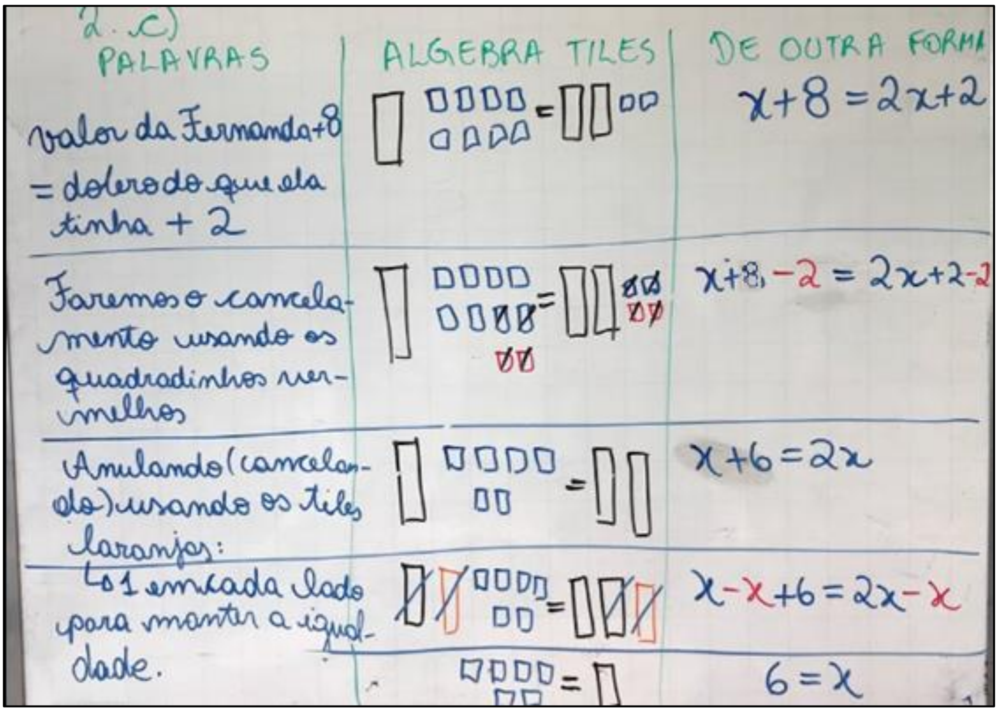
Atividade 2.1 – Situação-problema c:

A equação que descreve essa situação-problema possui incógnita nos dois lados da igualdade, por isso essa é uma situação nova para os alunos até o momento. Enquanto os alunos resolviam essa situação-problema na aula, vários grupos apresentaram dificuldades em resolvê-la e com exceção de um grupo, todos os outros resolveram por tentativas.

Inicialmente preenchemos a primeira linha da tabela (Figura 47) e então perguntamos: “Qual é a diferença entre essa situação-problema e as anteriores?” O aluno V disse: “Nessa questão tem ‘x’ dos dois lados e nas outras não tinha”. Alguns alunos acenaram concordando com a colega. Perguntamos: “Como vamos fazer para resolver essa questão?”. O aluno S respondeu: “Sora, temos que ir anulando e fazendo os cancelamentos até encontrar ‘x’ igual a algum número”. Eu respondi: “Huum, por onde eu começo então?”. O aluno N responde: como no problema, eu iniciei fazendo menos dois”. A aluna M complementa: “Mas temos que fazer o cancelamento, colocando os quadradinhos vermelhos dos dois lados da igualdade”. Os colegas concordaram e eu fiz a representação no quadro. Questionamos como poderíamos escrever de outra forma e o aluno E responde: “Coloca $x + 6 - 2 = 2x + 2 - 2$. Que daí, anulando, vai ficar $x + 6 = 2x$”. Perguntamos como deveríamos continuar e então o aluno N responde: “Queremos saber o valor de x, então temos que ter o x em um lado só, então colocamos um retângulo laranja em cada lado para anular o x.” Pedimos para ele desenhar no quadro e ela desenhou. O aluno P interviu falando que fez diferente: “Eu pensei assim: tem x dos dois lados, então, um x é igual a um x, e o valor que sobra para o outro x, é seis, não tem outra opção”. Os colegas acharam legal a ideia do aluno P, mas a maioria fez como o aluno N havia falado. Completamos o restante da tabela em conjunto e antes de falarmos da Atividade

3, apresentamos alguns conceitos que estávamos abordando, que os alunos não haviam sido introduzidos explicitamente até o momento: equação, equações equivalentes, incógnita e raiz.

Figura 47: Foto do quadro durante o fechamento: Atividade 2.1 (c)



Fonte: Acervo da autora.

Para apresentar o conceito de equações, falamos que as igualdades com as quais estávamos trabalhando, que possuíam um valor desconhecido, são chamadas equações. O valor desconhecido, que era representado pela letra x, chamamos de incógnita e não mais variável, pois agora essa incógnita não pode mais assumir qualquer valor, o que poderia ocorrer com as variáveis das expressões algébricas; damos o nome de raiz da equação. Mostramos em todas as situações do quadro esses elementos e ainda, para finalizar, falamos do conceito de equações equivalentes e também mostramos nas situações-problemas em que estávamos trabalhando, por exemplo, na situação-problema c, destacamos que a equação $x + 8 = 2x + 2$ é equivalente à equação $x + 6 = 2x$, que por sua vez também é equivalente à equação $6 = x$.

Para finalizar, fizemos a discussão da Atividade 3.1, a qual todos os alunos resolveram inicialmente por tentativas e afirmaram que essa questão foi difícil de resolver incialmente, mas que quando resolveram utilizando álgebra ficava muito mais rápido de resolver, então fizemos no quadro a solução por meio de uma equação. Um ponto interessante foi que um aluno comentou que anotou o problema e o levou para sua mãe resolver e ela o fez utilizando álgebra.

Assim, nossos objetivos foram atingidos, visto que, conseguimos discutir as diferentes representações e obter uma relação entre a aritmética e a álgebra. Além disso, pudemos notar que os alunos compreenderam a importância que a álgebra tem na resolução de algumas situações-problemas, visto que a álgebra foi utilizada para facilitar a vida dos alunos e não para complicá-la.

5.4. Encontro 6

Esse encontro teve a duração de dois períodos e planejamos que os alunos realizassem a Atividade 4 (Figura 48), que teve como objetivo resolver quatro situações-problemas de forma livre nos grupos e apresentar as resoluções no quadro para seus colegas. Ou seja, nessa atividade os alunos teriam que exercitar o poder de escolha sobre o método de resolução das situações-problemas.

Figura 48: Atividade 4

Atividade 4: Flávio e Fábio são amigos e toda a semana eles ganham uma "Semanada" de seus pais para comprar lanches para a escola. Eles decidiram economizar um pouco desse dinheiro para comprar uma chuteira que viram em uma loja por R$ 250,00.

a) Flávio consegue economizar R$ 20,00 por semana e seu pai lhe deu um incentivo de R$30,00 para iniciar a sua economia. Em quantas semanas ele poderá comprar a chuteira?

b) Já Fábio, consegue economizar R$ 15,00 por semana, mas ele teve a sorte de ganhar R$ 100,00 de incentivo de sua avó. Em quantas semanas ele poderá comprar a chuteira?

c) Sem considerar a compra do tênis, em quantas semanas Flávio e Fábio teriam poupado o mesmo valor em dinheiro?

d) Luciano gostou da ideia de Fábio e Flávio e pediu que seu pai lhe desse uma semanada para ele economizar dinheiro. Ele economizou dinheiro durante 6 semanas, juntando um total de R$ 246,00. Quanto ele economizou por semana?

Fonte: Acervo da autora.

Inicialmente os alunos reuniram-se com seus grupos e entregamos as folhas de atividades para que os alunos resolvessem as situações-problemas propostas. Ao final do encontro, quatro grupos apresentaram suas resoluções no quadro e, como um dos grupos apresentou uma verificação, mesmo sem termos falado na verificação ainda, aproveitamos o momento para estudar como poderíamos fazer a verificação da solução. Substituímos na equação inicial de cada item o valor encontrado para a incógnita. Os alunos comentaram que a verificação tem a mesma ideia da prova real nos cálculos de divisão, por exemplo.

Cada grupo apresentou um item da atividade. As apresentações foram interessantes, pois foi possível perceber nas falas dos alunos seus entendimentos sobre a situação-problema que estavam apresentando. As falas: "Como não sabemos quantas semanas são, vamos representar com o x"; ou "Vamos subtrair dos dois lados para manter o equilíbrio da igualdade", indicam que os alunos entendem o papel da incógnita na equação e a utilização do princípio aditivo na resolução das equações.

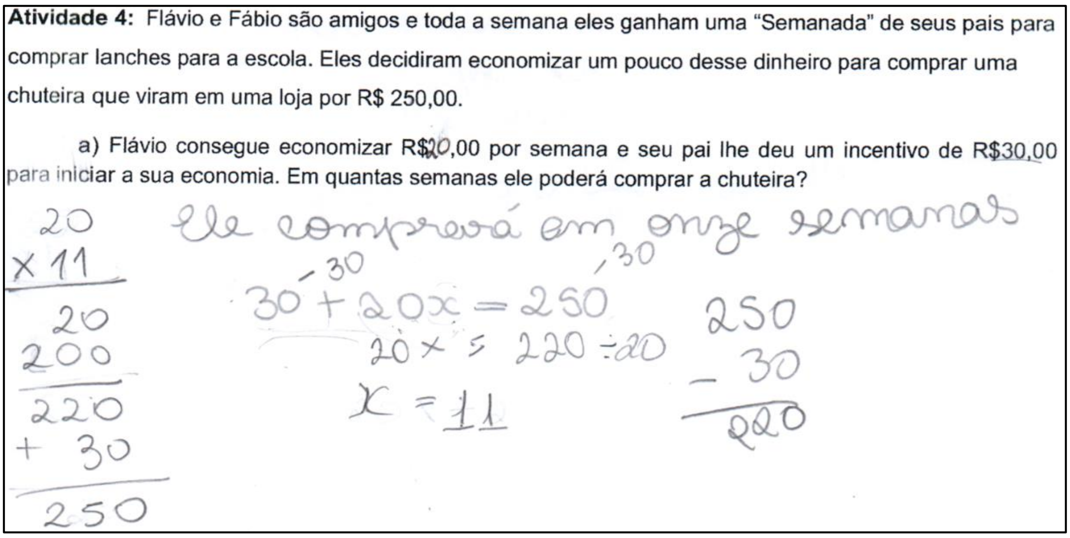
5.4.1. Análise da Atividade 4

Nesta seção, apresentamos a análise da Atividade 4, na qual buscamos analisar quais foram os tipos de registro utilizados pelos alunos na resolução das situações-problemas e como foi realizado o tratamento. Além disso, investigamos traços de argumentação explicitados pelos alunos nas apresentações aos colegas, visto que algumas vezes os discentes apresentam uma argumentação mais consistente de forma oral do que escrita.

Com exceção do último item da atividade, os demais itens foram resolvidos pelos alunos utilizando equações do primeiro grau com uma incógnita. No item a), dos nove grupos participantes, três apresentaram a verificação da equação antes de termos falado sobre isso. Todos os grupos apresentaram o registro algébrico e o tratamento também no registro algébrico, utilizando os princípios da igualdade para encontrar equações equivalentes. Ainda, oito, dos nove grupos, apresentaram a conversão da solução que haviam obtido encontrando um valor para x, realizando o processo inverso e retornando para o registro na linguagem natural com a finalidade de dar uma resposta ao problema. O único grupo que não apresentou uma resposta em linguagem natural para o problema, apenas apresentou a resolução da equação, utilizando os princípios da igualdade. Achamos interessante todos os grupos optarem por resolverem essa situação-problema por meio de uma equação. Acreditamos que as atividades anteriores contribuíram para que os alunos ganhassem confiança na utilização de equações para resolver situações-problemas e perceberam, de fato, como o uso de equações pode auxiliar na resolução de situações-problemas.

A Figura 49 ilustra uma solução apresentada para a situação-problema do item a). O grupo faz a representação, trazendo o registro algébrico na forma da equação $30 + 20x = 250$. Faz uso do princípio aditivo, subtraindo 30 dos dois lados da igualdade. Para encontrar o valor de $1x$, divide 200 por 20 (apesar da não precisão da escrita, ainda aceitável nesse momento). Além de encontrar o valor de x, o grupo apresenta uma verificação que pode ser observada do lado esquerdo da Figura 49 e traz a resposta em linguagem natural, convertendo o registro algébrico em natural.

Figura 49: Resolução Atividade 4 (a)


Atividade 4: Flávio e Fábio são amigos e toda a semana eles ganham uma "Semanada" de seus pais para comprar lanches para a escola. Eles decidiram economizar um pouco desse dinheiro para comprar uma chuteira que viram em uma loja por R$ 250,00.

a) Flávio consegue economizar R$20,00 por semana e seu pai lhe deu um incentivo de R$30,00 para iniciar a sua economia. Em quantas semanas ele poderá comprar a chuteira?

Ele comprará em onze semanas

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 11 \\ \hline 20 \\ 200 \\ \hline 220 \\ +\ 30 \\ \hline 250 \end{array}$$

$$30 + 20x = 250$$

$$20x = 220 \div 20$$

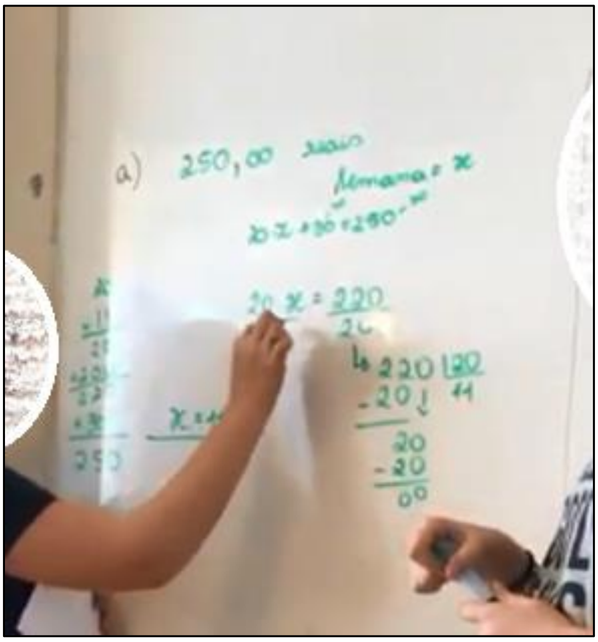
$$x = 11$$

$$\begin{array}{r} 250 \\ -\ 30 \\ \hline 220 \end{array}$$

Fonte: Acervo da autora.

É interessante salientar que o grupo que fez a apresentação no quadro começou sua explicação montando a equação e explicando que não sabiam quantas semanas o Flávio havia economizado dinheiro, então representariam o número de semanas por x. Após, explica que utilizou o $20x$, pois representa quanto Flávio economizou em cada uma das vinte semanas. Notamos, por meio das falas, que o grupo parece ter compreendido o uso da incógnita na resolução de uma equação. O grupo finalizou a resolução utilizando os princípios da igualdade e encontrou o valor $x = 11$. Ao contrário do que vemos na foto acima, o grupo que apresentou na lousa (Figura 50), fez a divisão por vinte nos dois lados da igualdade para obter $x = 11$. Contudo, quando questionei sobre por que fazer a divisão por vinte, o grupo demorou a responder, mas um colega auxiliou dizendo que era porque queríamos o valor de um x e tínhamos descoberto o valor de $20x$ até o momento. Então um integrante que estava apresentando confirmou que era por esse motivo.

Figura 50: Grupo apresentando a resolução da Atividade 4 (a) na lousa.

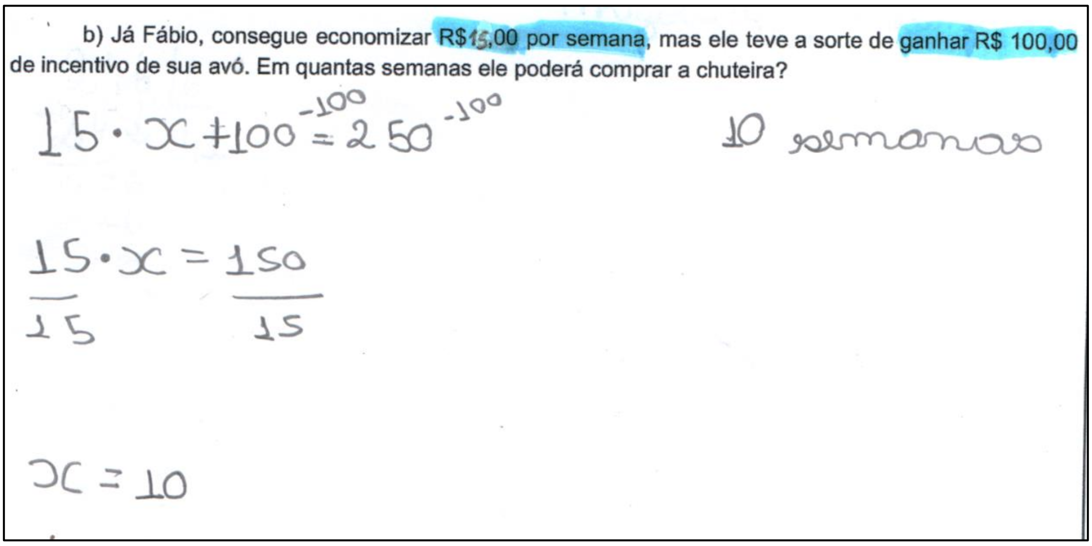


Fonte: Acervo da autora.

Para finalizar, esse grupo fez a verificação, mesmo sem ser solicitada. Ainda explicou que gostaria de saber se estava correta a sua resolução e então realizou o cálculo, assim como fez um outro grupo, cuja resolução está na Figura 49, obtendo o 250. Foi a partir dessa apresentação que, ao final do encontro, realizamos a verificação de todos os itens da atividade. Aproveitamos a oportunidade para trabalhar a verificação da solução de uma equação, utilizando a ideia/apresentação dos alunos na construção desse conhecimento.

No item b) desta atividade, dos nove grupos participantes, todos apresentaram o registro algébrico e o tratamento nesse registro, sendo que sete deles utilizaram o princípio aditivo explicitamente, como ilustra a Figura 51, ao subtrair 100 unidades dos dois lados da igualdade. Os outros dois grupos, não explicitaram como fizeram a passagem da equação $15x + 100 = 250$ para a equação $15x = 150$. Quatro grupos utilizaram também o princípio multiplicativo explicitamente, como também podemos observar na Figura 51. Acreditamos que os grupos apresentaram nessa atividade a divisão dos dois lados da igualdade, pois usamos essa representação no quadro no fechamento das atividades anteriores. Além disso, oito, dos nove grupos, apresentaram a solução da situação-problema em linguagem natural, fazendo a conversão do registro algébrico para o registro natural. Um dos grupos apresentou somente a resolução da equação, utilizando os princípios aditivo e multiplicativo.

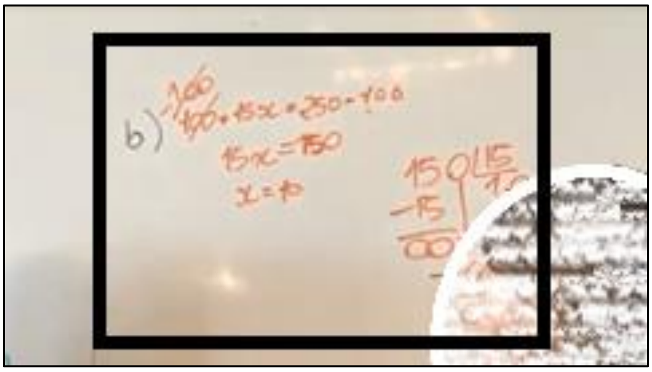
Figura 51: Resolução Atividade 4 (b)



Fonte: Acervo da autora.

Na apresentação, no final do encontro, o grupo que apresentou a resolução para o item b), também destacou que colocou o $15x$, porque ele guardava quinze reais por semana, mas não sabia por quantas semanas. Após o grupo explicar como formou a equação $100 + 15x = 250$, apresentou a resolução da equação utilizando os princípios da igualdade, através da seguinte fala (acompanhe a resolução pela imagem da Figura 52): “Tem que eliminar os números desse lado (apontando para o lado esquerdo da igualdade) para deixar só o x. Daí a gente vai primeiro eliminar esse 100, daí a gente botou ‘-100’ e eles se anulam. Daí aqui desse lado temos que por ‘-100’ também, por que a gente precisa pôr dos dois lados para a igualdade se manter. Daí isso ficou $15x$ igual a 150. Daí para descobrir... aqui a gente tem o valor de $15x$, a gente sabe que esses $15x$ valem 250, mas a gente precisa saber quanto vale $1x$, então a gente dividiu 150 por 15 e descobrimos que o valor de $1x$ é 10. Então ele vai precisar de dez semanas para comprar a chuteira”.

Figura 52: Grupo apresentando a resolução da Atividade 4 (b) na lousa



Fonte: Acervo da autora.

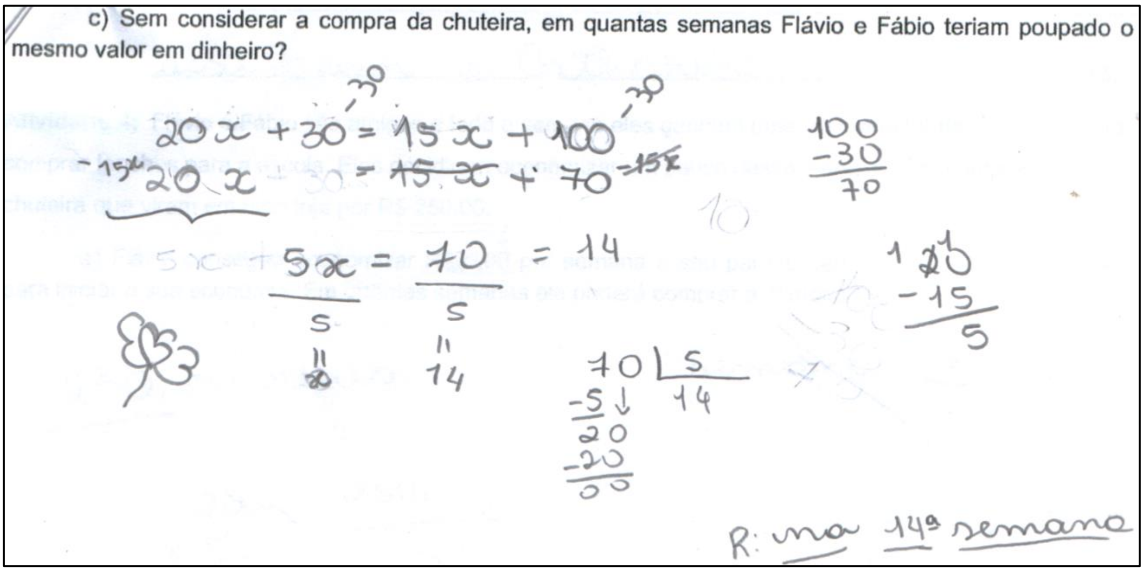
Acreditamos que o uso dos *Algebra Tiles* contribuiu para a resolução dessa equação, pois podemos observar alguns indícios na fala do grupo, salientando que precisava eliminar o valor numérico para manter apenas x no lado esquerdo da igualdade, por exemplo. Também observamos indícios do uso quando o grupo afirma que encontrou o valor de $15x$, mas quer saber o valor de $1x$ e então deve efetuar a divisão por 15. Essas ideias eram as utilizadas no tratamento do registro pictórico, feito com o material manipulativo, na resolução das situações-problemas. Neste momento observamos a importância de realizar atividades como a 2.1 dessa sequência, em que os alunos têm a oportunidade de formar diferentes tipos de registros e realizar a conversão entre eles, pois nos parece que os alunos, ao terem apresentado os três itens fundamentais à semiose (formação de um registro, conversão e tratamento), compreenderam como podemos representar situações-problemas por meio de equações e também como podemos efetuar a resolução dessas equações. E é interessante que os alunos aprenderam "sozinhos", descobrindo por meio do uso do material manipulativo e das situações-problemas propostas anteriormente.

No item c), oito, dos nove grupos, entregaram uma resolução. Todos os grupos resolveram através de uma equação, utilizando os princípios aditivo e multiplicativo.

Inicialmente, pensamos que os alunos teriam mais dificuldades na realização desta tarefa, visto que, ao fazer a conversão do registro natural para o registro algébrico, eles teriam que utilizar a incógnita dos dois lados da igualdade. Para descrever a equação, os alunos não tiveram dificuldades e acreditamos que isso ocorreu por eles ou devido ao fato de eles já terem visto equações dessa forma nas situações-problemas anteriores, utilizando o material *Algebra Tiles*. Para efetuar o tratamento, ou seja, resolver a equação, os alunos utilizaram os princípios da igualdade e todos os grupos utilizaram o princípio aditivo duas vezes. Dessa forma, primeiramente os grupos eliminavam a incógnita de um dos lados da igualdade e após, eliminavam o termo numérico de um dos lados (ou o contrário), afim de isolar a incógnita. Os grupos evidenciaram esse objetivo durante o encontro afirmando que precisavam encontrar "*x* igual a um *número"* ao final da resolução.

