Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática e Estatística

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Álgebras de Hopf, módulos de Yetter-Drinfeld e álgebras trançadas

Dissertação de Mestrado

Darchan Stamado Ordovás

Porto Alegre, 22 de novembro de 2019

Dissertação submetida por Darchan Stamado Ordovás[1], como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dra. Bárbara Seelig Pogorelsky

Banca examinadora:
Prof[a]. Dr[a]. Carolina Noele Renz (UFCSPA)
Prof. Dr. João Matheus Jury Giraldi (UFRGS)
Prof. Dr. Wagner de Oliveira Cortes (UFRGS)

[1]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico(CNPq)

À Matemática, à Ciência e à Verdade.

Resumo

Este trabalho pretende introduzir os campos de estudo das álgebras de Hopf, módulos de Yetter-Drinfeld e álgebras de Hopf trançadas de forma que um sólido e concreto conhecimento possa ser desenvolvido. São apresentados os conceitos fundamentais relacionados a álgebras, coálgebras, álgebras de Hopf, módulos, comódulos, módulos de Yetter-Drinfeld, espaços vetoriais trançados e álgebras de Hopf trançadas.

Abstract

This work is intended to be an introduction to the subjects of Hopf algebras, Yetter-Drinfeld modules and braided Hopf algebras in such a manner that a solid and concrete grasping of it shall be attained. It presents the fundamental concepts related to algebras, coalgebras, Hopf algebras, modules, comodules, Yetter-Drinfeld modules, braided vector spaces and braided Hopf algebras.

Agradecimentos

Agradeço em especial à Profª. Bárbara Seelig Pogorelsky por haver orientado-me nesta dissertação e mentorado meus estudos em álgebra da graduação ao mestrado, acompanhado e auxiliado cada passo em seminários semanais de tópicos fundamentais de álgebra e haver sido de grande importância no meu desenvolvimento matemático.

Agradeço ao Prof. Alveri Alves Sant'Ana por haver me mentorado no estudo de álgebra da graduação ao mestrado, ensinado diversos tópicos de álgebra e ter sido de grande importância no meu desenvolvimento matemático.

Agradeço ao Prof. Antônio Paques por haver sido meu primeiro professor de álgebra, deslumbrando-me com este campo, e ter mudado meu pensamento de como compreender matemática, sem o qual o estilo deste texto de uma palpável e intuitiva introdução talvez não existisse.

Agradeço ao Prof. Artur Oscar Lopes por haver mentorado-me no início de minha graduação e ensinado-me tantos tópicos fundamentais de matemática.

Agradeço à Profª. Miriam Telichevesky por haver sido minha primeiro professora e ensinado-me a arte da demonstração matemática.

Agradeço a outros tantos brilhantes professores da UFRGS, de cujas fontes matemáticas bebi.

Agradeço aos Profs. Carolina Noele Renz, João Matheus Jury Giraldi e Wagner de Oliveira Cortes, por aceitarem participar da banca de defesa da dissertação e avaliarem e criticarem este trabalho.

Agradeço à UFRGS por ser um inspirador templo de conhecimento.

Sumário

Prefácio

Da dualização do conhecido conceito de uma *álgebra* com unidade sobre um espaço vetorial concebe-se o conceito de uma *coálgebra* sobre um espaço vetorial. De natureza contrária à multiplicação de uma álgebra, que opera um par de elementos para resultar em um outro, a comultiplicação de uma coálgebra opera um elemento e resulta em uma soma finita de pares de elementos da coálgebra; especificamente, em uma soma de produtos tensoriais destes últimos. Da existência da unidade segue a existência de uma transformação linear entre a coálgebra e o espaço vetorial, chamada counidade. Ainda estão relacionadas as álgebras e coálgebras de maneira que o espaço dual de uma coálgebra é uma álgebra e o espaço dual de uma álgebra de dimensão finita é uma coálgebra. Resulta que o dual do dual de uma álgebra de dimensão finita é isomorfo a esta última e que o dual do dual de uma coálgebra de dimensão finita é isomorfo à segunda. A teoria de coálgebras é semelhante à teoria de álgebras; são apresentados os conceitos de coideal, elemento group-like e elemento primitivo. No entanto, uma certa propriedade de finitude estranha às álgebras apresentam as coálgebras. Tal propriedade é enunciada e demonstrada no teorema fundamental das coálgebras.

Estudando relações de compatibilidade entre objetos que são simultaneamente uma álgebra e uma coálgebra formula-se o conceito de uma *biálgebra*: uma álgebra e coálgebra tal que sua comultiplicação e sua counidade são homomorfismos de álgebras. Uma classe particular de biálgebras é a das *álgebras de Hopf*, que possuem uma transformação linear de si e em si que é a inversa da identidade no espaço das transformações lineares de si sobre si mesma, sob o *produto convolução.* O primeiro exemplo de álgebra de Hopf foi o anel de cohomologia de uma variedade orientável de dimensão finita possuindo um produto contínuo, por Heinz Hopf, em seu artigo de 1941 *Über die Topologie der Gruppen–Mannifaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen* [7]. Concebido de forma pouco diferente da atual e chamadas de *hiper álgebras*, o segundo exemplo de álgebras de Hopf foi a álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie, por Jean Dieudonné em seu artigo de 1954 *Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique* $p > 0$ [5]. Este último é neste trabalho apresentado no exemplo 2.1.5. A álgebra de Hopf do anel de cohomologia não é apresentada, pois a apreensão deste exemplo repousa sobre o conhecimento de fundamentos de topologia algébrica, um campo fora do escopo deste texto. Álgebras de Hopf tornaram-se um campo de pesquisa importante da álgebra moderna e possuem vastas aplicações em áreas da matemática e física, tais como topologia algébrica, geometria algébrica, álgebras de Lie, teoria de Galois, física quântica, física de partículas e teoria das cordas.

De maneira análoga à construção do conceito de coálgebra, dualiza-se o conceito de *módulo* sobre uma álgebra para conceber-se o conceito de *comódulo* sobre uma coálgebra; este último possui uma coação que opera um elemento do comódulo em uma soma finita de produtos tensoriais de elementos da coálgebra com elementos do comódulo. São apresentadas propriedades fundamentais de comódulos e algumas relações entre módulos e comódulos. Um módulo de Yetter-Drinfeld são espaços vetoriais que são simultaneamente módulos e comódulos sobre uma álgebra de Hopf que possuem uma propriedade de compatibilidade entre sua estrutura de módulo, de comódulos e a antípoda da álgebra de Hopf base.

Um *espaço vetorial trançado* é um espaço vetorial que possui uma transformação linear chamada *trança* de natureza semelhante à da aplicação twist; todo módulo de Yetter-Drinfeld é naturalmente um espaço vetorial trançado. Tal trança induz no produto tensorial de álgebras que são módulos de Yetter-Drinfeld um produto trançado. Uma *álgebra de Hopf trançada* será, neste trabalho, um módulo de Yetter-Drinfeld que é uma álgebra de Hopf, com suas relações de compatibilidade tomadas para o produto trançado do produto tensorial, e as aplicações que definem sua estrutura são homomorfismos de módulos de Yetter-Drinfeld. Tal definição não é a usual, porém esta abordagem mais restrita serve melhor ao escopo pedagógico deste trabalho. As álgebras de Hopf trançadas são importantes para grupos quânticos e álgebras de Nichols.

A inspiração deste trabalho foi o desenvolvimento de um texto que introduza as noções fundamentais destes tópicos de maneira intuitiva e concreta, devido à insatisfação do autor com a maneira em que são escritos maioria dos livros sobre estes campos. Abundam, portanto, exemplos; esses são apresentados de forma tangível, para que seja revelada ao leitor a substância sensível dessas entidades matemáticas, e reserva-se o texto da linguagem categórica.

São imprencindíveis para a compreensão dos conceitos neste texto apresentados o conhecimento de álgebra linear de dimensão finita, produto tensorial e familiaridade com grupos, anéis, módulos e sobretudo com o *modus operandi* da álgebra abstrata.

Capítulo 1

Álgebras e coálgebras

1.1 O conceito dual ao de uma álgebra

Pode o conceito natural de álgebras sobre um corpo K ser concebido na forma de diagramas.

Definição 1.1.1. *Uma álgebra é um espaço vetorial A munido de duas transformações lineares $m : A \otimes A \to A$ e $u : K \to A$, chamadas correspondentemente de multiplicação e unidade, tais que são comutativos os seguintes diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m\otimes I"] \arrow[d, "I\otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\
K \otimes A \arrow[ur, "u\otimes I"] & & A \otimes K \arrow[ul, "I\otimes u"'] \\
& A \arrow[ul, "\phi_1"] \arrow[ur, "\phi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

em que ϕ_1 e ϕ_2, definidos, para $a \in A$, por $\phi_1(a) = 1_K \otimes a$, $\phi_2(a) = a \otimes 1_K$, são os isomorfismos canônicos. São os diagramas acima equivalentes às seguintes identidades:

$$m((a \otimes b) \otimes c)) = m(a \otimes (b \otimes c)), \qquad \textit{(associatividade)}$$

$$u(1_K) = 1_A. \qquad \textit{(unidade)}$$

O leitor poderá facilmente perceber que acima está descrita a noção usual de álgebra. Observe que, dado um espaço vetorial A, para definir uma álgebra, basta definir uma multiplicação associativa com unidade. Usaremos a tradicional notação $m(a \otimes b) = ab$.

Concebe-se dualizando os diagramas a noção dual à de álgebra: a de coálgebra.

Definição 1.1.2. *Uma coálgebra é um espaço vetorial C munido de duas transformações lineares $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to K$, chamadas comultiplicação e counidade, correspondentemente, tais que são comutativos os seguintes diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes I"] \\
C \otimes C \arrow[r, "I \otimes \Delta"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dd, "\Delta"] & \\
K \otimes C \arrow[ur, "\phi_1"] & & C \otimes K \arrow[ul, "\phi_2"'] \\
& C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon \otimes I"] \arrow[ur, "I \otimes \varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

em que ϕ_1 e ϕ_2, definidos, para $k \in K$, $c \in C$, por $\phi_1(k \otimes c) = \phi_2(c \otimes k) = kc$, são os isomorfismos canônicos. São os diagramas acima equivalentes às seguintes identidades:

$$(\Delta \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \Delta) \circ \Delta, \qquad \textit{(coassoatividade)}$$

$$\phi_1 \circ (\varepsilon \otimes I_C) \circ \Delta = \phi_2 \circ (I_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = I_C. \qquad \textit{(counidade)}$$

Introduziremos a seguinte notação para a comultiplicação de C. Para um elemento $c \in C$, temos

$$\Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} c_{i1} \otimes c_{i2}.$$

Observe que esta soma é finita. Passemos a escrever simplesmente

$$\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2.$$

Ficam desta forma as identidades escritas

$$\sum c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2} = \sum c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2 \qquad \text{(coassociatividade)}$$
$$\sum \varepsilon(c_1)c_2 = \sum c_1\varepsilon(c_2) = c. \qquad \text{(counidade)}$$

Podemos devido à primeira identidade escrever indistinguivelmente $\sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3$ e, em geral, $\sum c_1 \otimes c_2 \otimes \ldots \otimes c_n$. Tal notação é conhecida como notação de Sweedler.

Devido a coassociatividade da comultiplicação, em uma fórmula linear contendo $c_1, \ldots, c_n$ podemos considerar quaisquer dois índices adjacentes i, $i-1$ como o resultado da comultiplicação de c_{i-1}; os índices maiores que i são subtraídos em 1. Por exemplo, $\sum \varepsilon(c_1)\varepsilon(c_2)c_3\varepsilon(c_4) = \sum \varepsilon(c_1)\varepsilon(c_{2_1})c_{2_2}\varepsilon(c_3) = \sum \varepsilon(c_1)c_2\varepsilon(c_3)$. Analogamente, $\sum \varepsilon(c_1)c_2\varepsilon(c_3) = \sum \varepsilon(c_1)c_{2_1}\varepsilon(c_{2_2}) = \sum \varepsilon(c_1)c_2 = c$.

Uma fórmula linear contendo $c_1, \ldots, c_{i-1}, \Delta(c_i), c_{i+1}, \ldots, c_n$ pode ser escrita adicionando 1 aos índices maiores que i e substituindo $\Delta(c_i)$ por $\sum c_i \otimes c_{i+1}$. Por exemplo, $\sum c_1 \otimes \Delta(c_2)\varepsilon(c_3) \otimes \Delta(c_4) = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3\varepsilon(c_4) \otimes \Delta(c_5) = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3\varepsilon(c_4) \otimes c_5 \otimes c_6$.

Pode-se naturalmente escrever o conceito de uma álgebra comutativa através de diagramas; dualizando-o, concebe-se seu conceito dual.

Definição 1.1.3. *Uma álgebra A é comutativa se é satisfeito o seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ & A \end{tikzcd}$$

em que $\tau : A\otimes A \to A\otimes A$ definida, para a, $b \in A$, por $\tau(a\otimes b) = b\otimes a$ é a aplicação twist. Equivalentemente, A é comutativa se $ab = ba$, para todos a, $b \in A$.

Definição 1.1.4. *Uma coálgebra C é cocomutativa se é satisfeito o seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\tau"] \\ & C \otimes C \end{tikzcd}$$

em que $\tau : C \otimes C \to C \otimes C$ definida, para c, $d \in C$, por $\tau(c \otimes d) = d \otimes c$ é a aplicação twist. Equivalentemente, C é cocomutativa se $\sum c_1 \otimes c_2 = \sum c_2 \otimes c_1$, para todo $c \in C$.

Apresentaremos alguns exemplos de álgebras e coálgebras.

Exemplo 1.1.1. *O corpo K é uma coálgebra cocomutativa definindo, para $k \in K$,*

$$\Delta(k) = k1_K \otimes 1_K, \qquad\qquad \varepsilon(k) = k.$$

Exemplo 1.1.2. *Sejam A e B álgebras. Então $A \otimes B$ é uma álgebra, de unidade $1_A \otimes 1_B$, com a multiplicação definida por $m_{A\otimes B} = (m_A \otimes m_B) \circ (I_A \otimes \tau \otimes I_B)$, em que $\tau : A \otimes B \to B \otimes A$, definida, para $a \in A$, $b \in B$ por $(a \otimes b) = b \otimes a$ é a aplicação twist. Tem-se, para a, a', b, $b' \in A$,*

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'.$$

Exemplo 1.1.3. *Seja* C *uma coálgebra. Então* $C \otimes D$ *é uma coálgebra com* $\Delta_{C\otimes D} = (I_C \otimes \tau \otimes I_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)$ *e* $\varepsilon_{C\otimes D} = \phi \circ (\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D)$*, em que* $\phi : K \otimes K \to K$ *é definida por* $\phi(k \otimes l) = kl$*, para* k*,* $l \in K$*. Tem-se, para* $c \in C$*,* $d \in D$

$$\Delta_{C\otimes D}(c \otimes d) = \sum (c_1 \otimes d_1) \otimes (c_2 \otimes d_2), \qquad \varepsilon_{C\otimes D}(c \otimes d) = \varepsilon_C(c)\varepsilon_C(d).$$

Exemplo 1.1.4. *Seja* V *o espaço vetorial de base* B*. Tem-se que* V *é uma coálgebra cocomutativa definindo, para* $v \in B$*,*

$$\Delta(v) = v \otimes v, \qquad \varepsilon(v) = 1_K.$$

Observe que é suficiente definir as transformações lineares na base e estendê-las linearmente.

