UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

DAIANA DOS SANTOS OLIVEIRA FISCHER

INVESTIGANDO O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 6° ANO

PORTO ALEGRE
2020

DAIANA DOS SANTOS OLIVEIRA FISCHER

INVESTIGANDO O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 6° ANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Cydara Cavedon Ripoll

PORTO ALEGRE
2020

DAIANA DOS SANTOS OLIVEIRA FISCHER

INVESTIGANDO O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 6° ANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Cydara Cavedon Ripoll – Orientadora

Profa. Dra. Letícia Guimarães Rangel (UFRJ)

Profa. Dra. Luisa Rodriguez Doering (PPGEMAT/UFRGS)

Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso (PPGEMAT/UFRGS)

PORTO ALEGRE
2020

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela paz, sabedoria e força presentes em minha vida e essenciais para a realização desta pesquisa e do exercício da profissão de professor.

Em especial, a minha orintadora Professora Dra. Cydara Cavedo Ripoll, por sua dedicação em cada passo desta pesquisa, por suas sugestões e orientações.

Aos professores Letícia, Luisa e Marcus que avaliaram esta pesquisa, contribuindo com a evolução e qualificação deste trabalho.

Aos professores do Programa de Mestrado em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul pela dedicação e ensinamentos.

Aos meus colegas de mestrado, pela força, pela inspiração, pelas ideias e sugestões para aperfeiçoamento profissional e da pesquisa, em especial, às amigas que o mestrado me deu, Cristina, Daniella, Delma, Franciele, Olga, Rosangela e Roseane, Shéridan.

Aos colegas da EMEF Profª Noemy Fay dos Santos, pelo incentivo, pela oportunidade de realizar a pesquisa e por toda vibração com minha conquista.

Aos alunos, por aceitarem participar desta caminhada.

Aos colegas da FACCAT, em especial, ao Prof. Delmar e Prof. Roberto por acreditarem no meu potencial, desde a graduação, proporcionando-me meios para chegar com sucesso ao final desta jornada.

Aos meus amigos, pelo apoio e auxílio nesta pesquisa, em especial à Francini e à Telma.

Aos meus familiares, pela presença inspiradora em minha vida, em especial, a minha mãe e a minha vó por todo auxílio ao longo da minha caminhada.

Ao meu esposo Ismael e ao meu filho Ian por terem acreditado, incentivado, apoiado, demonstrado respeito e admiração pela minha busca por conhecimento e aperfeiçoamento.

Que Deus continue nos abençoando e que, apesar do momento tão atípico, nos mantenha com saúde e cada vez mais comprometidos com o aperfeiçoamento de nossa profissão.

RESUMO

A presente pesquisa diz respeito ao processo de ensino e aprendizagem de multiplicação de frações, tendo por objetivo investigar a questão “Como uma proposta de sequência de atividades para o 6º ano do Ensino Fundamental que foca na compreensão do conceito de multiplicação de frações pode auxiliar para o aprendizado desta operação e na capacidade de aplicá-la?”. Com base em uma abordagem qualitativa, a pesquisa parte de três fontes: a) na proposta apresentada pelos documentos norteadores do currículo da Educação Básica Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN e Base Nacional Comum Curricular – BNCC; b) na abordagem apresentada por livros aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático - PNLD, incluindo o livro que é adotado em toda a rede municipal de ensino de Parobé/RS; c) na fundamentação teórica sobre o campo multiplicativo (Vergnaud) e sobre os registros de representação semiótica (Duval). A ponderação de todos estas fontes serviu como base para o planejamento, implementação e análise de uma sequência de atividades para o ensino de multiplicação de frações em uma turma de 6º ano de uma escola da rede municipal de Parobé/RS. Concluímos, a partir dos esquemas de pensamento identificados, que os alunos conseguiram atribuir sentido à multiplicação de frações: a partir do conhecimento que já possuíam dessa operação no universo dos números naturais, ampliaram este conceito ao universo das frações, apoiados em material concreto e em representações pictóricas, chegando à dedução de um algoritmo para esta operação. Como fruto desta pesquisa foi elaborado, a partir da sequência de atividades empregada na pesquisa, um produto didático, com intuito de oferecer a outros professores uma fonte para a sua reflexão sobre o ensino e aprendizagem da multiplicação de frações, incluindo objetivos e bilhetes ao professor.

Palavras chave: Ensino de frações; Aprendizagem de frações; Situações envolvendo multiplicação de frações; Multiplicação de frações.

ABSTRACT

The present research concerns the teaching and learning process of multiplying fractions, aiming to investigate the question "How does a proposal for a sequence of activities for the 6th year of elementary school, focused on understanding the concept of multiplying fractions, help to learn this operation and the ability to apply it?" Based on a qualitative approach, the research comes from three sources: a) the proposal presented by the guiding documents of the Basic Education curriculum, National Curriculum Parameters - PCN and Common Curricular National Base - BNCC; b) in the approach presented by books approved by the National Textbook Program - PNLD, including the book that is adopted throughout the municipal school system in Parobé / RS; c) in the theoretical foundation on the multiplicative field (Vergnaud) and on the semiotic representation recording (Duval). The weighting of all these sources served as a basis for planning, implementing and analyzing a sequence of activities for teaching multiplication of fractions in a 6th grade class at a school in the municipal network of Parobé / RS. We conclude, based on the thought schemes identified, that the students were able to give meaning to the multiplication of fractions: from the knowledge they already had of this operation in the universe of natural numbers, they extended this concept to the universe of fractions, supported on concrete material and in pictorial representations, arriving at the deduction of an algorithm for this operation. As a result of this research, a didactic product was elaborated, based on the sequence of activities employed in the research, in order to offer other teachers a source for their reflection on teaching and learning the multiplication of fractions, including objectives and notes to the teacher.

Keywords:*Teaching of fractions; Fraction learning; Situations involving multiplication of fractions; Multiplication of fractions.*

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Da minha experiência de 10 anos atuando com turmas de 6º ano, percebo o conteúdo frações como um daqueles nos quais os alunos apresentam muita dificuldade. Credito essa dificuldade, dentre vários aspectos, ao fato de tal conteúdo ser, por vezes, trabalhado somente de forma a ensinar os procedimentos de cálculo por meio de algoritmos, evidenciando uma preocupação com a aplicação dos mesmos em exercícios do tipo exercícios de fixação. Encaixei-me neste quadro nos primeiros anos de minha prática profissional, mas, a partir de um certo momento, passei a ficar incomodada com ele, pois ensinava frações para os alunos no 6º ano e, quando abordava números racionais no 7º ano, começando pela retomada de frações, parecia que os estudantes nunca tinham aprendido esse conceito. Essa realidade me fez mudar de postura, percebendo, então, a necessidade de refletir sobre o tema, sobre as metodologias e sobre as práticas com relação ao ensino de frações.

Em Vergnaud (1986, p. 01) já é apontado que: “Estudar os processos de transmissão e de apropriação dos conhecimentos matemáticos como um domínio científico próprio constitui, atualmente, uma questão científica de grande importância [...]”.

Conversando com minha orientadora, soube que recentemente ela orientou uma dissertação que envolveu uma pesquisa sobre a viabilidade de demonstrar-se com estudantes do 6º ano um teorema de caracterização de frações equivalentes, aplicando-o na comparação, adição e subtração de frações. Esse trabalho embasou-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, pois pretendeu propor e analisar a construção do conhecimento fazendo uso das várias representações manifestadas pelos alunos sobre o objeto de estudo. Levando isso em consideração, decidimos dar continuidade à pesquisa sobre o ensino de frações. Concentrando agora na operação de multiplicação, procuramos refletir sobre uma forma de proporcionar um aprendizado mais abrangente.

A partir de trocas com outros professores e da leitura crítica de livros didáticos, destacou-se, para nós, a impressão de que ainda hoje há muito a ser investigado sobre o tema, por exemplo, seria viável discutir-se com os estudantes a ampliação da operação de multiplicação do universo dos números naturais para o universo das frações, chegando a uma definição para a multiplicação de frações, no lugar de apenas apresentá-la por meio de um procedimento/algoritmo?, sem qualquer motivação para conectá-la, por exemplo, com o que vem a ser "$\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7}$". Cabe ressaltar que, dessa forma, fica mais difícil para os estudantes conseguirem associar a multiplicação de frações a situações do seu cotidiano.

Corrobora-se aqui a posição de Brolezzi quando este afirma que o conceito é o ponto central da Matemática e que o professor, utilizando diferentes recursos, deve estimular o aluno a refletir sobre ele, ficando difícil, caso contrário, que o aluno encontre interesse e motivação para assimilar os conhecimentos. (BROLEZZI, 1991).

Cabe ressaltar, também, a argumentação de Starepravo (2013) sobre a necessidade de o professor organizar situações de ensino com metodologias variadas, nas quais os estudantes possam desenvolver o conhecimento, não se atendo apenas à memorização de conceitos e de regras.

Outro aspecto de suma importância é que, quando um professor apresenta uma nova situação para a criança, ele precisa observar o envolvimento (participação) da mesma e, eventualmente, interferir. Segundo Vergnaud (2017a), o professor é um mediador e uma primeira ação de mediação é escolher situações pertinentes ao estudo (é neste sentido que usaremos o termo "situação" neste texto). Isso refere-se à epistemologia do estudo e ao conhecimento do aluno, analisando o que já se sabe e em que direção se quer evoluir.

Durante os Estágios que realizei no curso de Licenciatura em Matemática, tentei aprimorar minha metodologia de ensino, para poder despertar interesse do aluno, tornando a aula mais produtiva. E, ao longo de um curso de especialização, fui percebendo a importância de estimular-se uma aprendizagem focada na autonomia do aluno, não sendo este apenas um reprodutor de informações, mas, sim, um articulador de ideias.

São elencados como objetivos específicos desta pesquisa:

a) Analisar o que dizem os PCN e a BNCC quanto ao ensino de frações, mais especificamente à multiplicação de frações, dos anos iniciais até o sexto ano (eventualmente 7º) do Ensino Fundamental;

b) Analisar a abordagem proposta por livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático - PNLD[1] com relação ao estudo de multiplicação

---

[1] "O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), consolidado pelo Decreto nº 7.084 de 27/01/2010, é um programa de Estado que distribui às escolas públicas do Brasil livros didáticos, dicionários e outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita." (PNLD, 2017, p. 1).

de frações, procurando, por exemplo, verificar se esses livros atendem aos PCN;

c) Elaborar uma sequência de atividades que oportunize a construção do princípio multiplicativo de frações, por parte dos alunos e que envolva diferentes recursos para estimular a investigação, a apropriação do conceito de multiplicação e contribuir para a aprendizagem dos alunos;

d) Analisar, à luz da Teoria dos Campos Conceituais e da Teoria de Representação Semiótica, os resultados provenientes da implementação da sequência de atividades, buscando aprimorar o ensino de multiplicação de frações, no sentido de oportunizar maior aprendizagem.

Para tanto, o problema central deste estudo é a questão:

“Como uma proposta de sequência de atividades para o 6º ano do Ensino Fundamental que foca na compreensão do conceito de multiplicação de frações pode auxiliar para o aprendizado desta operação e na capacidade de aplicá-la?”

A partir do questionamento central, questões adicionais emergem e, cada uma delas, será, muitas vezes, uma das questões diretivas de um determinado capítulo.

- ✓ O que dizem os documentos oficiais Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sobre o ensino de frações, em particular, sobre a multiplicação de frações?
- ✓ Existem mudanças entre os significados da multiplicação no conjunto dos Naturais ($\mathbb{N}$) e no conjunto dos Racionais ($\mathbb{Q}$)?
- ✓ Como se desenvolve o ensino da multiplicação de frações em produções didáticas para o sexto ano aprovadas no PNLD?
- ✓ Quais as principais dificuldades dos estudantes relacionadas à multiplicação de frações?
- ✓ Quão relevante é abordar todos os casos de multiplicação de frações (por exemplo, $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$) em um 6º ano?

Para responder o problema de pesquisa, estabelecemos a divisão deste trabalho em nove capítulos.

No presente capítulo (Introdução), apresentamos a justificativa, a motivação, o tema, a questão norteadora e o objetivo desta pesquisa.

O Capítulo 1 é destinado ao detalhamento de como se desenvolveu esta pesquisa, pontuando as ações propostas e suas etapas, delineando os sujeitos envolvidos e o ambiente de investigação.

No Capítulo 2, apresentamos os aportes teóricos que norteiam nossa pesquisa, a saber, a Teoria Dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud e a Teoria de Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval.

No Capítulo 3, refletimos sobre as mudanças conceituais relativas à operação de multiplicação ao ampliarmos o universo numérico dos números naturais para o dos números racionais.

O Capítulo 4 é destinado a realizar uma revisão bibliográfica sobre estudos correlatos e as dificuldades no ensino e aprendizagem de frações, em particular, da multiplicação de frações.

No Capítulo 5, buscamos destacar as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais e da Base Nacional Comum Curricular (documentos oficiais) relativas ao ensino de frações, dando destaque à operação de multiplicação de frações.

No Capítulo 6, apresentamos comentários decorrentes de uma leitura crítica de livros didáticos de sexto e sétimo ano aprovados no Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2017, focada em como se desenvolve o ensino da multiplicação de frações.

O Capítulo 7 é destinado à análise dos resultados obtidos com a implementação da sequência de atividades detalhada no Apêndice.

E, por fim, traçamos as considerações finais sobre a pesquisa desenvolvida, realizando reflexões sobre a prática, com intuito de responder a questão norteadora desta pesquisa.

1 SOBRE A CONSTRUÇÃO DESTA PESQUISA

Com o objetivo de responder a questão de pesquisa

> “Como uma proposta de sequência de atividades para o 6º ano do Ensino Fundamental que foca na compreensão do conceito de multiplicação de frações pode auxiliar para o aprendizado desta operação e na capacidade de aplicá-la?”,

foi escolhida uma abordagem qualitativa para a prática investigativa que, por sua vez, foi analisada de forma descritiva.

Para ajudar nossa reflexão sobre o processo de ensino de multiplicação de frações, tentamos realizar uma triangulação dos seguintes dados: as orientações constantes nos documentos norteadores do currículo da Educação Básica PCN e BNCC, uma leitura crítica de livros aprovados no PNLD - incluindo o livro que é adotado em toda a rede municipal de ensino de Parobé/RS - focando na abordagem apresentada e na fundamentação teórica que inclui o campo multiplicativo de Vergnaud e a representação semiótica de Duval.

Iniciamos com o estudo da Teoria dos Campos Conceituais e da Teoria de Representação Semiótica, a fim de refletir sobre como se desenvolve a construção de um conceito, o processo cognitivo envolvido e quais representações poderiam ser exploradas, a fim de buscar aportes teóricos para a análise da prática.

Na sequência, realizamos a leitura dos PCN e da BNCC focando no ensino de frações, mais especificamente na multiplicação de frações, dos anos iniciais até o sexto ano, eventualmente 7º ano do Ensino Fundamental, com a finalidade de verificar como os documentos orientam o ensino de multiplicação de frações.

A seguir, refletimos sobre as mudanças conceituais relativas à operação de multiplicação, por ocasião da ampliação do universo numérico dos naturais para o universo das frações, procurando focar nas mudanças e nos invariantes na passagem de um universo numérico para o outro.

Só então realizamos uma leitura crítica dos livros didáticos, procurando observar se eles atendem às orientações propostas pelos PCN e identificar possíveis lacunas ou atividades que poderiam ser aproveitadas no nosso planejamento da sequência de atividades.

Assim, com o objetivo de oportunizar aos alunos a compreensão do conceito de multiplicação de frações de forma a explorar o significado e a aplicação deste conceito, foram elaboradas 31 atividades, divididas em 4 seções:

1. Multiplicação de um número natural por uma fração;
2. Preparando a Multiplicação de uma fração própria por um número natural;
3. Motivando e introduzindo a Multiplicação de uma fração própria por uma fração qualquer;
4. Multiplicação de uma fração imprópria por uma fração qualquer.

A implementação ocorreu em uma turma de 6º ano de uma escola municipal de Parobé/RS. A prática teve duração de treze encontros, totalizando 20 horas em sala de aula.

Para o desenvolvimento da maioria das atividades, a turma de 24 alunos foi organizada em grupos, de forma aleatória e sem ser exigido que em todas as aulas fossem formados os mesmos grupos, uma vez que cada aluno deveria responder cada questão proposta, independentemente do grupo a que estivesse fazendo parte.

Todas as atividades foram entregues de forma impressa, e a resolução de cada atividade sempre foi realizada por todos os alunos presentes. Depois que todos entregavam a ficha com a atividade realizada, era entregue uma nova atividade. Somente após uma atividade ser digitalizada pela professora pesquisadora e devolvida aos alunos, geralmente na aula seguinte, acontecia a correção, em um momento de socialização e validação das resoluções. Entre os encontros com os estudantes, a produção dos alunos foi digitalizada pela professora pesquisadora.

A justificativa para esta escolha de encaminhamento da pesquisa foi a de minimizar a intervenção externa (do professor), que resumiu-se ao apoio, em caso de alguma dúvida, durante a resolução individual de cada estudante. Mesmo em tais casos, a professora pesquisadora procurou não exercer grande influência nas considerações dos estudantes. Manteve-se, dessa forma, o registro do aprendizado em uma primeira etapa da abordagem das atividades, anterior à etapa de aprendizagem proveniente da socialização, e o acompanhamento da evolução da construção do conhecimento da turma, em termos de análise do processo de aprendizagem de multiplicação de frações apoiou-se nesta primeira etapa, uma vez que consideramos que as atividades propostas ora procuram retomar questões das atividades anteriores, ora procuram dar um fechamento a elas. Além disso, consideramos que muitas das resoluções das atividades realizadas pelos alunos estratificam informações concisas acerca dos esquemas de pensamento desenvolvidos pelo aluno, revelando-se fontes de dados com potencialidade de diagnóstico que auxiliarão, assim, a responder o problema de pesquisa.

Na análise das resoluções das atividades propostas, procurou-se identificar, por exemplo, as diferentes representações utilizadas (como ressalta Duval) e os esquemas de pensamento que foram utilizados pelos alunos no desenvolvimento das questões (como ressalta Vergnaud). As resoluções e respostas dos estudantes foram categorizadas e registradas em quadros nos quais foi registrada também a frequência de cada resolução .

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 A Teoria Dos Campos Conceituais de Vergnaud

Psicólogo de formação, Vergnaud foi orientado por Piaget e estudou o desenvolvimento da criança, como elas pensam, como elas realizam operações. Criou uma teoria que busca auxiliar no entendimento de como as crianças constroem seu conhecimento matemático.

Para Piaget e Vergnaud, o conhecimento é adaptação, ou seja, somos submetidos a novas situações e é, ao nos adaptarmos a elas por uma evolução da organização de nossas atividades, que se produz o conhecimento, e este processo pode ser longo. (VERGNAUD, 2017a).

Segundo Vergnaud (1990, p. 1): “Um conceito não pode ser reduzido a sua definição, pelo menos, se estivermos interessados em seu aprendizado e ensino. Através das situações e problemas que se pretende resolver é que um conceito adquire sentido para a criança.”

A Teoria dos Campos Conceituais surgiu a partir do estudo sobre os processos cognitivos que envolvem a conceituação das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas, das relações espaço-número e da álgebra. Contudo, Vergnaud (1990) destaca que a teoria não se destina apenas ao estudo da Matemática. A principal finalidade dessa teoria é "fornecer uma estrutura que permita compreender as afiliações e as rupturas no conhecimento em crianças e adolescentes” (VERGNAUD, 1990, p. 1).

Para Vergnaud (1990), as bases de nossas competências estão implícitas ou explícitas e, muitas vezes, as crianças não sabem descrever o que estão pondo em prática, por isso ele considera importante observá-las e tentar reconhecer/identificar seus raciocínios, chamando-os de conceitos-em-ação e teoremas-em-ação. Por exemplo, quando fazemos uso das quatro operações, em geral, vamos muito além das estruturas dos números. De fato, existem muitos conhecimentos implícitos em uma simples operação, por exemplo, suas propriedades. E, segundo ele, o professor tende a considerar tudo muito simples o que, na maioria das vezes, diverge da realidade.

> O professor é um mediador essencial, evidentemente, mas seu papel não se limita a acompanhar a atividade dos alunos, tutelando-os: a presente contribuição tenta mostrar que, na profissionalização do professor, são essenciais as duas funções, a da escolha das situações a serem propostas aos alunos, e a da representação de sua estrutura conceitual por meio de formas simbólicas acessíveis. (VERGNAUD, 2011, p. 26).

Segundo Vergnaud (2017a), um conceito não se forma sozinho. Para que isso ocorra, são necessárias, por um lado, várias situações às quais a criança seja exposta e, por outro lado, a criança precisa mobilizar vários conceitos para poder processar uma situação. É desta forma que surge o Campo Conceitual: para processarmos um novo conceito, necessitamos de um conjunto de situações e de um conjunto de conceitos.

Assim, “a definição pragmática de um conceito, portanto, põe em jogo o conjunto de situações que constituem a referência e suas diferentes propriedades e o conjunto de esquemas mobilizados pelos sujeitos nessas situações.” (VERGNAUD, 1990, p. 7).

Segundo Vergnaud (1983, *apud* PINTO, 2011, p. 102):

> [...] a estrutura dos campos conceptuais surge com a necessidade de se compreender melhor a aquisição e o desenvolvimento do conhecimento e de capacidades especificas relativas às situacoes e aos problemas. [...] identifica duas vantagens cientificas: (i) a possibilidade de identificacao de semelhanças e diferenças entre situações, sua estrutura hierárquica, continuidades e descontinuidades que organizam o repertório dos esquemas que é desenvolvido progressivamente para dominar estas situacoes; e (ii) a possibilidade directa de descrever a representação implícita dos esquemas subjacentes do mundo em termos de invariantes operacionais (conceitos-em-accao e teoremas-em-accao).

Moreira (2002, p. 19) reitera que: “A teoria dos campos conceituais destaca que a aquisição de conhecimento é moldada pelas situações e problemas previamente dominados e que esse conhecimento tem, portanto, muitas características contextuais.”. Assim, os conhecimentos prévios que se tem em uma certa situação vão interferir no processo de aquisição de um novo conceito, pois, como já mencionado, em uma situação diversos conceitos são envolvidos e, para construir um novo conceito, é preciso que o sujeito seja confrontado com uma variedade de situações.

Ao enfrentarem situações novas, os alunos preparam-se para o futuro e, ao aprenderem a lidar com elas, já estarão se acostumando a resolver situações da vida pessoal e profissional que os desestabilizem (VERGNAUD, 2017a).

Para Vergnaud (2017a), há várias formas de organizar uma situação, e alguns conceitos são mais acessíveis que outros, e as crianças podem utilizar várias formas de resolver uma mesma questão. Porém, ressalta que é importante que o professor explore essa equivalência, tendo sempre o cuidado para não sobrecarregar, não exigir demais das crianças.

Para que haja um novo aprendizado, Vergnaud (2017a) enfatiza que é preciso desestabilizar as crianças, porém mantendo um certo conforto para que essa instabilidade não crie um bloqueio. Na escola, quando buscamos ensinar conceitos novos às crianças, é necessário refletir sobre as situações que lhes vamos apresentar, para que estas possam da desestabilização chegar à adaptação, descobrindo novos objetos, novas propriedades e, assim, proceder a uma mudança de esquema. Além disso, deve-se propor questões da realidade da criança.

Vergnaud (1993, p. 26) afirma que: “Os esquemas organizam o comportamento do sujeito para uma classe de situações dada, mas também organizam, ao mesmo tempo, sua ação e a atividade de representação simbólica, sobretudo linguística, que acompanha essa ação.” Para o autor, é através dos esquemas que os alunos põem em ação seus conhecimentos, por isso denomina-os "conceito-em-ação" e "teorema-em-ação" e a união destes como sendo os “invariantes operatórios”. (VERGNAUD, 1993, p. 4).

Para Vergnaud (1993, p. 8; 1990, p. 7), para a formação de um conceito são necessários três elementos: as situações (S), os invariantes operatórios (I), e as representações (Y) e define a tripla (S, I, Y) como:

> S conjunto das situações que dão sentido ao conceito (referência).
> I conjunto dos invariantes em que se baseia a operacionalidade dos esquemas (significado).
> Y conjunto das formas de linguagem (ou não) que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (significante).

Segundo Vergnaud (1983, 1988, 1996a, 1996b, *apud* PINTO, 2011, p. 114),

> o conceito de esquema é a chave do desenvolvimento cognitivo, porque relaciona o comportamento (ação, competência, regras) com as representações (invariantes operacionais, expectativa, significado, significante), conduzindo à tese de que não existe conhecimento processual sem algum conhecimento conceptual ou pré-conceptual (invariantes operacionais). Embora considere diferentes tipos de invariantes operacionais, enfatiza o conceito-em-accao (que permite ao sujeito escolher, seleccionar e categorizar informacao relevante de acordo com as situações e esquemas envolvidos) e o teorema-em-accao (que permite ao sujeito fazer inferências e cálculos com base na informação disponivel).

Nessa perspectiva, é fundamental que o professor compreenda o esquema, os invariantes operatórios e as representações que estão sendo utilizados pela criança em uma determinada situação e segundo o qual ela desenvolve o seu raciocínio (VERGNAUD, 2017a).

O desenvolvimento do conhecimento, na perspectiva da Teoria de Vergnaud, dá-se por meio de um Campo Conceitual, que pode ser de estrutura aditiva, multiplicativa, algébrica, entre outras. É no Campo Conceitual Multiplicativo que está sendo desenvolvida esta pesquisa.

2.1.1 O Campo Conceitual Multiplicativo

O Campo das Estruturas Aditivas diz respeito a situações que envolvem conceitos de adição e subtração, simultânea ou isoladamente. Já o Campo Conceitual Multiplicativo baseia-se num conjunto de situações que envolvem o conceito de multiplicação, de divisão, de proporcionalidade (simples e múltipla), de função (linear e n-linear), de razão escalar (direta e inversa), de quociente e produtos de grandezas variadas, de combinação linear e homotetia, de fração (interpretada, por nós aqui, como operador), de número racional, de múltiplo e divisor, entre outros. (VERGNAUD, 1993).

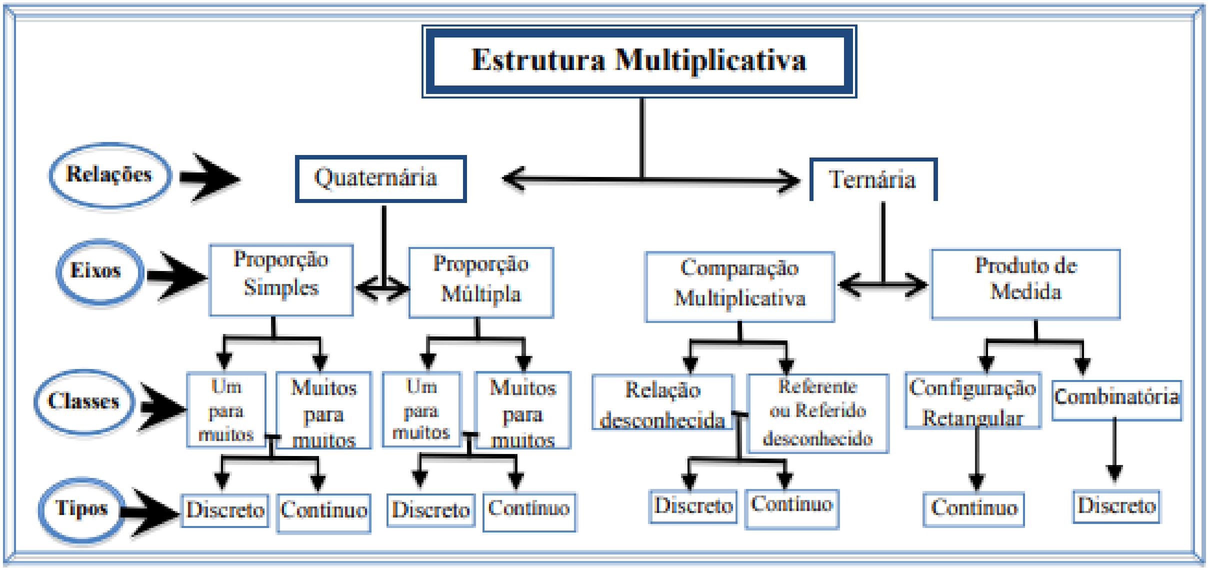
Existe uma diferença cognitiva entre esses dois campos conceituais: enquanto no Campo Aditivo as operações mobilizadas envolvem apenas grandezas de mesma espécie (soma-se ou subtrai-se abacates, por exemplo) e com o mesmo papel (por isso ambas chamadas de parcelas), no Campo Multiplicativo os termos envolvidos nas operações têm papéis diferentes (por isso recebem nomes diferentes em um primeiro momento: multiplicando e multiplicador), podendo representar ou não grandezas de espécies diferentes.

"Na adição, não se verifica [...] diferença de papéis entre os termos. Ambas parcelas são quantidades associadas a grandezas de mesma espécie, que correspondem a partes que compõem um mesmo todo (resultado)." (RIPOLL, RANGEL, GIRALDO, 2015, p.101).

Lara (2012, p. 11) aponta que, no Campo Multiplicativo, o aluno deve adquirir a competência de "coordenar relações entre duas variáveis". Mencionamos aqui, como exemplo, as grandezas área e comprimento, que, quando combinadas por meio de uma multiplicação, geram ainda uma terceira grandeza, a saber, volume.

Segundo Vergnaud (2014, 2017b, 1990), o Campo Conceitual Multiplicativo é formado por um conjunto de situações que pode envolver a multiplicação, a divisão ou, ainda, as duas operações. O autor também considera que as relações de base do Campo Conceitual Multiplicativo que dão conta do raciocínio das crianças não são de cunho binário, por isso ele as classifica em ternárias e quaternárias.

Figura 1 – Diagrama do Campo Conceitual Multiplicativo



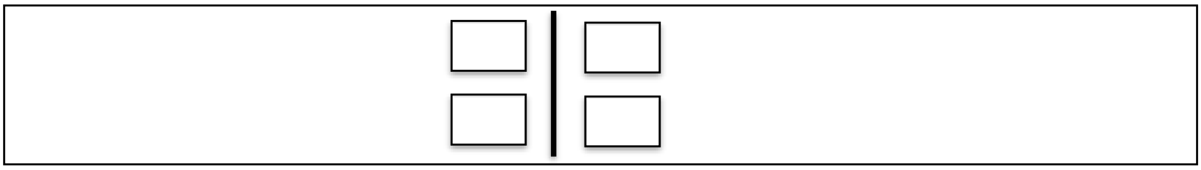
Fonte: Magina et al (2013, p. 4).

A partir do diagrama apresentado na Figura 1, podemos observar que a estrutura do Campo Multiplicativo envolve dois tipos de relações que dependem do número de quantidades envolvidas na relação: a Quaternária (4 quantidades), composta pelos eixos de proporção simples e proporção múltipla; e a Ternária (3 quantidades), composta pelos eixos de comparação multiplicativa e produto de medida.

No que segue, procuramos explicar cada um destes eixos.

Figura 2 – Relação quaternária proposta por Vergnaud

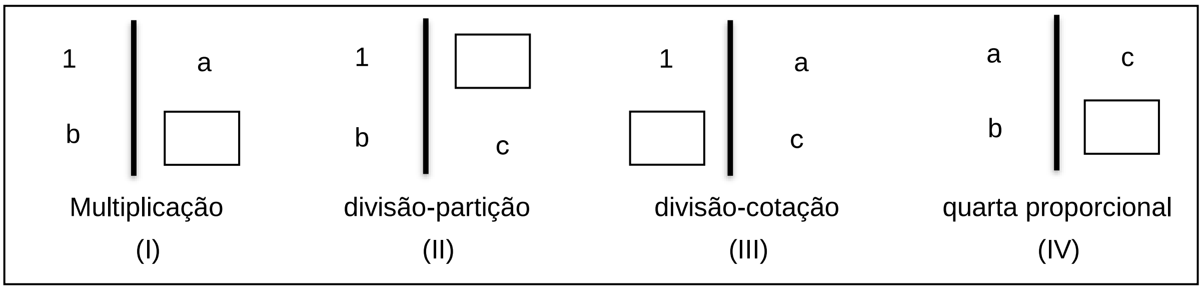
(é a medida)



Fonte: Vergnaud (1993, p. 15).

Na Figura 2 representamos uma relação de proporcionalidade simples entre duas grandezas, na qual estão relacionadas quatro medidas. De acordo com Vergnaud (2014), a situação descrita na Figura 2 é denominada Isomorfismo de Medida, e nela os pares de elementos de cada lado da representação referem-se a uma mesma unidade de medida e a uma mesma grandeza. Com base na relação quaternária de proporção simples, proposta por Vergnaud, podem ser gerados quatro tipos distintos de situações, dependendo da medida a ser determinada (Figura 3).

Figura 3 – Tipos de situações que emanam da relação quaternária de proporção simples



Fonte: Autora (2019), adaptado de Vergnaud (1993, p. 15).

De acordo com Vergnaud (2014), as situações denominadas Multiplicação, Divisão-Partição e Divisão-Cotação são mais simples, pois uma das medidas é igual a 1, ou seja, trabalha-se a partir da unidade (de contagem ou de medida). Já na situação denominada quarta proporcional, incluem-se situações nas quals nenhuma das três medidas conhecidas é igual a 1, constituindo “ilustrações mais complexas da relação quaternária”, por exigirem, em sua resolução, um passo a mais de raciocínio, cabendo ao leitor avaliar se isso é mais difícil ou não. (VERGNAUD, 2014, p. 246).

Com o intuito de esclarecer essa categorização, Vergnaud (2014, pp. 239-240) traz alguns exemplos de situações:

Exemplo 1: “Minha mãe quer comprar tecido a R$ 24,80 o metro para fazer um vestido e um paletó. Ela necessita de 3,50 metros de tecido. Quanto ela deverá gastar?”
Representação da situação:

Comprimento (em metros)	Preço (em reais)
1	24,80
3,50	□

Pela representação do Exemplo 1, pode-se observar que trata-se de uma situação de Multiplicação.

Exemplo 2: “Paguei R$ 12,00 por 3 garrafas de suco, todas de mesmo preço. Quanto custa cada garrafa?”
Representação da situação:

Garrafas	Preço (em reais)
1	□
3	12

Pela representação do Exemplo 2, pode-se observar que trata-se de uma situação de Divisão-Partição.

Exemplo 3: “Pedro tem R$ 12,00 e quer comprar pacotes de balas que custam R$ 4,00 o pacote. Quantos pacotes ele pode comprar?”
Representação da situação:

Pacotes	Preço (em reais)
1	4
□	12

Pela representação do Exemplo 3, pode-se observar que trata-se de uma situação de Divisão-Cotação.

Exemplo 4: “Uma corrida de automóveis tem 247.760 km de percurso. Um carro consome 6,785 litros de combustível a cada 100 quilômetros. Quanto ele consumirá durante essa corrida?”

Representação da situação:

Quilômetros	Litros
100	6,785
247 760	$\square$

Pela representação do Exemplo 4, pode-se observar que trata-se de uma situação de Quarta Proporcional.

Cabe ainda ressaltar que, em todas as situações contempladas na Figura 3, o raciocínio para determinar a medida desconhecida pode ser desenvolvido a partir do que o autor chama de uma análise vertical (relação escalar) ou de uma análise horizontal (relação entre variáveis). Em Vergnaud (2011), elucida-se a diferença entre esses dois raciocínios: na análise vertical, a constante de proporcionalidade é sem dimensão, isto é, é apenas um escalar, uma vez que relaciona (por meio de uma função f) valores de uma mesma grandeza:

$$f(nx) = nf(x) \quad \text{e} \quad f(x/n) = f(x)/n;$$

já na análise horizontal, os operadores relacionam (por meio de uma função f) duas diferentes grandezas, portanto, a constante de proporcionalidade não é adimensional:

$$f(x) = kx \text{ e } x = f(x)/k$$

Vergnaud (2011) ilustra as relações escalares com a Figura 3 e os exemplos mencionados:

- para encontrar f(b) na Figura 3 (I), multiplica-se por b o valor f(1); no Exemplo 1, f representa o preço de uma metragem de tecido; assim, f(b) = b f(1);

- para encontrar f(1) na Figura 3 (II), divide-se por b o valor f(b); no Exemplo 2, f representa o preço de uma quantidade de garrafas de suco; assim, f(1) = f(b)/b;

- para encontrar b tal que f(b)=c na Figura 3 (III), multiplica-se a unidade por c/a; no Exemplo 3, f representa o preço de uma quantidade de pacotes de bala; assim, b = f(b)/f(1);

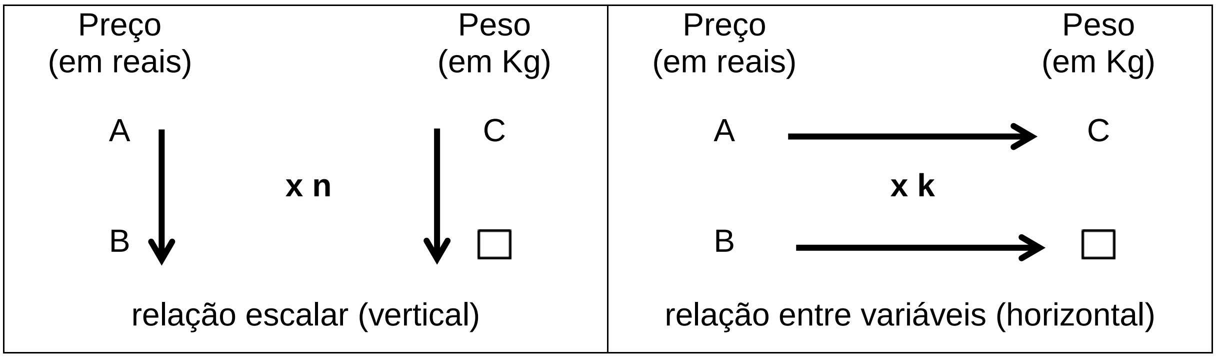
- para encontrar f(b) na Figura 3 (IV), multiplica-se por b/a o valor f(a); no Exemplo 4, f representa o consumo de combustível referente a uma dada quilometragem; assim, f(b) = $\frac{b}{a}$ f(a);

Vergnaud (2011) ressalta ainda que, entre um peso e um preço a pagar (na multiplicação, para passar horizontalmente de b kg ao preço correspondente (Figura

3 (I)), ou da despesa c à quantidade de frutas correspondente na divisão-cotação (Figura 3 (III)) é necessário utilizar o coeficiente de proporcionalidade. “As duas formas de raciocínio se parecem; entretanto, elas são conceitualmente muito diferentes: k é um quociente de dimensões (reais por quilo), enquanto n é uma relação escalar sem dimensão.” (VERGNAUD, 2011, p. 23).

Com a Figura 4, que ilustra essas duas relações. Vergnaud (2011) ressalta que, apesar de semelhantes, elas envolvem conceitos distintos, pois, enquanto k expressa a relação entre duas grandezas (reais por quilo, por exemplo), n é uma grandeza escalar, isto é, adimensional (o triplo de, por exemplo).

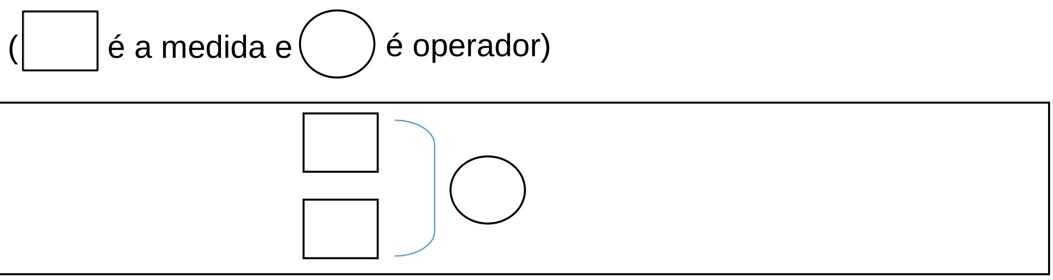
Figura 4 – Relação escalar (vertical) e relação entre variáveis (horizontal)



Fonte: Adaptado de Vergnaud (2014) pela autora.

Segundo Vergnaud (1990, 2014), diferentemente das relações quaternárias que envolvem 4 quantidades (ver Figura 2) a relação ternária (ver Figura 5) envolve três quantidades, em que uma é resultante do produto das outras duas e engloba os eixos Comparação Multiplicativa e Produto de Medida .

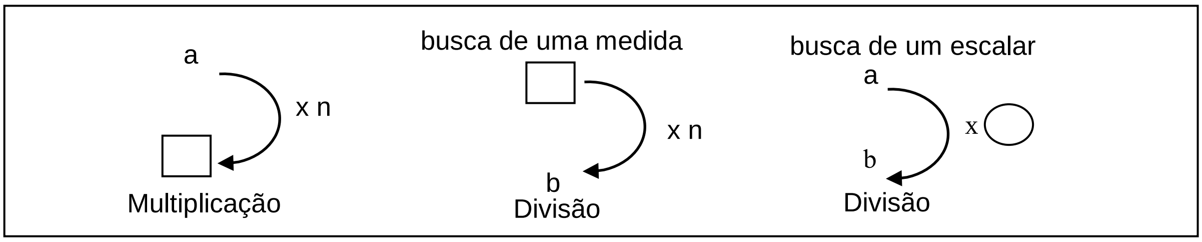
Figura 5 – Relação ternária de comparação proposta por Vergnaud



Fonte: Elaborado pela autora (2020, adaptado de Vergnaud, 2014, p. 262).

Segundo Magina (2011), as situações que fazem parte do eixo Comparação Multiplicativa envolvem a noção de comparação (por meio da multiplicação) entre duas quantidades de mesma natureza. Segundo a autora, os primeiros contatos com a comparação multiplicativa envolvem situações em que se pretende determinar o "o dobro de", "quantas vezes mais" (Figura 6). Para Vergnaud (2014), situações desse tipo envolvem três possíveis categorizações:

Figura 6 – Tipos de situações que emanam da relação ternária de comparação multiplicativa



Fonte: Elabora pela autora (2020), adaptado de Vergnaud (2014, p. 263).

Para esclarecer cada categoria, Vergnaud (2014, p. 263) traz alguns exemplos de situações:

<u>Exemplo 5</u>: "São necessários 2 metros de tecido para fazer uma saia e três vezes mais para fazer um conjunto. Quanto tecido é necessário para fazer um conjunto?"
Representação da situação:

Pela representação do Exemplo 5, pode-se observar que trata-se de uma situação de Multiplicação, na qual busca-se "o triplo de".

<u>Exemplo 6</u>: "São necessários três vezes mais tecido para fazer um conjunto do que uma saia. Sabendo-se que são necessários 6 metros de tecido para um conjunto, quanto de tecido é necessário para fazer uma saia?"
Representação da situação:

Pela representação do Exemplo 6, pode-se observar que ele trata de uma situação de busca de uma medida pela Divisão.

Exemplo 7: “São necessários 2 metros de tecido para fazer uma saia e 6 metros para fazer um conjunto. Quantas saias podem ser feitas com a quantidade de tecido necessária para fazer um conjunto?”

Representação da situação:

Saia	2	x ○
Conjunto	6	

Pela representação do Exemplo 7, pode-se observar que ele trata de uma situação da busca de um escalar pela Divisão.

Magina, Santos e Meline (2011, p. 4) enfatizam que:

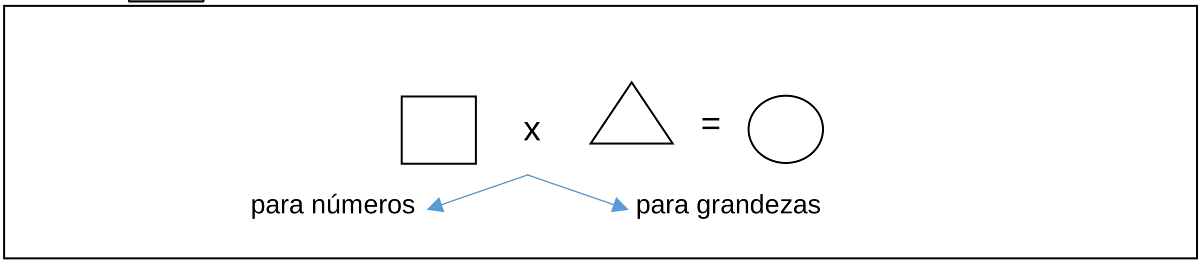
> Situações do campo conceitual multiplicativo envolvendo a idéia de comparação multiplicativa, [...] podem gerar dificuldades de compreensão até para estudantes mais experientes. Assim, é razoável inferir que esta dificuldade não reside na habilidade de se efetuar a operação de multiplicação ou de divisão, mas sim na complexidade de compreender o enunciado e traduzí-lo na operação matemática adequada para a resolução da situação.

Concordamos com os autores e acrescentamos a esta questão a dificuldade de o aluno reconhecer que tipo de comparação está sendo requerida aqui, porque, em Matemática, o termo “comparação” admite muitas interpretações:

> A comparação envolve a identificação de uma *relação* entre as grandezas ou as quantidades a serem comparadas. Essa relação pode ser estabelecida a partir de formas variadas. No ensino fundamental, desde as séries iniciais, é possível sensibilizar o aluno quanto a diferentes formas de comparação. No 6º e no 7º ano, etapas em que os alunos revisitam as operações básicas e iniciam o estudo de proporcionalidade, há a oportunidade de o professor de matemática explorar, a partir de problemas, diferentes situações envolvendo comparações e destacando o que caracteriza cada uma delas. Por exemplo, ao comparar a idade de duas pessoas, podemos simplesmente dizer que uma é mais velha (ou mais nova) do que a outra. Neste caso, a comparação se estabelece a partir da ordem. Mas, quanto mais velha? De forma mais precisa, é possível comparar as idades destacando a diferença entre elas, o que revela um dado numérico mais específico e também invariante sobre a situação. Claro que a ordem e a diferença não são as únicas formas de comparar duas quantidades ou grandezas. Ainda sobre a comparação das idades, se no momento do nascimento de seu filho um pai tiver 30 anos, a diferença entre suas idades será sempre de 30 anos. No entanto, apenas aos seus 30 anos, o filho terá a metade da idade do pai. Portanto, comparar as idades do pai e do filho por meio do produto ou do quociente pode, em muitos casos, não ser a melhor escolha. Já para comparar as quantidades de ingredientes em uma receita, a diferença talvez não seja a melhor escolha. Se para preparar um bolo são necessários 2 copos de leite e 3 de farinha, a diferença entre as quantidades desses ingredientes não se manterá se a receita for dobrada. Nesse caso, a comparação por razão se apresenta mais eficiente: para cada 2 copos de leite utilize 3 copos de farinha. (RIPOLL *et al*, 2015, p. 3). (GRIFO DOS AUTORES).

Segundo Vergnaud (2014, p. 264), o outro eixo que diz respeito à relação ternária é o produto de medidas (Figura 7).

Figura 7 – Relação ternária de produto de medida proposta por Vergnaud
(□ e △ são as medidas elementares e ○ é a medida produto

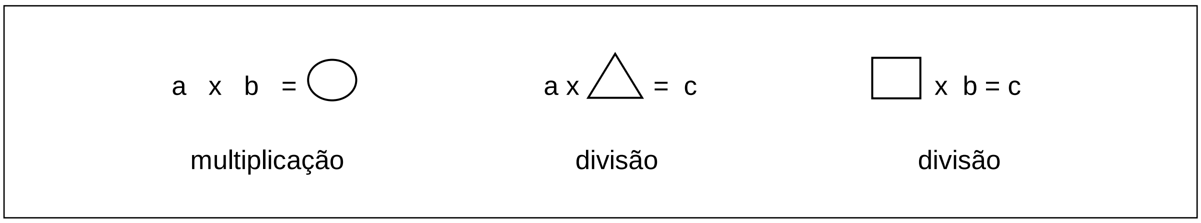


Fonte: Elaborado pela autora (2020, adaptado de Vergnaud, 2014).

Dele, extraem-se duas categorias de problemas (multiplicação e divisão) (Figura 8):

- “Multiplicação: encontrar a medida-produto, conhecendo-se as medidas elementares.”
- “Divisão: encontrar uma das medidas elementares, conhecendo-se a medida do produto e a outra medida elementar.”

Figura 8 – Tipos de situações que emanam da relação ternária de produto de medida



Fonte: Adaptado de Vergnaud (2014, p. 263) pela autora.

Com o intuito de esclarecer essa categorização, Vergnaud (2014, pp. 253-258) traz alguns exemplos de situações:

<u>Exemplo 8</u>: “3 rapazes e 4 moças querem dançar. Cada rapaz quer dançar com cada moça e cada moça, com cada rapaz. Quantos seriam os casais possíveis?”

Representação da situação:

3 rapazes x 4 moças = c casais

3 x 4 = c rapazes x moças = casais

Nesta situação, temos as medidas elementares nos conjuntos dos rapazes (a) e das moças (b). E, através do produto do número de elementos desses dois conjuntos, tem-se a quantidade de casais possíveis (c), que será obtida pela multiplicação

$$a \times b = c$$

<u>Exemplo 9</u>: “Uma sala retangular tem 4 m de comprimento e área de 12 m^2. Qual sua largura?”

Representação da situação:

4 metros x b metros = 12 metros quadrados

4 x b = 12 comprimento x largura = área

$$b = \frac{12}{4}$$

Nesta situação, temos uma medida elementar, o comprimento (a) e o produto das medidas que é a área (c), querendo-se encontrar a outra medida elementar que é a largura (b), e que será obtida pela divisão

$$b = \frac{c}{a}$$

A partir de tudo o que foi exposto, no que diz respeito especificamente ao ensino da multiplicação de frações, pensamos que o professor deve ter bastante cuidado na análise e na escolha das situações que irá propor, a fim de promover uma aprendizagem gradual e efetiva do Campo Conceitual Multiplicativo. Por exemplo, o professor deve dar atenção, no momento do seu planejamento, à exploração de situações que contemplem todos estes eixos. Também deve refletir sobre as atividades que serão apresentadas às crianças, quais as dificuldades que poderão surgir, quais habilidades elas precisam mobilizar para desenvolver a atividade e quais as inferências que o professor pode oportunizar, a fim de não coibir e nem interferir na criatividade e no desenvolvimento reflexivo da criança.

2.2 A Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval

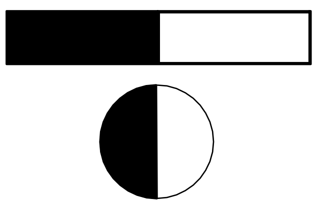
A teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval é uma ferramenta importante para planejar e investigar o ensino e a aprendizagem dos estudantes com relação ao estudo de multiplicação de frações, pois, para Duval (2009), a metodologia de representar um mesmo objeto em mais de um registro, possibilita a construção gradativa do conhecimento em matemática.

Henriques e Almouloud (2016, p. 467), com base na concepção de Duval, definem:

> Representação semiótica é uma representação de uma ideia ou um objeto do saber, construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. Sua significação é determinada, de um lado, pela sua *forma* no sistema *semiótico* e de outro lado, pela *referência* do objeto representado. (GRIFO DO AUTOR).

Para Duval (2009, p. 29), "[...] não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação". O autor denomina **objeto matemático** os diferentes objetos relacionados aos conteúdos da Matemática, que são inteiramente conceituais e denomina **representação** as diferentes formas de se visualizar ou de representar semioticamente este objeto. Portanto, diversos registros de representação são necessários para que se promova o ensino e o domínio desses registros pelo aluno que vem evidenciar sua aprendizagem.

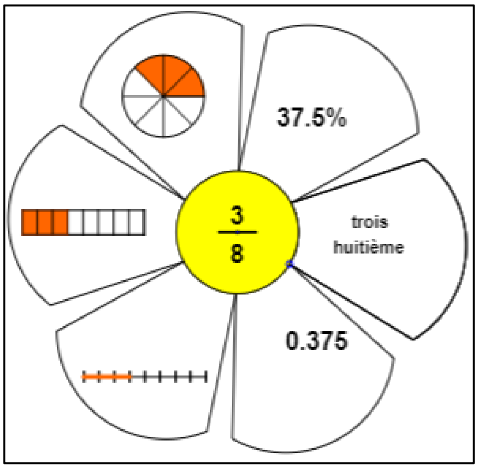
Quadro 1 – Exemplos de registro de representação da fração $\mathbf{\frac{1}{2}}$

Com palavras	Com representação pictórica	Com números
• Um meio; • Metade; • Uma parte de duas.		• $\frac{1}{2}$; • $\frac{2}{4}$; • 0,5.

Fonte: Elabora pela autora (2020).

Dentre os vários registros de representação, que podem ser utilizados para um mesmo objeto no ensino de frações, tem-se, no Quadro 1, um exemplo para representações de $\frac{1}{2}$ e, na Figura 9, para representações de $\frac{3}{8}$.

Figura 9 – Exemplos de registro de representação da fração $\frac{3}{8}$



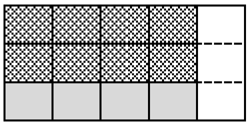
Fonte: Mentrard (2020, p. 1).

Para Duval (2009), é fundamental a utilização das representações semióticas no processo de estudo dos objetos matemáticos, pois todo pensamento matemático concretiza-se por meio de registros que possibilitam o estudo e, consequentemente, a construção do conhecimento matemático.

A propriedade fundamental de representações semióticas utilizada na Teoria do Registro de Representação Semiótica para o estudo de um objeto matemático, consiste em duas atividades: **tratamento** e **conversão**. O tratamento é o conjunto de operações efetuadas com o objeto dentro de um mesmo registro como, por exemplo, $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$, “quando a transformação produz outra representação no mesmo registro” que no exemplo seria o registro numérico. Já a conversão é a troca de registro, ou seja, o processo de mudar a forma de representar um determinado objeto, como exemplo $\frac{1}{2}$ e .

No Quadro 2, tem-se um exemplo envolvendo multiplicação de frações, em que pode ser observada a diferença entre tratamento e conversão. Pode-se, também, verificar que, geralmente, a conversão do registro de um objeto matemático em um outro registro do mesmo objeto está ligada à realização de tratamentos dentro do registro de partida, ou de chegada, a fim de obter a resolução do problema.

Quadro 2 – Exemplo de tratamento e conversão

Tratamento	$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$	Na resolução do objeto matemático multiplicação de frações, o tratamento aconteceu dentro do mesmo registro, a saber, fez-se uso do algoritmo para efetuar a multiplicação das frações.
Conversão	$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$  $\frac{8}{15}$	Na resolução do objeto matemático multiplicação de frações, foi utilizada inicialmente uma mudança de registro. O tratamento ocorreu no novo registro; com a conversão, temos o mesmo objeto matemático, mas agora o resultado está representado em um sistema semiótico distinto.

Fonte: Elabora pela autora (2019).

Para Duval (2009), a capacidade de compreender os conteúdos associados a um objeto matemático está diretamente ligada ao desenvolvimento de conversões entre registros de representação do objeto, de forma que isso também esteja relacionado com o tratamento do objeto matemático dentro de cada registro. De fato, ao realizar tratamento/conversão ou conversão/tratamento, o indivíduo evidencia dominar as diferentes representações semióticas de um mesmo objeto matemático. Essa transição entre diferentes representações possibilita a construção do conhecimento matemático.

Segundo Duval (2009), é a diversidade das representações de um objeto matemático que possibilita a aprendizagem do objeto estudado. A conexão estabelecida pelo indivíduo entre as diferentes representações contribui para a aprendizagem. E, ao decidir qual a representação que melhor condiz ao objeto de estudo e ao proceder uma ou mais conversões, o indivíduo comprova mais ainda seus conhecimentos. É essa aprendizagem que contribui para a construção gradativa do conhecimento matemático.

Na nossa opinião, a articulação entre Vergnaud e Duval enriquece o processo de aprendizagem da multiplicação de frações, pois Vergnaud busca dar sentido ao conceito, preocupando-se com a forma como se desenvolve um campo conceitual a partir da significação das situações, enquanto Duval foca nos diferentes registros de representação semiótica, utilizando tratamentos e conversões a fim de promover a aprendizagem mobilizando o domínio deste conceito. Vergnaud mesmo aponta para essa articulação ao afirmar: “Um campo conceitual pode ser definido como um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão.”. (VERGNAUD, 1986, p. 84).

Vergnaud (1996a, *apud* PINTO, 2011, pp. 100-101):

> enfatiza as representações simbólicas na ajuda da resolução de um problema, sobretudo quando os dados são numerosos e várias etapas necessárias para se chegar à solução. Porém, salienta que a função das representações simbólicas não se esgota na ajuda à resolucao de problemas complexos, dado que também desempenham um papel importante na identificação clara de objectos matemáticos, decisiva à conceitualização.

Nossa escolha por Vergnaud e Duval deveu-se a considerarmos que essa “união” se adequa bem ao objetivo deste trabalho, de refletir sobre como se desenvolve a construção da operação de multiplicação de frações pelos estudantes.

3 OS SIGNIFICADOS DA MULTIPLICAÇÃO NO CONJUNTO DOS NATURAIS ($\mathbb{N}$) E NO CONJUNTO DOS RACIONAIS ($\mathbb{Q}$)

Com o intuito de solucionar e representar certas situações, mudanças conceituais foram emergindo ao longo da história da Matemática. E não foi diferente com relação à ampliação dos universos numéricos e as operações neles definidas.

Para Vergnaud, o professor, ao ensinar, deve ter consciência dos significados conceituais dos conjuntos numéricos e de suas operações. O educador deve planejar suas aulas de forma a oportunizar ao aluno diversas situações que contemplem esses significados, tendo como objetivo promover a aprendizagem. (VERGNAUD, 2017a).

Segundo Schubring (2014, apud RIPOLL, RANGEL, GIRALDO, 2015, p. X [2]): "o professor de matemática deve conhecer não apenas os conceitos e teorias a ensinar, como também compreender a própria natureza desse conhecimento." Com certeza, este conhecimento contribui para o seu conhecimento de conteúdo para o ensino.

No presente capítulo, refletimos sobre as mudanças conceituais relativas à operação de multiplicação por ocasião da ampliação do universo numérico dos naturais para o universo das frações, apontando para as mudanças e para os invariantes na passagem de um universo numérico para o outro. Consideramos que tal reflexão não só contribui para a compreensão dos diferentes significados e das diferentes situações associados à multiplicação de frações, como é também fundamental para uma leitura crítica e para o planejamento de uma sequência de atividades sobre multiplicação de frações a ser proposta em um 6º ano.

3.1 A multiplicação de números naturais

Analisando o processo de ensino da multiplicação de números naturais, é possível perceber que o primeiro significado atribuído à multiplicação é o significado aditivo, contemplando situações de adição de parcelas iguais, quando então é apresentada como uma forma de simplificar a operação de adição.

[2] Na seção de Apresentação do livro as páginas foram numeradas com números romanos.

De acordo com Ripoll, Rangel e Giraldo (2015, p. 96):

> No ensino básico brasileiro, a ideia mais usada para apresentar a operação de multiplicação com números naturais é, certamente, a de **adição de parcelas iguais**. [...]. Essa ideia é tão fortemente vinculada à multiplicação, que muitas vezes é assumida como uma definição para a operação. (GRIFO DOS AUTORES).

É evidente que a adição de parcelas iguais é uma forma de enxergar a multiplicação no universo dos números naturais; contudo, não deve ser tomada como uma definição para esta operação porque ela não pode ser generalizada para o universo dos números negativos nem para o universo das frações. De fato, o que seria repetir a parcela 3 um número (-2) de vezes para dar significado a (-2) x 3? E o que seria repetir a parcela 3 um número $\frac{2}{5}$ de vezes para dar significado a $\frac{2}{5}$ x 3?

Ripoll, Rangel e Giraldo (2015, p. 96) expõem que "[...] **se é levada em conta a preparação para a generalização da multiplicação para outros conjuntos numéricos, é importante refletir cuidadosamente sobre os significados associados à operação**." (grifo dos autores).

Os PCN destacam as seguintes interpretações[3] da multiplicação de números naturais:

a) Adição de parcelas iguais: quando as parcelas iguais e o total de parcelas são conhecidos e tem-se que determinar o todo.

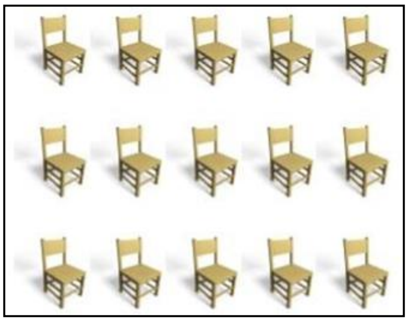
Ripoll, Rangel e Giraldo (2015, p. 96) exemplificam com a seguinte situação: "Maria tem 5 envelopes de figurinhas, com 4 figurinhas em cada um. Quantas figurinhas Maria tem no total?"; nela, são conhecidos as parcelas iguais (4) e o total de parcelas (5) e a solução pode ser encontrada com a adição 4 + 4 + 4 + 4 + 4 ou pela multiplicação 5 x 4.

b) Arranjo retangular: São associadas situações em que os objetos são quantificados a partir de uma disposição retangular, na qual tem-se o mesmo número de objetos em cada linha (ou, equivalentemente, em cada coluna).

[3] Este é o termo utilizado no documento e que nós estamos interpretando o termo como "situações".

Para esse tipo de situação, Ripoll, Rangel e Giraldo (2015, p. 98) dão como exemplo: “Em uma sala de aula há 3 filas com 5 cadeiras cada uma. Quantas carteiras há nessa sala de aula?” (Figura 10).

Figura 10 – Objetos organizados em disposição retangular



Fonte: Ripoll, Rangel e Giraldo (2016, p. 99).

c) Comparação (incluindo-se aqui ampliação e redução): “A interpretação da multiplicação como comparação está associada a situações em que as quantidades de objetos de dois conjuntos são comparadas a partir da identificação de um fator multiplicativo [...]” (RIPOLL, RANGEL, GIRALDO, 2015, p. 98). Ou seja, um objeto é ampliado ou reduzido em função de outro objeto, a partir do uso de um fator multiplicativo.

Ripoll, Rangel, Giraldo (2015, p. 98) trazem os seguintes exemplos:

“Joana tem 7 anos de idade e sua mãe é 6 vezes mais velha. Qual é a idade da mãe de Joana?”

“Uma cerca tem 6 metros de comprimento. Quero estender a cerca, fazendo-a ficar 3 vezes maior. Quanto medirá a nova cerca?”

Em ambos os exemplos, utiliza-se o tamanho de um objeto para determinar a extensão do outro a partir do uso de um fator multiplicativo.

Ripoll, Rangel e Giraldo (2015, p. 101) ressaltam que a representação de todas estas situações como arranjo retangular permite a reinterpretação de uma para outra:

> É verdade também que, no caso particular da multiplicação com naturais, todas as situações exemplificadas até aqui podem ser reinterpretadas como *adição de parcelas iguais* (tanto como *arranjo retangular*). Entretanto, a reflexão sobre o fato de que os termos de uma multiplicação apresentam papéis diferentes será importante para as interpretações das operações de multiplicação e divisão com números racionais e com números reais.

De fato, a contagem na Figura 10, por exemplo, pode ser interpretada tanto como adição de parcelas iguais como o triplo de 5 cadeiras ou, ainda, como o quíntuplo de três cadeiras.

Para Ripoll, Rangel e Giraldo (2015), as situações **contempladas pela multiplicação** podem ser agrupadas de acordo com dois significados: o significado aditivo e o significado exterior (Quadro 3). No significado aditivo, o resultado diz respeito a uma grandeza da mesma espécie que um dos fatores; no significado exterior, os fatores são quantidades que podem até ser de mesma espécie, porém o resultado é uma quantidade de outra espécie. Assim, a adição de parcelas iguais, operador (como “o dobro de”) e a comparação do tipo identificação de um fator multiplicativo são situações que só cabem no significado aditivo. Encaixam-se no significado exterior situações relativas a cálculo de áreas e volumes, cálculo de velocidade e o Princípio Multiplicativo em Análise Combinatória. O Quadro 3, organiza essas ideias.

Quadro 3 – Os significados associados às operações de multiplicação de números naturais

<table>
<tr><th>Significado</th><th>Características</th><th>Situações</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Aditivo</td><td rowspan="3">Os fatores são a quantidade parcial e o número de vezes.
O resultado é a quantidade total, que é da mesma espécie da quantidade parcial.</td><td>adição de parcelas iguais</td></tr>
<tr><td>Operador</td></tr>
<tr><td>comparação do tipo identificação de um fator multiplicativo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Exterior</td><td rowspan="2">Os fatores são quantidades que podem ou não ser de mesma espécie. O produto é uma quantidade de outra espécie.
Não cabe a associação dos termos a todo e parte.</td><td>princípio multiplicativo da análise combinatória</td></tr>
<tr><td>área, volume</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptado de Ripoll, Rangel e Giraldo (2015, p. 115).

3.2 A ampliação da multiplicação ao universo das frações

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) expõem a complexidade que a ampliação do universo numérico dos naturais para o dos números racionais (inicialmente das frações) requer dos estudantes, incluindo a multiplicação de frações (ver Capítulo 5).

Druck (2006, p. 9) aponta que, na multiplicação de frações,

> [...] dificuldades conceituais importantes apresentam-se de início, pois os significados que os alunos já trazem, associados a tais operações, não mais fazem sentido no contexto das frações. Seria absurdo perguntar, por exemplo, qual é o valor da soma de $\frac{7}{9}$ consigo próprio $\frac{2}{3}$ de vezes. Não existe coleção com quantidade fracionária (fração própria) de elementos entre os quais seja viável estabelecer combinações.

E a autora complementa que "[...] o produto como soma de parcelas iguais ou como número de combinações entre elementos de dois conjuntos perde tipicamente o sentido no campo das frações", ou seja, na multiplicação de frações nos casos em que ambos os termos são frações ($\frac{7}{9}$ x $\frac{2}{5}$) e quando o primeiro fator é um número fracionário ($\frac{1}{2}$ x 2). (DRUCK, 2006, p. 9).

Portanto, deve-se dar sentido às operações de multiplicação (e divisão) de frações, antes de focar-se no algoritmo: quais dos significados e situações apontados no Quadro 2 permitem ampliação ao universo das frações? São gerados novos significados ou situações neste universo?

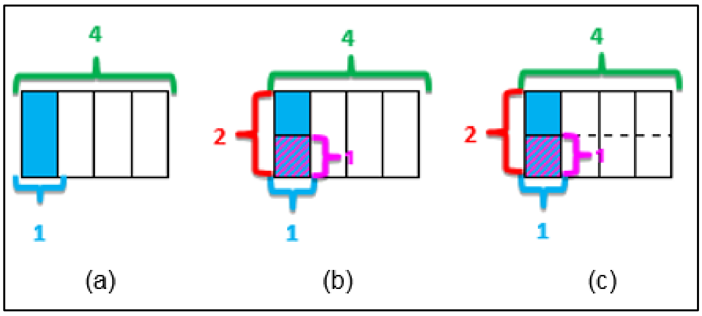
Tanto o significado aditivo como o significado exterior da multiplicação de naturais permite uma ampliação para o universo das frações. No entanto, no que diz respeito às situações, cabe observar que:

i) A adição de parcelas iguais só faz sentido no universo das frações quando o primeiro fator é um número natural.
ii) O princípio multiplicativo da análise combinatória diz respeito à contagem, portanto, só faz sentido no universo dos números naturais.

No que diz respeito a novos significados para a multiplicação no universo das frações, ressaltamos que não são criados novos significados, se encararmos "fração de" como uma ampliação da ideia de "o dobro de". Por exemplo, assim como 2 × 5 significa o dobro de 5, ou seja, 5 + 5, o produto $2 \times \frac{1}{5}$ significa o dobro de $\frac{1}{5}$, ou seja $\frac{1}{5}$ + $\frac{1}{5}$, enquanto que $\frac{1}{5} \times 2$ (ou $\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}$ ou, mais geralmente, "fração x") significa a quinta parte de 2 (ou a quinta parte de $\frac{2}{3}$). Este caso "fração de" requer que os estudantes construam uma estratégia para determinar fração de uma grandeza discreta e fração de uma grandeza contínua. Esta etapa de exploração do significado de "fração de" oportuniza também o reconhecimento de que a unidade também pode ser uma fração.

A Figura 11 ilustra a representação pictórica para determinar $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ de uma grandeza contínua: (a) marca-se $\frac{1}{4}$ da unidade, pintando-a de azul; (b) concentrando-se na parte pintada de azul, ou seja, considerando $\frac{1}{4}$ como uma nova unidade, determina-se a metade da mesma, pintando-a de rosa; (c) para determinar que fração da unidade original, afinal, é a parte pintada de rosa, precisa-se construir uma nova equipartição da unidade original, a partir da qual conclui-se que $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ da unidade original correspnde a $\frac{1}{8}$ da unidade original.

Figura 11 – Calculando $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ e concluindo: $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ $= \frac{1}{8}$



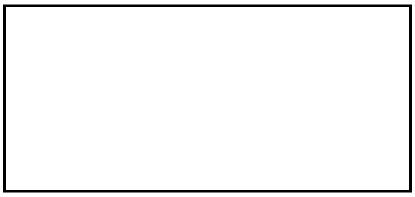
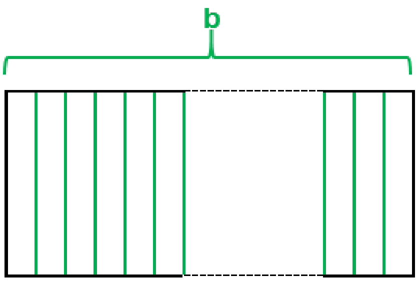
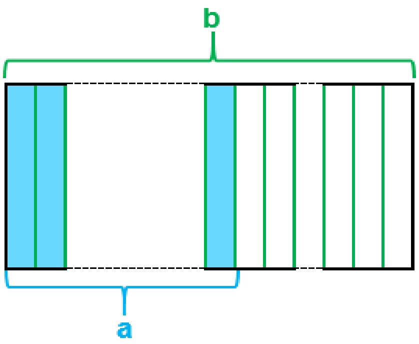
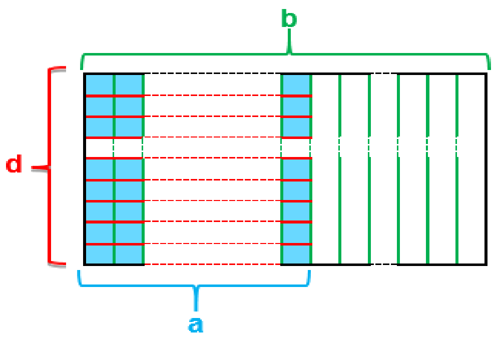
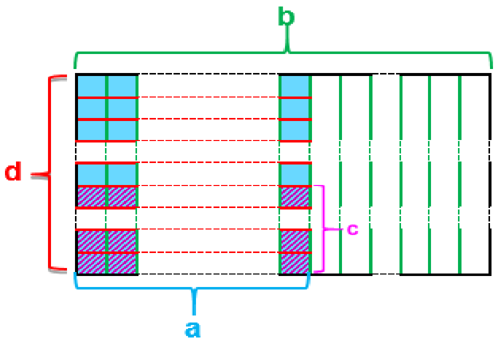
Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Defendemos que a definição de multiplicação de frações proposta como "fração de" não só pode ser motivada no conhecimento que o estudante traz do universo dos números naturais como pode apoiar-se em representação pictórica e oportunizar a construção do algoritmo usual.

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{4}$$

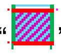
Os Quadros 4 e 5 trazem uma sugestão de como encaminhar a obtenção do algoritmo usual da multiplicação de frações para o caso de fração própria x fração própria, apontando que, para os estudantes, é recomendável começar a discussão com casos particulares, bem como fazer uso de cores, que podem substituir o uso de letras.

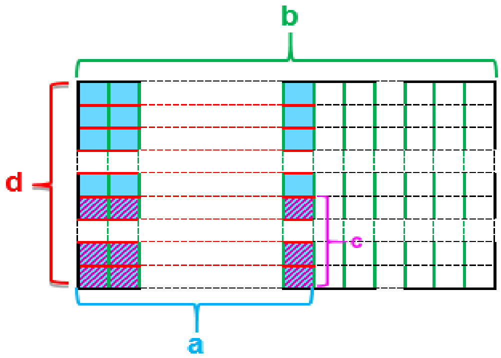
Quadro 4 – Deduzindo o algoritmo para fração própria x fração própria – parte1

	Para determinar a que fração da unidade corresponde o produto $\frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$ ou seja, $\frac{c}{d}$ de $\frac{a}{b}$, partimos da unidade.
	Equiparticionamos a unidade em **b** partes; cada parte representa então $\frac{1}{b}$ da unidade.
	Pintamos **a** partes iguais a $\frac{1}{b}$ da unidade, obtendo, assim (em azul), a representação da fração $\frac{a}{b}$ da unidade.
Para obter $\frac{c}{d}$ de $\frac{a}{b}$ da unidade:	
	i) dividimos a parte $\frac{a}{b}$ da unidade (pintada de azul) em **d** partes iguais. Cada linha horizontal aí marcada determina $\frac{1}{d}$ de $\frac{a}{b}$ da unidade;
	ii) Hachuramos **c** partes iguais a $\frac{1}{d}$ de $\frac{a}{b}$ da unidade, obtendo, assim, o que queríamos: determinar $\frac{c}{d}$ de $\frac{a}{b}$ da unidade.

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Quadro 5 – Deduzindo o algoritmo para fração própria x fração própria – parte2

Para determinarmos que fração da unidade representa a parte pintada de “”, precisamos de uma nova equipartição da unidade. Esta nova equipartição pode ser obtida com o prolongamento das linhas horizontais que equiparticionaram a parte pintada de azul.

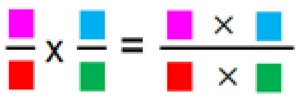


Com o significado da multiplicação de números naturais como arranjo retangular, percebe-se que a nova equipartição divide a unidade em **d** x **b** partes, das quais **c** x **a** correspondem à parte hachurada da unidade, ou seja, a $\frac{c}{d}$ de $\frac{a}{b}$ da unidade**.**

Conclui-se então:

$$\frac{c}{d} \times \frac{a}{b} = \frac{c \times a}{d \times b},$$

ou ainda, usando apenas as cores para representar as frações envolvidas:

 (*****)

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Cabe ressaltar que a escolha pela ampliação da operação de multiplicação para o conjunto das frações definindo, para $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ frações quaisquer,

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \text{ de } \frac{c}{d},$$

ou seja, definindo a multiplicação “fração x” como “fração de”, é coerente com a orientação dos PCN de que a multiplicação de frações seja pensada como parte de partes de um total, e aí é também destacada a necessidade da ruptura da ideia de que a multiplicação é a adição de parcelas iguais. (BRASIL, 1998) (ver Capítulo 5). Assim, é essencial que o estudante construa, anteriormente a esta definição, uma estratégia que lhe permita calcular, por exemplo, “$\frac{2}{3}$ de”. Na sequência de atividades que planejamos (Capítulo 7), este é o pré-requisito para a introdução da multiplicação de frações, aspecto que a diferencia dos livros didáticos analisados.

Encerramos este capítulo com o Quadro 6, resumindo os significados e situações da operação de multiplicação por ocasião da ampliação do universo numérico dos números naturais para o universo das frações, agradecendo à Professora Letícia Rangel pelos momentos de conversa que ajudaram na construção deste capítulo.

Quadro 6 – Os significados associados às operações de multiplicação no universo dos números naturais e no universo das frações

Significado	**Situações nos Números Naturais**	**Situações no universo das Frações**
Aditivo (os fatores são a quantidade parcial e o número de vezes. O resultado é a quantidade total, que é da mesma espécie da quantidade parcial)	adição de parcelas iguais	adição de parcelas iguais quando o primeiro fator é um número natural
	comparação (operador ou identificação de um fator multiplicativo, incluindo-se aqui ampliação e redução, por ex: o dobro de)	comparação (operador ou identificação de um fator multiplicativo, incluindo-se aqui ampliação e redução, por ex: três quartos de)
Exterior (os fatores são quantidades que podem ou não ser de mesma espécie. O produto é uma quantidade de outra espécie. Não cabe a associação dos termos a todo e parte)	princípio multiplicativo da análise combinatória	**---**
	área, volume, velocidade, etc	área, volume, velocidade, etc

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Destacamos que, na sequência de atividades por nós proposta, optamos por não incluir o significado exterior, que oportuniza trabalhar-se com situações de área, volume, pois a presente pesquisa tem por objetivo pesquisar os *primeiros* contatos do estudante com a multiplicação de frações. Para o significado exterior de área, por exemplo, não só seria necessário retomar conceitos da Geometria, como também relacionar o cálculo desta área com a definição de multiplicação de frações. Isso constitui, na nossa opinião, uma etapa posterior ao que consideramos “primeiros contatos” com a multiplicação de frações.

Já para os deais significados, aparecem, na sequência didática que apresentamos no Capítulo 7:

i) Situações de adição de parcelas iguais, como a Atividade 2, na qual o aluno tem que lidar com “o dobro de” no universo numérico ampliado das frações;
ii) Situações envolvendo operador, como as Atividades 14 e 17, nas quais o aluno tem que lidar com os operadores “$\frac{2}{3}$ de” e “metade de”, respectivamente;

iii) Situações envolvendo comparação na forma de identificação de um fator multiplicativo, como as Atividades 1 e 27c, compreendendo, na primeira, o significado e, na segunda, determinando tal fator.

4 ESTUDOS CORRELATOS E O ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES, EM PARTICULAR, DA MULTIPLICAÇÃO

Em busca de estudos correlatos no campo de investigação desta pesquisa, propomo-nos a apresentar, neste capítulo, pesquisas selecionadas a partir de um levantamento realizado no banco de dado da Capes (Catálogo de Teses e Dissertações) e no Repositório da Universidade de Lisboa, utilizando como palavras-chave: Frações; Ensino de Frações; Multiplicação de Frações; Campo Conceitual Multiplicativo.

Selecionamos então 04 (quatro) pesquisas (Quadro 7) com maior proximidade com o tema de nosso interesse e que consideramos terem contribuído para o aperfeiçoamento deste estudo, pois versam sobre ensino de multiplicação de frações, formulação de problemas no campo conceitual multiplicativo, diferentes significados de frações.

Quadro 7 – Estudos correlatos selecionados

Autor(a) / Orientador(a)	Tipo Ano	Título	Programa Instituição
Hélia Gonçalves Pinto João Pedro da Ponte	Tese 2011	O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais	Educação UL[4]
Renan Oliveira Altoé Rony Cláudio de Oliveira Freitas	Dissertação 2017	Formulação de problemas do campo conceitual multiplicativo no ensino fundamental: uma prática inserida na metodologia de resolução de problemas	Ensino de Ciências e Matemática UFES[5]
Marli Schmitt Zanella Rui Marcos de Oliveira de Barro	Dissertação 2013	Um estudo teórico sobre as estruturas aditivas e multiplicativas de números racionais em sua representação fracionária	Educação de Ciências e Matemática UEM[6]
Vera Lucia Merlini Sandra Maria Pinto Magina	Dissertação 2005	O conceito de frações em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª série do ensino fundamental	Educação Matemática PUC-SP[7]

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

[4] UNIVERSIDADE DE LISBOA – UL
[5] UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO – UFES
[6] UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ – UEM
[7] PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO – PUC-SP

Dentre estes trabalhos, damos destaque à tese de Doutorado da portuguesa Pinto (2011) na qual buscou-se desenvolver o sentido de multiplicação e de divisão de números racionais, a partir da análise das estratégias e dificuldades evidenciadas pelos alunos, na resolução de tarefas envolvendo multiplicação e divisão de números racionais não negativos em contextos significativos, partindo de uma unidade de ensino, com turmas de 6º ano, fundamentada nos princípios da Educação Matemática Realista e na Teoria dos Campos Conceituais.

Pinto (2011, p. 9) considera que "introduzir algoritmos antes da compreensão conceptual, ou sem relacionar o algoritmo com o conhecimento conceptual, promove a falta de conexão entre conceitos e procedimentos e entre fracções e realidade dos alunos." O ensino da multiplicação e da divisão de racionais não deve se deter apenas na transmissão de informações, mas deve privilegiar a compreensão dos processos, de forma significativa. O professor deve proporcionar a interação e o processo cooperativo entre os alunos, sendo seu papel apenas o de orientador.

A autora conclui que os alunos conseguiram dar sentido para as operações de multiplicação e divisão de racionais não negativos e, construindo uma trajetória de aprendizagem, demonstrando "familiaridade com diferentes significados e contextos das operações", "flexibilidade no uso das propriedades das operações", "razoabilidade na análise de processos e resultados" e "capacidade de usar símbolos e linguagem matemática formal significativos". (PINTO, 2011, p. vii).

Altoé (2017), em sua dissertação de mestrado, utilizou como temática a resolução de problemas. O autor se propôs a investigar as contribuições de atividades baseadas na formulação de problemas para o ensino de conceitos de multiplicação e divisão com alunos de 5º ano, objetivando estimular nos alunos o processo de construção da resolução dos problemas. Os estudos direcionados à multiplicação e à divisão tomaram como base a teoria de Vergnaud e Pires. O autor conclui que é necessário que o professor remodele suas práticas de ensino, tomando como base a resolução de problemas e, principalmente, que oportunize aos alunos criar e propor seus próprios problemas, a fim de terem a oportunidade de refletir, pois, muitas vezes, por não estarem acostumados com tal experiência, os alunos elaboram situações de difícil compreensão.

Zanella (2013) propõe, em sua dissertação, um estudo teórico sobre as estruturas aditiva e multiplicativa dos números racionais e sua representação fracionária, com base na Teoria dos Campos Conceituais, com o intuito de identificar quais elementos dessa teoria (Situações, Invariantes e Representações) podem ser identificados a partir da releitura de artigos que se voltaram para o ensino e a aprendizagem dos números racionais em sua representação fracionária, por meio de atividades que envolvem problemas com estruturas aditiva e multiplicativa.

Como resultado no campo da estrutura multiplicativa, a autora identificou que as situações que mais despontam são da classe de isomorfismo de medidas, e os principais invariantes detectados foram "o dividendo é maior do que o divisor" e "quociente é menor do que o dividendo" e a forma de representação foram a linguagem natural escrita e a pictórica. A autora também reitera a importância do desenvolvimento de pesquisas direcionadas para a análise da aprendizagem dos números racionais utilizando situações, dentro da perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.

Merlini (2005), em sua dissertação, analisou-se quais estratégias foram utilizadas por alunos de 5ª e 6ª série para problemas que abordam o conceito de fração, dentro de seus cinco diferentes significados (número, relação parte-todo, quociente, medida e operador multiplicativo), dentro da perspectiva teórica proposta por Nunes et al. (2003). Como resultado, traz que não houve uma regularidade no que diz respeito às estratégias utilizadas na resolução dos problemas e conclui que a abordagem que se faz, em sala de aula, para o ensino do conceito de frações, não garante que o aluno construa o conceito contemplando os diferentes significados de fração. Reitera, assim, as ideias de Vergnaud (1998) que "o conhecimento conceitual deve emergir dentro de uma variedade de situações e que cada situação, normalmente, não pode ser analisada com ajuda de apenas um conceito" (MERLINI, 2005, p. 203).

O levantamento realizado contribuiu para nossa reflexão sobre o tema da pesquisa que desenvolvemos. Ficou sustentada a tese de que o ensino de multiplicação de frações não deve se deter apenas na transmissão do algoritmo, mas deve privilegiar a compreensão dos processos, de forma a emergir a ampliação do conceito de multiplicação para o universo das frações. Assim, sentimos legitimada uma proposta alternativa que oportunize a compreensão e aprendizagem do conceito de multiplicação de frações (ver Capítulo 7).

5 O ENSINO DE FRAÇÕES NO ENSINO FUNDAMENTAL DE ACORDO COM DOCUMENTOS OFICIAIS

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) têm como caráter normativo recomendações para a Educação Básica na forma de orientações de como deveria ser estruturado o ensino; porém, não se constituem como documentos obrigatórios, deixando a escolha de segui-lo e adaptá-lo a cada ano escolar a critério dos Estados e Municípios. (BRASIL, 1998).

No artigo 210 da Constituição consta que: “Serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum em respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais.” (BRASIL, 1988, p. 68).

Na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) de 1996, nas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), de 2013 e no Plano Nacional de Educação (PNE) de 2014 deliberou-se a proposta de elaboração de um documento complementar aos PCN e, então, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (2018)[8] foi desenvolvida com a finalidade de ser um documento normativo determinante. Este documento deve ser utilizado como referência nacional para elaboração dos currículos que nortearão o ensino brasileiro, tanto público, quanto privado, no que tange à Educação Infantil, ao Ensino Fundamental e ao Ensino Médio, trazendo assim a ideia de equidade, defendida na legislação vigente no Brasil.

Para fazer uma reflexão sobre o ensino e aprendizagem da multiplicação de frações com estudantes brasileiros do 6º ano, objetivando promover maior compreensão do conceito de multiplicação de frações, é indispensável analisar o que dizem os PCN e a BNCC quanto ao ensino de frações, mais especificamente à multiplicação de frações. Assim, começamos por fazer uma descrição do que os documentos regulatórios preveem para o ensino de frações e destacamos, em especial, a multiplicação de frações.

[8] Destacamos aqui que o documento da Base Nacional Comum Curricular não tem data de expedição. Então, foi utilizada como referência o ano que consta no link do arquivo disponível no site do Ministério da Educação, a constar, http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.

5.1 O ensino de frações no Ensino Fundamental de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais

Iniciamos fazendo a descrição das orientações que constam nos PCN e, para isso, concentramo-nos nos 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental; no que diz respeito ao 3º ciclo, focamos apenas no 6º ano, tendo em vista o objetivo do estudo proposto e o fato de a multiplicação de frações ser mencionada nesse ano escolar. Para entender os ciclos dentro da realidade atual (Ensino Fundamental composto de 9 anos), foi construído o Quadro 8.

Quadro 8 – Distribuição dos Ciclos em relação ao Ensino Fundamental de 9 anos

PCN		Ensino Fundamental de 9 anos
		1º ano
1º ciclo	1ª série	2º ano
	2ª série	3º ano
2º ciclo	3ª série	4º ano
	4ª série	5º ano
3º ciclo	5ª série	6º ano
	6ª série	7º ano
4º ciclo	7ª série	8º ano
	8ª série	9º ano

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Os PCN, que até o ano de 2017 serviam de única base para orientação curricular e sem caráter obrigatório, são dispostos em dois documentos, um norteando o Ensino Fundamental dos anos iniciais, no qual são contemplados o 1º e o 2º ciclos, e o outro referente aos anos finais do Ensino Fundamental, que abarcam o 3º e o 4º ciclos. Ambos os documentos trazem os conteúdos estruturados por blocos. No documento dos anos iniciais, estão previstos os blocos “Números e Operações”, “Espaço e Forma”, “Grandezas e Medidas” e “Tratamento da Informação”. O ensino de frações faz parte do bloco “Números e Operações”. É sugerido para esse bloco um encadeamento lógico de ampliação do universo numérico de acordo com o ciclo que se está trabalhando, ampliando o conceito de número a partir de situações-problema. (BRASIL, 1997).

A partir da orientação da ampliação do universo numérico, é possível constatar que, no 1º ciclo, é trabalhado apenas o universo dos números naturais. Contudo, uma primeira alusão a fração já é percebida na orientação sobre os conteúdos conceituais e procedimentais: “Observação de critérios que definem uma classificação de números (maior que, menor que, estar entre) e de regras usadas em seriações (mais 1, mais 2, dobro, **metade**)”. (BRASIL, 1997, p. 50, grifo nosso).

Nos objetivos propostos para o 2º ciclo nos PCN está sugerida a ampliação do universo numérico, a partir da resolução de problemas, com intuito de fazer o aluno perceber que os números naturais não são suficientes para solucionar uma situação proposta e, assim, sejam introduzidos os números racionais, expondo que o ensino deve favorecer que o aluno construa “o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social.” (BRASIL, 1997, p. 55). Deve ser oportunizada a compreensão de alguns significados dos racionais como: quociente, parte-todo, razão, a partir de situações-problema. (BRASIL, 1997, p. 57).

Com relação às operações com racionais, é sugerido que seja abordado o “cálculo de adição e subtração de números racionais na forma decimal, por meio de estratégias pessoais e pelo uso de técnicas operatórias convencionais”, bem como “Localização na reta numérica, de números racionais na forma decimal.” (BRASIL, 1997, p. 59).

No 3º ciclo, sugere-se ampliar o universo numérico dos estudantes com o ensino dos racionais, a partir de situações de aprendizagem expressas em diferentes contextos históricos e do cotidiano. Visa-se o “reconhecimento de que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações entre essas representações”, abordando a representação verbal e escrita. (BRASIL, 1998, p. 71).

Nesse ciclo, objetiva-se ainda a ampliação das operações, visando “resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e, a partir delas, ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, identificando a utilização dos números em diferentes contextos “matemáticos e não-matemáticos”. (BRASIL, 1998, p. 64). O que se pretende é verificar se, com a expansão do universo numérico, os significados das operações se mantêm, se é necessário criar nova significação ou se é necessário deixar algum de lado.

São mencionados no documento, como significados de fração: quociente, parte-todo, razão, com a introdução do significado de operador a partir da análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema.

Os PCN (1997; 1998) alertam que, com a ampliação dos números naturais para os números racionais, muitos obstáculos podem surgir. De fato, no novo universo numérico, muitos conceitos e propriedades precisam ser reestruturados, a saber:

- com relação à representação (fracionária) de um número, agora um número (racional) admite diferentes representações fracionárias (frações equivalentes);
- com relação à comparação (de frações), os estudantes, antes “[...] acostumados com a relação 3 > 2, terão que construir uma escrita que lhes parece contraditória, ou seja, $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$” (BRASIL, 1997, p. 87);
- com relação à multiplicação (de frações), os estudantes, antes acostumados a obter sempre um resultado maior ou igual a qualquer um dos fatores nos naturais, deverão perceber que isso não mais compõe uma regra nos racionais;
- o número de algarismos utilizados para representar um número racional não é mais uma garantia de comparação e identificação de padrões;
- no universo dos números racionais, não faz mais sentido a ideia de sucessor.

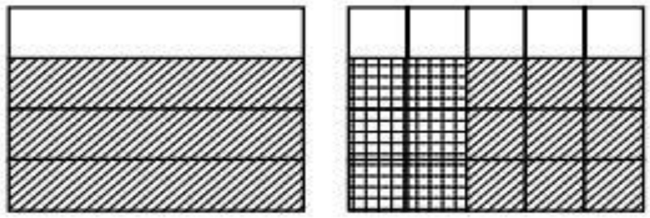
Com relação às operações, os PCN (1997) indicam que vários significados envolvidos no procedimento com números naturais são extensivos aos números racionais. Com relação à operação de multiplicação de números naturais, são mencionados os significados de adição de parcelas iguais, comparação, arranjo retangular e combinatória e que apenas as situações de multiplicação com ênfase nos procedimentos combinatórios não são aplicáveis para quaisquer números racionais.

No 3º ciclo, os PCN (1998) alertam que, embora esteja prevista nos anos anteriores a abordagem de alguns significados de frações, o que se verifica é que os alunos chegam sem dominá-los de fato.

Com relação à operação de multiplicação de frações, as orientações previstas nos PCN (1998) incluem o alerta de que essa deve ser pensada como partes de partes de um total, reiterando a necessidade da ruptura da ideia de que a multiplicação é uma soma sucessiva de parcelas iguais, complementando com o exemplo registrado na Figura 12. Sobre esta imagem, no entanto, temos críticias: o segundo retângulo não esclarece o porquê do processo. Sugerimos ao leitor comparar com a Figura 11.

Figura 12 – Sugestão de abordagem de multiplicação de frações

Assim, $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ pode ser interpretado como procurar $\frac{2}{5}$ dos $\frac{3}{4}$ de um todo.



$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$$

Fonte: Brasil (1998, p. 104).

5.2 O ensino de frações no Ensino Fundamental de acordo com a Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), de 2018, é constituída como um documento único, elaborado para nortear e dar as diretrizes do currículo do ensino fundamental, tendo o intuito de proporcionar equidade no ensino. No que tange aos conteúdos de matemática, salientamos inicialmente que, em relação aos PCN (1997; 1998), houve uma alteração de nomenclatura: os quatro blocos de conteúdos "Números e Operações", "Espaço e Forma", "Grandezas e Medidas" e "Tratamento da Informação", anteriormente considerados, foram substituídos por cinco Unidades Temáticas: "Números", "Álgebra", "Geometria", "Grandezas e Medidas" e "Probabilidade e Estatística". Além disso, dentro das Unidades Temáticas, estão delineados e distribuídos ao longo dos anos escolares, os Objetos de Conhecimento (conteúdos) e as respectivas Habilidades que se espera que cada aluno desenvolva.

Nesta seção, abordamos o que está definido na BNCC como aprendizagens essenciais sobre frações que todos os alunos devem desenvolver ao longo dos primeiros anos escolares, focando, em especial, na multiplicação de frações.

O estudo de frações na BNCC é contemplado dentro da Unidade Temática "Números", que tem por objetivo desenvolver o pensamento numérico, para conhecer maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades (BRASIL, 2018, p. 268). Frações aparecem, também, no

Objeto de Conhecimento “Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável” dentro da Unidade Temática “Probabilidade e estatística” do 6º ano.

No 1º ano do ensino fundamental, a Unidade Temática “Números” contempla somente os números naturais. A primeira alusão à ideia de fração encontra-se no 2º ano, sendo aí sugerido o desenvolvimento do Objeto de Conhecimento “Problemas envolvendo significados de dobro, metade, triplo e terça parte”, sobre o qual espera-se que o aluno resolva e elabore situações com auxílio de materiais concretos e de estratégias pessoais. Verifica-se aí as primeiras noções de relacionar a divisão por 2 com a metade, a divisão por 3 com a terça parte, mas não é esperada, para essa etapa, a representação fracionária. O entendimento de fração como parte de um todo também deve permear de forma implícita. (BRASIL, 2018, p. 282).

No 3º ano, observa-se a ampliação do objeto de conhecimento exposto no 2º ano, encontrando-se de forma explícita as primeiras noções de frações como parte de um todo no Objeto de Conhecimento “Significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte” (BRASIL, 2018, p. 286), que tem como habilidade correspondente “(EF03MA09) Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes”. (BRASIL, 2018, p. 287).

A partir do 4º ano, são introduzidas explicitamente as frações, aprofundando-se o estudo de frações unitárias e da representação decimal de um número racional. Dentre os Objetos de Conhecimento que contemplam o estudo de frações, temos “Números racionais: frações unitárias mais usuais ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$)” (BRASIL, 2018, p. 290), acompanhado da Habilidade “(EF04MA09) Reconhecer as frações unitárias mais usuais ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.” (BRASIL, 2018, p. 291).

Ainda no 4º ano, com relação à representação decimal, objetiva-se, com o Objeto de Conhecimento “Números racionais: representação decimal para escrever valores do sistema monetário brasileiro”, alcançar a habilidade de reconhecer a extensão das regras da numeração decimal, para a representação decimal e a relação entre os décimos e centésimos com o sistema monetário. (BRASIL, 2018, p. 292).