Podemos observar a resolução apresentada por um dos grupos na Figura 53. Inicialmente, o grupo faz a conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica, apresentando a equação $20x + 30 = 15x + 100$. Para iniciar a resolução da equação, os alunos utilizaram o princípio aditivo, subtraindo 30 unidades em cada lado da igualdade, obtendo a equação $20x = 15x + 70$. A partir desta equação, os alunos utilizaram novamente o princípio aditivo, subtraindo $15x$ em cada lado da igualdade, obtendo a equação $5x = 70$. Para finalizar, o grupo efetua a divisão por cinco nos dois lados da igualdade para obter a solução $x = 14$.

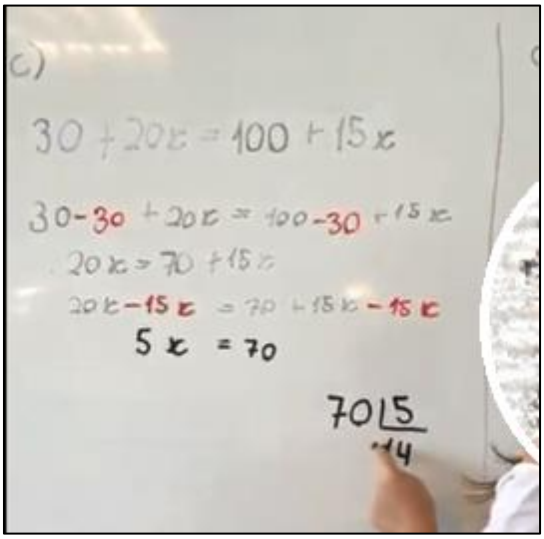
Figura 53: Resolução da Atividade 4 (c).



Fonte: Acervo da autora.

Durante a apresentação de um dos grupos na lousa, novamente ficou claro o uso dos princípios da igualdade na resolução da equação. É importante destacar que ao apresentar a resolução da equação $20x + 30 = 15x + 100$, o grupo observou que poderia iniciar a resolução subtraindo o "*x*, ou o valor" (fala dos alunos). E indicou que iniciaria subtraindo o valor 30 dos dois lados para manter a igualdade. Seguiu a resolução, como podemos observar na Figura 54. Finalizou a resolução informando que faria a divisão por 5, pois queria somente o valor de *1x* e explicitou que então os dois amigos teriam o mesmo valor em 14 semanas.

Figura 54: Grupo apresentando a resolução da Atividade 4 (c) na lousa.

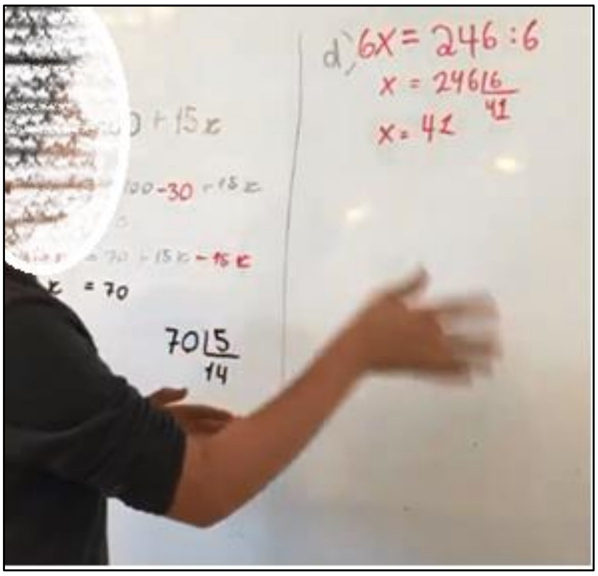


Fonte: Acervo da autora.

No último item da atividade, o item d), dos nove grupos participantes da pesquisa, oito grupos entregaram uma solução, sendo que um deles não encontrou uma resposta, fez apenas um esboço de resolução. O grupo que não entregou a solução foi o mesmo que não entregou a solução para o item c). Dos oito grupos que resolveram a situação-problema, três resolveram utilizando o cálculo de divisão: $246 \div 6$ e cinco grupos, além do cálculo da divisão, expressou a situação-problema através de uma equação: $6x = 246$. Nenhum grupo que expressou a situação-problema algebricamente apresentou uma "segunda linha" na resolução. Apenas fez o cálculo de divisão e apresentou uma resposta em linguagem natural para o problema.

Na apresentação na lousa (Figura 55) percebemos a resolução em que o aluno afirma: "a gente vai dividir o 246 por 6 e desse lado (apontando para o lado esquerdo), a gente vai dividir o $6x$ por 6, que vai dar $1x$ e aqui (do lado direito) vai dar 41, que é o valor que ele conseguiu em cada semana".

Figura 55: Grupo apresentando a resolução da Atividade 4 (d) na lousa.



Fonte: Acervo da autora.

Podemos observar que os grupos que utilizaram somente a divisão, apresentaram a conversão da linguagem natural para a linguagem numérica, efetuaram o tratamento na linguagem numérica e, com exceção de um grupo, todos voltaram para o registro em linguagem natural para apresentar a resposta para a situação-problema. Já os alunos que representaram de forma algébrica, fizeram a conversão da linguagem natural para o registro algébrico e o devido tratamento, usufruindo também do registro numérico para realizar a divisão 246 : 6. Para finalizar, retornou-se para o registro natural para apresentar a resposta para a situação-problema.

Assim, foi possível perceber na Atividade 4 a importância de dar a opção de escolha sobre a forma de resolução de uma situação-problema aos alunos. Notamos que, mesmo que os itens anteriores tenham sido resolvidos com a utilização da álgebra, o último item foi resolvido de outra forma por alguns grupos, porque foi o modo como os alunos acreditaram ser o mais natural neste momento. Aqui temos um ponto importante da matemática: poder utilizar diversos caminhos diferentes para chegar a um mesmo resultado e, segundo Duval (2012), escolher a forma de resolver a situação-problema também é significante para a aprendizagem dos indivíduos.

Além disso, achamos interessante os alunos terem optado por resolverem as situações-problemas por meio do uso de equações. Isso nos leva a acreditar que as atividades anteriores realmente contribuíram para que os alunos observassem como a álgebra pode auxiliar na resolução de problemas. Ainda, foi possível notar a contribuição das atividades anteriores nas justificativas dos alunos ao apresentarem suas soluções na lousa.

5.5. Encontros 7 e 8

Estes encontros totalizaram três períodos e para eles foram planejadas as Atividades 5 e 5.1, semelhantes às Atividades 1 e 1.1 e 2 e 2.1, com o diferencial de que estas novas as atividades incluem termos desconhecidos que estão sendo retirados, ao invés de adicionados. Assim, na Atividade 5 (Figura 56) os objetivos foram resolver situações-problemas utilizando o conhecimento matemático prévio dos alunos; formar representações para as situações-problemas e; desenvolver a argumentação dos alunos de forma escrita. E na Atividade 5.1 os objetivos foram: representar com palavras, pictoricamente e de outra forma as situações da Atividade 5; perceber que na representação pictórica agora é necessário o uso do retângulo laranja; encontrar uma forma de manipular o material para encontrar o valor desconhecido e associá-la à representação pictórica; converter a representação pictórica para outra representação e apresentar os tratamentos nas diferentes representações.

Figura 56: Atividade 5

Fátima e Carlos são primos e passaram suas férias de inverno no sítio da sua avó, onde tem um pomar maravilhoso com muitas árvores frutíferas.

a) Já no primeiro dia, os primos colheram 16 laranjas para fazer suco para o almoço, utilizaram uma certa quantidade para fazer o suco e ainda ficaram com 5 laranjas. Quantas laranjas eles utilizaram para fazer o suco?

b) No segundo dia eles colheram bergamotas. Fátima colheu 10 bergamotas e deu um certo número de bergamotas para sua avó. Já Carlos, colheu 14 bergamotas e deu o dobro que Fátima para sua avó. Sabendo que os dois primos ficaram como o mesmo número de bergamotas, quantas bergamotas Fátima deu para sua avó?

c) No terceiro dia, como estava chovendo, eles jogaram um pouco de videogame. O jogo que eles estavam jogando acumulava os pontos durante as partidas. Quando eles iniciaram o jogo, tinham +12 pontos. Ao final do dia, o saldo acumulado era de +5 pontos. Como isso é possível? Qual foi o saldo de pontos obtidos pelos primos durante o dia?

Fonte: Acervo da autora.

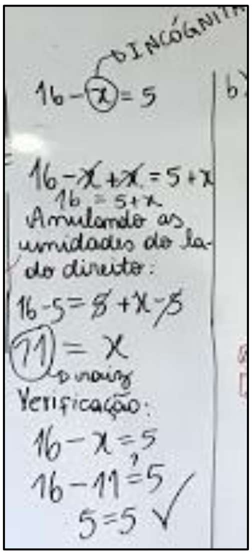
No início do encontro 7 entregamos as atividades para os grupos, juntamente com os *Algebra Tiles* e o "tapetinho" para manipulação do material. À medida que os grupos concluíam a resolução das situações-problemas, prontamente iniciavam a resolução da Atividade 5.1, utilizando os *Algebra Tiles*. Não surgiram dúvidas no momento da resolução inicial. Ao escrever as situações-problemas propostas com *Algebra Tiles*, os alunos perceberam que eles estavam agora retirando uma quantidade desconhecida, então lembravam (espontaneamente ou através de questionamentos) que para representar a subtração de x, teriam que somar o oposto de x, que é "-x", e então precisavam utilizar o retângulo laranja.

Os grupos terminaram suas atividades no encontro 8, no qual fizemos um fechamento no quadro, assim como havíamos feito no encontro 5. Fizemos a parte escrita resumida oralmente e escrevemos no quadro as representações utilizando os *Algebra Tiles* e "de outra forma". Assim como nas demais atividades, a outra forma escolhida foi a algébrica, que para os alunos participantes parecia ser natural ao se depararem com os *Algebra Tiles*.

Na primeira situação-problema, os alunos solicitaram que representasse na lousa dezesseis quadradinhos azuis e um retângulo laranja do lado esquerdo da igualdade e cinco quadradinhos azuis do lado direito da igualdade. Lembrando que o retângulo laranja foi utilizado, pois subtrair x, é o mesmo que somar o oposto de x, por definição. Escrevemos na forma algébrica: $16 - x = 5$ e quando fomos realizar o próximo passo da resolução, inicialmente uma colega levantou o dedo e disse: "Agora, nós podemos anular cinco em cada lado e depois anular o '-x', adicionando dos dois lados um retângulo amarelo". Os colegas concordaram, fizemos os dois passos no quadro e encontramos que $11 = x$. Quando terminamos a resolução, o aluno P disse: "Mas profe, poderíamos fazer de uma outra forma eu acho: podíamos anular 16 em cada lado e daí então ficaríamos com $-x = -11$". Perguntamos para a turma se poderíamos fazer dessa forma e o aluno N então respondeu: "Claro! Agora é só pegar o oposto, porque $-x$ significa o oposto de x, né profe?". Perguntamos para a turma se os alunos concordavam e responderam que realmente resultaria no mesmo valor e que até poderíamos resolver em menos passos.

Para finalizar essa questão, relembramos os conceitos e fizemos a verificação, como observamos na Figura 57. Ao perguntar como que fazíamos a verificação, o aluno V disse que podíamos "colocar o 11 no valor do x" e observar se ficava uma igualdade verdadeira.

Figura 57: Relembrando os conceitos de equações.

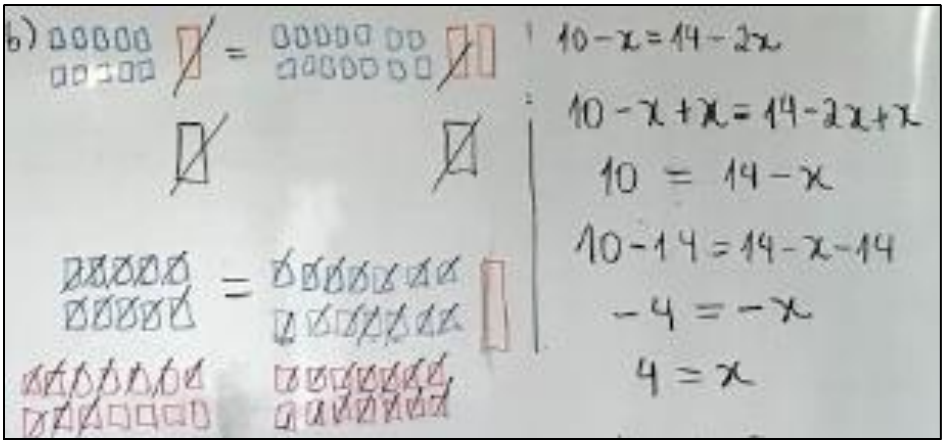


Fonte: Acervo da autora.

Ao apresentarmos a segunda situação-problema (item b), logo após representar a primeira linha pictoricamente, os alunos comentaram que também poderíamos fazer de duas formas: ou adicionar dois retângulos amarelos de cada lado e já ficar com o *x*, ou adicionar um retângulo amarelo de cada lado e ficar com o oposto de *x* e então bastaria tomar o oposto no final. Como na primeira situação fizemos do primeiro modo, nesta situação-problema optamos por fazer da segunda forma.

A Figura 58 ilustra a igualdade $-4 = -x$ e após, escrevemos $4 = x$. Como no material utilizamos a ideia de $-x$ ser o oposto de *x*, não é utilizada aqui a ideia de multiplicar por -1, comumente utilizada na resolução de equações em que o coeficiente de *x* é negativo.

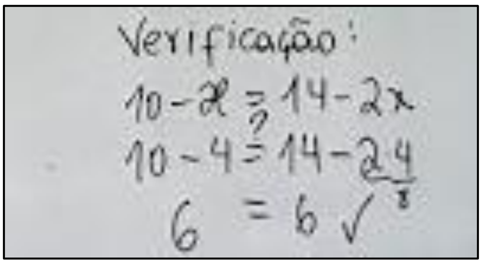
Figura 58: Resolução na lousa Atividade 5.1 (b).



Fonte: Acervo da autora.

É importante observar que o processo de tomar o oposto se torna natural com o uso do material, diferente de precisar multiplicar dos dois lados da igualdade por -1, que parece apenas uma regra. Além disso, é interessante notar a concordância da turma em poder resolver das duas formas diferentes nas duas situações: tanto ficando com o coeficiente de *x* positivo dos dois lados da igualdade, quanto ficando com o coeficiente de *x* negativo e precisando tomar o oposto. Os alunos percebem que são processos equivalentes e que podem transitar entre um e outro. Após encontrar o valor de *x*, efetuamos a verificação da solução, como ilustra a Figura 59.

Figura 59: Verificação Atividade 5.1 (b).



Fonte: Acervo da autora.

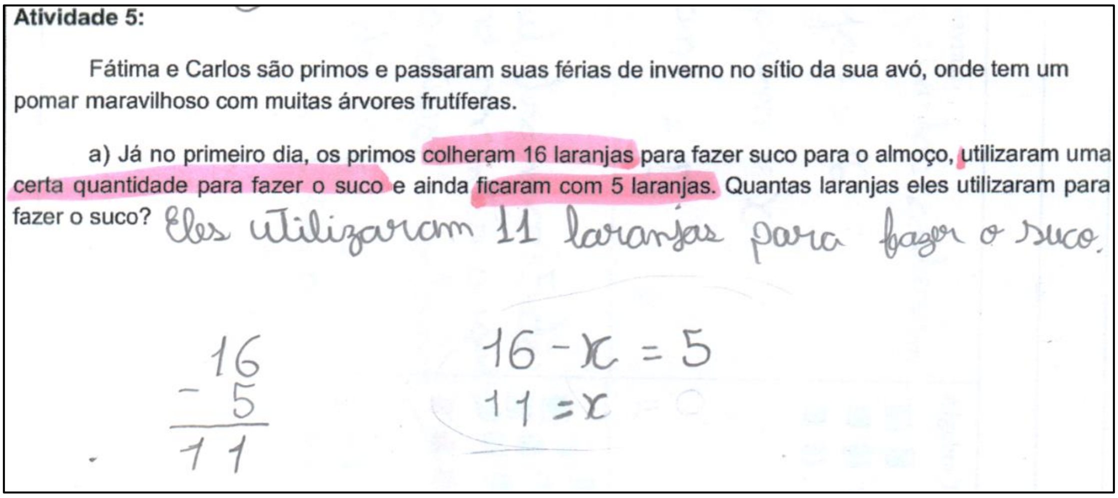
Nestes encontros foi possível observar que nossos objetivos foram atingidos, visto que os alunos novamente utilizaram os conhecimentos aritméticos para fazer a passagem para a álgebra e o que mais nos chamou a atenção nesses encontros foi a capacidade de os alunos visualizarem a resolução utilizando os *Algebra Tiles* de diferentes formas e sempre utilizando os princípios aditivo e multiplicativo, fundamentais para a resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita.

5.5.1. Análise da Atividade 5

Nesta seção, apresentamos a análise da Atividade 5, na qual verificamos quais os tipos de registros que os alunos apresentaram na resolução das situações-problemas propostas.

Todos os nove grupos entregaram a atividade 5, que era formada por três situações-problemas. No item a), quatro grupos utilizaram representação algébrica em suas resoluções, sendo que dois desses utilizaram a equação: $16 - x = 5$; e dois utilizaram a equação: $x = 16 - 5$. Esses quatro grupos apresentaram também o registro numérico, efetuando a subtração $16 - 5 = 11$ em suas resoluções e ainda apresentaram a resposta à pergunta em linguagem natural. Dessa forma, podemos notar que esses grupos transitaram entre três formas de registros: numérico, algébrico e natural, efetuando a conversão entre eles; efetuaram o tratamento no registro numérico, por meio da resolução da subtração $16 - 5 = 11$ e três dos grupos completaram o registro algébrico explicitando o valor da incógnita x. Além disso, os quatro grupos realizaram o processo inverso, voltando para a linguagem natural para apresentar a resposta final à situação-problema. Podemos observar um exemplo de resolução na Figura 60 , na qual o grupo apresenta os registros algébrico e numérico, além disso traz uma resposta completa para a situação-problema proposta.

Figura 60: Resolução Atividade 5 (a).


Atividade 5:

Fátima e Carlos são primos e passaram suas férias de inverno no sítio da sua avó, onde tem um pomar maravilhoso com muitas árvores frutíferas.

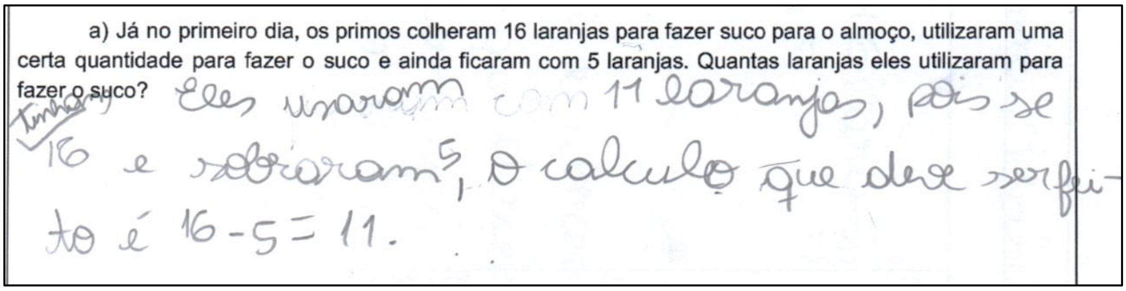
a) Já no primeiro dia, os primos colheram 16 laranjas para fazer suco para o almoço, utilizaram uma certa quantidade para fazer o suco e ainda ficaram com 5 laranjas. Quantas laranjas eles utilizaram para fazer o suco? Eles utilizaram 11 laranjas para fazer o suco.

$$\begin{array}{r} 16 \\ -\ 5 \\ \hline 11 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 16 - x = 5 \\ 11 = x \end{array}$$

Fonte: Acervo da autora.

Os cinco demais grupos apresentaram suas soluções por meio da linguagem natural, mas trazendo em suas escritas (dois apresentando também o registro numérico) que pensaram na solução realizando a subtração $16 - 5 = 11$ (Figura 61).

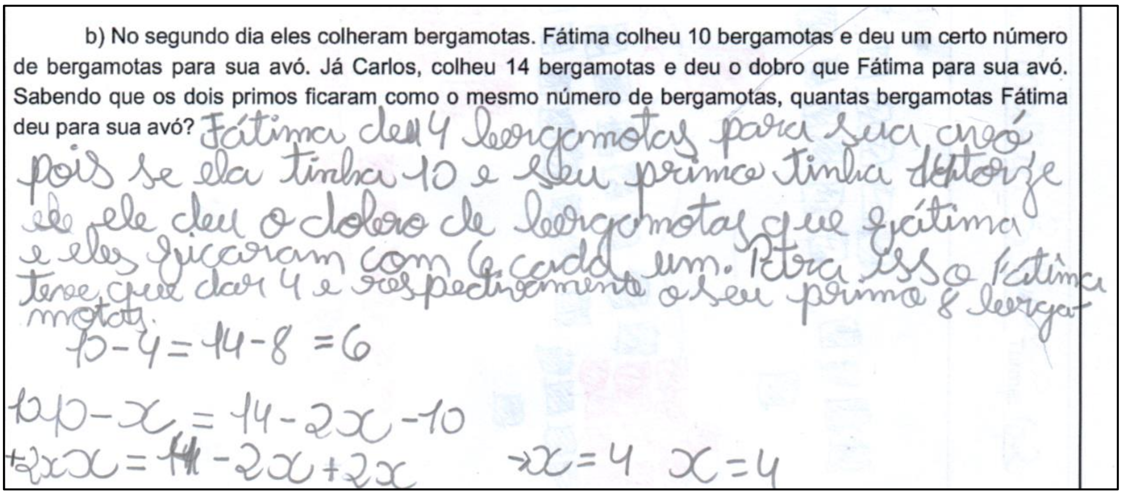
Figura 61: Resolução Atividade 5 (a).


a) Já no primeiro dia, os primos colheram 16 laranjas para fazer suco para o almoço, utilizaram uma certa quantidade para fazer o suco e ainda ficaram com 5 laranjas. Quantas laranjas eles utilizaram para fazer o suco? Eles usaram com 11 laranjas, pois se tinham 16 e sobraram 5, o calculo que deve ser feito é 16-5=11.

Fonte: Acervo da autora.

No item b) da atividade, cinco grupos apresentaram o registro algébrico e o tratamento também no registro algébrico por meio da resolução da equação $10 - x = 14 - 2x$, utilizando as propriedades da igualdade, como observamos na Figura 62. Podemos notar, no exemplo ilustrado na Figura 62, que o grupo ainda apresentou uma verificação por meio da igualdade: $10 - 4 = 14 - 8 = 6$. Contudo, dois desses grupos apenas resolveram a equação, sem trazer a resposta para a situação-problema por meio da linguagem natural.

Figura 62: Resolução Atividade 5 (b).


b) No segundo dia eles colheram bergamotas. Fátima colheu 10 bergamotas e deu um certo número de bergamotas para sua avó. Já Carlos, colheu 14 bergamotas e deu o dobro que Fátima para sua avó. Sabendo que os dois primos ficaram como o mesmo número de bergamotas, quantas bergamotas Fátima deu para sua avó? Fátima deu 4 bergamotas para sua avó pois se ela tinha 10 e seu primo tinha quatorze e ele deu o dobro de bergamotas que Fátima e eles ficaram com 6 cada um. Para isso a Fátima teve que dar 4 e respectivamente o seu primo 8 bergamotas.

$10 - 4 = 14 - 8 = 6$

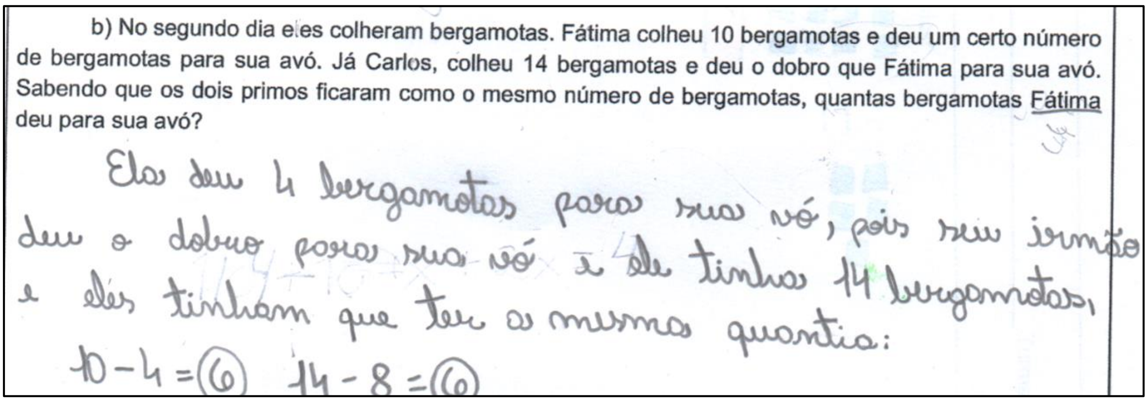
$10 - x = 14 - 2x - 10$

$+2x\ x = 14 - 2x + 2x \quad x = 4 \quad x = 4$

Fonte: Acervo da autora.

