Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática e Estatística

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Transporte Ótimo em C*-álgebras

Dissertação de Mestrado

William Matheus Michel Braucks

Porto Alegre, Fevereiro de 2021.

Dissertação submetida por William Matheus Michel Braucks [1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Diego Marcon Farias (PPGMat-UFRGS)

Banca Examinadora:
Artur Oscar Lopes (PPGMat-UFRGS)
Fagner Bernardini Rodrigues (PPGMat-UFRGS)
José Afonso Barrionuevo (PPGMAp-UFRGS)

03 de Fevereiro de 2021

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Resumo

A narrativa ao longo do presente trabalho pretende conduzir o leitor até um análogo da Dualidade de Kantorovich para C*-álgebras, o principal resultado original do texto. Para fazer isto, primeiro nos concentramos em um caso mais simples, com dimensão finita, e procuramos estudá-lo até que estejamos confortáveis o suficiente para estudar o problema de transporte em C*-álgebras. Nesta tarefa, provamos alguns resultados auxiliares que podem ser de importância independente.

Palavras-chave: Transporte Ótimo; C*-álgebras; Dualidade de Kantorovich; Mecânica Quântica.

Abstract

The narrative throughout the present work intends to lead the reader to an analogue of Kantorovich's Duality for C*-algebras, the main original result of the text. To do this, we first focus on a simpler case, in finite dimension, and we try to study it until we are comfortable enough to study the transportation problem in C*-algebras. In this task, we prove some auxiliary results that can be of independent importance.

Keywords: Optimal Transport; C*-algebras; Kantorovich Duality; Quantum Mechanics.

Sumário

Capítulo 1

Motivação e Preliminares

Este primeiro capítulo pretende ser uma exposição rápida do contexto no qual se insere o tema que exploramos. Nele coletamos algumas ideias, objetos e linguagem matemática dos quais pretendemos lançar mão no texto subsequente. Por ter sido escrito dessa maneira, pode ser pensado como uma lista das principais figuras presentes no cenário da discussão que segue.

1.1 Informação

A teoria da informação quântica é uma investigação inspirada pela teoria da informação clássica, porém adequada à natureza quântica dos sistemas físicos mais fundamentais. Trata-se hoje de uma teoria de grande interesse, por exemplo, porque os nossos computadores têm se tornado cada vez menores e mais potentes, aproximando-se de escalas nas quais os sistemas que os constituem já não mais se comportam de acordo com as leis da mecânica clássica. Além disso, este progresso tem se dado vertiginosamente, de sorte que a informação quântica é ainda uma teoria relativamente nova, e como tal, encontra-se em processo de desenvolver-se. Para ilustrar esta afirmação, observe que os famosos teoremas de codificação para canais com e sem ruído – resultados marcantes sobre a informação clássica – foram demonstrados por C. Shannon em 1948 [39]; seus análogos quânticos, por B. Schumacher em 1995 [38].

Talvez a mais notável distinção entre as duas teorias esteja em suas correspondentes unidades fundamentais de informação. Os *bits*, do mundo clássico, cujos estados encontram-se no conjunto $\{0, 1\}$ são substituídos pelos *qubits*, do mundo quântico, cujos estados consistem de vetores unitários do espaço de Hilbert $\mathbb{C}^2$ [32, Seção 1.2]. Ambas estas descrições abusam um pouco da linguagem. Estes objetos tratam-se fundamentalmente de sistemas físicos – ou clássicos, ou quânticos – de dois níveis, isto é, sistemas portadores da característica fenomenológica de que, na eventualidade de efetuar-se uma medição, seja necessariamente observada alguma dentre exatamente duas opções. O que se passa é que de acordo com a natureza do sistema em questão uma ou outra descrição matemática revela-se como sendo mais apropriada. Nós nos permitimos confundir nossas descrições de tais objetos com os próprios objetos.

Os *qubits* herdam dos *bits* o seu caráter bivalente. Apesar disso, pode não ser tão fácil enxergar, no caso dos *qubits*, como essa bivalência se traduz em propriedades de sua descrição matemática. No caso dos *bits*, ela é capturada pelo fato de que o conjunto $\{0, 1\}$ tem exatamente dois elementos; no caso dos *qubits*, pelo fato de que se identifiquem com o espaço projetivo $\mathcal{P}\left(\mathbb{C}^2\right)$.

Esta identificação é possível porque a correspondência entre *qubits* e vetores unitários de $\mathbb{C}^2$ se dá ademais de fase [32, Seção 1.2]. Note, equivalentemente, que as projeções ortogonais nas direções de dois vetores fixados coincidem se e somente se os vetores em questão diferem um do outro apenas por um coeficiente complexo não trivial.

1.2 Notação

1.2.1 Vetores

Nós denotamos os elementos de um espaço de Hilbert por $|\psi\rangle$, $|\varphi\rangle$ ou $|\xi\rangle$, e nesta notação dizemos por exemplo:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,, \tag{1.2.a}$$

com $\{|0\rangle\,, |1\rangle\} \subset \mathbb{C}^2$ uma base ortonormal deste espaço. Assim, $|\psi\rangle$ é unitário se e somente se $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Em particular, referimo-nos frequentemente também a:

$$|+\rangle \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) \;\text{ e }\; |-\rangle \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right), \tag{1.2.b}$$

que configuram uma outra base ortonormal para $\mathbb{C}^2$.

1.2.2 Produtos Tensoriais entre Espaços de Hilbert

Um sistema composto de múltiplos, digamos n, *qubits* tem seus estados descritos no produto tensorial de n cópias de $\mathbb{C}^2$. Isto é uma aplicação direta da regra que nos é axiomaticamente prescrita para encontrar o espaço de Hilbert associado a um sistema composto [28, Seção 2.5][32, Seção 2.2]. Ao longo do texto, preferimos denotar espaços de Hilbert como $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1$ ou $\mathcal{H}_2$, de modo que podemos escrever aqui, por exemplo, que se $\mathcal{H}$ é o espaço de Hilbert do sistema composto, enquanto que $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são os das suas componentes, então $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

O produto tensorial entre dois espaços de Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ contém todos os vetores da forma $|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle =: |\psi \otimes \varphi\rangle =: |\psi\varphi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ com $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1$ e $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}_2$. Entre estes vetores é possível definir um produto interno por meio da expressão:

$$\langle \psi \otimes \varphi, \tilde{\psi} \otimes \tilde{\varphi}\rangle \coloneqq \langle \psi, \tilde{\psi}\rangle\,\langle \varphi, \tilde{\varphi}\rangle\,.$$

$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ é o completamento (topológico) do conjunto destes vetores com respeito a este produto interno.

Já que presumimos alguma familiaridade com a notação dos *bras* e *kets* de Dirac, vale lembrar que nesta, enquanto $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ representa um vetor, $\langle\psi| \in \mathcal{H}^*$ representa um covetor, um funcional linear, a saber $|\varphi\rangle \mapsto \langle\psi, \varphi\rangle$. Esta notação que adotamos ainda se beneficia do fato de que podemos identificar o produto tensorial $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2^*$ com o espaço dos operadores de Hilbert-Schmidt de $\mathcal{H}_1$ em $\mathcal{H}_2$ (equipado com o produto interno do traço) ao expressar os elementos em questão da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle \otimes \langle\psi| \coloneqq |\varphi\rangle \langle\psi| : \mathcal{H}_1 &\longrightarrow \mathcal{H}_2 \\ |\xi\rangle &\mapsto \langle\psi, \xi\rangle \, |\varphi\rangle \, . \end{aligned}$$

1.2.3 Operadores Lineares Limitados

Quando $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ têm dimensão finita, este espaço dos operadores de Hilbert-Schmidt de $\mathcal{H}_1$ em $\mathcal{H}_2$ coincide ainda com o dos operadores lineares limitados do primeiro para o segundo, ou seja: $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2^* \cong \mathscr{B}_2(\mathcal{H}_1; \mathcal{H}_2) \cong \mathscr{B}(\mathcal{H}_1; \mathcal{H}_2)$. Em geral, tratam-se de espaços distintos, o último contendo o primeiro. Isto motiva a nossa opção pela notação $\mathscr{B}(\mathcal{H}_1; \mathcal{H}_2)$ em dimensão finita, mas não significa que este seja o único possível espaço de operadores a se considerar em dimensão infinita. Além disso, quando tratamos de endomorfismos lineares de algum espaço (isto é, quando $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$), então a estes atribuímos as letras A, B, ou C. Ainda, simplificamos $\mathscr{B}(\mathcal{H}; \mathcal{H}) \coloneqq \mathscr{B}(\mathcal{H})$.

Obs. O produto tensorial de operadores lineares limitados está bem definido e também é um operador linear limitado. Em particular, dados operadores $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1)$ e $B \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_2)$, podemos construir o operador $A \otimes B \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ que age sobre os elementos $|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ por meio da expressão:

$$|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \mapsto A\,|\psi\rangle \otimes B\,|\varphi\rangle \, .$$

1.2.4 Operadores Densidade

Tanto do ponto de vista da informação quântica, quanto do ponto de vista da mecânica quântica, é importante distinguir entre aquilo que se chamam de estados puros e estados mistos. De fato, nem todos os estados de um sistema cujo espaço de Hilbert associado é isomorfo a $\mathbb{C}^2$ são necessariamente da forma apresentada em 1.2.a; mais precisamente, estes constituem apenas os estados puros do sistema. Por exemplo: na realidade, os sistemas utilizados como *qubits* não costumam permanecer em perfeitas condições de isolamento [32, Capítulo 7]. Conforme eles interagem com outros sistemas e o seu próprio passa a apresentar maiores graus de decoerência, já não mais se comportam de maneira consistente com a descrição em termos de vetores unitários [29]. Ainda assim, uma descrição um pouco mais abrangente adequa-se ao sistema; trata-se inclusive de uma descrição bastante importante para nós, por ser em um certo sentido, uma bem natural, e que aliás, não se aplica somente a *qubits*, mas a sistemas quânticos em geral. Convidamos o leitor a pensar no seguinte cenário: em um certo laboratório encontramo-nos em condições de consistentemente preparar algum sistema quântico em certo estado e subsequentemente efetuar uma medição de algum observável do mesmo (operador hermitiano), registrando no ato o autovalor obtido de cada medição. O que estes dados nos fornecem de imediato é uma aproximação para a esperança do observável que medimos neste estado. Efetivamente, estamos pensando no estado do sistema como uma associação de observáveis a números reais, a saber, seus valores esperados. Isto quer dizer que para nós, o estado é como uma função dos observáveis que toma valores reais e satisfaz propriedades típicas de uma esperança – como linearidade, positividade e normalidade. Acontece que qualquer função do tipo que nós entendemos deste modo como estado, é necessariamente da forma $A \mapsto \operatorname{Tr} A\mu$ para algum *operador densidade* μ – consequência do Teorema de Riesz, veja no final da demonstração de 2.2.1.

Um operador densidade é um operador hermitiano de um espaço em si mesmo, que também tem traço 1 e é *positivo*. Para automorfismos lineares contínuos de um espaço de Hilbert, ser positivo significa satisfazer $\langle\psi|A\psi\rangle \geq 0$ para todos os vetores $|\psi\rangle$ do espaço. Desta noção de positividade, construímos também uma ordem, postulando que $A \geq B$ signifique $A - B \geq 0$.