A partir do 5º ano, o estudo de frações intensifica-se, com os seguintes Objetos de Conhecimento e respectivas Habilidades a serem alcançadas pelos estudantes

(BRASIL, 2018, p. 294):

I) “Números racionais expressos na forma decimal e sua representação na reta numérica”, com a habilidade de ler, escrever e ordenar os números racionais na forma decimal, com compreensão das principais características do sistema de numeração decimal, utilizando, como recursos, a composição e decomposição utilizando-se da reta numérica;

II) “Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica” que é uma retomada do Objeto de Conhecimento já mencionado no 4º ano. A esse objeto, está associada a habilidade de “identificar e representar as frações”, não só as unitárias mas também as menores ou maiores que a unidade, associadas ao significado de divisão ou parte de um todo, com auxílio da reta numérica;

III) “Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência”, com a habilidade de identificar frações equivalentes, além de comparar e ordenar os números racionais positivos, relacionando-os a pontos na reta numérica;

IV) “Cálculo de porcentagens e representação fracionária” com a habilidade associada de trabalhar questões relevantes à educação financeira, associando a representação de porcentagem como parte de um inteiro utilizando as representações fracionárias, a saber, 10% à décima parte de um inteiro e assim sucessivamente para as porcentagens 25%, 50%, 75% e 100%;

V) “Problemas: adição e subtração de números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita”, para o qual se espera que o aluno resolva e elabore problemas de adição e subtração com números racionais com representação decimal finita utilizando de diversas estratégias;

VI) “Problemas: multiplicação e divisão de números racionais cuja representação decimal é finita por números naturais”, com a habilidade de resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

Cabe ressaltar que, no 5º ano, a representação fracionária não está sendo sugerida para as operações com números racionais, principalmente a multiplicação, objeto de estudo deste trabalho, apesar de constar, para o Ensino Fundamental –

Anos Iniciais, a orientação: “Na perspectiva de que os alunos aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de tarefas, como as que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal como na fracionária.” (BRASIL, 2018, p. 269).

No 6º ano, o estudo de frações tem como Objetos de Conhecimento (BRASIL, 2018, p. 302):

I) “Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal”;

II) “Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações” almejando-se que o aluno compreenda, compare e ordene frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes; reconheça que o número racional positivo tem duas representações, a fracionária e a decimal, sabendo relacionar e realizar conversão de uma para outra representação, bem como reconhecer tal valor na reta numérica; resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora, bem como problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

III) “Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais”, com a habilidade de resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.

No 7º ano, a BNCC traz como objeto de conhecimento os itens “Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador” e “Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações.” (BRASIL, 2018, p. 306).

Dentre as habilidades relacionadas ao Objeto de Conhecimento “Fração e seus significados”, encontramos:

> ● (EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos;
> ● (EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos;
> ● (EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador;
> ● (EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza. (BRASIL, 2018, p. 307).

Relacionadas ao Objeto de Conhecimento “Números racionais na representação fracionária e na decimal” tem-se as seguintes habilidades:

> ● (EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica;
> ● (EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias;
> ● (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais. (BRASIL, 2018, p. 307).

Com relação às Habilidades EF07MA05 e EF07MA06, temos a comentar que, na nossa opinião, melhor do que “algoritmos” e “procedimentos” seria utilizar os termos “estratégias” e “argumentos”, respectivamente, enfatisnado-se que os primeiros são consequência destes últimos.

5.3 Considerações finais da leitura dos documentos

Da leitura dos PCN, percebemos que fica explícita a importante orientação de concentrar-se o planejamento das práticas de ensino em situações que promovam a compreensão da necessidade dos números racionais para solucionar situações nas quais apenas os números naturais não são suficientes, bem como a ênfase no fato de o entendimento ficar prejudicado se o foco for apenas em algoritmos, como no caso da multiplicação de frações.

As orientações para o 2º ciclo nos PCN mencionam o trabalho com as operações de adição e de subtração apenas com racionais na representação decimal, não sendo considerada a representação fracionária. Constatou-se que o ensino de multiplicação de frações neste documento não está sendo explicitado nem no primeiro e nem no segundo ciclo do Ensino Fundamental.

Já na proposta para o 3º ciclo, são contempladas as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de frações, quando percebemos também uma preocupação com a metodologia de ensino, exemplificada na Figura 12 e com a importância em definir a multiplicação de frações como partes de parte de um total.

Conforme já explicitado e argumentado no Capítulo 3, a sugestão de abordagem da multiplicação na Figura 12 é a que defendemos como definição de multiplicação e a que adotamos, no entanto, de forma mais detalhada: ressaltamos que a representação apresentada na Figura 12 poderia contemplar também, por exemplo, a motivação para definir-se $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ como $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$.

No que diz respeito à BNCC, destacamos que é a partir do 3º ano que é introduzido o ensino de frações e, nesta etapa, percebe-se que é esperado que os alunos consigam representar intuitivamente a relação entre frações e a operação de divisão, desenvolvendo suas argumentações por meio de representações e desenhos.

No 4º ano, ao abordar o ensino dos números racionais utilizando a reta numérica, temos a impressão de que o objetivo na BNCC é que o aluno entenda que os números racionais positivos são uma ampliação do universo numérico dos naturais. Além disso, com o domínio da reta numérica, temos a certeza de que o estudante está enxergando fração como um número (um terço de pizza é pizza, mas um terço localizado na reta é a localização do número, da quantidade).

Com uma leitura dos documentos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC), pode-se constatar que, também na BNCC, a operação com racionais na forma fracionária não está sendo contemplada na sua totalidade até o 6º ano do ensino fundamental, faltando precisamente a multiplicação e divisão de frações (Quadro 9). Já no 7º ano fica evidenciado o ensino das operações com racionais na sua totalidade, ainda que não explicitamente mencionada a multiplicação na forma fracionária. Percebemos também que, na BNCC, o ensino das frações está relacionado com a habilidade de o aluno resolver problemas e de, ao ser-lhe dada voz, desenvolver a capacidade de pensar sobre o que aprendeu e de elaborar suas próprias situações.

Resumimos, no Quadro 9, a abordagem e os conteúdos relacionados ao ensino de frações propostos nos PCN e BNCC.

Quadro 9 – Resumo das orientações relativas ao ensino de frações nos PCN e BNCC

Período Escolar	PCN	Período Escolar	BNCC
Pré	Não aborda o ensino de frações	1º ANO	Não aborda o ensino de frações
1º Ciclo (1ª e 2ª série)	• Utilizar regras usadas em seriações (mais 1, mais 2, dobro, metade).	2º ANO	• Relacionar a divisão por 2, com a metade, divisão por 3, com a terça parte, mas, não é esperado para essa etapa a representação numérica fracionária. O entendimento de fração como parte de um todo também deve permear de forma implícita
		3º ANO	• Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes, trazendo de forma explícita as primeiras noções de frações como parte de um todo
2º Ciclo (3ª e 4ª série)	• Compreender alguns significados dos racionais e de suas representações (fracionária e decimal), como quociente, parte-todo, razão, a partir de situações-problemas; • Compreender alguns significados dos racionais e de suas representações (fracionária e decimal), como quociente, parte-todo, razão, a partir de situações-problemas; • Adicionar e subtrair números racionais na forma decimal, por meio de estratégias pessoais e pelo uso de técnicas operatórias convencionais.	4º ANO	• Reconhecer as frações unitárias mais usuais ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso; • Reconhecer a extensão das regras da numeração decimal, para a representação decimal e a relação entre os décimos e centésimos com o sistema monetário.
		5º ANO	• Ler, escrever e ordenar os números racionais na forma decimal, com compreensão das principais características do sistema de numeração decimal, utilizando, como recursos, a composição e decomposição utilizando-se da reta numérica; • Reconhecer, ler, escrever e representar na reta numérica os números racionais na forma fracionária, não só as unitárias mas também as menores ou maiores que a unidade, associadas ao significado de divisão ou parte de um todo; • Comparar e ordenar de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência, relacionando-os a pontos na reta numérica; • Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100%, respectivamente, à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros; • Resolver e elaborar problemas de adição, subtração de números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita; • Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão de números racionais cuja representação decimal é finita por números naturais.

3º Ciclo (5ª e 6ª série)	• Proporcionar a compreensão dos alunos quanto à localização dos racionais na reta numérica e o "reconhecimento de que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações entre essas representações", abordando a representação verbal e escrita; • Ampliar as operações, visando "resolver situações-problemas envolvendo números naturais, inteiros, racionais e, a partir delas, ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, identificando a utilização dos números em diferentes contextos "matemáticos e não-matemáticos"; • Ampliar dos significados das frações, como quociente, parte-todo, razão, proporcionando a ampliação ao introduzir o significado de operador, a partir da análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problemas.	6º ANO	• Ler, escrever e comparar números naturais e de números racionais representados na forma decimal; • Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes; • Reconhecer que o número racional positivo tem duas representações, a fracionária e a decimal, sabendo relacionar e realizar conversão de uma para outra representação, bem como reconhecer tal valor na reta numérica; • Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculador; • Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária; • Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.
		7º ANO	• Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos; • Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos; • Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas; • Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador • Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza; • Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica; • Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias; • Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

Fonte: Elaborado pela autora (2020)

A consulta aos documentos oficiais contribuiu para a leitura crítica dos livros didáticos (nesse caso levando em conta apenas os PCN) e para orientar o desenvolvimento da prática de ensino a que nos propomos relativa ao tema desta pesquisa.

6 O ENSINO DA MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES EM LIVROS DIDÁTICOS

Segundo os PCN (1998), os livros didáticos são a maior fonte de apoio do professor e, segundo Howson (2013), continuam sendo nos dias atuais e continuarão a ser. Por isso, a partir da problemática exposta na Introdução e das orientações dos PCN, surge a questão: estão os livros didáticos, aprovados no PNLD, atendendo às orientações dos PCN no que diz respeito à multiplicação de frações?

Outro aspecto que justifica o presente capítulo é que, tendo em vista que os livros didáticos são importantes instrumentos para nortear o processo de ensino e de aprendizagem, faz-se conveniente uma leitura crítica desses livros. Se o professor pretende utilizar livros didáticos como fonte principal para orientar o conteúdo a ser ministrado em sala de aula, então o texto dos mesmos deve ser acessível ao estudante e apresentar coerência entre seus conceitos, afirmações (resultados) e os exercícios neles propostos devem explorar todos os conceitos e propriedades trabalhadas, além de facilitar a aprendizagem e apontar para aplicações deste conteúdo.

Assim, além dos pressupostos teóricos de Vergnaud e Duval, a leitura crítica realizada focou nas seguintes questões relativas ao conteúdo multiplicação de frações:

1) O(s) autor(es) problematiza(m) a introdução dos conceitos com situações contextualizadas?
2) É contemplada a situação de adição de parcelas iguais (multiplicação de um número por fração)?
3) É contemplada alguma situação de arranjo retangular (multiplicação de um número por fração)?
4) É contemplada alguma situação de comparação (multiplicação de um número por fração)?
5) É apresentada a definição de multiplicação de frações (principalmente o caso de fração por fração)?
6) São exploradas situações em que a multiplicação por fração pode dar um resultado menor do que algum ou ambos os fatores?

7) São proporcionadas situações que envolvem a recuperação da unidade[9]?
8) São proporcionadas atividades em que o aluno crie suas próprias situações?
9) É contemplada uma discussão sobre a propriedade comutativa da multiplicação de frações?

6.1 As coleções consideradas nesta pesquisa

Para desenvolver esta leitura crítica, escolhemos quatro coleções de livros didáticos, procurando focar na Multiplicação de Frações constante dos volumes do 6º e do 7º anos.

Quanto à escolha das coleções, esclarecemos que foi prioritário para nós que essas quatro coleções estivessem dentre as 11 selecionadas no Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2017, considerando que estas estavam entre as coleções adotadas nas escolas públicas brasileiras no momento em que este capítulo foi desenvolvido. Além disso, uma dessas coleções deveria ser a coleção adotada em toda a rede municipal de ensino de Parobé/RS[10]. A escolha das demais coleções levou em consideração a facilidade de acesso da mestranda a estas obras. No Quadro 10, estão especificadas as coleções escolhidas, sendo que a primeira é a coleção adotada na rede municipal de ensino de Parobé/RS.

Quadro 10 – Relação de coleções analisadas

Livro	**Autor(es)**	**Editora Edição – Ano**
MATEMÁTICA - COMPREENSÃO E PRÁTICA	Ênio Silveira	MODERNA 3ª edição – 2015
MATEMÁTICA BIANCHINI	Edwaldo Bianchini	MODERNA 8ª edição – 2015
MATEMÁTICA DO COTIDIANO	Antonio José Lopes Bigode	SCIPIONE 1ª edição – 2015
PRATICANDO MATEMÁTICA (EDIÇÃO RENOVADA)	Álvaro Andrini Maria José Vasconcellos	EDITORA DO BRASIL 4ª edição – 2015

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

[9] No decorrer do presente capítulo utilizaremos a expressão “recuperação da unidade” para situações ou exercícios em que é dada a parte de uma quantidade (unidade) e é solicitado ao estudante que seja determinada a unidade.
[10] Rede na qual a pesquisadora atua como professora concursada, ministrando a disciplina de matemática para turmas do 6º e 7º ano.

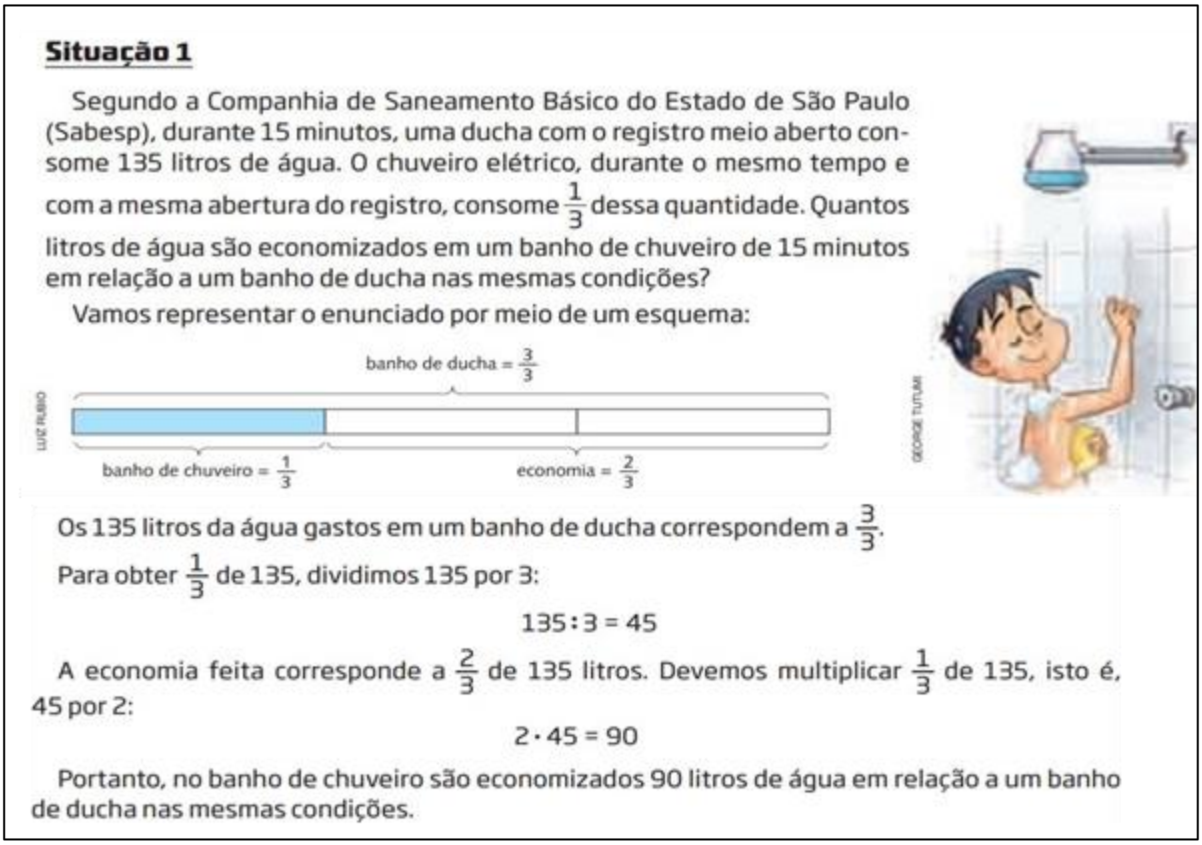
A) Coleção “MATEMÁTICA - COMPREENSÃO E PRÁTICA”, de Ênio Silveira

Esta é a coleção adotada pela rede municipal de ensino de Parobé/RS.

Numa visão geral, no livro do 6º ano, o capítulo intitulado “Frações” ocupa 30 páginas e o conteúdo de multiplicação de frações está subdividido em duas seções: Seção 8 - Fração de uma quantidade (p. 140-142) e Seção 10 – Multiplicação de frações (p. 145-147).

Com relação à Problematização do conteúdo, a seção 8 (Fração de uma quantidade) é introduzida a partir de três situações, todas utilizando apenas frações de um número natural, ainda que este número represente uma grandeza contínua.

Figura 13 – Situação 1 (Fração de uma quantidade)



Situação 1

Segundo a Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (Sabesp), durante 15 minutos, uma ducha com o registro meio aberto consome 135 litros de água. O chuveiro elétrico, durante o mesmo tempo e com a mesma abertura do registro, consome $\frac{1}{3}$ dessa quantidade. Quantos litros de água são economizados em um banho de chuveiro de 15 minutos em relação a um banho de ducha nas mesmas condições?

Vamos representar o enunciado por meio de um esquema:

Os 135 litros da água gastos em um banho de ducha correspondem a $\frac{3}{3}$.

Para obter $\frac{1}{3}$ de 135, dividimos 135 por 3:

$$135 : 3 = 45$$

A economia feita corresponde a $\frac{2}{3}$ de 135 litros. Devemos multiplicar $\frac{1}{3}$ de 135, isto é, 45 por 2:

$$2 \cdot 45 = 90$$

Portanto, no banho de chuveiro são economizados 90 litros de água em relação a um banho de ducha nas mesmas condições.

Fonte: Silveira (2015a, pp. 140-141).

Ao analisar as situações propostas, verificamos que, na Situação 1 (Figura 13), o autor representou a situação com o modelo pictórico de barras, fez uso na resolução da situação do modelo pictórico de barras, contudo, não deu muita ênfase nessa representação para resolver o problema.

Conforme defende Duval, vários recursos devem ser mobilizados com o intuito de facilitar a apropriação do conceito abordado. Na nossa opinião, na Situação 1, o autor poderia ter recorrido a mais de uma forma de representação para trabalhar o conceito de fração de uma quantidade, pois o modelo proposto inicialmente poderia ter sido utilizado para representar a divisão da quantidade de água gasta (135 litros), demonstrando que $\frac{1}{3}$ de 135 litros de água corresponde a 45 litros e que $\frac{2}{3}$ de 135 litros de água corresponde a 90 litros, o que complementaria, de forma mais abrangente, a resolução, como sugerimos na Figura 14:

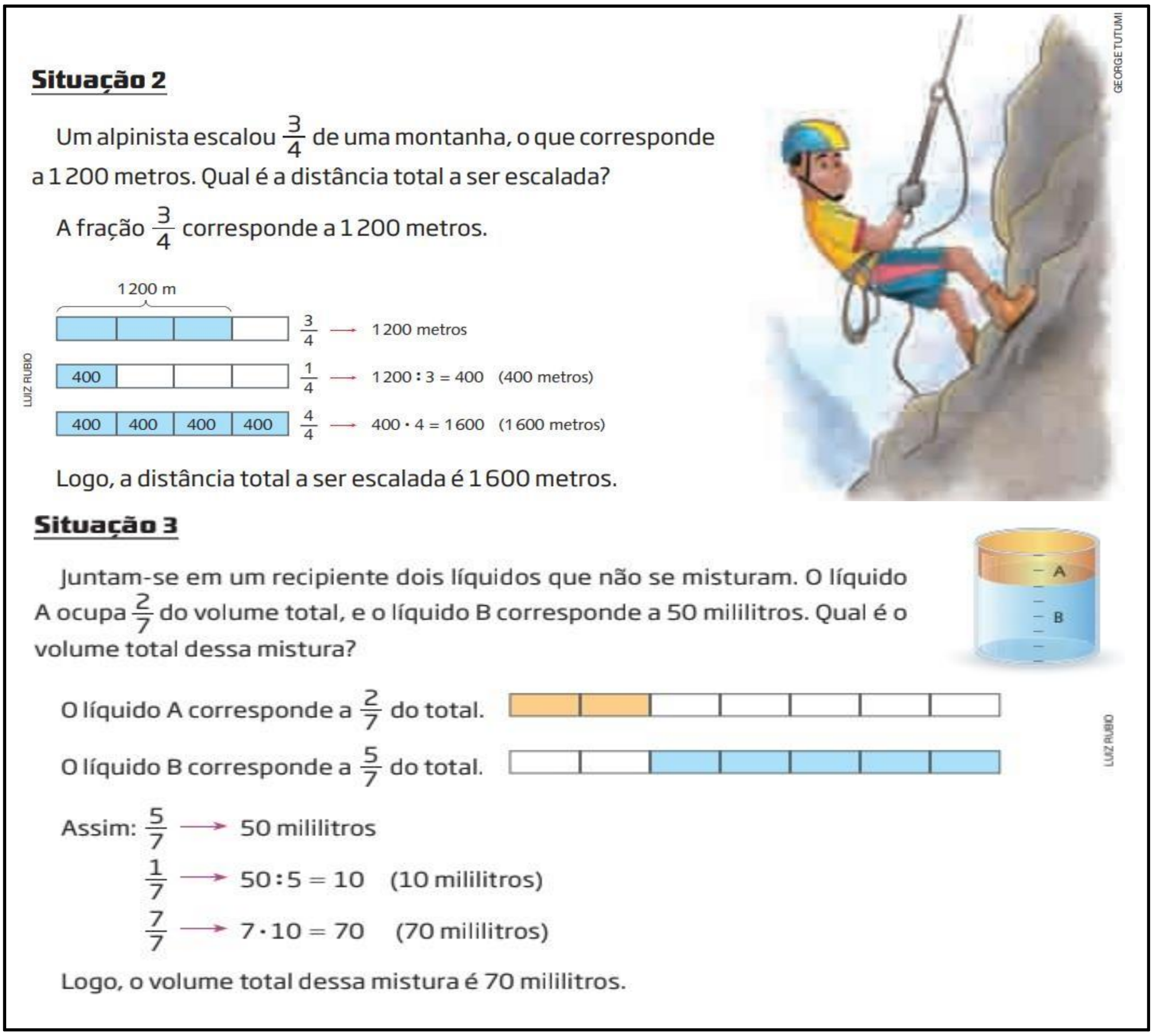
Figura 14 – Sugestão de adaptação da resolução da Situação 1

Representação Pictórica	Representação numérica	Representação Escrita
135 litros $\frac{3}{3}$ (ducha) 45 litros | 45 litros | 45 litros 45 litros | 45 litros | 45 litros $\frac{1}{3}$ (chuveiro) $\frac{2}{3}$ (economia)	135 : 3 = 45 $\frac{1}{3}$ de 135 = 45 $\frac{2}{3}$ de 135 = 2 x 45 = 90	• A unidade corresponde ao volume de água utilizada com a ducha, ou seja, 135 litros; • Como o banho de chuveiro elétrico, consome $\frac{1}{3}$ da quantidade gasta pela ducha, para descobrir o volume de água utilizada com o chuveiro, a unidade deve ser dividida em 3 partes iguais; • Desta forma, destacamos que $\frac{1}{3}$ de 135 litros, corresponde a 45 litros, e que a economia corresponde a $\frac{2}{3}$ de 135 litros, ou seja, 90 litros de água.

Fonte: Elaborado pela autora (2019).

As Situações 2 e 3 contemplam a recuperação da unidade (Figura 15). Destacamos que, na Situação 2, o autor novamente faz uso do modelo pictórico de barras, agora explorando a situação de forma mais detalhada, análogo ao que sugerimos na Figura 13 para a Situação 1. Contudo, consideramos que a passagem da Situação 1 para a Situação 2 foi realizada de uma forma um tanto abrupta, uma vez que foi abordado apenas um exemplo de cálculo de “fração de” e já passou-se para a situação mais complexa de recuperação da unidade, sem ter-se dado oportunidade ao aluno de desenvolver algum racíocinio. Já a resolução da Situação 3 é menos detalhada do que a da Situação 2, e volta a não apoiar-se no modelo de barras para resolver o problema proposto.

Figura 15 – Situação 2 e 3 (Recuperação da Unidade)



Situação 2

Um alpinista escalou $\frac{3}{4}$ de uma montanha, o que corresponde a 1 200 metros. Qual é a distância total a ser escalada?

A fração $\frac{3}{4}$ corresponde a 1 200 metros.

Logo, a distância total a ser escalada é 1 600 metros.

Situação 3

Juntam-se em um recipiente dois líquidos que não se misturam. O líquido A ocupa $\frac{2}{7}$ do volume total, e o líquido B corresponde a 50 mililitros. Qual é o volume total dessa mistura?

O líquido A corresponde a $\frac{2}{7}$ do total.

O líquido B corresponde a $\frac{5}{7}$ do total.

Assim: $\frac{5}{7}$ → 50 mililitros

$\frac{1}{7}$ → $50 : 5 = 10$ (10 mililitros)

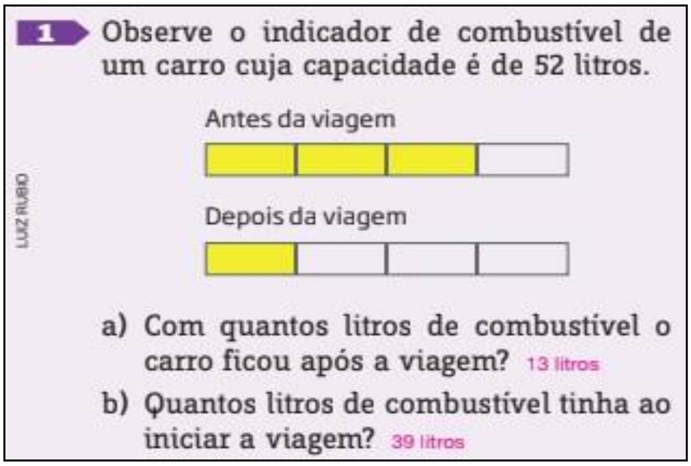
$\frac{7}{7}$ → $7 \cdot 10 = 70$ (70 mililitros)

Logo, o volume total dessa mistura é 70 mililitros.

Fonte: Silveira (2015a, p. 141).

Na sequência, ainda na seção intitulada “Fração de uma quantidade”, são propostas cinco atividades relativas ao conceito estudado e que consideramos, de um modo geral, coerentes com as situações introdutórias. Observou-se que, na Atividade 1 (Figura 16), perdeu-se a oportunidade de fazer uso de uma imagem real.

Figura 16 – Atividade 1, seção 8



1 Observe o indicador de combustível de um carro cuja capacidade é de 52 litros.

Antes da viagem

Depois da viagem

a) Com quantos litros de combustível o carro ficou após a viagem? 13 litros

b) Quantos litros de combustível tinha ao iniciar a viagem? 39 litros

Fonte: Silveira (2015a, p. 142).

De fato, uma imagem real como a da Figura 17 não apenas conectaria o conteúdo com uma situação vivenciada no dia a dia por muitos estudantes, como oportunizaria e exploração de uma unidade não usual, a saber, um arco de círculo.

Figura 17 – Sugestão a ser adaptada

Fonte: Acervo da autora (2019).

As Atividades 2 e 3 lidam com situações bem contextualizadas para os alunos, a saber, provas olímpicas e a capacidade de uma piscina (Figura 18). A Atividade 2 é um bom desafio que oportuniza várias operações. Na Atividade 3, propõe-se a recuperação da unidade, Já nas demais atividades (4 e 5) foram apresentadas situações pouco reais.

Figura 18 – Atividade 2 e 3, situação jogos olímpicos e capacidade de uma piscina

2 Estavam programadas para os Jogos Olímpicos do Rio de Janeiro em 2016, os primeiros da América do Sul, 306 provas com medalhas. Dessas provas, $\frac{1}{34}$ eram mistas e $\frac{4}{9}$, femininas.

a) Quantas provas eram mistas? 9

b) Quantas provas eram femininas? 136

c) Quantas provas eram masculinas? 161

Rio2016

LUIZ RUBIO

3 Para encher $\frac{2}{5}$ de uma piscina são necessários 60 000 litros de água. Qual é a capacidade dessa piscina? 150 000 litros

Fonte: Silveira (2015a, p. 142).

A seção intitulada “Multiplicação de frações” é subdividida em duas subseções: “Multiplicação de um número natural por uma fração” e “Multiplicação de duas frações”. A subseção “Multiplicação de um número natural por uma fração” é iniciada com uma problematização (Figura 19), culminando com uma situação de multiplicação de frações como a soma de parcelas iguais, em acordo, portanto, com os PCN (1997).

Figura 19 – Problematização da multiplicação de frações como soma de parcelas iguais

Uma indústria produz um mesmo número de peças a cada dia. Ela opera de segunda a sexta-feira, fabricando a cada dia $\frac{1}{5}$ das peças produzidas na semana. Em certa semana com feriados na quinta e na sexta-feira, que fração do total de peças da produção semanal essa indústria produziu?

GEORGE TUTUMI

Para responder a essa pergunta, podemos fazer:

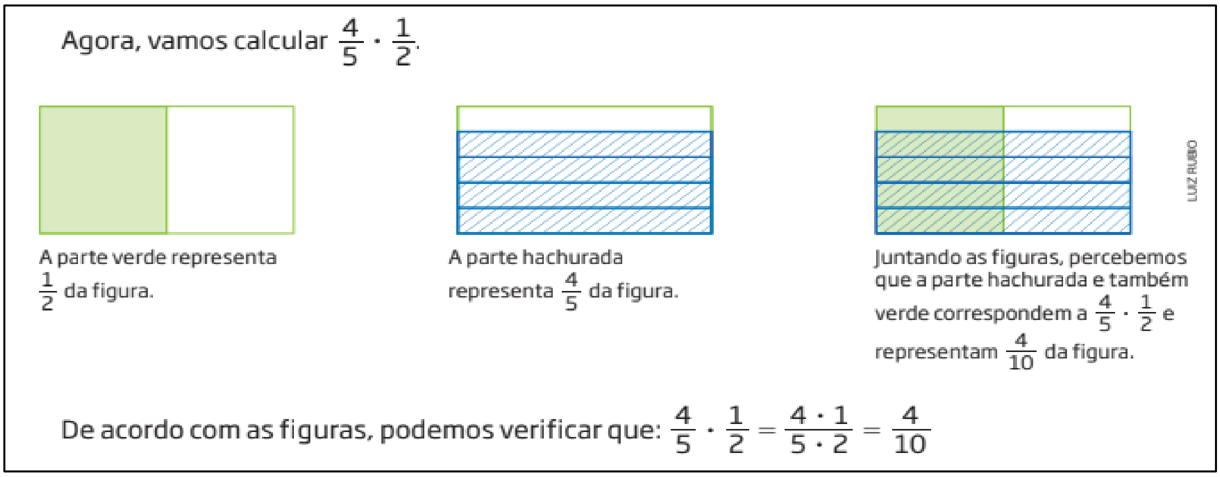
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 1}{5} = \frac{3}{5}$$

Portanto, em três dias a indústria produziu $\frac{3}{5}$ do total de peças da produção semanal.

Fonte: Silveira (2015a, p. 145).

Já a introdução da subseção “Multiplicação de duas frações” não traz uma problematização e, sim, uma informação: “Agora, vamos calcular $\frac{4}{5}$ x $\frac{1}{2}$”, parecendo ter como objetivo apenas levar o estudante ao estabelecimento e memorização do algoritmo de multiplicação (Figura 20). Na nossa opinião, o autor, com a frase mencionada, não ressalta suficientemente o salto cognitivo requerido do estudante ao passar a considerar ambos os fatores números não naturais.

Figura 20 – Atividade que introduz multiplicação de fração por fração



Fonte: Silveira (2015a, p. 146).

Além disso, com relação a esta situação, reproduzida na Figura 20, tecemos vários comentários: i) no desenvolvimento do cálculo de $\frac{4}{5}$ x $\frac{1}{2}$, com auxílio da representação pictórica, são utilizados termos como “juntando as figuras”, “percebemos”, “podemos verificar”, provavelmente, em uma tentativa de esclarecimento por meio da representação pictórica que, no entanto, é nada clara, no nosso ponto de vista; ii) faz-se uso do termo “juntar” que é característico da adição para os estudantes, mas que aqui não é empregado com este significado, o que pode constituir uma barreira para o estudante; iii) não fica claro por que $\frac{4}{5}$ x $\frac{1}{2}$ corresponderia a considerar na representação pictórica a intersecção das representações de $\frac{1}{2}$ e de $\frac{4}{5}$ da unidade.

Nossa crítica à pura apresentação de um procedimento no lugar de uma explicação com significado é reforçada ao observar-se que, na sequência, são apresentados 6 exemplos que apenas se concentram na aplicação do algoritmo da multiplicação de frações que fica sugerido ao final da atividade reproduzida na Figura 20.

Na sequência, são propostas 7 atividades antes do encerramento da seção; somente na terceira dessas atividades é que é possível perceber uma oportunidade ao estudante de refletir sobre como calcular-se “tanto de” sendo este “tanto” um número natural; assim, a oportunidade que foi perdida nas situações introdutórias da subseção “Multiplicação de um número natural por uma fração” é aqui compensada, ainda que um tanto tardiamente. (Figura 21). Contudo, os demais exercícios não proporcionam a reflexão de situações envolvendo apenas frações, como por exemplo, $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$.

Figura 21 – Atividade 3 (o dobro de; o triplo de)

3 **Determine:**

a) o triplo de $\frac{7}{15}$; $\frac{7}{5}$ **b) o dobro de $\frac{5}{8}$.** $\frac{5}{4}$

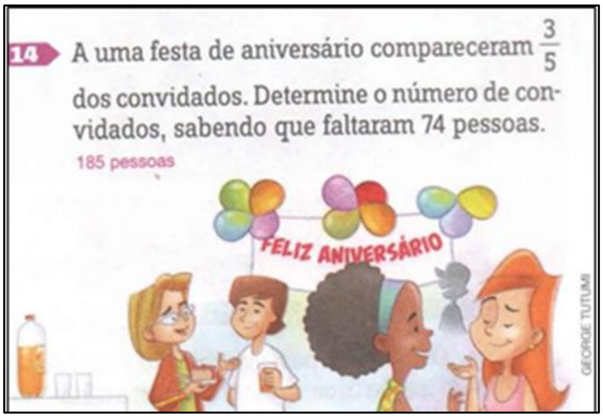
Fonte: Silveira (2015a, p. 147).

De fato, na própria Atividade 3 (Figura 21), o autor poderia ter explorado opções com quantidades fracionárias, por exemplo, a metade de $\frac{5}{8}$, e, desta forma, também trabalhar uma questão que é ressaltada pelos PCN e por Vergnaud que é de se destacar uma importante propriedade desse novo universo numérico, a saber, na multiplicação de frações, o produto pode ser menor que um ou ambos os fatores.

Destacamos, ainda, que as 7 atividades que encerram a seção não contemplam situações contextualizadas com relação à multiplicação de fração por fração, reiterando exclusivamente uma preocupação com a resolução pelo algoritmo.

No final do capítulo “Frações”, o autor aborda, por meio de exercícios/atividades, todo o conteúdo apresentado sob o título “Trabalhando os conhecimentos adquiridos”. Destacamos aí a Atividade 14 (Figura 22), que reconhecemos como enquadrando-se dentro do eixo de proporção simples, na classe “muito para muitos”, envolvendo grandezas discretas, no sentido que, uma vez conhecidos $\frac{3}{5}$, solicita-se ao estudante determinar os $\frac{5}{5}$, ou seja, a unidade. Esta atividade pode ser considerada de uma complexidade maior para o estudante, como Vergnaud mesmo coloca, pois requer que o estudante mobilize os campos multiplicativo e aditivo.

Figura 22 – Atividade envolvendo proporção simples, classe “muito para muitos”



Fonte: Silveira (2015a, p. 155).

Cabe ainda ressaltar, além da falta de qualquer sugestão de encaminhamento dessa atividade ao professor, resumindo-se o Manual do Professor apenas à resposta do exercício, que as atividades até aqui propostas, como a da Figura 22, envolvem situações que podem ser classificadas, segundo a teoria de Vergnaud, como uma situação de relação quaternária.

Verificou-se, também, que os exercícios de revisão não abordam outras situações da multiplicação, como a comparação, não contemplam situações contextualizadas que envolvam multiplicação de fatores fracionários, nem provocam a discussão sobre a ruptura conceitual de que a multiplicação sempre dará um resultado maior, ou seja, de multiplicar e obter um resultado menor.

No volume do 7º ano dessa coleção, o autor dá continuidade à representação decimal iniciada no volume do 6º ano. Considerando também números negativos, problematiza uma situação envolvendo fração de uma quantidade inteira e retoma multiplicação de fração por fração, porém, novamente, apenas enfatizando o algoritmo (Figura 23). Cabe salientar que aí, mais uma vez, os campos multiplicativo e aditivo são requisitados do estudante.

Figura 23 – Situação envolvendo fração de um número e retomada da multiplicação de fração por fração no 7º ano apenas enfatizando o algoritmo

Nilza e Norma fizeram uma dívida de R$ 5 490,00 para repor o estoque da papelaria delas. À Norma coube $\frac{2}{3}$ dessa dívida. Ela pagou com cartão de débito, cujo saldo era R$ 3 630,00. Norma tinha dinheiro suficiente para esse pagamento? Qual ficou sendo o saldo de sua conta bancária após o pagamento?

Para resolver esse problema, devemos calcular o valor da expressão:

$$\frac{2}{{}_{1}\cancel{3}} \cdot \overset{1830}{\cancel{5490}} = 3660$$

$$3630 - 3660 = -30$$

Norma não tinha dinheiro suficiente para esse pagamento. Sua conta ficou com saldo negativo de R$ 30,00.

Na multiplicação com números racionais, são válidas as mesmas regras de sinais aplicadas na multiplicação com números inteiros.

Veja mais alguns exemplos com números racionais escritos na forma de fração.

- $\left(+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{8}$
- $\left(-\frac{49}{20}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(+\frac{5}{18}\right) = \left(+\frac{\overset{7}{\cancel{49}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{10}{\cancel{20}} \cdot \underset{1}{\cancel{7}}}\right) \cdot \left(+\frac{5}{18}\right) = \left(+\frac{7 \cdot 1}{10 \cdot 1}\right) \cdot \left(+\frac{5}{18}\right) = +\frac{7 \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{2}{\cancel{10}} \cdot 18} = +\frac{7}{36}$

Fonte: Silveira (2015b, p. 57).

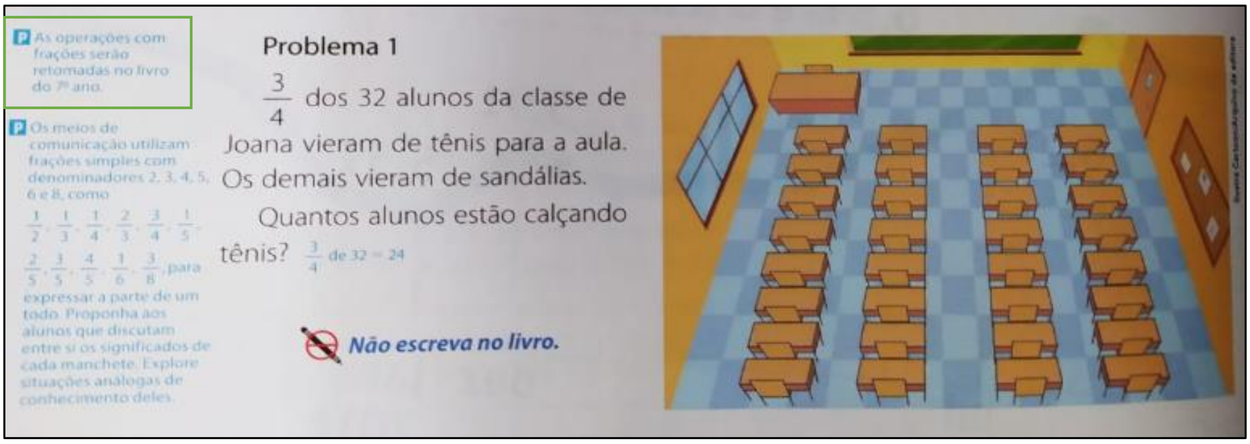
Na nossa opinião, essa coleção não contempla as ideias de Vergnaud quando este salienta que a aquisição de um conhecimento é um processo longo. De fato, a forma como foi abordado o conteúdo no livro do 7º ano sugere que se está pressupondo que o aluno teria adquirido o conhecimento sobre multiplicação de frações no 6º ano. No entanto, o volume do 6º ano não contempla algumas situações da multiplicação, por exemplo, este não foi claro na argumentação sobre a conexão entre “$\frac{3}{2}$ de” e “$\frac{3}{2}$ x”, pois não utiliza situações de aprendizagem que aplicam a multiplicação na forma de comparação multiplicativa, como previsto no campo multiplicativo da Teoria de Vergnaud e nas orientações dos PCN. Também, na nossa opinião, perdeu-se, no volume do 6º ano, a oportunidade de apoiar os argumentos em variadas formas de representação como defende Duval e orientam os PCN. Ainda, não é trabalhada a relação destacada pelos PCN de que a multiplicação de frações deve ser pensada como partes de partes de um total, construindo, assim, a definição de multiplicação de frações.

B) Coleção “MATEMÁTICA DO COTIDIANO” de autoria de Antonio José Lopes Bigode

Nesta coleção, o livro do 6º ano é dividido em 4 unidades, sendo a Unidade 3 intitulada “Números quebrados”, com 71 páginas. No decorrer dessa unidade, estão expostos os capítulos 7 – Frações (p. 170-195), 8 – Números decimais (p. 196-213) e 9 – Operações com números decimais e frações (p. 214-239).

O capítulo 7 é introduzido com a subseção “Situações com Frações”, na qual são apresentadas quatro situações, sendo que a primeira (Figura 24) contempla frações de quantidade inteira a partir da ideia de arranjo retangular. Configura-se, assim, uma situação preparatória para a multiplicação de frações por um número natural.

Figura 24 – Problema 1 envolvendo fração de quantidade inteira



Fonte: Bigode (2015a, p. 170).

No entanto, destacamos uma nota ao professor na qual o autor esclarece que as operações com frações serão retomadas no livro do 7º ano (Figura 24).

A segunda situação destina-se apenas a identificar a representação pictórica de $\frac{2}{5}$ da área de um quintal destinada para uma horta e para a qual o estudante precisa observar imagens que representam $\frac{6}{15}$ e $\frac{16}{20}$ do quintal e identificar qual delas é equivalente à fração $\frac{2}{5}$. A terceira situação trata da distribuição de lápis de cor para três alunos (fração de quantidade expressa por um número natural) e a quarta, trabalha a divisão de duas pizzas para três amigos, ou seja, fração como quociente.

Na subseção “Resolvendo problemas com frações”, retoma-se frações de quantidades inteiras, ficando explicitado que $\frac{3}{5}$ de 40 = 3 x 8 = 24 e enfatizado que já é sabido que $\frac{3}{5} = 3 \times \frac{1}{5}$ (Figura 25). No entanto, não aparece explicitada a aplicação da propriedade associativa (da segunda para a terceira igualdade):

$$\frac{3}{5} \text{ de } 40 = (3 \times \frac{1}{5}) \text{ de } 40 = 3 \times (\frac{1}{5} \text{ de } 40).$$

Figura 25 – Introdução da seção resolvendo problemas com frações

Em muitos problemas do cotidiano, precisamos calcular a fração de uma quantidade ou de uma medida.

As frações aparecem nas receitas culinárias, nas manchetes de jornal, nos cálculos que envolvem dinheiro e tempo e em diversas outras situações.

Veja um exemplo: em uma classe com 40 alunos, $\frac{3}{5}$ são meninos e o restante são meninas. Quantas meninas há nessa classe?

O número total de alunos é 40.

A quinta parte de 40 corresponde a $40 \div 5 = 8$, portanto, $\frac{1}{5}$ de $40 = 8$.

Então sabemos que $\frac{1}{5}$ dos alunos é igual a 8.

O problema diz que $\frac{3}{5}$ de 40 são meninos e sabemos que $\frac{3}{5} = 3 \times \frac{1}{5}$, então $\frac{3}{5}$ de $40 = 3 \times 8 = 24$.

Ou seja, são 24 meninos, logo o número de meninas é $40 - 24 = 16$.

Fonte: Bigode (2015a, p. 178).

Como aprofundamento do estudo de problemas envolvendo fração de quantidade, são propostas treze atividades (nº 23 a 35), envolvendo situações do cotidiano que consideramos muito interessantes, como a reproduzida na Figura 26.

Figura 26 – Problema sobre fração de quantidade inteira envolvendo uma situação do cotidiano

27 Desafio olímpico

Na festa junina da escola, os convites foram distribuídos entre alunos e professores de acordo com a tabela ao lado. Os 360 convites que sobraram foram vendidos no dia, na entrada da festa. Observe a tabela:

Agora responda:

a) Que fração do total de convites foi colocada à venda no dia da festa?

b) Quantos convites foram produzidos?

c) Quantos convites foram distribuídos para alunos e professores?

27. c) Se o total de convites era 960 e destes 360 foram vendidos no dia da festa, então 960 − 360 = 600 convites foram distribuídos aos alunos e professores. Verifique que 5 × 120 = 600 e ainda que — de 960 = 600.

Quantidade de convites por tipo

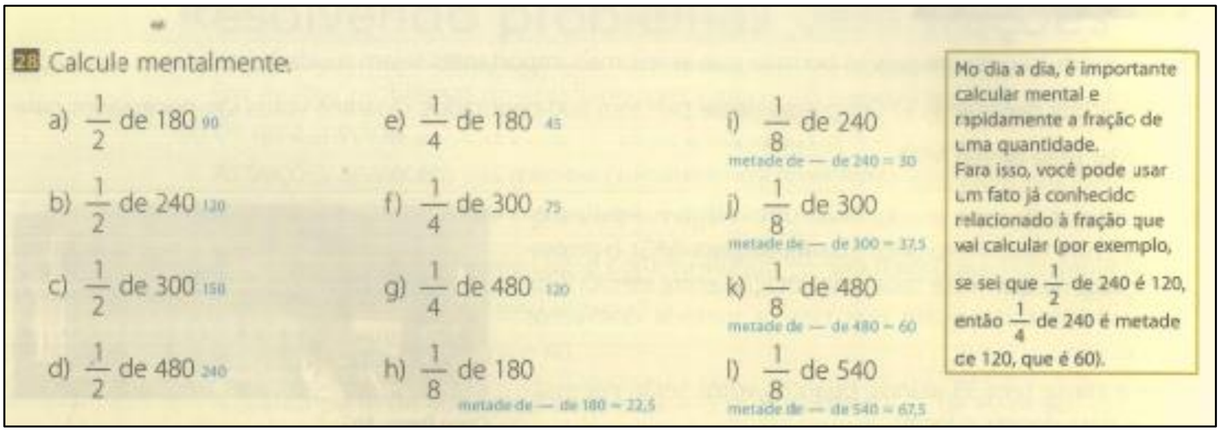
	Fração do total de convites	Número de convites
6º ano	$\frac{1}{8}$	120
7º ano	$\frac{1}{8}$	120
8º ano	$\frac{1}{8}$	120
9º ano	$\frac{1}{8}$	120
Professores	$\frac{1}{8}$	120
Venda avulsa	[illegible]	360

Dados fictícios.

Fonte: Bigode (2015a, p. 179).

Nessas atividades, são também apresentadas situações que oportunizam refletir sobre o que seja calcular “tanto de tanto”, no caso de multiplicação de uma fração por um número natural; contudo, consideramos 13 atividades uma quantidade um pouco excessiva; por exemplo, 4 delas têm a mesma estrutura e totalizam 48 itens a serem resolvidos. A Figura 27 traz uma atividade que desafia os estudantes ao uso do cálculo mental enquanto procura sistematizar o processo de calcular uma parte de uma quantidade inteira. Interessante a atenção que o autor chama do estudante ao sugerir calcular a metade da metade para determinar a quarta parte.

Figura 27 – Atividade objetivando o cálculo mental de “tanto de tanto”


28 Calcule mentalmente.

a) $\frac{1}{2}$ de 180 90

b) $\frac{1}{2}$ de 240 120

c) $\frac{1}{2}$ de 300 150

d) $\frac{1}{2}$ de 480 240

e) $\frac{1}{4}$ de 180 45

f) $\frac{1}{4}$ de 300 75

g) $\frac{1}{4}$ de 480 120

h) $\frac{1}{8}$ de 180 metade de — de 180 = 22,5

i) $\frac{1}{8}$ de 240 metade de — de 240 = 30

j) $\frac{1}{8}$ de 300 metade de — de 300 = 37,5

k) $\frac{1}{8}$ de 480 metade de — de 480 = 60

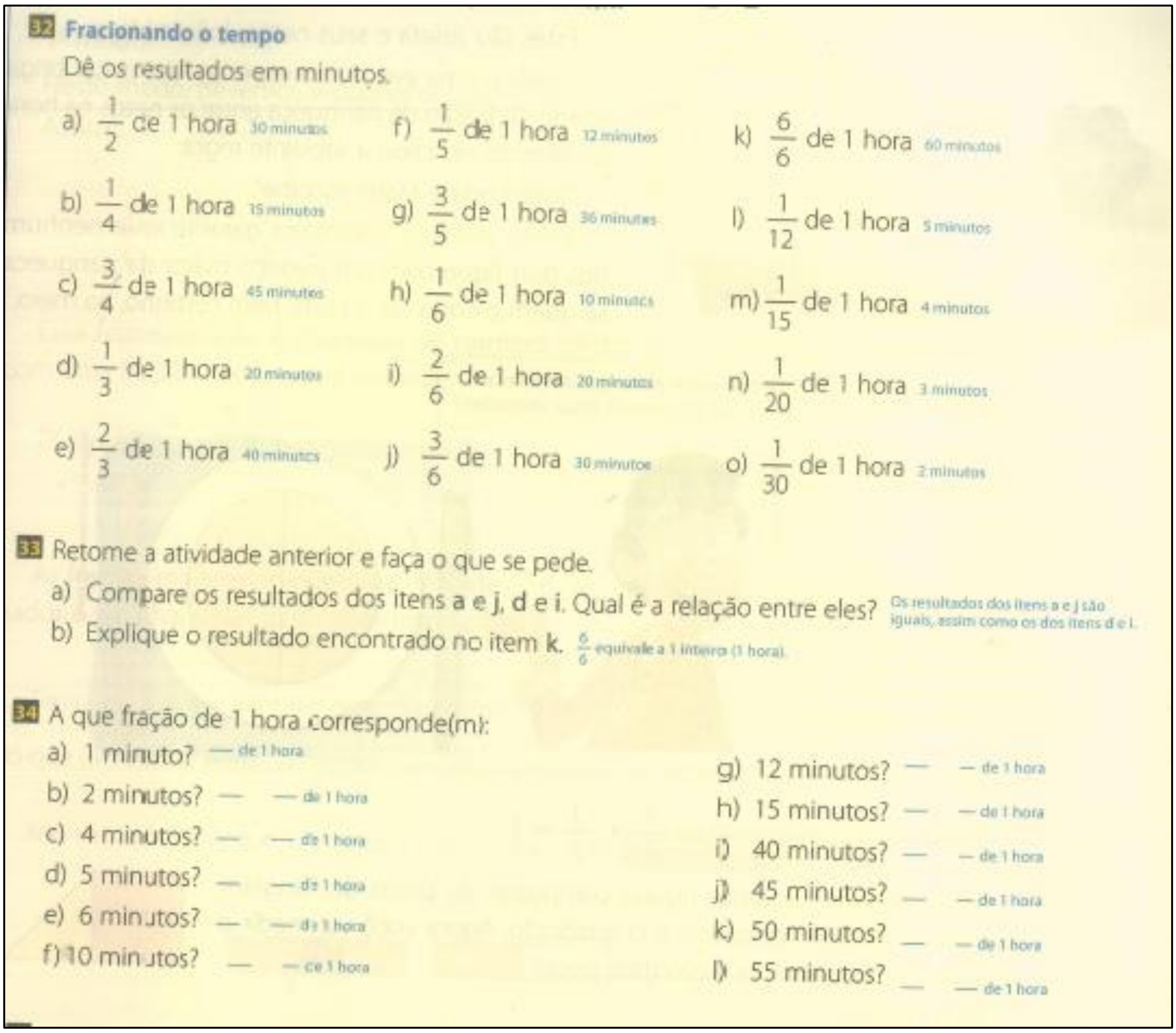
l) $\frac{1}{8}$ de 540 metade de — de 540 = 67,5

No dia a dia, é importante calcular mental e rapidamente a fração de uma quantidade. Para isso, você pode usar um fato já conhecido relacionado à fração que vai calcular (por exemplo, se sei que $\frac{1}{2}$ de 240 é 120, então $\frac{1}{4}$ de 240 é metade de 120, que é 60).

Fonte: Bigode (2015a, p. 180).

Merecem, também, destaque as Atividades 32, 33 e 34 (Figura 28) que propõem o fracionamento do tempo (Atividade 32), fazendo com que o aluno analise uma grandeza diferente (ainda que em um número excessivo de ítens, na nossa opinião), frações equivalentes e aparentes neste mesmo contexto (Ativiade 33) e o processo inverso da transformação usual, contemplando a proposta de Duval de se dominar todas as transformações possíveis na construção de um conceito (Atividade 34).

Figura 28 – Trabalhando com a grandeza tempo



32 **Fracionando o tempo**

Dê os resultados em minutos.

a) $\frac{1}{2}$ de 1 hora 30 minutos
b) $\frac{1}{4}$ de 1 hora 15 minutos
c) $\frac{3}{4}$ de 1 hora 45 minutos
d) $\frac{1}{3}$ de 1 hora 20 minutos
e) $\frac{2}{3}$ de 1 hora 40 minutos
f) $\frac{1}{5}$ de 1 hora 12 minutos
g) $\frac{3}{5}$ de 1 hora 36 minutos
h) $\frac{1}{6}$ de 1 hora 10 minutos
i) $\frac{2}{6}$ de 1 hora 20 minutos
j) $\frac{3}{6}$ de 1 hora 30 minutos
k) $\frac{6}{6}$ de 1 hora 60 minutos
l) $\frac{1}{12}$ de 1 hora 5 minutos
m) $\frac{1}{15}$ de 1 hora 4 minutos
n) $\frac{1}{20}$ de 1 hora 3 minutos
o) $\frac{1}{30}$ de 1 hora 2 minutos

33 Retome a atividade anterior e faça o que se pede.

a) Compare os resultados dos itens **a** e **j**, **d** e **i**. Qual é a relação entre eles? Os resultados dos itens a e j são iguais, assim como os dos itens d e i.
b) Explique o resultado encontrado no item **k**. $\frac{6}{6}$ equivale a 1 inteiro (1 hora).

34 A que fração de 1 hora corresponde(m):

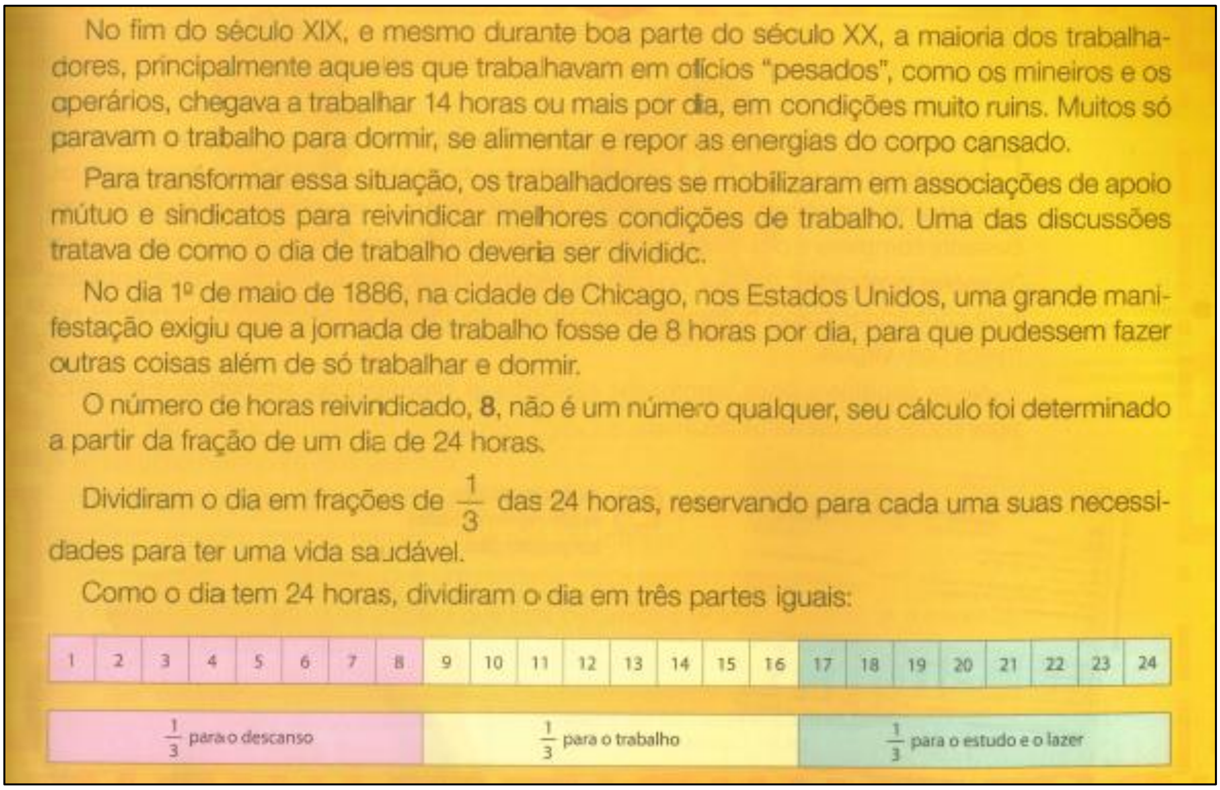
a) 1 minuto? — de 1 hora
b) 2 minutos? — — de 1 hora
c) 4 minutos? — — de 1 hora
d) 5 minutos? — — de 1 hora
e) 6 minutos? — — de 1 hora
f) 10 minutos? — — de 1 hora
g) 12 minutos? — — de 1 hora
h) 15 minutos? — — de 1 hora
i) 40 minutos? — — de 1 hora
j) 45 minutos? — — de 1 hora
k) 50 minutos? — — de 1 hora
l) 55 minutos? — — de 1 hora

Fonte: Bigode (2015a, p. 181).

No final do Capítulo 7, são propostos, de forma coerente ao que foi explorado no capítulo, 18 exercícios destinados à revisão do que foi estudado, sendo 9 deles destinados a fração de quantidade inteira.

A Unidade 3 “Números Quebrados” apresenta um encarte chamado “Revista de Matemática” que traz uma aplicação importante de frações de quantidades inteiras e que constitui um marco importante na história dos trabalhadores: a regulamentação do tempo de trabalho. (Figura 29).

Figura 29 – As frações e o regime de 8 horas de trabalho


No fim do século XIX, e mesmo durante boa parte do século XX, a maioria dos trabalhadores, principalmente aqueles que trabalhavam em ofícios “pesados”, como os mineiros e os operários, chegava a trabalhar 14 horas ou mais por dia, em condições muito ruins. Muitos só paravam o trabalho para dormir, se alimentar e repor as energias do corpo cansado.

Para transformar essa situação, os trabalhadores se mobilizaram em associações de apoio mútuo e sindicatos para reivindicar melhores condições de trabalho. Uma das discussões tratava de como o dia de trabalho deveria ser dividido.

No dia 1º de maio de 1886, na cidade de Chicago, nos Estados Unidos, uma grande manifestação exigiu que a jornada de trabalho fosse de 8 horas por dia, para que pudessem fazer outras coisas além de só trabalhar e dormir.

O número de horas reivindicado, **8**, não é um número qualquer, seu cálculo foi determinado a partir da fração de um dia de 24 horas.

Dividiram o dia em frações de $\frac{1}{3}$ das 24 horas, reservando para cada uma suas necessidades para ter uma vida saudável.

Como o dia tem 24 horas, dividiram o dia em três partes iguais:

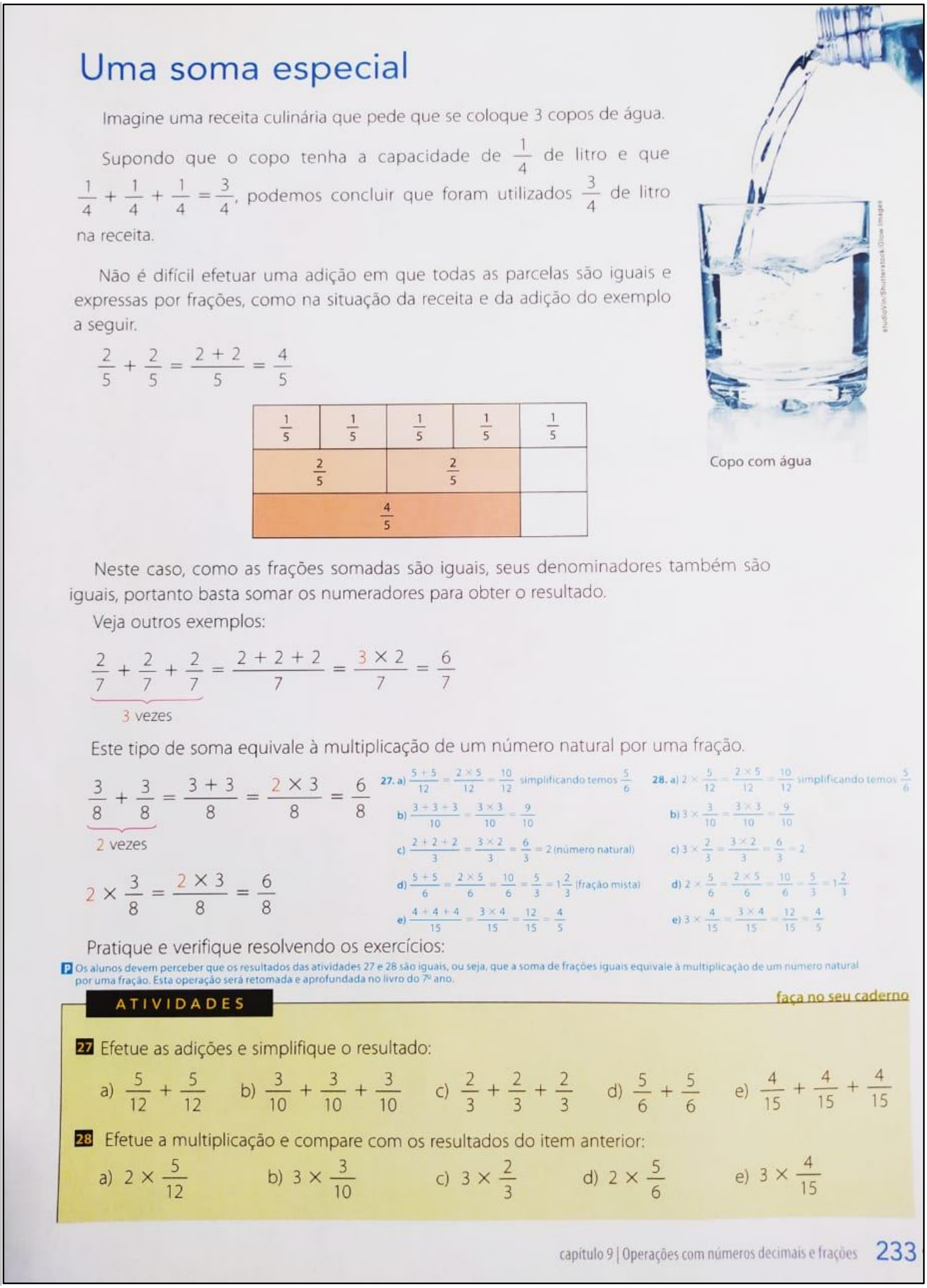
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

$\frac{1}{3}$ para o descanso	$\frac{1}{3}$ para o trabalho	$\frac{1}{3}$ para o estudo e o lazer

Fonte: Bigode (2015a, p. 195).

Cabe também salientar o destaque que foi dado na subseção “Uma soma especial”, apresentando uma situação de adição de parcelas iguais, relacionando com o cálculo de multiplicação de um número natural por fração e apoiando-se na representação pictórica de barras. Em seguida, propõe duas atividades: a primeira trata de soma de frações com denominadores iguais e, a segunda, trata do algoritmo de multiplicação de um número natural por fração. Nas orientações para professor, o autor salienta que os alunos devem perceber que os resultados são os mesmos e que a soma de frações iguais equivale à multiplicação de um número natural por uma fração, e destaca que essa operação será retomada no 7º ano (Figura 30).

Figura 30 – Situação de adição de parcelas iguais, contemplando a multiplicação de um número natural por fração



Uma soma especial

Imagine uma receita culinária que pede que se coloque 3 copos de água.

Supondo que o copo tenha a capacidade de $\frac{1}{4}$ de litro e que $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, podemos concluir que foram utilizados $\frac{3}{4}$ de litro na receita.

Não é difícil efetuar uma adição em que todas as parcelas são iguais e expressas por frações, como na situação da receita e da adição do exemplo a seguir.

$$\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{2+2}{5}=\frac{4}{5}$$

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{2}{5}$		$\frac{2}{5}$		
$\frac{4}{5}$				

studioVin/Shutterstock/Glow Images

Copo com água

Neste caso, como as frações somadas são iguais, seus denominadores também são iguais, portanto basta somar os numeradores para obter o resultado.

Veja outros exemplos:

$$\underbrace{\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}}_{3\text{ vezes}}=\frac{2+2+2}{7}=\frac{3\times 2}{7}=\frac{6}{7}$$

Este tipo de soma equivale à multiplicação de um número natural por uma fração.

$$\underbrace{\frac{3}{8}+\frac{3}{8}}_{2\text{ vezes}}=\frac{3+3}{8}=\frac{2\times 3}{8}=\frac{6}{8}$$

$$2\times\frac{3}{8}=\frac{2\times 3}{8}=\frac{6}{8}$$

27. a) $\frac{5+5}{12}=\frac{2\times 5}{12}=\frac{10}{12}$ simplificando temos $\frac{5}{6}$

b) $\frac{3+3+3}{10}=\frac{3\times 3}{10}=\frac{9}{10}$

c) $\frac{2+2+2}{3}=\frac{3\times 2}{3}=\frac{6}{3}=2$ (número natural)

d) $\frac{5+5}{6}=\frac{2\times 5}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$ (fração mista)

e) $\frac{4+4+4}{15}=\frac{3\times 4}{15}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$

28. a) $2\times\frac{5}{12}=\frac{2\times 5}{12}=\frac{10}{12}$ simplificando temos $\frac{5}{6}$

b) $3\times\frac{3}{10}=\frac{3\times 3}{10}=\frac{9}{10}$

c) $3\times\frac{2}{3}=\frac{3\times 2}{3}=\frac{6}{3}=2$

d) $2\times\frac{5}{6}=\frac{2\times 5}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$

e) $3\times\frac{4}{15}=\frac{3\times 4}{15}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$

Pratique e verifique resolvendo os exercícios:

P Os alunos devem perceber que os resultados das atividades 27 e 28 são iguais, ou seja, que a soma de frações iguais equivale à multiplicação de um número natural por uma fração. Esta operação será retomada e aprofundada no livro do 7º ano.

ATIVIDADES — faça no seu caderno

27 Efetue as adições e simplifique o resultado:

a) $\frac{5}{12}+\frac{5}{12}$ b) $\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}$ c) $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$ d) $\frac{5}{6}+\frac{5}{6}$ e) $\frac{4}{15}+\frac{4}{15}+\frac{4}{15}$

28 Efetue a multiplicação e compare com os resultados do item anterior:

a) $2\times\frac{5}{12}$ b) $3\times\frac{3}{10}$ c) $3\times\frac{2}{3}$ d) $2\times\frac{5}{6}$ e) $3\times\frac{4}{15}$

capítulo 9 | Operações com números decimais e frações 233

Fonte: Bigode (2015a, p. 233).

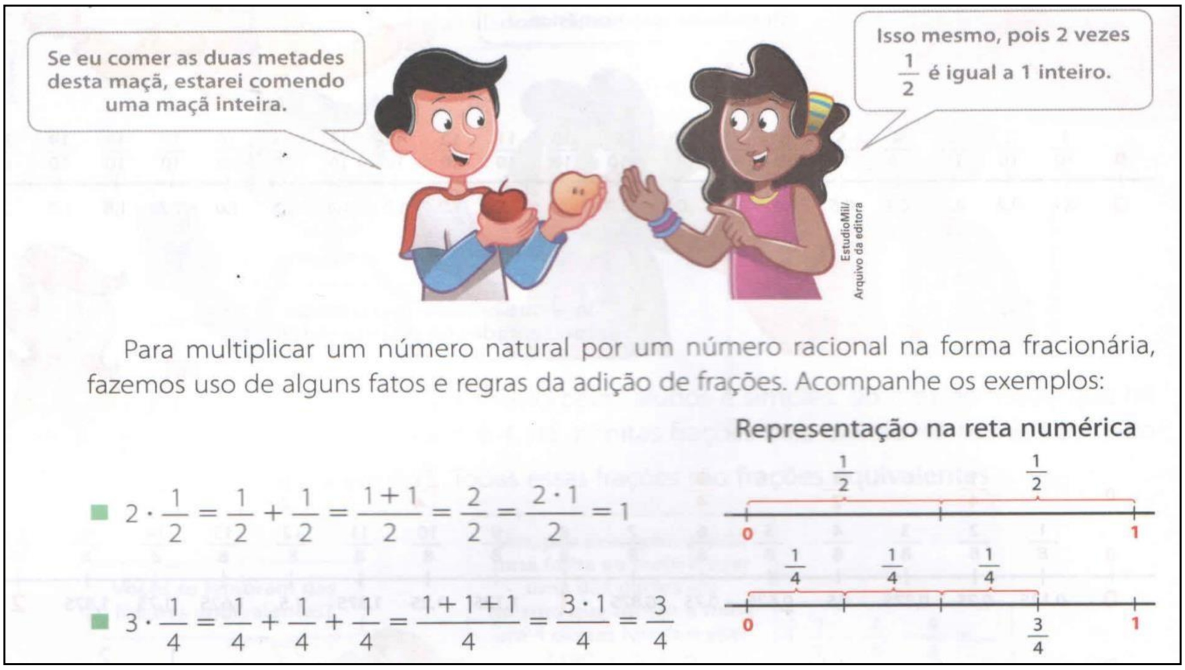
O volume do 7º ano é dividido em 4 unidades, sendo a Unidade 1 intitulada

“Números racionais”, com 48 páginas, contendo os capítulos 1 – Números, operações e suas aplicações (p. 12-33), 2 – Frações: ideias e operações (p. 34-57) e 3 – Grandezas e medidas (p. 58-79), cumprindo-se assim a promessa feita no volume do 6º ano de que as operações com frações seriam retomadas no livro do 7º ano.

E, de fato, a multiplicação de frações está contemplada no Capítulo 2, na seção “Multiplicação de frações”, que é subdividida em dois casos: multiplicação de um número natural por um número fracionário e multiplicação de um número fracionário por um número fracionário, desenvolvidos da página 38 à página 41. Cabe ressaltar que “fração de quantidade” (ou seja, multiplicação de fração por número natural) foi abordada no volume do 6º ano (Figura 24).

O caso multiplicação de um número natural por um número fracionário é motivado com uma situação ilustrada em uma tirinha e apoia-se na reta numérica, fazendo, assim, emergir uma situação de adição de parcelas iguais. (Figura 31).

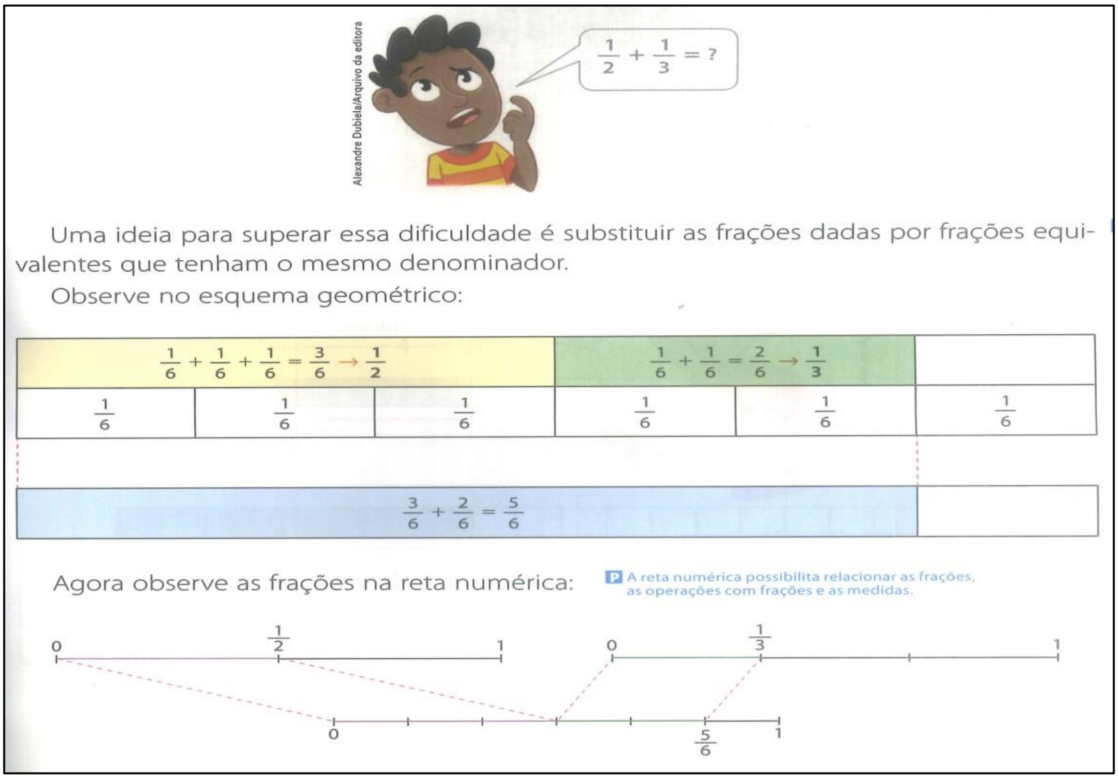
Figura 31 – Situação que introduz o caso de multiplicação de um número natural por fração utilizando a representação na reta numérica



Fonte: Bigode (2015b, p. 38).

Cabe salientar aqui que, no livro do 6º ano, a reta numérica foi pouco explorada, destacamos apenas um exemplo utilizado na introdução da adição, fazendo uso da equivalência (Figura 32).

Figura 32 – Situação que introduz adição de frações na reta numérica no livro do 6º ano



Fonte: Bigode (2015a, p. 229).

Sobre a multiplicação, existe, em destaque, um quadro que traz uma abordagem equivocada, pois restringe, erradamente, a multiplicação de frações apenas à situação de adição de parcelas iguais (Figura 33), oportunizando ao estudante a concepção, equivocada, de que multiplicação de frações resume-se à adição de parcelas iguais, o que se transforma em uma barreira ao se deparar com a multiplicação $\frac{2}{5}$ x $\frac{5}{11}$, por exemplo. Além disso, o autor é incoerente consigo mesmo, à medida em que trata também desse exemplo (Figura 33).

Figura 33 – Quadro definindo a multiplicação de frações no volume do 7º ano

A multiplicação de frações, tal como se faz com os números naturais, equivale a adicionar parcelas iguais tantas vezes quantas indicar o multiplicador.

Fonte: Bigode (2015b, p. 38).

Outro ponto que merece crítica é o fato de a propriedade comutativa da multiplicação ser explorada na sequência, sem ter sido ainda abordado o caso de multiplicação de fração por fração, o que vai contra o desenvolvimento do pensamento matemático do estudante, apesar de sugerir, adequadamente, uma discussão sobre a possibilidade de ampliar-se a propriedade que vale no universo numérico dos naturais para o universo das frações (Figura 34). Além disso, ressaltamos que, em situações concretas, não é natural aplicar a propriedade comutativa, por exemplo, tomar o dobro de meia maçã, não é a mesma ação que tomar metade de duas maçãs, apenas o resultado é o mesmo. A discussão sobre a validade das propriedades (ou da ampliação das propriedades) das operações deve, sim, na nossa opinião, ser oportunizada nos livros didáticos e nas salas de aula.

Figura 34 – Momento inadequado de abordagem da propriedade comutativa

> Na multiplicação de frações também podemos aplicar a propriedade comutativa, conhecida na multiplicação de números naturais como "a ordem dos fatores não altera o produto". Então, podemos calcular da mesma forma a multiplicação de um número fracionário por um número natural.

Fonte: Bigode (2015b, p. 38).

O caso "Multiplicação de um número fracionário por um número fracionário" é problematizado, motivando-se e afirmando-se que é necessário calcular $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{11}$. (Figura 35), contemplando a ideia proposta pelos PCN de que a multiplicação está associada a partes de partes de um inteiro.

Figura 35 – Situação envolvendo a multiplicação de $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{11}$

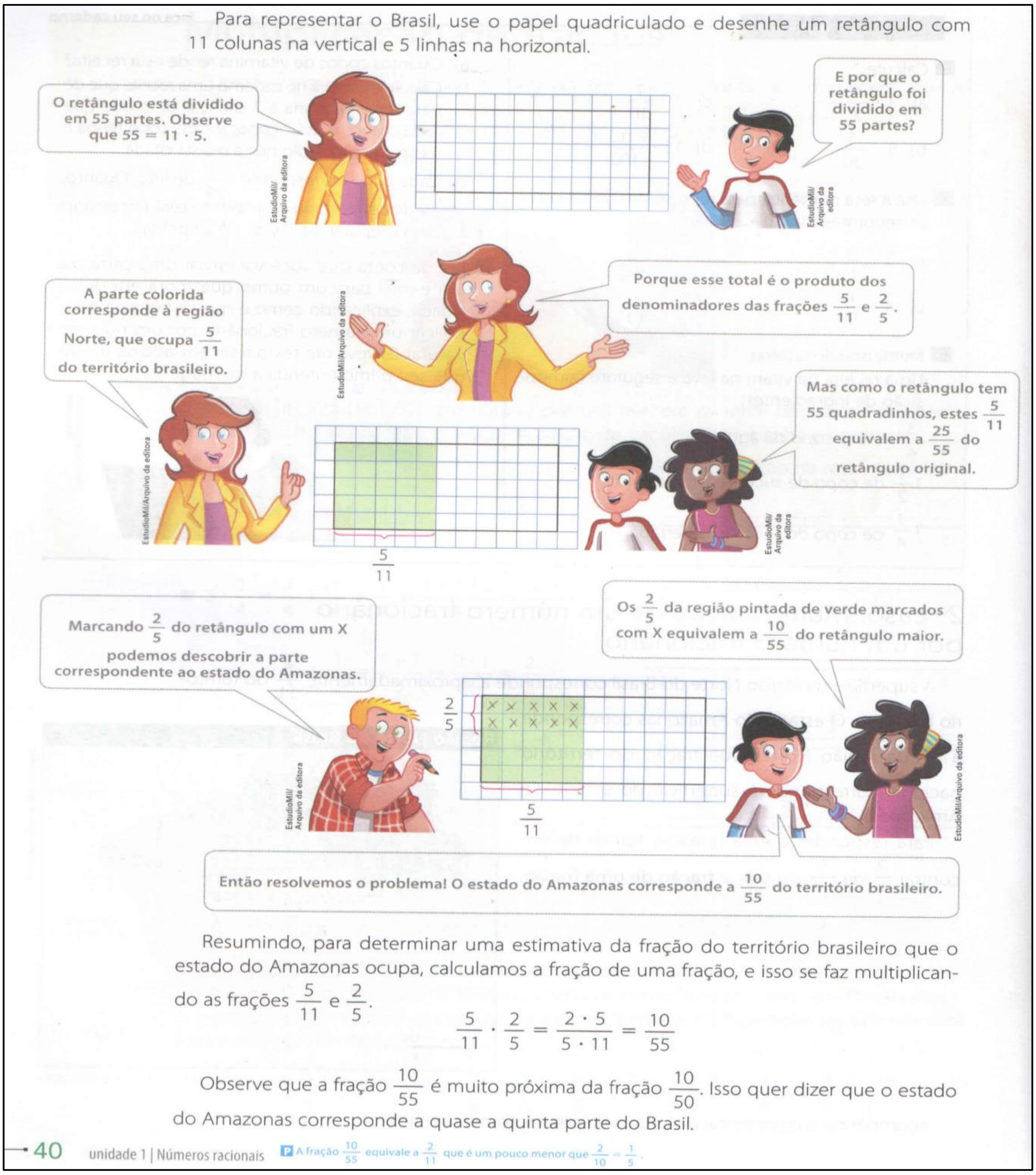
> A superfície da região Norte do Brasil corresponde a, aproximadamente, $\frac{5}{11}$ do território brasileiro. O estado do Amazonas corresponde a $\frac{2}{5}$ da região Norte. Que fração do território nacional corresponde à superfície do estado do Amazonas?
>
> Para responder a essa questão temos de encontrar $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{11}$, ou seja, a **fração de uma fração**.

Adaptado de: ATLAS geográfico escolar. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012.

Fonte: Bigode (2015b, p. 39).

Apesar de tratar-se de uma interessante contextualização e de ser utilizada a representação pictórica para a resolução da questão (Figura 36), consideramos a explicação mal encaminhada, pois dificilmente o aluno irá entender o “por que” de considerar-se uma malha quadriculada 5 x 11, bem como a frase “e isto se faz multiplicando as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{5}{11}$”, uma vez que tal multiplicação carece de uma definição que não foi previamente apresentada aos estudantes. Além disso, é sugerido um procedimento que só funciona para o caso em que o denominador de uma fração é igual ao numerador da outra e o caso geral (numeradores quaisquer) não é abordado. Este procedimento dificulta a generalização para fatores quaisquer. No nosso ponto de vista, o papel quadriculado dificulta a visualização, apesar de facilitar, posteriormente, a marcação. Ressaltamos que, na sequência de atividades que propomos (Capítulo 7), não fazemos uso de papel quadriculado ao lidar com situação similar a esta.

Figura 36 – Desenvolvimento do cálculo para determinar $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{11}$



Fonte: Bigode (2015b, p. 40).

Após trabalhar apenas um exemplo, constatamos uma descontinuidade no desenvolvimento do conteúdo: sem abordar o caso de frações quaisquer como fatores, é apresentado o algoritmo para multiplicação de frações, sem qualquer conexão com a linguagem “tanto de tanto”. Além disso, é utilizada uma simbologia que não é natural nem de fácil entendimento para os estudantes do 7º ano. (Figura 37).

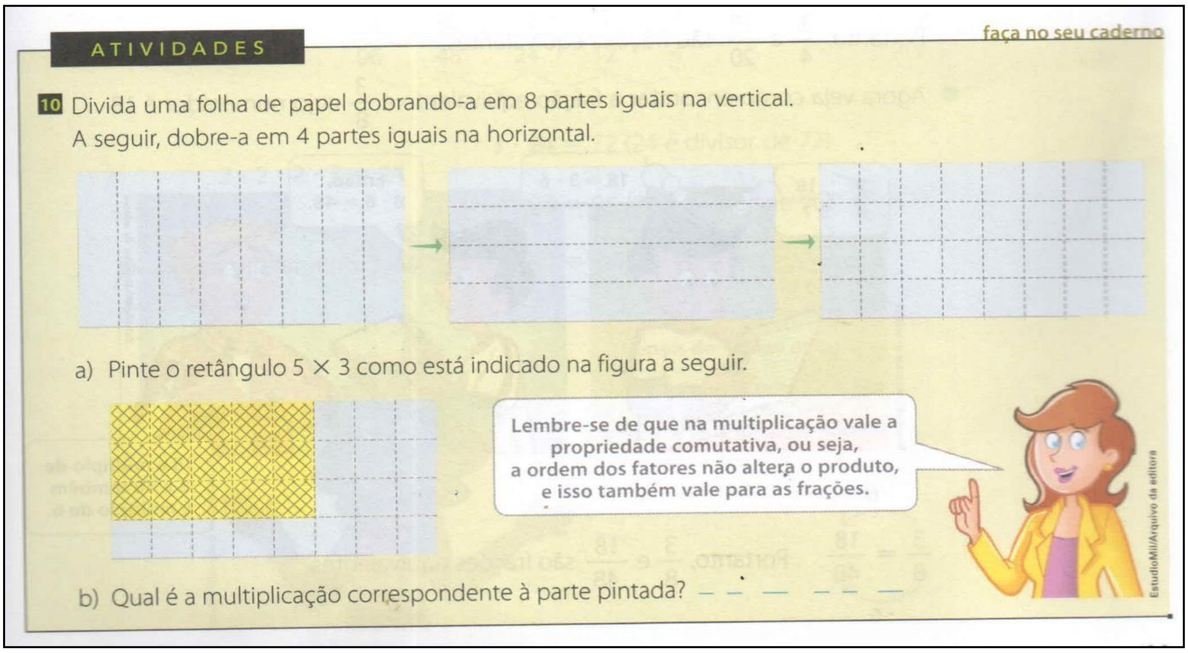
Figura 37 – Generalização da multiplicação de frações: $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{a\,.\,c}{b\,.\,\mathrm{d}}$

Na multiplicação de frações, o produto é uma fração cujo numerador é o produto dos numeradores e o denominador é o produto dos denominadores.
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, sendo a, b, c e d números naturais e b e d diferentes de zero.

Fonte: Bigode (2015b, p. 40).

A seguir, é proposta a Atividade 10 (Figura 38), cujo objetivo não é claro para nós. Nesta atividade, a propriedade comutativa é mencionada e relembrada, também, sem ficar clara a sua utilidade na atividade. Para nós, ela faria sentido como motivação para uma discussão sobre a validade da ampliação desta propriedade para o universo das frações, portanto antes da frase ressaltada no balãozinho da Figura 38. Além disso, o item (b) é ambíguo, pois a resposta 5 x 3 é possível, uma vez que em seu enunciado a unidade não foi especificada, não sendo dada nenhuma recomendação ao professor.

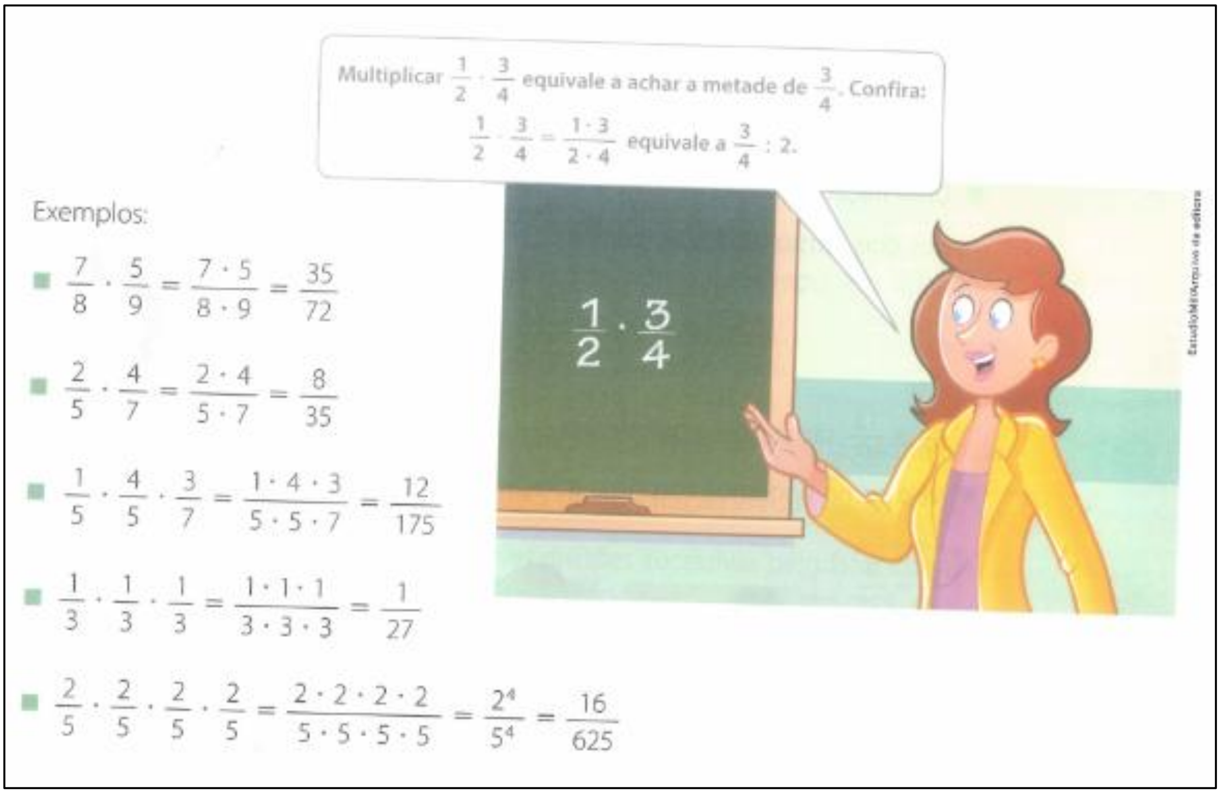
Figura 38 – Retomada da propriedade comutativa



Fonte: Bigode (2015b, p. 41).

Diferentemente da coleção anteriormente analisada nesta coleção, é possível encontrar uma leve alusão referente ao alerta apontado nos PCN e, também, por Vergnaud (no que diz respeito ao campo multiplicativo) de que, ao ampliar o universo numérico, alguns conceitos precisam ser reestruturados. De fato, a Figura 39 sugere, com a primeira frase no balãozinho, que, na multiplicação de frações, nem sempre o resultado será maior que os fatores. Contudo, perde-se aí a oportunidade de levar esta ideia adiante e destacar esse importante aspecto que caracteriza o novo universo numérico, restringindo-se apenas à abordagem do algoritmo.

Figura 39 – Nota sugerindo que o produto pode ser menor do que os fatores



Fonte: Bigode (2015b, p. 41).

A seguir, são propostos 19 exercícios, dos quais 18 enfatizam apenas o algoritmo das operações com frações, com exceção do exercício 28, que solicita que o estudante calcule “tanto de tanto”, mas sem conectar com a multiplicação, divergindo assim das orientações contidas nos PCN. Os exercícios de revisão que seguem, continuam focando no algoritmo, portanto não contemplam também as ideias de Vergnaud de que, para a aprendizagem de um conceito, é necessário oportunizar ao aluno o contato com diversas situações e nem as ideias de Duval sobre saber transitar entre as diversas representações de um conceito, como uma evidência desse aprendizado.

Também, nesta coleção, foi possível verificar que as ideias de Vergnaud sobre a questão da aquisição de um conhecimento ser um processo longo não foram contempladas, pois nessa coleção percebemos que a multiplicação de frações é praticamente abordada apenas no 7º ano, além de não terem sido comtemplados várias situações associadas ao campo multiplicativo (como por exemplo, não oportuniza situações que trabalhem comparação multiplicativa) não trabalha a recuperação da unidade e ainda não faz uma abordagem clara relacionando a expressão “$\frac{2}{5}$ de” com “$\frac{2}{5}$ x”. Com relação aos argumentos propostos por Duval, no livro do 7º ano, percebe-se, nas situações introdutórias das seções, a intenção de utilizar diferentes representações; no entanto, consideramos as situações utilizadas na introdução (Figuras 30 e 34) são distantes da realidade do aluno, correndo-se o risco de acabar dificultando o entendimento.

C) Coleção “MATEMÁTICA BIANCHINI” de Edwaldo Bianchini

No livro do 6º ano dessa coleção, o ensino de frações está sendo abordado nos capítulos 6 e 7, intitulados, respectivamente, “Números racionais na forma de fração” (p. 140-168) e “Operações com números racionais da forma de fração” (p. 169-204). Destacamos a nomenclatura “números racionais” evitada, neste ano escolar, pelas demais coleções e, aqui, utilizada. Apesar de os PCN recomendarem que, no 2º ciclo, o ensino deve favorecer que o aluno construa “o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social.” (BRASIL, 1997, p. 55), não somos favoráveis que o termo “número racional” apareça neste momento (6º ano). O conteúdo de multiplicação de frações é abordado no capítulo 7, na seção 3, intitulada “Multiplicação”, que tem suas 6 páginas subdivididas em três casos: “Quando um dos fatores é um número natural”, “Quando dois fatores são escritos na forma de fração” e “Quando os números racionais são inversos”.

O caso em que um dos fatores é um número natural é iniciado com uma problematização que contempla fração de uma quantidade inteira, deixando claro que, novamente, diferente das coleções anteriores, fração de uma quantidade é explicitamente considerada como um caso de multiplicação de frações, ainda que tal operação não apareça. Para essa situação, é utilizado o recurso de tabela de uma forma muito clara e a problematização é proposta a partir dos dados nela contidos (Figura 40).

Figura 40 – Situação 1 e tabela com dados oriundos do problema

Situação 1

Denise faz brigadeiros para vender. Ela anotou, em uma tabela, a produção de brigadeiros encomendados na última semana. Observe como ficou.

	Produção					
	Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira	Total
Número de brigadeiros	150	150	150	150	150	750
Fração da produção	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{5}$

Dados obtidos por Denise.

Fonte: Bianchini (2015a, p. 183).

Conforme podemos observar na Figura 41, o sinal de multiplicação é antecipado de forma desnecessária, aparecendo a explicação de onde ele surgiu só ao final da resolução. A associação com a multiplicação poderia ter sido mencionada antes de ser introduzida a operação, trazendo, na nossa opinião, mais significado para o aluno. Também consideramos forçado - ou equivocado - o aparecimento do denominador 1, visto que não estão trabalhando, neste primeiro caso, multiplicação de fração por fração e, sim, uma situação de adição de parcelas iguais. Um ponto positivo é a explicação no parágrafo final, associando a expressão “o dobro de” à operação “2 x”, o que não apareceu nas duas coleções já mencionadas.

Figura 41 – Desenvolvimento da questão

- pela fração que representa a parte do total de brigadeiros:

$$\frac{1}{5} \text{ de } 750 + \frac{1}{5} \text{ de } 750 + \frac{1}{5} \text{ de } 750 \text{ ou } 3 \times \frac{1}{5} \text{ de } 750 \text{ ou } \frac{3}{5} \text{ de } 750$$

Como podemos representar 3 pela fração $\frac{3}{1}$, então:

$$3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{1} \times \frac{1}{5} = \frac{\overset{3 \times 1}{3}}{\underset{1 \times 5}{5}}$$

Da mesma maneira, podemos calcular que fração da produção total foi obtida por Denise na quinta-feira e na sexta-feira:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{1} \times \frac{1}{5} = \frac{\overset{2 \times 1}{2}}{\underset{1 \times 5}{5}}$$

Usamos os sinais de multiplicação ($\times$ ou $\cdot$) para representar expressões como o dobro de cinco (2×5) ou o triplo de um quinto $\left(3 \cdot \frac{1}{5}\right)$.

Fonte: Bianchini (2015a, p. 183).

A Situação 2 apresentada é, também, problematizadora e é bem interessante, mas, novamente, é possível perceber algumas antecipações no desenvolvimento da abordagem, que poderia, na nossa opinião, ser mais bem organizada, como o aparecimento, de forma um tanto forçada, do denominador 1. E o caso é encerrado sem qualquer fechamento sobre o que foi aí tratado, sendo apenas propostos exercícios (nº 19 a 27) sobre multiplicação que envolve um número natural como um dos fatores, sendo que os exercícios 19, 20, 22 e 25 focam no algoritmo e os exercícios 21, 23, 24, 25 e 26 trazem situações contextualizadas.

