

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO ESPACIAL
GeoGebra, Impressora 3D e Abstração Reflexionante

Larissa Weyh Monzon Hedler

Porto Alegre, RS, Brasil
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

LARISSA WEYH MONZON HEDLER

DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO ESPACIAL
GeoGebra, Impressora 3D e Abstração Reflexionante

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutora em Informática na Educação.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Porto Alegre, RS, Brasil 2020

CIP - Catalogação na Publicação

Hedler, Larissa Weyh Monzon
DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO ESPACIAL -
GeoGebra, Impressão 3D e Abstração Reflexionante /
Larissa Weyh Monzon Hedler. -- 2020.
245 f.
Orientador: Marcus Vinicius de Azevedo Basso.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio
Grande do Sul, Centro de Estudos Interdisciplinares em
Novas Tecnologias na Educação, Programa de
Pós-Graduação em Informática na Educação, Porto
Alegre, BR-RS, 2020.

1. Tecnologias Digitais. 2. Pensamento Geométrico
Espacial. 3. GeoGebra. 4. Impressora 3D. 5. Abstrações
reflexionantes. I. Basso, Marcus Vinicius de Azevedo,
orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os
dados fornecidos pelo(a) autor(a).



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

**ATA SOBRE A DEFESA DE TESE DE DOUTORADO
LARISSA WEYH MONZON HEDLER**

Às quatorze horas e trinta minutos do dia dez de janeiro de dois mil e vinte, na sala 329 do PPGIE/CINTED, nesta Universidade, reuniu-se a Comissão de Avaliação, composta pelos Professores Doutores: Márcia Rodrigues Notare Meneghetti, Vandoir Stormowski e Diego Lieban para a análise da defesa de Tese de Doutorado intitulada **“Desenvolvimento do Pensamento Geométrico Espacial Abstração Reflexionante e Tecnologias Digitais”**, da doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação Larissa Weyh Monzon Hedler, sob a orientação do Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso.

A Banca, reunida, após a apresentação e arguição, emite o parecer abaixo assinalado.

- Considera a Tese aprovada
 sem alterações;
 sem alterações, com voto de louvor;
 e recomenda que sejam efetuadas as reformulações e atendidas as sugestões contidas nos pareceres individuais dos membros da Banca;

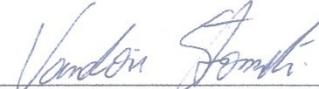
Considera a Tese reprovada.

Considerações adicionais (a critério da Banca):

A pesquisa deixa evidente o cunho autoral e original da pesquisadora, ao avaliar o impacto do uso das novas tecnologias, em particular o software de geometria dinâmica Geogebra e impressões 3D, como ferramenta de apoio ao processo de abstração reflexionante presente no pensamento geométrico de alunos do Ensino Médio. Os aspectos de criatividade e resolução de problema são valorizados, assim como as diferentes estratégias de solução dos participantes, o que é positivo e merece ser disseminado como trabalho destinado ao ensino de matemática.


Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso
Orientador


Prof.ª Dr.ª Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
PPGIE/UFRGS


Prof. Dr. Vandoir Stormowski
UFRGS

Prof. Dr. Diego Lieban
IFRS

Sou professora de matemática, mesmo no momento estando fora da sala de aula, mas é assim que me identifico, pois, a minha vida profissional foi dedicada à sala de aula, ao ensino de matemática, aos meus queridos alunos.

Sempre estudei em instituições públicas, mas mesmo assim, desde o meu ensino fundamental fui apresentada às tecnologias como ferramentas para o ensino e a aprendizagem. No ensino fundamental, anos finais, frequentávamos o laboratório de informática semanalmente em uma disciplina específica, onde conheci o LOGO e também a “formatação de textos”. No ensino médio, lembro com muito carinho, meus professores de física e história tentando inserir esses novos recursos nas suas aulas, além dos meus professores do técnico; mas, para esses, as tecnologias já faziam parte do seu repertório profissional.

Quando lembro dessas minhas experiências de estudante e me deparo com minhas experiências profissionais pelas escolas que percorri, vejo o uso das tecnologias no ensino inversamente ao que está ocorrendo na sociedade, no nosso cotidiano. As escolas por onde percorri continuam, ainda, com aquele mesmo um laboratório de informática e com alguns professores ainda tentando inserir essas tecnologias nas suas aulas.

Minha convicção é de que as tecnologias são recursos para o ensino e a aprendizagem; ela me fez desenvolver minha dissertação do mestrado em Ensino de Matemática nessa área e posteriormente me dedicar ao curso de doutorado em Informática na Educação, no qual, diante de discussões nas aulas e leituras, me trouxeram muitas inquietações: as tecnologias já deveriam fazer parte do cotidiano da sala de aula, não mais como um ensino diferenciado, as tecnologias podem ser um suporte indispensável ao ensino, podem proporcionar recursos que sem elas não conseguiríamos fazer; devemos utilizar as tecnologias para evoluir não somente nossas escolas mas as mentes dos nossos alunos para que eles, no futuro sejam capazes de evoluir e melhorar nossa sociedade.

RESUMO

Nesta pesquisa investigou-se possibilidades de impacto das tecnologias digitais, o software de geometria dinâmica GeoGebra e a impressão 3D, sobre o pensamento geométrico espacial de estudantes do Ensino Médio. As tecnologias digitais proporcionaram aos sujeitos experiências e interação com uma diversidade de objetos, alguns inacessíveis no ambiente natural, informando ao sujeito sobre suas características físicas e relacionando-as com propriedades advindas de conceitos cognitivos construídos anteriormente pelo próprio sujeito. Essas experiências e interações foram analisadas à luz da teoria de Piaget, referente a abstrações reflexionantes e o desenvolvimento do pensamento geométrico espacial. Trata-se de uma pesquisa com abordagem qualitativa na modalidade de estudo de casos múltiplos, na qual foi proporcionado aos participantes da investigação experiências com objetos espaciais utilizando o software de geometria dinâmica GeoGebra e a impressão 3D. Diante das análises realizadas após a experiência, percebeu-se o potencial do software GeoGebra para criar situações em que os participantes empiricamente enriqueceram suas próximas experiências e relacionaram os objetos visíveis e manipulativos do software com operações cognitivas já construídas, aplicando esses conhecimentos para resolver novas situações. A impressora 3D proporcionou aos sujeitos uma resposta das suas decisões tomadas, propiciando a oportunidade de refletir sobre seus resultados. Assim, os resultados deram indícios que as situações propostas com o uso dessas tecnologias proporcionaram equilibrações em um patamar cognitivo superior ao anterior referente ao pensamento geométrico espacial, ou seja, desenvolvimento do pensamento espacial.

Palavras-chave: Tecnologias Digitais. Pensamento Geométrico Espacial. Geometria Dinâmica. GeoGebra. Impressão 3D. Abstrações Reflexionantes.

ABSTRACT

This research has investigated the possibilities of digital technologies impact, dynamical geometry software GeoGebra and 3D printing, over the spatial geometric thinking of High School students. The digital technologies have provided to the subjects experiences and interactions with different objects, some unavailable in the natural environment, telling to the subject about their physical characteristics, and relating them with proprieties came from cognitive concepts built previously by the subject himself. This experiences and interactions were analyzed based on Piaget theory, related to reflective abstraction and the development of spatial geometric thinking. The research has a qualitative approach in a multiple case study modality, which has provided to the research participants experiences with space objects using GeoGebra dynamical geometry software and 3D printing. In view of the analyses performed after the experience, the potential of the GeoGebra software was realized on situations in which the participants have empirically enriched their own experiences and related the software's visible and manipulative objects with cognitive operations already built, applying this knowledge to solve new situations. The 3D printer has provided to the subjects an answer of their taken decisions, affording the opportunity to reflect about their results. The results indicated that the proposed situations using these technologies provided equilibration in a cognitive level higher than the previous one regarding the spatial geometric thinking, that is, the development of the spatial thinking.

Keywords: Digital Technologies. Spatial Geometric Thinking. Dynamical Geometry. GeoGebra. 3D Printing. Reflective Abstraction.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Descrição das habilidades da visualização espacial.....	48
Quadro 2 - Palavras para <i>string</i> de busca.....	62
Quadro 3 – Trabalhos analisados na revisão sistemática.....	64
Quadro 4 – Ideia inicial para a proposta de atividades.....	78
Quadro 5 – Cronograma das atividades desenvolvidas na investigação.....	81
Quadro 6 – Estratégias de Resolução da Atividade 1.....	88
Quadro 7 – Estratégias de resolução da Atividade 2.....	96
Quadro 8 – Diferentes Pontos de vista.....	111
Quadro 9 – Estratégias para a construção da mesa.....	118
Quadro 10 – Resultados do projeto das cadeiras.....	127
Quadro 11 – Soluções para um quadrilátero na região seccionada.....	136
Quadro 12 – Resoluções da Atividade 10.....	142
Quadro 13 – Resultados da etapa 3 de uma dupla.....	150

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Os elementos da visualização.....	49
Figura 2 – Exemplo da <i>string</i> nos bancos de busca.....	63
Figura 3 – Sequência da revisão sistemática.....	63
Figura 4 – Imagem da construção do GeoGebra utilizada na atividade 1.....	86
Figura 5 – Ilustração da construção dinâmica utilizada na atividade 2.....	93
Figura 6 - Resolução do participante Van Gogh.....	98
Figura 7 – imagem disponibilizada na atividade 6.....	102
Figura 8 – Imagem da Maquete construída no GeoGebra.....	111
Figura 9 – Imagem de um ponto de vista dado.....	112
Figura 10 – Resposta equivocada quando à posição central e perpendicular.....	113
Figura 11 – Exemplo de solução antecipadora.....	115
Figura 12 – Alunos dedicados ao projeto de suas cadeiras.....	127
Figura 13 – Exemplos de secções sem o plano de corte.....	132
Figura 14 – resposta do participante Miró.....	133
Figura 15 – Imagens da Atividade 10.....	140
Figura 16 – Imagem da Atividade 11.....	145
Figura 17 – Brinquedo utilizado na Atividade 12.....	152
Figura 18 - Exemplo da construção de um dos participantes.....	154
Figura 19 – Modificação de peça para otimização.....	157
Figura 20 - Aluno construindo sua peça e discutindo com o colega.....	158
Figura 21 – Peças construídas pelos participantes.....	159
Figura 22 – Letras impressas com as iniciais dos participantes.....	166
Figura 23 – Momento da impressão.....	167

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	12
2. A TEORIA PIAGETIANA.....	18
2.1 Um recorte da obra de Jean Piaget.....	18
2.2 A aprendizagem para Jean Piaget.....	22
2.3 Abstração Reflexionante.....	26
2.4 A abstração reflexionante nas relações espaciais.....	32
3. O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO ESPACIAL.....	36
3.1 A construção do espaço segundo Jean Piaget.....	36
3.2 Habilidades na visualização espacial.....	46
4. TECNOLOGIAS PARA O PENSAMENTO GEOMÉTRICO ESPACIAL.....	51
4.1 Geometria dinâmica: o software GeoGebra.....	53
4.2 Impressão 3D.....	57
5. O ESTADO DA ARTE DESTA PESQUISA.....	61
6. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	72
6.1 A produção dos dados e o método clínico.....	73
6.2 Os participantes da pesquisa.....	76
6.3 O planejamento das atividades.....	77
7. AS ATIVIDADES PROPOSTAS E A ANÁLISE DOS DADOS.....	84
7.1 Atividade: Colocar postes em paralelo à uma estrada dada.....	85
7.1.1 Análises da Atividade.....	87
7.2 Atividade: Colocar elementos em uma perspectiva de infinito.....	93
7.2.1 Análises da Atividade.....	94
7.3 Atividades: Explorar diferentes pontos de vista de um objeto.....	100
7.3.1 Análises das atividades.....	103
7.4 Atividade: Diferentes pontos de vista de um conjunto de elementos.....	110
7.4.1 Análises da atividade.....	112
7.5 Atividade: Projetar uma mesa.....	116
7.5.1 Análises da Atividade.....	117
7.6 Atividade: Projetar uma cadeira para a mesa – proporcionalidade.....	124
7.6.1 Análises da atividade.....	126

7.7 Atividade: Secção de um cubo.....	131
7.7.1 Análises da atividade.....	132
7.8 Atividade: Construir um sólido pela sua planificação.....	139
7.8.1 Análises da atividade.....	140
7.9 Atividade: Explorar diferentes conceitos no Multicubos.....	144
7.9.1 Análises da atividade.....	147
7.10 Atividade: Projetar uma peça de um brinquedo.....	151
7.10.1 Análises da atividade.....	153
8. Resultados finais.....	161
9. Conclusões.....	169
REFERÊNCIAS.....	172
APÊNDICES.....	176
APÊNDICE A – Termo de assentimento.....	176
APÊNDICE B – Termo de consentimento.....	177
APÊNDICE C – Oficina sobre o software GeoGebra.....	178
APÊNDICE D – Transcrição da entrevista sobre as Atividades 1 e 2.....	184
APÊNDICE E – Transcrição da entrevista sobre a Atividade 3.....	191
APÊNDICE F – Transcrição da entrevista sobre a Atividade 4.....	199
APÊNDICE G – Transcrição da entrevista sobre a Atividade 5.....	202
APÊNDICE H – Transcrição da entrevista sobre a Atividade 6.....	205
APÊNDICE I – Transcrição da entrevista sobre a Atividade 7.....	209
APÊNDICE J – Transcrição da entrevista sobre a Atividade 8.....	217
APÊNDICE K – Transcrição da entrevista sobre a Atividade 9.....	223
APÊNDICE L – Transcrição da entrevista sobre a Atividade 11.....	235
APÊNDICE M – Transcrição da entrevista sobre a Atividade 12.....	240
APÊNDICE N – Transcrição da entrevista sobre a Atividade 13.....	244
APÊNDICE O – Artigo MONZON; BASSO, 2018 (a).....	249
APÊNDICE P – Artigo MONZON; BASSO, 2018 (b).....	250
APÊNDICE Q – Artigo MONZON; BASSO, 2019 apresentado no WIE 2019.....	251
APÊNDICE R – Artigo MONZON; BASSO, 2019 em avaliação.....	252

1. INTRODUÇÃO

O título deste trabalho: “DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO ESPACIAL – GeoGebra, Impressão 3D e Abstração Reflexionante”, depois de ser reescrito e remodelado diversas vezes ao longo da trajetória desta proposta, tem o objetivo de apresentar os principais focos desta investigação. A teoria de Jean Piaget, a aprendizagem de geometria espacial e as tecnologias digitais constituem o tripé que oferece a sustentação para a construção desta tese e que, via investigação e análise das produções dos participantes deste estudo, pretende contribuir, em consequência, para a aprendizagem nas salas de aula.

A teoria de Jean Piaget é considerada complexa por muitos pesquisadores (LOURENÇO, 1998) e não é diferente no meio acadêmico no qual esta tese foi defendida. Porém, após ler trechos de sua obra, ratificando sua complexidade, percebeu-se também a grandiosidade de sua teoria, uma leitura desconcertante que despertou várias reflexões e ao mesmo tempo curiosidades em relação aos resultados de muitas de suas experiências, como por exemplo: como pode uma criança considerar que o sol é vivo porque desempenha a função de emitir luz, ou também, que uma criança que sabe contar não tem a conservação de quantidades. Ou que o autor e seus colaboradores receberam respostas como: o sol é uma bola que os homens lançaram no ar e que a sombra é um pedaço da noite. Essas reflexões e curiosidades são incentivos para novas pesquisas e, neste caso, influenciaram a compreensão de como os indivíduos percebem o mundo espacial e como essa percepção se desenvolve ao longo do desenvolvimento cognitivo ou das experiências.

A teoria piagetiana teve dois papéis nesta tese: 1) entender o desenvolvimento do pensamento espacial encontrando indícios de como acontece a aprendizagem de conceitos geométricos espaciais e, 2) como se verifica se essa aprendizagem ocorreu via análise das situações propostas e do desencadear de abstrações reflexionantes.

O desenvolvimento desta pesquisa, baseada na teoria piagetiana também está inserida, de acordo com Coll e Monereo (2010), na Sociedade da Informação, que tem uma nova forma de organizar-se, de trabalhar, de comunicar-se, de

relacionar-se, de um modo geral, de viver. As notícias, as informações, os conhecimentos estão sendo transmitidos em tempo real e em quantidades massivas.

Nessa Sociedade da Informação, os estudantes têm acesso e podem apropriar-se das muitas informações disponíveis. Portanto, as escolas também são responsáveis por capacitá-los em organizar, atribuir, filtrar e dar sentido a esse aglomerado de informações de fácil acesso.

Tais fatos determinam que as escolas devem considerar que a sociedade precisa ainda mais de cidadãos pensantes, autônomos, que construam sua própria visão de mundo, sabendo escolher os critérios mais relevantes e utilizá-los para o seu próprio desenvolvimento e da humanidade.

Com o surgimento de novos recursos e tecnologias, o cotidiano do cidadão se modificou. Para a resolução de várias tarefas do dia a dia, como compras, pagamentos, planejamento de viagens, entres outros, estão sendo exigidas mudanças nas habilidades ou surgimento de novas. Dessa maneira, muitas das habilidades ou conhecimentos antes valorizados deixaram de ser indispensáveis, abrindo espaços para novos.

Em relação à aprendizagem escolar também deve-se levar em conta essa mudança de exigências para se enfrentar os desafios do dia a dia. Por exemplo, será que é necessário hoje os alunos do ensino fundamental aprenderem a ver as horas em relógios de ponteiro? Gastar tempo copiando mapas de atlas através do papel vegetal? Ou, especificamente na matemática, os jovens do ensino médio serem obrigados a traçar manualmente uma variedade de esboços de gráficos de funções? Ou o que realmente importa é eles compreenderem as características próprias de cada gráfico e seus comportamentos relacionando-os com suas respectivas funções?

A reflexão aqui exposta não está propondo que os estudantes devam deixar de realizar todas as lições escolares tradicionais e também não acredita que as tecnologias estejam deixando crianças e jovens vulneráveis a se acomodarem diante de determinados tipos de raciocínio ou tarefas. Se agora não é mais necessário aprender a compreender as horas num relógio de ponteiro, a sociedade e os educadores podem aproveitar esse tempo e desenvolver outras habilidades, mais úteis à sociedade de hoje. Precisa-se pensar em novos conhecimentos que

devem ser aprendidos e desenvolvidos concordando com o mundo atual, com a Sociedade da Informação, na qual tem-se à disposição no bolso, a qualquer momento, uma fonte inesgotável de dados e informações. Para Kaput, Hegedus e Lesh (2007) o impacto das tecnologias na educação é a evolução de novas formas de ensinar, melhor aprendizado, novo currículo e habilidades para resolver problemas.

Com o desenvolvimento dessas habilidades, os nossos jovens também estarão capacitados a aprender um novo conhecimento no momento em que lhe é exigido. Por exemplo, o caso das horas em relógio de ponteiros: gastam-se horas de ensino em uma turma heterogênea para que, pelo menos, um número significativo de estudantes aproprie-se desse conhecimento, enquanto que, um jovem capaz de buscar suas aprendizagens pode compreender o funcionamento desse objeto rapidamente, no momento em que realmente for necessário.

Diante dessas reflexões, vieram à tona diversos questionamentos: Como se pode utilizar as tecnologias digitais como recurso para os jovens pensar? As tecnologias são um diferencial na aprendizagem? Elas são indispensáveis para contribuir nas aprendizagens de geometria espacial? Quais habilidades devem-se desenvolver utilizando as tecnologias, visto que as máquinas podem realizar muitas tarefas desse tipo?

Em relação à matemática, Tall (1998) afirma que as tecnologias realçam a diferença entre as habilidades matemáticas padronizadas e o pensar matematicamente. O uso das tecnologias, na escola do século 21, proporciona uma nova forma de solucionar problemas matemáticos, ou melhor, pode desafiar os alunos com novos problemas matemáticos. Para Drijvers e outros (2010), a questão da integração das ferramentas tecnológicas com o ensino e aprendizagem de matemática tornou-se urgente.

Os recursos digitais estão colocando à disposição dos estudantes mecanismos que favorecem a construção de conceitos e o pensar em matemática, a possibilidade de manipular e acessar objetos matemáticos que antes eram inacessíveis sem as tecnologias e colocar em prática a expressão pensar-com (BASSO; NOTARE, 2015). Os computadores estão possibilitando uma nova abordagem da matemática a ser construída, na qual novas habilidades podem ser

desenvolvidas. Para Laborde e outros (2006), as possibilidades das tecnologias estão modificando as estratégias dos alunos e, assim, sua forma de pensar e novas formas de conceituar ideias matemáticas. Jones, Mackrell e Stevenson afirmam: “[...] o uso dessas tecnologias digitais molda, sem dúvida, a atividade matemática do usuário” (2010, p. 57, tradução da autora).

Tratando-se de recursos digitais que disponibilizam visualização, manipulação e criação de sólidos, que estão relacionados às habilidades da geometria espacial, tem-se à disposição uma gama dessas ferramentas e recursos. O ensino de geometria com esses recursos pode proporcionar aos alunos experiências com elementos geométricos complexos, inacessíveis sem as tecnologias, e oferecendo possibilidades de provocar desequilíbrios nas estruturas mentais, ou seja, desenvolvimento do pensamento geométrico espacial.

Diante disso, verifica-se a necessidade de investigar como essas ferramentas podem ser utilizadas contribuindo para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Investigar se tecnologias digitais que disponibilizam diferentes tipos de experiências geométricas, diferentes e mais complexas do que no mundo real, podem desencadear ações e coordenações de ações que fazem com que o sujeito tome consciência de novos conceitos, desenvolvendo habilidades para compreender o mundo espacial.

Verificando que há uma necessidade de compreensão de como o pensamento evolui em relação à geometria espacial e que há à disposição recursos que podem proporcionar aos estudantes novos desafios é colocada a seguinte questão de pesquisa: **Como o uso dos recursos de visualização e interação, proporcionados pelo software GeoGebra e a impressora 3D, pode impactar o processo de abstração reflexionante envolvido no pensamento geométrico espacial, em estudantes do Ensino Médio?**

Diante desse questionamento, apresenta-se para esta pesquisa o objetivo:

Analisar como as tecnologias digitais, possibilitando a construção e manipulação de objetos espaciais, com software de geometria dinâmica GeoGebra e com impressão 3D, proporcionam interações e experiências que contribuem com o processo de abstração reflexionante na construção do pensamento geométrico espacial.

Objetivos específicos em relação à pesquisa:

- Investigar como se desenvolve o pensamento geométrico;
- Analisar as habilidades relacionadas com a visualização espacial;
- Verificar as potencialidades da geometria dinâmica e da impressão 3D para favorecer o desenvolvimento de habilidades geométricas espaciais;
- Verificar como estão sendo utilizados diferentes recursos digitais para o pensamento geométrico espacial no ensino e na aprendizagem;
- Analisar os tipos de recursos digitais e as propostas de atividades que podem ativar processos de abstração reflexionante em relação a conceitos espaciais.

Diante do exposto, e da importância da temática que trata do uso das tecnologias digitais e das abstrações reflexionantes na construção do pensamento geométrico espacial, é apresentada esta tese, organizada em nove capítulos. O capítulo dois traz o estudo de um recorte da teoria piagetiana, uma base para a compreensão dos conceitos e ideias que serão utilizados. O capítulo três apresenta o pensamento espacial, iniciando com o desenvolvimento da representação espacial pela criança e, posteriormente, a análise das habilidades geométricas espaciais que são importantes para a compreensão da tridimensionalidade; essas habilidades foram a base para a construção de cada uma das atividades propostas. Com a junção do estudo desses dois capítulos apresentados, foi possível analisar os dados produzidos na investigação.

O capítulo quatro estuda as potencialidades das tecnologias para esse desenvolvimento cognitivo, considerando os recursos disponíveis em softwares de geometria dinâmica e de impressão 3D. O quinto capítulo apresenta o estado da arte, o que já se sabe sobre essa temática e o que já existe, feita através de uma Revisão Sistemática da Literatura. No decorrer do sexto capítulo, é apresentada a metodologia de pesquisa utilizada na investigação.

O capítulo sete apresenta a investigação, a produção dos dados pelas atividades propostas aos participantes da pesquisa e as análises desses dados, baseadas nas teorias apresentadas e estudadas para esta tese. O capítulo oito traz os resultados finais, uma sistematização das análises dos dados produzidos como

uma reflexão em relação aos objetivos aqui traçados conferindo o impacto que as atividades propostas causaram no desenvolvimento do pensamento espacial.

Por fim, as conclusões que a tese desencadeou, foi retomada a questão de pesquisa, verificou-se quais as contribuições que esta tese pode trazer para a educação e se há indícios para novos estudos.

2. A TEORIA PIAGETIANA

Experienciou-se, no decorrer dos estudos para esta pesquisa, a complexidade da teoria de Jean Piaget e a grande dificuldade de compreendê-la. Deparou-se, ao mesmo tempo, com sua importância para a compreensão do desenvolvimento cognitivo e, portanto, para a aprendizagem. Segundo Lourenço (1998), Piaget é alvo de muitas críticas que afirmam que sua teoria está ultrapassada. Porém, Piaget apresenta a mais completa teoria do desenvolvimento cognitivo, desde o nascimento do indivíduo humano até sua entrada na vida adulta, teoria repleta de análises bem fundamentadas, oriundas de numerosos experimentos em diferentes áreas cognitivas. É isso que justifica sua aplicação nesta pesquisa.

A apresentação da teoria piagetiana utilizada nesta pesquisa está organizada da mesma maneira como foi compreendida pela pesquisadora. Primeiramente, será apresentado como Piaget desenvolveu essa teoria ao longo do tempo, após a sua relação com a aprendizagem escolar e conseqüentemente, com esta proposta.

2.1 Um recorte da obra de Jean Piaget

Jean Piaget deixou um legado de publicações que iniciam em 1920 e se estendem até 1980. Inicialmente, como pesquisador teve duplo interesse, a biologia, sua formação inicial, e posteriormente apresentou interesse pela filosofia, mas se entregou profundamente à psicologia em relação à teoria do conhecimento. Porém, observa-se que toda a sua obra é marcada pela influência dos seus interesses iniciais, a biologia e a filosofia.

Originalmente, sua grande questão era verificar como funciona a passagem das formas limitadas para as formas superiores do conhecimento. Para isso, estudou as crianças.

Segundo Montangero e Maurice-Naville (1998), sua obra pode ser dividida em quatro grandes períodos, os quais serão apresentados a seguir. Lourenço (1998) no artigo “*Além de Piaget? Sim, mas Primeiro Além da Sua Interpretação Padrão!*”, divide os manuscritos piagetianos em três períodos. Para entender o percurso

cronológico da teoria de Piaget, tomar-se-á como base esses três autores, mas utilizando a divisão de Montangero e Maurice-Naville.

Nesta descrição o objetivo não será definir os conceitos, mesmo que em algumas passagens para o melhor entendimento, foram apresentadas definições fundamentais para a compreensão desta escrita.

Primeiro período – entre 1920 até começo da década de 1930

Esse primeiro período é marcado pelo estudo da criança, a mente infantil. O teórico pretende verificar os limites do pensamento da criança pequena. Utiliza entrevistas puramente verbais acreditando que as respostas verbais são reflexos da lógica da criança, surgindo dali o método clínico.

Piaget usa o conceito de egocentrismo para descrever o pensamento da criança pequena que, na sua evolução, vai deixando de ser egocêntrica tornando-se lógica, mais objetiva, capaz de conceber normas morais. A ideia de egocentrismo contrapõe o conceito cooperação, tratando das trocas individuais, do papel do social na evolução do desenvolvimento. As ideias de egocentrismo e da cooperação são o ponto central deste período.

A tomada de consciência também faz parte dos livros deste período no qual diz que a criança toma consciência do seu ponto de vista e das regras do seu caminho intelectual, fazendo chegar à lógica.

Neste período encontram-se os conceitos de estrutura, reversibilidade, evolução dirigida, marcha em direção ao equilíbrio e assimilação. Porém, esses conceitos não são estudados experimentalmente ou definidos com precisão neste primeiro período da teoria. Nota-se, na fase inicial da teoria piagetiana, uma falta de aprofundamento de seus conceitos e teses.

Segundo período – meados da década de 1930 a meados da década 1940.

Sua formação inicial em biologia é percebida neste período, pois ele pretende relacionar o desenvolvimento intelectual com a adaptação biológica do indivíduo. Foi neste período que analisou e descreveu o desenvolvimento dos seus três filhos, com a ajuda de sua esposa, que anotava cada detalhe dos seus comportamentos.

Surge nas suas obras conceitos que tentam explicar os mecanismos biológicos do desenvolvimento: adaptação, assimilação, acomodação, esquemas. Para este período o conceito de adaptação foi o fundamental.

A ação sobre os objetos passa a ser o fundamento do conhecimento. Nasce ali uma das teses principais de Piaget em relação à aprendizagem: a interação entre o sujeito e o objeto de conhecimento, produzindo uma adaptação sempre maior. Essa adaptação é constituída pelos mecanismos da assimilação e da acomodação.

Neste período, o equilíbrio é visto como uma complementaridade entre assimilação e acomodação, a evolução ao equilíbrio cognitivo é o próprio equilíbrio para Piaget.

Manter a coesão interna do organismo ou do conhecimento postula uma organização, expressa na relação das partes com o todo. As totalidades componentes do todo da organização são os esquemas de assimilação do sujeito, definido por Piaget. Para ele, o desenvolvimento cognitivo depende da coordenação de esquemas, produzindo formas mais complexas e melhor adaptadas.

3º período – fim da década de 1940 ao fim da década de 1950

Trata-se do período em que realizou uma análise das estruturas mentais, “que dão conta do poder organizador e explicativo do raciocínio, cada vez que ele atinge um certo grau de desenvolvimento” (MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1998, p. 45). É o período em que pretende aprofundar seus estudos sobre as estruturas cognitivas.

O teórico define com mais precisão o conceito de equilíbrio, utilizando conceitos da lógica e da matemática, pois foi um período de obras dedicadas a essas áreas, inclusive à construção do espaço, da compreensão do tridimensional, um dos principais referenciais teóricos desta pesquisa: a representação do espaço na criança.

Depara-se com a necessidade de novos termos: operação, agrupamentos, reversibilidade, decalagens, regulação.

Estabelece que a operação mental é o modo de organização das atividades cognitivas. “Tais operações são os elementos das estruturas que dão conta do caráter lógico do pensamento”. (MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1998, p. 46)

Volta-se para a identificação dos estádios estruturais do desenvolvimento (LOURENÇO, 1998). Apresenta um estudo mais profundo desses estádios, verificando que o início de uma lógica mais complexa é devido ao fato das operações se agruparem em sistemas de conjunto que explicam a coesão e a eficácia do raciocínio nas crianças, chamado de agrupamento, e nos adolescentes e adultos (pensamento formal) chamado de grupo INRC (operação Idêntica, Negativa, Recíproca e Correlativa), marcado pela reversibilidade.

Aprimora o método clínico. Piaget e colaboradores começam a utilizar materiais, experimentos concretos, tarefas, materiais manipulados tanto pelo entrevistador quanto pelo sujeito entrevistado.

Período de transição – fim da década de 1950 ao fim da década de 1960

Neste período não apresenta novos conceitos, mas demonstra uma preocupação com casos que surgem, mas que somente serão analisados no próximo período. O período de transição prolonga o terceiro período, trazendo estudos que enriquecem temas já discutidos em períodos anteriores e anuncia o quarto período. Por isso, para Montangero e Maurice-Naville (1998), essa década não se encaixa nem no terceiro período e nem no quarto.

O termo sujeito epistêmico surge, demonstrando que não está interessado nas particularidades das crianças, mas no universal, em todo o desenvolvimento cognitivo humano.

4º período – Década de 1970

As obras escritas a partir de então apresentam:

[...]a preocupação de explicar como conhecimentos realmente novos podem aparecer sem serem nem predeterminados no espírito do sujeito nem retirados tais quais do meio. O acento é então colocado nos processos de construção de estruturas de preferência às próprias estruturas cognitivas. (MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1998, p. 68)

Esta última fase é marcada pela explicação mais detalhada e rigorosa dos mecanismos biológicos para os processos do desenvolvimento como também analisa a extensão dos conhecimentos: “uma fase profundamente construtivista em que a ênfase vai para certos processos desenvolvimentistas” (LOURENÇO, 1998, p. 528), conceitos como progresso, abstração reflexionante, abstração empírica,

tomada de consciência, abertura para novas possíveis e generalização, tomam conta da teoria do autor.

Segundo Lourenço (1998), a principal tese piagetiana foi a teoria da equilíbrio, contradizendo muitas interpretações, porque muitos acreditam que o tema principal piagetiano é a divisão do desenvolvimento em estádios. A teoria da equilíbrio foi elaborada com mais dedicação nesta última fase.

Nota-se que Piaget se preocupa com os termos mais apropriados, trocando estádios para níveis¹ de preferência, enfatizando que as idades mencionadas em cada nível são somente um indicativo, uma média, que servia principalmente para organização das análises.

Mesmo a obra do autor podendo ser agrupada em períodos, nota-se que suas ideias principais são invariantes ao longo de toda a obra. Em geral, o primeiro período é marcado pelo desenvolvimento de uma forma social, enquanto que no segundo período adota um ponto de vista biológico. O terceiro período é marcado pelo processo de desenvolvimento e de relação biológica, sob um ponto de vista de estruturas mentais. O último período marca um estudo dos processos de novos conhecimentos.

Após essa estruturação temporal da teoria do Piaget, a seguir apresenta-se a relação dessa teoria com a aprendizagem.

2.2 A aprendizagem para Jean Piaget

O principal objetivo de Jean Piaget não foi se dedicar a escrever sobre a aprendizagem, nem sobre ensino especificamente, mas sim, seu foco de interesse era a construção da inteligência. Porém, este tema está relacionado com o ensino e a aprendizagem, seja no ambiente escolar ou natural do sujeito epistêmico. Em razão disso, dedicou-se a escrever obras que envolvem a educação, como por exemplo, *Psicologia e Pedagogia* (1969), *Aprendizagem e Conhecimento* (1959), *Para onde vai a Educação?* (1971), o artigo *Desenvolvimento e Aprendizagem* (1972).

¹ Nesta obra vamos utilizar o termo estádios referente aos níveis de desenvolvimento.

Para Piaget (1972), desenvolvimento do conhecimento e aprendizagem são duas coisas distintas. O primeiro, é espontâneo, prolongamento do desenvolvimento biológico. A segunda é provocada por uma situação externa, não natural, que pode ser, por exemplo, causada pelo professor ou pelos pais. Mas o desenvolvimento explica a aprendizagem, “o desenvolvimento é o processo essencial e cada elemento da aprendizagem ocorre como uma função do desenvolvimento total” (PIAGET, 1972, p. 1).

Conhecer é uma operação que modifica, transforma o objeto de conhecimento e que também compreende o processo dessa transformação. Além do mais, essa operação, de conhecer, precisa ser reversível e nunca é isolada, sempre ligada a outras operações interiores, fazendo parte de uma estrutura global do sujeito.

Piaget diz que os fatores que explicam o desenvolvimento do conhecimento são: a maturação, a experiência, a transmissão social e a equilibração. Este último, considerado pelo autor o fator principal, mas que os outros três são indispensáveis, mas nenhum deles por si só é suficiente; a equilibração também se aplica à relação entre os três. (PIAGET, 1972, p. 2)

O autor afirma que a aprendizagem é possível se a estrutura mais complexa for relacionada com uma estrutura mais simples, ou seja, se o sujeito conseguir estabelecer a relação do conhecimento novo com os conhecimentos já assimilados, ele estará aprendendo. Diz da mesma forma, que muitas aprendizagens não provocam o processo de equilibração, porém, se a aprendizagem ocorre fundada na equilibração ela será duradoura. Para proporcionar a equilibração são necessários longos processos, realimentados de diferentes modos e momentos, mediante informações, discussões, reflexões, formulação de hipóteses, resolução de problemas, interação (entre as pessoas - professor e aluno e entre alunos – e entre o aluno e o objeto de conhecimento). Esse conjunto de processos relacionados com a teoria piagetiana pode acontecer nas escolas e deveria acontecer, assim, havendo a evolução dos alunos, novas aprendizagens.

A aprendizagem relaciona-se com a assimilação dos objetos de conhecimento do meio no qual o sujeito está inserido e, também, suas estruturas assimiladoras têm tendência de assimilar o meio em sua totalidade. O sujeito epistêmico tem

propensão a assimilar tudo que está a sua disposição. Portanto, é da natureza do aluno tentar compreender, interpretar tudo que está ao seu redor, tudo que está à sua disposição.

Ao assimilar, depara-se com estranhezas, isto é, novidades que perturbam seu equilíbrio cognitivo. A auto regulação, que funciona para o nível biológico, estende-se para o nível psicológico e para o cognitivo, recuperando o equilíbrio perdido. Mas, esse equilíbrio não é simplesmente recuperação do equilíbrio perdido, pois ele precisa construir algo que não tem, algo novo, para que o equilíbrio se restabeleça. (BECKER, 2013, p. 69)

Assim, após posicionar-se em equilíbrio novamente, as estruturas do sujeito estão com algo novo, desenvolvido em função de sua ação sobre o meio em que está inserido. Chama-se a isso de equilibração majorante; o sujeito torna-se mais capaz, mais competente. O papel do docente neste contexto é proporcionar ao sujeito aprendiz esse meio em que há novos conhecimentos a serem assimilados, ou seja, o desenvolvimento das suas estruturas. Perceber isso é proporcionar na escola uma metodologia de ensino que foge da repetição, do sujeito passivo, para uma metodologia na qual os alunos são ativos no seu processo de aprendizagem; processo que se centra na ação do sujeito, na construção do conhecimento.

Isso está relacionado com a ação, com a experiência, ou seja, é fundamental que o professor perceba a necessidade da atividade do sujeito. Quando o ensino se alia às ações do sujeito acontece a aprendizagem. Em uma publicação sobre a teoria piagetiana, Becker (2013) diz que existem dois tipos de experiência, a física e a lógico-matemática:

Experiência física consiste em agir sobre os objetos e retirar deles qualidades que eles têm ou que são inerentes a eles ou, ainda, que existem neles antes do sujeito agir sobre eles. ... Experiência lógico-matemática é agir sobre os objetos e retirar, não deles, mas da ação e das coordenações do sujeito, características que são próprias dessas coordenações. (BECKER, 2013, p. 70)

Experiência com assimilação e acomodação são duas ações transformadoras complementares: a transformação do objeto causado pela assimilação e a transformação dos esquemas do sujeito respondendo às dificuldades da assimilação.

Ele não adquire nada a não ser pela sua atividade sobre o mundo (assimilação) que se desdobra em atividade sobre si próprio (acomodação). Essas ações, entre si complementares, caracterizadas neste texto como

processo de abstração reflexionante, mediante reflexionamentos (assimilações) e reflexões (acomodações) constituem as capacidades cognitivas, ponto de partida de toda e qualquer aprendizagem. (BECKER, 2013, p. 83)

É fundamental também que haja interesse por parte do aluno, chamados de estímulos, pois se não houver interesse não haverá a interação entre sujeito e objeto. Não havendo interação, não há construção de algo novo, de novos conhecimentos, de novas capacidades cognitivas. E o conhecimento não está no sujeito e nem no objeto. Ele ocorre na interação entre os dois, nas ações do sujeito sobre o objeto. Tudo começa quando o sujeito age sobre o objeto, sobre o meio.

Na epistemologia genética, o crescimento da inteligência não significa o acúmulo de informações e sim uma reorganização da própria inteligência, o que possibilita maior capacidade de novas assimilações.

Outro fator que se deve considerar na sala de aula é uma observação de Piaget em relação a resultados do método clínico: em cada prova clínica que aplicou, houve uma gama enorme de fatores heterogêneos e uma delas tratava-se da relação individual do sujeito com a experiência (LOURENÇO, 1998). Ou seja, na sala de aula, deve-se lembrar que temos sujeitos heterogêneos, que o seu processo de construção de conhecimento pode seguir caminhos, tempos, necessidades, experiências diferentes e também essa diferenciação pode ser proveniente das experiências exteriores à sala de aula que cada aluno traz consigo.

Para a aprendizagem duradoura, com equilíbrio, acontecer nas escolas, é necessário que os docentes entendam como ela ocorre, isso acarretará em como a prática docente deveria funcionar. Se um docente não compreende que o sujeito dispõe de estruturas que se modificam e se desenvolvem, produzindo novas e melhores formas de estruturas e que a aprendizagem necessita de experiências, esse docente está impedindo que os seus educandos construam novos conhecimentos, está limitando o desenvolvimento cognitivo deles.

Para compreender como o processo do desenvolvimento ocorre, na próxima seção será analisada a teoria da Abstração Reflexionante de Piaget.

2.3 Abstração Reflexionante

No quarto período da obra de Piaget, como mencionado anteriormente, ele dedicou-se a conceituar com mais precisão tanto o funcionamento biológico do desenvolvimento cognitivo como também a abertura para novos conhecimentos. Assim, neste período o estudo de abstração reflexionante recebeu uma obra própria: “*Abstração Reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais*” de 1977.

Em razão da abstração reflexionante ser considerada como um dos motores do desenvolvimento cognitivo (PIAGET, [1977], 1995), a intenção aqui é aprofundar esse conceito e suas relações com o auxílio do livro acima mencionado. Percebe-se a correspondência desse conceito com as ideias anteriormente citadas, assim como com a aprendizagem. Abre-se esse subcapítulo específico para este conceito piagetiano porque essa teoria estará presente de forma significativa nas análises desta pesquisa.

O que é abstrair? É a capacidade de apropriar-se de algo, do objeto, do conhecimento, separar mentalmente, ou interpretar mentalmente, uma parte de um todo, a parte que interessa.

Para Piaget ([1977] 1995) temos dois tipos de abstração: a abstração empírica, que está relacionada com as características físicas dos objetos, no subcapítulo anterior vista como experiência física, e a abstração reflexionante, que se relaciona com as propriedades dos objetos interpretadas pelos sujeitos, também descrita anteriormente como experiência lógico-matemática.

A abstração empírica acontece a partir de elementos observáveis pelo sujeito, ou pelos aspectos materiais da própria ação do sujeito, como empurrões ou toques. Mas, mesmo, na sua forma mais elementar, no início do desenvolvimento cognitivo, este tipo de abstração não é somente uma leitura pura das características físicas do objeto, pois para abstrair qualquer propriedade é necessário utilizar instrumentos de assimilação vindos de esquemas construídos anteriormente pelo próprio sujeito. Porém, o sujeito se remete a estes esquemas, não fazendo referência a eles, mas sim para enquadrar formas para captar as características físicas desse objeto. Esses

conteúdos abstraídos empiricamente já existiam nos objetos antes de qualquer interação com o sujeito.

A abstração reflexionante ocorre a partir de coordenações de ações desempenhadas internamente pelo sujeito, ou seja, provenientes de características não observáveis no objeto, somente percebidas através do comportamento do sujeito.

[...] apoia-se sobre tais formas e sobre todas as atividades cognitivas do sujeito (esquemas ou coordenações de ações, operações, estruturas, etc.) para delas retirar certos caracteres e utilizá-los para outras finalidades (novas adaptações, novos problemas, etc.). (PIAGET, [1977] 1995, p. 6).

Tratando-se da abstração reflexionante, pode-se também distinguir a abstração pseudo-empírica, que é a abstração reflexionante em que o sujeito retira dos objetos observáveis ou dos objetos concretos, características que o sujeito colocou neles. Ele não está mais atuando sobre o objeto, mas sim sobre algo arranjado e modificado por ele. Essa abstração, mais presente nos níveis pré-operatórios e nas operações concretas, é apresentada quando o sujeito somente realiza construções apoiando-se sobre resultados constatáveis. É uma abstração reflexionante apoiada em observáveis, mas que somente existem por causa das propriedades que o próprio sujeito colocou neles, após a interação entre eles, diferente da abstração empírica, que abstrai propriedades que já existiam no objeto mesmo antes da interação.

No livro *Abstração Reflexionante*, Piaget e seus colaboradores trazem inúmeras situações onde a abstração reflexionante, para dar conta de diversas diferenciações, necessita de uma abstração pseudo-empírica, ou seja, uma interação sobre objetos reais, podendo ser inteiramente construída por operações do sujeito, mas que dá lugar a constatações como se tratasse de uma leitura física. É importante destacar que, na abstração pseudo-empírica, as propriedades introduzidas nos objetos somente são acessíveis a um sujeito se for ele próprio quem se encarregou dessa operação, ou se for capaz de abstrai-las.

Quando acontece uma abstração reflexionante, pode-se dizer que ela acontece em dois momentos: por reflexionamentos (que também relacionam-se com assimilações) e reflexões (analogamente, com acomodações).

Para haver desenvolvimento cognitivo, após uma experiência com algo que instigou o sujeito, ele retira estruturas de um patamar cognitivo inferior, algo que construiu anteriormente, e transfere para um patamar superior (reflexionamento), reorganizando esses novos elementos em função do que já existia ali (reflexão), conseguindo responder ao que de algum modo o desestabilizou, desequilibrou. Esta reorganização é exigida pela abstração reflexionante.

A abstração constitui uma diferenciação, limitando-se a destacar uma relação na realidade já utilizada, fazendo por um reflexionamento e uma reflexão um novo objeto de pensamento, fazendo uma generalização adequada e, portanto, uma integração que equilibrará a diferenciação.

Toda esta evolução é dirigida, assim, por uma lei de equilíbrio entre as diferenciações e as integrações, resultando as primeiras do processo de 'reflexionamento', próprio das abstrações reflexionantes, que retira de um nível inferior certas ligações, empregadas implicitamente, ou simplesmente implicadas mas não notadas, para as transformar em objetos de pensamento no nível ulterior. As segundas resultam, então, 'reflexão' ou reorganização necessárias, sobre o novo plano, do sistema assim enriquecido pela introdução destes objetos de pensamento não considerados até então. Esta 'reflexão', segundo aspecto da abstração reflexionante, é, então, necessariamente generalizadora, pelo fato de que ela se apoia sobre uma totalidade mais ampla. Não se trata, portanto, somente de relações indissociáveis da abstração e da generalização que determinam os dois polos do processo da equilibração, mas, de modo mais geral, dos polos da diferenciação e da integração. Quanto a este último, implica ele uma ação do sistema total sobre os subsistemas e não se reduz, portanto, sem mais, a um equilíbrio ou assimilação recíproca entre os subsistemas: com efeito, a integração em um todo conduz à formação de leis gerais de composição, podendo diferir das leis dos subsistemas, e os resultados que precedem mostram, à exaustão, as dificuldades que o sujeito deve vencer para chegar à constituição de tais totalidades coerentes. (PIAGET, [1977] 1995, p.28)

Para que haja o desenvolvimento, ou seja, a evolução da inteligência, é necessário sempre estar passando para uma operação mais complexa, superior, sempre elevando os patamares. É natural que a abstração reflexionante aconteça de forma inconsciente, o sujeito não percebe de onde possui os mecanismos para uma nova estruturação.

Sobre cada patamar cognitivo, a reflexão reorganiza um novo sistema, mais coerente e mais integrado, dando razão às estruturas elaboradas anteriormente, se apoiando sobre muitas outras razões, em níveis meta-reflexivos, cada vez mais elevados e complexos, constituindo um dinamismo ininterrupto.

É claro que, a partir destas reflexões elevadas à segunda e à enésima potência, o essencial torna-se a própria reflexão, por oposição ao 'reflexionamento'. Mas, não é menos evidente que, psicologicamente, cada nova reflexão supõe a formação de um patamar superior de 'reflexionamento', onde o que permanecia no patamar inferior, como instrumento a serviço do pensamento em seu processo, torna-se um objeto do pensamento e é, portanto, tematizado, em lugar de permanecer no estado instrumental ou de operação [...]. Novos patamares de 'reflexionamento' constroem-se, portanto, sem cessar, para permitir as novas 'reflexões'. (PIAGET, [1977] 1995, p. 275-6)

Quando acontece uma abstração reflexionante com tomada de consciência (a consciência da lógica envolvida, do porquê do resultado obtido e de seu percurso) dizemos que ela é uma abstração refletida. Quando o sujeito antecipa algo está mostrando uma abstração refletida, ou seja, uma tomada de consciência de uma abstração. Observa-se uma abstração refletida quando o sujeito generaliza algo, quando percebe que um conceito se estende. Em matemática, identificam-se frequentemente situações envolvendo a generalização, quando, por exemplo, a partir de correspondências entre elementos de dois conjuntos de números, se estabelece um padrão de construção. Quando o sujeito desmembra as operações implicadas em uma experiência e não os objetos, constata as ações ou seus mecanismos e não os resultados dessa experiência, trata-se de uma abstração mais profunda, de natureza refletida.

Uma abstração refletida também é notada em um experimento quando há comparação entre duas situações análogas, e esta comparação está considerando as ações do próprio sujeito nessas situações e não sobre os aspectos materiais dos objetos envolvidos, a significação que eles atribuem a estas situações. Outra maneira de analisar a abstração refletida de um sujeito é verificar como eles conseguem, através da reflexão que segue logo após a ação, reconstruir ou representar os seus raciocínios de forma consciente, para resolver determinado problema envolvido na ação.

Há um retardo natural e geral da tomada de consciência em relação à construção efetiva, ou seja, da abstração refletida em relação à abstração reflexionante. As tentativas de comparação em que os sujeitos se ocupam podem nos informar indiretamente como esse processo acontece, mas neste momento que trata de concluir que é a mesma lei, a tomada de consciência da identidade das construções, já fornecidas pela abstração reflexionante, os sujeitos podem negar, justificado por Piaget:

[...] devido ao fato que este último patamar, próprio da abstração refletida, comporta um esforço reflexivo de retração, atingindo uma integração de conjunto: eles recaem, então, em considerações a respeito de conteúdos, por não conseguirem depreender a forma comum (PIAGET, [1977] 1995, p. 168)

Podemos dizer que as abstrações reflexionante e refletida estão em constante alternância, a primeira constitui o processo e a segunda a tomada de consciência do resultado desse processo. Portanto, a refletida sempre resulta de abstrações reflexionantes anteriores, mas pode servir de ponto de apoio para próximos processos semelhantes, ou seja, novas abstrações reflexionantes que se apoiarão sobre as anteriores. Trata-se de formas superiores de abstração refletida, reflexão sobre reflexões anteriores.

Em relação à generalização, esta possui uma relação circular com a abstração: “o resultado de uma abstração reflexionante é sempre uma generalização” (PIAGET, [1977] 1995, p. 59). Toda generalização supõe uma abstração prévia, em um reflexionamento de coordenações e uma reflexão reorganizadora, conduzindo a generalizações necessárias.

Uma quase necessidade é quando o sujeito está certo de uma conclusão, mas ainda não compreende sua razão, ou seja, não está levando essa dedução à generalização empírica, suas ações se renovam constantemente, o que eleva suas coordenações e a leitura dos seus resultados sobre o objeto modificado (pseudo-empírica), chega na etapa que sabe que existe uma razão mas resta encontrá-la. O sujeito somente generaliza após várias constatações empíricas do resultado de suas ações sobre os próprios objetos, ou seja, a abstração que conduz à generalização é a pseudo-empírica. A abstração que enfim fornece a razão, até então somente pressentida, trata-se de uma tomada de consciência que transforma as quase necessidades em necessidades. A necessidade é um produto da abstração reflexionante.

Esta forma de abstração comporta, não o esqueçamos, dois momentos estreitamente ligados: um ‘reflexionamento’ do plano da ação ao da representação, e uma ‘reflexão’ reorganizadora, que reconstrói sobre o novo patamar o que é tirado do precedente, acrescentando a isto, a tentativa de compreensão das razões, ocasionais, depois necessárias. Quanto à antecipação, tem início com o reflexionamento, enquanto previsão da repetição do que já é conhecido, no plano das ações materiais, e alarga-se com a reflexão, assim que ela comporte generalizações não simplesmente

extensivas, mas que repousam sobre a compreensão de composições em situações análogas. (PIAGET, [1977] 1995, p. 251)

A abstração reflexionante é caracterizada como uma fonte de novidades e não somente à transferência de um nível para outro mais elevado, o reflexionamento. Estas novidades resultam da reflexão, da abstração que reorganiza as operações cognitivas do sujeito. Esta, por sua vez, acontece devido ao reflexionamento dos dados já adquiridos no patamar inferior, devendo ser reconstruídos em novas formas no patamar superior.

[...] as relações entre o reflexionamento e a reflexão devem ser concebidas como de estreita continuidade, malgrado sua distinção: ao transpor uma estrutura de um plano inferior a um plano superior, o reflexionamento dá-lhe um novo conteúdo (cria, pois, um novo morfismo), o que já significa generalizá-lo um pouco, enquanto que o papel inicial da reflexão é apenas o de reconstruí-la ou reconstituí-la em um novo plano, o que significa prolongar o reflexionamento. (PIAGET, [1977] 1995, p. 103)

Um fato importante nesse processo, é que quando a reflexão reorganizadora, que prolonga o reflexionamento, engloba o conteúdo e a forma do nível inferior ao novo conteúdo ampliado no nível superior, está construindo uma forma das formas, o que significa enriquecimento, ou seja, desenvolvimento das estruturas cognitivas do sujeito, gerando novidades.

A abstração reflexionante conduz à construção de operações sobre operações, mas com a particularidade que as novas não são quaisquer e sim as precedentes prolongadas de uma maneira diferenciada, “é ela fonte contínua de novidades, porque atinge novas ‘reflexões’ sobre cada um dos planos sucessivos do ‘reflexionamento’ e estes engendram em que sua sequência seja jamais acabada” (PIAGET, [1977] 1995, p. 205).

Portando, o processo da abstração é complexo, que exige: 1) uma abstração com reflexionamento e reflexão no plano das conceituações; 2) uma comparação entre os conceitos abstraídos, o que constitui uma reflexão sobre as reflexões anteriores, uma abstração de segunda grandeza (se for em relação a uma outra abstração ou de enésima grandeza se for em relação a tudo que foi abstraído precedentemente); 3) levando a uma integração (reorganização reflexionante do todo), equilibrando as diferenciações (abstrações parciais).

Em relação a esta tese, estende-se esta teoria no próximo subcapítulo especificamente ao pensamento espacial.

2.4 A abstração reflexionante nas relações espaciais

No livro *Abstração Reflexionante* ([1977] 1995), Piaget apresenta uma parte destinada à abstração em relação às propriedades espaciais, diretamente relacionada com esta pesquisa. Assim, dedica-se um pouco mais aos estudos desta parte.

Lembrando que a abstração empírica retira informações observáveis do objeto de conhecimento, a abstração reflexionante das coordenações de ações do próprio sujeito sobre o objeto. Já a abstração pseudo-empírica, um tipo de abstração reflexionante, abstrai propriedades do objeto de conhecimento introduzidas pelas suas ações, ou seja, propriedades físicas do objeto fornecidas pelas próprias estruturas cognitivas do sujeito diante a interação entre eles.

Na leitura das propriedades espaciais do objeto, há uma geometria do próprio sujeito e uma geometria do objeto. A formação do espaço está condicionada ao registro de certas relações espaciais que pertencem ao objeto mas muitas delas, somente são interpretadas diante das estruturas cognitivas do sujeito, ou seja, a abstração de objetos espaciais está condicionada à abstração pseudo-empírica, dependendo da geometria do objeto e da geometria do sujeito.

Há uma estreita conexão entre a geometria do objeto e a do sujeito. A geometria do sujeito é de natureza operativa, relacionado com ações e coordenações de ações, podendo modificar os objetos. A geometria do objeto é essencialmente figurativa e qualitativa, relacionado à percepção e representação das formas, dos resultados das transformações.

Agora, determinar qual das duas abstrações é mais significativa ou a ordem entre elas em determinadas experiências espaciais não é fácil, visto que, toda representação espacial depende das duas geometrias em dosagens difíceis de determinar e distinguir. Porém, segundo Piaget ([1977] 1995), parece claro que as

reações iniciais resultam antes de tudo de aspectos figurativos dos objetos, de abstrações empíricas (geometria do objeto).

Sobretudo, a abstração empírica não basta para a construção do pensamento espacial do sujeito, pois fornece apenas dados, sem dar as razões para as evidências abstraídas das experiências empíricas. Mas o empirismo permanece necessário até (ou outras vezes, além de) o sujeito adquirir a dedução sobre as propriedades do objeto, “a abstração empírica é sempre solidária a abstrações reflexionantes” (PIAGET, [1977] 1995, p. 206).

Tirada das coordenações de ação e fonte de novas coordenações, a abstração reflexionante é essencialmente estruturante, enquanto a abstração empírica (ou física, no sentido experimental) fornece os dados, levanta as questões e verifica as soluções por sucessos ou fracassos; colabora, portanto, com um senso com outra forma, mas também com um senso em que um controle exterior colabora com a invenção, sem produzir as suas construções, ao passo que, no limite (níveis formais), a construção comportará seu autocontrole dedutivo. As contribuições entre os dois tipos de abstração não são, pois, da mesma natureza e, neste sentido, permanecem não recíprocas. (PIAGET, [1977] 1995, p. 212)

As ações do sujeito desempenham um papel essencial para as abstrações reflexionantes, possuem um controle contínuo sobre os objetos, que exigem uma leitura incessante dos resultados de cada experiência, ou seja, uma intervenção abundante de abstrações empíricas cada vez mais renovadas e enriquecidas perante cada erro e constatação encontrada.

[...] ainda que todos os produtos da abstração reflexionante correspondam a constatações empíricas possíveis, esta constitui uma fonte de novidades contínuas, no sentido de que as constatações fornecem exclusivamente estados de fato e generalizações extensivas, enquanto a reflexão atinge as razões e as composições necessárias, não se limitando, assim, a preceder a experiência por antecipações dedutivas, mas, ultrapassando-a, introduzindo uma necessidade que os fatos por si mesmos não comportam jamais. (PIAGET, [1977] 1995, p. 252)

Nas experiências piagetianas em relação ao espacial, nota-se que muitos dados podem ser apreendidos pelo sujeito através da simples observação dos objetos como também das suas ações, porém, fica evidente, que ao longo do amadurecimento cognitivo, a abstração empírica é contínua, mas ao longo da experiência ou do desenvolvimento ela não basta, requerendo cada vez mais a intervenção de um quadro assimilador, de coordenações do sujeito, ou seja, de

abstrações reflexionantes. Mas, reciprocamente a isto, o processo reflexionante exige constantemente de representação do real, uma correspondência com os produtos da abstração empírica, fornecendo uma informação complementar quanto à significação das deduções efetuadas.

Portanto a construção do espaço constitui uma dupla natureza, de extensão dos objetos e da geometria do sujeito, uma intersecção entre a realidade exterior e as operações do sujeito, a união da abstração reflexionante (aspecto operativo, as transformações) e da abstração empírica (aspecto figurativo, os observáveis). Ao longo do desenvolvimento espacial a abstração empírica teve o apoio da abstração reflexionante, esta última, por sua vez, assume um papel cada vez mais importante, sendo necessário para a construção espacial um processo reflexionante cada vez mais complexo.