Se o estado de um sistema era descrito por um vetor unitário, então agora passa a ser descrito por uma projeção ortogonal, que é um tipo particular de operador densidade. É neste caso que dizemos que o estado é puro. Agora, quando um sistema não se encontra mais em um estado puro, nós dizemos que ele se encontra num estado misto, que vem a ser uma espécie de *conjunção estatística* de estados puros. Se diz isso porque o operador densidade associado a um estado misto sempre consiste de uma *combinação convexa* de projeções ortogonais (aquelas sobre seus autovetores). Quando queremos nos reportar a estados puros sem necessariamente fazer alusão às suas coordenadas em alguma base, denominamo-os $|\varphi\rangle$, $|\psi\rangle$ ou $|\xi\rangle$. Já estados mistos, recebem como símbolos outras letras gregas, tais quais μ, ν, ou ρ, de modo que podemos efetivamente escrever:

$$\mu = \sum_{ij} \mu_{ij} |\psi_i\rangle \langle\psi_j| = \sum_k \mu_k |\xi_k\rangle \langle\xi_k| = \sum_k \mu_k P_{|\xi_k\rangle}.$$

Aqui $P_{|\xi_k\rangle}$ denota a projeção ortogonal na direção do vetor $|\xi_k\rangle$; note que isto concorda com o fato de que tal projeção é a composição dos mapas $|\varphi\rangle \mapsto \langle\xi_k|\varphi\rangle$, de $\mathcal{H}$ em $\mathbb{C}$, e $z \mapsto z\,|\xi_k\rangle$, de $\mathbb{C}$ em $\mathcal{H}$.

1.2.5 Estados

Pensar nos estados dessa maneira é muito conveniente, e assim como a literatura à qual nos reportamos, nós também fazemos uso destas ideias; mas existe uma outra opção bem interessante, em um certo sentido "dual" à essa, que vale a pena reparar. A alternativa é pensarmos nos estados não como estes operadores densidade μ, mas como os próprios funcionais lineares $A \mapsto \operatorname{Tr} A\mu$. Quando encaramos eles desta maneira se torna natural percebê-los também como caso particular desta última noção de estado que gostamos de ter em mente, que é a do estado como um tipo específico de funcional linear em uma C*-álgebra.

Se nós fixamos uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, estamos habilitados a falar no seu espaço vetorial dual $\mathcal{A}^*$, o dos funcionais lineares contínuos de $\mathcal{A}$ em $\mathbb{C}$. Dentre estes funcionais, podemos distinguir os que chamamos de *funcionais positivos*. Os funcionais lineares positivos são aqueles que atribuem valores positivos aos *elementos positivos* de $\mathcal{A}$, que são da forma a^*a. Uma descrição mais aprofundada destes elementos pode ser encontrada em [31, Seção 2.2]. Note que novamente, como em 1.2.4, a noção de positividade induz uma noção de ordem [2, Capítulo 13]. Podemos, também, selecionar os funcionais lineares que tenham norma igual a 1 no sentido de norma de operadores. Quando um funcional satisfaz as duas coisas, então dizemos ainda que é um estado, e o denotamos por η, θ ou ω. O conjunto dos estados de $\mathcal{A}$, por sua vez, é denotado $\mathfrak{s}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^*$. Recapitulando, agora em símbolos; um estado deve satisfazer:

- $\omega \in \mathcal{A}^*$;
- $a \in \mathcal{A} \implies \omega(a^*a) \geq 0$;
- $\|\omega\| = 1$.

1.3 C*-álgebras

Essa terceira condição é particularmente curiosa, porque ela acomoda bem uma certa ambiguidade que existe entre as possibilidades mutuamente exclusivas de que $\mathcal{A}$ venha ou não a ter unidade. Sob a presença de uma unidade na C*-álgebra, é possível assegurar para os ω limitados e positivos, a equivalência entre essa terceira condição e a de que $\omega(1_{\mathcal{A}}) = 1$. Isto acontece justamente porque o segundo item é equivalente a ser $\omega(1_{\mathcal{A}}) = \|\omega\|$ [18, Proposição 13.1.9]. Deste modo, a definição fica compatível com uma outra alternativa que se poderia tomar, que seria de pressupor $\mathcal{A}$ como tendo unidade (para caracterizar os estados pelo número que atribuem à mesma) amparando-se no fato de que uma C*-álgebra sempre possa ser unitizada [18, Proposição 12.3.4], isto é, acrescida de unidade, o que se dá pela produção de uma nova C*-álgebra $\tilde{\mathcal{A}}$ que a contenha como sub-C*-álgebra, e adicionalmente seja munida de unidade.

Toda C*-álgebra possui uma única norma que realmente satisfaz a chamada condição C*, de que $\|a^*a\| = \|a^*\|\|a\|$ [18, Corolário 12.3.10]. Essa norma pode ser calculada, porque para elementos normais, como os autoadjuntos, coincide com o raio espectral [18, Proposição 12.3.7]:

$$\|a^*a\| = \sup\{\ |\lambda| : \lambda \in \mathbb{C},\ (\lambda 1_{\tilde{\mathcal{A}}} - a^*a) \text{ não é invertível }\}.$$

Obs. A completude de $\mathcal{A}$ com respeito à norma tem um papel muito importante nesta afirmação. Em geral, numa apenas *-álgebra, não necessariamente existe uma única norma que satisfaça a condição C*, podendo acontecer de que ela admita multiplas normas diferentes compatíveis com a involução, inclusive cada qual induzindo seu próprio completamento, que pode também ser distinto. Um bom exemplo deste fenômeno se dá no produto tensorial de C*-álgebras [33, Capítulo 4], como vem a ser pertinente em 3.1.1.

O espectro de um elemento em uma C*-álgebra – de onde vem o termo "raio espectral" – é justamente o conjunto de parâmetros complexos λ para os quais $(\lambda 1_{\tilde{\mathcal{A}}} - a^* a)$ não é invertível. Além de contribuir para que expressemos a norma, o espectro fornece uma caracterização interessante para a positividade: os elementos positivos de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ são aqueles cujo espectro é constituído somente de números positivos [31, Seção 2.2].

Tendo em mente portanto que nossas C*-álgebras são pressupostas de Banach, passamos a brevemente descrever aquilo que entendemos como a analogia entre mecânica quântica e probabilidade. Chamemos atenção para o caso particular no qual $\mathcal{A}$ é comutativa relembrando o seguinte resultado:

Teorema 1.3.1 (Teorema de Gelfand-Naimark)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra comutativa. Então $\mathcal{A}$ é $*$-isometricamente isomorfa à C*-álgebra das funções contínuas e que se anulam no infinito de um certo espaço topológico $\widehat{\mathcal{A}}$ tomando valores em $\mathbb{C}$, ou seja, $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}_0(\widehat{\mathcal{A}})$ [18, Teorema 12.3.14].*

Este tal espaço topológico $\widehat{\mathcal{A}}$ é o que se chama de espectro de $\mathcal{A}$. Ele é o conjunto dos homomorfismos não-nulos de $\mathcal{A}$ em $\mathbb{C}$ equipado com a topologia fraca* – o que faz sentido posto que todos seus elementos são automaticamente funcionais lineares contínuos [19, Proposição 5.2]. O espaço $\widehat{\mathcal{A}}$ é um espaço de Hausdorff localmente compacto [19, Proposição 5.3], e como tal satisfaz as hipóteses do Teorema de Riesz-Markov-Kakutani [36, Teorema 2.14], de modo que nesse contexto acontece o seguinte:

- os elementos autoadjuntos da álgebra são as funções reais (contínuas e que se anulam no infinito);
- os estados são as probabilidades borelianas;
- os pareamentos se dão através da integral.

Isto deve ser comparado com o caso em que $\mathcal{A} = \mathscr{B}_2(\mathcal{H})$, isto é, $\mathcal{A}$ é a C*-álgebra dos operadores de Hilbert-Schmidt de algum espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ em si mesmo, caso no qual:

- os elementos autoadjuntos da álgebra são os operadores hermitianos;
- os estados são os operadores densidade;
- os pareamentos se dão através do traço.

Obs. Para que os dois primeiros itens façam sentido, é claro que os operadores em questão precisam ser de Hilbert-Schmidt. No segundo item, pensamos nos estados tirando proveito do fato de que $\mathscr{B}_2(\mathcal{H}) \cong \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$ é um espaço de Hilbert com respeito ao produto interno

$$(A, B) \mapsto \operatorname{Tr} B^\dagger A,$$

a fim de usar o Teorema de Riesz e representar os funcionais lineares como o pareamento, por meio deste produto interno, contra elementos do próprio espaço

[13, Capítulo IX §2]. As condições que asseguram que um funcional seja um estado, asseguram também que seu representante seja um operador densidade (como em 2.2.1). Por coerência, os pareamentos mencionados no terceiro item precisam ser como os deste parágrafo.

1.4 Revisão Bibliográfica

Motivados pela exposição em [32, Capítulo 9] sobre medidas de distância para informação quântica, propusemo-nos a explorar o seguinte tema: de que maneira é adequado comparar quantitativamente dois estados de um sistema? Como se devem dimensionar as semelhanças ou equivalentemente distinções entre eles?

Encontramo-nos persuadidos de que muitas possiveis respostas para estas perguntas devem ser de natureza situacional, podendo ser uma ou outra a mais adequada, de acordo com o uso que delas se pretende fazer. As próximas subseções devem ajudar a esclarecer o que isto significa.

Cientes do sucesso sintetizado em [41] e [42] da teoria de transporte ótimo na "traiçoeira" [20, Capítulo 2] tarefa de distinguir distribuições de probabilidade, devotamos nossa atenção à possibilidade de emprestar destas ferramentas com o intuito de adaptá-las ao contexto quântico. Os trabalhos que encontramos que se valeram desta estratégia não só asseguram ser possível utilizá-la, como justificam também o parágrafo anterior, e portanto passamos a brevemente descrevê-los. a

1.4.1 Carlen & Maas

O texto [6] procura estudar um análogo quântico da equação de Fokker-Planck replicando os resultados obtidos por Jordan, Kinderlehrer & Otto em [26], que consiste em caracterizar a trajetória descrita por uma densidade de probabilidade sob o fluxo de dita equação como o fluxo gradiente da entropia com respeito à distância de Wasserstein $\mathscr{W}_2$. Para que esta tarefa se torne possível, evidentemente precisa-se de um substituto para essa métrica neste novo contexto, que se define então em conformidade com as ideias apresentadas por Benamou & Brenier em [1], isto é, caracterizando a quantia como uma espécie de "distância geodésica" entre as densidades inicial e final, um ínfimo de "comprimentos". Inserem-se aqui as aspas justamente porque uma das sutís obstruções em cujas superações engajam-se os autores é a de tornar precisos os sentidos dessas expressões na ausência, *a priori*, de qualquer estrtura métrica. Mais especificamente, é preciso determinar um significado para a velocidade de uma curva – o que se concretiza por meio da equação de continuidade – e também um para a magnitude de tal velocidade. Todos estes objetivos logram os autores.

Subsequentemente refinam-se estes resultados em [7]. O papel que outrora cabia ao semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck [3] (ou a seu parente fermiônico) delega-se agora a qualquer semigrupo quântico de Markov que satisfaça a condição de equilíbrio detalhado com respeito a seu único estado estacionário. Os autores demonstram então que para cada um destes existe uma métrica no espaço de densidades com respeito à qual o fluxo gradiente da entropia relativa (ao estado estacionário mencionado previamente) induz no espaço de estados a mesma evolução que tal semigrupo. Com ditas métricas em mãos, os autores encontram-se então capazes de assegurar, em [8], algumas desigualdades ditas funcionais – mais precisamente, os análogos de tais desigualdades – agora neste novo cenário.

1.4.2 Caglioti, Golse, Mouhout & Paul

Em [22], o interesse principal é explorar o que se passa nos chamados limite clássico e limite de campo médio. Para tal fim, introduz-se uma família de quantias análogas à distânca de Wasserstein-2, definidas em função das posições e momenta de um sistema de particulas de massas idênticas em $\mathbb{R}^d$ e indexadas por um parâmetro ϵ que vai pra zero no limite clássico. Estas quantias não se tratam exatamente de métricas, por exemplo porque são cotadas inferiormente pela quantia $2d\epsilon$, mas isto de maneira alguma as torna menos úteis! De fato, [23] elabora sobre elas introduzindo uma nova família de quantias, híbridas entre estas e a distância $\mathscr{W}_2$, que servem para comparar estados com distribuições de probabilidade, permitindo que se façam análises quantitativas do que se passa em regime semiclássico. Estas investigações se desenvolvem ainda mais em [24] e [21], mas nos chamam a atenção, em particular, os resultados de [4] e de [5].