Exemplo 1.1.5. *Seja* G *um grupo e* KG *o espaço vetorial com base* G*. O espaço vetorial* KG *é uma álgebra com multiplicação definida, para* α*,* $\beta \in K$*,* g*,* $h \in G$*, por*

$$(\alpha g)(\beta h) = (\alpha\beta)(gh).$$

Tem-se que é KG *uma coálgebra cocomutativa com*

$$\Delta(g) = g \otimes g, \qquad \varepsilon(g) = 1_K.$$

Exemplo 1.1.6. *A álgebra de polinômios* $K[X]$ *é uma coálgebra cocomutativa com*

$$\Delta(X^n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i \otimes X^{n-i}, \qquad \Delta(1_K) = 1_K$$

$$\varepsilon(X^n) = 0, \qquad \varepsilon(1_K) = 1_K.$$

De fato, tem-se

$$
\begin{aligned}
(I \otimes \Delta) \circ \Delta(X^n) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i \otimes \Delta(X^{n-i}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} X^i \otimes X^j \otimes X^{n-(i+j)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{i} \binom{n-i}{k} X^i \otimes X^{k-i} \otimes X^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!} X^i \otimes X^{k-i} \otimes X^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \frac{n!}{i!(k-i)!(n-k)!} X^i \otimes X^{k-i} \otimes X^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{i!(k-i)!} X^i \otimes X^{k-i} \otimes X^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k} \binom{k}{i} X^i \otimes X^{k-i} \otimes X^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta(X^k) \otimes X^{n-k} \\
&= (\Delta \otimes I) \circ \Delta(X^n)
\end{aligned}
$$

e, ainda,

$$
\begin{aligned}
\sum \varepsilon((X^n)_1)(X^n)_2 &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \varepsilon(X^i) X^{n-i} \\
&= \binom{n}{0} 1_K X^{n-0} \\
&= X^n \\
&= \binom{n}{n} X^n 1_K \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i \varepsilon(X^{n-i}).
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.1.7. *Seja M_n o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ sobre K. Então M_n*

é uma coálgebra definindo, para a base $\{E_{i,j}\}_{i,j=1}^n$*, por*

$$\Delta(E_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} E_{i,k} \otimes E_{k,j}, \qquad\qquad \varepsilon(E_{i,j}) = \delta_{i,j},$$

em que $\delta_{i,j}$ *é o delta de Kronecker. De fato, tem-se*

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes I) \circ \Delta(E_{i,j}) &= \sum_{k=1}^{n} \Delta(E_{i,k}) \otimes E_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} E_{i,l} \otimes E_{l,k} \otimes E_{k,j} \\
&= \sum_{l=1}^{n} Ei, l \otimes (\sum_{k=1}^{n} E_{l,k} \otimes E_{k,j}) \\
&= \sum_{l=1}^{n} E_{i,l} \otimes \Delta) E_{l,j}) \\
&= (I \otimes \Delta) \circ \Delta(E_{i,j}).
\end{aligned}$$

Escreveremos M_n^{coalg} *para distinguí-la de sua estrutura de álgebra.*

Exemplo 1.1.8 (Coálgebra corta-palavras)**.** *Sejam* X *um conjunto de símbolos e* C *o conjunto de palavras (listas-ordenadas) compostas por símbolos de* X*. Notamos* $[x_1, \ldots, x_n]$ *a palavra* $x_1 \ldots x_n$ *e* $[\,]$ *a palavra vazia. Então* C *é uma coálgebra cocomutativa com*

$$\begin{aligned}
&\Delta([x_1, ..., x_n]) = \sum_{i=0}^{n} [x_1, \ldots, x_i] \otimes [x_{i+1}, \ldots, x_n], \\
&\varepsilon([\,]) = 1_K, \\
&\varepsilon([x_1, \ldots, x_n]) = 0.
\end{aligned}$$

De fato, tem-se

$$\begin{aligned}
((\Delta \otimes I) \circ \Delta)([x_1, \ldots, x_n]) &= \sum_{i=0}^{n} \Delta([x_1, \ldots, x_i]) \otimes [x_{i+1}, \ldots, x_n] \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} [x_1, \ldots, x_k] \otimes [x_{k+1}, \ldots, x_i] \otimes [x_{i+1}, \ldots, x_n]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}[x_1,\ldots,x_i]\otimes[x_{i+1},\ldots,x_k]\otimes[x_{k+1},\ldots,x_n] \\
&= \sum_{i=0}^{n}[x_1,\ldots,x_i]\otimes\Delta([x_{i+1},\ldots,x_n]) \\
&= ((I\otimes\Delta)\circ\Delta)([x_1,\ldots,x_n]),
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\varepsilon([x_1,\ldots,x_i])[x_{i+1},\ldots,x_n] &= \varepsilon([\quad])[x_1,\ldots,x_n] + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon([x_1,\ldots,x_i])[x_{i+1},\ldots,x_n] \\
&= [x_1,\ldots,x_n] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}[x_1,\ldots,x_i]\varepsilon([x_{i+1},\ldots,x_n]) + [x_1,\ldots,x_n]\varepsilon([\quad]) \\
&= \sum_{i=0}^{n}[x_1,\ldots,x_i]\varepsilon([x_{i+1},\ldots,x_n]).
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.1.9 (Coálgebra trigonométrica)**.** *Seja C o espaço vetorial de base $\{s,c\}$. Definimos em C uma estrutura de coálgebra por*

$$
\begin{aligned}
\Delta(s) &= s\otimes c + c\otimes s, & \Delta(c) &= c\otimes c - s\otimes s, \\
\varepsilon(s) &= 0, & \varepsilon(c) &= 1.
\end{aligned}
$$

De fato, tem-se

$$
\begin{aligned}
(\Delta\otimes I)\circ\Delta(s) &= (\Delta\otimes I)(s\otimes c + c\otimes s) \\
&= \Delta(s)\otimes c + \Delta(c)\otimes s \\
&= (s\otimes c + c\otimes s)\otimes c + (c\otimes c - s\otimes s)\otimes s \\
&= s\otimes c\otimes c + c\otimes s\otimes c + c\otimes c\otimes s - s\otimes s\otimes s \\
&= s\otimes c\otimes c - s\otimes s\otimes s + c\otimes c\otimes s - c\otimes s\otimes c \\
&= s\otimes(c\otimes c - s\otimes s) + c\otimes(s\otimes c + c\otimes s) \\
&= s\otimes\Delta(c) + c\otimes\Delta(s)
\end{aligned}
$$

$$= (I \otimes \Delta)(s \otimes c + c \otimes s)$$
$$= (I \otimes \Delta) \circ \Delta(s).$$

A identidade $((\Delta \otimes I) \circ \Delta)(c) = ((I \otimes \Delta) \circ \Delta)(c)$ *é analogamente demonstrada. Para a counidade, tem-se*

$$\sum \varepsilon(s_1)s_2 = \varepsilon(s)c + \varepsilon(c)s = s = s\varepsilon(c) + c\varepsilon(s) = \sum s_1\varepsilon(s_2)$$

e, ainda,

$$\sum \varepsilon(c_1)c_2 = \varepsilon(c)c - \varepsilon(s)s = c = c\varepsilon(c) - s\varepsilon(s) = \sum c_1\varepsilon(c_2).$$

Observe a relação entre a comultiplicação e a counidade de C *e as seguintes fórmulas de somas de senos e cossenos, para* θ, $\varphi \in \mathbb{R}$*:*

$$sen(\theta + \varphi) = sen(\theta)cos(\varphi) + cos(\theta)sen(\varphi),$$
$$cos(\theta + \varphi) = cos(\theta)cos(\varphi) - sen(\theta)sen(\varphi),$$
$$sen(0) = 0,$$
$$cos(0) = 1.$$

A comultiplicação Δ expressa relações entre as funções seno e cosseno. Por exemplo, de $(\Delta \otimes I) \circ \Delta(s) = s \otimes c \otimes c - s \otimes s \otimes s + c \otimes c \otimes s + c \otimes s \otimes c$ decorre que, para θ, φ, $\phi \in \mathbb{R}$, tem-se $sen(\theta + \varphi + \phi) = seno(\theta)cos(\varphi)cos(\phi) - sen(\theta)sen(\varphi)sen(\phi) + cos(\theta)cos(\varphi)sen(\phi) + cos(\theta)sen(\varphi)cos(\phi)$.

Exemplo 1.1.10. *O exemplo acima pertence a uma interessante classe de exemplos. Seja* G *um grupo e seja* V *um espaço vetorial. Uma representação de* G *é um homomorfismo de grupos* $\rho : G \to GL(V)$*, isto é, que, para* g, $h \in G$*,*

$$\rho(gh) = \rho(g) \circ \rho(h),$$

em que $GL(V)$ é o grupo de transformações lineares bijetivas de V em V. É uma prática comum dizer que V é uma representação de G.

Se V é de dimensão finita, seja $\{v_i\}_{i=1}^n$ uma base de V. Consideremos a matriz $(\rho_{i,j}(g))_{i,j=1}^n$, em que $\rho(g)(v_j) = \sum_{j=1}^{n} \rho_{i,j}(g)v_i$, da transformação $\rho(g)$. As aplicações $\rho_{i,j} : G \to K$ definem um espaço vetorial de funções $C_\rho = \langle \rho_{i,j} \rangle$.

Seja $\{c_i\}_{i=1}^m$ uma base de C_ρ resultante da redução do conjunto $\{\rho_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ a um conjunto linearmente independente, e seja $c \in C_\rho$. Como $(\rho_{i,j}(g))_{i,j=1}^n$ é uma matriz, para quaisquer g, $h \in G$, satisfazem $\rho_{i,j}$ a relação

$$\rho_{i,j}(gh) = \sum_{k=1}^{n} \rho_{k,i}(g)\rho_{i,j}(h),$$

portanto existem únicos escalares $k_{i,j} \in K$ tais que

$$c(gh) = \sum_{i,j=1}^{m} k_{i,j}c_i(g)c_j(h).$$

De fato, se $a_{i,j} \in K$ são tais que $c(gh) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j}c_i(g)c_j(h)$, para todos g, $h \in G$. Então $\sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{m}(k_{i,j} - a_{i,j})c_i(g))c_j(h) = 0$, donde segue, da independência linear, que $\sum_{i=1}^{m}(k_{i,j} - a_{i,j})c_i(g) = 0$, para todo j. Da independência linear, segue que $a_{i,j} = k_{i,j}$, para todos i, j. Escrevamos $k_{i,j}^c$.

É C_ρ uma coálgebra com

$$\Delta(c) = \sum_{i,j=1}^{m} k_{i,j}^c c_i \otimes c_j, \qquad\qquad \varepsilon(c) = c(e_G).$$

De fato, seja $\theta : C_\rho \otimes C_\rho \otimes C_\rho \to Hom(KG \otimes KG \otimes KG, K)$, definida, para c, d, $e \in C_\rho$, g_1, g_2, $g_3 \in G$, por

$$\theta(c \otimes d \otimes e)(g_1 \otimes g_2 \otimes g_3) = c(g_1)d(g_2)e(g_3),$$

É θ injetiva. Tem-se

$$\theta((\Delta \otimes I) \circ \Delta(c))(g_1 \otimes g_2 \otimes g_3) = \theta(\sum_{i,j=1}^{m} k_{i,j}^c \Delta(c_i) \otimes c_j)(g_1 \otimes g_2 \otimes g_3)$$

$$
\begin{aligned}
&= \theta(\sum_{i,j=1}^{m} k_{i,j}^{c}(\sum_{r,s=1}^{m} k_{r,s}^{c_i} c_r \otimes c_s) \otimes c_j)(g_1 \otimes g_2 \otimes g_3)\\
&= \theta(\sum_{i,j,r,s=1}^{m} k_{i,j}^{c} k_{r,s}^{c_i} c_r \otimes c_s \otimes c_j)(g_1 \otimes g_2 \otimes g_3)\\
&= \sum_{i,j,r,s=1}^{m} k_{i,j}^{c} k_{r,s}^{c_i} c_r(g_1) c_s(g_2) c_j(g_3)\\
&= \sum_{i,j=1}^{m} k_{i,j}^{c} c_i(g_1 g_2) c_j(g_3)\\
&= c(g_1 g_2 g_3)\\
&= \sum_{i,j=1}^{m} k_{i,j}^{c} c_i(g_1) c_j(g_2 g_3)\\
&= \sum_{i,j,r,s=1}^{m} k_{i,j}^{c} c_i(g_1) k_{r,s}^{c_j} c_r(g_2) c_s(g_3)\\
&= \theta(\sum_{i,j,r,s=1}^{m} k_{i,j}^{c} c_i \otimes k_{r,s}^{c_j} c_r \otimes c_s)(g_1 \otimes g_2 \otimes g_3)\\
&= \theta(\sum_{i,j=1}^{m} k_{i,j}^{c} c_i \otimes (\sum_{r,s=1}^{m} k_{r,s}^{c_j} c_r \otimes c_s))(g_1 \otimes g_2 \otimes g_3)\\
&= \theta(\sum_{i,j=1}^{m} k_{i,j}^{c} c_i \otimes \Delta(c_j))(g_1 \otimes g_2 \otimes g_3)\\
&= \theta((I \otimes \Delta) \circ \Delta(c))(g_1 \otimes g_2 \otimes g_3).
\end{aligned}
$$

Segue da injetividade de θ que $(\Delta \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \Delta) \circ \Delta$. Ainda,

$$
\begin{aligned}
(\sum \varepsilon(c_1) c_2)(g) &= (\sum_{i,j=1}^{m} k_{i,j}^{c} \varepsilon(c_i) c_j)(g)\\
&= (\sum_{i,j=1}^{m} k_{i,j}^{c} c_i(e_G) c_j)(g)\\
&= \sum_{i,j=1}^{m} k_{i,j}^{c} c_i(e_G) c_j(g)\\
&= c(e_G g)\\
&= c(g),
\end{aligned}
$$

donde segue que $\sum \varepsilon(c_1)c_2 = c$. *A identidade* $\sum c_1\varepsilon(c_2) = c$ *é analogamente demonstrada.*

A coálgebra trigonométrica é desta forma; G é o círculo unitário e $V = \mathbb{R}^2$ é uma representação de G definida, para $e^{i\theta} \in G$, $\theta \in \mathbb{R}$, por

$$\rho(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

As aplicações $\rho_{11}(e^{i\theta}) = cos(\theta)$, $\rho_{12}(e^{i\theta}) = sen(\theta)$, $\rho_{21}(e^{i\theta}) = -sen(\theta)$ e $\rho_{22}(e^{i\theta}) = cos(\theta)$ definem um espaço vetorial C_ρ de funções, gerado pela base $\{s, c\}$, em que $s = \rho_{12}$ e $c = \rho_{11}$. Seguem das relações de seno e cosseno que, para $e^{i\theta}$, $e^{i\varphi} \in G$, $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, tem-se

$$s(e^{i\theta}e^{i\varphi}) = s(e^{i(\theta+\varphi)}) = s(e^{i\theta})c(e^{i\varphi}) + c(e^{i\theta})s(e^{i\varphi}),$$
$$c(e^{i\theta}e^{i\varphi}) = c(e^{i(\theta+\varphi)}) = c(e^{i\theta})c(e^{i\varphi}) - s(e^{i\theta})s(e^{i\varphi}),$$

donde segue que

$$\Delta(s) = s \otimes c + c \otimes s, \qquad \Delta(c) = c \otimes c - s \otimes s.$$

A comultiplicação Δ da coálgebras C_ρ expressa fórmulas de funções relacionadas à representação ρ do grupo G.