Os observáveis figurativos relacionam-se com as transformações operativas e estas transformações, por sua vez, também são representáveis de forma figurativa, obtendo uma mistura de capacidade operatória e de representação visual, o que chamamos de “intuição geométrica”.

Segundo Piaget, o processo reflexionante diante de problemas geométricos apresenta a característica de que a abstração refletida acontece tardiamente em relação ao processo reflexionante, mas ao atingir o mesmo nível, vira fonte de progresso através de reflexões sobre reflexões.

Diante desse estudo, obtém-se o que se acredita ser um suporte teórico suficiente para as análises dos dados produzidos na investigação, estes que pretendem verificar o desenvolvimento do pensamento espacial diante de experiências com o uso de tecnologias. Ou seja, examinar o comportamento dos participantes diante das interações com os objetos de estudos via tecnologia, verificando indícios de abstrações reflexionantes, em que nível de abstrações, do tipo refletida, com tomada de consciência, ou abstrações empíricas, oriundas de constatações físicas.

Para um maior embasamento teórico na tomada de decisões referente aos experimentos produzidos para a investigação, ou seja, quais propostas de atividades a serem colocadas aos participantes para que tragam elementos suficientes para essas análises, no próximo capítulo se apresenta o estudo realizado sobre a

representação do espaço na criança e uma teoria sobre as habilidades espaciais na visualização.

3. O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO ESPACIAL

Compreender como se desenvolve a inteligência do sujeito epistêmico foi a principal preocupação de Piaget e, neste capítulo, a pretensão é verificar como se desenvolve o pensamento em relação ao espaço. Se nesta pesquisa o objetivo é verificar se as tecnologias digitais ocorrem por abstrações reflexionantes na formação do conhecimento geométrico, então é necessária a análise de como se desenvolve esse conhecimento e, por extensão, o pensamento geométrico. No primeiro subcapítulo é apresentado como se constrói a ideia de espaço; para isso se utilizará a teoria piagetiana. Da mesma maneira, devem-se verificar as habilidades geométricas importantes para compreender e analisar o espaço (subcapítulo dois), baseado nas obras de Angel Gutiérrez.

3.1 A construção do espaço segundo Jean Piaget

Segundo Oliveira (2005), existem os seguintes tipos de espaços: o matemático, o físico e o psicológico. “Os espaços matemáticos são construídos a partir de axiomas e descritos por uma geometria; algumas dessas geometrias podem definir o espaço físico e o psicológico” (OLIVEIRA, 2005, p. 111). Para Piaget e Inhelder ([1948] 1993), o espaço psicológico inicia-se física e matematicamente, dependendo tanto do objeto quanto do sujeito, ou seja, está relacionado tanto a abstrações empíricas como abstrações reflexionantes. Para perceber o mundo físico ao seu redor, o espaço, o sujeito utiliza seus receptores sensoriais, principalmente o visual e o tátil-cinestésico em experiências físicas e para descrever os diferentes tipos de espaços recorre às suas estruturas mentais, relacionando as operações já construídas para construir novos conceitos espaciais, ocorrendo uma reflexão.

Jean Piaget e Bärbel Inhelder estudaram com maior profundidade, no terceiro período de sua obra, as construções lógicas e matemáticas, com o objetivo de entender como a percepção do espaço se desenvolve na criança. Realizaram diversas experiências analisadas e relatadas no livro: “*A representação do espaço na criança*” ([1948] 1993). Nessas experiências, verificam que a criança, antes de

organizar uma representação projetiva ou euclidiana, de um objeto no espaço, constrói e utiliza relações elementares, ou seja, topologias. Na matemática as topologias são as propriedades geométricas do objeto. Posteriormente, elas (as topologias) serão a base da construção de vários conceitos espaciais.

Os autores deparam-se com a necessidade de distinguir duas relações espaciais: o plano perceptivo e o plano representativo. A intuição espacial, ou seja, o reconhecimento do espaço surge no início da existência como um espaço sensório-motor ligado à percepção e à motricidade. Após, vem o espaço representativo associado ao início da imagem e do pensamento intuitivo concomitante com a aparição da linguagem; esses espaços são construídos por ações da criança, no estágio dos comportamentos definidos como pré-operatórios.

A representação parte das intuições elementares, topológicas de vizinhança, de separação, de envolvimento, de ordem, aplicadas em figuras projetivas e métricas. Essas intuições topológicas originam-se, no início da existência, ignorando as retas, as distâncias e os ângulos, ficando apoiadas nos corpos elásticos e deformáveis. O espaço topológico, ou seja, criado a partir dessas noções primitivas, vai se desenvolvendo em direção ao espaço euclidiano ao mesmo tempo que para o espaço projetivo.

O espaço sensório-motor, movido pela percepção, progride pelas ações da criança e de seus deslocamentos. A equilibração dá-se no nível das ações, ou seja, trata-se de espaço prático. Como a criança ainda não construiu a função simbólica, é incapaz de representá-lo, ou seja, a ação deve ser direta com o objeto. Ao redor dos dois anos de idade, com o início da função simbólica, surge o espaço representativo, ou seja, a construção da imagem. Mediante a imagem, a criança mantém os objetos na ausência dos objetos materiais.

Nesta obra de Piaget e Inhelder ([1948] 1993), o estágio sensório-motor é dividido em três períodos, nos quais começam a surgir as relações topológicas que serão a base para a construção e compreensão do espaço. Temos o primeiro período que trata dos primeiros reflexos e das aquisições dos primeiros hábitos; o segundo período tem início com a manipulação de objetos e as primeiras condutas inteligentes; e, finalizando, o terceiro em que ocorrem as experimentações e as primeiras coordenações interiorizadas (compreensão rápida das situações novas).

Primeiro Período – Dura aproximadamente os três primeiros meses de vida.

[...] por falta de coordenação entre a visão e a apreensão, o espaço visual e o espaço tátil-cinestésico não estão ainda ligados em uma totalidade única, etc. Não é, pois, surpreendente que ainda não exista, nesse nível, nem permanência de objeto sólido nem constância perceptiva das formas ou das grandezas. (PIAGET; INHELDER, [1948] 1993, p. 21).

Neste período o bebê considera que um objeto deixa de existir quando desaparece do seu campo de visão.

A relação de vizinhança pode ser apreendida com a estrutura mais simples da percepção. Quanto menor a criança, a percepção da proximidade de um objeto em relação a outros, em um mesmo campo de visão, é mais considerada em relação aos outros fatores como semelhança, simetria e grandeza.

Outra relação elementar que pode aparecer nesse período é a da separação. A criança percebe a distinção entre dois elementos vizinhos. A relação de ordem acontece muito precocemente, quando, por exemplo, ela estabelece uma ordem ao tocar objetos vizinhos e separados.

A percepção elementar também pode desenvolver a relação de circunscrição, ou seja, um elemento pode ser percebido como rodeado de outros elementos. E, no início da percepção podemos notar a relação de continuidade das linhas e das superfícies.

Podemos relacionar essas relações primitivas, desenvolvidas pela percepção nesse primeiro período como os primeiros dados para a construção geométrica.

Segundo período - Inicia entre os quatro, cinco meses de vida e se estende aproximadamente até o décimo segundo mês. Neste período os objetos, antes observados a distância como figuras elásticas e deformáveis, viram agora sólidos. O toque, a manipulação, a movimentação de passar de uma mão para a outra dão consistência a esse elemento.

Inicia-se a construção simultaneamente das figuras euclidianas e projetivas, pois, começa-se a coordenação das ações em relação à constância das formas e das grandezas durante seus deslocamentos e também os pontos de vista sobre o objeto, isto é, as perspectivas.

Percebe-se uma constância de forma quando um bebê vira uma mamadeira na posição habitual (posição para mamar) quando lhe é dado ao contrário. Nota-se

neste período que os movimentos do bebê e do objeto começam a ser diferenciados e inicia-se a procura de um objeto desaparecido. É em função dessa ação do bebê que o objeto adquire dimensões constantes, ou seja, uma grandeza constante em conformidade com sua proximidade.

Terceiro período - Ao redor dos dois anos de vida. Neste período há crescentes experimentações táteis e de “inteligência prática por coordenação interna das relações” resultando em relações dos objetos entre si. Aparece “a imagem mental em prolongamento da imitação diferenciada e, pelo mesmo fato, os primeiros esboços de representação” (PIAGET; INHELDER, [1948] 1993, p. 27), o espaço perceptivo tornando-se representativo.

Neste momento, inicia-se a intuição das formas, pela percepção estereognóstica; é quando a criança começa a reconhecer os objetos ao tocar, sem vê-los.

A percepção é o conhecimento dos objetos resultante de um contato direto com eles. A representação consiste, ao contrário -, seja ao evocar objetos em sua ausência, seja quando duplica a percepção em sua presença -, em completar seu conhecimento perceptivo referindo-se a outros objetos não atualmente percebidos. [...] Se a representação em um sentido prolonga a percepção, ela também introduz um elemento novo, que lhe é irredutível: um sistema de significações que comporta uma diferenciação entre o significante e o significado. (PIAGET; INHELDER, [1948] 1993, p. 32)

Significado corresponde ao conceito ou à noção e significante corresponde à forma física. A passagem da percepção à representação significa ter o significante e o significado, ou seja, a imagem e o pensamento.

[...] a imagem intuitiva oscila, pois, por sua própria natureza, entre o motor e o figural, como já o fazem, por sua conta, as próprias percepções. Quanto às relações intelectuais que constituem o espaço representativo em seu início, elas são, antes de tudo, ligadas à imagem como a um suporte do qual dependem estreitamente, mas, à medida que atingem as transformações espaciais em oposição às figuras estáticas, dissociam o elemento motor próprio à imagem de seus elementos figurais e liberam-se destes últimos, a ponto de submetê-los a título de simples símbolos auxiliares. (PIAGET; INHELDER, [1948] 1993, p. 32-33)

O espaço perceptivo é construído segundo uma ordem de sucessão que vai de relações topológicas iniciais a relações projetivas e métricas, depois, finalmente, as relações de conjuntos ligadas aos deslocamentos dos objetos, uns relativamente aos outros. A passagem da percepção à representação figurada (ou intuição

representativa e não mais perceptiva) é uma reconstrução das relações já adquiridas no plano perceptivo e uma continuidade funcional entre esta construção nova e a construção perceptiva anterior.

O espaço topológico é, portanto, interior à figura; ele exprime suas propriedades intrínsecas. Esse espaço não é, portanto, um espaço total englobando todas as figuras. A construção do espaço começa pela constituição dos objetos mesmos com seu espaço interior antes de se estender até às relações dos objetos entre si num quadro mais vasto ou espaço propriamente dito. (DOLLE, 1987, p. 153)

No estágio pré-operatório tem-se o realismo intelectual: consiste em desenhar não o que o sujeito vê do objeto, mas tudo que está ali. É um modo de representação espacial no qual as relações euclidianas e projetivas estão começando. Conserva-se a relação de vizinhança e de separação, mas a relação de ordem encontra-se numa fase inicial principalmente quando se tem mais elementos. As distâncias, formas e as proporções não são respeitadas.

Em relação ao desenho, que é uma representação exteriorizada, não quer dizer que vai transmitir as percepções e a representação interiorizada da criança, pois pode haver ausência de habilidade gráfica ou de atenção. Piaget e Inhelder ([1948] 1993) trazem um exemplo de uma menina que desenha uma casa em forma de triângulo, mas com o gesto das mãos mostrou que queria ter desenhado retas paralelas, como um retângulo.

Segundo Dolle (1987), com aproximadamente quatro anos a criança distingue as formas retilíneas e as formas curvas e aos sete anos todas as formas geométricas são copiadas com êxito.

Com o desenvolvimento cognitivo, no estágio operatório concreto, temos o que foi chamado de realismo visual; aparece um desenho preocupado simultaneamente com perspectivas, proporções e medidas ou distâncias:

[...] o exame desse realismo visual parece mostrar que as relações projetivas (perspectiva) não precedem as relações euclidianas (medida, coordenadas e proporções) nem o inverso, mas que os dois sistemas são construídos solidariamente apoiando-se mesmo um no outro. (PIAGET; INHELDER, [1948] 1993, p. 68)

É o espaço projetivo, paralelamente ao espaço euclidiano. Esse primeiro ocorre quando o objeto não é mais encarado por si mesmo, mas por um outro ponto

de vista. O espaço euclidiano coordena os objetos entre si em relação a um conjunto de referências, de conservação de superfícies e distâncias.

A intuição geométrica é uma leitura perceptiva do mundo exterior e da imagem que a percepção forneceu ao sujeito. Essa intuição é necessária para o entendimento da construção do espaço na criança.

Um dos resultados que esses pesquisadores consideraram mais claros na própria obra é que a imagem e a matéria sensível desempenham na intuição geométrica o mesmo papel que o significante e o significado desempenham nos pensamentos.

[...] a intuição do espaço não é mais uma leitura das propriedades dos objetos, mas, antes, desde o início, uma ação exercida sobre eles; e é porque essa ação enriquece a realidade física, ao invés de extrair dela, sem mais, estruturas completamente formadas, que ela consegue ultrapassá-la gradualmente, até constituir esquemas operatórios suscetíveis de serem formalizados e de funcionarem dedutivamente por si mesmos. Da ação sensório-motriz elementar à operação formal, a história da intuição geométrica é, portanto, e de uma atividade propriamente dita, inicialmente ligada ao objeto ao qual se acomoda, mas assimilando-a ao seu próprio funcionamento, até transformá-la, do mesmo modo que a geometria transforma a física.

É desde a tomada de contato perceptiva com a experiência que se manifesta esta ação, sob a forma de uma atividade sensório-motriz que regula as percepções: nesse nível já, o elemento sensível limita-se a servir de 'significante', ao passo que a assimilação ativa e motriz constrói as relações. (PIAGET; INHELDER, [1948] 1993, p. 469)

No estágio das operações concretas, que precede as formais, a ação sobre os objetos também é utilizada, mas concomitante às operações cognitivas já formadas, diferente dos estádios anteriores. Ou seja, existem ações sobre os objetos, mas os sujeitos estão relacionando essas ações, os esquemas, com as estruturas cognitivas já construídas. As ações são enriquecidas pelas operações do sujeito, tornando-as reversíveis e suscetíveis a composições, ultrapassando os objetos sobre as quais estão apoiadas, o que se denominou anteriormente de abstrações pseudo-empíricas.

Para entender a construção do espaço na criança, Piaget e Inhelder ([1948] 1993) realizaram diversos experimentos como, por exemplo, para verificar a noção do ponto e do contínuo, a perspectiva, as secções de sólidos, a planificação e as coordenadas. No capítulo sete desta tese será apresentada uma série de atividades no ambiente digital baseadas nos experimentos de Piaget e Inhelder.

A intuição de ponto e de infinitude é possível mediante percepções complexas; é necessária uma elaboração intelectual para montar esquemas de decomposição até chegar ao ponto ou de recomposição até chegar à noção de infinito. Essa construção necessita das operações de ordem e de envolvimento, ou seja, um espaço topológico de qualidade é indispensável. Pelos experimentos de Piaget e Inhelder, em relação a noção de ponto e infinito, somente no estágio formal (entre 11- 12 anos) essas intuições manifestam-se nos comportamentos. As atividades 1 e 2 da investigação (subcapítulos 7.1 e 7.2) tratam desses esquemas. Com esse experimento, segundo Dolle (1987), Jean Piaget encerra os estudos sobre os aspectos topológicos na criança.

Em relação às perspectivas, os autores a analisam da seguinte forma: a perspectiva supõe um relacionamento entre o objeto e o ponto de vista próprio, tornando consciente de si mesmo; tomar consciência do ponto de vista próprio consiste em diferenciá-lo do ponto de vista do outro e, em consequência, em coordenar o próprio com o do outro. Isso significa um desapego do objeto mas, ao mesmo tempo, de uma tomada de consciência de sua relação para com esse; isso acarreta uma diminuição do egocentrismo. As atividades 4, 6, 7, 8 e 11, apresentadas e analisadas nos subcapítulos 7.3, 7.4 e 7.9, tratarão do relacionamento dos diferentes pontos de vista dos sujeitos desta pesquisa com diferentes objetos.

Quanto ao entendimento dos eixos coordenados, “supõe um relacionamento de cada objeto em relação a todos os outros e em relação a um sistema de pontos de referência ordenados segundo as diversas dimensões.” (PIAGET; INHELDER, [1948] 1993, p. 262). A atividade 8, apresentada no capítulo da investigação (7.4), propõe um entendimento de relação entre os objetos de estudo, além das atividades de construção de objetos tridimensionais, como as atividades 3, 5, 12 e 13 (apresentadas e seus resultados analisados nos subcapítulos 7.5, 7.6 e 7.10)

Para o entendimento dos resultados do experimento das secções, os autores diferenciam dois tipos de geometria:

- Geometria dos objetos: estuda o objeto como se o observador pudesse tocá-lo, conhecê-lo como se fizesse parte dele (interior aos objetos), objetos constantes.

- Geometria dos pontos de vista: estuda o objeto não mais do interior, mas de um ponto de vista afastado, que considera os objetos tais como eles aparecem nesse ponto de vista.

As secções vêm das duas geometrias definidas acima:

No caso da secção dos volumes, essa interação estreita das operações euclidianas, que consistem em atravessar o volume por um movimento efetivo (portanto em cortar a massa), e das operações projetivas que consistem em imaginar esse volume sob uma certa perspectiva e em seccionar a figura de três dimensões por meio de um plano, é evidente em todos os níveis do desenvolvimento psicológico. Nos níveis inferiores, essa interação aparece na representação gráfica da criança [...] seu desenho é testemunha dessa 'mistura dos pontos de vista' [...] e que implica diversas perspectivas ao mesmo tempo sem coerência nem sistema. Nos níveis superiores, finalmente, vê-se com clareza o quanto a representação projetiva da secção apoia-se na operação da secção real, e reciprocamente as perspectivas e os movimentos que interagem uns nos outros. (PIAGET; INHELDER, [1948] 1993, p. 263 - 264)

Em relação à planificação, que os autores chamam de rebatimento dos lados, eles afirmam que

[...] não é suficiente perceber corretamente um objeto a três dimensões, nem prolongar essa percepção em uma imagem adequada do objeto não desdobrado, para conseguir imaginar o rebatimento correto dos lados desse objeto. Em outras palavras, a intuição de uma figura desenvolvida não é um produto da simples percepção: a percepção das seis faces quadradas de um cubo não é suficiente para engendrar a imagem desses seis lados rebatidos sobre um mesmo plano. O que intervém na imagem do desenvolvimento, além da percepção do volume não desdobrado, é uma ação, portanto uma modificação motriz da percepção, e é mesmo a antecipação representativa de uma ação não executada; portanto a passagem de um estado perceptivo a um estado perceptível, mas não ainda percebido. (PIAGET; INHELDER, [1948] 1993, p. 309)

Na investigação desta tese as análises referentes às secções e planificações, serão realizadas pelas atividades 9 e 10 apresentadas e analisadas nos subcapítulos 7.7 e 7.8.

Para chegar no espaço euclidiano, ou seja, das medidas, pode-se lembrar que as relações topológicas se apoiam nos objetos e as noções projetivas apoiam-se nos diferentes pontos de vistas do objeto. Junto com a construção desse sistema de pontos de vista, há também uma coordenação dos objetos conservando suas distâncias, deslocamentos com conservação de suas formas, assim acabando na construção de sistemas de coordenadas. O sistema de coordenadas está relacionado com a ideia de ordem, das três dimensões, da reta, das paralelas, dos

ângulos e a não-analogia com a coordenação dos pontos de vista. Todos esses esquemas serão referência principalmente nas atividades de construção: 3, 5, 11, 12 e 13 (subcapítulos 7.5, 7.6, 7.9 e 7.10), onde se tratará de projetar e imprimir diferentes peças sólidas. As demais atividades também envolvem conceitos euclidianos, mas com intensidade significativa nessas atividades citadas.

[...] as coordenadas do espaço euclidiano não são nada mais, em seu ponto de partida, do que uma vasta rede estendida a todos os objetos, e consistem em relações de ordem aplicada às três dimensões ao mesmo tempo: cada objeto situado nessa rede é, pois, coordenado em relação aos outros, segundo as três espécies de relações simultâneas esquerda x direita, acima x abaixo e frente x atrás, ao longo das linhas retas paralelas entre si quanto a uma dessas dimensões e cruzando-se em ângulo reto com as orientadas segundo as duas outras. (PIAGET; INHELDER, [1948] 1993, p. 394)

Essa noção de coordenadas horizontal/vertical inicia-se por volta dos sete a oito anos, e essa construção tem a ver com a relação topológica de ordem, uma forma de entender isso é que:

[...] ordenar em pensamento não é somente imaginar uma sequência de objetos já ordenados, nem mesmo simplesmente representar a si mesmo em imagem a ação de ordená-lo: é ordenar essa sequência tão real e ativamente como se tratasse de uma ação material, mas executando interiormente tal ação por meio de objetos simbolizados. (PIAGET; INHELDER, [1948] 1993, p. 475)

Os experimentos realizados nesse livro, sobre intuição espacial, todos envolvem ações diretas do sujeito epistêmico. Baseada nisso que a pesquisadora desta tese construiu cada atividade, apresentadas e analisados os dados produzidos através delas no capítulo sete. A leitura da experiência começa pelas características do objeto, pois a tomada de consciência de uma ação começa pela constatação de seu resultado exterior e, nesse sentido, tais experiências informam o sujeito sobre os caracteres físicos do objeto. Mas não é só isso, além dos conhecimentos adquiridos sobre os objetos, o que o sujeito aprende na experiência geométrica é também a maneira pela qual suas ações são coordenadas entre si.

No que se refere à ação, nós constatamos incessantemente o quanto é fundamental seu papel, em oposição ao da imagem. A intuição geométrica é essencialmente ativa: ela consiste, antes de tudo, em ações virtuais, esquemas reduzidos de ações efetivas anteriores ou esquemas antecipadores de ações ulteriores, e, quando a ação comete um engano, a intuição muda de repente. (PIAGET; INHELDER, [1948] 1993, p. 473)

Para Piaget e Inhelder, a imagem simbólica é o prolongamento das acomodações da ação do sujeito. “Toda a ação, em se aplicando a objetos, acomoda-se a eles, isto é, suporta em negativo a marca das coisas sobre as quais se molda” ([1948] 1993, p. 476). O importante da ação está na modificação do objeto realizada pelo sujeito, assimilando-o aos seus esquemas.

No primeiro estágio, no nível do pensamento pré-conceitual e figural a imagem simbólica, o concreto, terá um papel mais aparente pois a intuição espacial está na sua fase inicial na qual repousa sobre ações evocadas, curtas e já executadas. No nível das intuições articuladas, as ações são mais complexas, começando a coordenarem entre si; a imagem simbólica passa a ser somente assistente, porém necessária, mas um auxiliar do pensamento.

Nas operações concretas, as ações são mentalizadas tornando-as coerentes e precisas fazendo a imagem simbólica tornar-se independente. Já nas operações formais, a imagem fica ultrapassada pelo pensamento. Em relação às operações espaciais, a imagem fica cada vez mais secundária à medida que o pensamento evolui, mas permanece até o final.

Retomando, a criança constrói a noção de espaço inicialmente topológico, movido pela percepção, não relacionando os objetos uns com os outros na forma de um conjunto; esse espaço tem fronteiras limitadas pelas suas experiências próprias. E para que perceba o espaço total, é necessária a noção de distâncias e pontos de vistas, construídos através de dois sistemas de coordenadas, que permitirão à criança situar os objetos uns em relação aos outros e de um sistema de perspectivas, no qual a criança irá organizar um sistema de referência. A junção desses dois sistemas, que tratam de um prolongamento das relações topológicas, irá estruturar as três dimensões do espaço euclidiano, tudo isso construído por ações do sujeito.

O estudo sobre a representação do espaço na criança deu indicativos de quais atividades e quais ações estão relacionadas com o desenvolvimento dessa percepção espacial; ao que segue, será analisado o papel da visualização espacial para essa percepção.

3.2 Habilidades na visualização espacial

Em matemática, o olhar ou visualizar permite construir um espaço de referência no qual estão colocados os objetos matemáticos e, nesse processo incluem-se muitos processos cognitivos como interpretar, decodificar, relacionar, vincular, entre outros.

Para Soto (2012), quando a visualização se refere ao uso da visão para se obter informações em relação à construção de ideias, estabelece-se que além de “ver” devemos “saber”. A visualização não é um processo de conhecimento direto, pois os objetos vistos não disponibilizam todas suas propriedades diretamente. Os nossos olhos e nosso cérebro percebem coisas diferentes, ou melhor, as interpretações realizadas pelo nosso cérebro fazem com que os nossos olhos visualizem mais informações do que as fornecidas pelo objeto em si, as características dos objetos oriundas das abstrações pseudo-empíricas, como foi mostrado na teoria piagetiana do capítulo 2.

[...] se olharmos para os elementos do processo de visualização, os participantes são um sujeito que olha e um objeto que é olhado, no entanto, no que diz respeito à matemática, o que se olha nunca é o objeto que se quer saber, mas o signo que está em seu lugar, isto é, o signo matemático com propriedades e relações. (SOTO, 2012, p. 23, tradução da autora)

Assim, temos uma relação entre sujeito e objeto (significante) com o signo (significado) que estabelece o conhecimento do objeto, ou seja, depende da participação desse signo, que são as propriedades do objeto as quais o sujeito deve apropriar-se para conhecer matematicamente o objeto de estudo. Porém, segundo Piaget, essas propriedades do objeto, o signo, só serão abstraídas pelo sujeito se ele for capaz de introduzi-las no objeto e entender esse processo, pela abstração pseudo-empírica.

Segundo Turgut e Uygan (2013), a capacidade espacial pode ser definida como uma habilidade relacionada à visualização e transformações de objetos mentais; essa transformação mental relaciona-se ao significado do objeto, acima dito como signos. Existe dois componentes da capacidade espacial: visualização espacial e orientação espacial. Visualização é a capacidade de representar e manipular mentalmente os objetos visuais, orientação é representar diferentes vistas

dos objetos de diferentes perspectivas na mente, incluindo a imaginação do movimento do corpo, do observador.

Para os psicólogos, ao quererem entender a cognição, o desenvolvimento cognitivo humano, um dos estudos relevantes é a visualização, também chamado como raciocínio visual, imaginação, pensamento espacial, imagens mentais. Assim, podemos perceber que a relação de visualização em desenhos e objetos espaciais está inserida em diversas ciências e situações diárias.

Para estudar o pensamento geométrico, muitos pesquisadores da área de educação matemática utilizam o termo “imagem mental” para a imagem de propriedades ou características retiradas de informações de um objeto ou figura; “visualização” ou “pensamento visual” é o raciocínio realizado sobre essas imagens mentais. Para os psicólogos cognitivos, o relacionamento que acontece entre a imagem mental e não mental que proporciona uma melhor compreensão dos conceitos, e essa relação ocorre no contexto da visualização (GUTIERREZ, 1996). A visualização, relacionando com a teoria de Piaget, está ligada com a experiência, com a ação e coordenação das ações do sujeito com os objetos visuais de conhecimento.

Neste caso, é considerada a visualização como o raciocínio (ações e coordenação de ações) baseado no uso de elementos visuais, mentais ou físicos (experiências com significantes), para resolver problemas ou definir propriedades (abstração reflexionante, do tipo pseudo-empíricas). A imagem mental é a representação cognitiva de um conceito ou propriedade por meio de elementos visuais (GUTIERREZ, 1996), o que para Soto (2012) é o signo e para Piaget ([1948] 1993) o significado.

A base da percepção visual é a imagem mental, a representação mental dos objetos, dos conceitos, das relações. Quando se visualiza algo novo, um conhecimento novo, acontece uma assimilação e para haver uma acomodação se modificam as estruturas mentais que já estão interiorizadas. Fazer uso dessa relação, do que já se tem construído, com o que se quer construir é a percepção visual. Para Piaget e Inhelder ([1948] 1993) a percepção é o conhecimento do objeto através de um contato direto, já a representação completa esse conhecimento com

outros conhecimentos relacionados, que não estão ali presentes nessa ação e sim nas estruturas cognitivas do sujeito.

Gutierrez (1991) traz um estudo das habilidades de visualização espacial. Classifica as imagens visuais como os objetos que são manipulados na atividade de visualização e essa manipulação é realizada pelos seguintes processos (BISHOP, 1983 apud GUTIERREZ, 1991):

- Processamento visual (VP): converte informações abstratas em imagens visuais ou transforma as imagens visuais em outras imagens.

- Interpretação de informação figurativa (IFI): compreende e interpreta representações visuais e extrai as informações que interessam.

As habilidades utilizadas pelos sujeitos para criar e processar as imagens mentais através da visualização e para a percepção visual estão organizadas no Quadro 1 e foi construída por Gutierrez (1996) após análise de diferentes pesquisadores da área.

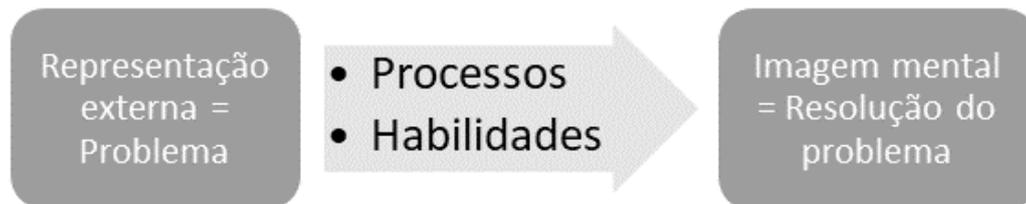
Quadro 1 – Descrição das habilidades da visualização espacial

Habilidade	Competência
Percepção figura – fundo	identificar uma figura isolando-a do fundo ou de outras
Constância perceptiva	reconhecer propriedades constantes de um objeto independente de seu tamanho, orientação, cor
Rotação mental	produzir imagens mentais dinâmicas e visualizar características em movimento
Percepção de posições espaciais	relacionar um objeto, imagem ou imagem mental para si mesmo
Percepção de relações espaciais	relacionar vários objetos, imagens e imagens mentais para o outro, ou simultaneamente para si mesmo
Discriminação visual	comparar objetos, imagens e imagens mentais para identificar semelhanças ou diferenças entre eles

Para Gutierrez (1996), a visualização (lembrando que é definida acima como o raciocínio, uma ação mental) tem quatro elementos essenciais: imagem mental, imagem visual, processos de visualização e habilidades de visualização. Um exemplo de como funciona a visualização para resolver um problema: a tarefa é uma representação externa, a imagem visual; essa representação externa inicia um

processo de raciocínio visual em que se utilizam algumas habilidades visuais para gerar uma imagem mental, os conceitos e propriedades que serão necessários para resolver o problema. Isso é ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Os elementos da visualização



Fonte: própria autora

Gutierrez (1998) afirma que, para compreender o conceito de representação plana de um objeto espacial é necessário passar por duas etapas: 1) interpretar uma figura plana para convertê-la em um objeto tridimensional e 2) interpretar este objeto como um objeto de estudo com conceitos matemáticos. Isso se relaciona com a capacidade de visão espacial dos estudantes e com sua habilidade de desenhar representações planas de objetos tridimensionais ou interpretar corretamente a representação de outras pessoas.

Há diferentes tipos de representação plana, projeção em perspectiva, paralela, isométrica, por níveis e ortogonal (codificada ou não). Uma representação ideal é aquela que transmite todas as informações que o sólido real apresenta, mas isso é utópico. Por isso é necessário compreender e saber representar todas elas, para que se possa escolher qual é a mais adequada para cada caso.

Existem diversas investigações matemáticas que estudam as habilidades de visualização espacial utilizando multicubos; trata-se de um sólido formado por pilhas de cubos iguais em que suas faces se sobrepõem. Nessas investigações, foi constatada a dificuldade dos estudantes de calcular a quantidade de cubos que tem nos módulos multicubos na projeção isométrica. Isso se deve a erros na interpretação das representações planas (GUTIERREZ, 1998). Esse erro leva muitas vezes a equívocos no momento de verificar, por exemplo, o volume desses sólidos.

Nessas investigações, percebeu-se que o uso de materiais manipulativos aumenta a capacidade dos estudantes de relacionar os corpos espaciais e suas representações planas (GUTIERREZ, 1998). É unânime entre os pesquisadores a importância de desenvolver essa habilidade; assim, a necessidade de potencializá-las desde os primeiros anos escolares, utilizando as duas etapas necessárias para a compreensão das representações planas citadas anteriormente.

Em relação a desenhar uma representação plana de um objeto tridimensional, Gutierrez (1998) também menciona a incapacidade de coordenação de muitos estudantes no momento de desenhar; eles demonstram consciência de que o seu desenho não está correto, pelas várias tentativas e também por se mostrarem insatisfeitos com sua representação. Ou seja, não há incompreensão dos aspectos do objeto tridimensional, mas sim uma dificuldade manual de representá-los. Nas conclusões do autor, quando um estudante não é capaz de realizar representações planas corretas, os professores devem evitar a utilização dessas representações para ensinar as propriedades dos objetos; nestes casos sugere-se que estes professores recorram a outras estratégias, como os computadores.

Nas duas seções desse capítulo, analisou-se o pensamento espacial, o desenvolvimento desse como também as habilidades relacionadas com ele. Assim, acredita-se que se tem um aporte teórico suficiente para construir atividades apropriadas que fazem o uso das tecnologias e que possam proporcionar ações e coordenações de ações dos sujeitos para que evoluem sua capacidade espacial.

4. TECNOLOGIAS PARA O PENSAMENTO GEOMÉTRICO ESPACIAL

Qual o papel das tecnologias hoje no ensino de matemática? Segundo Kaput, Hegedus e Lesh (2007) as tecnologias estão se infiltrando e transformando a matemática ao longo do tempo, acreditam em formas onipresentes da tecnologia nas escolas, melhor aprendizado, novo currículo e novas habilidades. Os autores utilizam o termo infraestrutura para o papel das tecnologias em relação à educação matemática. Lembra-se que infraestrutura se refere à base, a instalações e serviços necessários.

Sendo que infraestrutura passa a ser necessária e não mais opcional. Existem exemplos nos quais somente há soluções possíveis com o uso de tecnologias. Mesmo em casos em que a tecnologia pode ser conveniente, ela pode transformar-se em necessidade, basta obter novas práticas, ou seja, uma nova maneira de ensinar e aprender matemática.

Essas novas ferramentas tecnológicas estão evoluindo a matemática e essa nova matemática irá ser ferramenta para novas tecnologias que surgirão, formando um espiral de evolução.

Pesquisadores (TALL (1998), BASSO E NOTARE (2015), KAPUT, HEGEDUS E LESH (2007)) estão sugerindo o uso dos softwares para transferir cálculos e operações, ou seja, transferir habilidades operacionais para as máquinas. Diante disso, não se sabe o que fazer sobre as novas habilidades que esse fato pode proporcionar ou exigir. Segundo Kaput, Hegedus e Lesh (2007), a externalização e parceria com ferramentas para as operações possuem detalhes complexos e envolvem mudanças cognitivas e perceptivas.

É necessário aprender a trabalhar com esses recursos, ou melhor, é preciso desenvolver uma matemática diferente com a parceria desses, que podem construir novas capacidades. Deve-se pensar em um ensino de matemática que não poderia ser feito sem o uso das tecnologias.

Da mesma forma, os recursos tecnológicos podem estar relacionados às interações necessárias para a construção de conhecimento, concordando com a ideia de Shaffer e Clinton:

[...] ao discutir sobre o papel das tecnologias digitais no pensamento humano, sugerem que, assim como as ferramentas são exteriorizações de projetos humanos, os pensamentos são internalizações de nossas ações com ferramentas. Para estes autores, todos os pensamentos estão ligados a ferramentas, e todas as ferramentas estão ligadas aos pensamentos, um não existindo sem o outro. Dessa forma, eles propõem que devemos tratar as ferramentas e os pensamentos com o mesmo status, ou seja, não há ferramentas sem pensar, e não há pensamento sem ferramentas. (2006 *apud* NOTARE; BASSO, 2016, p. 2)

Observa-se que para Piaget, as ferramentas são oriundas das ações e coordenações do sujeito, elas só existem, só possuem significado com a interação dessas com os sujeitos. E essas ações e coordenações de ações vão modificando os pensamentos do sujeito, suas estruturas cognitivas. Não há ações e coordenações de ações sem pensar e não há pensamento sem ações e coordenações de ações.

Segundo Turgut e Uygan (2013), o pensamento espacial é fundamental para a compreensão e interpretação dos elementos geométricos e as habilidades para esse pensamento podem ser desenvolvidas utilizando ferramentas instrucionais, como materiais concretos e softwares de geometria. Os autores afirmam que as visualizações digitais proporcionam a chance de os alunos ver e analisar representações de conceitos abstratos. Além disso, apresentaram pesquisas nas quais o uso de softwares 3D foram suporte para a evolução de capacidades espaciais.

Entretanto, o uso dos recursos tecnológicos para desenvolver habilidades geométricas espaciais deve ser cauteloso, pois, de forma equivocada, pode trazer somente atalhos de soluções para os estudantes. Por outro lado, quando utilizamos de uma forma planejada, os recursos são capazes de evoluir o pensamento dos sujeitos, permite a eles que construam seus aprendizados através de suas ações. Por isso, nesta investigação será utilizada a fundamentação teórica anteriormente apresentada sobre o desenvolvimento do pensamento espacial e as habilidades para a construção de cada atividade.

Gutierrez (1991) já constatou que as atividades realizadas com corpos físicos foram mais fáceis para os estudantes, embora os benefícios cognitivos tenham sido inferiores. Isto atribui-se ao fato de o movimento no espaço real ser feito com muita rapidez, enquanto que no computador exigia uma reflexão sobre cada movimento realizado. Por exemplo, para planejar e coordenar as suas ações com antecedência,

como os giros e deslocamentos, os estudantes deveriam levar em consideração o plano coordenado no qual o objeto virtual estava inserido, isso elevava o desenvolvimento das habilidades de visualização espacial.

Considerando esses fatos, pretende-se verificar as potencialidades de software de geometria dinâmica e também o uso da impressão 3D na aprendizagem dos alunos do ensino médio, ou seja, sujeitos que devem apresentar comportamentos em um nível formal do desenvolvimento que, segundo Piaget, está sempre sujeito a evolução. Ao que segue, é apresentada uma análise em relação a essas duas tecnologias.

4.1 Geometria dinâmica: o software GeoGebra

Segundo Kaput, Hegedus e Lesh (2007) a geometria dinâmica surgiu por volta de 1980, mas continua impactando pesquisadores, alunos e professores sobre como esses ambientes permitem que os alunos construam seu próprio aprendizado.

Para ambientes de geometria dinâmica pode-se utilizar a definição de Jones, Mackrell e Stevenson (2010):

À primeira vista, um DGE [ambientes de geometria dinâmica] nada mais é do que um editor gráfico que permite desenhar figuras geométricas na tela do computador. No entanto, há mais do que isso, porque com um DGE, o usuário pode utilizar o mouse para 'agarrar' um elemento da figura na tela e arrastá-lo. Quando esse 'arrastamento' ocorre, o diagrama na tela muda de tal forma que as relações geométricas especificadas (ou implícitas) em sua construção são mantidas. Tais ambientes digitais são chamados de 'dinâmicos' por esse motivo. (JONES; MACKRELL; STEVENSON, 2010, p. 50, tradução da autora)

Pode-se considerar que a geometria é apresentada sob dois aspectos: a abstrata (teórica), relacionada a axiomas, conceitos e relações dissociados de experiências espaciais; e a geometria intuitiva (empírica), que está relacionada com conceitos e propriedades que estão relacionados com nosso cotidiano e também com nossa visualização e entendimento espacial. Segundo Laborde e outros (2006), esse ensino de geometria empírico versus teórico é objeto de discussão nos últimos anos desde 1960, o que levou a geometria a um papel problemático no seu ensino. Segundo esses autores, pesquisas viam a origem desse problema na falta de

exploração de conceitos de geometria associados a suas representações, que poderiam levar a significados matemáticos relevantes. Somente no fim da década de 1980 e início da década de 1990 que abordagens teóricas surgiram salientando a importância da junção desses dois lados da geometria.

Esses mesmos autores, trazem pesquisas relevantes que abordam a importância do figural e do conceitual na geometria, alegando que esses dois não podem ser dissociados, não é um processo breve de conhecimento, acontece por um longo processo de construção por parte dos alunos. As atividades que levam em consideração as propriedades gráficas espaciais podem originar uma atividade perceptiva do estudante e o ensino de geometria que não leva em consideração essa natureza dual da geometria obscurece o entendimento dos estudantes entre o espacial e o teórico (LABORDE *et. al*, 2006).

[...] resolver um problema de geometria vai além do reconhecimento visual das relações espaciais. É comumente assumido que o ensino de geometria deve contribuir para a aprendizagem de: (1) a distinção entre relações gráficas espaciais e relações geométricas teóricas, (2) o movimento entre objetos teóricos e sua representação espacial, (3) o reconhecimento de relações em um diagrama, (4) a capacidade de visualizar todos os diagramas possíveis ligados a um objeto geométrico. O segundo tipo de habilidade é particularmente crítico nos processos de resolução de alunos que se deparam com problemas de geometria que requerem exploração, nos quais um ciclo de interpretação, conjectura e prova pode ocorrer devido a essa flexibilidade entre representações espaciais e conhecimento teórico. Tais suposições sobre o ensino e aprendizagem da geometria levaram alguns pesquisadores a se concentrarem no papel das representações gráficas fornecidas pelos ambientes computacionais. (LABORDE *et. al*, 2006, p. 277, tradução da autora)

Atualmente a principal contribuição das tecnologias digitais no ensino e aprendizagem de matemática está ligada às representações gráficas dinâmicas, manipulativas e interativas. Os primeiros softwares de geometria dinâmica chegaram aproveitando o progresso das interfaces gráficas dos computadores, com o principal objetivo de fornecer um conjunto de imagens representando um conjunto de conceitos geométricos, assim, podendo perceber os aspectos gerais de um elemento estático através de uma variedade desses elementos. A teoria do construtivismo geralmente esteve ligada às pesquisas com esses softwares, destacando que a aprendizagem é construída pelo próprio estudante, havendo uma reconstrução da geometria (LABORDE *et. al*, 2006).

Para Notare e Basso (2016) com esses softwares foi possível tornar real objetos matemáticos na tela do computador com a possibilidade de manipulação e alteração de suas propriedades, surgindo uma nova forma de pensar e fazer matemática.

O desenvolvimento de sistemas dinâmicos voltados para a aprendizagem de Matemática tem possibilitado novas formas de tratamento para problemas, pela possibilidade de tornar acessíveis e manipuláveis objetos matemáticos que até então precisavam ser tratados de maneira estática e abstrata. (NOTARE; BASSO, 2016, p.2)

Os objetos construídos nestes softwares podem ser manipulados na tela do computador, esse desenho virtual, em movimento, revela as invariantes decorrentes da construção realizada, as propriedades do objeto implicadas com suas definições.

Os ambientes de geometria dinâmica possuem uma natureza exploratória, sendo considerados favoráveis à aprendizagem, pois exigem dos alunos ações para atingir certos objetivos, conforme a aplicação realizada no software. Explorando essas construções na tela, os alunos conseguem identificar características do objeto geométrico, esse processo demonstra que tais ferramentas se tornam extensões do próprio pensamento do aluno (LABORDE *et. al*, 2006; NOTARE; BASSO, 2016).

O papel da tecnologia nos processos de resolução dos estudantes é múltiplo: as ferramentas oferecidas pelo ambiente permitem estratégias dos alunos que não são possíveis no ambiente de papel e lápis, o significado da tarefa é fornecido pelo ambiente, o ambiente oferece um feedback das ações dos alunos (LABORDE *et. al*, 2006 , p. 293, tradução da autora).

Segundo Notare e Basso (2016) há um crescimento na utilização desses softwares para ensinar geometria, citam o uso do software GeoGebra, porém afirmam que o uso da versão 3D do mesmo software continua escasso.

Diversos estudos apontam para a importância de materiais manipulativos para apoiar a construção de imagens mentais. O uso de manipulações permite que os alunos possam experimentar suas ideias, analisar e refletir sobre elas, para modificá-las quando necessário. O uso apenas de desenhos para explorar a geometria espacial não é suficiente, pois desenhos estáticos no papel não representam objetos concretos e manipuláveis, ou seja, não é possível agir sobre o desenho de forma ampla e flexível, com o realismo necessário para apoiar a construção de imagens mentais adequadas. Nestas situações, acreditamos que o uso de construções em ambientes de geometria dinâmica pode auxiliar os alunos a construir imagens conceituais menos restritas. (NOTARE; BASSO, 2016, p. 4)

Quando se escolhe uma ferramenta tecnológica, deve-se planejar quais habilidades se quer desenvolver, em se tratando de softwares de geometria espacial, deve-se analisar os recursos disponíveis e preparar as atividades de acordo. Gutierrez (1991) traz um exemplo da diferença nos benefícios que uma mesma atividade em recursos computacionais diferentes pode oferecer: um dos softwares utilizados realiza a rotação dos objetos de uma forma contínua, através do movimento do mouse e o outro software realizava a rotação dos objetos da tela através de botões nos quais precisava indicar a direção do giro e também a amplitude, ou seja, o aluno deve planejar e refletir antecipadamente o movimento que pretende realizar. A ideia não é descartar o primeiro software mencionado, mas verificar quais as potencialidades do seu uso para outros tipos de atividades que almejam as habilidades apropriadas.

Para Gutierrez (1998) uma representação eficiente, ou seja, capaz de representar os conceitos e conhecimentos, tem um maior êxito para os estudantes compreenderem os objetos estudados. Uma representação muito complexa para os estudantes pode fazer surgir ideias equivocadas. Isso muitas vezes acontece com a representação de objetos tridimensionais no plano, situação inevitável quando se utilizam somente livros, quadro negro e cadernos.

De acordo com esse autor, em todas as representações de sólidos há perdas de informações, como a representação próxima do sólido utilizando material concreto como papel, madeira, perdemos, por exemplo, informações internas dos sólidos. Nas representações planas dos objetos tridimensionais, como na perspectiva, perdem-se as informações ocultas dos sólidos, por exemplo a altura de uma pirâmide reta. Esse fato é diferente utilizando uma representação virtual em um software de geometria dinâmica.

Notare e Basso apresentam dois problemas de geometria espacial, nos quais a geometria dinâmica 3D foi fundamental para a resolução das tarefas: “o ambiente de geometria dinâmica 3D é necessário para apoiar o pensamento geométrico espacial” (2016, p. 8).

Especificamente em relação ao software de geometria dinâmica escolhido para a investigação desta tese o GeoGebra 3D², trata-se de uma versão, que se pode dizer recente, disponibilizada em 2014. Mesmo originalmente sendo um

² Disponível em: www.geogebra.org. Acesso em: 08 fev. 2020

software de geometria dinâmica, hoje, se classifica como software de matemática dinâmica, pois apresenta não só recursos de geometria, mas também outros campos da matemática como álgebra e estatística.

Trata-se de um recurso de código aberto, disponível em vários idiomas, o que facilita o seu uso nas salas de aula, disponibiliza recursos para elaboração de materiais interativos de aprendizagem que podem ficar disponíveis como páginas web. Atualmente é um aplicativo disponibilizado para iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux, com recursos de calculadora gráfica e realidade aumentada.

Além do mais, no andamento desta pesquisa, os desenvolvedores do GeoGebra começaram a testar uma versão com configurações compatíveis com as impressoras 3D, que fazem uso de softwares de impressão que exigem arquivos com extensão, na maioria, STL (*stereolithography*). Portanto, tornando possível salvar o arquivo construído no GeoGebra em extensão STL. Assim, para os estudos desta tese, a autora da pesquisa teve acesso e fez uso da versão “teste” do programa e, atualmente, a versão do GeoGebra compatível com o formato STL está disponível para os usuários.

Assim, conhecendo as possibilidades do software GeoGebra e sua compatibilidade com a impressão 3D, no que segue, apresenta-se a pesquisa realizada sobre o uso da impressão tridimensional.

4.2 Impressão 3D

Segundo Laborde e outros (2006), é importante a transferência do ambiente do computador para o mundo fora do computador. Além do mais, como visto anteriormente, os softwares de geometria dinâmica podem proporcionar experiências positivas para trabalhar com conceitos de geometria, mas não se pode esquecer uma das características destas tecnologias: a visualização bidimensional, tanto da tela do computador quanto da operação com o mouse. Isso é um problema para representar e interagir com objetos geométricos tridimensionais (JONES, MACKRELL E STEVENSON, 2010).

Em relação a isso, essa proposta pretende verificar as possibilidades de tornar os objetos virtuais, ricos em propriedades e conceitos matemáticos e criados no ambiente de geometria dinâmica, em objetos físicos, que os alunos, os próprios criadores desses objetos virtuais, poderão tocar, através da impressão 3D.

Com o objeto a ser impresso, espera-se que os alunos considerem suas características físicas, as quais têm origem em propriedades matemáticas que somente farão parte do seu protótipo pelo pensamento espacial do aluno. Ou seja, imprimir um objeto concordando com as necessidades exigidas depende de ações e coordenações de ações dos estudantes com os objetos virtuais.

Segundo Canessa (2013), a impressão 3D foi desenvolvida na década de 1980 para a área industrial, pois era de alto custo. A expansão dessa tecnologia deve-se à nova tecnologia desenvolvida, a impressão de objetos camada por camada por plástico derretido (FDM- *Fused Deposition Modeling*), o código aberto e o compartilhamento gratuito de arquivos pela internet. Nos últimos anos o preço das impressoras 3D caiu mais de 10 vezes (HULEIHIL, 2017). Para Canessa (2013), a impressão tridimensional de baixo custo está amadurecendo e com um potencial ilimitado para produzir objetos em diversas áreas, como na arqueologia, na matemática, na medicina. Ou seja, para o autor, esta tecnologia tem um futuro promissor para a ciência, educação e sustentabilidade. Para Knill e Slavkovsky (2013), a prototipagem rápida pertence à “terceira revolução industrial” na qual a fabricação é digital, pessoal e acessível.

As impressoras 3D tornaram-se mais populares e descentralizadas dos ambientes industriais pela rede FabLab, que trata de espaços abertos em que, indiferente da profissão, experiência ou idade, qualquer pessoa pode usufruir e contribuir com seus conhecimentos e projetos de forma coletiva. Neste espaço se tem acesso amplo a meios modernos de invenção e de prototipagem incluindo impressoras 3D. Essa rede foi criada há 13 anos pelo professor Neil Gershenfeld do *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), cujo o objetivo era de que os seus alunos criassem produtos com benefícios próprios, sem fins comerciais, com a ideia de criar qualquer coisa. Hoje essa rede, colaborativa e global, conta com mais de 1293 FabLab's em 30 países, somente aqui no Brasil temos 49 FabLab's (em agosto de 2018). Essa é uma opção para professores entusiasmados pela experiência aqui apresentada a utilizarem esse recurso, se as escolas em que estiverem inseridos

não puderem adquirir. Pois grande parte dos FabLab's recebem turmas de alunos de outras instituições de ensino.

As impressoras 3D produzem objetos usando filamentos feitos de plástico PLA biodegradável (ácido polilático), um material ecologicamente correto derivado do amido de milho, ou polímero ABS (acrilonitrila butadieno estireno) derivado de combustíveis fósseis. Algumas impressoras podem imprimir seus próprios componentes (*hardware opensource*), tornando-as mais autônomas e acessíveis. O custo de PLA hoje é de cerca de 30 US\$/Kg e um quilograma é suficiente para criar uma dúzia ou mais de pequenos objetos. O custo de impressoras 3D dessa nova geração baseadas em *hardware opensource* varia de 300 a 1.500 dólares (CANESSA, 2013).

Da educação à saúde, da arqueologia à engenharia, as impressoras 3D já estão causando muitos impactos práticos em todo o mundo. Elas vão desde a produção de próteses em qualquer instante ou lugar (pernas, braços, mãos, etc. personalizados para ensinar aos estudiosos sobre o corpo humano), para imprimir células da pele diretamente em uma ferida ou para imprimir molduras para óculos (que quebram mais frequentemente do que as lentes).

Na frente da educação, os cientistas podem imprimir objetos 3D com base em fórmulas geométricas para visualizar melhor as estruturas complexas. (CANESSA, 2013, p. 16, tradução da autora)

Segundo Bicer e outros (2017), a modelagem com software 3D para projetar e imprimir produtos pode melhorar as habilidades de visualização espacial, criatividade e habilidades de resolução de problemas dos alunos. Os autores também afirmam que pesquisas sobre o efeito desse uso permanece limitado, salientando que o uso dos softwares 3D na sala de aula ganhou um forte aliado com as impressoras.

Experiências com o software CAD (Desenho Assistido por Computador) e impressão 3D, se bem estruturadas, podem desenvolver a criatividade e habilidades visuo-espaciais dos alunos. O software CAD e a impressão 3D tornaram-se recentemente populares e mais amplamente disponíveis nas salas de aula do ensino secundário como um meio em que os alunos podem demonstrar facilmente a sua criatividade.

Criatividade foi identificada como uma das habilidades mais desejadas por empregadores em potencial e listada como uma habilidade crucial do século 21. (BICER *et. al*, 2017, p. 2, tradução da autora)

Para os mesmos autores, Bicer e outros (2017), a metodologia com a impressão 3D pode possibilitar aos estudantes os seguintes conhecimentos: 1)

escala, incluindo conhecimentos de álgebra, 2) consciência espacial, medição, incluindo volume, área e dimensões lineares, 3) princípios de projeto de engenharia, 4) vocabulário específico e 5) conhecimento de tecnologia.

Já para Huleihil (2017) esse tipo de impressão requer diferentes habilidades, incluindo de matemática, geometria, resolução de problemas, imaginação, inovação, design, ciência dos materiais e processos de produção. Para ele, colocá-los juntos é desafiante, ao mesmo tempo motivador para os estudantes.

O capítulo quatro apresentou um suporte tecnológico para a nossa metodologia, de acordo com as pesquisas encontradas, os recursos tecnológicos escolhidos, a junção do software GeoGebra e da impressora 3D, são apropriados para alcançar os objetivos dessa pesquisa. O próximo capítulo fará um rastreamento de pesquisas que estão utilizando tecnologias para o pensamento espacial.

5. O ESTADO DA ARTE DESTA PESQUISA

Uma Revisão Sistemática é uma técnica de pesquisa que segue uma metodologia bem definida com os passos documentados para que passe confiabilidade. Tem como objetivo identificar, avaliar e interpretar pesquisas relevantes sobre uma questão de pesquisa específica para identificar estudos futuros ou verificar o estado da arte para se desenvolver uma pesquisa relacionado à questão (SOUZA; CANALLI, 2014).

São descritas a seguir as etapas e decisões tomadas para essa revisão. Primeiramente, verificou-se a necessidade de realizar a revisão pois constatou-se, dos mesmos sistemas de busca que serão apresentados a seguir, que não há uma revisão sistemática que revisa as pesquisas em relação ao potencial das tecnologias para o desenvolvimento das habilidades geométricas espaciais.

Diante da questão de pesquisa que está sendo investigada nesta proposta e da fundamentação teórica anteriormente apresentada, o foco é buscar estudos relacionados com a seguinte questão de pesquisa: **Qual o panorama atual de pesquisas que envolvem o uso das tecnologias para o desenvolvimento do pensamento geométrico espacial?**

Baseado nessa questão principal, outras questões específicas foram propostas para serem investigadas:

- Quais tecnologias digitais estão sendo aplicadas para o pensamento geométrico espacial?
- Como essas tecnologias estão sendo utilizadas?
- Quais habilidades da geometria espacial pretendeu-se desenvolver?
- Quais aportes teóricos foram utilizados para as análises?

Com essas questões, se buscou palavras-chaves que estivessem relacionadas com cada uma das questões, organizadas em três grandes áreas da questão principal, apresentados no quadro que segue (escritas em português e inglês, pois foram utilizados banco de dados internacionais). A combinação destas

palavras e seus sinônimos formaram nossa *string* de busca, apresentada no Quadro 2.

Quadro 2 - Palavras para *string* de busca

ÁREA	PALAVRAS E SEUS SINÔNIMOS	
Geometria Espacial	“Geometria espacial” OU “Tridimensional” OU Espaço	“Spatial geometry” OR “Three-dimensional” OR Space
Habilidades Cognitivas	“Visualização espacial” OU “Treinamento de habilidade espacial” OU “Habilidades espaciais” OU “Pensamento geométrico espacial” OU “Percepção espacial” OU “Imaginação espacial”	“Spatial visualization” OR “Spatial ability training” OR “Space skills” OR “Spatial geometric thinking” OR “Spatial perception” OR “Space imagination”
Tecnologias Digitais	“Software 3D” OU “Software de modelagem 3D” OU “Geometria dinâmica” OU “Objetos de aprendizagem” OU Tecnologias OU “Realidade aumentada” OU “Impressão 3D” OU Estereoscópica OU “Recursos de computador”	“3d software” OR “3D modelling software” OR “Dynamic geometry” OR “Learning objects” OR Technologies OR “Augmented reality” OR “3D printing” OR Stereoscopy OR “Computer resources”

A definição dos parâmetros da pesquisa restringiu-se a buscar periódicos, entre artigos e anais de eventos disponibilizados nos bancos de busca: *Scopus*, *Springer*, *Web of Science*, *Scielo* e na revista *Renote*, desta instituição. Inserindo as *strings* de busca foram encontradas 1475 pesquisas. Nas buscas no *Scielo* e na *Renote*, não foi possível inserir todas as palavras da *string* por causa da quantidade de caracteres possíveis de serem digitados no campo de busca, assim, utilizamos somente as áreas da Geometria Espacial e das Tecnologias, em relação às habilidades cognitivas, a seleção foi feita pelos outros passos da busca. A figura que segue (Figura 2) é um exemplo da colocação da *string* em um dos bancos de busca utilizados.

Figura 2 – Exemplo da *string* nos bancos de busca

Fonte: da própria autora

Os critérios de inclusão foram que as pesquisas deveriam estar na língua inglesa, espanhola ou portuguesa e os textos deveriam estar disponíveis integralmente na rede online.

E os critérios de exclusão foram os seguintes: estudos explicitamente não relacionados ao tema (área da física, saúde, engenharia, arquitetura, mecânica), o público alvo não estar definido como sujeitos do ensino básico ou nessa faixa etária e trabalhos duplicados. Alguns desses critérios puderam ser aplicados no próprio sistema de busca e outros somente na leitura dos títulos, resumo ou até mesmo na leitura completa.

A seleção dos estudos foi um processo de quatro etapas, ilustrada na Figura 3: seleção do título, seleção pelo resumo, leitura completa e análise dos dados. Das 1475 pesquisas encontradas, após alguns critérios de inclusão/exclusão que se podia realizar pelo próprio sistema de busca, foi necessária a leitura de 349 resumos para se chegar em 18 pesquisas que seguiram para a terceira etapa, a leitura completa da produção. Após a leitura completa das publicações, mais 9 artigos foram descartados seguindo os critérios de exclusão.