O texto [4] assegura que as quantias introduzidas em [22] satisfaçam uma espécie de dualidade de Kantorovich. Já [5] trabalha com uma nova versão do problema de transporte, subtraindo a cota inferior citada no parágrafo anterior e apresenta um exemplo curioso no qual este análogo quântico para a distância é "mais barato" que o seu correspondente clássico.

1.4.3 Chen, Georgiou, Ning & Tannenbaum

Interessados em um análogo para a métrica de Wasserstein-2 que seja agilmente computável, os autores de [10] propõe uma quantia semelhante em espírito àquela que se utiliza em [6], diferindo unicamente na escolha do significado para o produto entre uma matriz e um campo de vetores. Esta escolha afeta subsequentemente a equação de continuidade, e portanto, presumivelmente, os custos ótimos de transporte entre densidades.

É este o caminho pelo qual se opta tanto neste primeiro texto quanto mais tarde em [11], pois são aplicações em engenharia que guiam a vontade dos autores – tomem-se como exemplos séries temporais, arranjos de medições sequenciais de diferentes naturezas. É por isso que se estudam ali densidades tomando valores em vetores, com enfoque em dimensão finita e com uma escolha de produto (entre densidades e campos de vetores) que prioriza análises quantitativas em detrimento dos resultados qualitativos. Observe-se o contraste entre os resultados destes textos e os dos em 1.4.1.

Como se é observado em [6], a construção de uma métrica adequada depende de uma "criteriosa escolha de ponto de partida". Em [9] opta-se por partir da fórmula para a distância de Wasserstein-1 que classicamente se obtém por meio da dualidade de Kantorovich, com o intuito de produzir para esta um análogo quântico. É curioso observar as semelhanças entre as expressões que definem esta nova métrica, e as expressões que definem a distância de Connes em geometria não-comutativa (as quais encontram-se em [12, Capítulo 5], ou, numa introdução que mais rapidamente encaminha-se à este tema, em [40, Capítulo 2]). Apresentam ainda os autores uma formulação dual do problema que caracteriza essa distância; esta nova, por sua vez, consiste num problema de controle semelhante à formulação de Benamou & Brenier [1], com a característica, pelo menos no caso clássico, de ser agilmente computável [37][41, Subseção 1.2.3]. Esta reformulação ainda permite tratar do caso "desbalanceado", isto é, daquele caso no qual as densidades inicial e final não necessariamente apresentam a mesma massa total. Por fim, trata-se ainda do problema de transporte com densidades tomando valores em matrizes – que pode ser visto como generalização do transporte com densidades tomando valores em vetores se olhamos para estes outros como matrizes diagonais; não é exatamente o caso, porque [9] e [11] estudam distâncias diferentes, mas é conveniente acostumar-se com esta ideia posto que far-se-á útil mais tarde.

1.4.4 Datta & Rouzé

Dois dos mais admiráveis trabalhos que pudemos encontrar sobre o assunto foram [35] e [15]. O objetivo central em ambos é garantir que valham uma série de desigualdades funcionais inspiradas em suas versões clássicas: algo como o que consta em [41, Capítulo 9], mas que, de qualquer forma, encontra-se plenamente esclarecido nas introduções dos artigos. Aqui, nos limitamos a chamar atenção ao fato de que nestes trabalhos, lança-se mão de dois análogos para distâncias de Wasserstein, uma de parâmetro 1, e outra de parâmetro 2 – o intuito sendo obter desigualdades do tipo das de Talagrand, isto é, desigualdades de custo de transporte.

A quantia escolhida para atuar como $\mathscr{W}_2$ em [35] e [15] é a mesma introduzida em [6] e [7], decisão compatível com o enfoque teórico da análise. A que faz o papel de $\mathscr{W}_1$, por outro lado, retém certa semelhança àquela de [9] e subsequentemente à distância de Connes – as diferenças entre os três possíveis pares residindo na escolha do análogo para a constante de Lipschitz. Em contraste com [9], porém, [35] não procura por uma formulação dual para o problema que caracteriza sua distância; a agilidade computacional já não mais é relevante.

No outro texto, [15], $\mathscr{W}_1$ nem sequer é mencionada. Esta ausência não é uma surpresa, visto que no caso clássico $\mathscr{W}_2$ é que exibe compatibilidades e boas interações com estrturas Riemannianas, e não $\mathscr{W}_1$. Ainda, [15] destaca-se por partir de uma única desigualdade de caráter geométrico, análoga à cota inferior de Ricci, para garantir todas as desigualdades de [35], e por realizar essa tarefa passando por sua própria versão quântica da desigualdade HWI [41, Teorema 9.17].

1.4.5 de Palma & Trevisan

Apesar de que o interesse principal dos trabalhos em 1.4.2 resida nos aspectos teóricos da introdução de alguma espécie de distância entre estados de um espaço de Hilbert, [16], por meio de uma leve modificação na definição da mesma quantia, e subsequente generalização na expressão do custo de transporte, é capaz de apresentar uma interpretação física para este novo problema.

Um dos princípios que ditam o rumo da investigação ali conduzida é o de que no contexto quântico os acoplamentos também deveriam ser compatíveis com a teoria de desintegração [41, Lema 7.6], de modo a fazer uso de canais quânticos, que representam de fato operações físicas que se possam executar em um sistema. Ao mesmo tempo, é justamente essa compatibilidade que permite demonstrar que as quantias introduzidas neste texto satisfazem uma espécie de desigualdade triangular (coisa que não se sabia a respeito de suas antecessoras). Elas continuam, porém, apresentando um valor positivo quando calculadas entre um estado e si mesmo.

1.5 Objetivos Principais

Partilhamos com estes textos que lemos o interesse em, de alguma maneira, procurar por reformulações do problema de transporte de Monge-Kantorovich. Por outro lado, pretendemos não precisar como aplicá-las, para podermos nos concentrar em estudar somente aspectos teóricos desta transição. Diferente de 1.4.1, bem como de 1.4.3, nos quais se prefere uma formulação dinâmica, vamos preferir a formulação em termos de acoplamentos. De fato, tanto a nossa formulação do problema, quanto a maneira como o tratamos se assemelha mais à maneira como é feito nos 1.4.2, ou ainda 1.4.5, que também dão preferência aos acoplamentos. Contrastamos com estes porém, ao abandonar a seleção de uma “função custo” (ou família de “funções custo”) específica.

Os textos em 1.4.4 têm um enfoque muito claro em estabelecer uma análise principalmente teórica de possíveis análogos quânticos do problema de transporte, e para isso procuram em vários momentos valer-se de ideias em correspondência direta com as que se encontram em textos clássicos do transporte ótimo. Nós aderimos a este tipo de paradigma. Por outro lado, todos os problemas estudados aqui são em princípio distintos dos estudados em 1.4.4, e de fato esta parece uma coisa importante de se investigar: sob quais condições se pode afirmar que os enunciados como apresentados aqui, ou nestes textos – especialmente em [35] – vêm a ser equivalentes. Também convém reparar aqui que nós vamos nos ater a discussões que correspondem aos fundamentos da teoria de transporte, agora sob novo ponto de vista.

A narrativa ao longo do presente trabalho pretende conduzir o leitor até o Teorema 3.3.1, que é um análogo da Dualidade de Kantorovich para C*-álgebras, e o principal resultado original do texto. Para fazer isto, primeiro nos concentramos em um caso mais simples, com dimensão finita, e procuramos estudá-lo até que estejamos confortáveis o suficiente para estudar o problema de transporte em C*-álgebras. Nesta tarefa, provamos também 2.3.4, 2.2.1 e 2.4.3. Além disso, achamos que também era pertinente que se demonstrasse 3.2.1 sem utilizar 3.3.1, e portanto assim o fizemos. São estes os resultados originais que queremos apresentar à literatura.

Capítulo 2

O Problema de Transporte para Espaços de Hilbert de Dimensão Finita

Os paralelos entre mecânica quântica e probabilidade conforme descritos em 1.3 criam uma oportunidade muito legal, que é a de formular um problema análogo ao problema de transporte de Monge-Kantorovich, mas agora adaptado para tratar de estados de sistemas físicos ao invés de medidas de probabilidade. Advindo nosso interesse da teoria da informação quântica, neste capítulo, restringimo-nos a trabalhar com espaços de dimensão finita, sempre que possível em uma linguagem que sugira – ou pelo menos não muito fortemente obstrua – extensões para dimensão infinita.

2.1 Contexto

Obs. Suprimimos do próximo parágrafo todas as potenciais ocorrências da expressão “respectivamente”. O leitor as deve pressupor ubíquas.

O problema agora se dá entre espaços de Hilbert de dimensão finita, que denotamos $\mathbb{C}^m$ e $\mathbb{C}^n$. Queremos transportar um estado $\mu \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m)$, que é um operador densidade em $\mathbb{C}^m$, para outro estado $\nu \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^n)$, operador densidade em $\mathbb{C}^n$; são os análogos das distribuições de massa inicial e final no problema de Monge, e é importante enfatizar que pensamos neles como matrizes complexas quadradas, $m \times m$ e $n \times n$. Também é prescrito um operador positivo $0 \leq C \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n)$ que faz o papel da função custo no transporte clássico. O transporte efetivamente supõe-se que se dá por meio de operadores densidade $\rho \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n)$ cujos traços parciais sejam μ e ν (ver 2.1.1). Nós chamamos portanto esses operadores de acoplamentos de μ e ν, ou de planos de transporte entre μ e ν, e denotamos o seu conjunto por $\Pi(\mu, \nu)$. A cada plano de transporte pode ser associado um determinado custo, que é o número $\operatorname{Tr} C\rho$.

Fixados estados $\mu \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m)$, $\nu \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^n)$ e um operador positivo $0 \leq C \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n)$ desejamos compreender a minimização da quantia:

$$\mathcal{T}(\mu, \nu) := \inf_{\rho \in \Pi(\mu,\nu)} \operatorname{Tr} C\rho. \tag{2.1.a}$$

Um operador densidade $\rho \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n)$ que atinja o ínfimo em questão é denominado um acoplamento ótimo para C, μ e ν.

2.1.1 Traços Parciais

Um operador linear $\rho \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n)$ admite o que se chamam de traços parciais $\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}^n} \rho \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m)$ e $\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}^m} \rho \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^n)$ [32, Subseção 2.4.3]. Estes operadores podem ser caracterizados por serem os únicos os quais satisfaçam respectivamente as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} &\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m) \qquad && \operatorname{Tr}\Big(A\Big[\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}^n} \rho\Big]\Big) = \operatorname{Tr}\Big(\Big[A \otimes I\Big]\rho\Big), \\ &\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^n) \qquad && \operatorname{Tr}\Big(B\Big[\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}^m} \rho\Big]\Big) = \operatorname{Tr}\Big(\Big[I \otimes B\Big]\rho\Big). \end{aligned}$$

A condição de que $\rho \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n)$ tenha traços parciais $\mu \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m)$ e $\nu \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^n)$ é portanto equivalente à condição de que:

$$\begin{aligned} &\forall\big(A \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m),\, B \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^n)\big) \\ \operatorname{Tr}\big(\big[A \otimes I + I \otimes B\big]\rho\big) &= \operatorname{Tr}\Big(A\Big[\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}^n} \rho\Big]\Big) + \operatorname{Tr}\Big(B\Big[\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}^m} \rho\Big]\Big) \\ &= \operatorname{Tr} A\mu + \operatorname{Tr} B\nu. \end{aligned}$$

Exemplo 2.1.2. Há um caso particular interessante no qual as contas se simplificam bastante: quando $m = n = 2$. Faz sentido chamá-lo de problema de transporte dos *qubits*. É nele que preferimos apresentar exemplos.