Os outros quatro grupos apresentaram suas ideias por meio do registro em linguagem natural, sendo que três deles apresentaram também registro numérico, para mostrar que os valores apresentados como respostas faziam com que Fátima e Carlos tivessem 6 bergamotas após dar um certo número para a avó. Esses grupos apresentaram suas justificativas por meio da ideia de que Fátima e Carlos deveriam ter o mesmo número de bergamotas no final, como observamos na Figura 63. Acreditamos que eles testaram valores até chegar no resultado correto, contudo isso não está explicitado nas resoluções. Dessa forma, observamos que os grupos transitam entre os diferentes registros para encontrar a solução para a situação-problema proposta.

Figura 63: Resolução Atividade 5 (b).


b) No segundo dia eles colheram bergamotas. Fátima colheu 10 bergamotas e deu um certo número de bergamotas para sua avó. Já Carlos, colheu 14 bergamotas e deu o dobro que Fátima para sua avó. Sabendo que os dois primos ficaram como o mesmo número de bergamotas, quantas bergamotas Fátima deu para sua avó?

Ela deu 4 bergamotas para sua vó, pois seu irmão deu o dobro para sua vó e ele tinha 14 bergamotas, e eles tinham que ter a mesma quantia:

$10 - 4 = 6 \quad 14 - 8 = 6$

Fonte: Acervo da autora

No último item da atividade, sete dos nove grupos apresentaram registro na linguagem natural e registro numérico e dois grupos apresentaram somente a resposta em linguagem natural. Seis dos nove grupos apresentaram justificativas corretas sobre a possibilidade de iniciar o jogo com +12 pontos e terminar com +5, explicando que era possível pois os primos haviam perdido pontos durante o dia, ou que haviam acumulado um saldo negativo. Dois grupos não apresentaram justificativas e um grupo apresentou uma justificativa incorreta: "No final do jogo eles possuíam 7 pontos, pois no final do jogo eles perderam 5 pontos igual a: $12 - 5 = 7$" observamos que essa solução não está de acordo com o enunciado da situação-problema.

5.5.2. Análise da Atividade 5.1

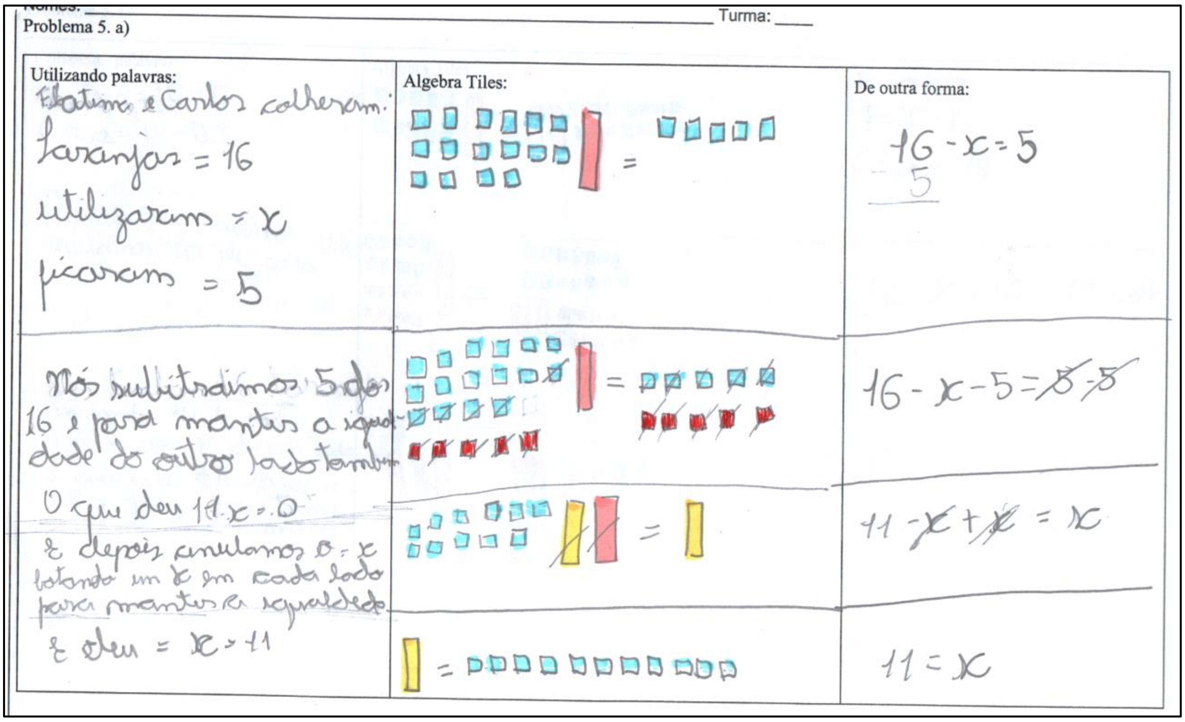
A Atividade 5.1 foi inspirada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, assim como as Atividades 1.1 e 2.1, visto que propusemos situações-problemas em que os alunos pudessem comparar e construir diferentes registros de representação para uma mesma situação-problema dada. Diferentemente das Atividades 1.1 e 2.1, nessa atividade, os alunos sentiam a necessidade de utilizar o "$-x$" na representação por meio dos *Algebra Tiles*, o que é importante para os alunos perceberem que para anular "$-x$" é necessário acrescentar o retângulo amarelo, que representa o "$+x$", e não mais o retângulo laranja. Dessa forma, buscamos analisar na Atividade 5.1 se os alunos transitam entre os diferentes registros e como eles fazem a manipulação do material para poder anular $-x$.

No primeiro item da atividade, os nove grupos participantes utilizaram os registros na linguagem natural, para resumir a situação-problema utilizando palavras, todos também apresentaram a conversão para o registro pictórico por meio dos *Algebra Tiles* e seis grupos apresentaram o tratamento no registro pictórico. Os três grupos que não explicitaram o tratamento, apenas descreveram a situação-problema pictoricamente, sem explicitar os demais passos do tratamento para encontrar o valor de x. Além disso, oito grupos apresentaram, na última coluna, a conversão para o registro algébrico e um grupo apresentou a conversão para o registro numérico.

Dos grupos que apresentaram a conversão para o registro algébrico, quatro deles apresentaram o tratamento completo, utilizando as propriedades da igualdade, os demais grupos apenas apresentaram a equação inicial e na linha abaixo o valor para x. Podemos observar, na Figura 64, a resolução de um grupo que realizou todos os três elementos básicos importantes à semiose: a formação de um registro, a conversão do registro e o tratamento.

Podemos notar na resolução do grupo da Figura 64, a formação do registro de representação utilizando palavras na primeira coluna, nesse registro os alunos explicam como foi realizado o tratamento do registro para o qual realizaram a primeira conversão: o pictórico. Podemos observar que, ao realizar o tratamento, os alunos preocupam-se em utilizar as propriedades da igualdade ao afirmar "nós subtraímos 5 dos 16 e, para manter a igualdade, do outro lado também. O que deu $11 - x = 0$. E depois anulamos o $-x$ botando um x em cada lado para manter a igualdade. E deu $x = 11$". Notamos que o que está explicado, é exatamente o que observamos no tratamento do registro pictórico. No registro algébrico, observamos que o tratamento também é realizado utilizando as propriedades da igualdade: subtraindo 5 e adicionando x aos dois lados da igualdade. Podemos notar que no registro pictórico o grupo expressou o resultado final como $x = 11$ e no registro algébrico mantiveram na ordem em que estavam resolvendo a equação: $11 = x$. Acreditamos que no registro algébrico a ordem foi alterada pois o grupo evidenciou em sua resposta o valor do retângulo amarelo.

Figura 64: Resolução Atividade 5.1 (a).



Fonte: Acervo da autora.

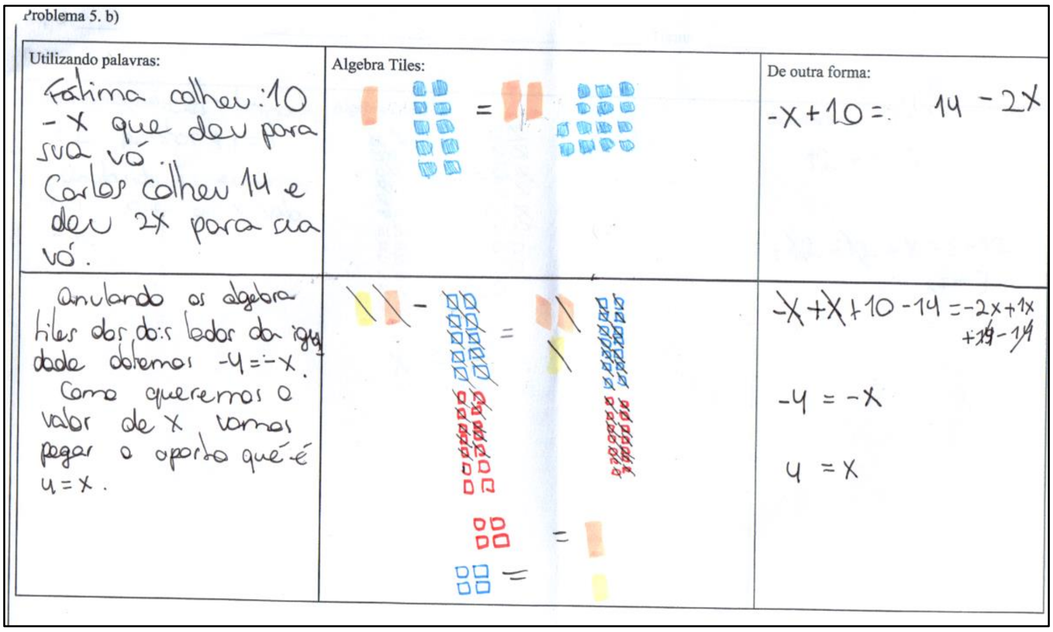
Salientamos que no registro algébrico o grupo escreve $16 - x = 5$, mas lembramos que o grupo está "pulando" a representação $16 + (-x) = 5$, visto que no material temos sempre somas (pois estamos sempre "juntando" quadradinhos e retângulos). Acreditamos que essa forma de escrita está conectada também com a formação da situação-problema, pois na situação proposta Fátima e Carlos colheram 16 laranjas e utilizaram algumas (x). Como não é possível utilizar o sinal operatório da subtração no material, os alunos representaram pictoricamente utilizando o oposto de x, contudo, ao representar algebricamente utilizaram novamente a ideia de subtrair x laranjas, que provavelmente eles entendem que é o mesmo que adicionar (-x), como construído na subtração de números inteiros.

No segundo item da atividade, dos nove grupos participantes, oito entregaram uma resolução completa para a questão. Sete grupos apresentaram a formação de um registro utilizando palavras, a conversão e o tratamento no registro pictórico e a conversão e o tratamento no registro algébrico. O oitavo grupo apresentou os diferentes registros de representação, mas não realizou o tratamento nos registros pictórico e algébrico.

Durante a resolução dessa atividade foi interessante notar que os alunos encontraram a solução de formas diferentes ao realizar o tratamento com o material: adicionando $2x$ aos dois lados da igualdade, ou adicionando $1x$ aos dois lados da igualdade e, para finalizar, tomando o oposto dos dois lados da igualdade. A Figura 65 ilustra uma das formas de resolução.

A Figura 65, ilustra a formação do registro utilizando palavras, as conversões para o registro pictórico e algébrico e os tratamentos em cada registro. Notamos que o grupo apresenta utilizando palavras uma explicação para o que é feito com o material concreto, preocupando-se com as propriedades da igualdade. Podemos verificar que são adicionados 14 quadradinhos vermelhos em cada lado da igualdade e um retângulo amarelo, dessa forma, como o grupo escreve: “Anulando os *Algebra Tiles* dos dois lados da igualdade obtemos $-4 = -x$. Como queremos o valor de x, vamos pegar o oposto que é $4 = x$”. Ou seja, o grupo adiciona um retângulo amarelo em cada lado, obtenho $-4 = -x$, mas como os alunos precisam saber o valor de x, eles tomam o oposto dos dois lados a igualdade. O tratamento na forma algébrica é feito de forma semelhante.

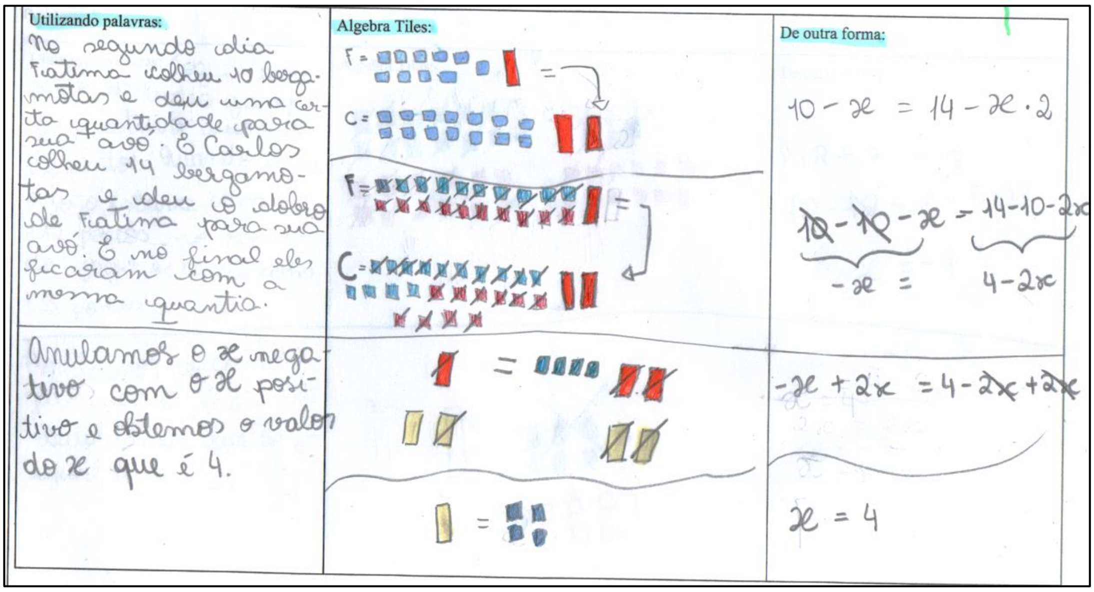
Figura 65: Resolução Atividade 5.1 (b).



Fonte: Acervo da autora.

Já outra forma de resolução mostrada pelos alunos, ilustrada na Figura 66, cuja resolução é feita adicionando dois retângulos amarelos, obtendo x em um dos lados da igualdade, não sendo necessário tomar o oposto ao final da resolução. Inicialmente notamos que o grupo apresenta o seu registro utilizando palavras, explicando a situação-problema e a partir de um momento explica um pouco da sua resolução utilizando o material concreto. Observamos que o grupo deixa claro na representação por meio dos *Algebra Tiles* qual lado da igualdade representa a Fátima e qual lado representa o Carlos. O grupo adiciona 10 quadradinhos vermelhos, e faz o cancelamento, obtendo $-x = 4 - 2x$. Após, adiciona 2 retângulos amarelos a cada lado da igualdade, explicando: “Anulamos o x negativo com o x positivo e obtemos o valor de x que é 4. O grupo segue a mesma ideia no tratamento do registro algébrico, utilizando o princípio aditivo em sua resolução, obtendo $x = 4$ ao final. Dessa forma, verificamos que o grupo, assim como o anterior e os outros seis grupos que completaram a atividade apresentaram os três passos fundamentais à semiose na resolução deste item, o que é importante para a aprendizagem, segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval.

Figura 66: Resolução Atividade 5.1 (b).

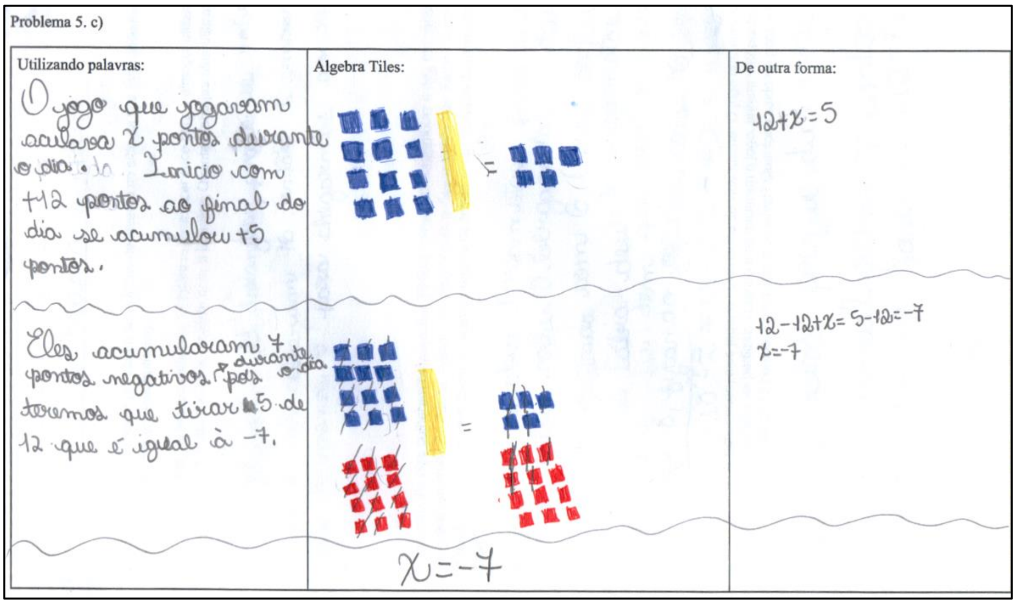


Fonte: Acervo da autora.

No último item da atividade, dos nove grupos, sete entregaram a atividade completa. Os outros dois grupos não tiveram tempo suficiente de finalizar antes da realização do fechamento. Todos os sete grupos apresentaram três formas de registro: língua materna, pictórico e algébrico. Os grupos representaram a situação-problema de duas formas diferentes utilizando o material: utilizando um retângulo amarelo para representar a quantidade de pontos obtidos durante o dia, ou utilizando um retângulo laranja, já interpretando que foram perdidos pontos durante o dia.

A Figura 67 ilustra um exemplo de resolução utilizando o retângulo amarelo para identificar o número de pontos obtidos durante o dia pelos primos. Observamos que o grupo apresenta a conversão para o registro pictórico e o tratamento, além disso, apresenta a conversão para o registro algébrico e também o seu tratamento. Observamos que ao solucionar a situação-problema o grupo utiliza o princípio aditivo. Notamos que a solução obtida é $x = -7$ e o grupo explica: “Eles acumularam 7 pontos negativos durante o dia”.

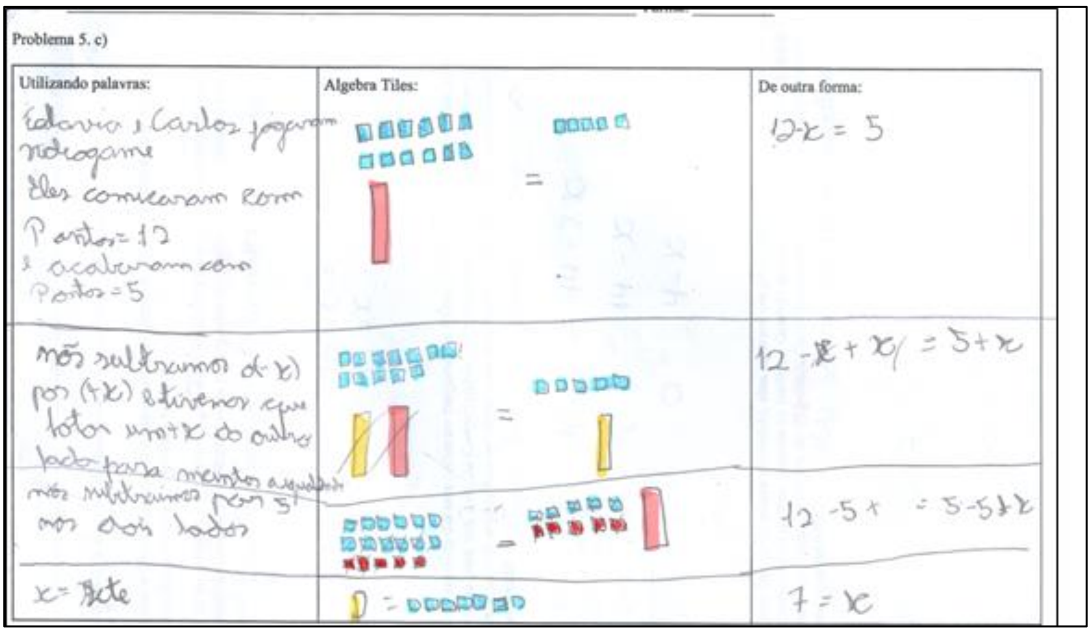
Figura 67: Resolução Atividade 5.1 (c).



Fonte: Acervo da autora.

Outra forma de resolução está ilustrada na Figura 68, na qual acreditamos que o grupo utiliza o retângulo laranja, pois está implícito no enunciado que Fátima e Carlos perderam pontos durante o dia. Dessa forma, após resolver a equação utilizando o princípio aditivo, os alunos encontraram $x = 7$, já que a interpretação utilizada foi diferente, mas a resposta para a situação-problema é a mesma: Fátima e Carlos perderam 7 pontos durante o dia.

Figura 68: Resolução Atividade 5.1 (c).



Fonte: Acervo da autora.

Podemos observar que em todos os itens da Atividade 5.1 os alunos utilizaram os três elementos fundamentais à semiose, dessa forma notamos que essa atividade cumpriu com o seu objetivo, que era incentivar os alunos na formação e comparação de diferentes registros de representação semiótica para uma mesma situação-problema dada. Outro ponto importante é que nas resoluções dos alunos é utilizado o princípio aditivo da igualdade, que é fundamental para a resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita. Também é importante observar que os alunos optaram por formas diferentes de realização do tratamento no registro pictórico e isso também é importante, visto que não temos somente uma forma de resolver uma equação, como observamos com os alunos no fechamento dessa atividade e relatado na seção anterior.

5.6. Encontros 9 e 10

Para esses encontros foram planejadas as Atividades 6 e 7. O objetivo da Atividade 6 (Figura 69) foi resolver situações-problemas comumente presentes em livros didáticos que envolvem resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita.

Figura 69: Atividade 6

Atividade 6:

Resolva os problemas a seguir:

a)Pensei em um número, adicionei 30 e o resultado que obtive foi 13. Em qual número pensei?

b) O número 43, menos o dobro de um número é igual a 15. Qual é esse número?

c) O triplo de um número adicionado a 40, é igual a 120 menos o mesmo número. Qual é esse número?

Fonte: Acervo da autora.

Já a Atividade 7 (Figura 70), tinha por objetivo que os alunos criassem situações-problemas que pudessem ser resolvidos por meio de uma equação do primeiro grau com uma incógnita. A Atividade 7, proposta neste encontro, é composta por 3 itens: em um deles, os alunos podem criar uma situação-problema que pode ser resolvido utilizando qualquer equação criada por eles; e nos outros dois itens, são dadas duas equações que devem servir de base para a criação das situações-problemas. Esta questão foi inspirada na importância de os alunos realizarem também o processo inverso: ir do registro algébrico para o registro em língua natural.

Figura 70: Atividade 7

Atividade 7:

Vamos exercitar a criatividade criando alguns problemas para os colegas resolverem!

a) Crie um problema que pode ser resolvido utilizando uma equação e apresente aqui a sua resolução.
b) Crie um problema que pode ser resolvido utilizando a equação $12 + x = 25$.
c) Crie um problema que pode ser resolvido utilizando a equação $x + 30 = 2x + 14$.

Fonte: Acervo da autora.

Inicialmente, cada grupo recebeu a folha com a Atividade 6. Durante a resolução dessa atividade uma aluna comentou: "Ainda bem que aprendemos equações, se não levaríamos um tempão resolvendo isso aqui de novo, assim é bem mais fácil". Essa fala demonstra que os alunos entenderam que o uso de equações pode tornar a resolução de um problema mais rápida ou fácil, observando assim, a importância do estudo da álgebra. À medida que cada grupo finalizava a Atividade 6, recebia a folha com a Atividade 7, na qual os alunos deveriam criar situações-problemas que pudessem ser resolvidos utilizando equações do primeiro grau com uma incógnita e apresentar sua resolução.