Figura 3 – Sequência da revisão sistemática



Fonte: da própria autora

Após a exclusão de trabalhos envolvendo alunos do ensino superior, por exemplo dos cursos de engenharia e arquitetura, nos quais se enfatiza a importância da visualização e percepção espacial, é finalizada a busca com a análise de nove pesquisas. No que segue, apresentamos no Quadro 3 os dados principais de cada uma delas, entre título, ano e local de publicação.

Quadro 3 – Trabalhos analisados na revisão sistemática

Título	Autores	Ano	Local	Fonte de publicação
The Hologram in My Hand: How Effective is Interactive Exploration of 3D Visualizations in Immersive Tangible Augmented Reality?	Benjamin Bach, Ronell Sicat, Johanna Beyer, Maxime Cordeil e Hanspeter Pfister	2018	USA	IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics
Moving from STEM to STEAM: The Effects of Informal STEM Learning on Students' Creativity and Problem Solving Skills with 3D Printing	Ali Bicer, Sandra B. Nite, Robert M. Capraro, Luciana R. Barroso, Mary M. Capraro, and Yujin Lee	2017	Texas/USA	IEEE
Visual Science and STEM-based 6-12 education	Aaron Clark e Jeremy Ernst	2008	Carolina do Norte/USA	American Society for Engineering Education
3D printing technology as innovative tool for math and geometry teaching applications	M Huleihil	2017	Israel	IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering
The influence of visual and spatial reasoning in interpreting simulated 3d worlds	Tom Lowrie	2002	Austrália	International Journal of Computers for Mathematical Learning
Usando Smartphone e Realidade aumentada para estudar Geometria espacial	Alex de Cassio Macedo, João Assumpção da Silva e Tiago Martinuzzi Buriol	2016	Paraná/BR	Renote
GeoGebra: Towards realizing 21st century learning in Mathematics education	Khor Mui, K., & Ruzlan Md-Ali	2017	Malásia	Malaysian Journal of Learning and Instruction
The effects of 3D-representation instruction on composite-solid surface-area learning for	Yao-Ting Sung, Pao-Chen Shih, Kuo-En Chang	2014	Taiwan	Springer Science

elementary school students				
Evaluation by Experts and Designated Users on the Learning Strategy using SketchUp Make for Elevating Visual Spatial Skills and Geometry Thinking	Rohani Abd Wahab, Abdul Halim Abdullah, Mahani Mokhtar, Noor Azean Atan, Mohd Salleh Abu	2017	Malásia	Bolema

A seguir, é apresentada a análise de cada uma dessas investigações, referente à questão principal que norteou essa revisão, como também às questões específicas citadas anteriormente.

Huleihil (2017) utiliza a impressora 3D e software CAD (Desenho Assistido pelo Computador) para construir sólidos, sendo esse software pago, mas muito utilizado por engenheiros, arquitetos, design e uma variedade de outros profissionais. O pesquisador acredita na metodologia STEM (Ciências, Tecnologia, Engenharia e Matemática), método de ensino muito utilizado nos Estados Unidos, na qual as disciplinas são integradas e também o ensino baseado em projetos. Sua proposta didática destina-se a alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, mas na publicação desse artigo essa aplicação ainda não havia sido realizada. Essa proposta é constituída por três etapas: desenho no papel, desenho no CAD e posteriormente a impressão 3D. Cada uma dessas etapas tem sub etapas em que as habilidades são desenvolvidas e também conhecimentos de diferentes disciplinas são construídos. Afirma que a impressão 3D na sala de aula motiva os estudantes, é capaz de elevar sua imaginação e ajuda os alunos a aumentar sua intuição espacial. Além disso, os alunos devem avaliar o custo de fabricação e entender a necessidade de otimização. O projeto em papel e os recursos e ferramentas dos sistemas CAD permitem ensinar conceitos e habilidades matemáticas através da construção e modelagem geométrica em duas e três dimensões. A impressão do objeto projetado possibilita a compreensão e a avaliação do projeto por meio da verificação do produto. Os conteúdos de geometria espacial desenvolvidos na sua experiência acontecem no desenho com projeções, diferentes vistas, perspectivas e no software CAD com o fornecimento dos resultados de área e volume dos sólidos construídos.

Outros pesquisadores, Bicer et al. (2017), também usam as tecnologias CAD e impressora 3D baseados na metodologia STEM de ensino, mas sua proposta difere da anterior, enfatizando muito o uso dessas tecnologias para despertar a criatividade e habilidades para a resolução de problemas. Bicer e outros, propõem a 95 estudantes do ensino médio do Texas, em duas semanas de acampamento de verão, a projetarem um objeto físico, depois de orientados sobre o uso dessas tecnologias. Os autores enfatizam o desenvolvimento da criatividade e a habilidade de visuo-espacial, muito importantes para a resolução de problemas, necessário para as carreiras STEM, "É possível reduzir a carga na memória de trabalho dos alunos usando software CAD e a impressão 3D para que eles possam dedicar mais capacidade intelectual à criação de ideias e produtos originais". Esses autores analisaram com mais detalhes os conteúdos contemplados com essa proposta, entre elas temas: escala, consciência espacial, medição, incluindo volume, área e dimensões lineares e vocabulário apropriado de matemática.

Em uma escola de Taiwan, num grupo de estudantes do 5º ano, Yao-Ting Sung, Pao-Chen Shih, Kuo-En Chang (2014) aplicaram um sistema de ensino utilizando o software Google SketchUp para trabalhar com cálculo de área de sólidos compostos. Para suas análises, os autores utilizam pré-teste e pós-teste e comparação de um grupo de controle, que recebeu instruções tradicionais com um grupo experimental que recebeu instruções pela tecnologia, envolvendo principalmente as múltiplas visualizações possibilitadas pelo uso do software, os autores chegaram em muitas conclusões, algumas já registradas por pesquisadores anteriores. Os objetivos do estudo eram: verificar se há diferença em desenvolvimento cognitivo dos alunos que receberam instruções pelo sistema digital, se há diferenças de habilidades em relação ao gênero dos estudantes, se há diferenças nas atitudes perante o estudo de matemática com o uso da tecnologia e se os efeitos do sistema digital são moderados pelas habilidades ou gênero. Os autores ainda dizem que é muito difícil para os alunos converterem visões bidimensionais em tridimensionais. Utilizam principalmente as ideias de Piaget e Van Hiele, salientando que os alunos do Ensino Fundamental encontram-se no estágio operatório concreto, que precisam de características físicas para aprender, ou seja, se uma representação não é realmente concreta, os alunos estão propensos a ter dificuldades de aprendizagem. Em relação à composição de sólidos, os autores

salientam que o uso de material concreto traz benefícios limitados pois não abrange a variedade de composições possibilitadas pela tecnologia digital: “[...] manipular simplesmente os cubos físicos não é suficiente para que as crianças representem as formas do sólido básico a partir de diferentes perspectivas para estruturação espacial, nem pode ilustrar as relações entre cubos que constroem o sólido básico em diferentes vistas ortogonais para coordenação.” (p. 118). As múltiplas representações do software contêm informações complementares para apoiar processos cognitivos, ou vincular essas representações para construir uma compreensão mais completa ou mais profunda de sólidos compostos.

Wahab (2017) também utilizou o software Google Sketchup e desenvolveu um material didático que elevasse as habilidades espaciais e os níveis de pensamento geométrico de Van Hiele, que consistem em quatro componentes: saber girar, visualizar, transformar e cortar mentalmente. O artigo trata da validação desse material, que foi analisado por especialistas, dois alunos que avaliaram as instruções e posteriormente a aplicação com pré e pós teste em 24 alunos. O autor percebeu no pós-teste que os alunos levaram menos tempo para solucionar as tarefas e também que movimentaram as mãos como se estivessem manipulando os objetos no software, além do melhor rendimento nas respostas.

Inclui-se aqui uma pesquisa em que os sujeitos não se enquadravam no público dos critérios estabelecidos, não tinha um público específico, os participantes da pesquisa foram escolhidos aleatoriamente, por isso não foi excluída perante os critérios de exclusão da revisão sistemática. Os autores dessa pesquisa, Bach et al. (2018), comparam três tipos de tecnologia: realidade aumentada imersiva, realidade aumentada com smartphone e o uso de telas Desktop tradicional em relação à percepção estereoscópica, liberdade para interação e proximidade dos espaços físicos para visualização. Utilizaram como teste nuvens de pontos e 15 sujeitos resolveram diversas atividades de percepção espacial. Foram analisados o tempo de conclusão das tarefas e também os erros. Chegaram nas seguintes conclusões: que o ambiente de desktop oferece precisão, velocidade e familiaridade superiores na maioria das tarefas que foram propostas.

Khor Mui e Ruzlan Md-Ali (2017) da Malásia estudam a aplicação do guia Diretrizes para usar Software de Geometria Dinâmica GeoGebra na aprendizagem

da forma e espaço³, construído pelos próprios autores baseados na aprendizagem do Século 21. Para tanto, é necessário considerar as habilidades exigidas neste tempo, no baixo desempenho dos estudantes, principalmente em atividades que exigem aplicação dos conceitos em problemas, raciocínio e criatividade e também nos seus estudos sobre as potencialidades do software GeoGebra. Numa metodologia quasi-experimental, 102 alunos divididos em dois grupos experimental e um grupo de controle, professores treinados pelos pesquisadores a aplicar o guia, chegam a conclusões mais focadas no despertar do interesse e envolvimento dos alunos em virtude do uso das tecnologias, e não nas contribuições desses para o desenvolvimento de habilidades cognitivas.

Clark e Ernst (2008) constroem um recurso tecnológico próprio para desenvolver habilidades visuais, os quais pretendiam que os alunos desenvolvessem conceitos com imagens estáticas ou dinâmicas. Os autores alegam que a capacidade dos estudantes em visualizar objetos tridimensionais rotacionados é essencial para entender e interpretar informações científicas, tecnológicas e matemáticas. Acreditam que com materiais baseados na visualização bem implementados podem contribuir com as habilidades visuais. Para verificar a eficácia desse recurso, foi realizado como pré e pós teste o Teste de Visualização *Purdue*, com 879 alunos de 14 professores que foram antecipadamente treinados. A faixa etária dos estudantes encontrava-se entre 6 a 12 anos. Nestes testes verificou-se um aumento nas habilidades visuais, salientado essa melhora nos alunos do sexo masculino. Nas conclusões desse trabalho, verificaram que são necessárias mais pesquisas sobre como desenvolver bons materiais com base na visualização, bem como aumentar a habilidade visual do aluno em todos os níveis e também, verificar a influência da mídia visual com a qual os alunos interagem diariamente para ver como as informações dessas mídias podem ser aproveitadas para melhorar as habilidades visuais.

Lowrie (2002) analisa como crianças pequenas se envolvem em ambientes de aprendizagem altamente visuais e relata um estudo que destaca as dificuldades de algumas crianças pequenas ao tentar interpretar imagens 3D em uma tela de computador. O autor relata que um software apropriado pode se tornar uma ferramenta poderosa no qual as crianças podem manipular objetos espaciais e

3 Título original: "Guidelines for Using GeoGebra Dynamic Geometry Software in the Learning of Shape and Space"

construir imagens visuais que normalmente seriam limitadas por suas capacidades de desenvolvimento. Doze crianças de seis anos foram convidadas a solucionar um problema que envolvia seus entendimentos espaciais na tela do computador. Com esta atividade verificaram que as crianças apresentavam dificuldade de relacionar os ambientes 3D da tela do computador, ou seja, representados bidimensionalmente, em ambientes reais, com profundidade. Os autores relacionaram esses resultados com anteriores realizados com fotografias. As ferramentas digitais disponibilizadas para essas crianças não permitiam a visualização, a rotação dos objetos, ou seja, eram imagens estáticas.

Publicado na revista RENOTE, Macedo, Silva e Buriol (2016), descrevem a criação e implementação de um aplicativo para smartphone com Realidade Aumentada que dá suporte para um material impresso também criado pelos autores sobre Pirâmides, suas características, elementos, planificação, área e volume. As figuras do material impresso, podem ser projetadas em realidade aumentada, facilitando a visualização desse sólido. Os autores dizem que "[...] o fazer matemático através do uso das tecnologias deve provocar certa reflexão, e, sobretudo a organização consciente do conhecimento" (p. 2). Da mesma maneira, afirmam que no mundo virtual podemos criar formas que até então só estavam disponíveis na nossa imaginação. Após aplicação do experimento, os autores concluíram que os alunos se mostraram receptivos quanto ao uso de dispositivos móveis, a RA contribuiu na motivação e interação dos alunos com relação ao conteúdo da aula e alunos reconheceram como uma ferramenta eficiente na visualização de objetos 3D, e isso contribuiu para a aprendizagem do conteúdo abordado.

Percebe-se que é comum a todos os autores que as tecnologias digitais podem trazer benefícios para o ensino e aprendizagem da geometria espacial, principalmente a aspectos relacionados com a visualização de objetos tridimensionais. Há o uso de diferentes tecnologias: software de geometria dinâmica, software de modelagem 3D, impressora 3D, realidade virtual e aumentada, Google SketchUp e até aplicativos construídos pelos próprios pesquisadores, todos visando a visualização de objetos espaciais.

Algumas pesquisas salientaram mais a preocupação em relação à construção de conhecimentos, outras mostraram o uso como uma ferramenta puramente para

aspectos de imagens visuais, também utilizada como um recurso motivacional para os estudantes, como uma ferramenta para produção de projetos e resolução de problemas, assim contemplando outras habilidades. Alguns autores, como se pôde perceber, não revelaram com clareza a fundamentação teórica utilizada para analisar os aspectos cognitivos da pesquisa, as que evidenciaram foram destacadas nas análises aqui apresentadas.

Com esta revisão sistemática percebeu-se que se tem à disposição diferentes tecnologias que podem ser utilizadas em prol do pensamento geométrico, ou seja, recursos que podem desencadear ações e coordenações de ações dos sujeitos sobre objetos de estudo. Lembrando que Piaget ([1948] 1993) salienta a importância das experimentações para a construção do pensamento espacial.

Notou-se também que as potencialidades dessas tecnologias são vastas e que as pesquisas não esgotaram as possibilidades de uso em relação ao pensamento geométrico.

Retomando a questão de pesquisa da revisão: Qual o panorama atual de pesquisas que envolvem o uso das tecnologias para o desenvolvimento do pensamento geométrico espacial no ensino básico?, verificou-se uma carência de pesquisas divulgadas no cenário de publicações internacionais que contemplam e visam o desenvolvimento do pensamento geométrico com a tecnologia em estudantes do ensino básico.

Segundo Notare e Basso (2016), recentemente houve um pequeno progresso no reconhecimento da importância do ensino de geometria no ensino básico, isso se nota na quantidade de produções de trabalhos acadêmicos desenvolvidos, mas apresenta-se uma quantidade escassa de trabalhos destinados à geometria tridimensional. Afirmam que, como tem-se muitas pesquisas que mostram a importância do uso da geometria dinâmica para o ensino de geometria plana, necessita-se também verificar seus impactos para a aprendizagem de geometria espacial. Esse fato também é afirmado por Jones, Mackrell e Stevenson (2010), que defendem mais estudos sistemáticos sobre o uso de softwares de geometria dinâmica 3D, afim de entender o comportamento dos alunos perante esses softwares.

Da mesma forma, observam-se duas pesquisas que utilizam software de modelagem comercial juntamente com a impressão 3D, mas as duas propostas estão mais relacionadas a metodologias que envolvem capacidades de resolução de problemas, liderança, criatividade e autonomia.

Diante dessa análise de revisão sistemática, verifica-se a carência da investigação que aqui é proposta e seu ineditismo em relação à compreensão do desenvolvimento do pensamento espacial perante as ações e coordenações de ações que as tecnologias digitais, geometria dinâmica interligada com a impressão 3D, podem proporcionar.

Essa revisão sistemática foi realizada no primeiro semestre de 2018 e publicada pela autora e seu orientador na revista *Renote* sob o título: *Prospecção de Pesquisas sobre o uso de Tecnologias Digitais para o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico Espacial* (MONZON; BASSO, v. 16, n. 1, 2018).

6. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A tese aqui apresentada trata de uma investigação com abordagem qualitativa com o objetivo descritivo em uma modalidade de estudo de casos múltiplos.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), na pesquisa qualitativa os investigadores não estão preocupados em responder questões prévias ou testar hipóteses, mas sim, em compreender os comportamentos dos participantes diante do tema da investigação, sendo que o contato é próximo com os indivíduos e no seu ambiente natural. Em uma pesquisa descritiva, os dados produzidos são em palavras ou imagens e não em números, também trata-se de uma pesquisa indutiva, onde a análise é feita com a junção de cada dado produzido ao longo da investigação, na totalidade.

A metodologia é qualitativa e de casos múltiplos pois trata de uma experiência que não é numérica e sim, estuda o desenvolvimento do pensamento de cada indivíduo participante, com um mesmo foco, mas levando em consideração as características únicas de cada indivíduo. Também se passa no ambiente natural dos participantes da investigação, pois acontece em uma disciplina do ensino médio a qual os participantes estão cursando. O estudo de casos múltiplos trata da observação detalhada de indivíduos em relação à temática da investigação.

A pesquisadora foi o elemento mediador de cada atividade proposta e o instrumento principal da investigação qualitativa, na qual analisou os passos, as dúvidas, as certezas e conclusões dos participantes ao longo das tarefas propostas. Estava presente como professora para os participantes, não a professora titular da disciplina pertencente à escola, mas sim, professora responsável pelo andamento da disciplina, fazendo parte da experiência. Possibilitando assim diversas observações e questionamentos para os participantes nos momentos apropriados, com o intuito de analisar o pensamento, as ações e coordenações de ações.

Os resultados de cada atividade proposta não foram considerados isolados, mas sim, através dos registros e observações da pesquisadora, foram analisados juntamente com as estratégias utilizadas, as estruturas mentais já construídas do indivíduo, a manipulação dos objetos nas ferramentas, as conversas e as dúvidas

que surgiram, ou seja, a pesquisadora observou e acompanhou o desenvolvimento do pensamento dos alunos perante cada resolução, interessando os processos e não os resultados. A análise dos dados foi realizada de forma indutiva, sendo os dados recolhidos e agrupados aos poucos para que se obtivesse uma interpretação na sua totalidade.

A interação dos participantes com os ambientes digitais também foi indispensável nas análises dessa pesquisa, visto que interessa à pesquisadora como essas ferramentas estão desencadeando os pensamentos dos indivíduos.

6.1 A produção dos dados e o método clínico

Uma das estratégias da investigação qualitativa é a entrevista em profundidade, que se caracteriza em não ser estruturada, mas aberta e não diretiva. O seu objetivo é conhecer com bastante detalhes o indivíduo entrevistado dentro do tema de interesse (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Para isso, na linha da teoria piagetiana, a entrevista em profundidade na investigação qualitativa será baseada no método clínico de Piaget. O objetivo desse método, segundo Delval (2002), é descobrir o pensamento que o participante não tem explícito, se constituindo em uma sucessão de intervenções do experimentador em resposta a cada ação desse indivíduo, descobrir o que, quando e como aconteciam mudanças nos seus pensamentos. É um procedimento de coleta e análise de dados para estudar o pensamento mediante entrevistas abertas, que podem vir acompanhadas de uma experiência e que buscam compreender o curso de pensamento do entrevistado.

No desenvolvimento da teoria de Piaget, no terceiro período, houve a necessidade de criar experiências físicas para gerar situações nas quais era preciso colocar em ação o pensamento do sujeito em relação à determinada operação que pode ou não ter sido interiorizada. Assim, tratando-se de problemas concretos e de situações práticas, Piaget se apoia em um material, na ação do sujeito e o que o sujeito diz. No caso da presente investigação, o material será disponibilizado pelas tecnologias digitais.

O método clínico é um procedimento para investigar como os sujeitos pensam, percebem, agem e sentem, que procura descobrir o que não é evidente no que os sujeitos fazem ou dizem, o que está por trás da aparência de sua conduta, seja em ações ou palavras (DELVAL, 2002, p. 67).

Dessa forma, os recursos digitais podem servir para uma experiência em que colocamos um indivíduo em ação diante do conhecimento a ser investigado. Piaget, ao verificar sobre situações concretas da realidade, utilizava materiais manipulativos. Com os recursos tecnológicos é possível não só verificar o pensamento diante de situações concretas em relação ao pensamento matemático, como também generalizações mentais diante de situações virtuais, impossíveis de serem construídas no ambiente real.

As experiências são atividades que exigem a manipulação, visualização e interação dos participantes e objetos espaciais em ambientes digitais, softwares de geometria dinâmica e finalizando com a impressão de objetos tridimensionais. O ambiente em que isso ocorreu foi no laboratório de informática da escola. A construção dessas atividades levou em conta um estudo amplo sobre as habilidades espaciais e o desenvolvimento do pensamento espacial, discutidas no capítulo três.

As principais características do método clínico de Piaget, que a pesquisadora considerou para a elaboração das atividades e nas perguntas que foram feitas aos alunos, como entrevistadora e pesquisadora são: cada pergunta é elaborada de acordo com a ação ou resposta anterior do aluno; as tentativas e os erros também são considerados nas análises; as contra argumentações são importantes para que os indivíduos afirmem e reafirmem seu pensamento, ou até mesmo o modifiquem; cada ação exige uma pergunta da pesquisadora para que explique o motivo daquela ação; nenhuma pergunta deve sugerir uma resposta e uma mesma pergunta pode ser feita mais de uma vez de uma outra maneira.

A pesquisadora, que foi uma observadora participante da investigação, percorreu o tempo todo entre os alunos, fazendo registro dos seus questionamentos (baseado no método clínico), dúvidas dos alunos e de seus comentários em relação ao desenvolvimento das tarefas. Os participantes também tiveram um questionário a ser respondido sobre cada atividade proposta, a qual chamamos de Questões Auxiliares, essas perguntas tinham a pretensão de entender o raciocínio do sujeito, sobre cada atividade desenvolvida, igualmente inspiradas nos princípios do método

clínico. As Questões Auxiliares foram construídas com a pretensão de não ter respostas certas ou erradas, ou respostas sobre resultados e sim, sobre o andamento da resolução, como o pensamento do aluno está sendo construído.

No início da investigação, percebeu-se uma dificuldade de aproximação com os participantes, os sujeitos estavam fechados para a pesquisadora e os diálogos não fluíam suficientemente para entender seus pensamentos e as decisões tomadas diante de cada resolução. Os participantes da pesquisa envolviam-se nas resoluções dos problemas, respondiam às Questões Auxiliares, mas não interagiam de forma significativa com a pesquisadora.

Diante disso, percebeu-se que seriam necessários mais elementos para as análises: o material produzido pelos alunos no software, os sólidos impressos, as respostas das Questões Auxiliares estavam se mostrando com poucos indícios para uma análise profunda sobre o desenvolvimento do pensamento espacial dos sujeitos da investigação.

Assim, no andamento da proposta, decidiu-se aplicar menos atividades e reservar alguns dias disponíveis para uma entrevista individual com cada participante. Como era inviável uma entrevista sobre cada uma das atividades, decidiu-se que cada participante iria ficar responsável por uma das atividades e, em data marcada, apresentar suas soluções para a professora/pesquisadora e para os demais colegas. Com isso, a pesquisadora teve a oportunidade de elaborar mais perguntas, propondo contra argumentações para os participantes refletirem sobre seus resultados, entender melhor os raciocínios deles sobre cada uma das experiências. Salienta-se a importância dessa entrevista visto que a pesquisadora tinha a pretensão de levar em consideração características do método clínico. Mas, vale observar, não foi utilizado o método clínico piagetiano na sua essência e sim, como uma influência, principalmente por não se tratar exclusivamente de respostas espontâneas dos sujeitos, como indica o método. Além do mais, destaca-se a dificuldade da pesquisadora não tomar o papel de professora nestas entrevistas, não explicando as situações ou dando respostas.

Essas entrevistas foram registradas em vídeo e seu material foi transcrito, cujas transcrições apresentam-se na íntegra nos apêndices desta tese (Apêndice D até N). Somente uma participante não compareceu à entrevista, ela era responsável

pela atividade 10 (apresentada e seus resultados analisados no subcapítulo 7.8) e por essa razão não há transcrição de entrevista para esta atividade.

6.2 Os participantes da pesquisa

A produção dos dados aconteceu durante uma disciplina eletiva⁴ no turno inverso do regular dos estudantes do ensino médio, no Colégio de Aplicação da UFRGS, em Porto Alegre. Por semestre, para as seis turmas de ensino médio dessa escola, aproximadamente 180 alunos, são ofertadas 15 disciplinas eletivas, das quais, cada aluno deve cursar uma.

A disciplina ocorreu durante o segundo semestre letivo de 2018, uma vez por semana em duas horas/aula (quartas-feiras das 13h30 às 15h), totalizando 16 encontros destinados à investigação, do dia 08 de agosto ao dia 12 de dezembro.

Os alunos foram convidados a participar da disciplina, avisados que ficariam envolvidos em atividades que explorariam conceitos e habilidades geométricas espaciais fazendo uso do software GeoGebra e da impressão 3D. Após uma breve apresentação da proposta para os alunos, a disciplina obteve doze alunos que demonstraram interesse em participar das atividades e da pesquisa.

Para isso, foi entregue para cada estudante matriculado na disciplina o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (destinado aos alunos) como também o Termo de Consentimento Informado (destinado aos responsáveis pelos alunos), os quais apresentam-se nos apêndices A e B desta tese.

Para se reportar aos participantes nas análises desta investigação, usou-se um nome fictício para cada, ao que segue: Scholles, Van Gogh, Miró, Michelangelo, Da Vinci e Picasso (alunos do primeiro ano do ensino médio - EM), Dalí, Tarsila, Renoir, Botticelli e Portinari (alunos do segundo ano do EM) e Monet (aluno do terceiro ano do EM).

⁴ Mesmo tratando-se de uma disciplina eletiva, considera-se um ambiente natural dos participantes, pois faz parte do planejamento curricular da escola cursar uma disciplina eletiva por semestre.

6.3 O planejamento das atividades

Arzarello (2002 *apud* LABORDE *et. al*, 2006) argumenta que o desenho da tarefa e a moderação do professor desempenham papéis muito importantes para incentivar os alunos a irem além da impressão perceptiva e da verificação empírica no software de Geometria Dinâmica. Com essa finalidade, foi planejada uma sequência de atividades que se pretendia oferecer aos alunos para a investigação dessa proposta.

Com a consciência de que se trata de um estudo qualitativo, em que os participantes da pesquisa e o ambiente não são conhecidos pela pesquisadora, os planos podem ser modificados e readaptados conforme se evolui na investigação. À medida que há uma familiarização com o ambiente e com os alunos, os rumos da investigação podem estar melhor alinhados, ou seja, ao longo do estudo a investigação é estruturada.

Portanto, aqui é apresentada a ideia inicial de atividades a serem desenvolvidas para a produção dos dados, atividades estas que almejam desequilibrar os estudantes e proporcionar à investigadora indícios para descrever, interpretar e compreender o pensamento dos estudantes diante dessas tarefas.

As atividades devem ser desenvolvidas no software GeoGebra e impressão 3D que tratam de representação, visualização e orientação espacial. Entre os tópicos, destaca-se: posições relativas entre retas, pontos e retas, planos; pontos de vistas; planos de corte em diferentes sólidos; projeções ortogonais; planificações e construção de sólidos. Utilizando suas propriedades, tratando de esquemas cognitivos que vislumbram as noções de coordenadas e perspectivas, almejando que os participantes da investigação percebam o espaço total.

A seguir, é apresentado o Quadro 4 com a proposta inicial de planejamento de cada encontro, uma orientação prévia que a pesquisadora tomou como base para a produção dos dados, apresentada e entregue na Proposta de Tese, mas modificada durante a investigação. As atividades foram entregues aos estudantes através do ambiente virtual Google Sala de Aula, no qual estão postados os enunciados, os endereços eletrônicos para as construções do software GeoGebra e as questões auxiliares de cada atividade. Nesse ambiente online, se pode anexar

arquivos, respostas e postar comentários. Essas atividades foram baseadas nas experiências próprias da autora e nas obras de Jahn e Bongiovanni (2009), Lemke, Siple e Figueiredo (2016), Montenegro (2005), Carvalho (2010), Gutierrez (1998) e Piaget ([1948] 1993).

Quadro 4 – Ideia inicial para a proposta de atividades

	Atividades
1º encontro	<p>Combinações e início da oficina sobre o GeoGebra⁵, finalizando com os alunos podendo explorar o software.</p> <p>Justificativa: apropriação da ferramenta, para que a falta de conhecimentos do software não conflita com os resultados da pesquisa</p>
2º encontro	<p>Continuação da oficina sobre Geogebra 3D e cadastro dos alunos no ambiente virtual Sala de Aula</p>
3º encontro	<p>Vídeo Rabbit and Deer⁶ e apresentação do ambiente virtual Sala de Aula com as atividades 1 e 2.</p> <p>Justificativa: o vídeo servirá como um incentivador aos alunos para considerarem o espaço tridimensional e as atividades para desenvolver as noções de infinito, ponto, paralelismo, coordenação dos objetos preservando suas distâncias e formas em diferentes perspectivas</p> <p>Habilidades⁷: Percepção figura-fundo e discriminação visual.</p>
4º encontro	<p>Atividade 3</p> <p>Justificativa: coordenação dos objetos conservando suas formas tridimensionais, deslocamentos, paralelismo, ângulos, noção de representação do tridimensional.</p> <p>Habilidades: Percepção figura-fundo, constância perceptiva, rotação mental, percepção de posições e relações espaciais e discriminação visual.</p>
5º encontro	<p>Atividade 4</p> <p>Justificativa: despertar a consciência de diferentes perspectivas, da relação entre o objeto e o ponto de vista próprio, coordenação com</p>

5 Encontra-se no Apêndice C.

6 Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=eZxCs3OzU64>. Acesso em: 04 maio 2018.

7 Baseado no Quadro 1 apresentada no capítulo 2, página 43.

	<p>o outro.</p> <p>Habilidades: constância perceptiva e rotação mental.</p>
6º encontro	<p>Atividade 5</p> <p>Justificativa: despertar a consciência de diferentes perspectivas, da relação entre o objeto e o ponto de vista próprio, coordenação com o outro.</p> <p>Habilidades: constância perceptiva e rotação mental.</p>
7º encontro	<p>Atividade 6</p> <p>Justificativa: diferenciar os diferentes pontos de vistas com mais elementos, coordenar a constância das suas formas e distância entre eles, noção do sistema de coordenadas pela ideia de ordem e relação entre elementos.</p> <p>Habilidades: constância perceptiva, rotação mental, percepção de relações espaciais e discriminação visual.</p>
8º encontro	<p>Atividade 7</p> <p>Justificativa: despertar a consciência das seções em sólidos, verificar o interior deles, diferenciar a geometria dos objetos da geometria dos pontos de vistas.</p> <p>Habilidades: Percepção figura-fundo, constância perceptiva e discriminação visual.</p>
9º encontro	<p>Atividade 8</p> <p>Justificativa: desenvolver a percepção de sólidos através da planificação. Visualizar um objeto tridimensional pela união de polígonos (planos).</p> <p>Habilidades: Constância perceptiva, rotação mental, percepção de posições espaciais.</p>
10º encontro	<p>Atividade 9</p> <p>Justificativa: perceber o espaço total projetando uma peça sólida com características pré-estabelecidas: esquemas de coordenadas, sistemas de perspectivas, constância de formas.</p> <p>Habilidades: Percepção figura-fundo, constância perceptiva, rotação mental.</p>
11º encontro	<p>Atividade 10</p> <p>Justificativa: perceber o espaço total projetando uma peça sólida</p>

	<p>com características pré-estabelecidas minimizando custos: esquemas de coordenadas, sistemas de perspectivas, constância de formas.</p> <p>Habilidades: Percepção figura-fundo, constância perceptiva, rotação mental.</p>
12º encontro	<p>Atividade 11</p> <p>Justificativa: perceber o espaço total projetando elementos geométricos tridimensionais relacionados entre eles, com características pré-estabelecidas: esquemas de coordenadas, sistemas de perspectivas, constância de formas, distâncias, ordem.</p> <p>Habilidades: Percepção figura-fundo, constância perceptiva, rotação mental, discriminação visual.</p>
13º encontro	<p>Atividade 12</p> <p>Justificativa: perceber o espaço total projetando elementos geométricos tridimensionais relacionados entre eles, com características pré-estabelecidas: esquemas de coordenadas, sistemas de perspectivas, constância de formas, distâncias, ordem.</p> <p>Habilidades: Percepção figura-fundo, constância perceptiva, rotação mental, discriminação visual.</p>
14º encontro	<p>Atividade 13</p> <p>Justificativa: desenvolver cooperação. Projetar⁸ e imprimir, em conjunto no grupo, um jogo de diferentes peças geométricas de encaixe proporcionando o desenvolvimento dos esquemas das atividades anteriores e habilidades.</p>
15º encontro	Continuação da atividade 13

Essa sequência de atividades foi remodelada ao longo da investigação, diante das observações da pesquisadora em relação ao envolvimento dos alunos, aos resultados apresentados e ao tempo necessário para o desenvolvimento de cada tarefa e da impressão das peças. Outro norteador para a readaptação da proposta foi relatado anteriormente, em relação à inclusão das entrevistas individuais sobre cada atividade desenvolvida. Ao que segue, apresenta-se o Quadro 5, com a sequência de atividades que realmente aconteceram na investigação, com a data da aplicação.

⁸ Nesta pesquisa, o termo projetar será utilizado nas atividades que envolverão o ato de construir, de modelar uma peça no software.

Quadro 5 – Cronograma das atividades desenvolvidas na investigação

	Atividades
08/agosto	<p>Combinações e início da oficina sobre o GeoGebra. Finalizando com os alunos podendo explorar o software.</p> <p>Justificativa: apropriação da ferramenta, para que a falta de conhecimentos do software não conflita com os resultados da pesquisa</p>
15/agosto	<p>Continuação da oficina sobre GeoGebra e cadastro dos alunos no ambiente virtual Google Sala de Aula</p>
22/agosto	<p>Apresentação do ambiente virtual Google Sala de Aula com as atividades 1 e 2^o.</p> <p>Justificativa: Desenvolver as noções de infinito, ponto, paralelismo, coordenação dos objetos preservando suas distâncias e formas em diferentes perspectivas</p> <p>Habilidades: Percepção figura-fundo e discriminação visual.</p>
05/setembro	<p>Vídeo Rabbit and Deer e Atividade 3</p> <p>Justificativa: o vídeo serviu como um incentivador do ambiente 3D, coordenação dos objetos conservando suas formas tridimensionais, deslocamentos, paralelismo, ângulos, noção de representação do tridimensional.</p> <p>Habilidades: Percepção figura-fundo, constância perceptiva, rotação mental, percepção de posições e relações espaciais e discriminação visual.</p>
12/setembro	<p>Atividade 4 e 5</p> <p>Justificativa: despertar a consciência de diferentes perspectivas, da relação entre o objeto e o ponto de vista próprio, coordenação com o outro, consciência de proporcionalidade</p> <p>Habilidades: constância perceptiva e rotação mental.</p>
19/setembro	<p>Atividade 6</p> <p>Justificativa: despertar a consciência de diferentes perspectivas, da relação entre o objeto e o ponto de vista próprio, coordenação com o outro.</p> <p>Habilidades: constância perceptiva e rotação mental.</p>
26/setembro	<p>Aula no laboratório da impressora 3D, explicação sobre a impressão 3D e os alunos puderam visualizar a impressão de uma cadeira construída por um dos alunos (escolhido por sorteio).</p>
03/outubro	<p>Atividade 7</p> <p>Justificativa: foi incluída na proposta devido a pesquisadora encontrar indícios da necessidade de mais experiências que</p>

9 Cada uma das atividades será apresentada no capítulo 7 juntamente com a análise dos dados coletados sobre cada uma delas.

	explorassem diferentes vistas. Material produzido foi impresso. Habilidades: constância perceptiva e rotação mental.
10/outubro	Atividade 8 e 9 Justificativa: diferenciar os diferentes pontos de vistas com mais elementos, coordenar a constância das suas formas e distância entre eles, noção do sistema de coordenadas pela ideia de ordem e relação entre elementos, despertar a consciência das secções em sólidos, verificar o interior deles, diferenciar a geometria dos objetos da geometria dos pontos de vistas. Habilidades: constância perceptiva, rotação mental, percepção de relações espaciais e discriminação visual, percepção figura-fundo, constância perceptiva.
17/outubro	Atividade 10 e início da atividade 11 Justificativa: desenvolver a percepção de sólidos através da planificação. Visualizar um objeto tridimensional pela união de polígonos (planos). Habilidades: Constância perceptiva, rotação mental, percepção de posições espaciais.
31/outubro	Atividade 11 Justificativa: atividade incluída na proposta pela necessidade vista em propor experiências que explorassem, além da visualização, conceitos de área e volume de sólidos. Habilidades: diferenciar diferentes vistas, constância perceptiva, rotação mental.
07/novembro	Atividade 12 e 13 Justificativa: perceber o espaço total projetando uma peça sólida com características pré-estabelecidas: esquemas de coordenadas, sistemas de perceptivas, constância de formas, medidas, otimização de custos e tempo para a impressão Habilidades: Percepção figura-fundo, constância perceptiva, rotação mental.
14/novembro	Apresentação pelos participantes das atividades 1 a 5 Justificativa: obter mais elementos para as análises
21/novembro	Apresentação pelos participantes das atividades 6 a 9 Justificativa: obter mais elementos para as análises
05/dezembro	Apresentação pelos participantes das atividades 11 a 13, cada aluno recebeu sua peça projetada na atividade 13 e verificou sua eficiência em relação ao brinquedo Justificativa: obter mais elementos para as análises e reflexão pelos participantes da sua construção, um feedback sobre o seu projeto.
12/dezembro	Finalização das atividades com uma avaliação da disciplina e da proposta de atividades.

Como pode-se notar, não foi proposta a quantidade de atividades que se havia planejado, os principais pontos para que isso acontecesse serão debatidos nos resultados finais.

O próximo capítulo apresenta cada uma das atividades desenvolvidas na investigação incluindo as análises produzidas diante de cada uma destas experiências.

7. AS ATIVIDADES PROPOSTAS E A ANÁLISE DOS DADOS

Os dados produzidos na investigação foram analisados baseados na teoria de Jean Piaget sobre a abstração reflexionante e também considerando os estudos sobre a construção do espaço. As decisões que os indivíduos fizeram para solucionar cada situação, suas respostas a questionamentos da pesquisadora, suas dúvidas e suas ações sobre os objetos de estudo com as tecnologias digitais foram analisadas com a finalidade de compreender o pensamento geométrico espacial e o papel que o GeoGebra e a Impressão 3D tiveram nesse processo.

Ao analisar os dados produzidos, depara-se com a dificuldade de distinguir a abstração reflexionante com a abstração empírica, ou o papel de cada uma delas nas resoluções dos sujeitos. Lembrando que a abstração empírica está apoiada sobre os objetos observáveis ou sobre os aspectos materiais da ação exercida pelo sujeito sobre este objeto. Não se trata de uma leitura pura do objeto, pois para abstrair qualquer propriedade observável do objeto são necessários instrumentos assimilados anteriormente pelo sujeito, mas essa abstração tratará de atingir um dado que lhe é exterior, uma informação que já existia no objeto antes da interação com o sujeito.

Já a abstração reflexionante apoia-se sobre as formas e sobre todas as atividades cognitivas do sujeito e utilizando-os para atingir outras finalidades sobre o objeto. Quando o sujeito parte de um objeto material e a partir dele chega a constatações que ele mesmo introduziu no objeto, propriedades observáveis, mas que só existem por causa do sujeito, chama-se a isto de abstração pseudo-empírica, um tipo de abstração reflexionante.

[...] a abstração pseudo-empírica se reduz a uma leitura direta de certos caracteres do objeto, escolhidos em função da pergunta formulada, ou se esta leitura, devido ao fato de se tratar de caracteres introduzidos no objeto pelo sujeito, está ligada, de alguma maneira, à capacidade de o sujeito agir sobre este objeto e de conferir-lhe, com tal ação, os caracteres em jogo. [...] No caso das propriedades espaciais do objeto, a questão é mais complexa, pois há uma geometria do sujeito cuja elaboração e emprego podem condicionar o registro de certas relações espaciais que também pertencem ao objeto. (PIAGET, [1977] 1995, p. 141)

A primeira leitura dos participantes sobre cada uma das atividades propostas nesta investigação começou por uma abstração empírica, fornecendo dados. No

momento em que o sujeito percebeu que cada problema envolvia outros conceitos não visíveis nos objetos de estudo, mas sim, oriundos de construções do próprio sujeito, aconteceu uma abstração reflexionante. Ou seja, os problemas aqui propostos são de natureza geométrica, simulando digitalmente meios físicos, as relações empregadas dependem das atividades do sujeito, apoiadas no empírico, mas enriquecidas pelos conteúdos reflexionantes do sujeito.

A seguir, se apresenta cada uma das atividades propostas aos participantes dessa investigação e, na sequência de cada atividade, as análises dos seus resultados. A organização pela qual decidiu-se apresentá-las aqui levou em consideração os tipos de aspectos cognitivos envolvidos globalmente, em grupos, quando possível. Portanto, a ordem aqui apresentada difere da ordem resolvida pelos participantes, mas sua numeração respeita a ordem original.

7.1 Atividade: Colocar postes em paralelo à uma estrada dada

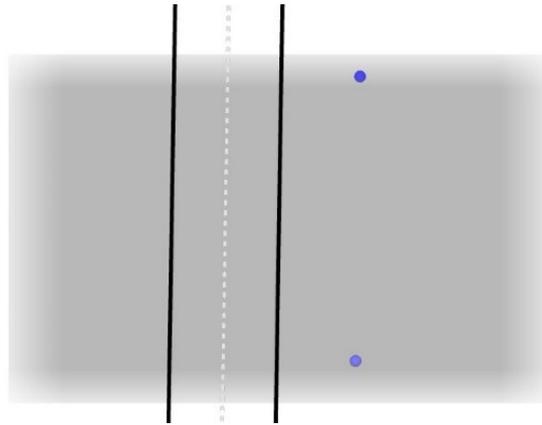
O enunciado a seguir trata-se do que foi apresentado aos participantes no ambiente Google Sala de Aula.

Atividade 1

Ao longo da estrada mostrada na construção do GeoGebra¹⁰ abaixo (Figura 4), pretende-se colocar postes para fixar uma linha telefônica bem reta. Os pontos em azul são os primeiros postes colocados, mas é necessário colocar mais postes a uma mesma distância entre eles. Abra essa construção pelo link e coloque os demais postes (aproximadamente mais quatro).

10 Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/fraevmwc>. Acesso em 08 fev. 2020

Figura 4 – Imagem da construção do GeoGebra utilizada na atividade 1



Fonte: da própria autora

A forma como está escrita cada uma das atividades levou em consideração o método clínico piagetiano, com a pretensão de proporcionar o maior grau de espontaneidade por parte dos participantes para a tomada de decisões para as resoluções. Por esse motivo, utilizou-se termos que pretendiam evitar a influência nas resoluções. Será percebido isso também nas próximas atividades.

Após a realização da tarefa acima mencionada, os participantes foram convidados a responder ao que foi chamado de Questões Auxiliares, também disponibilizado no Google Sala de Aula:

- Descreva sua estratégia para colocar os demais postes.

Hipótese: verificar se utilizaram a ferramenta de construir uma reta utilizando os dois pontos, ou traçar uma reta paralela à estrada passando pelos pontos.

- Colocando muitos desses postes há a tendência de formar-se uma figura? Se sim, qual?

Hipótese: se não utilizaram a reta como perguntado na questão anterior, verificar se com este questionamento são levados a considerar esse fato.

- Quantos postes você colocou? Porque? Utilizou alguma estratégia para colocá-los?

Hipótese: verificar se respeitaram a mesma distância, como está escrito aproximadamente quatro postes, podem ter colocado três ou cinco e utilizar a ferramenta de ponto médio.

- *Se fosse dado somente um poste já colocado, qual seria sua estratégia para colocar os demais postes de modo que a linha telefônica ficasse bem reta.*

Hipótese: verificar se vão utilizar retas paralelas.

7.1.1 Análises da Atividade

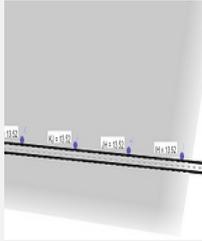
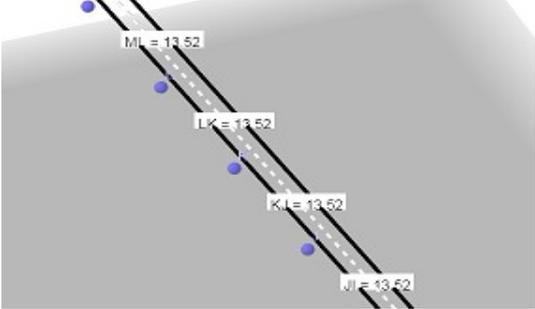
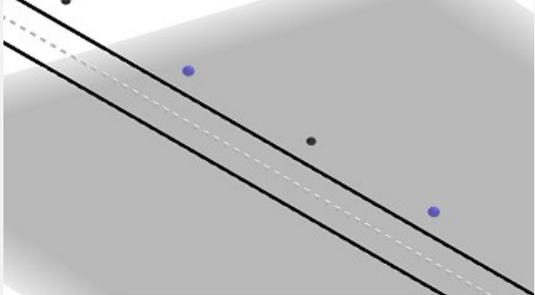
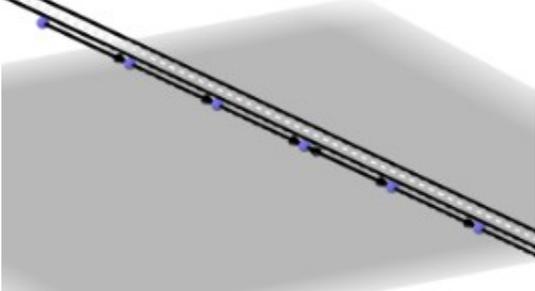
A construção desta atividade foi influenciada pelo experimento piagetiano *A construção da reta projetiva* ([1948] 1993, p. 170). Tal experimento, ainda que similar à obra piagetiana, apresentou características e objetivos próprios por utilizar recursos digitais. Nem todas as análises que Piaget e Inhelder fizeram seriam possíveis ou teriam sentido no meio digital. Por outro lado, o uso de recursos digitais proporcionou outras situações, diferentes interações, novas experiências e, conseqüentemente, outras análises referentes ao pensamento espacial.

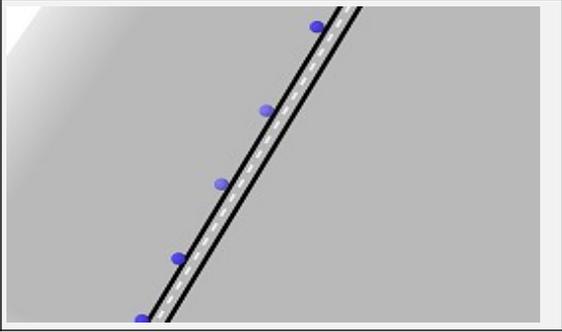
No problema da reta projetiva dada por Piaget e Inhelder ([1948] 1993, p. 170), os participantes deveriam colocar os fósforos (postes) formando uma reta; inicialmente tinham a borda de uma mesa retangular para utilizar o paralelismo e posteriormente, os pesquisadores almejavam que os entrevistados utilizassem a estratégia de mirada para verificar se estava reta, ou seja, percepção de projeções. No presente caso, tem-se o desenho da estrada. Então, analogamente, deveriam colocar os pontos paralelamente à reta que forma a estrada e, para isso, tinham à disposição diversas ferramentas do software (ponto médio, retas paralelas, retas perpendiculares, etc); porém, é necessário que os conceitos implicados nestas ferramentas estejam assimilados, ou seja, ter o significante e o significado para a intuição geométrica. Assim, é necessária uma abstração pseudo-empírica, pois os sujeitos ao visualizarem a construção geométrica devem constatar propriedades que inicialmente não são visíveis, só ficarão à disposição de quem as tenham já construídas, assim, este mesmo sujeito as coloca no objeto geométrico.

Percebeu-se que a maioria dos participantes da pesquisa (dez dos doze participantes) constatou que deveria colocar os postes paralelamente à estrada e que também deveriam respeitar a distância entre eles, para isso recorreram às suas estruturas mentais, relacionando as suas operações (reflexionamento) para resolver os novos problemas geométricos (reflexão).

Nas análises dos resultados desse experimento, os participantes da pesquisa podem ser agrupados em cinco diferentes estratégias de resolução, em cada estratégia utilizaram diferentes operações cognitivas para resolver, ver Quadro 6.

Quadro 6 – Estratégias de Resolução da Atividade 1

Estratégia	Qt.	Exemplo da estratégia em imagem
Para respeitar a distância com a estrada e o paralelismo traçaram uma reta sobre os dois pontos dados e, para respeitar a distância entre os postes utilizaram a ferramenta de medida entre os pontos dados e replicaram segmentos com esse comprimento fixo	3/12	
Seguiu a mesma estratégia anterior para manter a distância entre os postes, mas não considerou o paralelismo com a estrada	1/12	
Utilizaram ponto médio e reflexão dos pontos. Com a aplicação desses conceitos já era respeitado o critério da distância e paralelismo	5/12	
Uso de vetores, usando os conceitos de módulo, sentido e direção para respeitar os critérios da situação dada	1/12	

<p>Não respeitaram os critérios geométricos que deveriam, colocaram os pontos de forma aleatória, desconsiderando que precisavam utilizar conceitos matemáticos para que seus pontos ficassem alinhados, paralelos à estrada e a uma mesma distância entre eles</p>	<p>2/12</p>	
---	-------------	--

O seguinte trecho da entrevista mostra um dos participantes narrando o raciocínio que teve para resolver o problema, trata-se de um participante que utilizou a estratégia de pontos médios. Este trecho da entrevista e os demais apresentados nesta seção, encontram-se no Apêndice D, onde a entrevista com o participante Monet sobre as atividades 1 e 2 encontra-se na íntegra.

Monet: *Eu utilizei, primeiro eu fiz um segmento de reta entre os dois postes e como tem que deixar alinhados os postes, eu usei essa opção aqui que tu mede o centro daí eu selecionei os dois pontos e ele calculou o meio entre eles e assim sucessivamente, aí eles ficaram todos alinhados [pausa] e com a mesma distância.*

Diante da experiência da pesquisadora com os participantes e suas anotações durante a investigação, a maneira pela qual este sujeito consegue reconstruir o raciocínio utilizado para resolver o problema fornece à pesquisadora evidências de uma abstração refletida, a tomada de consciência do que foi feito, percebendo os processos e não somente o resultado final e não somente uma descrição dos passos que realizou.

Seguindo na mesma entrevista, a pesquisadora desequilibrou cognitivamente este mesmo participante, indagando a ele sobre a necessidade do segmento que inicialmente ele utilizou. Este é um exemplo de abstração adquirida com a intervenção do entrevistador após algum esforço e hesitações do entrevistado.

Pesquisadora: Pra que serviria o segmento, o que tu acha?

Monet: *É pra deixar eles alinhados e a uma mesma distância da estrada, como pedia no enunciado.*

Pesquisadora: Tá, mas quando eu faço ponto médio, ele fica desalinhado o ponto médio?

Monet: *Sem o segmento?*

Pesquisadora: É.

Monet: *Não sei, eu não tentei. Mas eu posso fazer [se volta para o computador para fazer]. A mesma coisa.*

Pesquisadora: Então, na verdade, quando tu pediu para criar o ponto médio ele ficou na mesma linha, né? Ok?

Monet: [fez gesto com a cabeça de concordar]

Há a presença de uma diferenciação nesta abstração, mas com as indagações da entrevistadora e a constatação empírica conseguiu realizar uma relação do que já utilizou com o que está sendo proposto, realizando por reflexionamento um novo objeto do pensamento, e uma reflexão, a integração sobre um novo plano cognitivo, havendo um enriquecimento pela introdução deste novo objeto do pensamento não considerado até então.

Os sujeitos que colocaram os pontos de forma aleatória, não considerando as propriedades geométricas envolvidas, não apresentaram a intuição geométrica necessária para este problema, deixando evidências que estão em um nível cognitivo inferior ao exigido. Para este problema era necessário não somente uma constatação empírica do objeto e sim a visualização de propriedades abstratas, que não se apresentavam no concreto do objeto, destacando as ações e coordenações de ações do sujeito. Talvez estes sujeitos possuam estruturas mentais em relação aos conceitos geométricos envolvidos, mas não num patamar cognitivo suficiente para utilizar nos objetos propostos, sendo incapazes de agir sobre eles. Nos demais questionamentos feitos a estes participantes, eles ratificam a constatação de que não utilizaram propriedades geométricas para respeitar as exigências do problema, somente uma leitura física: *“Criei pontos e tomei cuidado para que possuíssem a mesma distância. ... E decidi de olho a distância entre eles.”* (Scholles); *“eu medi a distância por cabeça e coloquei os pontos”* (Van Gogh). O processo da abstração reflexionante permanece incompleto para estes sujeitos.

Em alguns momentos da aplicação, para se obter mais dados sobre o pensamento dos participantes, a pesquisadora utilizou algumas respostas de outros participantes. Assim, eles tinham que refletir sobre outros conceitos também envolvidos, mas que não haviam levado em consideração, como mostra o seguinte trecho de uma entrevista:

Pesquisadora: Teve colegas teus que utilizaram vetor [Monet se volta para o computador para verificar essa ferramenta], tu sabe usar vetores?

Monet: *Não, não utilizei, porque... mas eu vi que tinha, mas não utilizei isso. Não sei nem como funciona.*

Pesquisadora: O que é um vetor? Mas tu sabe a definição de vetor? O que um vetor te dá? Quais as características que ele te dá?

Monet: *Direção, sentido e módulo.*

Pesquisadora: Direção, sentido e módulo, que seria para nós tamanho, né?

Monet: *Sim.*

Pesquisadora: Então a direção e sentido a gente poderia utilizar para que? Para que eles fiquem...

Monet: *Alinhados.*

Outro procedimento utilizado pela entrevistadora, baseada no método clínico, foi trazer para o participante um contraexemplo, assim, mais uma vez, o sujeito precisou refletir sobre novos conceitos e ratificar o seu pensamento, demonstrando que realmente compreendeu a situação com tomada de consciência, ou seja, através de uma abstração refletida.

Pesquisadora: Ao longo de toda a disciplina, em várias atividades os teus colegas utilizaram muito a malha para fazer coisas retas assim, nesse caso aí a malha será que iria ajudar?

Monet: *Acho que não muito.*

Pesquisadora: Por quê?

Monet: *Porque acho que o plano ali serve mais para te orientar melhor e mostrar as coisas, como ali está meio, não tá bem reto com o plano acho que não precisa muito.*

Pesquisadora: O que não tá bem reto?

Monet: *Essas linhas da malha com a estrada.*

Pesquisadora: A estrada e a malha não estão...

Monet: *Alinhados.*

Na busca da pesquisadora em compreender o pensamento dos sujeitos, realizou esse tipo de questionamento, onde os sujeitos necessitaram ter um grau de abstração com tomada de consciência (refletida), permitindo ao sujeito analisar diversas questões e relações.

A última questão auxiliar também trouxe dados interessantes para as análises, onde mostra como os participantes souberam aplicar os seus conhecimentos utilizando as ferramentas disponíveis no software, ferramentas essas inúteis se o usuário não compreender seus conceitos geométricos. Constata-se que os participantes utilizaram as ferramentas se apropriando de seus conceitos e aplicando-os de forma consciente, como mostra o seguinte trecho retirado de um debate entre participante e pesquisadora dentro do Google Sala de Aula:

Enunciado: Se fosse dado somente um poste já colocado, qual seria sua estratégia para colocar os demais postes de modo que a linha telefônica ficasse bem reta.

Dalí: *Eu colocaria uma distância padrão entre os pontos através do primeiro.*

Pesquisadora: E a distância entre cada um deles com a rua, como você faria?

Dalí: *A distância ficou padrão entre os postes e a rua, através de uma reta paralela à rua, que deixou a mesma distância entre todos os postes para a rua.*

Como se pode notar, a Atividade 1 proporcionou aos participantes uma experiência que dependia de suas ações e coordenações de ações pois tiveram que recorrer aos conhecimentos geométricos que já haviam assimilado e que não estavam inicialmente disponíveis no objeto oferecido. Os objetos disponibilizados foram enriquecidos pelas operações dos participantes, ultrapassando os objetos sobre os quais estavam a visualizar, ou seja, dependiam de abstrações pseudo-empíricas. O que cada participante aprendeu não se reduz às características dos objetos em si, mas sim em como as suas ações foram coordenadas entre si para

abstrair mais conceitos e aplicá-los de maneira apropriada, acarretando um reflexionamento e uma reflexão.

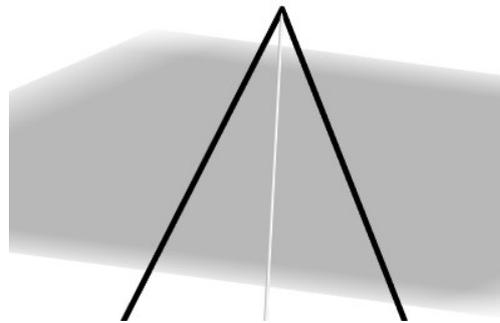
7.2 Atividade: Colocar elementos em uma perspectiva de infinito

A seguir o enunciado da segunda atividade disponibilizada aos participantes da investigação:

Atividade 2

Esta construção do GeoGebra¹¹ quer representar uma estrada muito longa (Figura 5). Ao longo dessa estrada coloque pontos marrons representando postes de energia e do outro lado da estrada coloque pontos representando árvores que serão plantadas em linha reta e simetricamente distribuídos.

Figura 5 – Ilustração da construção dinâmica utilizada na atividade 2



Fonte: da própria autora

Os Questionamentos Auxiliares que trouxeram mais elementos para as análises desta atividade são os seguintes:

- As retas que formam a estrada se encontram em um ponto, como mostra a construção. Por que elas estão posicionadas dessa maneira?

11 Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/hdhrqhjx>. Acesso em 08 fev. 2020

Hipótese: verificar que o encontro das retas em ponto quer passar a ideia de projeção a longa distância.

- Da maneira como a construção do GeoGebra está representando essa estrada, ela tem fim? Justifique.

Hipótese: verificar de outra maneira a hipótese anterior.

- Os pontos representando os postes e as árvores seguem alguma regularidade? Você utilizou alguma estratégia para colocar eles?

Hipótese: usar a ferramenta de retas paralelas à estrada dada.

- Todas as árvores que você colocou estão a mesma distância da estrada? Como você colocou elas para ficarem assim?