Retornando, com o intuito de melhor compreender estes objetos, passamos a calcular um acoplamento em coordenadas:

Exemplo 2.1.3. Digamos que μ, ν e ρ se escrevam $\sum_{ij} \mu_{ij} |i\rangle \langle j|$, $\sum_{kl} \nu_{kl} |k\rangle \langle l|$ e $\sum_{ikjl} \rho_{ikjl} |ik\rangle \langle jl|$). Nesta notação, deduzimos:

1. por serem autoadjuntos, que $\mu_{ij} = \overline{\mu_{ji}}$, $\nu_{kl} = \overline{\nu_{lk}}$ e $\rho_{ikjl} = \overline{\rho_{jlik}}$;
2. por serem positivo semidefinidos, $\mu_{ii} \geq 0$, $\nu_{kk} \geq 0$ e $\rho_{ikik} \geq 0$;
3. por terem traço um:
$$\sum_i \mu_{ii} = 1, \quad \sum_k \nu_{kk} = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{ik} \rho_{ikik} = 1\ ;$$
4. finalmente, por conta dos traços parciais impostos a ρ:
$$\sum_k \rho_{ikjk} = \mu_{ij} \quad \text{e} \quad \sum_i \rho_{ikil} = \nu_{kl}.$$

Exemplo 2.1.4. Um dos casos mais simples possíveis dentre os não-triviais é o caso em que:

$$\mu = |0\rangle\langle 0| \quad \text{e} \quad \nu = |1\rangle\langle 1|\,,$$

pois quando pelo menos um dos estados é puro, há um único acoplamento possível entre eles, que é justamente o seu produto tensorial [25, Corolário 3.12]. Como neste exemplo ambos são positivos, sabemos que o acoplamento é:

$$\rho = |01\rangle\langle 01|\,,$$

operador densidade em $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$.

2.2 A Dualidade de Kantorovich para Espaços de Hilbert de Dimensão Finita

Cada possível custo C que escolhemos determina um problema de transporte diferente, com possíveis minimizantes e preços mínimos diferentes. É particularmente interessante encontrar operadores C para os quais a função $\mathcal{T}$ – definida como em (2.1.a) – venha a ser uma métrica no espaço destas densidades, afinal de contas, assim é que é produzida a distância de Wasserstein. No nosso exemplo, isto pode ser interpretado como uma maneira de comparar *qubits*. De fato, alguém poderia se questionar se a própria distância do traço não pode ser obtida por um processo desse tipo.

Em [32, 9.22], nos é apresentada a seguinte caracterização para a distância do traço:

$$D_{\mathrm{Tr}}(\mu,\nu) = \max_{0\leq P\leq I} \operatorname{Tr} P(\mu-\nu). \tag{2.2.a}$$

Esta expressão lembra aquela que se obtém para o custo ótimo de um problema de transporte a partir da dualidade de Kantorovich. É ela que nos motiva a verificar que esta distância é de fato proveniente de um problema de transporte.

A dualidade de Kantorovich substitui um problema de minimização entre os acoplamentos por um problema de maximização entre o que são denominados *pares admissíveis*. Neste texto, tomamos para estes pares a seguinte definição:

$$\Gamma\,(C) \coloneqq \{(A,B)\,\text{observáveis de}\ \mathbb{C}^m\ \text{e}\ \mathbb{C}^n\ \text{tais que}\ A\otimes I + I\otimes B \leq C\}. \tag{2.2.b}$$

Sabemos que um resultado análogo a este de dualidade vale, pelo menos em um caso específico, como descrito em [4, Teorema 2.1]. Apesar disso, nós não encontramos na literatura algum análogo deste resultado que valesse para operadores custo positivos $0 \leq C \in \mathscr{B}\,(\mathbb{C}^m\otimes\mathbb{C}^n)$ arbitrários. Nosso próximo passo é portanto assegurar que valha o seguinte teorema:

Teorema 2.2.1 (Dualidade de Kantorovich)**.** *Sejam $\mu \in \mathscr{B}\,(\mathbb{C}^m)$ um operador densidade em $\mathbb{C}^m$, $\nu \in \mathscr{B}\,(\mathbb{C}^n)$ um operador densidade em $\mathbb{C}^n$, e $C = C^\dagger \in \mathscr{B}\,(\mathbb{C}^m\otimes\mathbb{C}^n)$ um operador positivo em $\mathbb{C}^m\otimes\mathbb{C}^n$. Então:*

$$\sup_{(A,B)\in\Gamma(C)} \operatorname{Tr} A\mu + \operatorname{Tr} B\nu = \min_{\rho\in\Pi(\mu,\nu)} \operatorname{Tr} C\rho. \tag{2.2.c}$$

Demonstração. Pretendemos agora adaptar as estratégias de [4] (que, pelo jeito são elas próprias adaptações das estratégias de [41]). A primeira coisa é fazer uso do Teorema de Fenchel-Rockafellar; nos reportamos à versão como enunciada em [41, Teorema 1.9]. O espaço vetorial normado E, nós tomamos como o espaço dos observáveis do sistema composto, isto é, os operadores autoadjuntos de $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ (o corpo dos escalares deste espaço é $\mathbb{R}$, e nós o encaramos como equipado do produto interno dado pelo traço do produto). O par de funções convexas que pretendemos conjugar consiste de Θ e Ξ definidas por:

$$\Theta T \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{se } T \geq -C, \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\Xi T \coloneqq \begin{cases} \operatorname{Tr} A\mu + \operatorname{Tr} B\nu & \text{se } T = A \otimes I + I \otimes B, \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A identidade de $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ pertence ao domínio efetivo de ambas as funções; isto porque $I \geq 0 \geq -C$, de sorte que $\Theta I = 0$, e também $I = \frac{1}{2} I \otimes I + I \otimes \frac{1}{2} I$, o que quer dizer que $\Xi I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Adicionalmente, Θ é contínua em I. Como se trata de uma função constante em seu domínio efetivo, é o bastante garantir que existe um aberto em torno de I que está todo contido neste conjunto maior. A bola centrada em I de raio 1 é o aberto que escolhemos. De fato, se $\|I - T\| < 1$, podemos nos aproveitar de valer o mesmo para os quadrados, e inferir:

$$\begin{aligned} & \| |\xi\rangle - T|\xi\rangle \|^2 < 1 \\ \iff \quad & \langle \xi|\xi\rangle + \langle T\xi|T\xi\rangle - 2\langle \xi|T\xi\rangle < 1 \\ \iff \quad & 1 - 2\langle \xi|T\xi\rangle < 1 \\ \iff \quad & 0 < 2\langle \xi|T\xi\rangle \\ \iff \quad & 0 < \langle \xi|T\xi\rangle, \end{aligned}$$

o que nos assegura que $T \geq 0$, e subsequentemente $T \geq -C$, isto é, $\Theta T = 0$.

Agora, precisamos computar os dois lados da seguinte identidade, conclusão do Teorema de Fenchel-Rockafellar [41, Teorema 1.9]:

$$\inf_{T \in E} \Theta(T) + \Xi(T) = \max_{\Lambda \in E^\star} -\Theta^\star(-\Lambda) - \Xi^\star(\Lambda).$$

Na esquerda, o que temos é:

$$\inf_{\substack{T = A\otimes I + I \otimes B \\ T \geq -C}} \operatorname{Tr} A\mu + \operatorname{Tr} B\nu = -\sup_{\substack{T = A\otimes I + I \otimes B \\ T \leq C}} \operatorname{Tr} A\mu + \operatorname{Tr} B\nu = -\sup_{(A,B) \in \Gamma(C)} \operatorname{Tr} A\mu + \operatorname{Tr} B\nu,$$

enquanto que o que temos na direita não é tão claro, visto que envolve as transfomadas de Legendre-Fenchel de Θ e Ξ. Com isto em mente, queremos calcular este lado computando ditas transformadas. Por definição:

$$\Theta^\star(-\Lambda) = \sup_{T \in E} \langle -\Lambda, T\rangle - \Theta(T) = \sup_{T \geq -C} \langle -\Lambda, T\rangle.$$

Nós separamos em casos; se $\Lambda \not\geq 0$, é porque há algum $T \geq 0 \geq -C$ para o qual $\langle \Lambda, T \rangle < 0$, e neste caso, a família indexada por $n \in \mathbb{N}$ de operadores nT nos assegura de que o supremo é $+\infty$. Se, por outro lado, $\Lambda \geq 0$, então o supremo vale $\langle \Lambda, C \rangle$, pois como $C + T \geq 0$:

$$\langle -\Lambda, -C \rangle - \langle -\Lambda, T \rangle = \langle -\Lambda, -C - T \rangle = \langle \Lambda, C + T \rangle \geq 0.$$

Nos resta estudar $\Xi^\star$; semelhante ao que fizemos com $\Theta^\star$, vale:

$$\begin{aligned} \Xi^\star(\Lambda) &= \sup_{T \in E} \langle \Lambda, T \rangle - \Xi(T) \\ &= \sup_{T = A \otimes I + I \otimes B} \langle \Lambda, A \otimes I + I \otimes B \rangle - (\operatorname{Tr} A\mu + \operatorname{Tr} B\nu), \end{aligned}$$

e neste caso, se há algum dentre estes últimos T, para o qual:

$$\langle \Lambda, A \otimes I + I \otimes B \rangle - (\operatorname{Tr} A\mu + \operatorname{Tr} B\nu) > 0,$$

basta repetirmos o truque de considerar a família de operadores nT, para inferir que o valor de $\Xi^\star(\Lambda)$ seja $+\infty$. Se é o caso de ocorrer o contrário:

$$\langle \Lambda, A \otimes I + I \otimes B \rangle - (\operatorname{Tr} A\mu + \operatorname{Tr} B\nu) < 0,$$

recaímos no anterior, multiplicando, primeiro, T por -1. Finalmente, se nenhuma dessas duas coisas acontece, então é porque $\Xi^\star(\Lambda) = 0$. Significa que, em suma, obtivemos:

$$\Theta^\star(-\Lambda) = \begin{cases} \langle \Lambda, C \rangle & \text{se } \Lambda \geq 0, \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\Xi^\star(\Lambda) = \begin{cases} 0 & \text{se } \langle \Lambda, A \otimes I + I \otimes B \rangle = \operatorname{Tr} A\mu + \operatorname{Tr} B\nu, \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Isto é o que nos permite neste contexto reescrever aquilo que assegura a dualidade de Fenchel-Rockafellar da seguinte maneira:

$$\inf_{A \otimes I + I \otimes B \geq -C} \operatorname{Tr} A\mu + \operatorname{Tr} B\nu = \max_{\substack{\Lambda \geq 0 \\ \langle \Lambda, A \otimes I + I \otimes B \rangle = \operatorname{Tr} A\mu + \operatorname{Tr} B\nu}} -\langle \Lambda, C \rangle.$$

Trocando os sinais, fica:

$$\sup_{(A,B) \in \Gamma(C)} \operatorname{Tr} A\mu + \operatorname{Tr} B\nu = \min_{\substack{\Lambda \geq 0 \\ \langle \Lambda, A \otimes I + I \otimes B \rangle = \operatorname{Tr} A\mu + \operatorname{Tr} B\nu}} \langle \Lambda, C \rangle.$$

Finalmente, nos perguntamos: o que significa $\langle \Lambda, C \rangle$? Nós podemos usar o Teorema de Riesz para caracterizar esta quantia como um produto interno e responder esta pergunta obtendo informações sobre o representante de Λ, o operador ρ:

1. $\langle \Lambda, T \rangle = \operatorname{Tr} T\rho$;

2. $\langle e_i \otimes f_j, \rho(e_i \otimes f_j)\rangle = \operatorname{Tr} P_{e_i\otimes f_j}\rho = \langle \Lambda, P_{e_i\otimes f_j}\rangle \geq 0$;

3. $\operatorname{Tr}(A \otimes I + I \otimes B)\rho = \operatorname{Tr} A\mu + \operatorname{Tr} B\nu$;

4. $\operatorname{Tr} I\rho = \operatorname{Tr}(\frac{1}{2}I \otimes I + I \otimes \frac{1}{2}I)\rho = \operatorname{Tr} \frac{1}{2}I\mu + \operatorname{Tr} \frac{1}{2}I\nu = 1$,

o que, em suma, significa que ρ é um operador densidade com marginais μ e ν. □

Além disso, no caso clássico sabemos que se pode restringir a considerar apenas os pares constituídos de uma função dita "c-côncava" e sua "c-conjugada". É interessante olhar como isso se demonstra em [41, Teorema 1.3], porque a maneira como os pares são melhorados lá motiva a maneira como pretendemos melhorá-los aqui – também adaptando o truque para melhorar os pares popularizado por Rüschendorf.