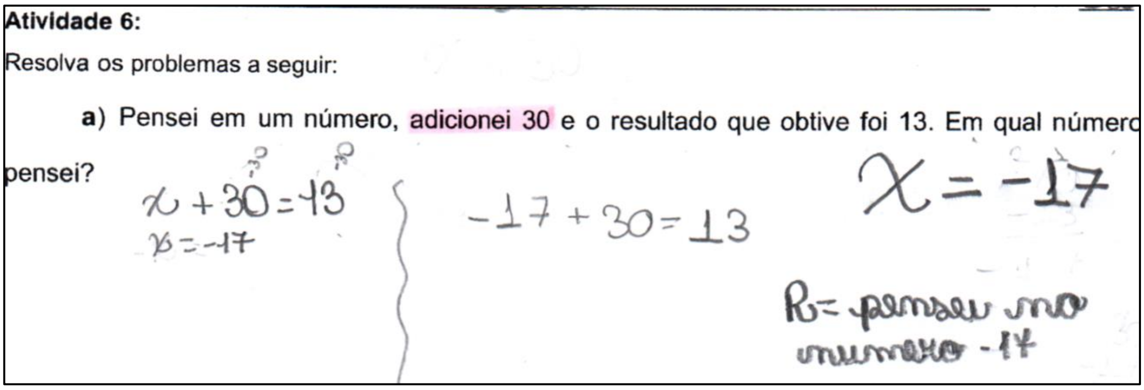
Ao criarem as situações-problemas da Atividade 7, alguns grupos foram mais criativos, utilizando situações diferentes das abordadas em aula, já outros, criaram situações parecidas com as que estudamos. Os primeiros dois itens foram mais tranquilos para resolver nos grupos, pois no primeiro item os alunos poderiam escolher a equação e no segundo item tínhamos uma equação com incógnita em somente um dos lados da igualdade. Já no último item os grupos apresentaram mais dificuldades, visto que a equação tinha incógnita nos dois lados da igualdade, então os alunos acharam mais complicado criar uma situação-problema para essa equação.

5.6.1. Análise da Atividade 6

Nessa seção apresentamos a análise da Atividade 6, na qual buscamos analisar quais foram os tipos de registros apresentados pelos alunos nos documentos entregues, buscando verificar se os alunos utilizaram equações do primeiro grau com uma incógnita para a resolução das situações-problemas.

A atividade 6 foi entregue por oito, dos nove grupos participantes da pesquisa. No primeiro item da atividade, todos os grupos resolveram a situação-problema proposta utilizando a equação do primeiro grau: $x + 30 = 13$. Desses grupos, sete apresentaram explicitamente o uso do princípio aditivo no desenvolvimento da resolução. Além disso, sete, dos oito grupos apresentaram a verificação da raiz, para comprovar que suas respostas estavam, de fato, corretas. Apenas três grupos apresentaram uma resposta completa para a situação-problema. Dessa forma, podemos notar que esses três grupos apresentaram no item a) os três elementos básicos da semiose, segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica: a formação de um novo registro- o registro algébrico; o tratamento no registro formado; a conversão para o registro numérico e ainda, alguns grupos fizeram a conversão para voltar à linguagem natural, como a Figura 71 ilustra. Note que os alunos formaram o registro algébrico e apresentaram seu devido tratamento, utilizando o princípio aditivo. Após, o grupo efetuou a conversão para o registro numérico e então apresentou a solução na linguagem natural, trazendo em sua solução todos os elementos fundamentais à semiose.

Figura 71: Resolução Atividade 6 (a).


Atividade 6:

Resolva os problemas a seguir:

a) Pensei em um número, adicionei 30 e o resultado que obtive foi 13. Em qual número pensei?

$x + 30 = 13$
$x = -17$

$-17 + 30 = 13$

$x = -17$

R= pensei no numero -17

Fonte: Acervo da autora.

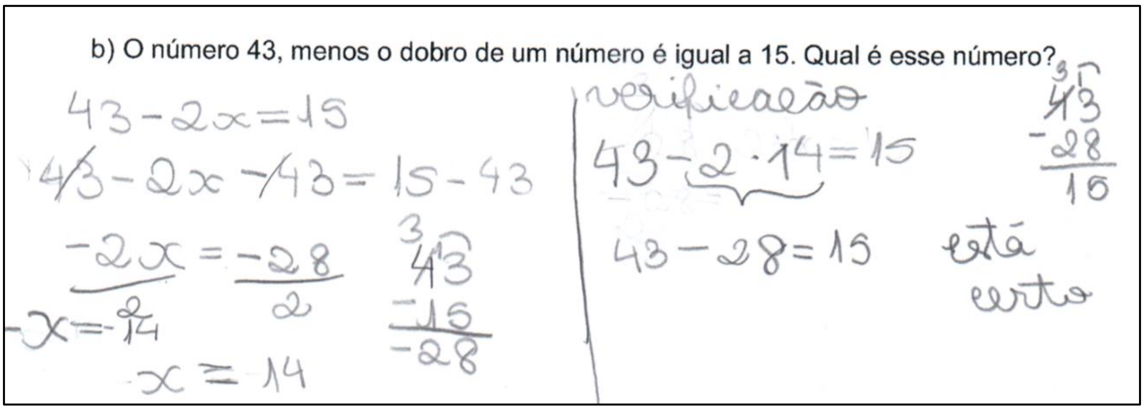
No item b) da atividade dois grupos resolveram a questão utilizando operações aritméticas e seis grupos por meio de uma equação do primeiro grau com uma incógnita. Os dois grupos que resolveram utilizando operações aritméticas apresentaram o registro numérico:

43-15 = 28 e então apresentaram o número 14 como resposta para a situação-problema. Um dos grupos justificou: “É o número 14, pois o dobro do número é 28, o número que deu na conta”. Podemos notar que o grupo fez a formação de um novo registro: o numérico, apresentou seu tratamento e então apresentou a resposta para a situação-problema em linguagem natural.

Os seis grupos que resolveram a situação-problema por meio de uma equação do primeiro grau com uma incógnita, também apresentaram a verificação da solução. Dessa forma, houve a formação de um novo registro: o algébrico, e seu devido tratamento, utilizando os princípios da igualdade. Além disso, houve a conversão do registro algébrico para o numérico e o seu tratamento, para efetuar a verificação, como podemos observar na Figura 72. Dessa forma notamos que os grupos apresentaram os três elementos fundamentais à semiose na resolução dessa questão.

Podemos notar na resolução do grupo na Figura 72 a utilização do princípio aditivo ao subtrair 43 dos dois lados da igualdade e o uso do princípio multiplicativo ao efetuar a divisão dos dois lados da igualdade. Notamos que o grupo encontra $-x = -14$ e escreve logo abaixo que $x = 14$. Conjectura-se que isso se deve ao uso do material, pois os alunos veem $-x$ como sendo o oposto de x. Após encontrar o valor da incógnita, observamos que o grupo faz a verificação, substituindo o valor de x por 14 e encontrando uma igualdade verdadeira.

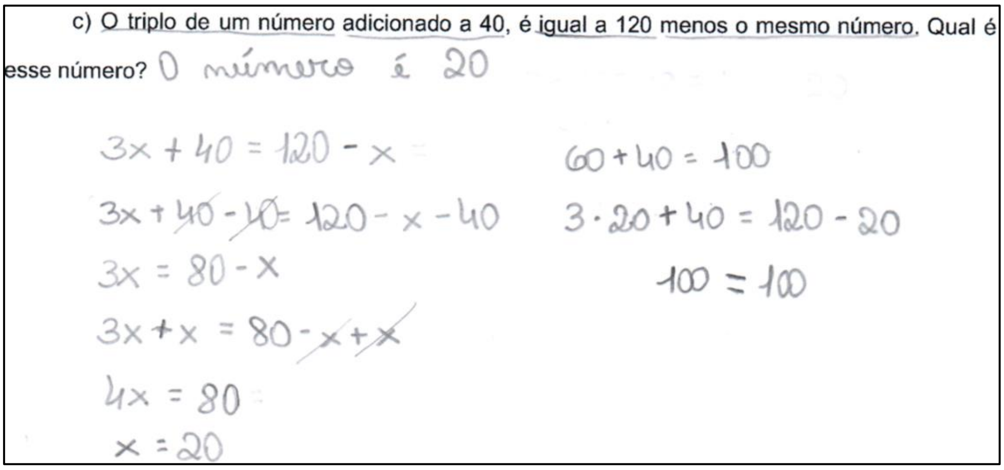
Figura 72: Resolução Atividade 6 (b).



Fonte: Acervo da autora.

Dos oito grupos, sete responderam ao terceiro item da questão, todos eles por meio da equação: $3x + 40 = 120 - x$, apresentando inclusive a verificação. O grupo que não respondeu, deixou sua resolução incompleta. Podemos observar, na Figura 73, que outro grupo apresentou os três passos importantes para a semiose: a formação de uma nova representação (quando escreve a equação $3x + 40 = 120 - x$), o tratamento (ao resolver a equação utilizando os princípios aditivo e multiplicativo) e a conversão (ao passar do registro algébrico para o numérico ao realizar a verificação da solução). Os demais grupos seguiram passos similares, contudo apenas três deles apresentaram respostas para a situação-problema, apesar de terem encontrado o valor da incógnita x.

Figura 73: Resolução Atividade 6 (c).


c) O triplo de um número adicionado a 40, é igual a 120 menos o mesmo número. Qual é esse número? O número é 20

$3x + 40 = 120 - x$

$3x + \cancel{40} - \cancel{40} = 120 - x - 40$

$3x = 80 - x$

$3x + x = 80 - \cancel{x} + \cancel{x}$

$4x = 80$

$x = 20$

$60 + 40 = 100$

$3 \cdot 20 + 40 = 120 - 20$

$100 = 100$

Fonte: Acervo da autora.

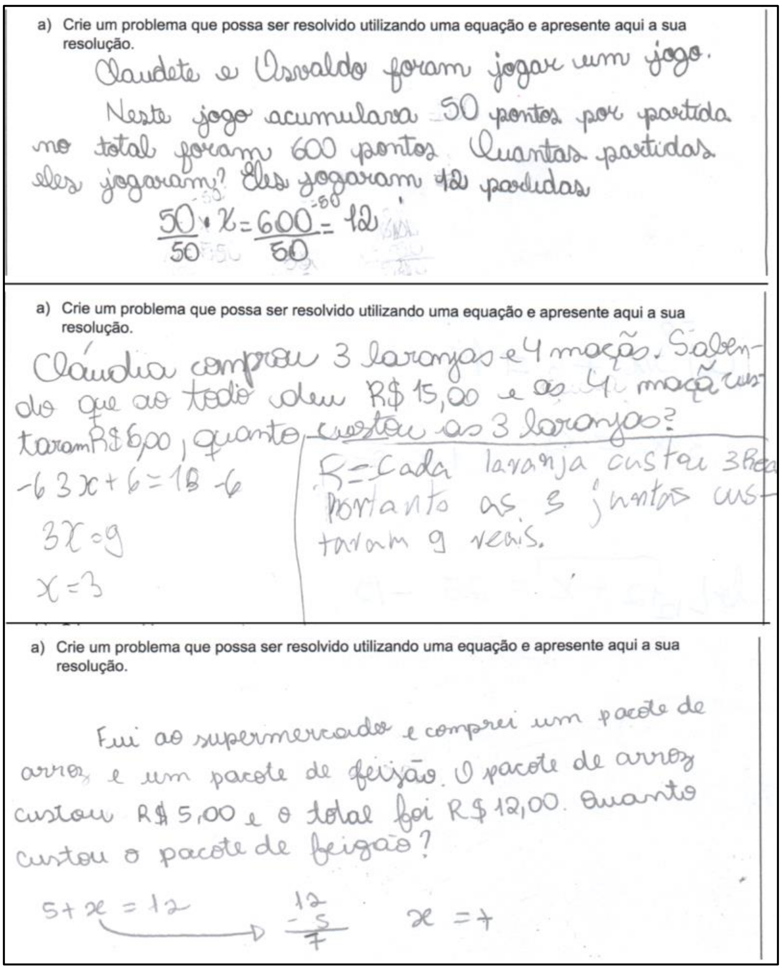
Dessa forma, podemos notar que os alunos estão utilizando equações na resolução das situações-problemas e percebemos em suas falas que parece que eles entenderam a ideia de que pode se tornar mais simples a resolução por meio de uma equação. É importante destacar que os alunos resolveram as equações utilizando os princípios da igualdade e acreditamos que isso se deve à utilização anterior do material *Algebra Tiles*, visto que ao trabalhar com o material eles parecem ter compreendido que precisam "anular valores" para alcançar o objetivo final, que é encontrar o valor de x, a incógnita da nossa situação-problema.

5.6.2. Análise da Atividade 7

Nessa seção, apresentamos a análise da Atividade 7, na qual analisamos a coerência das situações-problemas criadas pelos alunos com a equação apresentada em cada item.

No primeiro item da atividade, os alunos poderiam criar uma situação-problema para ser resolvido por meio de uma equação que eles escolhessem. Dos oito grupos que entregaram a atividade, quatro deles apresentaram respostas a equação e a resolução para o problema. Um grupo apresentou a resolução de forma numérica e três deles não apresentaram resolução, apenas a situação-problema. A Figura 74 ilustra alguns exemplos das situações-problemas que os alunos criaram.

Figura 74: Resoluções Atividade 7 (a).



a) Crie um problema que possa ser resolvido utilizando uma equação e apresente aqui a sua resolução.

Claudete e Osvaldo foram jogar um jogo. Neste jogo acumulava 50 pontos por partida no total foram 600 pontos Quantas partidas eles jogaram? Eles jogaram 12 partidas

$\frac{50 \cdot x}{50} = \frac{600}{50} = 12$

a) Crie um problema que possa ser resolvido utilizando uma equação e apresente aqui a sua resolução.

Cláudia comprou 3 laranjas e 4 maçãs. Sabendo que ao todo deu R$ 15,00 e as 4 maçã custaram R$ 6,00, quanto custou as 3 laranjas?

$-6\ 3x + 6 = 15\ -6$

$3x = 9$

$x = 3$

R= Cada laranja custou 3 Reais portanto as 3 juntas custaram 9 reais.

a) Crie um problema que possa ser resolvido utilizando uma equação e apresente aqui a sua resolução.

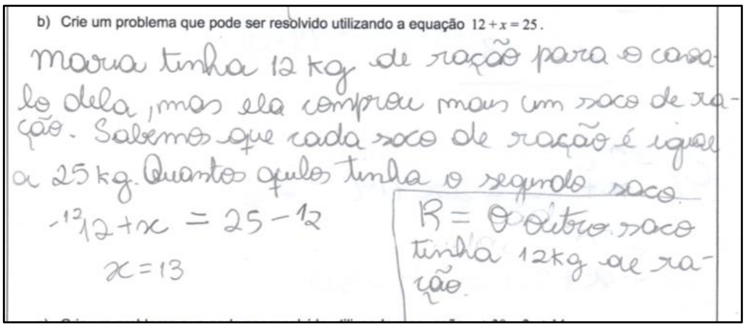
Fui ao supermercado e comprei um pacote de arroz e um pacote de feijão. O pacote de arroz custou R$ 5,00 e o total foi R$ 12,00. Quanto custou o pacote de feijão?

$5 + x = 12 \rightarrow 12 - 5 = 7 \quad x = 7$

Fonte: Acervo da autora.

No item b) da atividade foi dada a equação $12 + x = 25$ e os alunos deveriam criar uma situação-problema que pudesse ser resolvido por meio dessa equação. Dos oito grupos que entregaram, sete criaram situações-problemas que podem ser resolvidos da forma solicitada. O grupo que não fez corretamente, escreveu o que podemos observar na Figura 75. Notamos que ao invés de escrever “Sabemos que cada saco de ração é igual a 25kg”, o grupo deveria ter escrito algo semelhante com “Sabendo que os dois sacos de ração pesam no total 25kg”.

Figura 75: Resolução Atividade 7 (b).


b) Crie um problema que pode ser resolvido utilizando a equação $12 + x = 25$.

Maria tinha 12 kg de ração para o cachorro dela, mas ela comprou mais um saco de ração. Sabemos que cada saco de ração é igual a 25 kg. Quantos quilos tinha o segundo saco.

$\overset{-12}{12} + x = 25 - 12$

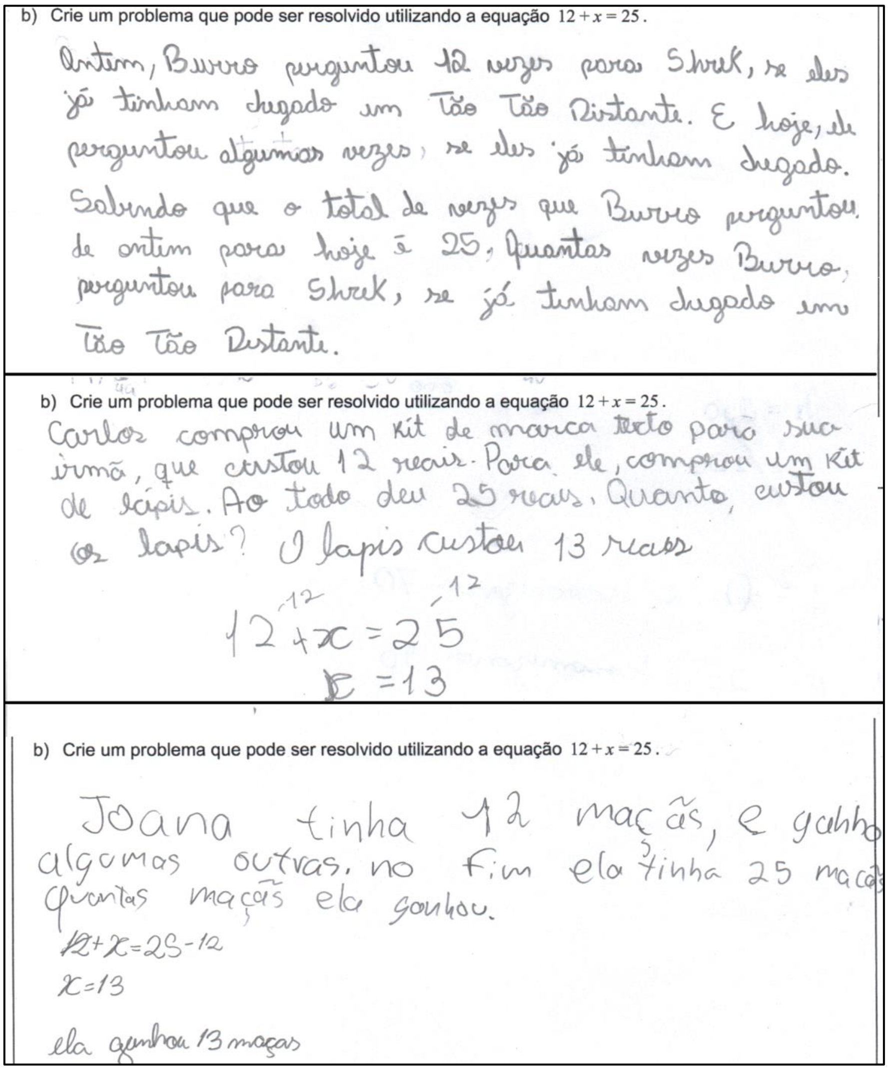
$x = 13$

R= O outro saco tinha 12kg de ração.

Fonte: Acervo da autora.

A Figura 76 ilustra outras situações-problemas criadas pelos alunos para o segundo item da tarefa. É interessante notar que os alunos utilizam o princípio aditivo durante a resolução das equações.

Figura 76: Resolução Atividade 7(b).


b) Crie um problema que pode ser resolvido utilizando a equação $12 + x = 25$.

Ontem, Burro perguntou 12 vezes para Shrek, se eles já tinham chegado em Tão Tão Distante. E hoje, ele perguntou algumas vezes, se eles já tinham chegado. Sabendo que o total de vezes que Burro perguntou de ontem para hoje é 25, Quantas vezes Burro perguntou para Shrek, se já tinham chegado em Tão Tão Distante.

b) Crie um problema que pode ser resolvido utilizando a equação $12 + x = 25$.

Carlos comprou um kit de marca texto para sua irmã, que custou 12 reais. Para ele, comprou um kit de lápis. Ao todo deu 25 reais, Quanto custou os lapis? O lapis custou 13 reais

$\overset{-12}{12} + x = \overset{-12}{25}$

$x = 13$

b) Crie um problema que pode ser resolvido utilizando a equação $12 + x = 25$.

Joana tinha 12 maçãs, e ganhou algumas outras, no fim ela tinha 25 maçãs quantas maçãs ela ganhou.

$\cancel{12} + x = 25 - 12$

$x = 13$

ela ganhou 13 maças

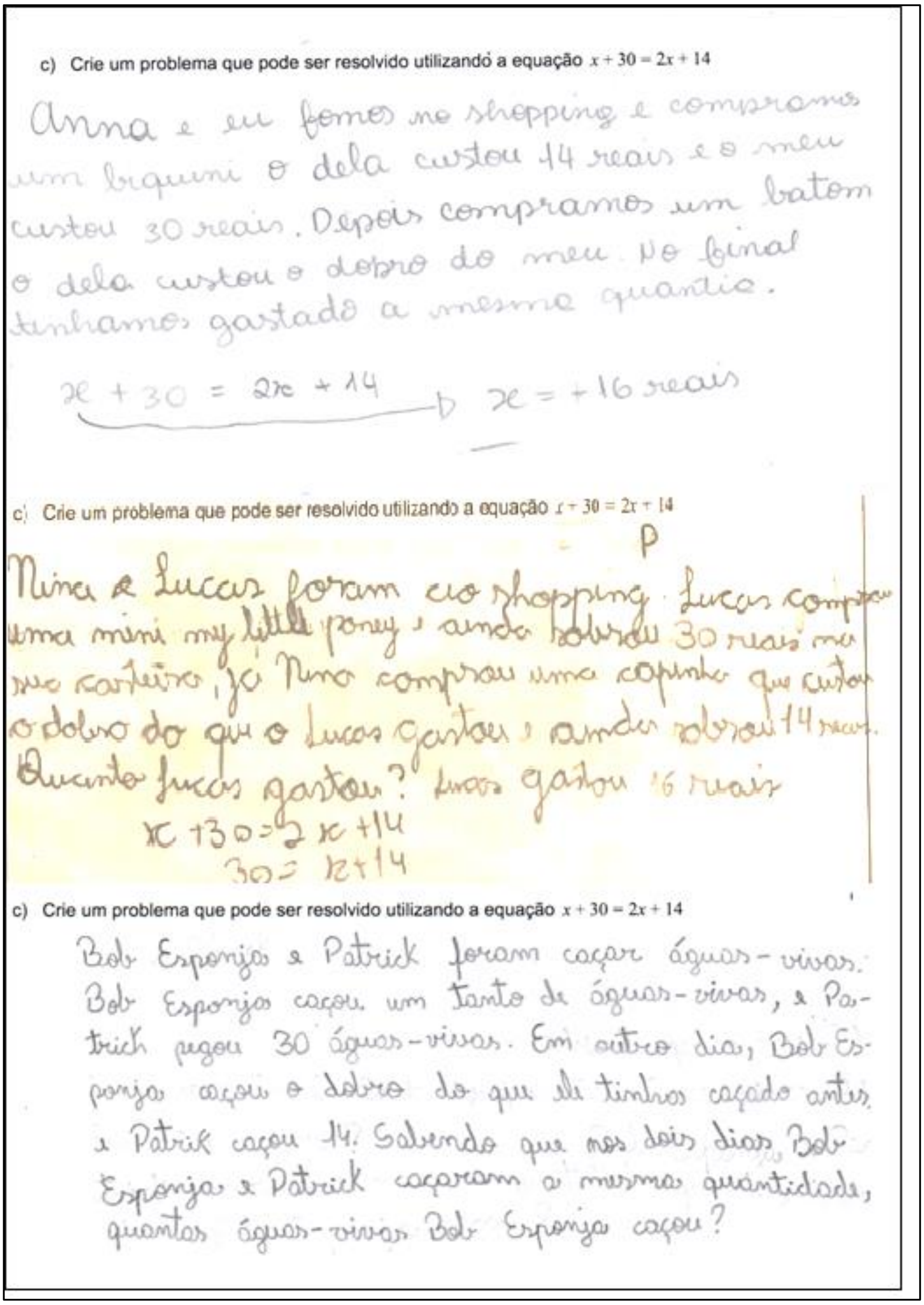
Fonte: Acervo da autora.

No terceiro item da atividade, os alunos foram convidados a criar uma situação-problema que pudesse ser resolvida utilizando a equação $x + 30 = 2x + 14$. Esse foi o item que os alunos tiveram mais dificuldade para fazer. Sete, dos oito grupos criaram situações-problemas corretamente e um dos grupos confundiu-se no momento de criar a situação-problema.

A Figura 77 ilustra alguns exemplos de situações-problemas criados pelos alunos nessa atividade. Observe na primeira situação-problema que o grupo esqueceu de colocar a pergunta, que poderia ser: "Quanto custou o meu batom?", por exemplo.

Dessa forma, podemos observar que os grupos conseguiram cumprir satisfatoriamente a tarefa de criar problemas que possam ser resolvidos por meio de uma equação. É importante salientar que o processo de criação de problemas é sugerido na BNCC e, segundo Duval, esse é um passo importante para a aprendizagem dos alunos, visto que os mesmos fazem o processo inverso, criando situações-problemas onde podem ser aplicados os conhecimentos matemáticos obtidos durante a realização das atividades anteriores.