Seja V um espaço vetorial. O seu espaço dual V^* é definido como o espaço das transformações lineares $f : V \to K$. Mostraremos que pode-se induzir sobre o dual de uma coálgebra uma estrutura de álgebra e sobre o dual de uma álgebra de dimensão finita uma estrutura de coálgebra. Para tanto, precisaremos de algumas construções.

Sejam V e W espaços vetoriais. Dada uma transformação linear $f : V \to W$, definimos $f^* : W^* \to V^*$, para $g : W \to K$, por

$$f^*(g) = g \circ f.$$

Seja $\rho : V^* \otimes W^* \to (V \otimes W)^*$ definida, para $f \in V^*$, $g \in W^*$, $v \in V$ e $w \in W$, por

$$\rho(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v)g(w).$$

Tem-se que ρ é injetiva e, quando V é de dimensão finita, bijetiva.

Agora podemos definir a álgebra dual de uma coálgebra. Seja C uma coálgebra. Definimos $m : C^* \otimes C^* \to C^*$ por $m = \Delta^* \circ \rho$, chamada produto convolução e denotada por $m(f \otimes g) = f * g$, e $u : K \to C^*$ por $u = \varepsilon^* \circ \phi$, em que $\phi : K \to K^*$ é o isomorfismo dado por $(\phi(k))(v) = kv$. Dados $c \in C$ e $f, g \in C^*$, tem-se:

$$\begin{aligned}(f * g)(c) &= ((\Delta^* \circ \rho)(f \otimes g))(c)\\ &= (\rho(f \otimes g))(\Delta(c))\\ &= \sum f(c_1)g(c_2).\end{aligned}$$

Proposição 1.1.1. *Seja C uma coálgebra. Então é C^* um álgebra com o produto convolução acima definido. Tem-se ainda que é ε_C o elemento neutro da convolução.*

Demonstração: De fato, dados $c \in C$ e $f, g, h \in C^*$, tem-se

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(c) &= \sum (f * g)(c_1)h(c_2)\\ &= \sum f(c_1)g(c_2)h(c_3)\\ &= \sum f(c_1)(g * h)(c_2)\\ &= (f * (g * h))(c).\end{aligned}$$

Para verificar a segunda propriedade, basta mostrar que $u(1_K) = \varepsilon_C$ é o elemento neutro da convolução. De fato,

$$\begin{aligned}(u(1) * f)(c) &= \sum u(1)(c_1)f(c_2)\\ &= \sum \varepsilon(c_1)f(c_2)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum f(\varepsilon(c_1)c_2) \\
&= f(\sum \varepsilon(c_1)c_2) \\
&= f(c).
\end{aligned}
$$

A identidade $(f * u(1))(c) = f(c)$ é analogamente demonstrada. $\square$

Exemplo 1.1.11. *Sejam A uma álgebra e C uma coálgebra. Pode-se generalizar a construção acima para o espaço $Hom(C, A)$. É $Hom(C, A)$ uma álgebra com o produto convolução definido, para $c \in C$, f, $g \in Hom(C, A)$, por*

$$(f * g)(c) = \sum f(c_1)g(c_2).$$

O elemento neutro do produto convolução é $u_A \circ \varepsilon_C$.

Exemplo 1.1.12. *Seja $K[X]$ a coálgebra de polinômios. Então $K[X]^*$ é uma álgebra com multiplicação definida, para f, $g \in K[X]^*$, $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$, por*

$$(f * g)(P(X)) = \sum_{i=0}^{n} a_i \binom{n}{i} f(X^i)g(X^{n-i}).$$

Exemplo 1.1.13. *Seja M_n^{coalg} a coálgebra de matrizes $n \times n$. Então sua álgebra dual $(M_n^{coalg})^*$ é isomorfa à álgebra de matrizes M_n.*

De fato, seja $\phi : M_n^* \to M_n^{alg}$ definida, para $f \in M_n^*$, por

$$\phi(f) = (f(E_{i,j}))_{i,j=1}^{n}.$$

Claramente ϕ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Mostremos que ϕ é um homomorfismo de álgebras. Sejam f, $g \in M_n^*$. Tem-se

$$(f * g)(E_{i,j}) = \sum f((E_{i,j})_1)g((E_{i,j})_2) = \sum_{k=1}^{n} f(E_{i,k})g(E_{k,j}),$$

donde segue que $\phi(f * g) = \phi(f)\phi(g)$. *Tem-se ainda que*

$$\phi(\varepsilon) = (\varepsilon(E_{i,j}))_{i,j=1}^{n} = (\delta_{i,j})_{i,j=1}^{n} = Id.$$

Construamos a coálgebra dual de uma álgebra A. Devido à inexistência, em geral, de uma transformação linear canônica de $(A \otimes A)^*$ a $A^* \otimes A^*$ é necessário que A seja de dimensão finita. Assim, $\rho : A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*$ definida, para f, $g \in A^*$, a, $b \in A$, por

$$\rho(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a)g(b)$$

é bijetiva e ρ^{-1} nos basta.

Sejam $\Delta : A^* \to A^* \otimes A^*$ definida por $\Delta = \rho^{-1} \circ m^*$. Seja $f \in A^*$. Tem-se que $\Delta(f) = \sum f_1 \otimes f_2$ é a única soma em $A^* \otimes A^*$ satisfazendo a propriedade de que, para todos a, $b \in A$,

$$\sum f_1(a)f_2(b) = f(ab).$$

Chamá-la-emos de propriedade de $\Delta(f)$. Satisfaz $\Delta(f)$ tal propriedade, pois

$$\begin{aligned}\sum f_1(a)f_2(b) &= (\rho(\Delta(f)))(a \otimes b)\\ &= (m^*(f))(a \otimes b)\\ &= (f \circ m)(a \otimes b)\\ &= f(ab).\end{aligned}$$

Para demonstrar a unicidade, seja $\sum g_k \otimes h_k \in A^* \otimes A^*$ tal que $\sum g_k(a)h_k(b) = f(ab)$. Tem-se

$$\begin{aligned}(\rho(\sum g_k \otimes h_k))(a \otimes b) &= \sum g_k(a)h_k(b)\\ &= f(ab)\end{aligned}$$

$$= \sum f_1(a)f_2(b)$$
$$= (\rho(\sum f_1 \otimes f_2))(a \otimes b).$$

Da injetividade de ρ segue que $\sum g_k \otimes h_k = \sum f_1 \otimes f_2$.

Seja $\varepsilon : A^* \to K$ definida por $\varepsilon = \psi \circ u^*$, em que $\psi : K^* \to K$ é o isomorfismo dado por $\psi(k^*) = k^*(1_K)$, para $k^* \in K^*$. Tem-se, para $f \in A^*$,

$$\varepsilon(f) = \psi(u^*(f)) = \psi(f \circ u) = f(u(1_K)) = f(1_A).$$

Proposição 1.1.2. *Seja A uma álgebra de dimensão finita. Então é A^* uma coálgebra com Δ e ε acima definidas.*

Demonstração: De fato, seja $f \in A^*$. Provemos que $\sum f_1 \otimes f_{2_1} \otimes f_{2_2} = \sum f_{1_2} \otimes f_{1_2} \otimes f_2$. Seja $\theta : A^* \otimes A^* \otimes A^* \to (A \otimes A \otimes A)^*$ definida, para $a^*, b^*, c^* \in A^*$, a, b, $c \in A$, por

$$\theta(a^* \otimes b^* \otimes c^*)(a \otimes b \otimes c) = a^*(a)b^*(b)c^*(c).$$

A transformação linear θ é bijetiva. Tem-se

$$\begin{aligned}
(\theta(\sum f_1 \otimes f_{2_1} \otimes f_{2_2}))(a \otimes b \otimes c) &= \sum f_i(a)f_{2_1}(b)f_{2_2}(c) \\
&= \sum f_1(a)f_2(bc) \\
&= f(abc) \\
&= \sum f_1(ab)f_2(c) \\
&= \sum f_{1_1}(a)f_{1_2}(b)f_2(c) \\
&= (\theta(\sum f_{1_1} \otimes f_{1_2} \otimes f_2))(a \otimes b \otimes c).
\end{aligned}$$

e ainda

$$(\sum \varepsilon(f_1)f_2)(a) = \sum \varepsilon(f_1)f_2(a) \qquad\qquad (\varepsilon(f_1) \in K)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum f_1(1_A)f_2(a) \\
&= f(1_A a) \\
&= f(a).
\end{aligned}
$$

A identidade $\sum f_1\varepsilon(f_2) = f$ é analogamente demonstrada. $\square$

Proposição 1.1.3. *Seja A uma álgebra de dimensão finita. Então A é comutativa se, e somente se, é A^* cocomutativa.*

Demonstração: Seja $f \in A^*$. Se A é comutativa, então tem-se $f(ab) = f(ba) = \sum f_1(b)f_2(a) = \sum f_2(a)f_1(b)$, logo $\sum f_2 \otimes f_1$ satisfaz a propriedade de $\Delta(f)$, donde segue que $\sum f_1 \otimes f_2 = \sum f_2 \otimes f_1$.

Reciprocamente, se A^* é cocomutativa, $\sum f_2 \otimes f_1$ satisfaz a propriedade de $\Delta(f)$, donde segue que $f(ab) = \sum f_2(a)f_1(b) = \sum f_1(b)f_2(a) = f(ba)$. Como a identidade é válida para todo $f \in A^*$, segue que $ab = ba$ (de fato, basta considerar uma base $B = \{b_i\}_{i \in I}$, que existe pelo lema de Zorn, e considerar as aplicações definidas, para $x = \sum_i \alpha_{b_i} b_i \in A$, por $f_{b_i}(x) = \alpha_{b_i}$). $\square$

Pode-se escrever a comultiplicação da coálgebra dual de maneira simples. Sejam $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base de A, $\{e_i^*\}_{i=1}^n$ sua base dual, isto é, $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ e $f \in A^*$. Segue que existem $a_{k,l} \in K$ tais que $\Delta(f) = \sum\limits_{k,l=1}^{n} a_{k,l} e_k^* \otimes e_l^*$. Decorre da observação feita acima que $f(e_i e_j) = \sum\limits_{k,l=1}^{n} a_{k,l} e_k^*(e_i) e_l^*(e_j) = a_{i,j}$. Assim, tem-se

$$\Delta(f) = \sum f(e_l e_k) e_k^* \otimes e_l^*.$$

Exemplo 1.1.14. *Seja G um grupo finito. Então KG é uma álgebra de dimensão finita e portanto $(KG)^*$ é uma coálgebra. Consideremos a base dual p_g definida por*

$p_g(h) = \delta_{g,h}$, onde $\delta_{g,h}$ é o delta de Kronecker. Tem-se que

$$\Delta(p_g) = \sum p_g(hh')p_h \otimes p_{h'} = \sum_{hh'=g} p_h \otimes p_{h'} = \sum_h p_h \otimes p_{h^{-1}g},$$

logo, para x, $y \in G$, $\Delta(p_g)(x \otimes y) = \sum_h p_h(x) \otimes p_{h^{-1}g}(y) = p_g(xy)e_G \otimes e_G$, em que e_G é a unidade de G. Por linearidade, segue que $\Delta(f)(x \otimes y) = f(xy)e_G \otimes e_G$. Assim, a comultiplicação e counidade de KG^* são definidas, para $f \in KG^*$, g, $h \in G$, por

$$\Delta(f)(g \otimes h) = f(gh)e_G \otimes e_G, \qquad \varepsilon(f) = f(e_G).$$

Podemos naturalmente definir homomorfismos de álgebras e de coálgebras e fazemo-lo da seguinte forma:

Definição 1.1.5. *i) Sejam A e B álgebras. Uma transformação linear $f : A \to B$ é um homorfismo de álgebras se são comutativos os seguintes diagramas:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[r, "u_A"] \arrow[dr, "u_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Equivalentemente, é f um homomorfismo de álgebras se, para a, $b \in A$, tem-se

$$f(ab) = f(a)f(b) \qquad e \qquad f(1_A) = 1_B.$$

ii) Sejam C e D coálgebras. Uma transformação linear $f : C \to D$ é um homomorfismo de coálgebras se são comutativos os seguintes diagramas:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[d, "\varepsilon_D"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Equivalentemente, é f um homomorfismo se, para $c \in C$, tem-se

$$\sum f(c)_1 \otimes f(c)_2 = \sum f(c_1) \otimes f(c_2) \qquad e \qquad \varepsilon_D(f(c)) = \varepsilon_C(c).$$

Exemplo 1.1.15. *Seja M_n a álgebra de matrizes $n \times n$. Então sua coálgebra dual $(M_n)^*$ é isomorfa a coálgebra de matrizes M_n^{coalg}. De fato, seja $\phi : (M_n)^* \to M_n^{coalg}$ definida por*

$$\phi(E_{i,j}^*) = E_{i,j}.$$

É ϕ um isomorfismo de espaços vetoriais. Tem-se que

$$\begin{aligned}\Delta(E_{i,j}^*) &= \sum_{k,l,p,q=1}^{n} E_{i,j}^*(E_{k,l}E_{p,q})E_{k,l}^* \otimes E_{p,q}^* \\ &= \sum_{k,l,q=1}^{n} E_{i,j}^*(E_{k,q})E_{k,l}^* \otimes E_{l,q}^* \\ &= \sum_{l}^{n} E_{i,l}^* \otimes E_{l,j}^*\end{aligned}$$

e, ainda,

$$\varepsilon_{(M_n)^*}(E_{i,j}^*) = E_{i,j}^*(I) = \delta_{i,j}.$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned}\sum \phi((E_{i,j}^*)_1) \otimes \phi((E_{i,j}^*)_2) &= \sum_{l=1}^{n} \phi((E_{i,l})^*) \otimes \phi((E_{l,j})^*) \\ &= \sum_{l=1}^{n} E_{i,l} \otimes E_{l,j} \\ &= \sum \phi(E_{i,j}^*)_1 \otimes \phi(E_{i,j}^*)_2\end{aligned}$$

e, ainda,

$$\varepsilon_{(M_n)^*}(\phi((E_{i,j})^*) = \varepsilon_{M_n^{coalg}}(E_{i,j}),$$

donde segue que ϕ é um homomorfismo de coálgebras.