Para tal, precisamos introduzir a noção de C-conjugação. Ela nos habilita a restringir o problema de otimização entre os pares $(A, B) \in \Gamma(C)$ a um determinado subconjunto de pares os quais por sua vez incrementam nossa capacidade de avaliar o lado esquerdo de (2.2.c) – crucial para que sanemos nossa dúvida sobre a distância do traço. É o que passamos a fazer:

2.3 C-conjugação

Dados um operador positivo $0 \leq C \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n)$, duas bases ortonormais, digamos $\{|\psi_i\rangle\}$ de $\mathbb{C}^m$, e $\{|\varphi_j\rangle\}$ de $\mathbb{C}^n$, e um operador autoadjunto $A = A^\dagger \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m)$, nós construímos o operador C-conjugado de A (com respeito a $\{|\psi_i\rangle\}$ e $\{|\varphi_j\rangle\}$) declarando que $\{|\varphi_j\rangle\}$ são autovetores de A^C, com os seguintes autovalores:

$$\langle \varphi_j, A^C\varphi_j\rangle = \inf_i \langle \psi_i\varphi_j, C\psi_i\varphi_j\rangle - \langle \psi_i, A\psi_i\rangle . \tag{2.3.a}$$

A notação A^C pode induzir o leitor a pensar que trata-se de um operador no mesmo espaço que A, o que não é verdade em geral. O que é verdade é que A^C se encontra no mesmo espaço que B.

Um operador $B \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^n)$ é dito C-côncavo quando houver algum um operador autoadjunto $A = A^\dagger \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m)$ cujo correspondente C-conjugado seja justamente $B = A^C \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^n)$.

Obs. Em princípio, esta noção de C-conjugação pode depender da escolha de base; permutar os índices, por exemplo, já altera o operador que se obtem por meio dessa definição. Portanto, tecnicamente seria mais apropriado denominá-la $(C, \{|\psi_i\rangle\}, \{|\varphi_j\rangle\})$-conjugação, e os correspondentes operadores de $(C, \{|\psi_i\rangle\}, \{|\varphi_j\rangle\})$-côncavos, o que nós não fazemos para evitar poluir o texto. Ao invés disso, pretendemos deixar claro, pelo menos pelo contexto, quais são as bases com respeito às quais consideramos as conjugações.

Proposição 2.3.1. A C-conjugação reverte desigualdades, isto é: vale para operadores autoadjuntos $A_0 = A_0^\dagger \leq A_1 = A_1^\dagger \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m)$ que $A_1^C \leq A_0^C$.

Demonstração.

$$
\begin{array}{lll}
 & & A_0 \leq A_1 \\
\Longrightarrow & (\forall i) & \langle \psi_i, A_0\psi_i\rangle \leq \langle \psi_i, A_1\psi_i\rangle \\
\Longrightarrow & (\forall i,j) & \langle \psi_i\varphi_j, C\psi_i\varphi_j\rangle + \langle \psi_i, A_0\psi_i\rangle \leq \langle \psi_i\varphi_j, C\psi_i\varphi_j\rangle + \langle \psi_i, A_1\psi_i\rangle \\
\Longrightarrow & (\forall j) & \inf_i \langle \psi_i\varphi_j, C\psi_i\varphi_j\rangle + \langle \psi_i, A_0\psi_i\rangle \leq \inf_i \langle \psi_i\varphi_j, C\psi_i\varphi_j\rangle + \langle \psi_i, A_1\psi_i\rangle \\
\Longrightarrow & (\forall j) & \langle \varphi_j, -A_0^C\varphi_j\rangle \leq \langle \varphi_j, -A_1^C\varphi_j\rangle \\
\Longrightarrow & & A_1^C \leq A_0^C
\end{array}
$$

□

Proposição 2.3.2. Para qualquer operador autoadjunto $A = A^\dagger \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m)$ é verdade que $(A^C)^C \geq A$.

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
\langle \psi_i, (A^C)^C\psi_i\rangle &= \inf_j \langle \psi_i\varphi_j, C\psi_i\varphi_j\rangle - \langle \varphi_j, A^C\varphi_j\rangle \\
&= \inf_j \langle \psi_i\varphi_j, C\psi_i\varphi_j\rangle - \inf_k \langle \psi_k\varphi_j, C\psi_k\varphi_j\rangle - \langle \psi_k, A\psi_k\rangle \\
&= \inf_j \sup_k \langle \psi_i\varphi_j, C\psi_i\varphi_j\rangle - \langle \psi_k\varphi_j, C\psi_k\varphi_j\rangle + \langle \psi_k, A\psi_k\rangle \\
&\geq \inf_j 0 + \langle \psi_i, A\psi_i\rangle \\
&= \langle \psi_i, A\psi_i\rangle
\end{aligned}
$$

□

Proposição 2.3.3. Seja $B = B^\dagger \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^n)$ um operador C-côncavo. Então $(B^C)^C = B$.

Demonstração. Como B é C-côncavo há algum $A = A^\dagger \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m)$ tal que $B = A^C$. A proposição 2.3.2 garante que $(B^C)^C \geq B$, e também que $(A^C)^C \geq A$. Além disso, com a proposição 2.3.1 inferimos desta última desigualdade que $A^C \geq \left(\left(A^C\right)^C\right)^C$, isto é: $B \geq (B^C)^C$. Logo $(B^C)^C = B$. □

Lema 2.3.4. Sejam $A = A^\dagger \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m)$ e $B = B^\dagger \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^n)$ observáveis tais que $A \otimes I + I \otimes B \leq C$. Então o observável $A^C = (A^C)^\dagger \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^n)$ junto de A também satisfaz $A \otimes I + I \otimes A^C \leq C$, mas agora

$$\operatorname{Tr} A\mu + \operatorname{Tr} A^C\nu \geq \operatorname{Tr} A\mu + \operatorname{Tr} B\nu.$$

Demonstração. Visto que $\langle \varphi_j, B\varphi_j\rangle$ – conforme verifica-se pela expressão (2.3.a) – é sempre cota inferior para as quantias cujo ínfimo é $\langle \varphi_j, A^C\varphi_j\rangle$, sabemos que $A^C - B \geq 0$. Quando multiplicamos coisas positivas, obtemos outras coisas positivas, e portanto vale que $(A^C - B)\nu \geq 0$, de onde segue a desigualdade entre as somas de traços. □

Obs. O lema anterior é muito útil para nós principalmente porque nos permite trocar um problema de minimização envolvendo duas variáveis (os operadores autoadjuntos A e B), por um problema mais simples, que envolve uma única variável (o operador autoadjunto A).

2.4 A Distância do Traço

Dispomos, portanto, das ferramentas para abordar a seguinte questão: é ou não proveniente de um problema de transporte a distância do traço?

Pretendemos argumentar em defesa da resposta afirmativa. A motivação para que tomemos este partido vem do caso particular em que comparamos apenas dois *qubits* um com o outro.

Começamos enfatizando que no cenário clássico, uma expressão semelhante (ou análoga) à (2.2.a) aparece na fórmula de Kantorovich-Rubinstein [17, Teorema 5.2], o que nos motiva a procurar por um custo que se assemelhe, em algum sentido, à função distância.

Exemplo 2.4.1. Quando observamos as expressões:

$$\int f\, d\delta_{x_0} = f(x_0) \quad \text{e} \quad \operatorname{Tr} F P_{|x_0\rangle} = \langle x_0 | F x_0 \rangle\,,$$

sentimo-nos encorajados a pensar na quantia $\langle x_0 | F x_0 \rangle$ como fazendo o papel de $f(x_0)$. Some-se a isto a observação de que todos os possíveis espaços métricos de dois elementos têm, ademais de escala, diâmetro 1, e temos todos os ingredientes de que precisamos para anunciar nosso palpite de função custo para o problema de transporte dos *qubits*:

$$C_q\,|ij\rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j; \\ |ij\rangle & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Esta escolha nos garante neste caso particular, como será demonstrado adiante (em 2.4.3), que:

$$\sup_{(A,B)\in\Gamma(C_q)} \operatorname{Tr} A\mu + \operatorname{Tr} B\nu = D_{\mathrm{Tr}}(\mu,\nu).$$

Portanto, pretendemos extrapolar este exemplo para o caso geral, começando por, fixada uma base ortonormal $\{\psi_i\}$ de $\mathbb{C}^m$, definir um custo que se pareça com distância por:

$$C_d\,|\psi_i\psi_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j; \\ |\psi_i\psi_j\rangle & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Lema 2.4.2. Seja A um dado operador C_d-côncavo (como em 2.3); neste caso,

$$\forall_{\substack{0\le i\le m\\ 0\le j\le n}} \quad |\langle \psi_i, A\psi_i\rangle - \langle \psi_j, A\psi_j\rangle| \le 1, \text{ e}$$
$$A^{C_d} = -A.$$

Demonstração. Dado que A é C_d-côncavo, vale que $A = (A^{C_d})^{C_d}$ (ver 2.3.3).

Pode-se portanto calcular:

$$\begin{aligned}
\langle \psi_i, A\psi_i\rangle - \langle \psi_j, A\psi_j\rangle &= \langle \psi_i, (A^{C_d})^{C_d}\psi_i\rangle - \langle \psi_j, (A^{C_d})^{C_d}\psi_j\rangle \\
&= \inf_k \langle \psi_i\psi_k, C_d\psi_i\psi_k\rangle - \langle \psi_k, A^{C_d}\psi_k\rangle \\
&\qquad - \inf_l \langle \psi_j\psi_l, C_d\psi_j\psi_l\rangle - \langle \psi_l, A^{C_d}\psi_l\rangle \\
&= \inf_k \langle \psi_i\psi_k, C_d\psi_i\psi_k\rangle - \langle \psi_k, A^{C_d}\psi_k\rangle \\
&\qquad + \sup_l \langle \psi_l, A^{C_d}\psi_l\rangle - \langle \psi_j\psi_l, C_d\psi_j\psi_l\rangle \\
&= \inf_k \sup_l \langle \psi_i\psi_k, C_d\psi_i\psi_k\rangle - \langle \psi_j\psi_l, C_d\psi_j\psi_l\rangle \\
&\qquad\qquad + \langle \psi_l, A^{C_d}\psi_l\rangle - \langle \psi_k, A^{C_d}\psi_k\rangle \\
&\le \sup_l \langle \psi_i\psi_l, C_d\psi_i\psi_l\rangle - \langle \psi_j\psi_l, C_d\psi_j\psi_l\rangle + 0 \\
&\le \langle \psi_i\psi_j, C_d\psi_i\psi_j\rangle \le 1,
\end{aligned}$$

e trocar o i pelo j para obter $|\langle \psi_i, A\psi_i\rangle - \langle \psi_j, A\psi_j\rangle| \le 1$. Assim como no caso clássico, também vale a recíproca; isto é, caso A satisfaça

$$\langle \psi_i, A\psi_i\rangle \le \langle \psi_i\psi_j, C_d(\psi_i\psi_j)\rangle + \langle \psi_j, A\psi_j\rangle$$

para quaisquer i e j, então:

$$\langle \psi_i, A\psi_i\rangle \le \inf_j \langle \psi_i\psi_j, C_d(\psi_i\psi_j)\rangle + \langle \psi_j, A\psi_j\rangle = \langle \psi_i, (-A)^{C_d}\psi_i\rangle,$$

e como a cota inferior $\langle \psi_i, A\psi_i\rangle$ é atingida pelo elemento $0 + \langle \psi_i, A\psi_i\rangle$ da família sobre a qual toma-se o ínfimo, segue que $\langle \psi_i, A\psi_i\rangle = \langle \psi_i, (-A)^{C_d}\psi_i\rangle$. Note que ambos operadores são C_d-côncavos, e portanto têm $\{\psi_i\}$ por autovetores, podemos concluir que $A^{C_d} = -A$. $\square$

Proposição 2.4.3. A distância do traço é um caso particular da distância de Monge-Kantorovich.