Hipótese: quanto mais longe a árvore mais próxima deve estar da estrada, respeitando o paralelismo com a estrada e também a representação em projeção.

- Há alguma regularidade na distância entre os postes na sua construção do GeoGebra? Por que?

Hipótese: Quanto mais longe, menor ficam as representações como também a distância entre os postes.

7.2.1 Análises da Atividade

Esta atividade trata-se de uma representação do infinito, de uma técnica de perspectiva na qual utiliza-se um ponto de fuga, onde todos os elementos correm para esse ponto de fuga passando a percepção de espaço infinito, influenciado por um experimento piagetiano (PIAGET; INHELDER, [1948] 1993, p. 185) que trata das perspectivas.

Para compreender essa técnica e representar adequadamente o que a atividade sugere, se faz necessária uma reflexão em relação ao nosso olhar, como nossa visualização funciona para elementos distantes, lembrando que visualização está relacionada com o raciocínio perante os objetos visuais.

Após a aplicação dessa atividade percebeu-se deficiências na sua construção, como o uso do bidimensional como também das retas se cruzando, simulando um ponto de fuga, mas que deveriam somente causar esse efeito, ou

seja, nunca se cruzarem e aluno ao aproximar a imagem poder perceber isso. Essa, como outras modificações em outras atividades são necessárias caso se pretenda replicar essa experiência.

A Atividade 2 traz algumas semelhanças com a Atividade 1, intencionalmente foi colocada na sequência, porém as duas envolviam diferentes conceitos geométricos, sendo necessária uma atenção do participante para não ser influenciado pela primeira atividade. Tanto os pontos representando os postes como as árvores precisavam se manter alinhados à rua e distribuídos igualmente, mas neste caso, na representação, não se tratava de retas paralelas. Na resolução do problema era necessário aplicar esses elementos de uma maneira que causasse na visão a impressão de postes e árvores paralelos à rua e a uma mesma distância entre eles, mas como esses elementos se distanciavam ao infinito era necessário tomar consciência que quanto mais longe, menor o seu tamanho, como também a distância para os outros elementos à sua volta.

As duas primeiras questões auxiliares têm o propósito de verificar o entendimento do aluno sobre a representação em perspectiva perante o infinito. Todos os participantes apresentaram a compreensão da representação da estrada infinita, trazendo diferentes termos explicativos: *“Estrada muito grande”* (Picasso), *“profundidade”* (Monet), *“Para continuar a ilustração da estrada, como se tivesse se aproximando”* (Tarsila), *“para dar um efeito 3d como se estivesse olhando uma estrada que está muito distante indo numa direção”* (Michelangelo), *“passar a impressão de distância”* (Da Vinci), *“para simular o infinito”* (Dalí), *“dando a impressão de algo cada vez mais longe, fora do nosso alcance”* (Renoir), *“dão a impressão que não tem fim”* (Scholles).

Alguns não expressaram esse entendimento na primeira questão auxiliar, mas evidenciaram isso no segundo questionamento, como mostra esse debate no ambiente Google Sala de Aula:

Enunciado: Da maneira como a construção do GeoGebra está representando essa estrada, ela tem fim? Justifique.

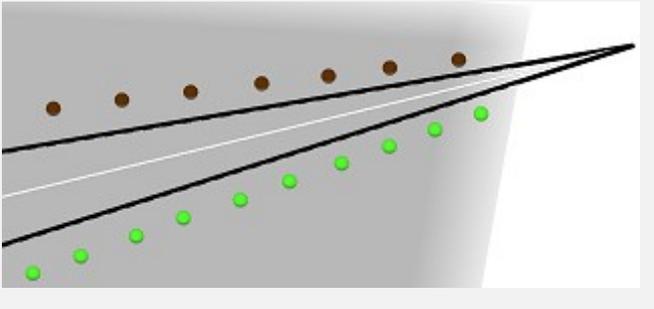
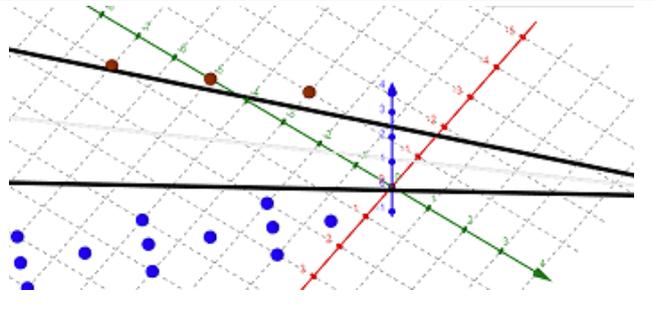
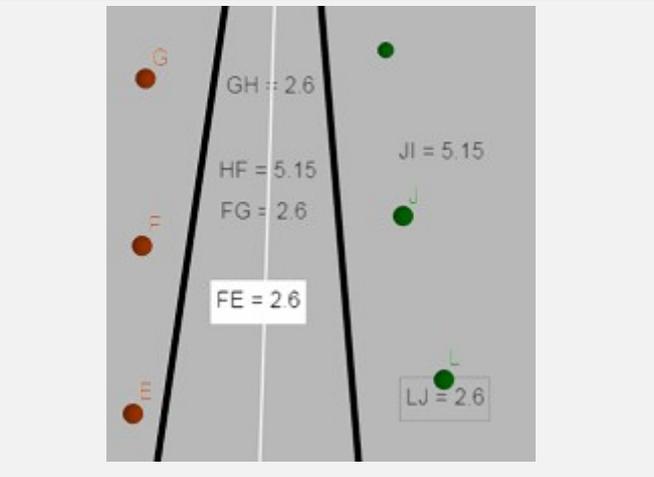
Miró: *Não por ela estar longe demais para ver ao olho nu parece que as linhas se encontram*

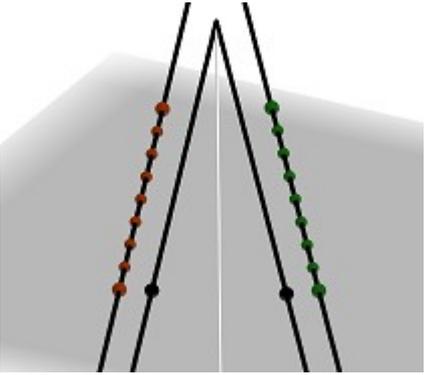
Pesquisadora: Por que a largura da estrada está diminuindo?

Miró: *porque nosso campo de visão está diminuindo ao decorrer da distância*

Esses resultados mostram que os participantes da pesquisa compreenderam o motivo das características da construção geométrica, mas não aplicaram esses conceitos na sua própria construção, para resolver o problema proposto na atividade, como mostra-se a seguir. Essa causa se refere à diferença que existe entre a percepção e a representação das perspectivas. Para demonstrar isso, os resultados dessa atividade foram tabulados da seguinte maneira no Quadro 7:

Quadro 7 – Estratégias de resolução da Atividade 2

Estratégia	Qt.	Exemplo da estratégia em imagem
A distância para a estrada vai diminuindo, mantendo o alinhado com a rua (mesmo ponto de fuga), porém a distância entre os postes e entre as árvores é fixa	4/11	
Colocaram os postes e as árvores de forma aleatória, não compreenderam o enunciado da questão	3/11	
Não apresentou um padrão na sua construção, mas pelas respostas às questões auxiliares pretendia manter a mesma distância para a estrada como entre os postes e árvores	1/11	

<p>Fizeram outro ponto de fuga, em consequência de fazerem as retas paralelas, assim os postes e árvores ficaram paralelos à estrada, não diminuindo as distâncias.</p>	<p>3/11</p>	
---	-------------	--

Diante disso, nota-se que perceber o infinito numa representação é diferente de ter assimilado este conceito ao ponto que o sujeito use essa percepção na sua própria representação. O sujeito precisava estar suficientemente consciente dos seus processos e não somente dos seus resultados, o que supõe uma abstração em níveis mais elevados, de um patamar cognitivo superior.

Um dos participantes apresentou a imagem da Figura 6, onde não se percebe claramente se diminuiu as distâncias entre os postes e entre as árvores, como também para a estrada. Mas seus comentários dizem a intenção que teve, talvez a falta de familiaridade com o software tenha provocado isso.

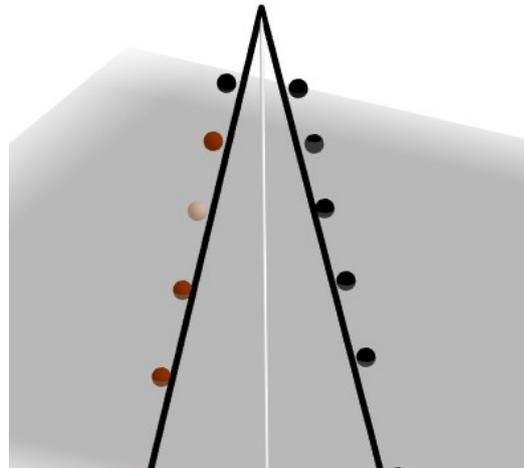
Enunciado: Os pontos representando os postes e as árvores seguem alguma regularidade? Você utilizou alguma estratégia para colocar eles?

Van Gogh: *não pois quanto mais distante os objetos em uma estrada, o espaço entre os mesmos aparente ser menor, nenhuma estratégia, fiz de olho...*

Enunciado: Todas as árvores que você colocou estão à mesma distância da estrada? Como você colocou eles para ficarem assim?

Van Gogh: *sim e não, (sim pois em uma visão de cima, estariam todas na mesma distância) (e não, pois olhando do meio da rua para o restante, as árvores parecem cada vez mais próximas entre si.) Eu coloquei um e fui diminuindo a distância entre as árvores a cada ponto que colocava.*

Figura 6 - Resolução do participante Van Gogh



Fonte: da própria autora, dados coletados

O participante Miró ratifica sua construção em uma das respostas às questões auxiliares: *“por que eu tive a intenção de fazer tudo com a mesma distância da estrada”*, deixando evidente que não relacionou seu entendimento sobre a perspectiva ao infinito como demonstrou no debate anteriormente apresentado.

Um dos participantes que utilizou a última estratégia de colocar as retas paralelas foi entrevistado pela pesquisadora sobre isso (entrevista completa no Apêndice D), o debate está a seguir:

Pesquisadora: Tá, vamos agora para a colocação dos postes e das árvores. Como tu fez, qual a estratégia que tu fez para colocar eles?

Monet: *Foi como falei no outro, coloquei um ponto aqui na estrada, criei a reta paralela e o ponto médio, só isso.*

Pesquisadora: Tá, colocou dois pontos e foi colocando os pontos médios.

Monet: *Isso.*

Nesse trecho o participante mostra que sua estratégia de resolução foi influenciada pela atividade anterior, não possuía estruturas cognitivas suficientes para verificar que se tratavam de outros conceitos espaciais.

Pesquisadora: Tá, agora eu te pergunto uma coisa: o jeito que eu construí a estrada eu quis dizer que ela está muito longe o final dela, digamos assim, por que a largura dela foi diminuindo?

Monet: *Porque, ahm...* [fica pensando e faz gesto com a mão de não ter entendido]

Pesquisadora: Tá, agora eu vou tentar te ajudar com outra pergunta, quando eu estou vendo meu celular daqui eu vejo ele com um tamanho, mas claro se não tivesse paredes, agora se tu levasse o meu celular para 200 metros daqui, eu veria meu celular com o mesmo tamanho?

Monet: *Não, né?*

Pesquisadora: Não. Por quê?

Monet: *O sora, eu acho que tu está querendo falar da percepção do olho humano, né? Porque quanto mais longe menor o objeto fica.*

Nesse momento percebe-se a assimilação dos conceitos de percepção que o sujeito possui, mas a dificuldade que tem em aplicar no problema proposto.

Pesquisadora: Tá. Então vamos ver tua construção, retomando ali, a distância entre a árvore e a estrada, no início da estrada, quando ela está pertinho de ti, ela tem uma distância, ok?

Monet: *Aqui ela deve ficar mais perto e lá no outro ponto ela tem que ficar mais longe* [olha para cima da tela, gerando dúvida para a pesquisadora de qual ponto está se referindo].

Pesquisadora: Mais longe? Tu está aqui [pesquisador aponta para a parte inferior da estrada] aqui está maior, então tu está nessa posição.

Monet: *Ah sim, não... então quando olha daqui os postes teriam que ficar mais perto, por exemplo, pareciam que estariam mais perto, quanto mais... não, ao contrário no caso, ficaria aqui olhando daqui para essa ponta parecia que ficariam mais distante, quanto mais longe, pareciam que estavam mais próximos.*

Pesquisadora: Isso aí, porque vai diminuir a distância, na realidade a distância não diminui, mas na nossa percepção como está muito longe a distância vai ficar menor. E a distância entre eles, entre as árvores e entre os postes, é a mesma sempre na ilustração?

Monet: *Sim.*

Pesquisadora: Tem que ser? Na tua sim [na construção já feita], mas estou perguntando pra ti se tem que ser sempre a mesma distância entre as árvores e entre os postes, na ilustração?

Monet: *Se quero representar com a ideia de profundidade aí não está adequado.*

Pesquisadora: Bem, é essa ideia, as duas últimas árvores a distância entre elas na representação delas, se elas estão muito longe para mim parece que a distância delas vai ser...

Monet: *No caso na ilustração vão estar mais próximas.*

Essas hesitações e confusões que o sujeito demonstra evidenciam o processo da abstração incompleta. Foi necessária a intervenção da pesquisadora para o aluno refletir sobre os procedimentos adotados, se percebia que o aluno tinha as estruturas cognitivas sobre a percepção do infinito, mas não num patamar suficiente para aplicar de forma correta na sua construção. Uma coisa é perceber o infinito, outra coisa é representá-lo, construí-lo, são necessárias outras estruturas cognitivas. Essa experiência e a entrevista foram importantes para compreender o pensamento dos sujeitos sobre essa estrutura espacial, em qual patamar cognitivo se encontram e quais experiências ainda precisam vivenciar. Ainda, tem-se a convicção de que o processo da abstração reflexionante trata-se de um processo desafiador e gradativo para o sujeito. Além do mais, mesmo que os participantes não tenham apresentado os resultados almejados, ditos corretos para a situação proposta, essa experiência trouxe situações que perturbaram o equilíbrio cognitivo dos sujeitos.

7.3 Atividades: Explorar diferentes pontos de vista de um objeto

As atividades quatro, seis e sete (enumeradas de acordo como foi proposto na investigação para os participantes) serão analisadas em conjunto, visto que todas tratam de visualização em diferentes pontos de vista de um objeto. A seguir, apresenta-se cada enunciado disponibilizado aos participantes, as questões auxiliares e uma breve descrição dos resultados encontrados.

Atividade 4

Um observador pode posicionar-se de diferentes pontos para observar sua mesa. Verifique quantas posições diferentes ele necessita para ter uma visão geral da sua mesa e entregue a imagem de cada uma delas. Após, responda as perguntas seguintes.

Para auxiliar nas análises, os participantes foram convidados a responderem os seguintes questionamentos:

- Um observador pode posicionar-se de diferentes pontos para observar sua mesa, salve uma imagem de cada forma diferente da sua mesa que esse observador pode ter (considere as que mais se modificam), anexe cada uma delas e responda:

- Há pontos de vista em que o observador não consegue ver que se trata de uma mesa?

- O seu desenho sofre alguma alteração quando se muda esses pontos de visão?

- Há alterações nas suas respostas anteriores? Se sim, qual? Descreva porque isso aconteceu.

Hipótese: verificar a consciência de diferentes pontos de vistas de um objeto.

Dos doze participantes, três não entregaram a imagem da mesa com os pontos de vistas necessários para verificar as características dela, outros três consideraram que somente uma imagem lateral era suficiente para a visualização da mesa, e cinco participantes entregaram acima de duas imagens sendo três deles com imagens de pontos de vista semelhantes, portanto com imagens desnecessárias. Um dos participantes não respondeu este questionamento.

Em relação a pontos de vista onde é impossível verificar que trata-se de uma mesa, três participantes não consideraram isso um fato, acham que de qualquer

lugar trata-se de uma mesa. Porém, todos têm consciência que conforme o ponto de vista a imagem da mesa pode sofrer alteração, mas somente a imagem, o que ela está representando nunca deixa de ser uma mesa.

Atividade 6

Construí no software GeoGebra a letra inicial do meu nome: L, de forma tridimensional, usando dois paralelepípedos, como mostra a figura 7(a) em anexo. Posicionei-me perpendicularmente à letra, bem na sua frente, obtendo a seguinte imagem da figura 7(b), também em anexo. Podemos chamar essa minha posição de vista frontal da figura. Construa essa mesma letra e entregue a imagem da vista lateral direita.

Figura 7 – imagem disponibilizada na atividade 6



- Há alguma vista dessa letra que um observador não percebe de que letra trata?

- Quantas vistas (imagens) no mínimo são necessárias para que um observador consiga verificar as características do sólido em relação às suas três dimensões?

- Existem outras letras que possuem alguma dessas vistas igual, por exemplo a vista lateral direita que você entregou? Quais letras e quais características precisam ter para que tenham alguma vista igual.

Os doze participantes tiveram êxito na construção da letra L, mas somente quatro participantes entregaram a vista lateral direita como solicitado, três

entregaram a vista frontal, dois entregaram a imagem de outras vistas e três não entregaram a imagem, somente a construção do software GeoGebra.

Atividade 7

Construa a letra inicial do seu nome (vamos imprimir-la, portanto deixa sua peça finalizada para isso, sem excessos. Faça também uma alça para sua letra, para usá-la como chaveiro depois) e além de anexar o arquivo da construção do GeoGebra (arquivo ggb e stl, vá em "baixar como" para fazer isso), anexe a imagem de cada uma das vistas como feito acima, nomeando-as corretamente.

- *Qual letra possui a vista superior igual a vista inferior do L?*
- *Por que a posição da letra influencia na relevância das vistas? Ou seja, qual a diferença que aconteceria na vista superior e inferior se o L estivesse de cabeça para baixo?*
- *Qual letra que possui as vistas frontal e lateral iguais?*
- *Qual objeto tridimensional que possui em todas as vistas um quadrado?*
- *Qual objeto tridimensional que possui as vistas lateral e frontal um triângulo e a inferior um círculo?*
- *Qual objeto tridimensional que possui as vistas lateral e frontal um triângulo isósceles e a inferior um quadrado?*

Nesta atividade cabe ressaltar o empenho e dedicação dos participantes na construção da sua letra, visto que, seria impressa. Relacionando com a teoria cognitiva, teve presença de estímulos por parte dos participantes, interesse deles, o que é considerado importante no processo de aprendizagem.

7.3.1 Análises das atividades

Os problemas de perspectivas, relacionados aos diferentes pontos de vista de um objeto, possuem como principal dificuldade a diferenciação entre as formas aparentes, de perspectiva das formas do objeto e da forma euclidiana do objeto, ou

seja, conseguir separar a visualização de somente uma vista do objeto como um todo tridimensionalmente. Essa tarefa, de perceber essas diferentes visualizações para cada ponto de vista, é proporcionada pelos softwares de geometria, através da rotação do objeto.

Na Atividade 6, os doze participantes responderam positivamente quanto à percepção de ter pontos de vista que não se perceba que se trata da letra L, porém a justificativa para isso permanece deficiente: “*Qualquer uma das posições laterais, pois não se tem uma noção 3D da peça*” (Monet). Não visualizar de que se trata da letra L não está relacionado com a terceira dimensão da peça, mas sim do ponto de vista. Há aqui uma diferenciação, total ou parcial, dos pontos de vista possíveis do objeto, estando este representado em si mesmo independente do ângulo sob o qual é analisado. O seguinte trecho da entrevista realizada (Apêndice H), mostra a consciência do participante sobre a transformação do objeto em outros pontos de vista.

Pesquisadora: [...] Há alguma vista que o observador não percebe de que letra se trata?

Van Gogh: *Pelos lados. Porque não dá para ver que é um L, não dá para ver a parte de baixo.*

O segundo questionamento auxiliar salienta a necessidade de verificar as características das três dimensões, mas mesmo assim somente dois participantes responderam que são necessárias três imagens, frontal, lateral e superior ou inferior. Porém, outros quatro participantes responderam que somente uma é necessária, mas justificaram uma posição correta para isso, que possibilite a visualização das três dimensões: “*Uma. Se a imagem for vista um pouco para cima e um pouco para o lado.*” (Dalí). Nisto, percebe-se que esses sujeitos têm consciência dos aspectos necessários, das características envolvidas.

O próximo trecho da entrevista também demonstra isso, mas ressalta-se que no momento da entrevista, os participantes já haviam realizado todas as atividades da investigação, ou seja, já haviam experienciado as outras atividades que envolvem diferentes pontos de vista como, também, reavaliado suas respostas.

Pesquisadora: Quantas vistas, ou imagens, no mínimo, são necessárias para que um observador consiga verificar as características do sólido em relação às suas três dimensões.

Van Gogh: [...] *No caso são seis vistas, que é a de cima, de baixo e dos lados.*

Pesquisadora: Tá, é isso mesmo Van Gogh. Para ter todas as características reais mesmo, de todos os lados da peça, as seis vistas não vão te dar dúvida nenhuma de nenhum lado. Eu sempre digo, por mais que o frontal é igual ao de trás, vai que atrás tem um desenho, né? Então as seis vistas é a mais completa possível que mais vai me trazer elementos. Então o completo e correto seria as seis vistas. Mas se eu dissesse na pergunta, eu construí o alfabeto tridimensional, sem fazer detalhes em nenhum lado das letras, teria que ser as seis vistas, será?

Van Gogh: *Não. Eu acho que só a frontal já seria o suficiente.*

Pesquisadora: A frontal eu conseguiria ver...

Van Gogh: *Qual letra é.*

Pesquisadora: Qual letra é, tá, mas daí a minha pergunta é verificar as características em relação as três dimensões e tamanho das três dimensões, ou seja, o tamanho da largura, do comprimento e da altura, da profundidade, da altura e da largura. Com a vista frontal, teria como ver essas três medidas?

Van Gogh: *Não. Na verdade não daria para ver a profundidade, mas com o lado direito ou esquerdo daria para ver..*

Pesquisadora: Então de quantas imagens eu preciso?

Van Gogh: *Duas.*

Com as análises do terceiro questionamento auxiliar, a pesquisadora ficou com dúvidas quanto ao entendimento dos participantes sobre o tema, por isso, diferente do que foi planejado, foi proposta uma outra atividade que contemplasse os diferentes pontos de vista de letras tridimensionais, construídas por eles no GeoGebra (Atividade 7). As respostas desse questionamento trouxeram muitas divergências, o participante Scholles que melhor considerou o fato: *“Sim. Elas precisam ter a mesma largura e então posicionar o observador do lado da letra”*. Este participante considerou a característica da largura como necessária para este fato ocorrer como também a posição do observador.

No momento da entrevista, a pesquisadora pôde verificar melhor o entendimento de um dos participantes sobre o assunto, mas observa-se que o participante teve a oportunidade de rever suas respostas.

Pesquisadora. Ok. Existem outras letras que possuem alguma dessas vistas igual, por exemplo, a vista lateral direita que você entregou?

Van Gogh: *É, aqui eu coloquei que se a gente construísse qualquer letra no GeoGebra a vista direita dela ia ser como se fosse um retângulo.*

Pesquisadora: Todas as letras seriam um retângulo.

Van Gogh. *Aham. Iria ter alguns detalhes que iria mudar, mas em geral seriam um retângulo.*

Pesquisadora: Teve um colega teu que respondeu que para ter a vista igual a letra I maiúscula.

Van Gogh: *Também.*

Pesquisadora: E a I minúscula?

Van Gogh: *Acho que não, porque o i minúsculo tem o pinguinho em cima. [...]*

Pesquisadora: Qual é a vista que é diferente para todas as letras construídas em 3D?

Van Gogh: *A frontal.*

Pesquisadora: Outro colega teu respondeu isso aqui, quando eu perguntei: existe outras letras que possuem algumas das vistas iguais? Ele respondeu assim: Sim, mas elas precisam ter a mesma largura e então posicionar o observador do lado da letra. Por que ele falou em largura?

Van Gogh: *Porque... a largura é a altura?*

Pesquisadora: Não a largura é a vista lateral, o retângulo da lateral.

Van Gogh: *Porque se a pessoa fizer, tipo um E tipo esticado assim pra frente não vai ficar como o I.*

Pesquisadora: Tá, então este teu colega?

Van Gogh: *Sim, está certo. Por que tem que considerar que de lado elas tem o mesmo tamanho.*

Pesquisadora: Então, elas vão ter a mesma vista lateral se?

Van Gogh: *Elas de lado tiverem o mesmo tamanho e altura.*

Para responder aos questionamentos feitos pela pesquisadora foi necessário que os participantes tivessem consciência das diferentes perspectivas dos objetos,

que a representação deles se modifica conforme a posição da vista, mas que também o objeto permanece inalterado num todo.

A Atividade 7 foi planejada como extra de diferentes pontos de vista, a fim de verificar melhor o entendimento dos participantes sobre o assunto e proporcionar mais uma experiência para que explorassem isso. Para haver equilíbrio se faz necessário muitos processos, diferentes experiências. Nesta atividade, nota-se uma falta de dedicação nas atividades em relação às vistas do objeto, somente quatro dos doze participantes entregaram a tarefa com as imagens de cada vista como solicitado, mesmo com o exemplo fornecido no exercício. Somente dois alunos perceberam que há muitas letras que a vista superior é igual à vista inferior do L, infelizmente alguns se equivocaram nas suas respostas, colocaram somente uma por exemplo, outro colocou que todas as letras são iguais e ainda teve três participantes que responderam que na letra *i* isso acontece.

Em relação à questão auxiliar sobre a letra que possui as vistas frontal e lateral iguais, sete participantes lembraram da letra *i*. Em relação aos objetos geométricos espaciais, quando questionados sobre qual deles possui em todas as vistas um quadrado, somente um aluno não foi preciso na sua resposta, respondendo paralelepípedo e outro respondeu que não entendeu a pergunta. Em relação ao cone, dois não sabiam e um equivocou-se na nomenclatura, colocou pirâmide de base circular. Em relação à pirâmide, somente o participante Miró manteve a resposta de não ter entendido, como nas duas anteriores. Em relação a este participante, sem uma intervenção direta da pesquisadora, fica muito difícil concluir que não tem consciência das perspectivas dos objetos geométricos desenhados ou se foi somente falta de interpretação da pergunta.

Nesta atividade, pelos enunciados estarem melhor explicados, a pesquisadora pôde ter um pouco mais de conhecimento sobre o pensamento dos participantes em relação às vistas, porém ainda não foi como desejado, somente na entrevista com um dos participantes pôde explorar seus entendimentos como gostaria, mas infelizmente isso só foi feito com um deles. Seguem partes dessa entrevista apresentada na íntegra no Apêndice I:

Pesquisadora: [...] Vamos para as perguntas: qual letra possui a vista superior igual à vista inferior do L, agora?

Dalí: *Na verdade são várias, né? Por que se a letra, por exemplo a minha ficou um retângulo, ela vai ficar parecida com a do L, a do E por exemplo, vai ficar... talvez se tu fizer um O quadrado vai ficar também, o P que no caso eu não conseguia fazer redondo, né? Senão ia ficar muito estranho, então as letras que ficarem um quadrado ou um retângulo em cima terão a mesma vista.*

Pesquisadora: Então existem várias letras..

Dalí: *Sim.*

[...]

Pesquisadora: Isso. Estão do outro lado. A diferença é o pontilhado¹². Tem uns colegas teus que em relação à vista superior igual à vista inferior do L, responderam que é a letra I.

Dalí: *O I não tem como.*

Pesquisadora: Por que não?

Dalí: *Porque se tipo eu for fazer o i vai ficar só esta parte aqui, uma base quadrada [rotaciona sua letra na tela, mostrando a vista inferior do F] então não teria como. A não ser se pessoa fizesse um i, sei lá, com base retangular, ficaria bem esquisito.*

Pesquisadora: Qual será que seria a vista do i que talvez ficaria igual à vista inferior do L?

Dalí: *Ah, daí se eu pegasse, fizesse o i normal aqui com a espessura muito grande para trás.*

Pesquisadora: Pensa nas espessuras iguais, pensa nas seis vistas...

Dalí: *Ah, daí seria a vista lateral.*

Pesquisadora: Só a lateral?

Dalí: *Aham...*

Neste ponto do debate, no trecho a seguir, o participante demonstra que na construção do GeoGebra foi considerada a impressão da peça, item relevante tanto na decisão das suas estratégias na construção, como também nas respostas para os questionamentos:

¹² Foi utilizado em toda a investigação o software na sua configuração padrão, por isso existe o pontilhado.

Pesquisadora: Tá. Teve um colega teu que disse que o i teria que ser maiúsculo, será que precisa? Para a frontal e a lateral serem iguais?

Dalí: *Não, porque no GeoGebra quando a gente vai desenhar não tem como fazer o pontinho.*

Pesquisadora: Por que não?

Dalí: *Ah sora, iria ficar muito esquisito se eu fosse imprimir depois ia ficar um negócio lá [mostra com a mãos como se o i ficasse grudado ao ponto]*

Considerar a impressão da peça como um fator importante na sua construção demonstra, como parte da pesquisa, que os participantes estavam utilizando outras habilidades além do pensamento geométrico. Projetar a peça, sua dimensão, as proporções das suas partes e ainda, colocar um acessório para a letra projetada virar um chaveiro, fez com que os participantes tomassem outras decisões, além das envolvidas nas questões auxiliares.

Além disso, no momento da transformação do arquivo do GeoGebra para o software de fatiamento da impressora, a pesquisadora deparou-se com a necessidade de avaliar a posição mais adequada para cada peça e também se a alça criada pelos participantes para a letra se tornar um chaveiro estava adequada (a abertura suficiente ou a necessidade de suportes). Assim, cada participante foi chamado individualmente pela pesquisadora para discutir sobre esses critérios. Os projetos eram colocados no software de fatiamento e os participantes podiam modificar algumas decisões tomadas. Isso proporcionou aos participantes uma situação rica, com uma visualização mais próxima da impressão no software de fatiamento, os participantes puderam avaliar o resultado do seu projeto, refletir sobre diferentes aspectos e revisar os projetos para chegar em um resultado mais satisfatório em relação a uma impressão mais eficiente. Esse fato aproximou muito os participantes da ação de imprimir em 3D e de suas peculiaridades e características.

Neste ponto percebe-se o ganho com a impressão 3D sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico espacial. A imagem gerada no GeoGebra, mesmo no seu movimento, não foi suficiente para os participantes verificarem todas as características necessárias para a impressão de um objeto que contemplasse as suas exigências.

Os resultados dessas três atividades evidenciam que todos os participantes possuem consciência da diferenciação entre os pontos de vista, mesmo tendo demonstrado, em alguns momentos, hesitações ou equívocos, mas no geral, percebem as diferenças nas perspectivas. Devido a estas hesitações ou equívocos, a pesquisadora decidiu explorar mais este tipo de experiência. Isto demonstrou, pelo menos por um momento, que cada um dos sujeitos evidenciou esse entendimento, uma coordenação dos pontos de vista. Esse tipo de pensamento, a interpretação dos diferentes pontos de vista, depende muito da geometria do objeto e da geometria do sujeito e requer um amplo processo e diferentes experiências.

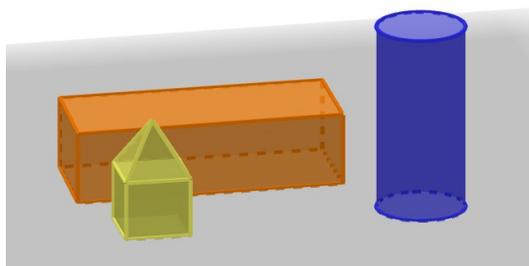
7.4 Atividade: Diferentes pontos de vista de um conjunto de elementos

Apresentou-se aos participantes da pesquisa uma construção virtual com a maquete de uma igreja (pirâmide sobre um cubo), uma caixa d'água (cilindro) e um galpão (paralelepípedo retangular) todos sobre um plano, com dimensões e cores diferenciadas, como mostra a Figura 8, lembrando a maquete com montanhas de Piaget e Inhelder ([1948] 1993, p. 223). Ainda, cinco imagens diferentes, quatro delas (Quadro 8) figurando a maquete virtual com posições diferentes de um observador (representado por um ponto azul) e, a outra imagem, representando um ponto de vista aleatório dessa maquete (Figura 9). Seguindo, foram propostas como questões auxiliares diferentes situações dos diferentes pontos de vista possíveis. O ponto azul, representa o personagem observador, que faz o deslocamento por dentro da maquete, assim os sujeitos devem imaginar e reconstruir as mudanças de perspectiva que correspondem a esses deslocamentos, ou as posições sucessivas do personagem que correspondem às diversas perspectivas. A construção virtual dispõe ao sujeito a rotação da maquete em qualquer ângulo e direção, podendo ele mesmo com o cursor variar os pontos de vista possíveis. A seguir apresenta-se o enunciado disponibilizado aos participantes.

Atividade 8

Na construção feita no GeoGebra tem-se a representação de uma igreja (em amarelo), um galpão (laranja) e uma caixa d'água (azul).

Figura 8 – Imagem da Maquete construída no GeoGebra

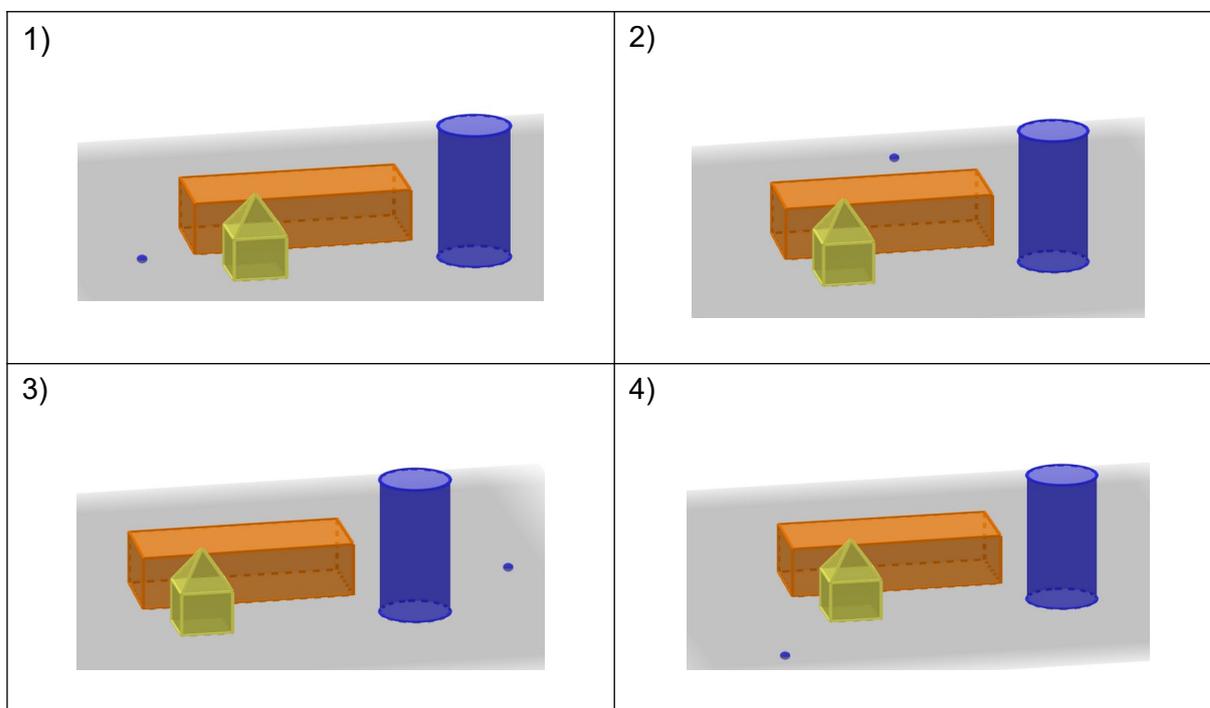


Fonte: da própria autora

Objeto virtual disponível em: <https://www.geogebra.org/m/hnzyhxkv>. Acesso em 08 fev. 2020

Abaixo, representado por um ponto, temos um observador desse local. Em cada imagem (figuras 1 a 4 do Quadro 8), esse observador visualiza a situação acima, de um ponto de vista diferente, sempre de forma perpendicular com a imagem. Manipule a construção e posicione-a de acordo com a vista do observador para cada caso e entregue cada uma dessas imagens, nomeando-as de acordo com o número da figura.

Quadro 8 – Diferentes Pontos de vista



Questões auxiliares:

- De qual posição do plano onde as construções estão, o observador pode visualizar as três construções sem que nenhuma fique na frente da outra?

Hipótese: como os elementos são de diferentes tamanhos, constatar que isso influencia na visualização de todos os elementos.

- Há alguma posição em que o observador, agora em qualquer lugar do espaço, não veja alguma das construções?

Hipótese: verificar a direção da visualização, por exemplo, se o observador estiver entre os objetos e sua direção voltada para um elemento.

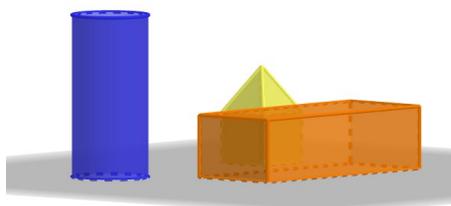
- O que acontece se o observador subir na caixa d'água, o que ele vai enxergar das construções?

Hipótese: verificação anterior.

- A imagem mostra uma vista possível do observador (Figura 9). Descreva de onde ele obtém essa vista.

Hipótese: ter consciência da vista do outro, que a posição do observador está na frente do galpão e da caixa d'água, em diagonal.

Figura 9 – Imagem de um ponto de vista dado



Fonte: da própria autora

7.4.1 Análises da atividade

Embora haja uma diferença na faixa etária dos participantes dos experimentos piagetianos (de 4 a 12 anos) e os entrevistados desta pesquisa (14 a 16 anos), observou-se uma ausência de coordenação das perspectivas, como também a diferenciação dos pontos de vistas e a coordenação crescente em alguns sujeitos.

[...] a perspectiva intervém relativamente tarde no comportamento geométrico da criança: ela não se constitui, curiosamente, senão no mesmo nível em que os sistemas de coordenadas são elaborados, como se ela dependesse de uma construção operatória de conjunto bem mais do que das facilidades da intuição e da experiência. (PIAGET; INHELDER, [1948] 1993, p. 223)

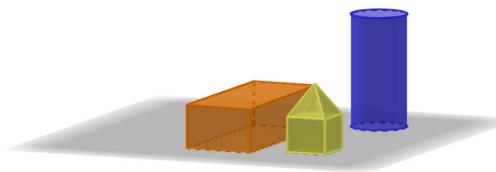
A perspectiva relaciona o objeto e o ponto de vista próprio, o sujeito precisa tomar consciência de si mesmo, diferenciá-lo dos outros e, se coordenar com eles.

Houve três casos onde as análises ficaram impossibilitadas devido a não identificação de cada ponto de vista relacionando a imagem dada no enunciado. Assim, temos nove sujeitos a serem considerados na primeira questão, de identificar o ponto de vista do observador em cada caso do Quadro 8.

Três participantes entregaram a primeira tarefa correta, com os quatro pontos de vista corretos. Os dados mostram uma desconsideração com o perpendicularismo do ponto de vista como também a posição central do observador nos pontos de vistas laterais, além do mais, isso acarretou em um melhor resultado na quarta situação, onde o ponto de vista era oblíquo, caso em que houve um maior número de sucessos (sete dos nove analisados).

Para exemplificar, seguem os resultados da primeira posição do observador (Quadro 8 (1)). Foram apresentadas três respostas corretas, outros três participantes não consideraram a posição central da visão lateral como também a visão perpendicular, como mostra a Figura 10 e, os três participantes restantes entregaram de um ponto de vista qualquer. Devido à falta de participação desses últimos nos diálogos abertos pela pesquisadora no ambiente Google Sala de Aula, não se tem uma explicação justificando a resposta dada.

Figura 10 – Resposta equivocada quando à posição central e perpendicular



Fonte: da própria autora, dados coletados

A primeira questão auxiliar que se colocou aos participantes é se existe alguma posição do plano de onde as construções estão, na qual o observador possa visualizar as três construções sem que nenhuma fique na frente da outra. A intenção desta questão era que os participantes explorassem a rotação da maquete virtual, a rotação do eixo vertical e verificassem se existe essa situação solicitada. Porém, os participantes não compreenderam o significado da posição do plano, ratificando o

que já percebemos na questão anterior, a posição perpendicular para a visão. Oito dos doze participantes consideraram as vistas superior ou inferior.

As próximas questões trazem o seguinte: *Há alguma posição em que o observador, agora em qualquer lugar do espaço, não veja alguma das construções?* e *O que acontece se o observador subir na caixa d'água, o que ele vai enxergar das construções?* A pesquisadora esperava, ao construir essas perguntas, que se na questão anterior não tivessem considerado a situação no plano, ao lerem estas questões, que trazem as expressões de posição como *em qualquer lugar do espaço* e *subir na caixa d'água*, os participantes revisariam suas soluções. Estas questões também serviram para que explorassem as diversas visões, experiência proporcionada pela tecnologia. Percebe-se essa exploração no trecho da entrevista (apresentada na íntegra no Apêndice J):

Pesquisadora: Como ele teria que se posicionar, de onde teria que ser a visão dele se ele quisesse, ele está em cima da caixa d'água, se ele quisesse ver uma parte da caixa d'água e também a igreja e o galpão? Como ele teria que olhar?

Michelangelo: *Acho que ele teria que ir para meio da caixa d'água.*

Pesquisadora: No meio?

Michelangelo: *Ele teria que ficar mais ou menos aqui no meio [mostra na tela] e olhasse assim [em direção à igreja]*

Pesquisadora: Ele iria enxergar o que, da caixa d'água?

Michelangelo: *Um pedaço da ponta dela e um pedaço do teto da igreja.*

A última situação fez com que os sujeitos imaginassem a posição do observador, diante da imagem da sua visão (Figura 9). Somente um participante se equivocou colocando o ponto em cima do galpão, essa resposta é discutida na entrevista:

Pesquisadora: Teve um colega teu que colocou o ponto em cima do galpão, será que daria também?

Michelangelo: *Acho que não*

Pesquisadora: Ele teria essa visão se estivesse parado em cima do galpão?

Michelangelo: *[faz gesto negativo com a cabeça]*

Pesquisadora: Como a gente sabe disso?

Michelangelo: *Porque ele está vendo o galpão, se ele estivesse em cima ele não estaria vendo porque ele está em cima.*

Pesquisadora: Mas não estaria vendo nenhuma parte do galpão, nada? Se ele estivesse em cima?

Michelangelo: *Depende da onde ele está em cima*

Pesquisadora: Tá, e como eu sei que ele não está em cima do galpão?

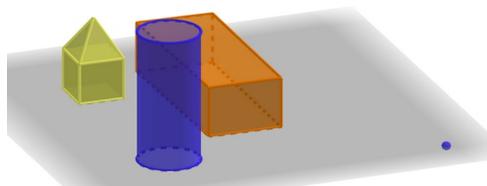
Michelangelo: *[fez gesto de não entender]*

Pesquisadora: Olha, ele tendo essa visão aí, como eu sei que ele não está em cima do galpão

Michelangelo: *Por que ele está vendo o galpão, está vendo as paredes.*

Observou-se que dois participantes não rotacionaram a maquete na posição da imagem dada no enunciado para colocar o ponto (o observador), como mostra a Figura 11, ou seja, conseguiram antecipar a mudança de ponto de vista, diferenciando o ponto de vista próprio com o outro.

Figura 11 – Exemplo de solução antecipadora



Fonte: da própria autora, dados coletados

Essa solução antecipadora demonstra uma tomada de consciência de uma abstração reflexionante anteriormente abstraída, uma abstração refletida. Posteriormente, ela será apoio em processos semelhantes para novas abstrações reflexionantes, que novamente serão utilizadas para novas abstrações refletidas, reflexões sobre reflexões.

O descumprimento com a posição central do ponto de vista reflete a falta de amadurecimento dessa operação, erros residuais onde os sujeitos ainda são incapazes de extrair totalmente o ponto de vista próprio, já que a maquete virtual proporciona uma imagem total da situação, podendo contemplar todas as

construções juntas a partir da vista superior do conjunto dos objetos. Os participantes tiveram dificuldades de imaginar o ponto de vista no plano, no “chão” das construções, como se o observador pertencesse à maquete, aparentemente eles percebiam o observador no exterior, como era o caso deles próprios.

As diversas relações projetivas que estavam em jogo: a posição da vista, a distância e o ângulo de visão mostraram que alguns dos sujeitos, participantes dessa pesquisa, ainda dependem de outras experiências com objetos desse tipo, ainda necessitam evoluir suas estruturas espaciais.

Este experimento fez com que os sujeitos agrupassem todas as relações projetivas necessárias para a perspectiva. Observou-se mudanças de postura diante dos questionamentos, reflexão sobre o que estavam fazendo, sobre suas ações e sobre os resultados de suas ações, ou seja, sofreram desequilíbrios cognitivos.

7.5 Atividade: Projetar uma mesa

Para inserir os participantes da investigação no ambiente tridimensional, a pesquisadora propôs que assistissem o vídeo *Rabbit and Deer* e após, projetassem no software uma mesa, conforme pode-se observar no enunciado que segue disponibilizado aos participantes.

Atividade 3

Após assistir o vídeo Rabbit and Deer¹³, desenhar no software GeoGebra uma mesa com o tampo retangular.

Os Questionamentos Auxiliares à interpretação dos resultados desta atividade foram os seguintes:

- Que tipo de imagens geométricas estão presentes na sua representação?

13 Disponível em: https://www.youtube.com/watch?time_continue=9&v=eZxCs3OzU64. Acesso em 04 maio 2018

Hipóteses: os alunos não considerarem as partes da mesa como elementos tridimensionais, e mesmo considerando, responderem essa pergunta somente com polígonos.

- Qual a posição entre as retas do seu desenho?

Hipóteses: dependendo do ponto de vista, os alunos não verificarem que há somente retas perpendiculares e paralelas.

- Qual o tipo dos ângulos formados entre as retas (agudos, obtusos ou retos)?

Hipótese: baseado no método clínico, esta pergunta está reafirmando a anterior, de uma maneira diferente.

- O que são as linhas tracejadas que o programa cria? Se você gira sua mesa essas linhas se alteram? Como?

Hipótese: verificar as linhas invisíveis que estão presentes em outras faces dos sólidos, proporcionado pelo software

- Descreva as estratégias que utilizou para construir sua mesa.

Hipótese: analisar as estratégias do uso de elementos e propriedades geométricas para criar sólidos espaciais.

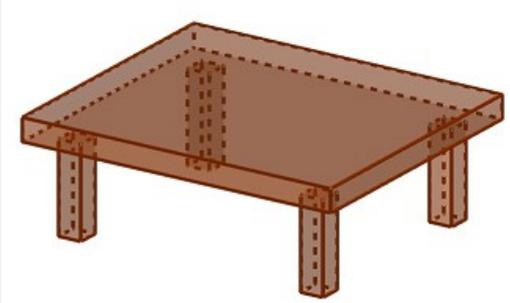
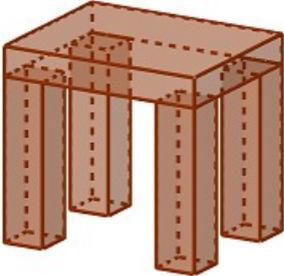
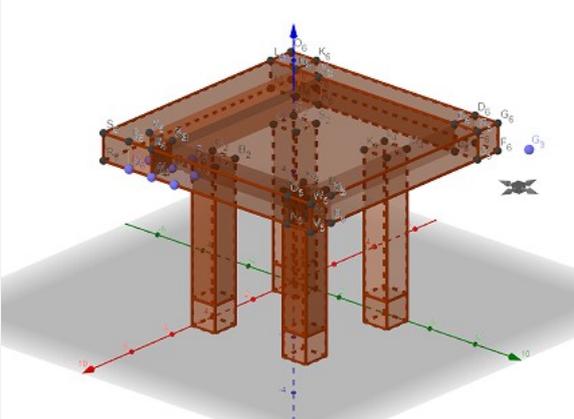
7.5.1 Análises da Atividade

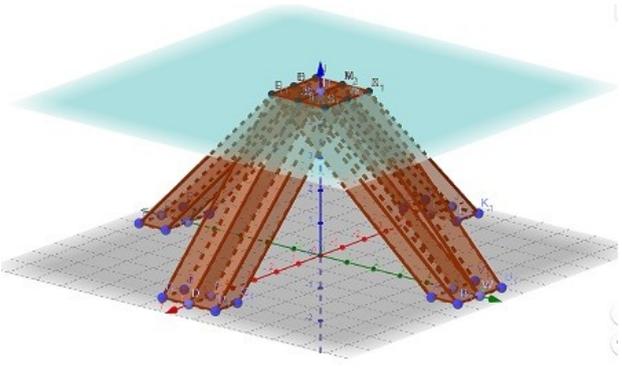
No início da investigação, nos primeiros encontros, a pesquisadora apresentou o software e suas principais ferramentas, conforme já mencionado e apresentado no Apêndice C, como uma oficina sobre o GeoGebra. Porém, o conhecimento das ferramentas do software se procedeu principalmente por parte dos participantes, por tentativas, erros e acertos. O manuseio e como construir diferentes elementos no software, como a mesa proposta nesta atividade, partiram do envolvimento dos participantes na resolução dos problemas propostos.

Esta experiência foi repleta de abstrações empíricas, onde os sujeitos verificaram as soluções das suas decisões tomadas, das suas manipulações no software por sucessos e fracassos. Suas decisões via empirismo forneceram os dados para resolver o problema de projetar a mesa.

Diante disso, depara-se com diferentes resultados, como também estratégias, ações e decisões por parte dos participantes, conforme se pode visualizar no Quadro 9.

Quadro 9 – Estratégias para a construção da mesa

Estratégia	Qt.	Exemplo da estratégia em imagem
Construção planejada, sem passos desnecessários e respeitando o enunciado	3/12	
Construção planejada, porém com passos desnecessários	4/12	
O resultado mostra uma mesa como solicitado, porém os passos mostram muitas tentativas com passos desnecessários	2/12	

<p>O resultado da mesa não apresenta as características solicitadas. Pelos passos fica a evidência da dificuldade pelas tentativas realizadas e passos desnecessários</p>	<p>3/12</p>	
---	-------------	--

Os participantes utilizaram diferentes estratégias de resolução, ferramentas que o software oferecia, como translação, construção de prismas com altura fixa e utilização da malha quadriculada dos planos para manter as dimensões, paralelismo e perpendicularismo de retas e planos. Essas evidências foram oferecidas pelas análises do recurso “Passo a Passo” do software GeoGebra, com este, pode-se verificar as ferramentas utilizadas pelo participante e a ordem da construção.

As construções oriundas de tentativas e diversos passos desnecessários não representam resultados aquém do esperado, mas sim, abstrações oriundas do empirismo, fornecidas pelas experiências de sucessos e fracassos, mas com a finalidade da solução, de um resultado, chegando ao fim de como fazer. Cada uma das tentativas realizada pelos participantes foi enriquecida pela experiência anterior, pelo erro anterior, elas exigem do sujeito uma leitura e interpretação de cada resultado encontrado, ou seja, essa experiência proporcionou aos participantes situações enriquecidas de conjecturas, interpretações e análises, de ações e coordenações de ações.

Já os participantes que construíram sua mesa de uma forma mais direta, apresentaram um outro tipo de abstração, a refletida, onde seus passos de construção trouxeram a evidência de antecipações dedutivas.

Mesmo após assistirem ao vídeo, que foi oportunizado aos alunos com a intenção de promover o pensamento tridimensional, oito alunos dos doze, não consideram as imagens geométricas tridimensionais no primeiro questionamento auxiliar. Um deles respondeu de uma forma confusa, usando polígonos, cubos e segmentos de retas. Somente três participantes utilizaram expressões como prismas

e paralelepípedos. Não estão equivocadas as respostas dos alunos que utilizaram polígonos como retângulos e quadrados, mas é necessária a percepção de imagens planas e espaciais e a diferença entre elas, tanto em visualização quanto na nomenclatura correta. Para verificar isso, a pesquisadora questionou um dos participantes, como mostra o seguinte trecho da entrevista que se encontra na íntegra no Apêndice E.

Pesquisadora: Tá, que tipo de imagens geométricas estão presentes na tua representação?

[...]

Portinari: *Acho que são paralelepípedos, pelo formato.*

Pesquisadora: paralelepípedos.

Portinari: *É.*

[...]

Pesquisadora: A maioria dos teus colegas falou que apareceu retângulos, eles estão certos? Em vez de dizer paralelepípedos, eles usaram retângulos.

Portinari: *Eu acho que não, porque retângulos são uma figura 2D, por isso não.*

Pesquisadora: Tá, mas a minha pergunta era: que tipo de imagens geométricas estão presentes na sua representação. Imagens geométricas...

Portinari: *Certo, daí...*

Pesquisadora: pode ser, eu não estou especificando, né? Imagem geométrica, existe geometria 2D e 3D, ok? Então, eles poderiam responder que foi utilizado retângulos¹⁴?

Portinari: *Sim.*

Ao serem questionados sobre a posição entre as retas utilizadas na construção, sete dos participantes (doze no total) demonstraram não entender a pergunta, já no próximo questionamento sobre o tipo de ângulo, como a própria pergunta apresentava as opções de ângulos obtuso, reto ou agudo, responderam corretamente. O seguinte trecho da entrevista mostra a falta de familiaridade do aluno com a nomenclatura correta, mas uma percepção de visualização.

¹⁴ Este diálogo pode passar a impressão que a pesquisadora quer induzir o participante ao erro, mas a pesquisadora, influenciada pelo método clínico piagetiano, quer verificar se o participante está convicto da sua resposta.

Pesquisadora: Qual é a posição entre as retas no seu desenho? [...]

Portinari: *Na hora de construir a mesa eu usei apenas retas paralelas e ... é.*

Pesquisadora: Só paralelas?

Portinari: *Só paralelas, para comprovar a distância entre um ponto e outro.*

Nessa última frase o participante está salientando a finalidade do uso de retas paralelas no programa, para manter a distância entre os elementos, isso mostra como a definição de retas paralelas está assimilado, pois está aplicando este conhecimento em outra operação, está aprendendo.

Pesquisadora: [...] Mas no desenho final, teve só paralelas?

Portinari: *Hum... [olha para a imagem da sua mesa]. Não.*

Pesquisadora: O que são retas paralelas?

Portinari: *Elas seguem uma do lado da outra, nunca se encontram.*

Pesquisadora: Não se encontram. Tem retas que se encontram ali?

Portinari: [Olha novamente para sua imagem] *Sim.* [continua olhando e pensando]

Pesquisadora: Sim. E daí que posição elas estão uma com a outra, essas retas que se encontram?

Portinari: *Ahm... não sei.*

Nota-se neste trecho a dificuldade na nomenclatura correta, mas o participante demonstra sua percepção de visualização, evidenciando que existe na sua construção outro tipo de retas, não paralelas, mas não sabe dizer o nome correto delas. Na continuidade do diálogo este fato permanece.

Pesquisadora: Retas que se encontram ou elas são concorrentes¹⁵ ou elas são perpendiculares. O que é, que tipo é, essas aí, que se encontram na sua construção, são perpendiculares ou só concorrentes?

Portinari: *Ahm... eu não sei o que são perpendiculares.*

Pesquisadora: Perpendiculares formam um ângulo reto entre elas.

Portinari: *Ah, são perpendiculares.*

¹⁵ Lembra-se aqui que retas perpendiculares são um tipo de retas concorrentes.

Agora o participante salientou sua percepção visual, pois com uma definição simples de retas perpendiculares dada pela pesquisadora, ele já constatou a resposta, estava com dificuldades de colocar a sua geometria na visualização da geometria do objeto.

Pesquisadora: Ok. Eu vou ali mostrar. [a pesquisadora se direciona para a tela onde está a mesa do Portinari e aponta] Assim, como está parada tua mesa, tá? Essa reta aqui, com essa daqui [mostra com o dedo cada uma das retas indicadas] estão se encontrando....

Portinari: *Sim.*

Pesquisadora: Tu acha que essa com essa aqui são perpendiculares?

Portinari: *São concorrentes.*

Pesquisadora: O ângulo entre elas é um ângulo [coloca o dedo sobre o ângulo]..

Portinari: *É um ângulo reto aí. Mas...*

Pesquisadora: É um ângulo reto assim como estamos vendo?

Portinari: *Não nesse ângulo, mas assim* [rotaciona a mesa na tela para outra posição] *dá para ver como um ângulo reto.*

Pesquisadora: Tá, ok. Então quando a gente para a mesa assim, e essa reta com essa [mostra novamente quais são as retas] então elas são o que... perpendiculares ou concorrentes?

Portinari: *Acho que depende do ponto de vista.*

Pesquisadora: Tá, então tu está dizendo que depende do ponto de vista [...] Se eu saio do lugar de onde eu estou vendo a minha mesa ela, as retas que fecham ela, deixam de ser, de formar um ângulo reto?

Portinari: *Não.*

Pesquisadora: Tá, então essas retas ali são perpendiculares ou concorrentes?

Portinari: *São perpendiculares.*

Pesquisadora: Então mexe tua mesa de novo [o aluno posiciona a mesa de outra maneira]. Agora, aquelas retas ali são perpendiculares ou concorrentes?

Portinari: *São perpendiculares.*

O trecho anterior do diálogo entre pesquisadora e participante demonstra um dos erros de visualização, o aluno hesita em responder que conforme o ponto de vista o ângulo entre retas pode se alterar, mas conforme as indagações da pesquisadora o participante retifica sua resposta. O sujeito fica dividido entre o realismo e a representação do objeto e a diferenciação de perspectiva (PIAGET; INHELDER, [1948] 1993, p. 198). Esse erro de visualização, da posição do ponto de vista, pode ser superado com os recursos de rotação proporcionados pela tecnologia, diferente do que ocorre em uma imagem estática.

Pesquisadora: [...] Teve um colega teu que respondeu que só tem retas paralelas, é possível fazer uma mesa será só com retas paralelas?

Portinari: *Deixa eu imaginar isso. Acho que não, porque se fosse só paralelas não teria como fechar o pé da mesa.*

Novamente o participante demonstra a assimilação entre a posição das retas, o que elas representam e suas finalidades, não somente uma recordação de definição e sim, uma assimilação de operações cognitivas através da visualização, proporcionado pela experiência da construção desta tarefa utilizando as tecnologias.

Ainda, baseada nas características do método clínico, para a pesquisadora ter certeza da compreensão dos participantes, questiona sobre os tipos de ângulos presentes na construção. O diálogo abaixo mostra a participação de mais alunos, debatendo a assunto:

Pesquisadora: [...] E os ângulos, eu perguntei qual a posição entre as retas e também, a próxima pergunta é qual o tipo de ângulos formados entre as retas? Quase foi respondido, mas de novo, eu tenho ângulos agudos que são menores de 90° , ângulos obtusos, que é maior que 90° ou ângulos retos. Na tua mesa, quais são os ângulos que aparecem?