São escassos os homomorfismos de coálgebras entre coálgebras cujas comultiplicações têm distintas naturezas, como ilustram os próximos exemplos.

Exemplo 1.1.16. *Seja $f : KG \to R[X]$ definida por $f(g^n) = X^n$, em que G é um grupo cíclico gerado por g. Então tem-se*

$$\begin{aligned}
\sum f(g)_1 \otimes f(g)_2 &= \sum X_1 \otimes X_2 \\
&= X \otimes 1_K + 1_K \otimes X \\
&\neq X \otimes X \\
&= f(g) \otimes f(g) \\
&= \sum f(g_1) \otimes f(g_2),
\end{aligned}$$

logo não é f um homomorfismo de coálgebras.

Exemplo 1.1.17. *Seja $f : M_2 \to R[X]$ definida por $f(A) = p_A(X)$, em que $p_A(X) = det(XI - A)$ é o polinômio característico de A. Tem-se*

$$\begin{aligned}
(f \otimes f)(\Delta(E_{1,1})) &= (f \otimes f)(E_{1,1} \otimes E_{1,1} + E_{1,2} \otimes E_{2,1}) \\
&= (X^2 - X) \otimes (X^2 - X) + X^2 \otimes X^2 \\
&= 2X^2 \otimes X^2 - X \otimes X^2 - X^2 \otimes X + X \otimes X \\
&\neq 1 \otimes X^2 + 2X \otimes X + X^2 \otimes 1 - 1 \otimes X - X \otimes 1 \\
&= \Delta(X^2) - \Delta(X) \\
&= \Delta(X^2 - X) \\
&= \Delta(f(E_{1,1})),
\end{aligned}$$

logo não é f um homomorfismo de coálgebras.

Proposição 1.1.4. *i) Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ homomorfismos de álgebras. Então $g \circ f$ é um homomorfismo de álgebras.*

ii) Sejam $f : A \to C$ e $g : B \to D$ homomorfismos de álgebras. Então $f \otimes g : A \otimes B \to C \otimes D$ é um homomorfismo de álgebras.

iii) Sejam $f : C \to D$ e $g : D \to E$ homomorfismos de coálgebras. Então $g \circ f$ é um homomorfismo de coálgebras.

iv) Sejam $f : C \to E$ e $g : D \to F$ homomorfismos de coálgebras. Então $f \otimes g : C \otimes D \to E \otimes F$ é um homomorfismo de coálgebras.

Demonstração: Omitiremos a demonstração de $i)$ e $ii)$. Para $iii)$, seja $c \in C$. Tem-se

$$\sum g(f(c))_1 \otimes g(f(c))_2 = \sum (g(f(c)_1) \otimes g(f(c)_2) = \sum g(f(c_1)) \otimes g(f(c_2))$$

e também

$$\varepsilon_E(g(f(c))) = \varepsilon_D(f(c)) = \varepsilon_C(c).$$

Para $iv)$, sejam $c \in C$, $d \in D$. Tem-se

$$\begin{aligned}
\sum ((f \otimes g)(c \otimes d))_1 \otimes ((f \otimes g)(c \otimes d))_2 &= \sum (f(c) \otimes g(d))_1 \otimes (f(c) \otimes g(d))_2 \\
&= \sum f(c)_1 \otimes g(d)_1 \otimes f(c)_2 \otimes g(d)_2 \\
&= \sum f(c_1) \otimes g(d_1) \otimes f(c_2) \otimes g(d_2) \\
&= \sum (f \otimes g)(c_1 \otimes d_1) \otimes (f \otimes g)(c_2 \otimes d_2) \\
&= \sum (f \otimes g)((c \otimes d)_1) \otimes (f \otimes g)((c \otimes d)_2)
\end{aligned}$$

e, ainda,

$$\varepsilon_{E \otimes F}((f \otimes g)(c \otimes d)) = \varepsilon_{E \otimes F}(f(c) \otimes g(d))$$

$$= \varepsilon_E(f(c))\varepsilon_F(g(d))$$
$$= \varepsilon_C(c)\varepsilon_D(d) = \varepsilon_{C\otimes D}(c \otimes d).$$

□

As construções de álgebras e coálgebras duais têm importantes propriedades acerca de homomorfismos de álgebras e de coálgebras.

Proposição 1.1.5. *i) Se $f : C \to D$ é um homomorfismo de coálgebras, então $f^* : D^* \to C^*$ é um homorfismo de álgebras.*

ii) Se $f : A \to B$ é um homorfismo de álgebras de dimensão finita, então $f^* : B^* \to A^*$ é um homomorfismo de coálgebras.

Demonstração: $i)$ De fato, sejam d^*, $e^* \in D^*$ e $c \in C$. Tem-se

$$\begin{aligned}(f^*(d^* * e^*))(c) &= (d^* * e^*)(f(c)) \\ &= \sum d^*(f(c)_1)e^*(f(c)_2) \\ &= \sum d^*(f(c_1))e^*(f(c_2)) \\ &= \sum (f^*(d^*))(c_1)(f^*(e^*))(c_2) \\ &= (f^*(d^*) * f^*(e^*))(c)\end{aligned}$$

e, ainda,

$$f^*(\varepsilon_D) = \varepsilon_D \circ f = \varepsilon_C,$$

o que conclui a primeira parte.

$ii)$ Para a segunda parte, seja $b^* \in B^*$. Provemos que $\Delta_{A^*} \circ f^* = (f^* \otimes f^*) \circ \Delta_{B^*}$. Escrevendo $(\Delta_{A^*} \circ f^*)(b^*) = \Delta_{A^*}(b^* \circ f) = \sum g_i \otimes h_i$, com g_i, $h_i \in A^*$, tem-se, para a, $b \in A$

$$\rho((\Delta_{A^*} \circ f^*)(b^*))(a \otimes b) = \rho(\sum g_i \otimes h_i)(a \otimes b)$$

$$= \sum g_i(a)h_i(b)$$
$$= (b^* \circ f)(ab)$$

e, ainda,

$$\begin{aligned}
\rho((f^* \otimes f^*) \circ \Delta_{B^*})(b^*))(a \otimes b) &= \rho((f^* \otimes f^*)(\sum b_1^* \otimes b_2^*))(a \otimes b) \\
&= \rho(\sum (f^* \circ b_1^*) \otimes (f^* \circ b_2^*))(a \otimes b) \\
&= \rho(\sum (b_1^* \circ f) \otimes (b_2^* \circ f))(a \otimes b) \\
&= \sum b_1^*(f(a))b_2^*(f(b)) \\
&= b^*(f(a)f(b)) \\
&= b^*(f(ab)) \\
&= (b^* \circ f)(ab).
\end{aligned}$$

Segue da injetividade de ρ que $\Delta_{A^*} \circ f^* = (f^* \otimes f^*) \circ \Delta_{B^*}$. Tem-se ainda que

$$(\varepsilon_{A^*} \circ f^*)(b^*) = \varepsilon_{A^*}(b^* \circ f) = (b^* \circ f)(1_A) = b^*(1_B) = \varepsilon_{B^*}(b^*),$$

o que conclui a demonstração.

$\square$

Sabemos da álgebra linear que se V é um espaço de dimensão finita, tem-se que $\theta_V : V \to V^{**}$ definido, para $v \in V$, $v^* \in V^*$, por $\theta_V(v)(v^*) = v^*(v)$ é um isomorfismo. São ainda verdadeiras as seguintes propriedades:

Proposição 1.1.6. *i) Seja A uma álgebra de dimensão finita. Então $\theta_A : A \to A^{**}$ é isomorfismo de álgebras.*

ii) Seja C uma coálgebra de dimensão finita. Então $\theta_C : C \to C^{**}$ é um isomorfismo de coálgebras.

Demonstração: $i)$ Resta mostrar que θ_A é um homomorfismo de álgebras. Sejam $a,b \in A$ e $a^* \in A$ com $\Delta(a^*) = \sum f_i \otimes g_i$. Tem-se

$$\begin{aligned}(\theta_A(a) * \theta_A(b))(a^*) &= \sum \theta_A(a)(f_i)\theta_A(b)(g_i)\\ &= \sum f_i(a)g_i(b)\\ &= a^*(ab)\\ &= \theta_A(ab)(a^*).\end{aligned}$$

Tem-se ainda que $(\theta_A(1))(a^*) = a^*(1) = \varepsilon_{A^*}(a^*)$.

$ii)$ Provemos que $\Delta_{C^{**}} \circ \theta_C = (\theta_C \otimes \theta_C) \circ \Delta$. Para tanto, consideremos $\rho : C^{**} \otimes C^{**} \to (C^* \otimes C^*)^*$ o isomorfismo canônico. Sejam $c \in C$, $c^*,d^* \in C^*$. Tem-se que

$$\begin{aligned}(\rho(\Delta_{C^{**}}(\theta_C(c)))(c^* \otimes d^*) &= \sum(\rho(\theta_C(c)_1 \otimes \theta_C(c)_2))(c^* \otimes d^*)\\ &= \sum \theta_C(c)_1(c^*)\theta_C(c)_2(d^*)\\ &= (\theta_C(c))(c^* * d^*)\\ &= (c^* * d^*)(c)\end{aligned}$$

e, ainda,

$$\begin{aligned}(\rho((\theta_C \otimes \theta_C) \circ \Delta(c)))(c^* * d^*) &= \sum(\rho(\theta_C \otimes \theta_C)(c_1 \otimes c_2))(c^* * d^*)\\ &= \sum(\rho(\theta_C(c_1) \otimes \theta_C(c_2)))(c^* * d^*)\\ &= \sum(\theta_C(c_1))(c^*)(\theta_C(c_2))(d^*)\\ &= \sum c^*(c_1)d^*(c_2)\\ &= (c^* * d^*)(c).\end{aligned}$$

Da injetividade da ρ segue a identidade. Tem-se, ainda,

$$(\varepsilon_{C^{**}} \circ \theta_C)(c) = \varepsilon_{C^{**}}(\theta_C(c))$$

$$= \theta_C(c)(\varepsilon_C) \qquad \text{(definição de } \varepsilon_{C^{**}} \text{ e de } 1_{C^*} = \varepsilon_C\text{)}$$
$$= \varepsilon_C(c).$$

□

1.2 Um estudo de coálgebras

São bem conhecidas as noções de subálgebras e ideais de uma álgebra. Introduziremos brevemente um estudo de suas análogas noções no campo das coálgebras. Para tanto, serão necessários os seguintes resultados de álgebra linear, que podem ser facilmente demonstrados tomando bases dos subespaços vetoriais evocados e completando-as para uma base de seus respectivos espaços vetoriais.

Proposição 1.2.1. *i) Sejam V, W espaços vetoriais, $X \subseteq V$, $Y \subseteq W$ subespaços vetoriais. Então $(V \otimes Y) \cap (X \otimes W) = X \otimes Y$.*

ii) Sejam $f : V_1 \to V_2$, $g : W_1 \to W_2$ transformações lineares. Então $Ker(f \otimes g) = Ker(f) \otimes W_1 + V_1 \otimes Ker(g)$.

. □

Definição 1.2.1. *Seja C uma coálgebra. Uma subcoálgebra de C é um subespaço vetorial $D \subseteq C$ tal que $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$.*

É D uma coálgebra com as restrições $\Delta_D = \Delta\big|_D$ e $\varepsilon_D = \varepsilon\big|_D$.

As noções de ideal de uma álgebra podem ser escritas na forma de contenções.

Definição 1.2.2. *Seja A uma álgebra.*

i) Um ideal à esquerda de A é um subespaço vetorial $I \subseteq A$ tal que $m(R \otimes I) \subseteq I$.

ii) Um ideal à direita de A é um subespaço vetorial $I \subseteq A$ tal que $m(I \otimes R) \subseteq I$.

iii) Um ideal de A é um subespaço vetorial $I \subseteq A$ tal que $m(R \otimes I) + m(I \otimes R) \subseteq I$.

Dualizando as contenções, tem-se a noção de coideal.

Definição 1.2.3. *Seja C uma coálgebra.*

i) Um coideal à esquerda de C é um subespaço vetorial $I \subseteq C$ tal que $\Delta(I) \subseteq C \otimes I$.

ii) Um coideal à direita de C é um subespaço vetorial $I \subseteq C$ tal que $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$.

i) Um coideal de C é um subespaço vetorial $I \subseteq C$ tal que $\Delta(I) \subseteq (I \otimes C) + (C \otimes I)$ e $I \subseteq Ker(\varepsilon)$.

A condição $I \subseteq Ker(\varepsilon)$, omitida na definição de ideal, é necessária para que o espaço quociente C/I seja uma coálgebra.

Se I é um coideal à esquerda e à direita, então I é uma subcoálgebra, pois $\Delta(I) \subseteq (C \otimes I) \cap (I \otimes C) = I \otimes I$. No entanto, se I é um coideal, então I não necessariamente é uma subcoálgebra, tampouco um coideal à esquerda ou um coideal à direita. O seguinte exemplo mostra esse fato.

Exemplo 1.2.1. *Seja $K[X]$ a coálgebra de polinômios. Então $I = \langle X \rangle$, o ideal gerado por X, é um coideal, mas não é uma subcoálgebra, nem um coideal à esquerda e nem um coideal à direita. De fato, $\Delta(X) = X \otimes 1_K + 1_K \otimes X$ é tal que $\Delta(X) \in (I \otimes C) + (C \otimes I)$, mas $\Delta(X) \notin I \otimes I$, $\Delta(X) \notin C \otimes I$ e $\Delta(X) \notin I \otimes C$.*

Naturalmente, a imagem e o núcleo de um homomorfismo de coálgebras são subestruturas de suas respectivas coálgebras. Além disso, o quociente de uma coálgebra por um coideal é uma coálgebra.