Demonstração. Como última ferramenta da qual precisamos dispor para caracterizar a distância do traço como sendo equivalente a um problema de transporte, vamos garantir que acrescentar a um operador autoadjunto $A = A^\dagger \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m)$ um múltiplo da identidade kI não afeta a quantia que estamos maximizando, o que se faz com uma conta simples:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(A + kI)\mu + \operatorname{Tr}(A + kI)^{C_d}\nu &= \operatorname{Tr}(A + kI)\mu + \operatorname{Tr} -(A + kI)\nu \\
&= \operatorname{Tr} A\mu + k + \operatorname{Tr} -A\nu - k \qquad (2.4.a) \\
&= \operatorname{Tr} A\mu + \operatorname{Tr} A^{C_d}\nu.
\end{aligned}$$

Com isto, podemos concluir nossa análise:

$$\min_{\substack{\rho\geq 0\\ \operatorname{Tr}(A\otimes I+I\otimes B)\rho\\ =\operatorname{Tr}A\mu+\operatorname{Tr}B\nu}} \operatorname{Tr}C_d\rho = \sup_{A\otimes I+I\otimes B\leq C_d} \operatorname{Tr}A\mu+\operatorname{Tr}B\nu = \sup_{A \text{ é } C_d\text{-côncavo}} \operatorname{Tr}A\mu+\operatorname{Tr}A^{C_d}\nu \tag{2.4.b}$$

$$= \sup_{A \text{ é } C_d\text{-côncavo}} \operatorname{Tr}A\mu-\operatorname{Tr}A\nu \tag{2.4.c}$$

$$= \sup_{\substack{A \text{ é } C_d\text{-côncavo}\\ 0\leq A\leq I}} \operatorname{Tr}A\mu-\operatorname{Tr}A\nu \tag{2.4.d}$$

$$= \sup_{0\leq A\leq I} \operatorname{Tr}A(\mu-\nu) \tag{2.4.e}$$

$$= D_{\operatorname{Tr}}(\mu,\nu). \tag{2.4.f}$$

(2.4.b) consiste no Teorema 2.2.1 e no Lema 2.3.4;

(2.4.c) obtém-se do Lema 2.4.2;

(2.4.d) segue de (2.4.a), considerando a escolha particular $k=-\inf_i\langle\psi_i, A\psi_i\rangle$;

(2.4.e) é um relaxamento, permitimos novamente que A não necessariamente seja C_d-côncavo;

(2.4.f) é a expressão que consta em (2.2.a).

□

Obs. Chamamos atenção para o fato de que o custo C_d depende, em sua definição, de uma escolha de bases. Todos os possíveis operadores assim construídos induzem portanto sobre os estados a distância do traço.

Exemplo 2.4.4. Na notação (1.2.b), o seguinte exemplo assegura ser possível que custos definidos como C_d, mas em bases diferentes, não coincidam:

$$\begin{aligned}\langle ++|C_{|0\rangle,|1\rangle}++\rangle &= \frac{1}{4}\langle 00+01+10+11|C_{|0\rangle,|1\rangle}00+01+10+11\rangle\\ &= \frac{1}{2}\neq 0 = \langle ++|C_{|+\rangle,|-\rangle}++\rangle\,.\end{aligned}$$

Capítulo 3

O Problema de Transporte para C*-álgebras

Uma vez tendo passado o problema de transporte à formulação abordada no capítulo anterior, queremos agora extrapolá-la para uma nova formulação, em termos de C*-álgebras. Novamente, isto se dá em grande parte de maneira natural conforme tentamos mimetizar os passos iniciais da própria teoria de transporte ótimo, mas dessa vez precisamos contornar algumas dificuldades técnicas adicionais que se apresentam neste novo contexto, e que antes se resolviam automaticamente.

3.1 Novo Contexto

O problema se dá desta vez entre duas C*-álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, nas quais temos estados, $\eta \in \mathfrak{s}(\mathcal{A})$ e $\theta \in \mathfrak{s}(\mathcal{B})$, enquanto que queremos compará-los ponderadamente de acordo com algum custo fixado. Esse tal custo nós postulamos que é algum elemento positivo $0 \leq c \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Os nossos dois estados são então acoplados por um terceiro, um estado $\omega \in \mathfrak{s}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Para que digamos que ω é um plano de transporte entre η e θ, vamos impor as condições de que:

$$\omega\,(a \otimes 1_{\mathcal{B}} + 1_{\mathcal{A}} \otimes b) = \eta\, a + \theta\, b, \quad \forall\, a \in \mathcal{A}\,,\, b \in \mathcal{B}. \tag{3.1.a}$$

O conjunto dos estados do tensorial que satisfaçam essas restrições será denotado $\tilde{\Pi}(\eta,\theta) \subset (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^*$. Em princípio, cada elemento ω de $\tilde{\Pi}(\eta,\theta)$ pode produzir um número $\omega\, c$ diferente; nosso objetivo é minimizar este número em termos de ω. O ínfimo destas quantias é o que denotamos por:

$$\mathcal{T}_c(\eta,\theta) = \inf_{\omega \in \tilde{\Pi}(\eta,\theta)} \omega\, c, \tag{3.1.b}$$

e denominamos custo total de transporte entre η e θ.

Este problema generaliza aquele que estudamos no capítulo anterior. Isto se dá da seguinte maneira: em dimensão finita, as C*-álgebras da forma $\mathcal{A} =$

$\mathscr{B}(\mathbb{C}^m)$ possuem um produto interno compatível com sua estrutura algébrica, que é o produto interno do traço, definido por:

$$\langle A, \tilde{A} \rangle = \mathrm{Tr}\, A^\dagger \tilde{A}.$$

Isto permite estabelecer uma correspondência bijetiva entre estados de $\mathscr{B}(\mathbb{C}^m)$ enquanto funcionais lineares, e enquanto operadores densidade, por meio do Teorema de Riesz. Significa que para cada funcionais lineares $\eta \in \mathfrak{s}(\mathscr{B}(\mathbb{C}^m))$, $\theta \in \mathfrak{s}(\mathscr{B}(\mathbb{C}^n))$ e $\omega \in \mathfrak{s}(\mathscr{B}(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n))$ existem únicos operadores $\mu \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m)$, $\nu \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^n)$ e $\rho \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n)$ tais que:

$$\eta\, A = \mathrm{Tr}\, A^\dagger \mu,\ \theta\, B = \mathrm{Tr}\, B^\dagger \nu \text{ e } \omega\, T = \mathrm{Tr}\, T^\dagger \rho,$$
$$\forall\, A \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m),\ B \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^n) \text{ e } T \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n).$$

Em particular, valem:

$$\eta\, P_{|\psi\rangle} = \mathrm{Tr}\, P_{|\psi\rangle}\mu = \langle \psi | \mu\, \psi \rangle, \text{ e} \tag{3.1.c}$$
$$\|\eta\| = \eta\, I = \mathrm{Tr}\, I\mu. \tag{3.1.d}$$

Como em dimensão finita os elementos positivos são combinações positivas de finitas projeções, (3.1.c) garante que o funcional linear η seja positivo se e somente se o operador μ também o for. Neste caso, como I é a unidade de $\mathscr{B}(\mathbb{C}^m)$, (3.1.d) garante adicionalmente que η tenha norma 1 precisamente quando μ tiver traço 1. O mesmo, claro, para os demais pares. Assim, a condição (3.1.a) se torna:

$$\mathrm{Tr}(A \otimes I + I \otimes B)\rho = \omega\,(A \otimes I + I \otimes B) = \eta\, a + \theta\, b = \mathrm{Tr}\, A\mu + \mathrm{Tr}\, B\nu$$
$$\forall\, A \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m),\ B \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^n),$$

que é equivalente a impor que ρ tenha traços parciais μ e ν, pois tomando $B = 0$ ou $A = 0$ obtemos uma identidade que caracteriza unicamente o traço parcial [32, Caixa 2.6]. O conjunto $\Pi(\mu, \nu)$ é portanto exatamente o conjunto dos representantes via Teorema de Riesz dos elementos de $\tilde{\Pi}(\eta, \theta)$.

3.1.1 Produtos Tensoriais

Uma primeira sutileza à qual queremos chamar atenção diz respeito ao produto tensorial $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. A exposição sobre tensoriais que pauta esta seção é o capítulo 4 de [33]. Dadas duas C*-álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, em geral não é verdade que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ também seja uma C*-álgebra. De fato, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ é apenas uma *-álgebra, que pode ser enriquecida com uma C*-norma e então completada, tornando-se finalmente uma C*-álgebra. Todas as possíveis C*-normas em $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ estão sanduichadas entre duas específicas que são conhecidas e particularmente importantes, chamadas norma mínima e norma máxima, que dão origem ao produto tensorial mínimo e produto tensorial máximo de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ – estes sim, C*-álgebras. Eventualmente acontece destas duas normas (e portanto todas, que são uma só) coincidirem; aí se diz que o par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ é nuclear. Existem até mesmo o que se chamam de

C*-álgebras nucleares, que são aquelas que tornam qualquer par nuclear. Todas as C*-álgebras de dimensão finita, e também todas as C*-álgebras comutativas são nucleares. Os endomorfismos compactos de um espaço de Hilbert são outro exemplo interessante. No caso geral, em que não coincidem, parece natural estudar o problema com o maior conjunto de candidatos possível, o que se dá no produto tensorial máximo.

3.1.2 Unidades

Há também uma segunda sutileza que queremos enfatizar, e esta diz respeito às unidades de $\mathcal{A}$ e de $\mathcal{B}$. A abordagem adequada seria a de impor aos acoplamentos que satisfizessem, para quaisquer $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, e aproximações da identidade a_κ e b_λ nos respectivos espaços:

$$\lim_{\kappa,\lambda} \omega\,(a \otimes b_\lambda + a_\kappa \otimes b) = \eta\, a + \theta\, b.$$

Convém observar que estas condições coincidem com as que apresentamos provisóriamente quando é o caso de que haja unidade, e sendo assim faz sentido simplesmente estender o significado de $\tilde{\Pi}\,(\eta, \theta)$ para que contemple também o caso não-unital. Dito isso, preferimos nos concentrar no caso unital.

3.2 Existência de Soluções

Para alimentar esta discussão, tomamos aqui um desvio com relação ao percurso percorrido no outro capítulo, e demonstramos:

Proposição 3.2.1 (Existência de um acoplamento ótimo)**.** O problema de transporte (3.1.b) para C*-álgebras (unitais) admite soluções, isto é, estados minimizantes para o custo.

Demonstração. Nós vamos usar o método direto do cálculo das variações. Seja ω_n uma sequência (de argumentos) minimizante(s) para o custo total dentre os acoplamentos de η e θ. Os termos da sequência são todos elementos de $\tilde{\Pi}\,(\eta, \theta)$. Este conjunto, por sua vez, está contido na bola unitária do espaço vetorial dual a $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

O conjunto $\tilde{\Pi}\,(\eta, \theta)$ é fechado. No caso unital, isto se dá pois as restrições impostas sobre seus elementos (que caracterizam o conjunto), são as de que estejam na pré-imagem de um conjunto unitário, isto é, de um número $(\eta\, a+\theta\, b)$, pelo funcional linear avaliação em $(a \otimes 1_{\mathcal{B}} + 1_{\mathcal{A}} \otimes b)$ – por definição contínuo na topologia fraca*. A intersecção arbitrária de fechados é fechada.

Já $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ é um espaço de Banach. O que acontece é que qualquer que seja a norma escolhida no tensorial dos espaços vetoriais $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ para torná-lo uma C*-álgebra, este processo só se concretiza mediante o completamento do espaço (ver subseção 3.1.1). Por isso, podemos tirar proveito do Teorema de Banach-Alaoglu independentemente de qualquer que seja o produto tensorial no qual escolhamos trabalhar, e garantir que a bola unitária do dual topológico deste espaço seja um compacto.