Portinari: *Ângulo reto.*

Pesquisadora: Reto. Mas tu disse pra mim antes que tem retas paralelas a tua mesa, como só tem ângulos retos?

Portinari: [ficou pensando]

Pesquisadora: Vou dizer de novo, tu me disse que tem retas paralelas ali, como pode, como só tem ângulos retos? Qual é o ângulo formado em retas paralelas?

Portinari: *Não sei.*

Dalí: *Mas sora, mas tudo depende, porque se tem retas paralelas aqui, só tem vaga para ângulos retos.*

Pesquisadora: Mas daí o ângulo é formado com outra reta, não entre as duas paralelas.

Monet: *O sora, mas se são retas paralelas entre elas nunca vão formar um ângulo, né?*

O aluno Portinari já havia definido e utilizado as retas paralelas de forma consciente, mas no momento que a pesquisadora o questionou de uma forma diferente quanto às características dessas retas, ele mostrou hesitação. Muitas vezes essa hesitação aparece pelos questionamentos terem vindo da pesquisadora, professora no momento, alguém vista como superior. Outras vezes essas hesitações não aparecem se o contraexemplo se origina de um colega, de um semelhante.

Esta atividade, de construção de uma mesa, proporcionou aos participantes a experiência de explorar os recursos tecnológicos, experiências compostas de tentativas, deduções, interpretação de resultados, erros e acertos em busca de um resultado que satisfizesse suas intenções. Assim, os participantes foram enriquecidos de abstrações empíricas e, para obterem um resultado satisfatório no software foi necessário o uso de diferentes conceitos geométricos e não somente a visualização de elementos. Ou seja, ocorreram também abstrações pseudo-empíricas.

7.6 Atividade: Projetar uma cadeira para a mesa – proporcionalidade

Iniciam-se as experimentações saindo do espaço projetivo e direcionando-se ao espaço euclidiano. Após a construção da mesa e o uso desta para trabalhar com diferentes vistas, foi proposto aos participantes da pesquisa o seguinte problema, cujo objetivo era analisar o pensamento sobre proporcionalidade, essencial à construção do espaço na criança (PIAGET; INHELDER, [1948] 1993, p. 319). Essa

atividade não havia sido planejada anteriormente, mas durante a investigação se verificou a pertinência de um problema que abordasse esse tipo de questão.

Atividade 5

Agora, em outro arquivo, construa uma cadeira para essa mesa que você construiu. O design da cadeira é livre, mas lembre-se que precisa combinar com sua mesa.

As questões auxiliares que também forneceram indícios para as análises são as seguintes:

- Você pensou em colocar quantas dessas cadeiras na sua mesa?

Hipótese: Para analisar se a cadeira construída é de fato proporcional e adequada à mesa, é necessário que o participante tome a decisão de quantas cadeiras quer colocar na mesa.

- Essa quantidade cabe na sua mesa? Dê a medida da largura delas.

Hipótese: Verificar se a cadeira e a mesa são proporcionais, se o participante se ateu a considerar as medidas de cada uma delas no momento da construção.

- E a altura, é confortável para uma pessoa sentar na sua cadeira e colocar as pernas para baixo da mesa, ela vai ficar em uma altura boa para comer ou escrever, por exemplo?

Hipótese: Verificar se a cadeira construída é viável, se o participante refletiu sobre as medidas utilizadas.

- Verificando proporcionalmente, por exemplo, se tua mesa tem 12 cm de altura no GeoGebra, uma mesa confortável para escrever na realidade tem 72 cm, ou seja, 6 vezes mais. Tua cadeira está mantendo a mesma proporção da mesa? Dê a medida de uma mesa e de uma cadeira reais que você considera apropriadas e calcule a sua proporção.

Hipótese: Verificar novamente se os participantes refletiram sobre as medidas adotadas no momento da construção da cadeira.

7.6.1 Análises da atividade

Segundo Piaget e Inhelder, “bem antes de saber raciocinar sobre figuras ‘semelhantes’, a criança sabe, seguramente, discernir, unicamente pela percepção, se certas figuras de dimensões absolutas distintas estão nas mesmas relações” ([1948] 1993, p. 338). Ainda comentam que, um sujeito ao comparar duas grandezas, expressa verbalmente sua percepção, dizendo: maior, menor, a mesma coisa. Mas, na presença de duas figuras comparáveis, o sujeito não traduz somente sua percepção e sim um ato da sua inteligência, já acrescenta mais elementos a sua percepção ([1948] 1993, p. 372). Em relação a esta atividade, os participantes estavam submetidos a uma experiência muito além de comparação de duas figuras, deveriam construir um objeto proporcional a um outro, ou seja, a inteligência dos sujeitos que deveria redigir suas percepções, deveria haver uma construção intelectual.

Nesta atividade, se tem menos dados a serem analisados, pois dois dos doze participantes entregaram somente a imagem da construção, insuficiente para a pesquisadora, pois ficou impossibilitada de analisar as medidas escolhidas (indispensáveis à proporção), os passos adotados na construção (pela ferramenta Passo-a-Passo do GeoGebra) e, além do mais, um dos participantes não realizou essa atividade.

Primeiramente, percebe-se nos resultados das construções uma evolução dos participantes na manipulação do software, mais participantes com construções pré-determinadas, sem passos desnecessários e com antecipação de resultados e decisões, menos empirismo. Na atividade da construção da mesa, nove participantes dos doze apresentaram passos desnecessários, evidenciando tentativas e erros. Nesta atividade, somente dois alunos, dos nove que entregaram a tarefa para as análises, apresentaram dificuldades com passos desnecessários, utilizando tentativas e erros. Ou seja, percebe-se as experiências empíricas tornando-se estruturas cognitivas. A Figura 12 mostra dois participantes dedicados ao projeto de suas cadeiras. Observa-se que colegas, sentados lado a lado, personalizaram suas cadeiras de maneira própria e criativa.

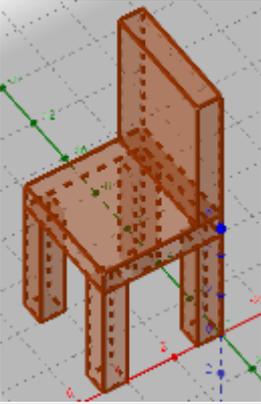
Figura 12 – Alunos dedicados ao projeto de suas cadeiras

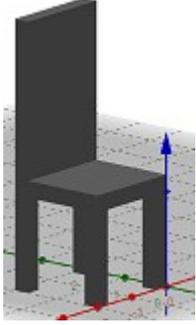
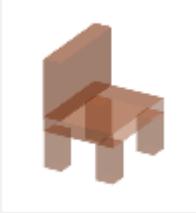
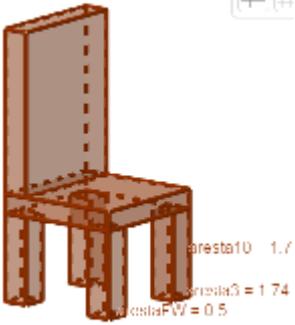
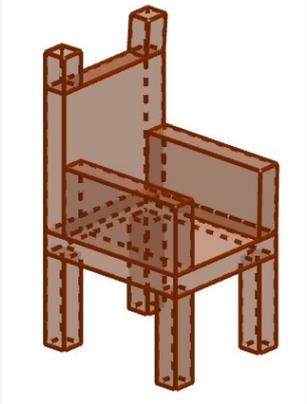


Fonte: própria autora, dados coletados

Em relação à proporção, os resultados mostram que os alunos não consideraram isso no momento de projetar suas cadeiras. O enunciado da atividade não dava ênfase a esta questão, mas a pesquisadora solicitou uma cadeira para a mesa que já haviam construído. Ao se fazer projetos que representem objetos reais, é preciso haver uma coerência de medidas para que fiquem proporcionais e realistas. O Quadro 10 mostra que dois participantes (de um total de nove analisados) construíram cadeiras proporcionais às suas mesas e também escolheram uma quantidade de cadeiras adequada para fazer conjunto com sua mesa.

Quadro 10 – Resultados do projeto das cadeiras

Resultado	Qt.	Exemplo das cadeiras projetadas
Cadeira ficou maior que a mesa	2/9	

<p>Cadeira muito menor que a mesa, cabendo mais cadeiras que o escolhido, porém a altura fica desproporcional, muito baixa para a mesa</p>	2/9	
<p>A altura da cadeira muito baixa para a mesa</p>	2/9	
<p>A altura da cadeira muito alta para a mesa</p>	1/9	
<p>Cadeira e mesa proporcionais e a quantidade de cadeiras escolhidas também está adequada</p>	2/9	

A seguir, apresenta-se um trecho da entrevista (Apêndice G) onde o participante relata que não considerou as medidas no momento de projetar a cadeira:

Pesquisadora: Tá, ok. Próxima pergunta, essa quantidade de cadeiras cabe na sua mesa?

Miró: *Sim.*

Pesquisadora: Mas tu chegou a cuidar a largura delas?

Miró: *Não, eu fiz a cadeira mais larga do que a mesa.*

[...]

Pesquisadora: Próxima pergunta, e a altura, é confortável para uma pessoa sentar na sua cadeira e colocar as pernas para baixo da mesa? Ela vai ficar em uma altura boa para comer ou para escrever, por exemplo?

Miró: *Eu de novo não pensei em altura, eu acho que não.*

Essa atividade mostrou como os alunos não estão acostumados com resolução de problemas, onde precisam levantar hipóteses, analisar os parâmetros e fazer todas as relações necessárias. E ainda, em relação à percepção de proporção, Piaget e Inhelder comparam: “[...] uma coisa é saber discernir perceptivamente as figuras semelhantes ou as figuras diferentes, e outra coisa é saber construir, através de operações apropriadas, uma figura ainda não dada e semelhante a um modelo dado” ([1948] 1993, p. 338). Os resultados apontaram que não existiu naturalmente, entre os participantes, uma necessidade espontânea de medida na construção deles, acredita-se pela falta de habilidades desenvolvidas em experiências do tipo resolução de problemas.

Na entrevista, como mostra o trecho abaixo, somente um participante lembrou de verificar as medidas da mesa antes de projetar a cadeira, uma tentativa espontânea de medida, mas mesmo assim ficou insatisfeito com seu resultado, como mostra o trecho:

Pesquisadora: Quando tu viu o enunciado para construir a cadeira para a tua mesa, tu pensou em medidas?

Dalí: *Eu pensei, sora. Mas daí quando a mesa foi impressa, eu vi que as pernas da mesa ficaram muito espessas em comparação à cadeira, daí eu pensei: humm, não pensei tanto assim...*

Esse trecho da entrevista também demonstra a importância da impressão 3D para a análise dos resultados, para a comprovação de suas escolhas e decisões. Novamente a impressora 3D causou na experiência a oportunidade de os participantes reavaliarem suas condutas adotadas, as manipulações no GeoGebra não foram suficientes para isso, pois somente no momento de visualizarem sua mesa e cadeira impressas que refletiram sobre as medidas e proporções adotadas. O software GeoGebra poderia ter provocado isso, porém de forma espontânea foi o resultado da impressão que provou nos participantes essa reflexão.

Portanto, os dados produzidos trouxeram evidências que, em alguns momentos, há a necessidade de voltar ao concreto, lembrando da importância do apoio aos observáveis que Piaget traz para abstrações reflexionantes no entendimento espacial.

Acredita-se que, se no enunciado ficasse evidenciado que no momento da construção da cadeira era necessário verificar as medidas, teríamos resultados diferentes, pois os participantes, ao longo da investigação, demonstraram estarem aptos cognitivamente para resolver isso, para resolver esse fato dentro do software de Geometria dinâmica, porém, se perderia elementos em relação à tomada de decisões espontâneas dos sujeitos. Observou-se ainda que os procedimentos adotados pelos participantes não procederam de seus raciocínios lógicos pois seus erros não foram negados no momento da entrevista. Todos os participantes (a exceção de Dalí, já discutido acima) não consideraram a proporção como necessária.

O problema das relações entre a percepção das proporções e sua reconstrução operatória não poderia, portanto, ser resolvido simplesmente como se a escolha das figuras desenhadas exprimisse do modo puro e exclusivo a capacidade perceptiva do sujeito, e como se sua construção gráfica exprimisse sem mais sua compreensão inteligente. (PIAGET; INHLEDER, [1948] 1993, p. 372)

Percebe-se que, em concordância com a observação de Piaget e Inhelder acima, não se pode considerar a construção realizada pelos participantes dessa pesquisa como um resultado puro das suas compreensões inteligentes, deve-se considerar suas condutas e comportamentos em um todo, em toda a investigação.

7.7 Atividade: Secção de um cubo

Essa atividade vai combinar o uso da geometria euclidiana e a geometria das projeções, através de um corte em um objeto tridimensional. Haverá a análise geométrica da forma gerada e a visualização da projeção interna desse objeto. Para trabalhar isso, apresentamos o seguinte enunciado aos participantes da investigação:

Atividade 9

Construa um cubo no GeoGebra e represente as seguintes situações, justificando-as. Anexar a construção do GeoGebra (arquivo ggb) e também uma imagem mostrando o que se pede.

a) um plano de corte no cubo onde a região seccionada (o formato da região do cubo que fica neste plano de corte) é um triângulo.

- Existe outra maneira de obter um triângulo?

- Esse triângulo é único?

b) um plano de corte onde a região seccionada é um triângulo equilátero.

- Como você constatou que esse triângulo é equilátero?

c) um plano de corte onde a região seccionada é um quadrilátero.

- Esse plano está cruzando com as arestas cubo?

- É possível construir outros quadriláteros? É possível construir um retângulo ou um quadrado? Como?

d) Um plano de corte onde a região seccionada é um polígono de mais de quatro lados.

- Quais casos, de polígonos com mais de quatro lados, podemos ter?

- Como deve ser a posição do plano de corte com o cubo e suas arestas para que ocorram esses polígonos?

- Imagine seccionar um cilindro, há diferença na região seccionada conforme a direção do corte? Descreva as possíveis regiões que podem surgir nessa secção.

Hipótese geral: verificar que o polígono da secção está relacionado com a quantidade de arestas que o plano está cruzando, os quais serão os vértices do polígono.

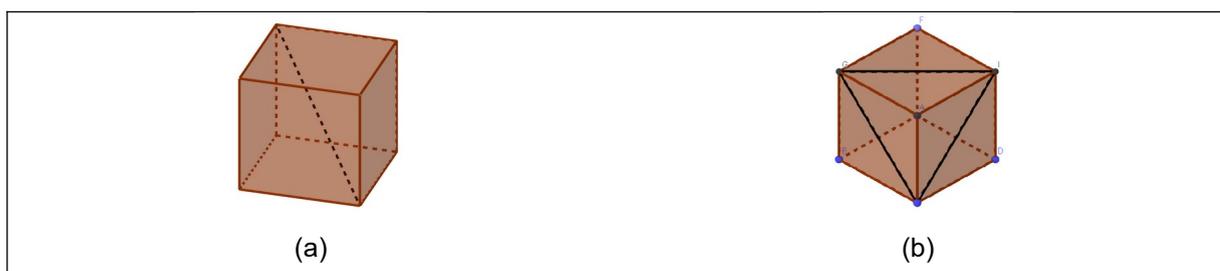
7.7.1 Análises da atividade

Segundo Piaget e Inhelder ([1948] 1993) as operações de secção são comuns à geometria dos objetos e à geometria dos pontos de vista, ou seja, os participantes dessa investigação devem relacionar as formas físicas, as imagens com a visualização em relação à coordenação das vistas. É necessário reconhecer a estrutura física dos objetos no seu interior de um ponto de vista afastado.

Em relação à apropriação da ferramenta tecnológica, todos os participantes construíram o cubo, como solicitado, sem dificuldades. O próprio software apresenta um comando para a construção do cubo através de dois pontos (a distância entre dois vértices). O software, nesta tarefa, proporcionou a possibilidade de abstrações empíricas, da reflexão por parte dos participantes dos resultados oriundos de cada ação que tomavam.

A participante Tarsila não construiu o plano de corte no cubo como solicitado, somente colocou um segmento no centro do cubo (Figura 13 (a)), dificultando as análises do seu pensamento. Essa participante demonstrou uma dificuldade de dissociar o volume (cubo) de uma região oriunda de um plano de corte, ou seja, apresentou uma “mistura dos pontos de vista” a qual não conseguiu se desvincular. O Monet também não fez o plano, mas representou o que seria a região seccionada com segmentos na cor preta, assim, pode-se observar o triângulo que se formaria e fica evidenciado por onde estaria passando o plano de corte (Figura 13 (b)).

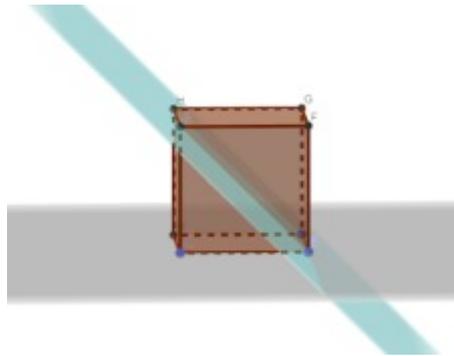
Figura 13 – Exemplos de secções sem o plano de corte



Fonte: da própria autora, dados coletados

Em relação aos resultados apresentados pelo participante Miró, esses obtiveram modificações devido à intervenção da pesquisadora, o que proporcionou o entendimento do participante. Aqui, se exemplifica uma abstração do sujeito perante uma experiência manipulativa apoiada a uma interação com um outro, no caso a pesquisadora. Primeiramente, ele entregou o plano de corte que passa pelas diagonais de duas faces opostas do cubo, obtendo a região seccionada um quadrilátero, mas explicou para a pesquisadora que sua pretensão era encontrar triângulos nas faces do cubo com a intersecção do plano, como mostra a Figura 14. As demais construções do participante foram realizadas de acordo com as orientações da pesquisadora.

Figura 14 – resposta do participante Miró



Fonte: da própria autora, dados coletados

O participante Picasso não chegou em um triângulo e sim apresentou um trapézio na região seccionada. Os demais participantes, oito dos dozes, apresentaram o plano de corte formando um triângulo na região seccionada, conforme solicitado. Todos esses, incluindo Monet, utilizaram os vértices do próprio cubo para obter o triângulo com o plano de corte.

No questionamento em relação a obter outros triângulos, três participantes acreditam que deve existir, mas mesmo com suas inúmeras tentativas não conseguiram: *“pelas minhas inúmeras tentativas não obtive sucesso em nenhuma delas de obter outro triângulo”* (Renoir). Percebe-se neste momento, que as experiências vivenciadas pelos participantes foram empíricas, tentaram chegar aos resultados por tentativas, recurso proporcionado pela tecnologia, inviável no ambiente físico. E, como já foi constatado, essas experiências empíricas não são

subestimadas aos resultados dessa investigação, já foi demonstrado que elas trouxeram evidências em outros momentos de terem evoluído para pensamentos pseudo-empíricos, como também, cada uma dessas experiências provoca desequilíbrios aos sujeitos.

Ainda em relação ao mesmo questionamento, oito dos doze analisados responderam desconsiderando o plano de corte: “*Sim, usando três pontos e ligando eles*” (Scholles), “*Sim podemos fazer a partir de uma linha em diagonal numa das faces do cubo*” (Dalí), ou seja, não entenderam muito bem a pergunta. Neste momento era necessária a intervenção da pesquisadora com outros questionamentos, mas não foi possível. Somente um dos participantes negou a existência de outros triângulos utilizando o cubo (Miró).

O trecho da entrevista abaixo (apresentada na íntegra no Apêndice K) demonstra porque o triângulo da região seccionada possui os três vértices comuns ao do cubo. Isso revela que os participantes primeiramente usam do empirismo, utilizando os pontos que já estão visíveis.

Da Vinci: [construiu o cubo no GeoGebra clicando em dois pontos e usando a ferramenta específica de construir cubo]

Pesquisadora: Tá, daí tu se lembra de como tu fez aquele plano de corte?

Da Vinci: *Sim, eu fiz um plano por três pontos aqui e marquei essa parte aqui* [selecionou três vértices do cubo]

Pesquisadora: Tá. Pelo jeito assim, tu escolheu três pontos, até porque ali o programa pede três pontos para fazer o plano, né?

Da Vinci: *Aham.*

Em relação à tarefa seguinte, de construir um triângulo equilátero, nove participantes foram analisados, um não apresentou um triângulo equilátero na região seccionada, sete utilizaram as diagonais das faces do cubo para fazer o triângulo equilátero e um utilizou os pontos médios das arestas para fazer o triângulo solicitado. Esses sete alunos disseram que utilizaram a ferramenta de medir para verificar se o triângulo era equilátero. No momento da entrevista, foi discutido como se poderia provar que o triângulo era equilátero, no trecho que segue:

Pesquisadora: Esses dois aí são equiláteros?

Da Vinci: *Acho que sim*

Pesquisadora: Por que tu acha que eles são?

Da Vinci: *Não sei, eu tenho que fazer as medidas.*

Pesquisadora: Pelas medidas? Tu pegou lá [a ferramenta do programa] e mediu? Pela régua?

Da Vinci: [começa a medir os lados do triângulo]

Pesquisadora: Tá. Alguém sabe me dizer por que esse triângulo aí é equilátero? Sem medir?

Dalí: *Pelos ângulos?*

Pesquisadora: Tá, botando os ângulos. O Dalí respondeu que os ângulos internos é 60° , tu sabe dizer Da Vinci, por quê? Se eu disser que ele tem 60° , ele é equilátero?

Da Vinci: *Não.*

Dalí: *Porque 60° vezes três dá 180°*

Pesquisadora: Tá, daí se os três ângulos são iguais, os três lados são iguais. Tá, sem medir os ângulos também, tem como afirmar que ele é equilátero? [os participantes discutem, mas sem contribuições]

Pesquisadora: Volta para a tua primeira figura que eu acho que está melhor de ver que nessa [diz para o participante entrevistado Da Vinci e se dirige até a tela de projeção]. Essa aresta, digamos que o triângulo está nessa face aqui, né? [Alisa a projeção da aresta e da face para mostrar], essa face é um quadrado, porque é um cubo e essa aresta aqui como se chama no quadrado?

[silêncio]

Que atravessa o quadrado assim no meio?

Professora regente: Que liga um vértice ao outro?

Pesquisadora: Os vértices opostos?

[silêncio]

Pesquisadora: Sabe Monet?

Monet: *Diagonal.*

Pesquisadora: Diagonal, né? Diagonal desse quadrado. Esse aqui [aponta a outra aresta do triângulo na outra face do cubo] é o que?

Dalí: *Diagonal.*

Pesquisadora: É a diagonal do quadrado de lá. E a debaixo?

Dalí: *Aí é uma reta.*

Pesquisadora: Não, está passando no meio.

Dalí: *mas no triângulo é uma reta.*

Pesquisadora: Sim, mas no cubo? É a diagonal do quadrado de baixo. Como é um cubo, todos os quadrados são iguais.

Dalí: *Sim.*

Pesquisadora: E daí, as diagonais vão ser diferentes ou iguais?

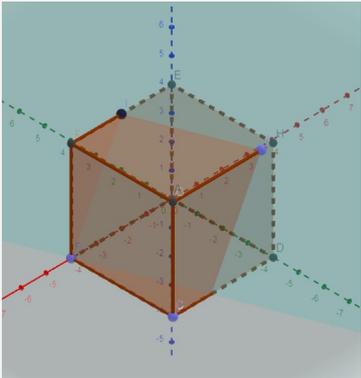
Dalí e outros colegas: *Iguais.*

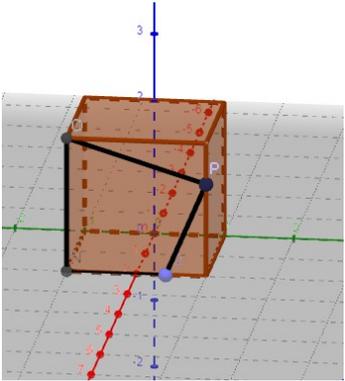
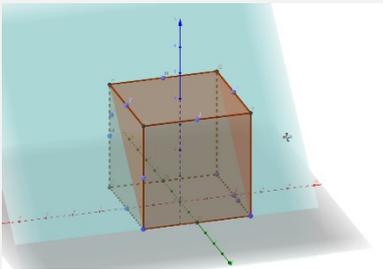
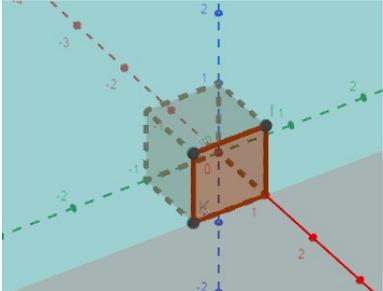
[...]

Pesquisadora: [...] Se eu construí um cubo e três diagonais desse cubo formam um triângulo, então esse triângulo é um triângulo... Equilátero, né? Porque as três diagonais são iguais então os três lados são iguais. Ok? Então não precisaria medir, a gente poderia enxergar assim.

Em relação à tarefa de formar um quadrilátero na região seccionada, organizou-se o Quadro 11, com as soluções apresentadas.

Quadro 11 – Soluções para um quadrilátero na região seccionada

Estratégia	Qt.	Exemplo em imagem
Formaram o quadrilátero com pontos quaisquer de quatro arestas	3/12	

<p>Incoerência com o solicitado</p>	<p>3/12</p>	
<p>Fizeram o plano de corte passando por diagonais paralelas de faces opostas do cubo</p>	<p>4/12</p>	
<p>Fizeram o plano de corte paralelo a uma face</p>	<p>2/12</p>	

Nota-se que nove dos doze participantes chegaram a um quadrilátero como solicitado, seis deles apresentaram resultados mais imediatos, como o plano paralelo a uma das faces ou passando por diagonais paralelas de faces opostas do cubo, o que não inferioriza a resposta, pois o enunciado não faz nenhuma objeção, isso só demonstra o raciocínio lógico dos participantes.

Em relação aos tipos de polígonos que poderíamos fazer somente Monet e Dalí apresentaram uma justificativa: “*Somente pentágono e hexágono, pois só tem 6 faces*” (Monet), “*Sim, mas o máximo possível é 6 uma vez que esse é o número de faces do cubo*” (Dalí), e ratificou seu pensamento respondendo sobre a posição do plano: “*As arestas dos polígonos devem cortar faces do cubo*” (Monet), “*É preciso ter cortes em todas as faces do cubo de modo que cada um forme o lado do polígono*”

(Dalí). Esses dois participantes enriqueceram suas quase necessidades para necessidades, compreendendo a razão dos resultados das suas experiências da abstração pseudo-empírica para chegar em uma abstração refletida.

Os demais participantes não justificaram suas respostas, alegando somente empirismo. Imaginar as superfícies de secção é chamado por Piaget e Inhelder de “abstração da forma” ([1948] 1993, p. 284), tratando-se de isolar essa região de todo o volume do objeto inteiro. Essa abstração requer demais da atividade do sujeito, ou seja, somente as experiências empíricas que o software proporcionou aos participantes não eram suficientes, eram necessárias ações e coordenações de ações, de operações do sujeito. Portanto, esse tipo de atividade não se encontra em um nível operatório e sim formal do pensamento que se encontra em constante desenvolvimento.

Na entrevista, a pesquisadora aproveitou para explorar com Da Vinci as situações que foram solicitadas e pode, através do empirismo, mostrar aos participantes essa situação, como mostra o seguinte trecho:

Pesquisadora: Então quantas faces do cubo estão sendo usadas para fazer o triângulo?

Da Vinci: *Três.*

Pesquisadora: Três, cada uma das arestas está numa face. Tá, então eu te pergunto de novo, será que eu posso fazer um polígono de sete lados? Pensando nisso que eu acabei de mostrar para vocês, será que dá para fazer um polígono de sete lados?

Da Vinci: *Não.*

Pesquisadora: Não, por quê?

Da Vinci: *Porque um cubo só tem seis lados.*

Pesquisadora: Porque um cubo tem só seis faces, seis lados. Ok. Então de cinco, mesmo que não tenho construído, provavelmente a gente possa fazer, né?

Da Vinci: *Aham.*

Pesquisadora: Só a gente tem cuidar para que, qual a característica para que tenha cinco lados?

Da Vinci: *Tem que pegar cinco faces.*

Em relação às secções dos outros sólidos geométricos, Monet conseguiu exemplificar os casos na secção de um cilindro: “*Sim, há diferença. Algumas das possíveis situações são: plano de corte paralelo à base do cilindro, assim formará um círculo. Plano de corte perpendicular à base formará um quadrado se for um cilindro circular reto. Outra possível é um corte transversal ao cilindro, que formará uma parábola*” (Monet).

Essa atividade exigiu dos participantes manipulação do objeto, por eles mesmos construído, proporcionando muitas abstrações empíricas (por exemplo, as manipulações no software para obter os polígonos solicitados), mas não o suficiente para resolver todas as situações envolvidas nesta experiência. Alguns dos participantes demonstraram, além de abstrações reflexionantes, abstrações refletidas, outros, no entanto, permaneceram no empirismo, mas todos, vivenciaram experiências que ocasionaram desequilíbrios cognitivos.

7.8 Atividade: Construir um sólido pela sua planificação

A planificação, chamada por Piaget (1993) de rebatimento, acontece espontaneamente na criança de 7-9 anos ao fazer um desenho tridimensional, por exemplo, ao desenhar um carro, rebate no plano horizontal as quatro rodas. Porém, com a atividade abaixo, pretende-se verificar se esta espontaneidade acontece de forma inversa em objetos geométricos espaciais.

Atividade 10

Construa os sólidos que apresentam as seguintes planificações, apresentadas nas imagens (Figura 15).

Figura 15 – Imagens da Atividade 10



Fonte: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/planificacao-solidos-geometricos.htm> (a) e <http://imagensampliadas.blogspot.com/2018/08/piramide-hexagonal-para-imprimir.html> (b)
Acesso em 08 fev. 2020

Após a realização da tarefa, as seguintes questões auxiliares foram propostas:

- Com quantas faces cada um dos seus sólidos ficou?
- E com quantas arestas?
- Qual o nome desses sólidos? Se necessário, pesquise na internet.
- Você acha que o software auxiliou para você verificar quantas faces e arestas o sólido possui? Por quê?
- Descreva sua estratégia de construção de cada um deles, os passos que você deu para conseguir construir.

Hipóteses: os participantes devem ter noção de coordenadas e do tridimensional, visualizar que cada polígono constitui um plano do objeto espacial. A quantidade de arestas e vértices está relacionada com os polígonos que constituem o elemento.

7.8.1 Análises da atividade

Para as análises dessa atividade temos como material as respostas dos participantes às questões auxiliares, os registros no caderno de campo da pesquisadora e as construções dos participantes no GeoGebra, incluindo a ferramenta Passo a passo para verificar o andamento da construção. Para essa

atividade não houve a entrevista com um dos participantes, pois a participante designada para essa atividade não compareceu no encontro marcado.

Em relação às observações da pesquisadora, foi constatada uma certa dificuldade nesta tarefa, diferente do esperado, pois se esperava que os participantes já tivessem tido outras experiências no ambiente escolar com esse tipo de tarefa sobre planificações de sólidos. Para a maioria dos sujeitos, ficou a evidência da dificuldade em imaginar o fechamento das imagens em superfícies para um objeto tridimensional. Para muitos a pesquisadora auxiliou com a seguinte frase: *“imagine ter essa imagem recortada em mãos e dobrar cada linha para a mesma direção”*. As frases da pesquisadora tentavam sugerir o apoio em observáveis para que assim, eles conseguissem abstrair as características não observáveis necessárias para a resolução.

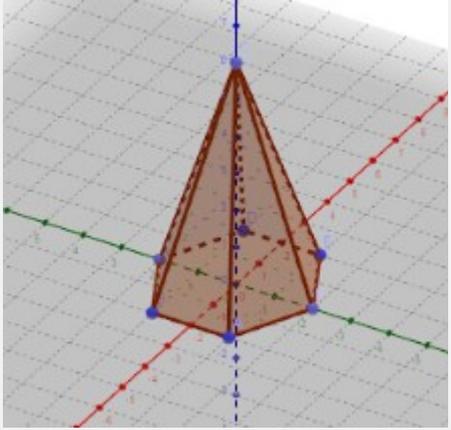
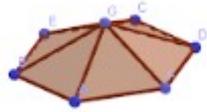
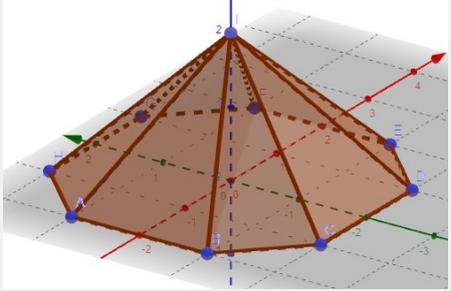
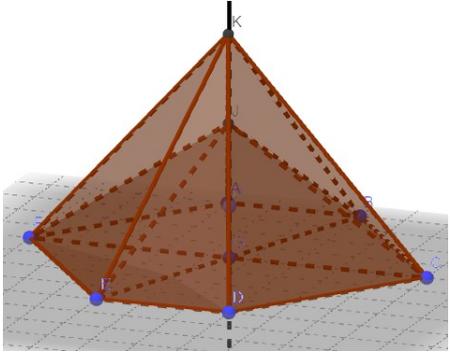
Em relação a essa dificuldade, Piaget conclui:

[...] não é suficiente perceber corretamente um objeto a três dimensões, nem prolongar essa percepção em uma imagem adequada do objeto não desdobrado, para conseguir imaginar o rebatimento correto dos lados desse objeto. Em outras palavras, a intuição de uma figura desenvolvida não é um produto da simples percepção: a percepção das seis faces quadradas de um cubo não é suficiente para engendrar a imagem desses seis lados rebatidos sobre um mesmo plano. O que intervém na imagem do desenvolvimento, além da percepção do volume não desdobrado, é uma ação, portanto uma modificação motriz da percepção, e é mesmo a antecipação representativa de uma ação não executada; portanto a passagem de um estado perceptivo a um estado perceptível, mas não percebido. (PIAGET; INHELDER, [1948] 1993, p. 309)

Piaget e Inhelder falam em rebatimento, mas pode-se relacionar com o fechamento que é este o caso. Nas atividades anteriores os participantes desfrutaram de experiências que envolviam a percepção das faces de um cubo, do cilindro, da pirâmide (tarefas dos diferentes pontos de vista e da secção) e mesmo assim, sem a intervenção da pesquisadora não teriam passado para o estado perceptível do fechamento das imagens, ou seja, não teriam percebido o resultado do fechamento para esta atividade.

Pode-se dividir as resoluções dos participantes desta investigação da maneira como apresentada no Quadro 12 a seguir.

Quadro 12 – Resoluções da Atividade 10

Análise	Qt.	Imagem
<p>No tetraedro não consideraram o triângulo da base regular, ou seja, todas as faces congruentes. Na pirâmide hexagonal, o hexágono não foi considerado regular (como mostra a figura ao lado)</p>	6/11	
<p>Construíram considerando todas as características</p>	3/11	
<p>Além da irregularidade, a pirâmide hexagonal se tornou octogonal</p>	1/11	
<p>Redesenhou a planificação do tetraedro e na pirâmide hexagonal fez uma outra pirâmide dentro da outra e com outros segmentos na base.</p>	1/11	

Em relação à quantidade de faces (quatro faces no tetraedro e sete na pirâmide hexagonal), dos nove participantes que construíram o sólido correspondente à planificação (desconsiderando a regularidade, visto que para a quantidade de arestas e faces, a medida não é relevante) somente quatro responderam corretamente. Os participantes Monet e Botticelli representaram o sólido e a quantidade de arestas corretamente, porém na quantidade de faces os dados indicam que desconsideraram o polígono da base. Em relação ao participante que construiu uma pirâmide octogonal respondeu corretamente a quantidade de faces, porém, equivocou-se na contagem das arestas, alegou que não utilizou a construção do GeoGebra para essa contagem e sim usou a imagem da planificação do enunciado, o que demonstra o motivo do seu equívoco, contando arestas repetidas.

No geral, após à frase da pesquisadora para auxiliar na imaginação de fechamento dos sólidos (dez dos onze participantes), somente a participante Tarsila manteve uma indiferenciação completa em relação aos pontos de vistas relativos à planificação de um objeto (último caso do Quadro 12). Os dados produzidos mostraram que sete dos onze participantes analisados possuem uma defasagem quanto à geometria das medidas, desconsiderando as proporções apresentadas na imagem, mas um sucesso quanto ao desenvolvimento do fechamento da planificação.

Em relação ao uso do software para a contagem das arestas e faces, dois participantes apresentaram os seguintes depoimentos: “*claro, já que nós podemos movimentar o plano e assim conseguimos ver todo os lados*” (Miró) e “*Sim, no software eu posso girar o objeto e contar as faces e arestas e ter noção de quantas tem ali*” (Scholles).

Os dados apontaram uma certa dificuldade nesta experiência, observa-se que além da percepção e da representação operatória já envolvidas nas atividades anteriores, agora exigiu-se ao mesmo tempo ações do sujeito, imaginação de movimento dos objetos, imaginar sua transformação em fechamento: “a antecipação representativa de uma ação não executada” (PIAGET; INHELDER, [1948] 1993, p. 309) e, conforme os estudos realizados sobre a abstração reflexionante, sabe-se que uma antecipação se refere a um tipo de abstração de ordem superior. Portanto, as dificuldades aqui encontradas pelos participantes são comuns, isso só reforça o

fato que são necessárias mais experiências que envolvam essas operações. E que a experiência que vivenciaram nesta investigação os desafiou, os perturbou cognitivamente, o que já é um ganho no processo de aprendizagem.

7.9 Atividade: Explorar diferentes conceitos no Multicubos

Essa tarefa chamada de multicubos trata de explorar as projeções ortogonais de uma pilha de cubos de tamanho unitário. A elaboração dessa atividade foi influenciada pelo material de Angel Gutierrez (1998), uma das referências teóricas dessa pesquisa referente à visualização tridimensional (subcapítulo 3.2).

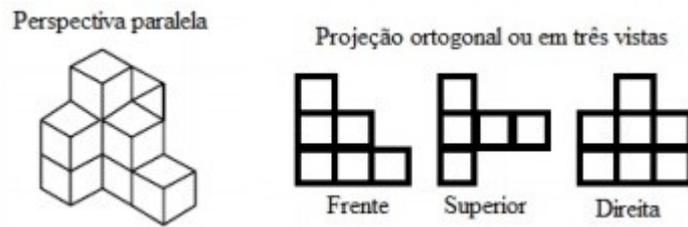
Como trata-se de uma pesquisa qualitativa, onde o meio em que sucedeu a investigação foi sendo conhecido pela pesquisadora ao longo dela, esta atividade não havia sido planejada. A inclusão desta atividade deu-se por dois motivos, um deles, que mais adiante será retomado, foi a necessidade de atividades sem o uso da impressora, por causa do tempo dedicado à impressão das peças. O outro motivo foi a percepção da pesquisadora em sentir a necessidade de explorar mais experiências de visualização e ainda que tratassem de conceitos de área e volume.

Ao que segue, apresenta-se o enunciado da atividade proposta aos participantes:

Atividade 11

Na ilustração da esquerda na imagem (Figura 16) temos vários cubos empilhados, o que chamamos de multicubos, e esse tipo de visualização chamamos de perspectiva paralela. Ao lado direito da imagem (Figura 16), detalhamos cada uma das projeções ortogonais (vistas) desse multicubo para que fique evidente cada uma de suas faces.

Figura 16 – Imagem da Atividade 11



Fonte: Carvalho (2010, p. 41)

Primeira etapa:

Construa no GeoGebra esse multicubo.

- *Quantos cubos temos nesse multicubo?*
- *Se retirarmos o cubo do topo, em quais vistas das projeções vamos modificar?*
- *Se cada cubo possui 8 cm^3 de volume, qual o volume total do multicubo?*
- *Se cada cubo tem 2 cm de aresta, qual a área da superfície do multicubo?*
- *Se movermos um dos cubos, trocar ele de lugar, tem alguma possibilidade de não modificar uma das projeções? Faça isso e anexe esse multicubo novo, e diga qual das projeções não se modificou.*

Segunda etapa:

Escolha um dos seus colegas, cada um de vocês deve criar um multicubo formado com 9 a 12 cubos, importante não mostrar sua construção para sua dupla. Anexe neste item a construção do seu multicubo criado no GeoGebra.

- *Qual o volume do seu multicubo, considerando as mesmas medidas anteriores?*
- *Qual a área da superfície do multicubo, também considerando que cada cubo possui 2 cm de aresta.*

Terceira etapa:

Agora, com a rotação do GeoGebra, posicione o seu multicubo para ter as três projeções e uma perspectiva paralela, como na imagem entregue no início dessa atividade. Anexe essas imagens aqui (salve com o nome de vocês dois) e combine com seu colega de enviar para ele (pode ser por e-mail). Baixe as projeções do multicubo do seu colega pelo item anterior e construa o multicubo dele, anexe aqui sua construção com a imagem de uma perspectiva paralela.

Questões auxiliares:

- Qual o volume do multicubo do seu colega, considerando as mesmas medidas anteriores?*
- Qual a área da superfície desse multicubo, também considerando que cada cubo possui 2 cm de aresta.*

Como pode-se ver, esta atividade foi repartida em três etapas, devido às várias explorações que ela pode proporcionar. Na primeira etapa tratou-se de o participante reproduzir no software tridimensional o multicubo entregue em imagens, perspectiva paralela e as projeções ortogonais, e com essa construção explorar a visualização e conceitos de área e volume.

Na segunda etapa, o participante pôde desenvolver outras habilidades criando o seu próprio multicubo, notou-se um maior envolvimento, dedicação, experienciando com este, também, conceitos de área e volume. Para finalizar a visualização em perspectiva e as projeções paralelas, o participante precisou trocar estas com o seu colega para poder recriar mais um multicubo através dessas imagens e verificar área e volume. Os conceitos de área e volume tratam-se de abstrações reflexionantes apoiadas nos observáveis, na quantidade de cubos presentes e na posição deles, portanto, envolvia abstrações pseudo-empíricas.

As análises de como esta atividade atingiu os participantes da pesquisa segue no próximo item.

7.9.1 Análises da atividade

Essa atividade foi realizada em dois encontros, tratou-se de uma atividade longa, mas percebeu-se a dedicação e a satisfação dos participantes na realização dela, acredita-se que pela possibilidade de criar e também pela possibilidade de colaboração em duplas de trabalho.

Segundo Benedicto *et al.* (2015), esse tipo de tarefa, de representação tridimensional (já explorada nesta investigação anteriormente) desenvolve suas habilidades de visualização, que o autor chama de pensamento espacial.

Para construir o multicubo da primeira etapa, pelas imagens da perspectiva e das projeções ortogonais, e se apropriar do software GeoGebra para isso, dos doze participantes da investigação somente um equivocou-se na colocação do cubo do topo, errando a posição. Todos visualizaram que o multicubo continha 10 cubos, como também se retirarmos o cubo do topo, todos os participantes perceberam que as projeções que seriam alteradas seriam a frontal e lateral. Esse fato demonstra que os alunos usufruíram dos seus pensamentos espaciais (visualização) corretamente para construir a imagem mental pretendida e ainda que, a tecnologia auxiliou neste processo, pois em Gutierrez (1998) há o alerta da dificuldade nesta visualização.

Já não tivemos o mesmo sucesso nos conceitos de área e volume. Em relação à resposta certa para o volume, nove dos doze participantes acertaram (80 cm^3). Os outros três apresentaram respostas variadas, Botticelli retificou sua resposta depois, no momento da entrevista com a pesquisadora, Dalí colocou como resposta 72 cm^3 , a pesquisadora observou que a resposta sobre a quantidade de cubos foi alterada, de 9 para 10, assim, percebe-se que houve um equívoco na contagem dos cubos, porém retomou os seus resultados, retificando a quantidade, mas se esqueceu de retificar as demais respostas.

No seguinte trecho da entrevista (Apêndice L), Botticelli, apesar de primeiramente ter errado sua resposta, demonstra que o conceito de volume no multicubo está desenvolvido:

Botticelli: *Como tem dez cubos, tu só multiplica por 8 que é o valor e daí vai dar 80 cm^3 .*

Pesquisadora: E se tivesse um multicubo de 20 cubos?

Botticelli: 20 vezes 8.

Pesquisadora: E se eu pegasse esses dez cubinhos daí e empilhasse eles totalmente diferentes, qual seria o volume?

Botticelli: O mesmo.

Pesquisadora: O mesmo o que?

Botticelli: 80 cm³.

Pesquisadora: Tu consegue me dizer quantos cubos tem o multicubo de 64 cm³ de volume?

Botticelli: Oito.

Percebe-se uma rapidez nas respostas do participante no momento da entrevista, portanto, trata-se de um esquema já construído.

O participante Picasso, o terceiro participante que apresentou resposta equivocada, explica o seu raciocínio para a pesquisadora no ambiente Google Sala de Aula:

Picasso: 5632 cm cúbicos.

Pesquisadora: Pode me explicar a conta que fez?

Picasso: primeiro eu fiz 8x8x8 e com o resultado eu multipliquei pelo número de cubos no multicubo

Nota-se nesse diálogo que o participante sabe o conceito de volume e aplicou ele corretamente para calcular no multicubo, porém, equivocou-se a utilizar a medida fornecida pela atividade como sendo a medida da aresta e não do volume do cubo unitário, ou seja, recalculou o volume do cubo equivocadamente.

Em relação à área, que demanda um patamar cognitivo mais elevado neste caso, sete alunos responderam corretamente (144 cm²) e cinco participantes apresentaram respostas bem variadas, 280 cm² (Michelangelo), 36 cm² (Van Gogh), 5 cm² (Tarsila), 20 cm² (Botticelli) e 30 cm² (Renoir), infelizmente nenhum dos participantes explicou seu raciocínio para tal resposta, somente o pesquisado Botticelli teve a oportunidade de retificar sua resposta no momento da apresentação da atividade para a pesquisadora, como mostra o trecho a seguir:

Pesquisadora: Tá. Se cada cubo tem 2 cm de aresta, qual a área da superfície do multicubo?

Botticelli: *Tá, para cada cubo tem que fazer dois vezes dois que vai dar quatro e daí nessa vista frontal [posiciona o multicubo digital nesta vista] tem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 então são 7 vezes 4 vai dar 28, e atrás também vai dar 28, dando 56. Daí tu faz desta vista lateral [rotacional o objeto nesta posição] e vai dar 1, 2, 3, 4, 5, 6, seis vezes quatro que vai dar 24 mais 24, 48.*

Pesquisadora: Por que mais 24?

Botticelli: *Porque é o outro lado.*

Pesquisadora: Ah tá.

Botticelli: *E superior tu faz também [novamente posiciona o multicubo digital na vista superior], vai dar 5 e na inferior também.*

Pesquisadora: Cinco?

Botticelli: [olha para o objeto novamente e volta-se para a pesquisadora com cara questionadora] *Sim.*

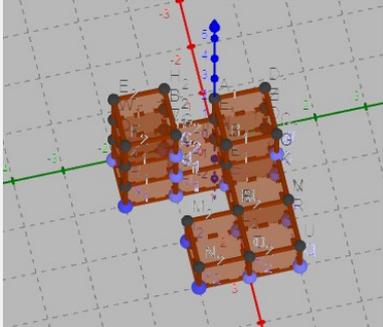
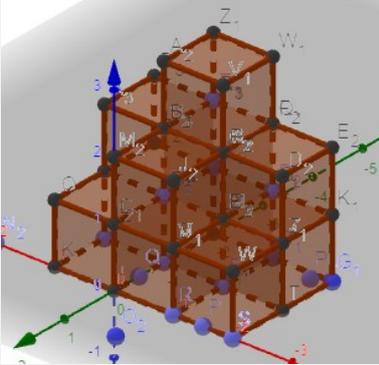
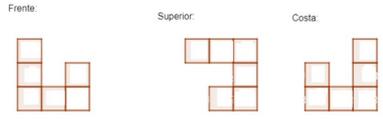
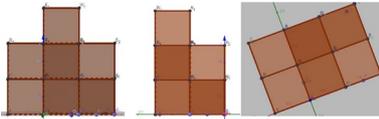
Pesquisadora: Tem cinco? Ah tá, tem, desculpa.

Botticelli: *E inferior vai dar cinco também, daí dá 40, daí soma os dois. Daí 56 mais 48 mais 40 vai dar 144.*

Neste trecho da entrevista, o participante retoma todo o seu raciocínio, explica passo por passo como resolveu o problema, apresenta uma abstração refletida: *a maneira pela qual eles conseguem, através da reflexão que se segue imediatamente à ação, reconstruir ou representar os raciocínios que eles fizeram para resolver os problemas apresentados*” (Piaget, [1977] 1995, p. 76).

Nas próximas etapas da atividade, eles criam um novo multicubo e também exploram os conceitos de área e volume. Em relação a isto, vamos analisar as respostas dos participantes Michelangelo e Van Gogh, que apresentaram respostas equivocadas na etapa anterior referente à área e fizeram uma dupla nesta tarefa. No Quadro 13, apresentam-se os multicubos construídos com as respectivas projeções (de cada um deles). Analisando isto, já se percebe em relação às capacidades de visualização dos participantes.

Quadro 13 – Resultados da etapa 3 de uma dupla

Participante	Michelangelo	Van Gogh
Multicubo		
Perspectiva e projeções		
Área e volume	250 cm ² e 250 cm ³	30 cm ² e 80 cm ³
Área e volume do colega	Não respondeu	40cm ² e 72 cm ³

O multicubo do Michelangelo apresenta 9 cubos, portanto um volume de 72 cm³ e 152 cm² de área. Ele não apresentou a projeção lateral, o que prejudica a construção do multicubo, tanto real como imaginá-lo para os cálculos. Como seu multicubo não é convexo, é preciso mais atenção para o cálculo da sua área. O participante errou o volume e a área do seu próprio multicubo e seu colega acertou o volume.

Em relação ao multicubo de Van Gogh, ele apresenta 11 cubos, um volume de 88 cm³ e uma área de 144 cm². O próprio criador do multicubo não apresentou as respostas corretas, porém apresenta as imagens das projeções corretamente. Para isso coordenou corretamente as diferentes faces, vistas, do objeto.

Infelizmente a pesquisadora não teve a oportunidade de conversar com estes participantes e verificar o seu pensamento para o cálculo de área e volume, mas mesmo com o equívoco das respostas, esta atividade proporcionou a estes

participantes experiências que proporcionaram raciocínios em relação à visualização espacial e os desequilibraram cognitivamente. Diante disso, houve reestruturações cognitivas, não suficientes para resolver o problema proposto, mas suficientes para vivenciar situações novas.

7.10 Atividade: Projetar uma peça de um brinquedo

A próxima atividade trata de uma situação problema criada pela pesquisadora. Resolver um problema é explorar seus conhecimentos já adquiridos e criar estratégias para resolver algo novo, assim, conjecturando novos conceitos e concluindo ideias. Para isso, os estudantes deverão compreender os dados, tomar decisões para resolvê-lo, estabelecer relações e tirar conclusões. Essas oportunidades, de tais explorações, proporcionam aos alunos o ato de aprender e estimular seus processos de pensamento superior, tornando-os assim, indivíduos intelectuais competentes (ZUFFI; ONUCHIC, 2007).

Essa atividade foi dividida em duas partes (Atividade 12 e 13), pelos motivos que serão apresentados nas análises. Seguem os respectivos enunciados:

Atividade 12

Uma peça do brinquedo de encaixe da minha filha foi perdida, cujo brinquedo encontra-se a sua disposição na sala. A respectiva entrada da peça perdida é um triângulo equilátero. Para ter o brinquedo completo, quero imprimir essa peça perdida. Faça o projeto dessa peça no GeoGebra e anexe aqui o arquivo em imagem e também o arquivo ggb.

O brinquedo tratado na situação estava à disposição dos participantes no momento da experiência, a Figura 17 traz a imagem do brinquedo mencionado.

Figura 17 – Brinquedo utilizado na Atividade 12



Fonte: acervo da própria autora

Com a pretensão de entender o pensamento dos participantes perante a resolução do problema apresentado, foram elaboradas o que foi chamado de Questões Auxiliares, as quais foram baseadas nas teorias apresentadas nas seções anteriores e foram o suporte teórico para as análises:

- *Como você construiu o triângulo equilátero? Quais estratégias do software você utilizou para que ficasse com os três lados congruentes?*
- *Essa peça que você construiu vai entrar com facilidade no orifício do brinquedo? Será um desafio para minha filha ou será muito fácil?*
- *A peça pode ser encaixada de várias posições?*

Hipótese: verificar que para ser um triângulo equilátero deverá partir de suas propriedades, constatar que o tamanho da peça deve ser levemente menor do que a entrada da peça no brinquedo para que seja possível, mas também que não facilite a brincadeira.

A seguir, apresenta-se a segunda parte do problema, este relacionado à utilização da impressora 3D.

Atividade 13

Para que a impressão da peça anterior utilize menos filamento, ou seja, fique mais em conta, a peça pode ser vazada. Modifique a sua peça de modo que ela tenha o menor volume possível, que utilize menos filamento para sua impressão e também que encaixe perfeitamente no orifício, de um único modo. Anexe aqui a imagem da peça e também o arquivo ggb.

- Qual estratégia utilizada para construir a peça vazada?

Hipótese: construir um sólido dentro do outro e ainda, pode ser feita sem nenhuma das bases para que tenha custo baixo.

- Essa é a forma com menos volume possível?

Hipótese: que o aluno reflita sobre sua construção e verifique se pode haver outras maneiras de fazê-la.

- A impressora funciona com a impressão em camadas, ou seja, uma camada sobre a outra, será possível imprimir sua peça?

Hipótese: Se os alunos construírem a peça com uma base fechada, essa base deve ficar na parte inferior no momento da impressão, pois se ficar na superior não haverá sustentação.

- No momento de mandar imprimir, a sua peça possui uma posição para que seja possível a impressão?

Hipótese: Se os alunos construírem a peça com uma base fechada, essa base deve ficar na parte inferior no momento da impressão, pois se ficar na superior não haverá sustentação.

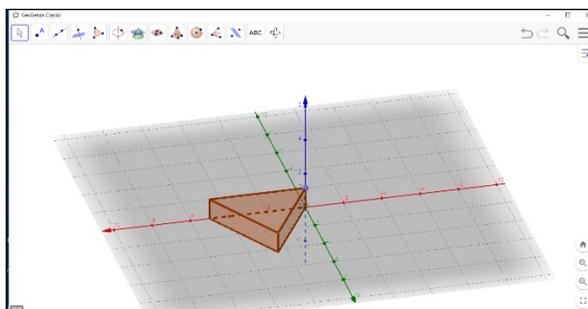
Mesmo a pesquisadora tendo hipóteses para cada situação, estas serviram somente como um apoio no momento da construção do problema e das Questões Auxiliares, o objetivo aqui não é chegar em um resultado único e certo. A pesquisadora tem consciência que a resolução de problemas acarreta muito mais do que um resultado premeditado. A seguir, apresentam-se as análises da experiência, onde mostra-se justamente o surgimento de diferentes resultados.

7.10.1 Análises da atividade

Além das respostas às Questões Auxiliares no Google Sala de Aula, a pesquisadora teve à disposição para suas análises o arquivo com a construção da peça (exemplo Figura 18), no qual é possível visualizar o passo a passo da construção (recurso do GeoGebra), as anotações de um dos pesquisadores sobre o comportamento, dúvidas e apontamentos que os participantes fizeram no momento da atividade, a peça impressa de cada participante e também dois dos alunos escolheram essas atividades para apresentar ao grande grupo. Na referida

apresentação a pesquisadora realizou outros questionamentos, tais apresentações estão gravadas em vídeo e transcritas nos Apêndices M e N.

Figura 18 - Exemplo da construção de um dos participantes



Fonte: da própria autora, dados coletados

Todos os participantes perceberam que se tratava de um sólido triangular regular e utilizaram diferentes estratégias de construção para chegar no triângulo equilátero da base. Por exemplo, Picasso descreveu sua estratégia da seguinte forma: *“primeiro fiz dois pontos que possuem 5 cm¹⁶ de distância entre eles depois escolhi um ponto médio para descobrir a ponta então tracei o terceiro ponto baseado no ponto médio depois criei uma reta perpendicular em um dos pontos logo em seguida o triângulo estava pronto só faltava ajustar a altura depois de ajustar a altura o triângulo estava feito”*. Nota-se que ele estabeleceu relações, significados com esquemas já construídos de diferentes conceitos de geometria, os quais ele não retirou do objeto observado no brinquedo, mas sim, de esquemas sobre o triângulo equilátero interiorizados, com as generalizações dessas propriedades conseguiu construir o triângulo, ou seja, passou para um patamar cognitivo superior pois aplicou seus conhecimentos em outra situação.

O participante Dalí utilizou outros conhecimentos assimilados anteriormente de que o triângulo equilátero possui os três ângulos internos medindo 60° , ou seja, para construí-lo utilizou esse conhecimento para chegar no triângulo pretendido: *“Utilizei a ferramenta de medida de ângulo para todos os lados fiquem iguais”*.

Na apresentação realizada por um dos colegas, nota-se outra generalização:

Pesquisadora: ... alguém quer explicar como fez?

16 Como o brinquedo estava à disposição dos participantes, eles mesmos fizeram essas medidas

Monet: *Distância entre dois pontos.*

Pesquisadora: Como assim, Monet?

Monet: *Eu fiz o cálculo numa folha pra conseguir ter os três lados iguais. Entendeu? Primeiro eu criei uma aresta, tá?*

Pesquisadora: Tá.

Monet: *Depois, no triângulo eu precisava só mais um ponto para ligar os segmentos, daí eu calculei a distância de dois pontos igual a 5.*

Toda vez que é necessário utilizar uma das estruturas cognitivas já formadas e reorganizá-la para utilizar de uma outra forma, fazer uma generalização, está-se passando de um patamar inferior cognitivo para um superior, ou seja, está-se evoluindo, desenvolvendo o pensamento. “O *GeoGebra* forneceu recursos que permitiram que os alunos criassem construções geométricas mais precisas e conectassem essa ferramenta cuidadosamente com seu aprendizado matemático” (LIEBAN *et al*, 2018, tradução da autora).

O problema proposto exigia que os alunos observassem as características geométricas do objeto, ou seja, as características visíveis, mas também precisavam considerar o objetivo do brinquedo, ou seja, precisavam refletir sobre o funcionamento inobservável do objeto, ou seja, dependiam tanto de aspectos figurativos como também das suas estruturas mentais, uma abstração pseudo-empírica. Para isso, as Questões Auxiliares foram fundamentais.