Os exercícios 19, 20 e 21 trabalham com a transformação de uma adição de frações de parcelas iguais em multiplicação. E, nos exercícios 22 e 25, cabe destacar que o concreto é abandonado cedo demais (Figura 42), por exemplo, antes de o estudante perceber que nem sempre é possível determinar “fração de” quando lidamos com grandezas discretas. Na nossa opinião, o estudante poderia ter sido convidado, no exercício 22 a), por exemplo, a calcular $\frac{1}{3}$ de 5 prendedores, diferentemente de um terço de 5 barras de chocolates. Esta questão (diferentes conclusões, levando em conta se estamos lidando com grandezas discretas ou com grandezas contínuas) não aparece no livro do professor como pode ser constatado na Figura 42, na medida em que é apresentada uma única resposta.

Figura 42 – Exercício sem referência a situações concretas, oportunizando situações com dupla interpretação e, no entanto, com resposta única no Livro do Professor

22 Calcule.

a) $\frac{1}{3}$ de 5 $\frac{5}{3}$

b) $\frac{2}{5}$ de 9 $\frac{18}{5}$

c) $\frac{4}{7}$ de 8 $\frac{32}{7}$

d) $\frac{6}{8}$ de 4 $\frac{24}{8}$ (ou 3)

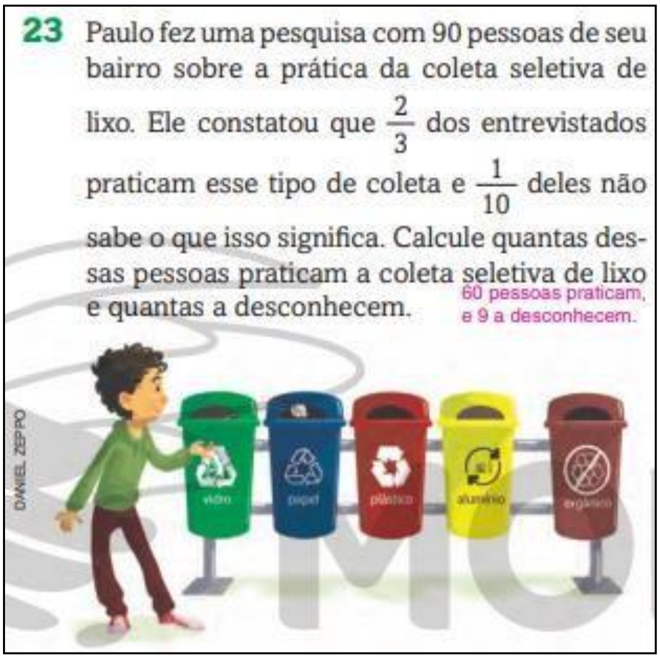
e) $\frac{1}{2}$ de 90 45

f) $\frac{1}{4}$ de 100 25

Fonte: Bianchini (2015a, p. 185).

Os exercícios 23, 24 e 26 abordam pesquisas envolvendo frações de grandezas discretas e tratam, respectivamente, sobre a prática de coleta seletiva de lixo, gêneros literários preferidos e a construção de tabelas sobre a preferência por sabores de sorvete. Consideramos essa uma forma de abordagem bem pertinente, pois trazem situações que podem, de fato, ser vivenciadas pelo estudante, como a da Figura 43.

Figura 43 – Exercício que aborda pesquisa envolvendo frações de grandeza discreta



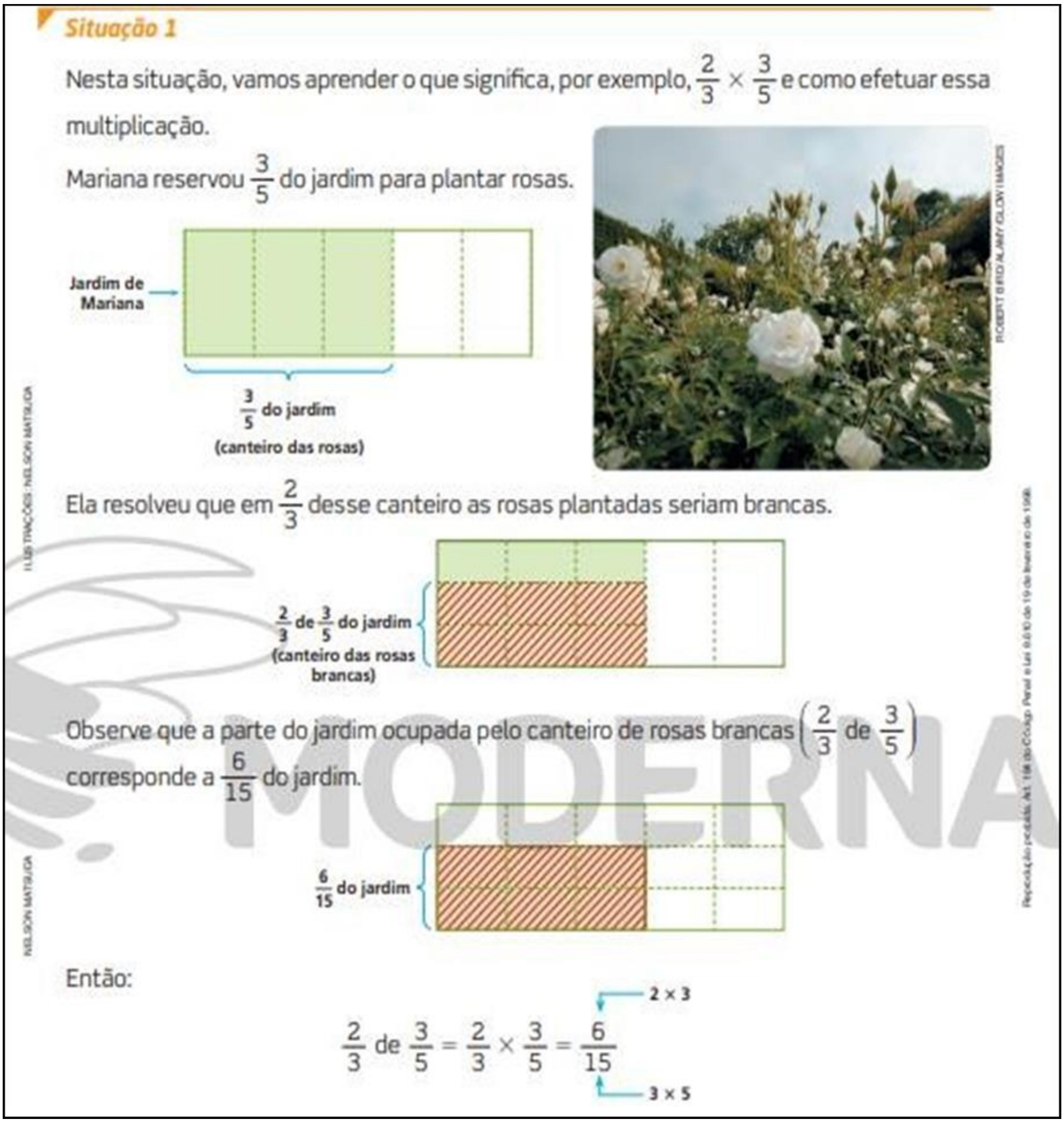
Fonte: Bianchini (2015a, p. 185).

O caso que trata da multiplicação de duas frações quaisquer é iniciado com uma situação problematizadora que consideramos bem pertinente e o seu desenvolvimento é conduzido de forma satisfatória (Figura 44), com exceção de dois pontos: como já observado em BIGODE (Figuras 35 e 36), a Situação 1 envolve frações em que o numerador de uma igual ao denominador da outra, no entanto, diferentemente daquele autor, este fato não foi explorado na resolução, portanto poderia ser facilmente evitado. A abordagem que ele propõe como resolução vem ao encontro da nossa proposta para ensino de multiplicação de fração por fração. Contudo, no que diz respeito à definição da multiplicação de fração por fração, o autor não ressalta que "$\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$" é "por definição" o mesmo que "$\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$", afirmando na última linha justamente o contrário:

$$\text{“}\frac{2}{3} \text{ de } \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5}\text{”},$$

sugerindo ao estudante que ele deveria saber calcular "$\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$", por meio de uma ideia diferente de "$\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$", oportunizando-lhe aí, na nossa opinião, uma barreira na compreensão do tema.

Figura 44 – Situação 1 que introduz a multiplicação de duas frações



Situação 1

Nesta situação, vamos aprender o que significa, por exemplo, $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$ e como efetuar essa multiplicação.

Mariana reservou $\frac{3}{5}$ do jardim para plantar rosas.

Ela resolveu que em $\frac{2}{3}$ desse canteiro as rosas plantadas seriam brancas.

Observe que a parte do jardim ocupada pelo canteiro de rosas brancas $\left(\frac{2}{3} \text{ de } \frac{3}{5}\right)$ corresponde a $\frac{6}{15}$ do jardim.

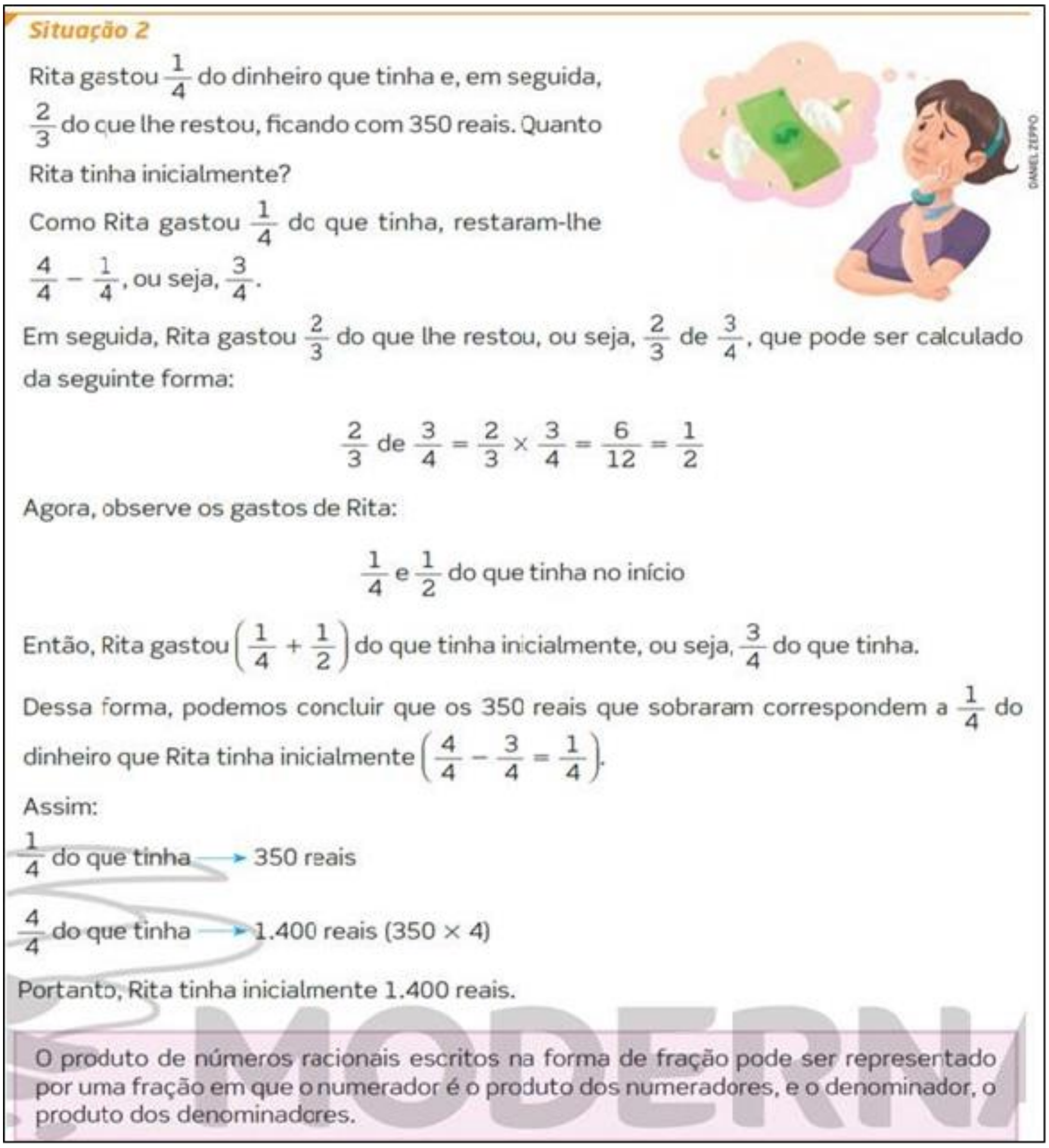
Então:

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{15} \quad \begin{matrix} \leftarrow 2 \times 3 \\ \leftarrow 3 \times 5 \end{matrix}$$

Fonte: Bianchini (2015a, p. 186).

A Situação 2, dessa mesma seção, já é mais complexa, pois envolve também a adição e a subtração na sua resolução, requerendo assim o domínio de vários conceitos prévios (Figura 45). Também aqui o autor traz frações satisfazendo numerador de uma fração igual ao denominador da outra e faz uso da ordem trocada (na nossa opinião) ao escrever "$\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ = $\frac{2}{3}$ x $\frac{3}{4}$". Ainda, na nossa opinião, a resolução dessa segunda situação poderia ter sido enriquecida com uma representação pictórica para promover a troca de representações e facilitar a compreensão dos argumentos e cálculos utilizados na resolução do problema.

Figura 45 – Situação 2 envolvendo a multiplicação de duas frações



Situação 2

Rita gastou $\frac{1}{4}$ do dinheiro que tinha e, em seguida, $\frac{2}{3}$ do que lhe restou, ficando com 350 reais. Quanto Rita tinha inicialmente?

Como Rita gastou $\frac{1}{4}$ do que tinha, restaram-lhe $\frac{4}{4} - \frac{1}{4}$, ou seja, $\frac{3}{4}$.

Em seguida, Rita gastou $\frac{2}{3}$ do que lhe restou, ou seja, $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, que pode ser calculado da seguinte forma:

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Agora, observe os gastos de Rita:

$$\frac{1}{4} \text{ e } \frac{1}{2} \text{ do que tinha no início}$$

Então, Rita gastou $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$ do que tinha inicialmente, ou seja, $\frac{3}{4}$ do que tinha.

Dessa forma, podemos concluir que os 350 reais que sobraram correspondem a $\frac{1}{4}$ do dinheiro que Rita tinha inicialmente $\left(\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\right)$.

Assim:

$\frac{1}{4}$ do que tinha $\rightarrow$ 350 reais

$\frac{4}{4}$ do que tinha $\rightarrow$ 1.400 reais (350 × 4)

Portanto, Rita tinha inicialmente 1.400 reais.

O produto de números racionais escritos na forma de fração pode ser representado por uma fração em que o numerador é o produto dos numeradores, e o denominador, o produto dos denominadores.

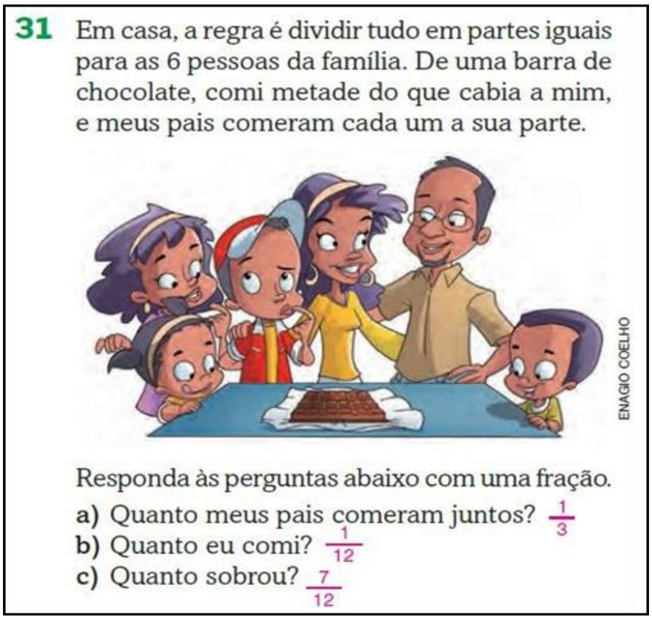
Fonte: Bianchini (2015a, p. 186-187).

Após a segunda Situação, constata-se outra troca de ordem: é destacado em um quadrinho o procedimento para efetuar uma multiplicação de frações “basta multiplicar numerador por numerador e denominador por denominador” (Figura 45), o que reforça o questionamento colocado anteriormente: como espera-se que o estudante calcule nas Situações 1 e 2 os produtos $\frac{2}{3}$ x $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{3}$ x $\frac{3}{4}$, respectivamente, por meio de uma ideia diferente de “$\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$” e “$\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$” ? Consideramos que a forma como é introduzida a multiplicação de frações quaisquer retira do aluno a oportunidade de refletir sobre as situações e de fazer as suas próprias considerações para, assim, conseguir definir o que é multiplicação com dois fatores fracionários.

São então apresentados três exemplos que focam apenas na aplicação do algoritmo. Após esses exemplos, são propostos cinco exercícios relativos à multiplicação de duas frações quaisquer e que envolvem, em geral, situações que não são coerentes com o conceito que está sendo estudado. Por exemplo, o primeiro exercício (nº 28) foca apenas no algoritmo; o segundo exercício (nº 29) traz uma situação que contempla fração de uma grandeza discreta, portanto, fração vezes número natural; a situação apresentada no terceiro exercício (nº 30) parece-nos fora de contexto real, pois trata sobre o quanto uma pessoa consegue "arar de um terreno por dia" (um terreno remete a área urbana, não condizendo com a proposta de arar, pois, normalmente, esse termo é utilizado quando estamos nos referindo a grandes extensões de terra).

Os dois últimos exercícios (Figuras 46 e 47) são interessantes para a problemática frações: o exercício nº 31 traz a ideia de divisão familiar de forma igualitária, oportunizando uma retomada do conceito de equipartição; contudo, consideramos que as perguntas, bem como as respostas no livro do professor, poderiam ter sido melhor formuladas, no sentido de dar ênfase à unidade (Figura 46).

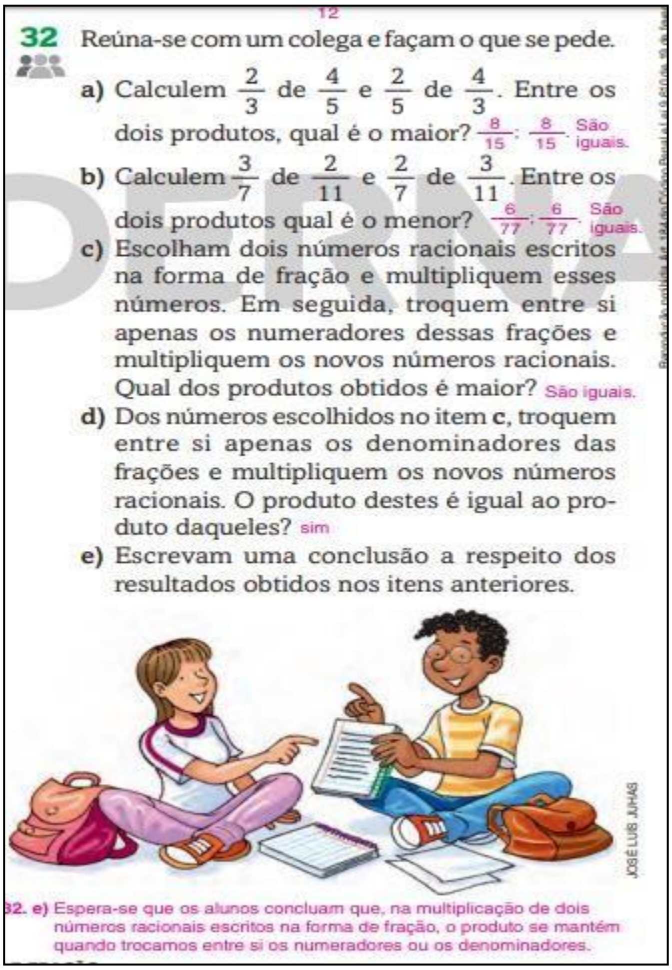
Figura 46 – Situação envolvendo a ideia de divisão familiar de forma igualitária



Fonte: Bianchini (2015a, p. 188).

O último exercício (Figura 47) abre espaço para que os alunos interajam em duplas e possam refletir sobre a situação posta e expor suas considerações e argumentos, o que consideramos interessante. Esse foi o primeiro exercício encontrado com um formato que consideramos muito enriquecedor para a autonomia do aluno e para o seu aprendizado, corroborando as orientações dos PCN, oportunizando uma retomada da propriedade comutativa da multiplicação de números naturais. No entanto, na nossa opinião, o autor perdeu uma grande oportunidade de incluir, aí também, a discussão da propriedade comutativa da multiplicação de frações. Outro aspecto a ser salientado neste enunciado é a utilização da frase “Escolha dois números racionais escritos na forma de fração...”, como se o estudante já soubesse o que é um número racional. O objetivo seria igualmente atingido com a frase “Escolha duas frações...”.

Figura 47 – Atividade na qual poderia ter sido discutida a propriedade comutativa da multiplicação de frações


12

32 Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

a) Calculem $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ e $\frac{2}{5}$ de $\frac{4}{3}$. Entre os dois produtos, qual é o maior? $\frac{8}{15}$; $\frac{8}{15}$. São iguais.

b) Calculem $\frac{3}{7}$ de $\frac{2}{11}$ e $\frac{2}{7}$ de $\frac{3}{11}$. Entre os dois produtos qual é o menor? $\frac{6}{77}$; $\frac{6}{77}$. São iguais.

c) Escolham dois números racionais escritos na forma de fração e multipliquem esses números. Em seguida, troquem entre si apenas os numeradores dessas frações e multipliquem os novos números racionais. Qual dos produtos obtidos é maior? São iguais.

d) Dos números escolhidos no item **c**, troquem entre si apenas os denominadores das frações e multipliquem os novos números racionais. O produto destes é igual ao produto daqueles? sim

e) Escrevam uma conclusão a respeito dos resultados obtidos nos itens anteriores.

32. e) Espera-se que os alunos concluam que, na multiplicação de dois números racionais escritos na forma de fração, o produto se mantém quando trocamos entre si os numeradores ou os denominadores.

Fonte: Bianchini (2015a, p. 202).

Dos dez exercícios complementares propostos ao final do capítulo, destacamos os exercícios 3, 8 e 9 que abordam multiplicação de frações, sendo que os exercícios 3 (Figura 48) e 9 (Figura 49) apresentam situações envolvendo gasto com combustível, o primeiro contemplando a recuperação da unidade (capacidade do tanque). O exercício 8 problematiza uma situação do dia a dia dos alunos (Figura 50) que pode ser tratada tanto com a divisão envolvendo fração no divisor (contudo esse conceito ainda não foi abordado até o momento) como com a multiplicação de números naturais, a partir da compreensão de que cada litro corresponde a 5 quintos (acredita-se que seja por isso que está sendo proposto aqui).

Figura 48 – Gasto de combustível

3 Cassio iniciou uma viagem com o tanque do carro cheio. Na 1ª parada, notou que havia gasto $\frac{1}{4}$ do combustível. Ao parar pela segunda vez, verificou que, entre a 1ª e a 2ª parada, o carro havia gasto metade do combustível que tinha sobrado na 1ª parada. Colocou, então, 30 litros de combustível, e o tanque ficou cheio novamente.

a) Qual é a fração que corresponde à quantidade de litros que restaram no tanque na 1ª parada? Represente por meio de um desenho. $\frac{3}{4}$

b) Qual fração corresponde ao combustível gasto no percurso da 1ª até a 2ª parada? Represente por meio de um desenho. $\frac{3}{8}$

c) Qual fração corresponde ao combustível gasto da saída até a 2ª parada? Represente por meio de um desenho. $\frac{5}{8}$

d) Qual fração corresponde ao combustível que havia no tanque na 2ª parada? $\frac{3}{8}$

e) Quantos litros cabem no tanque do carro de Cassio? 48 litros

Fonte: Bianchini (2015a, p. 202).

Figura 49 – Composição do combustível

9 A capacidade do tanque do meu carro é de 50 litros. O combustível que uso é composto de $\frac{4}{5}$ de gasolina e $\frac{1}{5}$ de álcool. Vou abastecer o carro com 30 litros de combustível. Quantos litros de gasolina colocarei no automóvel? 24 litros

Fonte: Bianchini (2015a, p. 202).

Figura 50 – Consumo de suco

8 Juliana serviu 18 litros de suco aos alunos da pré-escola. Cada aluno recebeu $\frac{1}{5}$ de litro. Quantos alunos foram servidos? 90

Fonte: Bianchini (2015a, p. 202).

Finalizamos os comentários ao volume 6 reiterando que, assim como nos números naturais, a propriedade comutativa da multiplicação não é natural para o estudante nem em situações do dia a dia (como já ressaltado anteriormente), nem em situações puramente numéricas: por que $\frac{3}{4}$ de 24 (fração de quantidade) deveria ter o mesmo resultado que 24 x $\frac{3}{4}$ (soma de parcelas iguais)? Portanto, na nossa opinião, a propriedade comutativa tem sim que ser bem explorada, começando, na nossa opinião, pelo caso em que um dos fatores é um número natural. Portanto, situações envolvendo a multiplicação de inteiro por fração deveriam ter sido exploradas neste volume.

No volume do 7º ano, dessa coleção, o Capítulo 2 é destinado ao conteúdo “Números Racionais”, totalizando 34 páginas. A seção 7, intitulada “Multiplicação de números racionais”, ocupa 3 páginas desse capítulo e traz uma situação introdutória que consideramos um tanto abrupta e complexa, pois ela não só envolve a representação de número racional na forma de porcentagem como também envolve uma multiplicação com quatro fatores: porcentagem, fração, número natural e número racional em representação decimal ($200\%.\frac{1}{2}$ .900.68,50), sem que a operação de multiplicação de frações tenha sido discutida com os estudantes (Figura 51).

Figura 51 – Primeira abordagem da multiplicação de frações no livro do 7º ano

Do mesmo modo que necessitamos adicionar ou subtrair números racionais para resolver problemas, também precisamos multiplicá-los.

Acompanhe a situação a seguir.

Paulo contratou serviços de jardinagem para fazer um canteiro em um terreno com área de 900 m². O jardineiro construiu um canteiro que ocupou 20% da metade desse terreno.

Como a empresa de jardinagem cobrou R$ 68,50 por metro quadrado de canteiro construído, quanto Paulo gastou?

Para descobrir a quantia, observe a expressão abaixo.

$$\underbrace{\overbrace{20\% \cdot \frac{1}{2} \cdot 900}^{\text{área do canteiro em metro quadrado}} \cdot 68{,}50}_{\text{despesa com a construção do canteiro}}$$

Agora, vamos calcular o valor dessa expressão.

$20\% \cdot \frac{1}{2} \cdot 900 \cdot 68{,}50 =$ Escrevemos 20% na forma de fração.

$= \frac{\overset{10}{\cancel{20}}}{\underset{1}{\cancel{100}}} \cdot \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} \cdot \overset{9}{\cancel{900}} \cdot 68{,}50 =$ Efetuamos as multiplicações dos três primeiros fatores.

$= 90 \cdot 68{,}50 =$ Efetuamos a multiplicação.

$= 6.165{,}00$

Portanto, Paulo gastou R$ 6.165,00.

Acompanhe outros exemplos.

a) $(-0{,}3) \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)$

Lembrando que $-0{,}3 = -\frac{3}{10}$, temos:

$$(-0{,}3) \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) = \left(-\frac{3}{\underset{2}{\cancel{10}}}\right) \cdot \left(-\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{8}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{16}$$

b) $-\frac{3}{4} - \left(-\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{6}\right) \cdot \left(+\frac{7}{\underset{1}{\cancel{5}}}\right) = -\frac{3}{4} - \left(-\frac{7}{6}\right) = -\frac{3}{4} + \frac{7}{6} = \frac{-9+14}{12} = \frac{5}{12}$

Fonte: Bianchini (2015b, p. 60).

Os exercícios desta seção envolvem mais a representação decimal do que a fracionária, o que consideramos inadequado, uma vez que ainda não foi dado significado para a multiplicação de frações.

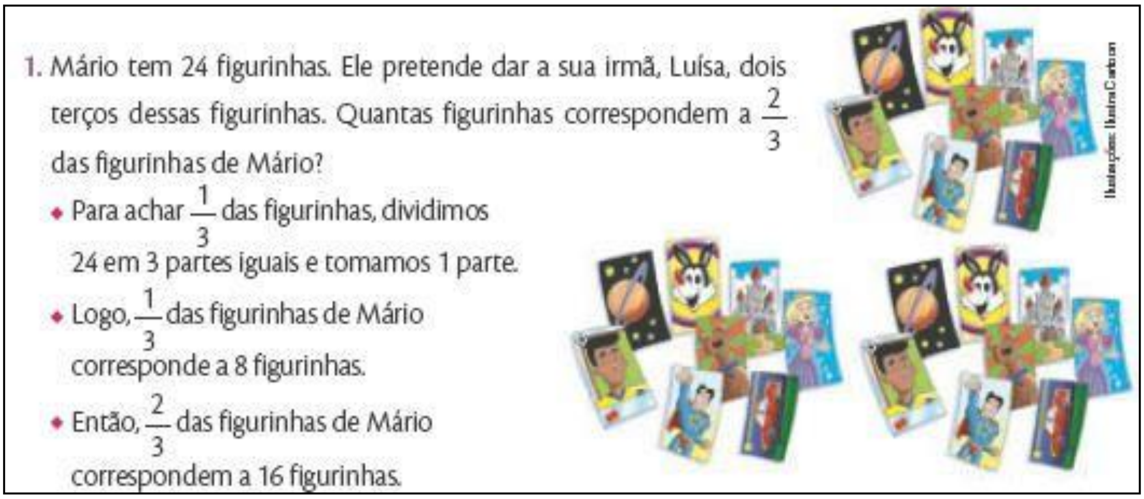
Da leitura desta coleção, salientamos a preocupação do autor em utilizar diversos recursos de representação para abordar os conceitos envolvendo multiplicação de frações, como propõe Duval. Por outro lado, algumas delas poderiam ter sido mais detalhadas. Alguns comentários sobre a operação de multiplicação também foram antecipados, o que, na nossa opinião, podem inibir a reflexão e a argumentação do aluno. Novamente, situações importantes da multiplicação de frações apontados pelos PCN não são contemplados na coleção, como o arranjo retangular e a comparação. Outra questão importante que não é trabalhada - e que é uma orientação dos PCN e uma colocação de Vergnaud - é a mudança conceitual da operação de multiplicação, que agora não mantém mais a propriedade de que o resultado pode ser menor que os fatores de multiplicação.

D) Coleção “PRATICANDO MATEMÁTICA”, de autoria de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos

O livro do 6º ano dessa coleção apresenta o conteúdo de frações na unidade 11 intitulada “Frações” que ocupa 28 páginas, sendo que a multiplicação de frações aparece em duas seções: Seção 2 - Fração de uma quantidade (p. 180-181), contemplando fração de uma grandeza discreta, e Seção 6 – Operações com frações (p. 191-195). Assim, como a coleção de Silveira e Bigode, essa coleção também aborda o ensino de “fração de uma quantidade” desvinculado da multiplicação de frações.

São apresentados, na introdução da Seção 2 (Fração de uma quantidade), dois problemas, ambos envolvendo apenas grandezas discretas. Na Situação 1 é solicitada a fração de uma quantidade inteira e, na Situação 2, é solicitada a recuperação da unidade. Ao analisar como foram abordadas as resoluções das situações propostas, pode-se constar que, na Situação 1, é utilizada, adequadamente, na nossa opinião, a linguagem escrita (Figura 52), porém, apenas ela, perdendo-se aí a oportunidade, de fazer-se uso de alguma outra representação, como o modelo pictórico de barras. Estaria-se, assim, explorando a conversão proposta por Duval e, também, sugerida nos PCN. Mais ainda, dentro da teoria de Vergnaud, estaria-se, com o modelo pictórico de barras, oportunizando mais um elemento que poderia ser evocado pelo aluno em outras situações. Salientamos também que a Situação 1 encaixa-se, na teoria de Vergnaud, como um problema de proporção simples, pois, para solucionar a questão, recorre-se à fração unitária $\frac{1}{3}$ para então pensar-se quanto seriam $\frac{2}{3}$. Contudo, o autor não menciona qual a operação pode/deve ser utilizada para obter-se $\frac{2}{3}$ nem retoma a definição de fração não unitária.

Figura 52 – Fração de uma quantidade de figurinhas

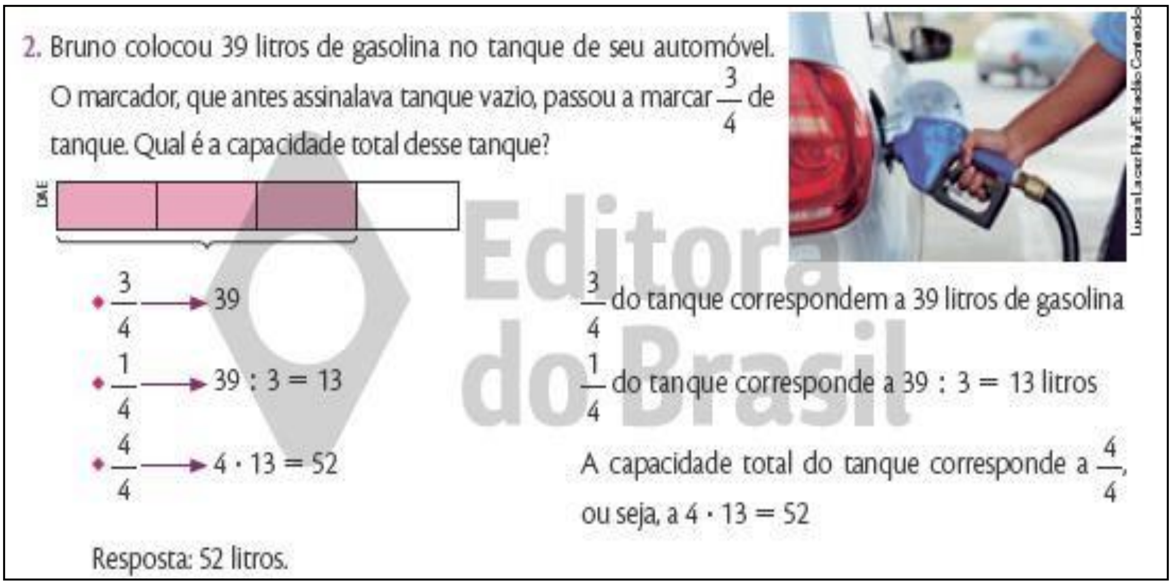


1. Mário tem 24 figurinhas. Ele pretende dar a sua irmã, Luísa, dois terços dessas figurinhas. Quantas figurinhas correspondem a $\frac{2}{3}$ das figurinhas de Mário?
- Para achar $\frac{1}{3}$ das figurinhas, dividimos 24 em 3 partes iguais e tomamos 1 parte.
- Logo, $\frac{1}{3}$ das figurinhas de Mário corresponde a 8 figurinhas.
- Então, $\frac{2}{3}$ das figurinhas de Mário correspondem a 16 figurinhas.

Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015a, p. 180).

A Situação 2 tem como proposta a recuperação da unidade (Figura 53) e o seu desenvolvimento parte do modelo pictórico de barras, o que consideramos positivo. Porém, essa representação é abandonada logo a seguir, passando-se a considerar apenas a representação numérica, a escrita e a conversão entre elas. Perde-se uma valiosa oportunidade de fazer-se uso até o final do argumento apoiado no modelo de barras. A Situação 2 encaixa-se, de acordo com a teoria de Vergnaud, também como um problema de proporção simples, no qual recorre-se à fração unitária para então recuperar-se a unidade.

Figura 53 – Situação 2 (Recuperação da Unidade)



2. Bruno colocou 39 litros de gasolina no tanque de seu automóvel. O marcador, que antes assinalava tanque vazio, passou a marcar $\frac{3}{4}$ de tanque. Qual é a capacidade total desse tanque?

- $\frac{3}{4} \longrightarrow 39$
- $\frac{1}{4} \longrightarrow 39 : 3 = 13$
- $\frac{4}{4} \longrightarrow 4 \cdot 13 = 52$

$\frac{3}{4}$ do tanque correspondem a 39 litros de gasolina

$\frac{1}{4}$ do tanque corresponde a $39 : 3 = 13$ litros

A capacidade total do tanque corresponde a $\frac{4}{4}$, ou seja, a $4 \cdot 13 = 52$

Resposta: 52 litros.

Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015a, p. 180).

Assim, com apenas um exemplo de fração de uma grandeza discreta e um exemplo de recuperação da unidade, são propostas, na sequência, três atividades para serem realizadas em duplas (Figura 54). A primeira atividade explora um pouco mais a Situação 1 da Figura 52. Com relação à Atividade 2, consideramos excessiva a complexidade envolvida para os alunos nesse momento, pois estes não foram apresentados, até este momento, a qualquer representação pictórica que dê conta de duas grandezas distintas (aqui volume e distância) e que dê, portanto, amparo ao desenvolvimento da atividade; em termos da teoria de Vergnaud, talvez o aluno não tenha o domínio dos conceitos a serem mobilizados nesta situação. Já a Atividade 3 é, na nossa opinião, uma ótima atividade para ser proposta aos estudantes, pois, além de envolver uma pesquisa, oportunizando o desenvolvimento da autonomia dos alunos, é um bom exercício para aplicação do conceito de fração de uma grandeza contínua.

Figura 54 – Seção “interagindo”

INTERAGINDO

Junte-se a um colega e registre no caderno.

1. Mário deu $\frac{2}{3}$ de suas figurinhas a Luisa. Ele ficou com mais ou com menos do que a metade do número de figurinhas? Menos.

2. Certo automóvel percorre 10 km com 1 litro de gasolina e seu tanque tem capacidade para 80 litros de combustível. Calcule quantos quilômetros ele pode percorrer com:

a) $\frac{1}{4}$ de tanque; 200 km b) $\frac{3}{4}$ de tanque; 600 km c) o tanque cheio. 800 km

3. Combine com os colegas: cada um pesquisa a capacidade do tanque de combustível de um modelo de automóvel. Em classe, montem juntos um quadro como o representado ao lado e façam os cálculos necessários para completá-lo. Resposta de acordo com a pesquisa.

Modelo	Tanque cheio	$\frac{1}{2}$ tanque	$\frac{1}{4}$ de tanque

Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015a, p. 180).

Ainda na Seção 2, são propostos dez exercícios relativos ao conceito de fração de quantidade, contemplando tanto grandezas continuas como discretas e que consideramos, de um modo geral, coerentes com as situações introdutórias. A maioria das atividades é de fácil resolução por parte do aluno, pois traz elementos do seu dia a dia. Alguns desses exercícios aparecem na Figura 55. Destacamos os exercícios 15 e 16 que, ao questionarem sobre a fração restante, antecipam a subtração de frações, um elemento que não foi abordado ainda neste volume e que será o próximo conceito a ser estudado. Provavelmente a intenção dos autores é verificar se o estudante reconhece a viabilidade de ampliar-se tal operação para o universo numérico das frações.

Figura 55 – Exercícios coerentes com a realidade do aluno

13. Recebo 30 reais de mesada mensal e gasto apenas $\frac{3}{5}$ dessa quantia. Deposito o restante na poupança para comprar um aparelho de som. Quanto deposito por mês? R$ 12,00

14. Numa omelete, Cássia gastou $\frac{2}{3}$ dos ovos de uma caixa como esta. Quantos ovos ela gastou? 8 ovos

15. Em uma classe de 36 alunos, $\frac{2}{9}$ ficaram para recuperação. Qual é o número de alunos aprovados sem necessidade de recuperação? 28 alunos

16. Um pacote continha 24 jujubas. Ari comeu um terço, Lia comeu um quarto e Maria, um sexto.

a) Quantas jujubas comeu cada um deles? Ari: 8 jujubas; Lia: 6 jujubas; Maria: 4 jujubas.

b) Será que restou um terço das jujubas no pacote? Não, pois $\frac{1}{3}$ de 24 é 8, e no pacote sobraram apenas 6 jujubas.

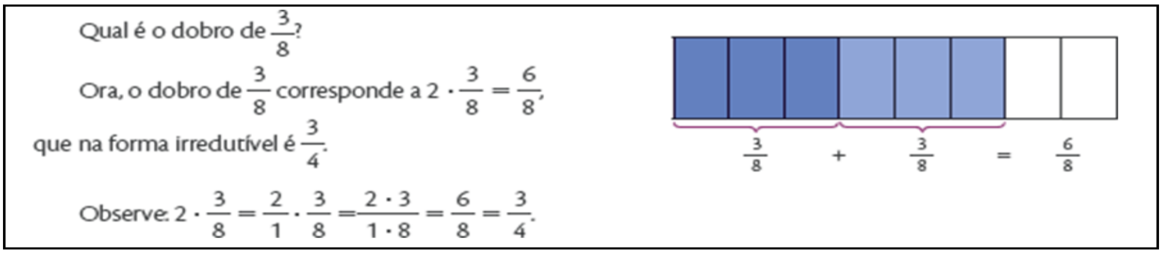
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015a, p. 180).

A Seção 6 trata das operações com frações e é subdividida em três subseções: “Adição e subtração com denominadores iguais”, “Adição e subtração com denominadores diferentes” e “Multiplicação envolvendo frações”. Divisão de frações integra a Seção 7, intitulada “Inverso de uma fração”.

A subseção “Multiplicação envolvendo frações” não inicia com uma problematização, mesmo assim consideramos seu desenvolvimento adequado no sentido de evocar-se a relação entre o “dobro de” e “2 vezes” (Figura 56), associação que consideramos fundamental como abordagem para preparar para a definição de multiplicação de frações quaisquer, conforme ficará claro na sequência de atividades que propomos no p´roximo capítulo. Além disso, o argumento apoia-se no modelo pictórico de barras, introduzindo uma situação de multiplicação de um número natural por uma fração como a adição de parcelas iguais, concordando com as orientações dos PCN (1997). No entanto, consideramos desnecessária, neste momento, a menção à redutibilidade do resultado (na nossa opinião, a retomada de frações equivalentes seria válida aqui, se também fosse apoiada no modelo de barras). Além disso, a finalização não prepara para o algoritmo e, sim, apenas o apresenta, perdendo-se aí a oportunidade de dar continuidade ao raciocínio baseado na soma de parcelas iguais, novamente apoiando a primeira igualdade no modelo de barras utilizado:

$$2 \text{ x } \frac{3}{8} = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3+3}{8} = \frac{2 \times 3}{8} = \frac{6}{8}$$

Figura 56 – Associando o “dobro de” a “2 vezes”



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015a, p. 194).

Na sequência, é abordada novamente a multiplicação de número natural por fração, tentando-se fazer a ponte com o exemplo anterior com a frase “De maneira semelhante, $\frac{1}{3} \times 12 = 4$, pois a terça parte de 12 é igual a 4”. No entanto, na nossa opinião, faltou um realce maior à definição, por exemplo, com a frase “De maneira análoga, definimos $\frac{1}{3} \times 12$ como a terça parte de 12, ou seja: $\frac{1}{3} \times 12 = \frac{1}{3}$ de 12”.

Com uma tal frase, os autores sugerem que a abordagem é a mesma do exemplo anterior, o que não é verdade: o estudante pode não perceber que tem-se aí uma nova definição sim (Figura 57), uma vez que, até o momneto, o cálculo da terça parte era expresso pela operação de divisão (divisão por 3). Ainda, ressaltamos a oportunidade perdida, nesse exemplo, com relação a uma das recomendações dos PCN e ao alerta de Vergnaud, no que diz respeito a obter-se um resultado menor do que um dos fatores envolvidos. Essa é uma importante propriedade que deve ser ressaltada no novo universo numérico. Surpreendeu-nos, também, o fato de ter-se anteriormente uma seção especifica para tratar de fração de uma quantidade inteira e esse exemplo ser aqui abordado de maneira totalmente desconectada daquela seção.

Figura 57 – Fração de uma quantidade inteira

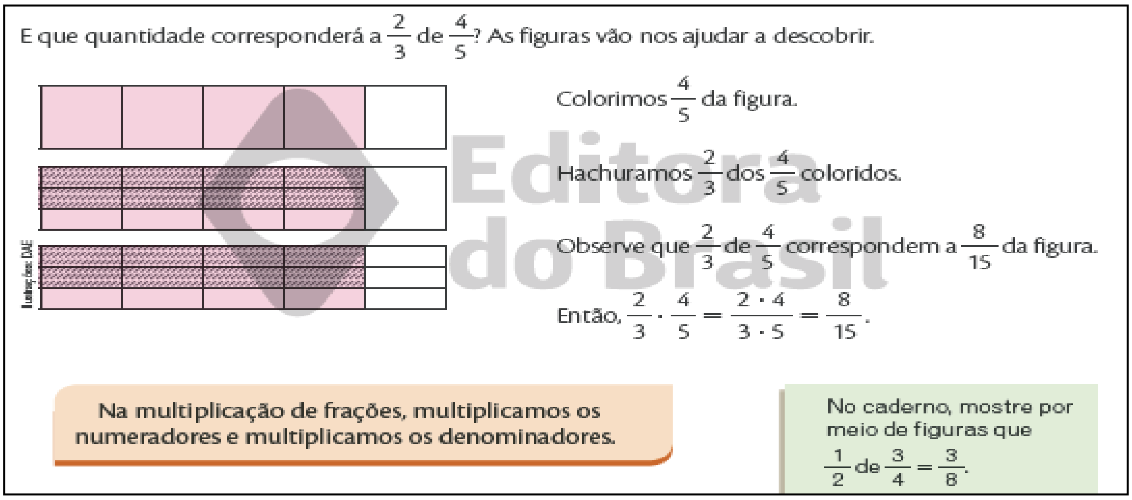
De forma semelhante, $\frac{1}{3} \cdot 12 = 4$, pois a terça parte de 12 é igual a 4.

Observe: $\frac{1}{3} \cdot 12 = \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{1} = \frac{1 \cdot 12}{3 \cdot 1} = \frac{12}{3} = 4$.

Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015a, p. 194).

Para abordar a multiplicação de fração por fração, o autor segue o mesmo raciocínio do primeiro exemplo (Figura 58), apoiando-se no modelo de barras e recorrendo à forma escrita para explicar cada etapa. Contudo, no nosso ponto de vista, poderia-se, nesse desenvolvimento, ter motivado a necessidade da equipartição com a pergunta: “e que fração da unidade correspondem $\frac{2}{3}$ dos $\frac{4}{5}$ hachurados?” Também o encaminhamento final não ressaltou a definição da multiplicação de frações; no lugar disso, o procedimento foi baseado no algoritmo registrado no quadrinho, no lugar de estimular o aluno a pensar como foram obtidos o numerador e o denominador da fração da unidade encontrada.

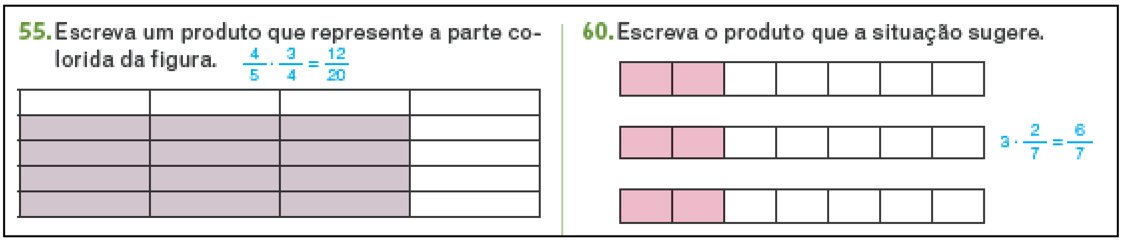
Figura 58 – Introduzindo multiplicação de fração por fração



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015a, p. 194).

A seguir, são propostos 11 exercícios dos quais 3 (n^os^ 58, 61 e 64) concentram-se apenas na aplicação do procedimento/algoritmo da multiplicação de frações. Destacamos que os exercícios 55 e 60 contemplam o processo inverso ressaltado por Duval (Figura 59). Cabe ressaltar, no entanto, o equívoco de resposta única no Manual do Professor, tendo em vista que a propriedade comutativa da multiplicação de frações ainda não foi discutida. Os estudantes poderiam ter sido desafiados a propor um problema que envolvesse em sua resolução a representação indicada. Cabe ressaltar que essa é uma Habilidade recorrente na BNCC: “elaborar e resolver problemas envolvendo...” .

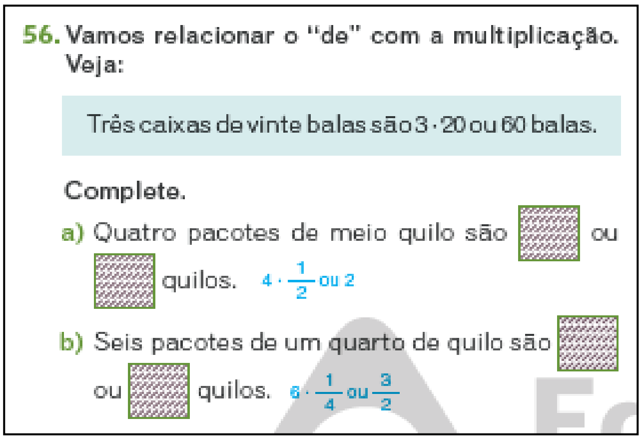
Figura 59 – Exercícios que envolvem o processo reverso



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015a, p. 195).

O Exercício 56 busca relacionar a expressão “tanto de” à multiplicação “tanto x” (Figura 60), o que é bem pertinente, porém um tanto tardio, na nossa opinião, como já deixamos claro anteriormente. O exercício aborda um conceito importante que deveria já ter sido explorado na introdução do capítulo.

Figura 60 – Exercício relacionando "tanto de" com a multiplicação



56. Vamos relacionar o "de" com a multiplicação. Veja:

Três caixas de vinte balas são 3 · 20 ou 60 balas.

Complete.

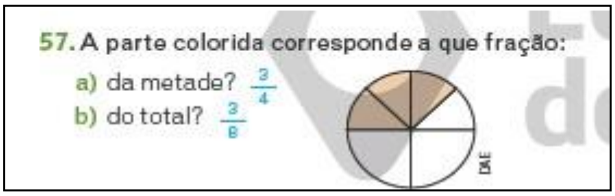
a) Quatro pacotes de meio quilo são ▒ ou ▒ quilos. $4 \cdot \frac{1}{2}$ ou 2

b) Seis pacotes de um quarto de quilo são ▒ ou ▒ quilos. $6 \cdot \frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{2}$

Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015a, p. 195).

O exercício 57 (Figura 61) também tem uma boa abordagem dentro da linha de raciocínio explorada nas situações introdutórias; apresenta a representação pictórica circular e faz com que os alunos reflitam sobre a equipartição.

Figura 61 – Fração de um inteiro



57. A parte colorida corresponde a que fração:

a) da metade? $\frac{3}{4}$

b) do total? $\frac{3}{8}$

Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015a, p. 195).

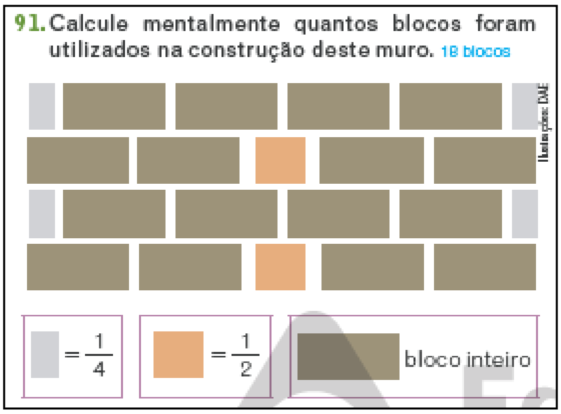
Achamos insuficiente o fato de apenas um exercício abordar uma situação envolvendo multiplicação de fração por fração (Figura 62, exercício nº 59) - o exercício anterior trata apenas da resolução por meio do algoritmo, por exemplo $(a)\ \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{8})$; os exercícios 62 e 65 trazem situações que contemplam multiplicação de um número natural por fração (Figura 62).

Figura 62 – Multiplicação de fração por fração e de um número por fração

Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015a, p. 195).

No final do capítulo de “Frações”, no volume do 6º ano, são propostos 24 exercícios de revisão, envolvendo todo o conteúdo apresentado sobre esse tema. Desses, 4 atividades envolvem multiplicação de frações. Destacamos a atividade 91, pelo caráter diferenciado da proposta que evoca para sua resolução tanto a multiplicação, quanto a adição de frações e pela variedade de resoluções que oportuniza (Figura 63).

Figura 63 – Situação envolvendo quantidade de blocos



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015a, p. 201).

Ainda no livro do 6º ano, pode-se encontrar a seção intitulada “Autoavaliação” que traz 16 questões que simulam provas com questões alternativas, seção esta que é importante para dar subsídio aos alunos para participar de provas de seleção ou de Olímpiadas de Matemática. Destacamos a questão 120, como uma boa proposta abordando a multiplicação de frações (Figura 64), além de requerer a mobilização da equivalência de frações em suas alternativas.

Figura 64 – Multiplicação de fração por fração e comparação com o todo

Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015a, p. 201).

No volume do 7º ano dessa coleção, apesar de existir a Unidade 2 intitulada “Frações e números decimais” que inclui a seção 4 intitulada “Expressões numéricas”, os autores não fazem uma retomada do que foi estudado no livro do 6º ano, focando em questões não contextualizadas e que não contemplam todas as operações, particularmente, a multiplicação de frações.

6.2 Nossa avaliação a partir da leitura crítica realizada

Para melhor identificar os critérios por nós analisados em cada coleção, construímos o Quadro 11, marcando os itens que foram atendidos.

Quadro 11 – Quadro resumo dos critérios atendidos por cada livro didático analisado

	Ênio 6º ano	Ênio 7º ano	Bigode 6º ano	Bigode 7º ano	Bianchini 6º ano	Bianchini 7º ano	Andrini e Vasconcellos 6º ano	Andrini e Vasconcellos 7º ano
1 - O(s) autor(es) problematiza(m) a introdução dos conceitos com situações contextualizadas?	X			X	X	X		
2 - É contemplada a situação de **adição de parcelas iguais** (multiplicação de um número por fração)?	X			X	X		X	
3 - É contemplada alguma situação de **arranjo retangular** (multiplicação de um número por fração)?		Só com represen-tação decimal	X					
4 - É contemplada alguma situação de **comparação** (multiplicação de um número por fração)?							X	
5 - É apresentada a **definição de multiplicação de frações** (principalmente o caso de fração por fração)?								
6 - São exploradas situações onde a **multiplicação por fração pode dar um resultado menor** do que algum ou ambos os fatores?				X				
7 - São proporcionadas situações que envolvem a **recuperação da unidade**?	X				X		X	
8 - São proporcionadas atividades onde **o aluno crie suas próprias situações**?					X			
9 - É contemplada uma discussão sobre a **propriedade comutativa** da multiplicação de frações?				X	X			

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Cabe notar, na linha 5, a contundente constatação de que nenhum livro apresenta a definição de multplicação de fração, indo contra a recomendação dos PCN de que: “A compreensão da multiplicação com frações pode ser pensada como “partes de partes do total” (neste caso, a multiplicação não se apoia na ideia de adição reiterada). Assim, pode ser interpretado como procurar $\frac{2}{5}$ dos $\frac{3}{4}$ de um todo.” (BRASIL,1998, p. 104). No que diz respeito a este importante item, concluímos que as coleções consideradas não atendem aos documentos oficiais vigentes. Mais especificamente, uma vez que é ampliado o universo numérico do estudante, torna-se necessário discutir se todos os conceitos e propriedades válidas no universo, até então considerado, podem ser ampliadas ou continuam válidas no novo universo. No caso da multiplicação no novo universo numérico dos estudantes, torna-se necessário definir o que será o produto de duas frações que não representam números naturais. Todos os autores abordaram a questão "fração de", mas nenhum deles tomou isso como definição para a multiplicação de frações explicitamente, o que, no nosso ponto de vista, constitui uma barreira para o desenvolvimento do pensamento matemático do estudante sobre ampliação de universo numérico e, especificamente, multiplicação de frações, por exemplo, ao ficar sugerido que "$\frac{2}{3}$ de" é calculado por meio da multiplicação "$\frac{2}{3}$ x", como se esta multiplicação já estivesse definida, quando na verdade deveria ser o contrário: define-se "$\frac{2}{3}$ x" como "$\frac{2}{3}$ de".

No entanto, o fato de termos apontado lacunas no desenvolvimento do tema, nas coleções consideradas, não nos impediu de encontrar lá bons exemplos e atividades interessantes. A prova disto é termos aproveitado algumas delas no planejamento da sequência de atividades que apresentamos no próximo capítulo, como, por exemplo, a situação proposta por Bigode, que envolve frações de quantidades inteiras e que constitui um marco importante na história dos trabalhadores: a regulamentação do tempo de trabalho (Figura 29).

7 A SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES QUE PROPOMOS E A ANÁLISE DA IMPLEMENTAÇÃO DA MESMA

Numa tentativa de mudar o cenário em que a multiplicação de frações é definida pelo algoritmo (multiplicam-se os numeradores entre si e os denominadores entre si) e que impede os alunos de entenderem e apreciarem a ampliação dessa operação do universo dos naturais para o universo das frações, bem como aplicar tal operação, construímos uma sequência de atividades buscnado oportunizar aos alunos a construção da multiplicação de frações, por meio de seus próprios esquemas de pensamento.

Antes de apresentar tal sequência, detalhamos, na próxima seção, o diferencial de nossa proposta em relação às coleções consideradas no capítulo anterior.

7.1 O diferencial da sequência de atividades que propomos

Na sequência de atividades, evitamos o termo “número racional”, diferentemente da autor Bianchini. Assim, o leitor não encontrará uma frase do tipo “Escolha dois números racionais escritos na forma de fração...”, como na Figura 47, que requer que o estudante já saiba o que é um número racional. Cabe ressaltar, que entendemos a utillização do termo nos PCN (bem como na BNCC) como uma mera alusão ao universo numérico. Em nosso trabalho, ao falarmos em “Universo das frações”, estamos justamente querendo ressaltar que o momento é, ainda, de discutir a representação fracionária desses números e como operar com elas.

No que diz respeito à definição de multiplicação de frações apresentada no Capítulo anterior, a sequência de atividades por nós elaborada também explora “fração de”, porém, diferentemente de todos os autores considerados, depois somos claras na explicitação da definição do produto “fração x fração“ (Atividades 25 e 29). Para tal, usamos como motivação/problematização, para a ampliação da multiplicação para o universo numérico das frações, a ideia de operador já presente no universo numérico dos naturais: de “o dobro de...” passamos a “$\frac{3}{4}$ de...” (Atividade 2) e, assim, seguimos a orientação dos PCN “a multiplicação pode ser pensada como partes e partes de um total” (BRASIL, 1998, p. 104).

Abordamos todos os possíveis casos de multiplicação de frações que consideramos fazerem parte de uma introdução à multiplicação de frações, ainda que, em um primeiro momento, sem ressaltar ao estudante a operação de multiplicação. Destacamos que, para nós, são 4 os casos a serem considerados, diferentemente de Bianchini, que separa “Multiplicação” em três casos, a saber: um dos fatores é um número natural, os dois fatores são escritos na forma de fração e os números racionais são inversos. Nossa escolha por separar em 4 seções (Multiplicação de um número natural por uma fração; Preparando a Multiplicação de uma fração própria por um número natural; Motivando e introduzindo a Multiplicação de uma fração própria por uma fração qualquer; Multiplicação de uma fração imprópria por uma fração qualquer) diz respeito ao fato de não considerarmos natural a propriedade comutativa da multiplicação, nem em situações do dia a dia (por exemplo, tomar o dobro de meia maçã, não é a mesma ação que tomar metade de duas maçãs) nem em situações puramente numéricas: por que $\frac{3}{4}$ de 24 (fração de quantidade inteira) deveria ter o mesmo resultado que 24 x $\frac{3}{4}$ (soma de parcelas iguais)?

Especificamente sobre fração de uma quantidade inteira, isto é, no caso de fração de uma grandeza discreta, ressaltamos que nenhuma das coleções consideradas no Capítulo anterior abordou a problemática de nem sempre ser possível determiná-la, apesar de trabalharem situações envolvendo grandezas discretas. Na nossa opinião, o estudante poderia ter sido convidado, por exemplo, a calcular $\frac{1}{3}$ de 5 prendedores e $\frac{1}{3}$ de 5 barras de chocolate. Na sequência de atividades que propomos a seguir, contemplamos esta conclusão a partir da Atividade 10, item f.

Diferentemente de Andrini e Vasconcellos, de Silveira e de Bigode, que abordam “fração de uma quantidade” desvinculado da multiplicação de frações, nós consideramos “fração x número natural” como um dos quatro casos de multiplicação de frações.

No que diz respeito a problemas envolvendo “fração de fração”, o encaminhamento de resolução que adotamos não é o sugerido por Bigode (Figura 36) e sim o sugerido por Bianchini (Figura 44) e por Andrini e Vasconcellos (Figura 58), com a diferença que ressaltamos como *definição* a multiplicação de frações como “fração de” nas Atividades 17, 18, 19 e 20.

Procuramos encaminhar na(s) Atividades 21, 22, 23, 24 e 25 a dedução do algoritmo para a multiplicação de frações, o que não foi encontrada nas coleções consideradas (ver, por exemplo, nossos comentários à Figura 58).

Finalmente, esperamos dar maior fluidez ao conteúdo multiplicação de frações, procurando evitar um ensino compartimentado e ressaltamos que a sequência de atividades foi planejada procurando atender as questões elencadas no Quadro 11.

7.2 A sequência de atividades que propomos

Apresentamos, a seguir, a sequência de atividades planejada por nós e que foi implementada em uma turma de 6º ano. Ressaltamos que a divisão em subseções tem apenas o objetivo de melhor orientar o leitor na proposta. Aos estudantes, as atividades foram propostas sem esta classificação.

Alguns dos enunciados a seguir sofreram alterações após a implementação e a análise relatada na próxima seção. Os enunciados complementados, bem como os objetivos e comentários e sugestões ao professor encontram-se no Produto Final e não serão repetidos aqui e sim explicitados durante a análise das resoluções dos estudantes.

As atividades foram agrupadas em 4 seções, seguindo uma ordem crescente de complexidade. Começamos pela multiplicação de um número natural por uma fração, por considerarmos este o caso mais simples, uma vez que nele é possível resgatar, da mutiplicação de números naturais, os conceitos de dobro, triplo, quádruplo, etc. e ampliá-los para o universo das frações: assim como 2×5 significa o dobro de 5, ou seja, 5 + 5, o produto $2 \times \frac{1}{5}$ significa o dobro de $\frac{1}{5}$, ou seja $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$. Na seção seguinte, preparamos para a multiplicação de uma fração própria por um número natural, trabalhando inicialmente com situações que requerem o cálculo de uma fração unitária de uma quantidade inteira, contexto que permite também resgatar a ideia de divisão de números naturais e sedimentar a relação entre as ideias de “um terço” e “divisão por 3”, por exemplo. A terceira seção traz situações que motivam a multiplicação de uma fração própria por uma fração qualquer por meio da ideia de “fração de fração”, para então introduzir a definição de multiplicação de frações, ainda que aí sejam apenas considerados como segundo fator frações próprias.Por fim, consideramos nesta introdução à multiplciação de frações uma quarta seção, que trata da multiplicação de uma fração imprópria por uma fração qualquer (na verdade aqui apenas prórpia), abordando situações que envolvem agora uma fração imprópria como primeiro fator, conceito que é mais coplexo para os estudantes. Salientamos que não são aqui abordados os casos fração imprópria x fração imprópria nem fração imprópria x número natural, o que encaramos já casos nem tanto introdutórios.

I) Multiplicação de um número natural por uma fração

Atividade 1) Jorge e Ana foram a uma pizzaria e pediram uma pizza de milho. Sabendo que Ana comeu $\frac{1}{6}$ da pizza e Jorge comeu o dobro de Ana,

a) represente a parte que Ana comeu da pizza;
b) represente a parte que Jorge comeu da pizza;
c) que operação você utilizou para realizar o cálculo da quantidade de pizza que Jorge comeu?

Registre-a abaixo.

d) Será que, juntos, Ana e Jorge comeram toda a pizza? Explique sua resposta.
e) Agora complete o quadro a seguir, que organiza todas estas resoluções: (quanto cada um comeu, com palavras, com representação pictórica, quanto comeram juntos).

	Com palavras	Com representação pictórica	Com números
Quanto Ana comeu?			
Quanto Jorge comeu?			
Quanto comeram juntos?			

Atividade 2) (Adaptado de SILVA, ALMOULOUD, 2008, p. 65) Como você calcularia as expressões abaixo e qual é o resultado:

a) O dobro de 4
b) O triplo de 7
c) O quádruplo de 2
d) O dobro de $\frac{1}{5}$
e) O triplo de $\frac{1}{2}$
f) O quádruplo de $\frac{1}{9}$

Atividade 3) (Adaptado de SILVA, ALMOULOUD, 2008, p. 66) Utilize a representação numérica e a representação pictórica para representar as seguintes quantidades de uma unidade.

a) o dobro de $\frac{1}{5}$ da unidade

Representação numérica	Representação pictórica

b) o triplo de $\frac{3}{10}$ da unidade

Representação numérica	Representação pictórica

c) o quádruplo de $\frac{2}{5}$ da unidade

Representação numérica	Representação pictórica

d) o quíntuplo de $\frac{3}{7}$ da unidade

Representação numérica	Representação pictórica

Atividade 4) (Adaptado de Giovanni Júnior; Castrucci, 2009, p. 89) Observe a figura e responda as questões a seguir:

a) Como podemos observar, a jarra contém 1 litro de água. Essa quantidade corresponde a qual fração da capacidade da jarra? ___________________________

b) Quanto de água cabe em $\frac{1}{3}$ da jarra? __________

c) Quanto de água cabe na jarra inteira? __________

Atividade 5) Observe as embalagens de refrigerante e responda:

Fonte: https://br.depositphotos.com/stock-photos/refrigerante-2-litros.html?filter=all&sorting=best_sales&qview=118272236 e https://br.depositphotos.com/stock-photos/lata-de-refri-soxinha.html?filter=all&sorting=best_sales&qview=40944051

a) Se derramarmos a lata de refrigerante na garrafa vazia de 1 litro, que fração da garrafa ficaria cheia?
b) E se derrramássemos duas latas, que fração da garrafa de um litro nós teríamos?

Atividade 6) (Adaptado de Jacob, Sitbon; Vissio, 2009, p. 81) Paulo encheu 12 garrafas de água com o conteúdo de uma bombona. Cada garrafa tem capacidade igual a três quartos de litro.

Fonte: https://br.depositphotos.com/stock-photos/bombona-de-%C3%A1gua.html?filter=all&qview=24435499

Quantos litros de água havia na bombona?

Atividade 7) Agora é a sua vez:

i) elabore com o seu grupo um problema envolvendo uma situação do seu dia a dia utilizando a expressão escrita na ficha que seu grupo sorteou e registre-o em uma folha de papel;
ii) troque sua folha com o problema com algum outro grupo e resolva o problema que seu grupo recebeu.

O dobro de $\frac{1}{3}$	O triplo de $\frac{1}{2}$	O quádruplo de $\frac{1}{5}$	O quintuplo de $\frac{1}{3}$
O dobro de $\frac{3}{4}$	O triplo de $\frac{2}{5}$	O quádruplo de $\frac{2}{5}$	O quintuplo de $\frac{3}{7}$

II) Preparando a Multiplicação de uma fração própria por um número natural

Atividade 8) Em cada um dos conjuntos a seguir determine:

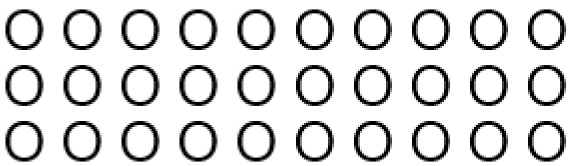
a) $\frac{1}{3}$ de 15 prendedores

b) $\frac{2}{3}$ de 15 prendedores

c) $\frac{3}{10}$ de 20 cartinhas

d) $\frac{4}{9}$ de 27 tampinhas

Atividade 9) Para o Natal, Paula decidiu confeccionar seus próprios enfeites, reutilizando CDs para enfeitar sua árvore de Natal. Ao todo tinha 30 CDs. Resolveu pintá-los da seguinte forma:



$\frac{1}{6}$ dessa quantidade de azul;
$\frac{2}{5}$ dessa quantidade de vermelho;
$\frac{3}{10}$ dessa quantidade de verde.
O restante dessa quantidade Paula coloriu de amarelo.

i) Com as informações acima, determine a quantidade de CDs pintados de cada cor, preenchendo o quadro a seguir

Cor	Quantidade
Azuis	
Vermelhas	
Verdes	
Amarelas	

ii) A que fração da quantidade total de CDs corresponde o número de CDs pintados de amarelo? Explique com palavras o que você fez para encontrar sua resposta.

Atividade 10) No início do ano letivo, a mãe de Ivan comprou dois cadernos de 200 páginas.

Um dos cadernos ele utilizou para as disciplinas de Matemática e Português, no qual distribuiu a mesma quantidade de folhas para cada disciplina.

a) Utilize a imagem abaixo para representar a distribuição feita para as disciplinas de Matemática e de Português:

Fonte: https://br.depositphotos.com/similar-images/48910635.html?qview=155697280l

b) Que fração do caderno ficou para Português? ______

c) A parte que ficou para Matemática pode ser representada pela fração ____ de 200 páginas, que equivale a ______ páginas.

d) Já estamos no final do ano letivo e Ivan verificou que já utilizou ¾ das páginas destinadas para Português. Quantas páginas ele já utilizou para esta disciplina? _________

e) Faça uma representação pictórica semelhante ao item a) para representar as páginas que já foram utilizadas da disciplina de Português.

O outro caderno foi utilizado para as disciplinas de Ciências, História e Geografia.

f) Será que Ivan vai conseguir distribuir as 200 páginas igualmente para cada disciplina? Explique sua conclusão.

g) Se você estivesse na mesma situação de Ivan, que fração do caderno você destinaria para cada uma dessas disciplinas?

h) Maria também tinha um caderno de 200 páginas e escolheu utilizar para as disciplinas de Ciências, Geografia e História fazendo a distribuição das páginas seguindo a representação abaixo:

Fonte: Adaptado de https://br.depositphotos.com/similar-images/155695090.html?qview=155696146

i) Que fração do caderno de Maria foi destinada a Ciências? E quantas páginas foram destinadas para essa disciplina?

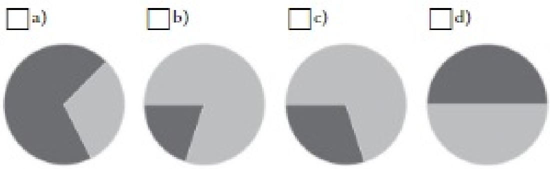
j) João falou a Maria que o total de páginas que ela destinou à disciplina de História corresponde a $\frac{1}{3}$ do caderno. Está correta a afirmação de João? Justifique:

k) Qual o total de páginas que Maria destinou à disciplina de Geografia e que fração do caderno representa esse total?

Atividade 11) (Adaptado de Brault; Daro; Perbos-Raimborg; Ploy; Telmon, 2005, p. 95).

A avó de Louis preparou um bolo de 400g. Durante a tarde Louis comeu dois quintos do bolo.

a) Em um dos gráficos, abaixo, a parte cinza escuro indica a parte que Louis comeu do bolo. Marque com um x a representação correta:



b) Quantas gramas de bolo que foi comido por ele?

c) E quanto sobrou para o dia seguinte?

Atividade 12) (Adaptado de Brault; Daro; Perbos-Raimborg; Ploy; Telmon, 2005, p. 95). Heidi está com o colesterol um pouco acima do limite, mas não quer ficar sem comer um picolé de sobremesa. Então, como ela tem a escolha entre dois picolés, ela lê o rótulo e escolhe aquele que a faz consumir menos gordura.

- Picolé de morango: pesa 100 g, sendo $\frac{2}{5}$ dele gordura.
- Picolé de chocolate: pesa 90 g sendo $\frac{2}{3}$ dele gordura.

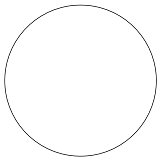
Ajude Heidi a decidir.

Atividade 13) Leia a matéria disponibilizada no site do G1. Globo.com:

> Edição do dia 23/06/2010
> 23/06/2010 21h12 - Atualizado em 23/06/2010 21h12
>
> **IBGE aponta despesas que mais pesam no orçamento familiar**
>
> Mais de 68% das famílias concluem que gastam mais do que ganham. Os brasileiros gastam quase um terço de seus rendimentos com habitação. Em segundo lugar, vêm alimentação e transporte.

Fonte: Globo.com (2010).

a) Represente no disco abaixo, tomando-o como o rendimento total, a fração do rendimento total que indica quanto os brasileiros gastam aproximadamente com habitação.



b) Com base na informação contida nessa reportagem, quanto gasta com habitação, aproximadamente, uma família cuja renda mensal é de R$ 2.100,00?

c) Dê exemplos, que você considera razoáveis, de frações do rendimento mensal de uma família que poderiam ser destinadas para alimentação e transporte.

Transporte: ________ Alimentação: ________

d) Faça o cálculo do gasto que você estimou no item c) para alimentação e transporte, levando em consideração um rendimento de R$ 2.100,00. A seguir responda: sobrou alguma quantia para lazer?

e) Você acha que os gastos do rendimento mensal de uma família devem ser destinados apenas a moradia, transporte e alimentação? Justifique sua resposta.

Atividade 14) As amigas Joice e Cristina resolveram morar juntas para economizar no aluguel. Decidiram que Joice arcaria com $\frac{2}{3}$ do valor do aluguel, que é de R$ 500,00.

a) Quem está pagando mais aluguel?

b) Você acha justa esta divisão, sabendo que os salários de Joice e Cristina são o mesmo?

c) E se Joice ganhasse mais que Cristina, você acha que a divisão do aluguel se tornaria justa?

d) Qual seria, na sua opinião uma divisão justa do aluguel? E qual o valor que cada uma pagaria?

Atividade 15) (Adaptado de Bigode, 2015a, p. 195):
Leia o relato histórico sobre como se estabeleceu o regime de trabalho que vigora no Brasil:

No fim do século XIX, e mesmo durante boa parte do século XX, a maioria dos trabalhadores, principalmente aqueles que trabalhavam em oficios "pesados", como os mineiros e os operários, chegavam a trabalhar 14 horas ou mais por dia, em condições muito ruins. Muitos só paravam de trabalhar para se alimentar e dormir, para repor as energias do corpo cansado.

Para transformar essa situação, os trabalhadores mobilizaram-se em associações de apoio mútuo e em sindicatos para reivindicar melhores condições de trabalho. Uma das discussões tratava sobre como o dia de trabalho deveria ser dividido.

No dia 1º de maio de 1886, na cidade de Chicago, nos Estados Unidos, uma grande manifestação exigiu que a jornada de trabalho fosse de 8 horas por dia, para que pudessem fazer outras coisas além de só trabalhar, comer e dormir. Esta legislação passou a ser adotada no Brasil só a partir de 1932.

O número de horas reivindicado, oito, não é um número qualquer, seu cálculo foi determinado a partir da fração de um dia de 24 horas.

a) Com base nesta informação, a que fração do dia correspondem as 8 horas destinadas para o trabalho?

b) Em média, quantas horas você dorme por dia? A que fração do dia corresponde esse número de horas de sono?

c) Pesquise na internet qual é o número de horas de sono destinado à sua faixa etária e determine a fração que este número de horas representa do dia. Em seguida compare com a sua resposta anterior e responda. Você fração do dia que você dorme é mais ou menos do que o recomendado?

	Número de horas	Fração que representa do dia
De sono que você dorme.		
De sono que é recomendado que sua faixa etária durma.		

d) Considerando que passamos 4 horas na escola, a que fração do dia corresponde esse número de horas de escola?

e) Faça uma representação pictórica para ilustrar o fracionamento do seu dia com relação às atividades que você desenvolve durante o dia. Qual a atividade que ocupa a maior porção do seu dia?

Atividade 16) Agora é a sua vez:

i) elabore com o seu grupo um problema envolvendo uma situação do seu dia a dia que utiliza em seu enunciado ou em sua resolução a expressão escrita na ficha que seu grupo sorteou;
ii) troque o problema com algum outro grupo e resolva o problema que seu grupo recebeu.

$\frac{2}{3}$ de 15	$\frac{3}{4}$ de 40	$\frac{2}{3}$ de 33	$\frac{3}{4}$ de 64
$\frac{2}{5}$ de 30	$\frac{2}{6}$ de 42	$\frac{3}{5}$ de 30	$\frac{5}{6}$ de 30

III) Motivando e introduzindo a Multiplicação de uma fração própria por uma fração qualquer

Atividade 17) (Adaptada de SILVA, ALMOULOUD, 2008, p. 67): Siga as instruções a seguir:

a) Divida o retângulo que você recebeu em quatro partes iguais e destaque de amarelo $\frac{1}{4}$ do retângulo. Agora destaque de laranja, a metade desse $\frac{1}{4}$ pintado de amarelo.

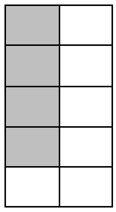
Afinal, que fração do retângulo você pintou de laranja? _______

b) Agora complete, usando fração:

$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ do retângulo equivale a ______ do retângulo.

Atividade 18) Pinte $\frac{2}{3}$ da metade do retângulo de papel que você recebeu. A que fração da folha corresponde esta parte pintada? Faça o registro abaixo:

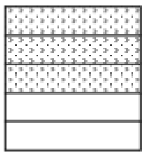
Atividade 19) Observe a figura a seguir e responda:



a) A que fração do retângulo corresponde a parte pintada de cinza? Justifique.

b) A que fração da metade do retângulo corresponde a parte pintada de cinza? Justifique.

Atividade 20) (Adaptado de SILVA, ALMOULOUD, 2008, p. 67): Observe a figura e responda as questões:



a) A que fração do retângulo representa a parte hachurada? _____

b) Pinte dois quartos da parte hachurada do retângulo.

c) Com base na pintura feita no item b), que fração a parte pintada representa da figura inteira? _______.

d) Agora complete, usando fração:

$\frac{2}{4}$ de ____ da figura equivale a ____ da figura.

Atividade 21) (Adaptado de Saresp, 2005, Cadernos de Apoio e Aprendizagem, p. 198): Em um sítio, a área destinada ao plantio corresponde a $\frac{1}{3}$ de sua área total.

a) Faça uma figura ilustrando a área do sítio e a fração destinada ao plantio.

b) Uma plantação de tomates foi feita de modo a ocupar $\frac{2}{5}$ da área destinada ao plantio. Marque na figura que você fez no item (a) a área ocupada pela plantação de tomates.

c) Observe a representação feita no item b) e responda: A plantação de tomates representa que fração da área total do sítio?

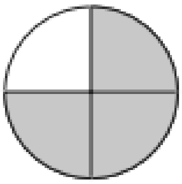
d) Podemos dizer então que:

$\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3}$ da área do sítio = _______ da área do sítio

ou, numericamente,

$\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$ da área do sítio =_______ da área do sítio

Atividade 22) (Adaptado de SILVA, ALMOULOUD, 2008, p. 67): Observe a representação pictórica e responda**:**



a) Que fração do disco está sendo representada pela parte pintada de cinza? ____

b) Agora, pinte de vermelho a metade da parte cinza do disco. Complete a fração do que você acabou de pintar de vermelho: $\frac{1}{2}$ de ____ do disco.

c) Que fração do disco representa a parte que você pintou de vermelho?______

d) Agora complete:

$\frac{1}{2}$ de ____ do disco = ____ do disco.

e) Represente numericamente a igualdade acima.

Atividade 23) Amanda e Bruno encomendaram juntos um xis salada e dividiram-no ao meio.

a) Faça uma figura ilustrando a porção do xis que cabe a cada um deles:

b) É possível que Bruno coma $\frac{3}{4}$ do xis que foi encomendado? Justifique sua resposta:

c) Amanda comeu apenas $\frac{3}{4}$ de sua metade. Faça uma figura ilustrando a fração do xis inteiro que Amanda comeu.

d) Que fração do xis representa a porção que Amanda comeu? ____

e) Agora complete, usando fração:

$\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{2}$ do xis = $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{2}$ do xis = ______ do xis.

Atividade 24) (Adaptado de SILVA, ALMOULOUD, 2008, p. 66): Utilize a representação numérica e a representação pictórica para representar as seguintes quantidades de partes de uma unidade.

a) $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{5}$

Representação numérica	Representação pictórica

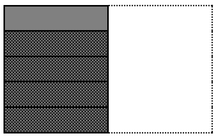
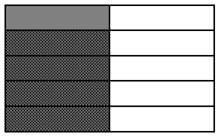
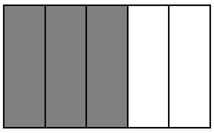
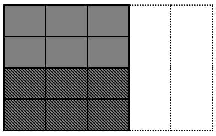
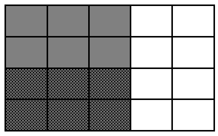
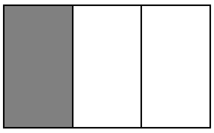
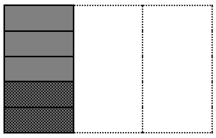
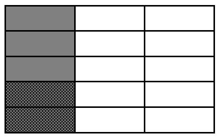
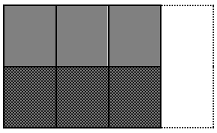
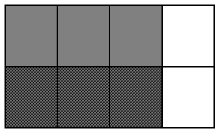
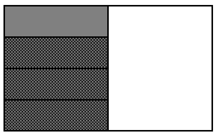
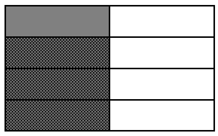
b) $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{4}$

Representação numérica	Representação pictórica

c) $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$

Representação numérica	Representação pictórica

Atividade 25) Observe a tabela construída com base nas atividades 19, 20, 21, 22 e 23 e responda as questões a seguir:

Atividade	Parte da unidade	Parte de parte da unidade		Fração da unidade
		Representação em palavras	Representação numérica	
Atividade 19	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$ de $\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$ x $\frac{1}{2}$	$\frac{4}{10}$
				
Atividade 20	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{4}$ de $\frac{3}{5}$	$\frac{2}{4}$ x $\frac{3}{5}$	$\frac{6}{20}$
				
Atividade 21	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$ x $\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$
				
Atividade 22	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$ x $\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$
				
Atividade 23	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{\frac{3}{4}}$ de $\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{3}{4}}$ x $\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\frac{3}{8}$
				

a) Em cada atividade, que operação podemos utilizar para chegar na fração da unidade?

b) Observando o desenho da representação compare se o resultado obtido foi maior ou menor que parte da unidade considerada inicialmente? Justifique sua resposta.

c) Sem observar o desenho, como você poderia, no item anterior, ter certeza de sua resposta?

IV) Multiplicação de uma fração imprópria por uma fração qualquer

Atividade 26) Pedro reservou $\frac{1}{3}$ do seu salário para gastos com moradia. No final do mês, percebeu que o aluguel da sua casa havia aumentado, constatando que gastou $\frac{3}{2}$ da quantia prevista para moradia.

a) Afinal o gasto com moradia foi igual à fração do salário que ele reservou, ou extrapolou o programado? Justifique.

b) Preencha na tabela a seguir, cada etapa do processo:

	Representação pictórica	Representação numérica
Parte do salário previsto para ser gasto com moradia		
Parte do previsto em modaria que foi, afinal, gasto		
Fração do salário que foi gasto em moradia		

c) Que fração do salário de Pedro foi gasto afinal em moradia?

d) Será que a parte que foi gasta com moradia extrapolou o salário de Pedro? Justifique:

e) Que fração da prestação poderia produzir um valor que ultrapassasse o salário de Pedro?

Atividade 27) Laura destinou $\frac{1}{5}$ do seu terreno para fazer uma horta. Ele foi à floricultura comprar mudas e ao plantá-las viu que a área que o canteiro ocupou representava $\frac{4}{3}$ do que ela havia programado para o plantio.

a) Faça um registro pictórico para representar a situação no terreno de Laura.

b) A região que ela usou para o plantio foi maior ou menor do que ela tinha separado para plantar? Justifique:

c) Que fração do terreno que Laura usou, afinal, para o plantio?

Atividade 28) Utilize a representação numérica e a representação pictórica para representar as seguintes sentenças:

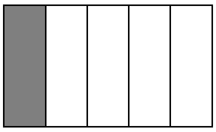
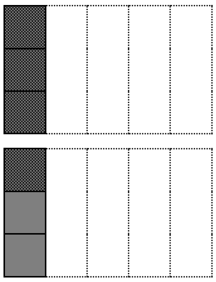
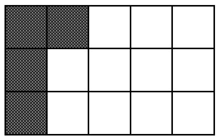
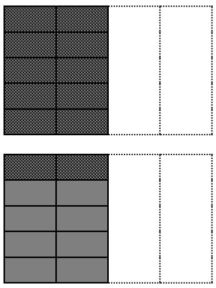
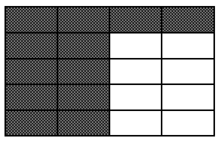
a) $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{4}$

Representação numérica	Representação pictórica

b) $\frac{6}{5}$ de $\frac{2}{4}$

Representação numérica	Representação pictórica

Atividade 29) Observe a tabela construida com base nas atividades 28 e 29 e responda as questões a seguir:

Atividade	Parte da unidade	Parte de parte da unidade		Fração da unidade
		Representação em palavras	Representação numérica	
Atividade 27	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$	$\frac{4}{3}$ x $\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$
				
Atividade 28b	$\frac{2}{4}$	$\frac{6}{5}$ de $\frac{2}{4}$	$\frac{6}{5}$ x $\frac{2}{4}$	$\frac{12}{20}$
				

a) Observando o desenho da representação compare se o resultado obtido foi maior ou menor que parte da unidade considerada inicialmente? Justifique sua resposta.

b) Sem observar o desenho, como você poderia, no item anterior, ter certeza de sua resposta?

Atividade 30) João resolveu a multiplicação $\frac{4}{3}$ x $\frac{1}{3}$ e encontrou $\frac{4}{6}$ como resultado. Alice deu uma olhada e afirmou rapidamente “seu resultado está errado!”

a) Como ela pode ter tanta certeza?

b) E qual seria o resultado correto da operação $\frac{4}{3}$ x $\frac{1}{3}$ que João resolveu?

Atividade 31) Agora é a sua vez:

i) elabore com o seu grupo um problema envolvendo uma situação do seu dia a dia que utiliza em seu enunciado ou em sua resolução a expressão escrita na ficha que seu grupo sorteou;
ii) troque o problema com algum outro grupo e resolva o problema que seu grupo recebeu.

$\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{5}$	$\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{3}$	$\frac{4}{2}$ de $\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$
$\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$	$\frac{3}{2}$ de $\frac{2}{6}$	$\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{6}$

O Quadro 12 explicita a distribuição das atividades propostas levando em consideração o Quadro 11 do Capítulo 6.

Quadro 12 - Quadro resumo dos critérios por nós elencados e atendidos na sequência de atividades que propomos

	Atividade (ver Apêndice)
Introdução de conceito por meio de situação contextualizada	1, 8, 17
Situação contemplando adição de parcelas iguais	1, 2, 5
Situação contemplando arranjo retangular	9
Situação contemplando comparação	multiplicação de um número natural por fração: 1, 12, 14 identificando fator multiplicativo: 15
Situação contemplando a definição de multiplicação de frações (principalmente o caso de fração por fração)	24, 25, 28
Situação contemplando uma multiplicação cujo produto é menor do que algum ou ambos os fatores	25
Situação contemplando recuperação da unidade	4, 6
Atividade que oportuniza ao aluno criar suas próprias situações	7, 13, 16, 31

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

As Atividades 3 e 19 não estão elencadas no Quadro 12 porque tratam de representação pictórica, tópico não elencado no Quadro 11. O mesmo acontece com as Atividades de 8 a 24, que são consideradas preparatórias para a definição da multiplicação de frações, sendo que as Atividades de 8 a 16 trabalham com fração de uma grandeza discreta enquanto que as Atividades de 17 a 24 trabalham com fração própria de uma grandeza contínua (fração de fração). As Atividades 26 e 27 trabalham com fração imprópria de uma grandeza contínua (fração de fração) e preparam o estudante para a Atividade 28, que completa a definição de multiplicaçao de frações.

Cabe ressaltar que, por considerarmos arranjo retangular uma representação para a multiplicação de números naturais e não um significado, ele aparece apenas na Atividade 9, mas é basicamente considerado como uma possível manifestação do estudante na representação de uma situação (por exemplo, na resolução da Atividade 8).

7.3 Sobre a implementação e análise da implementação

A implementação da sequência de atividades ocorreu na turma 160 (6º ano) da EMEF Professora Noemy Fay dos Santos, de Parobé/RS, que contava em 2019 com vinte e quatro (24) alunos, da qual eu era a professora titular. A prática teve duração de treze encontros, totalizando 20 horas em sala de aula, sendo que o primeiro encontro foi realizado no dia 13 de novembro de 2019, e o último no dia 13 de dezembro de 2019.

Os alunos dessa turma não tinham conhecimentos prévios sobre frações. Iniciamos o trabalho com frações utilizando a sequência de atividades proposta em Souza (2019b), por considerá-la adequada e suficiente para serem contemplados os pré-requisitos para a sequência de atividades que planejamos (introdução ao conceito de fração unitária e não unitária, comparação, adição e subtração, equivalência). De fato, as questões lá apresentadas revelaram-se muito úteis para uma posterior construção de esquemas de pensamento, pelos estudantes, em situações que envolvem o campo multiplicativo

Os alunos foram muito participativos durante a correção dos exercícios em plenária, verbalizando os esquemas de pensamento que haviam empregado na resolução individual das atividades. Assim, os momentos de socialização das atividades foram ricos, pois proporcionaram, com eventuais interferências da professora/pesquisadora na forma de estímulo, uma troca de experiência entre os pares, o que ajudou a todos na resolução das tarefas seguintes.

Conforme já explicitado no Capítulo 1, para a análise de cada atividade proposta, utilizamos a produção original de cada estudante e que antecipou o momento de socialização e da correção da mesma com o grupo. Durante a análise, procuramos identificar e categorizar os teoremas e os conceitos que foram mobilizados pelos alunos em seus esquemas de pensamento no desenvolvimento das questões, bem como verificar se diferentes representações foram utilizadas. Foi registrada também a frequência com que as resoluções e respostas dos estudantes foram apresentadas. O detalhamento desta análise encontra-se no Apêndice A.

Relatamos, a seguir, o que foi possível perceber com relação aos esquemas de pensamento utilizados a partir da análise de cada atividade. Ficará claro ao leitor que a análise poderia ter sido maior se os os estudantes tivessem sido estimulados a justificar suas respostas, tendo em vista que justificar também gera aprendizado.. Por isso, em várias das atividades propostas no Produto Final foi incluída esta solicitação nos enunciados. No entanto, consideramos que as conclusões da pesquisa não ficaram prejudicadas por este fato.

Cabe ressaltar que utilizamos o termo "representação pictórica" (ou, simplesmente “representação” (como no enunciado da Atividade 1) para expressar qualquer forma de representação visual (desenhos, gráficos, barrinhas, etc.). Ressaltamos que os estudantes envolvidos na presente pesquisa estavam habituados com este termo.

A **Atividade 1** foi realizada por vinte e dois alunos. No desenvolvimento dos itens (a) (representação de $\frac{1}{6}$) e (b) (representação do dobro de $\frac{1}{6}$), percebemos que os alunos, em seus esquemas de pensamento, utilizaram diferentes representações para os conceitos em ação de unidade: representações na forma de retângulo (11 alunos), de retângulo e fração (4 alunos), de disco (6 alunos) e de fração (1 aluno).

Nas respostas ao item (c) da Atividade 1, foi possível identificar o esquema mobilizado por alguns alunos para determinar o dobro de $\frac{1}{6}$, sendo: 3 alunos mobilizaram a adição de frações, 7 alunos mobilizaram a multiplicação; 6 que não relataram qual o esquema mobilizado para obtenção do resultado $\frac{2}{6}$; 4 alunos que evocaram o conceito de equivalência e não o de dobro; e 2 que não responderam ao solicitado.

No item d) da Atividade 1, 21 dos 22 alunos responderam que não foi comida toda a pizza, variando as justificativas para tal resposta, todas deixando claro que o esquema de pensamento utilizado para verificar o que Ana e Jorge comeram juntos foi a adição, afirmando até que eles comeram juntos três pedaços, sendo 5 registros acompanhados da conclusão de que esta quantidade representava a metade da pizza, evidenciando a mobilização do conceito de equivalência), e que portanto sobrou pizza, momento em que fica implícita a mobilização dos conceitos de unidade e de subtração de frações. Apenas 1 aluno não conseguiu responder a pergunta de forma clara, mas, fez o registro pictórico de $\frac{3}{6}$, que nos induz a pensar que concorda que sobrou pizza.

Figura 65 – Resposta de um aluno ao item (e) da Atividade 1

	Com palavras	Com representação pictórica	Com números
Quanto Ana comeu?	Um sexto		$\frac{1}{6}$
Quanto Jorge comeu?	Dois sextos		$\frac{2}{6}$
Quanto comeram juntos?	Três sextos		$\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Com o preenchimento do quadro no item (e) procurou-se avaliar o entendimento dos estudantes com relação a transitar de um registro para outro. Dos 22 alunos, 17 apresentaram seus apontamentos, tendo êxito na conversão dos registros de representação (Figura 65); 1 aluno não preencheu a coluna “com palavras”, mas, desenvolveu a representação pictórica e o registro numérico, e os 4 alunos que no item (b) tinham evidenciado confusão em seu raciocínio fazendo uso da equivalência de frações, repetiram o equivoco ao preencher a tabela (Figura 66).

Figura 66 – Resposta de um aluno ao item (e) da Atividade 1

	Com palavras	Com representação pictórica	Com números
Quanto Ana comeu?	um sexto		$\frac{1}{6}$
Quanto Jorge comeu?	dois doze avos		$\frac{2}{12}$
Quanto comeram juntos?	três dozes avos		$\frac{3}{12}$

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Consideramos que o objetivo da Atividade 1 foi atingido por 18 dos 22 estudantes que realizaram a atividade. Embora apenas 3 alunos tenham explicitado que utilizaram a adição de frações para solucionar a questão, os registros dos demais sugerem que eles reconhecem que a ideia de “o dobro de” pode ser ampliada para o universo das frações, com o significado de soma de parcelas iguais.