Figura 77: Resolução Atividade 7(c).



c) Crie um problema que pode ser resolvido utilizando a equação $x + 30 = 2x + 14$

Anna e eu fomos no shopping e compramos um biquini o dela custou 14 reais e o meu custou 30 reais. Depois compramos um batom o dela custou o dobro do meu. No final tinhamos gastado a mesma quantia.

$\underline{x + 30 = 2x + 14} \rightarrow x = +16$ reais

c) Crie um problema que pode ser resolvido utilizando a equação $x + 30 = 2x + 14$

Nina e Lucas foram ao shopping. Lucas comprou uma mini my little poney e ainda sobrou 30 reais na sua carteira, já Nina comprou uma copinho que custou o dobro do que o Lucas gastou e ainda sobrou 14 reais. Quanto Lucas gastou? Lucas gastou 16 reais

$x + 30 = 2x + 14$

$30 = x + 14$

c) Crie um problema que pode ser resolvido utilizando a equação $x + 30 = 2x + 14$

Bob Esponja e Patrick foram caçar águas-vivas. Bob Esponja caçou um tanto de águas-vivas, e Patrick pegou 30 águas-vivas. Em outro dia, Bob Esponja caçou o dobro do que ele tinha caçado antes e Patrik caçou 14. Sabendo que nos dois dias Bob Esponja e Patrick caçaram a mesma quantidade, quantas águas-vivas Bob Esponja caçou?

Fonte: Acervo da autora.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino e a aprendizagem de álgebra no Ensino Fundamental representam um dos momentos de dificuldades no estudo de matemática no Brasil e no exterior, por parte de estudantes e professores (Lins e Gimenez (1997). Isso porque esse é um momento de ruptura na matemática escolar, visto que, segundo os autores, não se tem uma relação entre a aritmética e a álgebra. Algumas vezes o estudo da álgebra limita-se ao estudo de cálculo com letras, sem a devida compreensão. Dessa forma, os autores acreditam que a aritmética e a álgebra deveriam ser desenvolvidas juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra. Além disso, é preciso pensar em meios de proporcionar aos estudantes a passagem entre a aritmética e a álgebra e segundo, Lins e Gimenez (1997) e Usiskin (1995), um recurso possível seria a resolução de problemas.

Concordamos ainda mais com essa ideia quando pensamos na resolução de problemas para o estudo de equações do primeiro grau com uma incógnita, já que, segundo Mason (1996), algumas situações-problemas podem ser resolvidas por meio da aritmética, ou por meio da álgebra. Contudo, como os alunos participantes da pesquisa não possuíam conhecimentos sobre as equações do primeiro grau com uma incógnita, para levá-los à construção/ modelagem das equações, optamos por utilizar o material manipulativo *Álgebra Tiles*, buscando verificar se esse material auxilia na transição entre a aritmética e a álgebra. Ainda, por meio deste, entender se os alunos seriam capazes de criar o procedimento para a resolução de equações do primeiro grau, utilizando os princípios da igualdade, já que acreditamos que propiciar uma compreensão do procedimento de resolução de uma equação, pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos.

Dessa forma, em nossa pesquisa buscamos responder a seguinte pergunta: Como o uso do material manipulativo *Algebra Tiles* pode contribuir para o desenvolvimento, pelos alunos, do procedimento para resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita na resolução de situações-problemas? Para responder à essa pergunta, desenvolvemos e implementamos uma sequência de atividades que, em linhas gerais, busca a resolução de situações-problemas: partindo da forma aritmética, conhecimento que os alunos já tinham anteriormente à participação da pesquisa e passamos a resolver as mesmas situações-problemas por meio de diferentes representações e com o uso do material manipulativo. Essas atividades buscavam desenvolver a descoberta do procedimento para resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita, utilizando as propriedades da igualdade. Na sequência de atividades também foram propostas situações-problemas que eram difíceis de serem resolvidas apenas via aritmética, com o objetivo de os alunos perceberem que algumas vezes seria melhor ter outras ferramentas para a resolução de situações-problemas, que, no nosso caso, seria o uso de equações.

Desse modo, em nossa sequência de atividades prezamos por utilizar conhecimentos que os alunos possuíam para então construir novos conhecimentos a partir do que os alunos já sabiam. E percebemos que as resoluções iniciais via aritmética foram realmente importantes, pois os alunos recorreram a elas no momento de entender a manipulação do material *Algebra Tiles*.

Situações-problemas como os das atividades 2(c) e 3 da sequência proposta, possuíam o objetivo de desafiar e questionar os alunos sobre a importância de usar outras ferramentas na resolução de algumas situações-problemas. Os alunos comentaram sobre a dificuldade de resolver essas situações-problemas e começaram a questionar se existia uma forma mais fácil de resolvê-las, surgindo a necessidade de utilizar um caminho mais eficaz para a resolução, que eles entenderam nesse momento ser o uso da álgebra.

De forma geral, os alunos apresentaram em suas resoluções os três itens fundamentais à semiose: a formação de um registro, a conversão e o tratamento. Esses itens foram claramente notados nas atividades 1.1, 2.1 e 5.1, às quais foram criadas inspiradas em Duval (2018), que defende que os professores devem criar atividades em que os alunos possam produzir e comparar diferentes registros de representação semiótica, transitando entre os diferentes registros por meio da conversão e sendo capazes de realizar o tratamento em cada registro. Essas atividades são importantes, pois mostram aos alunos diferentes formas de representar e solucionar uma mesma situação-problema, dando aos discentes a oportunidade de escolher qual a forma que mais lhe agrada para resolver outras situações-problemas.

Nessas atividades os alunos utilizaram o material *Algebra Tiles* para gerar uma representação pictórica para as situações-problemas propostas. Observamos que a partir da manipulação do material e pensando nas propriedades da igualdade, os alunos criaram o procedimento de resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita naturalmente. Como as atividades 1.1, 2.1 e 5.1 proporcionaram aos alunos a oportunidade de conversão e comparação entre os registros pictórico e algébrico, notamos que os alunos conseguiram abstrair o que foi feito na manipulação do material, pois aparentemente os alunos utilizaram as ideias desenvolvidas para resolver as situações-problemas propostas nas Atividades 4 e 6.

Por meio de atividades como a Atividade 4 e a Atividade 6, buscamos dar aos alunos participantes da pesquisa a oportunidade de escolher formas de resolução para algumas situações-problemas. Situações essas que, como os alunos propriamente mencionaram, seriam difíceis de serem resolvidos se não tivessem estudado as equações nas atividades anteriores. Dessa forma, como mencionamos anteriormente, notamos que os alunos conseguiram desenvolver as atividades, partindo das atividades anteriores e aplicando os conhecimentos de equações desenvolvidos para a resolução das situações-problemas mais complexas. É importante mencionar na maioria das resoluções os estudantes deixaram explícito o uso das as propriedades da igualdade.

Assim, respondendo à pergunta da nossa pesquisa: observamos que o uso do material *Algebra Tiles* contribuiu para o desenvolvimento da descoberta do procedimento de resolução pelos alunos, visto que os discentes participantes da pesquisa é que criaram, com suas "próprias mãos" um método para resolver equações do primeiro grau com uma incógnita. Os alunos escolheram esse método como o mais eficiente para a resolução de situações-problemas mais complexas. Mencionamos a frase "criar com as suas próprias mãos", pois a partir da manipulação do material, utilizando os princípios da igualdade, é que os alunos representaram essas situações-problemas pictoricamente. A partir dessas representações, os alunos construíram as correspondentes equações do primeiro grau com uma incógnita e, olhando para a manipulação do material, é que realizaram o tratamento no registro algébrico, onde estabeleceu-se o procedimento de resolução de equações com compreensão e descoberta pelos alunos. Assim, notamos a importância do uso do material manipulativo na investigação dos alunos.

Observamos que a resolução das situações-problemas via aritmética no início das atividades também contribui para a construção do conhecimento, já que os alunos buscavam as ideias utilizadas anteriormente para descobrir como fazer a manipulação do material. A forma de manipulação poderia ter sido dada pronta, mas nosso objetivo era exatamente buscar uma forma de transitar entre a aritmética e álgebra e que os alunos realmente fizessem descobertas, e o meio que utilizamos foi o material *Algebra Tiles.*

Outro ponto importante que observamos durante a implementação da sequência de atividades é que o uso do material manipulativo *Algebra Tiles* parece indicar que a ideia de $-x$ ser o oposto de x se tornou natural, não precisando ser utilizada a regra de multiplicação por -1 dos dois lados da igualdade, que parece ser uma regra apenas mecânica, realizada ao final de uma resolução, para encontrar x com coeficiente positivo. Além disso, por meio do uso dos *Algebra Tiles*, os alunos descobriram que pode não ser necessário tomar o oposto, bastando adicionar retângulos amarelos aos dois lados da igualdade para que fique exatamente $1x$ em um dos lados, o que proporcionou outra forma de resolver uma mesma equação.

Além disso, o desenvolvimento da investigação matemática em sala de aula também contribuiu para o sucesso das atividades, visto que os alunos fizeram a descoberta do processo para a resolução de equações. Também, os momentos de fechamento com a professora-pesquisadora, ou dos alunos apresentando suas soluções na lousa abordaram fatos e conceitos importantes acerca do conteúdo de equações do primeiro grau com uma incógnita. Um exemplo é a verificação das soluções das equações, que foi discutido no encontro 5. Esse momento foi importante para os alunos observarem a importância que a verificação da solução tem na resolução de uma equação podendo observar se as soluções obtidas são corretas. Observamos que os alunos continuaram apresentando naturalmente a verificação da solução nas atividades posteriores, mesmo quando não solicitados.

Encerramos a nossa sequência de atividades com a ideia da criação de situações-problemas, proposta na BNCC, pensando na ideia do processo inverso: ir da representação algébrica para a representação em linguagem natural. Notamos que os alunos apresentaram o processo inverso com clareza, trazendo situações-problemas interessantes que podem ser resolvidas por meio de equações do primeiro grau com uma incógnita, mesmo na situação-problema mais complexa, em que a incógnita aparece nos dois lados da equação.

Tomando como base nossa análise, observamos que vários elementos foram importantes para o êxito dos alunos na construção do procedimento para resolução de equações: desde a construção dos conceitos anteriores à implementação da sequência de atividades e o uso do material manipulativo *Algebra Tiles,* até organização das atividades e as tabelas de três colunas. Sobre os pré-requisitos, destacamos o uso do Ábaco Virtual dos Números Inteiros, que apoiou a definição da subtração: "retirar é a mesma coisa que adicionar o oposto" e que foi utilizada pelos estudantes na passagem da segunda para a terceira coluna na Atividade 1.1 com números e na Atividade 5.1 com a variável (Figura 64), aspecto importante a ser salientado, porque no material *Algebra Tiles* só existe a ação de "juntar" (às vezes juntar com o oposto), ação que é traduzida matematicamente pela adição. Também destacamos o uso da balança de dois pratos, que apoiou os conceitos de "equilíbrio", "igualdades equivalentes", princípios aditivo e multiplicativo da igualdade, fundamentais para a manipulação do material *Algebra Tiles*. Cabe ressaltar que a expressão "equilíbrio" foi muitas vezes utilizada pelos estudantes, sugerindo que o conceito abstrato de igualdade para os estudantes ficou apoiado nessa representação visual.

A resolução de situações-problemas por meio do uso do material manipulativo *Algebra Tiles,* que trouxe como base os pré-requisitos citados anteriormente, e o uso das tabelas com três colunas nas resoluções das Atividades 1.1, 2.1 e 5.1, levaram os alunos à formação de equações do primeiro grau com uma incógnita de forma natural, assim como, contribuíram de forma efetiva para a descoberta, pelos alunos, de um procedimento para a resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita. As atividades propostas em conjunto com o material manipulativo e as tabelas de três colunas levaram os alunos ao desenvolvimento dos três elementos fundamentais à semiose: a construção de um registro, a conversão e o tratamento, contribuindo para a aprendizagem e o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. O que fica confirmado nas atividades 4 e 6, quando os alunos utilizam equações do primeiro grau com uma incógnita para resolver situações-problemas e valem-se do procedimento por eles criado para a resolução das equações formadas.

Ressaltamos a importância deste trabalho para o crescimento profissional da mestranda, que além de ter a oportunidade de conhecer o novo material manipulativo, pôde se aproximar mais dos trabalhos de Lins e Gimenez, Usiskin e Duval, o que certamente oportunizou um ganho enorme, não só na elaboração da dissertação, como também no seu cotidiano da sala de aula. Esse trabalho fez com que continuássemos a pensar que vale a pena proporcionar atividades em que os alunos estejam em foco, buscando fazer suas próprias descobertas. Além disso, nos deixou ainda mais convictas que, com a faixa etária que trabalhamos, continua sendo importante o trabalho com materiais concretos/ manipulativos em sala de aula. Destacamos ainda, a motivação e o envolvimento dos alunos durante a participação das atividades. Eles se apresentaram sempre dispostos a fazer tudo com muita responsabilidade e dedicação.

Para finalizar, esperamos que o produto do presente trabalho, Apêndice C, auxilie outros professores na inserção do conteúdo de equações do primeiro grau com uma incógnita e que ele possibilite a investigação e a construção do conhecimento de muitos outros alunos, assim como auxiliou os alunos participantes desta pesquisa e assim como faremos com nossos futuros alunos. Em trabalhos futuros, pretendemos investigar mais profundamente as possibilidades do uso do material *Algebra Tiles* no estudo de equações do primeiro grau com uma incógnita com coeficientes fracionários e investigar as possibilidades do uso do material no ensino e na aprendizagem de inequações do primeiro grau com uma incógnita, bem como equações e sistemas de equações com duas incógnitas.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, A. I. S. D. **Ensino-aprendizagem de álgebra através da resolução e exploração de problemas.** Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual da Paraíba, Paraíba, 2016.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação - Uma introdução à teoria e aos métodos.** Lisboa, Porto Editora. 1994. p. 47-74.

BONADIMAN, A. **Álgebra no Ensino Fundamental: produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2007.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Base nacional comum curricular. Brasília, DF. 2018.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática: ensino de quinta a oitavas séries. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, DF. 1998.

CARVALHO, S. A. **Pensamento genérico e expressões algébricas no Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2010.

CHARLES, R. I.; BRANCH-BOYD, J. C.; ILLIGWORTH, M.; MILLS D.; REEVES. A. Mathematics: Course 2. Massachusetts: Prentice Hall, 2004.

DANIEL, J. A. **Um estudo de equações algébricas do 1º grau com o auxílio do software Aplusix**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Programa de Estudos Pós- Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. In: Revemat, v. 7, n. 2. Florianópolis, 2012. p. 266-297.

DUVAL, R. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

DUVAL, R. **Como analisar a questão crucial da compreensão em matemática?** Tradução de Méricles Thadeu Moretti. In REVEMAT, v.13, n.2. Florianópolis, 2018. p.1-27.

FANTI, E., ROSA, R., DIAS, F., & MEDEIROS, L. **O Algeplan como um recurso didático na exploração de expressões algébricas e fatoração**. III Bienal da SBM, 2006.

FREITAS, M. A. **Equação do 1º grau: métodos de resolução e análise de erros no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**. Campinas: Autores associados, 2006.

FÜHR, L. **Um olhar para a introdução à escrita simbólica no ensino à luz da história da matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2019.

LEITZE, A. R.; KITT, N. A. **Using homemade algebra tiles to develop algebra and prealgebra concepts**. The Mathematics Teacher, v. 93, n. 6, p. 462, 2000.

LINS, R. C., & GIMENEZ, J. **Perpectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Papirus Editora. 1997.

HALL, B. C. **Using Algebra Tiles effectively**. 1999.

HUMMES, V. B. **Aprendizagem Significativa de Equações de Primeiro Grau: Um Estudo sobre a Noção de Equivalência como Conceito Subsunçor.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2014.

KLÖPSCH, C. **Campo Conceitual Algébrico: Análise das noções a serem aprendidas e dificuldades correlatas encontradas pelos estudantes ao final do ensino fundamental (8ª série - 9° ano)**. 2010. Dissertação (Mestrado) Programa de Pós Graduação em Psicologia Cognitiva. Universidade Federal De Pernambuco. Recife, 2010.

MASON, J. **El futuro de la aritmética y del álgebra: utilizar el sentido de generalidad**. In: Revista de didáctica de las matematicas, n. 9. 1996. p. 15-22.

MEINERZ, F. M.; DOERING, L. R. A**nalysis of Textbooks in Three Latin Countries: Resolution of Equations and Inequalities**. In: ICMT3 - Third International Conference on Mathematics Textbook Research and Development, 2019, Padernborn. Proceedings of the Third International Conference on Mathematics Textbook Research and Development. Paderborn: Universitätsbibliothek Paderborn, 2019. p. 239-244.

ONUCHIC, L. D. L. R. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas.** Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-220.

PATTERSON, A. C. **Building Algebraic Expressions: A Physical Model**. Mathematics Teaching in the Middle School 2. 1997. p. 238–42.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo.

PONTE, J. P., BROCARDO,J., OLIVEIRA, H.. **Investigações Matemáticas em Sala de Aula**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte. 2005.SARASWATI, S.; PUTRI, R. I. I.; SOMAKIM, S. **Supporting student's understanding of linear equations with one variable using Algebra Tiles.** Journal on Mathematics Education, v. 7, n. 1. 2016. p. 19-30.

THORNTON, G. J. **Algebra tiles and learning styles.** Tese de Doutorado. Theses (Faculty of Education)/Simon Fraser University, 1995.

USISKIN, Z. **Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações de variáveis**. In: As ideias da álgebra. Organizadores: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo. Martins Fontes, 1984.

VYGOTSKY, L. S.; LEONTIEV, Alexis; LURIA, Alexandre R. **Psicologia e pedagogia: bases psicológicas da aprendizagem e do desenvolvimento**. São Paulo: Moraes, 1991.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) ____, da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada A INTRODUÇÃO À RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA POR MEIO DO USO DO MATERIAL *ALGEBRA TILES* NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS desenvolvida pela pesquisadora Franciele Marciane Meinerz. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pela Professora Doutora Luisa Rodriguez Doering, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone xxxxxxxxx ou e-mail ldoering@mat.ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são: produzir informações importantes sobre o ensino e a aprendizagem do conteúdo de equações do primeiro grau com uma incógnita.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de questionário escrito, bem como da participação em aula, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos entrevistados ao precisarem responder a algumas perguntas sobre o desenvolvimento de seu trabalho na escola. A fim de amenizar este desconforto será mantido o anonimato das entrevistas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma Onuchi

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre o ensino e a aprendizagem do conteúdo de equações do primeiro grau com uma incógnita, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado. Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no telefone xxxxxxxxxxx/ e-mail francielemeinerz@gmail.

Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av.Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e email etica@propesq.ufrgs.br

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Responsável: ____

Assinatura da pesquisadora: ____

Assinatura do Orientador da pesquisa: ________________________________

APÊNDICE B – TERMO DE ASSENTIMENTO INFORMADO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

TERMO DE ASSENTIMENTO INFORMADO

Você está sendo convidado para participar da pesquisa "A INTRODUÇÃO À RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA POR MEIO DO USO DO MATERIAL *ALGEBRA TILES* NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS".

Neste estudo pretendemos investigar a introdução de equações do primeiro grau com uma incógnita e adotaremos os seguintes procedimentos: serão digitalizados as folhas das atividades desenvolvidas, utilizaremos fotos, relatos dos alunos e todas as aulas serão gravadas. Para participar deste estudo, o responsável por você deverá autorizar e assinar um termo de consentimento. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. Você será esclarecido(a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. O responsável por você poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não acarretará qualquer penalidade ou modificação na forma em que é atendido(a) pelo pesquisador que irá tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Você não será identificado em nenhuma publicação. Este estudo apresenta risco mínimo (ou risco maior que o mínimo, se for o caso), isto é, o mesmo risco existente em atividades rotineiras como conversar, tomar banho, ler etc. Apesar disso, você tem assegurado o direito a ressarcimento ou indenização no caso de quaisquer danos eventualmente produzidos pela pesquisa. Os resultados estarão à sua disposição quando finalizada. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a permissão do responsável por você. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de 5 anos, e após esse tempo serão destruídos. Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada pelo pesquisador responsável, e a outra será fornecida a você. Eu, ____, portador(a) do documento de Identidade ______________________, fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações, e o meu responsável poderá modificar a decisão de participar se assim o desejar. Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar desse estudo. Recebi uma cópia deste termo assentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

______________________________ ______________________________

Assinatura do menor Assinatura da pesquisadora

Porto Alegre, ____ de ___________ de 2019.

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar: Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av.Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e email: etica@propesq.ufrgs.br

PESQUISADOR(A) RESPONSÁVEL: FRANCIELE MARCIANE MEINERZ. ENDEREÇO: xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx FONE: xxxxxxxxxx E-MAIL: francielemeinerz@hotmail.com.

APÊNDICE C- PRODUTO TÉCNICO

PRODUTO TÉCNICO DA DISSERTAÇÃO INTITULADA: RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA POR MEIO DO USO DO MATERIAL *ALGEBRA TILES*

Orientada pela Profª Dra. Luisa Rodríguez Doering

O presente produto foi elaborado a partir de uma prática de pesquisa inserida no programa de pós-graduação em Ensino de Matemática (PPGEMAT) durante o curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática.

A sequência de atividades aqui apresentada é proposta com o intuito de introduzir o conteúdo de resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita e é voltado para o sétimo ano do Ensino Fundamental, apesar de ter sido aplicado com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental em nossa pesquisa, por ser um conteúdo estudado no sexto ano na escola em que foi realizada a implementação. Em linhas gerais, essa sequência de atividades foca na resolução de situações-problemas: inicialmente fundamentada na aritmética, utilizando o conhecimento que os alunos já têm para a construção de novos conhecimentos. Após resolver as situações-problemas aritmeticamente, os alunos são convidados a resolver as mesmas situações-problemas utilizando outras representações e com o uso do material manipulativo *Algebra Tiles*, buscando chegar à representação da situação na forma de uma equação e então descobrir como realizar o procedimento de resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita a partir da manipulação do material e a posterior conversão para a escrita algébrica.

Para isso, é importante que os alunos tenham em mente as propriedades da igualdade entre números, pois elas serão fundamentais para que os alunos deduzam como realizar a manipulação do material; dessa forma, sugerimos que seja feita uma revisão antes de aplicar essa sequência, lembrando que são duas as propriedades: i) Princípio Aditivo: Uma igualdade não se altera quando adicionamos (ou subtraímos) o mesmo número em ambos os membros; ii) Princípio Multiplicativo: Uma igualdade não se altera quando multiplicamos (ou dividimos) por um mesmo número ambos os membros. Como exemplo de material, sugerimos a balança de dois pratos.

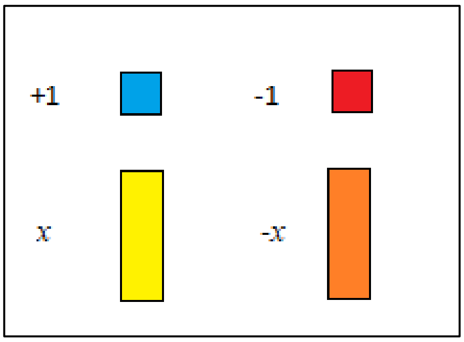
Além disso, é importante revisar a definição de subtração no conjunto dos números inteiros. Assim, é importante lembrar que, por definição, toda subtração pode ser expressa como uma adição do primeiro número com o oposto do segundo, por exemplo: $6 - 2 = 6 + (-2)$. Do mesmo modo, se tivermos a adição 6 + (-2), ela pode ser representada como 6 – 2. Essa é uma definição matemática, que pode ser construída utilizando o Ábaco dos Números Inteiros, e acreditamos que essa construção é importante para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. É importante fazer esse destaque, pois no material *Algebra Tiles*, temos sempre adições, no sentindo de que estamos juntando retângulos e quadradinhos, contudo, podemos representar a adição $3 + (-x)$ como a subtração $3 - x$, por exemplo. Ou, do mesmo modo, podemos representar a adição $x + (-4)$ como $x - 4$.

Nesta sequência de atividades também foram propostos problemas que são considerados difíceis de serem resolvidos apenas via aritmética, com o objetivo de os alunos perceberem e refletirem que algumas vezes seria melhor ter outras ferramentas para a resolução de algumas situações-problemas, que no nosso caso, é o uso de equações do primeiro grau com uma incógnita.

O MATERIAL *ALGEBRA TILES*

O material manipulativo *Algebra Tiles* é utilizado em escolas dos Estado Unidos para estudar desde as operações com números inteiros até a fatoração de expressões algébricas polinomiais. Em nossa pesquisa realizamos uma adaptação nas cores do material original *Algebra Tiles* encontrado em Hall (1999). Na Figura 1 ilustramos as formas e as cores do material utilizado na implementação da presente sequência de atividades. Os quadradinhos azuis representam as unidades positivas, os quadradinhos vermelhos representam as unidades negativas, os retângulos amarelos representam a variável “x” e os retângulos laranjas representam o oposto de x: $-x$.