Temos certeza, portanto, que ω_n admite uma subsequência convergente ω_{n_k}, cujo o limite denotamos ω_∞ e já sabemos ser um acoplamento de η e θ. Daí, como a topologia na qual esta subsequência converge é a fraca*:

$$\omega_\infty\, c = \lim_{k\to+\infty} \omega_{n_k}\, c = \inf_{\omega\in\tilde{\Pi}(\eta,\theta)} \omega\, c = \mathcal{T}_c\left(\eta,\theta\right).$$

□

3.3 A Dualidade de Kantorovich para C*-álgebras

Outra maneira de garantir a existência de soluções para este problema é novamente como um corolário de um resultado análogo ao da dualidade de Kantorovich. Para isto, é claro que precisamos antes definir quem serão os pares admissíveis:

$$\tilde{\Gamma}\left(c\right) = \{(a,b)\,\text{autoadjuntos de } \mathcal{A} \text{ e } \mathcal{B} \text{ tais que } a\otimes 1_{\mathcal{B}} + 1_{\mathcal{A}}\otimes b \leq c\}. \tag{3.3.a}$$

Teorema 3.3.1 (Dualidade de Kantorovich)**.** *Sejam $\eta\in\mathfrak{s}\left(\mathcal{A}\right)$ [1] um estado de $\mathcal{A}$, $\theta\in\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}\right)$ um estado de $\mathcal{B}$ e $c=c^*$ um elemento positivo de $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Então:*

$$\sup_{(a,b)\in\tilde{\Gamma}(c)} \eta\, a + \theta\, b = \min_{\omega\in\tilde{\Pi}(\eta,\theta)} \omega\, c. \tag{3.3.b}$$

Demonstração. Vamos usar de novo o Teorema de Fenchel-Rockafellar. O nosso espaço E será o espaço vetorial normado real dos elementos autoadjuntos de $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. As funções convexas Θ e Ξ serão:

$$\Theta x := \begin{cases} 0 & \text{se } x\geq -c,\\ +\infty & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

$$\Xi x := \begin{cases} \eta\, a+\theta\, b & \text{se } x = a\otimes 1_{\mathcal{B}} + 1_{\mathcal{A}}\otimes b,\\ +\infty & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Como da outra vez, esperamos que a unidade de $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ se encontre na intersecção dos domínios efetivos destas funções. O espectro da unidade é sempre o conjunto unitário $\{1\}\subset\mathbb{C}$. Logo, vale $1_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}\geq 0\geq -c$, e portanto sabemos que

[1] $\mathfrak{s}\left(\mathcal{A}\right)$ denota aqui o conjunto dos estados de $\mathcal{A}$, como em 1.2.5.

$\Theta\, 1_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}} = 0$. Ao mesmo tempo, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\Xi 1_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}} &= \Xi 1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{B}} \\
&= \Xi \frac{1}{2} 1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{B}} + 1_{\mathcal{A}} \otimes \frac{1}{2} 1_{\mathcal{B}} \\
&= \eta\, \frac{1}{2} 1_{\mathcal{A}} + \theta\, \frac{1}{2} 1_{\mathcal{B}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

garantindo que $\Xi\, 1_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}} = 1$.

Verificar que Θ é contínua em $1_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}$ é equivalente a garantir que este ponto se encontre no interior de seu domínio efetivo. A identidade:

$$x - \lambda 1_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}} = (x + t 1_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}) - (\lambda - t) 1_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}$$

nos revela que o espectro da translação de um elemento ao longo da direção da identidade é meramente uma translação (com o mesmo parâmetro) do espectro do elemento. No caso particular em que este parâmetro é 1, uma consequência disto é que se o raio espectral de x é menor do que 1, então $1_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}} + x$ é positivo. Como a norma é igual ao raio espectral, isto é o mesmo que dizer que a bola aberta centrada em $1_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}$ de raio 1 está contida no domínio efetivo de Θ.

Garantidas estas coisas, passamos a computar os dois lados da expressão:

$$\inf_{x\in E} \Theta x + \Xi x = \max_{\chi\in E^\star} - \Theta^\star(-\chi) - \Xi^\star(\chi).$$

Do lado esquerdo, temos:

$$\inf_{\substack{x = a\otimes 1_{\mathcal{B}} + 1_{\mathcal{A}}\otimes b \\ x \geq -c}} \eta\, a + \theta\, b = - \sup_{\substack{x = a\otimes 1_{\mathcal{B}} + 1_{\mathcal{A}}\otimes b \\ x \leq c}} \eta\, a + \theta\, b = - \sup_{(a,b)\in\tilde{\Gamma}(c)} \eta\, a + \theta\, b.$$

Depois, do outro lado, calculamos cada transformada individualmente; primeiro a de Θ:

$$\Theta^\star(-\chi) = \sup_{x\in E} - \chi x - \Theta x = \sup_{x\geq -c} - \chi x.$$

Se $\chi \ngeq 0$, precisa haver algum $x \geq 0 \geq -c$ para o qual $\chi x < 0$. Existindo tal x, a família de positivos nx garante que o supremo seja $+\infty$. Se $\chi \geq 0$, então podemos comparar o desempenho de $-c$ com o de um outro x qualquer:

$$-\chi(-c) - [-\chi\,(x)] = -\chi(-c - x) = \chi(c + x) \geq 0,$$

e perceber que o supremo precisa valer χc.

Em seguida, calculamos a transformada de Ξ:

$$\begin{aligned}
\Xi^\star(\chi) &= \sup_{x\in E} \chi x - \Xi x \\
&= \sup_{x = a\otimes 1_{\mathcal{B}} + 1_{\mathcal{A}}\otimes b} \chi(a \otimes 1_{\mathcal{B}} + 1_{\mathcal{A}} \otimes b) - (\eta\, a + \theta\, b).
\end{aligned}$$

Se para algum destes x a quantia $\chi(a \otimes 1_{\mathcal{B}} + 1_{\mathcal{A}} \otimes b) - (\eta\, a + \theta\, b)$ for diferente de zero, então ou nx ou $-nx$ leva o supremo para $+\infty$. Na ausência de algum tal x, $\Xi^\star(\chi) = 0$. De maneira mais sucinta:

$$\Theta^\star(-\chi) = \begin{cases} \chi c & \text{se } \chi \geq 0, \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\Xi^\star(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \chi(a \otimes 1_{\mathcal{B}} + 1_{\mathcal{A}} \otimes b) = (\eta\, a + \theta\, b), \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Obs. A intersecção dos domínios efetivos destas duas funções é convenientemente $\tilde{\Pi}\,(\eta, \theta)$.

Finalmente, basta reescrevermos nesses termos o Teorema de Fenchel-Rockafellar:

$$\inf_{a \otimes 1_{\mathcal{B}} + 1_{\mathcal{A}} \otimes b \geq -c} \eta\, a + \theta\, b = \max_{\substack{\chi \geq 0 \\ \chi(a \otimes 1_{\mathcal{B}} + 1_{\mathcal{A}} \otimes b) = (\eta\, a + \theta\, b)}} -\chi c,$$

e trocar os sinais, para obter:

$$\sup_{(a,b) \in \tilde{\Gamma}(c)} \eta\, a + \theta\, b = \min_{\omega \in \tilde{\Pi}(\eta, \theta)} \omega c.$$

□

3.4 O Problema de Transporte para Espaços Métricos Compactos

Agora, gostaríamos de fazer alguns esclarecimentos a respeito de como o problema de transporte para C*-álgebras se compara com o que entendemos por problema clássico do transporte ótimo. Há casos particulares do problema para C*-álgebras que coincidem com casos particulares do problema clássico, mas em princípio nenhum generaliza o outro. A intersecção se dá no caso dos espaços métricos compactos. A restrição adicional da compacidade no caso clássico corresponde à da presença de unidade no nosso caso. Quando dizemos isso, fazemos menção indireta ao Teorema de Gelfand-Naimark, que afirma que toda C*-álgebra comutativa é C*-isometricamente isomorfa à C*-álgebra das funções contínuas de seu espectro em $\mathbb{C}$. Este espaço topológico é sempre de Hausdorff e localmente compacto. Entre outras coisas, se pode garantir que a unitização de uma C*-álgebra comutativa corresponde à compactificação de um ponto de seu espectro.

Para ser mais preciso, os espaços topológicos que se encaixam na análise que fizemos são aqueles que podem ser o espectro de uma C*-álgebra unital, isto é, os compactos e de Hausdorff. Os que são investigados no problema de transporte clássico são os separáveis e completamente metrizáveis. Se além de comutativa, uma C*-álgebra é também separável, então o seu espectro é adicionalmente segundo contável, e neste caso é um espaço topológico separável e completamente metrizável. Como em espaços métricos separabilidade e contabilidade segunda são equivalentes, isso quer dizer que as C*-álgebras unitais que correspondem a problemas do caso clássico são exatamente estas: as comutativas e separáveis.

Além disso, nós exigimos que o custo seja um elemento positivo do tensorial das C*-álgebras. Isso é compatível com o caso clássico no sentido de que o tensorial entre as álgebras de funções contínuas de dois espaços compactos de Hausdorff é isomorfo à álgebra das funções contínuas do espaço produto. Isso é incompatível com a hipótese usual que se faz sobre o custo – de que seja positivo e semicontínuo inferiormente, ao invés de positivo e contínuo. Esta exigência também cooperou a nosso favor.

A mensagem importante a se extrair daí é que as nossas demonstrações, apesar de poderem aparentar mais simples que as demonstrações dos resultados análogos em referências clássicas como [41] ou [42], na verdade já deveriam ser esperadas assim, porque não compreendem todos os casos lá contemplados, e sim apenas aqueles que são os mais regulares. Particularmente notável é o fato de que, pelo menos no que diz respeito às suas aplicações aqui, pudemos substituir o Teorema de Prokhorov pelo Teorema de Banach-Alaoglu (na Proposição 3.2.1).

Outro aspecto que convém deixar claro é o seguinte: nós não chegamos a usar qualquer propriedade particular de algum produto tensorial específico entre as C*-álgebras. No caso das que são comutativas, essa discussão não é relevante, já que elas são nucleares, e então o produto tensorial é único. No caso geral, é uma discussão pertinente, mas não é um problema, pois quer dizer que nós podemos aplicar estes resultados para qualquer um deles, o que preferirmos.

Como nós exigimos que o custo seja dado por um elemento autoadjunto de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, quando particularizamos para o caso comutativo, estamos impondo restrições mais fortes sobre ele do que se impõe em referências clássicas. Por exemplo, no caso comutativo um elemento autoadjunto de $\mathcal{C}_0(\widehat{\mathcal{A}}) \otimes \mathcal{C}_0(\widehat{\mathcal{B}})$ pode ser visto como uma função contínua (e que se anula no infinito) de $\widehat{\mathcal{A}} \times \widehat{\mathcal{B}}$ em $\mathbb{R}$. Em contrapartida, costuma-se exigir do custo que seja apenas semicontínuo inferiormente (e satisfaça uma certa condição técnica de limitação que pode ser consultada em [42, Teorema 5.10]), e tenha por contradomínio $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ao invés de $\mathbb{R}$.

Nosso entendimento é que estas observações sugerem conjuntamente que o problema do qual tratamos no presente capítulo seja uma variante muito interessante do problema de transporte ótimo. Mesmo o fato de que nosso problema só seja compatível com o caso clássico em um cenário tão regular nos parece como um indicativo de que as coisas neste novo contexto se encaixam bem e partem de uma base sólida. Além disso, o abandono da comutatividade torna essa teoria amigável à geometria não-comutativa, que de fato inspira diversas dessas ideias.

Capítulo 4

Direções Futuras e Conclusão

Neste último capítulo, primeiro apresentamos alguns tópicos que entendemos como possíveis frutíferas discussões viabilizadas ou sugeridas de alguma maneira pelo presente trabalho, e em seguida, encerramos o texto.