A **Atividade 2** foi desenvolvida por 22 alunos. Esta atividade busca, nos itens (a), (b) e (c), retomar a conexão existente entre as expressões “o dobro de”, “o triplo de” e “o quádruplo de” e a operação de multiplicação com números naturais, considerados conceitos adquiridos pelos alunos nos anos iniciais e que vemos confirmado nas respostas a esses, com 100% de acerto. Nesses ítens, pode-se também observar que, enquanto 8 estudantes apresentaram apenas a resposta, os esquemas de pensamento explicitados pelos demais fizeram uso tanto da multiplicação como da adição de parcelas iguais; além disso,10 dos 22 alunos, dentro dos esquemas por eles explicitados, sentiram a necessidade de expressar o cálculo por meio da “conta armada” (algoritmo), mesmo quando se tratava apenas de tabuada, como no caso de 7 x 3. Cabe ressaltar a resolução de 2 estudantes no item (b) que utilizaram a associatividade (7+7)+7, separando o cálculo e fazendo uso do algoritmo, evidenciando a mobilização do conceito de adição de mais de duas parcelas:

$$\begin{array}{r} 7 \\ +7 \\ \hline 14 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ +7 \\ \hline 21 \end{array}$$

Cabe também ressaltar a resolução de 2 estudantes no item (c) que mobilizaram o teorema em ação “o quádruplo de um número é o dobro do dobro deste número”, registrando

$$\begin{array}{r} 2 \\ +2 \\ \hline 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ +4 \\ \hline 8 \end{array}$$

Nos itens (d), (e) e (f), que tratam da ampliação dos conceitos de dobro, triplo e quádruplo para o universo das frações, verificamos que, enquanto todos os que fizeram uso da adição chegaram à resposta corretamente, houve muita confusão por parte dos estudantes que tentaram fazer uso da multiplicação em seus esquemas de pensamento. Apenas 3 dos 22 estudantes que realizaram a atividade fizeram uso da multiplicação de forma explicita e correta. Assim, com a Atividade 2 foi possível peceber que não é imediato para os estudantes a ampliação dos conceitos de "o dobro de", "o triplo de" e "o quádruplo de" para o universo das frações, principalmente se pretendem fazer uso da multiplicação, como os nomes "dobro", "triplo" e "quádruplo" sugerem.

Como fechamento desta atividade, foi impresso o Quadro 13 com as respostas produzidas para cada item, sendo o mesmo então analisado na aula seguinte com os estudantes, focando-se em cada esquema produzido. Neste momento, foi introduzida a notação de multiplicação envolvendo frações, com base nas ideias trazidas pelos alunos.

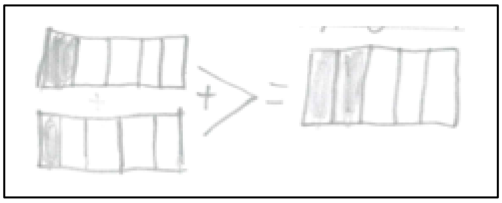
Quadro 13 – Respostas para a Atividade 2

a)	o dobro de 4	8	4 X 2 8	4 x 2 = 8	4 +4 8		
	Total de alunos	8	8	4	2		
b)	o triplo de 7	21	7 X 3 21	7 x 3 = 21	7 +7 14 14 + 7 21		
	Total de alunos	8	8	4	2		
c)	o quádruplo de 2	8	2 X 4 8	2 x 4 = 8	2 + 2 4 4 + 4 8	2 2 2 +2 8	4 x2 8
	Total de alunos	8	7	4	1	1	1
d)	o dobro de $\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$ ou $\frac{4}{10}$	$\frac{1}{5}$ x 2 = $\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$ x $\frac{1}{5}$ = $\frac{2}{10}$	
	Total de alunos	4	2	2	3	1	
	o dobro de $\frac{1}{5}$	$\frac{2}{10}$ incorreta	$\frac{2}{10}$ ou $\frac{2}{5}$ incorreta	$\frac{1 \times 2}{5 \times 2} = \frac{2}{10}$ incorreta	$\frac{1}{5}$ x x $\frac{1}{5}$ = $\frac{12}{10}$ Incorreta		
	Total de alunos	1	1	7	1		
e)	o triplo de $\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$ x3 = $\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$ x $\frac{1}{2}$ x $\frac{1}{2}$ = $\frac{3}{6}$		
	Total de alunos	5	2	3	1		
	o triplo de $\frac{1}{2}$	$\frac{3}{6}$ incorreta	$\frac{3}{0}$ ou $\frac{3}{2}$ incorreta	$\frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$ incorreta	$\frac{1}{2}$ x x $\frac{1}{2}$ x x $\frac{1}{2}$ = $\frac{3}{6}$ Incorreta		
	Total de alunos	2	1	7	1		
f)	o quádruplo de $\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$ x4 = $\frac{4}{9}$			
	Total de alunos	6	2	3			
	o quádruplo de $\frac{1}{9}$	$\frac{4}{36}$ incorreta	$\frac{4}{36}$ ou $\frac{4}{9}$ incorreta	$\frac{1 \times 4}{9 \times 4} = \frac{4}{36}$ incorreta	$\frac{1}{9}$ x x $\frac{1}{9}$ x x $\frac{1}{9}$ x x $\frac{1}{9}$ = $\frac{4}{36}$ Incorreta	$\frac{1}{9}$ x $\frac{1}{9}$ x $\frac{1}{9}$ x $\frac{1}{9}$ = $\frac{4}{36}$ incorreta	
	Total de alunos	1	1	7	1	1	

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A **Atividade 3**, foi desenvolvida por 10 alunos. Das 10 resoluções coletadas, percebemos que 6 alunos desenvolveram o item (a) de forma satisfatória, cabendo destacar o sucesso na conversão dos registros de representação apresentados por esses alunos. Destes, 4 alunos utilizaram diretamente o resultado $\frac{2}{5}$ como representação numérica para o dobro de $\frac{1}{5}$, não deixando claros seus esquemas de pensamento para obtenção do resultado; metade desses 4 alunos usou o retângulo para representação pictórica, a outra metade utilizou o disco. Já 1 aluno explicitou o dobro com a operação de multiplicação, registrando $\frac{1}{5}$ x 2, utilizando o retângulo para representação pictórica; outro aluno utilizou em seu esquema a adição de frações $\frac{1}{5}$ + $\frac{1}{5}$ para representar numericamente o dobro de $\frac{1}{5}$, evidenciando na representação pictórica utilizada a mobilização do conceito "fração *da unidade*" em seu esquema (Figura 67):

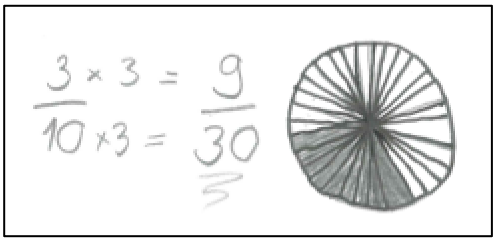
Figura 67 – Resposta de um aluno ao item (a) da Atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Percebemos em 3 alunos a confusão já detectada nas atividades anteriores entre a multiplicação de um número natural por uma fração e a equivalência de frações: ela fica evidenciada tanto na representação numérica quanto na representação pictórica (Figura 68):

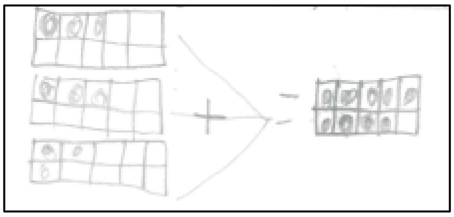
Figura 68 – Resposta de um aluno ao item (a) da Atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Na resolução do item (b), percebemos que os alunos seguiram o mesmo padrão de resoluções do item (a), então destacamos, na Figura 69, apenas o esquema apresentado por um aluno, o qual consideramos rico em detalhes e que mobiliza, de forma explicita, que o triplo pode ser associado tanto à multiplicação por 3 como à adição de três parcelas iguais, situação reforçada na representação pictórica. O estudante deixou claro que compreende a relação existente entre as operações de adição e multiplicação, especificamente, que a multiplicação de um número natural por uma fração pode ser interpretada como adições sucessivas dessa fração. Deixou claro também na representação pictórica utilizada a mobilização do conceito "fração *da unidade*":

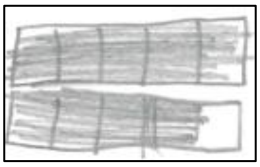
Figura 69 – Resposta de um aluno ao item (b) da Atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

No item (c), das 10 resoluções analisadas, um aluno não respondeu a questão; 3 alunos registraram diretamente $\frac{8}{5}$ para a representação numérica, não evidenciando as operações para obtenção do resultado; apesar de parecer terem uma ideia correta desta quantidade, a representação pictórica utilizada não foi precisa. De fato, 2 desses alunos mobilizaram corretamente o conceito de unidade, percebendo a necessidade de utilizar duas unidades para representar o quádruplo de $\frac{2}{5}$ da unidade, porém, não registraram corretamente a quantidade de partes tomadas, representando equivocadamente a fração $\frac{9}{5}$ e não os $\frac{8}{5}$ (Figura 70); já outro aluno utilizou o disco, contudo, parece não ter mobilizado o conceito de equipartição.

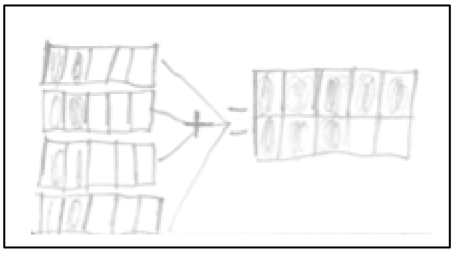
Figura 70 – Resposta de dois alunos ao item (c) da Atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Dois alunos mobilizaram em seus esquemas de pensamento o conceito de multiplicação de um número natural por uma fração, realizando de forma correta a conversão entre a representação escrita para a representação numérica, no entanto um deles não resolveu a expressão nem fez a representação pictórica, sugerindo uma dificuldade com frações impróprias, enquanto o outro resolveu a expressão numérica registrada e parece ter mobilizado o conceito de "fração *da unidade*" na representação pictórica apresentada; porém, ao juntar, acabou "grudando" as duas unidades necessárias para a representação, ficando afinal alterada a unidade e tornando sua resposta insatisfatória (Figura 71):

Figura 71 – Resposta de um aluno ao item (c) da Atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Dois alunos mobilizaram, equivocadamente, o conceito de equivalência de frações na representação numérica, sendo no entanto coerentes na representação pictórica com o valor incorreto registrado na representação numérica. Sugerem assim não ter pensado no conceito de quádruplo, e sim diretamente no algoritmo (errado) para a determinação do quádruplo que registraram na coluna da representação numérica.

Destacamos que o item (d) não evidenciou mudanças de análise em relação ao item (c).

Avaliamos que 6 dos 10 estudantes conseguiram associar a ideia de que “o dobro de” ou “o triplo de”, pode ser ampliada para o universo das frações, contudo, quando convidados a fazer a transição na forma de representação proposta por Duval (no caso, representação numérica para representação pictórica), foi possível perceber o domínio de alguns e a falta de domínio de outros com a multiplicação de frações, principalmente quando o resultado era uma fração imprópria.

A partir da Atividade 3, foi possível constatar que os estudantes já reconhecem que existem diferentes estratégias de resolução de um problema.

A análise da **Atividade 4** foi baseada nas 15 folhas de tema de casa devolvidas pelos estudantes.

Com relação ao item (a), dos 15 alunos que entregaram o tema de casa à professora, apenas 6 responderam corretamente, tendo sido apresentado como resposta o registro numérico e/ou com palavras, sem a explicitação de como chegaram a ela. Assim, ficou apenas sugerido que, no esquema de pensamento dos alunos, foi evocado o processo de dividir a jarra de água em 3 partes iguais, reconhecendo que $\frac{2}{3}$ estão preenchidos com água a partir da informação de que $\frac{1}{3}$ da jarra não contém água, percebendo que a jarra corresponde a três terços. Dois alunos mobilizaram corretamente (porém antecipadamente) a conversão da capacidade de medida de 1L em 1.000 ml, mas não responderam ao que foi solicitado. Pareceu-nos que um aluno leu mal o enunciado e outro não respondeu o item (a).

Com relação ao item (b), 7 dos 15 alunos respondem corretamente que em $\frac{1}{3}$ de jarra cabem 500ml ou meio litro; além do raciocínio correto, percebemos envolvido o processo conversão de 1 litro de água em 1000ml. Três dos 15 estudantes não resolveram este item e, das respostas incorretas de cinco outros estudantes, não nos foi possível imaginar o esquema de pensamento que pode tê-los levado a elas.

Sete das 15 respostas dadas ao item (c) da Atividade 4, foram corretas, cabendo destacar a variedade dos registros, resultado dos conceitos variados que foram evocados na construção dos esquemas de pensamento desses 7 estudantes: conversão de medida, composição da unidade, representação decimal de um número racional. Um estudante não respondeu o item (c).

Treze dos 15 estudantes que entregaram a atividade perceberam que a resposta esperada deveria remeter a alguma unidade de capacidade, ainda que 6 delas estivessem incorretas. Com relação a essas respostas incorretas, não nos foi possível imaginar o esquema de pensamento que pode ter levado os seus autores a elas.

Na Atividade 4, consideramos que 8 dos 15 estudantes conseguiram lidar com o processo inverso apontado por Duval, recuperando a unidade a partir de uma informação feita sobre uma fração não unitária.

A **Atividade 5** tem também por objetivo trabalhar fração, medida de capacidade e conversão de unidades de medida de capacidade. Reconhecemos que, da forma como a Atividade 5 foi originalmente proposta, sem solicitar justificativas, ficou difícil identificar os esquemas de pensamento utilizados pelos estudantes o que, infelizmente, só foi percebido por nós depois da aplicação da atividade. No Produto Final, a atividade já está incluindo a solicitação de justificativas.

Em algumas das folhas entregues foi possível perceber implicitamente alguns esquemas. Nove dos 21 alunos que realizaram a atividade recorreram implicitamente à conversão do litro em 1000 mililitros, considerando-o como unidade e mobilizando o conceito de equipartição, dividindo em 4 partes iguais os 1000 mililitros, percebendo então que, ao preencher 250 ml, tem-se 1 parte preenchida, resultando na fração $\frac{1}{4}$, mobilizando então o conceito de fração unitária. Já 7 estudantes parecem ter recorrido diretamente à conversão do litro em 1000 mililitros e considerando este volume dividido em 1000 partes iguais, tem-se 250 partes preenchidas, resultando na fração $\frac{250}{1000}$, mobilizando o conceito de fração não unitária.

É possível perceber que um estudante antecipou o conceito de divisão de frações ao responder/reconhecer que "$\frac{250}{1000}$ é a metade de $\frac{500}{1000}$", pelo menos no que diz respeito a "calcular a metade de".

Outro estudante não fez uso da conversão entre unidades de medida de capacidade, dando como resposta "$\frac{250ml}{1\ litro}$" , sugerindo ter mobilizado o conceito de razão (comparação) e não de fração da unidade. No entanto, pelo seu registro é possível perceber que o aluno tem consciência de que o litro representa a unidade e os 250 ml a parte da unidade que está sendo completada.

A resposta dos demais estudantes foram consideradas insatisfatórias, e não nos foi possível detectar o esquema de pensamento estabelecido por eles para responder este item.

Nos registros dos alunos no item (b) da Atividade 5, foi possível observar diversos esquemas de pensamento: 4 estudantes fizeram uso da conversão do litro em 1000 mililitros e consideraram a unidade dividida em 1000 partes iguais. Usando a adição ou a multiplicação de naturais para calcular a capacidade das duas latinhas juntas, chegaram a 500ml, concluindo que 500 partes da unidade foram preenchidas, resultando na fração $\frac{500}{1000}$, tendo mobilizado, neste momento, o conceito de fração não unitária. Um estudante foi explícito evidenciando que a operação utilizada foi a de multiplicação de naturais e não a de adição, e 3 estudantes mobilizaram ainda o conceito de equivalência.

Nas respostas de 7 estudantes, pode-se imaginar que tenham recorrerido à conversão do litro em 1000 mililitros, considerando-o a unidade, mobilizando conceito de equipartição ao dividir em 4 partes e ao preencher com 500 ml, tem-se 2 partes preenchidas, resultando na fração $\frac{2}{4}$, mobilizando o conceito de fração não unitária. Dois estudantes mobilizaram ainda o conceito de equivalência ao explicitarem que a resposta poderia ser $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$.

Dois estudantes não deixaram claro seu esquema de pensamento, mas dão indicícios que fizeram uso do conceito de equivalência.

Três estudantes mobilizaram a ideia de razão, enquanto mantiveram unidades de capacidade diferentes em seus esquemas de pensamento, no entanto um deles, de alguma forma que não ficou explicitada, concluiu que à razão 500 ml em 1 litro corresponde a fração $\frac{1}{2}$, mobilizando aí o conceito de equivalência. Consideramos que, para chegarem aos 500 ml, os 3 alunos tenham mobilizado o conceito de adição ou de multiplicação de números naturais (250 + 250 ou 2 x 250).

Um estudante apresentou um registro equivocado, provavelmente por ainda não ter fixado bem a notação simbólica para fração; no entanto imaginamos que ele tenha mobilizado o conceito de fração.

Com a análise dos resultados obtidos na Atividade 5 foi possível perceber que todos os alunos utilizaram apenas a representação numérica para solução dos itens (a) e (b), dispensando a representação pictórica, o que consideramos positivo. No entanto, para um maior detalhamento dos conceitos e teoremas mobilizados em seus esquemas de pensamento, teria sido interessante que tivesse sido solicitado aos alunos que justificassem suas respostas. No Produto Final, a atividade já está incluindo a solicitação de justificativas.

A **Atividade 6** trabalha mais uma vez a recuperação da unidade. Ao analisarmos os esquemas de pensamento apresentados pelos 23 alunos que responderam a atividade, percebemos que 13 alunos utilizaram de forma explícita a multiplicação 750 X 12 = 9000, mobilizando a conversão de unidades de capacidade ($\frac{3}{4}$ de litro = 750 ml); porém, apenas 2 alunos registraram o esquema utilizado para tal conversão, por meio de representação pictórica, usando conceito de equipartição e equivalência (Figura 72):

Figura 72 – Esquema de pensamento de um aluno na Atividade 6

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Contudo, a pergunta requeria uma resposta em litros; verificamos que desses 13 alunos, apenas os 3 alunos converteram os 9000 ml em 9 litros.

Três alunos fizeram uso da multiplicação de número natural por fração em seus esquemas de pensamento para obter a capacidade da bombona, registrando $\frac{3}{4}$ x 12 ou diretamente $\frac{36}{4}$, mas apenas 2 deles deixaram evidente o reconhecimento de que a cada $\frac{4}{4}$ temos um litro.

Um aluno respondeu corretamente, sem sugerir o esquema de pensamento que utilizou para obter o resultado; E outro estudante expôs uma sequência incorreta de igualdades, a saber, $\frac{3}{4}$ = 250 x 4 = 1000 ML 1L, que não evidenciam o esquema de pensamento utilizado para chegar à resposta “9000 ml ou 9 litros”, anunciada separadamente, deixando evidente apenas ter mobilizado a conversão de unidades de capacidade. Outro aluno reconheceu que deveria usar os $\frac{3}{4}$, contudo parece não saber o que fazer com tal informação.

Consideramos que 22 dos 23 estudantes reconheceram que a Atividade 6 consistia em identificar a capacidade da bombona, ou seja, teriam que recuperar a unidade, entretanto, destes, apenas 13 conseguiram de fato recuperar a unidade e expressá-la em litros. Reconhecemos que a conversão de medida foi um fator de dificuldade.

A **Atividade 7** é o momento de fechamento do caso de multiplicação de fração por número natural. No Quadro 14 tem-se os registros dos problemas elaborados pelos estudantes.

Quadro 14 – Problemas criados pelos alunos como fechamento do caso de multiplicação de um número natural por uma fração (item (i) da Atividade 7)

	Expressão	Problema desenvolvido pelos grupos	Nossa Análise
I	Triplo de $\frac{2}{5}$	"João estava na escola então a professora dele perguntou quanto é o triplo de $\frac{2}{5}$?"	O problema envolve exclusivamente a multiplicação de número natural por fração em uma situação plausível.
II	Dobro de $\frac{3}{4}$	"Compramos um refri e uma de nós tomou o dobro de $\frac{3}{4}$. Quanto ela tomou?"	O problema envolve a multiplicação de um número natural por uma fração, porém, em uma situação impossível (que não comporta uma fração imprópria como resposta).
III	Quintuplo de $\frac{3}{7}$	"João tinha $\frac{3}{4}$ da coleção de carrinho e Paulo o quíntuplo de $\frac{3}{7}$. Quem tem mais carrinhos?"	O problema envolve além da multiplicação de número natural por fração, a comparação entre frações. No entanto, apesar de factível matematicamente a comparação, a situação revela-se impossível se consideramos que a coleção de carrinhos é fixada: Paulo não pode ter mais do que a coleção toda de carrinhos.
IV	Quádruplo de $\frac{1}{5}$	"Ana Julia convidou seu irmão mais velho para comer uma pizza de cuscuz. Seu irmão comeu $\frac{1}{5}$ da pizza e Ana Julia o quádruplo dessa quantidade. Quanto eles comeram juntos?"	O problema é rico pois envolve, em uma situação real, além da multiplicação de número natural por fração, a adição de frações.
V	Triplo de $\frac{1}{2}$	"Daniel tomou meio litro de água de manhã, ao meio dia mais meio litro, a noite novamente tomou meio litro. Quantos litros ele tomou no dia?"	O problema não fez uso da expressão requerida, no entanto fez uso do conceito nela envolvido, por isso foi considerado satisfatório.
VI	Dobro de $\frac{1}{3}$	"João tinha 5 balas e deu o dobro e ficou com o dobro"	O problema não condiz com a expressão requerida na atividade, por isso foi considerado incorreto. Além disso, a situação trazida pelo grupo evidencia que seus integrantes não dominam a ideia de dobro, mesmo no universo dos números naturais.
VII	Dobro de $\frac{1}{3}$	"Mariana está de aniversário e sua mãe preparou um bolo, portanto só veio sua amiga Maju então sua mãe dividiu o bolo em três partes, pois tinha 3 pessoas, mas ela comeu 1 pedaço e depois chegou mais 3 pessoas ou seja o dobro. Em quantos pedaços ela terá que dividir o bolo?"	O problema não condiz com a expressão requerida na atividade (a expressão "dobro" foi utilizada para o número de pessoas, e não para a fração $\frac{1}{3}$). Portanto, foi considerado insatisfatório.
VIII	Quádruplo de $\frac{2}{5}$	"Hoje fui na pizzaria e comi $\frac{8}{5}$ de pizza e meu irmão não comeu nada e eu comi tudo." ; "$\frac{2}{5}$ da comida que eu comi no almoço e de noite $\frac{8}{5}$."	Os dois enunciados propostos pelo grupo foram considerados insatisfatórios, pois não contemplam a multiplicação de número natural por fração.

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Como os grupos que criaram as questões não tinham a mesma quantidade de componentes, os problemas propostos foram afinal distribuídos para cada aluno individualmente, de forma aleatória, com o cuidado que cada aluno recebesse um problema de outro grupo. Cada aluno foi orientado a registrar alguma observação caso não conseguisse solucionar a questão que lhe coube. As resoluções estão registradas no Quadro 15.

Quadro 15 – Resoluções e observações dos problemas criados pelos próprios alunos envolvendo multiplicação de número natural por fração (item (ii) da Atividade 7)

	Expressão	**Problema desenvolvido pelos grupos**	**Resolução/Observações**
I	Triplo de $\frac{2}{5}$	"João estava na escola então a professora dele perguntou quanto é o triplo de $\frac{2}{5}$?"	$\frac{6}{5}$
II	Quintuplo de $\frac{3}{7}$	"João tinha $\frac{3}{4}$ da coleção de carrinho e Paulo o quíntuplo de $\frac{3}{7}$. Quem tem mais carrinhos?" (situação irreal)	Paulo tem mais
			PAULO
			PAULO JOSÉ $\frac{3}{7}$ $5x = \frac{15}{7}$ $\frac{3}{4}$
III	Quadruplo de $\frac{1}{5}$	"Ana Julia convidou seu irmão mais velho para comer uma pizza de cuscuz. Seu irmão comeu $\frac{1}{5}$ da pizza e Ana Julia o quádruplo dessa quantidade. Quanto eles comeram juntos?"	$\frac{1 \times 4}{5\ 5} = \frac{4}{5}$ ELES COMERÃO JUNTOS $\frac{4}{5}$
IV	Dobro de $\frac{3}{4}$	"Compramos um refri e uma de nós tomou o dobro de $\frac{3}{4}$. Quanto ela tomou?" (situação irreal)	$\frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{4}$
			$\frac{6}{4}$
			ELA TOMOU $\frac{6}{4}$
			$\frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$
V	Triplo de $\frac{1}{2}$	"Daniel tomou meio litro de água de manhã, ao meio dia mais meio litro, a noite novamente tomou meio litro. Quantos litros ele tomou no dia?" (satisfatório)	1 l e meio
VI	Dobro de $\frac{1}{3}$	"João tinha 5 balas e deu o dobro e ficou com o dobro" (incorreto)	Não tem como resolver

VII	Dobro de $\frac{1}{3}$	“Mariana está de aniversário e sua mãe preparou um bolo, por tanto só veio sua amiga Maju então sua mãe dividiu o bolo em três partes, pois tinha 3 pessoas, mas ela comeu 1 pedaço e depois chegou mais 3 pessoas ou seja o dobro. Em quantos pedaços ela terá que dividir o bolo?” (insatisfatório)	2 para cada um Em quatro
VIII	Quádruplo de $\frac{2}{5}$	“Hoje fui na pizzaria e comi $\frac{8}{5}$ de pizza e meu irmão não comeu nada e eu comi tudo. $\frac{2}{5}$ da comida que eu comi no almoço e de noite $\frac{8}{5}$” (incoerente com o que foi solicitado)	Sem resposta e não quiseram justificar

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Com base nas resoluções do Quadro 15 destacamos que, na Linha I, o aluno parece ter mobilizado corretamente a multiplicação de número natural por fração, no entanto sem explicitar se usou a multiplicação de números naturais ou a adição de frações iguais; os três estudantes relatados na Linha II responderam a questão corretamente em termos de comparação de frações, mas o fato de encontrarem uma fração imprópria dentro da situação considerada no problema não causou estranheza a nenhum deles; apenas 1 dos 3 alunos deixou explicito seu esquema de pensamento, mobilizando corretamente a multiplicação de número natural por fração, apesar de o registro não estar adequado; o estudante na Linha III mobilizou corretamente a multiplicação de número natural por fração, porém não fica claro se ele mobilizou a adição de frações e errou o cálculo ou se interpretou mal a pergunta, respondendo só o que o irmão comeu.

O fato de estar envolvida uma fração imprópria no problema da Linha IV parece não ter causado estranheza aos 4 estudantes que o tentaram resolver, o que nos permite questionar se os mesmos chegaram a mobilizaram o conceito de fração imprópria (ou seja, a comparação com a unidade); três mobilizaram corretamente a multiplicação de número natural por fração, e o quarto mobilizou, equivocadamente, o conceito de frações equivalentes.

Apesar de a resposta na Linha V estar correta, não fica claro se o estudante mobilizou a multiplicação de número natural por fração ou a adição (de parcelas iguais); na Linha VI, a partir da resposta do estudante, fica sugerido que ele percebeu a incoerência do enunciado; quanto aos 2 alunos que responderam o problema da Linha VII, parece-nos que eles não perceberam a falta de consistência do problema e tentaram responder alguma coisa. Na Linha VIII, não fica evidente se o aluno não respondeu o problema porque viu que o enunciado de fato não é coerente, pois não apresentou justificativa nem emitiu parecer sobre a questão.

Apesar de quatro atividades das seis propostas até aqui terem sido contextualizadas, pareceu-nos que os estudantes tiveram alguma dificuldade em encontrar situações nas quais as expressões recebidas na Atividade 7 fizessem algum sentido: dos 8 problemas elaborados pelos estudantes, 2 remetem a situações impossíveis. Avaliamos que os estudantes ainda estão em processo de saber elaborar problemas envolvendo multiplicação de um número natural por fração. Neste momento, isso não nos causou estranheza, uma vez que não é habitual que os estudantes sejam convidados a criar suas próprias situações. No entanto, destacamos que atividades com essas características são fundamentais para consolidar a aprendizagem de qualquer conceito. Assim, concordamos com a BNCC, quando este documento reitera em suas orientações Habilidades do tipo “Resolver e elaborar problemas de...”.

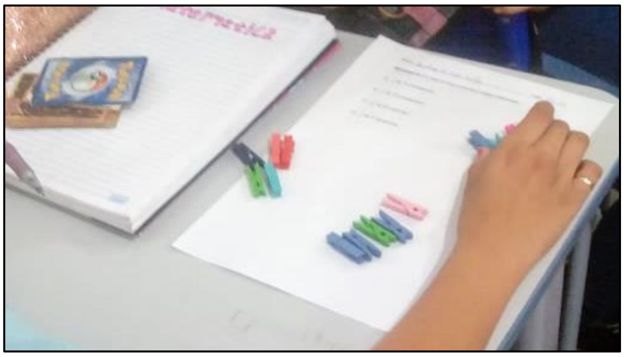
Com relação às 7 primeiras atividades propostas, com base na análise das resoluções dos alunos, reconhecemos uma evolução dos estudantes, pois alguns conseguiram equacionar e resolver problemas que envolvem multiplicação de número natural por fração e compreenderam a relação existente entre as operações de adição e multiplicação. As trocas entre eles ajudou-os também a perceber que existem diferentes estratégias de resolução de um problema.

O próximo conjunto de atividades (Preparando a Multiplicação de uma fração própria por um número natural) envolve grandezas discretas, procurando contribuir para os primeiros passos na ampliação da multiplicação de números naturais para multiplicação de fração por número natural.

Para o desenvolvimento da **Atividade 8**, os 20 alunos que realizaram a atividade utilizaram material concreto. Alertamos que a ordem originalmente proposta para esta atividade foi “Em cada um dos itens a seguir, determine:”. No entanto, após a análise das resoluções, reconhecemos a importância de solicitar-se alguma justificativa para as respostas dadas, por isso o enunciado da atividade foi alterado para “Em cada um dos conjuntos a seguir determine, fazendo algum registro que explique sua resposta:”.

Para iniciar a atividade, os estudantes precisaram ser relembrados de raciocínios feitos durante o trabalho inicial de frações (por exemplo, a Atividade 10 de Souza(2019a), ANEXO C). A partir daí, os alunos reconheceram como unidade a quantidade de objetos de cada item, sendo capazes de lidar com fração de grandezas discretas. Cabe ressaltar que, em seus registros, os alunos não explicitaram as operações que foram realizando. No entanto, na observação da aula ficou claro que repartiram os objetos, por exemplo, em 3 partes quando se pedia terços (Figura 73), fazendo uso do conceito de fração unitária, e que se utilizavam da adição ou da multiplicação para determinar o resultado correspondente à quantidade de terços que se queria, fazendo uso portanto do conceito de fração não unitária.

Figura 73 – Estratégia de um estudante para determinar um terço de 15 prendedores



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Todos os alunos responderam corretamente os itens (a) e (b) da Atividade 8 e creditamos o êxito à oportunidade de manipular material concreto, o que consideramos ter sido determinante para o desenvolvimento da atividade.

Apenas um aluno evidenciou em seu registro o esquema de pensamento utilizado para desenvolver os itens (a) e (b), como podemos ver na Figura 74: mesmo fazendo uso do material concreto (grandeza discreta), o aluno considerou os 15 prendedores como sendo a unidade, representando-a de forma contínua e mobilizando, no item (a), o conceito de fração unitária e no item (b) o conceito de fração não unitária, sem deixar, no entanto claro se aí mobilizou a adição ou a multiplicação de números naturais.

Figura 74 – Resposta de um aluno aos itens (a) e (b) da Atividade 8, evidenciando parte de seu esquema de pensamento

a) $\frac{1}{3}$ de 15 prendedores | 5 | 5 | 5 | 5

b) $\frac{2}{3}$ de 15 prendedores | 5 | 5 | 5 | 10

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Doze dos 20 alunos que realizaram a atividade responderam corretamente o iten (c), porém apenas podemos imaginar que foi mobilizado o conceito de fração unitária e não unitária; sobre a resposta “9” dada por 4 alunos, imaginamos que tenha sido algum erro de cálculo ou a não mobilização correta do conceito de fração não unitária, pois durante a realização da tarefa foi possível observar esses estudantes realizaram a divisão das 20 cartinhas em 10 grupos com duas cartinhas cada (Figura 75), mobilizando corretamente o conceito da fração unitária; quanto à resposta 2 dada por 4 alunos imaginamos que estes apenas representaram $\frac{1}{10}$ e não os $\frac{3}{10}$ como solicitado, ou seja, em seus esquemas de pensamento, fizeram uso apenas do conceito de fração unitária.

Figura 75 – Estratégia de um estudante repartindo objetos em 10 grupos quando se pedia décimos

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Com relação ao item (d), 8 do 20 alunos responderam corretamente. Aqui pode-se apenas imaginar que, em seus registros, os estudantes fizeram uso do conceito de unidade, de fração unitária e de fração não unitária. Destacamos que a resposta “3” dada por 1 aluno parece ser apenas a representação de $\frac{1}{9}$ de 27, neste caso o estudante teria mobilizado apenas o conceito de unidade e de fração unitária. Quanto aos 6 alunos que responderam “6”, aos 4 alunos responderam que “13” e ao aluno que respondeu “36”, não conseguimos imaginar o esquema de pensamento por eles mobilizado. Chamou nossa atenção a resposta “36”, um resultado maior que a própria unidade formada por 27 para tampinhas, evidenciando que um valor maior do que a quantidade original não incomodou esse estudante. De fato, os alunos parecem em geral só se preocupar com estimativas quando estimulados.

Consideramos que 19 dos 20 estudantes que reallizaram a Atividade 8 compreenderam que a unidade nesta atividade diz respeito a uma grandeza discreta, o que contribuiu os primeiros passos na ampliação da multiplicação de número natural para, no caso, multiplicação de fração por número natural), apesar de nem todos terem sucesso nas resoluções.

A **Atividade 9** foi realizada por 19 alunos. Novamente no item (i) só nos foi possível imaginar os esquemas de pensamento, por isso foi incluído no enunciado a solicitação de algum registro que mostrasse como chegaram à resposta (ver Produto Final).

Analisando as respostas obtidas no item (i) destacamos: para $\frac{1}{6}$ de azul”, apenas 2 estudantes responderam incorretamente, coincidentemente 1 e 6 (numerador e denominador da fração $\frac{1}{6}$); para $\frac{2}{5}$ de vermelho, 13 alunos responderam de forma correta, sendo requerido dos alunos a mobilização do conceito de fração unitária e não unitária; 3 alunos que responderam 6, provavelmente mobilizaram apenas o conceito de fração unitária; para os 3 alunos que deram respostas iguais a 2 e 4, não nos foi possível imaginar o esquema de pensamento mobilizado por eles. Quanto às respostas para $\frac{3}{10}$ de verde, 18 alunos conseguiram mobilizar o conceito de fração unitária, contudo apenas 9 alunos continuaram o raciocínio mobilizando o conceito de fração não unitária, chegando à resposta correta; um aluno deu 7 como resposta, não nos sendo possível imaginar em quais conceitos e teoremas apoiou-se para encontrar este resultado. Com relação à quantidade de CDs que seriam pintados de amarelo, apesar de depender das repostas anteriores, pode-se constatar 7 respostas corretas, tendo sido necessário neste momento mobilizar-se a adição e a subtração de naturais. Na Figura 76, registramos o esquema de pensamento de um aluno que evidencia a preocupação com a coerência de sua resposta, mobilizando o conceito de adição de naturais, apesar de algumas respostas aos itens anteriores não estarem corretas. Percebe-se aqui que esse estudante compreendeu bem o problema, mas ainda não domina perfeitamente o conceito de fração de uma quantidade discreta.

Figura 76 – Resposta de um aluno preocupado com a coerência de suas respostas ao item (i) da Atividade 9

Cor	Quantidade
Azuis	5
Vermelhas	2
Verdes	3
Amarelas	20
	30

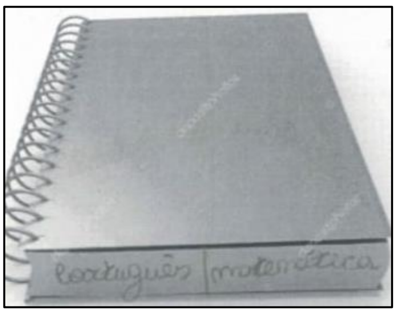
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A digitalização do material relativo a este dia de trabalho saiu cortada, impossibilitando a análise do item (ii).

Com a Atividade 9, avaliamos, com base apenas no item (i), que uma parte dos alunos consegue já aplicar o conceito de fração de uma quantidade discreta, principalmente se esta fração for unitária. Contudo, ainda existem alunos que estão no processo de compreensão do significado de determinar uma fração não unitária (ainda que própria) de uma grandeza discreta; há ainda uma parcela pequena de estudantes que precisa reforçar o conceito de fração de uma quantidade discreta, envolvido nessa atividade.

A **Atividade 10** foi respondida por 19 alunos. Apesar de tratar-se de uma questão considerada do cotidiano dos estudantes, 6 deles não responderam o item (a), 9 responderam de forma satisfatória e natural para o contexto, conseguindo vivenciar o que fariam em uma situação real. No entanto, os demais registros parecem evidenciar que os alunos preocuparam-se apenas em representar a fração $\frac{1}{2}$, sem levar em consideração o contexto colocado, por exemplo, dificilmente o estudante vai dividir cada folha na vertical, e na coluna da esquerda escrever português e na coluna da direita escrever matemática (Figura 77).

Figura 77 – Resposta de um aluno ao item (a) da Atividade 10



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Com relação ao item (b) da Atividade 10, 17 dos 19 alunos responderam corretamente, sendo que destes, 11 estudantes ao responderem que a fração do caderno que ficou para Português é $\frac{1}{2}$ perceberam que distribuir a mesma quantidade de folhas entre as duas disciplinas é a mesma coisa que dividir ao meio a quantidade de folhas, desta forma, provavelmente mobilizaram apenas o conceito de metade e o conceito de fração unitária; já 6 estudantes reponderam “$\frac{100}{200}$” sugerindo terem considerado a unidade como as 200 páginas e mobilizado o conceito de fração não unitária; além disso, um desses 6 alunos mobilizou o conceito de equivalência de frações ao responder que “$\frac{100}{200}$ ou $\frac{1}{2}$”. Para as demais respostas não nos foi possível imaginar o esquema de pensamento utilizado que os levou ao equívoco.

As repostas ao item (c) da Atividade 10 sugerem que 16 dos 19 estudantes mobilizaram corretamente o conceito de fração de grandeza discreta (pelo menos no caso da fração unitária $\frac{1}{2}$). Consideramos apenas satisfatória a resposta dada por 2 estudantes, a saber, "$\frac{1}{2}$ de 200 páginas equivale a $\frac{1}{2}$ das páginas” porque a maioria dos estudantes interpretou conforme o esperado a segunda parte da pergunta, respondendo sobre o número de páginas. Percebe-se que um aluno não conseguiu identificar a fração que corresponde à disciplina Matemática, por isso acreditamos que a segunda resposta veio da mobilização do conceito de metade de 200 (já trabalhada em anos anteriores), e não da ideia de fração, a saber, “$\frac{100}{100}$ de 200 páginas equivale a 100 páginas”.

Infelizmente, novamente por problemas com a digitalização, não nos foi possível analisar os itens (d) e (e).

O item (f) da Atividade 10 tinha como um dos objetivos perceber que não é possível dividir 200 páginas igualmente para três disciplinas. Dez dos 17 alunos que entregaram a atividade responderam corretamente a questão, afirmando que não é possível dividir igualmente. As justificativas utilizadas sugerem que todos mobilizaram a ideia de divisão euclidiana, porém nem todos usaram palavras adequadas, por exemplo, “porque não dá para dividir 200 por 3”. Um dos estudantes até sugeriu uma saída para a situação concreta: “Não. Duas matérias vão ficar com 66 páginas e a outra com 68”, antecipando a resposta ao item seguinte, mas evidenciando aí que mobilizou bem o conceito e o teorema em ação relativo à divisão euclidiana. Dos 5 estudantes que responderam que dava para dividir (igualmente), um evidenciou não apropriar-se da situação em jogo, respondendo “Ele irá conseguir $\frac{1}{3}$ para cada disciplina”, antecipando um teorema sobre divisão no novo universo numérico: 1 : 3 = $\frac{1}{3}$. Os demais sugerem, com suas justificativas, que não associam divisão ou equipartição à expressão “distribuir igualmente” utilizada no enunciado. Um estudante mobilizou a multiplicação de naturais, registrando 200 x 3 = 600, provavelmente ficando sem saber o que fazer com este cálculo.

O item (g) da Atividade 10 tem resposta aberta, pretendia-se apenas avaliar a coerência dos estudantes em suas respostas fazendo uso de frações. Aqui apenas 9 estudantes responderam fazendo uso de frações, no entanto apenas um respondeu corretamente, deixando sugerido que foram mobilizadas a representação da unidade pela fração $\frac{200}{200}$ e a adição de frações para decompor tal fração como uma adição de três frações, a saber, “História $\frac{100}{200}$, Geografia $\frac{50}{200}$ e Ciências $\frac{50}{200}$”. Esse estudante parece em um primeiro momento ter mobilizado o conceito de unidade e de metade, considerando as 200 páginas como unidade e destinando a metade (100 páginas) para Ciências, e, a seguir, logo após, considerou as 100 páginas restantes como sendo a nova unidade que foi distribuída entre as disciplinas de Geografia e História.

Já dois estudantes que responderam respectivamente, “$\frac{100}{200}$ cem para cada” e “$\frac{100}{200}$ ou $\frac{1}{2}$” parecem ter mobilizado a representação da unidade pela fração $\frac{200}{200}$, mas não mobilizaram a decomposição dessa fração corretamente. No entanto, o segundo estudante mobilizou corretamente o conceito de fração equivalente.

A resposta “$\frac{1}{3}$” de 4 estudantes, foi considerada insatisfatória, pois parece que os mesmos não levaram em conta a situação prática proposta, isto é, o número de páginas. Quanto à resposta “$\frac{1}{4}$” dada por um estudante, não conseguimos imaginar por que o denominador da fração apresentada como resposta é igual a 4.

Quatro estudantes deram respostas coerentes, porém sem fazer uso de frações, tais como “Ciências e história com 70 páginas e geografia com 60” e outros 4 estudantes não responderam a questão.

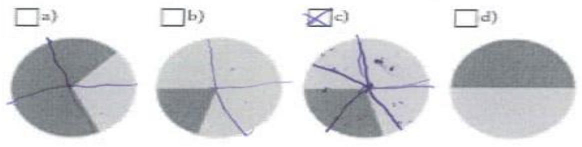
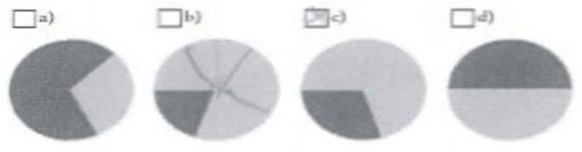
Por problemas na digitalização não foi possível analisar os demais itens da Atividade 10.

Consideramos que a Atividade 10 proporcionou aos alunos a conscientização de que, em uma situação habitual, calcular “fração de” nem sempre é possível.

A **Atividade 11** foi respondida por 15 alunos, dos quais 9 alunos acertaram na escolha do gráfico que melhor representava os $\frac{2}{5}$ comido do bolo (item (c)); acreditamos que os dois alunos que escolheram a alternativa (a) podem ter se equivocado com os tons de cinza, e que portanto mobilizaram corretamente o conceito de fração não unitária. Sobre os 3 estudantes que escolheram a opção (d) ficou evidente que os mesmos não mobilizaram o conceito de frações equivalentes.

Pode-se constatar que, em seus esquemas de pensamento, nem todos atentaram para a equipartição, ou seja, nem sempre foi mobilizado o conceito de equipartição embutido no conceito de fração (Quadro 16).

Quadro 16 – Gráfico escolhido por 2 estudantes no item (a) da Atividade 11

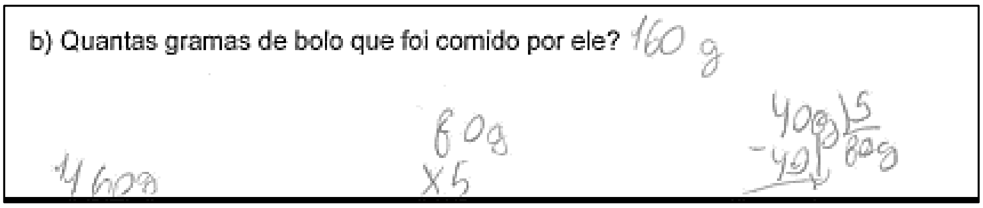
Aluno	Resolução
I	
II	

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Dos 15 alunos que responderam o item (b) da Atividade 11, 5 não conseguiram determinar quantas gramas a fração $\frac{2}{5}$ representa dos 400g e 6 responderam corretamente “160 gr”, sugerindo terem mobilizado corretamente fração de uma quantidade discreta. Dentre eles, dois alunos mobilizaram a divisão de 400 por 5 para determinar $\frac{1}{5}$ das gramas de bolo, ou seja, 80 gramas e ainda a operação de multiplicação para testar se estava correta a solução encontrada, para em seguida registrar o resultado provavelmente realizado mentalmente: 160 gramas (Figura 78); outro desses 6 alunos fez o mesmo procedimento, porém sem mobilizar a multiplicação para verificar a divisão realizada. Percebe-se que ambos utilizaram o teorema em ação da divisão euclidiana de forma explicita, mas não explicitaram o teorema em ação que permite determinar a fração não unitária $\frac{2}{5}$, deixando implícito que fizeram uso mentalmente da multiplicação 80 x 2 ou da adição de parcelas iguais

80 + 80.

Figura 78 – Resolução de um aluno no item (b) da Atividade 11



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Um aluno deu como resposta “80”, mobilizando o teorema em ação da divisão euclidiana (400:5), para determinar a fração unitária $\frac{1}{5}$, porém, não mobilizou o cálculo de $\frac{2}{5}$. (Figura 79). Por isso sua resposta foi considerada incompleta.

Figura 79 – Registro do aluno no item (b) da Atividade 11

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Sobre os dois alunos que responderam “200 gr”e o aluno que respondeu “50 gr”, não nos foi possível imaginar qualquer indício de seus esquemas de pensamento.

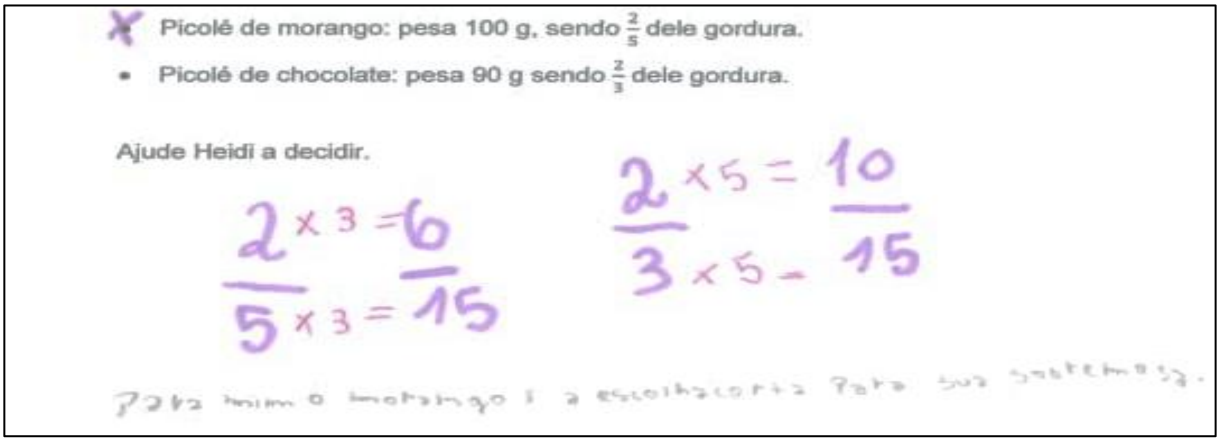
Consideramos que o objetivo da Atividade 11 foi atingido por 6 dos 15 estudantes que realizaram a atividade.

Sobre a **Atividade 12**, cabe ressaltar que os dados foram estrategicamente escolhidos para dificultar o cálculo mental: por um lado $\frac{2}{5} < \frac{2}{3}$ mas por outro lado 100g > 90g. Essa consideração, no entanto, não foi evidenciada nos registros dos alunos nem ressaltada pela professora antes de iniciarem a resolução.

A Atividade 12 foi respondida por 15 estudantes, sendo 8 respostas certas e 7 erradas. Como foram poucas as justificativas dadas, só nos resta imaginar que alguns estudantes só atentaram para a comparação $\frac{2}{5} < \frac{2}{3}$ enquanto outros só atentaram para a comparação 100g > 90g.

Nas Figuras 80 e 81 trazemos as justificativas apresentadas por dois estudantes e que permitem identificar seus esquemas de pensamento.

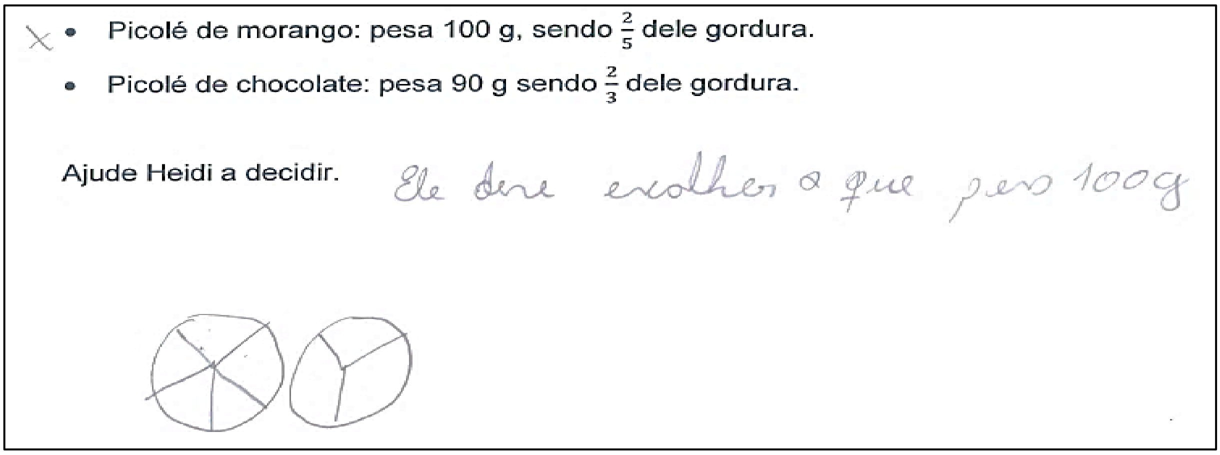
Figura 80 – Justificativa de um aluno na Atividade 12



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Pode-se notar que o estudante reportado na Figura 80, apesar de chegar à resposta correta, fez um raciocínio incompleto: evocou, em seu esquema de pensamento, o teorema em ação sobre a geração de frações equivalentes, buscando denominadores iguais, porém não atentou para o fato de que a unidade não era a mesma, mobilizando equivocadamente o teorema em ação sobre a comparação de duas frações. A mesma falta pode ser constatada no estudante relatado na Figura 81, que deixou evidente, ao fazer uso da representação pictórica, que raciocinou sobre uma mesma unidade.

Figura 81 – Resposta de um aluno para determinar qual picolé tem menos gordura



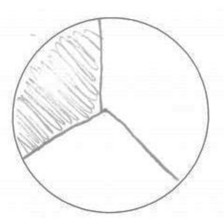
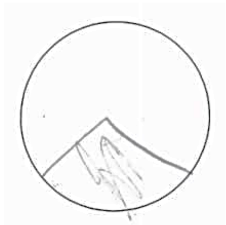
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

No Produto Final, decidimos trocar os valores dos dados da Atividade 12 para que o raciocínio incompleto relatado na Figura 81 não leve à resposta correta.

Avaliamos que, na Atividade 12, os alunos não utilizaram o conceito de fração de uma grandeza discreta para comparar quantidades que dizem respeito a unidades distintas (no caso picolé de 100g e picolé de 90g), não sendo portanto atingido o objetivo da atividade. Considemos que alguns estudantes, em suas respostas, só atentaram para a comparação $\frac{2}{5} < \frac{2}{3}$ enquanto outros, só atentaram para a comparação 100g > 90g, não sendo assim tão surpreendente o equilíbrio entre as respostas dadas. Por isso, reavaliando a questão, consideramos também que seria adequado propor mais itens que ajudem a guiar o raciocínio dos alunos (ver Produto Final).

Dos 20 alunos que resolveram a **Atividade 13**, 17 representaram corretamente; no Quadro 17 pode-se ver dois desses registros para o item (a), nos quais é possível reconhecer, ainda que implicitamente, a mobilização dos conceitos de equipartição e de fração unitária.

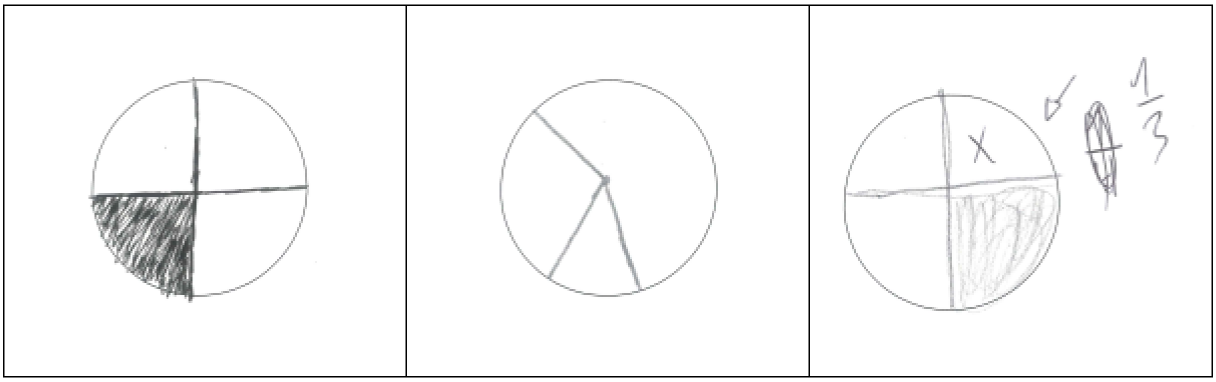
Quadro 17 – Registros de dois alunos para responder o item (a) da Atividade 13

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Já no Quadro 18 tem-se o registro das resoluções de 3 alunos que foram considerados incorretas: o primeiro mobilizou uma equipartição em quartos no lugar de terços; o segundo não mobilizou o conceito de equipartição e o terceiro mobilizou inicialmente a fração unitária em quartos, daí aparentemente percebeu seu erro, mas, para ajustar modificou a unidade e não a equipartição, sugerindo uma dificuldade (que consideramos natural) em equiparticionar um disco em três partes.

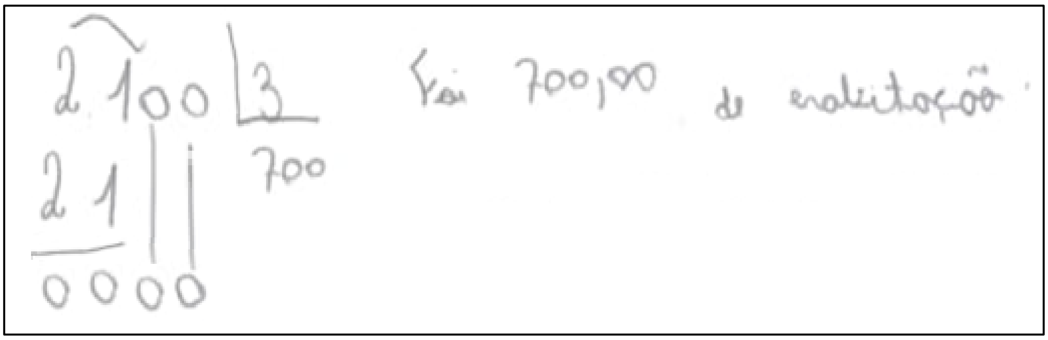
Quadro 18 – Registros de três alunos para representar $\frac{1}{3}$ da renda familiar (item (a) da Atividade 13)



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Quanto ao item (b) da Atividade 13, 18 alunos responderam corretamente R$ 700,00 e 2 alunos não responderam a questão. Consideramos, a partir dos resultados obtidos neste item, que os alunos conseguiram equacionar e resolver esse problema que envolve fração unitária de um número natural. O teorema em ação que pudemos identificar no registro de um estudante é o relativo à divisão euclidiana (Figura 82).

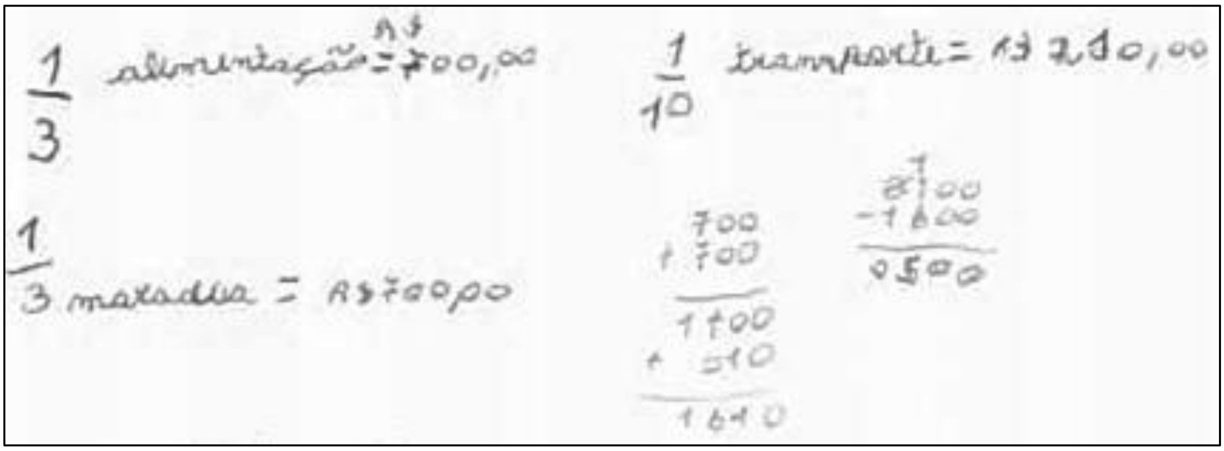
Figura 82 – Registro de um aluno para determinar $\frac{1}{3}$ de R$ 2.100 (item (b) da Atividade 13)



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Os itens (c) e (d) da Atividade 13 são de resposta aberta. Apresentamos na Figura 83 o registro de um aluno que apresenta estimativas na forma de fração do orçamento para os gastos com alimentação ($\frac{1}{3}$) e transporte ($\frac{1}{10}$) e explicita seu raciocínio, mobilizando também a adição das parcelas bem como a subtração salário - total de gastos, para responder ao item (d).

Figura 83 – Resposta de um aluno aos itens (c) e (d) da Atividade 13

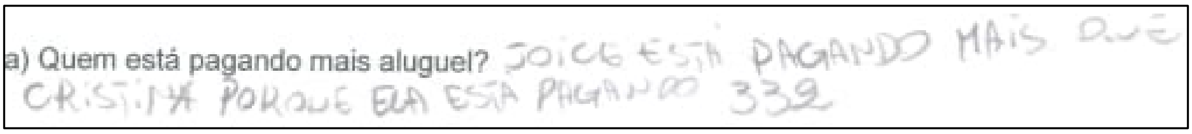


Fonte: Dados da pesquisa (2019).

O item (e) da Atividade 13 é também de resposta aberta, e pouco tem a ver com Matemática, por isso deixamos os detalhes registrados apenas no Apêndice.

Sobre o enunciado da **Atividade 14**, cabe ressaltar inicialmente que o valor apresentado originalmente aos estudantes foi de R$ 500,00. Dos 14 alunos que responderam a Atividade 14, 13 afirmaram no item (a) que Joice estava pagando mais aluguel que Cristina, sendo que apenas 1 aluno justificou seu raciocínio por meio do cálculo de $\frac{2}{3}$ dos 500 reais (Figura 84), deixando implícita a mobilização da comparação deste valor com o valor total do aluguel. Apenas, 1 aluno afirmou que elas estavam pagando o mesmo valor, sem dar uma justificativa que nos permitisse retirar alguma informação sobre seu esquema de pensamento.

Figura 84 – Resposta de um aluno ao item (a) da Atividade 14

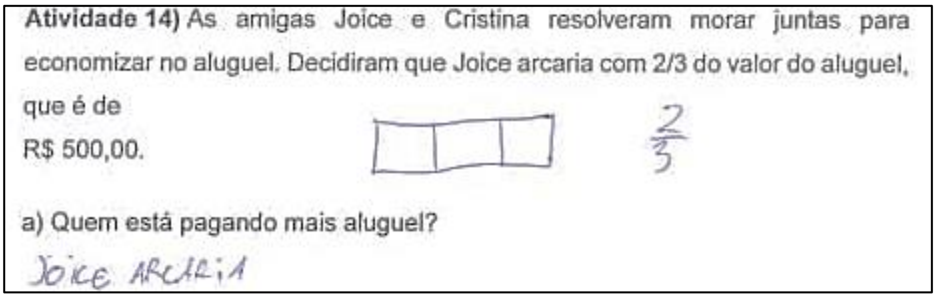


Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Com base na resolução deste estudante, demo-nos conta de que o valor do aluguel deveria ter sido um múltiplo de 3 para que a complexa representação decimal de um número racional proveniente de uma divisão fosse evitada, por isso decidimos alterar, no produto final, o valor do aluguel para um múltiplo de 3, no caso 540 reais..

Ainda na resolução do item (a), outro aluno mobilizou a representação pictórica (Figura 85), sendo possível perceber que os conceitos de terços e de fração não unitária estão claros para este aluno. No entanto, a comparação de frações ficou apenas implícita.

Figura 85 – Resposta de um aluno ao item (a) da Atividade 14


Atividade 14) As amigas Joice e Cristina resolveram morar juntas para economizar no aluguel. Decidiram que Joice arcaria com 2/3 do valor do aluguel, que é de
R$ 500,00.

$\frac{2}{3}$

a) Quem está pagando mais aluguel?

Joice ARCARIA

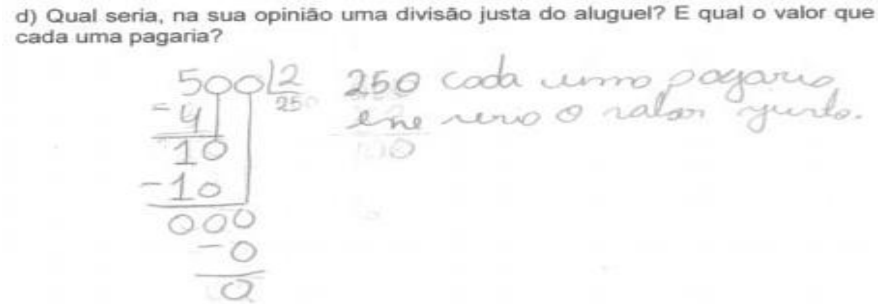
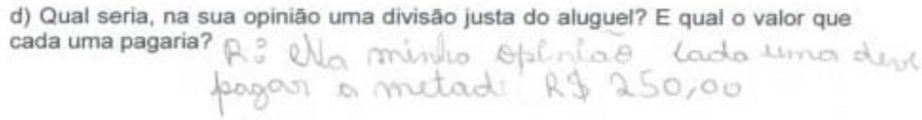
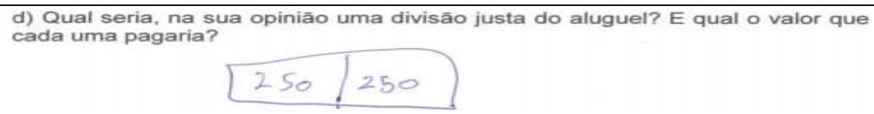
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

O item (b) da Atividade 14 é de resposta aberta. Dos 14 alunos que realizaram esta atividade, um aluno não se posicionou, 11 posicionaram-se achando que esta distribuição não é justa, e um complementou justificando que "*não acho justo, pois Joice paga mais do que Cristina",* sugerindo ter aí evocado o conceito de metade e a comparação de $\frac{2}{3}$ com metade; 2 estudantes acharam justa tal distribuição, sem justificar seus posicionamentos.

Com relação ao item (c) da Atividade 14, foi possível constatar que o posicionamento de alguns alunos alterou-se: dos 14 alunos, 7 reafirmaram que não achavam justa a divisão; uma das justificativas apresentadas foi: "*Não, porque as duas moram ali e devem pagar a mesma quantia*". Outros 5 alunos posicionaram-se afirmando que agora a divisão estava justa, e uma das justificativas apresentadas foi: "Sim. Daí seria justo porque Joice ganha mais, dai vai poder pagar mais", sugerindo a mobilização do conceito de relação entre grandezas no mesmo sentido. Dois alunos responderam apenas "talvez" e "sim e não", sem qualquer justificativa.

O item (d) da Atividade 14 tem também resposta aberta; 12 dos 14 alunos responderam que Joice e Cristina tinham que pagar metade cada uma, deixando clara a mobilização do conceito de metade. Quanto ao valor a ser pago por cada uma, além de um estudante que não respondeu a questão, chamou nossa atenção a resposta de 1 aluno: R$ 750,00 cada**.** No Quadro 19 são apresentados os registros considerados satisfatórios de três alunos e dos quais vários conceitos e/ou teoremas em ação emergem: o teorema da divisão euclidiana (Linha I), o conceito de metade (Linhas II e III), além da adequada representação pictórica na Linha III.

Quadro 19 – Resposta de três alunos sobre qual divisão do aluguel seria mais justa e qual o valor que cada uma pagaria (item (d) da Atividade 14)

Teorema em ação	Resposta do aluno
Divisão euclidiana	 d) Qual seria, na sua opinião uma divisão justa do aluguel? E qual o valor que cada uma pagaria? 250 cada uma pagaria ele seria o valor justo.
Conceito de metade	 d) Qual seria, na sua opinião uma divisão justa do aluguel? E qual o valor que cada uma pagaria? R: Na minha opinião cada uma deve pagar a metade R$ 250,00
Representação Pictórica	 d) Qual seria, na sua opinião uma divisão justa do aluguel? E qual o valor que cada uma pagaria? 250 | 250

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Na Atividade 14 ficou claro para nós que os alunos conseguiram comparar $\frac{2}{3}$ com metade de uma unidade, e que dominam o significado de “fração de”, pois mostraram coerência nas respostas a questões que envolveram o significado de “fração de”, mesmo envolvendo grandezas discretas; contudo, boa parte dos alunos só se utilizou de registros quando solicitado de forma explícita, por isso, não foi possível perceber se a problemática embutida no cálculo de $\frac{2}{3}$ de R$ 500,00 apareceu ou não, só podemos afirmar que nenhum registro desse cálculo apareceu.

A **Atividade 15** foi respondida por 19 estudantes. Dez dos 19 alunos representaram a fração das horas trabalhadas por $\frac{8}{24}$, evidenciando a mobilização do conceito de fração não unitária; 3 alunos responderam diretamente “$\frac{1}{3}$“, deixando implícita a mobilização do conceito de equivalência, conceito explicitado por 5 outros alunos no registro “$\frac{8}{24}$ ou $\frac{1}{3}$”; e apenas um aluno respondeu a questão de forma insatisfatória com o registro “A metade de 14 horas”.

O item (b) da Atividade 15 tem resposta aberta. Dos 19 alunos, apenas um aluno não respondeu; 15 alunos fizeram uso de fração, mobilizando os conceitos de fração unitária e/ou não unitária, sendo que um deles deixou evidente a mobilização do teorema em ação sobre equivalência de frações, a saber, “$\frac{5}{12} = \frac{10}{24}$ - 10 horas”; 3 alunos responderam apenas o número de horas que dormem, não calculando a fração que ele representa do dia.

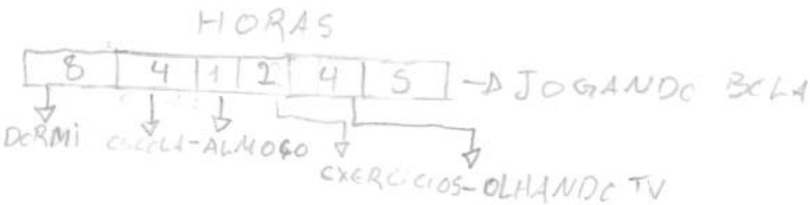
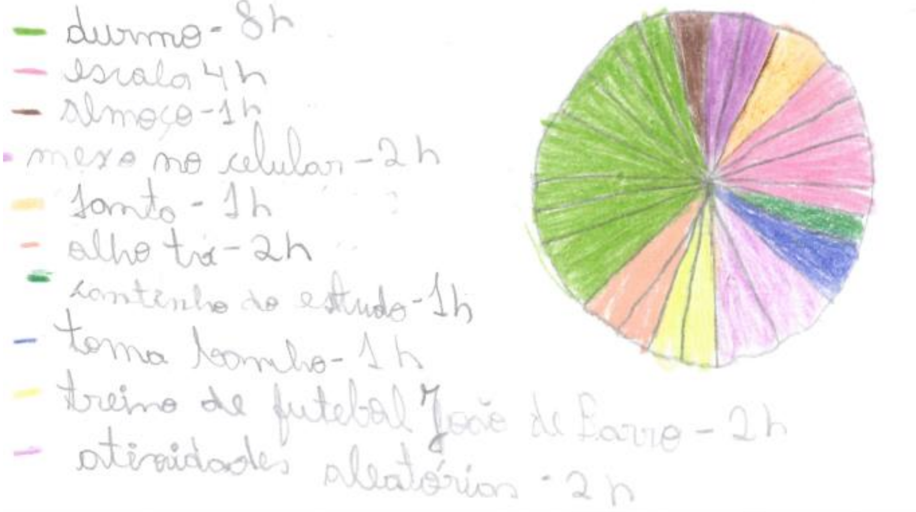
O item (c) da Atividade 15 convida o estudante a refletir sobre o conteúdo em estudo relacionando com sua rotina de sono do seu dia a dia e tem resposta aberta. Dos 19 alunos, 16 alunos fizeram uso de fração, mobilizando os conceitos de fração unitária ou não unitária, sendo que 3 deles mobilizaram o teorema em ação sobre equivalência de frações. Três alunos cometeram equívocos ao determinar a fração das 24 horas que dorme ou que é recomendado dormir.

No item (d) da Atividade 15 os 19 alunos fizeram uso de fração, mobilizando os conceitos de fração unitária ou não unitária, sendo que 3 deles mobilizaram o teorema em ação sobre equivalência de frações, a saber, “$\frac{1}{6}$” mantendo o padrão do item (c).

Com relação à representação pictórica requisitada no item (e), as respostas dos estudantes nos sugerem que eles não interpretaram “fracionamento” como fração, e sim como “partição”, como no dia a dia, pois suas respostas não foram dadas na forma de fração. Dez dos 19 alunos utilizaram o retângulo para representar a unidade dia, 5 utilizaram o disco, 2 fizeram o desenho de uma casa, e 2 não responderam a questão.

O Quadro 20 apresenta uma amostra das representações pictóricas apresentadas. Destacamos que o aluno relatado na Linha I não atentou para a equipartição, preocupando-se provavelmente apenas em representar porções; já o estudante relatado na Linha II foi cuidadoso na equipartição, tentando subdividir o disco em 24 partes iguais; já o estudante relatado na Linha III fez o desenho de uma casa, não apresentando a representação de fração.

Quadro 20 – Amostra de cada forma de representação pictórica registrada no (item (e) da Atividade 15)

	Registro pictórico do dia
I	
II	
III	

Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Avaliamos que a Atividade 15 atingiu seus objetivos, considerando que pelo menos 16 dos 18 alunos conseguiram calcular “fração de” uma grandeza discreta em uma situação da qual ele é convidado a participar, conseguindo observar suas atividades diárias como sendo uma fração do seu dia, identificando-a como fator multiplicativo.

Como a Atividade 7, a **Atividade 16** é um momento de fechamento para o caso de multiplicação de fração própria por um número natural. No Quadro 21 são explicitados os problemas elaborados em grupos e resolvidos de forma individual. Os problemas das Linhas I e II foram considerados satisfatórios, por apresentarem coerência com o que foi desenvolvido até o momento, requerendo, inclusive, a mobilização da subtração. É possível perceber que nem sempre os grupos conseguiram efetivamente formular um problema (Linhas III e VIII), apesar de os integrantes do grupo reportado na Linha III já apresentarem na própria redação o cálculo correto, evidenciando o domínio sobre o conceito de fração (própria) de grandeza discreta. Também é possível perceber problemas com informação incompleta ou envolvendo uma situação impossível (Linha IV, que acabou, acreditamos que por equívoco, por incluir uma expressão diferente da solicitada, e Linhas VI e VII).

Quadro 21 – Problemas elaborados pelos grupos envolvendo multiplicação de uma fração por um número natural

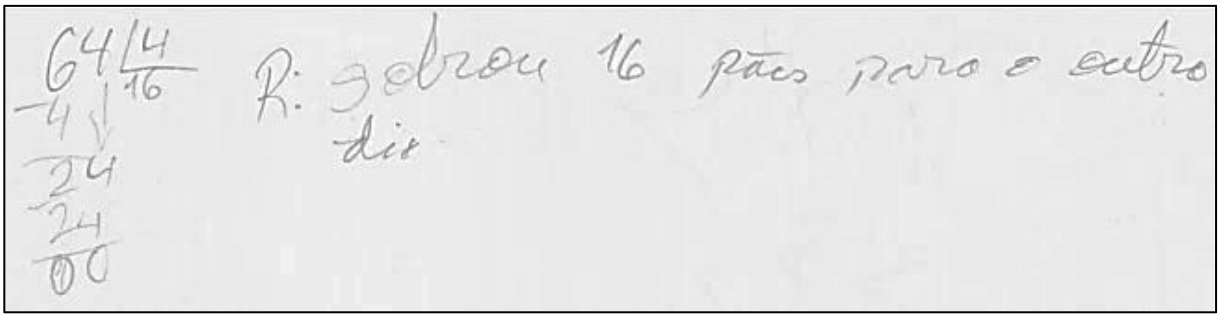
	Expressão	**Quantidade de alunos no grupo**	**Problema elaborado pelo grupo**
I	$\frac{3}{4}$ de 64	2	"João foi na padaria e comprou 64 pães para um churrasco e comeram $\frac{3}{4}$ da quantidade de pães. Quanto sobrou para o dia seguinte?"
II	$\frac{2}{3}$ de 33	5	"Compramos uma pizza de 33 pedaços, mas sobrou $\frac{2}{3}$. Quanto sobrou de pizza?"
III	$\frac{3}{4}$ de 40	2	"João foi na escola e fez a conta $\frac{3}{4}$ de 40. Ele botou que é igual a 30 e ele ganhou nota 10."
IV	$\frac{2}{4}$ de 64	2	"João foi na futeira comprar $\frac{3}{4}$ de 67 caqui. Quantos ele comprou?" (impossível)
V	$\frac{2}{6}$ de 42	2	"Mariana tinha $\frac{2}{6}$ de balas e João 42 pirulitos. Quanto os dois teriam juntos?" (insatisfatório)
VI	$\frac{3}{5}$ de 30	3	"Samuel e Riana foram na casa de Ryan e comeram $\frac{3}{5}$ de pizza que Ryan fez." (incompleto)
VII	$\frac{2}{3}$ de 15	3	"Mariana lavou $\frac{2}{3}$ de 15 de roupa e na terça lavou o triplo dessa quantidade." (incompleto)
VIII	$\frac{2}{5}$ de 30	3	"Dener passa 4 horas do seu dia olhando TV, 2 brincando e 6 horas dormindo. A que fração de 30 isso representa?" (incorreto)

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Como na Atividade 7, o segundo momento da Atividade 16 consistiu em distribuir para os alunos, de forma aleatória, todas as questões formuladas pelos grupos para serem resolvidas individualmente, cuidando para que nenhum aluno ficasse com a questão que seu grupo criou.

A Figura 86 revela o esquema de pensamento foi utilizado por um aluno para a resolução do problema da Linha I do Quadro 21. Percebemos que o aluno mobilizou a subtração $1 - \frac{3}{4}$ por cálculo mental, obtendo $\frac{1}{4}$, e a seguir, mobilizou o teorema da divisão euclidiana para encontrar $\frac{1}{4}$ de 64.

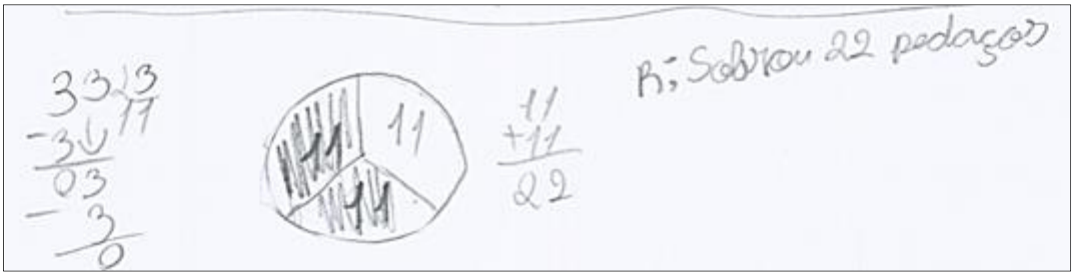
Figura 86 – Resolução de um aluno para o problema da Linha I do Quadro 21



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A Figura 87 revela o esquema de pensamento utilizado por um aluno para a resolução do problema da Linha II do Quadro 21. Pode-se observar que o aluno mobilizou o teorema da divisão euclidiana para determinar $\frac{1}{3}$ de 33 e a seguir utilizou a representação pictórica para distribuir o valor correspondente a cada terço e, finalmente, mobilizou o conceito de fração não unitária, determinando então os $\frac{2}{3}$ de 33 por meio da adição.

Figura 87 – Resolução um aluno para o problema da Linha II do Quadro 21

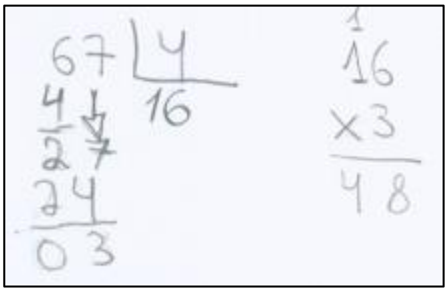


Fonte: Dados da pesquisa (2019).

O aluno incumbido da resolução do problema da Linha III do Quadro 21 respondeu, com razão, que não estendeu o que o colega havia proposto.

O aluno que recebeu o problema da Linha IV do Quadro 21, não percebeu que não era possível dividir os 67 caquis em 4 partes iguais, apesar de ter realizado a divisão euclidiana corretamente, evidenciando uma mobilização incorreta do conceito de equipartição ao ignorar o valor da sobra (Figura 88). No entanto, a partir da determinação errônea de $\frac{1}{4}$, o aluno mobilizou corretamente o conceito de fração não unitária, fazendo uso da multiplicação de naturais.

Figura 88 – Resolução de um aluno para o problema da Linha IV do Quadro 21



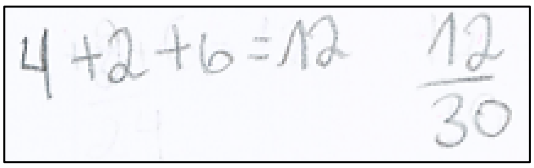
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Os problemas das Linhas V e VI do Quadro 21 foram, com razão, considerados impossíveis de serem solucionados.

O problema da Linha VII do Quadro 21 também foi considerado incompleto pelo estudante que ficou incumbido de resolvê-lo. No entanto, este estudante, a partir de sua interpretação, resolveu completar seu enunciado com a pergunta “Quanto Mariana lavou na terça?” e determinou que o resultado era 30, contudo sem explicitar o esquema de pensamento utilizado; supomos que ele tenha mobilizado o conceito de fração de grandeza discreta, calculando $\frac{2}{3}$ de 15 que é 10, e a seguir o conceito de triplo dentro do universo dos números naturais, chegando ao resultado 30.

O problema da Linha VIII do Quadro 21 foi considerado incorreto por nós, porém não pelo estudante que o resolveu. Este deu como resultado a fração $\frac{12}{30}$, sem levar em conta a situação relatada: as horas têm a ver com o dia, portanto a unidade deveria ter sido 24 horas. (Figura 89).

Figura 89 – Resolução de um aluno para o problema da Linha VIII do Quadro 21



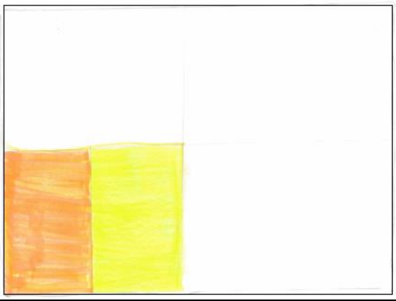
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Percebemos, com a Atividade 16, alguma evolução dos alunos com relação à elaboração de problemas, mas reconhecemos como longo o percurso a ser trilhado até que seja possível considerar atingido o objetivo de elaborar problemas envolvendo multiplicação de frações. As Atividades 7 e 16 evidenciaram para nós a falta de familiaridade dos estudantes com a formulação de problemas. Revela-se assim oportuna e relevante a inclusão de muitas Habilidades da BNCC do tipo “Resolver e elaborar problemas de...” encontráveis no documento desde os anos iniciais do EF. Reiteramos que atividades com essas características contribuem para despertar a criatividade dos estudantes e consolidar a aprendizagem dos conceitos.

Com relação à Seção 2 (Preparando a Multiplicação de uma fração própria por um número natural) e com base na análise das resoluções dos alunos, consideramos que, até o momento, uma parcela significativa dos alunos soube equacionar e resolver problemas que envolvem multiplicação de fração própria por número natural. Muitos estudantes conseguiram identificar que, em determinadas situações, não é possível determinar uma fração de uma grandeza discreta. Percebemos que os alunos precisam ser estimulados a verificar se a solução encontrada condiz com a solução esperada, pois às vezes deram respostas sem sentido ou apresentam respostas incompletas, especialmente nos casos que preparavam para a ruptura conceitual de, na multiplicação de frações, se um fator é menor do que 1 então o resultado será menor do que o outro fator.

A **Atividade 17** já integra a seção Motivando e introduzindo a Multiplicação de uma fração própria por uma fração qualquer. Ela foi realizada por 21 alunos, com auxílio de material concreto, a saber, um retângulo de papel. No Quadro 22 podemos observar duas representações pictóricas diferentes desenvolvidas por dois dos 17 alunos. Ambas fizeram uso de uma mesma equipartição do retângulo para representar $\frac{1}{4}$ do mesmo, contudo as representações de $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ foram levemente diferentes; para ambas, no entanto, foi mobilizado o conceito em ação sobre “a metade de”.

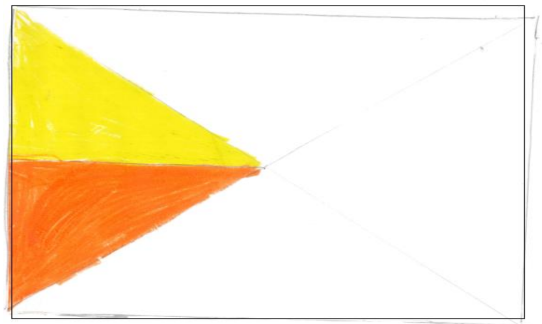
Quadro 22 – Representações pictóricas de dois alunos no item (a) da Atividade 17

	Representação pictórica
I	
II	

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Acreditamos que os outros 4 alunos mobilizaram equivocadamente o conceito de equipartição, acreditando que as diagonais de um retângulo (que não era quadrado, no caso) o equiparticionam em 4 partes (Figura 90).

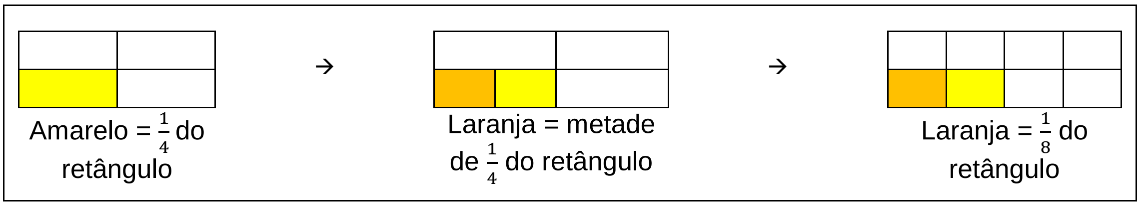
Figura 90 – Representações pictóricas de 4 alunos no item (a) da Atividade 17



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Ainda no item (a) da Atividade 17, oito dos 21 alunos responderam corretamente que a fração do retângulo pintada de laranja é $\frac{1}{8}$, no entanto sem registrar seus esquemas de pensamento; acreditamos que tenham mobilizado o conceito de equipartição (em 8 partes) a partir da metade da quarta parte seguida da equipartição dos demais quartos, como ilustrado na Figura 91.

Figura 91 – Uma possível representação pictórica para determinar $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$



Fonte: Elabora pela autora (2019).

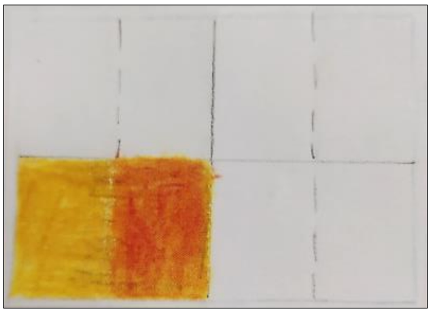
No item (b) da Atividade 17, é oportunizado um fechamento; o número de alunos que responderam a questão de forma correta aumentou em relação ao item (a), passando de 8 para 12 alunos. Creditamos esse aumento a uma maior compreensão dos alunos sobre o tema da atividade, ao lerem o enunciado "$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ do retângulo equivale a ____ do retângulo", o que talvez tenha deixado mais evidente o processo que se estava querendo produzir.

Com base nos resultados obtidos, podemos traçar algumas hipóteses sobre os esquemas de pensamento dos alunos que não chegaram à resposta correta: os 2 alunos que responderam $\frac{6}{8}$ parecem estar apresentando a representação fracionária do que restou sem ser pintado no retângulo; se assim foi, parece-nos evidente que esses alunos chegaram corretamente à representação da expressão $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$, já que fizeram uso de oitavos. Teriam evocado em seus esquemas de pensamento, neste caso, os conceitos de metade e de equipartição. De forma análoga, parece que os alunos que responderam $\frac{2}{8}$ no item (b) evocaram corretamente os conceitos de metade e de equipartição em seus esquemas de pensamento, mas indicaram a parte que estava pintada do retângulo (laranja e amarelo juntas). Também os dois alunos que responderam $\frac{1}{4}$ parecem ter apenas indicado a parte pintada, e neste caso não é claro que tenham evocado os conceitos de metade e de equipartição.

Já a resposta $\frac{2}{6}$ sugere que estes 2 alunos ainda não se apropriaram do conceito de fração no contínuo: talvez tenham aí representado com o número 2 o número de partes pintadas e com o número 6 o número de partes por pintar; se este foi o caso, teriam mobilizado o conceito de metade mas não de equipartição. A resposta do estudante que respondeu "metade" foi considerada incorreta porque parece que ele não mobilizou o conceito de unidade, referindo-se aqui à parte pintada de laranja, e não ao retângulo inteiro.

Na Figura 92, temos a representação pictórica apresentada por um aluno que evidencia a mobilização do conceito de equipartição (no caso em 8 partes) ao tracejar, indicando prolongar a ação de subdividir os demais quartos da mesma forma como realizou no quarto amarelo.

Figura 92 – Representação pictórica de um aluno no item (a) da Atividade 17

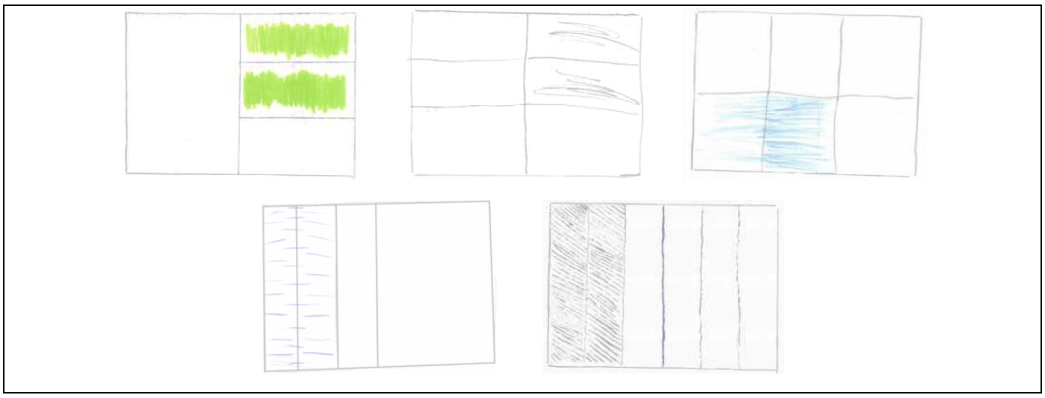


Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A Atividade 17 proporcionou posteriormente uma discussão plenária, na retomada da atividade com a turma para correção. Nesta ocasião, as etapas ilustradas na Figura 91 foram registradas, em conjunto, no quadro negro.

Apesar de considerarmos a **Atividade 18** mais complexa que a atividade anterior, pois agora faz-se uso de fração não unitária, destacamos que os 21 alunos que a realizaram não encontraram dificuldade para realizar a representação pictórica de $\frac{2}{3}$ de metade da folha, ilustrando-a de forma satisfatória. No Quadro 23 podemos observar algumas representações pictóricas apresentadas pelos alunos.

Quadro 23 – Algumas representações pictóricas dos alunos na Atividade 18



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A forma diversificada de representação enriqueceu a discussão encaminhada posteriormente, por ocasião da correção da atividade. Cabe ressaltar que, mesmo os alunos que fizeram a equipartição apenas de uma metade do retângulo acertaram a resposta à atividade; daí inferimos que tais alunos mobilizaram implicitamente o conceito de equipartição no retângulo, assim como os alunos que explicitaram isto em suas representações.

No item (ii) da Atividade 18, 19 dos 21 alunos que realizaram a atividade fizeram uso de representação numérica acertaram o número de partes da equipartição; no entanto, alguns desses estudantes tiveram dificuldade em determinar a fração do retângulo que foi pintada; 16 alunos responderam a Atividade 18 de forma satisfatória, aumentando o índice de bom desempenho em relação à Atividade 17. Assim, consideramos que a Atividade 18 atingiu satisfatoriamente seus objetivos, porém reconhecemos que poderíamos ter explorado mais a escrita numérica

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{1}{2} = \frac{2}{6},$$

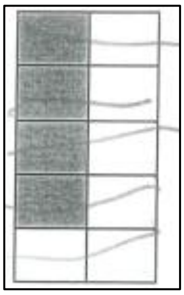
que foi registrada por apenas 3 alunos e que dá um fechamento para a atividade, além de preparar melhor o aluno para as próximas atividades desta sessão. Por isso um item (iii) foi incluído no produto final.

A **Atividade 19** foi realizada por 21 alunos que responderam o item (a) de forma unânime: $\frac{4}{10}$. Ainda que solicitados a justificarem suas respostas, alunos apresentaram certa resistência, pois apenas 6 alunos o fizeram, alguns desses numericamente As justificativas permitiram-nos inferir que os alunos mobilizaram corretamente o conceito de fração não unitária de grandeza contínua, ainda que alguns termos utilizados não fossem completamente adequados (“retângulos”, “quadrados”), sendo por isso consideradas insatisfatórias.

Dezoito dos 21 alunos responderam corretamente o item (b) da Atividade 19, , sendo que 4 desses fizeram uso da fração $\frac{8}{10}$, sem, no entanto, justificar claramente por quê. Os outros 14 alunos utilizaram a fração $\frac{4}{5}$ e, desses, 5 justificaram explicitando o conceito de metade; 2 apenas o deixaram implícito e 7 não justificaram.

Com relação aos 3 alunos que responderam $\frac{8}{20}$, parece sugerido que todos dividiram cada uma das 10 partes da unidade ao meio, encontrando então 20 como novo denominador e 8 como numerador porque seria esta a quantidade de novas partes pintadas de cinza, mobilizando incorretamente o conceito de unidade (Figura 93).

Figura 93 – Registro de um aluno no item (b) da Atividade 19



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Entendemos que a interpretação do enunciado foi um fator importante para os resultados incorretos na Atividade 19, por isso resolvemos no Produto Final sublinhar as diferentes unidades consideradas nos itens (a) e (b). Consideramos que 18 dos 22 estudantes que realizaram a Atividade 19, conseguiram reconhecer na representação pictórica dada a fração de fração, e o fator multiplicativo, embora isso pudesse ter ficado mais evidente se a questão tivesse solicitado por exemplo que preenchessem a expressão a seguir

$$— \text{ de } \frac{1}{2} \text{ do retângulo } = \frac{4}{10} \text{ do retângulo,}$$

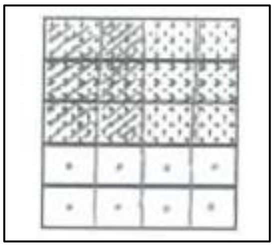
incluída como item (c) no Produto Final.

Na **Atividade 20**, realizada por 22 alunos, o item (a) retoma o conceito de fração não unitária já abordado nas atividades de Souza (2019b) e no item (a) da atividade anterior, portanto nossa expectativa era de 100% de acertos. E, de fato, todos os alunos acertaram a resposta $\frac{3}{5}$, evidenciando a mobilização correta do conceito de fração não unitária.

Já o item (b) da Atividade 20, que prepara para o conceito de multiplicação de fração por uma fração não unitária, apesar de já ter sido corrigida a Atividade 19 no momento em que as resoluções da Atividade 20 foram recolhidas, foi possível constatar novamente uma dificuldade dos alunos em identificar a nova unidade. Neste momento, a professora interferiu, salientando que toda parte pintada era a nova unidade que deveria ser dividida em quartos e assim seguiram desenvolvendo o item (b). Como não foi solicitado que os alunos justificassem suas respostas, podemos apenas intuir os esquemas de pensamento mobilizados pelos estudantes.

Dos 22 alunos, 19 mobilizaram corretamente, após a interferência da professora, o conceito de unidade e de equipartição (em 4 partes), contudo verifica-se que os 3 alunos mobilizaram incorretamente o conceito de fração não unitária. Um aluno mobilizou equivocadamente o conceito de metade, talvez influenciado pelas duas atividades anteriores que oportunizavam este conceito. Destacamos que 2 alunos não responderam o item (b) e que para todos os 20 estudantes que responderam o item (b) ficou evidente a mobilização do conceito de equipartição, ainda que 9 estudantes o tenham utilizado com relação à unidade retângulo, adiantando o raciocínio requerido no próximo item (Figura 94).

Figura 94 – Registro de um aluno que mobilizou o conceito de equipartição com relação à unidade retângulo (item (b) da Atividade 20)



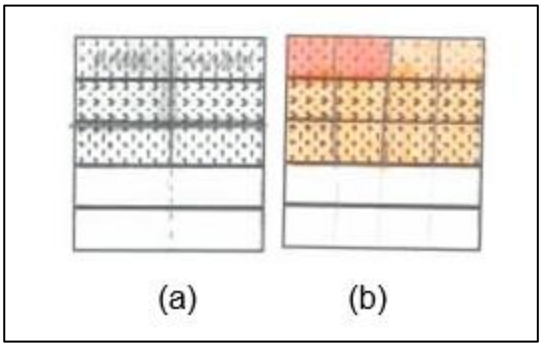
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

No item (c) da atividade 20, doze alunos tiveram êxito na conversão da representação pictórica apresentada no item (b) para representação numérica $\frac{6}{20}$, sugerindo terem mobilizado de forma correta os conceitos de unidade e de fração não unitária.