Figura 1: *Algebra Tiles*- cores usadas em nossa pesquisa.

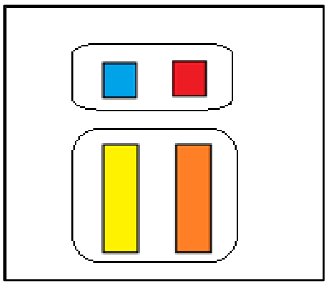


Fonte: Acervo da autora.

As cores azul e vermelho foram escolhidas por já termos utilizado essas cores para representar quantidades positivas e negativas no estudo das operações no conjunto dos números inteiros utilizando o Ábaco Virtual dos Números Inteiros (disponível em www.mundojogos.com.br/abaco). As cores amarelo e azul foram escolhidas aleatoriamente, com a condição de que fossem todas diferentes entre si, para não causar confusão para os alunos. Por exemplo: -1 e $-x$ devem ser, inevitavelmente, de cores diferentes, pois ao pensarmos na equação $-x + 1 = 5$, por exemplo, o valor de $-x$ não é necessariamente negativo. De fato, nesse exemplo, $-x = +4$, logo não faria sentido ser representado pela mesma cor que representa as unidades negativas, como era proposto no material original. Dessa forma, para não gerar confusão e para reforçar aos alunos a ideia de que $-x$ é o oposto de x, e que $-x$ não é necessariamente negativo, o oposto de x deve ser representado por uma cor diferente da cor vermelha.

Na Figura 2, apresentamos os retângulos e os quadrados unitários formando pares, para ilustrar a propriedade (que pode ser explorada anteriormente no ábaco): ao unirmos um bloco positivo com o seu oposto, eles se anulam e o resultado é zero. Essa propriedade é muito importante para a resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita. Ilustramos em alguns exemplos.

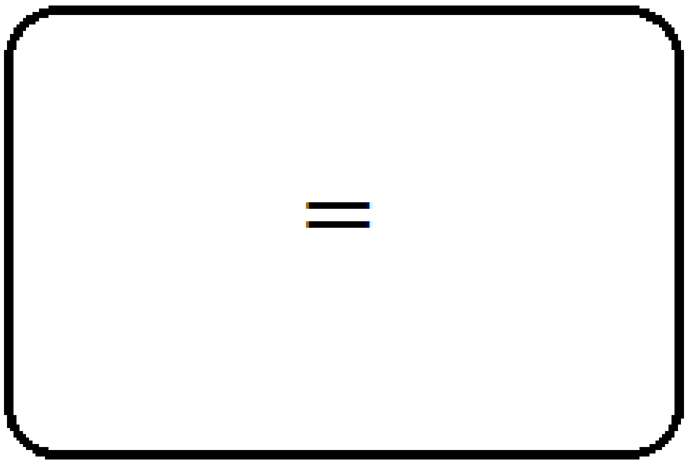
Figura 2: Propriedade do cancelamento ao unir os pares de blocos opostos.



Fonte: Acervo da autora.

Para a prática, juntamente com os *Algebra Tiles*, que foram confeccionados em papel colorido (mas podem ser confeccionados em EVA, ou o material colorido que o professor tiver à disposição), confeccionamos tapetinhos contendo um sinal de igualdade para que os alunos manipulassem o material em cima deles, conforme a Figura 3. Os tapetinhos foram confeccionados com folha branca (metade de uma folha A4) e posteriormente, plastificados.

Figura 3: Tapete para manipulação dos *Algebra Tiles*.

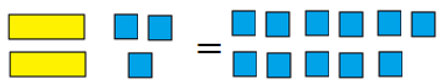
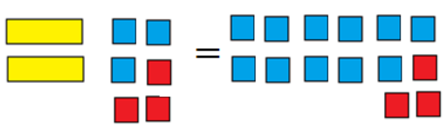


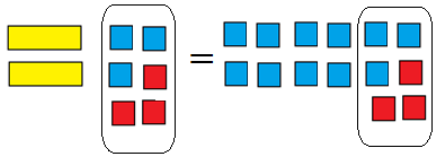
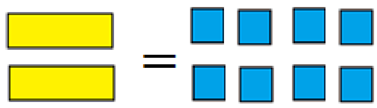
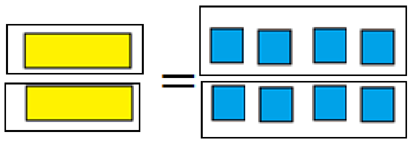
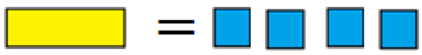
Fonte: Acervo da autora.

A RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU COM UMA INCÓGNITA UTILIZANDO O MATERIAL *ALGEBRA TILES*.

Vamos ilustrar a resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita utilizando os *Algebra Tiles* comparando com o procedimento que utiliza os princípios aditivo e multiplicativo (algebricamente). No primeiro exemplo (Quadro 1), vamos resolver a equação $2x + 3 = 11$, observe que nessa equação temos todos os elementos com coeficientes positivos e a incógnita em somente um dos lados da igualdade.

Quadro 1: Resolução da equação *2x + 3 = 11* utilizando *Algebra Tiles*.

	Vamos resolver a equação $2x + 3 = 11$	
	Algebra Tiles:	Algebricamente:
Equação inicial:		$2x + 3 = 11$
Adicionando (-3) aos dois lados da igualdade, de modo que fique do lado esquerdo somente os termos "x"		$2x + 3 + (-3) = 11 + (-3)$

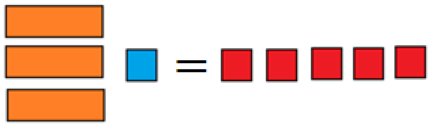
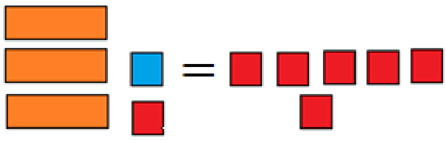
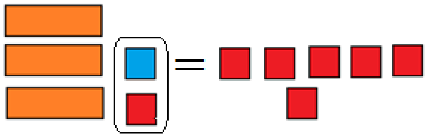
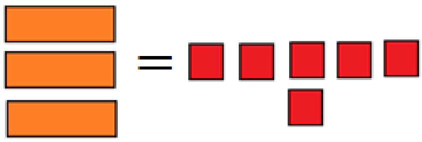
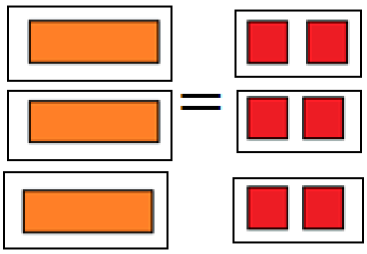
Anulando os opostos		$2x + \underbrace{[3 + (-3)]}_{0} = 8 + \underbrace{[3 + (-3)]}_{0}$
Equação equivalente:		$2x = 8$
Até o momento, temos o valor de $2x$, mas queremos o valor de $1x$, então tomamos a metade dos dois lados da igualdade:		$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$ Ou $2x \div 2 = 8 \div 2$ Obs: Caso os alunos não estejam habituados a utilizar o “travessão” como símbolo de divisão, aconselhamos o uso do símbolo de divisão habitual (÷).
Obtemos a equação equivalente, e agora tem-se a solução:		$x = 4$

Fonte: Acervo da autora.

Observe, na segunda linha do quadro 1, que para eliminar o +3 adicionamos três unidades negativas a cada lado da igualdade e a equação que representa a utilização do princípio aditivo é $2x + 3 + (-3) = 11 + (-3)$. Gostaríamos de salientar que essa equação poderia também ser escrita como $2x + 3 - 3 = 11 - 3$, por causa da definição da operação de subtração no conjunto dos números inteiros: toda adição pode ser expressa como uma adição do primeiro número com o oposto do segundo, por exemplo: $3 - 3 = 3 + (-3)$. Do mesmo modo, se tivermos a adição $3 + (-3)$, ela pode ser representada como $3 - 3$.

Ilustramos no Quadro 2 o exemplo de resolução da equação $-3x + 1 = -5$ em que temos coeficientes negativos em alguns termos da equação, demonstrando a possibilidades de trabalhar também com quantidades negativas, o que não é possível manipulando uma balança de dois pratos, por exemplo.

Quadro 2: Resolução da equação *-3x + 1 = -5* utilizando *Algebra Tiles*.

	Vamos resolver a equação $-3x + 1 = -5$	
	Álgebra tiles:	Algebricamente:
Equação inicial:		$-3x + 1 = -5$
Adicionando (-1) aos dois lados da igualdade, de modo que fique do lado esquerdo somente os termos "x"		$-3x + 1 + (-1)$ $= -5 + (-1)$
Anulando os pares		$-3x + [1 + (-1)] = -5 + (-1)$
Equação equivalente:		$-3x = -6$
Até o momento, temos o valor de -3x, mas queremos o valor de 1x, então tomamos a terça parte dos dois lados da igualdade:		$\frac{-3x}{3} = \frac{-6}{3}$ Ou $-3x \div 3 = -6 \div 3$ Obs: Caso os alunos não estejam habituados a utilizar o "travessão" como símbolo de divisão, aconselhamos o uso do símbolo de divisão habitual (÷).
Obtemos a equação equivalente:		$-x = -2$
Note que obtemos		$x = 2$

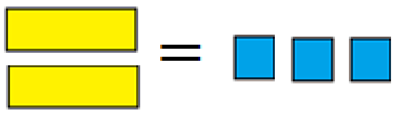
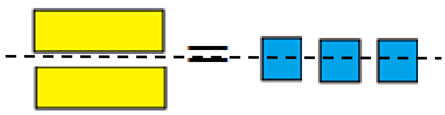
$-x = -2$, mas queremos o valor de x. Lembrando que $-x$ significa "o oposto de x",basta que tomemos o oposto de -2, obtendo:		

Fonte: Acervo da autora.

Cabe ressaltar a não adequabilidade de fazer uso de "multiplicar por -1", visto que se torna natural tomar o oposto de *x* em exemplos como o apresentado acima.

Apresentamos a seguir exemplos que ilustram a potência do material para se trabalhar no universo numérico dos racionais. O primeiro exemplo ilustra a resolução de equações em que a solução não é um número inteiro.

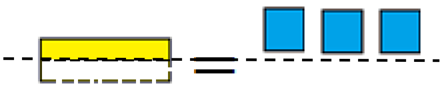
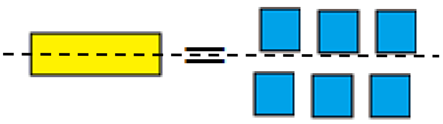
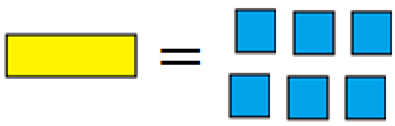
Quadro 3: Resolução da equação *2x = 3* utilizando *Algebra Tiles*.

	Vamos resolver a equação $2x = 3$	
	Algebra Tiles:	Algebricamente:
Equação inicial:		$2x = 3$
Até o momento, temos o valor de $2x$, mas queremos o valor de $1x$, então tomamos a metade dos dois lados da igualdade:		$\frac{2x}{2} = \frac{3}{2}$ Ou $2x \div 2 = 3 \div 2$
Obtemos a equação equivalente:		$x = \frac{3}{2}$ $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Fonte: Acervo da autora.

Apresentamos no Quadro 4 o exemplo de resolução da equação $\frac{x}{2} = 3$. Dessa forma, observamos que além de trabalhar com coeficientes negativos, também é possível trabalhar com coeficientes fracionários.

Quadro 4: Resolução da equação $\frac{x}{2} = 3$ utilizando *Algebra Tiles.*

	Vamos resolver a equação $\frac{x}{2} = 3$	
	Algebra Tiles:	Algebricamente:
Equação inicial:		$\frac{x}{2} = 3$
Até o momento, temos o valor de $\frac{x}{2}$, mas queremos o valor de $1x$, então tomamos o dobro dos dois lados da igualdade:		$\frac{x}{2} \cdot 2 = 3 \cdot 2$
Obtemos a equação equivalente:		$x = 6$

Fonte: Acervo da autora.

Assim, podemos notar que o uso dos *Algebra Tiles* proporciona um leque de oportunidades para o estudo de equações do primeiro grau com uma incógnita, de modo que podemos ter coeficientes positivos, negativos e fracionários. Contudo, para esse trabalho, elencamos situações-problemas em que temos coeficientes positivos e negativos, deixando os fracionários para trabalhos futuros.

Na abordagem das resoluções com os alunos, sugere-se a tabela de três colunas, que facilita ao estudante a conversão proposta por Raymond Duval.

A SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES:

Apresentamos agora a sequência de atividades desenvolvida. Inicialmente, é interessante que sejam formados grupos na sala de aula. Após os grupos estarem formados, pode se dar início às atividades.

Atividade 1:

Problema: Durante o recesso de inverno, Michele e seu irmão Matheus foram até a papelaria comprar alguns materiais escolares que estavam faltando para completar seus estojos.

a) Michele comprou uma caneta colorida, que custou R$5,00, e uma borracha. Ela pagou um total de R$8,00. Quanto custou a borracha? Explique seu raciocínio detalhadamente.

b) Matheus comprou 3 lápis de escrever dos seus super-heróis favoritos, todos de mesmo valor. Ele pagou ao todo, R$6,00 pelos lápis. Quanto custou cada lápis? Explique seu raciocínio detalhadamente.

Materiais: Folha com as situações.

Objetivos: resolver as situações-problemas propostas utilizando o conhecimento matemático prévio dos alunos; formar representações para as situações-problemas e; desenvolver a argumentação dos alunos de forma escrita.

Ao professor: É importante que, mesmo que os alunos resolvam mentalmente esses problemas, eles explicitem por escrito o raciocínio que eles utilizaram, pois ele será importante no momento de realizar a manipulação do material além de incentivar os alunos a apresentarem seus argumentos de forma escrita. Após a resolução dos grupos os alunos podem apresentar suas soluções na lousa para discussão.

Note que essas situações são muito simples para alunos de sétimo ano, contudo acreditamos que o registro de resolução das mesmas será importante para pensar na manipulação dos *Algebra Tiles* e construir a passagem da aritmética para a álgebra, visto que nosso desejo é que os alunos descubram como realizar a manipulação do material, a fim de encontrar o valor procurado (a incógnita).

No item a), espera-se que os alunos justifiquem que, como a caneta colorida custou R$ 5,00 e o total da compra foi R$8,00, o valor da borracha será a diferença entre R$8,00 e R$5,00, que é igual a R$3,00, pois 8,00 – 3,00 = 5,00. No item b), espera-se que, como todos os lápis possuem o mesmo preço e que todos os lápis juntos custaram R$6,00, dessa forma basta dividir 6,00 por 3, obtendo o valor de cada lápis: R$2,00.

Atividade 1.1:

Atividade 1.1:
Agora vamos pensar em outras formas para a resolução das situações anteriores!

- Inicialmente, representa cada item utilizando palavras e os *Algebra Tiles.*
- Após, pensando na sua resolução inicial para o problema, tente encontrar uma forma de manipular os *Algebra Tiles* a fim de encontrar a mesma solução da atividade anterior. Apresente os passos da manipulação em sua folha de respostas, separando por uma linha cada passo da manipulação.
- Finalmente, experimente expressar de outra forma o que você fez com os *Algebra Tiles*.

Modelo das tabelas da Atividade 1.1:

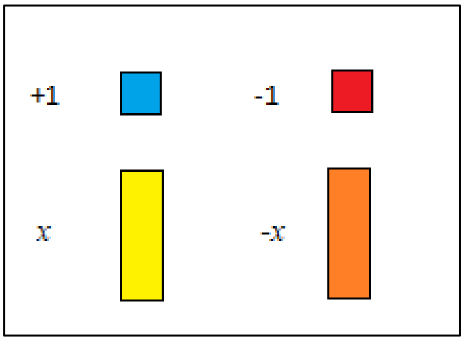
Nomes: ____ Turma: ____
Problema 1. a)

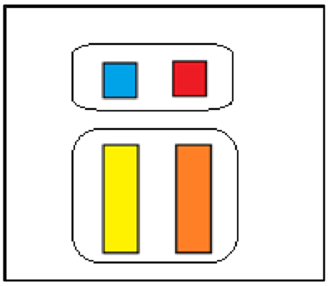
Utilizando palavras:	*Algebra Tiles:*	De outra forma:

Materiais: Folhas com as atividades (Atividade 1, 1.1 (instrução + tabelas (uma para cada item), "tapetinho" para manipulação dos *Algebra Tiles*, envelope com os retângulos e quadradinhos (indicamos que cada grupo tenha um envelope com 30 quadradinhos azuis, 30 quadradinhos vermelhos, 10 retângulos amarelos e 10 retângulos laranjas), lápis de cor nas cores: vermelho, azul, amarelo e laranja.

Objetivos: representar com palavras, pictoricamente e de outra forma as situações da Atividade 1; encontrar uma forma de manipular o material *Algebra Tiles* para encontrar o valor desconhecido e associá-la à representação pictórica; converter a representação pictórica para outra representação e apresentar os tratamentos nas diferentes representações. Ao final da atividade fazer um fechamento com grupos, apresentando suas resoluções na lousa e fazendo discussões.

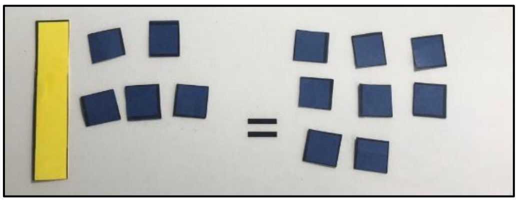
Ao professor: antes de iniciar essa atividade, o professor deve explicar aos alunos o que cada uma das peças representa, como observamos na figura abaixo (à esquerda). Além disso, é importante salientar aos alunos a importante propriedade que, ao unirmos uma unidade positiva, com uma unidade negativa, elas se anulam e o resultado é zero; o mesmo ocorre quando unirmos o retângulo que representa *x*, com o seu oposto: eles se anulam um a um e o resultado é zero. Essa propriedade é muito importante para a resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita e reforça uma importante propriedade do oposto (figura abaixo (à direita)).





Criamos essa atividade com o intuito de deixar como desafio a descoberta de como manipular o material *Algebra Tiles* no “tapetinho”. Vamos apresentar abaixo uma ideia de como instigar os alunos na descoberta da manipulação do material e após, apresentamos uma solução para a situação com o preenchimento da tabela completo. Esperamos que:

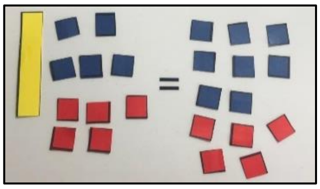
1º) Os alunos representem a situação a utilizando *Algebra Tiles* da seguinte forma:



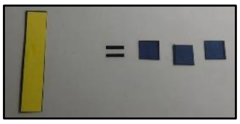
2º) Desafiamos os alunos com perguntas como a seguinte: como será que podemos manipular o material com o objetivo de evidenciar o valor da borracha? O que você fez na resolução anterior? (*Esperamos que os alunos falem que fizeram 8-5 então o professor pode perguntar)*:

3º) Como representamos nos *Algebra Tiles* 8 – 5? (*Esperamos que os alunos respondam que precisam colocar 5 quadradinhos vermelhos do lado direito da igualdade e então entra o papel importante das propriedades da igualdade, com o professor fazendo a seguinte pergunta):*

4º) Mas eu posso adicionar 5 quadradinhos vermelhos, apenas em um dos lados da igualdade? (*Esperamos que os alunos lembrem que não pode, por causa do princípio aditivo e então adicionem 5 quadradinhos vermelhos também do lado esquerdo da igualdade, obtendo uma representação como a abaixo)*:

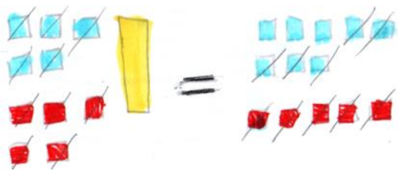


5º) Após retirar do tapetinho os quadradinhos que se anulam, ficamos com a seguinte representação, que ilustra o que queríamos: o valor da borracha.



Quadro 7: Sugestão de solução Atividade 1.1 a)

Sugestão de solução Atividade 1.1. a)		
Utilizando palavras:	*Algebra Tiles:*	De outra forma:
Uma caneta (5,00) + borracha que não sei quanto custou = 8,00		$5 + x = 8$ (OBS: como o material foi apresentado com essa nomenclatura já algébrica, acreditamos que é natural que

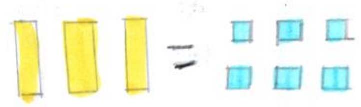
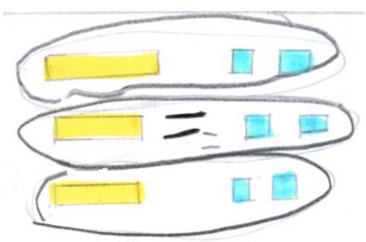
		os alunos escrevam dessa forma).
O total era R\$8,00, então para descobrir o valor da borracha precisamos retirar R\$5,00. Mas como temos uma igualdade, temos que retirar 5,00 de cada lado, por causa do princípio aditivo (aqui o aluno pode falar em: manter o equilíbrio, manter a igualdade – falas que remetem ao princípio aditivo). Então adicionamos 5 unidades vermelhas em cada lado e anulamos os pares formados por uma unidade positiva e uma unidade negativa.		$5 + x - 5 = 8 - 5$ ou $5 + x + (-5) = 8 + (-5)$
Obtendo o valor da borracha, que é 3 reais.		$x = 3$

Fonte: Acervo da autora.

Note que o grupo representou a situação-problema com a equação $5 + x = 8$. Na segunda linha, para ilustrar a adição dos cinco quadradinhos vermelhos, o grupo escreveu a seguinte equação: $5 - 5 + x = 8 - 5$. Neste momento, se o grupo escrevesse "ao pé da letra" o que está representado nos *Algebra Tiles*, a equação escrita seria: $5 + (-5) + x = 8 + (-5)$. Dessa forma, notamos que o grupo pula o passo de escrever na forma de adição, já que, por meio de estudos anteriores, percebe que fazer $5 + (-5)$, é o mesmo que fazer $5 - 5$.

Observe que ao passar do registro pictórico para o algébrico são utilizadas as propriedades da igualdade, assim como na manipulação do material, subtraindo 5 de cada lado da igualdade. Dessa forma, vamos caminhando na direção de que os próprios alunos criem um método para a resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita sem o apoio à representação pictórica e ao material concreto.

Quadro 8: Sugestão de solução Atividade 1.1 b)

Sugestão de solução Atividade 1.1. b)		
Utilizando palavras:	*Algebra Tiles:*	De outra forma:
3 lápis (que não sei quanto custa cada um, mas sei que todos custam o mesmo valor) = 6,00		$3x = 6$
Queremos saber o valor de $1x$ (1 lápis), então repartimos os seis quadradinhos azuis igualmente entre os três retângulos amarelos.		$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$ ou $3x \div 3 = 6 \div 3$ OBS. 1: provavelmente os alunos não escreverão essa divisão por 3 nos dois lados da igualdade, então o professor pode salientar no momento do fechamento da atividade na lousa, que está sendo usado o princípio multiplicativo e que podemos representar dessa forma. OBS. 2: se os alunos não estiverem familiarizados com a utilização do símbolo "travessão" representando a divisão, é recomendado o uso do símbolo usual da divisão: ÷.
Obtendo o valor de cada lápis: R$2,00.		$x = 2$

Fonte: Acervo da autora.

Após os grupos concluírem a atividade é interessante fazer um fechamento com os alunos na lousa. O professor pode convidar alunos para apresentarem suas resoluções na lousa, ou ele mesmo pode ir preenchendo a tabela com as informações dadas pela turma. É relevante e recomendável realizar esse fechamento para verificar se todos os alunos estão compreendendo as atividades e para que os colegas observem maneiras diferentes de resolver as situações.

Atividade 2:

Problema: Mariana e Fernanda são vizinhas e foram ao supermercado para fazer algumas compras para suas mães. a) Mariana comprou três caixas de leite e um pacote de maçãs. O pacote de maçãs, que estava sendo vendido por unidade, custou R$4,00. No total, ela pagou R$ 10,00. Quanto custou cada caixa de leite? Explique seu raciocínio detalhadamente. b) Já Fernanda comprou quatro pacotes de bolacha e um pacote de balas de goma para dividir com seu irmão, pagando um total de R$ 12,00. Quanto custou cada pacote de bolacha, se o pacote de balas de goma custou o dobro de cada pacote de bolacha? Explique seu raciocínio detalhadamente. c) Quando Fernanda chegou em casa, foi contar quanto dinheiro havia sobrado em sua carteira depois das compras. Ela percebeu que tinha menos dinheiro que o seu irmão Maurício: constatou que seu irmão tinha o dobro do que ela possuía. Para que os dois ficassem com a mesma quantia para comprar lanche na escola, a mãe de Fernanda deu R$8,00 para a Fernanda e R$2,00 para o Maurício. Quantos reais Fernanda tinha na carteira ao chegar em casa? Explique seu raciocínio detalhadamente.