Proposição 1.2.2. *Seja $f : C \to D$ um homomorfismo de coálgebras. Então Im(f) é uma subcoálgebra de D e Ker(f) é um coideal de C.*

Demonstração: Seja $c \in C$. Tem-se $\Delta_D(f(c)) = (f \otimes f)(\Delta_C(c)) \in (f \otimes f)(C \otimes C) = f(C) \otimes f(C) = Im(f) \otimes Im(f)$, logo $Im(f)$ é uma subcoálgebra de D.

Seja $c \in Ker(f)$. Então $0 = \Delta_D(f(c)) = (f \otimes f)(\Delta_C(c))$, logo $\Delta_C(Ker(f)) \subseteq Ker(f \otimes f) = Ker(f) \otimes C + C \otimes Ker(f)$. Ainda, tem-se $\varepsilon_C(c) = \varepsilon_D(f(c)) = \varepsilon_D(0) = 0$, logo $Ker(f) \subseteq Ker(\varepsilon_C)$, portanto $Ker(f)$ é um coideal de C.

□

Proposição 1.2.3. *Sejam C uma coálgebra e $I \subseteq C$ um coideal. Então existe uma única estrutura de coálgebras em C/I tal que a projeção canônica $p : C \to C/I$ é um homomorfismo de coálgebras.*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\Delta"'] & C/I \arrow[d, dotted, "\overline{\Delta}"] \\ C \otimes C \arrow[r, "p \otimes p"'] & C/I \otimes C/I \end{tikzcd}$$

Tem-se, para $c \in C$,

$$\Delta(\overline{c}) = \sum \overline{c_1} \otimes \overline{c_2}.$$

Demonstração: Seja $c \in I$. Como I é um coideal, $\Delta(c) = \sum\limits_i d_i \otimes c_i + c_i' \otimes d_i'$, d_i, $d_i' \in I$, c_i, $c_i' \in C$, logo $(p \otimes p) \circ \Delta(c) = \sum\limits_i p(d_i) \otimes c_i + c_i' \otimes p(d_i') = 0$. Assim, $I \subseteq Ker((p \otimes p) \circ \Delta)$. Segue do teorema dos homomorfismos que existe uma única transformação linear $\overline{\Delta} : C/I \to C/I \otimes C/I$ tal que $\overline{\Delta} \circ p = (p \otimes p) \circ \Delta$, isto é, $\overline{\Delta}(\overline{c}) = \sum \overline{c_1} \otimes \overline{c_2}$.

Analogamente, como $I \subseteq Ker(\varepsilon)$, existe única $\overline{\varepsilon} : C/I \to K$ tal que $\overline{\varepsilon} \circ p = \varepsilon$, isto é, $\overline{\varepsilon}(\overline{c}) = \varepsilon(c)$. Tem-se

$$((\overline{\Delta} \otimes I) \circ \overline{\Delta})(c) = \sum \overline{\Delta}(\overline{c_1}) \otimes \overline{c_2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum \overline{c_{1_2}} \otimes \overline{c_{1_2}} \otimes \overline{c_2} \\
&= \sum \overline{c_1} \otimes \overline{c_{2_1}} \otimes \overline{c_{2_2}} \\
&= \sum \overline{c_1} \otimes \overline{\Delta}(\overline{c_2}) \\
&= ((I \otimes \overline{\Delta}) \circ \overline{\Delta})(c)
\end{aligned}
$$

e, ainda,

$$\sum \overline{\varepsilon}(\overline{c_1})\overline{c_2} = \sum \varepsilon(c_1)p(c_2) = p(\sum \varepsilon(c_1)c_2) = p(c) = \overline{c}.$$

A igualdade $\sum \overline{c_1}\,\overline{\varepsilon}(\overline{c_2}) = \overline{c}$ é analogamente demonstrada. □

Proposição 1.2.4 (Teorema dos homomorfismos para coálgebras)**.** *Sejam $f : C \to D$ um homomorfismo de coálgebras e $p : C \to C/Ker(f)$ a projeção canônica. Então existe um único homomorfismo de coálgebras $\overline{f} : C/Ker(f) \to D$ tal que $f = \overline{f} \circ p$. Além disso, $\overline{f}$ é um isomorfismo entre $C/Ker(f)$ e $Im(f)$.*

Demonstração: A existência e unicidade de uma transformação linear $\overline{f} : C/Ker(f) \to D$, definida por $\overline{f}(\overline{c}) = f(c)$, e o fato de que $\overline{f}$ é um isomorfismo entre $C/Ker(f)$ e $Im(f)$, decorrem do teorema dos homomorfismos para espaços vetoriais. Mostremos que f é um homomorfismo de coálgebras. Tem-se

$$
\begin{aligned}
\Delta_D(\overline{f}(\overline{c})) &= \Delta_D(f(c)) \\
&= \sum f(c_1) \otimes f(c_2) \\
&= \sum \overline{f}(\overline{c_1}) \otimes \overline{f}(\overline{c_2}) \\
&= (\overline{f} \otimes \overline{f})(\overline{\Delta_C}(\overline{c}))
\end{aligned}
$$

e, ainda,

$$\varepsilon_D(\overline{f}(\overline{c})) = \varepsilon_D(f(c)) = \varepsilon_C(c) = \overline{\varepsilon}(\overline{c}).$$

□

O leitor deve haver observado que comultiplicações de numerosas coálgebras apresentadas são de uma das formas

$$\Delta(c) = c \otimes c \qquad \text{ou} \qquad \Delta(c) = c \otimes 1_K + 1_K \otimes c.$$

Esta observação leva a noção de dois objetos importantes no estudo de coálgebras.

Definição 1.2.4. *Seja C uma coálgebra. Um elemento group-like é um elemento não-nulo $c \in C$ tal que $\Delta(c) = c \otimes c$. O conjunto dos elementos group-like de C é denotado por $G(C)$.*

Da propriedade da counidade de C, segue que, para $c \in G(C)$, tem-se $c = \varepsilon(c)c$, logo $\varepsilon(c) = 1_K$. Os elementos de $G(C)$ são linearmente independentes. De fato, suponha que exista n minimal tal que existam c, g_1, …, $g_n \in G(C)$ linearmente dependentes, com $c = \sum_{i=1}^{n} k_i g_i$. Então $c \otimes c = \sum_{i=1}^{n} k_i g_i \otimes g_i$, logo $c \otimes \sum_{i=1}^{n} k_i g_i = \sum_{i=1}^{n} k_i g_i \otimes g_i$. Assim, $\sum_{i=1}^{n} k_i (c - g_i) \otimes g_i = 0$. Pela minimalidade de n, $\{g_i\}$ é linearmente independente, donde segue que, para todo i, $k_i(c - g_i) = 0$ e $k_i = 0$, um absurdo.

A seguinte proposição mostra uma relação importante entre a coálgebra dual de uma álgebra de dimensão finita e seus elementos group-like.

Proposição 1.2.5. *Seja A uma álgebra de dimensão finita. Então $G(A^*)$ é o conjunto dos homomorfismos de álgebra entre A e K.*

Demonstração: Seja $f \in A^*$. Se $\Delta(f) = f \otimes f$, segue da propriedade de $\Delta(f)$ que $f(ab) = f(a)f(b)$. Ainda, de $\varepsilon(f) = 1_K$ segue que $f(1_A) = 1_K$. Logo f é um homomorfismo de álgebras. Reciprocamente, se $f(ab) = f(a)f(b)$, então $f \otimes f$ satisfaz a propriedade de $\Delta(f)$, donde segue que $\Delta(f) = f \otimes f$. Além disso, como $f(1_A) = 1_K$, f é não-nula. Logo $f \in G(A^*)$. □

Exemplo 1.2.2. *Seja KG a coálgebra de grupos. Então $G(KG) = G$.*

Exemplo 1.2.3. *Seja M_n^{coalg} a coálgebra de matrizes $n \times n$. Então, se $n > 1$, $G(M_n^{coalg}) = \emptyset$. De fato, suponha que exista $A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}E_{i,j}$ group-like, então de $\Delta(A) = A \otimes A$, tem-se*

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{i,j}E_{i,k} \otimes E_{k,j} = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{i,j}a_{k,l}E_{i,j} \otimes E_{k,l}.$$

Sejam i_0, j_0 com $i_0 \neq i_j$ e $f \in (M_n)^*$ definida por $f(E_{i,j}) = \delta_{i,i_0}\delta_{j,j_0}$, em que δ é o delta de Kronecker. Aplicando $f \otimes f$ na identidade acima, segue que $a_{i_0,j_0}^2 = 0$, logo $a_{i_0,j_0} = 0$. Seja $g \in (M_n)^*$ definida por $g(E_{i,j}) = \delta_{i,j_0}\delta_{j,i_0}$. Aplicando $f \otimes g$ na identidade acima, segue que $a_{i_0,i_0} = a_{i_0,j_0}a_{j_0,i_0} = 0$. Logo tem-se $a_{i,j} = 0$, para todos i, j, donde segue que $A = 0$, um absurdo.

Pode-se alternativamente provar que $G(M_n^{coalg}) = \emptyset$ através da Proposição 1.2.5 *e o Exemplo* 1.1.15.

Exemplo 1.2.4. *Seja C a coálgebra trigonométrica. Então, sobre $\mathbb{R}$, $G(C) = \emptyset$ e, sobre $\mathbb{C}$, $G(C) = \{is + c, -is + c\}$. De fato, se $g = as + bc$ é group-like, calculando $\Delta(g)$ e $g \otimes g$ resulta na identidade*

$$as \otimes c + ac \otimes s - bs \otimes s + bc \otimes c = abs \otimes c + bac \otimes s + a^2 s \otimes s + b^2 c \otimes c.$$

Da independência linear de $\{s \otimes c, c \otimes s, s \otimes s, c \otimes c\}$ segue que $a = ab$, $ba = a$, $a^2 = -b$ e $b^2 = b$. De $\varepsilon(g) = 1$, resulta que $b = 1$. Tem-se

$$a^2 = -1, \qquad\qquad b = 1,$$

que não tem solução em $\mathbb{R}$ e tem soluções $a = i$ e $a = -i$ em $\mathbb{C}$, donde segue que $g_1 = is + c$ e $g_2 = -is + c$ são elementos group-like.

Definição 1.2.5. *Seja C uma coálgebra e seja $u \in C$ tal que $\varepsilon(u) = 1_K$. Um elemento u-primitivo de C é um elemento $c \in C$ tal que $\Delta(c) = c \otimes u + u \otimes c$. Se C é também uma álgebra, um elemento primitivo de C é um elemento $c \in C$ tal que $\Delta(c) = c \otimes 1_K + 1_K \otimes c$. O conjunto dos elementos u-primitivos é denotado por $P_u(C)$ e o conjunto dos elementos primitivos de C é denotado por $P(C)$.*

Observe que $0 \in P(C)$. Além disso, se $c \in P(C)$, $c = \sum \varepsilon(c_1)c_2 = \varepsilon(c) + c$, logo $\varepsilon(c) = 0$.

Exemplo 1.2.5. *Seja $K[X]$ a álgebra e coálgebra de polinômios. Então $P(K[X]) = \{0, X\}$.*

Exemplo 1.2.6. *Seja K um corpo de característica 0 e seja C uma álgebra e coálgebra de dimensão finita tal que Δ é um homomorfismo de álgebras. Então $P(C) = \{0\}$. De fato, suponha por absurdo que $c \in P(C)$ é tal que $c \neq 0$. Mostremos, por indução, que $\{c^i\}_{i=0}^n$ é linearmente independente, para todo $n \in \mathbb{N}$, contradizendo a finitude da dimensão de C.*

Para $n = 1$, se $a1_C + bc = 0$, aplicando ε, segue de $\varepsilon(c) = 0$ que $a = 0$, logo $b = 0$ e $\{1_C, c\}$ é linearmente independente. Suponha a hipótese de indução válida para $n-1$. Se $\sum\limits_{i=0}^{n} k_i c^i = 0$, aplicando Δ, segue de $\Delta(c^i) = \Delta(c)^i$ que

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} k_i \binom{i}{j} c^j \otimes c^{i-j} = 0$$

Sejam i, j_0 com $0 \leq j_0 \leq i$, $i < n$, e f_{j_0}, $g_{i,j_0} \in C^*$ definidas, para todo $p \leq n-1$ $f_{j_0}(x^p) = \delta_{p,j_0}$, $g_{i,j_0}(x^p) = \delta_{i-j_0,p}$, que existem pela hipótese de indução. Aplicando sucessivamente $f_{j_0} \otimes g_{i,j_0}$ na identidade acima, tem-se que $k_n\binom{n}{j} = 0$, pois, exceto por este, cada termo da soma possui uma potência de c que é anulada ou por f_{j_0} ou por g_{i,j_0}. Como a característica de K é 0, segue que $k_n = 0$. Da hipótese de indução segue que $0 = k_0 = \ldots = k_{n-1}$.

Exemplo 1.2.7. *O exemplo acima é falso para K com característica prima. De fato, considere $K = \mathbb{Z}_2$ e $C = \mathbb{Z}_2[X]$. Então $I = \langle X^2 \rangle$ é um coideal, pois $\Delta(X^2) = \overline{1} \otimes X^2 + \overline{2}X \otimes X + X^2 \otimes \overline{1} = X^2 \otimes \overline{1} + \overline{1} \otimes X^2$. Segue que $\mathbb{Z}_2[X]/I$ é uma álgebra e uma coálgebra de dimensão 2, e $\overline{X}$ é um elemento não-nulo primitivo.*

Encerramos este capítulo demonstrando uma certa propriedade de finitude que coálgebras apresentam a qual nas álgebras não há uma equivalente.

Proposição 1.2.6. *(Teorema fundamental das coálgebras) Seja C uma coálgebra. Então todo o elemento de C pertence a uma subcoálgebra de dimensão finita.*

Demonstração. Seja $c \in C$. Tem-se $\Delta(c) = \sum\limits_i c_i \otimes d_i$ e $(I \otimes \Delta)(\Delta(c)) = \sum\limits_{i,j} c_i \otimes d_{i,j} \otimes c'_{i,j}$. Seja $D = \langle d_{i,j} \rangle_{i,j}$. De $\sum\limits_{i,j} \varepsilon(c_i) d_{i,j} \varepsilon(c'_{i,j}) = \sum\limits_i \varepsilon(c_i) d_i = c$, decorre que $c \in D$. Mostremos que D é uma subcoálgebra.