4.1 A Distância de Connes

É muito importante contrastar as ideias do Capítulo 3 com a distância de Connes [12, Seção 6.1] entre dois estados, calculada em uma tripla espectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ [40, Definição 4.30] como:

$$\mathrm{d}\left(\eta_1, \eta_2\right) = \sup_{a \in \mathcal{A} \| [a,D] \| \leq 1} \left|\eta_1 a - \eta_2 a\right| . \tag{4.1.a}$$

Esta distância também pode ser percebida como uma generalização do problema de transporte para C*-álgebras, e nós não sabemos exatamente quando ela coincide com a apresentada neste texto. Há exemplos em que coincidem, porque há exemplos em que a distância de Connes coincide com a de Wasserstein [14, Proposição 2.1]. Ainda assim, essa é uma distância que só se encontra definida de forma dual à do nosso problema.

Vale enfatizar que o supremo em (4.1.a) também pode ser tomado apenas entre os autoadjuntos [30, Lema 2.2], aproximando este problema do nosso. Além disso, a distância de Connes já foi comparada com esta formulação dual do problema de transporte clássico em pelo menos outros dois textos [14] [34]. Por isso é que acreditamos ser importante compará-la também com o problema de transporte para C*-álgebras, ou mais precisamente, com seu dual – posto que o Teorema 3.3.1 assegura serem equivalentes estes últimos.

4.2 c-monotonicidade Cíclica

Em [42, Capítulo 5] uma ferramenta muito útil para produzir uma descrição qualitativa do transporte ótimo é a ideia de c-monotonicidade cíclica [42, Definição 5.1]. O que se passa é que o suporte de um acoplamento ótimo entre duas medidas é necessariamente um conjunto c-ciclicamente monótono. Os pontos e conjuntos são objetos fundamentais nesta definição. Isto enriquece em muito a tarefa de exportar este conceito para o contexto das C*-álgebras não-comutativas [12, Capítulo 1].

Uma razão que contribui muito para o nosso interesse neste tema é a expectativa de que um tratamento adequado da c-monotonicidade cíclica para C*-álgebras se possa desenvolver trabalhando com alguns ideais. Esta expectativa surge da percepção de que a condição de que no caso comutativo um acoplamento ótimo entre duas probabilidades dê peso total a um determinado conjunto é equivalente à condição de que o funcional linear correspondente a dito acoplamento aniquile o ideal das funções suportadas no complementar do conjunto em questão.

4.3 A Regularidade do Custo

Sobre o nosso custo, que encontra-se de certo modo restrito, vale dizer que um caminho que nos parece natural para tentar relaxar um pouco as hipóteses a respeito dele é o de exigir que ao invés de ser um elemento autoadjunto de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, seja algum tipo de elemento de $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^{**}$, um que não necessariamente esteja na imagem da inclusão canônica. De fato, mesmo em [42, Lema 4.3] as principais exigências que se fazem sobre o custo são para garantir que o funcional linear que ele representa por meio da integral seja semicontínuo inferiormente.

No caso comutativo, a C*-álgebra $\mathcal{C}_0(\widehat{\mathcal{A}})$ é um *lattice* de Banach, assim como consequentemente o seu bidual $\mathcal{C}_0(\widehat{\mathcal{A}})^{**}$ [27, §3]. Quando um espaço vetorial tem essa estrutura, é possível falar em elementos semicontínuos (superior ou inferiormente) [27, §6]. No caso geral, uma C*-álgebra não necessariamente comutativa $\mathcal{A}$ continua admitindo estrutra de *lattice* de Banach, dada pela ordem induzida pelo cone dos elementos positivos (aqueles cujo espectro só contem números reais positivos). Os elementos que sejam semicontínuos inferiormente neste sentido são os que nos parecem naturais para estudar futuramente.

4.4 Reformulação Dinâmica

Como mencionamos em 1.4.1 e 1.4.4, existe essa maneira interessante de adaptar a teoria de transporte ótimo para o contexto da mecânica quântica que parte da reformulação dinâmica do problema de transporte (como apresentada em [1]). Nós não sabemos se, ou em que condições, distâncias introduzidas assim coincidem com casos particulares dos problemas como apresentamos, e este é um aspecto a se explorar.

Idealmente, gostaríamos de produzir um resultado análogo a [1, Proposição 1.1]. Este é outro ponto onde a geometria não-comutativa aparece. Como a C*-álgebra $\mathcal{C}_0(\widehat{\mathcal{A}})$ não carrega nenhum tipo de informação métrica a respeito de $\widehat{\mathcal{A}}$, e [1] trata específicamente de um caso no qual o custo é o quadrado da distância, nós esperamos que precisemos munir $\mathcal{A}$ de estruturas adicionais. O [12, Capítulo 6] discute a relação entre triplas espectrais e distâncias, e motiva a nossa expectativa de que quem sabe munidos de uma tripla espectral possamos definir um custo específico cujo correspondente problema de transporte admita uma reformulação dinâmica. Nós não imaginamos qual custo seria este, mas num palpite muito ambicioso, poderia até mesmo acontecer do problema dual ao determinado por tal hipotético custo ser justamente (4.1.a).

4.5 Considerações Finais

As discussões sugeridas no presente capítulo alimentam a ideia de que os problemas investigados neste trabalho constituem uma variação interessante do problema de transporte ótimo de Monge-Kantorovich. Notamos porém, que o campo de possibilidades é sempre ainda maior: em algum sentido, qualquer resultado que se obtenha a respeito do problema clássico, sugere uma potencial nova investigação no contexto não-comutativo.

Além disso, esperamos que as próprias discussões que se deram principalmente ao longo dos capítulos 2 e 3, constituam para o leitor bons indicativos de que essa seja uma vertente do problema adequada de se estudar. Cremos que isso seja possível principalmente porque essas discussões retiveram paralelos diretos e relativamente simples com a teoria de transporte clássica; mas também porque as eventuais dificuldades técnicas que se apresentaram durante as mesmas, pelo menos até aqui, mostraram-se sempre administráveis.

Finalmente, enfatizamos o seguinte: a comunhão de conceitos de áreas diversas da matemática, em sendo fundamental para a construção das ideias ao longo de todo este texto, torna-o matematicamente plural. Pode se dizer que é um assunto ajustado para acomodar cooperações mutualistas. Este, fundamentalmente, é o que consideramos ser o aspecto mais benéfico do presente trabalho.

Referências Bibliográficas

[1] Benamou, J.-D., and Brenier, Y. A computational fluid mechanics solution to the monge-kantorovich mass transfer problem. *Numerische Mathematik 84*, 3 (2000), 375–393.

[2] Birkhoff, G. *Lattice theory*, vol. 25. American Mathematical Soc., 1940.

[3] Bogachev, V. I. Ornstein–uhlenbeck operators and semigroups. *Russian Mathematical Surveys 73*, 2 (2018), 191.

[4] Caglioti, E., Golse, F., and Paul, T. Towards optimal transport for quantum densities.

[5] Caglioti, E., Golse, F., and Paul, T. Quantum optimal transport is cheaper. *arXiv preprint arXiv:1908.01829* (2019).

[6] Carlen, E. A., and Maas, J. An analog of the 2-wasserstein metric in non-commutative probability under which the fermionic fokker–planck equation is gradient flow for the entropy. *Communications in mathematical physics 331*, 3 (2014), 887–926.

[7] Carlen, E. A., and Maas, J. Gradient flow and entropy inequalities for quantum markov semigroups with detailed balance. *Journal of Functional Analysis 273*, 5 (2017), 1810–1869.

[8] Carlen, E. A., and Maas, J. Non-commutative calculus, optimal transport and functional inequalities in dissipative quantum systems. *Journal of Statistical Physics 178*, 2 (2020), 319–378.

[9] Chen, Y., Georgiou, T. T., Ning, L., and Tannenbaum, A. Matricial wasserstein-1 distance. *IEEE control systems letters 1*, 1 (2017), 14–19.

[10] Chen, Y., Georgiou, T. T., and Tannenbaum, A. Matrix optimal mass transport: a quantum mechanical approach. *IEEE Transactions on Automatic Control 63*, 8 (2017), 2612–2619.

[11] Chen, Y., Georgiou, T. T., and Tannenbaum, A. Wasserstein geometry of quantum states and optimal transport of matrix-valued measures. In *Emerging Applications of Control and Systems Theory*. Springer, 2018, pp. 139–150.

[12] Connes, A. *Géométrie non commutative*. InterEditions, 1990.

[13] Conway, J. B. *A course in functional analysis*, vol. 96. Springer, 2019.

[14] d'Andrea, F., Martinetti, P., et al. A view on optimal transport from noncommutative geometry. *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications 6* (2010), 057.

[15] Datta, N., and Rouzé, C. Relating relative entropy, optimal transport and fisher information: A quantum hwi inequality. In *Annales Henri Poincaré* (2020), Springer, pp. 1–36.

[16] De Palma, G., and Trevisan, D. Quantum optimal transport with quantum channels. *arXiv preprint arXiv:1911.00803* (2019).

[17] Edwards, D. A. On the kantorovich–rubinstein theorem. *Expositiones Mathematicae 29*, 4 (2011), 387–398.

[18] Erdman, J. M. Functional analysis and operator algebras: An introduction.

[19] Exel, R. Uma introduçaoas c*-álgebras. *Primeira Bienal de Matemática, Minas Gerais* (2002).

[20] Fuchs, C. A. Distinguishability and accessible information in quantum theory. *arXiv preprint quant-ph/9601020* (1996).

[21] Golse, F. The quantum n-body problem in the mean-field and semiclassical regime. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 376*, 2118 (2018), 20170229.

[22] Golse, F., Mouhot, C., and Paul, T. On the mean field and classical limits of quantum mechanics. *Communications in Mathematical Physics 343*, 1 (2016), 165–205.

[23] Golse, F., and Paul, T. The schrödinger equation in the mean-field and semiclassical regime. *Archive for Rational Mechanics and Analysis 223*, 1 (2017), 57–94.

[24] Golse, F., and Paul, T. Wave packets and the quadratic monge–kantorovich distance in quantum mechanics. *Comptes Rendus Mathematique 356*, 2 (2018), 177–197.

[25] Holevo, A. S. *Quantum systems, channels, information: a mathematical introduction*, vol. 16. Walter de Gruyter, 2012.

[26] Jordan, R., Kinderlehrer, D., and Otto, F. The variational formulation of the fokker–planck equation. *SIAM journal on mathematical analysis 29*, 1 (1998), 1–17.

[27] Kaplan, S. On the second dual of the space of continuous functions. *Transactions of the American Mathematical Society 86*, 1 (1957), 70–90.

[28] Lopes, A. O. Introduçao a matemática da mecânica quântica, 2017.

[29] Manzano, D. A short introduction to the lindblad master equation. *AIP Advances 10*, 2 (2020), 025106.

[30] Martinetti, P. From monge to higgs: a survey of distance computations in noncommutative geometry. *Noncommutative geometry and optimal transport 676* (2016), 1.

[31] Murphy, G. J. *C*-algebras and operator theory*. Academic press, 1990.

[32] Nielsen, M. A., and Chuang, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010.

[33] Pisier, G. *Tensor Products of C*-algebras and Operator Spaces: The Connes–Kirchberg Problem*, vol. 96. Cambridge University Press, 2020.

[34] Rieffel, M. A. Metrics on state spaces. *arXiv preprint math/9906151* (1999).

[35] Rouzé, C., and Datta, N. Concentration of quantum states from quantum functional and transportation cost inequalities. *Journal of Mathematical Physics 60*, 1 (2019), 012202.

[36] Rudin, W. *Real and complex analysis*. Tata McGraw-hill education, 2006.

[37] Ryu, E. K., Li, W., Yin, P., and Osher, S. Unbalanced and partial $\mathcal{L}_1$ monge–kantorovich problem: A scalable parallel first-order method. *Journal of Scientific Computing 75*, 3 (2018), 1596–1613.

[38] Schumacher, B. Quantum coding. *Physical Review A 51*, 4 (1995), 2738.

[39] Shannon, C. E. A mathematical theory of communication. *The Bell system technical journal 27*, 3 (1948), 379–423.

[40] Van Suijlekom, W. D. *Noncommutative geometry and particle physics*. Springer, 2015.

[41] Villani, C. *Topics in Optimal Transportation*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2003.

[42] Villani, C. *Optimal transport: old and new*, vol. 338. Springer Science & Business Media, 2008.