Materiais: Folha de atividades, lápis e borracha.

Objetivos: resolver as situações propostas utilizando o conhecimento matemático prévio dos alunos; desafiar os alunos por meio do item c) a refletirem que algumas vezes pode ficar difícil resolver um problema via aritmética.

Ao professor: A Atividade 2 é muito semelhante à atividade 1, mas com um nível mais complexo, pois as situações têm mais informações a serem consideradas.

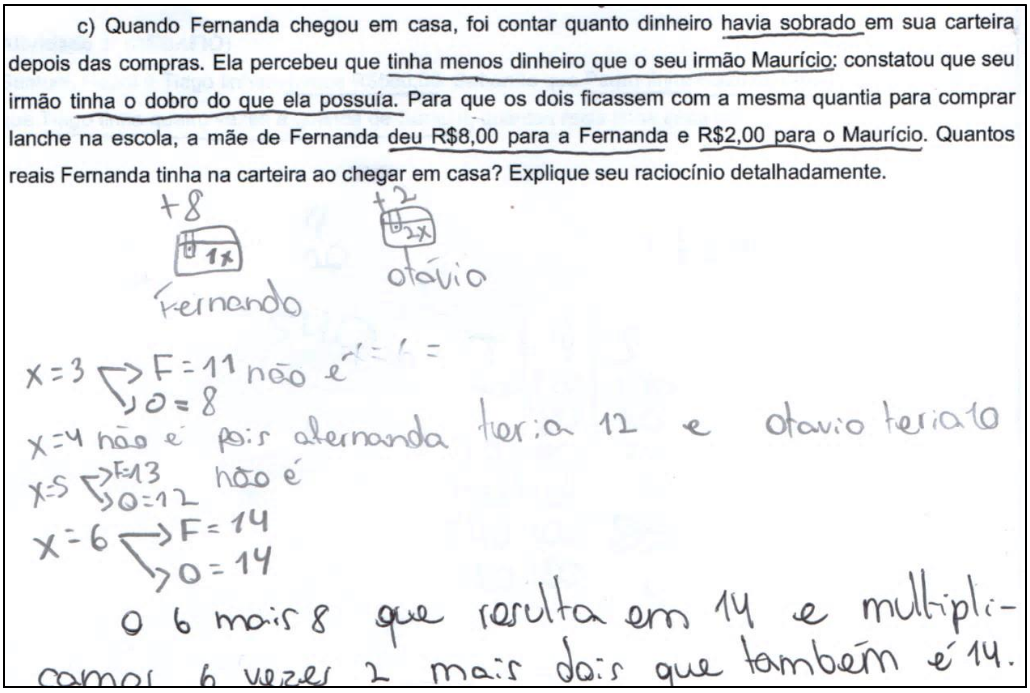
Na situação a), espera-se que os alunos encontrem que, cada caixa de leite custa R$2,00, pois ao subtrair R$4,00 (pacote de maçãs) do total da compra, que é R$10,00, sobra R$6,00 para as caixas de leite. Como são três caixas, é necessário dividir o valor por 3, obtendo que cada caixa custa R$2,00.

Na situação b) espera-se que os alunos façam a comparação entre os valores do pacote de balas e do pacote de bolachas para encontrar o valor d cada pacote de bolacha. Espera-se que os alunos façam desenhos, esquemas ou testem valores para resolver a essa questão. Uma resposta apresentada em nossa implementação foi: "Cada pacote de bolachas custou R$2,00, pois se cada pacote de balas é igual ao dobro da bolacha, é só fingir que ao invés de um pacote de balas tem dois de bolacha, então é só dividir os R$12,00 por 6".

A situação c) foi criada com a ideia de gerar um pouco de dificuldade nos alunos para resolução aritmeticamente, visto que desejamos mostrar aos alunos que algumas vezes é mais interessante resolver a situação algebricamente, do que aritmeticamente. Desse modo, provavelmente os alunos falarão que esta questão é difícil de ser resolvida e é possível que os grupos que consigam resolver, o façam por meio de tentativas (mostramos na Figura 5 uma possibilidade de resolução apresentada em nossa implementação – Apenas note que o grupo confundiu-se e colocou no lugar de Maurício, o nome Otávio).

A dificuldade surge também na Atividade 3, que fizemos na forma de desafio. Aconselhamos que o Desafio da Atividade 3 seja realizado antes da atividade 2.1, para que os alunos observem mais uma vez a dificuldade de resolver uma situação aritmeticamente, levando-os a perceberem a grande utilidade do uso da álgebra. Após resolver a atividade 2.1, o aluno pode realizar a atividade 3.1 e tentar resolvê-la de outra forma. Neste momento os alunos já estarão mais confiantes e provavelmente tentarão resolver por meio de uma equação, percebendo que a resolução se torna mais eficaz.

Figura 5: Resolução para o item c da atividade 2.



c) Quando Fernanda chegou em casa, foi contar quanto dinheiro havia sobrado em sua carteira depois das compras. Ela percebeu que tinha menos dinheiro que o seu irmão Maurício: constatou que seu irmão tinha o dobro do que ela possuía. Para que os dois ficassem com a mesma quantia para comprar lanche na escola, a mãe de Fernanda deu R$8,00 para a Fernanda e R$2,00 para o Maurício. Quantos reais Fernanda tinha na carteira ao chegar em casa? Explique seu raciocínio detalhadamente.

+8 1x Fernando

+2 2x otávio

x = 3 → F = 11 não é
O = 8

x = 4 não é pois a fernanda teria 12 e otavio teria 10

x = 5 → F = 13
O = 12 não é

x = 6 → F = 14
O = 14

o 6 mais 8 que resulta em 14 e multiplicamos 6 vezes 2 mais dois que também é 14.

Acervo da autora.

Atividade 2.1:

Atividade 2.1:
Agora vamos pensar em outras formas para a resolução das situações anteriores!

- Inicialmente, representa cada item utilizando palavras e os *Algebra Tiles.*
- Após, pensando na sua resolução inicial para o problema, tente encontrar uma forma de manipular os *Algebra Tiles* a fim de encontrar a mesma solução da atividade anterior. Apresente os passos da manipulação em sua folha de respostas, separando por uma linha cada passo da manipulação.
- Finalmente, experimente expressar de outra forma o que você fez com os *Algebra Tiles*.

Modelo das tabelas da Atividade 2.1:

Nomes: ____ Turma: _________

Problema 2. a)

Utilizando palavras:	Algebra Tiles:	De outra forma:

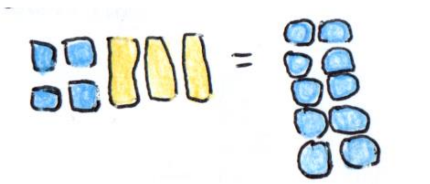
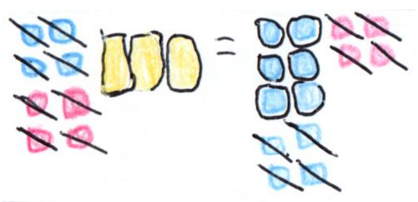
Materiais: Folhas com as atividades (Atividade 2, 2.1 (instrução + tabelas)), “tapetinho” para manipulação dos *Algebra Tiles*, e envelope com os retângulos e quadradinhos (indicamos que cada grupo tenha um envelope com 30 quadradinhos azuis, 30 quadradinhos vermelhos, 10 retângulos amarelos e 10 retângulos laranjas), lápis de cor nas cores: vermelho, azul, amarelo e laranja.

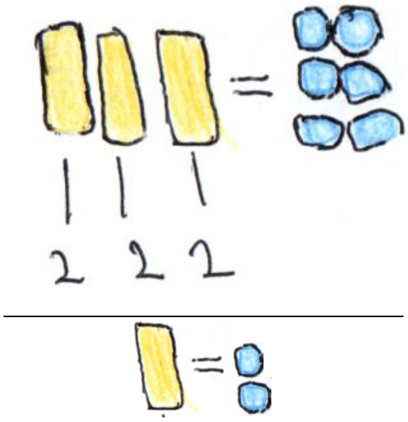
Objetivos: representar com palavras, pictoricamente e de outra forma as situações da Atividade 2; encontrar uma forma de manipular o material para encontrar o valor desconhecido e associá-la à representação pictórica; converter a representação pictórica para outra representação e; apresentar os tratamentos nas diferentes representações. Ao final da atividade fazer um fechamento com grupos apresentando suas resoluções na lousa e fazendo discussões.

Ao professor: Nesta atividade os alunos já estarão mais habituados com o uso do material e já terão mais ideias de como fazer as manipulações a fim de encontrar o valor de x. Após os grupos concluírem a atividade é interessante fazer um fechamento com os alunos na lousa. O professor pode convidar alunos para fazerem suas resoluções no quadro, ou ele mesmo pode ir preenchendo a tabela com as informações dadas pela turma. É interessante realizar esse fechamento para verificar se todos os alunos estão compreendendo as atividades e para poder ver maneiras diferentes de resolver situações.

Ao realizar o fechamento, após apresentar as resoluções para os três itens desenhando a tabela no quadro, o professor pode abordar os conceitos de definição de uma equação, equações equivalentes, incógnita e raiz (ou solução) da equação. Acreditamos que esses conceitos, quando abordados no momento que os alunos já têm uma familiaridade maior com o conteúdo tornam-se mais fáceis de serem entendidos e observados nas situações já resolvidas por eles mesmos. Além disso, é importante salientar com os alunos o uso das propriedades da igualdade.

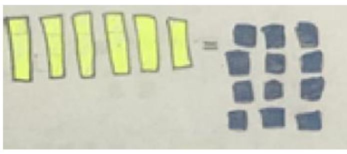
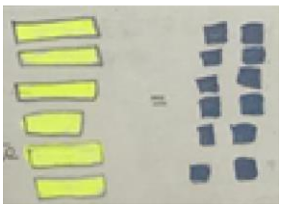
Quadro 9: sugestão de solução Atividade 2.1. a)

Sugestão de solução Atividade 2.1. a)		
Utilizando palavras:	*Algebra Tiles:*	De outra forma:
3 caixas de leite (não sabemos quanto custa) + um pacotes de maçãs (R\$4,00) = R\$10,00		$4 + 3x = 10$
Queremos encontrar o valor de cada caixa de leite, então gostaríamos de encontrar $x = número$. Desse modo, precisamos eliminar as unidades que estão do lado esquerdo da igualdade e para isso devemos adicionar 4 unidades negativas para anular com as 4 positivas. Contudo temos que lembrar que se adicionarmos a um lado da igualdade, temos que adicionar do outro também, por causa do princípio aditivo, então		$4 - 4 + 3x = 10 - 4$ ou $4 + (-4) + 3x = 10 + (-4)$

adicionamos 4 unidades negativas aos dois lados e anulamos aos pares.		
Dessa forma, descobrimos que 3 caixas de leite custam 6 reais. Para saber o valor de uma caixa, dividimos por 3, obtendo que cada caixa custa R$2,00.		$3x = 6$ $\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$ ou $3x \div 3 = 6 \div 3$ (OBS: talvez os alunos não apresentem essa divisão por 3 nos dois lados da igualdade, então o professor pode salientar, no momento do fechamento da atividade na lousa, que está sendo usado o princípio multiplicativo e que podemos representar dessa forma). $x = 2$

Fonte: Acervo da autora.

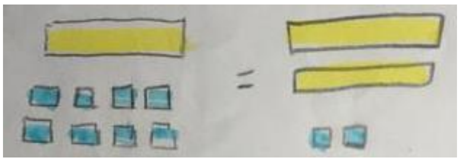
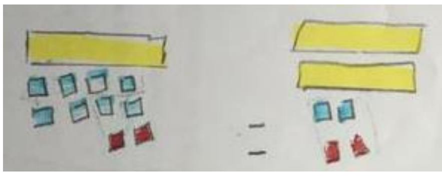
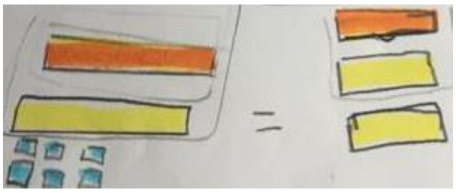
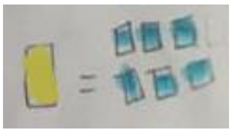
Quadro 10: Sugestão de solução Atividade 2.1. b)

Sugestão de solução Atividade 2.1. b)		
Utilizando palavras:	*Algebra Tiles:*	De outra forma:
Fernanda comprou quatro pacotes de bolacha (não sabemos quanto custa) + um pacote de bala (custa o dobro das bolachas). OBS: Note que, na figura ao lado, os alunos usaram um retângulo amarelo para cada pacote de bolacha e 2 retângulos amarelos para o pacote de balas, já que o pacotes de balas custa o dobro de um pacote de bolachas.		$4x + 2x = 12$ $6x = 12$
Dividindo os 12 quadradinhos azuis entre os 12 retângulos amarelos.		$\frac{6x}{6} = \frac{12}{6}$ ou $6x \div 6 = 12 \div 6$ (OBS: talvez os alunos não apresentem essa divisão por 6 nos dois lados da igualdade, então o professor pode

		salientar, no momento do fechamento da atividade na lousa, que está sendo usado o princípio multiplicativo e que podemos representar dessa forma).
Obtemos que cada pacote de bala custa R$2,00.		$x = 2$

Fonte: Acervo da autora.

Quadro 11: Sugestão de solução Atividade 2.1. c)

Sugestão de solução Atividade 2.1. c)		
Utilizando palavras:	*Algebra Tiles:*	De outra forma:
Valor da Fernanda + 8 = dobro de Fernanda + 2		$x + 8 = 2x + 2$
Adicionamos duas unidades negativas aos dois lados da igualdade, pois queremos encontrar *x* em um dos lados igualdade e um número do outro lado. Assim, eliminamos os dois quadradinhos azuis que estão com os retângulos amarelos.		$x + 8 - 2 = 2x + 2 - 2$ ou $x + 8 + (-2) = 2x + 2 + (-2)$
Adicionamos o oposto de *x* aos dois lados da igualdade, para obter *1x* em um dos lados e um número do outro lado.		$x + 6 - x = 2x - x$ Ou $x + 6 + (-x) = 2x + (-x)$
Encontramos o valor de Fernanda, que é R$6,00.		$6 = x$

Fonte: Acervo da autora.

Atividade 3:

Atividade 3: (DESAFIO)

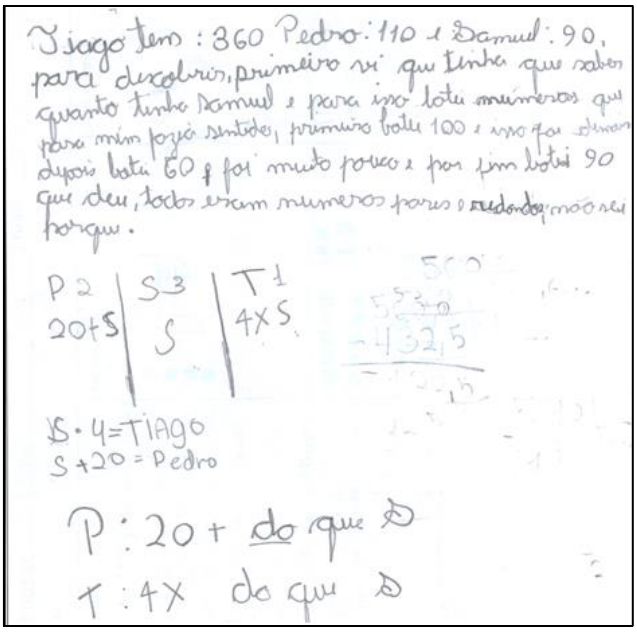
Problema: Samuel, Pedro e Tiago tinham juntos R$560,00. Sabendo que Pedro tinha R$20,00 a mais que Samuel e que Tiago tinha quatro vezes a quantia de Samuel, quantos reais tinha cada um?

Materiais: Folha de atividades, lápis e borracha.

Objetivos: desafiar os alunos e refletir que algumas vezes pode ficar difícil resolver um problema via aritmética; mostrar a necessidade do uso da álgebra e mostrar que ela vem para auxiliar os estudantes.

Ao professor: Como comentamos anteriormente, acreditamos que essa atividade tem uma melhor utilização se resolvida após a Atividade 2 e antes da Atividade 2.1. É normal que os alunos sintam dificuldades ao resolverem essa atividade, pois são várias informações a serem consideradas e o números são maiores. Provavelmente os alunos que conseguirem solucionar, resolverão por meio de tentativas, como ilustramos com um exemplo de solução na Figura 6. Observe que o grupo já estava com a intenção de usar álgebra, mas ainda não se sentiu confortável para formar uma equação para esse desafio. Na justificativa escrita o grupo afirma: “ Para descobrir, primeiro vi que tinha que saber quanto tinha Samuel e para isso *botei* número que para mim fazia sentido, primeiro *botei* 100 e isso foi *demais*, depois *botei* 60 e foi muito pouco e por último *botei* 90 que deu, todos eram números pares e redondos, não sei porque”.

Figura 6: Solução possível para a Atividade 3.



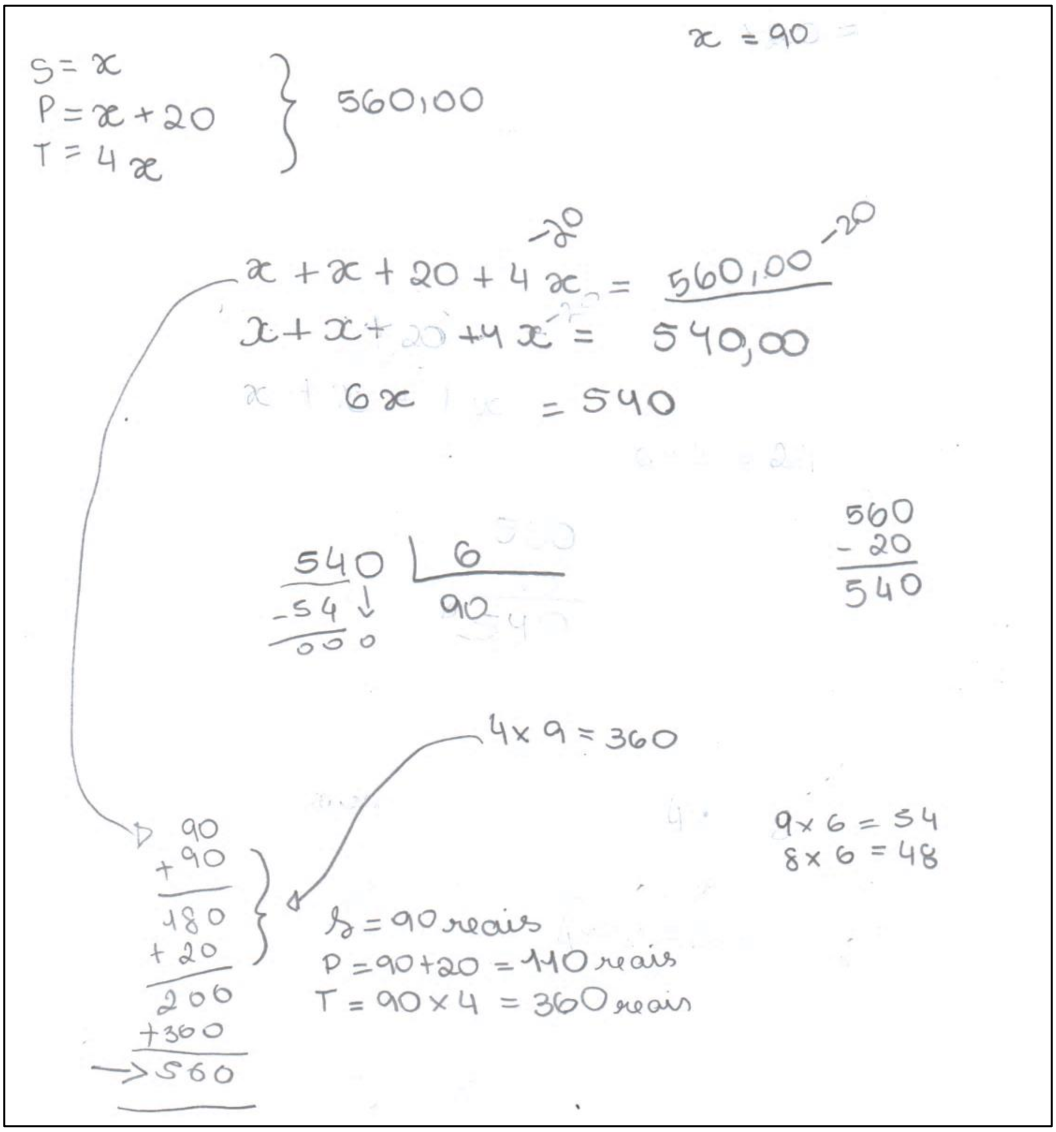
Fonte: Acervo da autora.

Atividade 3.1: Nesta atividade, o professor pode convidar os alunos a resolver de outra forma o desafio da Atividade 3.

Materiais: Folha de atividades, lápis e borracha.

Objetivos: Resolver a situação proposta por meio de uma equação do primeiro grau com uma incógnita.

Figura 7: Possível solução da Atividade 3.1



Fonte: Acervo da autora.

Ao professor: Sugerimos que essa atividade seja realizada após o fechamento da Atividade 2.1, quando os alunos já estarão mais confiantes e já saberão mais conceitos sobre equações do primeiro grau com uma incógnita. Após os alunos resolverem a situação, o professor pode realizar o fechamento da atividade em grande grupo e voltar a discutir com os alunos sobre a importância de ter outras ferramentas para resolver problemas. Os alunos provavelmente falarão que é mais fácil resolver esse desafio com uma equação, do que da forma anterior. Na Figura 7 observe uma resolução de um grupo para essa atividade. Observe que: os alunos caracterizam algebricamente os valores de Pedro e Tiago relacionando com o valor de Samuel; montam a equação para a situação; resolvem a equação utilizando os princípios da igualdade; calculam o valor de cada menino, sabendo o valor de Samuel que foi encontrado na resolução da equação e, finalmente, fazem a verificação da solução da equação. Chamamos a atenção para o fato que até esse momento não havia sido estudada a verificação da solução da equação ainda, mas o grupo achou uma forma de verificar se a resolução encontrada estava correta.

Atividade 4:

Atividade 4: Flávio e Fábio são amigos e toda a semana eles ganham uma "Semanada" de seus pais para comprar lanches para a escola. Eles decidiram economizar um pouco desse dinheiro para comprar uma chuteira que viram em uma loja por R$ 250,00.

a) Flávio consegue economizar R$ 20,00 por semana e seu pai lhe deu um incentivo de R$30,00 para iniciar a sua economia. Em quantas semanas ele poderá comprar a chuteira?

b) Já Fábio, consegue economizar R$ 15,00 por semana, mas ele teve a sorte de ganhar R$ 100,00 de incentivo de sua avó. Em quantas semanas ele poderá comprar a chuteira?

c) Sem considerar a compra da chuteira, em quantas semanas Flávio e Fábio teriam juntado o mesmo valor em dinheiro?

d) Luciano gostou da ideia de Fábio e Flávio e pediu que seu pai lhe desse uma semanada para ele economizar dinheiro. Ele economizou dinheiro durante 6 semanas, juntando um total de R$ 246,00. Sabendo que em cada semana ele economizou a mesma quantidade de dinheiro, quanto ele economizou por semana?

Materiais: Folha de atividades, lápis e borracha.

Objetivos: resolver quatro situações de forma livre nos grupos e apresentar as resoluções no quadro para seus colegas.

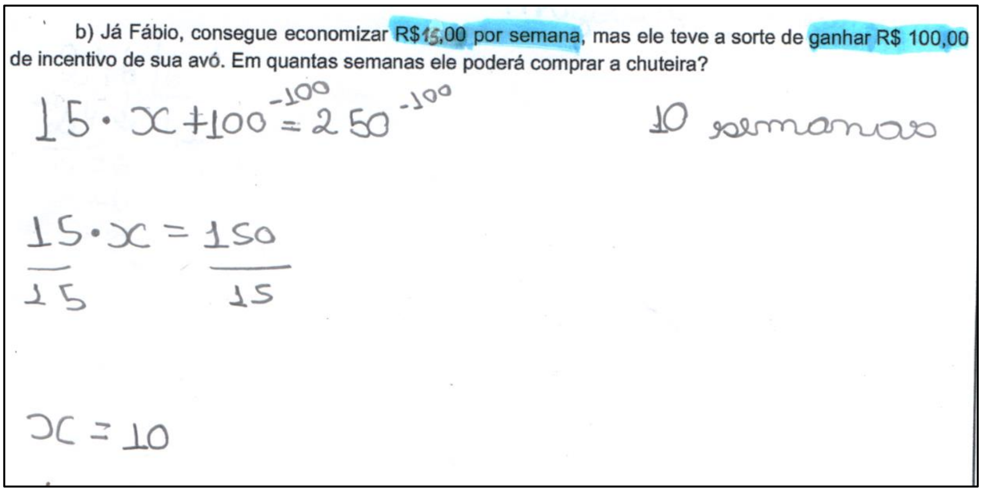
Ao professor: Não definimos aqui uma forma de resolução, pois é importante que os alunos tenham a opção de escolher a melhor ferramenta para a resolução das situações. Contudo esperamos que a resolução seja feita por meio de equações.