De fato, podemos supor que $\{c_i\}_i$, $\{c'_{i,j}\}_{i,j}$ são conjuntos linearmente independentes. Da coassociatividade de Δ, segue que $\sum\limits_{i,j} \Delta(c_i) \otimes d_{i,j} \otimes c'_{i,j} = \sum\limits_{i,j} c_i \otimes \Delta(d_{i,j}) \otimes c'_{i,j}$. Como $\{c'_{i,j}\}_{i,j}$ é linearmente independente, segue que $\sum\limits_{i,j} \Delta(c_i) \otimes d_{i,j} = \sum\limits_{i,j} c_i \otimes \Delta(d_{i,j}) \in C \otimes C \otimes D$. Como $\{c_i\}_i$ é linearmente independente, segue que $\Delta(d_{i,j}) \in C \otimes D$, e D é um coideal à esquerda. Analogamente é demonstrado que D é um coideal à direita, portanto D é uma subcoálgebra. $\square$

Considere a álgebra $K[X]$. Suponha que o elemento X pertence a uma subálgebra de dimensão finita A. Então A contém todos os elementos da forma $\sum\limits_{i=0}^{n} k_i X^i$, $k_i \in K$, e segue que $A = K[X]$, um absurdo, pois $K[X]$ possui dimensão infinita. Portanto a proposição acerca de álgebras análoga à Proposição 1.2.6 não é verdadeira.

Capítulo 2

Álgebras de Hopf

2.1 Relações de compatibilidade

Diante de estruturas duais é natural a investigação de suas relações de compatibilidade. Estudemo-las.

Seja A uma álgebra. Como visto no Exemplo 1.1.2, tem naturalmente $A \otimes A$ uma estrutura de álgebra definida, para a, a', b, $b' \in A$, por

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'.$$

É $1_A \otimes 1_A$ a unidade de $A \otimes A$.

Definição 2.1.1. *Uma biálgebra é uma álgebra e coálgebra B tal que $\Delta : B \to B \otimes B$ e $\varepsilon : B \to K$ são homomorfismos de álgebras. Equivalentemente, B é uma biálgebra se tem-se, para b, $c \in B$,*

$$\sum (bc)_1 \otimes (bc)_2 = \sum b_1 c_1 \otimes b_2 c_2, \qquad \sum (1_B)_1 \otimes (1_B)_2 = 1_B \otimes 1_B,$$
$$\varepsilon(bc) = \varepsilon(b)\varepsilon(c), \qquad \varepsilon(1_B) = 1_K.$$

Resulta um fato importante o dual de uma biálgebra de dimensão finita ser também uma biálgebra.

Proposição 2.1.1. *Seja B uma biálgebra de dimensão finita. Então B^* é uma biálgebra com a estrutura de álgebra dual da estrutura de coálgebra de B e estrutura de coálgebra dual da estrutura de álgebra de B.*

Demonstração: Sejam b^*, $c^* \in B^*$. Tem-se, para b, $c \in B$,

$$\begin{aligned}(b^* * c^*)(bc) &= \sum b^*(b_1c_1)c^*(b_2c_2)\\ &= \sum b_1^*(b_1)b_2^*(c_1)c_1^*(b_2)c_2^*(c_2)\\ &= \sum b_1^*(b_1)c_1^*(b_2)b_2^*(c_1)c_2^*(c_2)\\ &= \sum (b_1^* * c_1^*)(b)(b_2^* * c_2^*)(c),\end{aligned}$$

logo $\Delta_{B^*}(b^* * c^*) = \sum b_1^* * c_1^* \otimes b_2^* * c_2^* = \Delta_{B^*}(b^*) * \Delta_{B^*}(c^*)$. Ainda, da propriedade de Δ_{B^*}, tem-se que $\Delta_{B^*}(\varepsilon) = \varepsilon \otimes \varepsilon$, pois $\varepsilon(bc) = \varepsilon(b)\varepsilon(c)$. Conclui-se que Δ_{B^*} é um homomorfismo de álgebras. Ainda, tem-se

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon}(b^* * c^*) &= (b^* * c^*)(1_B)\\ &= b^*(1_B)c^*(1_B)\\ &= \overline{\varepsilon}(b^*)\overline{\varepsilon}(c^*)\end{aligned}$$

e, também, $\overline{\varepsilon}(\varepsilon) = \varepsilon(1_B) = 1_K$, donde segue que é também ε_{B^*} um homomorfismo de álgebras. $\square$

Definição 2.1.2. *Um homomorfismo de biálgebras é um homomorfismo de álgebras e de coálgebras.*

As seguintes proposições decorrem imediatamente das similares proposições acerca de homomorfismos de álgebras e de coálgebras.

Proposição 2.1.2. *i) Sejam $f : B \to C$ e $g : C \to D$ homomorfismos de biálgebras. Então é $g \circ f$ um homomorfismo de biálgebras.*

ii) Sejam $f : B \to D$ e $g : C \to E$ homomorfismos de biálgebras. Então é $f \otimes g$ um homomorfismo de biálgebras.

iii) Seja $f : B \to C$ um homomorfismo de biálgebras. Então é f^* um homomorfismo de biálgebras.

$\square$

Seja H uma biálgebra. Tem $Hom(H, H)$ uma estrutura de álgebra, considerando H como coálgebra na primeira entrada e como álgebra na segunda entrada, com a multiplicação convolução $(f * g)(h) = \sum f(h_1)g(h_2)$, conforme o Exemplo 1.1.11. A unidade da convolução é $u \circ \varepsilon$. Nem sempre possui a identidade I_H uma inversa; quando tal única inversa existir, chamá-la-emos de antípoda e diremos que H é uma álgebra de Hopf.

Definição 2.1.3. *Uma álgebra de Hopf é uma biálgebra H possuindo uma inversa da identidade no produto convolução. Chamamos tal inversa $S : H \to H$ de antípoda.*

Escreve-se da propriedade da antípoda $S * I = I * S = u \circ \varepsilon$ a identidade

$$\sum S(h_1)h_2 = \sum h_1 S(h_2) = \varepsilon(h)1_H.$$

O dual de uma álgebra de Hopf é uma álgebra de Hopf e também o é o quociente de uma álgebra de Hopf por um subespaço vetorial que é um ideal e coideal tal que $S(I) \subseteq I$.

Proposição 2.1.3. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S. Então H^* é uma álgebra de Hopf com antípoda S^*.*

Demonstração: Seja $h^* \in H^*$. Tem-se

$$\begin{aligned}
(\sum S^*(h_1^*) * h_2^*)(h) &= \sum (S^*(h_1^*))(h_1) h_2^*(h_2) \\
&= \sum h_1^*(S(h_1)) h_2^*(h_2) \\
&= \sum h^*(S(h_1)h_2) \\
&= h^*(\sum S(h_1)h_2) \\
&= h^*(\varepsilon(h)1_H) \\
&= h^*(1_H)\varepsilon_H(h) \\
&= \varepsilon_{H^*}(h^*)1_{H^*}(h),
\end{aligned}$$

donde conclui-se que $\sum S^*(h_1^*) * h_2^* = \varepsilon_{H^*} 1_{H^*}$. A identidade $\sum h_1^* * S^*(h_2^*) = \varepsilon_{H^*} 1_{H^*}$ é analogamente demonstrada. $\square$

Proposição 2.1.4. *Sejam H uma álgebra de Hopf e I um ideal e coideal de H tal que $S(I) \subseteq I$. Então H/I é uma álgebra de Hopf com a antípoda $\overline{S} : H/I \to H/I$ definida, para $h \in H$, por $\overline{S}(\overline{h}) = \overline{S(h)}$.*

Demonstração: Sabemos que H/I é uma álgebra e uma coálgebra. Tem-se, para x, $y \in H$,

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta}(\overline{x}\,\overline{y}) &= \overline{\Delta}(\overline{xy}) \\
&= \sum \overline{(xy)_1} \otimes \overline{(xy)_2} \\
&= \sum \overline{x_1 y_1} \otimes \overline{x_2 y_2} \\
&= \sum \overline{x_1}\,\overline{y_1} \otimes \overline{x_2}\,\overline{y_2} \\
&= \overline{\Delta}(\overline{x})\overline{\Delta}(\overline{y}),
\end{aligned}$$

e, ainda, $\overline{\Delta}(\overline{1_H}) = \overline{1_H} \otimes \overline{1_H}$, que é a identidade de $H/I \otimes H/I$. Ainda,

$$\overline{\varepsilon}(\overline{x}\,\overline{y}) = \overline{\varepsilon}(\overline{xy}) = \varepsilon(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y) = \overline{\varepsilon}(\overline{x})\overline{\varepsilon}(\overline{y}),$$

e, ainda, $\overline{\varepsilon}(\overline{1_H}) = \varepsilon(1_H) = 1_H$. Para a antípoda, $S(I) \subseteq I \subseteq Ker(p)$, donde segue, pelo teorema dos homomorfismos para espaços vetoriais, que existe única $\overline{S} : H/I \to H/I$ tal que $S = \overline{S} \circ p$, em que $p : H \to H/I$ é a projeção canônica. Assim, tem-se

$$\sum \overline{S}((\overline{x})_1)(\overline{x})_2 = \sum \overline{S}(\overline{x_1})\overline{x_2} = \sum \overline{S(x_1)}\overline{x_2} = \overline{\sum S(x_1)x_2} = \overline{\varepsilon(x)1_H} = \varepsilon(x)\overline{1_H}.$$

A igualdade $\sum (\overline{x})_1 \overline{S}((\overline{x})_2)$ é analogamente demonstrada. □

Apresentaremos exemplos de álgebras de Hopf.

Exemplo 2.1.1. *É KG uma álgebra de Hopf cocomutativa definida, para α, $\beta \in K$ e g, $h \in G$, por*

$$(\alpha g)(\beta h) = (\alpha\beta)(gh), \qquad \Delta(g) = g \otimes g,$$
$$\varepsilon(g) = 1, \qquad S(g) = g^{-1}.$$

Além disso, se G é um grupo finito, $(KG)^*$ é uma álgebra de Hopf definida, para f, $g \in (KG)^*$, x, $y \in G$, por

$$(f * g)(x) = f(x)g(x), \qquad \Delta(f)(x \otimes y) = f(xy)e_G \otimes e_G,$$
$$\varepsilon(f) = f(e_G), \qquad S(f)(x) = f(x^{-1}).$$

Exemplo 2.1.2. *Sejam K um corpo com característica diferente de 2 e H a álgebra gerada pelos elementos c e x sujeitos às relações*

$$c^2 = 1, \qquad x^2 = 0, \qquad xc = -cx.$$

H tem dimensão 4 como espaço vetorial com a base $\{1, c, x, cx\}$ e é uma álgebra de Hopf com

$$\Delta(c) = c \otimes c, \qquad \Delta(x) = c \otimes x + x \otimes 1,$$

$$\varepsilon(c) = 1, \qquad \varepsilon(x) = 0,$$

$$S(c) = c^{-1}, \qquad S(x) = -cx.$$

Esta álgebra é conhecida como álgebra de Sweedler e foi o primeiro exemplo de uma álgebra de Hopf não-comutativa e não-cocomutativa.

Exemplo 2.1.3. *A álgebra de polinômios $K[X]$ é uma álgebra de Hopf comutativa e cocomutativa com*

$$\Delta(X^n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i \otimes X^{n-i}, \qquad \Delta(1_K) = 1_K \otimes 1_K$$

$$\varepsilon(X^n) = 0, \qquad \varepsilon(1_K) = 1_K,$$

$$S(X^n) = (-1)^n X^n, \qquad S(1_K) = 1_K.$$

Provemos, por indução em n, que $\Delta(X^n) = \Delta(X)^n$, donde seguirá que Δ é um homomorfismo de álgebras. Para $n = 1$, a identidade é claramente verdadeira. Suponhamos que a identidade vale para n. Então

$$\begin{aligned}
\Delta(X)^{n+1} &= \Delta(X)^n \Delta(X) \\
&= \Delta(X^n)\Delta(X) \\
&= (\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i \otimes X^{n-i})(X \otimes 1_K + 1_K \otimes X) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^{i+1} \otimes X^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i \otimes X^{n-(i-1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} X^i \otimes X^{n-(i-1)} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i \otimes X^{n-(i-1)} \\
&= \binom{n}{0} X^0 \otimes X^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} X^i \otimes X^{n-(i-1)} \\
&+ \binom{n}{n} X^{n+1} \otimes X^0 \\
&= \binom{n+1}{0} X^0 \otimes X^{n+1-0} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} X^i \otimes X^{n+1-i} \qquad (*)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\binom{n}{n+1-1}X^{n+1}\otimes X^{n+1-(n+1)}\\
&=\sum_{i=0}^{n=1}\binom{n+1}{i}X^{i}\otimes X^{n+1-i}\\
&=\Delta(X^{n+1}),
\end{aligned}
$$

onde em $(*)$ *foi utilizada a relação de Stifel. Provemos que* $K[X]$ *é uma álgebra de Hopf. Por um lado, tem-se*

$$
\begin{aligned}
\sum S((X^n)_1)(X^n)_2 &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}S(X^i)X^{n-i}\\
&=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^iX^iX^{n-i}\\
&=X^n\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i \qquad (*)\\
&=0\\
&=\varepsilon(X^n)1_K,
\end{aligned}
$$

onde em $(*)$ *foi utilizado o fato de que* $\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i=0$. *Por outro lado,*

$$
\begin{aligned}
\sum (X^n)_1S((X^n)_2) &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}X^iS((X^{n-i})_2)\\
&=X^n\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}\\
&=X^np(n)\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i\\
&=0\\
&=\varepsilon(X^n)1_K,
\end{aligned}
$$

em que $p(n)=1$, *se* n *é par, e* $p(n)=0$, *se* n *é ímpar.*

Exemplo 2.1.4. *Seja* V *um espaço vetorial. Sua álgebra tensorial é o espaço vetorial* $T(V)=\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty}V^{\otimes n}$, *em que* $V^{\otimes 0}=K$ *e* $V^{\otimes n}=\underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{n\ vezes}$, $n>1$, *com a* *multiplicação definida, para* $v = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$*,* $w = w_1 \otimes \ldots \otimes w_m \in V^{\otimes m}$*, por*

$$vw = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_m,$$

$vw \in V^{\otimes n+m}$*. A unidade desta álgebra é* 1_K*.*

Sejam $x \in V^{\otimes n}$*,* $y \in V^{\otimes m}$*. Escrevamos* $x \otimes y = x \overline{\otimes} y \in T(V) \otimes T(V)$*. Com esta notação, elementos em* $T(V) \otimes T(V)$ *de semelhante escrita são distinguíveis, como, por exemplo,* $v_1 \otimes v_2 \overline{\otimes} v_3 = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$ *de* $v_1 \overline{\otimes} v_2 \otimes v_3 = v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$*.*