O aluno que respondeu $\frac{5}{20}$, não apresentou a representação pictórica no item (a); supomos que tenha mobilizado corretamente o conceito de unidade e de equipartição, no entanto, ao mobilizar o conceito de fração não unitária tenha se enganado na contagem, errando o número de partes que foram tomadas do total; imaginamos que tenha sido este também o esquema de pensamento mobilizado pelo aluno que respondeu $\frac{2}{20}$.

Um estudante que deu $\frac{2}{10}$ como resposta é o autor da representação pictórica da Figura 96 item (a); percebe-se que ele foi coerente com a representação encontrada, mobilizando corretamente os conceitos de unidade, de equipartição e de fração não unitária, apesar de sua resposta estar errada. A mesma coerência acontece com os dois alunos que responderam $\frac{2}{12}$, autores da representação da Figura 95 item (b).

Figura 95 – Respostas de dois alunos ao tem (b) da Atividade 20



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Os 3 alunos que responderam $\frac{2}{4}$ utilizaram apenas a fração que foi solicitada para ser pintada na parte hachurada. Já com relação à resposta $\frac{2}{5}$ dada por 2 alunos, não conseguimos imaginar o esquema de pensamento por eles utilizado. Por isso no Produto Final, decidimos incluir no item (c) da Atividade 20 a solicitação de uma justificativa.

O item (d) da Atividade 20 busca dar um fechamento ao registro de "fração de fração". Dos 22 alunos que realizaram a atividade, 15 responderam corretamente o item (d), a saber, "$\frac{2}{4}$ de $\frac{3}{5}$ da figura equivale a $\frac{6}{20}$ da figura".

Um aluno respondeu "$\frac{2}{4}$ de 2 da figura equivale a $\frac{1}{4}$ da figura", sendo considerado incorreto porque este não apresentou coerência com suas respostas aos itens (b) e (c); no item (c) onde respondeu $\frac{5}{20}$ e no item (b) não registrou a representação pictórica. Também não foram coerentes os 2 alunos que responderam "$\frac{2}{4}$ de $\frac{2}{12}$ da figura equivale a $\frac{2}{20}$ da figura", pois no item (c) responderam $\frac{2}{12}$. Já o aluno que respondeu "$\frac{2}{4}$ de $\frac{3}{5}$ da figura equivale a $\frac{2}{20}$ da figura" manteve coerência com suas respostas anteriores, por isso sua resposta ao item (d) foi considerada satisfatória.

A resposta "$\frac{2}{4}$ de $\frac{3}{5}$ da figura equivale a $\frac{2}{3}$ da figura" de um aluno, apesar de incorreta, sugere que o aluno mobilizou corretamente a fração da fração da figura.

Os 2 alunos que não responderam o item (d), também não tiveram êxito na conversão da representação pictórica apresentada no item (b) para representação numérica identificar no item (c).

Mesmo sem ser este o objetivo da Atividade, percebemos os primeiros indícios por parte de alguns alunos na busca por identificar qual é a operação que estava sendo realizada de maneira implícita. Por exemplo, na Figura 96, é possível perceber que um aluno construiu um teorema em ação evidenciando assim um conceito em ação sobre multiplicação de frações, indicando já o processo/algoritmo.

Figura 96 – Construção de um aluno usando um teorema em ação evidenciando assim um conceito em ação sobre multiplicação de frações

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Consideramos que, na Atividade 20, os 15 dos 22 alunos que responderam corretamente o item (d) tenham mobilizado o conceito de multiplicação de fração por fração, ainda que de forma implícita. Assim, consideramos que a atividade atingiu seus objetivos. Quanto ao teorema em ação sendo construído por um aluno sobre multiplicação de fração por fração, optamos por não dar, neste momento, muita ênfase no grande grupo à descoberta do aluno, para verificar se outros colegas teriam a mesma percepção nas atividades que seguem.

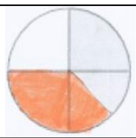
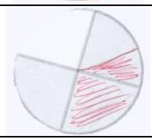
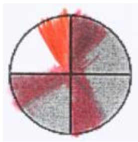
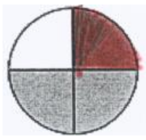
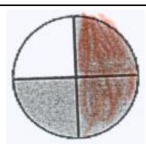
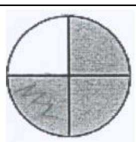
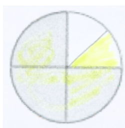
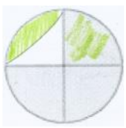
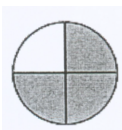
Por problemas na digitalização, não foi possível realizar a análise da **Atividade 21**. Cabe ressaltar, no entanto que é no item (d) que começou-se a registrar "fração de fração" por meio de uma multiplicação, sendo aí introduzida a definição de multiplicação de frações.

Para a **Atividade 22**, foi entregue a cada aluno um disco de papel, para que pudessem manipulá-lo. Ela foi realizada por 18 estudantes.

Consideramos que 13 alunos mobilizaram corretamente o conceito de equipartição, identificando quartos, onde 10 responderam $\frac{3}{4}$ mobilizando o conceito de fração não unitária; os 3 alunos que responderam $\frac{1}{4}$ parecem ter levado em consideração a parte que não estava pintada de cinza. Já os 5 alunos que responderam $\frac{1}{3}$ não conseguiram mobilizar corretamente o conceito de fração no continuo (nem unitária, nem não unitária); a resposta $\frac{1}{3}$ sugere que apresentaram como numerador a parte sem pintar e como denominador a parte pintada, caso em que teria siddo mobilizado implícitamente o conceito de razão.

No item (b) os estudantes deveriam mostrar alguma coerência com suas repostas ao item (a). Apenas 8 dos 18 alunos apresentaram a representação pictórica de forma satisfatória (Linhas I a III do Quadro 24), sendo possível inferir que os conceitos de unidade e de metade foram mobilizados corretamente por esses alunos.

Quadro 24 – Representação pictórica de 8 alunos no item (b) da Atividade 22

	Representação Pictórica	**Quantidade de alunos**
I		6
II		1
III		1
IV		1
V		1
VI		2
VII		1
VIII		1
IX		1
X		3

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Cabe ressaltar a representação utilizada pelo estudante reportado na Linha III, que sugere ter mobilizando o teorema em ação sobre a metade de $\frac{3}{4}$ ser equivalente à soma das metades de cada um dos 3 quartos, resultando em três metades de quartos mobilizando provavelmente o raciocínio que, simbolicamente, se resume a: metade de $\frac{3}{4}$ = metade de $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4})$ = metade de $\frac{1}{4}$ + metade de $\frac{1}{4}$ + metade de $\frac{1}{4}$; o estudante da Linha IV parece ter feito um raciocínio similar, no entanto equivocou-se ao tomar tantas metades de $\frac{1}{4}$. O estudante reportado na Linha V mobilizou o conceito de metade em apenas $\frac{1}{4}$ da figura, não completando o raciocínio. Já as representações dos estudantes reportados nas Linhas VI, VII, VII e IX são insatisfatórias e não conseguimos imaginar qual foi o esquema de pensamento mobilizado. Cabe destacar que o estudante reportado na Linha IX parece não ter bem conscientizado ainda o conceito de equipartição.

Ainda no item (b), foi solicitado que os estudantes registrassem numericamente a fração do disco que eles tinham pintado de vermelho. Quinze dos 18 alunos mobilizaram corretamente o conceito de equipartição em quatro partes ao responderem "$\frac{3}{4}$" e "$\frac{1}{4}$", no entanto, 5 alunos não conseguiram representar numericamente a unidade; embora 3 deles tenham conseguido fazer a representação pictórica no item (a), e percebemos que os outros 2 mostraram-se coerentes com suas respostas ao item (a). O estudante que respondeu "$\frac{1}{2}$" parece ter mobilizado apenas o conceito de metade, deixando incompleto o raciocínio. Já para o estudante que respondeu "$\frac{3}{6}$" não nos deu indícios de qual pode ter sido o esquema de pensamento por ele utilizado.

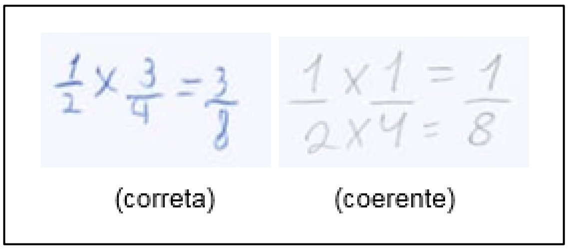
No item (c) da Atividade 22, uma parcela significativa dos alunos teve dificuldade de indicar a fração do disco que corresponde à parte pintada de vermelho. Apenas 3 alunos responderam corretamente $\frac{3}{8}$; outros dois alunos responderam respectivamente $\frac{4}{8}$ e $\frac{1}{8}$, que nos dá indicios de terem mobilizado corretamente o conceito de equipartição. Como não foi solicitado que os alunos justificassem suas respostas, não foi possível identificar os conceitos e teoremas em ação mobilizados por esses nem pelos demais alunos. Doze responderam ao item de forma incorreta e dois não responderam a questão.

Com relação ao item (d) da Atividade 22, dois estudantes responderam que $\frac{1}{2}$

de $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, um estudante respondeu que $\frac{1}{2}$ de $\frac{5}{6} = \frac{5}{6}$ e outro respondeu que $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$, evidenciando o não reconhecimento da transformação de "$\frac{1}{2}$ de" para "metade de", única razão que encontramos para registrarem que "$\frac{1}{2}$ de algo" continua sendo "algo". Percebemos que 10 estudantes conseguiram identificar a unidade como sendo $\frac{3}{4}$ do disco, embora, só 4 destes tenham conseguido responder que $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$. O registro $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4} = \frac{3}{6}$ apresentado por 4 estudantes e $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{6} = \frac{3}{8}$ apresentado por um estudante sugerem que os estudantes tenham mobilizado como teorema em ação uma afirmação equivocada, usando a adição dos numeradores e dos denominadores.

A representação numérica proposta no item (e) da Atividade 22 foi respondida por apenas 4 alunos, e de forma satisfatória (Figura 97); creditamos a dificuldade dos 14 outros à novidade introduzida pela definição de multiplicação de frações na atividade anterior e necessária aqui.

Figura 97 – Resposta de dois alunos ao item (e) da Atividade 22

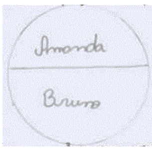
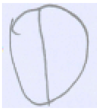


Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Surpreendeu-nos no item (a) da Atividade 22 o baixo desempenho (10 acertos em 18 respostas) dos estudantes, uma vez que o item requer apenas um conceito que já não deveria ser motivo de dúvida: o conceito de fração não unitária. Acreditamos que a mudança no formato de representação pictórica (do retângulo para o disco) possa ter dificultado o andamento dos demais itens da atividade, mas, segundo Duval, é a partir do contato com diversas representações que conseguimos aperfeiçoar e abstrair um novo conceito. Essa dificuldade parece ter respingado também na resolução dos demais itens. Por exemplo, no item (b) percebemos que a interpretação do que estava sendo solicitado não foi tão natural para os estudantes como esperávamos, levando em conta todo o trabalho sobre frações desenvolvido até aqui. De fato, apenas 10 dos 18 estudantes conseguiram traduzir numericamente o que estava sendo solicitado.

A **Atividade 23** foi realizada por 19 estudantes. Destes, 18 resolveram o item (a) de forma satisfatória. No Quadro 25 registramos as representações elaboradas pelos alunos.

Quadro 25 – Representação pictórica dos alunos no item (a) da Atividade 23

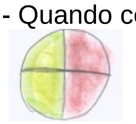
Linha	**Representação Pictórica**	**Quantidade de alunos**
I		1
II		1
III		5
IV		3
V		1
VI		5
VII		2

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Podemos observar uma diversidade nas representações: com exceção dos estudantes relatados nas Linhas IV e VI do Quadro 25, todos encontraram alguma forma de identificar, nas representações pictóricas utilizadas, a parte do xis que caberia <u>a cada um</u>. No entanto, os 18 alunos mobilizaram corretamente o conceito de metade. E apenas 1 aluno não realizou a representação.

Com relação ao item (b) da Atividade 23, cabe inicialmente ressaltar que a resposta esperada por nós era “não”, como bem explicou uma estudante “Não, pois ele deveria comer no máximo $\frac{1}{2}$ xis". De fato, havia aqui a possibilidade de que os estudantes mobilizassem a comparação entre metade e a fração $\frac{3}{4}$ desvinculada da situação, o que a maioria não fez.

Quadro 26 – Respostas dos alunos sobre a possibilidade de Bruno comer $\frac{3}{4}$ do xis (item (b) da Atividade 23)

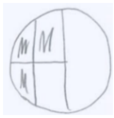
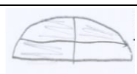
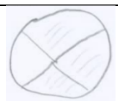
	Resposta	**Quantidade de alunos**	**Justificativa**
I	Sim (incorreto)	15	- Mas deixaria Amanda com $\frac{1}{4}$. (satisfatória) - É só ele cortar em quatro pedaços e comer três (satisfatória) - É só ele cortar em quatro pedaços e comer três (satisfatória) - Bruno comeu 3 pedaços e Amanda comeu 1 pedaço (insatisfatória) - Quando cortarmos o xis no meio e de novo assim  (incompleta) - É só Amanda comer menos (insatisfatória) - É só fazer mais um risco no meio (incompleta)
			- É só cortar o xis (insatisfatória)
			- Se ele dividir o pedaço dele em quatro (incorreta)
			- Pois o xis é grande (insatisfatória)
			- Porque está certa a resposta (incorreta)
II	Não	3	- Porque a Amanda comeria a outra metade (incompleta)
			- Pois ele deveria comer no máximo ½ xis (correta)
III	Não respondeu	1	-

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Com a leitura das justificativas (Quadro 26), precisamente as que integram a Linha I e que foram consideradas satisfatórias, demo-nos conta de que as condições iniciais do enunciado não foram consideradas pelos estudantes. Por isso, numa tentativa de reiterar que o enunciado deve ser cuidadosamente lido, a redação do item (b) sofreu alteração, sendo incluído o alerta "Nestas condições". Os 15 alunos relatados na Linha I do Quadro 26 parecem ter desconsiderado a primeira frase do enunciado. Se isto foi de fato o que aconteceu, então 3 desses estudantes justificaram de forma coerente, mobilizando os conceitos de equipartição e de fração não unitária. O estudante da III não se posicionou com relação ao item (b).

No Quadro 27, registramos as representações pictóricas construídas pelos 19 alunos como resposta ao item (c) da Atividade 23.

Quadro 27 – Representação pictórica dos alunos no item (c) da Atividade 23

Linha	**Representação pictórica**	**Quantidade de alunos**
I		1
II		1
		2
III		3 (insatisfatórias)
		1 (insatisfatórias)
		2 (insatisfatórias)
		1 (insatisfatórias)
		1 (insatisfatórias)
IV		1 (incorreta)
V		1 (incorreta)
		1 (incorreta)
VI		1 (insatisfatória)
VII		1 (incorreta)
VIII	$\frac{3}{8}$	2 (satisfatória)

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Analisando as Linhas I e II, percebemos que foi mobilizado corretamente o conceito de partes de partes de uma unidade, bem como o teorema em ação sobre como determiná-las; foram também mobilizados o conceito de equipartição de fração não unitária, sendo que o estudante relatado na Linha I mobilizou também o conceito de equipartição sobre a unidade "xis". As representações na Linha III foram consideradas insatisfatórias porque, apesar de ser possível perceber que o conceito em ação de partes de partes de uma unidade esteve presente no esquema de pensamento destes estudantes, o mesmo não ocorreu com o conceito de equipartição embutido no conceito de fração (a divisão foi em 4 partes, porém não todas de mesma área). A representação registrada na Linha IV sugere que tenha ocorrido a mobilização do conceito de partes de partes de uma unidade, contudo não foram considerados os conceitos de equipartição (a divisão foi em 4 partes, porém não todas de mesma área nem apenas sobre a metade) nem de unidade, por isso foi considerada incorreta. As representações registradas na Linha V foram também consideradas incorretas, pois é possível perceber que o conceito de unidade não foi mobilizado e o conceito de equipartição parece ter sido mobilizado apenas pelo segundo estudante, ainda que equivocando-se com a unidade. A representação registrada na Linha VI foi considerada insatisfatória, pois, apesar de evidente a mobilização do conceito de equivalência, ele foi mal aplicado: parece que o estudante equiparticionou cada quarto em quatro partes, pintando 3 partes de um quarto no lugar de três quartos da metade, por isso sua resposta foi $\frac{3}{16}$. O mesmo raciocínio parece ter sido utilizado na representação registrada na Linha VII, no entanto é evidente uma mobilização equivocada da representação numérica. Apesar de não apresentar a representação pictórica conforme solicitado, percebe-se que os 2 estudantes relatados na Linha VIII mobilizaram corretamente a representação numérica, por isso consideramos a resposta satisfatória, ainda que antecipando a resposta ao item (d).

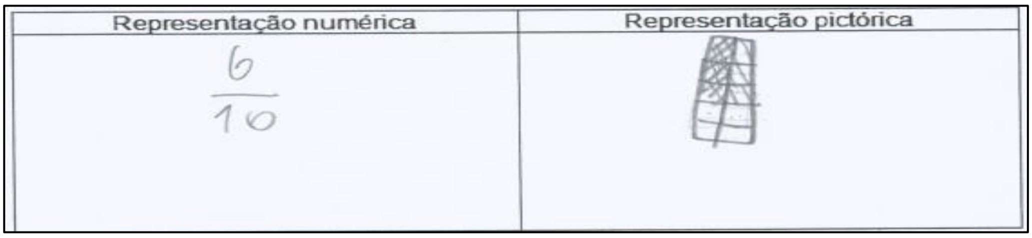
Com relação ao item (d) da Atividade 23, 8 dos 19 alunos responderam corretamente a questão, mobilizando adequadamente o conceito de fração não unitária "$\frac{3}{8}$". Um aluno, ao repetir a informação "$\frac{3}{4}$ da metade", não mobilizou qualquer conceito ou teorema. Três alunos, ao responderem "$\frac{3}{5}$", deixam implícito que não mobilizaram o conceito de equipartição. A resposta $\frac{3}{16}$ de um estudante foi coerente com sua reposta ao item (c) (Linha VI do Quadro 27). A resposta "$\frac{3}{5}$" dada por 3 estudantes não nos sugeriu indícios de quais teoremas ou conceitos tenham sido mobilizados.

Com relação ao item (e) da Atividade 23, consideramos que 10 dos 19 alunos que realizaram a atividade mobilizaram de forma satisfatória o conceito de multiplicação de frações ao responderem “$\frac{3}{8}$ do xis”; os 6 alunos que responderam “$\frac{3}{6}$ do xis” provavelmente mobilizaram, para chegar ao denominador 6, o teorema em ação relativo à adição de frações, sendo incoerentes com suas respostas no item (d); já um aluno, ao responder $\frac{4}{6}$, parece ter mobilizado um teorema em ação de enunciado inválido, fazendo uso da adição dos numeradores e dos denominadores. Para as respostas registradas "$\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{2}$ do xis = $\frac{1}{2}$ do xis” e “$\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{2}$ do xis = $\frac{1}{2}$ do xis” não nos foi possível identificar quais poderiam ter sido os conceitos e teoremas utilizados pelos autores em seus esquemas de pensamento. No entanto, chama-nos a resposta dos estudantes, para quem o resultado para “três quartos de tanto” continua sendo o “tanto”, evidenciando um não entendimento do conceito de “fração de alguma coisa”; analogamente, a fração imprópria $\frac{18}{3}$ dada como resposta por outro estudante evidencia também um não entendimento do conceito de “fração própria de uma fração também própria”.

A partir da análise das respostas à Atividade 23, consideramos que 10 dos 19 alunos parecem dominar o conceito “fração de fração” até o momento e identificar que $\frac{3}{4}$ da metade não é o mesmo que $\frac{3}{4}$ da unidade, bem como mobilizar o conceito de multiplicação de frações.

A **Atividade 24** foi realizada por 19 alunos. Consideramos que 16 deles deram resposta satisfatória: no item (a): 2 alunos responderam $\frac{1}{2}\,\frac{x}{x}\,\frac{3}{5}\,\frac{=}{=}\,\frac{3}{10}$; 10 alunos responderam $\frac{1}{2}$ x $\frac{3}{5}$ = $\frac{3}{10}$; e 4 alunos responderam $\frac{3}{10}$, no entanto apenas as duas primeiras respostas evidenciaram ter mobilizando o conceito em ação multiplicação de frações. A partir dos registros, apenas podemos afirmar que os 10 alunos que responderam "$\frac{1}{2}$ x $\frac{3}{5}$ = $\frac{3}{10}$” parecem ter mobilizado corretamente esse conceito, uma vez que os 2 primeiros alunos mencionados não registraram de forma correta tal operação e os outros 4 últimos alunos mencionados não explicitaram os esquemas de pensamento que os permitiram chegar aos $\frac{3}{10}$. Consideramos a resposta $\frac{6}{10}$ dada por 3 outros alunos parcialmente satisfatória, pois conseguimos verificar pela representação pictórica utilizada (Figura 98) que os alunos mobilizaram o conceito de fração de fração, contudo não mobilizaram corretamente a contagem das partes que foram tomadas da unidade, sugerindo que apenas estão aplicando um procedimento e que ainda não compreenderam o significado de $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{5}$.

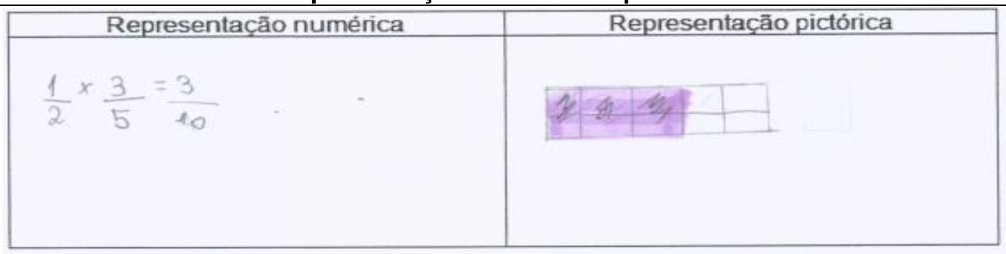
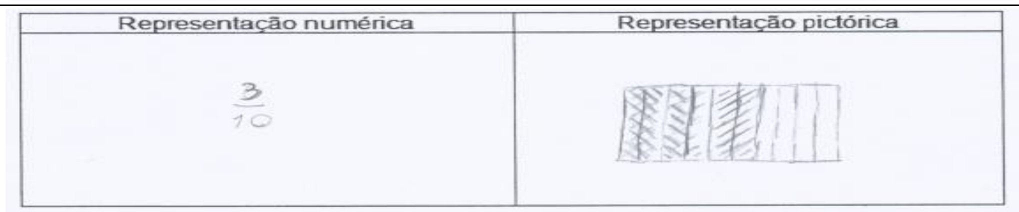
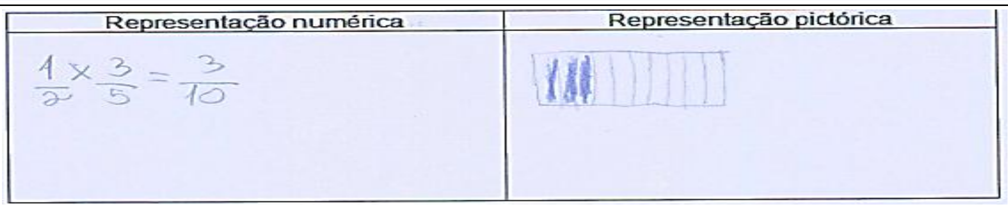
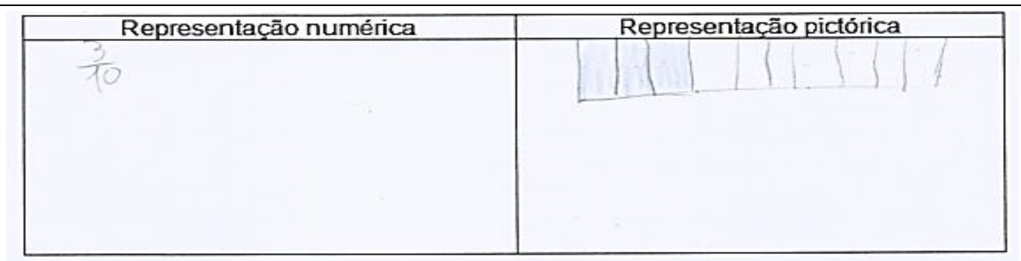
Figura 98 – Resposta de um aluno ao item (a) da Atividade 24



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A forma como os 16 alunos que responderam corretamente o item (a) representaram a expressão pictoricamente pode ser observada no Quadro 28.

Quadro 28 – Respostas de 16 alunos ao item (a) da Atividade 24

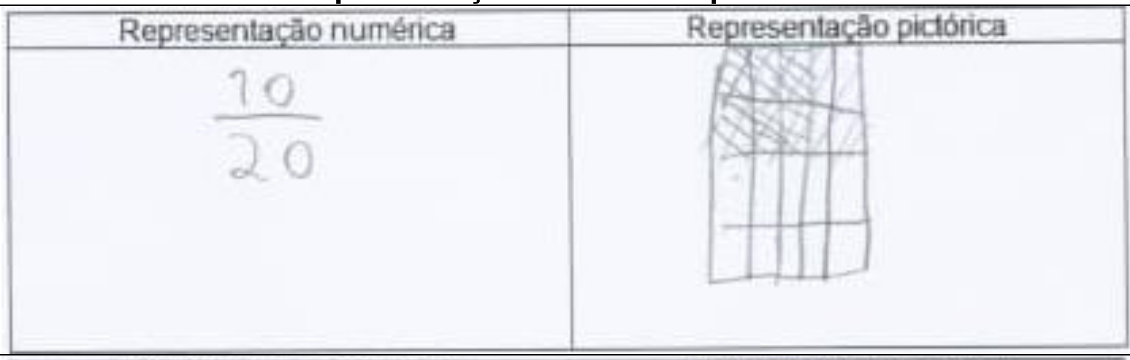
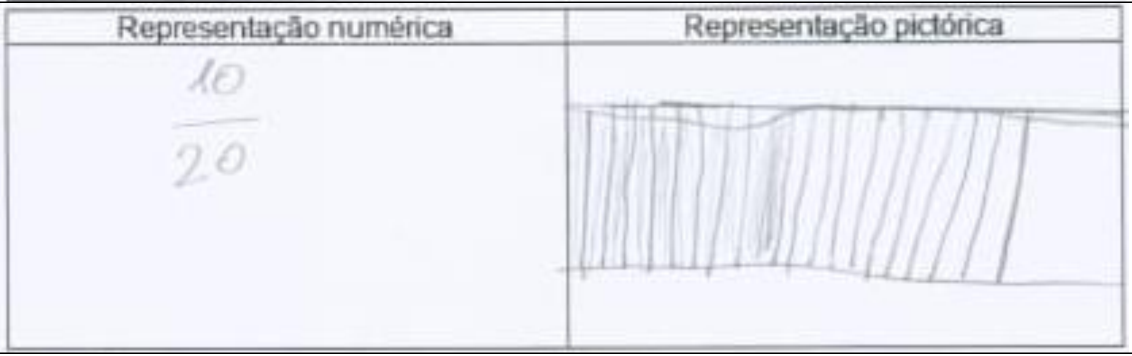
	Representação numérica e pictórica
I	
II	
III	
IV	

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Podemos constatar que alguns alunos mobilizaram o conceito de multiplicação de frações, o teorema em ação de identificar partes de partes de um inteiro e de equivalência (Linhas I e II, do Quadro 28); destacamos a diferença na forma de divisão dos alunos relatados nas Linhas I e II: o primeiro fez uso de linhas verticais para identificar a fração $\frac{3}{5}$ e depois fez uso de linhas horizontais para determinar a metade, enquanto o segundo fez uso exclusivamente de linhas verticais. Já as representações pictóricas das Linhas III e IV não deixam claro o esquema de pensamento utilizado pelos autores para chegar a este resultado, provavelmente tenham usado exclusivamente linhas verticais, como o estudante relatado na Linha II.

Nas respostas obtidas para o item (b) da Atividade 24 verificamos que 15 dos 19 alunos chegaram à resposta correta, tendo 11 deles mobilizado a multiplicação de números naturais; 10 desses 11 alunos parecem ter mobilizado corretamente o conceito de multiplicação de frações, ao registrarem $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$, enquanto o outro desses 11 alunos apresentou como registro de tal operação a escrita $\frac{3}{5} .x \frac{2}{4} .= \frac{6}{20}$. A resposta $\frac{6}{20}$ dada por 4 alunos foi considerada satisfatória, pois, apesar de correto o resultado, os alunos não explicitaram o esquema de pensamento utilizado para chegar a ele. Consideramos a resposta $\frac{10}{20}$ dada por três alunos parcialmente satisfatória, pois conseguimos verificar pela representação pictórica utilizada por um deles e registrada na Linha I do Quadro 29 que foram corretamente mobilizados os conceitos de unidade, de equipartição e de fração de fração; contudo, esse aluno não soube transformar em fração da unidade o resultado da ação de tomar $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{4}$ da mesma, sugerindo que apenas está aplicando um procedimento. Já o segundo desses três alunos não deixou explícito ter conseguido levar a cabo a ação de tomar $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{4}$. Cabe destacar que esses dois estudantes são os mesmos alunos que responderam $\frac{6}{10}$ no item (a).

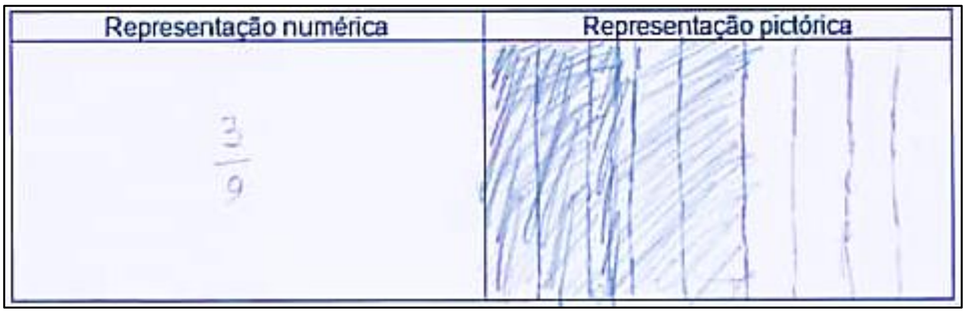
Quadro 29 – Resposta de dois alunos ao item (b) da Atividade 24

	Representação numérica e pictórica
I	
II	

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Na Figura 99 apresentamos a resposta equivocada $\frac{3}{9}$ de um aluno sem conseguirmos identificar qual foi o seu esquema de pensamento para chegar a tal fração.

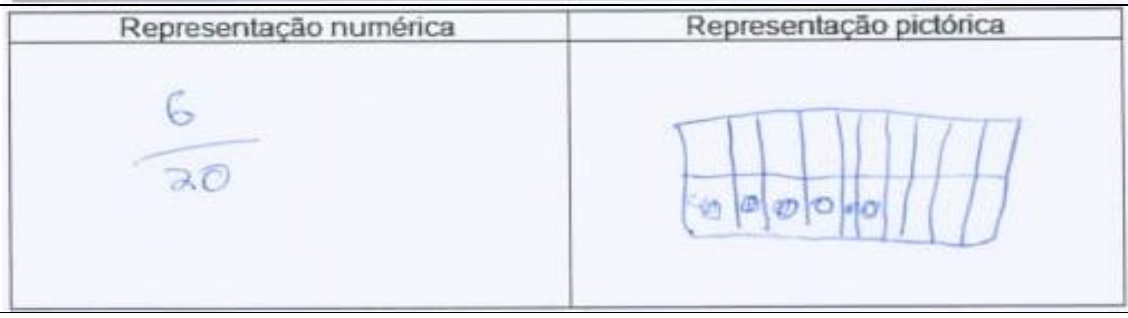
Figura 99 – Resposta de um aluno ao item (b) da Atividade 24



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

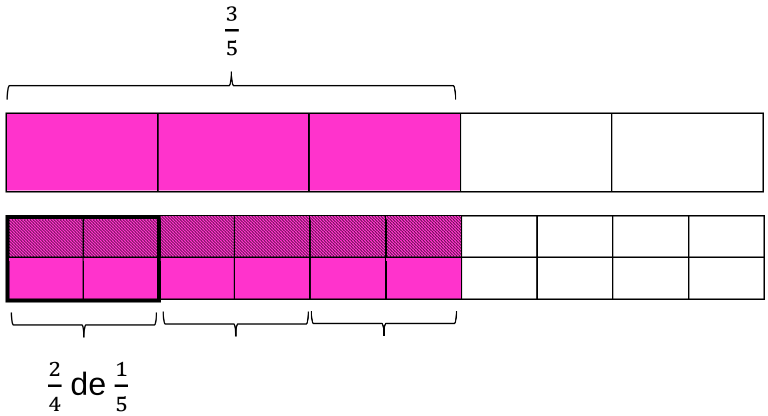
No Quadro 30 temos as resoluções de 15 alunos cujas respostas foram consideradas corretas ou satisfatórias.

Quadro 30 – Respostas de alguns alunos ao item (b) da Atividade 24

<table>
<tr><th>Nº</th><th>Representação numérica e pictórica</th></tr>
<tr><td>I</td><td>
</td></tr>
<tr><td>II</td><td>
</td></tr>
<tr><td>III</td><td>
</td></tr>
<tr><td>IV</td><td>
</td></tr>
<tr><td>V</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

O autor da representação da Linha I do Quadro 30 mobilizou sem dúvida os conceitos de unidade e de equipartição, e parece ter mobilizado também o conceito de multiplicação de frações bem como o seu processo algorítmico, pois a representação parece indicar que o estudante determinou equivocadamente $\frac{2}{4}$ de $\frac{3}{5}$ no lugar de $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{4}$ como indicado a seguir

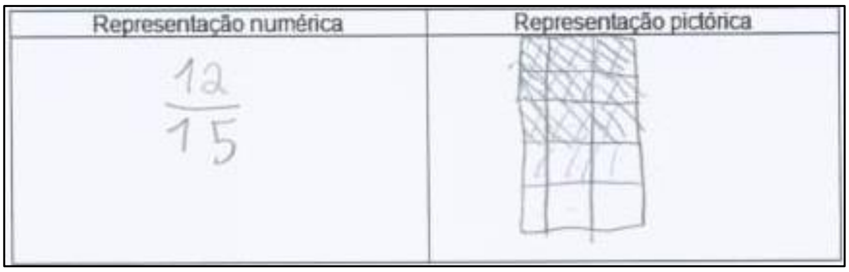


Para as representações pictóricas das Linhas II, III, IV e V do Quadro 30 parece ter sido evocado o conceito de multiplicação de frações seguido do conceito de fração não unitária, no lugar do teorema em ação sobre o algoritmo para a determinação de “fração de fração”.

As respostas e esquemas de pensamento dos 19 alunos para representação numérica de $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ (item (c) da Atividade 24) mantiveram o mesmo padrão do item (b): 2 alunos responderam de forma satisfatória que $\frac{2}{3}$ x $\frac{4}{5}$ = $\frac{8}{15}$; 9 alunos responderam corretamente que “$\frac{2}{3}$ x $\frac{4}{5}$ = $\frac{8}{15}$”; 4 alunos responderam apenas “$\frac{8}{15}$”

Pode-se perceber, pela representação pictórica apresentada (Figura 100), que os 3 alunos que responderam “$\frac{12}{15}$” equivocaram-se na ação de pintar “$\frac{2}{3}$ de”, apesar de terem mobilizado corretamente os conceitos de unidade e de equipartição.

Figura 100 – Resposta de um aluno ao item (c) da Atividade 24



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

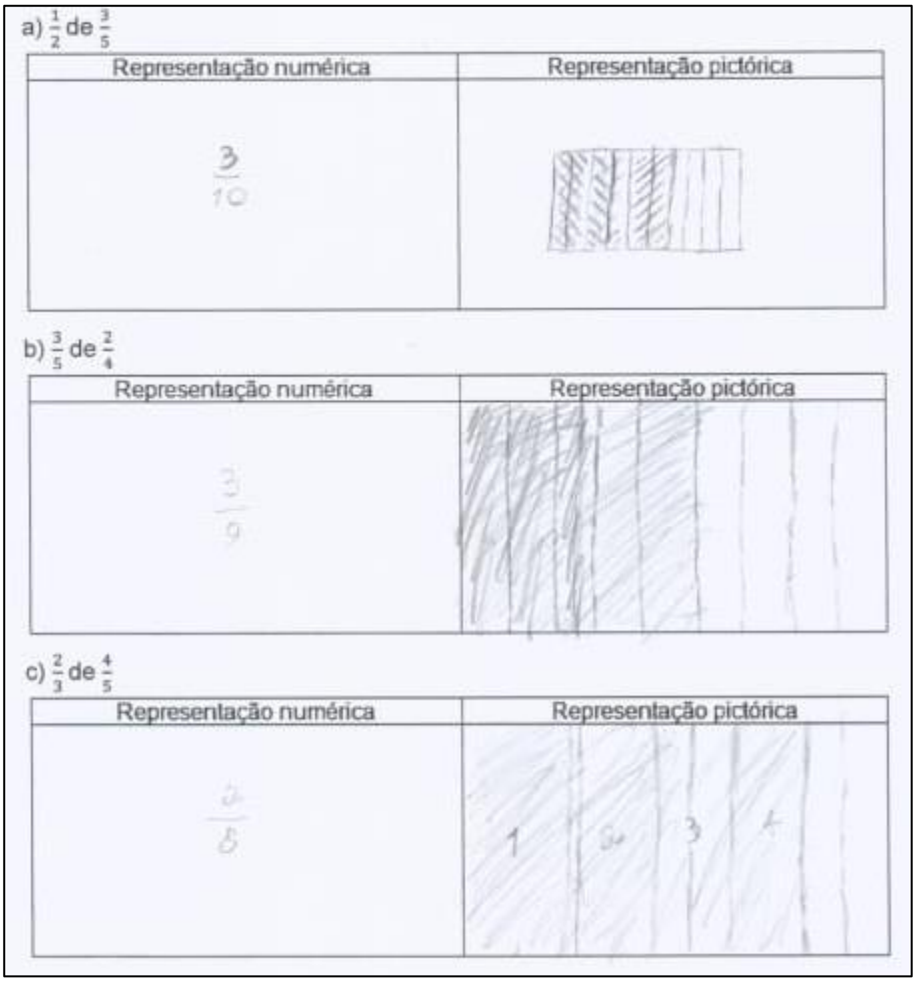
A resposta $\frac{2}{8}$ dada por um aluno foi considerada insatisfatória (Figura 101) porque não ficou explicitado o esquema de pensamento utilizado a partir da mobilização correta da ação de determinar $\frac{4}{5}$ da unidade.

Figura 101 – Resposta de um aluno ao item (c) da Atividade 24

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Tentamos identificar o esquema de pensamento utilizado por este estudante, analisando as respostas dadas por ele nos três itens da Atividade 24 (Figura 102), e percebemos que ele sempre fez uso de divisões e subdivisões na vertical, o que justificaria o sucesso na resposta ao item (a) e a dificuldade e insucesso nos itens (b) e (c).

Figura 102 – Representação numérica e pictórica de um estudante em toda a Atividade 24

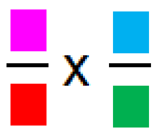


Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Na Atividade 24, a maior parte dos alunos apresentou um bom desempenho. De fato:

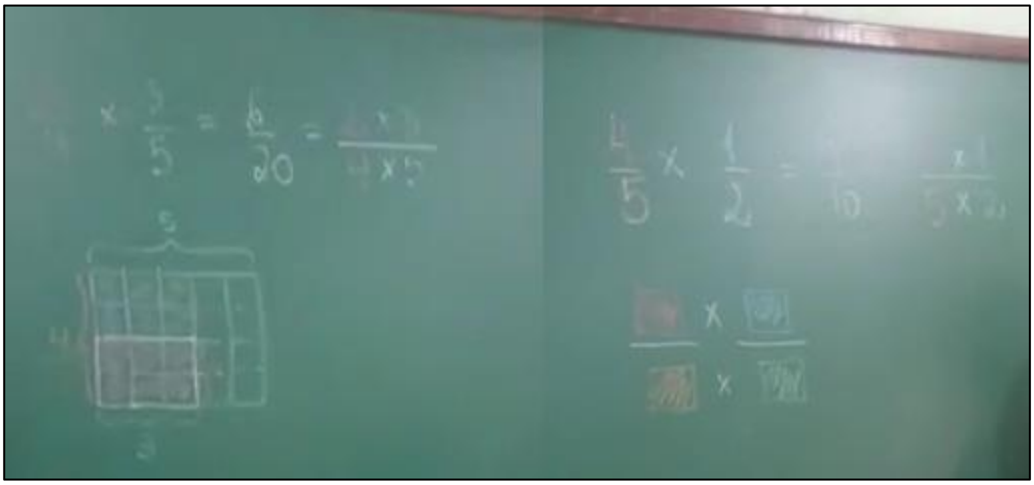
– pela representação pictórica solicitada foi possível detectar que muitos alunos mobilizaram corretamente o conceito de unidade, essencial na multiplicação de fração por fração;
– para a ação “fração de” muitos estudantes fizeram a nova equipartição usando linhas na direção perpendicular às já utilizadas para a equipartição original; com isso, evitaram a provável confusão enfrentada pelo aluno relatado na Figura 102;
– ao oportunizar-se a transição nas formas de representação proposta por Duval (no caso, representação em palavras, representação numérica e representação pictórica), foi possível perceber o domínio ou a falta de domínio na multiplicação de frações por parte dos estudantes.

A **Atividade 25** teve um momento inicial em conjunto com os 20 estudantes presentes e que incluiu registros no quadro negro. A primeira etapa consistia em analisar em conjunto os procedimentos e padrões adotados nas Atividades 19, 20, 21, 22 e 23, e para isso fomos revisitando as atividades que estavam coladas nos cadernos dos alunos e fomos refazendo-as no quadro. Só então foi entregue aos alunos uma folha com o quadro da Atividade 25, aproveitando-o para convidar os alunos a tentarem observar algum padrão nas expressões revisitadas; auxiliar na visualização do processo e na determinação de um padrão, fomos destacando com cores diferentes e, no segundo exemplo, além das cores, começamos a utilizar quadrinhos coloridos



oportunizando aos estudantes um momento de generalização. Foi explicado a eles que podemos imaginar qualquer valor para os quadradinhos coloridos, o que ajudou os estudantes a perceberem que, independente dos valores, a forma de calcular será sempre a mesma (Figura 103).

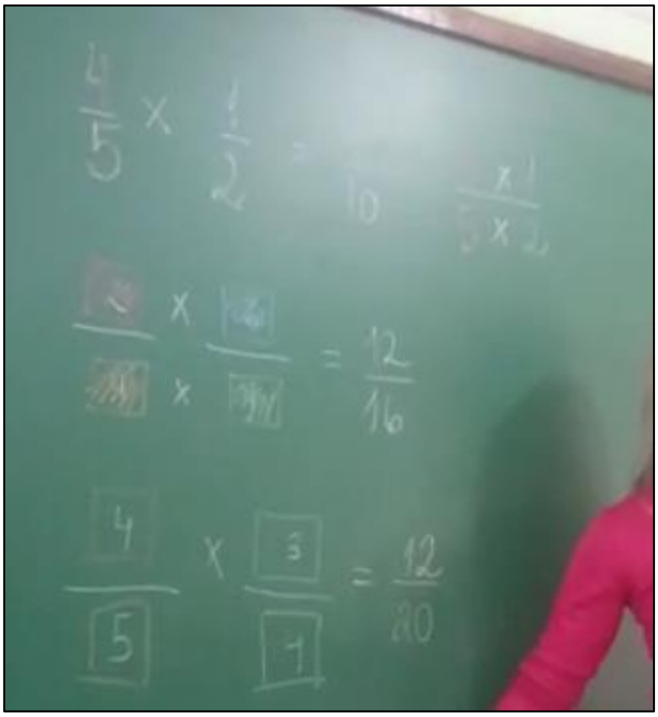
Figura 103 – Primeiros passos para a generalização do processo que leva ao algoritmo para a multiplicação de frações (Atividade 25)



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Para que os estudantes pudessem melhor perceber que os quadradinhos coloridos podem assumir valores quaisquer e que o processo para obtenção do resultado seria o mesmo, a professora solicitou que, aleatoriamente, os alunos indicassem valores para ocupar cada quadradinho. A Figura 104 traz uma sugestão de valores dada pelos estudantes.

Figura 104 – Primeiras ideias mobilizadas na construção da generalização



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Só depois das reflexões em conjunto e dos diálogos com a professora foi entregue aos alunos uma folha com os itens (a), (b) e (c) da Atividade 25 para serem respondidos individualmente.

No item (a) 16 alunos responderam “Multiplicação” e 4 alunos “Vezes”, demonstrando que os 20 alunos conseguiram identificar que a operação realizada é multiplicação.

O item (b) da Atividade 25 oportunizou a discussão sobre a ampliação para o universo das frações de resultado um válido no universo dos números naturais. Dezoito dos 20 alunos responderam corretamente que o produto obtido em cada situação representava um valor menor que a unidade considerada inicialmente. Contudo, ainda percebemos a dificuldade e a resistência que os alunos têm para expressarem por escrito suas justificativas, tanto, que apenas 8 dos 20 alunos justificaram seu posicionamento. Destes, o que consideramos correto foram os 3 alunos que justificaram “*menor é quando você pega uma parte de,* $\frac{2}{3}$*, quando é maior é quando você precisa de mais de 1 unidade como* $\frac{4}{3}$*”* e que, além de justificarem o porquê de o resultado ser menor, deram o *spoiler* para a nossa próxima seção (fração imprópria multiplicada por fração). As 5 outras justificativas foram consideradas insatisfatórias ou incorretas; as incorretas por deixarem explicito o foco exclusivamente no número de partes (denominador da fração).

O item (c) é novamente um estímulo à reflexão e à argumentação. A partir das respostas pode-se observar que todos os estudantes tentaram responder a questão; 15 deles basearam suas respostas nas operações de adição, multiplicação ou divisão quando o que deveriam observar é que estavam pegando uma parte menor do que 1 de “algo”, portanto o resultado deveria ser menor que este “algo”. No entanto, consideramos bem sucedida a introdução à ruptura da ideia de que a multiplicação sempre dará um resultado maior, situação que fica evidente na justificativa do estudante “Sim. Pois por exemplo da folha que a professora passou são menores, mas, podem ter contas que deem resultado maior”, percebendo que existem questões que ainda não foram trabalhadas.

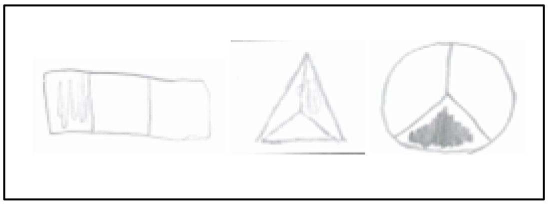
A Atividade 25 foi proposta com o intuito de fechamento da seção 3. Com ela, consideramos que muitos alunos já associam multiplicação de frações com o conceito explorado de “fração de fração”, e que ainda estão no processo de reconhecimento que em, uma multiplicação de frações, o produto pode ser menor do que um dos fatores (ou ambos), revelando-se necessário que esta questão seja retomada e aprofundada.

Com relação à **Atividade 26**, introdutória à seção Multiplicação de uma fração imprópria por uma fração própria, 12 dos 22 alunos que realizaram a atividade compreenderam que o valor gasto com moradia foi maior do que havia sido previsto, contudo apresentaram dificuldades em justificar, mesmo o enunciado já contendo a resposta ao item (a) e o objetivo de o aluno já refletir sobre $\frac{3}{2}$ de “algo” ser efetivamente maior do que o “algo”, objetivo que se revelou não alcançado.

Durante o momento de análise, percebemos que talvez o item (b) devesse anteceder o item (a), porque no item (b) parece estar-se ajudando o aluno a organizar seu pensamento. Por isso a ordem foi trocada no Produto Final e evitou-se anunciar no enunciado que o aluguel sofreu um aumento, pois concluímos que esta informação deve ser concluída pelo estudante. Assim, foi retirada do preâmbulo a expressão “percebeu que o aluguel da sua casa havia aumentado”.

Com relação à representação pictórica solicitada no item (b), 20 dos 22 alunos identificaram de forma correta a representação numérica para a parte destinada ao salário, e, destes, 18 alunos mobilizaram o conceito de fração no continuo realizando corretamente a conversão da representação numérica $\frac{1}{3}$ para a representação pictórica, que variou entre retângulos, discos e triângulo, a saber, Figura 105.

Figura 105 – Representações pictóricas apresentadas no item (b) da Atividade 26



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

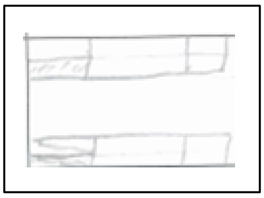
Um aluno mobilizou corretamente o conceito de fração ao apresentar a representação pictórica, contudo, a sua representação numérica foi considerada apenas satisfatória porque imaginamos que a resposta “1” subentende “1 parte” (lembrando que o termo “parte” foi utilizado no enunciado original no item (d), no lugar de “fração”), mas não especifica uma de quantas partes. Já outro aluno que respondeu “$\frac{1}{3}\ \ \frac{3}{2} = \frac{3}{6}$”, além de um registro não claro, parece não ter lido o enunciado com atenção, antecipando a resposta do restante da tabela e sua representação pictórica mobilizou o conceito de fração não unitária, ao representar o resultado $\frac{3}{6}$.

Com relação às respostas relativas à parte do salário que de fato foi gasta com moradia, dos 22 alunos, 4 responderam a questão com a representação numérica na forma de fração "$\frac{3}{6}$", como na questão anterior; antecipando a próxima pergunta. Apesar de a resposta esperada ser por nós ser $\frac{3}{2}$ x $\frac{1}{3}$, a resposta foi considerada correta.

A resposta "$\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{3}$" dada por 4 alunos foi considerada insatisfatória porque, apesar de evidenciarem uma boa transição da representação numérica para a representação escrita e da representação escrita para a representação pictórica, os estudantes não explicitaram a fração da unidade, ou seja, esses 4 alunos não deixaram explícito que reconhecem a que fração da unidade salário corresponde este valor.

Já o aluno que respondeu "$\frac{3}{12}$" equivocou-se com o conceito de unidade. De fato, parece ter mobilizado corretamente os conceitos de fração imprópria e de "fração de" para construir a representação pictórica (Figura 106), no entanto a resposta para a representação numérica sugere que as duas unidades desenhadas foram consideradas uma só, por isso a equipartição em 12 partes.

Figura 106 – Representação pictórica apresentada no item (b) da Atividade 26



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A resposta $\frac{3}{2}$ dada por 12 alunos foi considerada incorreta, sendo que 10 deles deixaram evidente na representação pictórica que estavam levando em conta apenas o dado $\frac{3}{2}$ no lugar de $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{3}$; um desses 12 alunos representou $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{3}$, no entanto não deixou explícito na representação pictórica quem é para ele a unidade salário; outro desses 12 alunos não apresentou a representação pictórica.

Com relação às respostas ao item (a) da Atividade 26, 10 dos 22 alunos mobilizaram corretamente a representação numérica da fração do salário que foi gasta em moradia; 7 desses alunos realizaram corretamente a conversão entre representação numérica e representação pictórica, mobilizando também o conceito de fração no contínuo; 2 alunos mobilizaram o conceito de fração de fração ao apresentarem a representação pictórica, ainda que fazendo uso de duas unidades. Apesar de a resposta estar correta, o último dos 10 alunos, repartiu a unidade em 6 pedaços quaisquer e pintou 3, sem mobilizar o conceito de equipartição. Destacamos ainda que, apesar de os resultados $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$ estarem incorretos, ao realizarem a conversão de representação numérica para representação pictórica, 8 mantiveram a coerência entre sua resposta numérica e a representação pictórica. A resposta "$\frac{2}{9}$" apesentada por um estudante desaocmpanhada de representação pictórica foi considerada incorreta.

No item (c) da Atividade 26, causou-nos estranheza a alteração das respostas e de suas frequências comparadas ao item (a). Dos 22 alunos, 11 responderam corretamente, que a fração do salário de Pedro foi gasto em moradia foi "$\frac{3}{6}$".

As respostas obtidas no item (d) foram coerentes com os itens anteriores, e se manteve a média de respostas corretas. De fato, dos 22 alunos, 10 responderam que o valor gasto não era maior do que o salário de Pedro. No entanto, com relação às justificativas, destacamos a mobilização do conceito de fração equivalente pelo aluno que respondeu "pegou $\frac{1}{2}$ do salário", reconhecendo que $\frac{3}{6}$ é equivalente a $\frac{1}{2}$. O aluno que apresentou a justificativa "Vai sobrar $\frac{1}{3}$" sugere ter mobilizado a operação de subtração em seu esquema de pensamento, apesar de o valor $\frac{1}{3}$ estar incorreto. Um aluno respondeu "Nem tanto" e portanto não esclareceu sua posição, apesar de, pela justificativa, acreditar-se que o "nem tanto" está subentendendo "não chegou a ultrapassar o salário".

Percebemos que boa parte dos alunos que responderam "Sim" no item (d) parecem ter interpretado a questão como se tivéssemos perguntando se foi extrapolado o orçamento previsto (no lugar do salário de Pedro), daí suas justificativas foram coerentes; essas justificativas sugerem a mobilização do conceito de parte de parte de uma unidade, uma vez que a fração efetivamente gasta extrapolou a fração prevista inicialmente.

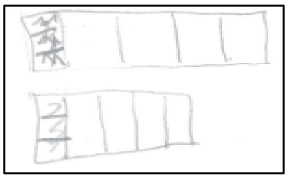
O item (e) tem resposta aberta e evoca o primeiro contato dos alunos com a propriedade arquimediana. Apesar de a pergunta revelar-se complexa para os estudantes, cabe ressaltar que não houve interferência da professora com relação às interpretações dos estudantes.

Para uma melhor análise dos esquemas de pensamento utilizados pelos estudantes, reconhecemos que deveríamos ter solicitado aos estudantes que justificassem suas respostas, para poder identificar se haviam efetivamente levado em conta “fração da prestação” conforme perguntado (o que requereria comparar o valor encontrado com a unidade) ou apenas “fração do salário” (situação em que qualquer fração imprópria seria uma resposta correta). Como $\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{3} = \frac{4}{9}$ e $\frac{7}{6}$ de $\frac{1}{3} = \frac{7}{18}$, pode-se perceber que todas as respostas foram incorretas, mesmo daqueles que efetivamente fizeram uso de frações impróprias em suas respostas “$\frac{4}{3}$” e “$\frac{7}{6}$”. Contudo, podemos supor que estes 7 alunos levaram em consideração que a unidade (salário) estava dividida em terços, portanto, tanto $\frac{4}{3}$ como $\frac{7}{6}$ extrapolariam o salário, tendo sido então mobilizado corretamente o conceito de fração imprópria. Com relação aos 3 alunos que responderam “4” como satisfatório, imaginamos que estes pensaram no índice inicial onde o salário foi dividido em 3 partes e que, portanto, se pegar 4 dessas partes extrapolaria o salário. Outra possibilidade é eles terem pensado em “4 vezes”, resposta que também estaria correta.

Consideramos que, na Atividade 26, os alunos tiveram certa dificuldade em representar pictoricamente a “fração de fração”, em uma situação que envolve uma fração imprópria ($\frac{3}{2}$ x $\frac{1}{3}$), mas que a atividade proporcionou refletirem sobre $\frac{3}{2}$ de “algo” ser efetivamente maior do que o “algo”; 11 dos 22 estudantes evidenciaram terem abstraído a construção de um esquema de pensamento para calcular “fração de fração” ao determinarem corretamente a fração que Pedro gastou do salário, o que nos dá indícios de terem levado em consideração, nessa nova seção, os conhecimentos adquiridos anteriormente.

A **Atividade 27** foi realizada por 17 estudantes. Pode-se observar que os 3 alunos mobilizaram o conceito de fração da unidade (registrando corretamente a fração $\frac{1}{5}$) e de fração imprópria de fração (registrando corretamente $\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$), no entanto sentiram necessidade de fazer uso de uma segunda unidade para representar $\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$. Na Figura 107 temos a representação de um aluno, na qual parece que o mesmo esquema de pensamento foi utilizado pelo autor, no entanto não é claro que o estudante tenha pintado exatamente $\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$ e é evidente que não atentou para o conceito de unidade.

Figura 107 - Representação pictórica de um aluno no item (a) da Atividade 27



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Já outros 5 alunos mobilizaram corretamente o conceito de fração ($\frac{1}{5}$) e de “fração de fração” ($\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$), sem sentirem a necessidade de fazer uso de uma segunda unidade. No entanto, destacamos que 2 estudantes foram adiante, procurando já representar também a fração da unidade que corresponde a $\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$ da mesma, obtendo claramente o registro pictórico de $\frac{4}{15}$ da unidade. Apenas um estudante não fez a representação pictórica, mas não podemos deixar de registrar a mobilização do conceito de multiplicação de frações no seu esquema de pensamento (Figura 108), ainda que seu registro esteja na ordem trocada e que não tenha sido discutida a propriedade comutativa da multiplicação.

Figura 108 - Representação numérica de um aluno para representar $\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$ (item (a) da Atividade 27)

$$\frac{1}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{15}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Os registros $\frac{1}{5}$ apresentado por 3 alunos e $\frac{4}{3}$ exposto por 3 outros alunos sugerem a mobilização de frações no continuo, enquanto outro aluno em seu registro evidencia a mobilização de ambas as frações $\frac{1}{5}$ e $\frac{4}{3}$ sem, no entanto, fazer relação entre elas, evidenciando todos, portanto, a não utilização em seus esquemas de pensamento do conceito de “fração de fração”.

Com relação ao item (b) da Atividade 27, 14 dos 17 alunos que realizaram a atividade responderam corretamente. Dos 14 estudantes, apenas 7 justificaram suas respostas, sendo que as justificativas de seis estudantes, a saber, “Já que a área que ela ocupou foi $\frac{4}{3}$”, “Por causa dos tamanhos”, “Pois $\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$”, “Porque ela separou $\frac{1}{5}$ e dividiu em três não em quatro” e “Porque foi $\frac{4}{3}$” foram consideradas incompletas porque, de alguma forma, sugerem que os estudantes mobilizaram em seus esquemas de pensamento o conceito de fração imprópria, sugerindo que a fração $\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$ excede $\frac{1}{5}$. Quanto à justificativa “Porque ou ela pegaria $\frac{2}{5}$ ou pegaria outra área do terreno” apresentada por um aluno não nos possibilita identificar o que o estudante mobilizou para ela. A justificativa “Porque $\frac{1}{5}$ é menor que $\frac{4}{3}$” de um estudante sugere que ele apenas comparou equivocadamente as frações $\frac{1}{5}$ e $\frac{4}{3}$, apresentando daí uma conclusão coerente, “menor”; mobilizou, corretamente algum teorema em ação sobre a comparação de frações, sem, no entanto ficar claro seu enunciado (por exemplo, poderia apenas ter pensado $\frac{1}{5} < 1 < \frac{4}{3}$ ou então ter usado o conhecimento já adquirido sobre a comparação de duas frações quaisquer). As respostas “$\frac{4}{15}$” e “Sim” apresentadas respectivamente por um aluno cada, são incoerentes com o que foi questionado no item (b), embora um deles tenha apresentado a fração que Laura usou do terreno para o plantio, dando indícios de que tenha compreendido que ela utilizou $\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$.

Sete dos 17 alunos responderam corretamente ao item (c) da Atividade 27, o que nos sugere que mobilizaram adequadamente o conceito de fração de fração, no entanto um deles registrou de forma equivocada a multiplicação, escrevendo $\frac{1}{5}$ x $\frac{4}{3}$ no lugar de $\frac{4}{3}$ x $\frac{1}{5}$; mesmo assim, consideramos a resposta satisfatória. Além disso, um dos 7 estudantes mobilizou de forma equivocada a representação pictórica, considerada insatisfatória. Com relação aos 10 alunos restantes, um aluno apenas indicou a correta interpretação do enunciado ao registrar “$\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$”, não deixando indícios de que sabe o significado de tal expressão e outro estudante apenas repetiu uma das frações mencionadas no enunciado, evidenciando uma má interpretação do mesmo. As demais respostas não nos dão indícios sobre os conceitos evocados, sendo que a resposta “$\frac{3}{3}$” apresentada por um nestudante sugere que o mesmo não percebeu a relação entre a fração $\frac{3}{3}$ e a unidade.

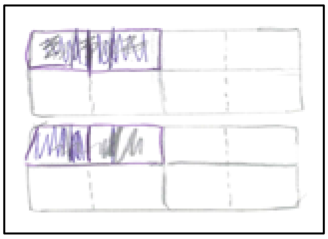
Com a realização da Atividade 27, percebemos que a maioria dos alunos já têm compreensão de que o conceito que vem sendo trabalho envolve partes de partes da unidade e alguns também já perceberam que estamos trabalhando com valores que extrapolam o valor previsto inicialmente. Porém, a mobilização da representação pictórica, o registro numérico e a multiplicação de uma fração imprópria por uma fração ainda precisam ser mais explorados.

Nas respostas obtidas para a representação numérica no item (a) da **Atividade 28**, treze dos 17 alunos mobilizaram corretamente a conversão da representação escrita para representação numérica, a saber, "$\frac{3}{2}$ x $\frac{1}{4}$" apresentada por 2 alunos e "$\frac{3}{2}$ x $\frac{1}{4}$ = $\frac{3}{8}$" por 11 alunos que ao apresentarem o resultado mobilizaram o teorema em ação da multiplicação de frações. Já a resposta "$\frac{3}{2} \frac{x}{x} \frac{1}{4} \frac{=}{=} \frac{3}{8}$" dada por um estudante foi considerada apenas satisfatória, uma vez que este usou inadequadamente dois "x", sem deixar claro se foi mobilizado o conceito de multiplicação de frações. A resposta direta "$\frac{3}{8}$" dada por 3 alunos foi considerada insatisfatória, pois os estudantes preocuparam-se com o cálculo e não com a representação numérica para a expressão.

A forma com que 15 dos 17 alunos representaram pictoricamente a expressão $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{4}$ revelou-se muito rica e apenas 2 alunos não fizeram o registro.

Na Figura 109 podemos observar que um aluno mobilizou o conceito de fração imprópria de uma fração, além do conceito de equipartição, ao subdividir o restante da unidade. Cabe ressaltar que este estudante sentiu a necessidade de fazer uso de outra unidade para representar "$\frac{3}{2}$ de", sendo por isso sua resposta considerada satisfatória, diferentemente de outros 11 alunos que também responderam de forma correta, mobilizando o conceito de equipartição ao subdividir o restante da unidade, usando apenas uma unidade.

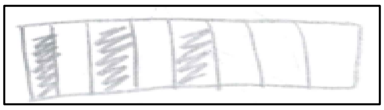
Figura 109 – Resposta de um aluno para representação pictórica de $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{4}$ (item (a) da Atividade 28)



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Cabe destacar também a Figura 110 que evidencia que o estudante não se incomodou de, afinal, representar a quantidade de forma não justaposta, aparentemente mobilizando um teorema em ação da forma “tomar $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{4}$ é o mesmo que tomar 3 vezes uma quantidade igual à metade de $\frac{1}{4}$”, e por isso fez uso de três quartas partes diferentes.

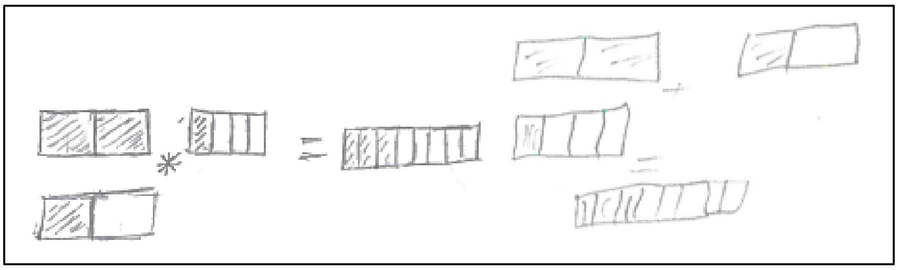
Figura 110 – Respostas dos alunos para representação pictórica de $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{4}$ (item (a) da Atividade 28)



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Já outros 2 alunos (Figura 111) mobilizaram nos seus registros pictóricos o conceito de fração, no entanto representaram separadamente as frações $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{4}$ e, após um sinal de igual, representaram $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{4}$, desta forma consideramos a resposta parcialmente satisfatória.

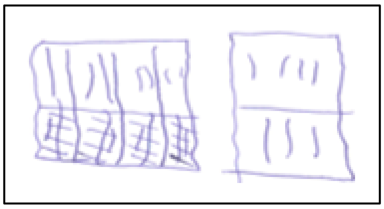
Figura 111 – Respostas de dois alunos para representação pictórica de $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{4}$ (item (a) da Atividade 28)



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Na Figura 112 podemos observar a representação de um aluno cujo esquema de pensamento porém não foi possível perceber; no entanto, é possível afirmar que não mobilizou o conceito de unidade. Comparando com a representação numérica por ele registrada ($\frac{3}{2}$ x $\frac{1}{4}$ = $\frac{3}{8}$), fica sugerida uma compreensão maior do que a registrada na representação pictórica.

Figura 112 – Respostas de um alunos para representação pictórica de $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{4}$ (item (a) da Atividade 28)



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Já o estudante reportado na Figura 113 evidencia a não mobilização do conceito de equipartição; apesar do correto registro numérico ($\frac{3}{2}$ x $\frac{1}{4}$), não conseguimos identificar os conceitos e teoremas utilizados em seu esquema de pensamento para a representação pictórica.

Figura 113 – Respostas de um aluno para representação pictórica de $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{4}$ (item (a) da Atividade 28)

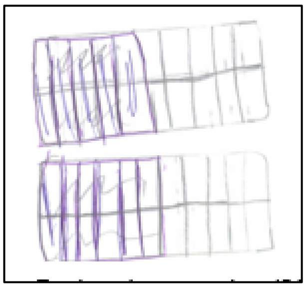
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

As respostas para o item (b) da Atividade 28 mantiveram o padrão e as frequências do item (a), com exceção de um estudante que não mais escreveu "$\frac{6}{5}$ x$\frac{2}{4}$= $\frac{12}{20}$" e sim diretamente $\frac{12}{20}$. Doze alunos acertaram a representação numérica $\frac{6}{5}$ x$\frac{2}{4}$, mobilizando corretamente a conversão da representação escrita para representação numérica; destes, 10 alunos mobilizaram o teorema em ação da multiplicação de frações, já apresentando o resultado da multiplicação, a saber, "$\frac{6}{5}$ x $\frac{2}{4}$ = $\frac{12}{20}$". Já o registro

$\frac{6}{5}$.x $\frac{2}{4}$.= $\frac{12}{20}$ não deixa claro que o aluno responsável por ele tenha mobilizado o conceito de multiplicação de frações, por isso consideramos sua resposta apenas satisfatória. Os 4 alunos que responderam "$\frac{12}{20}$" preocuparam-se com o cálculo, e não com a representação numérica da expressão, por isso consideramos sua resposta insatisfatória.

As representações pictóricas para $\frac{6}{5}$ de $\frac{2}{4}$ apresentadas pelos estudantes (item (b) da Atividade 28) parecem também repetir os padrões de pensamento do item (a). Por exemplo, somente um aluno mobilizou o conceito de multiplicação de fração imprópria por uma fração própria ao construir a representação pictórica (Figura 114).

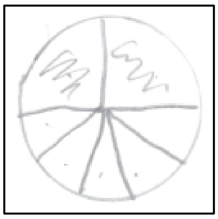
Figura 114 – Resposta de um aluno ao item (b) da Atividade 28



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Treze registros levaram em consideração o resultado obtido no registro da representação numérica, aparentemente mobilizando neste momento apenas o conceito de fração no continuo. Acreditamos que um aluno não teve atenção ao mobilizar o conceito da fração no continuo ao representar a fração $\frac{12}{20}$ sendo coerente com o numerador da fração mas não com o denominador. Já outros 2 alunos não deixam indícios sobre seus esquemas de pensamento, ficando explícita apenas a não mobilização do conceito de equipartição, como podemos observar na Figura 115.

Figura 115 – Resposta de um aluno ao item (b) da Atividade 28



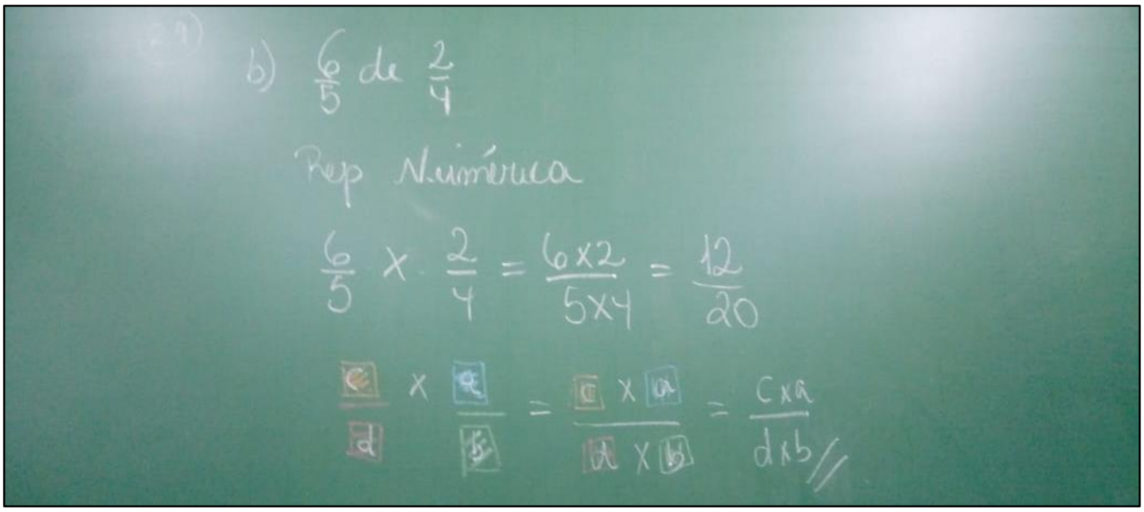
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Como na Atividade 24, consideramos muito ricos, em termos de esquemas de pensamento, os registros pictóricos registrados pelos 17 alunos na Atividade 28. Consideramos que 15 dos 17 alunos, tanto no item (a) como no item (b) de alguma forma evidenciaram ter mobilizado explícita ou implicitamente o conceito de multiplicação de uma fração imprópria por uma fração qualquer e percebe-se que os outros 2 alunos ainda estão em processo de construção deste conceito. Decidimos inserir, no Produto Final, mais o item (c) perguntando: afinal, que fração da unidade representa $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{4}$ da unidade?

A primeira etapa da **Atividade 29** consistiu da análise, em conjunto, dos procedimentos e padrões adotados nas Atividades 27 e 28b, e para isso foi entregue incialmente aos 17 alunos presentes uma folha com o Quadro constante do enunciado da atividade.

Assim como na Atividade 25, foram utilizadas cores para ajudar os alunos na identificação de algum padrão que levasse ao algoritmo da multiplicação de frações. Aproveitamos assim o momento de reflexão para explorar a generalização (Figura 116).

Figura 116 – Generalização da Atividade 29 (b)



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Além de trabalhar com quadradinhos de diferentes cores, a professora lançou aos estudantes a seguinte questão desafiadora: “se os quadrinhos coloridos, que representam valores que eu não conheço, fossem substituídos pelas letras a,b,c, e d, “quem iria multiplicar quem?”, e prontamente os alunos responderam que c x a e d x b.

Só depois dessas reflexões e diálogos com a professora os alunos responderam os itens (a) e (b). Percebemos que 16 alunos responderam corretamente sobre a comparação (item (a) da Atividade 29), apontando que o resultado obtido era maior do que a fração considerada inicialmente. Quanto às justificativas apresentadas, foi possível observar que 14 deles esforçaram-se para expressar por escrito suas justificativas, melhorando o índice de respostas aceitáveis quando comparado com a Atividade 25: aqui apenas 2 desses 16 alunos não justificaram seu posicionamento, enquanto outros 10 alunos apresentaram justificativas corretas, tais como, “Porque $\frac{4}{3}$ é maior que uma unidade inteira”, “Pois $\frac{4}{3}$ e $\frac{6}{5}$ são mais de $\frac{1}{1}$”, “Porque $\frac{4}{3}$ e $\frac{6}{5}$ são maior de 1 unidade inteira “ e “Porque $\frac{4}{3}$ e $\frac{6}{5}$ são maior de $\frac{1}{1}$ unidade”, todos eles mobilizando adequadamente os conceitos de fração imprópria e de comparação.

Nas respostas ao item (b) da Atividade 29, constatamos que apenas um aluno respondeu corretamente “Pois $\frac{4}{3}$ é maior que uma unidade”; dez dos 17 alunos tentaram justificar, baseando suas respostas na operação de multiplicação. Consideramos as respostas “Por causa das frações” e “Comparando" incompletas pois nos dão indícios de que estavam com o olhar adequadamente voltado para as frações mencionadas no enunciado ou que estivessem mobilizando o conceito de “partes das partes da unidade”. As respostas dos outros 4 estudantes foram consideradas incorretas, a saber, “Porque o resultado é sempre menor”, “Pelas palavras”, “Sim” e “Menor”. Certamente muitos estudantes, ao já darem a resposta do item (b) como justificativa no item (a), estranharam a pergunta do item (b), e procuraram alguma outra forma de se expressar, quando na verdade a justificativa dada no item (a) já atingia os objetivos da atividade.

Como a Atividade 25, a Atividade 29 oportunizou um momento de reflexão sobre a ampliação das possibilidades de resultado da operação de multiplicação quando ampliamos o universo numérico dos naturais para as frações.

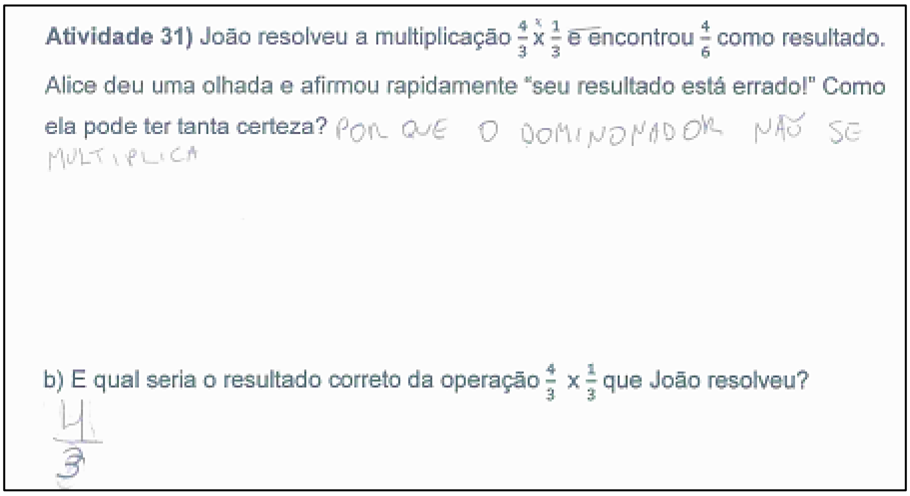
Nas respostas ao item (a) da **Atividade 30,** dezessete dos 18 alunos que realizaram a atividade identificaram que o erro cometido por João ao resolver a expressão está no denominador, e para chegar a essa conclusão é necessário que seja mobilizado o conceito de multiplicação de frações e o teorema sobre o algoritmo para realizá-la. Desses, 10 estudantes conseguiram perceber o possível esquema de pensamento utilizado por João, explicitando que ele havia somado os denominadores no lugar de multiplicá-los. Consideramos este aspecto (tentar perceber o raciocínio do outro) muito positivo para esta faixa etária. No entanto, um ponto importante também a considerar é que nas respostas destes 17 estudantes, nenhum deles parece ter se preocupado com a questão "$\frac{4}{6}$ e $\frac{4}{9}$ representam a mesma quantidade?", questão relevante em um contexto onde quantidades podem ser representadas de diferentes formas, ou seja, parece que nenhum estudante mobilizou aqui o conceito de frações equivalentes.

Apesar de considerada insatisfatória a resposta "Porque o denominador não se multiplica" apresentada por um aluno, e que não deixa claro os conceitos mobilizados para tal argumentação acreditamos que o estudante tenha se expressado mal (acrescentando inadequadamente em sua frase um "não"), entendendo também que João não havia multiplicado os denominadores e tendo também mobilizado o conceito de multiplicação de frações e o teorema sobre o algoritmo para realizá-la.

Os 17 alunos que responderam correta ou satisfatoriamente ao item (a) responderam corretamente o item (b). No entanto, é interessante observar que 1 desses estudantes não manteve a escrita correta "$\frac{4}{3} \frac{x}{x} \frac{1}{3} \frac{=}{=} \frac{4}{9}$" por isso consideramos sua resposta apenas satisfatória, pois talvez este aluno ainda não tenha mobilizado o conceito de multiplicação de frações e o teorema sobre o algoritmo para realizar uma multiplicação de frações.

A resposta "$\frac{4}{3}$" foi considerada insatisfatória. Porém chamou nossa atenção o valor $\frac{4}{3}$ dado como resposta para a multiplicação $\frac{4}{3}$ x $\frac{1}{3}$, parecendo-nos que o estudante não mobilizou qualquer esquema de pensamento. Este estudante é o mesmo que teve sua resposta considerada insatisfatória no item (a). (Figura 117): pela sua resposta "$\frac{4}{3}$" ao tem (b) dá indícios de que tenha mobilizado o conceito de adição de frações, contrariando nosso argumento no item (a) de que estivesse apenas se expressando mal quando usou o argumento "o denominador não se multiplica". Ou seja: parece que o estudante mobilizou um teorema em ação que não é válido: "na multiplicação de frações, multiplicam-se os numeradores e os denominadores não se multiplicam."

Figura 117 – Resposta de um aluno à Atividade 30


Atividade 31) João resolveu a multiplicação $\frac{4}{3}$ x $\frac{1}{3}$ e encontrou $\frac{4}{6}$ como resultado. Alice deu uma olhada e afirmou rapidamente "seu resultado está errado!" Como ela pode ter tanta certeza? POR QUE O DOMINADOR NÃO SE MULTIPLICA

b) E qual seria o resultado correto da operação $\frac{4}{3}$ x $\frac{1}{3}$ que João resolveu?

$\frac{4}{3}$

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Com a Atividade 30, percebemos que a maioria dos alunos já estão familiarizados com o uso do algoritmo de multiplicação de frações, não mais recorrendo à representação pictórica para encontrar o resultado desta operação.

No Quadro 31 são explicitados os problemas elaborados pelos alunos como resposta à **Atividade 31**.

Quadro 31 – Problemas elaborados pelos alunos envolvendo multiplicação de uma fração imprópria por uma fração qualquer (item (a) da Atividade 31)

Grupo	**Expressão Sorteada**	**Quantidade de alunos no grupo**	**Problema elaborado pelo grupo**
I	$\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$	4	Camila comeu o triplo de $\frac{4}{3}$ de uma pizza e Glenda comeu o dobro de $\frac{1}{5}$. Quanto elas comeram juntas? (viável porém insatisfatória)
II	$\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{5}$	2	João comeu $\frac{3}{2}$ de laranja e Rai comeu $\frac{1}{5}$. Quantos os dois comeram? (viável porém insatisfatória)
III	$\frac{3}{2}$ de $\frac{2}{6}$	2	Mateus foi ao mercado e comprou $\frac{3}{2}$ de pão e $\frac{2}{6}$ de queijo? (incorreto)
IV	$\frac{4}{2}$ de $\frac{1}{3}$	5	Comemos $\frac{4}{2}$ de $\frac{1}{3}$ de um crepe. Quanto comemos?
V	$\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{4}$	3	João comprou 2 pizzas e João dividiu em 4 pedaços. Pegou um pedaço e dividiu em 2. Comeu $\frac{3}{2}$. Quanto ele comeu? (incorreto)
VI	$\frac{3}{2}$ de $\frac{2}{6}$	2	João tem uma coleção de carrinhos. Nessa coleção ele tem $\frac{3}{2}$ de $\frac{2}{6}$. Mario o dobro. Quanto cada um tem? (impossível)

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

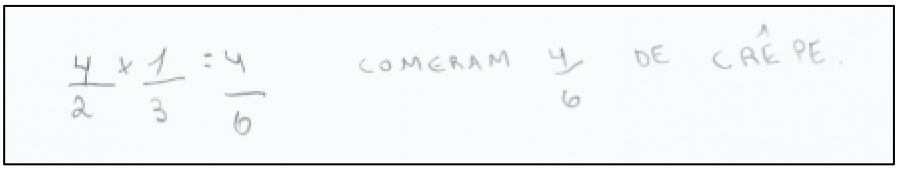
Podemos observar que os problemas apresentados pelos Grupos I e II apresentam uma situação viável, porém que não contempla a expressão solicitada, nem em seu enunciado nem em sua resolução; no entanto, ambos exigem em sua resolução a mobilização do conceito de adição de frações. O Grupo III não conseguiu enunciar um problema. Apenas o Grupo IV, constituído por 5 estudantes, construiu um problema envolvendo a expressão solicitada em uma situação viável, mobilizando o conceito de "fração imprópria de fração"; cabe salientar que a pergunta "Quanto comemos?" sugere uma não atenção à importância da unidade, deixando apenas subentendida a questão "Que fração de crepe comemos"?. Os 3 estudantes integrantes do Grupo V sugerem ter ideia do que deveriam propor, no entanto o enunciado proposto revelou-se confuso e incompleto. O Grupo VI fez uso da expressão solicitada no enunciado de seu problema, porém a situação proposta é impossível.

Como nas Atividades 7 e 16, o segundo momento da Atividade 31 consistiu em distribuir para os alunos, de forma aleatória, todas as questões formuladas pelos grupos para serem resolvidas individualmente, cuidando para que nenhum aluno ficasse com a questão que seu grupo criou.

As Figuras 118 e 119 trazem registros de resoluções para o problema proposto pelo Grupo IV (Quadro 31), que foi considerado correto:

"Comemos $\frac{4}{2}$ de $\frac{1}{3}$ de um crepe. Quanto comemos?"

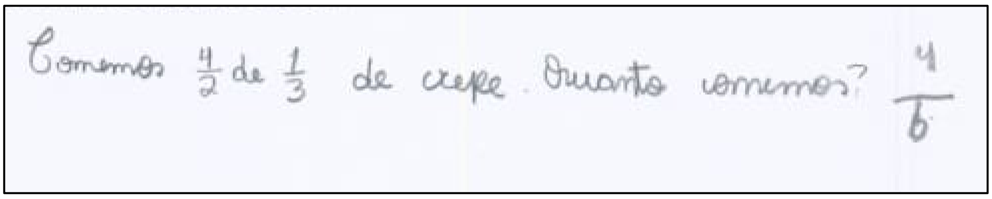
Figura 118 – Resolução de um aluno para o problema proposto pelo Grupo I (item (b) da Atividade 31)



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

O aluno relatado na Figura 118 mobilizou o conceito de multiplicação de frações bem como o teorema em ação sobre o algoritmo para o cálculo de uma tal multiplicação, mobilizando também, mentalmente, a multiplicação de naturais. Cabe ressaltar a resposta completa dada pelo estudante "*comeram* $\mathbf{\frac{4}{6}}$ *de crepe*", mobilizando o conceito de unidade, aspecto não ressaltado pelo grupo que formulou o problema.

Figura 119 – Resolução do problema proposto por um aluno para a expressão $\frac{4}{2}$ de $\frac{1}{3}$



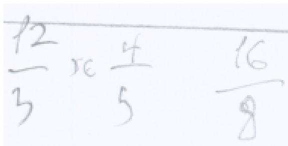
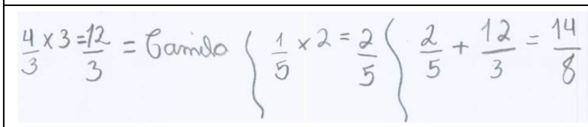
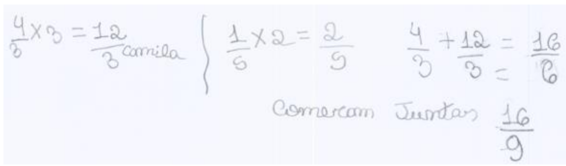
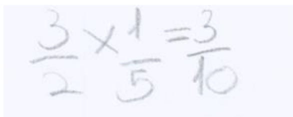
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

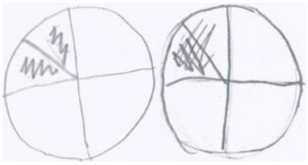
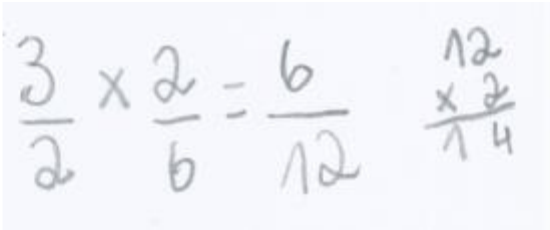
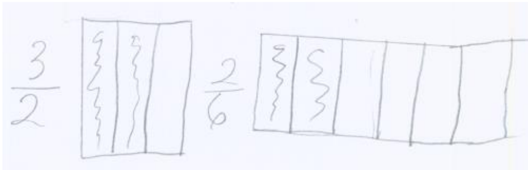
Já o estudante relatado na Figura 119 realizou um cálculo mental, sem deixar traços de seu esquema de pensamento.

Os problemas das Linhas I, II e VI do Quadro 31 foram, com razão, considerados impossíveis de serem solucionados.

Porém, alguns alunos tentaram solucionar o problema proposto Linhas I, II e III, e os problemas V e VI, mesmo aqueles que não tinham relação com “fração de fração”. (Quadro 32).

Quadro 32 – Respostas dos estudantes sobre a resolução dos problemas das Linhas I, II, III, V e VI do Quadro 31

Linha do Quadro 32	**Problema desenvolvido pelo grupo**	**Resolução/Observação**
I	Camila comeu o triplo de $\frac{4}{3}$ de uma pizza e Glenda comeu o dobro de $\frac{1}{5}$. Quanto elas comeram juntas?	  
II	João comeu $\frac{3}{2}$ de laranja e Rai comeu $\frac{1}{5}$. Quantos os dois comeram?	
III	João foi a padaria e pediu $\frac{2}{3}$ de pão e $\frac{2}{6}$ de bolo?	

V	João comprou 2 pizzas e João dividiu em 4 pedaços. Pegou um pedaço e dividiu em 2. Comeu $\frac{3}{2}$. Quanto ele comeu?	 
VI	João tem uma coleção de carrinho. Nessa coleção ele tem $\frac{3}{2}$ de $\frac{2}{6}$. Mario o dobro. Quanto cada um tem?	 

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Com relação às resoluções apresentadas no Quadro 32, percebemos que o primeiro aluno da Linha I só se preocupou com o cálculo do triplo de $\frac{4}{3}$, chamando nossa atenção para a forma como ele reescreveu a multiplicação: $\frac{12}{3}$ x $\frac{4}{3}$, equivocando-se com a escrita de 3 unidades na forma de terços; mesmo assim, evidenciou a mobilização do conceito de fração não unitária. O segundo e o terceiro estudantes da Linha I parecem ter mobilizado corretamente o conceito de multiplicação de um número natural por fração, no entanto fazendo um registro ao contrário ($\frac{4}{3}$ x 3 e $\frac{1}{5}$ x 4); calcularam corretamente a multiplicação porém ambos erraram a adição, aparentemente somando numeradores e denominadores, mobilizando, assim, um terema em ação incorreto. Na Linha II, o aluno mobilizou equivocadamente o conceito de multiplicação de frações. Na Linha III, destacamos que o aluno mobilizou corretamente o conceito de fração, única coisa que era possível fazer a partir do que estava escrito, porém não se manifestou quanto à inexistência de um problema. Na Linha V, vemos que o primeiro aluno registrou adequadamente os passos indicados no problema na forma de representação pictórica, parecendo ter subentendido que "Comeu $\frac{3}{2}$" significa "Comeu $\frac{3}{2}$ da metade de $\frac{1}{4}$", dando como resposta que foi comido $\frac{3}{2}$ de um pedaço, sugerindo que "pedaço" refere-se a $\frac{1}{4}$ de pizza. Já na Linha VII, o primeiro estudante mobiliza corretamente o conceito de multiplicação de fração por fração, ao determinar $\frac{3}{2}$ de $\frac{2}{6}$, contudo, se equivoca ao determinar o “dobro de”, registrando a soma e não o produto; o segundo estudante mobilizou erroneamente o registro pictórico da fração imprópria $\frac{3}{2}$ e adequadamente da fração própria $\frac{2}{6}$.

O número de situações viáveis aumentou com relação às atividades de fechamento das seções anteriores, demonstrando uma evolução dos estudantes. Apesar de apenas 5 dos 18 alunos terem conseguido formular de fato um problema, consideramos que a Atividade 31 oportunizou aos alunos um envolvimento como autores de questões envolvendo a multiplicação de frações, mais um passo em direção do letramento matemático.

Na **Seção 4** (Multiplicação de uma fração imprópria por uma fração qualquer) foi possível perceber que os alunos conseguiram compreender, por exemplo, que se o primeiro fator é maior do que a unidade, então o produto deverá ser maior do que o segundo fator. Consideramos também que os alunos tenham compreendido que as atividades que envolvem multiplicação de uma fração imprópria por uma fração representa uma quantidade que extrapola a quantidade original (o segundo fator na multiplicação).

7.4 Considerações gerais sobre a implementação e análise da implementação

Consideramos que os alunos aceitaram bem a ampliação da multiplicação de naturais para o caso natural x fração: a partir do significado para o “dobro de 5”, deu-se significado a produtos do tipo 2 x $\frac{2}{3}$ como “o dobro x $\frac{2}{3}$”. Com relação à multiplicação de uma fração própria por uma fração, acreditamos que o trabalho com material concreto empregado nas primeiras atividades oportunizou maior significado ao conceito ali trabalhado (Atividades 8 e 9) e amparou a representação pictórica (Atividade 17, 18, 19 e 22). Por sua vez, a representação pictórica ajudou os alunos na abstração envolvida na identificação de partes de partes da unidade, apoiou a definição de multiplicação de frações e ajudou os estudantes a perceberem que a unidade também pode ser uma fração.

Ao avançarmos para a seção onde trabalhamos a multiplicação de frações envolvendo uma fração imprópria (Atividades 26 a 31), percebemos que, após estabelecido o algoritmo para o caso de multiplicação de frações envolvendo exclusivamente frações próprias, muitos alunos não pensaram no processo (que os levaria à conclusão de que também para frações impróprias o algoritmo é válido), "importando" o algoritmo do caso anteriormente estudado. Cabe ressaltar que não foi salientado aos estudantes que agora, diferentemente das atividades anteriores, um dos fatores é uma fração imprópria, o que consideramos que seria exagerado para esta faixa etária. Por isso, não insistimos neste aspecto.

A articulação entre as representações pictórica, numérica e escrita proposta por Duval, mostrou-se fundamental no processo de amadurecimento e abstração dos conceitos trabalhados durante a sequência de atividades.

Em muitas ocasiões, durante a implementação, os alunos tiveram a liberdade de desenvolver as atividades em grupos organizados de forma aleatória. A realização de uma atividade só acontecia após todos terem finalizado a atividade anterior. Durante a correção das atividades, as diferentes respostas mobilizadas pelos pares eram apresentadas e comparadas, acompanhadas de argumentações. Avaliamos que, da forma como foi desenvolvida a sequência de atividades, foi proporcionada uma maior autonomia dos alunos, fazendo-os refletir individualmente, em um primeiro momento, sobre os processos, e, posteriormente, procurando entender, durante os momentos de correção das atividades, outros esquemas de pensamento utilizados pelos colegas, aproveitando-os para complementar, comparar e validar seus próprios esquemas utilizados na atividade em discussão bem como nas próximas atividades.

Por outro lado, ao final da implementação, percebemos os alunos ainda em processo de construção do conhecimento relativo à multiplicação de frações, o que consideramos natural.

Finalmente, ressaltamos que, nas Atividades 25 e 29, o momento de reflexão proporcionado sobre as diferentes possibilidades de resultado da operação de multiplicação na ampliação do universo numérico dos naturais para as frações, foi de fácil compreensão para os alunos; creditamos esta facilidade ao fato de termos trabalhado a definição de multiplicação de frações (como partes de partes da unidade), o que também facilitou, na Atividade 25, a ruptura conceitual de que, em uma multiplicação, o resultado sempre é maior que um dos fatores.

As Atividades 7, 16 e 31 evidenciaram, de forma contundente para nós, a falta de familiaridade dos estudantes com a formulação de problemas, pois na terceira investida (Atividade 31), alguns estudantes ainda não conseguiram formular uma redação que efetivamente constituísse um problema. Revela-se assim muito oportuna e importante, na nossa opinião, a inclusão de muitas Habilidades na BNCC do tipo "resolver e elaborar problemas de [...]" encontráveis desde os anos iniciais do EF.

CONCLUSÃO

Encerramos o presente trabalho realizando reflexões sobre todo o processo percorrido, com o intuito de responder a questão noteadora desta pesquisa.

Não é raro vermos a multiplicação de frações sendo definida por meio do algoritmo (bastando multiplicar numeradores e denominadores), o que não ajuda nem instiga os alunos a entenderem e apreciarem a ampliação dessa operação do universo dos naturais para o universo das frações. Uma definição por meio do algoritmo não dá significado a produtos do tipo "$\frac{2}{3}$ x $\frac{5}{7}$", por exemplo. Dessa forma, os estudantes não conseguem associar a multiplicação de frações a situações do seu cotidiano.

Buscamos investigar, na presente pesquisa, como uma proposta de sequência de atividades para o 6º ano do Ensino Fundamental focando na compreensão do conceito de multiplicação de frações pode auxiliar no aprendizado desta operação e na capacidade de aplicá-la.

Para a elaboração de uma sequência de atividades objetivando a compreensão do conceito de multiplicação de frações, foi necessário buscar subsídios que contribuíssem para a reflexão sobre a questão de pesquisa. Nesta direção, a Teoria dos Campos Conceituais e a Teoria de Representação Semiótica dizem sobre como se desenvolve a construção de um conceito, o processo cognitivo envolvido e a importância da exploração de diferentes representações, por isso foram elas tomadas como referncias teóricos. Outras questões importantes que foram consideradas foram:

- Existem mudanças entre os significados da multiplicação no conjunto dos Naturais ($\mathbb{N}$) e no conjunto dos Racionais ($\mathbb{Q}$)?;
- O que dizem os documentos oficiais Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sobre o ensino de frações, em particular, sobre a multiplicação de frações?;
- Como se desenvolve o ensino da multiplicação de frações em produções didáticas para o sexto ano aprovadas no PNLD?;
- Quais as considerações de outros pesquisadores com relação ao ensino de multiplicação de frações?

Ao refletir sobre se existem mudanças entre os significados da multiplicação no conjunto dos Naturais ($\mathbb{N}$) e no conjunto dos Racionais ($\mathbb{Q}$), concluímos que, se encararmos “fração de” como uma ampliação da ideia de “o dobro de”, então não são criados novos significados para a multiplicação de frações. Este foi o ponto de partida por nós utilizado para motivar a ampliação da multiplicação para o universo das frações.