Ao final deste encontro, após os grupos apresentarem suas soluções no quadro, o professor pode aproveitar o momento para estudar a verificação de equações do primeiro grau com uma incógnita. O professor pode perguntar aos alunos o que eles poderiam fazer para verificar se as respostas encontradas estão corretas e anotar as ideias no quadro. Após isso, o professor pode realizar na lousa a verificação dos quatro itens da atividade, substituindo o valor encontrado para x na equação de cada problema e verificando se encontra uma igualdade verdadeira.

No item a), espera-se que os alunos montem a equação correspondente à situação: $30 + 20x = 250$. Após isso, utilizem o princípio aditivo, subtraindo 30 unidades dos dois lados da igualdade: $30 + 20x - 30 = 250 - 30$, obtendo a equação equivalente: $20x = 220$. Para encontrar o valor de $1x$, espera-se que os alunos utilizem o princípio multiplicativo, dividindo ambos os lados da igualdade por 20, obtendo $x = 10$. Para finalizar, é esperado que os alunos retornem à situação e respondam à pergunta realizada: Flávio conseguirá comprar a chuteira em 11 semanas.

No item b), espera-se que os alunos apresentem uma solução semelhante à ilustrada na Figura 8. Note que o aluno utilizou o princípio aditivo, subtraindo 100 de cada lado e após, utilizou o princípio multiplicativo dividindo por 15 de cada lado da igualdade. Neste momento, como já foi realizado o fechamento da Atividade 2.1 no quadro, acreditamos que os alunos já comecem a apresentar de forma escrita a divisão dos dois lados da igualdade. Gostaríamos de salientar que se os alunos não estiverem familiarizados com a utilização do símbolo travessão para representar a operação de divisão, deve ser feito o uso do símbolo de divisão usual: $\div$, pois o uso do travessão pode causar confusão para os alunos se os mesmos não estão habituados. Nesse exemplo, deveria então ser representada a equação equivalente da segunda linha da Figura 8 da seguinte forma: $15x \div 15 = 150 \div 15$.

Figura 8: Possível solução para a Atividade 4. b)



b) Já Fábio, consegue economizar R$15,00 por semana, mas ele teve a sorte de ganhar R$ 100,00 de incentivo de sua avó. Em quantas semanas ele poderá comprar a chuteira?

$15 \cdot x + 100 \overset{-100}{=} 250^{-100}$

10 semanas

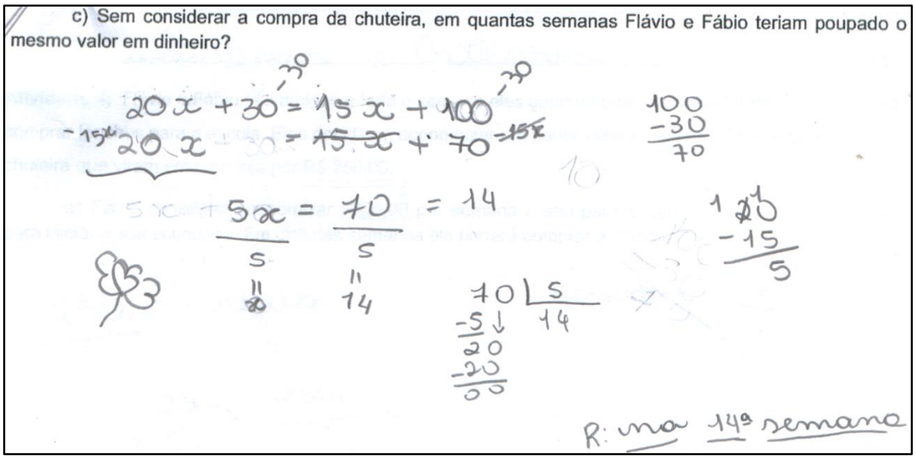
$\frac{15 \cdot x}{15} = \frac{150}{15}$

$x = 10$

Fonte: Acervo da autora.

No item c), assim como nos anteriores, esperamos que os alunos representem a situação por meio de uma equação, a resolvam utilizando os princípios da igualdade e apresentem uma resposta para o problema. Trazemos na Figura 9 a resolução de um grupo durante a implementação. Note que o grupo utiliza duas vezes o princípio aditivo: subtraindo 30 de ambos os lados da igualdade e subtraindo $15x$ de cada lado da igualdade. O grupo também utiliza o princípio multiplicativo na sua resolução: dividindo ambos os lados da igualdade por 5 utilizando o símbolo de travessão para representar a divisão, mas lembre-se que se os alunos não tiverem o hábito de utilizar o travessão, deve ser usado o símbolo usual de divisão para evitar confusões. Note que os alunos ainda estão colocando os valores desorganizadamente nas equações, mas espera-se que ao longo do tempo, a escrita se torne mais organizada.

Figura 9: Possível solução para a Atividade 4.c)



c) Sem considerar a compra da chuteira, em quantas semanas Flávio e Fábio teriam poupado o mesmo valor em dinheiro?

$20x + 30 = 15x + 100$

$-15x\ 20x = \cancel{15x} + 70\ -15x$

$5x = \frac{70}{5} = 14$

R: na 14ª semana

Fonte: Acervo da autora.

Na situação d), esperamos que os alunos efetuem a divisão: 246 por 6, ou formem a equação $6x = 246$ e a resolvam, apresentando uma solução para a situação.

Atividade 5:

Atividade 5:

Fátima e Carlos são primos e passaram suas férias de inverno no sítio da sua avó, onde tem um pomar maravilhoso com muitas árvores frutíferas.

a) Já no primeiro dia, os primos colheram 16 laranjas para fazer suco para o almoço, utilizaram uma certa quantidade para fazer o suco e ainda ficaram com 5 laranjas. Quantas laranjas eles utilizaram para fazer o suco?

b) No segundo dia eles colheram bergamotas. Fátima colheu 10 bergamotas e deu um certo número de bergamotas para sua avó. Já Carlos, colheu 14 bergamotas e deu o dobro que Fátima para sua avó. Sabendo que os dois primos ficaram como o mesmo número de bergamotas, quantas bergamotas Fátima deu para sua avó?

c) No terceiro dia, como estava chovendo, eles jogaram um pouco de videogame. O jogo que eles estavam jogando acumulava os pontos durante as partidas. Quando eles iniciaram o jogo, tinham +12 pontos. Ao final do dia, o saldo acumulado era de +5 pontos. Como isso é possível? Qual foi o saldo de pontos obtidos pelos primos durante o dia?

Materiais: Folha de atividades, lápis e borracha.

Objetivos: resolver situações utilizando o conhecimento matemático prévio dos alunos.

Ao professor: Espera-se que os alunos resolvam as situações livremente (alguns alunos podem, neste momento, optar pela resolução por meio de uma equação). O diferencial dessa atividade para as anteriores, é que até aqui eram somados números negativos ou o oposto de x (fazendo uso dos quadradinhos vermelhos ou dos retângulos laranjas nos *Algebra Tiles*); agora será necessário somar números positivos ou múltiplos de x (fazendo uso dos quadradinhos azuis ou dos retângulos amarelos). Dessa forma, trazemos a Atividade 5.1 (com a mesma ideia das atividades 1.1 e 2.1): para que os alunos percebam o que é necessário fazer para anular números negativos ou múltiplos do oposto de x. Na Atividade 5.1 explicamos com mais detalhes.

Atividade 5.1:

Atividade 5.1:
Agora vamos pensar em outras formas para a resolução das situações anteriores!

- Inicialmente, representa cada item utilizando palavras e os *Algebra Tiles.*
- Após, pensando na sua resolução inicial para o problema, tente encontrar uma forma de manipular os *Algebra Tiles* a fim de encontrar a mesma solução da atividade anterior. Apresente os passos da manipulação em sua folha de respostas, separando por uma linha cada passo da manipulação.
- Finalmente, experimente expressar de outra forma o que você fez com os *Algebra Tiles*.

Modelo das tabelas da Atividade 5.1:

Nomes: ______________________________ Turma: ____

Problema 5. a)

Utilizando palavras:	Algebra Tiles:	De outra forma:

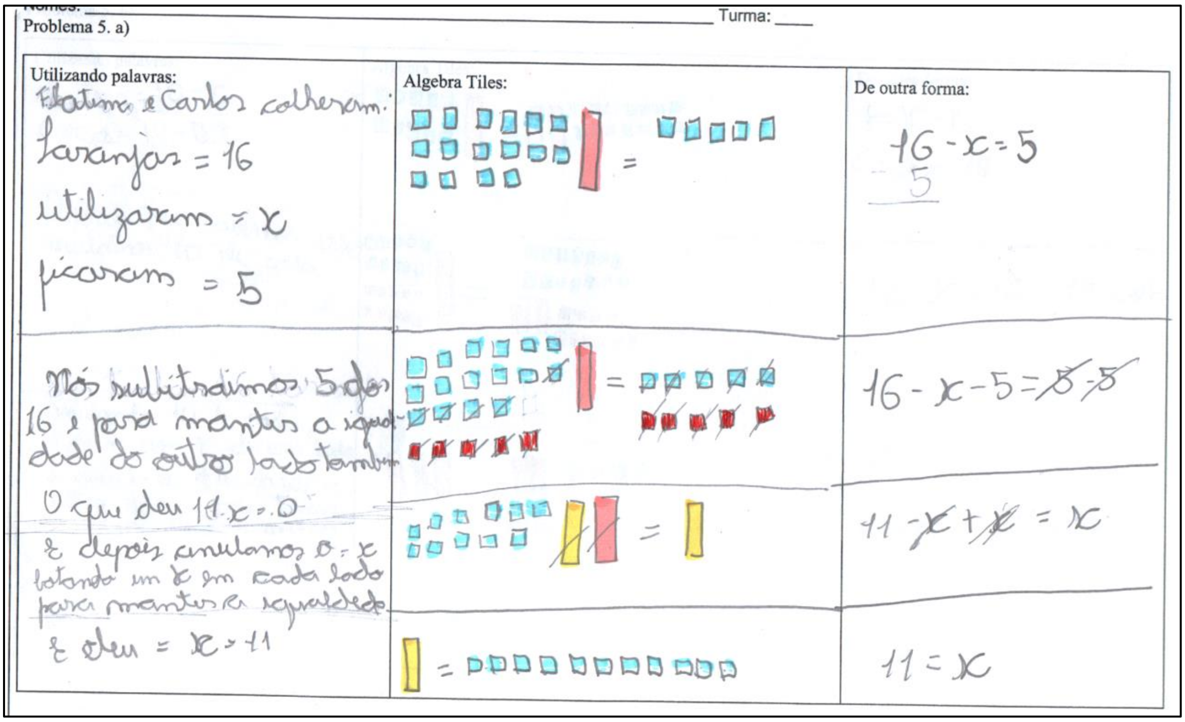
Materiais: Folhas com as atividades (Atividade 5, 5.1 (instrução + tabelas)), “tapetinho” para manipulação dos *Algebra Tiles*, e envelope com os retângulos e quadradinhos (sugerimos que cada grupo tenha um envelope com 30 quadradinhos azuis, 30 quadradinhos vermelhos, 10 retângulos amarelos e 10 retângulos laranjas), lápis de cor nas cores: vermelho, azul, amarelo e laranja.

Objetivos: representar com palavras, pictoricamente e de outra forma as situações da Atividade 5; perceber que, na representação pictórica, agora é necessário o uso do retângulo laranja; encontrar uma forma de manipular o material para encontrar o valor desconhecido e associá-la à representação pictórica; converter a representação pictórica para outra representação e; apresentar os tratamentos em algumas representações.

Ao professor: A principal ideia dessa questão é que os alunos compreendam, por meio do uso dos *Algebra Tiles*, que para anular unidades negativas, é necessário adicionar unidades positivas, ao contrário do que era feito antes. Assim como, para anular $-x$ ou $-2x$, por exemplo é preciso adicionar retângulos amarelos, ou seja $+x$ e $+2x$, respectivamente. Com a manipulação do material e a descoberta por parte dos próprios alunos, recomendamos que não seja criada a receita de trocar os números de lado na igualdade, mudando o sinal, por exemplo, já que os mesmos observarão, ao manipular o material e efetuar conversão para o registro algébrico, que basta adicionar o oposto para que as quantidades se anulem. Dessa forma, o professor deve evitar o uso de expressões como “passar para o outro lado da igualdade”. Apresentamos abaixo sugestões de resolução dos itens da atividade.

No item a), apresentamos (Figura 10) uma resolução proposta pelos alunos na implementação das atividades. Observe que os alunos representam com o retângulo laranja, as laranjas que foram utilizadas (a cor não ficou clara na foto, mas o primeiro retângulo era laranja, assim como este mesmo representado nas duas linhas abaixo). Após isso, os alunos subtraem 5 unidades de cada lado, justificando que precisava fazer isso dos dois lados da igualdade para “manter” a igualdade. Após isso, representam na nova linha como fica a representação pictórica após eliminar as cinco unidades e adicionam x em cada lado da igualdade para anular o $-x$, obtendo $x = 11$. Observe que a representação algébrica está atrelada à pictórica e a resolução da equação é feita utilizando os princípios da igualdade, sem termos exigido isso, ou apresentado uma receita.

Figura 10 (Possível solução para o item 5.a)

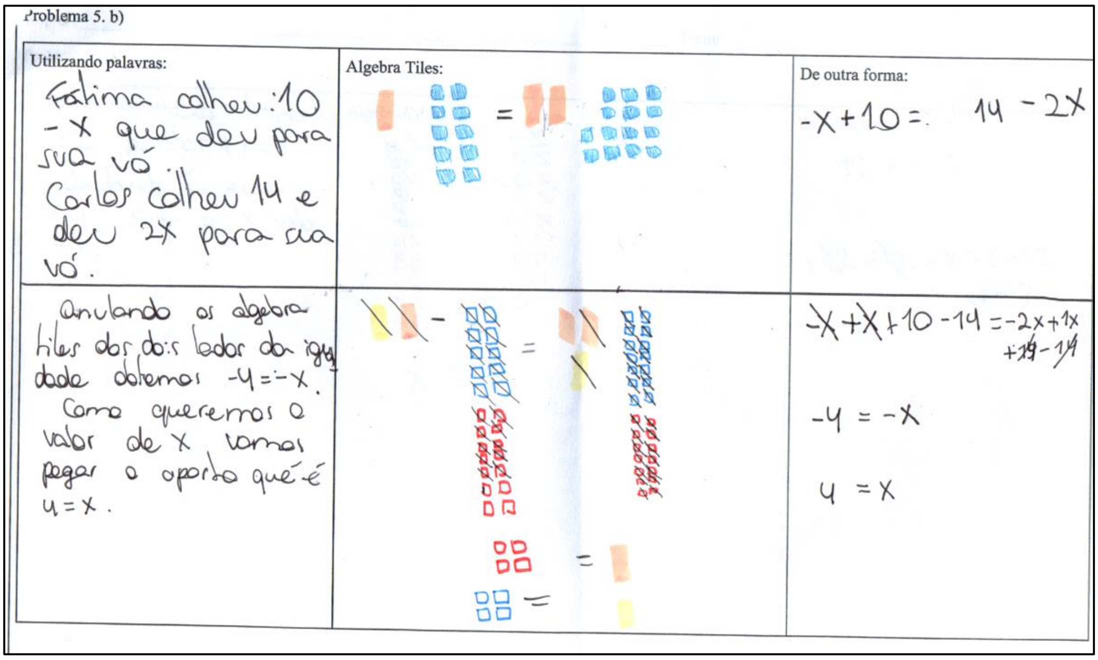


Fonte: Acervo da autora.

Salientamos que no registro algébrico o grupo escreve $16 - x = 5$, mas lembramos que o grupo está "pulando" a representação $16 + (-x) = 5$, visto que no material temos sempre somas (pois estamos sempre "juntando" quadradinhos e retângulos). Acreditamos que essa forma de escrita está conectada também com a formação da situação-problema, pois na situação proposta Fátima e Carlos colheram 16 laranjas e utilizaram algumas (x). Como não é possível utilizar o sinal operatório da subtração no material, os alunos representaram pictoricamente utilizando o oposto de x, contudo, ao representar algebricamente utilizaram novamente a ideia de subtrair x laranjas, que provavelmente eles entendem que é o mesmo que adicionar ($-x$), como construído na subtração de números inteiros.

Apresentamos na Figura 11 uma resolução apresentada por um grupo para o item b). Observe que a quantidade desconhecida que Fátima deu para a sua avó foi representada por um retângulo laranja. Como Carlos deu o dobro, o grupo representou com dois retângulos laranjas. Este grupo optou por fazer no mesmo momento o cancelamento dos termos numérico e algébrico, adicionando um retângulo amarelo $(+x)$ a ambos os lados da igualdade e subtraindo 14 unidades negativas de ambos os lados, obtendo a igualdade $-4 = -x$. Note que o grupo justifica que precisa descobrir o valor de x, então toma o oposto dos dois lados da igualdade. É interessante que, ao resolver dessa forma, os alunos não precisam da técnica de multiplicar por -1 dos dois lados da igualdade, já que o uso do material, torna natural a ideia de tomar o oposto.

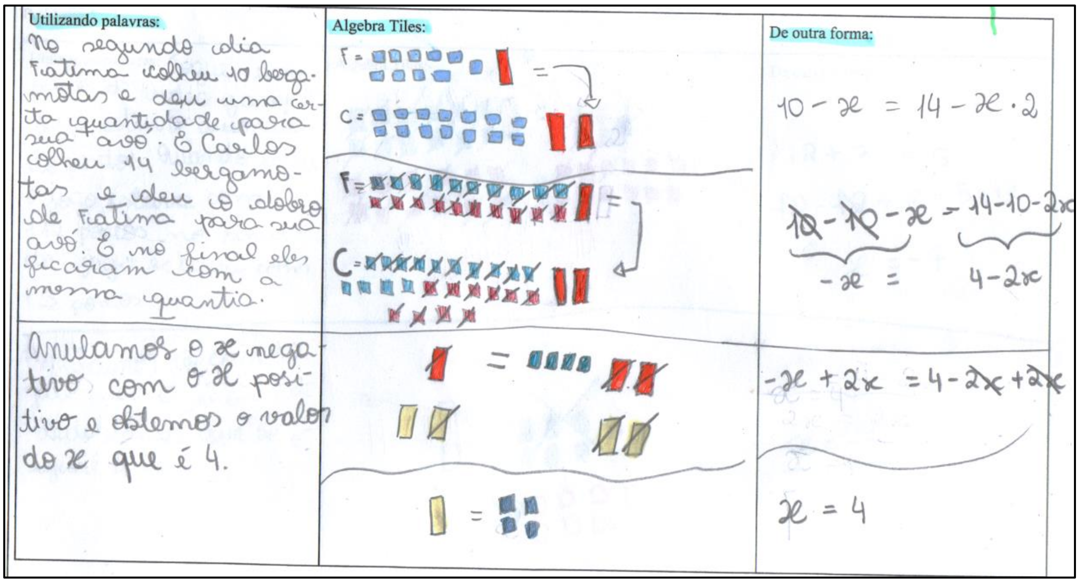
Figura 11: Possível solução para a Atividade 5.1.b)



Acervo da autora.

Outra forma de resolução é apresentada na Figura 12, na qual os alunos resolvem em mais etapas a equação e, no passo final, já obtém o valor de *x* com coeficiente positivo, já que adicionam 2 retângulos amarelos, ao invés de um. É interessante mostrar as duas resoluções para a turma, pois apesar de serem diferentes, chegam a um mesmo resultado.

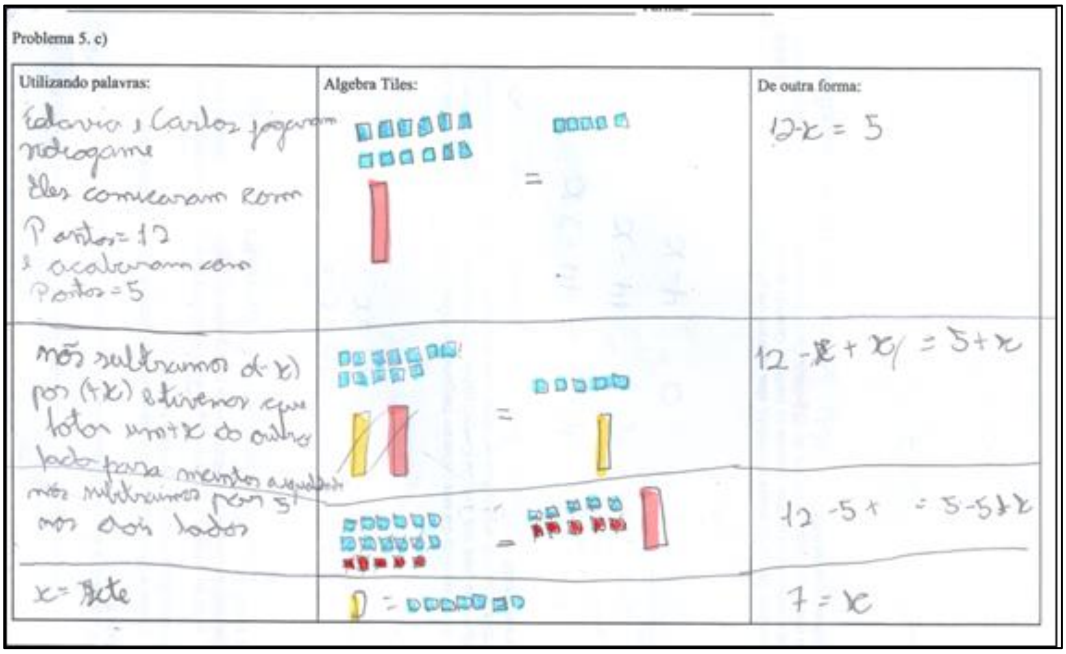
Figura 12: Outra possível solução para a Atividade 5.1 b)



Fonte: Acervo da autora.

Na Figura 13 apresentamos uma possível solução para o item c), proposta pelos alunos em nossa implementação. Observe que os alunos já resolveram pensando na ideia de perder pontos, portanto descobriram que foram perdidos sete pontos. Outro grupos encontraram $x = -7$ no final, pois não usaram a interpretação inicial. Então as duas formas de resolver estão corretas, apenas é preciso cuidado no momento de apresentar a resposta para a situação.

Figura 13: Possível solução para o item 5.1.c)



Fonte: Acervo da autora.

Após a realização da atividade pelos alunos, o professor pode realizar o fechamento dessa atividade no quadro, para discutir as diferentes formas de resolução apresentadas pelos alunos. Além disso, esse momento é importante para o professor salientar o uso das propriedades da igualdade na resolução das equações e relembrando as definições abordadas anteriormente.

Atividade 6:

Atividade 6:

Resolva os problemas a seguir:

a)Pensei em um número, adicionei 30 e o resultado que obtive foi 13. Em qual número pensei?

b) O número 43, menos o dobro de um número é igual a 15. Qual é esse número?

c) O triplo de um número adicionado a 40, é igual a 120 menos o mesmo número. Qual é esse número?

Materiais: Folha de atividades, lápis e borracha.

Objetivos: resolver problemas comuns em livros didáticos que podem ser resolvidos por meio de equações do primeiro grau com uma incógnita; estudar a resolução de equações quando os coeficientes são negativos.

Ao professor: Nesta atividade esperamos que os estudantes já estejam encorajados a resolver essas situações por meio de equações do primeiro grau com uma incógnita, resolvendo-as utilizando as propriedades da igualdade e que já tenham ideia da importância da verificação da solução da equação. Ao final da atividade, é interessante que o professor convide alguns grupos para expor suas resoluções na lousa, afim de discutir as resoluções de cada grupo.

Atividade 7:

Atividade 7:

Vamos exercitar a criatividade criando alguns problemas para os colegas resolverem!

a) Crie um problema que pode ser resolvido utilizando uma equação e apresente aqui a sua resolução.
b) Crie um problema que pode ser resolvido utilizando a equação $12 + x = 25$.
c) Crie um problema que pode ser resolvido utilizando a equação $x + 30 = 2x + 14$.

Materiais: Folha de atividades.

Objetivos: criar problemas que podem ser resolvidos utilizando uma equação do primeiro grau com uma incógnita, apresentando a resolução para a situação.

Ao professor: A Atividade 7 é composta por 3 itens: em um deles, os alunos podem criar um problema que pode ser resolvido utilizando qualquer equação criada por eles; e nos outros dois itens, são dadas duas equações que devem servir de base para a criação dos problemas. Esta questão foi inspirada na importância de os alunos realizarem também o processo inverso: ir do registro algébrico para o registro em língua natural. A elaboração de problemas pelos alunos também é proposta na BNCC. Após a criação dos problemas, o professor pode fazer uma seleção dos problemas criados no item a) e realizar a troca entre os grupos, para que os grupos possam resolver as situações criadas pelos demais grupos da turma.