Em muitos momentos na resolução de um problema, os alunos não levaram em consideração todas as implicações necessárias, para alguns deles foi necessária a intervenção de um mediador, papel este realizado pela pesquisadora, a qual não forneceu as respostas prontas para os aprendizes, mas sim, formulou perguntas pertinentes que fizeram esses analisar melhor o que estão fazendo ou como estão. Diante das Questões Auxiliares, percebe-se a reflexão dos estudantes por suas respostas: “...provavelmente seria um desafio pois ele não está tão pequeno...” – Da Vinci, percebendo que se a peça fosse muito pequena entraria com muita facilidade no orifício; “Será fácil, uma vez que as medidas estão um pouco menores que orifício” – Dalí, constatando que sua peça ficou menor que o orifício, tornando o encaixe muito fácil.

Na apresentação do aluno, este fato também é observado:

Pesquisadora: Tu acha que se alguém tivesse feito ... uma peça com um triângulo de 2 cm, por exemplo, bem menor, será que teria graça esse brinquedo aqui? Tipo, a peça se encaixaria no objetivo que tem o brinquedo?

Scholles: *Ela iria começar a se encaixar na maioria das peças ali* [aponta para o brinquedo, se referindo aos orifícios]

Pesquisadora: E daí?

Scholles: *Não iria ter um desafio no brinquedo que tu tem que encaixar as peças certas no lugar.*

Pesquisadora: Aham. E a tua peça, será que ela se encaixa em algum outro buraco? Outro orifício ali?

[...]

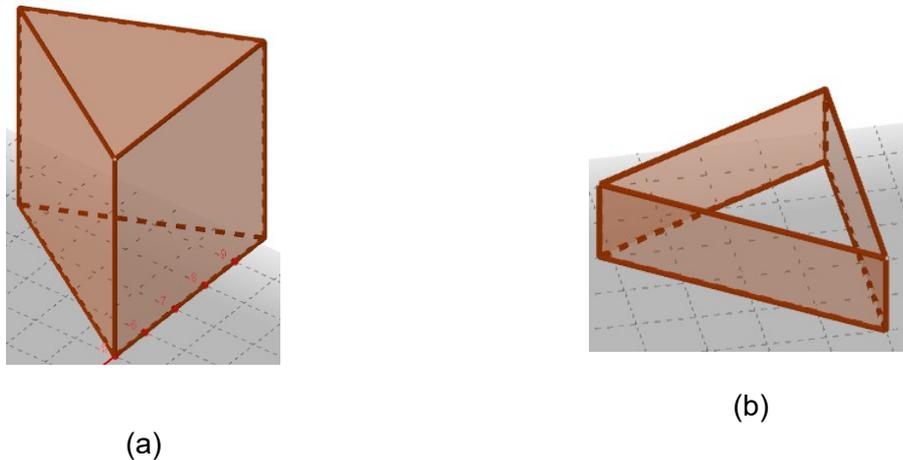
Scholles: *Dependendo ela poderia entrar no quadrado também, eu acho. Se botar ela de lado. Só que daí não estaria na forma do quadrilátero. (Quis dizer que a peça não estaria no formato do orifício, ou seja, alerta sobre outra característica do brinquedo que cada peça tem seu lugar)*

Quando se utiliza a impressão 3D no ensino, outras reflexões devem ser feitas para que a impressão aconteça com sucesso, como a posição da peça para a impressão, se ela necessita de suportes, se o projeto está num formato otimizado para não desperdiçar material de impressão e também tempo. Depois de lançar o problema analisado anteriormente, a pesquisadora questionou-os em relação à impressão da peça, assim, lançou-se a necessidade de uma reorganização dos pensamentos já formados, enriquecendo-os pela introdução de novas possibilidades não consideradas até então. A situação não deve ter como objetivo somente a construção de um artefato mas sim, um pensamento maior sobre a concepção do processo total, “*a reflexão do que está sendo feito e os resultados obtidos*” (BORGES; MENEZES, 2018, p. 464).

Diante desta situação, os participantes da pesquisa modificaram seus projetos iniciais, alegando que poderiam ter feito mais otimizados e que ainda respeitariam as demais características que o objeto precisa ter. A maioria dos alunos utilizou a mesma construção, mas retirou uma das faces, fazendo a peça vazada, outros fizeram um prisma vazado fazendo outro prisma por dentro. A Figura 19 traz um

exemplo da transformação da peça, a peça original (a), entregue na Atividade 12 e o resultado final da atividade 13 (Figura 19 (b)), após as modificações realizadas.

Figura 19 – Modificação de peça para otimização



Fonte: da própria autora, dados coletados

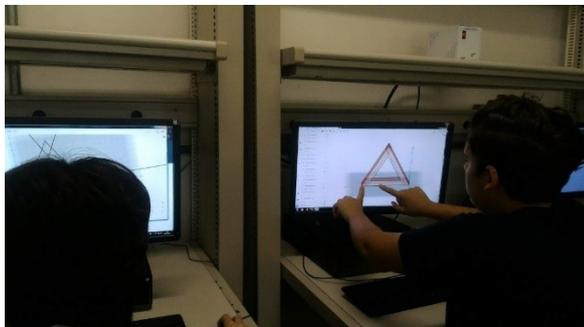
Alguns participantes tentaram relatar seus procedimentos adotados: “*Tirando os lados, tiramos o excesso de volume da nossa camada de espessura do triângulo onde usamos mais espaço no meu ponto de vista.*” – Tarsila relatando sua estratégia para otimizar a peça. Renoir ainda descreve como sua peça deve estar posicionada para a impressão: “*acredito que se for colocada de cabeça para baixo (com o teto como base) seja possível não gastar nenhum filamento a mais*”, assim, não necessita de suportes no momento da impressão, não desperdiçando material de impressão.

Na apresentação, a necessidade de uma posição correta para a impressão também é explicada pelo participante:

Renoir: *Eu acredito que tenha sim uma posição específica que é como está aqui [mostra na tela] de cabeça para baixo, com a parte oca para cima, com o tampão para baixo, porque daí faz toda uma base para assim começar a subir as paredes, porque se eu começar a subir só as paredes na hora que eu for fazer o tampão eu acredito que ele vai afundar, por causa do peso do material, então eu acho que o jeito, eu não sei se funcionou, eu não testei, eu espero que funcione, de não desabar, assim as paredes, como elas vão ser feitas em camadas assim*

eu acredito que por essas linhas aqui [mostra as arestas laterais] uma vai sustentar a outra.

Figura 20 - Aluno construindo sua peça e discutindo com o colega



Fonte: da própria autora, dados coletados

Na transcrição da entrevista que segue, percebe-se como uma situação problema faz os alunos analisarem diferentes estratégias e muitas vezes essas estratégias utilizadas são debatidas entre eles como mostrou a Figura 20 anteriormente.

Pesquisadora: Tu acha que daria para otimizar mais ainda, teria como tipo fazer ela...

Renoir: *Eu fiz, eu tinha sim pensando numa coisa, que era tirar esses pontos [mostra na tela os vértices] pra não usar filamento aqui, eu tinha pensando numa coisa mas eu acho que o GeoGebra não tem é deixar essas arestas finas.*

Pesquisadora: Por que tu não tirou os pontos?

Renoir: *Pra eu poder explicar essa parte, eu acho que ficaria estranho. Mas eu não vi essa opção de por exemplo deixar estas arestas mais finas, deixa-la fininha, retinha, junto, no mesmo nível do [mostra com o dedo a face]*

Pesquisadora: Na mesma espessura que a parede.

Renoir: *Isso. Mas eu não achei essa opção, eu não consegui de jeito nenhum. Não sei se tem.*

Quando os alunos são desafiados com uma situação problema, onde precisam criar suas estratégias de resolução, também é instigado que os alunos

coloquem personalidade nas suas peças, suas ideias pessoais. Nesta experiência a pesquisadora se surpreendeu com a originalidade das peças apresentadas.

Figura 21 – Peças construídas pelos participantes



Fonte: da própria autora, dados coletados

Foi observado que nenhum dos estudantes fez a peça igual à peça original do brinquedo, eles não tiveram acesso a essa peça, assim, apresentaram um gama de diferentes resultados, como prismas triangulares, pirâmides, peças vazadas por uma das faces, ou com o orifício de outro prisma, ou ainda dois triângulos interligados por um cubo. Essa gama de construções é mostrada na Figura 21.

Quando há interação entre o sujeito e o objeto de conhecimento, e neste caso o interesse dos alunos demonstrou isso, acontece sempre uma adaptação cognitiva maior do que a anterior, ou seja, uma evolução.

O momento de receber as peças impressas é rico para as análises, estas relatadas nas anotações da pesquisadora. O *feedback* proporcionado pela impressão 3D, proporcionou surpresas aos participantes, onde, muitas das peças projetadas não ficaram com as características pretendidas, que achavam que haviam colocado no momento da construção no GeoGebra. Por exemplo, peças menores ou ainda, não respeitando o triângulo da base como um equilátero. O software GeoGebra apresenta todos os recursos necessários para se projetar uma peça como a solicitada, com todas as características exigidas, porém, para verificar algumas dessas características, como medidas e proporcionalidade é necessária uma posição correta na tela. Essa dificuldade de posicionar na tela uma imagem que não distorce essas características, que pode ter provocado esses equívocos. Assim,

foi a impressão 3D que colocou em evidências elementos geométricos que, espontaneamente, o software GeoGebra não colocou.

As análises de cada atividade realizada nesse capítulo, proporcionaram para a pesquisa evidências de que o software GeoGebra e a impressão 3D foram ferramentas para experiências que envolviam conhecimentos da geometria, onde os alunos puderam se envolver com elementos do espaço.

No próximo capítulo, se realiza uma retomada dessas análises de uma forma geral, levando em consideração toda a investigação realizada.

8. RESULTADOS FINAIS

Esta pesquisa, para atingir o objetivo principal, organizou-se em objetivos específicos, retomando-os:

- Investigar como se desenvolve o pensamento geométrico;

Este objetivo foi atingido principalmente no capítulo três desta obra, onde a pesquisadora estudou a obra piagetiana *A representação do espaço na criança*, estudo esse que proporcionou a tomada de várias decisões em relação à investigação realizada, como também serviu de suporte nas análises desta investigação, auxiliando na interpretação dos dados produzidos, assim como uma melhor compreensão do pensamento espacial dos sujeitos investigados.

- Analisar as habilidades relacionadas com a visualização espacial;

As habilidades da visualização espacial foram analisadas através dos estudos de Angel Gutierrez, apresentadas no subcapítulo 3.2. Quais os papéis envolvidos no processo da visualização, os elementos da visualização e a transformação da representação externa para uma imagem mental fundamentaram as decisões tomadas para a construção da investigação e também para as análises dos dados coletados. A descrição das habilidades espaciais justificou as tarefas aplicadas.

- Verificar as potencialidades do GeoGebra e da impressora 3D para favorecer o desenvolvimento de habilidades geométricas espaciais;

As tecnologias digitais foram examinadas em relação às suas características, potencialidades, eficiência e aplicabilidade no capítulo quatro. Diante disso, tomou-se a decisão do uso do software de matemática dinâmica GeoGebra e da impressora 3D, cujo uso, verificado através de uma pesquisa específica, considera-se uma opção viável para os professores, tanto pela possibilidade de a própria escola adquirir uma impressora 3D como pelo uso de laboratórios abertos à comunidade que disponibilizam esta tecnologia. Ambas tecnologias escolhidas apresentaram características apropriadas para proporcionar experiências que desenvolvem habilidades espaciais.

- Verificar como estão sendo utilizados os recursos digitais para o pensamento geométrico espacial no ensino e na aprendizagem;

Este objetivo foi atingido, tanto no estudo sobre as tecnologias, no capítulo quatro, como em uma amplitude maior na revisão sistemática da literatura, apresentada no capítulo cinco. Essa revisão buscou o estado da arte da pesquisa em publicações nacionais e internacionais, que apresentaram resultados do uso de alguma tecnologia digital idealizando o pensamento geométrico espacial no nível da educação básica. E essa revisão mostrou que há uma certa carência de propostas que contemplem o uso de tecnologias almejando o pensamento espacial de alunos do ensino básico.

- Analisar os tipos de recursos digitais e as propostas de atividades que podem ativar processos de abstração reflexionante em relação a conceitos espaciais;

A construção da investigação se deu pela elaboração de uma sequência de atividades com a intenção de que essas proporcionassem experiências que desencadeassem interações entre os objetos de conhecimento, relacionados ao pensamento espacial, e os sujeitos participantes da pesquisa. Essa sequência de atividades fez uso de tecnologias digitais, já citadas, o GeoGebra e a impressão 3D.

Diante dessa elaboração de atividades, sucedeu-se a aplicação da proposta, em uma escola do ensino básico. Com a aplicação da proposta, analisou-se o comportamento dos participantes diante de cada atividade e os indícios de abstrações reflexionantes envolvidos em cada experiência. Para isso se fez anteriormente um amplo estudo dessa teoria apresentada no capítulo dois. Essa sequência de atividades e toda a análise realizada encontram-se no capítulo anterior a este, capítulo sete.

Ao atingir esses objetivos específicos, se retoma o objetivo principal da tese: **Analisar como as tecnologias digitais, possibilitando a construção e manipulação de objetos espaciais, com software de geometria dinâmica e com impressão 3D, proporcionam interações e experiências que contribuem com o processo de abstração reflexionante na construção do pensamento geométrico espacial.**

Pode-se dizer que toda a tese, no seu total, está vencendo esse objetivo. Analisou-se como as tecnologias digitais proporcionaram interações e experiências que contribuíssem no processo do desenvolvimento do pensamento espacial. O uso

dessas tecnologias se deu para projetar, manipular, construir, imprimir objetos de estudo, abundantes de propriedades e conceitos geométricos espaciais.

O uso das tecnologias em cada uma das atividades desenvolvidas proporcionou aos participantes experiências vinculadas à geometria espacial. Primeiramente, proporcionaram abstrações empíricas, pelo ato de visualização pura, de retirar informações através de manipulações de rotação, de aproximações, de tentativas, dados físicos do objeto. Esse empirismo, por algumas vezes, era suficiente para algumas constatações e, principalmente, a tentativa e o erro forneciam alguns resultados satisfatórios. Este fato aconteceu, por exemplo, na atividade das secções no cubo. Mas, em outros momentos, foi necessário o emprego das operações internas do sujeito, ações e coordenações de ações dos participantes para que conseguissem interpretar os problemas dos quais estavam diante e resolvê-los, por exemplo nas atividades iniciais, das estradas. Ou seja, aconteceram processos de abstrações pseudo-empíricas, um tipo de abstração reflexionante.

Além do mais, somente o empirismo não bastava para manipular o software, eram necessários conhecimentos prévios para utilizar as ferramentas do software de forma apropriada e eficiente. Quanto mais os participantes o utilizavam, mais isso ficava evidente para eles.

A possibilidade de tentativa e erro que o software proporcionava despertava nos participantes uma reflexão sobre os seus atos e resultados, chegavam a soluções por sucessos ou fracassos. Porém, nas tarefas posteriores, os participantes mostravam uma aplicabilidade dessas constatações atingidas pelos processos empíricos, ou seja, começaram a relacionar essas constatações empíricas com suas operações internas, estavam aplicando em outros processos. Isso ficou evidenciado nas atividades da construção da mesa e da cadeira.

Alguns relatos dos participantes em relação ao uso do software: “... a *acessibilidade com o computador facilitou muito no desenvolvimento das tarefas*” (Da Vinci), “*No início, eu particularmente, nunca tinha usado o aplicativo do GeoGebra Classic (Janela 3D) e tive um pouco de dificuldade, mas com o passar do tempo, fui aprendendo a utilizar e aperfeiçoei cada vez mais as tarefas feitas, com empenho na realização das mesmas, sabendo responder as perguntas*” (Botticelli).

Esse último relato deixa evidente a decisão tomada pela pesquisadora, em relação à apropriação do software ser realizada pelas próprias experiências dos participantes e como isso trouxe resultados positivos.

Já a experiência com a impressão 3D permitiu aos participantes da pesquisa sentir, analisar e julgar aspectos que a visão na tela do computador não permitia, pois depois de impressa a peça, fizeram diversos julgamentos sobre sua construção. Mesmo que, com a impressão da peça, se perde uma das propriedades valiosas da geometria dinâmica que é a dinamicidade, o resultado físico proporcionou ganhos para o pensamento espacial. Foi interessante notar o entusiasmo deles, o deslumbramento do primeiro contato com a impressão 3D e ver uma peça projetada por eles ganhando forma física, sendo materializada. Todos ficavam ansiosos em poder manusear suas peças, mesmo que não tenha ficado da maneira como haviam imaginado. Esses erros, muitas vezes de visualização espacial, de proporcionalidade, provocaram reflexões dos estudantes sobre suas estratégias, agregando experiências e conhecimentos. As atividades da letra inicial dos seus nomes, como da mesa e cadeira trouxeram dados para essas conclusões. A inserção da impressão 3D no ensino de geometria não agrega somente mais um meio de representação, de visualização, mas também mais e novos raciocínios de práticas para executar e resolver um problema, um projeto.

Os participantes deixaram transparecer a satisfação em relação à impressão 3D e o software: *“aprender a usar o GeoGebra me ajudou em outras matérias como em matemática, além de que sempre quis imprimir algo numa impressora 3D”* (Van Gogh); *“... em minha visão as melhores foram as que você tinha foco em construir, como: A da mesa, da cadeira, da planificação, do multicubo, entre outras”* (Da Vinci); *“os pontos positivos foram fazer atividades diferentes e que saem do comum de tarefas de escola”* (Michelângelo); *“essa foi uma das poucas experiências com trabalho em software que a gente tem nas aulas, aprendi bastante com o GeoGebra em relação ao tamanho dos modelos na vida real e o no cenário 3D, e aprendi um pouco a pensar em maneiras de construir a mesma coisa mais rápida ou de modo mais fácil...”* (Scholles). O comentário de Scholles evidencia a reflexão perante cada resultado encontrado nas tentativas realizadas.

O uso da impressora 3D foi o ponto principal para a escolha e a ordem das atividades propostas. No início da aplicação, a impressora ainda não havia sido

adquirida, por isso iniciaram-se pelas atividades que não faziam uso desse recurso e também não faziam referência a isso. Quando a impressora foi entregue, chegou o momento da pesquisadora se apropriar dela, de aprender como esse recurso funcionava e quais possibilidades que ela poderia oferecer.

Outro aspecto relevante considerado na organização das aulas foi o tempo de impressão, que levava em média de vinte a trinta minutos por peça. Isso impossibilitou a impressão de todas as peças durante os períodos de aula. Este fato também levou a outra decisão, que não se poderia utilizar esse recurso em toda a sequência de atividades, portanto, se intercalou entre atividades com o uso da impressora e sem o uso dela. Ainda, a pesquisadora precisou dedicar boa parte do tempo fora das aulas para a impressão das peças. Esses momentos de impressão sempre eram divulgados para os participantes para que, quem tivesse a disponibilidade, pudesse ir ajudar/assistir a impressão. Alguns aceitaram o convite e se fizeram presente em diferentes momentos.

Diante disso, a primeira atividade a fazer uso da impressão foi a atividade de projetar uma mesa e posteriormente, a respectiva cadeira. Como a pretensão era de que os alunos pudessem visualizar a impressão e essa ser feita no momento da aula, sorteou-se somente uma mesa e uma cadeira projetadas pelos participantes. Neste encontro, eles puderam ver como é convertido o arquivo do GeoGebra para o software de fatiamento da impressora (Repetier-Host), visualizar nesse software como se dará a impressão camada por camada, o tempo gasto, a quantidade de filamento que será derretido. Ainda, puderam vislumbrar a impressora funcionando e algumas de suas características técnicas. Quanto às peças impressas, como já discutido nas análises dessa atividade, os alunos puderam constatar a importância de se levar em consideração a proporcionalidade.

Figura 22 – Letras impressas com as iniciais dos participantes



Fonte: própria autora, dados coletados

Diante da curiosidade dos alunos perante as peças projetadas e impressas por eles mesmos, a pesquisadora fez questão de propor uma atividade na qual os projetos do objeto tridimensional seriam únicos para cada participante. Todos eles seriam impressos e os participantes poderiam ficar com essas peças para eles. Para isso, foi proposta a tarefa de construir no GeoGebra a letra inicial do nome e, inserir um “anel” para que pudesse ser utilizada como um chaveiro (Atividade 7). A visualização dessas letras impressas pelos alunos encontra-se na Figura 22. Esta atividade, além de desenvolver as habilidades impostas pela impressão e pela construção de um sólido no GeoGebra, também explorou conceitos de perspectivas.

Percebe-se pela Figura 22 que todos, à exceção de um, utilizaram um arco para fazer o “anel” para o chaveiro, porém alguns necessitaram de suporte e outros não. Essa decisão foi tomada diante do software de fatiamento, por cada participante. Um dos projetos utilizou pequenos cubos para fazer esse “anel” (letra J), mas como precisou de suporte e o participante não quis modificar seu projeto, a abertura desse “anel” ficou insuficiente. Este fato demonstrou ao participante que cada decisão tomada deve ser muito bem analisada.

Figura 23 – Momento da impressão



Fonte: própria autora

Como o tempo gasto para a impressão de todas as letras foi elevado, neste intervalo exploraram-se as atividades desvinculadas à projeção e impressão 3D, como as atividades da secção no cubo, a planificação e dos multicubos, que proporcionaram outras experiências e desenvolveram outras estruturas cognitivas relacionadas à geometria espacial, fazendo uso da manipulação que o software GeoGebra proporciona.

Para finalizar a investigação, como também a disciplina eletiva, se propôs uma situação problema, atividades doze e treze, referentes à construção de uma peça tridimensional para um brinquedo. Essa atividade desencadeou muitas experiências, envolveu diferentes habilidades e proporcionou, aos participantes, situações desafiadoras de reflexão, de constatações, de tomadas de decisões, de análises. Tudo isso já foi discutido no subcapítulo referente às análises dessas atividades.

Essa atividade exigia a impressão de cada peça projetada pelos participantes, e esse fato proporcionou um *feedback* sobre o projeto que haviam realizado. No final da disciplina, quando todos os alunos já haviam apresentado as outras atividades, receberam essas peças impressas e puderam verificar se elas estavam compatíveis com o brinquedo disponibilizado a eles naquele momento. Alguns, já tiraram diversas conclusões antes mesmo de testar a peça no brinquedo, outros

aproximaram-se em muito à uma peça ideal, mas principalmente, todos refletiram sobre os seus resultados e queriam fazer melhorias.

Na leitura das análises, percebe-se que esta investigação trouxe indícios que impactou o desenvolvimento do pensamento espacial, diante de uma diversidade de situações, de experiências que exigiram dos participantes ações e coordenações de ações diante de objetos de conhecimentos da geometria espacial, tanto o uso do software GeoGebra proporcionou estas experiências como as decisões e os resultados tomados perante a impressão 3D. A cada passo dado para a resolução de um problema, verificava-se o envolvimento de diferentes conceitos espaciais, fez-se uso de conhecimentos prévios dos participantes e reflexionamentos de situações novas e uma reorganização de suas estruturas, uma reflexão, aumentando suas capacidades cognitivas. Em alguns momentos, as soluções apresentadas ficaram aquém do esperado, porém apresentaram indícios que mesmo assim, as situações propostas modificaram as estruturas dos sujeitos, os desequilibraram cognitivamente, este fato já os modificou para novas situações.

Os dados produzidos trouxeram indicativos de diversos momentos de abstrações reflexionantes, de um patamar cognitivo superior, como uma abstração reflexiva, uma tomada de consciência. A cada uma dessas abstrações os participantes estavam se modificando, se reequilibrando, passando de um patamar cognitivo para um superior, ou seja, desenvolvendo o pensamento geométrico espacial.

9. CONCLUSÕES

Como professora de matemática, na fase inicial desta pesquisa procurei desenvolver e analisar uma proposta que contribuísse para o ensino e aprendizagem da geometria espacial. Para tanto, pensei em produzir uma tese que pudesse ser utilizada como referência e incentivo para professores produzirem suas aulas e que trouxesse benefícios para a aprendizagem dos alunos.

Diante de inquietações em relação a novas abordagens que se deve implementar nas escolas perante a evolução das tecnologias digitais, sobre a nova postura e comportamento dos educandos e visando a aprendizagem neste cenário, se fez o seguinte questionamento:

Como o uso dos recursos de visualização e interação, proporcionados pelo software GeoGebra e a impressora 3D, pode impactar o processo de abstração reflexionante envolvido no pensamento geométrico espacial, em estudantes do Ensino Médio?

A pesquisa apontou potencialidades do uso dessas tecnologias digitais utilizando os recursos de visualização, de manipulação e interação no desenvolvimento do pensamento espacial. Esse uso, mais especificamente em relação à abstração reflexionante, provocou situações que perturbaram o equilíbrio cognitivo, algumas vezes fazendo o participante abstrair pelos processos de reflexionamento e reflexão, depois de uma experiência pseudo-empírica. Em outros momentos trouxe evidências de uma abstração em um patamar superior, a abstração refletida. As tecnologias digitais também desafiaram os participantes a experienciar situações novas, das quais as experiências proporcionadas ainda não foram suficientes para uma evolução, mas demonstraram serem necessárias.

De uma maneira mais específica, diante da investigação realizada, a contribuição inédita desta pesquisa se apresenta pela seguinte tese: **o uso de tecnologias digitais, unindo os recursos matemáticos do software GeoGebra e a impressão 3D, pode proporcionar experiências que desencadeiam processos de abstrações reflexionantes, ou seja, pode desenvolver o pensamento espacial de estudantes do ensino básico.**

Além do mais, esta pesquisa mostrou a infraestrutura que essas tecnologias podem trazer para a aprendizagem, mostrou que com o suporte das tecnologias digitais é possível proporcionar experiências cognitivas novas aos estudantes em pensar-com e não somente uma transferência de procedimentos operacionais.

O conhecimento sobre a impressão 3D pela pesquisadora se deu praticamente junto com os participantes, diante de diferentes situações que a investigação proporcionou. A pesquisadora, como professora, acredita que um professor também pode aprender com seus alunos, junto com eles, que podem construir conhecimentos. Os professores, muitas vezes tem receio de levar coisas novas para suas salas de aula por terem receio de não saberem o suficiente, de não estarem preparados, de estarem aquém dos nativos digitais. Um dos resultados desta pesquisa, para a própria formação da pesquisa, demonstrou que um professor não precisa sempre saber mais do que o aluno, pois, em diferentes momentos os participantes auxiliaram a pesquisadora, mostraram coisas novas que ela não conhecia nos próprios recursos que ela estava propondo.

Outro elemento que foi desafiante para a pesquisadora foi separar seu papel de professora com a de pesquisadora, principalmente pela intenção de utilizar as características do método clínico piagetiano. Em diversos momentos essa dificuldade ficou evidenciado nos trechos das entrevistas, onde a pesquisadora não conseguiu se mostrar imparcial nas respostas dos alunos e muitas vezes explicou a situação, diferente da pretensão que era verificar o pensamento do participante.

A forma como está escrita as atividades também influenciaram nos resultados das análises. Com a pretensão dos participantes serem espontâneos nas resoluções das atividades, algumas vezes os termos utilizados nos enunciados causaram hesitações por parte dos sujeitos e tomadas de decisões diferentes do esperado, causando para as análises incertezas quanto se o participante não havia entendido o que fazer ou se era de fato uma insuficiência cognitiva.

Mesmo que, na construção dessas atividades se refletiu diversas vezes quais situações seriam adequadas, a maneira de como deveriam estar escritas, quais perguntas seriam pertinentes, após a investigação verificou-se a necessidade de aprimorar algumas delas. Como a atividade 2 poderia ter sido realizada no espaço tridimensional, expressões como “bem reta” e “combinar” das atividades 1 e 5,

respectivamente, poderiam ser substituídas por outras mais apropriadas. Também na atividade 1, dá-se a entender que os pontos são os postes, mas não, os pontos representam as posições dos postes.

O resultado da peça impressa, além de proporcionar ao aluno um *feedback* sobre suas decisões tomadas, ainda se mostra ser um objeto poderoso para o professor, ele demonstra a capacidade cognitiva dos alunos, é um meio concreto de evidenciar o desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

Esta tese deve levar a outros pesquisadores do ensino novas possibilidades e aos professores ideias de construção de novas práticas, significativas, que vislumbram o desenvolvimento do pensamento dos alunos dentro da era tecnológica.

As experiências aqui vivenciadas pela pesquisadora trouxeram novas possibilidades e desejos de futuros estudos, com uso da impressão 3D, almejando outros conhecimentos, desenvolvendo outras habilidades e em outros níveis de ensino. Apesar do relato sobre o tempo gasto com a impressão, o que se conclui que com uma boa estratégia e organização é, sim, possível fazer isso na sala de aula. Além do mais, as tecnologias estão sempre em evolução, de que daqui a um instante, a impressão 3D será ainda mais eficiente.

Diante disso, é desejável que outros professores possam apropriar-se desta tese, que não fique somente no meio acadêmico, que não fique somente como mais uma pesquisa realizada e não factível no cenário da educação brasileira. Boas práticas são possíveis e estas devem servir de incentivo para outras que devem e precisam vir.

REFERÊNCIAS

- BACH, Benjamin et al.. The Hologram in My Hand: How Effective is Interactive Exploration of 3D Visualizations in Immersive Tangible Augmented Reality? **IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics**. v. 24, n. 1, jan. 2018
- BASSO, Marcus; NOTARE, Márcia Rodrigues. Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica. **Renote**, Porto Alegre, v. 13, n. 2, 2015.
- BECKER, Fernando. Sujeito do Conhecimento e Ensino de Matemática. **Schéme**: Revista eletrônica de psicologia e epistemologia genéticas, São Paulo, v. 5, p.65-86, set. 2013. Semestral. Disponível em: <http://www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/scheme/article/view/3222/2517>. Acesso em: 12 out. 2017.
- BENEDICTO, Clara; ACOSTA, César; GUTIÉRREZ, Angel; HOVOS, Efraín; JAIME, Adela. **Improvement of gifted students' visualization abilities in a 3D computer environment**. In: Proceedings of the 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching, ICTMT12. Portugal: 2015
- BICER, Ali Bicer et al. Moving from STEM to STEAM: The Effects of Informal STEM Learning on Students' Creativity and Problem Solving Skills with 3D Printing. **IEEE**, 2017.
- BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação**: introdução à teoria e aos métodos. Tradução de Maria João Alvarez, Sra Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Rev. Antônio Branco Vasco. Coleção Ciências da Educação. Porto:1994. 337 p.
- BORGES, Karen Selbach; MENEZES, Crediné Silva de. **Uma arquitetura pedagógica para aprendizagem baseada na fabricação digital**. In: Anais do XXIX Simpósio Brasileiro de Informática na Educação (SBIE). Fortaleza, 2018, p. 457-465
- CANESSA, Enrique; FONDA, Carlo; ZENNARO, Marco. **Low-cost 3D Printing for Science, Education & Sustainable Development**. ICTP—The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics. 2013.
- CARVALHO, Marlene Lima de Oliveira. **Representações Planas de corpos geométricos tridimensionais: uma proposta de ensino voltada para a codificação e decodificação de desenhos**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, p. 245. 2010
- CLARK, Aaron; ERNST, Jeremy. Visual Science and STEM-based 6-12 education. **American Society for Engineering Education**, 2008.
- COLL, César; MONEREO, Carles (Orgs). **Psicologia da Educação Virtual**: aprender e ensinar com as tecnologias da Informação e da Comunicação. Tradução de Naila Freitas. Porto Alegre: Artmed, 2010. 365 p.

DELVAL, Juan. **Introdução à Prática do Método Clínico**: descobrindo o pensamento das crianças. Tradução de Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed, 2002. 267 p.

DOLLE, Jean-Marie. **Para compreender Jean Piaget**: Uma iniciação à Psicologia Genética Piagetiana. Tradução de Maria José J. G. de Almeida. 4. ed. Rio de Janeiro: Guanabara, 1987. 200 p.

DRIJVERS, Paul et al. Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In: HOYLES, Celia; LAGRANGE, Jean-Baptiste (Eds). **Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain**: The 17th ICMI Study. US: Springer, 2010. p. 89-125

GUTIÉRREZ, Angel. **Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales em la enseñanza de la geometria espacial**. In: Revista EMA, v. 3, n. 3, 1998, p. 193-220

GUTIÉRREZ, Angel. **Procesos y habilidades em visualizacion espacial**. In: Memorias del 3er Congreso Internac. Sobre Investig. Em Educ. Mat. Valencia, 1991

GUTIÉRREZ, Angel. Visualization in 3-Dimensional Geometry: In: PUIG, L.; GUTIÉRREZ, A (Eds). **Search os a Framework**: Proceedings of the 20th PME Conference, v. 1, p. 3 -9, 1996

HULEIHIL, M. 3D printing technology as innovative tool for math and geometry teaching applications. **IOP Conf. Series**: Materials Science and Engineering, 2017

JAHN, Ana Paula; BONGIOVANNI, Vincenzo. Algumas possibilidades do software Cabri 3D para o estudo da Geometria Espacial. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 69, SBM, 2009

JONES, Keith; MACKRELL, Kate; STEVENSON, Ian. Designing Digital Technologies and Learning Activities for Different Geometries. In: HOYLES, Celia; LAGRANGE, Jean-Baptiste (Eds). **Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain**: The 17th ICMI Study. US: Springer, 2010. p. 47-59

KAPUT, Jim; HEGEDUS, Stephen; LESH, Richard. Technology Becoming Infrastructural in Mathematics Education. In: LESH, R.A; HAMILTON, E.; KAPUT, J. J. (Eds.). **Foundations for the future in mathematics education**. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 2007. p.173-191

KNILL, Oliver; SLAVKOVSKY, Elizabeth. **Thinking like archimedes with a 3D printer**. Mathematics Subject Classification. 2013.

LABORDE, Colette et al. Teaching and learning geometry with technology. In: Gutiérrez; A.; Boero, P. (ed). **Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: past, presente and future**. Sense Publishers, 2006. p. 275-297.

LEMKE, Raiane; SIPLE, Ivanete Zuchi; FIGUEIREDO, Elisandra Bar de. OAs para o ensino de cálculo: potencialidades de tecnologias 3D. **Renote**, Porto Alegre, v. 14. n. 1, 2016.

LIEBAN, Diego; BARRETO, Marina M.; REICHENBERGER, Sandra; LAVICZA, Zsolt; SCHNEIDER, Ruana M. **Developing Mathematical and Technological Competencies of Students Through Remodeling Games and Puzzles**. In: Conference Proceedings Bridges Stockholm 2018: Mathematics, Art, Music, Architecture, Education, Culture. p. 379-382

LOURENÇO, Orlando. **Além de piaget? Sim, mas primeiro além da sua interpretação padrão!** In: Análise Psicológica, v. 4 (XVI), 1998. p. 521-552

LOWRIE, Tom. The influence of visual and spatial reasoning in interpreting simulated 3d worlds. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**. n. 7, 2002. p. 301-318

MACEDO, Alex de Cassio; SILVA, João Assumpção da; BURIOL, Tiago Martinuzzi. Usando Smartphone e Realidade aumentada para estudar Geometria espacial. **Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 14, n. 2, dez. 2016.

MONTANGERO, Jacques; MAURICE-NAVILIE, Danielle. **Piaget ou a Inteligência em evolução**: Sinopse cronológica e Vocabulário. Tradução de Tânia Beatriz Iwaszko Marques e Fernando Becker. Porto Alegre: Artmed, 1998. 764 p.

MONTENEGRO, Gildo A. **Inteligência Visual e 3D**: Compreendendo Conceitos Básicos da Geometria Espacial. São Paulo: Edgard Blücher, 2005. 85 p.

MONZON, Larissa Weyh; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. **Prospecção de Pesquisas sobre o uso de Tecnologias Digitais para o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico Espacial**. **Renote**, Porto Alegre, v. 16. n. 1, 2018

MUI, Khor; RUZLAN Md-Ali. GeoGebra: Towards realizing 21st century learning in Mathematics education. **Malaysian Journal of Learning and Instruction**: Special issue on Graduate Students Research on Education, 2017, p. 93-115.

NOTARE, Márcia; BASSO, Marcus. Geometria Dinâmica 3D – novas perspectivas para o pensamento espacial. **Renote**, Porto Alegre, v. 14. n. 2, 2016

OLIVEIRA, Livia de. A construção do espaço, segundo Jean Piaget. **Sociedade e Natureza**, Uberlândia, v. 17, n. 33, dez. 2005. p. 105-117. Disponível em: <http://www.seer.ufu.br/index.php/sociedadenatureza/article/viewFile/9205/5667>. Acesso em: 29 mar. 2018

PIAGET, Jean. **Abstração reflexionante**: Relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, [1977] 1995. 292 p.

PIAGET, Jean. Development and learning. In LAVATTELLY, C. S. and STENDLER, F. **Reading in child behavior and development**. New York: Hartcourt Brace Janovich, 1972.

PIAGET, Jean; INHELDER, Barbel. **A representação do espaço na Criança**. Tradução de Bernardina Machado de Albuquerque. Porto Alegre: Artes Médicas, [1948] 1993. 507 p.

SOTO, Claudia M. Acuña. **La visualization como forma de ver em Matemáticas: um acercamiento a la investigación**. Barcelona España: Gedisa, 2012. 251 p.

SOUZA, Letícia Capelão de; CANALLI, Hugo Leonardo. **Relatório de Revisão Sistemática da Literatura (SLR): Educação a distância, design e tecnologias assistivas para surdos: um panorama de 2007 a 2013, no estado de Minas Gerais**. UFMG, 2014. 186 p. Disponível em: <http://www.leticiacapelao.com/arquivos/academico/outras/CAPELAO-et-al-2014-Relatorio-SLR-EAD-Design-TA-Surdos.pdf>. Acesso em: 17 abr. 2018.

SUNG, Yao-Ting; SHIH, Pao-Chen; CHANG, Kuo-En. The effects of 3D-representation instruction on composite-solid surface-area learning for elementary school students. **Springer Science**, US, n. 43, 2014.

TALL, David. **Information Technology and Mathematics Education: Enthusiasms, Possibilities & Realities**. 1998. Disponível em: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html>. Acesso em: mar. 2015.

TURGUT, Melih; UYGAN, Candas. **Spatial ability training with 3D modelling software**. In: FAGGIANO, Eleonora; MONTONE, Antonella (Eds). Conference Proceedings 11th International Conference on Technology in Mathematics Teaching. Bari, 2013.

WAHAB, Rohani Abd et al. Evaluation by Experts and Designated Users on the Learning Strategy using SketchUp Make for Elevating Visual Spatial Skills and Geometry Thinking. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 31, n. 58, p. 819-840, ago. 2017.

ZUFFI, Edna Maura; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. **O ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas e os processos cognitivos superiores**. Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, n. 11, p. 79-97, set. 2007.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Termo de assentimento



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO



TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa **Abstrações reflexionantes no desenvolvimento do pensamento geométrico espacial: uma análise a partir do uso de Tecnologias Digitais**. Nesta pesquisa pretendemos analisar como as tecnologias digitais, softwares de geometria dinâmica e a criação de objetos com a impressão 3D, proporcionam interações e experiências para desenvolver o pensamento geométrico espacial em alunos do ensino médio.

O motivo que nos leva a estudar esse assunto é a presença constante de tecnologias digitais no cotidiano dos estudantes e que estas podem desenvolver diferentes habilidades cognitivas, portanto, devem ser um recurso para o ensino e aprendizagem nas escolas.

Para esta pesquisa adotaremos os seguintes procedimentos: você será convidado a interagir com atividades que fazem uso de tecnologias e que envolvem a manipulação de objetos espaciais, no momento dessas interações, você poderá ser filmado, fotografado, seu áudio gravado e a tela capturada do software em uso, ainda, a pesquisadora poderá intervir com questionamentos com o objetivo de entender melhor suas ações e pensamentos.

Para participar desta pesquisa, o responsável por você deverá autorizar e assinar um termo de consentimento. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. Você será esclarecido (a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. O responsável por você poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não acarretará qualquer penalidade ou modificação na forma em que é atendido (a). O pesquisador irá tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Você não será identificado em nenhuma publicação. Os riscos envolvidos na pesquisa consistem em **“RISCOS MÍNIMOS”**. A pesquisa contribuirá com informações importantes sobre o pensamento geométrico espacial e o uso das tecnologias digitais, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional. Os resultados estarão à sua disposição quando finalizada. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a permissão do responsável por você. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com a pesquisadora responsável por um período de 5 anos, e após esse tempo serão destruídos. Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias originais: sendo que uma será arquivada pela pesquisadora responsável, e a outra será fornecida a você. Os pesquisadores tratarão a sua identidade com padrões profissionais de sigilo, utilizando as informações somente para os fins acadêmicos e científicos.

Eu, _____, portador (a) do documento de Identidade _____, fui informado (a) dos objetivos da presente pesquisa, de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações, e o meu responsável poderá modificar a decisão de participar se assim o desejar. Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar dessa pesquisa. Recebi o termo de assentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas *dúvidas*.

Porto Alegre, ____ de _____ de _____.

Assinatura do Menor:

Assinatura da pesquisadora:

Assinatura do Orientador da pesquisa:

APÊNDICE B – Termo de consentimento



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO



TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, _____, R.G. _____, responsável pelo(a) aluno(a) _____, da turma _____, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada **Abstrações reflexionantes no desenvolvimento do pensamento geométrico espacial: uma análise a partir do uso de Tecnologias Digitais**, desenvolvida pela pesquisadora Larissa Weyh Monzon Hedler. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Marcus Vinicius de Azevedo Basso, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone (51) 33086212 ou e-mail mbasso@ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) do objetivo estritamente acadêmico do estudo, que, em linha geral, pretende analisar como as tecnologias digitais, softwares de geometria dinâmica e a criação de objetos com a impressão 3D, proporcionam interações e experiências para desencadear abstrações reflexionantes para o pensamento geométrico espacial em alunos do ensino médio.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (produção de tese, artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio da participação em aula, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como teses, artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos entrevistados ao precisarem responder a algumas perguntas sobre o desenvolvimento de seu trabalho na escola. A fim de amenizar este desconforto será mantido o anonimato das entrevistas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre o pensamento geométrico espacial e o uso das tecnologias digitais, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no telefone 51 993576022 ou e-mail larissamonzon@gmail.com.

Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av. Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e email etica@propeq.ufrgs.br

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, ____ de _____ de _____.

Assinatura do Responsável:

Assinatura da pesquisadora:

Assinatura do Orientador da pesquisa:

APÊNDICE C – Oficina sobre o software GeoGebra

Tutorial GeoGebra

Versão GeoGebra Classic 6

Opções ao lado direito: Janela 3D

Inicialmente o programa abre três janelas: a janela algébrica (esquerda), janela do teclado (embaixo) e a janela de visualização 3D. O que interessa é a visualização 3D, portanto pode-se fechar o teclado.

Na janela de visualização é apresentado um plano e três eixos ortogonais, esses eixos vão orientar quanto à altura, profundidade e largura. Também há a opção de desativá-los, no botão  assim como a opção de colocar



uma malha no plano base .

Os botões da parte superior, tratam das ferramentas de construção



do programa:



Primeiramente, cada aluno deve explorar cada um desses botões (clcando em cada botão abre uma série de opções). Depois, a pesquisadora irá percorrer cada uma dessas opções, mostrando o funcionamento do software, como também os conceitos geométricos indispensáveis para explorar construções tridimensionais.

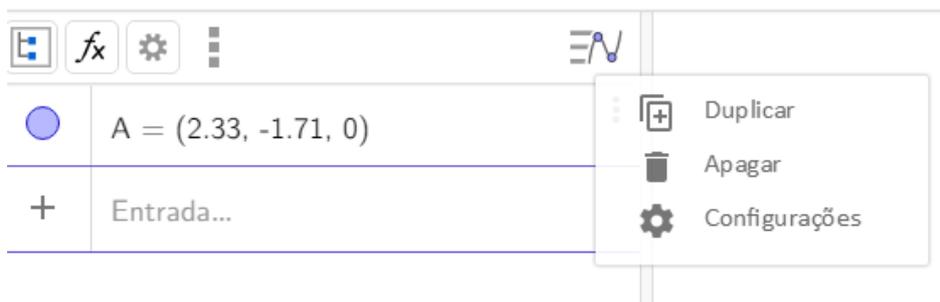


Botão de mover, serve para rotacionar o plano que aparece na tela, como também mover um elemento “solto” no ambiente.

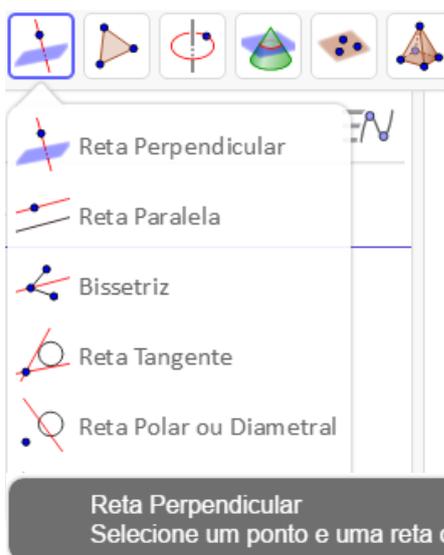


Botão ponto: Observe que não se pode colocar um ponto num espaço qualquer da tela, ele precisa estar em um objeto, ou ser uma relação entre dois objetos, como a intersecção ou o ponto médio. Vincular ou desvincular um ponto serve para “amarrarmos” ou desamarrarmos” ele de um objeto.

Observe que todos os elementos criados ficam registrados na janela algébrica, onde é possível alterar suas configurações, apagar, trocar a cor...



Botão Reta: Explorar cada tipo de reta possível de ser construída, observando a diferença entre elas.

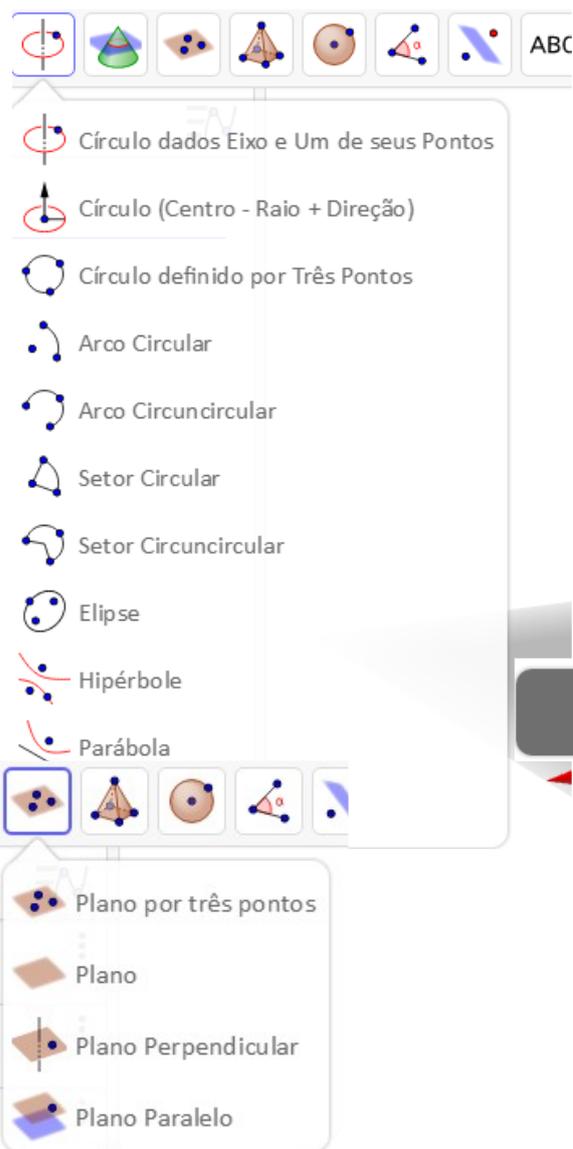


Explorar cada tipo de **posição relativa de retas**, introduzindo os conceitos de reta paralela, perpendicular, bissetriz e reta tangente, salientando os critérios que possibilitam as construções, conforme o próprio software menciona, por exemplo:



Ao explorar o **botão de polígono**, verificar os tipos de polígonos que o software possibilita fazer, se por exemplo, se quer um triângulo retângulo, é necessário verificar quais propriedades se deve respeitar e como se faz isso.

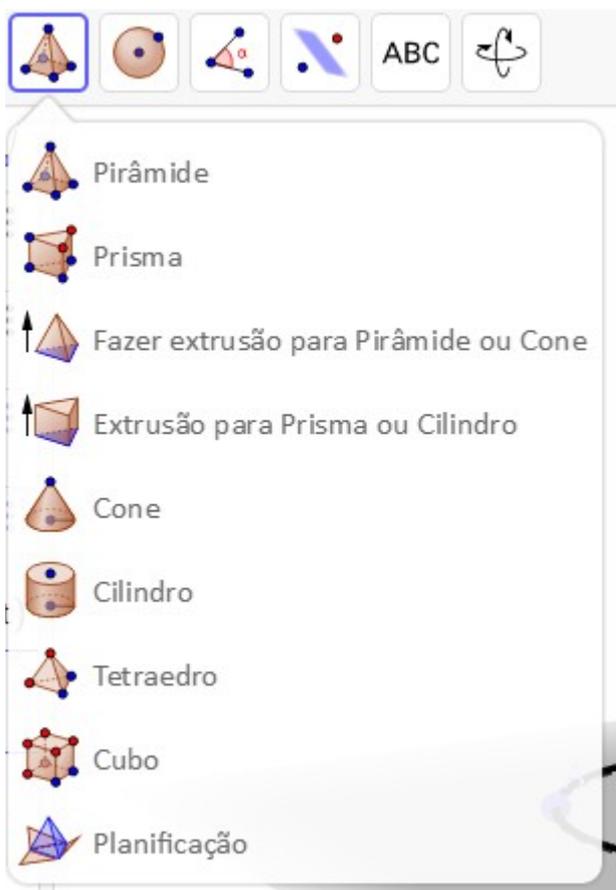
Polígono
Selecione todos os vértices e, então, o vértice inicial novamente



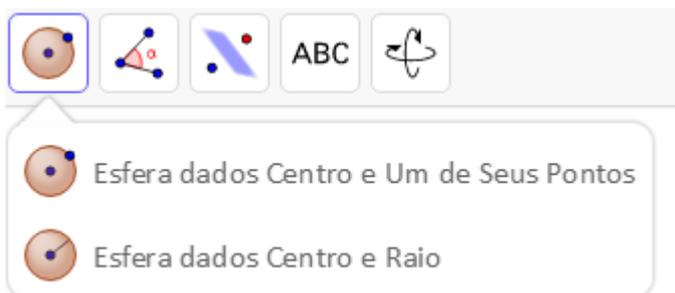
Em relação ao **círculo**, explorar as seguintes opções: círculo dado eixo e um dos seus pontos e círculos definido por três pontos.

Círculo dados Eixo e Um de seus Pontos
Selecione o eixo e, depois, o ponto do círculo

Explorar as opções de **planos**, observando cada um dos critérios necessários para as construções por exemplo, porque se precisa de três pontos, ou de um ponto e uma reta.



Em relação aos **sólidos**, explorar a construção da pirâmide, prisma, cone, cilindro, tetraedro (caso particular da pirâmide), cubo (caso particular do prisma) e a planificação. Desses, mencionar os tipos e sempre lembrando as propriedades que se deve respeitar no momento da construção.



E as duas opções de **esfera** serão debatidas com os alunos.

Diante dessa exploração dos recursos do GeoGebra, acredita-se que os alunos, de diferentes níveis de ensino, tenham se apropriado de conceitos e propriedades necessárias para que haja interação entre os objetos e os alunos nas atividades da proposta de investigação.

APÊNDICE D – Transcrição da entrevista sobre as Atividades 1 e 2

Pesquisadora: Tá, pessoal! O Martin vai apresentar as atividades 1 e 2, lembrando: é aquelas das estradas e a gente vai tentar organizar da seguinte maneira, eu vou, eu vou ler as perguntas iniciais e vocês respondam o que vocês já tinham respondido no programa ou se quiserem refazer a resposta de vocês agora no momento, tanto faz, eu já tinha dito para vocês, né? E, caso de dúvidas, eu quero ir perguntando de novo. Ahm... não reparem que a minha estratégia aqui, eu quero, talvez eu vá perguntar mais de uma vez a mesma coisa para vocês, tá? Então se eu estiver insistindo, não quer dizer que está errado, eu quero que vocês confirmem bem o que vocês estão dizendo pra mim, tá, então...

[fala sobre a instalação do projetor]

OK, Monet, podemos começar?

Monet: *Sim*

Pesquisadora: Então: ao longo da estrada mostrada na construção do GeoGebra abaixo, pretende-se colocar postes para fixar uma linha telefônica bem reta. Os pontos em azul são os primeiros postes colocados mas é necessário colocar mais postes a uma mesma distância entre eles. Abra essa construção pelo link e coloque os demais postes. Ahm... até, tá ali, tu quer fazer? A primeira pergunta é: escreva sua estratégia para colocar os demais postes.

Monet: *Eu utilizei, primeiro eu fiz um segmento de reta entre os dois postes e como tem que deixar alinhados os postes, eu usei essa opção aqui que tu mede o centro daí eu selecionei os dois pontos e ele calculou o meio entre eles e assim sucessivamente, aí eles ficaram todos alinhados [pausa] e com a mesma distância.*

Pesquisadora: Ok, só que aqui, tu tinha respondido que tinha utilizado segmento de reta, então eu fiquei com essas dúvidas em relação de como tinha ficado com a mesma distância, mas se tu usou ponto médio, ok. Tá, e se tu não tivesse colocado o segmento de reta só tivesse colocado os pontos médios? [pausa]

Monet: *Como eu faria?*

Pesquisadora: Tu quer voltar lá e tentar fazer, tudo bem. Oh, tá vendo que tu fez o segmento, né? Mas será que o segmento é necessário?

Monet: *Mas depois eu só tirei ele...*

Pesquisadora: Pra que serviria o segmento, o que tu acha?

Monet: *É pra deixar eles alinhados e a uma mesma distância da estrada, como pedia no enunciado.*

Pesquisadora: Tá, mas quando eu faço ponto médio, ele fica desalinhado o ponto médio?

Monet: *Sem o segmento?*

Pesquisadora: É.

Monet: *Não sei, eu não tentei. Mas eu posso fazer [se volta para o computador para fazer]. A mesma coisa.*

Pesquisadora: Então, na verdade, quando tu pediu para criar o ponto médio ele ficou na mesma linha, né? Ok?

Monet: [fez gesto com a cabeça de concordar]

Pesquisadora: Tá, teve colegas teus que utilizaram vetor [Martin se volta para o computador para verificar essa ferramenta], tu sabe usar vetores?

Monet: *Não, não utilizei, porque... mas eu vi que tinha, mas não utilizei isso. Não sei nem como funciona.*

Pesquisadora: O que um vetor, mas tu sabe a definição de vetor? O que um vetor te dá? Quais as características, ele te dá?

Monet: *direção, sentido e módulo.*

Pesquisadora: Direção, sentido e módulo, que seria pra nós tamanho, né?

Monet: *Sim*

Pesquisadora: Então a direção e sentido a gente poderia utilizar para que? Para que eles fiquem...

Monet: *Alinhados.*

Pesquisadora: alinhados. E o módulo dele trabalharia com o tamanho. O problema só do módulo que não se saberia a distância entre eles. Mas, pelo que percebi que teus colegas fizeram, eles reduziram o tamanho da minha rua, ao invés desses dois postes serem as extremidades, eles fizeram esses dois postes já colocados perto e daí fizeram um vetor entre esses dois postes e depois replicaram..., daí saberiam a distância entre os dois postes e daí fizeram um vetor ali, conseguiram o módulo, daí replicaram esse vetor. Será que dá certo? Também conseguiriam ter a mesma distância entre os postes e também ficariam alinhados?

Monet: *Eu não sei te responder porque eu não sei utilizar vetor, mas creio que dá sim. Dá pra tentar fazer isso...*

Pesquisadora: Tá, eu não queria que tu fizesse, queria que tu prestasse atenção em como eles fizeram e tentasse ver se eles estão corretos. Olha só, vou descrever de novo pra ti, tenta imaginar a construção: diminuíram o tamanho ali, ou seja, ahm..., colocar mais longe a minha construção, então os pontos azuis ficarem mais pertinhos, daí fizeram um vetor entre os dois pontos azuis. Daí eles copiaram esse vetor pra baixo.

Monet: *ah, tá. Eles calcularam como se fosse a distância entre os dois com um vetor e depois replicaram um a um.*

Pesquisadora: Isso.

Monet: *Tá certo.*

Pesquisadora: Eles precisavam respeitar duas características aí...

Monet: *paralela à estrada e a mesma distância entre os postes.*

Pesquisadora: Isso. Ok. As próximas perguntas parecem já terem sido respondidas, colocando muitos desses postes há a tendência de formar-se uma figura, se sim, qual figura se forma? Se tu colocar muitos postes?

Monet: *Se forem em linha reta... não uma figura, seria uma reta.*

Pesquisadora: Tá, é que em matemática pra gente uma reta é uma figura, tá? É uma figura matemática, ok? Muitos responderam isso também, não forma uma figura, mas uma reta é uma figura. Então se você colocar muitos pontos forma uma reta e até a definição de reta é essa, infinitos pontos alinhados. Ahm... daí eu perguntei quantos postes você colocou e porquê? Se utilizou alguma estratégia para colocá-los? A estratégia para coloca-los você já respondeu, mas a quantidade de postes?

Monet: *Eu só coloquei esses três porque não....*

Pesquisadora: Porque não pedia assim necessariamente, né? [o participante fez menção positiva] Ta, ok. Se fosse dado somente um poste já colocado, então um ponto azul só, qual seria sua estratégia para colocar os demais postes de modo que a linha telefônica ficasse bem reta?

Monet: *Eu criaria um ponto na estrada e aí criava uma reta paralela a ela junto com o outro ponto.*

Pesquisadora: Porque um ponto na estrada?

Monet: *Pra conseguir criar a reta paralela a ela.*

Pesquisadora: Aaah...

Monet: *Assim [o estudante se vira para o computador para demonstrar no software o que fez] eu pegaria esse ponto aqui, esse como se fosse, e criaria até aqui, e foi isso... pra ficar alinhado. Dai depois colocaria outro ponto ali e faria o mesmo método para o ponto médio.*

Pesquisadora: Ok, ok, deixa só eu ver se tem uma outra coisa...Ahm... volta ali, aí [para a tela na resposta dele sobre os postes]...essa construção foi eu que fiz, eu não deixei a malha quadriculada, mas tem como colocar, né? Se tu clicar na imagem, fica a malha, isso [o aluno colocou a malha na construção realizada]. Ao longo de toda a disciplina, em várias atividades os teus colegas utilizaram muito a malha para fazer coisas retas assim, nesse caso aí a malha será que iria ajudar?

Monet: *Acho que não muito.*

Pesquisadora: Por que?

Monet: *Porque acho que o plano ali serve mais para te orientar melhor e mostras as coisas, como ali está meio, não tá bem reto com o plano acho que não precisa muito.*

Pesquisadora: O que não tá bem reto?

Monet: *Essas linhas da malha com a estrada.*

Pesquisadora: A estrada e a malha não estão...