Destacamos que no universo das frações mantêm-se os significados:

- aditivo, com situações de adição de parcelas iguais (quando o primeiro fator é um número natural) e comparação (operador ou identificação de um fator multiplicativo, incluindo-se aqui ampliação e redução, por ex: três quartos de);

- exterior, com situações de área, volume, velocidade, etc.

Cabe ressaltar que, na proposta de atividades construída nesta pesquisa, optamos por não incluir o significado exterior, pois a pesquisa teve por objetivo pesquisar os *primeiros* contatos do estudante com a multiplicação de frações.

Com relação à leitura dos documentos oficiais sobre o ensino de frações, em particular, sobre a multiplicação de frações, da leitura dos PCN destacamos a importante orientação de serem priorizadas situações que promovam a compreensão sobre a necessidade dos números racionais para solucionar-se situações nas quais apenas os números naturais não são suficientes, bem como a ênfase no fato de o entendimento ficar prejudicado se o foco for apenas no algoritmo para a multiplicação de frações. Também identificamos a preocupação com a metodologia de ensino e a importância dada ao fato de o estudante perceber a multiplicação de frações como partes de partes de um total.

No presente trabalho, defendemos que a multiplicação de frações seja definida precisamente desta forma, por exemplo, $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ é o mesmo que $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$. Defendemos também que tal definição não só pode ser motivada no conhecimento que o estudante traz do universo dos números naturais como pode apoiar-se na representação pictórica, ambas ajudando a deduzir o algoritmo usual para a multiplicação de frações.

Da leitura da BNCC e dos PCN, percebemos que o documento reforça a busca do desenvolvimento pelo aluno da capacidade de pensar sobre o que aprendeu e de elaborar suas próprias situações, e que o ensino das frações está relacionado com a habilidade de resolver problemas.

Na sequência de atividades que propomos, oportunizamos a elaboração de problemas pelo estudante em três diferentes momentos (Atividades 7, 16 e 31).

Buscamos nos estudos correlatos que versam sobre o ensino de multiplicação de frações, as considerações feitas pelos pesquisadores; tais trabalhos contribuíram para o aperfeiçoamento de nosso estudo. Por exemplo, corroborou-se, com Pinto (2011); Altoé (2017); Zanella (2013) e Merlini (2005), a crença de que o ensino da multiplicação de frações não deve deter-se apenas na compreensão e aplicação do algoritmo, mas sim privilegiar a compreensão dos processos, de forma a emergir a ampliação do conceito de multiplicação para o universo das frações.

Buscamos identificar como se desenvolve o ensino da multiplicação de frações em produções didáticas para o sexto ano aprovadas no PNLD, realizando uma leitura crítica de alguns exemplares. Constatamos que nenhum livro apresenta a definição de multplicação de fração, ficando explícito o não atendimento à orientação “A compreensão da multiplicação com frações pode ser pensada como “partes de partes do total” encontrada nos PCN. De fato, todos os autores abordam a questão “fração de”, mas nenhum deles tomou isso como definição para a multiplicação de frações explicitamente, o que, no nosso ponto de vista, constitui uma barreira para o desenvolvimento do pensamento matemático do estudante sobre ampliação de universo numérico, particularmente, sobre a ampliação da operação de multiplicação.

O fato de termos apontado lacunas no desenvolvimento do tema nas coleções consideradas não nos impediu de encontrar lá bons exemplos e atividades interessantes. A prova disto é termos aproveitado algumas delas no planejamento de uma sequência de atividades que procurasse atingir nossos objetivos.

A leitura sobre a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (principalmente o campo multiplicativo) e a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval ofereceu-nos a forma como deveríamos analisar o desenvolvimento dos estudantes por ocasião da implementação da sequência de atividades. Também esta leitura teve efeito na elaboração das atividades, que deveriam ser formuladas de modo a oportunizar o reconhecimento dos esquemas de pensamento dos estudantes e oportunizar-lhes representações variadas. Ainda assim, nesta direção, algumas atividades foram aprimoradas no Produto Final.

Numa tentativa de oportunizar aos alunos construirem seu conhecimento sobre multiplicação de frações, interagindo entre si, mobilizando seus próprios esquemas de pensamento na busca por compreender o que acontece durante o processo de tomar parte de parte(s) de uma unidade a fim de proporcionar a conexão disto com o conceito de multiplicação de frações, foi construída uma sequência de atividades. A esse planejamento seguiu-se a implementação das atividades em uma turma de 6º ano.

Avaliamos que a forma como se deu a implementação proporcionou uma maior autonomia dos alunos, fazendo-os inicalmente refletir individualmente sobre os processos, e justificativas e, posteriormente, argumentar sobre suas ideias e entender a argumentação dos colegas, o que contribuiu para comparar, enriquecer e validar seus esquemas de pensamento.

Com a análise das respostas às atividades implementadas, procuramos identificar os esquemas de pensamento produzidos pelos estudantes. Percebemos os alunos em processo de construção do conhecimento dos conceitos que envolvem a multiplicação de frações. De fato, a cada contato com novas atividades foi possível perceber que seus esquemas iam sendo reestruturados e/ou aprimorados.

Consideramos que os alunos aceitaram bem a motivação da ampliação da multiplicação de naturais para todos os outros casos envolvidos na multiplicaçao de frações (natural x fração, fração x natural, fração x fração); foram capazes de aplicar a definição da multiplicação em vários momentos, reconhecendo que a expressão “de” está diretamente ligada à definição da multplicação de frações.

A articulação entre as representações pictórica, numérica e escrita proposta por Duval, mostrou-se fundamental no processo de amadurecimento e abstração dos conceitos trabalhados durante a sequência de atividades. O apelo ao material concreto e às variadas representações pictóricas foram também determinantes em muitos momentos para dar significado ao conceito ali trabalhado; a representação pictórica muito ajudou os alunos, por exemplo, na identificação de partes de partes da unidade; constatou-se que, pelo menos 88% dos estudantes conseguiu perceber que a unidade também pode ser uma fração.

Ao avançarmos para a seção onde trabalhamos a multiplicação de frações envolvendo uma fração imprópria, foi possível perceber o reflexo da maior complexidade envolvida por este conceito nas resoluções dos estudantes; porém, consideramos que os alunos conseguiram compreender, por exemplo, que se o primeiro fator é maior do que a unidade, então o produto deverá ser maior do que o segundo fator. Evitamos, neste momento introdutório à multiplicação de frações, a discussão da dedução do algoritmo para o caso de algum fator ser uma fração imprópria, permitindo que os estudantes aplicassem o algoritmo deduzido sobre fraões próprias também para frações impróprias, muitas vezes sem pensar no processo (que os levaria à conclusão de que também para frações impróprias o algoritmo é válido). Cabe ressaltar que, nas atividades que objetivaram a construção do algoritmo, não foi salientado aos estudantes que os fatores envolvidos eram frações menores do que a unidade, o que consideramos que seria exagerado para esta faixa etária em uma discussão introdutória sobre a multiplicação de frações. Como continuidade à introdução da multiplicação de frações abordada neste trabalho, pode-se aprofundar a discussão sobre um fator ser uma fração imprópria e, a seguir abordar o caso em que ambos os fatores são frações impróprias.

Ressaltamos também a dificuldade encontrada pelos estudantes nas atividades de formulação de problemas, e por isso o objetivo de ser capaz de associar a multiplicação de frações a situações do dia a dia foi considerado apenas parcialmente atingido. Esta avaliação provocou em nós a convicção sobre a relevância da habilidade “elaborar e resolver problemas sobre...” tantas vezes reiterada na BNCC.

Assim, reconhecemos que a proposta revelou-se ainda insuficiente com relação à construção e aplicação da operação de multiplicação de frações, como revelaram as atividades de proposta de problemas. No entanto, foi inquestionável para nós que a proposta provocou mudanças no método de ensino da pesquisadora autora deste trabalho e no processo de aprendizagem dos estudantes sobre a multiplicação de frações.

Reconhecemos também que a análise dos esquemas de pensamento dos estudantes poderia ter sido maior se os estudantes tivessem sido mais estimulados a justificar suas respostas, tendo em vista que justificar também gera aprendizado. Por isso, em várias das atividades propostas no Produto Final foi incluída esta solicitação nos enunciados. No entanto, consideramos que as conclusões da pesquisa não ficaram prejudicadas por este fato.

Com relação à questão de pesquisa

> *“Como uma proposta de sequência de atividades para o 6º ano do Ensino Fundamental que foca na compreensão do conceito de multiplicação de frações pode auxiliar para o aprendizado desta operação e na capacidade de aplicá-la?”,*

avaliamos, a partir dos esquemas de pensamento identificados, que os alunos conseguiram atribuir sentido à multiplicação de frações: a partir do conhecimento que já possuíam dessa operação no universo dos números naturais, ampliaram este conceito ao universo das frações, apoiados em material concreto e em representações pictóricas, chegando à dedução de um algoritmo para esta operação.

Finalmente, no capítulo 6, ressaltamos que a discussão sobre a validade das propriedades (ou da ampliação das propriedades) das operações deve, sim, na nossa opinião, ser oportunizada nos livros didáticos e nas salas de aula. Não considerarmos natural a propriedade comutativa da multiplicação, nem em situações do dia a dia (por exemplo, tomar o dobro de meia maçã, não é a mesma ação que tomar metade de duas maçãs) nem em situações puramente numéricas: por que $\frac{3}{4}$ de 24 (fração de quantidade inteira) deveria ter o mesmo resultado que 24 x $\frac{3}{4}$ (soma de parcelas iguais)? Portanto, a partir das considerações ao longo desta pesquisa, na nossa opinião, a propriedade comutativa tem sim que ser bem explorada, com encaminhamento posterior à introdução da operação. Em um trabalho em preparação, fazemos uma discussão sobre a comutatividade da multiplicação de frações.

REFERÊNCIAS

ALTOÉ, R. O. *Formulação de problemas do campo conceitual multiplicativo no ensino fundamental:* uma prática inserida na metodologia de resolução de problemas. 2017. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, ES. Disponível em: <http://educimat.ifes.edu.br/images/stories/Publica%C3%A7%C3%B5es/Disserta% C 3%A7%C3%B5es/2017_Renan_Oliveira_Alto%C3%A9.pdf>. Acesso em: 19 out. 2018.

BIANCHINI, E. *Matemática Bianchini* – 6º ano. São Paulo: Moderna. 2015a.

______. *Matemática Bianchini* – 7º ano. São Paulo: Moderna. 2015b.

BIGODE, A. J. L. *Matemática do cotidiano* – 6º ano. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2015a.

______. *Matemática do cotidiano* – 7º ano. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2015b.

BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais:* primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental – Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. *Parâmetros curriculares nacionais:* terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental – Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. *Base Nacional Curricular comum.* Brasília: Ministério da Educação, 2018.

BRAULT, R.; DARO, I.; PERBOS-RAIMBORG, D.; PLOY, L.; TELMON, C. *Mathématiques – Collection Phare (6 e).* Paris: Hachette Éducation, 2005.

BROLEZZI, A. C. *A arte de contar:* uma introdução ao estudo do valor didático da História da Matemática. Dissertação de Mestrado. São Paulo, USP, 1991.

DRUCK, I de F. *Frações:* uma análise de dificuldades conceituais. São Paulo: IME-USP, 2006. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4642963/mod_resource/content/1/Druck%20-%20Fra%C3%A7%C3%B5es%20-%20uma%20an%C3%A1lise%20de%20dificuldades%20conceituais.pdf. Acesso em: 12 out. 2019.

DUVAL, R. *Semiósis e pensamento humano*: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais – Fascículo I. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

GIOVANNI JR, J. R. CASTRUCCI, B. *A conquista da matemática.* São Paulo: FTD, 2009.

GLOBO.COM. *IBGE aponta despesas que mais pesam no orçamento familiar.* 2010. Disponível em: http://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2010/06/ibge-aponta-despesas-que-mais-pesam-no-orcamento-familiar.html. Acesso em: 12 out. 2019.

HENRIQUES, A.; ALMOULOUD, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. In: *Ciências & Educação,* Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v22n2/1516-7313-ciedu-22-02-0465.pdf. Acesso em: 10 nov. 2019.

HOWSON, G. The development of mathematics textbooks: historical reflections from a personal perspective, ZDM: *International Journal on Mathematics Education*, 45, 2013, p. 647-658.

JACOB, N.; SITBON, A.; VISSIO, J. *Maths 6e*. França: Belin Education, 2009.

LARA, I. C. M.; BORGES, R. M. R. A resolução de problemas de divisão partitiva nos anos iniciais do ensino fundamental. *VIDYA*, Santa Maria. v. 32, n. 1, p. 9-20, jan./jun., 2012. Disponível em https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/download/263/238. Acesso em: 10 jul. 2020.

MAGINA, S., SANTOS. A., MERLINI. V. Comparação multiplicativa: a força que a expressão exerce na escolha das estratégias de resolução dos alunos, XIII CIAEMIACME, Recife, Brasil, 2011.Disponível em: https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/448/337. Acesso em: 10 jul. 2020.

MAGINA, S.; MERLINI, V. L.; SANTOS, A. dos. *A estrutura multiplicativa sob ótica da teoria dos campos conceituais:* uma visão do ponto de vista da aprendizagem. VII CIBEM, 2013, Montividéu, Uruguai. p. 2756-2763.

MENTRARD, Daniel. The daisy: a flower for fractions. abril/2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/gvhzj8mz>. Acesso em: 10 ago. 2020.

MERLINI, V. L. *O conceito de frações em seus diferentes significados*: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª série do ensino fundamental. 2005. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, SP. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11111>. Acesso em: 19 out. 2018.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. *Investigações em Ensino de Ciências*. v. 7, n.1, 2002. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/141212/000375268.pdf?sequence=1>. Acesso em: 19 out. 2018.

PINTO, H. G. *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais.* 2011. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Lisboa. Instituto de Educação (IE). Lisboa. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/4516>. Acesso em: 19 out. 2018.

PNLD 2017. *Guia Digital*. Disponível em: http://www.fnde.gov.br/pnld-2017/. Acesso em: 01 set. 2019.

RIPOLL, C. C.; SIMAS, F.; BORTOLOSSI, H.; RANGEL, L.; GIRALDO, V.; REZENDE, W.; QUINTANEIRO, W. *Frações no Ensino Fundamental* – volume 1. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA-OS. 2017. Disponível em: <https://www.umlivroaberto.com/livro/lib/exe/fetch.php?media=fracoes_v2_book_vi ew.pdf>. Acesso em: 20 out. 2018.

RIPOLL, C. C.; RANGEL, L.; GIRALDO, V.. *Números Naturais*. Livro do professor de matemática na Educação Básica. v. 1 Rio de Janeiro: SBM, 2015.

RIPOLL, C. C.; RANGEL, L.; GIRALDO, V.; ROQUE, T. Comparando Grandezas – Parte I. *In*: 2º Simpósio Nacional de Professores de matemática da ANPMat. 2015. Disponível em: https://anpmat.org.br/simposio-nacional-2/wp-content/uploads/sites/3/2016/01/ripoll_rangel_comp_grandezas.pdf>. Acesso em: 20 ago 2020.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO - SARESP. *Cadernos de Apoio e Aprendizagem:* Matemática 6º ano. São Paulo: Prefeitura de São Paulo, 2005.

SILVA, M. J. F.; ALMOULOUD, S. A. As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo. *Bolema*: Boletim de Educação Matemática, v. 21, n. 31, p. 55-78, 2008. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2105>. Acesso em: 17 jan. 2019.

SILVEIRA, Ê. *Matemática compreensão e prática* – 6º ano. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015a.

______. Matemática compreensão e prática – 7º ano. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015b.

SOUZA, R. G. *Reflexões sobre a retomada de frações em um 6º ano e uma proposta de abordagem.* Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre/RS. Disponível em: http://www.ufrgs.br/ppgemat/publicacoes/produtos-didaticos/2019/dissertacao-roseane-garcia. Acesso em: 10 nov. 2019.

______. *Produto técnico da dissertação intitulada abordagem de frações equivalentes: uma experiência no 6º ano.* (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre/RS. Disponível em: http://www.ufrgs.br/ppgemat/publicacoes/produtos-didaticos/2019/produto-roseane-nunes-garcia-de-souza/at_download/file. Acesso em: 10 nov. 2019.

STAREPRAVO, A. R. *Ação e reflexão na formação docente: a experiência do município de Birigui.* Birigui, SP: Artmídia, 2013.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um Exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica,* v 1, 1986, p. 75-99. Disponível em: http://repositorio.ispa.pt/bitstream/10400.12/2150/1/1986_1_75.pdf. Acesso em: 18 out. 2018.

______. La Teoria de Los Campos Conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, v. 10, n. 2, 3, p. 133-170, 1990. Disponível em: https://www.ecosad.org/laboratorio-virtual/phocadownloadpap/CONSTRUC-EPISTEM-CUALITA/teoria-de-campos-conceptuales-vergnaud-1990.pdf. Acesso em: 18 out. 2018.

______. Teoria dos campos conceituais. *In*: 1º SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 1993. p. 1-26.

______. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática*. Educar em Revista*, v. 27, n. Especial 1/2011, p. 15-27, Curitiba: UFPR, 2011. Editora UFPR. Disponível em: https://revistas.ufpr.br/educar/article/view/22592/14831. Acesso em: 10 set. 2018.

______. *A criança, a matemática e a realidade:* problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução Maria Lucia Faria Moro. ed. rev. Curitiba: UFPR, 2014.

______. *A Teoria dos Campos Conceituais:* O Ensino de Matemática e a pesquisa nesta área - Aula 1. Curso da Escola de Altos Estudos - EAE. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - UNIBAN BRASIL. In: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 30 nov. 2017a.(2h04min50s). Disponível em: <https://youtu.be/vU31uTXe9TU>.
Acesso em: 18 set. 2018.

______. *A Teoria dos Campos Conceituais:* O Estudo das Estruturas Multiplicativas - Aula 3. Curso da Escola de Altos Estudos - EAE. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - UNIBAN BRASIL. In: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 30 nov. 2017b. (1h55min16s). Disponível em: <https://youtu.be/LSmHssoc_1U>. Acesso em: 18 set. 2018.

______. Teoria dos campos conceituais. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO. *Anais*... Rio de Janeiro: UFRJ. Projeto Fundão, Instituto de Matemática, 1993. p. 1-26.

ZANELLA, M. S. *Investigando a concepção de frações de alunos nas séries finais do ensino fundamental e do ensino médio*. 2013. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Paraná. Disponível em: <http://nou-rau.uem.br/nou-rau/document/?code=vtls000204570>. Acesso em: 17 jan. 2019.

ANEXOS

ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ___________________________________, R.G. ___________________, responsável pelo(a) aluno(a)________________________________, da turma______, declaro, por meio deste termo, que concordei que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada INVESTIGANDO O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 6° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL DE UMA ESCOLA PÚBLICA DE PAROBÉ/RS, desenvolvida pela pesquisadora Profª. Daiana dos Santos Oliveira Fischer. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Cydara Cavedon Ripoll, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone (51) 3308-6225 ou e-mail mat-ppgensimat@ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo que, em linhas gerais, são:

- Refletir acerca dos processos de ensino e aprendizagem da multiplicação com frações; planejar, construir e aplicar uma sequência de atividades que oportunize o desenvolvimento do conceito de multiplicação de frações a partir de situações didáticas elaboradas à luz da Teoria dos Campos Conceituais e da Teoria de Registros de Representação Semiótica.

Fui também esclarecido(a) de que o uso das informações oferecidas será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários, etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração fará por meio de questionário escrito e autorizo que os dados sejam utilizados em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários, entre outros, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação. Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos entrevistados ao precisarem responder a algumas perguntas sobre o desenvolvimento de seu trabalho na escola. A fim de amenizar esse desconforto, será mantido o anonimato das entrevistas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação.

Como benefícios, esperamos que este estudo produza informações importantes sobre o ensino de multiplicação de frações, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A sua colaboração se iniciará apenas a partir da entrega deste documento por mim assinado. Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no e-mail daianadosantos@faccat.br.

Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av.Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040- 060 e que tem como fone (55 51) 3308-3738 e e-mail etica@propesq.ufrgs.br,

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar desta pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Parobé, ______de____________de__________.

Assinatura do Responsável: ____

Assinatura do(a) pesquisador(a): ____

Assinatura do Orientador da pesquisa:_____________________________________

ANEXO B – TERMO DE ASSENTIMENTO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
TERMO DE ASSENTIMENTO

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa "INVESTIGANDO O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 6° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL DE UMA ESCOLA PÚBLICA DE PAROBÉ/RS".
Neste estudo pretendemos investigar o ensino e a aprendizagem de multiplicação de frações e adotaremos os seguintes procedimentos: serão digitalizados os cadernos dos alunos com as atividades desenvolvidas, utilizaremos fotos, relatos dos alunos e todas as aulas serão gravadas.
Para participar deste estudo, o responsável por você deverá autorizar e assinar um termo de consentimento. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. Você será esclarecido(a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. O responsável por você poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não acarretará qualquer penalidade ou modificação na forma em que é atendido(a) pelo pesquisador que irá tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Você não será identificado em nenhuma publicação. Este estudo apresenta risco mínimo (ou risco maior que o mínimo, se for o caso), isto é, o mesmo risco existente em atividades rotineiras como conversar, tomar banho, ler etc. Apesar disso, você tem assegurado o direito a ressarcimento ou indenização no caso de quaisquer danos eventualmente produzidos pela pesquisa.
Os resultados estarão à sua disposição quando finalizada. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a permissão do responsável por você. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de 5 anos, e após esse tempo serão destruídos. Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada pelo pesquisador responsável, e a outra será fornecida a você.

Eu,____, portador(a) do documento de Identidade__________________________, fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações, e o meu responsável poderá modificar a decisão de participar se assim o desejar. Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar desse estudo. Recebi uma cópia deste termo assentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Parobé, ______de____________de___________.

____
Assinatura do(a) menor

____
Assinatura do(a) pesquisador(a)

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar:

Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av.Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e email etica@propesq.ufrgs.br

PESQUISADOR(A) RESPONSÁVEL: DAIANA DOS SANTOS OLIVEIRA FISCHER

ANEXO C – ATIVIDADE QUE IDENTIFICA FRAÇÕES MAIORES QUE A UNIDADE (SOUZA, 2019, p. 212)

Atividade 10

Objetivos específicos - Levar o aluno a:

- ✓ Reconhecer e identificar frações não unitárias a partir da justaposição de frações unitárias de mesmo denominador;
- ✓ Familiarizar-se com frações impróprias;
- ✓ Identificar frações maiores que a unidade;
- ✓ Praticar a notação de fração.

Atividade 10 - Imagine você e seus colegas de grupo em uma pizzaria rodízio. Essa pizzaria serve todas as fatias de mesmo tamanho, logo todas as pizzas são do mesmo tamanho e divididas no mesmo número de fatias. Decida, com seus colegas de grupo, quantas fatias terá a pizza de vocês e informe o professor.

Explorando as fatias de pizzas de E.V.A. que o seu grupo recebeu, desenvolva a atividade a seguir.

Converse com seus colegas e façam uma estimativa de quantas fatias de pizza cada um gostaria de comer. Agora, responda as perguntas abaixo:

a) Que fração de uma pizza representa uma fatia?
b) Anote quantas fatias cada integrante do grupo imagina comer.
c) Que fração de uma pizza representa a quantidade de pizza que cada integrante comeria?
d) Que fração de uma pizza representa o que todos os integrantes do grupo, juntos, comem? Essa fração é maior ou menor do que uma pizza?
e) Observando a quantidade de pizza que cada componente do grupo coeria, compare a quantidade que você comeu, com a quantidade que cada colega de grupo comeria, dizendo se a quantidade é *maior que, menor que* ou *igual*, justificando sua resposta e usando frações para justificar.

Momento do professor:

Para iniciar a atividade, o professor deve distribuir a cada grupo várias peças soltas (sem as armações) que correspondem apenas à fração que o grupo escolheu, em quantidade suficiente para contemplar o "desejo" do grupo. Por exemplo: se um grupo decidiu que sua pizza será dividida em 6 fatias, entregar apenas os pedaços relativos a $\frac{1}{6}$ do material concreto (pizza de E.V.A.)

Nessa atividade, será trabalhada pela primeira vez, frações não unitárias, e é esperado que apareçam naturalmente frações impróprias. Dependendo das respostas apresentadas, por exemplo no caso de algum grupo “não comer” mais do que uma pizza, o professor deve então, “trazer” um aluno fictício, que adora pizza, fazendo assim, o número de fatias de pizza consumidas pelo grupo passar da unidade “uma pizza”, oportunizando então, o trabalho com frações maiores do que a unidade. O professor deve estimular os estudantes a fazerem uso da notação $\frac{a}{b}$ introduzida na atividade anterior, de maneira a reiterar o seu significado. Importante escrever em palavras, ao lado de cada fração, a quantidade que ela representa, até que os alunos tenham se apropriado de tal notação.

Sugerimos a construção de uma tabela, para organizar os dados dos grupos, incluindo nela, a quantidade de fatias da pizza de cada grupo, a fração de pizza que representa uma fatia e o total de pizza consumida pelo grupo.

Recomenda-se que uma tabela seja digitada e entregue aos estudantes na aula seguinte. Ela será aproveitada em uma atividade futura (Atividade 24) de comparação de frações de denominadores diferentes, bem como em adição e subtração de frações, tendo em vista as variadas equipartições escolhidas. Na Atividade 24 questiona-se “Como decidir quem da sala comeu mais pizza?”; além da comparação entre frações de denominadores diferentes, estamos também estimulando a discussão e a conclusão de que “fatia” não é aceitável como “unidade” para a comparação porque, entre os grupos, o tamanho da fatia mudou.

O professor deve estimular ao máximo a argumentação com frações (pois neste contexto é muito fácil recorrer simplesmente a “fatias”, resumindo-se a atividade à contagem, e não a frações). Aproveite também a oportunidade para fazer uso da adição no registro, como, por exemplo, no item (c), registrando o total de fatias consumidas pelo grupo como $\frac{5}{10}+\frac{6}{10}+\frac{7}{10}=\frac{18}{10}$.

Para reiterar que “fatia” não é, neste caso, uma boa “unidade” para a comparação pode-se lançar a questão: como decidir quem da sala comeu mais pizza?, estimulando a discussão e essa conclusão, porque, entre os grupos, o tamanho da fatia mudou.

<u>Expectativas para a atividade 10</u>

Espera-se que os alunos tragam dos anos iniciais a ideia de frações não unitárias (numerador diferente de 1) a partir da justaposição de frações unitárias com mesmo denominador, ou seja, que possa gerar uma fração unitária e juntar várias quantidades iguais a esta. Se “frações” não foi conteúdo abordado em anos anteriores, então o professor deverá dedicar um tempo para conceituar fração não unitária e levar os estudantes a concluírem, por exemplo, que

$$\frac{18}{10}=\frac{5}{10}+\frac{6}{10}+\frac{7}{10},$$

reiterando o significado de *juntar* da adição.

Nas próximas atividades pretende-se: dar continuidade ao trabalho com frações não unitárias, a fim de reiterar a os alunos, por exemplo, que a fração $\frac{2}{3}$ é a justaposição bem como a soma de duas quantidades iguais a $\frac{1}{3}$ da unidade; introduzir frações aparentes (levando os alunos a perceberem, por exemplo, que a fração $\frac{3}{3}$ da unidade é igual a uma unidade); sem no entanto fazer uso de tal nomenclatura; retomar frações próprias e impróprias (ainda sem introduzir também tais nomenclaturas), bem como a noção de metade de uma fração de numerador par; trabalhar com uma mesma fração em unidades contínuas diferentes para ressaltar a importância da unidade, abordando *frações* x *quantidades*. Todas as atividades são individuais e serão entregues impressas aos alunos.

A atividade 11 contempla o conceito de frações não unitárias e objetiva relacioná-la com a adição de frações de mesmo denominador dando assim outro significado para frações não unitárias, a saber, de uma soma de frações unitárias. Objetiva também trabalhar com a determinação da metade de uma fração de numerador par. Ainda nesta atividade, serão trabalhadas frações impróprias e frações aparentes. A atividade 12 também contempla frações não unitárias, tanto próprias como impróprias, tanto contínuas como discretas. A atividade 13 aborda uma mesma fração de unidades contínuas diferentes, procurando ressaltar a importância da unidade ao trabalhar-se com frações.

APÊNDICE

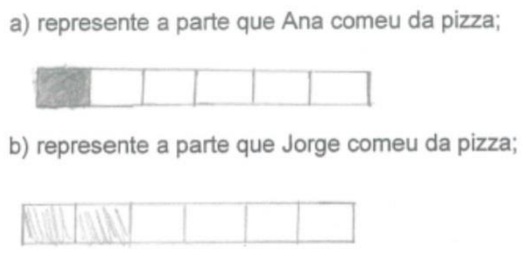
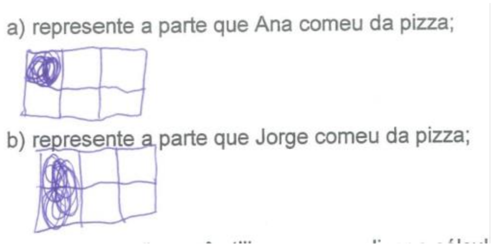
APÊNDICE A – ANÁLISE DA PRODUÇÃO DOS ALUNOS

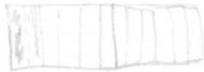
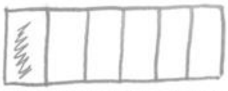
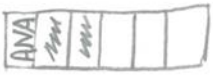
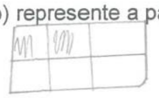
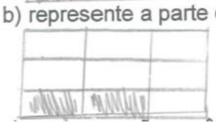
Na **Atividade 1,** alguns alunos questionaram se poderiam representar a pizza na forma de retângulo, e a professora-pesquisadora como mediadora contrapôs perguntando se fazia diferença se fosse um disco ou retângulo. E alguns alunos responderam que não, desde que a divisão fosse em 6 partes (iguais).

Alguns alunos questionaram o que significa representação pictórica e retomamos que é algum desenho, no caso, o desenho da pizza.

Vinte e dois alunos realizaram a Atividade 1. No desenvolvimento dos itens (a) (representação de $\frac{1}{6}$) e (b) (representação do dobro de $\frac{1}{6}$), percebemos que os alunos, em seus esquemas de pensamento, utilizaram diferentes representações para os conceitos em ação de unidade e de fração unitária (Quadro 1): representações na forma de retângulo (11 alunos), de retângulo e fração (4 alunos), de disco (06 alunos) e de fração (01 aluno).

Quadro 1 – Respostas obtidas para as representações de $\frac{1}{6}$ e do dobro de $\frac{1}{6}$ (itens (a) e (b) da Atividade 1)

	Respostas	**Quantidade de alunos**
I		8
II		2

III	a) represente a parte que Ana comeu da pizza;  b) represente a parte que Jorge comeu da pizza; 	1
IV	a) represente a parte que Ana comeu da pizza;  1/6 b) represente a parte que Jorge comeu da pizza;  2/6	2
V	a) represente a parte que Ana comeu da pizza; 1/6  b) represente a parte que Jorge comeu da pizza; 2/12 	1
VI	a) represente a parte que Ana comeu da pizza; 1/6  b) represente a parte que Jorge comeu da pizza; 2/12 	1
VII	a) represente a parte que Ana comeu da pizza;  b) represente a parte que Jorge comeu da pizza; 	4
VIII	a) represente a parte que Ana comeu da pizza;  b) represente a parte que Jorge comeu da pizza; 	1

IX	 a) represente a parte que Ana comeu da pizza; b) represente a parte que Jorge comeu da pizza;	1
X	a) represente a parte que Ana comeu da pizza; $\frac{1}{6}$ b) represente a parte que Jorge comeu da pizza; $\frac{2}{6}$	1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Percebemos algumas questões pontuais por parte dos estudantes na resolução da Atividade 1, itens (a) e (b), tais como (ver Quadro 1):

- nas Linhas III e IX, dois alunos, em seus esquemas utilizaram a equivalência de frações para fazer a representação das frações $\frac{1}{6}$ e $\frac{2}{6}$, ou seja, eles equiparticionaram a unidade em 12 partes e tomaram duas partes no item (a) e quatro partes no item (b);

- na Linha IV, dois alunos mobilizaram corretamente a conversão entre o registro pictórico e o registro numérico (simbologia matemática);

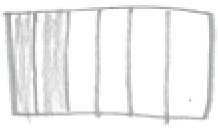
- na Linha V, o aluno mobilizou corretamente o registro pictórico para representação das frações $\frac{1}{6}$ e $\frac{2}{6}$, contudo, cometeu um equívoco na conversão do registro pictórico para o registro numérico. Com isto, apresentou como registro numérico uma fração equivalente a $\frac{1}{6}$ e não o dobro de $\frac{1}{6}$. No entanto, aqui não fica claro se para o registro numérico o estudante efetivamente mobilizou o conceito de fração equivalente.

- na Linha VI o estudante mobilizou corretamente a conversão entre o registro pictórico e o registro numérico, no entanto errou no registro do dobro de uma fração, parecendo ter confundido os conceitos "dobro" e "equivalente", já na representação pictórica;

- na Linha VIII, o aluno ainda apresenta equívocos na representação pictórica do $\frac{1}{6}$ que Ana comeu, e parece também ter confundido os conceitos "dobro" e "equivalente";

Nas respostas ao item (c) da Atividade 1, foi em geral possível identificar o esquema mobilizado pelos alunos para determinar o dobro de $\frac{1}{6}$, como evidencia o Quadro 2: 3 alunos mobilizaram a adição de frações (Linha I), 7 alunos mobilizaram a multiplicação (Linha II); 6 que não relataram qual o esquema mobilizado para obtenção do resultado $\frac{2}{6}$ (Linha III); 4 alunos que evocaram o conceito de equivalência e não o de dobro (Linha IV); e 2 que não responderam ao solicitado.

Quadro 2 – Respostas obtidas sobre a operação utilizada para determinar o dobro de $\frac{1}{6}$ (item (c) da Atividade 1)

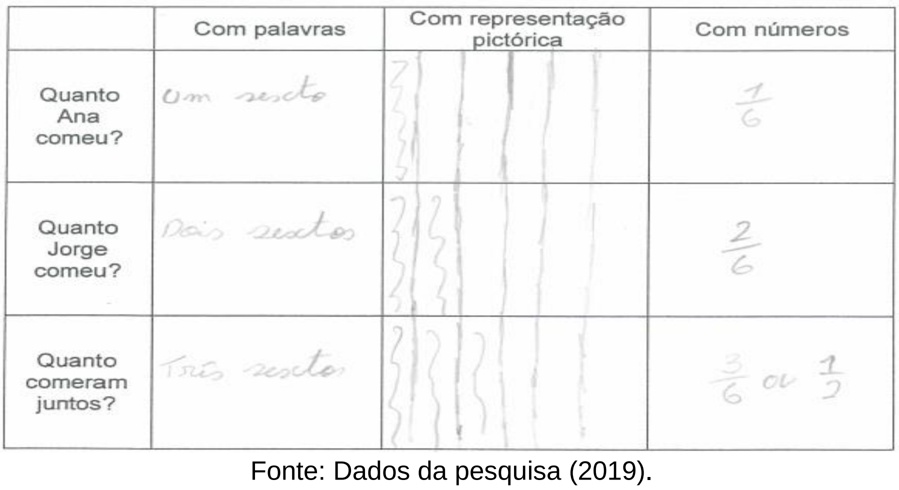
	Respostas	Identificação do esquema utilizado pelo estudante	Quantidade de alunos
I	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$ eu somei	Adição de frações	3
II	R: Multiplicação	Multiplicação	2
	Multiplicação $\begin{array}{r}1\\ \times 2\\ \hline 2\end{array}$	Multiplicação de dois números naturais (1x2) para demonstrar os dois pedaços de pizza, mobilizando o conceito em ação de fração unitária e de fração não unitária.	3
	$\frac{1 \times 2}{6} = \frac{2}{6}$ Porque ele comeu o dobro de pedaços	Multiplicação de número natural por fração e o conceito em ação de dobro, conectando com os conhecimentos prévios de que o “dobro de” é “2 x”	2
III	O DOBRO COM UMA CONTA	A explicação com palavras que deixa o raciocínio implícito talvez por achar que fosse óbvio	1
	$\frac{1 \times 2}{6 \times 2}$ $\frac{2}{12}$ $\frac{2 \times 2}{6 \times 2}$ $\frac{4}{12}$	Não está claro qual o esquema para o dobro de $\frac{1}{6}$, evocando o conceito de equivalência de frações	1
		A representação pictórica não deixa claro se o aluno fez uso da adição ou da multiplicação	1

	Jorge comeu? Registre-a abaixo. EU FIS UM DESENHO EM SEIS PEDAÇOS E PINTEI DOIS PEDAÇOS DE PIZZAS	Conceito de equipartição e de fração no contínuo, sem ficar claro o esquema utilizado para determinar o dobro de $\frac{1}{6}$	2
	Jorge comeu? Registre-a abaixo. USEI O DESENHO QUE É MELHOR PARA ENTENDER	Não está claro o conceito mobilizado	1
IV	$\frac{1 \times 2 = 2}{6 \times 2 = 12}$	conceito de fração equivalente	4

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

No item d) da Atividade 1, 21 dos 22 alunos responderam que não foi comida toda a pizza, variando as justificativas para tal resposta, todas deixando claro que o esquema de pensamento utilizado para verificar o que Ana e Jorge comeram juntos foi a adição, afirmando até que eles comeram juntos três pedaços, sendo 5 registros acompanhados da conclusão de que esta quantidade representava a metade da pizza, evidenciando a mobilização do conceito de equivalência), e que portanto sobrou pizza, momento em que fica implícita a mobilização dos conceitos de unidade e de subtração de frações. Apenas 1 aluno (Linha III, que fez o registro pictórico) não conseguiu responder a pergunta de forma clara, mas, fez o registro pictórico de $\frac{3}{6}$, que nos induz a pensar que concorda que sobrou pizza.

Figura 1 – Resposta de um aluno ao item (e) da Atividade 1

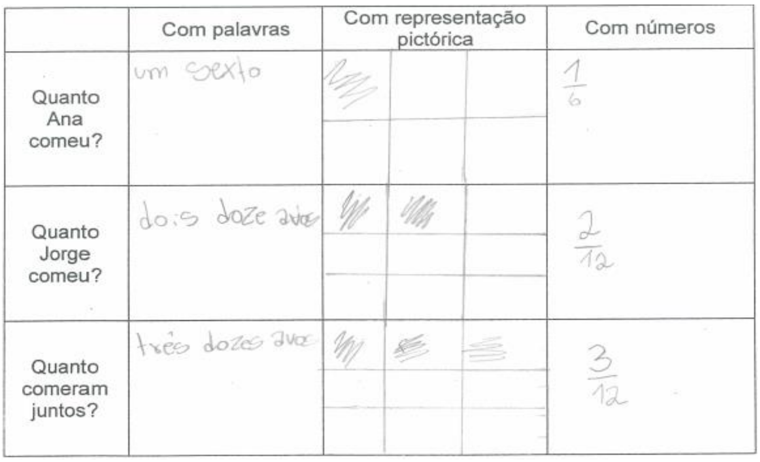


	Com palavras	Com representação pictórica	Com números
Quanto Ana comeu?	Um sexto		$\frac{1}{6}$
Quanto Jorge comeu?	Dois sextos		$\frac{2}{6}$
Quanto comeram juntos?	Três sextos		$\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Com o preenchimento do quadro no item (e) procurou-se avaliar o entendimento dos estudantes com relação a transitar de um registro para outro. Dos 22 alunos, 17 apresentaram seus apontamentos, tendo êxito na conversão dos registros de representação (Figura 1); 1 aluno não preencheu a coluna “com palavras”, mas, desenvolveu a representação pictórica e o registro numérico, e os 4 alunos que no item (b) tinham evidenciado confusão em seu raciocínio fazendo uso da equivalência de frações, repetiram o equivoco ao preencher a tabela (Figura 2).

Figura 2 – Resposta de um aluno ao item (e) da Atividade 1



	Com palavras	Com representação pictórica	Com números
Quanto Ana comeu?	um sexto		$\frac{1}{6}$
Quanto Jorge comeu?	dois doze avos		$\frac{2}{12}$
Quanto comeram juntos?	três dozes avos		$\frac{3}{12}$

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Consideramos que o objetivo da Atividade 1 foi atingido por 18 dos 22 estudantes que realizaram a atividade. Embora apenas 3 alunos (no Quadro 2) tenham explicitado que utilizaram a adição de frações para solucionar a questão, os registros dos demais sugerem que eles reconhecem que a ideia de “o dobro de” pode ser ampliada para o universo das frações, com o significado de soma de parcelas iguais.

A **Atividade 2**, foi desenvolvida por 22 alunos. Os alunos externaram que a atividade foi muito fácil. No Quadro 3 estão registrados os esquemas de pensamento produzidos pelos alunos no desenvolvimento da atividade.

Quadro 3 – Respostas para a Atividade 2

a) o dobro de 4	8	4 X 2 8	4 x 2 = 8	4 +4 8					
Quantidade de alunos	8	8	4	2					
b) o triplo de 7	21	7 X 3 21	7 x 3 = 21	7 + 7 = 14 14 + 7 = 21					
Quantidade de alunos	8	8	4	2					
c) o quádruplo de 2	8	2 X 4 8	2 x 4 = 8	2 + 2 = 4 4 + 4 = 8	2 2 2 +2 8	4 x2 8			
Quantidade de alunos	8	7	4	1	1	1			
d) o dobro de $\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{10}$ ou $\frac{2}{5}$ incorreta	$\frac{2}{10}$ incorreta	$\frac{1 \times 2}{5 \times 2} = \frac{2}{10}$ incorreta	$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$ ou $\frac{4}{10}$	$\frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{5}$	$\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{12}{10}$ incorreta	$\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{10}$
Quantidade de alunos	4	1	1	7	2	2	3	1	1
e) o triplo de $\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{0}$ ou $\frac{3}{2}$ incorreta	$\frac{3}{6}$ incorreta	$\frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$ incorreta	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ incorreta	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$	
Quantidade de alunos	5	1	2	7	2	3	1	1	
f) o quádruplo de $\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{36}$ ou $\frac{4}{9}$ incorreta	$\frac{4}{36}$ incorreta	$\frac{1 \times 4}{9 \times 4} = \frac{4}{36}$ incorreta	$\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$	$\frac{1}{9} \times 4 = \frac{4}{9}$	$\frac{1}{9} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{4}{36}$ incorreta	$\frac{1}{9} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{4}{36}$ incorreta	
Quantidade de alunos	6	1	1	7	2	3	1	1	

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Esta atividade busca, nos itens (a), (b) e (c), retomar a conexão existente entre as expressões “o dobro de”, “o triplo de” e “o quádruplo de” e a operação de multiplicação com números naturais, considerados conceitos adquiridos pelos alunos nos anos iniciais e que vemos confirmado nas respostas a esses, com 100% de acerto. Nesses ítens, pode-se também observar que, enquanto 8 estudantes apresentaram apenas a resposta, os esquemas de pensamento explicitados pelos demais fizeram uso tanto da multiplicação como da adição de parcelas iguais; além disso,10 dos 22 alunos, dentro dos esquemas por eles explicitados, sentiram a necessidade de expressar o cálculo por meio da “conta armada” (algoritmo), mesmo quando se tratava apenas de tabuada, como no caso de 7 x 3. Cabe ressaltar a resolução de 2 estudantes no item (b) que utilizaram a associatividade (7+7)+7, separando o cálculo e fazendo uso do algoritmo, evidenciando a mobilização do conceito de adição de mais de duas parcelas:

$$\begin{array}{r} 7 \\ +7 \\ \hline 14 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ +7 \\ \hline 21 \end{array}$$

Cabe também ressaltar a resolução de 2 estudantes no item (c) que mobilizaram o teorema em ação “o quádruplo de um número é o dobro do dobro deste número”, registrando

$$\begin{array}{r} 2 \\ +2 \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ +4 \\ \hline 8 \end{array}$$

Os 100% de acerto nos itens nos itens (a), (b) e (c) sugerem que os estudantes dominam os conceitos de dobro, triplo e quádruplo no universo dos números naturais.

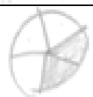
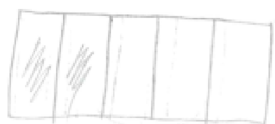
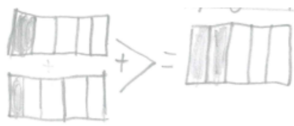
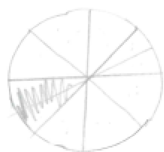
Nos itens (d), (e) e (f), que tratam da ampliação dos conceitos de dobro, triplo e quádruplo para o universo das frações, verificamos que, enquanto todos os que fizeram uso da adição chegaram à resposta corretamente, houve muita confusão por parte dos estudantes que tentaram fazer uso da multiplicação em seus esquemas de pensamento. Apenas 3 dos 22 estudantes que realizaram a atividade fizeram uso da multiplicação de forma explicita e correta. Assim, com a Atividade 2 foi possível peceber que não é imediato para os estudantes a ampliação dos conceitos de “o dobro de”, “o triplo de” e “o quádruplo de” para o universo das frações, principalmente se pretendem fazer uso da multiplicação, como os nomes “dobro”, “triplo” e “quádruplo” sugerem.

Como fechamento desta atividade, foi impresso o quadro com as respostas produzidas para cada item, sendo o mesmo então analisado na aula seguinte com os estudantes, focando-se em cada esquema produzido. Neste momento, foi introduzida a notação de multiplicação envolvendo frações, com base nas ideias trazidas pelos alunos.

As **Atividades 3** e **4** foram distribuídas em folhas separadas e deixadas como tema de casa. No encontro seguinte, constatou-se que 10 estudantes haviam respondido a Atividade 3 e que 15 estudantes responderam a Atividade 4**.** As resoluções foram recolhidas, digitalizadas e foram corrigidas em aula posterior. Importante destacar que as Atividades 1 e 2 ainda não haviam sido socializadas e corrigidas com os estudantes por ocasião da realização das Atividades 3 e 4, o que revelou-se prejudicial para uma avaliação da evolução dos estudantes.

O Quadro 4 apresenta os registros dos 10 alunos que realizaram o item (a) da Atividade 3.

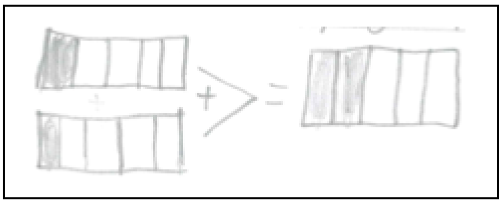
Quadro 4 – Respostas dos alunos no item (a) da Atividade 3

	Representação numérica	**Quantidade de alunos**	**Representação pictórica**	**Quantidade de alunos**
I	$\frac{2}{5}$	4		2
				2
II	$\frac{1}{5} \times 2 = 2$ Incompleta	1		1
III	$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$	1		1
IV	$\frac{2}{10}$ Incorreta	1		1
V	$\frac{1 \times 2}{5 \times 2} = \frac{2}{10}$ Incorreta	2		2
VI	$\frac{1}{5}$ $5 \times 2 = 3$ Incorreta	1		1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Das 10 resoluções, percebemos que 6 alunos desenvolveram o item (a) de forma satisfatória, cabendo destacar o sucesso na conversão dos registros de representação apresentados por esses alunos. Destes, 4 alunos (Linha I do Quadro 4) utilizaram diretamente o resultado $\frac{2}{5}$ como representação numérica para o dobro de $\frac{1}{5}$, não deixando claro seus esquemas de pensamento para obtenção do resultado; metade desses 4 alunos usou o retângulo para representação pictórica, a outra metade utilizou o disco. Já 1 aluno (Linha II do Quadro 4) explicitou o dobro com a operação de multiplicação, registrando $\frac{1}{5}$ x 2, utilizando o retângulo para representação pictórica; o outro aluno (Linha III do Quadro 4) utilizou em seu esquema a adição de frações $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ para representar numericamente o dobro de $\frac{1}{5}$, evidenciando na representação pictórica utilizada a mobilização do conceito "fração *da unidade*" em seu esquema (Figura 3):

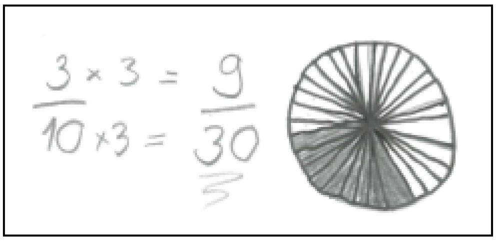
Figura 3 – Resposta de um aluno ao item (a) da Atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Percebemos em 3 alunos (Linha IV e V do Quadro 4) a confusão já detectada nas atividades anteriores entre a multiplicação de um número natural por uma fração e a equivalência de frações: ela fica evidenciada tanto na representação numérica quanto na representação pictórica (Figura 4):

Figura 4 – Resposta de um aluno ao item (a) da Atividade 3

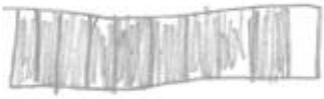
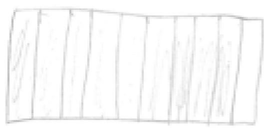
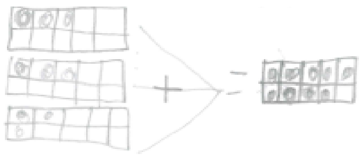
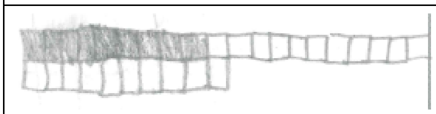


Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Finalmente, quanto ao aluno representado na Linha VI do Quadro 4, não foi possível inferir qual foi o esquema de pensamento evocado pelo respondente.

Do item (a) para o item (b) tem-se uma maior complexidade: de fração unitária, passou-se a trabalhar com fração não unitária. O Quadro 5 apresenta os registros dos 10 alunos que realizaram o item (b) da Atividade 3.

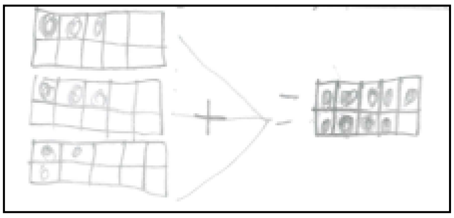
Quadro 5 – Respostas obtidas para o triplo de $\frac{3}{10}$ da unidade (item (b) da Atividade 3)

<table>
<tr><th></th><th>Representação numérica</th><th>Quantidade de alunos</th><th>Representação pictórica</th><th>Quantidade de alunos</th></tr>
<tr><td rowspan="2">I</td><td rowspan="2">$\frac{9}{10}$</td><td rowspan="2">3</td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>II</td><td>$\frac{3\times3=9}{10}$
Incompleta</td><td>1</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>III</td><td>$\frac{3}{10}\times3=\frac{9}{10}$
$\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{9}{10}$</td><td>1</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>IV</td><td>$\frac{6}{10}$
Incorreta</td><td>1</td><td>
Incorreta</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">V</td><td rowspan="2">$\frac{3\times3}{10\times3}=\frac{9}{30}$
3
Incorreta</td><td rowspan="2">2</td><td>
Incorreta</td><td>1</td></tr>
<tr><td>
Incorreta</td><td>1</td></tr>
<tr><td>VI</td><td>$\frac{6}{20}$
Incorreta</td><td>1</td><td>Não registrou</td><td>1</td></tr>
<tr><td>VII</td><td>Não respondeu</td><td>1</td><td>Não respondeu</td><td>1</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Na resolução do item (b) percebemos que os alunos seguiram o mesmo padrão de resoluções do item (a), então destacamos, na Figura 5, apenas o esquema apresentado por um aluno (Linha III do Quadro 5), o qual consideramos rico em detalhes e que mobiliza, de forma explicita, que o triplo pode ser associado tanto à multiplicação por 3 como à adição de três parcelas iguais, situação reforçada na representação pictórica. O estudante deixou claro que compreende a relação existente entre as operações de adição e multiplicação, especificamente, que a multiplicação de um número natural por uma fração pode ser interpretada como adições sucessivas dessa fração. Deixou claro também na representação pictórica utilizada a mobilização do conceito "fração *da unidade*":

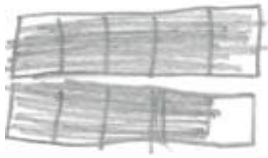
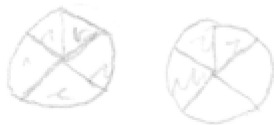
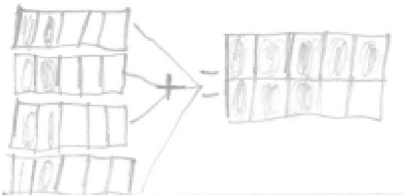
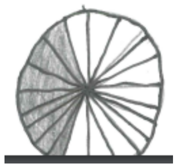
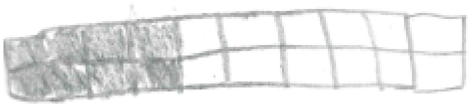
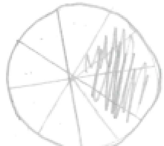
Figura 5 – Resposta de um aluno ao item (b) da Atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Do item (b) para o item (c), também temos uma mudança de complexidade em relação a representação pictórica, pois será necessário mobilizar o conceito de fração imprópria para representar o quádruplo de $\frac{2}{5}$ da unidade. No Quadro 6 encontram-se os registros dos alunos para este item. Percebemos aí uma dificuldade com a representação pictórica, talvez devida ao fato de o resultado ser uma fração imprópria.

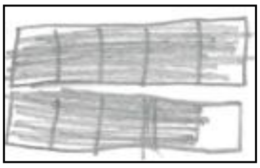
Quadro 6 – Respostas obtidas para o quádruplo de $\frac{2}{5}$ da unidade (item (c) da Atividade 3)

<table>
<tr><th></th><th>Representação numérica</th><th>Quantidade de alunos</th><th>Representação pictórica</th><th>Quantidade de alunos</th></tr>
<tr><td rowspan="2">I</td><td rowspan="2">$\frac{8}{5}$</td><td rowspan="2">3</td><td>
Incorreta</td><td>2</td></tr>
<tr><td>
Incorreta</td><td>1</td></tr>
<tr><td>II</td><td>$\frac{2}{5} \times 4 =$</td><td>1</td><td>Não respondeu</td><td>1</td></tr>
<tr><td>IIII</td><td>$\frac{2}{5} \times 4 = \frac{8}{5}$</td><td>1</td><td>
Insatisfatória</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">IV</td><td rowspan="2">$\frac{2 \times 4 = 8}{5 \times 4 = 20}$
Incorreta</td><td rowspan="2">2</td><td>
incorreta mas coerente</td><td>1</td></tr>
<tr><td>
incorreta mas coerente</td><td>1</td></tr>
<tr><td>V</td><td>$\frac{4}{10}$
Incorreta</td><td>1</td><td>
Incorreta</td><td>1</td></tr>
<tr><td>VI</td><td>$\frac{4}{5}$
Incorreta</td><td>1</td><td>
incorreta mas coerente</td><td>1</td></tr>
<tr><td>VII</td><td>Não respondeu</td><td>1</td><td>Não respondeu</td><td>1</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

No item (c), das 10 resoluções analisadas, um aluno não respondeu a questão (Linha VII do Quadro 6); 3 alunos (Linha I do Quadro 6) registraram diretamente $\frac{8}{5}$ para a representação numérica, não evidenciando as operações para obtenção do resultado; apesar de parecer terem uma ideia correta desta quantidade, a representação pictórica utilizada não foi precisa. De fato, na Linha I do Quadro 6, 2 desses alunos mobilizaram corretamente o conceito de unidade, percebendo a necessidade de utilizar duas unidades para representar o quádruplo de $\frac{2}{5}$ da unidade, porém, não registraram corretamente a quantidade de partes tomadas, representando equivocadamente a fração $\frac{9}{5}$ e não os $\frac{8}{5}$ (Figura 6); já outro aluno utilizou o disco, contudo, parece não ter mobilizado o conceito de equipartição.

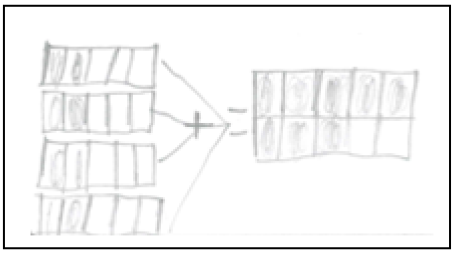
Figura 6 – Resposta de dois alunos ao item (c) da Atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Dois alunos (Linhas II e III do Quadro 6) mobilizaram em seus esquemas de pensamento o conceito de multiplicação de um número natural por uma fração, realizando de forma correta a conversão entre a representação escrita para a representação numérica, no entanto um deles (Linha II) não resolveu a expressão nem fez a representação pictórica, sugerindo uma dificuldade com frações impróprias, e o outro (Linha III) resolveu a expressão numérica registrada e parece ter mobilizado o conceito de "fração *da unidade*" na representação pictórica apresentada; porém, ao juntar, acabou "grudando" as duas unidades necessárias para a representação, ficando afinal alterada a unidade e tornando sua resposta insatisfatória (Figura 7):

Figura 7 – Resposta de um aluno ao item (c) da Atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Dois alunos (Linha IV do Quadro 6) mobilizaram, equivocadamente, o conceito de equivalência de frações na representação numérica, sendo no entanto coerentes na representação pictórica com o valor incorreto registrado na representação numérica. Sugerem assim não ter pensado no conceito de quádruplo, e sim diretamente no algoritmo (errado) para a determinação do quádruplo que registraram na coluna da representação numérica.

Não nos foi possível detectar qual foi o esquema de pensamento evocado na representação numérica pelos os alunos das Linhas V e VI do Quadro 6, e para representação pictórica é possível detectar que o estudante da Linha V não mobilizou o conceito de equipartição, apesar de sugerir uma coerência com a resposta encontrada na representação numérica. Já o estudante da Linha VI, além da coerência com a resposta encontrada na representação numérica, mobilizou o conceito de equipartição, além coerência com a resposta encontrada na representação numérica.

Destacamos que o item (d) não evidenciou mudanças de análise em relação ao item (c).

Avaliamos que 6 dos 10 estudantes conseguiram associar a ideia de que “o dobro de” ou “o triplo de”, pode ser ampliada para o universo das frações, contudo, quando convidados a fazer a transição na forma de representação proposta por Duval (no caso, representação numérica para representação pictórica), foi possível perceber o domínio de alguns e a falta de domínio de outros com a multiplicação de frações, principalmente quando o resultado era uma fração imprópria.

A partir da Atividade 3, foi possível constatar que os estudantes já reconhecem que existem diferentes estratégias de resolução de um problema.

A análise da **Atividade 4** foi baseada nas 15 folhas de tema de casa devolvidas pelos estudantes.

A Atividade 4 foi originalmente proposta sem solicitar justificativas. Dessa forma, ficou difícil identificar os esquemas de pensamento utilizados pelos estudantes o que só foi percebido por nós depois da aplicação da atividade. Por isso, no Anexo, a atividade já está incluindo a solicitação de justificativas. No Quadro 7 registramos as respostas dos alunos.

Quadro 7 – Respostas obtidas para representar a fração da capacidade da jarra (para item (a) da Atividade 4)

	Resposta	**Quantidade de alunos**
I	$\frac{2}{3}$ (2 terços)	1
II	dois terços	1
III	Dois terços $\frac{2}{3}$	1
IV	$\frac{2}{3}$	3
V	1.000 ML Incorreta	2
VI	$\frac{1}{3}$ Incorreta	1
VII	Não respondeu	6

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Com relação ao item (a), dos 15 alunos que entregaram o tema de casa à professora, um aluno que não respondeu (Linha VII do Quadro 7) e apenas 6 responderam corretamente (Linhas I, II, III e IV do Quadro 7), tendo sido apresentado como resposta o registro numérico e/ou com palavras, sem a explicitação de como chegaram a ela. Assim, ficou apenas sugerido que, no esquema de pensamento dos alunos, foi evocado o processo de dividir a jarra de água em 3 partes iguais, reconhecendo que $\frac{2}{3}$ estão preenchidos com água a partir da informação de que $\frac{1}{3}$ da jarra não contém água, percebendo que a jarra corresponde a três terços. Dois alunos (Linha V do Quadro 7) mobilizaram corretamente (porém antecipadamente) a conversão da capacidade de medida de 1L em 1.000 ml, mas não responderam ao que foi solicitado. Pareceu-nos que um aluno (Linha VI do Quadro 7) leu mal o enunciado e outro não respondeu o item (a).

No Quadro 8 encontram-se os registros das respostas dos estudantes para o item (b) da Atividade 4.

Quadro 8 – Respostas obtidas sobre quanto de água cabe em $\frac{1}{3}$ da jarra (item (b) da Atividade 4)

	Resposta	Quantidade de alunos
I	meio litro	2
II	500 ml	5
IIII	1 LiTRo Incorreta	2
IV	3 litro Incorreta	1
V	333Ml Incorreta	2
VI	Não respondeu	3

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Com relação ao item (b), 7 dos 15 alunos respondem corretamente que em $\frac{1}{3}$ de jarra cabem 500ml (Linha II do Quadro 8) ou meio litro (Linha I do Quadro 8); além do raciocínio correto, na Linha II percebemos envolvido o processo conversão de 1 litro de água em 1000ml. Três dos 15 estudantes não resolveu este item (Linha VI do Quadro 8) e, das respostas incorretas de cinco outros estudantes (Linhas III, IV e V do Quadro 8), não nos foi possível imaginar o esquema de pensamento que pode tê-los levado a elas.

Sete das 15 respostas dadas ao item (c) da Atividade 4, foram corretas, cabendo destacar a variedade dos registros, resultado dos conceitos variados que foram evocados na construção dos esquemas de pensamento desses 7 estudantes (Linhas I a V do Quadro 9): conversão de medida, composição da unidade, representação decimal de um número racional. Um estudante não respondeu o item (c).

Quadro 9 – Respostas obtidas sobre quanto de água cabe na jarra (item (c) da Atividade 4)

	Resposta	Quantidade de alunos
I	1,500	1
II	1 litro e meio	3
IIII	1L e 500ml	1
IV	$\frac{3}{3}$ (um litro + meio)	1
V	1,5 l	1
VI	$\frac{3}{2}$ Satisfatória	1
VII	UM LITRO Incorreta	3
VIII	3 LITRO Incorreta	3
IX	Não respondeu	1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A resposta dada na Linha VI foi considerada insatisfatória, pois, apesar de verdadeira. Treze dos 15 estudantes que entregaram a atividade perceberam que a resposta esperada deveria remeter a alguma unidade de capacidade, ainda que 6 delas (Linhas VII e VIII do Quadro 9) estivessem incorretas. Com relação a essas respostas incorretas, não nos foi possível imaginar o esquema de pensamento que pode ter levado os seus autores a elas.

Na Atividade 4, consideramos que 8 dos 15 estudantes conseguiram lidar com o processo inverso apontado por Duval, recuperando a unidade a partir de uma informação feita sobre uma fração não unitária.

A **Atividade 5** tem também por objetivo trabalhar fração, medida de capacidade e conversão de unidades de medida de capacidade. Reconhecemos que, da forma como a Atividade 5 foi originalmente proposta, sem solicitar justificativas, ficou difícil identificar os esquemas de pensamento utilizados pelos estudantes o que, infelizmente, só foi percebido por nós depois da aplicação da atividade. No Produto Final, a atividade já está incluindo a solicitação de justificativas.

As respostas obtidas para o item (a) estão registradas no Quadro 10.

Quadro 10 – Respostas obtidas para a fração da garrafa que ficaria cheia se derramássemos a lata de refrigerante na garrafa vazia (item (a) da Atividade 5)

	Resposta	Quantidade de alunos
I	$\frac{1}{4}$	9
II	$\frac{250}{1.000}$	7
III	a metade de $\frac{500}{1.000}$ que é $\frac{250}{1.000}$	1
IV	$\frac{250\ mL}{1\ LITRO}$ (insatisfatória)	1
V	FICARA CHEIA A DE 250 ML DE 1 LITRO (insatisfatória)	2
VI	$250 \div 1 = \frac{1}{250}$ (incorreta)	1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Analisando o Quadro 10, podemos perceber implicitamente alguns esquemas de pensamento. Nove dos 21 alunos que realizaram a atividade (Linha 1 do Quadro 10) recorreram implicitamente à conversão do litro em 1000 mililitros, considerando-o como unidade e mobilizando conceito de equipartição, dividindo em 4 partes iguais os 1000 mililitros, percebendo então que, ao preencher com 250 ml, tem-se 1 parte preenchida, resultando na fração $\frac{1}{4}$, mobilizando então o conceito de fração unitária. Já 7 estudantes (Linha II) parecem ter recorrido diretamente à conversão do litro em 1000 mililitros e considerando este volume dividido em 1000 partes iguais, tem-se 250 partes preenchidas, resultando na fração $\frac{250}{1000}$, mobilizando o conceito de fração não unitária.

É possível perceber que o estudante (Linha III do Quadro 10) antecipou o conceito de divisão de frações ao responder/reconhecer que "$\frac{250}{1000}$ é a metade de $\frac{500}{1000}$", pelo menos no que diz respeito a "calcular a metade de".

O estudante relatado na Linha IV do Quadro 10 não fez uso da conversão entre unidades de medida de capacidade, dando como resposta "$\frac{250ml}{1\ litro}$", parecendo ter mobilizado o conceito de razão (comparação) e não de fração da unidade. No entanto, pelo seu registro é possível perceber que o aluno tem consciência de que o litro representa a unidade e os 250 ml a parte da unidade que está sendo completada.

O estudante relatado na Linha V do Quadro 10 não deu a resposta na forma de fração, por isso foi considerada insatisfatória, não deixando transparecer o esquema de pensamento estabelecido para responder este item.

Com relação ao estudante relatado na Linha VI do Quadro 10, parece que a quantidade 250 ml foi considerada de forma equivocada como sendo a unidade e dele foi tomado o 1 litro, não deixando claro se sequer o estudante mobilizou o conceito de fração.

Quadro 11 – Respostas obtidas para a fração da garrafa que ficaria cheia se derramássemos duas latas de refrigerante na garrafa vazia (item (b) da Atividade 5)

	Respostas obtidas no item b)	**Quantidade de alunos**
I	$\frac{500}{1.000}$	4
II	$\begin{array}{r} ^{1}250 \\ \times 2 \\ \hline 500 \end{array}$ $\frac{500}{1000}$	1
III	$\frac{500}{1000}$ ou $\frac{1}{2}$	3
IV	$\frac{2}{4}$	5
V	$\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$	2
VI	$\frac{1}{2}$	2
VII	500 ML DE 1LITRO Insatisfatória	2
VIII	$\frac{500\text{ mL}}{1\text{ Litro}}$ ou $\frac{1}{2}$ Satisfatória	1
IX	$\frac{2}{1}$ Incorreta	1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

O Quadro 11 traz os registros dos alunos relativos ao item (b) da Atividade 5, e foi possível observar diversos esquemas de pensamento: 4 estudantes (Linha I) fizeram uso da conversão conversão do litro em 1000 mililitros e consideraram a unidade dividida em 1000 partes iguais. Usando a adição ou a multiplicação de naturais para calcular a capacidade das duas latinhas juntas, chegaram a 500ml, concluindo que 500 partes da unidade foram preenchidas, resultando na fração $\frac{500}{1000}$, tendo mobilizado, neste momento, o conceito de fração não unitária. O estudante da Linha II foi explícito evidenciando que a operação utilizada foi a de multiplicação de naturais e não a de adição, e 3 estudantes (Linha III) mobilizaram ainda o conceito de equivalência.

Nas respostas de 7 estudantes, relatados nas Linhas IV e V do Quadro 11, pode-se imaginar que tenham recorrerido à conversão do litro em 1000 mililitros, considerando-o a unidade, mobilizando conceito de equipartição ao dividir em 4 partes e ao preencher com 500 ml, tem-se 2 partes preenchidas, resultando na fração $\frac{2}{4}$, mobilizando o conceito de fração não unitária. Os 2 estudantes da Linha V mobilizaram ainda o conceito de equivalência ao explicitarem que a resposta poderia ser $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$.

Dois estudantes (Linha VI do Quadro 11) não deixaram claro seu esquema de pensamento, mas dão indicícios que fizeram uso do conceito de equivalência.

Os 2 estudantes da Linha VII e o estudante da Linha VIII mobilizaram a ideia de razão, enquanto mantiveram unidades de capacidade diferentes em seus esquemas de pensamento, no entanto o estudante da linha VIII de alguma forma que não ficou explicitada, concluiu que à razão 500 ml em 1 litro corresponde a fração $\frac{1}{2}$, mobilizando aí o conceito de equivalência. Consideramos que, para chegarem aos 500 ml, os 3 alunos tenham mobilizado o conceito de adição ou de multiplicação de números naturais (250 + 250 ou 2 x 250).

Quanto ao estudante mencionado na Linha IX, apresentou um registro equivocado, provavelmente por ainda não ter fixado bem a notação simbólica para fração; no entanto imaginamos que ele tenha mobilizado o conceito de fração.

Com a análise dos resultados obtidos na Atividade 5 foi possível perceber que todos os alunos utilizaram apenas a representação numérica para solução dos itens (a) e (b), dispensando a representação pictórica, o que consideramos positivo. No entanto, para um maior detalhamento dos conceitos e teoremas mobilizados em seus esquemas de pensamento, teria sido interessante que fosse solicitado aos alunos que justificassem suas respostas. No Produto Final, a atividade já está incluindo a solicitação de justificativas.

O Quadro 12 registra os esquemas de pensamento produzidos pelos 23 alunos que realizaram a **Atividade 6**, que trabalha mais uma vez a recuperação da unidade.

Quadro 12 – Respostas obtidas para a quantidade de água que havia na bombona (Atividade 6)

	Resolução	**Quantidade de alunos**
I	750 x 12 1500 + 750 9.000 (incompleta)	4
II	750 x12 9000 3/4 250 250 250 250 (incompleta)	2
III	750 x 12 1500 + 750* 9000 750 ML x12 = 9.000 (incompleta)	2
IV	3/4 750ml 750 x 12 1500 + 750* 9.000 havia 9.000 litros na bombona **(incorreta)**	1
V	750 x 12 1500 + 750* 9.000 Nove litros	2

VI	litros de água havia na bombona? $\frac{36}{4}$ $750 \times 12 = 1500 + 7500 = 9.000$ 9 l.	1
VII	750×12 1500 0850 1350 12 $\frac{3}{4}$ 1350 ML (incorreta)	1
VIII	$\frac{3}{4} \times 12 = \frac{36}{4}$ 9 LITROS $\frac{4}{4}$ = 1 litro = 8 = 12	2
IX	9l $\frac{36}{4}$	1
X	NOVE LITROS	1
XI	9000 ML ou 9L $\frac{3}{4} = 250 \times 4 = 1000$ ML 1L (insatisfatória)	1
XII	$\frac{3}{4}$ DE LITRO IGUAL A 9 MLS LITROS (insatisfatória)	1
XIII	$\frac{3}{4}$ de litro igual a ~~[illegible]~~ LITROS 9000 (incorreta)	1
XIV	$250 + 250 + 250 = 750$ $\frac{750}{1000}$ 250 250 250 250 $\frac{3}{4}$ (insatisfatória)	2
XV	$\frac{3}{4}$ DE LITROS (incorreta)	1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Ao analisarmos os esquemas de pensamento apresentados pelos 23 alunos, percebemos que 13 alunos utilizaram de forma explícita a multiplicação de 750 X 12 = 9000 (Linhas I a VII do Quadro 12), mobilizando a conversão de unidades de capacidade ($\frac{3}{4}$ de litro = 750 ml); porém, apenas os 2 alunos da Linha II registraram o esquema utilizado para tal conversão, por meio da representação pictórica, usando conceito de equipartição e equivalência (Figura 8):

Figura 8 – Esquema de pensamento de um aluno na Atividade 6

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Contudo, a pergunta requeria uma resposta em litros; verificamos que desses 13 alunos, apenas os 3 alunos das Linhas V e VI converteram os 9000 ml em 9 litros, por isso as respostas das Linhas I a III foram consideradas incompletas.

Três alunos (Linhas VIII e IX) fizeram uso da multiplicação de número natural por fração em seus esquemas de pensamento para obter a capacidade da bombona, registrando $\frac{3}{4}$ x 12 (Linha VIII) ou diretamente $\frac{36}{4}$ (Linha IX), mas apenas 2 alunos da Linha VIII deixam evidente o reconhecimento de que a cada $\frac{4}{4}$ temos um litro.

O aluno relatado na Linha X apenas deu a resposta (correta), sem sugerir o esquema de pensamento que utilizou para obter o resultado; o aluno relatado na Linha XI expõs uma sequência incorreta de igualdades, a saber, "$\frac{3}{4}$ = 250 x 4 = 1000 ml 1L" que não evidenciam o esquema de pensamento utilizado para chegar à resposta "9000 ml ou 9 litros", anunciada separadamente, deixando evidente apenas ter mobilizado a conversão de unidades de capacidade. O aluno relatado na Linha XII reconheceu que deveria usar os $\frac{3}{4}$, contudo parece não saber o que fazer com tal informação.

Consideramos que 22 dos 23 estudantes reconheceram que a Atividade 6 consistia em identificar a capacidade da bombona, ou seja, teriam que recuperar a unidade, entretanto, destes, apenas 13 conseguiram de fato recuperar a unidade e expressá-la em litros. Reconhecemos que a conversão de medida foi um fator de dificuldade.

No Quadro 13 tem-se os registros dos problemas elaborados pelos estudantes para a **Atividade 7**, momento de fechamento do caso de multiplicação de fração por número natural.

Quadro 13 – Problemas criados pelos alunos como fechamento do caso de multiplicação de um número natural por uma fração (item (i) da Atividade 7)

	Expressão	**Problema desenvolvido pelos grupos**
I	Triplo de $\frac{2}{5}$	"João estava na escola então a professora dele perguntou quanto é o triplo de $\frac{2}{5}$?"
II	Dobro de $\frac{3}{4}$	"Compramos um refri e uma de nós tomou o dobro de $\frac{3}{4}$. Quanto ela tomou?" (situação impossível)
III	Quintuplo de $\frac{3}{7}$	"João tinha $\frac{3}{4}$ da coleção de carrinho e Paulo o quíntuplo de $\frac{3}{7}$. Quem tem mais carrinhos?" (situação impossível)
IV	Quadruplo de $\frac{1}{5}$	"Ana Julia convidou seu irmão mais velho para comer uma pizza de cuscuz. Seu irmão comeu $\frac{1}{5}$ da pizza e Ana Julia o quádruplo dessa quantidade. Quanto eles comeram juntos?"
V	Triplo de $\frac{1}{2}$	"Daniel tomou meio litro de água de manhã, ao meio dia mais meio litro, a noite novamente tomou meio litro. Quantos litros ele tomou no dia?" (situação possível; satisfatório)
VI	Dobro de $\frac{1}{3}$	"João tinha 5 balas e deu o dobro e ficou com o dobro" (incorreto)
VII	Dobro de $\frac{1}{3}$	"Mariana está de aniversário e sua mãe preparou um bolo, portanto só veio sua amiga Maju então sua mãe dividiu o bolo em três partes, pois tinha 3 pessoas, mas ela comeu 1 pedaço e depois chegou mais 3 pessoas ou seja o dobro. Em quantos pedaços ela terá que dividir o bolo?" (insatisfatório)
VIII	Quadruplo de $\frac{2}{5}$	"Hoje fui na pizzaria e comi $\frac{8}{5}$ de pizza e meu irmão não comeu nada e eu comi tudo." ; "$\frac{2}{5}$ da comida que eu comi no almoço e de noite $\frac{8}{5}$." (incoerente com o que foi solicitado)

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Percebe-se que os problemas das Linhas I e II trabalham exclusivamente a multiplicação de número natural por fração, no entanto o da Linha II revela-se uma situação impossível porque ela não comporta uma fração imprópria como resposta. O problema da Linha III exige, além da multiplicação de número natural por fração, a comparação entre frações, no entanto, apesar de factível matematicamente (a comparação), se consideramos que a coleção de carrinhos é fixada, a situação revela-se impossível: Paulo não pode ter mais do que a coleção toda de carrinhos. Já o problema da Linha IV exige, além da multiplicação de número natural por fração, a adição de frações em uma situação real. O problema da Linha V não fez uso da expressão requerida, no entanto fez uso do seu conceito, por isso foi considerado satisfatório.

Os problemas das Linhas VI a VIII, não condizem com a expressão requerida na atividade ou não deixam o problema claro a ponto de ser entendido e resolvido pelo outro colega. De fato, o problema da Linha VI foi considerado incorreto, porque a situação trazida pelo grupo evidencia que seus integrantes não dominam a ideia de dobro, mesmo no universo dos números naturais. O problema da Linha VII foi considerado insatisfatório não pelas ideias matemáticas ali envolvidas, mas pela redação incompreensível. Além disso, a expressão “dobro” foi utilizada para o número de pessoas, e não para a fração $\frac{1}{3}$, como requerido.

O grupo da Linha VIII, propôs dois problemas, que consideramos insatisfatórios, pois não contempla a multiplicação de número natural por fração, envolvendo apenas o seu resultado, o que sugere que seus integrantes sabem determinar o quádruplo de $\frac{2}{5}$.

Como os grupos que criaram as questões não tinham a mesma quantidade de componentes, os problemas propostos foram afinal distribuídos para cada aluno individualmente, de forma aleatória, com o cuidado que cada aluno recebesse um problema de outro grupo. Cada aluno foi orientado a registrar alguma observação caso não conseguisse solucionar a questão que lhe coube. As resoluções estão registradas no Quadro 14.

Quadro 14 – Resoluções e observações dos problemas criados pelos próprios alunos no item (ii) da Atividade 7)

	Expressão	Problema desenvolvido pelos grupos	Resolução/Observações
I	Triplo de $\frac{2}{5}$	"João estava na escola então a professora dele perguntou quanto é o triplo de $\frac{2}{5}$?"	$\frac{6}{5}$
II	Quintuplo de $\frac{3}{7}$	"João tinha $\frac{3}{4}$ da coleção de carrinho e Paulo o quíntuplo de $\frac{3}{7}$. Quem tem mais carrinhos?" (situação irreal)	Paulo tem mais PAULO PAULO JOSE $\frac{3}{7}$ $5x = \frac{15}{7}$ $\frac{3}{4}$
III	Quadruplo de $\frac{1}{5}$	"Ana Julia convidou seu irmão mais velho para comer uma pizza de cuscuz. Seu irmão comeu $\frac{1}{5}$ da pizza e Ana Julia o quádruplo dessa quantidade. Quanto eles comeram juntos?"	$\frac{1 \times 4 = 4}{5\ 5 = 5}$ ELES COMERÃO JUNTOS $\frac{4}{5}$
IV	Dobro de $\frac{3}{4}$	"Compramos um refri e uma de nós tomou o dobro de $\frac{3}{4}$. Quanto ela tomou?" (situação irreal)	$\frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{4}$ $\frac{6}{4}$ ELA TOMOU $\frac{6}{4}$ $\frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$
V	Triplo de $\frac{1}{2}$	"Daniel tomou meio litro de água de manhã, ao meio dia mais meio litro, a noite novamente tomou meio litro. Quantos litros ele tomou no dia?" (satisfatório)	1 l e meio
VI	Dobro de $\frac{1}{3}$	"João tinha 5 balas e deu o dobro e ficou com o dobro" (incorreto)	Não tem como resolver
VII	Dobro de $\frac{1}{3}$	"Mariana está de aniversário e sua mãe preparou um bolo, por tanto só veio sua amiga Maju então sua mãe dividiu o bolo em três partes, pois tinha 3 pessoas, mas ela comeu 1 pedaço e depois chegou mais 3 pessoas ou seja o dobro. Em quantos pedaços ela terá que dividir o bolo?" (insatisfatório)	2 para cada um Em quatro
VIII	Quádruplo de $\frac{2}{5}$	"Hoje fui na pizzaria e comi $\frac{8}{5}$ de pizza e meu irmão não comeu nada e eu comi tudo. $\frac{2}{5}$ da comida que eu comi no almoço e de noite $\frac{8}{5}$" (incoerente com o que foi solicitado)	Sem resposta e não quiseram justificar

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Com base nas resoluções do Quadro 14 destacamos que, na Linha I, o aluno parece ter mobilizado corretamente a multiplicação de número natural por fração, no entanto sem explicitar se usou a multiplicação de números naturais ou a adição de frações iguais; os três estudantes relatados na Linha II responderam a questão corretamente em termos de comparação de frações, mas o fato de encontrarem uma fração imprópria dentro da situação considerada no problema não causou estranheza a nenhum deles; apenas 1 dos 3 alunos deixou explicito seu esquema de pensamento, mobilizando corretamente a multiplicação de número natural por fração, apesar de o registro não estar adequado; o estudante na Linha III mobilizou corretamente a multiplicação de número natural por fração, porém não fica claro se ele mobilizou a adição de frações e errou o cálculo ou se interpretou mal a pergunta, respondendo só o que o irmão comeu.

O fato de estar envolvida uma fração imprópria no problema da Linha IV parece não ter causado estranheza aos 4 estudantes que o tentaram resolver, o que nos permite questionar se os mesmos chegaram a mobilizaram o conceito de fração imprópria (ou seja, a comparação com a unidade); três mobilizaram corretamente a multiplicação de número natural por fração, e o quarto mobilizou, equivocadamente, o conceito de frações equivalentes.

Apesar de a resposta na Linha V estar correta, não fica claro se o estudante mobilizou a multiplicação de número natural por fração ou a adição (de parcelas iguais); na Linha VI, a partir da resposta do estudante, fica sugerido que ele percebeu a incoerência do enunciado; quanto aos 2 alunos que responderam o problema da Linha VII, parece-nos que eles não perceberam a falta de consistência do problema e tentaram responder alguma coisa. Na Linha VIII, não fica evidente se o aluno não respondeu o problema porque viu que o enunciado de fato não é coerente, pois não apresentaram justificativa ou parecer sobre a questão.

Apesar de quatro atividades das seis propostas até aqui terem sido contextualizadas, pareceu-nos que os estudantes tiveram alguma dificuldade em encontrar situações nas quais as expressões recebidas na Atividade 7 fizessem algum sentido: dos 8 problemas elaborados pelos estudantes, 2 remetem a situações impossíveis. Avaliamos que os estudantes ainda estão em processo de saber elaborar problemas envolvendo multiplicação de um número natural por fração. Neste momento, isso não nos causou estranheza, uma vez que não é habitual que os estudantes sejam convidados a criar suas próprias situações. No entanto, destacamos que atividades com essas características são fundamentais para consolidar a aprendizagem de qualquer conceito. Assim, concordamos com a BNCC, quando este documento reitera em suas orientações Habilidades do tipo “Resolver e elaborar problemas de...”.

Com relação às 7 primeiras atividades propostas, relativas a multiplicação de um número natural por uma fração, com base na análise das resoluções dos alunos, reconhecemos uma evolução dos estudantes, pois alguns conseguiram equacionar e resolver problemas que envolvem multiplicação de número natural por fração, compreenderam a relação existente entre as operações de adição e multiplicação. Destacamos que as trocas entre os pares ajudou-os a perceber que existem diferentes estratégias de resolução de um problema.

O próximo conjunto de atividades (Preparando a Multiplicação de uma fração própria por um número natural) envolve grandezas discretas, procurando contribuir para os primeiros passos na ampliação da multiplicação de números naturais para multiplicação de fração por número natural.

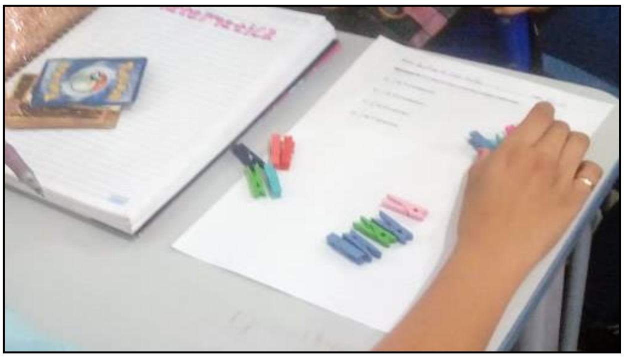
Para o desenvolvimento da **Atividade 8**, os 20 alunos que realizaram a atividade utilizaram material concreto. Alertamos que a ordem originalmente proposta para esta atividade foi “Em cada um dos itens a seguir, determine:”. No entanto, após a análise das resoluções, reconhecemos a importância de solicitar-se alguma justificativa para as respostas dadas, por isso o enunciado da atividade foi alterado para “Em cada um dos conjuntos a seguir determine, fazendo algum registro que explique sua resposta:”.

Para iniciar a atividade, os estudantes precisaram ser relembrados de raciocínios feitos durante o trabalho inicial de frações (por exemplo, a Atividade 10 de Souza (2019, ANEXO C). Desenvolveu-se o seguinte diálogo:

> Professora: Pensem comigo... *Vocês estão com os prendedores aí?*
> Alunos: *Sim!*
> Professora: *Quando eu pego uma tirinha, um retângulo, e vou representar terços, o que eu faço com ele?*
> Alunos: *Divido em três.*
> Professora: *Muito bem! A tua unidade não é um retângulo, não é um objeto inteiro, ela é 15 prendedores. Quando tu pega 15 prendedores e pede terços, o que tu vai fazer com eles?*
> Alunos: *Divide por 3.*

A partir daí, os alunos reconheceram como unidade a quantidade de objetos de cada item, sendo capazes de lidar com fração de grandezas discretas. Cabe ressaltar que, em seus registros, os alunos não explicitaram as operações que foram realizando. No entanto, na observação da aula ficou claro que repartiram os objetos, por exemplo, em 3 partes quando se pedia terços (Figura 9), fazendo uso do conceito de fração unitária, e que se utilizavam da adição ou da multiplicação para determinar o resultado correspondente à quantidade de terços que se queria, fazendo uso portanto do conceito de fração não unitária.

Figura 9 – Registro de um estudante repartindo objetos em 3 partes quando se pedia terços



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Todos os alunos responderam corretamente os itens (a) e (b) da Atividade 8 (Quadro 15) e creditamos o êxito à oportunidade de manipular material concreto, o que consideramos ter sido determinante para o desenvolvimento da atividade.

Quadro 15 – Respostas dos alunos para $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ de 15 prendedores (itens (a) e (b) da Atividade 8, respectivamente)

Item	Resposta	Quantidade de alunos
(a)	5	20
(b)	10	20

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Apenas um aluno evidenciou em seu registro o esquema de pensamento utilizado para desenvolver os itens (a) e (b), como podemos ver na Figura 10: mesmo fazendo uso do material concreto (grandeza discreta), o aluno considerou os 15 prendedores como sendo a unidade, representando-a de forma contínua e mobilizando, no item (a), o conceito de fração unitária e no item (b) o conceito de fração não unitária, sem deixar, no entanto claro se aí mobilizou a adição ou a multiplicação de números naturais.

Figura 10 – Resposta de um aluno aos itens (a) e (b) da Atividade 8, evidenciando parte de seu esquema de pensamento

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

As respostas aos itens (c) e (d) da Atividade 8 estão registradas nos Quadros 16 e 17, respectivamente.

Quadro 16 – Respostas dos alunos para $\frac{3}{10}$ de 20 cartinhas (item (c) da Atividade 8)

Resposta	**Quantidade de alunos**
6	12
9	4
2	4

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Doze dos 20 alunos que realizaram a atividade responderam corretamente o iten (c), porém apenas podemos imaginar que foi mobilizado o conceito de fração unitária e não unitária; sobre a resposta “9” dada por 4 alunos, imaginamos que tenha sido algum erro de cálculo ou a não mobilização correta do conceito de fração não unitária, pois durante a realização da tarefa foi possível observar esses estudantes realizaram a divisão das 20 cartinhas em 10 grupos com duas cartinhas cada (Figura 11), mobilizando corretamente o conceito da fração unitária; quanto à resposta 2 dada por 4 alunos imaginamos que estes apenas representaram $\frac{1}{10}$ e não os $\frac{3}{10}$ como solicitado, ou seja, em seus esquemas de pensamento, fizeram uso apenas do conceito de fração unitária.

Figura 11 – Estratégia de um estudante repartindo objetos em 10 grupos quando se pedia décimos

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Do Quadro 17 percebe-se que 8 alunos responderam o item (d) corretamente. Aqui pode-se apenas imaginar que, em seus registros, os estudantes fizeram uso do conceito de unidade, de fração unitária e de fração não unitária.

Quadro 17 – Respostas dos alunos para $\frac{4}{9}$ de 27 tampinhas (item (d) da Atividade 8)

Resposta	**Quantidade de alunos**
12	8
3	1
13	4
6	6
36	1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Destacamos que a resposta “3” dada por 1 aluno parece ser apenas a representação de $\frac{1}{9}$ de 27, neste caso o estudante teria mobilizado apenas o conceito de unidade e de fração unitária. Quanto aos 6 alunos que responderam “6”, aos 4 alunos responderam que “13” e ao aluno que respondeu “36”, não conseguimos imaginar o esquema de pensamento por eles mobilizado. Chamou nossa atenção a resposta “36”, um resultado maior que a própria unidade formada por 27 para tampinhas, evidenciando que um valor maior do que a quantidade original não incomodou esse estudante. De fato, os alunos parecem em geral só se preocupar com estimativas quando estimulados.

Consideramos que 19 dos 20 estudantes que reallizaram a Atividade 8 compreenderam que a unidade nesta atividade diz respeito a uma grandeza discreta, o que contribuiu os primeiros passos na ampliação da multiplicação de número natural para, no caso, multiplicação de fração por número natural), apesar de nem todos terem sucesso nas resoluções.

Na resolução da **Atividade 9** novamente os alunos não registraram seus esquemas de pensamento, apenas as respostas, por isso foi incluído no enunciado a solicitação de algum registro que mostrasse como chegaram à resposta (ver Apêndice). O Quadro 18 traz as respostas dos 19 alunos que realizaram o item (i) dessa atividade.

Quadro 18 – Respostas dos alunos para pintar frações de 30 Cd`s (item (i) da Atividade 9)

	Fração a ser pintada	**Resposta**	**Quantidade de alunos**
I	$\frac{1}{6}$ de azul	5 (correta)	17
		1	1
		6	1
II	$\frac{2}{5}$ de vermelho	12 (correta)	13
		6	3
		2	2
		4	1
III	$\frac{3}{10}$ de verde	9 (correta)	9
		3	9
		7	1
IV	Restante de Amarelo	4 (correta)	7
		9	1
		8	1
		10	7
		20	1
		24	1
		14	1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Analisando as respostas obtidas no item (i) destacamos que os 17 alunos na Linha I do Quadro 18 que responderam corretamente a questão tenham mobilizado o conceito de fração unitária, enquanto que para os outros dois alunos registrados nessa linha não nos foi possível imaginar como chegaram aos resultados. Já na Linha II, 13 alunos responderam de forma correta, sendo requerido dos alunos a mobilização do conceito de fração não unitária, além do conceito de fração unitária; desta forma, tivemos 3 alunos que responderam 6, provavelmente mobilizando apenas o conceito de fração unitária; nos foi possível imaginar o esquema de pensamento mobilizado pelos outros 3 alunos que deram respostas iguais 2 e 4. Na Linha III os registros sugerem que 18 alunos conseguiram mobilizar o conceito de fração unitária, contudo apenas 9 alunos continuaram o raciocínio mobilizando o conceito de fração não unitária, chegando à resposta correta; apenas um aluno deu 7 como resposta, não nos sendo possível imaginar em quais conceitos e teoremas apoiou-se para encontrar este resultado. Na Linha IV, apesar de depender das repostas anteriores, pode-se constatar 7 respostas corretas, neste momento sendo necessário mobilizar-se a adição e a subtração de naturais. Na Figura 12, o esquema de pensamento de um aluno evidencia a preocupação com a coerência de sua resposta na Linha IV, mobilizando o conceito de adição de naturais, apesar de algumas respostas aos itens anteriores não estarem corretas. Percebe-se aqui que esse estudante compreendeu bem o problema, mas ainda não domina perfeitamente o conceito de fração de uma quantidade discreta. Cabe ressaltar que 5 outros estudantes não tiveram a mesma preocupação, não chegando ao total de 30 CD´s pintados.

Figura 12 – Resposta de um aluno preocupado com a coerência de suas respostas ao item (i) da Atividade 9

Cor	Quantidade
Azuis	5
Vermelhas	2
Verdes	3
Amarelas	20
	30

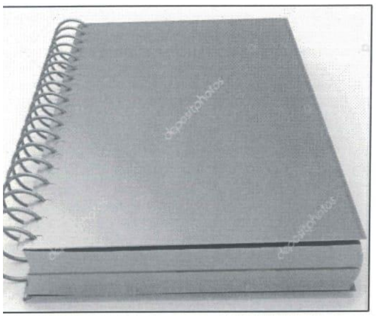
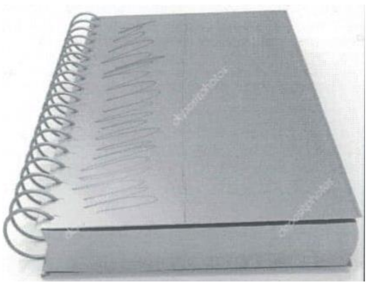
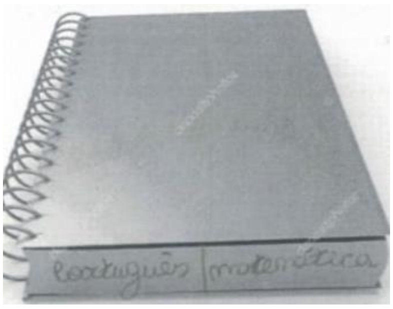
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A digitalização do material relativo a este dia de trabalho saiu cortada, impossibilitando a análise do item (ii).

Com a Atividade 9, avaliamos, com base apenas no item (i), que uma parte dos alunos consegue já aplicar o conceito de fração de uma quantidade discreta, principalmente se esta fração for unitária. Contudo, ainda existem alunos que estão no processo de compreensão do significado de determinar uma fração não unitária (ainda que própria) de uma grandeza discreta; ainda, uma parcela pequena de estudantes que precisa reforçar o conceito de fração de uma quantidade discreta, envolvido nessa atividade.

Na **Atividade 10**, apesar de tratar-se de uma questão considerada do cotidiano dos estudantes, 6 dos 19 alunos que realizaram a atividade não responderam o item (a). No entanto, cabe ressaltar a diversidade das representações utilizadas pelos demais alunos (Quadro 19).

Quadro 19 – Respostas dos alunos registrando a divisão de um caderno as disciplinas de Matemática e Português (item (a) da Atividade 10)

Representação pictórica	Descrição	Quantidade de alunos
	Retângulo horizontal usando a imagem lateral do caderno	9
	Fez desenho vertical sem usar o caderno de referência	2
	Fez desenho vertical usando a imagem da tampa do caderno de referência	1
	Retângulo vertical usando a imagem lateral do caderno	1
	Não respondeu	6

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A partir do Quadro 19, percebe-se que 9 alunos responderam a questão de forma satisfatória e natural para o contexto, conseguindo vivenciar o que fariam em uma situação real. No entanto, os demais registros parecem evidenciar que os alunos preocuparam-se apenas em representar a fração $\frac{1}{2}$, sem levar em consideração a situação apresentada, pois dificilmente o estudante vai dividir cada folha na vertical, e na coluna da esquerda escrever português e na coluna da direita escrever matemática.