Possui $T(V)$ *a seguinte propriedade universal: seja* $f : V \to A$ *uma transformação linear, em que* A *é uma álgebra. Então existe um único homomorfismo de álgebras* $\overline{f} : T(V) \to A$ *tal que* $f = \overline{f} \circ i$*, em que* $i : V \to T(V)$ *é a inclusão. A estrutura de álgebra de Hopf em* $T(V)$ *é definida aplicando a propriedade universal às transformações lineares* $\Delta : V \to T(V) \otimes T(V)$*,* $\varepsilon : V \to K$ *e* $S : V \to T(V)^{op}$ *definidas, para* $v \in V$*, por*

$$\Delta(v) = v \overline{\otimes} 1_K + 1_K \overline{\otimes} v, \qquad \varepsilon(v) = 0, \qquad S(v) = -v,$$

em que $T(V)^{op}$ *é a álgebra oposta de* $T(V)$*, com multiplicação definida, para* v*,* $w \in T(V)$ *por* $v \cdot w = wv$*.*

Seja $v = v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} v_1^{(n)} \cdots v_n^{(n)} \in T(V)$*, com* $v_0 \in K$*,* $v_i^{(n)} \in V$*, para* $1 \leq i \leq n$*. Note que a soma é finita. Tem-se*

$$\begin{aligned}
\Delta(v) &= v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (v_1^{(n)} \overline{\otimes} 1_K + 1_K \overline{\otimes} v_1^{(n)}) \cdots (v_n^{(n)} \overline{\otimes} 1_K + 1_K \overline{\otimes} v_n^{(n)}) \\
\varepsilon(v) &= v_0, \\
S(v) &= v_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n^{(n)} \ldots v_1^{(n)}.
\end{aligned}$$

É $T(V)$ *com* Δ *cocomutativa. Observe que em* $T(V)$ *o produto tensorial é a multiplicação e portanto é distributivo. Por exemplo, para* v*,* $w \in V$*,*

$$\Delta(v \otimes w) = \Delta(v) \otimes \Delta(w)$$

$$
\begin{aligned}
&= (v\overline{\otimes}1_K + 1_K\overline{\otimes}v) \otimes (w\overline{\otimes}1_K + 1_K\overline{\otimes}w) \\
&= (v\overline{\otimes}1_K) \otimes (w\overline{\otimes}1_K) + (v\overline{\otimes}1_K) \otimes (1_K\overline{\otimes}w) \\
&+ (1_K\overline{\otimes}v) \otimes (w\overline{\otimes}1_K) + (1_K\overline{\otimes}v) \otimes (1_K\overline{\otimes}w) \\
&= (v \otimes w)\overline{\otimes}(1_K \otimes 1_K) + (v \otimes 1_K)\overline{\otimes}(1_K \otimes w) \\
&+ (1_K \otimes w)\overline{\otimes}(v \otimes 1_K) + (1_K \otimes 1_K)\overline{\otimes}(v \otimes w) \\
&= (v \otimes w)\overline{\otimes}1_K + v\overline{\otimes}w + w\overline{\otimes}v + 1_K\overline{\otimes}(v \otimes w).
\end{aligned}
$$

Pela propriedade universal de $T(V)$, Δ, ε e S são homomorfismos de álgebra, e basta verificar as propriedades da coassociatividade, counidade e antípoda.

$$
\begin{aligned}
(\Delta \otimes I) \circ \Delta(v) &= (\Delta \otimes I)(v\overline{\otimes}1_K + 1_K\overline{\otimes}v) \\
&= \Delta(v)\overline{\otimes}1_K + \Delta(1_K)\overline{\otimes}v \\
&= v\overline{\otimes}1_K\overline{\otimes}1_K + 1_K\overline{\otimes}v\overline{\otimes}1_K + 1_K\overline{\otimes}1_K\overline{\otimes}v \\
&= v\overline{\otimes}\Delta(1_K) + 1_K\overline{\otimes}\Delta(v) \\
&= (I \otimes \Delta)(v\overline{\otimes}1_K + 1_K\overline{\otimes}v) \\
&= (I \otimes \Delta) \circ \Delta(v).
\end{aligned}
$$

Como as aplicações $(\Delta \otimes I) \circ \Delta$ e $(I \otimes \Delta) \circ \Delta$ são homomorfismos de álgebras, e V gera $T(V)$ como álgebra, segue a identidade para todo elemento de $T(V)$. Tem-se ainda

$$(\varepsilon \otimes I) \circ \Delta(v) = \sum \varepsilon(v_1)v_2 = \varepsilon(v)1_K + \varepsilon(1_K)v = 1_K v = I(v).$$

Como as aplicações $(\varepsilon \otimes I) \circ \Delta$ e I são homomorfismos de álgebras, segue a identidade para todo elemento de $T(V)$. A identidade $(I \otimes \varepsilon) \circ \Delta = I$ é analogamente demonstrada. Tem-se ainda

$$\sum S(v_1)v_2 = S(v)1_K + S(1_K)v = -v + v = 0 = \varepsilon(v)1_K.$$

A igualdade $\sum v_1 S(v_2) = \varepsilon(v)1_K$ é analogamente demonstrada. Para provarmos que a igualdade vale para todo elemento de $T(V)$, basta provarmos que vale para *elementos da forma vw, em que v, $w \in V$. De fato,*

$$\begin{aligned}
\sum S((vw)_1)(vw)_2 &= \sum S(v_1w_1)v_2w_2 \\
&= \sum S(w_1)S(v_1)v_2w_2 \\
&= \sum S(w_1)\varepsilon(v)1_K w_2 \\
&= \sum \varepsilon(v)S(w_1)w_2 \\
&= \sum \varepsilon(v)\varepsilon(w)1_K \\
&= \sum \varepsilon(vw)1_K.
\end{aligned}$$

Tem-se $P(T(V)) = V$.

Exemplo 2.1.5. *Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ com um produto bilinear $[\,,\,] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, nomeado colchete de Lie, tal que, para x, y, $z \in \mathfrak{g}$,*

$$\begin{aligned}
&[x, x] = 0 \\
&[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0.
\end{aligned}$$

Observe que da bilinearidade e de $[x, x] = 0$, decorre que $\mathfrak{g}$ é anti-comutativa, isto é, $[x, y] = -[y, x]$.

A álgebra envolvente universal $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ é a álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$ sujeita à relação $[x, y] = xy - yx$. Podê-mo-la induzir em $T(\mathfrak{g})$ construindo o ideal $I = \langle [x, y] - (x \otimes y - y \otimes x)\rangle_{x,y\in\mathfrak{g}}$. I é um coideal de $T(\mathfrak{g})$, pois

$$\begin{aligned}
\Delta([x, y] - (x \otimes y - y \otimes x)) &= \Delta([x, y]) - (\Delta(x)\Delta(y) - \Delta(y)\Delta(x)) \\
&= \Delta([x, y]) - ((x\overline{\otimes}1_K + 1_K\overline{\otimes}x)(y\overline{\otimes}1_K + 1_K\overline{\otimes}y) \\
&\quad -(y\overline{\otimes}1_K + 1_K\overline{\otimes}y)(x\overline{\otimes}1_K + 1_K\overline{\otimes}x)) \\
&= [x, y]\overline{\otimes}1_K + 1_K\overline{\otimes}[x, y] \\
&\quad - (x \otimes y\overline{\otimes}1_K + x\overline{\otimes}y + y\overline{\otimes}x + 1_K\overline{\otimes}x \otimes y
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- y \otimes x \overline{\otimes} 1_K - y \overline{\otimes} x - x \overline{\otimes} y - 1_K \overline{\otimes} y \otimes x))\\
&= [x, y] \overline{\otimes} 1_K - (x \otimes y \overline{\otimes} 1_K - y \otimes x \overline{\otimes} 1_K)\\
&+ 1_K \overline{\otimes} [x, y] - (1_K \overline{\otimes} x \otimes y - 1_K \overline{\otimes} y \otimes x)\\
&= ([x, y] - (x \otimes y - y \otimes x)) \overline{\otimes} 1_K\\
&+ 1_K \overline{\otimes} ([x, y] - (x \otimes y - y \otimes x))
\end{aligned}
$$

e, ainda,

$$\varepsilon([x, y] - (x \otimes y - y \otimes x)) = 0,$$

donde segue que $\Delta(I) \subseteq (I \otimes T(V)) + (T(V) \otimes I)$ *e* $I \subseteq Ker(\varepsilon)$*. Tem-se, ainda, que* $S([x, y] - (x \otimes y - y \otimes x)) = -([x, y] - (x \otimes y - y \otimes x)$*, logo* $S(I) \subseteq I$*. Portanto* $\mathfrak{A}(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I$ *é uma álgebra de Hopf.*

Observe que para que I *fosse um coideal, foi necessário que* Δ *fosse multiplicativa em relação ao produto tensorial em* $T(\mathfrak{g})$*. Como* $T(\mathfrak{g})$ *é cocomutativa,* $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ *também o é.*

Exemplo 2.1.6. *Seja* M_n *o conjunto de matrizes* $n \times n$*. Então para* $n > 1$*, sua estrutura de álgebra e nem sua estrutura de coálgebra podem ser estendidas para uma estrutura de álgebra de Hopf.*

De fato, suponha por absurdo que a álgebra M_n *possui uma estrutura de álgebra de Hopf. Então como* M_n *é uma álgebra simples, o homomorfismo de álgebra* $\varepsilon : M_n \to K$ *é tal que* $Ker(\varepsilon) = \langle 0 \rangle$ *ou* $Ker(\varepsilon) = M_n$*. Como* $\varepsilon(I) = 1_K$*,* $Ker(\varepsilon) = \langle 0 \rangle$*, logo* ε *é injetiva. Segue que* $dim(M_n) \leq dim(K) = 1$*, um absurdo.*

Suponha por absurdo que a coálgebra M_n^{coalg} *pode ser estedida para uma álgebra de Hopf. Então seu espaço dual* $(M_n^{coalg})^*$ *é uma álgebra de Hopf. Do Exemplo* 1.1.13*, segue que é* $(M_n^{coalg})^*$ *isomorfo à álgebra de matrizes* M_n *isomorfa como álgebra, um absurdo, pois* M_n *não admite estrutura de álgebra de Hopf.*

2.2 Propriedades da antípoda

A seguinte proposição mostra que é a antípoda aquilo que é nomeado como anti-homomorfismo de álgebras e anti-homomorfismo de coálgebras.

Proposição 2.2.1. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então,*

i) $S(hg) = S(g)S(h)$, *para* $h, g \in H$.

ii) $S(1_H) = 1_H$.

iii) $\Delta(S(h)) = \sum S(h_2) \otimes S(h_1)$.

iv) $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$.

Demonstração: i) Consideremos a álgebra $\mathrm{Hom}(H \otimes H, H)$ com a convolução. O elemento neutro da convolução é $u_H \circ \varepsilon_{H\otimes H}$, conforme Exemplo 1.1.11. Sejam F, $G : H \otimes H \to H$ dadas para h, $g \in H$ por:

$$F(h \otimes g) = S(g)S(h), \qquad G(h \otimes g) = S(hg).$$

Provemos que $m * F = u_H \circ \varepsilon_{H\otimes H} = G * m$, donde seguirá que $F = G$, o que conclui a demonstração. Tem-se

$$\begin{aligned}
(m * F)(h \otimes g) &= \sum m((h \otimes g)_1)F((h \otimes g)_2) \\
&= \sum m(h_1 \otimes g_1)F(h_2 \otimes g_2) \\
&= \sum h_1(g_1 S(g_2))S(h_2) \\
&= \sum h_1(\varepsilon(g)1_H)S(h_2) \\
&= \sum h_1 S(h_2)(\varepsilon(g)1_H) \\
&= \varepsilon(h)\varepsilon(g)1_H \\
&= \varepsilon_{H\otimes H}(h \otimes g)1_H \\
&= u_H \circ \varepsilon(h \otimes g)
\end{aligned}$$

e, ainda,

$$
\begin{aligned}
(G * m)(h \otimes g) &= \sum G(h_1 \otimes g_1)m(h_2 \otimes g_2) \\
&= \sum S(h_1 g_1)h_2 g_2 \\
&= \sum S((hg)_1)(hg)_2 \\
&= \varepsilon(hg)1_H \\
&= \varepsilon(h)\varepsilon(g)1_H \\
&= \varepsilon_{H\otimes H}(h \otimes g)1_H \\
&= u_H \circ \varepsilon_{H\otimes H}(h \otimes g).
\end{aligned}
$$

ii) Temos, da propriedade de S, que

$$S(1_H) = S(1_H)1_H = \sum S((1_H)_1)(1_H)_2 = \varepsilon(1_H)1_H = 1_K 1_H = 1_H.$$

iii) Consideremos a álgebra $\mathrm{Hom}(H, H\otimes H)$ com a convolução. O elemento neutro da convolução é $u_{H\otimes H} \circ \varepsilon$, conforme Exemplo 1.1.11. Consideremos $F, G : H \to H \otimes H$ dadas para $h \in H$ por:

$$F(h) = \Delta(S(h)), \qquad G(h) = \sum S(h_2) \otimes S(h_1).$$

Provemos que $\Delta * F = u_{H\otimes H} \circ \varepsilon = G * \Delta$, donde seguirá que $F = G$, o que conclui a demonstração. Tem-se

$$
\begin{aligned}
(\Delta * F)(h) &= \sum \Delta(h_1)F(h_2) \\
&= \sum \Delta(h_1)\Delta(S(h_2)) \\
&= \Delta(\sum h_1 S(h_2)) \\
&= \Delta(\varepsilon(h)1) \\
&= \varepsilon(h)\Delta(1) \\
&= \varepsilon(h)(1 \otimes 1)
\end{aligned}
$$

$$= u_{H\otimes H}(\varepsilon(h))$$

e, ainda,

$$\begin{aligned}
(G*\Delta)(h) &= \sum G(h_1)\Delta(h_2)\\
&= \sum [S((h_1)_2)\otimes S((h_1)_1)][(h_2)_1\otimes (h_2)_2)]\\
&= \sum S((h_1)_2)h_{2_1}\otimes S((h_1)_1)h_{2_2}\\
&= \sum S(h_3)h_4\otimes S(h_1)h_3 \qquad\qquad (*)\\
&= \sum \varepsilon(h_2)1_H\otimes S(h_1)h_3\\
&= \sum 1_H\otimes S(h_1)\varepsilon(h_2)h_3\\
&= \sum 1_H\otimes S(h_1)\varepsilon((h_2)_1)(h_2)_2\\
&= \sum 1_H\otimes S(h_1)h_2\\
&= 1_H\otimes \sum S(h_1)h_2\\
&= 1_H\otimes \varepsilon(h)1\\
&= \varepsilon(h)(1_H\otimes 1_H)\\
&= u_{H\otimes H}(\varepsilon(h)).
\end{aligned}$$

O leitor que realiza sua primeira visita às noções de coálgebra pode encontrar-se confuso com a expressão $(*)$, cuja elucidação reside na introdução da notação de Sweedler, na página 7.

iv) Tem-se da definição de S, $\sum h_1S(h_2)=\varepsilon(h)1$. Aplicando ε, tem-se as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\sum h_1S(h_2)) &= \varepsilon(\varepsilon(h)1_H)\\
\sum \varepsilon(h_1)\varepsilon(S(h_2)) &= \varepsilon(h)\varepsilon(1_H)\\
\varepsilon(S(\sum \varepsilon(h_1)h_2)) &= \varepsilon(h)1_K
\end{aligned}$$

$$\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h).$$

$\square$

Decorre que é também S^{-1}, quando existe, um anti-homomorfismo de álgebras e de coálgebras.