Monet: *Alinhados.*

Pesquisadora: Ok, podemos ir para a dois. [a aluno abre na tela a construção da atividade 2 e o pesquisador vira-se para os demais alunos e pergunta se alguém quer colocar alguma questão]. Essa construção no GeoGebra quer representar uma estrada muito longa. Ao longo dessa estrada coloque pontos marrons representando postes de energia e do outro lado da estrada coloque pontos representando árvores que serão colocados em linha reta e simetricamente distribuídos também. Bem, primeira pergunta: as retas que formam a estrada se encontram em um ponto como mostra a construção, porque elas são posicionadas dessa maneira? Antes de tu falar da tua construção, abre a a estrada sem os pontos (a construção original, sem a resposta do aluno), isso. Então, vocês estão vendo que as retas parecem que estão se encontrando em um ponto lá no fim, né? Por que será que essa representação está assim, o que quer dizer essa representação?

Monet: *Porque dá a ideia de profundidade.*

Pesquisadora: Alguns colegas teus falaram em vez de usar a palavra profundidade falaram distância, uma coisa muito distante.

Monet: *É... é que se tu fizesse um desenho 3D e tu quisesse representar uma coisa que está muito longe, tá distante do ponto que tu está observando.*

Pesquisadora: Ahm... mas será que nesse caso aí o 3D, a terceira dimensão tem alguma relação? A estrada, o que ela é? Ela é 3D?

Monet: *Não, aí não. Só deixa as retas assim para passar uma ideia de profundidade, isso é uma estrada, é que se tu acaba comparando com um desenho 3D, se tu quiser representar uma estrada que está muito distante, tu não vai fazer uma coisa reta [faz gesto com a mão de retas paralelas], senão parece que ela está muito perto, ela, como posso te dizer... dá a ideia de profundidade, só isso, é o que eu posso te dizer.*

Pesquisadora: Tá, ok. Ah, e tua acha, a pergunta dois, se a estrada, do jeito que eu representei ela, eu quis dizer que ela tem fim? Será que ela tem fim?

Monet: *Se é uma estrada eu acho que não.*

Pesquisadora: Desse jeito que ela está representada?

Monet: *Ah sim, aqui está representada como se ela tivesse um fim ali, mas ... é aqui tem fim [aponta para a tela], é uma estrada que vai se afinando, só isso.*

Pesquisadora: Aqui, tu diz no software ou assim, ahmm na realidade, quando quero representar na realidade.

Monet: *No software.*

Pesquisadora: No software ela tem fim. Mas na representação dela da realidade, para nosso olho?

Monet: *Ela é uma coisa mais distante, que não ia ter fim.*

Pesquisadora: Tá, vamos agora para a colocação dos postes e das árvores. Como tu fez, qual a estratégia que tu fez para colocar eles?

Monet: *Foi como falei no outro, coloquei um ponto aqui na estrada, criei a reta paralela e o ponto médio, só isso.*

Pesquisadora: Tá, colocou dois pontos e foi colocando os pontos médios.

Monet: *Isso.*

Pesquisadora: Tá, agora eu te pergunto uma coisa: o jeito que eu construí a estrada eu quis dizer que ela está muito longe o final dela, digamos assim, porque a largura dela foi diminuindo?

Monet: *Porque, ahm.. [fica pensando e faz gesto com a mão de não ter entendido]*

Pesquisadora: Tá, agora eu vou tentar te ajudar com outra pergunta, quando eu estou vendo meu celular daqui eu vejo ele com um tamanho, mas claro se não tivesse paredes,

agora se tu levasse o meu celular para 200 metros daqui, eu veria meu celular com o mesmo tamanho?

Monet: *Não, né?*

Pesquisadora: Não. Por que?

Monet: *O sora, eu acho que tu esta querendo falar da percepção do olho humano, né? Porque quanto mais longe menor o objeto fica.*

Pesquisadora: Tá. Então vamos ver tua construção, retomando ali, a distância entre a árvore e a estrada, no início da estrada, quando ela está pertinho de ti, ela tem uma distância, ok?

Monet: *Aqui ela deve ficar mais perto e lá no outro ponto ela tem que ficar mais longe [olha para cima da tela, gerando dúvida para a pesquisadora de qual ponto está falando].*

Pesquisadora: Mais longe? Tu está aqui [pesquisador aponta para a parte inferior da estrada] aqui está maior, então tu está nessa posição.

Monet: *Ah sim, não... então quando olha daqui os postes teriam que ficar mais perto, por exemplo, pareciam que estariam mais perto, quanto mais... não, ao contrário no caso, ficaria aqui olhando daqui para essa ponta parecia que ficariam mais distante, quanto mais longe, pareciam que estavam mais próximos.*

Pesquisadora: Isso aí, porque vai diminuir a distân..., na realidade a distância não diminui, mas na nossa percepção como está muito longe a distância vai ficar menor. E a distância entre eles, entre as árvores e entre os postes, é a mesma sempre na ilustração?

Monet: *Sim.*

Pesquisadora: Tem que ser? Na tua sim [na construção já feita], mas estou perguntando pra ti se tem que ser sempre a mesma distância entre as árvores e entre os postes, na ilustração?

Monet: *Se quero representar com a ideia de profundidade aí não está adequado.*

Pesquisadora: Bem, é essa ideia, as duas últimas árvores a distância entre elas na representação delas, se elas estão muito longe pra mim parece que a distância delas vai ser...

Monet: *No caso na ilustração vão estar mais próximas.*

Pesquisadora: OK, quase ninguém cuidou disso, tá? Teve um aluno que eu vi no google olhando imagens, Jesus era tu, e era isso que tu estava olhando nas imagens? O que tu

estava cuidando? Eu vi que tu pesquisou imagens de estradas, o que tu estava tentando visualizar?

Jesus: *Que quanto mais longe, tipo, era também com árvores também, quanto mais longe era mais próximas pareciam que as árvores estavam mais próximas entre elas.*

Pesquisadora: Entre elas, isso aí, e também mais próximas da estrada, tudo diminui, quanto mais longe tudo vai diminuir, inclusive se, as árvores não posso falar, mas os postes são todos do mesmo tamanho, se fizéssemos em 3D essa imagem, trabalhasse com a altura dos postes, a altura dos postes nessa representação teriam que ir diminuindo também, né?

Monet: *É, mas como não é um objeto 3D não dá para fazer.*

Pesquisadora: sim, só estou dando mais uma situação. Ok, é isso, alguém quer falar alguma coisa desse? Obrigada!

APÊNDICE E – Transcrição da entrevista sobre a Atividade 3

O participante posiciona-se na frente do computador e abre na tela o arquivo da construção da sua mesa, construção solicitada na atividade proposta.

Pesquisadora: Após assistir o vídeo Rabbit and Deer, a ideia desse vídeo era vocês já pensarem na terceira dimensão, tá? Como pedia uma mesa, então, para vocês automaticamente fazerem uma mesa tridimensional. Então, desenhar no software GeoGebra uma mesa com o tampo retangular, foi o que eu pedi. Quer mostrar a tua mesa?

[O aluno rotaciona a mesa para a visualização de diferentes vistas]

Pesquisadora: Tá, que tipo de imagens geométricas estão presentes na tua representação?

Portinari: *Eu acho que, a maioria são...* [a aluno apresenta sinal de ter esquecido o nome que queria dizer, olha para os colegas], *acho que ...*

Pesquisadora: Tu quer que eu leia tuas respostas?

Portinari: *Acho que são paralelepípedos, pelo formato.*

Pesquisadora: paralelepípedos.

Portinari: *É.*

Pesquisadora: Tu consegue me definir o que é um paralelepípedo?

Portinari: *Eu não sei dizer a definição matemática.*

Pesquisadora: Tenta dizer com as tuas palavras.

Portinari: *É como um cubo, mas não precisa todos os lados e ângulos sejam iguais....ahm... eu não sei explicar!*

Pesquisadora: Tá, mas pra ti são todos paralelepípedos, né?

Portinari: *Sim.*

Pesquisadora: A maioria dos teus colegas falou que apareceu retângulos, eles estão certos? Em vez de dizer paralelepípedos, eles usaram retângulos.

Portinari: *Eu acho que não, porque retângulos são uma figura 2D, por isso não.*

Pesquisadora: Tá, mas a minha pergunta era: que tipo de imagens geométricas estão presentes na sua representação. Imagens geométricas...

Portinari: *Certo, daí...*

Pesquisadora: pode ser, eu não estou especificando, né? Imagem geométrica, existe geometria 2D e 3D. Ok? Então, eles poderiam responder que foi utilizado retângulos?

Portinari: *Sim.*

Pesquisadora: Sim? Tu pode me mostrar o que é um paralelepípedo? Qual das partes da tua...

Portinari: *Acho que os tampos, ali.*

Pesquisadora: Dessa tua mesa, ok. Esse teu pé ali, a base dele é um quadrado ou um retângulo?

Portinari: *É um quadrado.*

Pesquisadora: Qual é a posição entre as retas no seu desenho? Daí, essas retas, a posição, foi utilizado vários segmentos de retas, na verdade, né? Mas esses segmentos de retas estão como posicionados entre eles, que posição, são paralelos, perpendiculares, concorrentes...

Portinari: *Na hora de construir a mesa eu usei apenas retas paralelas e ... é.*

Pesquisadora: Só paralelas?

Portinari: *Só paralelas, para comprovar a distância entre um ponto e outro.*

Pesquisadora: Tá, tu construiu, ok. Mas no desenho final, teve só paralelas?

Portinari: *Hum... [olha para a imagem da sua mesa]. Não.*

Pesquisadora: O que são retas paralelas?

Portinari: *Elas seguem uma do lado da outra, nunca se encontram.*

Pesquisadora: Não se encontram. Tem retas que se encontram ali?

Portinari: [Olha novamente para sua imagem] *Sim.* [continua olhando e pensando]

Pesquisadora: Sim. E daí que posição elas estão uma com a outra, essas retas que se encontram?

Portinari: *Ahm... não sei.*

Pesquisadora: Retas que se encontram ou elas são concorrentes ou elas são perpendiculares. O que é, que tipo é, essas aí que se encontram na sua construção, são perpendiculares ou só concorrentes?

Portinari: *Ahm... eu não sei o que são perpendiculares.*

Pesquisadora: Perpendiculares formam um ângulo reto entre elas.

Portinari: *Ah, são perpendiculares.*

Pesquisadora: Ok. Eu vou ali mostrar. [a pesquisadora se direciona para a tela onde está a mesa do Portinari e aponta] Assim, como está parada tua mesa, tá? Essa reta aqui, com essa daqui [mostra com o dedo cada uma das retas indicadas] estão se encontrando....

Portinari: *Sim.*

Pesquisadora: Tu acha que essa com essa aqui são perpendiculares?

Portinari: *São concorrentes.*

Pesquisadora: O ângulo entre elas é um ângulo [coloca o dedo sobre o ângulo]..

Portinari: *É um ângulo reto aí. Mas...*

Pesquisadora: É um ângulo reto assim como estamos vendo?

Portinari: *Não nesse ângulo, mas assim [rotaciona a mesa na tela para outra posição] dá para ver como um ângulo reto.*

Pesquisadora: Tá, ok. Então quando a gente para a mesa assim, é essa reta com essa [mostra novamente quais são as retas] então elas são o que... perpendiculares ou concorrentes?

Portinari: *Acho que depende do ponto de vista.*

Pesquisadora: Tá, então tu está dizendo que depende do ponto de vista, se eu mexo a minha mesa, eu mexo minha mesa, não. Eu saio do lugar de onde eu estou vendo a minha mesa ela, as retas que fecham ela deixam de ser, de formar um ângulo reto?

Portinari: *Não.*

Pesquisadora: Tá, então essas retas ali são perpendiculares ou concorrentes?

Portinari: *São perpendiculares.*

Pesquisadora: Então mexe tua mesa de novo [o aluno posiciona a mesa de outra maneira]. Agora, aquelas retas ali são perpendiculares ou concorrentes?

Portinari: *São perpendiculares.*

Pesquisadora: Ok. [volta para a mesa]. Teve um colega teu que respondeu que só tem retas paralelas, é possível fazer uma mesa será só com retas paralelas?

Portinari: *Deixa eu imaginar isso. Acho que não, porque se fosse só paralelas não teria como fechar o pé da mesa.*

Pesquisadora: E eu poderia, eu pedi uma mesa com tampo retangular, tá? Tu respondeu pra mim que só tem retas paralelas e perpendiculares, tu poderia então ter dito na atividade anterior que tem triângulos a tua mesa?

Portinari: *Não entendi a pergunta.*

Pesquisadora: Tá vou tentar refazer a pergunta. Agora tu me respondeu que tua mesa é formada por retas paralelas e por perpendiculares, ou seja, retas que nunca se cruzam ou se se cruzam formam um ângulo de 90° . Tá? Isso que tu respondeu pra mim agora. Com isso, estaria certo na atividade anterior tu ter dito que as figuras geométricas que tu utilizou para construir tua mesa poderia aparecer triângulos? Com retas paralelas e retas perpendiculares?

Portinari: *Acho que, na minha mesa não. Mas...*

Pesquisadora: Tá, na tua mesa não, mas não foi essa a pergunta, eu quero saber se eu consigo, numa mesa que só tem retas paralelas e perpendiculares, tá? Imagina retas que nunca se cruzam ou retas assim, formando um ângulo de 90° , eu conseguiria ter triângulos com essas retas?

Portinari: *Estou tentando imaginar...acho que não.*

Pesquisadora: Tá. E os ângulos, eu perguntei qual a posição entre as retas e também, a próxima pergunta é qual o tipo de ângulos formados entre as retas? Quase foi respondido, mas de novo, eu tenho ângulos agudos que é menores de 90° , ângulos obtusos, que é maior que 90° ou ângulos retos. Na tua mesa, quais foram os ângulos que aparecem?

Portinari: *Ângulo reto.*

Pesquisadora: Reto. Mas tu disse pra mim antes que tem retas paralelas a tua mesa, como só tem ângulos retos?

Portinari: [ficou pensando]

Pesquisadora: Vou dizer de novo, tu me disse que tem retas paralelas ali, como pode, como só tem ângulos retos? Qual é o ângulo formado em retas paralelas?

Portinari: *Não sei.*

Dalí: *Mas sora, mas tudo depende, porque se tem retas paralelas aqui, só tem vaga para ângulos retos.*

Pesquisadora: Mas daí o ângulo é formado com outra reta, não entre as duas paralelas.

Monet: *O sora, mas se são retas paralelas entre elas nunca vão formar um ângulo, né?*

Pesquisadora: É isso. É bem isso, estou tentando confundir, para ver se vocês tem certeza da resposta de vocês. Próxima: o que são as linhas tracejadas que o programa cria? Se você gira a sua mesa essas linhas se alteram. O que são essas linhas, esses pontilhados que aparecem na tua mesa?

Portinari: *Ahm... meio que tipo, para mostrar que é uma figura 3D que tem linhas atrás também, se não tivesse essas linhas aqui atrás eu não teria como dizer que isso é um paralelepípedo, não teria como dizer que é uma figura 3D.*

Pesquisadora: Tá, essas são as arestas que estão atrás, né?

Portinari: *É.*

Pesquisadora: A mesa está girando, então, quando muda a posição da tua mesa, então as linhas que estão atrás, essas linhas tracejadas

Portinari: *Elas ficam pontilhadas*

Pesquisadora: E de acordo que está girando ali tua mesa agora, sempre é a mesma linha que está pontilhada?

Portinari: *Não*

Pesquisadora: Ela vai se alterando, né?

Portinari: *Sim.*

Pesquisadora: Mas teve um colega teu que disse que é sempre as mesmas linhas pontilhadas, é sempre as mesmas ali. Tá certo? Tem as linhas pontilhadas mas é sempre ficam as mesmas, nunca altera.

Portinari: *Não. Elas se alteram, pelo menos na minha mesa funciona assim.*

Pesquisadora: Só na tua?

Portinari: *Não sei, eu não vi a dos meus colegas.*

Pesquisadora: Tá. Então repete para mim o que são as linhas pontilhadas?

Portinari: *São as linhas que estão atrás que a gente não consegue enxergar.*

Pesquisadora: Tá, em outro desenho tu acha que não é isso? É só na tua mesa que isso acontece?

Portinari: *Não.*

Pesquisadora: E a última pergunta: descreva rapidamente qual foi tua estratégia para construir tua mesa?

Portinari: *Eu ...*

Pesquisadora: Tu usou a malha quadriculada?

Portinari: *Sim.*

Pesquisadora: Pra?

Portinari: *Para fazer as medidas, para ficarem assim, iguais. Eu fiz os pés com pontos e eu puxei, usei retas perpendiculares ao plano e puxei os pontos mais pra cima. Eu usei o, esqueci o nome, usei este aqui [procurou no menu do software], prisma, e daí levantei os pés da mesma cuidando a mesma altura de sempre. E depois eu peguei..*

Pesquisadora: Como tu conseguiu fazer os prismas da mesma altura?

Portinari: *Oi?*

Pesquisadora: Como tu conseguiu fazer os quatro prismas, os quatro pés com a mesma altura?

Portinari: *Eu cruzei, eu usei um plano, eu criei um plano para conseguir a mesma altura. E eu também fiz, eu fiz segmentos de retas de uma ponta a outra para saber se estavam da mesma altura.*

Pesquisadora: Tá. Será que teria um outro jeito para construir a tua mesa?

Portinari: [ficou pensando]

Pesquisadora: Tu fez um pé de cada vez? Todos os pés tu fez? Alguém fez diferente os pés, para não repetir? Alguém fez todos os pés ou usou algum recurso diferente? O que tu usou Da Vinci?

Da Vinci: *Usei vetores.*

Pesquisadora: Vetor?

Da Vinci: *Isso.*

Pesquisadora: Daí transladou, ou seja, copiou o teu pé pro lado usando o vetor. Ahm... eu pedi pra tu construir a mesa, a única característica que pedi foi uma mesa de tampo retangular, poderia ter feito a mesa diferente, poderia ter feito alguma coisa diferente na tua mesa, que respeitasse tampo retangular?

Portinari: *Sim.*

Pesquisadora: O que poderia ter sido diferente?

Portinari: *Eu poderia mudar a quantidade de pés, eu poderia ...*

Pesquisadora: A quantidade de pés? Poderia botar mais pés?

Portinari: *Poderia botar mais, poderia também fazer em outros formatos...*

Pesquisadora: Mas daí não fica ruim para sentar?

Portinari: *Não. Depende só o tamanho que ficaria a mesa.*

Pesquisadora: E menos pés, poderia fazer?

Portinari: *Sim.*

Pesquisadora: E iria ficar equilibrada também a tua mesa?

Portinari: *Hum, é, não seria se eu tirasse um pé daqui e deixasse os outros três ali [mostra na tela], eu equilibraria colocando um aqui no meio e os outros dois nas pontas, se eu fosse colocar três.*

Pesquisadora: Teve um colega teu que fez com um pé só, no meio, tu já viu uma mesa com um pé só?

Portinari: *Ahm.. já.*

Pesquisadora: E qual característica será que tem que ter esse pé, no meio?

Portinari: *Ele tem que estar fixo no chão.*

Pesquisadora: E o tampo não vai ficar bambo assim?

Portinari: *Não.*

Pesquisadora: Não?

Portinari: *Pelo menos a mesa que vi que era assim e não ficou.*

Tarsila: *Eu acho que ficaria mais firme se, no caso, ao invés de ser retangular, a mesa se fosse redonda, né? Ficaria mais firme, no caso.*

Pesquisadora: Tu acha que o centro de gravidade ficaria no centro, ou um tampo quadrado, né?

Tarsila: *É.*

Pesquisadora: Mas poderia ser um pé também, mas daí teria que fazer um pé mais largo também.

Participante não identificado: *Mais espesso.*

Pesquisadora: Isso, uma base maior pra ele. Poderia utilizar, vocês todos utilizaram prismas para fazer os pés, poderia utilizar outra coisa para fazer os pés?

Portinari: *Acho que cubos.*

Pesquisadora: Cubos? Só?

Portinari: [ficou pensando e olhou para a tela]

Pesquisadora: Alguém tem alguma ideia?

Portinari: *O Dalí falou cilindro*

Pesquisadora: Cilindro, poderia também, né? Os pés redondos.

Participante não identificado: *Prisma.*

Pesquisadora: Mas prisma é o que ele tem ali.

Dalí: *Uma pirâmide.*

Pesquisadora: Pirâmide?

Dalí: *Bah, sora, ficaria bonita com uma pirâmide* [percebeu-se que o participante estava brincando]

Pesquisadora: Ok, Portinari, muito obrigada!

APÊNDICE F – Transcrição da entrevista sobre a Atividade 4

Obs: Este participante, ao longo da disciplina em que sucedeu a investigação, não se envolveu nas tarefas como se esperava, muitas ele entregou atrasadas, outras não entregou e mostrava muitas dificuldades quando o pesquisador se aproxima dele.

Pesquisadora: Um observador pode posicionar-se de diferentes pontos para observar sua mesa, verifique quantas posições diferentes ele necessita para ter uma visão geral da sua mesa e entregue a imagem de cada uma delas. Após, responda as perguntas seguintes. Tá, então tu construiu uma mesa e tu posicionou ela para ter uma imagem geral.

Picasso: *Sim.*

Pesquisadora: Daí tu escolheu essas duas [uma imagem lateral – que mostra que a mesa tem somente um pé parecendo estar no centro da mesa e outra da visão inferior, retângulo]

Picasso: *Sim.*

Pesquisadora: Por que tu escolheu essas duas?

Picasso: *Porque como a minha mesa é toda de preto, as faces, as arestas e os pontos, simplesmente ver da esquerda ou da direita não faria muita diferença e também eu tirei uma só foto de baixo porque de cima ficaria igual, já que a parte de cima é um plano.*

Pesquisadora: Ah, a outra é debaixo, deixa eu ver A outra de novo [até o momento o pesquisador achava que a imagem era da parte superior da mesa, do tampo]

Picasso: [abre na tela a imagem que mostra a visão inferior da mesa].

Pesquisadora: Tá. Daí eu fiz algumas perguntas para teus colegas nos comentários [dentro da plataforma das atividades no momento que entregaram a tarefa], se fosse para mandar construir a sua mesa, entrega-se as imagens para um marceneiro construir, ele conseguiria construir exatamente a tua mesa? Com essas duas imagens?

Picasso: *Com essas duas imagens talvez ele conseguiria construir a mesa.*

Pesquisadora: Tua acha que sim?

Picasso: *Acho que sim.*

Pesquisadora: Ele conseguiria tirar todas as medidas da mesa?

Picasso: *Ahm... não. Todas as medidas da mesa não, mas conseguiria fazer uma miniatura da mesa ele conseguiria, mas de grande porte não.*

Pesquisadora: Tá, volta na imagem 1 ali pra mim [imagem lateral]. A imagem 2 mostra praticamente o tampo da mesa, né? Na imagem 2 ele consegue tirar as imagens do tampo, as dimensões do tampo. Agora, só que eu estou preocupada com o teu pé ali, ahm, o que é o teu pé, é um prisma quadrangular, retangular, o que é aquela base ali?

Picasso: *É retangular.*

Pesquisadora: Pois é, e será que nesta posição aí ele conseguiria tirar as medidas. É por causa que, assim, normalmente a gente bota o desenho e diz, isso aqui está em escala 10, por exemplo, se aqui mede 2 cm na realidade mediria 20 cm, tá, quando a gente manda construir uma coisa, então, ele teria que conseguir, no desenho, pegar e medir ali e ver a medida que tem. E altura da mesa, ele consegue tirar daí?

Picasso: *A altura da mesa eu creio que ele consiga tirar.*

Pesquisadora: Mas se ele não mostra todo o pé, essa tua imagem. Eu não estou conseguindo ver a imagem do teu pé inteiro, para ver qual é o tamanho do pé.

Picasso: [ele olha para sua imagem] *Tá.*

Pesquisadora: Tá?

Picasso: *Ele não conseguiria construir, já que eu tirei uma foto de um ângulo um tanto ruim.*

Pesquisadora: Ok. Gente, não tem certo e errado aqui, estamos questionando as coisas. Alguns colegas teus colocaram uma imagem só, tu acha que daria?

Picasso: *Dependendo muito do ângulo que ficou, talvez dê, mas eu creio que não.*

[houve uma pequena discussão na classe dos demais participantes em relação ao formato da base do pé da mesa, alguns alegando que era óbvio que era um retângulo e outros dando exemplo que poderia ser outras formas, como um triângulo]

Pesquisadora: Outra pergunta que fiz, se há algum ponto de vista, uma posição que tu pararia que um observador não conseguiria ver que se trata de uma mesa? Tu pode fechar essa e voltar e abrir a pergunta 2, se tu quer abrir tua resposta.

Picasso: *Sim, com está na minha resposta, tanto que se tu olhar de cima ou de baixo tu não vai saber que é uma mesa, pra ti será somente uma grande volta.*

Pesquisadora: Grande, o que?

Picasso: *Retângulo, só.*

Pesquisadora: Ok. Tá, aqui [na plataforma com as atividades] tu colocou em relação ao completamente pretas, na verdade, agora tu deu uma resposta melhor, ele iria ver um retângulo, agora qual a cor não interessa, ele só não consegue, quando ele se posiciona

bem em cima da mesa na verdade ele não consegue ver o pé e ele não vai ter uma visão tridimensional, ou seja, ele não vai conseguir ver o resto da mesa, só vai ter o plano do tampo. Ahm, 4.2 o seu desenho sofre alguma alteração quando se muda esses pontos de visão? Pois é, o teu desenho não dá certo nessa pergunta.

Picasso: Não dá?

Pesquisadora: É. Mas qual foi tua resposta, o que tu respondeu, sofre alguma alteração quando se se muda o ponto de visão, quando mexe a mesa? Tu respondeu o que?

Picasso: *Eu respondi que eles não sofrem quase nenhuma alteração devido à coloração da mesa, se fosse de uma outra cor, como laranja ou verde, talvez realmente sofreriam muitos pontos daí daria para ter mais pontos de vista em relação à mesa.*

Pesquisadora: Um colega teu respondeu assim, que não se altera nada, nada se altera, continua sendo uma mesa sempre. Tá certo essa resposta dele?

Picasso: *Não. Eu acho, como tu mesma disse, que se tu olhar só de cima, tu não vai saber que é uma mesa, tu vai achar que é só um retângulo.*

Pesquisadora: Tá, mas vamos prestar a atenção na minha pergunta, se eu desenho, tu desenhou o que? Tu desenhou uma mesa! Tá? Seu desenho sobre alguma alteração quando se muda esses pontos de visão? Ou seja, tu desenhou uma mesa, tu sai do lugar de onde tu está vendo a mesa, ela deixa de ser uma mesa?

Picasso: *Não ela não vai deixar de ser uma mesa, só vai mudar o ponto de onde tu estás vendo ela, o referencial que muda, o objeto não.*

Pesquisadora: Isso aí, teu referencial, tua visão, a imagem que tu vê, pode ser que mude...

Picasso: *Sim*

Pesquisadora: Mas o desenho, a representação...

Picasso: *Não vai deixar de ser uma mesa.*

Pesquisadora: Ok. 4.3, há alterações nas suas respostas anteriores, aqui eu acho que não cabe, né? Por que já fizemos isso, aqui eu quis colocar isso, se alguém, de acordo com as próximas perguntas alguém mudasse de ideia, quisesse remodelar alguma coisa, mas ahm...ok, acho que é isso.

APÊNDICE G – Transcrição da entrevista sobre a Atividade 5

Pesquisadora: Podemos começar? Questão 5: Agora em outro arquivo construa uma cadeira para essa mesa que você construiu. O designer da cadeira é livre, mas lembre-se que precisa combinar com a sua mesa.

Miró: [aponta para o projeto da cadeira projetado da tela]

Pesquisadora: Está aí a sua cadeira, ok. Bem, você pensou em colocar quantas dessas cadeiras na sua mesa?

Miró: *Apenas uma.*

Pesquisadora: Uma?

Miró: *Pois o modo da mesa tem apenas uma entrada.*

Pesquisadora: Ah, [a pesquisadora lembrou do modelo da mesa que este participante construiu, trata-se de uma mesa tipo de escritório] porque.. você tem que abrir o arquivo da tua mesa também para mostrar para os teus colegas.

Miró: *A mesa é assim* [faz gestos tentando explicar a mesa]

Pesquisadora: Não, a tua a mesa é bem diferente, abre ali para nós!

Miró: [se dirige ao computador para abrir o arquivo]

Pesquisadora: É uma escrivaninha, né? Eu chamei de escrivaninha nas minhas perguntas. Então tu resolveu colocar uma só, porque?

Miró: *Por que* [faz gestos não conseguindo explicar a razão], *porque sim, não vejo porque colocar mais. Porque essa mesa é de trabalho, cabe só uma.*

Pesquisadora: é de trabalho, uma escrivaninha..

Miró: *É uma mesa de escritório, por exemplo.*

Pesquisadora: Mas se tu tivesse feito uma mesa de jantar, tá? O que a gente teria que cuidar ao pensar em quantas cadeiras eu colocaria nessa mesa?

Miró: *O lado, o tamanho de cada cadeira e da mesa.*

Pesquisadora: Tá, ok. Próxima pergunta, essa quantidade de cadeiras cabe na sua mesa?

Miró: *Sim.*

Pesquisadora: Mas tu chegou a cuidar a largura delas?

Miró: *Não, eu fiz a cadeira mais larga do que a mesa.*

Pesquisadora: Coloca ali para medir para nós, no botão que tem o ângulo, lá em cima... [a mesa com 5,40 cm] e agora faz a mesma coisa com a cadeira (5,50). ... Nossa, é que os dois foram gravados em zooms diferentes. É, então não está combinando, né?

Miró: *Sim.*

Pesquisadora: Tá, então vamos tentar simular algumas respostas dos teus colegas. Tem um colega teu que tem uma cadeira de 2 cm de largura e o tampo da mesa dele é um quadrado de 13 cm, ele quer colocar quatro cadeiras, tu acha que dá?

Miró: *Sim.*

Pesquisadora: Poderia colocar mais?

Miró: *Me lembra qual o tamanho da mesa?*

Pesquisadora: 13 e a cadeira 2

Miró: *Poderia colocar mais.*

Pesquisadora: Próxima pergunta, e a altura, é confortável para uma pessoa sentar na sua cadeira e colocar as pernas para baixo da mesa? Ela vai ficar em uma altura boa para comer ou para escrever, por exemplo?

Miró: *Eu de novo não pensei em altura, eu acho que não.* [mede as alturas]

Pesquisadora: A cadeira ficou mais alta, então não coube. A mesma situação do teu colega, tá? A altura do assento da cadeira dele tem 2,5 cm e a mesa, o espaço, daí eu já medi bem onde a gente coloca as pernas, não medi o tampo junto, do tampo para baixo, o espaço que pode colocar as pernas, tem 7 cm. Então a altura da cadeira é 2,5 cm e da mesa é 7, mais que o dobro.

Miró: [sinalizou com gestos que os braços da pessoa ficaria para cima ao sentar na cadeira] *A cadeira ficou um pouco menor...*

Pesquisadora: Então tu acha que não vai dar certo essa daí?

Miró: *Pode tentar, mas vai ficar ... não vai ficar confortável.*

Pesquisadora: Tá. E a última. Verificando proporcionalmente, essa última aqui não dar tempo porque a gente vai ter que fazer cálculos, mas a minha ideia, com as outras já foi respondida. Seria ver se proporcionalmente, se tua mesa tem 12 cm de altura no GeoGebra, uma mesa confortável é seis vezes maior, 72, queria ver se a proporção de vocês estava mantendo correta, mas a gente já viu que não.

Ahm, tá então quando tu construiu a tua cadeira tu nem pensou na tua mesa, né?

Miró: *Não.*

Pesquisadora: Ok, alguém aqui, quando leu o enunciado de construir uma cadeira para sua mesa chegou a pensar em medidas?

[alunos falando, vários não]

Pesquisadora: Só tu Da Vinci?

Dalí: *O que sora?*

Pesquisadora: Quando tu viu o enunciado para construir a cadeira para a tua mesa, tu pensou em medidas?

Dalí: *Eu pensei, sora. Mas daí quando a mesa foi impressa, eu vi que as pernas da mesa ficaram muito espessas em comparação à cadeira, daí eu pensei: humm, não pensei tanto assim...*

Pesquisadora: Ok. Dificilmente quando a gente não coloca diretamente no enunciado dificilmente as pessoas vão pensar nisso, não acham que é só com vocês, mas é isso mesmo. Mas teria que ser uma coisa direta nossa, né?.

APÊNDICE H – Transcrição da entrevista sobre a Atividade 6

Pesquisadora: Construí no software GeoGebra a letra inicial do meu nome, L, de forma tridimensional, usando dois paralelepípedos, como mostra a figura 1 em anexo. Posicionei-me perpendicularmente à letra, bem na sua frente, obtendo a seguinte imagem da figura (figura 2, também em anexo), podemos chamar essa minha posição de vista frontal da figura. Construa essa mesma letra e entregue a imagem da vista lateral direita.

Van Gogh: [o aluno utilizou uma apresentação em ppt, já com suas respostas organizadas, assim apontou para a tela para a imagem solicitada].

Pesquisadora: Ah tá, tu refiz algumas, né?

Van Gogh: *Sim, algumas estavam com erro.*

Pesquisadora: Tá, tu tem ali uma vista lateral, diagonal, tá a vista direita. Tá. No GeoGebra, qual seria a diferença entre a vista direita e a vista esquerda?

Van Gogh: *Eu acho que não iria ter nenhuma.*

Pesquisadora: Nenhuma? Tá, o que é aquele segmento ali no meio? No meio não, está um pouco mais para baixo.

Van Gogh: *Na vista direita?*

Pesquisadora: É.

Van Gogh: *Sim, isso é a parte de cima do L, só que se fosse a vista pela esquerda [fica olhando para a tela pensando]. Não, eu acho que não seria da mesma forma, eu acho que essa linhazinha seria pontilhada.*

Pesquisadora: ok, mas por que? Por que seria pontilhada?

Van Gogh: *Porque tá do outro lado, aí a gente vê pontilhado.*

Pesquisadora: Tá, daí no L impresso, na realidade, olhando de longe, a vista direita e vira agora, vista esquerda, não no software, ela maciça, impressa, tem diferença a vista direita e esquerda?

Van Gogh: *Sim, porque na vista direita a gente consegue ver a parte debaixo do L e na vista esquerda não, parecendo um plano.*

Pesquisadora: Olhando de longe, numa figura toda impressa preta, tu acha que conseguiria ver essa diferença? Por que a ideia de vista perpendicular é parar bem retinho, ali tu posicionou bem retinho [aponta para a imagem na tela], está bem reto, tu posicionou bem

certinho. Daí, o que dá para ver aqui é o risquinho do L. Se ela fosse uma imagem impressa e tu parasse bem reto assim, tu acha que conseguiria ver aquela perninha do L? Tua acha que a vista direita e esquerda seria diferente?

Van Gogh: *Não.*

Pesquisadora: Não seria diferente? Seriam iguais então. Tá. Há alguma vista que o observador não percebe de que letra se trata?

Van Gogh: *Pelos lados. Porque não dá para ver que é um L, não dá para ver a parte de baixo.*

Pesquisadora: Alguns dos seus colegas disseram que de alguns pontos de vista parece um I, verdade?

Van Gogh: *Fui eu que disse, não era? Que estava errado até.*

Pesquisadora: Não, tu colocou de cima. Mas que letra parece essa aí [aponta para a tela a vista lateral]?

Van Gogh: *Se a gente for desconsiderar isso aqui, o I, eu acho.*

Pesquisadora: Então, de que vista ela parece um I?

Van Gogh: *Da vista esquerda e direita.*

Pesquisadora: E a vista de cima, não parece um I?

Van Gogh: *É que eu pensei assim, em outro sentido.*

Pesquisadora: Quantas vistas, ou imagens, no mínimo, são necessárias para que um observador consiga verificar as características do sólido em relação às suas três dimensões.

Van Gogh: *E aí eu respondi com essa imagem porque eu lembrei dela na hora, eu acho que ela serve para isso. No caso são seis vistas, que é a de cima, de baixo e dos lados.*

Pesquisadora: Tá, é isso mesmo Van Gogh. Para ter todas as características reais mesmo, de todos os lados da peça, as seis vistas não vão te dar dúvida nenhuma de nenhum lado. Eu sempre digo, por mais que o frontal é igual ao de trás, vai que atrás tem um desenho, né? Então as seis vistas é a mais completa possível que mais vai me trazer elementos. Então o completo e correto seria as seis vistas. Mas se eu dissesse na pergunta, eu construí o alfabeto tridimensional, sem fazer detalhes em nenhum lado das letras, teria que ser as seis vistas, será?

Van Gogh: *Não. Eu acho que só a frontal já seria o suficiente.*

Pesquisadora: A frontal eu conseguiria ver...

Van Gogh: *Qual letra é.*

Pesquisadora: Qual letra é, tá, mas daí a minha pergunta é verificar as características em relação as três dimensões e tamanho das três dimensões, ou seja, o tamanho da largura, do comprimento e da altura, da profundidade, da altura e da largura. Com a vista frontal, teria como ver essas três medidas?

Van Gogh: *Não. Na verdade não daria para ver a profundidade, mas com o lado direito ou esquerdo daria para ver..*

Pesquisadora: Então de quantas imagens eu preciso?

Van Gogh: *Duas.*

Pesquisadora. Ok. Existem outras letras que possuem alguma dessas vistas igual, por exemplo, a vista lateral direita que você entregou?

Van Gogh: *É, aqui eu coloquei que se a gente construísse qualquer letra no GeoGebra a vista direita dela ia ser como se fosse um retângulo.*

Pesquisadora: Todas as letras seriam um retângulo.

Van Gogh. *Aham. Iria ter alguns detalhes que iria mudar, mas em geral seriam um retângulo.*

Pesquisadora: Teve um colega teu que respondeu que para ter a vista igual a letra I maiúscula.

Van Gogh: *Também.*

Pesquisadora: E a I minúscula?

Van Gogh: *Acho que não, porque o i minúsculo tem o pinguinho em cima.*

Pesquisadora: Tá, então na verdade a resposta do teu colega está:

Van Gogh: *Está certa.*

Pesquisadora: Está certa e até mais que o outro colega, né? A vista, tu consegue me dar um exemplo em que a vista debaixo é igual ao L? Pensando que no GeoGebra a gente construa as letras todas quadradinhas

Van Gogh: *Eu acho que o l.*

Pesquisadora: O l?

Van Gogh: *Não... eu acho que o E.*

Pesquisadora: O E, mais alguma?

Van Gogh: O Z.

Pesquisadora: O Z, e por que? Em que tu está pensando?

Van Gogh: *Por que a parte debaixo delas é semelhante a parte debaixo do L.*

Pesquisadora: Qual é a vista que é diferente para todas as letras construídas em 3D?

Van Gogh: *A frontal.*

Pesquisadora: Outro colega teu respondeu isso aqui, quando eu perguntei: existe outras letras que possuem algumas das vistas iguais? Ele respondeu assim: Sim, mas elas precisam ter a mesma largura e então posicionar o observador do lado da letra. Por que ele falou em largura?

Van Gogh: *Porque... a largura é a altura?*

Pesquisadora: Não a largura é a vista lateral, o retângulo da lateral.

Van Gogh: *Porque se a pessoa fizer, tipo um E tipo esticado assim pra frente não vai ficar como o I.*

Pesquisadora: Tá, então este teu colega?

Van Gogh: *Sim, está certo. Por que tem que considerar que de lado elas tem o mesmo tamanho.*

Pesquisadora: Então, elas vão ter a mesma vista lateral se?

Van Gogh: *Elas de lado tiverem o mesmo tamanho e altura.*

Pesquisadora: ok.

APÊNDICE I – Transcrição da entrevista sobre a Atividade 7

Pesquisadora: A questão 7 é uma continuação da questão anterior sobre as vistas das letras, na verdade ela não estava no meu curso de atividades, eu incluí ela porque eu achei necessária trabalhar um pouquinho mais sobre essas diferentes vistas. A questão sete diz o seguinte: A imagem um que não está aparecendo, mas todos sabem qual é, mostra a vista frontal da letra inicial do meu nome, já trabalhada na atividade anterior, a imagem dois a vista lateral direita, a imagem três a vista lateral esquerda, a imagem quatro a vista superior e a imagem cinco a vista inferior. Não tem a vista... eu botei a vista frontal, a detrás não tem, seriam seis imagens daí uma delas eu não coloquei porque como era letra eu não coloquei. Chamamos isso de projeções ortogonais, porque ortogonais? Ortogonal vem de perpendicularidade, é uma vista bem reta para frente, fazendo um ângulo de 90° com o objeto observado. Para este caso, três vistas são suficientes, a frontal, a inferior e a lateral, precisaríamos de mais vistas se a posição do objeto interessa e também se tivesse algum detalhe em alguma dessas faces. Veja na imagem seis um exemplo disso, quando eu preciso de mais detalhes de cada um dos lados eu precisaria de mais vistas, né? Construa a letra inicial do seu nome, vamos imprimir-la portanto, suas arestas não devem passar de três centímetros e cuide para que não fique um polígono em cima de polígono. E além de anexar o arquivo da construção do GeoGebra, anexe a imagem de cada uma das vistas como feito acima nomeando-as corretamente. Essa parte o senhor não fez, Dalí!

Dalí: *Pois é, eu esqueci de colocar lá.*

Pesquisadora: Ah, então tá.

Dalí: *Eu tirei um print, né? Eu tirei um print da imagem assim [aponta para a tela com letra em uma posição oblíqua] para mostrar direitinho, uma frontal e uma vista lateral.*

Pesquisadora: Mas tu não entregou isto, tu entregou somente as construções.

Dalí: *Não entreguei?*

Pesquisadora: As vistas, não. Tu só entregou o arquivo do ggb e do stl para impressão. Mas a gente pode fazer agora, então posiciona para mim a vista frontal.

Dalí: *Tá.* [move a letra no GeoGebra posicionando-a na vista frontal]

Pesquisadora: Ok, a vista lateral direita.

Dalí: [posiciona letra na vista solicitada]

Pesquisadora: Ok, a vista lateral esquerda.

Dalí: [Posiciona] *Eu acho que nem precisaria da vista lateral esquerda, no caso.*

Pesquisadora: Tá. Depois a gente fala sobre isso. A imagem da vista superior.

Dalí: [posiciona letra na vista solicitada]

Pesquisadora: E a vista inferior.

Dalí: [posiciona letra na vista solicitada]

Pesquisadora: Ok. O que é este risquinho de baixo?

Dalí: *Esse risquinho...*

Pesquisadora: O de cima ok, que é do pé da letra...

Dalí: *A tá...* [vira-se para o computador achando que tinha se enganado] *não, está certo!*

Pesquisadora: Mas a de baixo, o que tem na letra... [Dalí rotaciona a letra na tela] a tá, o de baixo...

Dalí: *Está certo, sora.*

Pesquisadora: Ah, é que os teus risquinhos do F é menor, a tá, tá bom, ok. Vamos para as perguntas: qual letra possui a vista superior igual a vista inferior do L, agora?

Dalí: *Na verdade são várias, né? Por que se a letra, por exemplo a minha ficou um retângulo, ela vai ficar parecida com a do L, a do E por exemplo, vai ficar... talvez de tu fazer um O quadrado vai ficar também, o P que no caso eu não conseguia fazer redondo, né? Senão ia ficar muito estranho, então as letras que ficarem um quadrado ou um retângulo em cima terão a mesma vista.*

Pesquisadora: Então existem várias letras..

Dalí: *Sim.*

Pesquisadora: No GeoGebra, tu falou antes que a vista lateral não precisaria, né?

Dalí: *Uma delas que não.*

Pesquisadora: Tá, mas é que o GeoGebra nos traz um elemento a mais, no GeoGebra tem uma diferença, tu consegue dizer para mim qual é a diferença, no GeoGebra, porque se é uma peça maciça que nem a peça que a gente imprimiu e visse ela de longe não vai dar diferença..

Dalí: *Aí, é que tu pode dar uma diferença na espessura, tipo, seria isso?*

Pesquisadora: Tá, bota as duas vista, a lateral direita e a lateral esquerda...

Dalí: [volta-se para o computador para visualizar as duas vistas mencionadas] *Tá, a da direita... e da esquerda.*

Pesquisadora: O que tem de diferente entre elas?

Dalí: *Que no caso aqui eu vou ver os dois segmentos da letra e aqui eu só vou ver uma parte reta e tem o negócio do chaveiro junto ali [s refere a argola construída para prender a letra como um chaveiro]. Seria isso?*

Pesquisadora: Eu estou vendo mais coisa ali, ainda.

Dalí: *Ah sim, os risquinhos, que é da profundidade dele.*

Pesquisadora: Na verdade são segmentos que..

Dalí: *São segmentos do retângulo aqui [está com o F impresso, mostrando a face oposta].*

Pesquisadora: que estão do outro lado da peça, né?

Dalí: [faz sinal de concordância].

Pesquisadora: Então o GeoGebra nos traz isto, no software GeoGebra as vistas têm diferença por causa disto, porque...

Dalí: *Dá para ver...*

Pesquisadora: Eu consigo ver nele, por causa das linhas pontilhadas, que são segmentos que estão do outro lado.

Dalí: *É, e por isso que acho também que não precisa o outro lado, se eu tenho isso, pra que?!*

Pesquisadora: Sim, ok. Mas daí mostra em qual lado que está, entende? Aqui, como está pontilhado eu sei que não é aqui que aqueles segmentos estão.

Dalí: *Então seria esse lado aqui [mostra na peça]*

Pesquisadora: Isso. Estão do outro lado. A diferença é o pontilhado. Tem uns colegas teus que em relação à vista superior igual a vista inferior do L, responderam que é a letra I.

Dalí: *O I não tem como.*

Pesquisadora: Por que não?

Dalí: *Porque se tipo eu for fazer o i vai ficar só esta parte aqui, uma base quadrada [rotaciona sua letra na tela, mostrando a vista inferior do F] então não teria como. A não ser se pessoa fizesse um i, sei lá, com base retangular, ficaria bem esquisito.*

Pesquisadora: Qual será que seria a vista do i que talvez ficaria igual à vista inferior do L?

Dalí: *Ah, daí se eu pegasse, fizesse o i normal aqui com a espessura muito grande para trás.*

Pesquisadora: Pensa nas espessuras iguais, pensa nas seis vistas...

Dalí: *Ah, daí seria a vista lateral.*

Pesquisadora: Só a lateral?

Dalí: *Aham...*

Pesquisadora: Quais são as vistas que são iguais no l...

Dalí: *Ah sim, a vista frontal e as laterais.*

Pesquisadora: Ficariam iguais.

Dalí: *Mas a inferior não ficaria.*

Pesquisadora: Se fossem o mesmo tamanho, né?

Dalí: [faz gesto de concordar com a cabeça]

Pesquisadora: Semana passada comentaram alguma coisa em relação à espessura, tamanho, para poder dizer que estas vistas são iguais ou não. Tu se lembra dessa característica?

Dalí: *Não..*

Pesquisadora: Que nem essa minha pergunta: qual letra possui a vista superior igual à vista inferior do L, tu respondeu que tem várias, mas ah...semana passada alguém comentou uma característica que só olhar retângulos como tu disse, tinha que também, cuidar uma outra característica para que fiquem iguais. Lembra?

Dalí: *Não.*

Pesquisadora: Tá. Eu posso fazer o tamanho das letras que eu quiser, mas se eu quiser que as vistas fiquem iguais.

Dalí: *Tipo as vistas laterais, tu diz? Superior, inferior...*

Pesquisadora: É!

Dalí: [fica pensando] *Dá, na verdade, dá para fazer várias letras fiquem iguais nas vistas laterais...*

Pesquisadora: Tá, mas eu não preciso me preocupar com o tamanho das letras?

Dalí: *Ahm, pode ter tamanhos diferentes, mas a proporção vai sempre...*

Pesquisadora: Vão ser proporcionais, ok.

Dalí: *É.*

Pesquisadora: Mas para serem iguais, iguais.

Dalí: *É daí, bah, né! Daí é um pouquinho mais complicado.*

Pesquisadora: Ok.

Dalí: *Por exemplo, se eu fizesse um F e o Thomson fizesse um F eu acho que não ficaria igual, imagino.*

Pesquisadora: Por que?

Dalí: *Por que ele iria usar outra medida e eu ia usar outra, não ficar a mesma coisa.*

Pesquisadora: Ok. Tá, a próxima pergunta: por que a posição da letra influencia na relevância das vistas?

Dalí: [ficou pensando]

Pesquisadora: Tu entendeu?

Dalí: *por que posição?*

Pesquisadora: A posição da letra. Porque eu coloquei que, por exemplo, se eu botasse o L virado, de cabeça pra baixo, minhas vistas iriam mudar um pouco?

Dalí: *Hum... tá, assim, tipo se eu colocasse o F de cabeça para baixo, não iria dar para identificar o F, né? Nem o L, talvez. Por que poderia ser qualquer letra que nem eu tinha falado antes. Sobre a vista superior, as vezes pode ser muito igual a alguma vista lateral. Só a parte frontal que é muita a frontal que fica diferente, em todas.*

Pesquisadora: Mas aquela questão que eu falei pra ti, do GeoGebra, pensando no L ...

Dalí: *Ah, no GeoGebra mudaria, porque mudaria as linhas pontilhadas.*

Pesquisadora: Trocaria a vista onde ficariam as linhas pontilhadas.

Dalí: *É, ficaria diferente.*

Pesquisadora: Qual letra que possui a vista frontal e lateral igual? Quais letras do alfabeto.

Dalí: *Frontal não existe.*

Pesquisadora: A frontal e a lateral delas são iguais.

Dalí: *Ah, a da mesma letra seria o I, né? Que pode ser igual, mas entre outras letras não daria para ter.*

Pesquisadora: Ta, tu tinha respondido que não tem, mas agora..

Dalí: *É, é que eu tinha entendido que era a parte frontal em comparação a outras letras.*

Pesquisadora: Tá. Teve um colega teu que disse que o i teria que ser maiúsculo, será que precisa? Para a frontal e a lateral serem iguais?

Dalí: *Não, porque no GeoGebra quando a gente vai desenhar não tem como fazer o pontinho.*

Pesquisadora: Por que não?

Dalí: *Ah sora, iria ficar muito esquisito se eu fosse imprimir depois ia ficar um negócio lá [mostra com a mãos como se o i ficaria grudado ao ponto]*

Pesquisadora: Tá, imprimir sim, mas sem imprimir. Eu não poderia fazer o i tridimensional com pontinho em cima?

Dalí: *Ah, daria.*

Pesquisadora: O que seria o pontinho aí no GeoGebra? O que eu poderia usar?

Dalí: *Cilindro. Mas daí, mesmo assim ficaria igual, o cilindro eu só vou ver como se fosse um retângulo, na verdade, no GeoGebra.*

Pesquisadora: Qual vista seria retângulo?

Dalí: *Seria tipo, do lado aqui seria... eu tenho um i [mostra com as mãos], se eu tivesse aqui um cilindro ele iria ficar e na lateral ia ficar igual. Mas a frontal e a lateral iria ficar igual.*

[participação de outro sujeito, mas impossível entender sua contribuição]

Pesquisadora: Teria outra opção além do cilindro?

Dalí: *Poderia usar um cubo também..*

Pesquisadora: Daí ficaria igual ou não?

Dalí: [pausa] *ficaria.*

Pesquisadora: O colega aqui falou em usar uma esfera, em vez do cilindro?

Dalí: *É uma boa.*

Pesquisadora: Ficaria igual?

Dalí: *Aí ficaria.*

Pesquisadora: Tá, são opções de como desenhar tua letra.

Dalí: *Mas ficaria meio esquisito, né, sora, um i todo quadrado daí um colocar uma esfera.*

Pesquisadora: É, eu faria um cubinho também. Por que até no início tu comentou em fazer as letras quadradas, né?

Dalí: *Pelo menos no GeoGebra, se fosse outro programa daria para usar outras formas também.*

Pesquisadora: Sim. Qual objeto tridimensional que possui em todas as vistas um quadrado?

Dalí: *O cubo.*

Pesquisadora: É só esse?

Dalí: *[fica pensando] Eita...além do cubo, não sei sora.*

Pesquisadora: Um colega teu falou no paralelepípedo.

Dalí: *Tá, mas daí tem retângulo.*

Pesquisadora: Então, paralelepípedo tem todas as vistas quadradas?

Dalí: *Não. Porque tem retângulos...*

Pesquisadora: Qual objeto tridimensional que as vistas lateral e frontal um triângulo e a inferior um círculo?

Dalí: *Cone.*

Pesquisadora: Um colega teu também respondeu pirâmide.

Dalí: *Na real um pirâmide teria uma base triangular e daí um cone é quando eu tenho uma base circular e daí pelas vistas laterais eu tenho um triângulo.*

Pesquisadora: Tá. Qual objeto tridimensional que possui as vistas lateral e frontal um triângulo isósceles e a inferior um quadrado?

Dalí: *Ah, daí uma pirâmide.*

Pesquisadora: Mas tu respondeu antes pra mim que a base da pirâmide é um triângulo.

Dalí: *Ela pode ser um triângulo ou pode ser um quadrado.*

Pesquisadora: Só?

Dalí: *Ah não, eu posso colocar uma base retangular... daí tem outras.*

Pesquisadora: Qual a característica para ser pirâmide então?

Dalí: *Ai..*

Pesquisadora: Sabe defini? Pensa um pouquinho.

Dalí: *Acho que tem alguma coisa haver com os lados, as faces serem triangulares e a base ter alguma forma que pode ser diferente.*

Pesquisadora: Ok. Aqui eu coloquei que as vistas laterais e frontal é um triângulo isósceles. Eu poderia dizer que a vista frontal e lateral é um triângulo equilátero?

Dalí: *Calma aí. Na pirâmide?*

Pesquisadora: É.

Dalí: *Se eu tivesse um triângulo isósceles e do lado um equilátero?*

Pesquisadora: Não, os dois serem equiláteros?

Dalí: *Ah, daí, eu acho que poderia sora.*

Pesquisadora: Ok, mas tu sabe dizer para ser um triângulo equilátero na vista frontal e lateral na pirâmide qual característica tem que ter em relação ao polígono da base?

Dalí: *Eu teria que ter uma certa altura que, tipo, todos tenham a mesma distância, fiquem com a mesma distância e fiquem com todos os lados laterais iguais, seria isso?*

Pesquisadora: Tá, ok, tua apresentação acho que terminou, né? Alguém tem alguma pergunta?

Dalí: *Acho que está bom, né, sora?*

Pesquisadora: Ok, obrigada.

APÊNDICE J – Transcrição da entrevista sobre a Atividade 8

O participante posiciona-se no computador, abre suas soluções e também a construção da maquete para ser utilizada na entrevista, se necessário.

Pesquisadora: Na construção do GeoGebra, em anexo, esta que ele abriu, tem-se a representação de uma igreja em amarelo, um galpão em laranja e uma caixa d'água em azul. Abaixo, representado por um ponto, daí eu anexe imagens representando os pontos [o aluno abre as imagens na tela], temos um observador neste local. Em cada imagem, figuras 1 a 4, esse observador visualiza a situação acima de um ponto de vista diferente, sempre de forma perpendicular com a imagem. Manipule a construção e posicione-a de acordo com a vista do observador para cada caso e entregue cada uma dessas imagens. Bem, na imagem 1 o observador está naquele ponto azul (aponta para a imagem projetada na tela), então como ele está vendo as construções, Michelangelo?

Michelangelo: Ahm...[abre a imagem com sua solução entregue no dia da tarefa]

Pesquisadora: Assim?

Michelangelo: É.

Pesquisadora: Tu acha que é bem assim, não tem nenhuma alteração que tu quer fazer agora?

Michelangelo: [volta-se para o computador, olha a imagem da pergunta novamente, abre a applet, mas acaba não fazendo nenhuma alteração, inclusive olha para seus colegas rindo] *Acho que não* [ri].

Pesquisadora: Tá. Na imagem 2 o pontinho azul está lá em cima, né? Daí ele está observando as construções como?

Michelangelo: [abre novamente a imagem já entregue]

Pesquisadora: Assim, tá, ok. Na frente do galpão, né?!

Michelangelo: *Aham*

Pesquisadora: O outro, ele está do lado direito, aqui, né?

Michelangelo: [abre novamente a imagem já entregue]

Pesquisadora: Ok. [o participante abre a próxima situação] e nesse ele está aqui, digamos, meio em diagonal.

Michelangelo: [abre sua imagem já entregue, mas ao vê-la retorna para a situação da pergunta e constata que estava equivocado, abre o aplet e refaz sua resposta] *Seria assim a 4.*

Pesquisadora: Tu tinha feito diferente?

Michelangelo: *Tinha feito do outro lado* [ri]

Pesquisadora: Tá, tu tinha feito assim [diante da primeira imagem]? Desse jeito, ele estaria aonde? Para a tua resposta estar certa, aonde ele teria que estar parado?

Michelangelo: *Mais ou menos aqui, desse lado* [mostra com o mouse onde o observador teria que estar]

Pesquisadora: Ai? Deixa eu ver de novo como tu fez? [o participante abre a imagem] Tá, ok. O que tu entende por imagem perpendicular? Tu acha que as tuas quatro que tu anexou são uma visão perpendicular da onde ele está parado? Que ele está olhando reto assim para a imagem?

Michelangelo: *Acho que não.*

Pesquisadora: Volta para tua imagem 1, tu acha que ele está olhando retinho? Olha na pergunta onde está o ponto, tu acha que está perpendicular essa imagem?

Michelangelo: *Não.*

Pesquisadora: Por que?

Michelangelo: *Hum... não sei.*

Pesquisadora: Volta de novo na tua. O que tu acha, para arrumar ela, o que tinha que fazer?

Michelangelo: [mexe no programa] *Colocar perpendicular?*

Pesquisadora: Pode ser.

Michelangelo: *Acho que...* [faz uma rotação] *Assim eu acho.*

Pesquisadora: Mas assim ele está olhando as coisas mais de cima. Ele está parado em cima?

Michelangelo: *Não.*

Professora regente: O que é perpendicular?

Michelangelo: *Perpendicular é 90 graus*

Pesquisadora: é um ângulo reto.

Professora regente: Tá, e se tu fosse o observador, o que seria o teu olho reto.

Pesquisadora: Primeira coisa, ele está sempre no plano ali, ele está no chão, isto eu coloquei no enunciado, no chão junto com as coisas, se ele está enxergando assim [sobre a última imagem que mostrou, uma visão quase superior das construções], tem como ele estar no chão, se ele está olhando quase todo o telhado do galpão e da igreja?