Quadro 20 – Respostas dos alunos para a fração do caderno que destinada a Português (item (b) da Atividade 10)

	Resposta	Quantidade de alunos
I	$\frac{1}{2}$	11
II	$\frac{100}{200}$	5
III	$\frac{100}{200}$ ou $\frac{1}{2}$	1
IV	$\frac{2}{2}$ (incorreta)	1
V	$\frac{100}{100}$ (incorreta)	1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

As respostas ao item (b) da Atividade 10 estão registradas no Quadro 20. Nele é possível constatar que dos 17 alunos que responderam corretamente (Linhas I, II e III); os 11 estudantes registrados na Linha I, ao responderem que a fração do caderno que ficou para Português é $\frac{1}{2}$ perceberam que distribuir a mesma quantidade de folhas entre as duas disciplinas é a mesma coisa que dividir ao meio a quantidade de folhas, desta forma, provavelmente mobilizaram apenas o conceito de metade e o conceito de fração unitária; já os 6 estudantes relatados nas Linhas II e III consideraram a unidade como as 200 páginas, mobilizando o conceito de fração não unitária; além disso, o aluno relatado na Linha III mobilizou o conceito de equivalência de frações. Para as respostas registradas nas Linhas IV e V não nos foi possível imaginar o esquema de pensamento utilizado.

As respostas ao item (c) da Atividade 10 são apresentadas no Quadro 21.

Quadro 21 – Respostas dos alunos para a fração e o número de páginas do caderno correspondentes a Matemática (item (c) da Atividade 10)

	Resposta	Quantidade de alunos
I	$\frac{1}{2}$ de 200 páginas equivale a 100 páginas	16
II	$\frac{1}{2}$ de 200 páginas equivale a $\frac{1}{2}$ das páginas (satisfatória)	2
III	$\frac{100}{100}$ de 200 páginas equivale a 100 páginas (insatisfatória)	1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A Linha I do Quadro 21 sugere que os 16 estudantes mobilizaram corretamente o conceito de fração de grandeza discreta (pelo menos no caso da fração unitária $\frac{1}{2}$). Consideramos satisfatória a resposta dada na Linha II porque a maioria dos estudantes interpretou conforme o esperado a segunda parte da pergunta, respondendo sobre o número de páginas. Percebe-se também que o aluno da Linha III não conseguiu identificar a fração que corresponde a Matemática, por isso acreditamos que a segunda resposta veio da mobilização do conceito de metade de 200 (já trabalhada em anos anteriores), e não da ideia de fraçã a saber, “$\frac{100}{100}$ de 200 páginas equivale a 100 páginas”.

Infelizmente, novamente por problemas com a digitalização, não nos foi possível analisar os itens (d) e (e).

O item (f) da Atividade 10 tinha como um dos objetivos perceber que não é possível dividir as 200 páginas igualmente entre três disciplinas. Das respostas dos 17 alunos presentes registradas no Quadro 22 é possível constatar que um número significativo de alunos (10) respondeu corretamente a questão, afirmando que não é possível dividir igualmente, sendo aí mobilizada a divisão entre números naturais. As justificativas utilizadas sugerem que todos mobilizaram a ideia de divisão euclidiana, porém nem todos usaram palavras adequadas, por exemplo, “porque não dá para dividir 200 por 3”. Um dos estudantes até sugeriu uma saída para a situação concreta: “Não. Duas matérias vão ficar com 66 páginas e a outra com 68”, antecipando a resposta ao item seguinte, mas evidenciando aí que mobilizou bem o conceito e o teorema em ação relativo à divisão euclidiana. Dos 5 estudantes que responderam que dava para dividir (igualmente), um evidenciou não apropriar-se da situação em jogo, respondendo “Ele irá conseguir $\frac{1}{3}$ para cada disciplina”, antecipando um teorema sobre divisão no novo universo numérico: $1 : 3 = \frac{1}{3}$. Os demais sugerem, com suas justificativas, que não associam divisão ou equipartição à expressão “distribuir igualmente” utilizada no enunciado. Um estudante mobilizou a multiplicação de naturais, registrando 200 x 3 = 600, provavelmente ficando sem saber o que fazer com este cálculo.

Quadro 22 – Respostas e justificativa dos alunos se é possível distribuir 200 páginas igualmente entre 3 disciplinas (item (f) da Atividade 10)

Resposta	Quantidade de alunos	Justificativa	Quantidade de alunos
Não	10	Não, ele não vai conseguir dividir igualmente	1
		Não, já que 200 não é divisível por três	1
		Não, porque 200 não é divisível por 3	1
		Não, porque não dá para dividir 200 por 3	2
		Não, porque não dá para dividir igualmente 200 por 3	1
		Não, porque não irá ficar igual e porque não tem como 200 ser dividido por 3	1
		Não. Duas matérias vão ficar com 66 páginas e a outra com 68.	1
		Não. Porque sobra 2.	1
		Não, porque a conta não dá exata, a conta 200:3	1
Sim	5	Sim, 100 para cada matéria	1
		Sim, 2 matérias com 50 e um com cem	1
		Sim. Acho que sim, pois sobrou $\frac{3}{4}$	1
		Sim. Ele irá conseguir $\frac{1}{3}$ para cada disciplina	1
		Sim. Porque dá 201	1
Não posicionou-se	1	200 x 3 = 600	1
Não respondeu	1	-	1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Cabe salientar que, apesar de não constituir uma expectativa para nós, nenhum estudante respondeu “66 páginas e dois terços” como resultado da divisão de 200 por 3, o que seria plausível, uma vez que um novo universo numérico está sendo explorado. No entanto, estamos cientes de que um tal estudante estaria antecipando uma discussão sobre a operação de divisão no universo das frações, em um contexto onde afinal, a grandeza é discreta.

O item (g) da Atividade 10 tem resposta aberta, pretendia-se apenas avaliar a coerência dos estudantes em suas respostas fazendo uso de frações. Elas estão registradas no Quadro 23.

Quadro 23 – Sugestões dos alunos sobre a distribuição das 200 páginas entre 3 disciplinas (item (g) da Atividade 10)

	Resposta	**Quantidade de alunos**
I	História $\frac{100}{200}$, Geografia $\frac{50}{200}$ e Ciências $\frac{50}{200}$	1
II	Geografia $\frac{50}{100}$ e História $\frac{50}{100}$ e Ciências $\frac{100}{200}$	1
III	$\frac{100}{200}$ cem para cada (incorreta)	1
IV	$\frac{100}{200}$ ou $\frac{1}{2}$ (incorreta)	1
V	$\frac{1}{3}$ (insatisfatória)	4
VI	$\frac{1}{4}$ (incorreta)	1
VII	Ciências e história com 70 páginas e geografia com 60 (insatisfatória)	1
VIII	História 50, Geografia 50 e Ciências 100 (insatisfatória)	1
IX	Ciências 50, Geografia 50, História 100 (insatisfatória)	1
X	68 ciências, 66 história e 66 geografia (insatisfatória)	1
XI	Eu faria (incorreta)	1
XII	Não respondeu	3

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Apenas 9 estudantes responderam fazendo uso de frações, no entanto apenas um respondeu corretamente (Linha I do Quadro 23), deixando sugerido que foram mobilizadas a representação da unidade pela fração $\frac{200}{200}$ e a adição de frações para decompor tal fração como uma adição de três frações, a saber, "História $\frac{100}{200}$, Geografia $\frac{50}{200}$ e Ciências $\frac{50}{200}$". Já o estudante da Linha II parece em um primeiro momento ter mobilizado o conceito de unidade e de metade, considerando as 200 páginas como unidade e destinando a metade (100 páginas) para Ciências, e, a seguir, logo após, considerou as 100 páginas restante como sendo a nova unidade que foi distribuída entre as disciplinas de Geografia e História. Também os estudantes registrados nas Linhas III e IV parecem ter mobilizado a representação da unidade pela fração $\frac{200}{200}$, mas não mobilizaram a decomposição dessa fração corretamente. No entanto, o estudante da Linha IV certamente mobilizou corretamente o conceito de fração equivalente.

O registro da Linha V do Quadro 23, relativo a 4 estudantes, foi considerado insatisfatório, pois parece que os mesmos não levaram em conta a situação prática proposta, isto é, o número de páginas. E quanto ao estudante relatado na Linha VI, não conseguimos imaginar por que o denominador da fração apresentada como resposta é igual a 4.

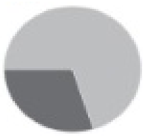
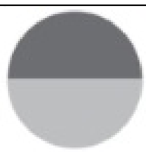
Quatro estudantes deram respostas coerentes, porém sem fazer uso de frações (Linhas VII, VIII, IX e X do Quadro 23), e outros 4 estudantes (Linhas XI e XII) não responderam a questão.

Por problemas na digitalização não foi possível analisar os demais itens da Atividade 10.

Consideramos que a Atividade 10 proporcionou aos alunos a conscientização de que, em uma situação habitual, calcular “fração de” nem sempre é possível.

No Quadro 24 temos os registros dos 15 alunos que responderam o item (a) da **Atividade 11.**

Quadro 24 – Respostas dos alunos sobre uma representação para $\frac{2}{5}$ do bolo (item (a) da Atividade 11)

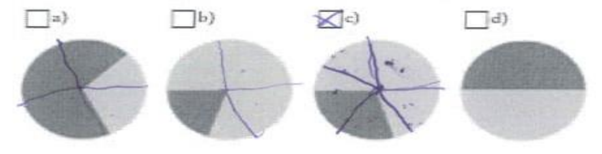
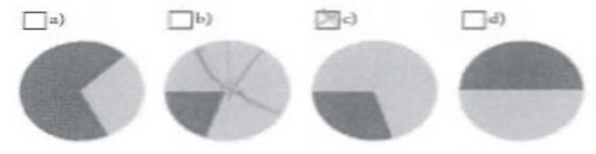
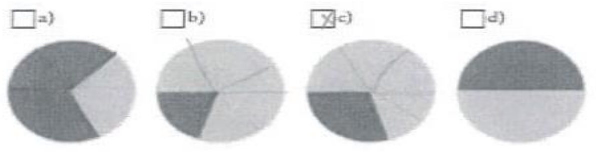
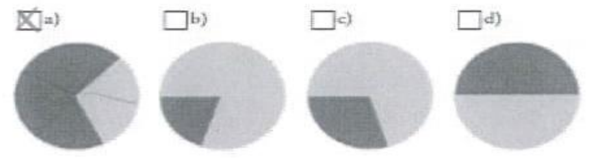
Opções	**Quantidade de alunos**
a) 	2
b) 	1
c) 	9
d) 	3

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Nove dos 15 alunos, acertaram na escolha do gráfico que melhor representava os $\frac{2}{5}$ comido do bolo (item (c)); acreditamos que os dois alunos que escolheram a alternativa (a) podem ter se equivocado com os tons de cinza, e que portanto mobilizaram corretamente o conceito de fração não unitária. Sobre os 3 estudantes que escolheram a opção (d) ficou evidente que os mesmos não mobilizaram o conceito de frações equivalentes.

No Quadro 25 destacamos 4 exemplos de resoluções. Pode-se constatar que, em seus esquemas de pensamento, nem todos atentaram para a equipartição, ou seja, nem sempre foi mobilizado o conceito de equipartição embutido no conceito de fração.

Quadro 25 – Resoluções empregadas na determinação do gráfico escolhido para representar o que foi comido do bolo

Aluno	Resolução
I	
II	
III	
IV	

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

No Quadro 26 temos os registros das respostas ao item (b) da Atividade 11.

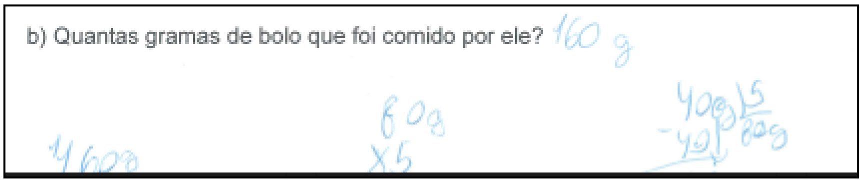
Quadro 26 – Respostas dos alunos sobre $\frac{2}{5}$ de 400 gr (item (b) da Atividade 11)

	Resposta	Quantidade de alunos
I	160 gr	6
II	80 gr	1 (incompleta)
III	200 gr	2
IV	50 gr	1
V	10 gr	1
VI	400 gr	1
VII	$\frac{2}{5}$	1
VIII	Nulo	2

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Dos 15 alunos que responderam a atividade 11, 6 responderam corretamente a questão (Linha I), sugerindo terem mobilizado corretamente fração de uma quantidade discreta. Dentre eles, dois alunos mobilizaram a divisão de 400 por 5 para determinar $\frac{1}{5}$ das gramas de bolo, ou seja, 80 gramas e ainda a operação de multiplicação para testar se estava correta a solução encontrada, para em seguida registrar o resultado provavelmente realizado mentalmente: 160 gramas (Figura 13); outro desses 6 alunos fez o mesmo procedimento, porém sem se preocupar com a multiplicação para verificar a divisão realizada. Percebe-se que ambos utilizaram o teorema em ação da divisão euclidiana de forma explicita, mas não explicitaram o teorema em ação que permite determinar a fração não unitária $\frac{2}{5}$, deixando implícito que fizeram uso do cálculo mental a multiplicação 80 x 2 ou a adição de parcelas iguais 80 + 80.

Figura 13 – Resposta do aluno para determinar $\frac{2}{5}$ de 400 gr



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

O aluno que respondeu 80 (Linha II do Quadro 26), mobilizou o teorema em ação da divisão euclidiana (400:5), para determinar a fração unitária $\frac{1}{5}$, porém, não mobilizou o cálculo de $\frac{2}{5}$. (Figura 14). Por isso sua resposta foi considerada incompleta.

Figura 14 – Registro do aluno no item (b) da Atividade 11

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Sobre os alunos reportados nas Linhas III a VI do Quadro 26, não nos foi possível imaginar qualquer indício de seus esquemas de pensamento.

Consideramos que o objetivo da Atividade 11 foi atingido por 6 dos 15 estudantes que realizaram a atividade (Linha I), embora 11 deles tenham compreendido que $\frac{2}{5}$ é a “fração de” bolo que foi comida e portanto sobraria uma parte (Linhas I, II, III, IV e V), 5 deles (Linhas II, III, IV e V) não conseguiram determinar quantas gramas a fração $\frac{2}{5}$ representa dos 400g.

Sobre a **Atividade 12**, cabe ressaltar inicialmente que o enunciado apresentado aos alunos foi apenas:

> “Heidi está com o colesterol um pouco acima do limite, mas não quer ficar sem comer um picolé de sobremesa Então, como ela tem a escolha entre dois picolés, ela lê o rótulo e escolhe aquele que a faz consumir menos gordura. Picolé de morango: pesa 100 g, sendo $\frac{2}{5}$ dele gordura. Picolé de chocolate: pesa 90 g sendo $\frac{2}{3}$ dele gordura.”

Como não foi solicitado aos estudantes que justificassem suas respostas, muitos apresentaram apenas a resposta. Por isso, para o Produto Final, a justificativa foi incluída no enunciado, bem como os dados e itens foram elencados com o objetivo de ajudar a guiar o raciocínio dos alunos. Salientamos que a falta de justificativa não atrapalhou as conclusões da pesquisa.

Cabe ressaltar também que nosso objetivo era que os dados deveriam levar os estudantes a uma dificuldade de realizar um cálculo mental: por um lado $\frac{2}{5} < \frac{2}{3}$ mas por outro lado 100g > 90g. Essa consideração, no entanto, não foi evidenciada nos registros dos alunos nem ressaltada pela professora antes de iniciarem a resolução.

As repostas da Atividade 12 obtidas estão registradas no Quadro 27, no qual pode-se observar que as respostas certas e erradas foram parelhas. Como foram poucas as justificativas dadas, só nos resta imaginar que alguns estudantes só atentaram para a comparação $\frac{2}{5} < \frac{2}{3}$ enquanto outros só atentaram para a comparação 100g > 90g.

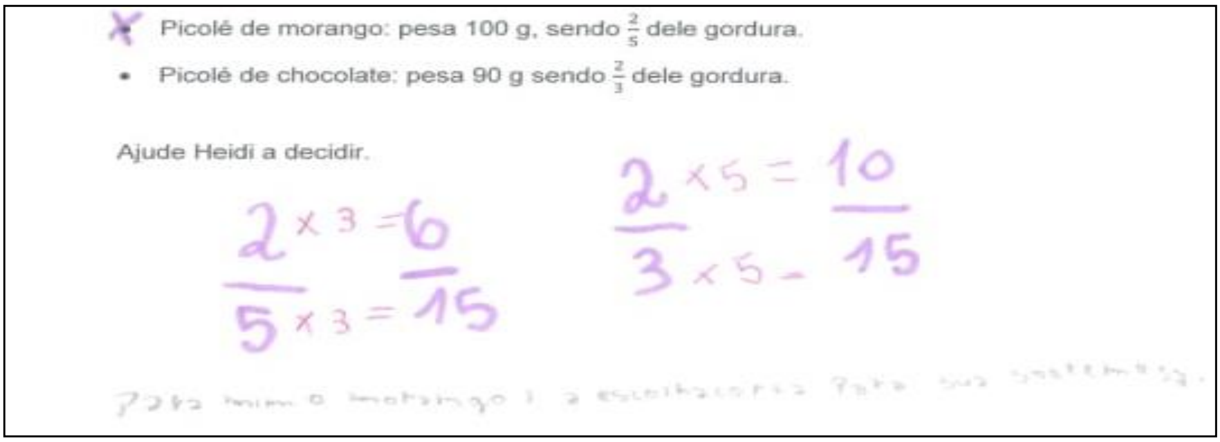
Quadro 27 – Qual picolé tem menos gordura?

Sabor Picolé	**Quantidade de alunos**
Morango	8 (correto)
Chocolate	7 (errado)

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Nas Figuras 15 e 16 trazemos as justificativas apresentadas por dois estudantes e que permitem identificar seus esquemas de pensamento.

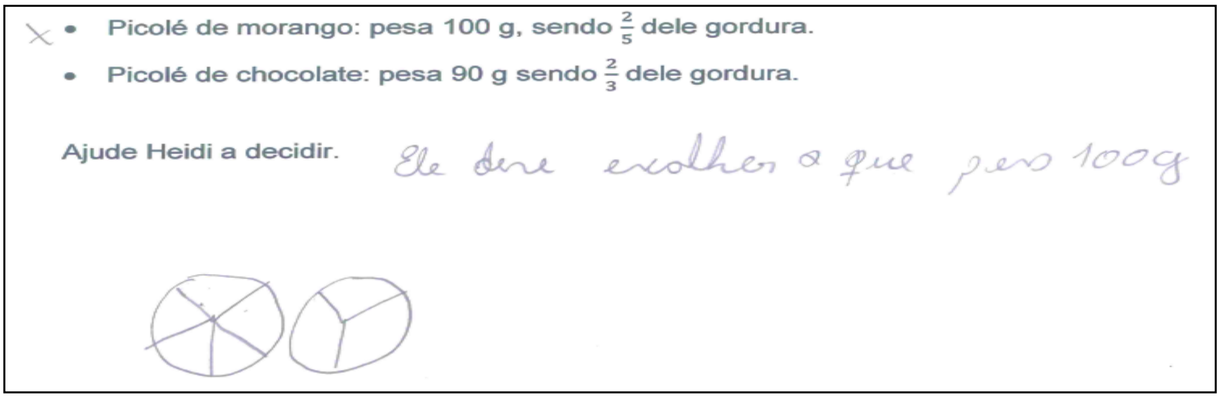
Figura 15 – Justificativa de um aluno sobre qual picolé tem menos gordura (Atividade 12)



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Pode-se notar que o estudante reportado na Figura 15, apesar de chegar à resposta correta, fez um raciocínio incompleto: evocou, em seu esquema de pensamento, o teorema em ação sobre a geração de frações equivalentes, buscando denominadores iguais, porém não atentou para o fato de que a unidade não era a mesma, mobilizando equivocadamente o teorema em ação sobre a comparação de duas frações. A mesma falta pode ser constatada no estudante relatado na Figura 16, que deixou evidente, ao fazer uso da representação pictórica, que raciocinou sobre uma mesma unidade.

Figura 16 – Resposta de um aluno para determinar qual picolé tem menos gordura



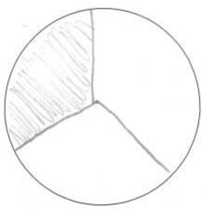
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Na Figura 16, o estudante utilizou a representação pictórica para comparar também apenas as frações da unidade, sem levar em consideração que um picolé tem massa diferente do outro e por consequência não se trata aqui de considerar uma mesma unidade, ou seja, a unidade não poderia ser a mesma no modelo pictórico utilizado. Por isso, no Produto Final, decidimos trocar os valores dos dados, para que este raciocínio incompleto não leve à resposta correta.

Avaliamos que, na Atividade 12, os alunos não utilizaram o conceito de fração de uma grandeza discreta para comparar quantidades que dizem respeito a unidades distintas (no caso picolé de 100g e picolé de 90g), não sendo portanto atingido o objetivo da atividade. Considemos que alguns estudantes, em suas respostas, só atentaram para a comparação $\frac{2}{5} < \frac{2}{3}$ enquanto outros, só atentaram para a comparação 100g > 90g, não sendo assim tão surpreendente o equilíbrio entre as respostas dadas. Por isso, reavaliando a questão, consideramos também que seria adequado propor mais itens que ajudem a guiar o raciocínio dos alunos (ver Produto Final).

Dos 20 alunos que resolveram a **Atividade 13**, 17 representaram de forma satisfatória $\frac{1}{3}$ no disco fracionário; no Quadro 28 pode-se ver dois desses registros para o item (a), nos quais é possível reconhecer, ainda que implicitamente, a mobilização dos conceitos de equipartição e de fração unitária.

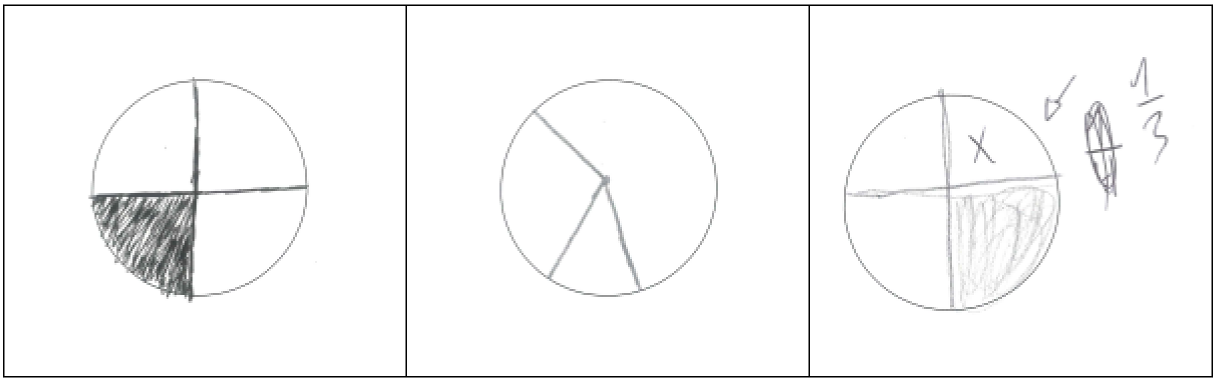
Quadro 28 – Registros de dois alunos para responder o item (a) da Atividade 13

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Já no Quadro 29 tem-se o registro das resoluções de 3 alunos que foram considerados incorretas: o primeiro mobilizou uma equipartição em quartos no lugar de terços; o segundo não mobilizou o conceito de equipartição e o terceiro mobilizou inicialmente a fração unitária em quartos, daí aparentemente percebeu seu erro, mas, para ajustar modificou a unidade e não a equipartição.

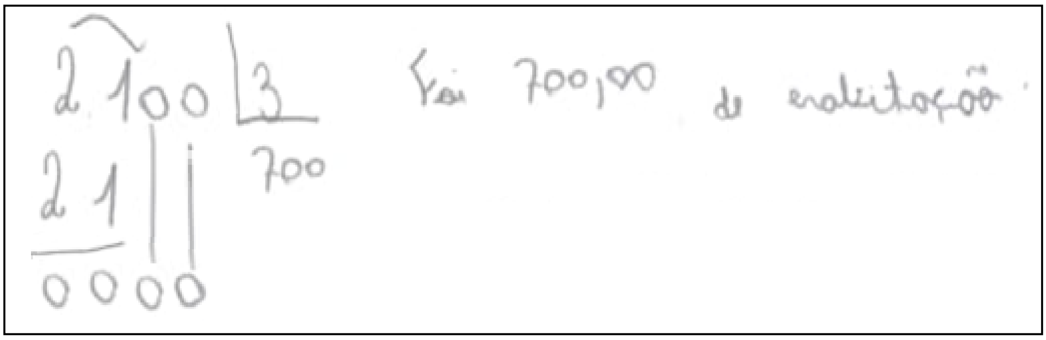
Quadro 29 – Registros de três alunos para representar $\frac{1}{3}$ da renda familiar (item (a) da Atividade 13)



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Quanto ao item (b) da Atividade 13, 18 alunos responderam corretamente R$ 700,00 e 2 alunos não responderam a questão. Consideramos, a partir dos resultados obtidos neste item, que os alunos conseguem equacionar e resolver esse problema que envolve fração unitária de um número natural. O teorema em ação que pudemos identificar no registro de um estudante é o relativo à divisão euclidiana (Figura 17).

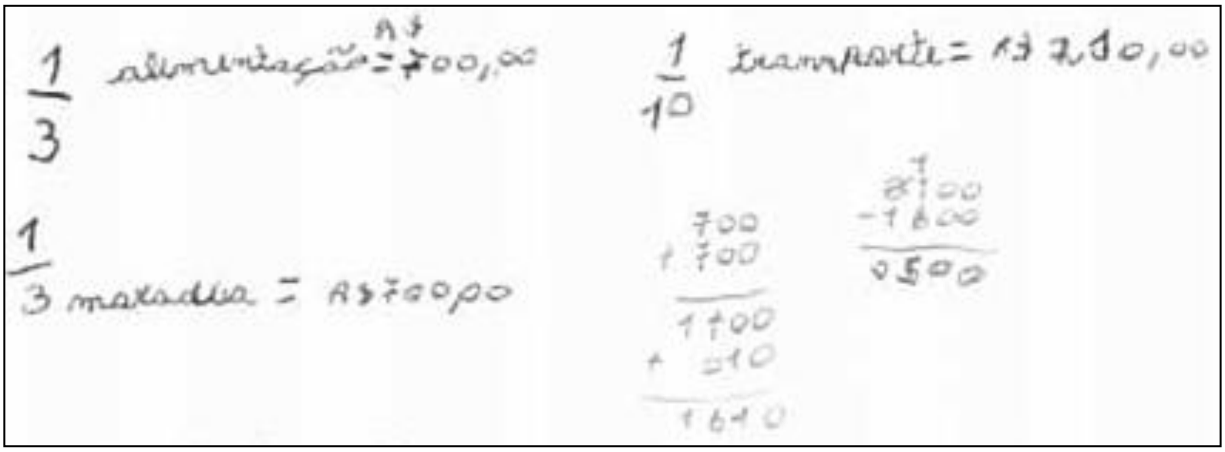
Figura 17 – Registro de um aluno para determinar $\frac{1}{3}$ de R$ 2.100 (item (b) da Atividade 13)



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Os itens (c) e (d) da Atividade 13 são de resposta aberta. Apresentamos na Figura 18 o registro de um aluno que apresenta estimativas na forma de fração do orçamento para os gastos com alimentação ($\frac{1}{3}$) e transporte ($\frac{1}{10}$) e explicita seu raciocínio, mobilizando também a adição das parcelas bem como a subtração salário - total de gastos, para responder ao item (d).

Figura 18 – Resposta de um aluno aos itens (c) e (d) da Atividade 13



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

O item (e) da Atividade 13 é também de resposta aberta, e pouco tem a ver com Matemática. Foram mencionados como: roupas, materiais escolares, um pouco de diversão, estudo. No *feedback* da atividade conversamos também sobre a importância de se ter uma reserva do orçamento para gastos com saúde, ou com coisas eventuais que possam aparecer.

Sobre o enunciado da **Atividade 14**, cabe ressaltar inicialmente que o valor apresentado originalmente aos estudantes foi de R$ 500,00. Dos 14 alunos que responderam a Atividade 14, 13 afirmaram no item (a) que Joice estava pagando mais aluguel que Cristina, sendo que apenas 1 aluno justificou seu raciocínio por meio do cálculo de $\frac{2}{3}$ dos 500 reais (Figura 19), deixando implícita a mobilização da comparação deste valor com o valor total do aluguel. Apenas, 1 aluno afirmou que elas estavam pagando o mesmo valor, sem dar uma justificativa que nos permitisse retirar alguma informação sobre seu esquema de pensamento.

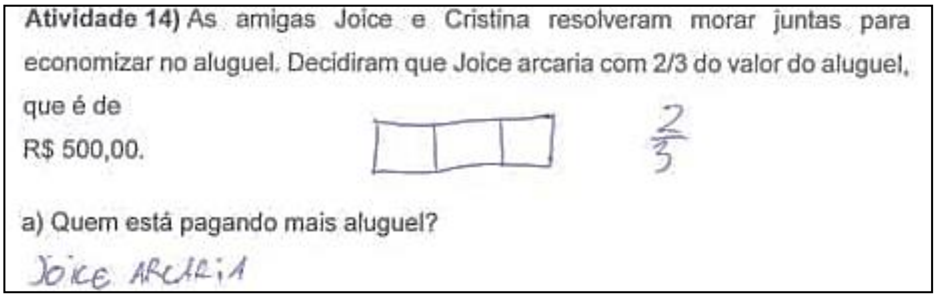
Figura 19 – Resposta de um aluno ao item (a) da Atividade 14

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Com base na resolução deste estudante, demo-nos conta de que o valor do aluguel deveria ter sido um múltiplo de 3 para que a complexa representação decimal de um número racional proveniente de uma divisão fosse evitada, por isso decidimos alterar, no produto final, o valor do aluguel para um múltiplo de 3, no caso 540 reais..

Ainda na resolução do item (a) outro aluno mobilizou a representação pictórica (Figura 20), sendo possível perceber que os conceitos de terços e de fração não unitária estão claros para este aluno. No entanto, a comparação de frações ficou apenas implícita.

Figura 20 – Resposta de um aluno ao item (a) da Atividade 14


Atividade 14) As amigas Joice e Cristina resolveram morar juntas para economizar no aluguel. Decidiram que Joice arcaria com 2/3 do valor do aluguel, que é de
R$ 500,00.

$\frac{2}{3}$

a) Quem está pagando mais aluguel?

JOICE ARCARIA

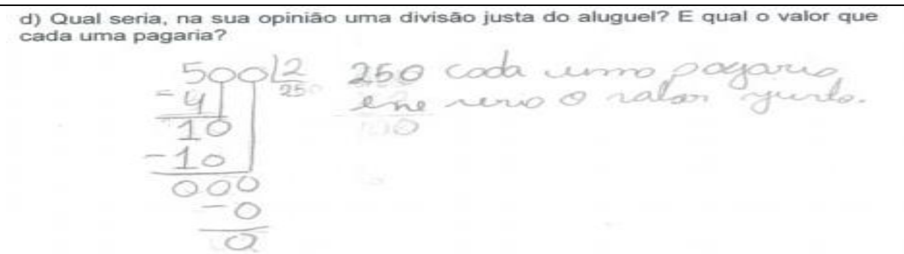
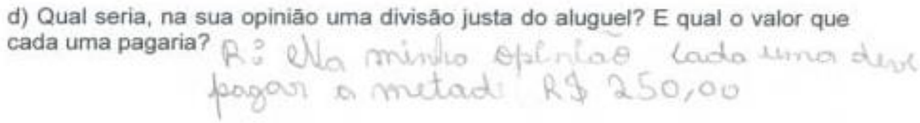
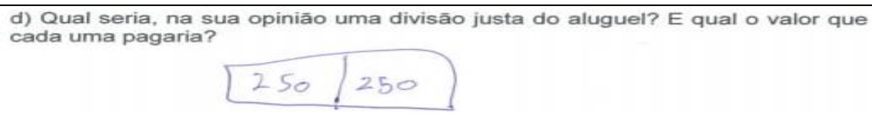
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

O item (b) da Atividade 14 é de resposta aberta. Dos 14 alunos que realizaram esta atividade, um aluno não se posicionou, 11 posicionaram-se achando que esta distribuição não é justa, e um complementou justificando que “*não acho justo, pois Joice paga mais do que Cristina”,* sugerindo ter aí evocado o conceito de metade e a comparação de $\frac{2}{3}$ com metade; 2 estidantes acharam justa tal distribuição, sem justificar seus posicionamentos.

Com relação ao item (c) da Atividade 14, foi possível constatar que o posicionamento de alguns alunos alterou-se: dos 14 alunos, 7 reafirmaram que não achavam justa a divisão; uma das justificativas apresentadas foi: “*Não, porque as duas moram ali e devem pagar a mesma quantia*”, percebemos em seu discurso que se as duas ocupam o mesma casa, então cada uma deve pagar a mesma quantia, ou seja, implicitamente estaria ele evocando o conceito de metade. Outros 5 alunos posicionaram-se afirmando que agora a divisão estava justa, e uma das justificativas apresentadas foi: “Sim. Daí seria justo porque Joice ganha mais, dai vai poder pagar mais”, sugerindo a mobilização do conceito de relação entre grandezas no mesmo sentido. Dois alunos responderam apenas ”talvez” e “sim e não”, sem qualquer justificativa.

O item (d) da Atividade 14 tem também resposta aberta; 12 dos 14 alunos responderam que Joice e Cristina tinham que pagar metade cada uma, deixando clara a mobilização do conceito de metade. Quanto ao valor a ser pago por cada uma, além de um estudante que não respondeu a questão, chamou nossa atenção a resposta de 1 aluno: R$ 750,00 cada**.** No Quadro 30 são apresentados os registros considerados satisfatórios de três alunos e dos quais vários conceitos e/ou teoremas em ação emergem: o teorema da divisão euclidiana (Linha I), o conceito de metade (Linhas II e III), além da adequada representação pictórica na Linha III.

Quadro 30 – Resposta de três alunos sobre qual divisão do aluguel seria mais justa e qual o valor que cada uma pagaria (item (d) da Atividade 14)

Teorema em ação	Resposta do aluno
Divisão euclidiana	 d) Qual seria, na sua opinião uma divisão justa do aluguel? E qual o valor que cada uma pagaria? 500 | 2 ; −4 250 ; 10 ; −10 ; 000 ; −0 ; 0 — 250 cada uma pagaria e é esse o valor justo.
Conceito de metade	 d) Qual seria, na sua opinião uma divisão justa do aluguel? E qual o valor que cada uma pagaria? R: Na minha opinião cada uma deve pagar a metade R$ 250,00
Representação Pictórica	 d) Qual seria, na sua opinião uma divisão justa do aluguel? E qual o valor que cada uma pagaria? 250 | 250

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Na Atividade 14 ficou claro para nós que os alunos conseguiram comparar $\frac{2}{3}$ com metade de uma unidade, e que dominam o significado de "fração de", pois mostraram coerência nas respostas a questões que envolveram o significado de "fração de", mesmo envolvendo grandezas discretas; contudo, boa parte dos alunos só se utilizou de registros quando solicitado de forma explícita, por isso, não foi possível perceber se a problemática embutida no cálculo de $\frac{2}{3}$ de R$ 500,00 apareceu ou não, só podemos afirmar que nenhum registro desse cálculo apareceu.

A **Atividade 15** foi respondida por 19 estudantes. Do Quadro 31, percebe-se que 10 alunos representaram a fração das horas trabalhadas por $\frac{8}{24}$ (Linha I), evidenciando a mobilização do conceito de fração não unitária; 3 alunos responderam diretamente "$\frac{1}{3}$" (Linha II), deixando implícita a mobilização do conceito de equivalência, conceito explicitado por 5 outros alunos no registro “$\frac{8}{24}$ ou $\frac{1}{3}$” (Linha III); e apenas um aluno respondeu a questão de forma insatisfatória com o registro “A metade de 14 horas”.

Quadro 31 – Respostas dos alunos para a fração do dia que uma pessoa em média passa trabalhando (item (a) da Atividade 15)

Resposta	**Quantidade de alunos**	
$\frac{8}{24}$	10	(correto)
$\frac{1}{3}$	3	(correto)
$\frac{8}{24}$ ou $\frac{1}{3}$	5	(correto)
A metade de 14 horas	1	(insatisfatório)

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

O item (b) da Atividade 15 tem resposta aberta, e as respostas dadas pelos estudantes estão registradas no Quadro 32. Pode-se perceber que um aluno não respondeu (Linha I) e 15 alunos fizeram uso de fração (Linhas I, II, IV, V, VI e VIII), mobilizando os conceitos de fração unitária e/ou não unitária, sendo que um deles (Linha II) deixou evidente a mobilização do teorema em ação sobre equivalência de frações; 3 alunos responderam apenas o número de horas que dormem, não calculando a fração que ele representa do dia.

Quadro 32 – Respostas dos alunos sobre o número de horas que dormem por dia e qual a fração do dia ele representa (item (b) da Atividade 15)

	Resposta	**Quantidade de alunos**	
I	$\frac{1}{3}$ - 8 horas	2	
II	$\frac{5}{12} = \frac{10}{24}$ - 10 horas	1	
III	12	1	(incompleta)
IV	$\frac{8}{24}$	7	(incompleta)
V	$\frac{11}{24}$	2	(incompleta)
VI	$\frac{1}{3}$	2	(incompleta)
VII	8 horas	2	(incompleta)
VIII	$\frac{9}{24}$	2	(incompleta)
IX	Não respondeu	1	

Fonte: Dados da pesquisa (2019)

O item (c) da Atividade 15 convida o estudante a refletir sobre o conteúdo em estudo relacionando com sua rotina de sono do seu dia a dia e tem resposta aberta, e as respostas dadas pelos estudantes estão registradas no Quadro 33. Pode-se perceber que apenas 3 alunos (Linhas IX e X) cometeram equívocos ao determinar a fração das 24 horas que dorme ou que é recomendado dormir. Dos 19 alunos, 16 alunos fizeram uso de fração (Linhas I, II, IV, V, VI e VIII), mobilizando os conceitos de fração unitária ou não unitária, sendo que 3 deles (Linha I e VII) mobilizaram o teorema em ação sobre equivalência de frações. Destacamos também que os estudantes apresentam uma boa média de sono diário.

Quadro 33 – Respostas dos alunos sobre o número de horas que dormem por dia e o recomendado e qual a fração do dia cada um representa (item (c) da Atividade 15)

	Número de horas que dorme		**Fração que representa do dia**	**Quantidade de alunos**
I	Praticado	8 horas	$\frac{1}{3}$	2
	Recomendado	8 horas	$\frac{1}{3}$	
II	Praticado	8 horas	$\frac{8}{24}$	1
	Recomendado	9 horas	$\frac{9}{24}$	
III	Praticado	8 horas	$\frac{8}{24}$	2
	Recomendado	10 horas	$\frac{10}{24}$	
IV	Praticado	8 horas	$\frac{8}{24}$	4
	Recomendado	8 horas	$\frac{8}{24}$	
V	Praticado	9 horas	$\frac{9}{24}$	2
	Recomendado	8 horas	$\frac{8}{24}$	
VI	Praticado	11 horas	$\frac{11}{24}$	2
	Recomendado	8 horas	$\frac{8}{24}$	
VII	Praticado	10 horas	$\frac{5}{12}$	1
	Recomendado	8 horas	$\frac{1}{3}$	
VIII	Praticado	8 horas	$\frac{8}{24}$	2
	Recomendado	De 7 a 9 horas	$\frac{7}{24}$ ou $\frac{9}{24}$	
IX	Praticado	8 horas	$\frac{8}{24}$	1
	Recomendado	Entre 9 e 11 horas	$\frac{15}{24}$ $\frac{13}{24}$	
X	Praticado	10 horas	$\frac{1}{3}$	2
	Recomendado	8 horas	-	

Fonte: Dados da pesquisa (2019)

As respostas ao item (d) da Atividade 15 estão registradas no Quadro 34. Pode-se perceber que os 19 alunos fizeram uso de fração, mobilizando os conceitos de fração unitária ou não unitária, sendo que 3 deles (Linha I e VII) mobilizaram o teorema em ação sobre equivalência de frações, mantendo o padrão do item (c).

Quadro 34 – Respostas dos alunos sobre a fração do dia que passam na escola (item (d) da Atividade 15)

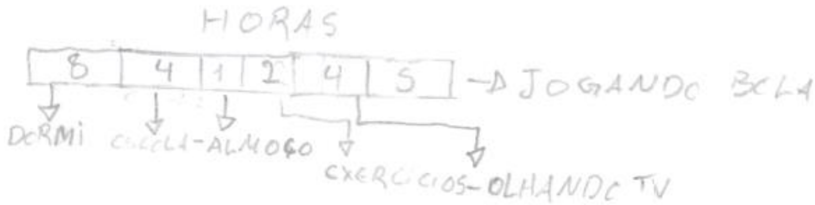
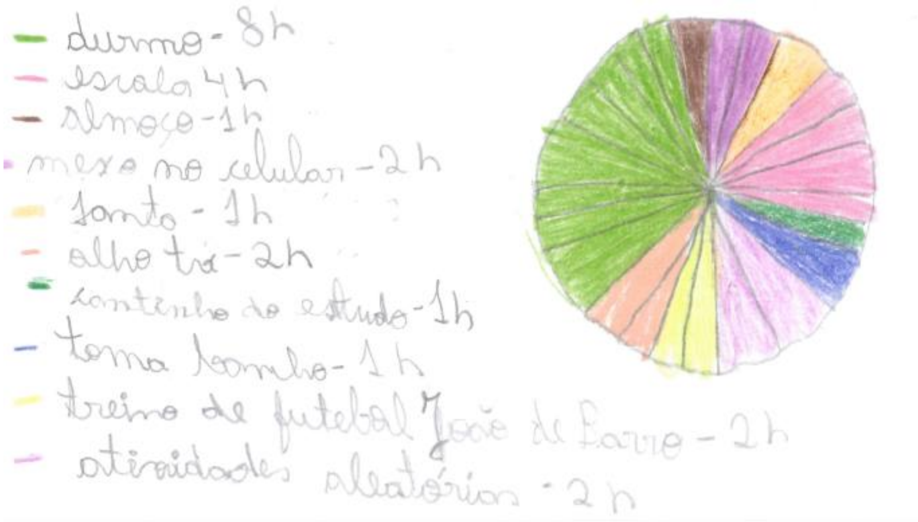
	Resposta	**Quantidade de alunos**
I	$\frac{1}{6}$	3
II	$\frac{4}{24}$	16

Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Com relação à representação pictórica requisitada no item (e), as respostas dos estudantes nos sugerem que eles não interpretaram “fracionamento” como fração, e sim “partição” como no dia a dia, pois suas respostas não foram dadas na forma de fração. Dez dos 19 alunos utilizaram o retângulo para representar a unidade dia, 5 utilizaram o disco, 2 fizeram o desenho de uma casa, e 2 não responderam a questão.

O Quadro 35 apresenta uma amostra das representações pictóricas apresentadas. Destacamos que na Linha I o aluno não atentou a equipartição, preocupando-se provavelmente apenas em representar porções; já os estudantes da Linha II foram cuidadosos na equipartição, tentando subdividir o disco em 24 partes iguais; já na Linha III, como já destacado o desenho de uma casa, não apresentando a representação de fração.

Quadro 35 – Amostra de cada forma de representação pictórica registrada no (item (e) da Atividade 15)

	Registro pictórico do dia
I	
II	
III	

Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Avaliamos que a Atividade 15 atingiu seus objetivos, considerando que pelo menos 16 dos 18 alunos conseguiram calcular “fração de” uma grandeza discreta em uma situação da qual ele é convidado a participar, conseguindo observar suas atividades diárias como sendo uma fração do seu dia, identificando-a como fator multiplicativo.

Como a Atividade 7, a **Atividade 16** é um momento de fechamento para o caso de multiplicação de fração própria por um número natural. No Quadro 36 são explicitados os problemas elaborados em grupos e resolvidos de forma individual. Os problemas das Linhas I e II foram considerados satisfatórios, por apresentarem coerência com o que foi desenvolvido até o momento, requerendo, inclusive, a mobilização da subtração. É possível perceber que nem sempre os grupos conseguiram efetivamente formular um problema (Linhas III e VIII), apesar de os integrantes do grupo reportado na Linha III já apresentarem na própria redação o cálculo correto, evidenciando o domínio sobre o conceito de fração (própria) de grandeza discreta. Também é possível perceber problemas com informação incompleta ou envolvendo uma situação impossível (Linha IV, que acabou acreditamos que por equívoco, por incluir uma expressão diferente da solicitada, e Linhas VI e VII).

Quadro 36 – Problemas elaborados pelos grupos envolvendo multiplicação de uma fração por um número natural

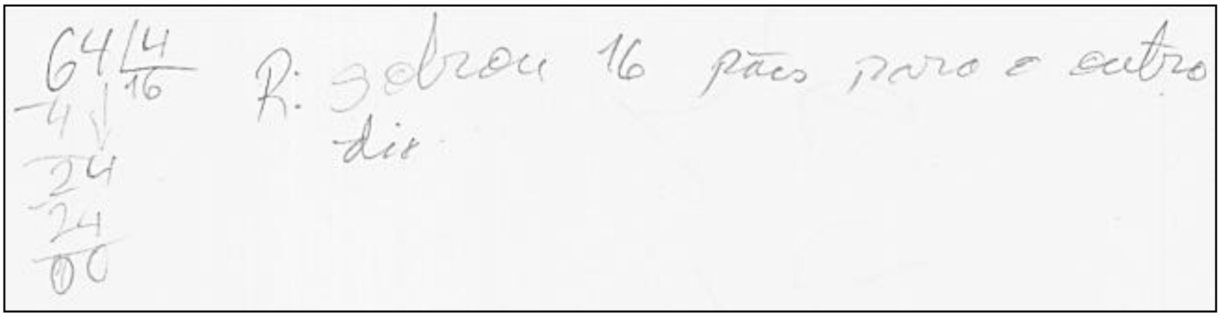
	Expressão	**Quantidade de alunos no grupo**	**Problema elaborado pelo grupo**
I	$\frac{3}{4}$ de 64	2	"João foi na padaria e comprou 64 pães para um churrasco e comeram $\frac{3}{4}$ da quantidade de pães. Quanto sobrou para o dia seguinte?"
II	$\frac{2}{3}$ de 33	5	"Compramos uma pizza de 33 pedaços, mas sobrou $\frac{2}{3}$. Quanto sobrou de pizza?"
III	$\frac{3}{4}$ de 40	2	"João foi na escola e fez a conta $\frac{3}{4}$ de 40. Ele botou que é igual a 30 e ele ganhou nota 10."
IV	$\frac{2}{4}$ de 64	2	"João foi na futeira comprar $\frac{3}{4}$ de 67 caqui. Quantos ele comprou?" (impossível)
V	$\frac{2}{6}$ de 42	2	"Mariana tinha $\frac{2}{6}$ de balas e João 42 pirulitos. Quanto os dois teriam juntos?" (insatisfatório)
VI	$\frac{3}{5}$ de 30	3	"Samuel e Riana foram na casa de Ryan e comeram $\frac{3}{5}$ de pizza que Ryan fez." (incompleto)
VII	$\frac{2}{3}$ de 15	3	"Mariana lavou $\frac{2}{3}$ de 15 de roupa e na terça lavou o triplo dessa quantidade." (incompleto)
VIII	$\frac{2}{5}$ de 30	3	"Dener passa 4 horas do seu dia olhando TV, 2 brincando e 6 horas dormindo. A que fração de 30 isso representa?" (incorreto)

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Como na Atividade 7, o segundo momento da Atividade 16 consistiu em distribuir para os alunos, de forma aleatória, todas as questões formuladas pelos grupos para serem resolvidas individualmente, cuidando para que nenhum aluno ficasse com a questão que seu grupo criou.

A Figura 21 revela o esquema de pensamento foi utilizado por um aluno para a resolução do problema da Linha I do Quadro 36. Percebemos que o aluno mobilizou a subtração $1 - \frac{3}{4}$ por cálculo mental, obtendo $\frac{1}{4}$, e a seguir, mobilizou o teorema da divisão euclidiana para encontrar $\frac{1}{4}$ de 64.

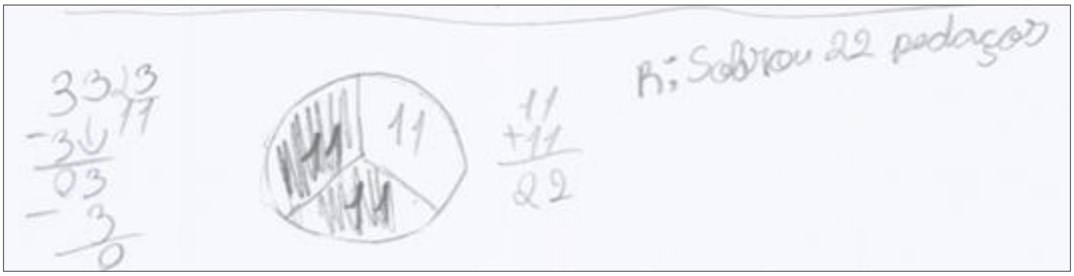
Figura 21 – Resolução de um aluno para o problema da Linha I do Quadro 36



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A Figura 22 revela o esquema de pensamento foi utilizado por um aluno para a resolução do problema da Linha II do Quadro 36. Pode-se observar que o aluno mobilizou o teorema da divisão euclidiana para determinar $\frac{1}{3}$ de 33 e a seguir utilizou a representação pictórica para distribuir o valor correspondente a cada terço e, finalmente, mobilizando o conceito de fração não unitária, determinando então os $\frac{2}{3}$ de 33 por meio da adição.

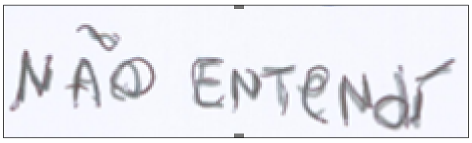
Figura 22 – Resolução um aluno para o problema da Linha II do Quadro 36



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

O aluno incumbido da resolução do problema da Linha III do Quadro 36 respondeu, com razão, que não estendeu o que o colega havia proposto (Figura 23).

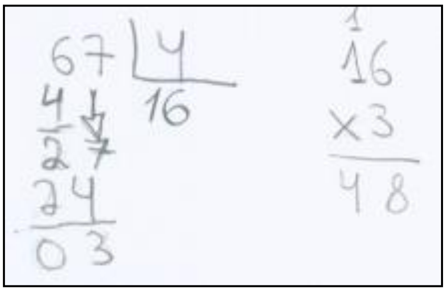
Figura 23 – Resposta de um aluno para o problema da Linha III do Quadro 36



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

O aluno que recebeu o problema da Linha IV do Quadro 36, não percebeu que não era possível dividir os 67 caquis em 4 partes iguais, apesar de ter realizado a divisão euclidiana corretamente, evidenciando uma mobilização incorreta do conceito de equipartição ao ignorar o valor da sobra (Figura 24). No entanto, a partir da determinação errônea de $\frac{1}{4}$, o aluno mobilizou corretamente o conceito de fração não unitária, fazendo uso da multiplicação de naturais.

Figura 24 – Resolução de um aluno para o problema da Linha IV do Quadro 36



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Os problemas das Linhas V e VI do Quadro 36 foram, com razão, considerados impossíveis de serem solucionados, como podemos observar no Quadro 37.

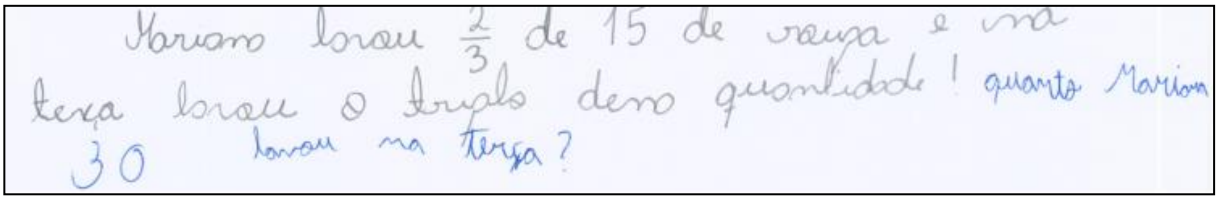
Quadro 37 – Respostas dos estudantes sobre a resolução dos problemas das Linhas V e VI do Quadro 36

Problema desenvolvido pelos grupos	**Resolução/Observação**
“Mariana tinha $\frac{2}{6}$ de balas e João 42 pirulitos. Quanto os dois teriam juntos?”	
“Samuel e Riana foram na casa de Ryan e comeram $\frac{3}{5}$ de pizza que Ryan fez?”	

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

O problema da Linha VII do Quadro 36 também foi considerado incompleto pelo estudante que ficou incumbido de resolvê-lo. No entanto, este estudante, a partir de sua interpretação, resolveu completar seu enunciado com a pergunta “Quanto Mariana lavou na terça?” e determinou que o resultado era 30, contudo sem explicitar o esquema de pensamento utilizado; supomos que ele tenha mobilizado o conceito de fração de grandeza discreta, calculando $\frac{2}{3}$ de 15 que é 10, e a seguir o conceito de triplo dentro do universo dos números naturais, chegando ao resultado 30. (Figura 25).

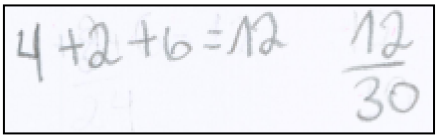
Figura 25 – Resolução de um aluno para o problema da Linha VII do Quadro 36



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

O problema da Linha VIII do Quadro 36 foi considerado incorreto por nós, porém não pelo estudante que o resolveu. Este deu como resultado a fração $\frac{12}{30}$, sem levar em conta a situação relatada: as horas têm a ver com o dia, portanto a unidade deveria ter sido 24 horas. (Figura 26).

Figura 26 – Resolução de um aluno para o problema da Linha VIII do Quadro 36



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Percebemos, com a Atividade 16, alguma evolução dos alunos com relação à elaboração de problemas, mas reconhecemos como longo o percurso a ser trilhado até que seja possível considerar atingido o objetivo de elaborar problemas envolvendo multiplicação de frações. As Atividades 7 e 16 evidenciaram para nós a falta de familiaridade dos estudantes com a formulação de problemas. Revela-se assim oportuna e relevante a inclusão de muitas Habilidades da BNCC do tipo “Resolver e elaborar problemas de...” encontráveis no documento desde os anos iniciais do EF. Reiteramos que atividades com essas características contribuem para despertar a criatividade dos estudantes e consolidar a aprendizagem dos conceitos.

Com relação à Seção 2 (Preparando a Multiplicação de uma fração própria por um número natural) e com base na análise das resoluções dos alunos, consideramos que, até o momento, uma parcela significativa dos alunos soube equacionar e resolver problemas que envolvem multiplicação de fração própria por número natural. Muitos estudantes conseguiram identificar que, em determinadas situações, não é possível determinar uma fração de uma grandeza discreta. Percebemos que os alunos precisam ser estimulados a verificar se a solução encontrada condiz com a solução esperada, pois às vezes deram respostas sem sentido ou apresentam respostas incompletas, especialmente nos casos que preparavam para a ruptura conceitual de, na multiplicação de frações, se um fator é menor do que 1 então o resultado será menor do que o outro fator.

A **Atividade 17** foi realizada por 21 alunos e teve como enunciado original proposto aos estudantes o seguinte:

Siga as instruções a seguir:

a) Divida o retângulo que você recebeu em quatro partes iguais e destaque de amarelo $\frac{1}{4}$ do retângulo.

Agora detaque de laranja, a metade desse $\frac{1}{4}$ pintado de amarelo.

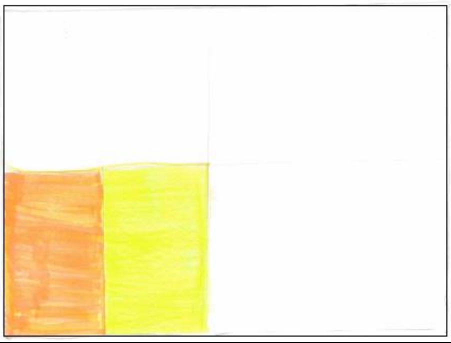
Afinal, que fração do retângulo você pintou de laranja? _______

b) Agora complete, usando fração:

$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ do retângulo equivale a ______ do retângulo.

E para isso foi entregue para cada aluno, um retângulo de papel. No Quadro 38 podemos observar duas representações pictóricas diferentes desenvolvidas por 17 dos 21 alunos. Ambas fizeram uso de uma mesma equipartição do retângulo para representar $\frac{1}{4}$ do mesmo, contudo as representações de $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ foram levemente diferentes; para ambas, no entanto, foi mobilizado o teorema em ação sobre “a metade de”.

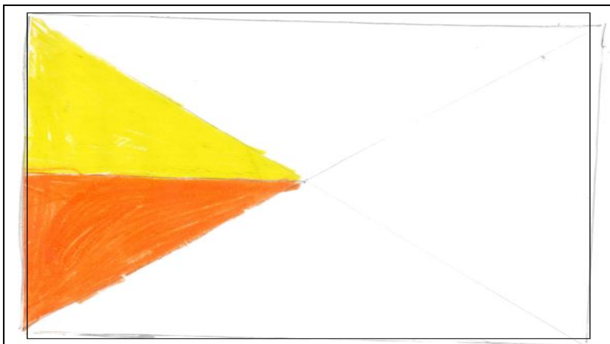
Quadro 38 – Representações pictóricas de 17 alunos para $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ (item (a) da Atividade 17)

	Representação pictórica
I	
II	

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Acreditamos que os outros 4 alunos mobilizaram equivocadamente o conceito de equipartição, acreditando que as diagonais de um retângulo (que não era quadrado, no caso) o equiparticionam em 4 partes (Figura 27).

Figura 27 – Representações pictóricas de 4 alunos para $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ (item (a) da Atividade 17)



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

As respostas ao questionamento do item (a) estão registradas no Quadro 39.

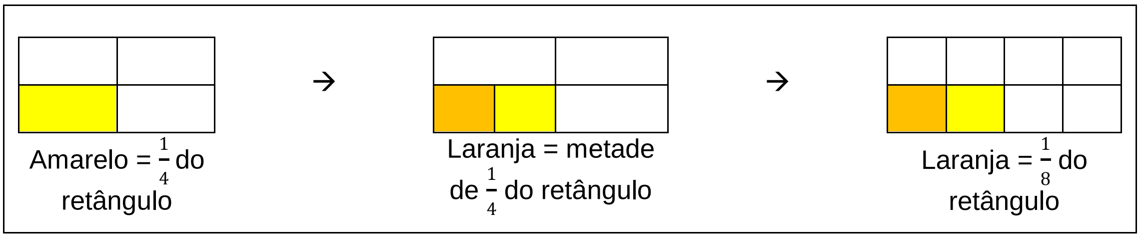
Quadro 39 – Respostas dos alunos para a fração do retângulo pintada de laranja (item (a) da Atividade 17)

	Resposta	Quantidade de alunos
I	$\frac{1}{8}$	8
II	$\frac{1}{2}$ metade	6
III	$\frac{1}{4}$	4
IV	$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$	2
V	Não respondeu	1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Ainda no item (a) da Atividade 17, oito dos 21 alunos responderam corretamente que a fração do retângulo pintada de laranja é $\frac{1}{8}$, no entanto sem registrar seus esquemas de pensamento; acreditamos que tenham mobilizado o conceito de equipartição (em 8 partes) a partir da metade da quarta parte seguida da equipartição dos demais quartos, como ilustrado na Figura 28.

Figura 28 – Uma possível representação pictórica para determinar $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$



Fonte: Elabora pela autora (2019).

No item (b) da Atividade 17, é oportunizado um fechamento. As respostas dadas pelos estudantes estão no Quadro 40, onde pode-se perceber que o número de alunos que responderam a questão de forma correta aumentou em relação ao item (a) (Quadro 39), passando de 8 para 12 alunos. Creditamos esse aumento a uma maior compreensão dos alunos sobre o tema da atividade, ao lerem o enunciado "$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ do retângulo equivale a ____ do retângulo", o que talvez tenha deixado mais evidente o processo que se estava querendo produzir.

Quadro 40 – Respostas dos alunos para a fração que corresponde a $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ do retângulo (item (b) da Atividade 17)

	Resposta	**Quantidade de alunos**
I	$\frac{1}{8}$	12
II	$\frac{6}{8}$	2 (insatisfatória)
III	$\frac{2}{8}$	1 (insatisfatória)
IV	$\frac{2}{6}$	2 (incorreta)
V	$\frac{1}{4}$	2 (insatisfatória)
VI	Metade	1 (incorreta)
VII	Não respondeu	1

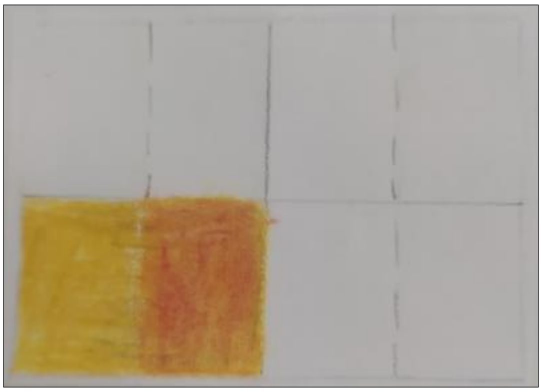
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Com base nos resultados obtidos no Quadro 40, podemos traçar algumas hipóteses sobre os esquemas de pensamento dos alunos que não chegaram à resposta correta: os 2 alunos que responderam $\frac{6}{8}$ (Linha II) parecem estar apresentando a representação fracionária do que restou sem ser pintado no retângulo; se assim foi, parece-nos evidente que esses alunos chegaram corretamente à representação da expressão $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$, já que fizeram uso de oitavos. Teriam evocado em seus esquemas de pensamento, neste caso, os conceitos de metade e de equipartição. De forma análoga, parece que os alunos que responderam $\frac{2}{8}$ no item (b) (Linha III) evocaram corretamente os conceitos de metade e de equipartição em seus esquemas de pensamento, mas indicaram a parte que estava pintada do retângulo (laranja e amarelo juntas). Também os dois alunos que responderam $\frac{1}{4}$ (Linha V) parecem ter apenas indicado a parte pintada, e neste caso não é claro que tenham evocado os conceitos de metade e de equipartição.

Já a resposta $\frac{2}{6}$ (Linha IV) sugere que estes 2 alunos ainda não se apropriaram do conceito de fração no contínuo: talvez tenham aí representado pelo o número 2 o número de partes pintadas e pelo número 6 o número de partes por pintar; se este foi o caso, teriam mobilizado o conceito de metade mas não de equipartição. A resposta do estudante que respondeu “metade” (Linha VI) foi considerada incorreta porque parece que ele não mobilizou o conceito de unidade, referindo-se aqui à parte pintada de laranja, e não ao retângulo inteiro.

Na Figura 29, temos a representação pictórica apresentada por um aluno que evidencia a mobilização do conceito de equipartição (no caso em 8 partes) ao tracejar, indicando prolongar a ação de subdividir os demais quartos da mesma forma como realizou no quarto amarelo.

Figura 29 – Representação pictórica de um aluno no item (a) da Atividade 17

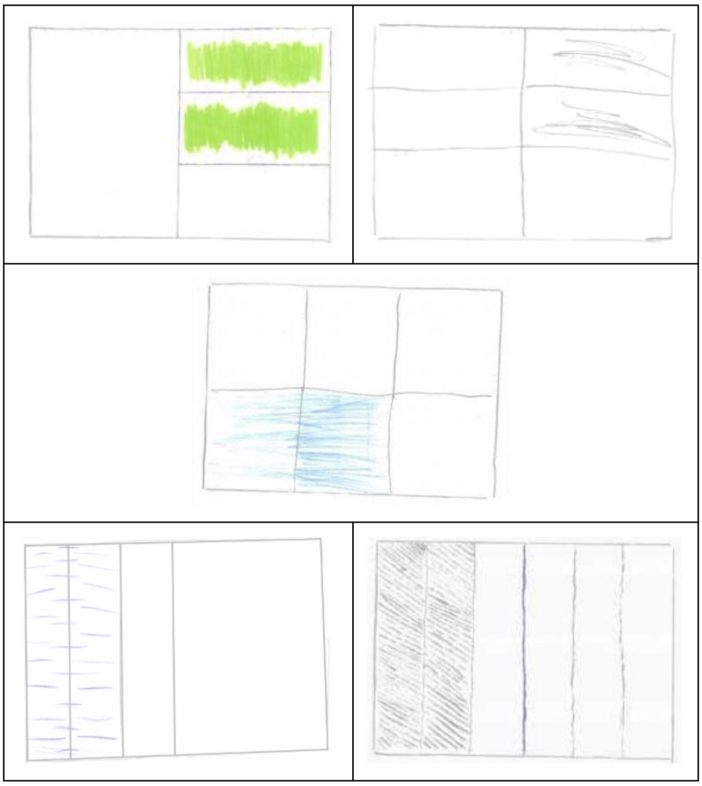


Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A Atividade 17 proporcionou uma discussão sobre as diferentes formas de representar uma mesma porção de uma unidade e a retomada da necessidade de a figura estar equiparticionada se quisermos identificar a fração que ela representa na unidade. Esta discussão foi encaminhada posteriormente, ao ser retomada a atividade com a turma para correção e as etapas ilustradas na Figura 28 foram registradas no quadro negro.

Apesar de considerarmos a **Atividade 18** mais complexa que a atividade anterior, pois agora faz-se uso de fração não unitária, destacamos que os 21 alunos que a realizaram não encontraram dificuldade para realizar a representação pictórica de $\frac{2}{3}$ de metade da folha, ilustrando-a de forma satisfatória. No Quadro 41 podemos observar algumas representações pictóricas apresentadas pelos alunos.

Quadro 41 – Algumas representações pictóricas dos alunos na Atividade 18



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A forma diversificada de representação enriqueceu a discussão encaminhada posteriormente, por ocasião da correção da atividade. Cabe ressaltar que, mesmo os alunos que fizeram a equipartição apenas na metade do retângulo acertaram a resposta à atividade; daí inferimos que tais alunos mobilizaram implicitamente o conceito de equipartição no retângulo, assim como os alunos que explicitaram isto em suas representações.

O Quadro 42 registra as respostas dadas ao item (ii) da Atividade 18, que foi originalmente proposta aos estudantes sem o destaque para a conclusão (item (iii)); percebe-se que todos os 19 (dos 21 alunos que realizaram a atividade) que fizeram uso de representação numérica (Linhas I a IV) acertaram o número de partes da equipartição; no entanto, alguns desses estudantes tiveram dificuldade em determinar a fração do retângulo que foi pintada (Linhas III e IV do Quadro 42).

Quadro 42 – Resposta dos alunos para a fração do retângulo que corresponde a $\frac{2}{3}$ da metade (Atividade 18)

	Resposta	Quantidade de alunos
I	$\frac{2}{6}$	13 (correta)
II	$\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2} = \frac{2}{6}$	3 (correta)
III	$\frac{3}{6}$	2
IV	$\frac{1}{6}$	1
V	Não utilizou representação numérica	2

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Dos 21 alunos que responderam a atividade, 16 alunos responderam a Atividade 18 de forma satisfatória, aumentando o índice de bom desempenho em relação à Atividade 17. Assim, consideramos que a Atividade 18 atingiu satisfatoriamente seus objetivos, porém reconhecemos que poderíamos ter explorado mais a escrita numérica $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2} = \frac{2}{6}$, que foi até registrada por apenas 3 alunos (Linha II do Quadro 42) e que dá um fechamento para a atividade, além de preparar melhor o aluno para as próximas atividades desta sessão. Por isso um item (iii) foi incluído no produto final.

A **Atividade 19** foi realizada por 21 alunos que responderam o item (a) de forma unânime: $\frac{4}{10}$. Ainda que solicitados a justificarem suas respostas, alunos apresentaram certa resistência, pois apenas 6 alunos o fizeram, alguns desses numericamente (Quadro 43);

Quadro 43 – Justificativas dos alunos no item (a) da Atividade 19)

	Justificativa	Quantidade de alunos
I	Porque o retângulo está dividido em 10 partes e está pintada 4	1
II	Porque tem 10 pedaços e tem 4 pedaços pintados	2
III	Porque tem 10 retângulos e foi pintado só 4	1 (satisfatória)
IV	Porque tem 10 quadrados e 4 pintados	1 (satisfatória)
V	Porque há 10 quadrados no todo e 4 pintados	1 (satisfatória)
VI	4 estão pintadas e 6 não estão pintadas	1 (satisfatória)
VII	Porque tem 10 quadrados e estão pintados 4 e $\frac{2}{5}$ é a fração equivalente de $\frac{4}{10}$	1 (satisfatória, apesar de mais informação)

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

As justificativas permitem-nos inferir que os alunos mobilizaram corretamente o conceito de fração não unitária de grandeza contínua, ainda que alguns termos utilizados não fossem completamente adequados (“retângulos” na Linha III, “quadrados” nas Linhas IV, V e VII), sendo por isso consideradas insatisfatórias. No entanto, cabe ressaltar a informação adicional dada pelo estudante relatado na Linha VII, que evidencia a mobilização do teorema em ação sobre equivalência de frações.

As respostas e justificativas para o item (b) da Atividade 19 estão registradas no Quadro 44. Dos 21 alunos que realizaram a atividade, 18 deram a resposta correta, sendo que 4 desses fizeram uso da fração $\frac{8}{10}$ (Linhas X e XI), sem, no entanto, justificar claramente por quê. Os outros 14 alunos utilizaram a fração $\frac{4}{5}$ (Linhas I a IX) e, desses, 5 justificaram explicitando o conceito de metade (Linhas I, II, III, IV e VI); 2 apenas o deixaram implícito (Linhas V e VII) e 7 não justificaram (Linhas VIII e IX).

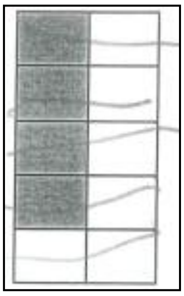
Quadro 44 – Respostas e justificativas dos alunos para a fração da metade do retângulo a que corresponde a parte pintada de cinza (item (b) da Atividade 19)

Resposta		**Justificativa**	**Quantidade de alunos**
$\frac{4}{5}$	I	Porque a metade é 5 e está pintado 4	1
	II	Porque são dez pedaços, metade é cinco e tem quatro pintados	1
	III	Porque na metade tem 4 pintados e um não	1
	IV	Já que a metade de 10 é 5, e quatro pintados fica $\frac{4}{5}$	1
	V	Porque a coluna tem 5 quadrados e a 4 pintados	1
	VI	Tem quatro partes pintadas mais ao todo na metade tem 5. Então fica $\frac{4}{5}$	1
	VII	Porque tem 5 quadrados e estão pintados 4 (satisfatória)	1
	VIII	Porque tá pintado (insatisfatória)	1
	IX	Não justificaram	6
$\frac{8}{10}$	X	4 mais 4 é 8 e 10 mais 10 é 20 (insatisfatória)	1
	XI	Não justificaram	3
$\frac{8}{20}$ (incorreta)	XII	Porque eu dividi em metade (insatisfatória)	1
	XIII	Porque cortei no meio os quadrados (incorreta)	1
	XIV	Não justificaram	1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Com relação aos 3 alunos que responderam $\frac{8}{20}$ (Linhas XII a XIV), parece sugerido que todos dividiram cada uma das 10 partes da unidade ao meio, encontrando então 20 como novo denominador e 8 como numerador porque seria esta a quantidade de novas partes pintadas de cinza, mobilizando incorretamente o conceito de unidade. Este esquema de pensamento fica evidenciado pelo registro de um desses alunos (Figura 30).

Figura 30 – Registro de um aluno no item (b) da Atividade 19



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Entendemos que a interpretação do enunciado foi um fator importante para os resultados incorretos na Atividade 19, por isso resolvemos no Produto Final sublinhar as diferentes unidades consideradas nos itens (a) e (b). Consideramos que 18 dos 22 estudantes que realizaram a Atividade 19, conseguiram reconhecer na representação pictórica dada a fração de fração, e o fator multiplicativo, embora isso pudesse ter ficado mais evidente se a questão tivesse solicitado por exemplo que preenchessem a expressão a seguir

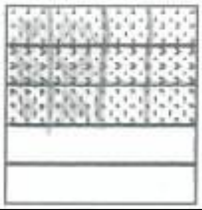
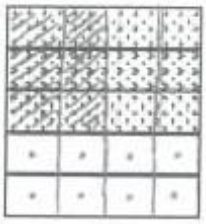
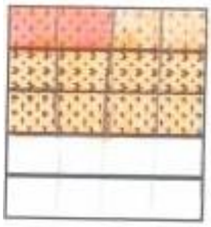
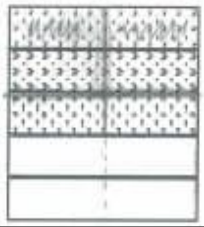
$$\_\ \text{de } \frac{1}{2} \text{ do retângulo} = \frac{4}{10} \text{ do retângulo,}$$

que é o item (c) no Produto Final.

Na **Atividade 20**, realizada por 22 alunos, o item (a) retoma o conceito de fração não unitária já abordado nas atividades de Souza (2019b) e no item (a) da atividade anterior, portanto nossa expectativa era de 100% de acertos. E, de fato, todos os alunos acertaram a resposta $\frac{3}{5}$, evidenciando a mobilização correta do conceito de fração não unitária.

Já o item (b) da Atividade 20, que prepara para o conceito de multiplicação de fração por uma fração não unitária, apesar de já ter sido corrigida a Atividade 19 no momento em que as resoluções da Atividade 20 foram recolhidas, foi possível constatar novamente uma dificuldade dos alunos em identificar a nova unidade. Neste momento, a professora interferiu, salientando que toda parte pintada era a nova unidade que deveria ser dividida em quartos e assim seguiram desenvolvendo o item (b), cujas respostas estão apresentadas no Quadro 45. Como não foi solicitado que os alunos justificassem suas respostas, podemos apenas intuir os esquemas de pensamento mobilizados pelos estudantes.

Quadro 45 – Respostas dos alunos para pintar dois quartos da parte hachurada do retângulo (item (b) da Atividade 20)

	Representação Pictórica	Quantidade de alunos
I	 (correto)	7
II	 (correto)	9
III	 (insatisfatória)	3
IV	 (incorreto)	1
V	Não fizeram o item b)	2

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Dos 22 alunos, 19 mobilizaram corretamente, após a interferência da professora, o conceito de unidade e de equipartição (em 4 partes) (Linhas I, II e III do Quadro 45), contudo verifica-se que os 3 alunos relatados na Linha III mobilizaram incorretamente o conceito de fração não unitária. O aluno relatado na Linha IV mobilizou equivocadamente o conceito de metade, talvez influenciado pelas duas atividades anteriores que oportunizavam este conceito. Salientamos que para todos os 20 estudantes que responderam o item (b) ficou evidente a mobilização do conceito de equipartição, ainda que os estudantes relatados na Linha II o tenham utilizado com relação à unidade retângulo, adiantando o raciocínio requerido no próximo item.

Quadro 46 – Respostas dos alunos para a fração da figura que representa a parte pintada no item (b) (item (c) da Atividade 20)

	Resposta	Quantidade de alunos
I	$\frac{6}{20}$	12
II	$\frac{5}{20}$ (incorreta)	1
III	$\frac{2}{20}$ (incorreta)	1
IV	$\frac{2}{4}$ (insatisfatória)	3
V	$\frac{2}{10}$ (incorreta)	1
VI	$\frac{2}{12}$ (incorreta)	2
VII	$\frac{2}{5}$ (incorreta)	2

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

No Quadro 46 temos as respostas ao item (c) da atividade. Percebemos que 12 alunos tiveram êxito na conversão da representação pictórica apresentada no item (b) para representação numérica (Linha I), sugerindo terem mobilizado de forma correta os conceitos de unidade e de fração não unitária.

O aluno que respondeu $\frac{5}{20}$ (Linha II), não apresentou a representação pictórica no item (a), então podemos supor que tenha mobilizado corretamente o conceito de unidade e equipartição, no entanto, ao mobilizar o conceito de fração não unitária tenha se enganado na contagem, errou o número de partes que foram tomadas do total e supomos que também tenha sido o esquema de pensamento mobilizado pelo aluno que respondeu $\frac{2}{20}$ (Linha III).

Já o estudante relatado na Linha V é o autor da representação pictórica da Linha IV; percebe-se que ele foi coerente com a representação encontrada, mobilizando corretamente os conceitos de unidade, de equipartição e de fração não unitária, apesar de sua resposta estar errada. A mesma coerência acontece com os dois alunos que responderam $\frac{2}{12}$ (Linha VI), autores da representação da Linha III.

Os 3 alunos que responderam $\frac{2}{4}$ (Linha IV) utilizaram apenas a fração que foi solicitada para ser pintada na parte hachurada. Já com relação aos 2 alunos que responderam $\frac{2}{5}$ (Linha VII) não conseguimos imaginar o esquema de pensamento utilizado. Sobre tal resposta, reconhecemos que teria sido importante que tivéssemos solicitado que justificassem suas respostas. Por isso no Produto Final, decidimos incluir no item (c) da Atividade 20 a solicitação de uma justificativa.

O item (d) da Atividade 20 busca dar um fechamento ao registro de "fração de fração". No Quadro 47 temos todas as respostas ao item (d).

Quadro 47 – Respostas dos alunos ao registro de "fração de fração": $\frac{2}{4}$ de ___ da figura equivale a ___da figura (item (d) da Atividade 20)

	Resposta	**Quantidade de alunos**
I	$\frac{2}{4}$ de $\frac{3}{5}$ da figura equivale a $\frac{6}{20}$ da figura (correto)	15
II	$\frac{2}{4}$ de 2 da figura equivale a $\frac{1}{4}$ da figura	1 (incorreta)
III	$\frac{2}{4}$ de $\frac{2}{12}$ da figura equivale a $\frac{2}{20}$ da figura	2 (incorreta)
IV	$\frac{2}{4}$ de $\frac{3}{5}$ da figura equivale a $\frac{2}{20}$ da figura	1 (satisfatória)
V	$\frac{2}{4}$ de $\frac{3}{5}$ da figura equivale a $\frac{2}{3}$ da figura	1 (incorreta)
VI	Não respondeu	2

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

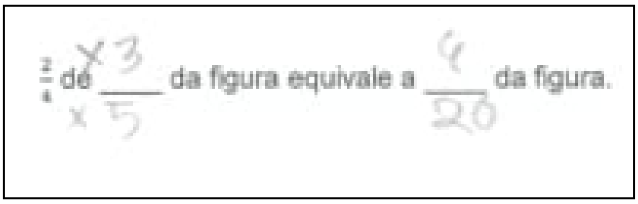
Dos 22 alunos que realizaram a atividade, 15 responderam corretamente o item (d) (Linha I do Quadro 47). A resposta do aluno relatado na Linha II foi considerada incorreta porque este não apresentou coerência com suas respostas aos itens (b) e (c); no item (c) onde respondeu $\frac{5}{20}$ e no item (b) não registrou a representação pictórica. Também não deram respostas coerentes os 2 alunos relatados na Linha III, pois no item (c) responderam $\frac{2}{12}$. Já o aluno relatado na Linha IV manteve coerência com suas respostas anteriores, por isso sua resposta ao item (d) foi considerada satisfatória.

A resposta do aluno relatado na Linha V, apesar incorreta, sugere que o aluno mobilizou a fração da fração da figura corretamente.

Os 2 alunos que não responderam o item (d) (Linha VI do Quadro 47), também não tiveram êxito na conversão da representação pictórica apresentada no item (b) para representação numérica identificar no item (c).

Mesmo sem ser este o objetivo da Atividade, percebemos os primeiros indícios por parte de alguns alunos na busca por identificar qual é a operação que estava sendo realizada de maneira implícita. Por exemplo, na Figura 31, é possível perceber que um aluno construiu um teorema em ação evidenciando assim um conceito em ação sobre multiplicação de frações, indicando já o processo/algoritmo.

Figura 31 – Construção de um aluno usando um teorema em ação evidenciando assim um conceito em ação sobre multiplicação de frações



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Consideramos que, na Atividade 20, os 15 dos 22 alunos que responderam corretamente o item (d) tenham mobilizado o conceito de multiplicação de fração por fração, ainda que de forma implícita. Assim, consideramos que a atividade atingiu seus objetivos. Quanto ao teorema em ação sendo construído por um aluno sobre multiplicação de fração por fração, optamos por não dar, neste momento, muita ênfase no grande grupo à descoberta do aluno, para verificar se outros colegas teriam a mesma percepção nas atividades que seguem.

Por problemas na digitalização, não foi possível realizar a análise da **Atividade 21**. Cabe ressaltar, no entanto que é no item (d) que começou-se a registrar "fração de fração" por meio de uma multiplicação, sendo aí introduzida a definição de multiplicação de frações.

Para a **Atividade 22,** foi entregue a cada aluno um disco de papel, como o mostrado no enunciado da atividade, para que pudessem manipulá-lo. Ela foi realizada por 18 estudantes.

Quadro 48 – Respostas dos alunos para a fração correspondente à parte pintada de cinza no disco (item (a) da Atividade 22)

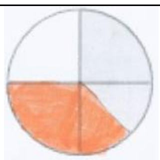
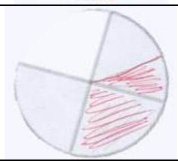
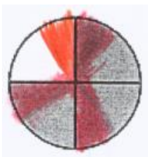
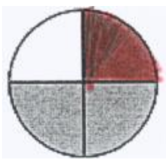
	Resposta	**Quantidade de alunos**
I	$\frac{3}{4}$	10 (correta)
II	$\frac{1}{4}$	3 (satisfatória)
III	$\frac{1}{3}$	5 (incorreta)

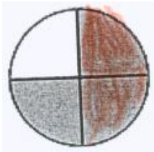
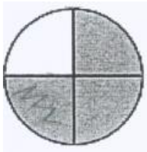
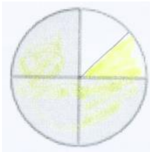
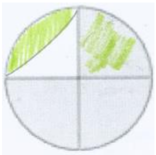
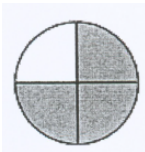
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

No Quadro 48 estão registradas as respostas dadas ao item (a). Consideramos que 13 alunos mobilizaram corretamente o conceito de equipartição, identificando quartos (Linhas I e II), onde os 10 estudantes relatados na Linha I responderam $\frac{3}{4}$ mobilizando o conceito de fração não unitária; os 3 alunos que responderam $\frac{1}{4}$ (Linha II) parecem terem levado em consideração a parte que não estava pintada de cinza.. Já os 5 alunos que responderam $\frac{1}{3}$ (Linha III do Quadro 48) não conseguiram mobilizar corretamente o conceito de fração no continuo (nem unitária, nem não unitária); a resposta $\frac{1}{3}$ sugere que apresentaram como numerador a parte sem pintar e como denominador a parte pintada, caso em que teria sido mobilizado implícitamente o conceito de razão.

No item (b) os estudantes deveriam mostrar alguma coerência com suas repostas ao item (a). Com relação à representação pictórica solicitada (Quadro 49), apenas 8 dos 18 alunos representaram de forma satisfatória (Linhas I a III do Quadro 49), sendo possível inferir que os conceitos de unidade e de metade foram mobilizados corretamente por esses alunos.

Quadro 49 – Representação de 8 alunos para determinar a metade da parte cinza do disco

	Representação Pictórica	**Quantidade de alunos**
I		6
II		1
III		1
IV		1
V		1

VI		2
VII		1
VIII		1
IX		1
X		3

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Cabe ressaltar a representação utilizada pelo estudante reportado na Linha III, que sugere ter mobilizando o teorema em ação sobre a metade de $\frac{3}{4}$ ser equivalente à soma das metades de cada um dos 3 quartos, resultando em três metades de quartos mobilizando provavelmente o raciocínio que, simbolicamente, se resume a: metade de $\frac{3}{4}$ = metade de ($\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{4}$) = metade de $\frac{1}{4}$ + metade de $\frac{1}{4}$ + metade de $\frac{1}{4}$; o estudante da Linha IV parece ter feito um raciocínio similar, no entanto equivocou-se ao toma tantas metades de $\frac{1}{4}$. O estudante reportado na Linha V, mobilizou o conceito de metade em apenas $\frac{1}{4}$ da figura, não completando o raciocínio. Já as representações dos estudantes reportados nas Linhas VI, VII, VII e IX são insatisfatórias e não conseguimos imaginar qual o esquema de pensamento mobilizado. Cabe destacar que o estudante reportado na Linha IX parece não ter bem conscientizado ainda o conceito de equipartição.

Ainda no item (b), foi solicitado que os estudantes registrassem numericamente a fração do disco que eles tinham pintado de vermelho. As repostas dos alunos estão registradas no Quadro 50.

Quadro 50 – Respostas dos alunos completando a expressão $\frac{1}{2}$ de ___, identificando a parte do disco que foi pintada de vermelho (item (b) da Atividade 22)

	Representação numérica	**Quantidade de alunos**
I	$\frac{3}{4}$ (correta)	10
II	$\frac{1}{4}$ (incorreto ou incoerente)	5
III	$\frac{1}{2}$ (insatisfatório)	1
IV	$\frac{3}{6}$(incorreto)	1
V	Não respondeu	1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Verificamos que apesar de aumentar o número de respostas corretas em relação ao Quadro 49 (de 8 para 10, conforme Linha I do Quadro 50) aumentou também o número de alunos que mobilizaram corretamente o conceito de equipartição em quatro partes (de 13 para 15, conforme Linhas I e II do Quadro 50), no entanto os 5 alunos relatados na Linha II não conseguiram representar numericamente a unidade; embora 3 deles tenham conseguido fazer a representação pictórica no item (a) (Linha I do Quadro 49), e percebemos que os outros 2 mostraram-se coerentes com suas respostas ao item (a) (Linha V e VI do Quadro 49). O estudante relatado na Linha III do Quadro 50 parece ter mobilizado apenas o conceito de metade, deixando incompleto o raciocínio. Já para o estudante relatado na Linha IV não conseguiu-se imaginar qual pode ter sido o esquema de pensamento por eles utilizado.

Uma parcela significativa dos alunos teve dificuldade de representar a forma fracionária que a parte pintada de vermelho representava do disco inteiro solicitada no item (c) da Atividade 22. No Quadro 51 temos as respostas dos alunos.

Quadro 51 – Respostas dos alunos para identificar a fração do disco que corresponde à parte pintada de vermelho. (item (c) da Atividade 22)

Resposta	Quantidade de aluno
$\frac{3}{8}$	3
$\frac{4}{8}$ (incorreto)	1
$\frac{1}{8}$ (incorreto)	1
$\frac{3}{4}$ (incorreto)	4
$\frac{2}{4}$ (incorreto)	2
$\frac{1}{2}$ (incorreto)	5
$\frac{3}{6}$ (incorreto)	1
Não respondeu	2

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Os 5 alunos relatados nas Linha I, II e III do Quadro 51 parece terem mobilizado corretamente o conceito de equipartição, no entanto 3 o aplicaram corretamente em combinação com o conceito de fração não unitária (Linha I). Como não foi solicitado que os alunos justificassem suas respostas não foi possível identificar os conceitos e teoremas em ação mobilizados pelos demais alunos.

As respostas aos itens (d) e (e) da Atividade 22 estão registradas no Quadro 52.

Quadro 52 – Respostas dos alunos registrando numericamente a fração do disco que corresponde à parte pintada de vermelho. (itens (d) e (e) da Atividade 22)

	Resposta Item (d)	**Quantidade de alunos**	**Resposta Item (e) representação numérica**	**Quantidade de alunos**
I	$\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ = $\frac{3}{8}$	4	$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$	3
II	$\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ = $\frac{3}{4}$ (incorreta)	1	-	-
III	$\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ = ?	1	-	-
IV	$\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{6}$ = $\frac{3}{4}$ (incorreta)	1	-	-
V	$\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ = $\frac{3}{6}$ (incorreta)	4	-	-

VI	$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{8}$ (coerente)	2	$\frac{1 \times 1}{2 \times 4} = \frac{1}{8}$ (coerente)	1
VII	$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{4}$ (incorreta)	2	-	-
VIII	$\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{6}$ = $\frac{3}{8}$ (incorreta)	1	-	-
IX	$\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{4}$ = $\frac{3}{4}$ (incorreta)	1	-	-
X	$\frac{1}{2}$ de $\frac{5}{6}$ = $\frac{5}{6}$ (incorreta)	1	-	-

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

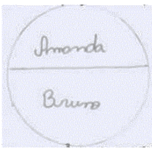
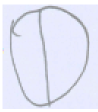
Os 4 estudantes relatados nas Linhas ou II, VII e X do Quadro 52 evidenciam em suas respostas ao item (d) o não reconhecimento da transformação de "$\frac{1}{2}$ de" para "metade de", única razão que encontramos para registrarem que "$\frac{1}{2}$ de algo" continua sendo "algo". Percebemos que 10 estudantes (Linhas I, II, III e V) conseguiram identificar a unidade como sendo $\frac{3}{4}$ do disco, embora, só 4 destes tenham conseguido responder que $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ = $\frac{3}{8}$ (Linhas I do Quadro 52). Os registros das Linhas V e VIII, sugerem que os estudantes tenham mobilizado como teorema em ação uma afirmação equivocada, usando a adição dos numeradores e dos denominadores. Destacamos que a resposta ao item (e) do estudante reportado na Linha VI foi coerente com sua resposta ao item (d)~~.~~ Já os estudantes das Linhas IV e IX, não nos deixam indícios sobre os esquemas de pensamento utilizados.de qual possa ter sido os teoremas mobilizados.

A representação numérica proposta no item (e) foi respondida por apenas 4 alunos, e de forma satisfatória (Linhas I e VI do Quadro 52); creditamos a dificuldade dos 14 outros à novidade introduzida pela definição de multiplicação de frações na atividade anterior e necessária aqui.

Surpreendeu-nos no item (a) da Atividade 22 o baixo desempenho (10 acertos em 18 respostas) dos estudantes, uma vez que o item requer apenas um conceito que já não deveria ser motivo de dúvida: o conceito de fração não unitária. Acreditamos que a mudança no formato de representação pictórica (do retângulo para o disco) possa ter dificultado o andamento dos demais itens da atividade, mas, segundo Duval, é a partir do contato com diversas representações que conseguimos aperfeiçoar e abstrair um novo conceito. Essa dificuldade parece ter respingado também na resolução dos demais itens. Por exemplo, no item (b) percebemos que a interpretação do que estava sendo solicitado não foi tão natural para os estudantes como esperávamos, levando em conta todo o trabalho sobre frações desenvolvido até aqui com os estudantes. De fato, apenas 10 dos 18 estudantes conseguiram traduzir numericamente o que estava sendo solicitado.

A **Atividade 23** foi realizada por 19 estudantes. Destes, 18 resolveram o item (a) de forma satisfatória. No Quadro 53 registramos as representações elaboradas pelos alunos.

Quadro 53 – Representação pictórica dos alunos para determinar a porção de xis que coube a cada um

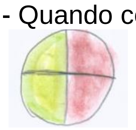
Linha	Representação Pictórica	Quantidade de alunos
I		1
II		1
III		5
IV		3
V		1
VI		5
VII		2

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Podemos observar uma diversidade nas representações: com exceção dos estudantes relatados nas Linhas IV e VI do Quadro 53, todos encontraram alguma forma de identificar, nas representações pictóricas utilizadas, a parte do xis que caberia a cada um. No entanto, os 18 alunos mobilizaram corretamente o conceito de metade. E apenas 1 aluno não realizou a representação.

No Quadro 54 estão registradas as respostas e justificativas do item (b) que foi proposto aos estudantes sem a expressão “Nestas condições”.

Quadro 54 – Respostas dos alunos sobre a possibilidade de Bruno comer $\frac{3}{4}$ do xis (item (b) da Atividade 23)

	Resposta	Quantidade de alunos	Justificativa
I	Sim (incorreto)	15	- Mas deixaria Amanda com $\frac{1}{4}$. (satisfatória) - É só ele cortar em quatro pedaços e comer três (satisfatória) - É só ele cortar em quatro pedaços e comer três (satisfatória) - Bruno comeu 3 pedaços e Amanda comeu 1 pedaço (insatisfatória) - Quando cortarmos o xis no meio e de novo assim  (incompleta) - É só Amanda comer menos (insatisfatória) - É só fazer mais um risco no meio (incompleta)
			- É só cortar o xis (insatisfatória)
			- Se ele dividir o pedaço dele em quatro (incorreta)
			- Pois o xis é grande (insatisfatória)
			- Porque está certa a resposta (incorreta)
II	Não	3	- Porque a Amanda comeria a outra metade (incompleta)
			- Pois ele deveria comer no máximo ½ xis (correta)
III	Não respondeu	1	-

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Inicialmente deve-se alertar que o enunciado do item (b) tinha como resposta esperada um “não”, como bem explicou uma estudante “Não, pois ele deveria comer no máximo $\frac{1}{2}$ xis” (Linha II do Quadro 54). De fato, havia aqui a possibilidade de que os estudantes mobilizassem a comparação entre metade e a fração $\frac{3}{4}$ desvinculada da situação, o que a maioria não fez. Com a leitura das justificativas, precisamente as que integram a Linha I que foram consideradas satisfatórias, demo-nos conta de que as condições iniciais do enunciado não foram consideradas pelos estudantes. Por isso, numa tentativa de reiterar que o enunciado deve ser cuidadosamente lido, a redação do item (b) sofreu alteração, sendo incluído o alerta “Nestas condições”. Os 15 alunos relatados na Linha I do Quadro 54 parecem ter desconsiderado a primeira frase do enunciado. Se isto foi de fato o que aconteceu, então 3 desses estudantes justificaram de forma coerente, mobilizando os conceitos de equipartição e de fração não unitária. O estudante da III não se posicionou com relação ao item (b).

Quadro 55 – Representação pictórica apresentada pelos alunos para representar $\frac{3}{4}$ da metade do xis (item (c) da Atividade 23)

Linha	Representação pictórica	Quantidade de alunos
I		1
II		1
		2
III	 (insatisfatórias)	3
	 (insatisfatórias)	1
	 (insatisfatórias)	2
	 (insatisfatórias)	1
	 (insatisfatórias)	1
IV	 (incorreta)	1

V	 (incorreta)	1
	 (incorreta)	1
VI	 (insatisfatória)	1
VII	 (incorreta)	1
VIII	$\frac{3}{8}$ (satisfatória)	2

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

No Quadro 55, registramos as representações pictóricas construídas pelos 19 alunos como resposta ao item (c) da Atividade 23. Analisando as Linhas I e II, percebemos que foi mobilizado corretamente o conceito de partes de partes de uma unidade, bem como o teorema em ação sobre como determiná-las; foram também mobilizados o conceito de equipartição de fração não unitária, sendo que o estudante relatado na Linha I mobilizou também o conceito de equipartição sobre a unidade “xis”. As representações na Linha III foram consideradas insatisfatórias porque, apesar de ser possível perceber que o conceito em ação de partes de partes de uma unidade esteve presente no esquema de pensamento destes estudantes, o mesmo não ocorreu com o conceito de equipartição embutido no conceito de fração (a divisão foi em 4 partes, porém não todas de mesma área). A representação registrada na Linha IV sugere que tenha ocorrido a mobilização do conceito de partes de partes de uma unidade, contudo não foram considerados os conceitos de equipartição (a divisão foi em 4 partes, porém não todas de mesma área nem apenas sobre a metade) nem de unidade, por isso foi considerada incorreta. As representações registradas na Linha V foram também consideradas incorretas, pois é possível perceber que o conceito de unidade não foi mobilizado e o conceito de equipartição parece ter sido mobilizado apenas pelo segundo estudante, ainda que equivocando-se com a unidade. A representação registrada na Linha VI foi considerada insatisfatória, pois, apesar de evidente a mobilização do conceito de equivalência, ele foi mal aplicado: parece que o estudante equiparticionou cada quarto em quatro partes, pintando 3 partes de um quarto no lugar de três quartos da metade, por isso sua resposta foi $\frac{3}{16}$. O mesmo raciocínio parece ter sido utilizado na representação registrada na Linha VII, no entanto é evidente uma mobilização equivocada da representação numérica. Apesar de não apresentar a representação pictórica conforme solicitado, percebe-se que os 2 estudantes relatados na Linha VIII mobilizaram corretamente a representação numérica por isso consideramos a resposta satisfatória, ainda que antecipando a resposta ao item (d).

Quadro 56 – Resposta dos alunos para indicar a fração do xis que representa $\frac{3}{4}$ da metade (item (d) da Atividade 23)

	Resposta	**Quantidade de alunos**
I	$\frac{3}{8}$ (correta)	8
II	$\frac{3}{4}$ da metade (insatisfatória)	1
III	$\frac{3}{4}$ (incorreta)	6
IV	$\frac{3}{5}$ (incorreta)	3
V	$\frac{3}{16}$ (coerente)	1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

As respostas obtidas no item (d) da Atividade 23 estão registradas no Quadro 56. É possível perceber que 8 alunos responderam corretamente a questão, mobilizando corretamente o conceito de fração não unitária (Linha I). O aluno relatado na Linha II, ao repetir a informação “$\frac{3}{4}$ da metade”, não mobilizou qualquer conceito ou teorema. Os 3 alunos relatados na Linha III, deixam implícito que não mobilizaram o conceito de equipartição. A resposta do estudante da Linha V foi coerente com sua reposta ao item (c) (Linha VI do Quadro 56). As respostas dos 3 estudantes reportados na Linha IV não nos sugeriu indícios de quais teoremas ou conceitos tenham sido mobilizados.

Quadro 57 – Resposta dos alunos para a multiplicação: $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{2}$ do xis (item (e) da Atividade 23)

	Resposta	Quantidade de alunos
I	$\frac{3}{8}$ do xis.	10
II	$\frac{3}{6}$ do xis.	6 (incorreta)
III	$\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{2}$ do xis = $\frac{4}{6}$ do xis	1 (incorreta)
IV	$\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{2}$ do xis = $\frac{1}{2}$ do xis.	1 (incorreta)
V	$\frac{18}{3}$ do xis.	1 (incorreta)

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

No Quadro 57 estão registradas as respostas dos alunos ao item (e). Consideramos que 10 dos 19 alunos que realizaram a atividade mobilizaram de forma satisfatória o conceito de multiplicação de frações ao responderem "$\frac{3}{8}$ do xis" (Linha I); os 6 alunos relatados na Linha II provavelmente mobilizaram, para chegar ao denominador 6, o teorema em ação relativo à adição de frações, sendo incoerentes com suas respostas no item (d); já o aluno relatado na Linha III, ao responder $\frac{4}{6}$, parece ter mobilizado um teorema em ação de enunciado inválido, fazendo uso da adição dos numeradores e dos denominadores. Para as respostas registradas nas Linhas IV e V não nos foi possível identificar quais poderiam ter sido os conceitos e teoremas utilizados pelos autores em seus esquemas de pensamento. No entanto chama-nos a resposta dos estudantes reportado na Linha IV, para quem o resultado para "três quartos de tanto" ter resultado o "tanto", evidenciando um não entendimento do conceito de "fração de alguma coisa"; analogamente, a fração imprópria $\frac{18}{3}$ dada como resposta na Linha V evidencia também um não entendimento do conceito de "fração própria de uma fração também própria".

A partir da análise das respostas à Atividade 23, consideramos que 10 dos 19 alunos parecem dominar o conceito "fração de fração" até o momento e identificar que $\frac{3}{4}$ da metade não é o mesmo que $\frac{3}{4}$ da unidade, bem como mobilizar o conceito de multiplicação de frações.

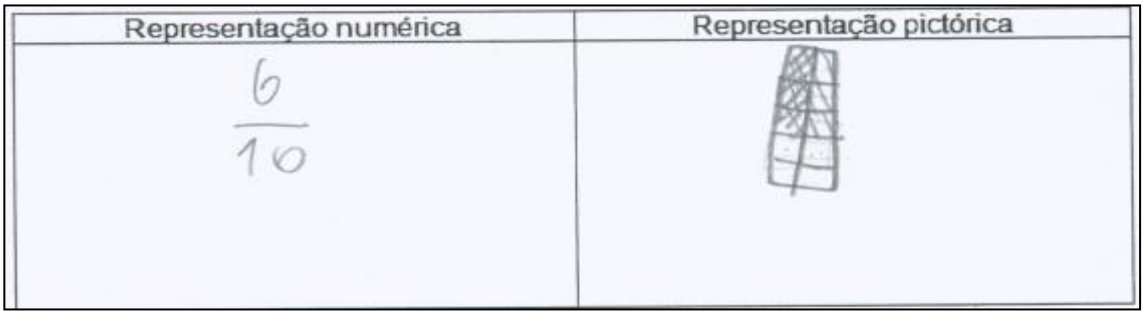
Quadro 58 – Respostas dos alunos para a representação numérica correspondente a $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{5}$ (item (a) da Atividade 24)

	Resposta	**Quantidade de aluno**
I	$\frac{1}{2} \begin{matrix}x\\x\end{matrix} \frac{3}{5} \begin{matrix}=\\=\end{matrix} \frac{3}{10}$ (satisfatória)	2
II	$\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$ (satisfatória)	10
III	$\frac{3}{10}$ (satisfatória)	4
IV	$\frac{6}{10}$ (parcialmente satisfatório)	3

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A **Atividade 24** foi realizada por 19 alunos, e as representações numéricas dadas como resposta ao item (a) estão registradas no Quadro 58. Consideramos que 16 alunos deram resposta satisfatória (Linhas I, II e III), no entanto apenas os relatados nas Linhas I e II evidenciaram ter mobilizando o conceito em ação multiplicação de frações. No entanto, a partir dos registros, apenas podemos afirmar que os 10 alunos relatados na Linha II parecem ter mobilizado corretamente esse conceito, uma vez que os 2 alunos relatados na Linha I não registraram de forma correta tal operação e os 4 alunos relatados na Linha III não explicitaram os esquemas de pensamento que os permitiram chegar aos $\frac{3}{10}$. Consideramos a resposta $\frac{6}{10}$ dada por 3 alunos relatados na Linha I parcialmente satisfatória, pois conseguimos verificar pela representação pictórica utilizada (Figura 32) que os alunos mobilizaram o conceito de fração de fração, contudo não mobilizaram corretamente a contagem das partes que foram tomadas da unidade, sugerindo que apenas estão aplicando um procedimento e que ainda não compreenderam o significado de $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{5}$.

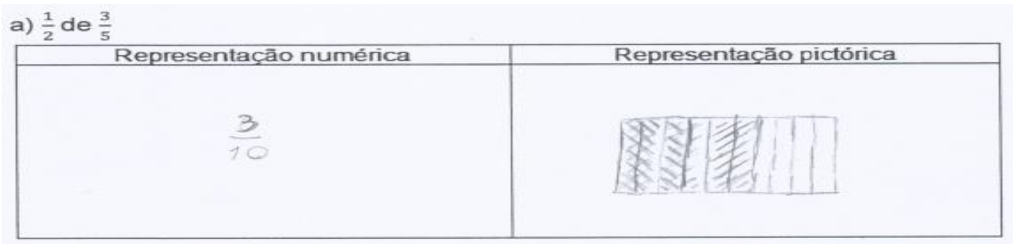
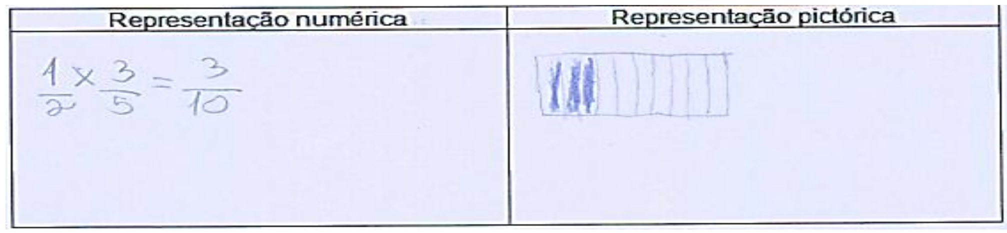
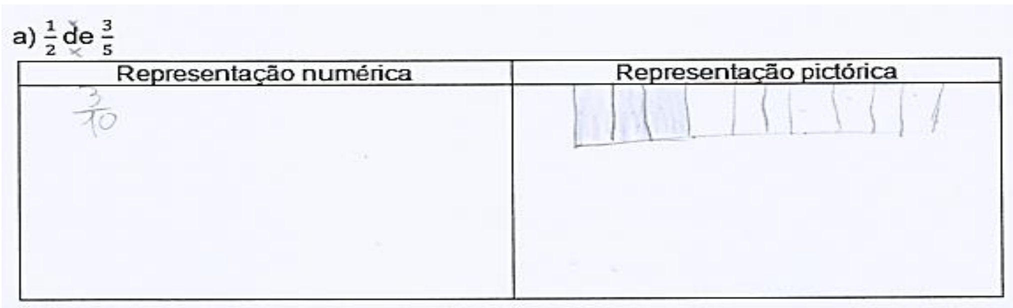
Figura 32 – Resposta equivocada de um aluno para representação numérica e pictórica de $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{5}$ (item (a) da Atividade 24)



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A forma como os 16 alunos relatados nas Linhas I, II e III do Quadro 58 representaram a expressão pictoricamente pode ser observada no Quadro 59.

Quadro 59 – Respostas de 16 alunos ao item (a) da Atividade 24

	Representação numérica e pictórica
I	
II	
III	
IV	

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Podemos constatar que alguns alunos mobilizaram o conceito de multiplicação de frações, o teorema em ação de identificar partes de partes de um inteiro e de equivalência (Linhas I e II, do Quadro 59); destacamos a diferença na forma de divisão dos alunos relatados nas Linhas I e II: o primeiro fez uso de linhas verticais para identificar a fração $\frac{3}{5}$ e depois fez uso de linha horizontais para determinar a metade, enquanto o segundo fez uso exclusivamente de linhas verticais. Já as representações pictóricas das Linhas III e IV não deixam claro o esquema de pensamento utilizado pelos autores para chegar a este resultado, provavelmente tenham usado exclusivamente linhas verticais, como o estudante relatado na Linha II.

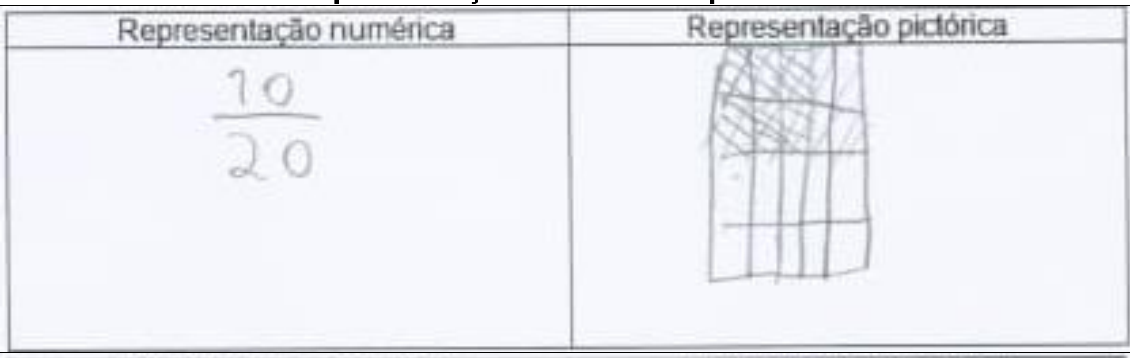
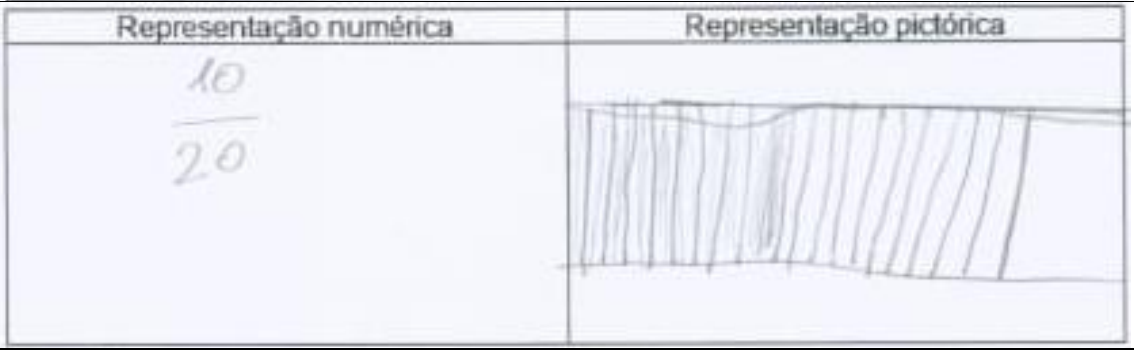
Quadro 60 – Resposta dos alunos para a representação numérica de $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{4}$ (item (b) da Atividade 24)

	Resposta	Quantidade de aluno
I	$\frac{3 \times 2}{5 \times 4} = \frac{6}{20}$ (satisfatória)	1
II	$\frac{3}{5} \text{X} \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$ (correta)	10
III	$\frac{6}{20}$ (satisfatória)	4
IV	$\frac{10}{20}$ (parcialmente satisfatória)	3
V	$\frac{3}{9}$ (insatisfatório)	1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

As respostas obtidas do item (b) para a representação numérica de $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{4}$ podem ser observadas no Quadro 60. Verificamos que 15 dos 19 alunos chegaram à resposta correta, 11 deles mobilizando o teorema em ação relativo à operação de multiplicação de números naturais (Linhas I e II). No entanto apenas 10 parecem ter mobilizado corretamente o conceito de multiplicação de frações, uma vez que o aluno relatado na Linha I ainda não registrou de forma correta tal operação. A resposta $\frac{6}{20}$ dada diretamente pelos 4 alunos relatados na Linha III foi considerada satisfatória, pois, apesar de correto o resultado, os alunos não explicitaram o esquema de pensamento utilizado para chegar a ele, principal objetivo da atividade. Consideramos a resposta $\frac{10}{20}$ (Linha IV) parcialmente satisfatória, pois conseguimos verificar pela representação pictórica utilizada por um dos três alunos e registrada na Linha I do Quadro 61 que foram corretamente mobilizados os conceitos unidade, de equipartição e de fração de fração; contudo, esse aluno não soube transformar em fração da unidade o resultado da ação de tomar $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{4}$ da mesma, sugerindo que apenas está aplicando um procedimento. Já o segundo desses três alunos não deixou explícito ter conseguido levar a cabo a ação de tomar $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{4}$. Cabe destacar que esses dois estudantes são os mesmos alunos que responderam $\frac{6}{10}$ no item (a).

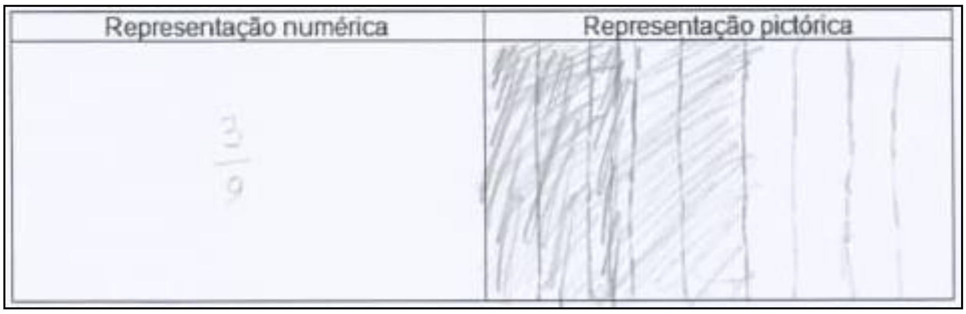
Quadro 61 – Resposta equivocada de dois alunos para as representações numérica e pictórica para $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{4}$ (item (b) da Atividade 24)

<table>
<tr><th></th><th>Representação numérica e pictórica</th></tr>
<tr><td>I</td><td>
</td></tr>
<tr><td>II</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Na Figura 33 apresentamos a representação numérica e a representação pictórica do aluno relatado na Linha V do Quadro 60). Não conseguimos identificar qual foi o esquema de pensamento mobilizado para chegar à fração $\frac{3}{9}$.

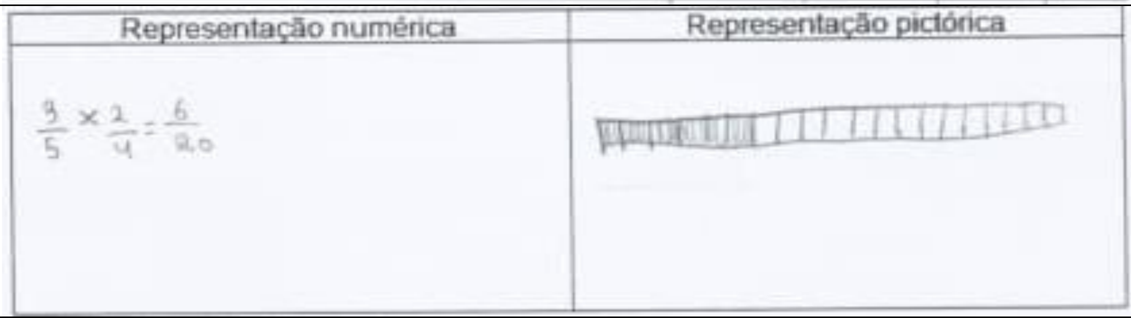
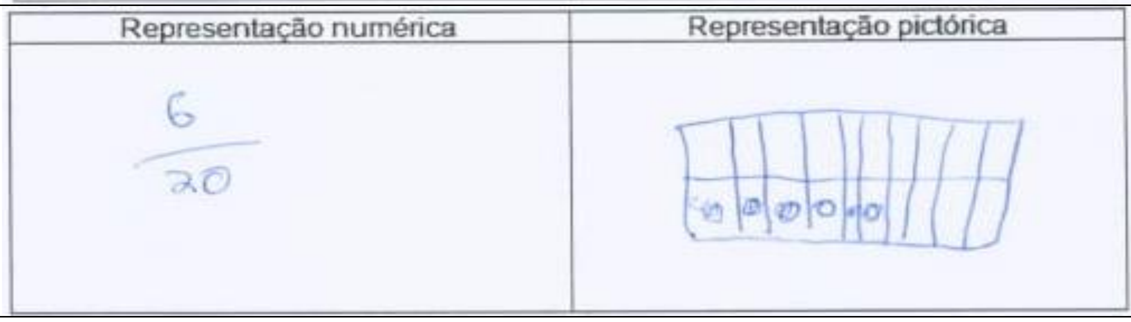
Figura 33 – Resposta equivocada de um aluno para representação numérica e pictórica de $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{4}$ (item (b) da Atividade 24)



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

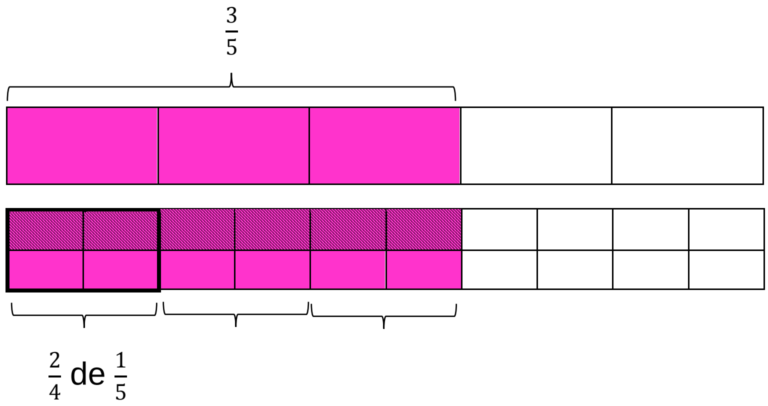
No Quadro 62 temos as representações pictóricas apresentadas pelos 15 alunos cujas representações numéricas foram consideradas corretas ou satisfatórias (Linhas I, II e III do Quadro 60).

Quadro 62 – Respostas de alguns alunos ao item (b) da Atividade 24

Nº	Representação numérica e pictórica
I	
II	
III	
IV	
V	

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

O autor da representação da Linha I do Quadro 62 mobilizou sem dúvida os conceitos de unidade e de equipartição, e parece ter mobilizado também o conceito de multiplicação de frações bem como o seu processo algorítmico, pois a representação parece indicar que o estudante determinou equivocadamente $\frac{2}{4}$ de $\frac{3}{5}$ no lugar de $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{4}$ como indicado a seguir



Para as representações pictóricas das Linhas II, III, IV e V parece ter sido evocado o conceito de multiplicação de frações seguido do conceito de fração não unitária, no lugar do teorema em ação sobre o algoritmo para a determinação de “fração de fração”.

As respostas e esquemas de pensamento dos 19 alunos para representação numérica de $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ (item (c) da Atividade 24) estão registradas no Quadro 63. Percebemos que as respostas e esquemas de pensamento para o item (c) mantiveram o mesmo padrão do item (b).

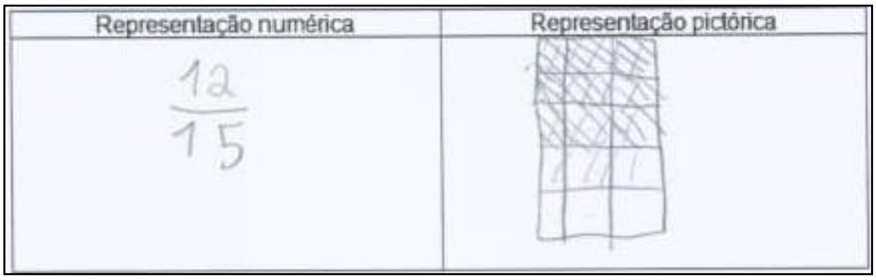
Quadro 63 – Resposta dos alunos para representação numérica de $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ (item (c) da Atividade 24)

	Resposta	**Quantidade de alunos**
I	$\frac{2}{3}$ x $\frac{4}{5}$ = $\frac{8}{15}$ (satisfatória)	2
II	$\frac{2}{3}$ X $\frac{4}{5}$ = $\frac{8}{15}$	9
III	$\frac{8}{15}$ (satisfatória)	4
IV	$\frac{12}{15}$ (parcialmente satisfatória)	3
V	$\frac{2}{8}$ (insatisfatório)	1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Destacamos apenas a representação pictórica e numérica dos 4 alunos relatados nas Linhas IV e V do Quadro 63. Podemos perceber, pela representação pictórica apresentada (Figura 34), que os 3 alunos relatados na Linha IV equivocaram-se na ação de pintar "$\frac{2}{3}$ de", apesar de terem mobilizado corretamente os conceitos de unidade e de equipartição.

Figura 34 – Resposta equivocada para representação numérica e pictórica de $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ (item (c) da Atividade 24)



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

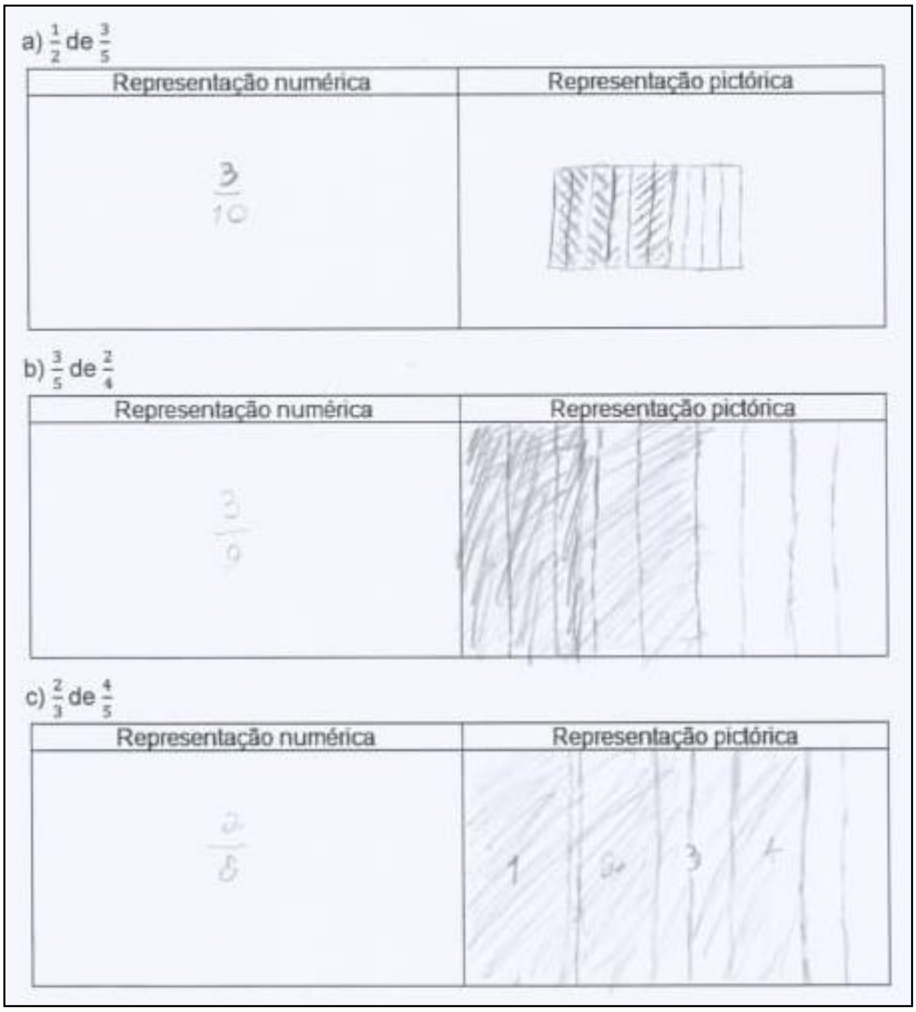
A resposta $\frac{2}{8}$ dada pelo aluno relatado na Linhas V do Quadro 63 foi considerada insatisfatória (Figura 35) porque não ficou explicitado o esquema de pensamento utilizado a partir da mobilização correta da ação de determinar $\frac{4}{5}$ da unidade.

Figura 35 – Resposta de um aluno para representação numérica e pictórica de $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ (item (c) da Atividade 24)

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Tentamos identificar o esquema de pensamento utilizado por este estudante, analisando as respostas dadas por ele nos três itens da Atividade 24 (Figura 36), e percebemos que ele sempre fez uso de divisões e subdivisões na vertical, o que justificaria o sucesso na resposta ao item (a) e a dificuldade e insucesso nos itens (b) e (c).

Figura 36 – Representação numérica e pictórica de um estudante em toda a Atividade 24



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

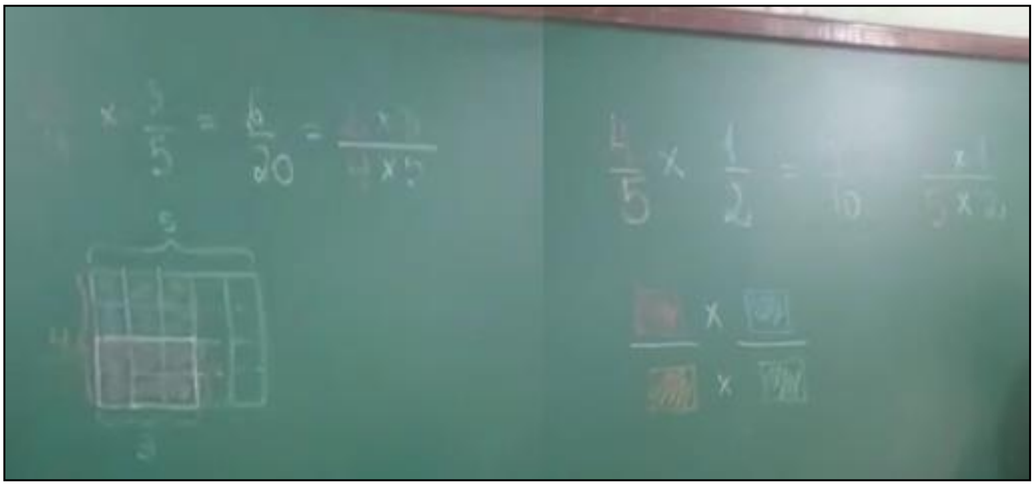
Na Atividade 24 a maior parte dos alunos apresentou um bom desempenho. De fato:

- pela representação pictórica solicitada foi possível detectar que muitos alunos mobilizaram corretamente o conceito de unidade, essencial na multiplicação de fração por fração;
- para a ação “fração de” muitos estudantes fizeram a nova equipartição usando linhas na direção perpendicular às já utilizadas para a equipartição original; com isso, evitaram a provável confusão enfrentada pelo aluno relatado na Figura 36;

– ao oportunizar-se a transição nas formas de representação proposta por Duval (no caso, representação em palavras, representação numérica e representação pictórica), foi possível perceber o domínio ou a falta de domínio na multiplicação de frações por parte dos estudantes.

A **Atividade 25** teve um momento inicial em conjunto com os 20 estudantes presentes e que incluiu registros no quadro negro. A primeira etapa consistia em analisar em conjunto os procedimentos e padrões adotados nas Atividades 19, 20, 21, 22 e 23, e para isso fomos revisitando as atividades que estavam coladas nos cadernos dos alunos e fomos refazendo-as no quadro. Só então foi entregue aos alunos uma folha com o quadro da Atividade 25, aproveitando-o para convidar os alunos a tentarem observar algum padrão nas expressões revisitadas; auxiliar na visualização do processo e na determinação de um padrão, fomos destacando com cores diferentes e, no segundo exemplo, além das cores, começamos a utilizar quadrinhos coloridos oportunizando aos estudantes um momento de generalização. Foi explicado a eles que podemos imaginar qualquer valor para os quadradinhos coloridos, o que ajudou os estudantes a perceberem que, independente dos valores, a forma de calcular será sempre a mesma (Figura 37).

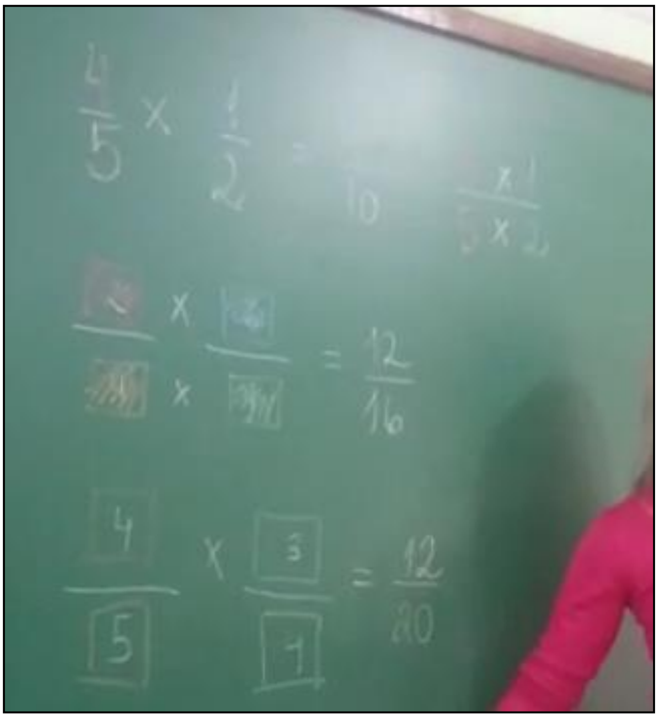
Figura 37 – Primeiros passos para a generalização do processo que leva ao algoritmo para a multiplicação de frações (Atividade 25)



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Para que os estudantes pudessem melhor perceber que os quadradinhos coloridos podem assumir valores quaisquer e que o processo para obtenção do resultado seria o mesmo, a professora solicitou que, aleatoriamente, os alunos indicassem valores para ocupar cada quadradinho. A Figura 38 traz uma sugestão de valores dada pelos estudantes.

Figura 38 – Primeiras ideias mobilizadas na construção da generalização



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Só depois das reflexões em conjunto e dos diálogos com a professora foi entregue aos alunos uma folha com os itens (a), (b) e (c) da Atividade 25 para serem respondidos individualmente. As respostas ao item (a) estão registradas no Quadro 64.

Quadro 64 – Resposta dos alunos para a operação utilizada para calcular "fração de fração" (item (a) da Atividade 25)

Resposta	Quantidade de alunos
Multiplicação	16
Vezes (satisfatória)	4

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Percebemos que os 20 alunos conseguiram identificar que a operação realizada é multiplicação.

Quadro 65 – Resposta dos alunos sobre a comparação do resultado obtido com a parte da unidade considerada inicialmente (item (b) da Atividade 25)

Resposta	**Quantidade de aluno**	**Justificativa**		**Quantidade de aluno**
Menor	18	I	- Menor é quando você pega uma parte de, $\frac{2}{3}$, quando é maior é quando você precisa de mais de 1 unidade como $\frac{4}{3}$.	3
		II	- Porque está dividindo a divisão ex: $\frac{4}{5}$ de $\frac{1}{2}$ (parcialmente Satisfatória)	1
		III	- São todos menor. Porque precisaria de mais de uma pizza, por exemplo. (parcialmente Satisfatória)	1
		IV	- O primeiro é sempre menor porque tem menos divisões. (insatisfatória)	1
		V	- Porque quando vai sendo mais quadradinhos fica menor. (incorreta)	1
		VI	- Porque com mais quadradinhos o pedaço fica menor. (incorreta)	1
Maior	2 (incorreta)	VII	-	2

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

O item (b) da Atividade 25, oportunizou a discussão sobre a ampliação para o universo das frações de um válido no universo dos números naturais, tem suas respostas registradas no Quadro 65. Dezoito dos 20 alunos responderam corretamente que o produto obtido em cada situação representava um valor menor que a unidade considerada inicialmente. Contudo, ainda percebemos a dificuldade e a resistência que os alunos têm para expressarem por escrito suas justificativas, tanto, que apenas 8 dos 20 alunos justificaram seu posicionamento. Destes, o que consideramos correto foram os 3 alunos relatados na Linha I que justificaram "*menor é quando você pega uma parte de,* $\frac{2}{3}$*, quando é maior é quando você precisa de mais de 1 unidade como* $\frac{4}{3}$*"* e que, além de justificarem o porquê de o resultado ser menor, deram o *spoiler* para a nossa próxima seção (fração imprópria multiplicada por fração). As 5 outras justificativas (Linhas II a VI) foram consideradas insatisfatórias ou incorretas; as incorretas por deixarem explicito o foco exclusivamente no número de partes (denominador da fração) (Linhas V e VI).

O item (c) é novamente um estímulo à reflexão e à argumentação. As respostas obtidas estão no Quadro 66.

Quadro 66 – Respostas dos alunos sobre a comparação do resultado obtido com a parte da unidade considerada inicialmente, sem observar o desenho (item (c) da Atividade 25)

	Resposta	**Quantidade de alunos**
I	Somando	7
II	Sei lá tenho razão só	1
III	A primeira está menor dividida que o último	2
IV	Só multiplicando uma pela outra	1
V	Podemos multiplicar as frações	1
VI	Sim	4
VII	Sim. Pois por exemplo da folha que a professora passou são menores, mas, podem ter contas que deem resultado maior	1
VIII	Porque quando multiplicamos vai aumentando e ficando pequena	1
IX	Porque sempre que multiplicar os pedaços vão ficando menor	1
X	O primeiro está menor dividido que o último	1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

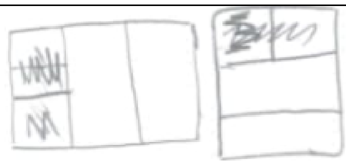
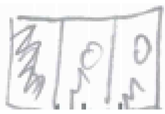
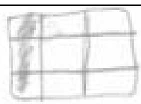
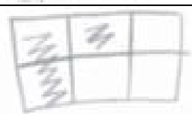
Pode-se observar que todos os estudantes tentaram responder a questão; 15 deles basearam suas respostas nas operações de adição, multiplicação ou divisão (Linhas I, III, IV, V, VIII, IX e X) quando o que deveriam observar é que estavam pegando era uma parte menor do que 1 de “algo”, portanto o resultado deveria ser menor que este “algo”. No entanto, consideramos bem sucedida a introdução à ruptura da ideia de que a multiplicação sempre dará um resultado maior, situação que fica evidente na justificativa do estudante relatado na Linha VII que reconhece que existem questões que ainda não foram trabalhadas.

A Atividade 25 foi proposta com o intuito de fechamento da seção 3. Com ela, consideramos que muitos alunos já associam multiplicação de frações com o conceito explorado de “fração de fração”, e que ainda estão no processo de reconhecimento que em uma multiplicação de frações, o produto pode ser menor do que um dos fatores (ou ambos), revelando-se necessário que esta questão seja retomada e aprofundada.

Inicialmente cabe ressaltar que a situação apresentada na **Atividade 26** foi originalmente proposta com o seguinte preâmbulo:

“Pedro reservou $\frac{1}{3}$ do seu salário para gastos com moradia. No final do mês, percebeu que o aluguel da sua casa havia aumentado, constatando que gastou $\frac{3}{2}$ da quantia prevista para moradia.” Também os itens (a) e (b) foram propostos em ordem trocada. Fazemos, a seguir, o relato e a análise na ordem proposta aos estudantes.

Quadro 67 – Respostas dos alunos sobre valor gasto com moradia (item (b) da Atividade 26)

Resposta	Quantidade de alunos	Justificativa		Quantidade de alunos
Ele gastou mais do que previa	7	I	 (satisfatória)	1
		II	Porque é mais uma parte a mais (incompleta)	5
		III	- Não justificou	1
O aluguel aumentou	3	IV	- Porque ele usou $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{2} = \frac{3}{6}$ (incorreta)	1
		V	- Porque ele usou de $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{3} = \frac{3}{6}$ (incompleta)	2
O salário é $\frac{1}{3}$ e a moradia $\frac{1}{2}$ (incorreta)	2	VI	-	-
Ele extrapolou porque gastou (incompleta)	1	VII	-	-
Deu todo o salário dele (incorreta, apesar de dar a entender que gastou mais que o previsto)	1	VIII		1
$\frac{3}{6}$ (incompleta)	3	IX	-	-
$\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{2} = \frac{3}{6}$ (incompleta)	4	X		1
		XI		1
$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ (incorreta)	1	XII	-	-

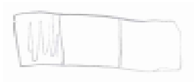
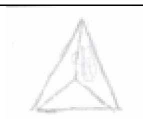
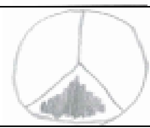
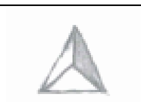
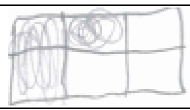
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Os resultados obtidos para o item (b) estão registrados no Quadro 67. Percebe-se que 12 dos 22 alunos que realizaram a atividade compreenderam que o valor gasto com moradia foi maior do que havia sido previsto (Linhas I, II, III, IV, V, VII e VII), contudo apresentaram dificuldades em justificar. As justificativas das Linhas I e II foram consideradas satisfatórias, levando em conta a falta de prática dos estudantes em justificar, mesmo o enunciado já contendo a resposta ao item (a) e o objetivo ser de o aluno já refletir sobre $\frac{3}{2}$ de “algo” ser efetivamente maior do que o “algo”, objetivo que se revelou não alcançado.

Durante o momento de análise, percebemos que talvez o item (b) devesse anteceder o item (a), porque no item (b) parece estar-se ajudando o aluno a organizar seu pensamento. Por isso a ordem foi trocada no Produto Final e evitou-se anunciar no enunciado que o aluguel sofreu um aumento, pois concluímos que esta informação deve ser concluída pelo estudante. Assim, foi retirada do preâmbulo a expressão “percebeu que o aluguel da sua casa havia aumentado”.

No Quadro 68 estão registradas as representações pictórica e numérica apresentadas pelos alunos para a parte do salário que foi prevista para ser gasto com moradia.

Quadro 68 – Respostas dos alunos sobre a fração do salário previsto para ser gasto com moradia (item (b) da Atividade 26)

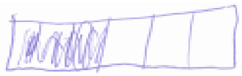
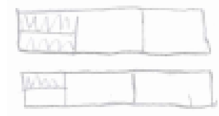
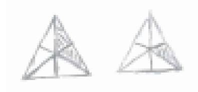
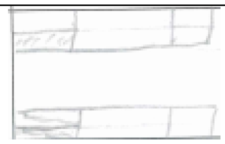
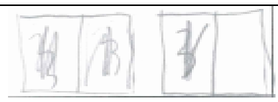
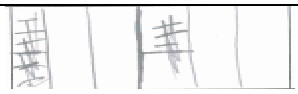
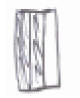
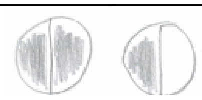
Representação numérica	**Quantidade de alunos**	**Representação pictórica**		**Quantidade de alunos**
$\frac{1}{3}$ (correta)	20	I		10
		II		1
		III		7
		IV	-	2
1 (satisfatória)	1	V		1
$\frac{1}{3}\ \frac{3}{2} = \frac{3}{6}$ (incorreta)	1	VI		1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Com relação à representação pictórica solicitada no item (b), dos 22 alunos, 20 identificaram de forma correta a representação numérica para a parte destinada ao salário, e, destes, 18 alunos mobilizaram o conceito de fração no continuo realizando corretamente conversão da representação numérica $\frac{1}{3}$ para a representação pictórica, que variou entre retângulos, discos e triângulo (Linhas I, II e III do Quadro 68). O aluno relatado na Linha V do Quadro 68 mobilizou corretamente o conceito de fração ao apresentar a representação pictórica, contudo, a sua representação numérica foi considerada satisfatória porque imaginamos que a resposta “1” subentende “1 parte” (lembrando que o termo “parte” foi utilizado no enunciado original no item (d), no lugar de “fração”), mas não especifica uma de quantas partes. Já o aluno relatado na Linha VI parece não ter lido o enunciado com atenção, antecipando a reposta do restante da tabela.

As respostas relativas à parte do salário que de fato foi gasta com moradia estão registradas no Quadro 69.

Quadro 69 – Respostas dos alunos sobre a fração afinal gasta com moradia (item (b) da Atividade 26)

Representação numérica	**Quantidade de alunos**	**Representação Pictórica**		**Quantidade de alunos**
$\frac{3}{6}$	4	I		3
		II		1
$\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{3}$ Satisfatória	4	III	 insatisfatória	3
		IV	 insatisfatória	1
$\frac{3}{12}$ Insatisfatória	1	V	 insatisfatória	1
$\frac{3}{2}$ Incorreta	12	VI	 Incorreta	2
		VII	 Insatisfatória	1
		VIII	 Incorreta	1
		IX	 Incorreta	7
		X	-	1
$\frac{2}{3}$ Incorreta	1	XI	-	-

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

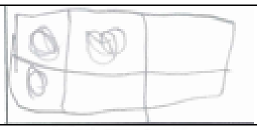
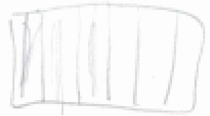
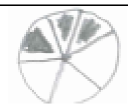
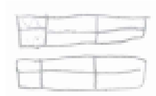
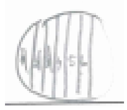
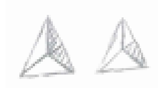
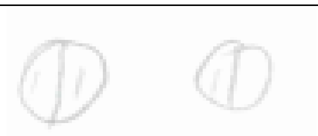
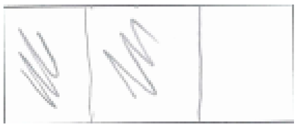
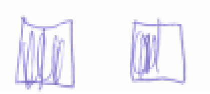
Dos 22 alunos, 4 responderam a questão com a representação numérica na forma de fração (Linhas I e II do Quadro 69), como na questão anterior; e antecipando a próxima pergunta. Apesar de a resposta esperada ser por nós ser $\frac{3}{2}$ x $\frac{1}{3}$, a resposta foi considerada correta.

A resposta dada na Linhas III e IV foi considerada insatisfatória porque, apesar de evidenciarem uma boa transição da representação numérica para a representação escrita e da representação escrita para a representação pictórica, os estudantes não explicitaram a fração da unidade, ou seja, esses 4 alunos não deixaram explícito que reconhecem a que fração da unidade salário corresponde este valor.

Já o aluno relatado na Linha V do Quadro 69 equivocou-se com o conceito de unidade. De fato, parece ter mobilizado corretamente os conceitos de fração imprópria e de “fração de” para construir a representação pictórica, a resposta para a representação numérica sugere que as duas unidades desenhadas foram consideradas uma só, por isso a equipartição em 12 partes.

A resposta $\frac{3}{2}$ dada por 12 alunos foi considerada incorreta, sendo que 10 deles deixaram evidente na representação pictórica que estavam levando em conta apenas o dado $\frac{3}{2}$ no lugar de $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{3}$ (Linhas VI,VIII e IX do Quadro 69). O estudante relatado na Linha VII representou $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{3}$ no entanto não deixou explícito na representação pictórica quem é para ele a unidade salário.

Quadro 70 – Fração do salário que foi efetivamente gasta em moradia (item (a) da Atividade 26)

<table>
<tr><th>Representação numérica</th><th>Quantidade alunos</th><th>Linha</th><th>Representação pictórica</th><th>Quantidade alunos</th></tr>
<tr><td rowspan="6">$\frac{3}{6}$</td><td rowspan="6">10</td><td>I</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>II</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>III</td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>IV</td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>V</td><td>
Insatisfatória</td><td>2</td></tr>
<tr><td>VI</td><td>
Insatisfatória</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{3}{12}$
incorreta</td><td rowspan="2">2</td><td>VII</td><td>
Incorreta</td><td>1</td></tr>
<tr><td>VIII</td><td>
Incorreta</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\frac{2}{3}$
incorreta</td><td rowspan="3">6</td><td>IX</td><td>
Coerente</td><td>2</td></tr>
<tr><td>X</td><td>
Coerente</td><td>3</td></tr>
<tr><td>XI</td><td>-</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$\frac{3}{2}$
incorreta</td><td>3</td><td>XII</td><td>
Coerente</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$\frac{2}{9}$
incorreta</td><td>1</td><td>XIII</td><td>-</td><td>1</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

As respostas ao item (a) estão registradas no Quadro 70. Percebe-se que 10 dos 22 alunos mobilizaram corretamente a representação numérica da fração do salário que foi gasta em moradia; 7 desses alunos (Linhas I a IV) realizaram corretamente a conversão entre representação numérica e representação pictórica, mobilizando também o conceito de fração no contínuo; os 2 alunos relatados na Linha V mobilizaram o conceito de fração de fração ao apresentarem a representação pictórica, ainda que fazendo uso de duas unidades. Apesar de a resposta estar correta, o aluno relatado na Linha VI repartiu a unidade em 6 pedaços quaisquer e pintou 3, sem mobilizar o conceito de equipartição. Destacamos ainda que, apesar de os resultados $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$ estarem incorretos, ao realizarem a conversão de representação numérica para representação pictórica, 8 mantiveram a coerência entre sua resposta numérica e a representação pictórica (Linha IX, X e XII).

No item (c) da Atividade 26, causou-nos estranheza a alteração das respostas e de suas frequências (Quadro 71) comparadas ao item (a) registradas no Quadro 70. Dos 22 alunos, 11 responderam corretamente, que a fração do salário de Pedro foi gasto em moradia foi "$\frac{3}{6}$".

Quadro 71 – Que fração do salário de Pedro foi gasto em moradia (item (c) da Atividade 26)

Resposta	**Quantidade alunos**
$\frac{3}{6}$	11
$\frac{3}{2}$	1
$\frac{2}{3}$	5
$\frac{10}{12}$	1
$\frac{1}{2}$	2
Não respondeu	2

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

As diferentes respostas ao item (d) da Atividade 26 e suas justificativas estão registradas no Quadro 72.

Quadro 72 – Respostas dos alunos no item (d) da Atividade 26

Resposta	Quantidade de alunos	Justificativa		Quantidade de alunos
Não	10	I	- Pois ele tinha sobrando $\frac{2}{3}$, mas gastou mais do que previa (insatisfatória)	1
		II	- Vai sobrar $\frac{1}{3}$ (incorreta)	1
		III	- pegou $\frac{1}{2}$ do salário	1
Nem tanto (insatisfatória)	1	IV	- Foi um pouco mais do que $\frac{1}{3}$ (incompleta)	1
Sim (incorreta)	6	V	- Precisou de mais dinheiro (insatisfatória)	1
		VI	- Porque aumentou de $\frac{1}{3}$ para $\frac{3}{2}$ (incorreta)	1
		VII	- Extrapolou passou do salário dele (incorreta)	1
		VIII	- Porque o que ele gastou não foi planejado (insatisfatória)	2
Não respondeu	2	IX	-	-
$\frac{3}{6}$ (incompleta)	1	X	-	-

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

As respostas obtidas no item (d) foram coerentes com os itens anteriores, e se manteve a média de respostas corretas. De fato, dos 22 alunos, 10 responderam que o valor gasto não era maior do que o salário de Pedro (Linhas I, II, III do Quadro 72). No entanto, com relação às justificativas, destacamos a mobilização do conceito de fração equivalente pelo aluno relatado na Linha III, reconhecendo que $\frac{3}{6}$ é equivalente a $\frac{1}{2}$. O aluno relatado na Linha II sugere ter mobilizado a operação de subtração em seu esquema de pensamento, apesar de o valor $\frac{1}{3}$ estar incorreto. O aluno relatado na Linha IV não esclarece sua posição, apesar de, pela justificativa, acreditar-se que o "nem tanto" está subentendendo "não chegou a ultrapassar o salário".

Percebemos que boa parte dos alunos que responderam "Sim" parecem ter interpretado a questão como se tivéssemos perguntando se foi extrapolado o orçamento previsto (no lugar do salário de Pedro), daí suas justificativas foram coerentes (Linhas V e VIII do Quadro 72); essas justificativas sugerem a mobilização do conceito de parte de parte de uma unidade, uma vez que a fração efetivamente gasta extrapolou a fração prevista inicialmente.

O item (e) tem resposta aberta e evoca o primeiro contato dos alunos com a propriedade arquimediana. Apesar da pergunta revelar-se complexa para os estudantes, cabe ressaltar que não houve interferência da professora com relação às interpretações dos estudantes. As respostas dos alunos estão registradas no Quadro 73.

Quadro 73 – Respostas dos alunos à pergunta "Que fração da prestação poderia produzir um valor que ultrapassasse o salário de Pedro?" (item (d) da Atividade 26)

	Resposta	**Quantidade de alunos**
I	$\frac{4}{3}$ Incorreta	6
II	$\frac{7}{6}$ Incorreta	1
III	4 Satisfatória	3
IV	$\frac{6}{6}$ Incorreta	3
V	$\frac{3}{3}$ Incorreta	1
VI	$\frac{2}{4}$ Incorreta	1
VII	$\frac{3}{6}$ Incorreta	1
VIII	$\frac{1}{3}$ Incorreta	2
IX	$\frac{2}{3}$ Incorreta	1
X	Vezes Insatisfatória	1
XI	Não respondeu	2

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

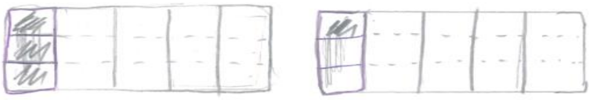
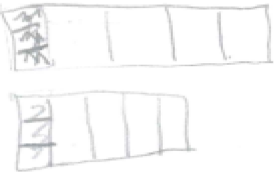
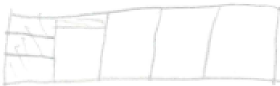
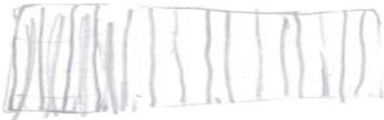
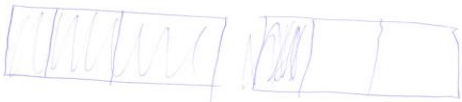
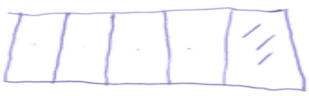
Para uma melhor análise dos esquemas de pensamento utilizados pelos estudantes, reconhecemos que deveríamos ter solicitado aos estudantes que justificassem suas respostas, para poder identificar se haviam efetivamente levado em conta "fração da prestação" conforme perguntado (o que requereria comparar o valor encontrado com a unidade) ou apenas "fração do salário" (situação em que qualquer fração imprópria seria uma resposta correta). Como $\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{3}$ = $\frac{4}{9}$ e $\frac{7}{6}$ de $\frac{1}{3}$ = $\frac{7}{18}$, pode-se perceber que todas as respostas foram incorretas, mesmo daqueles que efetivamente fizeram uso de frações impróprias em suas respostas "$\frac{4}{3}$" e "$\frac{7}{6}$" (Linhas I e II do Quadro 73). Contudo, podemos supor que estes 7 alunos levaram em consideração que a unidade (salário) estava dividido em terços e que portanto, tanto $\frac{4}{3}$ como $\frac{7}{6}$

extrapolariam o salário, tendo sido então mobilizando corretamente o conceito de fração imprópria. Com relação aos 3 alunos que responderam “4” como satisfatório (Linha III), imaginamos que estes pensaram no índice inicial onde o salário foi dividido em 3 partes e que, portanto, se pegar 4 dessas partes extrapolaria o salário. Outra possibilidade é eles terem pensado em “4 vezes”, resposta que também estaria correta.

Consideramos que, na Atividade 26, os alunos tiveram certa dificuldade em representar pictoricamente a “fração de fração”, em uma situação que envolve uma fração imprópria ($\frac{3}{2}$ x $\frac{1}{3}$), mas que a atividade proporcionou refletirem sobre $\frac{3}{2}$ de “algo” ser efetivamente maior do que o “algo”; 11 dos 22 estudantes evidenciaram terem abstraído a construção de um esquema de pensamento para calcular “fração de fração” ao determinarem corretamente a fração que Pedro gastou do salário, o que nos dá indícios de terem levado em consideração, nessa nova seção, os conhecimentos adquiridos anteriormente.

A **Atividade 27**, foi originalmente proposta aos estudantes com o seguinte preâmbulo: “Laura destinou $\frac{1}{5}$ do seu terreno para fazer uma horta. Ele foi à floricultura comprar mudas e ao plantá-las viu que a área que o canteiro ocupou representava $\frac{4}{3}$ do que ela havia programado para o plantio.”. Só após aplicada a atividade reconhecemos que a atividade exigia um salto cognitivo, então alteramos no Produto Final de $\frac{1}{5}$ para $\frac{1}{2}$. A Atividade 27 foi realizada por 17 estudantes. Os registros das representações pictóricas como resposta ao item (a) estão registradas no Quadro 74.

Quadro 74 – Representação pictórica dos alunos para representar $\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$ (item (a) da Atividade 27)

	Representação Pictórica	Quantidade de alunos
I		3
II		1
III		3
IV		1
V	 $\frac{4}{15}$	1
VI	$\frac{1}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{15}$	1
VII	 incorreta	1
VIII	 insatisfatória	1
IX	 iIncorreta	2
X	 incorreta	1
XI	 incompleta	2

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Pode-se observar que os 3 alunos relatados na Linha I mobilizaram o conceito de fração da unidade (registrando corretamente a fração $\frac{1}{5}$) e de fração imprópria de fração (registrando corretamente $\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$), no entanto sentiram necessidade de fazer uso de uma segunda unidade para representar $\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$. Na representação da Linha II, parece que o mesmo esquema de pensamento foi utilizado pelo autor, no entanto não é claro que o estudante tenha pintado exatamente $\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$ e é evidente que não atentou para o conceito de unidade. Nas Linhas III, IV e V, pode-se perceber que os alunos mobilizaram corretamente o conceito de fração ($\frac{1}{5}$) e de "fração de fração" ($\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$), sem sentirem a necessidade de fazer uso de uma segunda unidade. No entanto, destacamos que, nas representações das Linhas IV e V, os estudantes foram adiante, procurando já representar também a fração da unidade que corresponde a $\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$ da mesma, obtendo claramente o registro pictórico de $\frac{4}{15}$ da unidade. O estudante relatado na Linha VI não fez a representação pictórica, mas não podemos deixar de registrar a mobilização do conceito de multiplicação de frações no seu esquema de pensamento, ainda que seu registro esteja na ordem trocada e que não tenha sido discutida a propriedade comutativa da multiplicação. Os registros das Linhas VII, IX, X e XI do Quadro 74 mobilizam uma das frações no continuo ($\frac{1}{5}$ nas Linhas X e XI, e $\frac{4}{3}$ nas Linhas VII e IX), enquanto o registro na Linha VIII evidencia a mobilização de ambas as frações $\frac{1}{5}$ e $\frac{4}{3}$ sem, no entanto, fazer relação entre elas, evidenciando todos, portanto, a não utilização em seus esquemas de pensamento do conceito de "fração de fração".

As respostas obtidas no item (b) da Atividade 27 estão registradas no Quadro 75.

Quadro 75 – Respostas e justificativas dos alunos dos alunos sobre a região plantada ser maior ou menor que o que havia sido previsto (item (b) da Atividade 27)

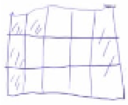
Resposta	**Quantidade de alunos**	**Justificativa**		**Quantidade de alunos**
Maior	14	I	Já que a área que ela ocupou foi $\frac{4}{3}$ incompleta	1
		II	Por causa dos tamanhos incompleta	1
		III	Pois $\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$ incompleta	1
		IV	Porque ela separou $\frac{1}{5}$ e dividiu em três não em quatro incompleta	2
		V	Porque foi $\frac{4}{3}$ incompleta	1
		VI	Porque ou ela pegaria $\frac{2}{5}$ ou pegaria outra área do terreno insatisfatória	1
Menor incorreta	1	VII	Porque $\frac{1}{5}$ é menor que $\frac{4}{3}$	1
$\frac{4}{15}$ incorreta	1	VIII	-	1
Sim incorreta	1	IX	Teve bastante espaço	1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Percebemos que 14 dos 17 alunos que realizaram a atividade responderam corretamente (Linhas I a VI do Quadro 75). Dos 14 estudantes, apenas 7 justificaram suas respostas, sendo que as justificativas de seis estudantes (Linhas I a V) foram consideradas incompletas porque, de alguma forma, sugerem que os estudantes mobilizaram em seus esquemas de pensamento o conceito de fração imprópria, sugerindo que a fração $\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$ excede $\frac{1}{5}$. Quanto à justificativa apresentada na Linha VI não nos foi possível identificar o que o estudante mobilizou para ela. A justificativa do estudante relatado na Linha VII sugere que ele apenas comparou equivocadamente as frações $\frac{1}{5}$ e $\frac{4}{3}$, apresentando daí uma conclusão coerente, "menor"; mobilizou, corretamente algum teorema em ação sobre a comparação de frações, sem, no entanto ficar claro seu enunciado (por exemplo, poderia apenas ter pensado $\frac{1}{5} < 1 < \frac{4}{3}$ ou então ter usado o conhecimento já adquirido sobre a comparação de duas frações quaisquer). As respostas nas Linhas VIII e IX são incoerentes com o que foi questionado no item (b), embora na Linha VIII o estudante tenha apresentado a fração que Laura usou do terreno para o plantio, dando indícios de que tenha compreendido que ela utilizou $\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$.

As respostas ao item (c) da Atividade 27 estão registradas no Quadro 76.

Quadro 76 – Resposta dos alunos sobre a fração que corresponde a $\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$ (item (c) da Atividade 27)

	Resposta	**Quantidade de alunos**
I	$\frac{4}{15}$	5
II	$\frac{4}{15}$ correto  (insatisfatótia)	1
III	$\frac{1}{5}$ x $\frac{4}{3}$ = $\frac{4}{15}$ (satisfatória)	1
IV	$\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$ (satisfatória)	1
V	$\frac{4}{12}$ (incorreta)	1
VI	$\frac{4}{3}$ (incorreta)	1
VII	$\frac{1}{3}$ (incorreta)	1
VIII	$\frac{1}{3}$ e mais um pedaço da outra parte (insatisfatória)	1
IX	$\frac{3}{1}$ e mais um pedaço da outra parte (incorreta)	2
X	Vezes (incorreta)	1
XI	$\frac{3}{3}$ (incorreta)	1
XII	Não respondeu	2

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Os 7 alunos que responderam corretamente (Linhas I, II e III) sugerem ter mobilizado adequadamente o conceito de fração de fração, no entanto um deles (Linha III) registrou de forma equivocada a multiplicação, escrevendo $\frac{1}{5}$ x $\frac{4}{3}$ no lugar de $\frac{4}{3}$ x $\frac{1}{5}$; mesmo assim, consideramos a resposta satisfatória. Além disso, o aluno relatado na Linha II mobilizou de forma equivocada a representação pictórica, considerada insatisfatória. Na linha IV o aluno apenas indicou a correta interpretação do enunciado ao registrar "$\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$", não deixando indícios de que sabe o significado de tal expressão. O estudante relatado na Linha VI apenas repetiu uma das frações mencionadas no enunciado, evidenciando uma má interpretação do mesmo. As demais respostas não nos dão indícios sobre os conceitos evocados. O estudante relatado na Linha XI sugere não perceber a relação entre a fração $\frac{3}{3}$ e a unidade.

Com a realização da Atividade 27, percebemos que a maioria dos alunos já têm compreensão de que o conceito que vem sendo trabalho envolve partes de partes da unidade e alguns também já perceberam que estamos trabalhando com valores que extrapolam o valor previsto inicialmente. Porém, a mobilização da representação pictórica, o registro numérico e a multiplicação de uma fração imprópria por uma fração ainda precisam ser mais explorados.

As respostas obtidas para a representação numérica no item (a) da **Atividade 28**, realizada por 17 estudantes, estão registradas no Quadro 77.

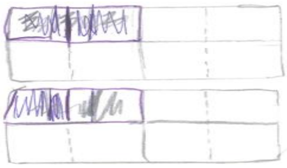
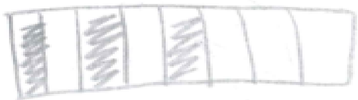
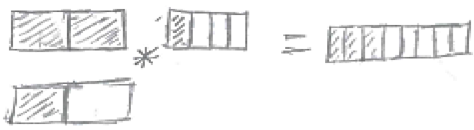
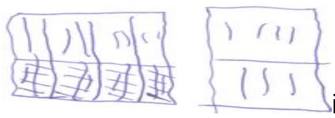
Quadro 77 – Respostas dos alunos para a representação numérica de $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{4}$ (item (a) da Atividade 28)

	Resposta	**Quantidade de alunos**
I	$\frac{3}{2} \text{x} \frac{1}{4}$ (correta)	2
II	$\frac{3}{2} \text{x} \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ (correta)	11
III	$\frac{3}{2} \, {}^{\text{x}}_{\text{x}} \, \frac{1}{4} \, {}^{=}_{=} \, \frac{3}{8}$ (satisfatória)	1
IV	$\frac{3}{8}$ (insatisfatória)	3

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

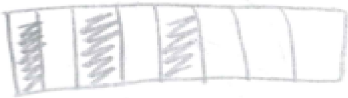
Treze dos 17 alunos mobilizaram corretamente a conversão da representação escrita para representação numérica (Linhas I e II), e destes, 11 alunos mobilizaram o teorema em ação da multiplicação de frações apresentando o resultado (Linha II). Já a resposta $\frac{3}{2} \, {}^{\text{x}}_{\text{x}} \, \frac{1}{4} \, {}^{=}_{=} \, \frac{3}{8}$ dada pelo estudante relatado na Linha III foi considerada satisfatória, uma vez que este usou inadequadamente dois "x", sem deixar claro se foi mobilizado o conceito de multiplicação de frações. A resposta direta dada pelos 3 alunos relatados na Linha IV foi considerada insatisfatória, pois os estudantes preocuparam-se com o cálculo e não com a representação numérica para a expressão.

Quadro 78 – Respostas dos alunos no item (a) da Atividade 28)

	Representação pictórica	Quantidade de alunos
I	 satisfatória	1
II	 satisfatória	7
	 satisfatória	1
	 satisfatória	1
	 satisfatória	2
III	 parcialmente satisfatória	1
	 parcialmente satisfatória	1
IV	 incorreta	1
V	 incorreta	2

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A forma com que estes 17 alunos representaram pictoricamente a expressão $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{4}$ revelou-se muito rica (Quadro 78). Podemos observar que o aluno relatado na Linha I mobilizou o conceito de fração imprópria de uma fração, além do conceito de equipartição, ao subdividir o restante da unidade. Cabe ressaltar também que, diferentemente dos 11 alunos relatados na Linha II, este estudante sentiu a necessidade de fazer uso de outra unidade para representar "$\frac{3}{2}$ de", sendo por isso sua resposta considerada satisfatória. Os 11 alunos relatados na Linha II responderam de forma correta, também mobilizando o conceito de equipartição ao subdividir o restante da unidade. Cabe destacar a representação


,

que evidencia que o estudante não se incomodou de, afinal, representar a quantidade de forma não justaposta, aparentemente mobilizando um teorema em ação da forma "tomar $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{4}$ é o mesmo que tomar 3 vezes uma quantidade igual à metade de $\frac{1}{4}$", e por isso fez uso de três quartas partes diferentes.

Já os 2 alunos relatados na Linha III mobilizaram nos seus registros pictóricos o conceito de fração, no entanto representaram separadamente as frações $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{4}$ e, após um sinal de igual, representaram $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{4}$, desta forma consideramos a resposta parcialmente satisfatória.

Da representação do aluno relatado na Linha IV, podemos observar a representação de um aluno cujo esquema de pensamento porém não foi possível perceber; no entanto, é possível afirmar que não mobilizou o conceito de unidade. Comparando com a representação numérica por ele registrada ($\frac{3}{2}$ x $\frac{1}{4}$ = $\frac{3}{8}$), fica sugerida uma compreensão maior do que a registrada na representação pictórica.

Já o estudante relatado na Linha V evidencia a não mobilização do conceito de equipartição; apesar do correto registro numérico ($\frac{3}{2}$ x $\frac{1}{4}$), não conseguimos identificar os conceitos e teoremas utilizados em seu esquema de pensamento para a representação pictórica.

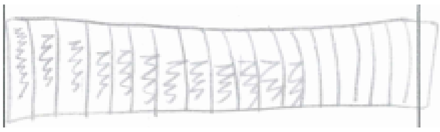
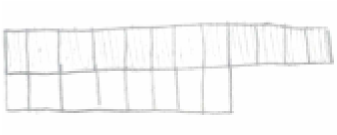
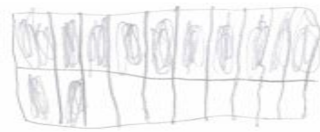
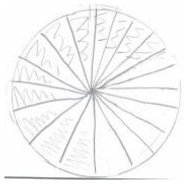
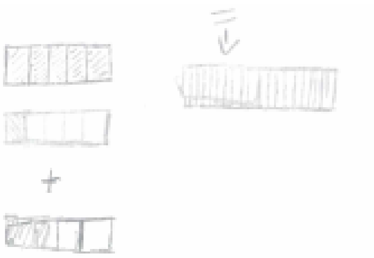
Quadro 79 – Respostas dos alunos para a representação numérica de $\frac{6}{5}$ de $\frac{2}{4}$ (item (b) da Atividade 28)

	Resposta	**Quantidade de aluno**
I	$\frac{6}{5}$ X $\frac{2}{4}$	2
II	$\frac{6}{5}$ X $\frac{2}{4}$ = $\frac{12}{20}$	10
III	$\frac{6}{5} \; {}^{x}_{x} \; \frac{2}{4} \; {}^{=}_{=} \; \frac{12}{20}$ (satisfatória)	1
IV	$\frac{12}{20}$ (insatisfatória)	4

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

As respostas para o item (b) da Atividade 28 (Quadro 79) mantiveram o padrão e as frequências do item (a), com exceção de um estudante que não mais escreveu "$\frac{6}{5}$ x $\frac{2}{4}$= $\frac{12}{20}$" e sim diretamente $\frac{12}{20}$ (Linha II do Quadro 77). Doze alunos acertaram a representação numérica $\frac{6}{5}$ x $\frac{2}{4}$ (Linhas I e II), mobilizando corretamente a conversão da representação escrita para representação numérica; destes, 10 alunos mobilizaram o teorema em ação da multiplicação de frações, já apresentando o resultado da multiplicação (Linha II). Já o registro na Linha III não deixa claro que o aluno tenha mobilizado o conceito de multiplicação de frações, por isso consideramos sua resposta apenas satisfatória. Os 4 alunos relatados na Linha IV preocuparam-se com o cálculo, e não com a representação numérica da expressão, por isso consideramos sua resposta insatisfatória.

Quadro 80 – Representações pictóricas para $\frac{6}{5}$ de $\frac{2}{4}$ apresentadas pelos estudantes (item (b) da Atividade 28)

	Representação pictórica	Quantidade de alunos
I	 (satisfatória)	1
II	 (satisfatória)	6
	 (satisfatória)	1
	 (satisfatória)	2
	 (satisfatória)	2
III	 (parcialmente satisfatória)	2
IV	 (incorreta)	1
V	 (incorreta)	2

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

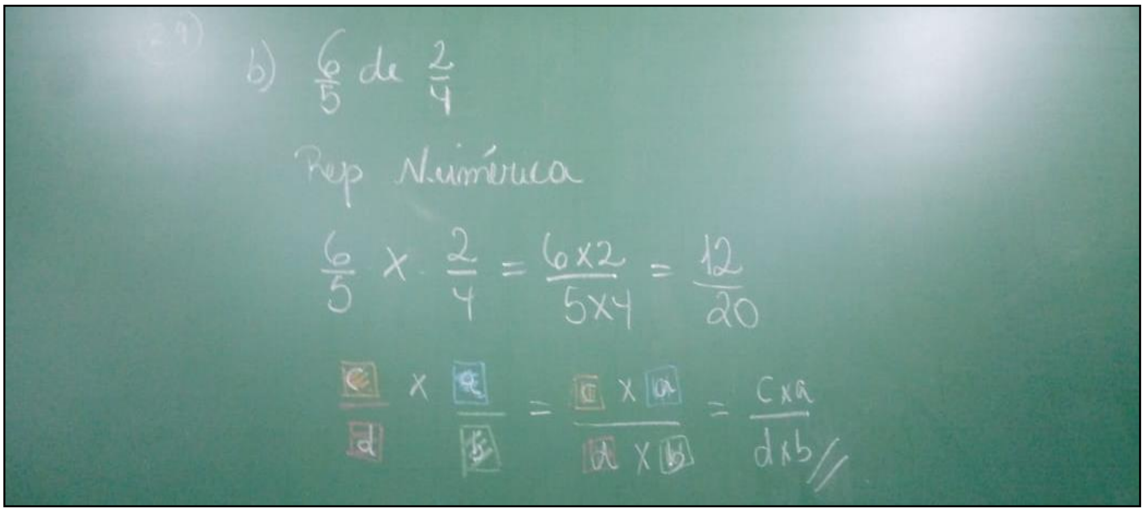
No Quadro 80 estão registradas as representações pictóricas para $\frac{6}{5}$ de $\frac{2}{4}$, que parecem também repetir os padrões de pensamento do item (a). Por exemplo, somente um aluno mobilizou o conceito de multiplicação de fração imprópria por uma fração própria ao construir a representação pictórica (Linha I). Os 13 registros apresentados nas Linhas II e III levam em consideração o resultado obtido no registro da representação numérica, aparentemente mobilizando neste momento apenas o conceito de fração no continuo. Acreditamos que o aluno relatado na Linha IV não teve atenção ao mobilizar o conceito da fração no continuo ao representar a fração $\frac{12}{20}$ sendo coerente com o numerador da fração mas não com o denominador. Já os 2 alunos relatados na Linha V não deixam indícios sobre seus esquemas de pensamento, ficando explícita apenas a não mobilização do conceito de equipartição.

Como na Atividade 24, consideramos muito ricos, em termos de esquemas de pensamento, os registros pictóricos registrados pelos 17 alunos na Atividade 28. Consideramos que 15 dos 17 alunos, tanto no item (a) como no item (b) de alguma forma evidenciaram ter mobilizado explícita ou implicitamente o conceito de multiplicação de uma fração imprópria por uma fração qualquer e percebe-se que os outros 2 alunos ainda estão em processo de construção deste conceito. Decidimos inserir, no Produto Final, mais o item (c) perguntando: afinal, que fração da unidade representa $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{4}$ da unidade?

A primeira etapa da **Atividade 29** consistiu da análise, em conjunto, dos procedimentos e padrões adotados nas Atividades 27 e 28b, e para isso foi entregue incialmente aos 17 alunos presentes uma folha com o Quadro constante do enunciado da atividade.

Assim como na Atividade 25, foram utilizadas cores para ajudar os alunos na identificação de algum padrão que levasse ao algoritmo da multiplicação de frações. Aproveitamos assim o momento de reflexão para explorar a generalização (Figura 39).

Figura 39 – Generalização da questão 28(b)



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Além de trabalhar com quadradinhos de diferentes cores, a professora lançou aos estudantes a seguinte questão desafiadora: “se os quadrinhos coloridos, que representam valores que eu não conheço, fossem substituídos pelas letras a,b,c, e d, “quem iria multiplicar quem?”, e prontamente os alunos responderam que c x a e d x b.

Só depois dessas reflexões e diálogos com a professora os alunos responderam os itens (a) e (b).

As respostas ao item (a) estão registradas no Quadro 81.

Quadro 81 – Respostas dos alunos sobre a comparação do resultado obtido com a fração considerada inicialmente (item (a) da Atividade 29)

Resposta	**Justificativa**		**Quantidade de alunos**
Maior	I	Porque sim (insatisfatória)	1
	II	Porque $\frac{4}{3}$ é maior que uma unidade inteira	7
	III	É maior que $\frac{3}{4}$ (incorreta)	2
	IV	É maior que a resposta (incorreta)	1
	V	Pois $\frac{4}{3}$ e $\frac{6}{5}$ são mais de $\frac{1}{1}$	1
	VI	Porque $\frac{4}{3}$ e $\frac{6}{5}$ são maior de 1 unidade inteira	1
	VII	Porque $\frac{4}{3}$ e $\frac{6}{5}$ são maior de $\frac{1}{1}$ unidade	1
	VIII	Sem justificativa	2
Menor	IX	Porque está menor dividido	1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Percebemos que 16 alunos (Linhas I a VIII) responderam corretamente sobre a comparação(item (a) da Atividade 29), apontando que o resultado obtido era maior do que a fração considerada inicialmente. Quanto às justificativas apresentadas, foi possível observar que 14 deles esforçaram-se para expressar por escrito suas justificativas, melhorando o índice de respostas aceitáveis quando comparado com a Atividade 25: aqui apenas 2 desses 16 alunos não justificaram seu posicionamento, enquanto outros 10 alunos apresentaram justificativas corretas (Linhas II, V, VI e VII), todos eles mobilizando adequadamente os conceitos de fração imprópria e de comparação.

Quadro 82 – Respostas dos alunos sobre a comparação do resultado obtido com a parte da unidade considerada inicialmente, sem observar o desenho (item (b) da Atividade 29)

	Resposta	**Quantidade de alunos**
I	Pois $\frac{4}{3}$ é maior que uma unidade	1
II	Por causa das frações (incompleto)	1
III	Comparando (incompleto)	1
IV	Multiplicando as frações (insatisfatório)	8
V	Multiplicando (insatisfatório)	1
VI	Multiplicação (insatisfatório)	1
VII	Porque o resultado é sempre menor (incorreto)	1
VIII	Pelas palavras (incorreto)	1
IX	Sim (incorreto)	1
X	Menor (incorreto)	1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

As respostas ao item (b) da Atividade 29 estão registradas no Quadro 82, no qual constatamos que apenas 1 aluno respondeu corretamente (Linha I); 10 dos 17 alunos tentaram justificar, baseando suas respostas na operação de multiplicação (Linhas IV, V e VI). Consideramos as respostas das Linhas II e III incompletas pois nos dão indícios de que estavam com o olhar adequadamente voltado para as frações mencionadas no enunciado ou que estivessem mobilizando o conceito de “partes das partes da unidade” (Linhas VII a X). Certamente muitos estudantes, ao já darem a resposta do item (b) como justificativa no item (a), estranharam a pergunta do item (b), e procuraram alguma outra forma de se expressar, quando na verdade a justificativa dada no item (a) já atingia os objetivos da atividade.

Como a Atividade 25, a Atividade 29 oportunizou um momento de reflexão sobre a ampliação das possibilidades de resultado da operação de multiplicação quando ampliamos o universo numérico dos naturais para as frações.

As respostas ao item (a) da **Atividade 30,** realizada por 18 estudantes, estão registradas no Quadro 83.

Quadro 83 – Justificativa dos alunos no item (a) da Atividade 30

	Resposta	Quantidade de alunos
I	Porque João somou os denominadores e teria que fazer a multiplicação.	1
II	Porque o denominador não é somado. (satisfatória)	1
III	Porque $\frac{4}{3}$ x $\frac{1}{3}$ = $\frac{4}{9}$, na verdade ele somou embaixo e não multiplicou.	1
IV	Porque a conta é de vezes não de mais (satisfatória)	2
V	Porque ele deveria ter feito a conta $\frac{4}{3}$ x $\frac{1}{3}$ = $\frac{4}{9}$ (satisfatória)	1
VI	Porque 3 x 3 dá 9, não 6 (não se soma nenhum)	1
VII	Porque 3 x 3 é 9 (satisfatória)	1
VIII	Porque ela pensou não é 6 era 9 (satisfatória)	1
IX	Tá errado, pois não se pode somar, dá $\frac{4}{9}$ e não $\frac{4}{6}$	1
X	Fazendo 4 x 1 = 4 e 3 x 3 = 9 dando resultado de $\frac{4}{9}$	1
XI	Fazendo a conta e vendo que 3 x 3 = 9 e não 6	1
XII	Porque não é de mais é de vezes (satisfatória)	1
XIII	Porque ele fez de mais e não de vezes (satisfatória)	1
XIV	Porque 3 x 3 da 9 não 6	1
XV	Porque ela tinha certeza que era $\frac{4}{3}$ x $\frac{1}{3}$ = $\frac{4}{9}$ (satisfatória)	1
XVI	Ele estava errado ele fez 3 + 3 e 4 x 1	1
XVII	Porque o denominador não se multiplica (insatisfatória)	1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Nas respostas ao item (a)**,** dezessete dos 18 alunos que realizaram a atividade identificaram que o erro cometido por João ao resolver a expressão está no denominador (Linhas I a XVI), e para chegar a essa conclusão é necessário que seja mobilizado o conceito de multiplicação de frações e o teorema sobre o algoritmo para realizá-la. Desses, 10 estudantes conseguiram perceber o possível esquema de pensamento utilizado por João (Linhas I, II, III, IV, VI, IX, XII, XIII, XVI), explicitando que ele havia somado os denominadores no lugar de multiplicá-los. Consideramos este aspecto (tentar perceber o raciocínio do outro) muito positivo para esta faixa etária. No entanto, um ponto importante também a considerar é que nas respostas destes 17 estudantes, nenhum deles parece ter se preocupado com a questão "$\frac{4}{6}$ e $\frac{4}{9}$

representam a mesma quantidade?”, questão relevante em um contexto onde quantidades podem ser representadas de diferentes formas, ou seja, parece que nenhum estudante mobilizou aqui o conceito de frações equivalentes.

Apesar de considerada insatisfatória a resposta da Linha XVII, e que não deixa claro os conceitos mobilizados para tal argumentação acreditamos que o estudante tenha se expressado mal (acrescentando inadequadamente em sua frase um “não”), entendendo também que João não havia multiplicado os denominadores e tendo também mobilizado o conceito de multiplicação de frações e o teorema sobre o algoritmo para realizá-la.

Os 17 alunos que responderam correta ou satisfatoriamente ao item (a) responderam corretamente o item (b) (Linhas I, II e III do Quadro 84). No entanto, é interessante observar que 1 desses estudantes não manteve a escrita correta (Linha III do Quadro 84) por isso consideramos sua resposta apenas satisfatória, pois talvez este aluno ainda não tenha mobilizado o conceito de multiplicação de frações e o teorema sobre o algoritmo para realizar uma multiplicação de frações.

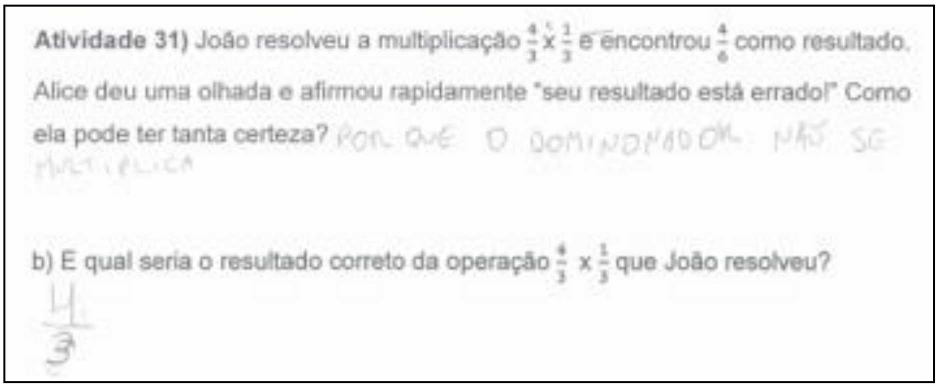
Quadro 84 – Respostas dos alunos no item (b) da Atividade 30

	Resposta	**Quantidade de alunos**
I	$\frac{4}{3}$ X $\frac{1}{3}$ = $\frac{4}{9}$	4
II	$\frac{4}{9}$	12
III	$\frac{4}{3} \genfrac{}{}{0pt}{}{x}{x} \frac{1}{3} \genfrac{}{}{0pt}{}{=}{=} \frac{4}{9}$ (satisfatória)	1
IV	$\frac{4}{3}$ (insatisfatória)	1

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A resposta da Linha IV foi considerada insatisfatória. Porém chamou nossa atenção o valor $\frac{4}{3}$ dado como resposta para a multiplicação $\frac{4}{3}$ x $\frac{1}{3}$, parecendo-nos que o estudante não mobilizou qualquer esquema de pensamento. Este estudante é o mesmo relatado na Linha XVII do Quadro 83. Sua resolução está na (Figura 40): pela sua resposta “$\frac{4}{3}$” ao tem (b) dá indícios de que tenha mobilizado o conceito de adição de frações, contrariando nosso argumento no item (a) de que estivesse apenas se expressando mal quando usou o argumento “o denominador não se multiplica”. Ou seja: parece que o estudante mobilizou um teorema em ação que não é válido: “na multiplicação de frações, multiplicam-se os numeradores e os denominadores não se multiplicam."

Figura 40 – Respostas de um aluno à Atividade 30


Atividade 31) João resolveu a multiplicação $\frac{4}{3} \times \frac{1}{3}$ e encontrou $\frac{4}{6}$ como resultado. Alice deu uma olhada e afirmou rapidamente "seu resultado está errado!" Como ela pode ter tanta certeza? POR QUE O DOMINADOR NÃO SE MULTIPLICA

b) E qual seria o resultado correto da operação $\frac{4}{3} \times \frac{1}{3}$ que João resolveu?
$\frac{4}{3}$

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Com a Atividade 30, percebemos que a maioria dos alunos já estão familiarizados com o uso do algoritmo de multiplicação de frações, não mais recorrendo à representação pictórica para encontrar o resultado desta operação.

No Quadro 85 são explicitados os problemas elaborados pelos alunos como resposta à **Atividade 31**.

Quadro 85 – Problemas elaborados pelos alunos no item (a) da Atividade 31

Grupo	**Expressão sorteada**	**Quantidade de alunos no grupo**	**Problema elaborado pelo grupo**
I	$\frac{4}{3}$ de $\frac{1}{5}$	4	Camila comeu o triplo de $\frac{4}{3}$ de uma pizza e Glenda comeu o dobro de $\frac{1}{5}$. Quanto elas comeram juntas? (viável porém insatisfatória)
II	$\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{5}$	2	João comeu $\frac{3}{2}$ de laranja e Rai comeu $\frac{1}{5}$. Quantos os dois comeram? (viável porém insatisfatória)
III	$\frac{3}{2}$ de $\frac{2}{6}$	2	Mateus foi ao mercado e comprou $\frac{3}{2}$ de pão e $\frac{2}{6}$ de queijo? (incorreto)
IV	$\frac{4}{2}$ de $\frac{1}{3}$	5	Comemos $\frac{4}{2}$ de $\frac{1}{3}$ de um crepe. Quanto comemos?
V	$\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{4}$	3	João comprou 2 pizzas e João dividiu em 4 pedaços. Pegou um pedaço e dividiu em 2. Comeu $\frac{3}{2}$. Quanto ele comeu? (incorreto)
VI	$\frac{3}{2}$ de $\frac{2}{6}$	2	João tem uma coleção de carrinhos. Nessa coleção ele tem $\frac{3}{2}$ de $\frac{2}{6}$. Mario o dobro. Quanto cada um tem? (impossível)

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

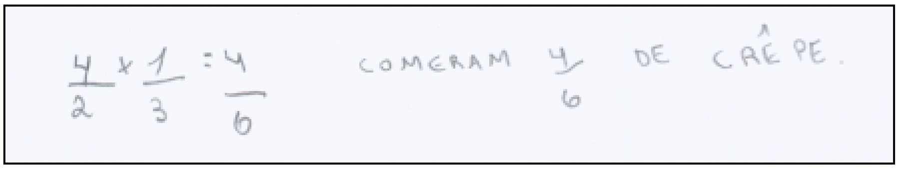
Podemos observar que os problemas apresentados pelos Grupos I e II apresentam uma situação viável, porém que não contempla a expressão solicitada, nem em seu enunciado nem em sua resolução; no entanto, ambos exigem em sua resolução a mobilização do conceito de adição de frações. O Grupo III não conseguiu enunciar um problema. Apenas o Grupo IV, constituído por 5 estudantes, construiu um problema envolvendo a expressão solicitada em uma situação viável, mobilizando o conceito de “fração imprópria de fração”; cabe salientar que a pergunta “Quanto comemos?” sugere uma não atenção à importância da unidade, deixando apenas subentendida a questão “Que fração de crepe comemos”?. Os 3 estudantes integrantes do Grupo V sugerem ter ideia do que deveriam propor, no entanto o enunciado proposto revelou-se confuso e incompleto. O Grupo VI fez uso da expressão solicitada no enunciado de seu problema, porém a situação proposta é impossível.

Como nas Atividades 7 e 16, o segundo momento da Atividade 31 consistiu em distribuir para os alunos, de forma aleatória, todas as questões formuladas pelos grupos para serem resolvidas individualmente, cuidando para que nenhum aluno ficasse com a questão que seu grupo criou.

As Figuras 41 e 42 trazem registros de resoluções para o problema proposto pelo Grupo IV (Quadro 85), que foi considerado correto:

“Comemos $\frac{4}{2}$ de $\frac{1}{3}$ de um crepe. Quanto comemos?”

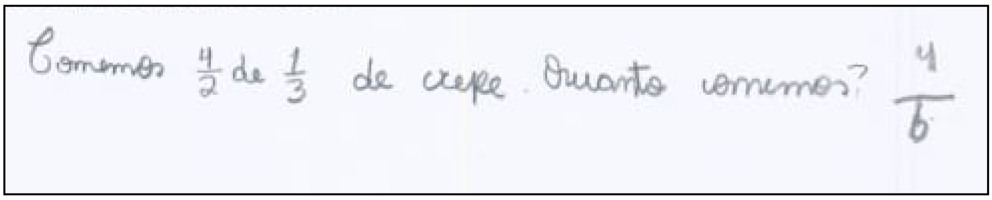
Figura 41 – Resolução de um aluno para o problema proposto pelo Grupo I (item (b) da Atividade 31)



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

O aluno relatado na Figura 41 o conceito de multiplicação de frações bem como o teorema em ação sobre o algoritmo para o cálculo de uma tal multiplicação, mobilizando também, mentalmente, a multiplicação de naturais. Cabe ressaltar a resposta completa dada pelo estudante “*comeram* $\mathbf{\frac{4}{6}}$ *de crepe*”, mobilizando o conceito de unidade, aspecto não ressaltado pelo grupo que formulou o problema.

Figura 42 – Resolução do problema proposto por um aluno para a expressão $\frac{4}{2}$ de $\frac{1}{3}$


Comemos $\frac{4}{2}$ de $\frac{1}{3}$ de crepe. Quanto comemos? $\frac{4}{6}$

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Já o estudante relatado na Figura 42 realizou um cálculo mental, sem deixar traços de seu esquema de pensamento.

Os problemas das Linhas I, II e VI do Quadro 85 foram, com razão, considerados impossíveis de serem solucionados, como podemos observar no Quadro 86.

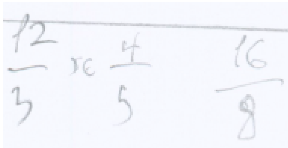
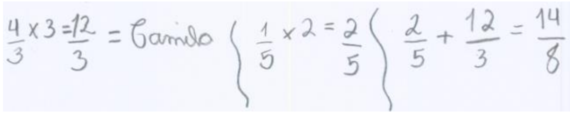
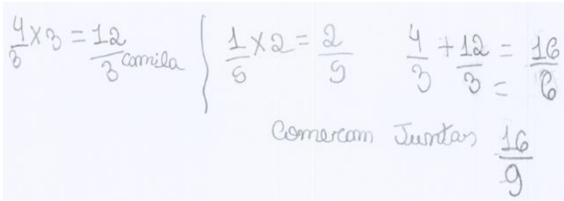
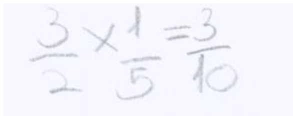
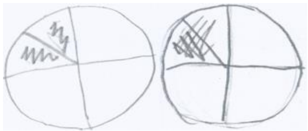
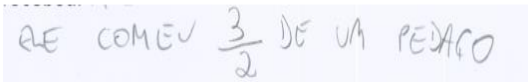
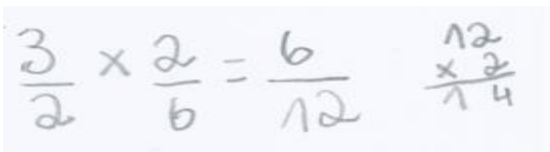
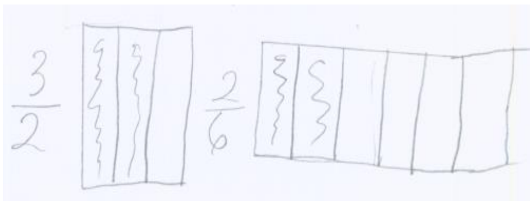
Quadro 86 – Respostas dos estudantes sobre a resolução dos problemas das Linhas I, II e III do Quadro 85

Linha do Quadro 85	Problema desenvolvido pelo grupo	Resolução/Observação
I	Camila comeu o triplo de $\frac{4}{3}$ de uma pizza e Glenda comeu o dobro de $\frac{1}{5}$. Quanto elas comeram juntas?	Não Entendi
II	João comeu $\frac{3}{2}$ de laranja e Rai comeu $\frac{1}{5}$. Quantos os dois comeram?	não entendi
III	Mateus foi ao mercado e comprou $\frac{3}{2}$ de pão e $\frac{2}{6}$ de queijo?	NÃO dá

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Porém, alguns alunos tentaram solucionar o problema proposto Linhas I, II e III, e os problemas V e VI, mesmo aqueles que não tinham relação com "fração de fração". (Quadro 87).

Quadro 87 – Respostas dos estudantes sobre a resolução dos problemas das Linhas I, II, III, V e VI do Quadro 85

Linha do Quadro 85	Problema desenvolvido pelo grupo	Resolução/Observação
I	Camila comeu o triplo de $\frac{4}{3}$ de uma pizza e Glenda comeu o dobro de $\frac{1}{5}$. Quanto elas comeram juntas?	  
II	João comeu $\frac{3}{2}$ de laranja e Rai comeu $\frac{1}{5}$. Quantos os dois comeram?	
III	João foi a padaria e pediu $\frac{2}{3}$ de pão e $\frac{2}{6}$ de bolo?	
V	João comprou 2 pizzas e João dividiu em 4 pedaços. Pegou um pedaço e dividiu em 2. Comeu $\frac{3}{2}$. Quanto ele comeu?	 
VI	João tem uma coleção de carrinho. Nessa coleção ele tem $\frac{3}{2}$ de $\frac{2}{6}$. Mario o dobro. Quanto cada um tem?	 

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Com relação às resoluções apresentadas no Quadro 87, percebemos que o primeiro aluno da Linha I só se preocupou com o cálculo do triplo de $\frac{4}{3}$, chamando nossa atenção para a forma como ele reescreveu a multiplicação: $\frac{12}{3}$ x $\frac{4}{3}$, equivocando-se com a escrita de 3 unidades na forma de terços; mesmo assim, evidenciou a mobilização do conceito de fração não unitária. O segundo e o terceiro estudantes da Linha I parecem ter mobilizado corretamente o conceito de multiplicação de um número natural por fração, no entanto fazendo um registro ao contrário ($\frac{4}{3}$ x 3 e $\frac{1}{5}$ x 4); calcularam corretamente a multiplicação porém ambos erraram a adição, aparentemente somando numeradores e denominadores, mobilizando, assim, um terema em ação incorreto. Na Linha II, o aluno mobilizou equivocadamente o conceito de multiplicação de frações. Na Linha III, destacamos que o aluno mobilizou corretamente o conceito de fração, única coisa que era possível fazer a partir do que estava escrito, porém não se manifestou quanto à inexistência de um problema. Na Linha V, vemos que o primeiro aluno registrou adequadamente os passos indicados no problema na forma de representação pictórica, parecendo ter subentendido que “Comeu $\frac{3}{2}$” significa “Comeu $\frac{3}{2}$ da metade de $\frac{1}{4}$”, dando como resposta que foi comido $\frac{3}{2}$ de um pedaço, sugerindo que “pedaço” refere-se a $\frac{1}{4}$ de pizza. Já na Linha VII, o primeiro estudante mobiliza corretamente o conceito de multiplicação de fração por fração, ao determinar $\frac{3}{2}$ de $\frac{2}{6}$, contudo, se equivoca ao determinar o “dobro de”, registrando a soma e não o produto; o segundo estudante mobilizou erroneamente o registro pictórico da fração imprópria $\frac{3}{2}$ e adequadamente da fração própria $\frac{2}{6}$.

O número de situações viáveis aumentou com relação às atividades de fechamento das seções anteriores, demonstrando uma evolução dos estudantes. Apesar de apenas 5 dos 18 alunos terem conseguido formular de fato um problema, consideramos que a Atividade 31 oportunizou aos alunos um envolvimento como autores de questões envolvendo a multiplicação de frações, mais um passo em direção do letramento matemático.

Na **Seção 4** (Multiplicação de uma fração imprópria por uma fração qualquer) foi possível perceber que os alunos conseguiram compreender, por exemplo, que se o primeiro fator é maior do que a unidade, então o produto deverá ser maior do que o segundo fator. Consideramos também que os alunos tenham compreendido que as atividades que envolvem multiplicação de uma fração imprópria por uma fração representa uma quantidade que extrapola a quantidade original (o segundo fator na multiplicação).