Michelangelo: [volta-se novamente para a tela e rotacional a imagem rapidamente para a posição correta] *Seria assim?*

Pesquisadora: Tá, ok. De qual posição do plano, o observador ele pode, do plano tá, ele está no chão, isso eu acho que o pessoal não observou na pergunta quando respondeu. De qual posição do plano, ou seja, do chão, eu não quis colocar essa palavra, mas o plano seria o chão, o observador pode visualizar as três construções sem que nenhuma fique na frente da outra. Tem alguma posição em que nenhuma fique na frente da outra? Ele poderia caminhar ali pelo chão que nenhuma ficaria na frente da outra? Sem fazer um giro a cabeça dele, ele olhar para frente e ver as três construções sem que nenhuma fique na frente da outra? Isso é a próxima pergunta, não é nessas quatro imagens.

Michelangelo: *Acho que seria assim.*

Pesquisadora: Tá, mas isso aqui é as imagens que eu tenho. ... Ah, tu colocou a imagem 3.

Michelangelo: *Aham*

Pesquisadora: É que eu não entendi na verdade tua resposta, tu colocou três. Isso quer dizer que tua imagem três ficaria assim?

Michelangelo: *isso*

Pesquisadora: Então volta para a imagem três.

Michelangelo: [coloca na imagem 3 onde só dá para ver o galpão e a caixa d'água]

Pesquisadora: Tá mas assim ele está observando as três construções sem que uma não fique atrás da outra?

Michelangelo: *Não.*

Pesquisadora: Tá, então tu quer tentar procurar, ou tu já sabe a resposta? Tem alguma posição no plano que ele caminharia que ...

Michelangelo: *No plano?*

Pesquisadora: Tem que ser no plano. No chão.

Michelangelo: [fica olhando para a pesquisadora, sem muito interesse] *Acho que não*

Pesquisadora: Tu quer girar lá um pouquinho só para a gente ver?

Michelangelo: [explora a rotação da imagem e para em uma posição diagonal]

Pesquisadora: Tá, tem alguma? [fica em silêncio] Tem alguns colegas teus que responderam que uma visão, a maioria respondeu isso, por isso que eu frisei em relação ao plano, alguns deles responderam que a visão de cima, poderia ser uma resposta?

Michelangelo: *A pergunta era do plano, daí acho que não.*

Pesquisadora: Então a resposta deles está...

Michelangelo: *Errada.*

Pesquisadora: Há alguma posição, que o observador, daí agora, de qualquer lugar do espaço, não veja algumas das construções? Ele pode ser posicionar em algum lugar dessas construções que ele não vai ver alguma delas?

Michelangelo: [volta-se para o programa e explora a rotação do aplet] *Acho que assim.*

Pesquisadora: De baixo?

Michelangelo: [ri com os colegas]

Pesquisadora: Alguém tem alguma sugestão?

Dalí: *Eu colocaria a caixa d'água na frente da igreja* [Michelangelo posiciona assim].

Pesquisadora: Hum, essa é uma imagem, daí não dá para ver a igreja. Alguém mais tem alguma ideia? ... Ele poderia subir em alguma das construções? Se eu estou dizendo que ele pode ser posicionar em qualquer lugar do espaço? Se ele subisse em cima de uma das construções e parasse na ponta, e olhasse reto para frente, ele não iria enxergar o que?

Van Gogh: *Se ele subisse na caixa d'água e olhasse reto para frente, não.*

[A turma inteira discute várias situações, difícil pegar as falas separadas]

Pesquisadora: O que acontece se o observador subir na caixa d'água, o que ele vai enxergar das construções?

Michelangelo: *Acho que depende se ele estiver na caixa d'água e olhar pra frente*

Pesquisadora: tu respondeu que ele vai enxergar o teto.

Michelangelo: [aponta na imagem como ele vai olhar] *se ele estiver aqui em cima e olhar para frente ele não vai ver nada e se ele estiver lá em cima e olhar pra baixo...*

Pesquisadora: E se ele olhar para baixo o que ele vai enxergar?

Michelangelo: *Se ele está aqui em cima e olhar para baixo vai enxergar a igreja e o galpão.*

Pesquisadora: Inteiros?

Michelangelo: *Daí não sei. Depende, depende do ponto de vista dele.*

Pesquisadora: Tá, mas tu acha que seria só o teto?

Michelangelo: *Aham*

Alguns alunos participam da discussão

Pesquisadora: Todo mundo acha que vai conseguir enxergar algumas paredes? Podemos dizer isso?

[alunos concordam]

Pesquisadora: Como ele teria que se posicionar, de onde teria que ser a visão dele se ele quisesse, ele está em cima da caixa d'água, se ele quisesse ver uma parte da caixa d'água e também a igreja e o galpão? Como ele teria que olhar?

Michelangelo: *Acho que ele teria que ir pro meio da caixa d'água.*

Pesquisadora: No meio?

Michelangelo: *Ele teria que ficar mais ou menos aqui no meio [mostra na tela] e olhasse assim*

Pesquisadora: Ele iria enxergar o que da caixa d'água ?

Michelangelo: *Um pedaço da ponta dela e um pedaço do teto da igreja.*

Pesquisadora: E a última, eu tenho uma imagem também, né? A imagem mostra uma vista possível do observador, utilize a construção e coloque um ponto azul de onde ele está vendo essa vista, é ao contrário, né? Eu estou dando a posição dele, não, estou dando a vista dele e estou pedindo para vocês criarem o ponto azul, ou seja, da onde ele está parado para ter aquela visão.

Michelangelo: [mostra a imagem que já tinha entregue]

Pesquisadora: Tá, ok, abre a minha imagem... então ele está tendo essa visão, então você acha que ele está parado onde?

Michelangelo: [Abre novamente a resposta]

Pesquisadora: Assim, ok. Teve um colega teu que colocou o ponto em cima do galpão, será que daria também?

Michelangelo: *Acho que não*

Pesquisadora: Ele teria essa visão se estivesse parado em cima do galpão?

Michelangelo: [faz gesto negativo com a cabeça]

Pesquisadora: Como a gente sabe disso.

Michelangelo: *Porque ele está vendo o galpão, se ele estivesse em cima ele não estaria vendo porque ele está em cima.*

Pesquisadora: Mas não estaria vendo nenhuma parte do galpão, nada? Se ele estivesse em cima?

Michelangelo: *Depende da onde ele está em cima*

Pesquisadora: Tá, e como eu sei que ele não está em cima do galpão?

Michelangelo: [fez gesto de não entender]

Pesquisadora: Olha, ele tendo essa visão aí, como eu sei que ele não está em cima do galpão

Michelangelo: *Por que ele está vendo o galpão, está vendo as paredes.*

Pesquisadora: Porque ele está vendo o galpão inteiro, né?

Michelangelo: [fez sinal afirmativo com a cabeça]

Pesquisadora: Ok, Michelangelo, obrigada

APÊNDICE K – Transcrição da entrevista sobre a Atividade 9

Pesquisadora: Questão 9 então, essa é bem longa, talvez a gente não faça toda ela, vamos ver se a gente já vence ela com as primeiras perguntas. Construa um cubo no GeoGebra e apresente as seguintes situações justificando-as. Anexar a construção do GeoGebra e também a imagem do que se pede. Nove item a: um plano de corte no cubo onde a região seccionada, o formato da região do cubo que fica nesse plano de corte é um triângulo. Tá, então aí tu construiu o teu cubo [imagem da tela], em relação às medidas eu não pedi nada e pedi para fazer um plano de corte e que a região que ficasse na região seccionada, na intersecção entre os dois, ficasse um triângulo. Ok, vou fazer as perguntas que daí tem haver com isso aí: existe outra maneira de obter um triângulo ou é só esse triângulo aí que dá para fazer Da Vinci?

Da Vinci: *Outro, não sei.*

Pesquisadora: Não sabe?

Da Vinci: *Eu tentei de outras maneiras e não deu para fazer um triângulo.*

Pesquisadora: Não conseguiu fazer outro?

Da Vinci: [faz gesto negativo]

Pesquisadora: Ahm... Mas tu tinha respondido que sim!

Da Vinci: *Não sei.*

Pesquisadora: Tu respondeu que sim, tu achava que sim, mas não conseguiu fazer outro?

Da Vinci: [fez gesto afirmativo]

Pesquisadora: Tá, eu estou observando que o tem triângulo ficou justamente nos vértices do cubo, né?

Da Vinci: *Aham.*

Pesquisadora: Está vendo, que os vértices do triângulo são os vértices do cubo. Eles precisam estar ali? Será?

Da Vinci: *Não sei.* [tempo em silêncio] *Eu acho que sim.*

Pesquisadora: Vamos construir um cubo lá no GeoGebra e vamos testar, porque senão eu não vou conseguir perguntar nada assim. Constrói um cubo rapidinho pra nós.

Da Vinci: [construiu o cubo no GeoGebra clicando em dois pontos e usando a ferramenta específica de construir cubo]

Pesquisadora: Tá, daí tu se lembra de como tu fez aquele plano de corte?

Da Vinci: *Sim, eu fiz um plano por três pontos aqui e marquei essa parte aqui* [selecionou três vértices do cubo]

Pesquisadora: Tá. Pelo jeito assim, tu escolheu três pontos, até porque ali o programa pede três pontos para fazer o plano, né?

Da Vinci: *Aham.*

Pesquisadora: Tá, ok. Tá, mas se eu tivesse colocado um ponto ali no meio do cubo, por exemplo, tu já pegou os pontos que tinham, ok, porque são os vértices que já estão ali. Mas se antes de tu fazer o plano, tu pegasse um ponto, pega lá um ponto e coloca em uma aresta. E se tu quiseses apagar esse plano para não ficar carregado

Da Vinci: *Colocar aqui?*

Pesquisadora: Pode colocar aí. Agora faz a mesma coisa, pega um plano, mas ao invés de selecionar o ponto do vértice, o H ali, pega o L e os dois debaixo.

Da Vinci: [selecionou esse ponto mas os dois vértices da aresta oposta a esse ponto, ou seja, o plano ficou uma diagonal do cubo, não obtendo um triângulo na intersecção]

Pesquisadora: Tá, é que tu pegou justamente dois vértices que estão um do lado do outro, desfaz, volta. Pega o ponto L [criado no meio da aresta] e assim, não pega vértices da mesma face. Pega, por exemplo o G ali embaixo.

Da Vinci: [marcou o ponto criado na aresta e os dois vértices opostos da base inferior, novamente a região da intersecção não ficou um triângulo e sim um quadrilátero] *Assim?*

Pesquisadora: Eu queria que tu pegasse do mesmo jeito que tu pegou antes, tu está pegando diferente, tu pegou antes o H e os dois vértices de baixo, pegou o G, da pontinha e o E, pega assim. O L, G e o E, eu só estou mudando, tu tinha pego o H.

Da Vinci: [pegou os pontos indicados e ficou a mesma coisa – por engano, a pesquisadora indicou os pontos pegos na última tentativa]

Pesquisadora: Tá, então pega o cursor e anda com o ponto L, como ele está azul, ele pode andar, né?

Da Vinci: [faz o que foi solicitado, a região da intersecção fica quadrilátero por todo o percurso, se tornando triângulo somente quando esse ponto atinge o vértice, como construído pelo Da Vinci]

Pesquisadora: Tá, se tu fica posicionado ali no meio que polígono que a gente tem?

Da Vinci: [rotaciona a imagem analisando]

Pesquisadora: Se ele fica posicionado no meio da aresta, que polígono é esse que está ali?

Da Vinci: *Não sei o nome.*

Pesquisadora: Não precisa o nome, mas quantos lados ele tem?

Da Vinci: *Tem quatro.*

Pesquisadora: Quatro. Ok, se tu trazer ele para o vértice?

Da Vinci: *Fica com três.*

Pesquisadora: Com três, um triângulo. Tá. Vou te pedir outra situação agora, tá? Desfaz esse plano aí, agora, ao invés de pegar o ponto E, de novo faz um ponto no meio daquela aresta de baixo, naquela aresta. Tá, e agora pega esses dois pontos que tu criou e o E lá embaixo. O L, o M e o E.

Da Vinci: [seguiu as instruções, os pontos criados ficaram na mesma face, porém em arestas opostas, criando um quadrilátero]

Pesquisadora: Tá, deixa eu pensar. Tá, agora tu mexe o M... e mexe o L...

Da Vinci: [manipula o objeto conforme o solicitado, observando o que acontece]

Pesquisadora: Tá, vamos fazer o último ponto solto também. Ao invés do E, pegar um ponto solto naquela aresta ali.

Da Vinci: [fez o solicitado]

Pesquisadora: Agora pega os três pontos soltos.

Da Vinci: *ok*

Pesquisadora: Tá. Deixa eu te perguntar, com eles soltos aí no meio da aresta, que polígono tu tem aí? Quantos lados?

Da Vinci: *Quatro.*

Pesquisadora: Quatro, né? Tá, dá uma mexida aí neles, para você poder explorar um pouquinho.

Da Vinci: [posiciona um dos pontos em um vértice do cubo]

Pesquisadora: Tá aí, o que eu tenho aí?

Da Vinci: *Um triângulo.*

Pesquisadora: Tá, então tem somente um jeito de fazer triângulo? Só tem aquele triângulo que tu fez?

Da Vinci: *Aham.. não.*

Pesquisadora: Não, eu posso fazer outros triângulos, ok? Será que também é só esse?

Da Vinci: *Não sei.*

Pesquisadora: Tá. Vamos continuar. A próxima pergunta seria se ele é único, se tem outro jeito de fazer. Ahm.. Próxima pergunta, crie um plano de corte onde a região seccionada é um triângulo equilátero, será que tem como fazer um triângulo equilátero?

Da Vinci: [fica pensando]

Pesquisadora: Tu quer abrir o que tu já tinha entregue já?

Da Vinci: [abre a imagem]

Pesquisadora: Esse aí é equilátero?

Da Vinci: [fica olhando sua imagem e abre outro arquivo]

Pesquisadora: Na verdade tu entregou dois, né?

Da Vinci: *Aham*

Pesquisadora: Esses dois aí são equiláteros?

Da Vinci: *Acho que sim*

Pesquisadora: Por que tu acha que eles são?

Da Vinci: *Não sei, eu tenho que fazer as medidas.*

Pesquisadora: Pelas medidas? Tu pegou lá [a ferramenta do programa] e mediu? Pela régua?

Da Vinci: [começa a medir os lados do triângulo]

Pesquisadora: Tá. Alguém sabe me dizer por que esse triângulo aí é equilátero? Sem medir?

Dalí: *Pelos ângulos?*

Pesquisadora: Tá, botando os ângulos. O Dalí respondeu que os ângulos internos é 60° , tu sabe dizer Da Vinci, por quê? Se eu dizer que ele tem 60° ele é equilátero?

Da Vinci: *Não.*

Dalí: *Porque 60° vezes três dá 180°*

Pesquisadora: Tá, daí se os três ângulos são iguais os três lados são iguais. Tá, sem medir os ângulos também, tem como afirmar que ele é equilátero?

[os participantes discutem, mas sem contribuições]

Pesquisadora: Volta para a tua primeira figura que eu acho que está melhor de ver que nessa. Não volta para aquela lá. Essa daqui até que está boa. [a pesquisadora se dirige até a tela de projeção]. Essa aresta, digamos que o triângulo está nessa face aqui, né? [Alisa a projeção da aresta e da face para mostrar], essa face é um quadrado, porque é um cubo e essa aresta aqui como se chama no quadrado?

[silêncio]

Que atravessa o quadrado assim no meio?

Professora regente: que liga um vértice ao outro?

Pesquisadora: Os vértices opostos?

[silêncio]

Pesquisadora: Sabe Monet?

Monet: *Diagonal.*

Pesquisadora: Diagonal, né? Diagonal desse quadrado. Esse aqui [aponta a outra aresta do triângulo na outra face do cubo] é o que?

Dalí: *Diagonal.*

Pesquisadora: É a diagonal do quadrado de lá. E a debaixo?

Dalí: *Aí é uma reta.*

Pesquisadora: Não, está passando no meio.

Dalí: *mas no triângulo é uma reta.*

Pesquisadora: Sim, mas no cubo? É a diagonal do quadrado debaixo. Como é um cubo, todos os quadrados são iguais.

Dalí: *Sim.*

Pesquisadora: E daí, as diagonais vão ser diferentes ou iguais?

Dalí e outros colegas: *Iguais.*

Dalí: *Mas como eu sei que é um cubo, sora?*

Pesquisadora: Foi tu que construiu, Dalí!

Dalí: *Não sora, mas como eu vou saber olhando?*

Pesquisadora: Tu construiu um cubo, eu não pedi para construir um cubo?

Dalí: *Sim*

Pesquisadora: Então, são quadrados! Se eu construí um cubo e três diagonais desse cubo forma um triângulo, então esse triângulo é um triângulo... Equilátero, né? Porque as três diagonais são iguais então os três lados são iguais. Ok? Então não precisaria medir, a gente poderia enxergar assim. Teve um colega teu que não fez as diagonais e nem esses três pontos vértices para fazer o triângulo e pegou, coloca lá na nossa construção, os pontos que estão soltos, tenta colocá-los no meio, ele, na verdade, criou o ponto médio, mas para a gente não precisar construir tudo de novo tenta colocá-los mais ou menos no meio só para a gente poder visualizar, mas ele fez o ponto médio exato, tá? A gente vai simular, faz de conta que é o ponto médio. Os três pontos ali, tu bota no meio, tá?

Da Vinci: [realiza as instruções solicitadas no programa]

Pesquisadora: Esse traz para o meio ali também, vê se dá para colocar direitinho no meio e o de cima traz para baixo.

Da Vinci: [tenta mover o ponto solicitado, mas ele não se move na aresta pretendida, pois foi construído sobre a outra, da lateral]

Pesquisadora: Aí, é que ele foi feita na aresta do lado. Então faz de novo, coloca os pontos médios ali, apaga o plano, assim não fica poluído... e agora faz um ponto médio entre o L e o E, esse e o debaixo e agora pega um plano que passa por esses três pontos médios.

Da Vinci: [realiza os passos solicitados no GeoGebra]

Pesquisadora: Tá. Formou um triângulo, né? Esse triângulo será que é equilátero?

Da Vinci: Não.

Dalí: *Sim, se são os pontos médios ali então só reduziu pela metade.*

Pesquisadora: Isso aí. Tá então também não foi preciso pegar medidas, porque o cubo é todo simétrico, se você pegar os três pontos médios ali, aqueles valores serão iguais, tá? Então também é um triângulo equilátero. Todo mundo apresentou ou triângulo que tu fez ou esse triângulo aí, ou seja, triângulos equiláteros, será que tem como fazer um triângulo que não é equilátero?

Da Vinci: *Sim.*

Pesquisadora: Tenta fazer um pra nós.

Da Vinci: [volta-se para o computador e mexe um dos vértices do triângulo equilátero já formado o transformando em escaleno]

Pesquisadora: ok. Agora eu estou pedindo um plano de corte onde a região seccionada é um quadrilátero, quatro lados. Pode olhar o que tu respondeu.

Da Vinci: [volta-se para o computador para abrir o arquivo entregue anteriormente]

Pesquisadora: Tá. É um quadrilátero isso que ficou ali entre o plano e o cubo? Da Vinci?

Da Vinci: *Hum?*

Pesquisadora: É um quadrilátero isso que ficou entre o plano e cubo, aquela região ali?

Da Vinci: *Eu acho que não.*

Pesquisadora: Ahn?

Da Vinci: *Essa parte aqui?*

Pesquisadora: É, a região da intersecção.

Da Vinci: *É.*

Pesquisadora: É um quadrilátero, né? Eu reparei de novo, que só um dos teus pontos é um vértice, né? Tá vendo que é o de cá, o da frente, será que ele precisaria estar parado ali?

Da Vinci: *Não.*

Pesquisadora: Para ser um quadrilátero?

Da Vinci: *Não.*

Pesquisadora: Ok. Teria como fazer outros quadriláteros?

Da Vinci: *Acho que sim.*

Pesquisadora: Teria como fazer um quadrado?

Da Vinci: *Sim.*

Pesquisadora: Como teria que parar ali para ser um quadrado?

Da Vinci: *Só deixar tudo reto, os pontos retos.*

Pesquisadora: Deixaria o que?

Da Vinci: *Os pontos alinhados e fazer o plano nos pontos.*

Pesquisadora: É um retângulo?

Da Vinci: *Daí não sei* [a pesquisadora deixou uma pausa de quase dois minutos para o participante pensar, este ficou parado, mas não explorou a construção do programa]

Pesquisadora: Tá, não pensou em como posso fazer um retângulo?

Da Vinci: [sinal negativo com a cabeça]

Pesquisadora: Teve alguém que fez, alguém se lembra de como fez um retângulo?

Portinari: *Corta o cubo no meio em diagonal.*

Pesquisadora: Colocar o plano em diagonal.

Portinari: *É.*

Pesquisadora: E por que seria um retângulo?

Portinari: [sinal que não sabe explicar]

Pesquisadora: Vamos lá fazer no nosso? Apaga esse plano aí, para não termos muitas poluições, pode apagar o que tu quiser aí, para despoluir um pouco.

Da Vinci: [volta-se para o programa fazendo o solicitado]

Pesquisadora: Ele pegou... diz as letras dos pontos para ele pegar Portinari, consegue dizer? Para fazer o plano?

Portinari: *O I, o J, não consigo identificar aquele ali?*

Da Vinci: [rotacional o cubo para mostrar os pontos]

Portinari: *O ponto que está no -3.*

Pesquisadora: Tá, o J, o I e o ponto que está no -3.

Da Vinci: [faz o plano solicitado]

Pesquisadora: Dá uma viradinha aí, por que isso ali é um retângulo?

[pausa]

Pesquisadora: Para ser um retângulo o que precisa ter? Tenta tu responder Da Vinci.

Da Vinci: *O quê?*

Pesquisadora: Para ser um retângulo tem que ter o quê?

Da Vinci: *Tem que ter os lados diferentes.*

Pesquisadora: Tem que ter o que?

Da Vinci: *Tem que ter os lados de comprimentos diferentes.*

Pesquisadora: Os lados de comprimentos diferentes, mas todos eles? Os quatro?

Da Vinci: *Não.*

Pesquisadora: Não, né? Tem que ser dois a dois iguais

Da Vinci: *Aham*

Pesquisadora: Os opostos tem que ser iguais. Tá, então vamos conferir isso. O de cima é igual ao de baixo?

Da Vinci: *Sim.*

Pesquisadora: Sim, por quê? Porque são arestas do cubo.

Da Vinci: *Aham.*

Pesquisadora: Tá, e agora aquela aresta de lá e está aresta de cá são iguais?

Da Vinci: *Sim.*

Pesquisadora: Por quê?

Da Vinci: *Porque são as diagonais do cubo.*

Pesquisadora: São as diagonais do cubo. Tá, e daí mais uma característica para ser retângulo, os ângulos tem que ser retos também, aí dentro do cubo será que temos ângulos retos? Entre a aresta IJ com a diagonal será que forma um ângulo reto? A gente pode olhar entre as faces do cubo, são ângulos retos? São ângulos de 90° graus dentro do cubo?

Da Vinci: [sinal positivo com a cabeça]

Pesquisadora: sim, então aquele retângulo ali tem ângulo reto, né?

Da Vinci: [sinal positivo]

Pesquisadora: Então aquele polígono tem ângulos retos, contém dois a dois lados iguais então ele é um retângulo, é um exemplo de um retângulo. Tá, e tu conseguiu fazer um plano de corte que tenha mais de quatro lados?

Da Vinci: *Sim.*

Pesquisadora: Quer abrir ele para nós?

Da Vinci: [abre o arquivo]

Pesquisadora: Quantos lados tem esse polígono?

Da Vinci: *Tem seis* [responde somente depois de contar]

Pesquisadora: Seis, consigo fazer outro hexágono ou só existe esse igual ao que tu fez?

Da Vinci: *Deve ter como fazer outro.*

Pesquisadora: Quando eu digo outro hexágono é mudar as medidas, né?

Da Vinci: *Sim.*

Pesquisadora: Consegue fazer outro com outras medidas? Para não ser exatamente esse? O que eu teria que fazer para mudar um pouco o teu hexágono?

Da Vinci: *Só mudar os pontos que eu fiz plano.*

Pesquisadora: Tá. Tem como fazer com menos lados? Tu fez um hexágono, a gente estava no quatro e pulou para seis, tem como fazer um pentágono? Cinco lados? Será que dá?

Da Vinci: *Sim, eu acho.*

Pesquisadora: E de sete?

Da Vinci: *Acho que tem como também.*

Pesquisadora: Acha que tem como também? Tu tinha respondido que só tem de cinco e seis

Da Vinci: *Foi o que eu tinha testado na hora. Eu não consegui mais que seis.*

Pesquisadora: Para fazer isto tu testou e testou e daí só conseguiu fazer até seis, é isso?

Da Vinci: *Aham.*

Pesquisadora: Alguém sabe me dizer se eu consigo fazer um de sete lados?

[os alunos discutem mas impossível de transcrever os áudios]

Pesquisadora: Tá, vamos ver se a próxima pergunta nos ajuda. Como deve ser a posição do plano de corte com o cubo e suas arestas para que ocorra esses polígonos? Daí estas duas próximas perguntas tu não respondeu, então vamos olhar juntos. Aqui tu tem um hexágono de seis lados, tá?

Da Vinci: *Aham*

Pesquisadora: Cada lado do teu hexágono está passando em cima de uma face do teu cubo, consegue enxergar isso? [se dirige à projeção na tela para mostrar]

Da Vinci: *Aham.*

Pesquisadora: Tu tem uma aresta aqui em cima e esta aresta está na face de cima, tu tem esta aresta aqui que está na face de cá, né? Está lá está na face de trás, esta daqui está nesta face aqui e aqui eu tenho uma aresta que está na face de baixo e daí eu tenho seis lados. Volta para a construção de quatro lados ou de três para a gente ver isso.

Da Vinci: [faz o solicitado]

Pesquisadora: Esse é de quatro lados. O de quatro lados, as arestas do quadrilátero estão em quantas faces do teu cubo?

Da Vinci: [fica olhando para a imagem]

Pesquisadora: Tem aresta do quadrilátero na face de cima? Está usando a face de cima para fazer o quadrilátero?

Da Vinci: *Não.*

Pesquisadora: E a face debaixo tem alguma aresta do quadrilátero na face debaixo?

Da Vinci: *Acho que está.*

Pesquisadora: Tu acha que sim, na face debaixo?

Da Vinci: *Não sei bem dizer, é que está bem aqui na ponta, né?*

Pesquisadora: Tá, está na pontinha, mas não está na face. [Novamente se dirige à projeção para mostrar as arestas e faces que está indicando] Olha, esta aresta aqui, teu quadrilátero é formado por isso daqui [percorre as arestas do quadrilátero na projeção], esta aresta está nesta face, esta aresta aqui está na face da frente, esta aresta aqui está na face de lá e a aresta lá de trás está na face de lá. Ou seja, tem alguma aresta formando o quadrilátero aqui [mostra uma face vazia] e na base aqui, no cubo embaixo?

Da Vinci: *Não.*

Pesquisadora: Ou seja, um quadrilátero tem quatro lados e esse quadrilátero está usando quantas faces do teu cubo?

Da Vinci: *Quatro.*

Pesquisadora: Quatro. Vamos colocar no triângulo?

Da Vinci: [abre o arquivo onde há um triângulo na região de intersecção]

Pesquisadora: Quantas faces o teu triângulo está usando do teu cubo?

Da Vinci: *Duas.*

Pesquisadora: Duas? Olha para cada lado do teu triângulo, para cada aresta do teu triângulo.

Da Vinci: [tempo olhando a imagem]

Pesquisadora: Percorre com o mouse uma aresta do teu triângulo pra mim.

Da Vinci: [faz o solicitado]

Pesquisadora: Tá, está aresta está nesta face aqui, né?

Da Vinci: *Sim.*

Pesquisadora: A aresta do lado ali está na face de cá e a aresta debaixo, tem uma aresta embaixo também, né? Porque é um triângulo!

Da Vinci: *Aham*

Pesquisadora: Esta aresta debaixo está na face debaixo.

Da Vinci: *Aham.*

Pesquisadora: Então quantas faces do cubo estão sendo usadas para fazer o triângulo?

Da Vinci: *Três.*

Pesquisadora: Três, cada uma das arestas está numa face. Tá, então eu te pergunto de novo, será que eu posso fazer um polígono de sete lados? Pensando nisso que eu acabei de mostrar para vocês, será que dá para fazer um polígono de sete lados?

Da Vinci: *Não.*

Pesquisadora: Não, por quê?

Da Vinci: *Porque um cubo só tem seis lados.*

Pesquisadora: Porque um cubo tem só seis faces, seis lados. Ok. Então de cinco, mesmo que não tenho construído, provavelmente a gente possa fazer, né?

Da Vinci: *Aham.*

Pesquisadora: Só a gente tem cuidar para que, qual a característica para que tenha cinco lados?

Da Vinci: *Tem que pegar cinco faces.*

Pesquisadora: Ok, isso aí. Obrigada Da Vinci.

APÊNDICE L – Transcrição da entrevista sobre a Atividade 11

Pesquisadora: Na imagem 1 temos vários cubos empilhados, o que chamamos de multicubos e este tipo de visualização chamamos de perspectiva paralela, na imagem 2 detalhamos cada uma das projeções ortogonais, as vistas deste multicubo para que fique evidente cada uma das suas faces. Pergunta 11.a, construa no GeoGebra este multicubo.

Botticelli: [Abre o arquivo e o rotacional mostrando todas suas faces]

Pesquisadora: Tá, então aqui tu construiu ele. Quantos cubos tem neste multicubo, Botticelli?

Botticelli: *Dez.*

Pesquisadora: Dez. Tu contou pela tua construção ou pelas vistas que foram dadas?

Botticelli: *Pela construção.*

Pesquisadora: Se retirarmos um cubo do topo, em quais vistas das projeções vamos modificar? Se tu tirar aquele cubinho ali de cima.

Botticelli: *Na frontal, de frente e na da direita. Porque na superior não vai modificar nada.*

Pesquisadora: Ok, mas teus uns colegas teus que disseram que só a vista da frente se modificaria, tu tem certeza da tua resposta?

Botticelli: *Tenho. Porque...*

Pesquisadora: Tu tirou o cubo para ver isso ou tu imaginou?

Botticelli: *Eu imaginei. Porque se tu tirar ele da direita, da vista lateral direita tu vai modificar, tu não vai ter ele.* [tapa na tela o cubo superior mostrando como ficaria]

Pesquisadora: Tá, e se eu, ao invés de retirar ele, tivesse só colocado ele para frente?

Botticelli: *Como?*

Pesquisadora: Ao invés de tirar ele eu botasse ele pra frente...

Botticelli: *Aqui?* [mostra com o dedo o local]

Pesquisadora: Isso. Iria modificar alguma das três vistas?

Botticelli: *Iria da direita também e na..., frontal não, a superior também não.*

Pesquisadora: Ok, se cada cubo possui 8 cm^3 de volume, qual o volume total do multicubo?

Botticelli: *Como tem dez cubos, tu só multiplica por 8 que é o valor e daí vai dar 80 cm^3 .*

Pesquisadora: E se tivesse um multicubo de 20 cubos?

Botticelli: 20 vezes 8.

Pesquisadora: E se eu pegasse esses dez cubinhos daí e empilhasse eles totalmente diferentes, qual seria o volume?

Botticelli: O mesmo.

Pesquisadora: O mesmo o que?

Botticelli: 80 cm³.

Pesquisadora: Tu consegue me dizer quantos cubos tem o multicubo de 64 cm³ de volume?

Botticelli: Oito.

Pesquisadora: Tá. Se cada cubo tem 2 cm de aresta, qual a área da superfície do multicubo?

Botticelli: Tá, para cada cubo tem que fazer dois vezes dois que vai dar quatro e daí nessa vista frontal [posiciona o multicubo digital nesta vista] tem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 então são 7 vezes 4 vai dar 28, e atrás também vai dar 28, dando 56. Daí tu faz desta vista lateral [rotacional o objeto nesta posição] e vai dar 1, 2, 3, 4, 5, 6, seis vezes quatro que vai dar 24 mais 24, 48.

Pesquisadora: Por que mais 24?

Botticelli: Porque é o outro lado.

Pesquisadora: Ah tá.

Botticelli: E superior tu faz também [novamente posiciona o multicubo digital na vista superior], vai dar 5 e na inferior também.

Pesquisadora: Cinco?

Botticelli: [olha para o objeto novamente e volta-se para a pesquisadora com cara questionadora] Sim.

Pesquisadora: Tem cinco? Ah tá, tem, desculpa.

Botticelli: E inferior vai dar cinco também, daí dá 40, daí soma os dois. Daí 56 mais 48 mais 40 vai dar 144.

Pesquisadora: E se, aquele multicubo, sem o cubinho de cima, tá? O que tu teria que fazer para calcular a área sendo que tu já tem essa resposta, como tu faria a área de novo se eu tirasse esse cubo?

Botticelli: *Se tirasse esse?*

Pesquisadora: Aham

Botticelli: *Mas excluir ele?*

Pesquisadora: É.

Botticelli: *Eu subtrairia por ..ahm..8.*

Pesquisadora: Tu subtrairia 8? Por que por 8?

Botticelli: *Ou por 4? Porque 2 vezes 2, como é um cubo só! Tu excluiria 4.*

Pesquisadora: Tá, mas o cubo de cima, ele tem um quadradinho só?

Botticelli: *Esse aqui?*

Pesquisadora: É. Tem um quadrado só?

Botticelli: *Não, não.*

Pesquisadora: Então não tem um quadrado só, então tu iria diminuir quatro igual?

Botticelli: [silêncio]

Pesquisadora: É que um quadrado só tem 4 cm² de área, um quadrado.

Botticelli: *Sim.*

Pesquisadora: Mas eu iria tirar o cubo inteiro. Quanto centímetros quadrados será que iria excluir?

Botticelli: *Seis.*

Pesquisadora: Seis?

Dalí: *Não teria que tirar todos ali do lado do cubo, né? Daí iria sobrar o superior, porque ele iria ter ficado na parte de baixo ali. Então ficaria isso.*

Botticelli: *Só a parte superior.*

Dalí: *É porque não iria ficar um buraco ali.*

Pesquisadora: Tá repete o início Dalí, só para ver se todo mundo entendeu. O que teria que subtrair?

Dalí: *Subtrair os quatro lados dali.*

Pesquisadora: Em volta.

Dalí: *E a parte de cima iria continuar.*

Pesquisadora: Porque a parte de cima ficaria no quadrado de baixo igual, né?

Dalí: *É.*

Pesquisadora: Botticelli, coloca em uma vista lateral ali. Isso. Se tu tirasse esse cubo de cima, iria sair esse quadradinho, iria cair fora, então aqui tu faria menos 4. Só que menos 4...

Botticelli: *Do outro lado também.*

Pesquisadora: Coloca na frente. Sairia esse quadradinho de cima, então menos 4 só que menos 4 do outro lado também. Só que agora, coloca na vista de cima. Esse quadradinho ali do meio, será que ele iria sumir?

Botticelli: *Não.*

Pesquisadora: Não, porque aquele quadradinho seria do cubo debaixo, né?

Botticelli: *Sim. Vai dar 16?*

Pesquisadora: Isso aí, menos 16. A última pergunta então, se movermos um dos cubos, se trocarmos ele de lugar, tem a possibilidade de não modificar uma das projeções? Eu quero que tu mexa em um cubo e uma das projeções não se modifique.

Botticelli: [abre sua construção] *Eu mudei aqui o cubo, ele tava aqui e coloquei aqui e só muda as vistas laterais.*

Pesquisadora: Muda as vistas laterais.

Botticelli: *A superior não vai mudar.*

Pesquisadora: mas será que tem alguma outra modificação que dá para fazer que não modificaria nenhuma?

Botticelli: *Acho que não.*

Pesquisadora: Tá, então essa daí modificaria a frontal e a superior, né?

Botticelli: *Sim.*

Pesquisadora: E o volume desse cubo ele se modificou?

Botticelli: *Não, porque é a mesma quantidade de cubos.*

Pesquisadora: E a área modificou será?

Botticelli: *Na verdade só trocou de posição, né? Mas eu acho que a área não modificou. Só vai mudar a vista frontal, não a frontal não. É, vai modificar a vista frontal...*

Pesquisadora: Mexe um pouquinho teu multicubo só para parar em uma posição melhor de ver. Ele estava pra trás, um cubo para trás, é isso?

Botticelli: *Sim, só coloquei um cubo para frente.*

Pesquisadora: Por que tu acha mesmo porque a área não mudou?

Botticelli: *Porque a área tu conta lado, frente, lado, embaixo, em cima, superior e as vistas laterais e daí como saiu um dali só entrou na vista frontal, entrou mais um cubo, eu acho.*

Pesquisadora: Mas se entrou daí vai mudar a área, né? Será que entrou?

Botticelli: *Na verdade só mudou, ele só venho para frente um pouco. Daí a área não modifica.*

Pesquisadora: Tá bom. Ok. Obrigada.

APÊNDICE M – Transcrição da entrevista sobre a Atividade 12

Pesquisadora: Bem, esta atividade 12, eu trouxe a seguinte situação problema, para vocês, que era refazer a peça desse brinquedo aqui [a pesquisadora mostra o brinquedo e o orifício na qual a peça faltante deve se encaixar] que era a peça que se encaixava neste orifício, neste buraco, era uma peça de encaixe, é um brinquedinho de encaixe, então teria que fazer uma peça pra cá. Vocês tinham a disposição ou se emprestar régua, enfim pra ver as medidas e tinham acesso ao brinquedo para constatar essas medidas. Bem, então eu coloquei assim: Faça o projeto desta peça no GeoGebra e nos mande o arquivo, né? Daí tu fez isso [pesquisadora aponta para a tela onde está projetado a peça construída pelo entrevistado], tu sabe me dizer qual é o nome desse sólido?

Scholles: *Olha, é triângulo, mas, não lembro quando ele está assim...* [aponta para a parte do sólido onde aparece a espessura do sólido]

Pesquisadora: O sólido não? É um prisma triangular.

Scholles: *É.*

Pesquisadora: As medidas dele tu sabe me dizer? Por que tu escolheu essas medidas?

Scholles: *Posso ligar ali rapidinho?* [se dirige ao seu computador para olhar o arquivo e em alguns segundos retorna]. *Eu escolhi essas medidas porque é mais ou menos o que eu calculei usando a régua ali* [aponta para o brinquedo] *o tamanho do buraco para que quando imprimisse na impressora para que desse para caber nele.*

Pesquisadora: Tá, mas ali no buraco tu mediu o tamanho do buraco que é um triângulo, daí tu conseguiu constatar as medidas do lado do triângulo, né?

Scholles: *Sim.*

Pesquisadora: Tá, e porque tu escolheu essa espessura aí no teu sólido?

Scholles: *A espessura não importava muito, mas eu fiz mais ou menos assim pra quando botasse fosse mais fácil de colocar, pra ficar mais o coisa e a peça cair.*

Pesquisadora: Ok. Tá, gira ela para a gente ver o triângulo. É um triângulo equilátero, com os três lados iguais? Tu sabe dizer? Lembra?

Scholles: *Se eu me lembro acho que é, porque ele pega uma unidadezinha aqui* [aponta para um vértice da base] *e do outro não pega igual* [aponta para o outro vértice da base], *porque aqui ele é 4,5* [aponta para o vértice superior], *ele pega dois e...*

Pesquisadora: Tu lembra como tu fez a construção dele?

Scholles: *Eu fiz com ... eu fiz um segmento depois eu botei as faces preenchendo tudo.*

Pesquisadora: Tá, e esse segmento que tu fez que tu cuidou para ser 5 cm? É isso? Foi um lado, tu começou por um lado do triângulo?

Scholles: *É, aqui em cima eu coloquei em 4,5 [apontou para o vértice superior] e aqui [vértice da base] eu coloquei tipo a metade.*

Pesquisadora: Ahm então tá. Dá uma explicada aí, então quando tu mediu aqui o orifício, o que tu mediu, o tamanho das, o que eu chamaria das arestas do triângulo ou tu mediu a altura, isso aqui [mostra no brinquedo a altura relativa ao triângulo do orifício]?

Scholles: *As arestas.*

Pesquisadora: As arestas. Tá. Eu medi direitinho o teu triângulo, tá? Ele é um triângulo isósceles, na verdade, ele tem uma das arestas 4,5 e as outras duas de 5 cm, 4,5 e 5 cm. Tá, pra tu tentar fazer com essas medidas tu foi fazendo segmentos, não teve nada, tu chegou a usar a régua do programa ou circunferência, alguma coisa assim pra tu tentar fazer os tamanhos iguais?

Scholles: *Não, fiz mais ou menos baseado no tamanho da régua dele [aqui, pelos pontos que o entrevistado apontou anteriormente ao falar das medidas, a pesquisadora entendeu que ele quis dizer os eixos coordenados do programa quando mencionou régua]*

Pesquisadora: Tu usou a malha, pelo o que tu está dizendo aqui também [a resposta dada anteriormente na plataforma da atividade]. A malha quadriculada um pouco, as medidas da...

Scholles: *É, como na espessura aqui.*

Pesquisadora: Teve colegas teus aqui que fizeram um triângulo equilátero, direitinho, os três lados iguais, alguém quer explicar como fez?

Monet: *Distância entre dois pontos.*

Pesquisadora: Como assim, Monet?

Monet: *Eu fiz o cálculo numa folha pra conseguir ter os três lados iguais. Entendeu? Primeiro eu criei uma aresta, tá?*

Pesquisadora: Tá.

Monet: *Depois, no triângulo eu precisava só mais um ponto para ligar os segmentos, daí eu calculei a distância de dois pontos igual a 5.*

Pesquisadora: Hum... tu usou a fórmula da distância entre dois pontos no plano, geometria analítica. Alguém mais, eu vi mais triângulos equiláteros, eu acho que o pessoal fez um

pouco diferente. [silêncio] Deixa eu ver aqui [a pesquisadora olha os arquivos entregues], Nicolau, lembra como tu fez teu triângulo?

Da Vinci: [somente olha para a pesquisadora e demonstra o desinteresse em explicar]

Pesquisadora: Não quer explicar? Michelangelo, lembra como tu fez? [sinal negativo]. Não?

Michelangelo: *Difícil explicar, sora.*

Pesquisadora: Difícil. Tá, ok. Tu acha que essa peça que tu construiu ela vai entrar ali naquele buraco [aponta para o brinquedo]?

Scholles: *Possivelmente entraria, se não for maior do que as arestas do buraco.*

Pesquisadora: Tu acha que ela vai encaixar perfeitamente, vai ficar menor ou maior, qual seria teu chute, ela vai encaixar bem perfeitinha ou vai ficar uns milímetros menor que dá para dar uma mexidinha assim ou vai ficar maior?

Scholles: *Eu acho que ela ficaria menor um pouquinho porque pra entrar e não travar.*

Pesquisadora: Como tu fez ela com uma alturinha de 1 cm, se eu não me engano, não tem perigo dela encaixar, ao invés pelo triângulo assim, deitada, não tem perigo de repente dela entrar a peça em pé? Entendeu o que eu quis dizer? Será que tem esse perigo?

Scholles: *Talvez, mas acho que quase socar a peça pra dentro.*

Pesquisadora: Teria que o que?

Scholles: *Teria que quase forçar ela.*

Pesquisadora: Forçar, tua acha? Por que não daria certo, onde tu acha? Entende? Será que ela não encaixaria assim [a pesquisadora mostra a peça em pé]

Scholles: *Dependendo da espessura do triângulo não entraria*

Pesquisadora: Tu acha que se alguém tivesse feito, tu já me respondeu que teu triângulo parece que tem entre 5 e 4,5 cm, se alguém tivesse feito uma peça com um triângulo de 2 cm, por exemplo, bem menor, será que teria graça esse brinquedo aqui? Tipo, a peça se encaixaria no objetivo que tem o brinquedo?

Scholles: *Ela iria começar a se encaixar na maioria das peças ali [aponta para o brinquedo]*

Pesquisadora: E daí?

Scholles: *Não iria ter um desafio no brinquedo que tu tem que encaixar as peças certos no lugar.*

Pesquisadora: Aham. E a tua peça, será que ela se encaixa em algum outro buraco? Outro orifício ali?

Scholles: [ficou pensando]

Pesquisadora: A tua, ou tu acha que só entra no triângulo?

Scholles: *Dependendo ela poderia entrar no quadrado também, eu acho. Se botar ela de lado. Só que daí não estaria na forma do quadrilátero.*

Pesquisadora: Aham. OK, alguém quer comentar algo? Então obrigada Scholles.

APÊNDICE N – Transcrição da entrevista sobre a Atividade 13

Pesquisadora: Pierre, é a continuação da atividade anterior, mas como eu quero imprimir essa peça, quero completar o brinquedo da minha filha, e também pensando em relação a custos e também a fabricação desse material, eu quero que vocês otimizem essa peça, utilizem menos filamento possível na impressão 3D. Então eu pedi para vocês modificarem a peça, se necessário, de vocês de modo que ela tenha o menor volume possível que utilize menos filamento na sua impressão e que também se encaixe perfeitamente no orifício de um único modo. Anexe aqui os seus arquivos. Então é essa a peça que tu fez? [aponta para a tela onde está projetada a peça construída pelo participante]. O que tu fez para ela ficar mais em conta?

Renoir: *Eu pensei em várias coisas, uma era, por exemplo, deixar o filamento menor, mais fino, só que eu não achei essa opção na hora do projeto. Daí o que eu fiz foi deixar a peça totalmente oca por dentro. Tá, não está nas mesmas medidas do brinquedo, eu não consegui me orientar, mas foi deixar no meio totalmente oca, sem fechar.*

Pesquisadora: Aham, tá então essa peça aí é exatamente a peça anterior? Isso?

Renoir: *Isso.*

Pesquisadora: Tu não construiu outra?

Renoir: *Não, eu construí, só que eu fiz ela totalmente oca. Ela não tem uma das partes que fecha direitinho.*

Pesquisadora: Uma base dela não tem.

Renoir: *Isso, ela tem só uma base e por dentro ela é totalmente oca.*

Pesquisadora: Tá, a única coisa, eu queria saber se tu pegou, é exatamente a outra peça e tu tirou uma base ou...

Renoir: *Não eu refiz do zero.*

Pesquisadora: Tu fez do zero. Então ela é diferente ou não? Se tu usou as mesmas medidas, por que eu não me lembro da tua peça anterior, é as mesmas medidas ou não?

Renoir: *Não, eu acho que não.*

Pesquisadora: Mas e daí porque tu modificou as medidas?

Renoir: *Não, porque, ou eu peguei a peça anterior? Não, eu peguei a peça anterior, foi sim. Sora, eu acho que peguei a peça anterior sim.*

Pesquisadora: Tá, então tu tirou uma das bases, deixou ela oca, né?

Renoir: *Exatamente.*

Pesquisadora: Tu acha que daria para otimizar mais ainda, teria como tipo fazer ela...

Renoir: *Eu fiz, eu tinha sim pensando numa coisa, que era tirar esses pontos [mostra na tela os vértices] pra não usar filamento aqui, eu tinha pensando numa coisa mas eu acho que o GeoGebra não tem é deixar essas arestas finas.*

Pesquisadora: Mas e porque tu não tirou os pontos?

Renoir: *Oi?*

Pesquisadora: Por que tu não tirou os pontos?

Renoir: *Pra eu poder explicar essa parte, eu acho que ficaria estranho. Mas eu não vi essa opção de por exemplo deixar estas arestas mais finas, deixa-la fininha, retinha, junto, no mesmo nível do [mostra com o dedo a face]*

Pesquisadora: Na mesma espessura que a parede.

Renoir: *Isso. Mas eu não achei essa opção, eu não consegui de jeito nenhum. Não sei se tem.*

Pesquisadora: Tem.

Renoir: *Mas eu não achei.*

Pesquisadora: Tá, eu quero te mostrar as peças dos teus colegas, não vou falar de quem é quem ainda, mas eu queria que tu desse uma olhadinha, sem colocar no orifício e veja qual tu acha que é a mais otimizada mas que também serve para o brinquedo.

Renoir: *Que também serve?*

Pesquisadora: É, porque aqui tem peça que não adiantava fazer..

Renoir: *É só de olhar ou eu posso...*

Pesquisadora: É só de olhar, eu queria que tu olhasse só, posso colocar do lado (traz o brinquedo e deixa junto com as peças) mas não quero que tu teste, tá?

Renoir: *Tá. [fica analisando cada peça, pega elas na mão, durante 40 segundos] Olha o tamanho, acho que nenhum alcança aquele tamanho ali, mas eu acho que esta daqui com essa forma assim consegue [mostra uma peça em forma de pirâmide – peça do colega Picasso], porque por exemplo, essa aqui [não consigo identificar qual peça pelo vídeo] tem o filamento muito espesso, muito grosso, com certeza esse tem menos filamento do que esse daqui, esse daqui está muito espesso, esse aqui também, como ele é oco até daria mas ele*

também tem muito filamento nesta espessura, que aqui por exemplo, além de ser oco não tem a base não tem, com certeza é mais eficiente que o meu.

Pesquisadora: Tu acha que esse é mais eficiente que o teu?

Renoir: *Eu acho que sim, porque o meu tem todas as laterais e esse aqui só tem isso*

Pesquisadora: as três paredes.

Renoir: *É esse aqui seria um bom candidato, mas é muito filamento. Então eu acho que esse daqui, mas eu acho que nenhum deles alcança o tamanho proposto pelo brinquedo.*

Pesquisadora: E qual deles tu acha que está bem desnecessário, que mais custo teve?

Renoir: *Esse aqui está extremamente exagerado [peça do Botticelli].*

Pesquisadora: E não teria necessidade de ser assim?

Renoir: *É, só se tiver dinheiro, coisa assim, porque é muito grosso, muito espesso, não faz sentido, não tem porque, eu acho que é gasto a toa, tanto é que se for olhar para essas peças de brinquedo elas são loucas, são para baixo custo. Eu acho que não faz sentido e tem esse aqui que com certeza está bem fora de proporção [mostra a peça do Dalí]. Eu escolhi esse aqui, que é mais bonitinho.*

Pesquisadora: Tu acha que tem algumas das peças ali que faz perder o sentido do brinquedo porque ela se encaixa de qualquer jeito, se encaixa nos outros orifícios?

Renoir: *Com certeza essa daqui (peça do Dalí), ela é muito pequena, ela cabe aqui, em qualquer de qualquer, praticamente, até na lateral, de qualquer forma possível. E eu acho esse aqui, nem tanto, mas ele não tem, ele não é perfeitamente [mostra com os dedos os lados diferentes]*

Pesquisadora: Equilátero.

Renoir: *É. Mas esse aqui seria bem legal porque tem os lados incluídos [peça piramidal do Miró]*

Pesquisadora: A tua peça, na verdade vou dizer como coloquei na pergunta, a impressora funciona com impressão em camadas, ou seja, uma camada sobre a outra, será possível imprimir a sua peça? Ou tem alguma posição que eu teria que colocar ela para ser impressa?

Renoir: *Eu acredito que tenha sim uma posição específica que é como está aqui [mostra na tela] de cabeça para baixo, com a parte oca para cima, com o tampão para baixo, porque daí faz toda uma base para assim começar a subir as paredes, porque se eu começar a subir só as paredes na hora que eu for fazer o tampão eu acredito que ele vai afundar, por*

causa do peso do material, então eu acho que o jeito, eu não sei se funcionou, eu não testei, eu espero que funcione, de não desabar, assim as paredes, como elas vão ser feitas em camadas assim eu acredito que por essas linhas aqui [mostra as arestas laterais] uma vai sustentar a outra.

Pesquisadora: Tá, então no momento que eu projetar essa peça, se eu quero otimizar, o menor custo possível, é interessante também pensar em não utilizar apoios na hora de projetar ela?

Renoir: *Projetar, sim, não utilizar muito apoio aqui do lado, primeiro porque ..., não só apoio para ligar uma parte aqui para não deixar desabar, porque primeiro ele vai gastar, não deixar outras coisas do lado para não deixar cair, porque vai grudar, porque vai ficar imprimindo por cima e vai ficar horrível e ... eu acho que não tem a necessidade de apoios.*

Pesquisadora: Tá, ok. Tu acha que uma dessas que eu imprimir dos teus colegas precisou de apoio?

Renoir: *[vai até as peças analisa-las] Pelo que eu estou vendo aqui elas foram imprimidas deitadas. Essa daqui, como é muito espessa ela tem sustentação. Essa daqui é uma boa concorrente, mas não tem o tamanho específico.*

Pesquisadora: Como tu acha que eu posicionei ela para imprimir essa peça?

Renoir: *Pelo que eu estou vendo aqui tem uma parte lisa, acho que a senhora fez assim [coloca a peça sobre a mesa na posição que foi impressa].*

Pesquisadora: Acho que fiz assim?

Renoir: *É, só que essa aqui que eu não entendo porque não desabou.*

Pesquisadora: Por que, o que?

Renoir: *Porque ela não caiu, se ela não teria que ter um apoio aqui. Ela conseguiu imprimir na diagonal, ao menos que tenha colocado apoio e tirado depois, mas pelo que estou vendo não tem nenhuma marca de apoio, não tem nada. E foi uma peça que não desabou quando fez a diagonal, porque ela foi impressa assim [coloca a peça sobre a mesa na posição da impressão] mesma coisa que essa [aponta para outra peça que possui inclinação]. Essa daqui por conta dessa região aqui que foi impressa junto não desabou (as outras peças tinham faces vazadas essa última não). Essa daqui, por conta das laterais ela não desabou, acabou dando sustentação pra cá e equilibrando. E aqui, é exatamente aquela ali [mostra a sua peça projetada na tela, pois é da dela que está na mão no momento] acabou que não desabou, pensei que iria desabar.*

Pesquisadora: Essa aí? Ou seja, a tua?

Renoir: *É. Acabou que não desabou como pensei que ia.*

Pesquisadora: Tá. Tu falou em relação às medidas, que tu não cuidou.

Renoir: *Eu não cuidei, eu errei as medidas.*

Pesquisadora: Tu errou, tu não quis cuidar, tu esqueceu de cuidar?

Renoir: *Eu medi errado, eu medi totalmente errado e passou despercebido por mim. Pelo que eu olhei aqui está beleza, eu não conferi, passou despercebido o erro.*

Pesquisadora: Tu tentou fazer um triângulo equilátero, se tentou, tentou como?

Renoir: *Eu tentei fazer com a malha, e como eu não fiz ela deitada, eu fiz ela empé, eu tentei usar a malha. Só que eu não usei a parte de medidas, eu tentei fazer mais ou menos um número exato, coloquei pontos mais para um lado que para o outro.*

Pesquisadora: E daí, tu acha que tua peça está legal para o brinquedo?

Renoir: *olha, se ela tivesse direitinho do tamanho certo...*

Pesquisadora: Se ela tivesse, não é a minha pergunta.

Renoir: *Ela não está apropriada, eu tenho certeza que não é apropriada para o brinquedo, porque as medidas estão erradas, o tamanho, está numa espessura boa para o brinquedo, mas as medidas estão erradas.*

Pesquisadora: Ok, obrigada.

APÊNDICE O – Artigo MONZON; BASSO, 2018 (a)

MONZON, Larissa Weyh; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. **Prospecção de Pesquisas sobre o uso de Tecnologias Digitais para o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico Espacial**. Renote, Porto Alegre, v. 16. n. 1, 2018(a)

Prospecção de Pesquisas sobre o uso de Tecnologias Digitais para o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico Espacial

Larissa Weyh Monzon – PPGIE/UFRGS – larissamonzon@gmail.com
Marcus Vinicius de Azevedo Basso – PPGIE/UFRGS – mbasso@ufrgs.br

Resumo: Este artigo faz parte de uma pesquisa em andamento na qual se investiga possibilidades de impacto das tecnologias digitais sobre o pensamento geométrico espacial de estudantes do Ensino Básico. Para isso, catalogamos e analisamos, via revisão sistemática da literatura, nove periódicos dos quais registramos a ferramenta tecnológica, os aportes teóricos, a metodologia e as conclusões sobre a temática da investigação. Constatou-se a existência de estudos nas quais tecnologias digitais são apontadas como favorecendo a visualização espacial e, assim, podendo desencadear pensamentos geométricos. Como resultado, identificou-se a necessidade de desenvolver propostas de atividades que contribuam para provocar desequilíbrios cognitivos referentes ao pensamento geométrico espacial de estudantes do ensino básico para proporcionar construções de novos conhecimentos.

Palavras-chave: tecnologias digitais, pensamento geométrico espacial, visualização espacial, revisão sistemática da literatura

Prospecting of researches on the use of Digital Technologies for the Development of Spatial Geometric Thinking

Abstract: This article is part of an ongoing research that investigates possibilities of impact of digital technologies on spatial geometric thinking of Basic Education students. For this, we have cataloged and analyzed, through a systematic review of the literature, nine periodicals of which we have registered the technological tool, the theoretical contributions, the methodology and the conclusions about the research theme. It was

APÊNDICE P – Artigo MONZON; BASSO, 2018 (b)

MONZON, Larissa Weyh; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. **Geometria Dinâmica e Método Clínico de Piaget: visando o pensamento geométrico das transformações**. Renote, Porto Alegre, v. 16. n.1, 2018 (b)

Geometria Dinâmica e Método Clínico de Piaget: visando o pensamento geométrico das transformações

Larissa Weyh Monzon – PPGIE/UFRGS – larissamonzon@gmail.com
Marcus Vinicius de Azevedo Basso – PPGIE/UFRGS – mbasso@ufrgs.br

Resumo: Nesse artigo analisa-se o papel do uso de recursos digitais de Geometria Dinâmica em entrevista baseada no Método Clínico de Jean Piaget considerando o estudo do pensamento geométrico em relação a transformações no plano. Para esta análise desenvolveu-se uma sequência de atividades que contempla transformações geométricas utilizando o software GeoGebra em uma entrevista clínica com dez estudantes do Ensino Básico. O uso desse recurso proporcionou aos sujeitos da entrevista uma forma de interação e manipulação para construir conceitos, como também, para o pesquisador entender o pensamento dos entrevistados. Os dados apontam para a possibilidade de integração do Método Clínico e uso de mídias digitais possibilitando a ação do sujeito sobre objetos de geometria.

Palavras-chave: Geometria dinâmica, Método Clínico, Piaget, transformações geométricas

Dynamic Geometry and Clinical Method of Piaget: aiming at the geometric thinking of transformations

Abstract: This article analyses the role of the use of digital resources of Dynamic Geometry in interview based on Jean Piaget Clinical Method, considering the study of geometrical thought related to transformations of the plan. For this analysis was

APÊNDICE Q – Artigo MONZON; BASSO, 2019 apresentado no WIE 2019

MONZON; BASSO. **GeoGebra e Impressão 3D: desenvolvendo o Pensamento Geométrico Espacial**. In: Anais do XXV Workshop de Informática na Escola (WIE). Brasília, 2019.



APÊNDICE R – Artigo MONZON; BASSO, 2019 em avaliação

MONZON; BASSO. **Pensamento espacial: adaptação de experimentos Piagetianos com Tecnologias Digitais.** Submetido para avaliação em 22 de agosto de 2019.