Proposição 2.2.2. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora S. Então,*

i) $S^{-1}(hg) = S^{-1}(g)S^{-1}(h)$, *para* h, $g \in H$.

ii) $S^{-1}(1) = 1$.

iii) $\Delta(S^{-1}(h)) = \sum S^{-1}(h_2) \otimes S^{-1}(h_1)$.

iv) $\varepsilon(S^{-1}(h)) = \varepsilon(h)$.

Demonstração:

$i)$ Sejam h, $g \in H$. Então, escrevendo $h = S(S^{-1}(h))$, $g = S(S^{-1}(g))$, tem-se que

$$S^{-1}(hg) = S^{-1}(S(S^{-1}(h))S(S^{-1}(g))) = S^{-1}(S(S^{-1}(g)S^{-1}(h))) = S^{-1}(g)S^{-1}(h).$$

$ii)$ Tem-se que $S^{-1}(1_H) = S^{-1}(S(1_H)) = 1_H$.

$iii)$ Tem-se $\sum h_1 \otimes h_2 = \Delta(S(S^{-1}(h))) = \sum S((S^{-1}(h))_2) \otimes S((S^{-1}(h))_1)$. Aplicando na identidade acima $\tau \circ (S^{-1} \otimes S^{-1})$, em que τ é a aplicação twist, tem-se que $\sum S^{-1}(h_2) \otimes S^{-1}(h_1) = \sum (S^{-1}(h))_1 \otimes (S^{-1}(h))_2 = \Delta(S^{-1}(h))$.

$iv)$ Tem-se que $\varepsilon(h) = \varepsilon(S(S^{-1}(h))) = \varepsilon(S^{-1}(h))$. $\square$

Proposição 2.2.3. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. As seguintes propriedades são equivalentes:*

i) $\sum S(h_2)h_1 = \varepsilon(h)1$.

ii) $\sum h_2 S(h_1) = \varepsilon(h)1$.

iii) $S^{-1} = S$.

Demonstração. Mostraremos que são equivalentes $i)$ e $iii)$. A equivalência das propriedades $ii)$ e $iii)$ é analogamente demonstrada.

$i) \Rightarrow iii)$ Basta provar que S^2 é uma inversa à direita de S no produto convolução, de onde seguirá que $S^2 = I$, pela unicidade da inversa.

$$\begin{aligned}
(S * S^2)(h) &= \sum S(h_1)S(S(h_2)) \\
&= \sum S(S(h_2)h_1) && \text{(por } i) \text{ de Prop. 2.2.1)} \\
&= S(\sum S(h_2)h_1) \\
&= S(\varepsilon(h)1) && \text{(hipótese)} \\
&= \varepsilon(h)S(1) \\
&= \varepsilon(h)1 && \text{(por } ii) \text{ de Prop. 2.2.1)} \\
&= u \circ \varepsilon(h)
\end{aligned}$$

$iii) \Rightarrow i)$ Da definição de S, tem-se $\sum S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1$. Aplicando S, tem-se as seguintes identidades.

$$\begin{aligned}
& S(\sum S(h_1)h_2) = S(\varepsilon(h)1) \\
\Rightarrow & \sum S(S(h_1)h_2) = \varepsilon(h)S(1) \\
\Rightarrow & \sum S(h_2)S^2(h_1) = \varepsilon(h)1 && \text{(de } i \text{ e } ii) \text{ de Prop. 2.2.1)} \\
\Rightarrow & \sum S(h_2)h_1 = \varepsilon(h)1 && \text{(hipótese)}
\end{aligned}$$

$\square$

Note que se é H uma álgebra de Hopf comutativa ou cocomutativa, sua antípoda possui uma, e portanto todas, das propriedades acima descritas.

Definição 2.2.1. *Um homomorfismo de álgebras de Hopf é um homomorfismo de biálgebras.*

Um homomorfismo de álgebras de Hopf preserva antípodas da seguinte forma:

Proposição 2.2.4. *Sejam H e G álgebras de Hopf com antípodas S_H e S_G e seja $f : H \to G$ um homomorfismo de álgebras de Hopf. Então $f \circ S_H = S_G \circ f$.*

Demonstração: Consideremos a álgebra $\mathrm{Hom}(H, G)$ com o produto convolução, cujo elemento neutro é $u_G \circ \varepsilon_H$. Provemos que $f * (f \circ S_H) = u_G \circ \varepsilon_H = (S_G \circ f) * f$, donde seguirá a tese. De fato, para $h \in H$, tem-se

$$\begin{aligned}
(f * (f \circ S_H))(h) &= \sum f(h_1) f(S_H(h_2)) \\
&= f(\sum h_1 S_H(h_2)) \\
&= f(\varepsilon_H(h) 1_H) \\
&= \varepsilon_H(h) 1_G \\
&= u_G(\varepsilon_H(h))
\end{aligned}$$

e, ainda,

$$\begin{aligned}
((S_G \circ f) * f)(h) &= \sum S_G(f(h_1)) f(h_2) \\
&= \sum S_G((f(h))_1)(f(h))_2 \\
&= \varepsilon_G(f(h)) 1_G \\
&= \varepsilon_H(h) 1_G \\
&= u_G(\varepsilon_H(h)).
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.2.5. *O dual H^* de uma álgebra de Hopf de dimensão finita H é uma álgebra de Hopf com antípoda S^*.*

Demonstração. De fato, seja $h^* \in H^*$. Tem-se, para $h \in H$,

$$\begin{aligned}
(\sum S^*(h_1^*) * h_2^*)(h) &= \sum (S^*(h_1^*))(h_1) h_2^*(h_2) \\
&= \sum h_1^*(S(h_1)) h_2^*(h_2) \\
&= h^*(\sum S(h_1) h_2) \\
&= h^*(\varepsilon(h) 1_H) \\
&= \varepsilon(h) h^*(1_H) \\
&= \varepsilon_{H^*}(h^*) \varepsilon(h),
\end{aligned}$$

donde segue que $\sum S^*(h_1^*) * h_2^* = \varepsilon_{H^*}(h^*)\varepsilon$. A identidade $\sum h_1^* * S^*(h_2^*) = \varepsilon_{H^*}(h^*)\varepsilon$ é analogamente demonstrada. $\square$

Capítulo 3

Módulos de Yetter-Drinfeld

3.1 Módulos e comódulos

De maneira semelhante àquela realizada anteriormente no capítulo de álgebras e coálgebras, o leitor poderá facilmente conceber em forma de diagramas a noção natural de A-módulos sobre uma álgebra A.

Definição 3.1.1. *Um A-módulo à esquerda é um espaço vetorial M com uma transformação linear $\mu : A \otimes M \to M$ tal que são comutativos os seguintes diagramas:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "I_A \otimes \mu"] \arrow[d, "m \otimes I_M"'] & A \otimes M \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\mu"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \otimes M \arrow[r, "u \otimes I_M"] \arrow[dr, "\phi"'] & A \otimes M \arrow[d, "\mu"] \\ & M \end{tikzcd}$$

nos quais ϕ é definida, para $k \in K$, $m \in M$, por $\phi(k \otimes m) = km$. Usaremos a tradicional notação $\mu(a \otimes m) = a \cdot m$. Os diagramas acima são equivalentes às seguintes identidades, para a, $b \in A$ e $m \in M$:

$$a \cdot (b \cdot m) = (ab) \cdot m, \qquad 1_A \cdot m = m.$$

Por facilidade de escrita, omitiremos o ponto quando não implicar em falta de clareza. Podemos analogamente realizar através de diagramas a noção de um A-módulo à direita.

Definição 3.1.2. *Um A-módulo à direita é um espaço vetorial M com uma transformação linear $\mu : M \otimes A \to M$ tal que são comutativos os seguintes diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
M \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu \otimes I_A"] \arrow[d, "I_M \otimes m"'] & M \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
M \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \otimes K \arrow[r, "I_M \otimes u"] \arrow[dr, "\phi"'] & M \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

nos quais ϕ é definida, para $k \in K$, $m \in M$, por $\phi(m \otimes k) = km$. Usando a tradicional notação $\mu(m \otimes a) = m \cdot a$, para $a \in A$ e $m \in M$, os diagramas acima são equivalentes às seguintes identidades, para a, $b \in A$ e $m \in M$:

$$(m \cdot a) \cdot b = m \cdot (ab), \qquad m \cdot 1_A = m.$$

Se dualizados os diagramas que definem as noções de A-módulos à esquerda e de A-módulos à direita, tem-se as noções de um C-comódulo à direita e de um C-comódulo à esquerda, respectivamente, em que C é uma coálgebra.

Definição 3.1.3. *Um C-comódulo à esquerda é um espaço vetorial M com uma transformação linear $\rho : M \to C \otimes M$ tal que são comutativos os seguintes diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & C \otimes M \arrow[d, "\Delta \otimes I_M"] \\
C \otimes M \arrow[r, "I_C \otimes \rho"'] & C \otimes C \otimes M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\phi"'] & C \otimes M \arrow[d, "\varepsilon \otimes I_M"] \\
& K \otimes M
\end{tikzcd}$$

nos quais ϕ é definida, para $m \in M$, por $\phi(m) = 1_K \otimes m$. Os diagramas acima são equivalentes às identidades:

$$(\Delta \otimes I) \circ \rho = (I \otimes \rho) \circ \rho, \qquad (\varepsilon \otimes I) \circ \rho = \phi.$$

Definição 3.1.4. *Um C-comódulo à direita é um espaço vetorial M com uma transformação linear $\rho : M \to M \otimes C$ tal que são comutativos os seguintes diagramas:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes C \arrow[d, "I_M \otimes \Delta"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\rho \otimes I_C"'] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\phi"'] & M \otimes C \arrow[d, "I_M \otimes \varepsilon"] \\ & M \otimes K \end{tikzcd}$$

nos quais ϕ é definida, para $m \in M$, por $\phi(m) = m \otimes 1_K$. Os diagramas acima são equivalentes às identidades:

$$(I \otimes \Delta) \circ \rho = (\rho \otimes I) \circ \rho, \qquad (I \otimes \varepsilon) \circ \rho = \phi.$$

Usaremos a seguinte notação: seja M um C-comódulo à esquerda. Notamos $\rho(m) = \sum m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$, em que os elementos $m_{(-1)}$ estão em C e os elementos $m_{(0)}$ estão em M. Observe que é no parênteses no índice onde se faz a distinção da notação de ρ da notação da comultiplicação.

Com esta notação, a definição de um C-comódulo à esquerda escreve-se

$$\sum m_{(-1)} \otimes m_{(0)_{(-1)}} \otimes m_{(0)_{(0)}} = \sum m_{(-1)_1} \otimes m_{(-1)_2} \otimes m_{(0)}$$
$$\sum \varepsilon(m_{(-1)}) m_{(0)} = m,$$

e podemos escrever indistinguivelmente

$$\sum m_{(-2)} \otimes m_{(-1)} \otimes m_{(0)} = \sum m_{(-1)} \otimes m_{(0)_{(-1)}} \otimes m_{(0)_{(0)}}$$

$$= \sum m_{(-1)_1} \otimes m_{(-1)_2} \otimes m_{(0)}$$

e, de forma geral,

$$\begin{aligned}
&\sum m_{(-n)} \otimes m_{(-(n-1))} \otimes \ldots \otimes m_{(0)} \\
&= \sum m_{(-(n-1))} \otimes \ldots \otimes \rho(m_{(0)}) \\
&= \sum m_{(-(n-1))} \otimes \ldots \otimes m_{(-(i+1))} \otimes \Delta(m_{(-i)}) \otimes m_{(-(i-1))} \otimes \ldots \otimes m_{(0)},
\end{aligned}$$

em que $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Analogamente, seja M um C-comódulo à direita. Notamos $\rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$, em que os elementos $m_{(0)}$ estão em M e os elementos $m_{(1)}$ estão em C.

Com esta notação, a definição de um C-comódulo à direita escreve-se

$$\begin{aligned}
&\sum m_{(0)_{(0)}} \otimes m_{(0)_{(1)}} \otimes m_{(1)} = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)_1} \otimes m_{(1)_2}, \\
&\sum \varepsilon(m_{(1)}) m_{(0)} = m,
\end{aligned}$$

e podemos escrever indistinguivelmente

$$\begin{aligned}
\sum m_{(0)} \otimes m_{(1)} \otimes m_{(2)} &= \sum (m_{(0)})_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(1)} \otimes m_{(1)} \\
&= \sum m_{(0)} \otimes (m_{(1)})_1 \otimes (m_{(1)})_2
\end{aligned}$$

e, de forma geral,

$$\begin{aligned}
\sum m_{(0)} \otimes m_{(1)} \otimes \ldots \otimes m_{(n)} &= \sum \rho(m_{(0)}) \otimes m_{(1)} \otimes \ldots \otimes m_{(n-1)} \\
&= \sum m_{(0)} \otimes \ldots \otimes m_{(i-1)} \otimes \Delta(m_{(i)}) \otimes m_{(i+1)} \otimes \ldots \otimes m_{(n-1)},
\end{aligned}$$

em que $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Porquanto equivalentes são às suas análogas propriedades de C-comódulos à esquerda as propriedades de C-comódulos à direita, são os estudos de C-comódulos à direita e à esquerda congruentes. De fato, demonstra a Proposição 2.1.10 de [4] que a categoria dos C-comódulos à esquerda é isomorfa à categoria oposta dos C-comódulos à direita, isto é, à categoria obtida invertendo-se os domínios e contradomínios dos morfismos na categoria dos C-comódulos à direita.

Trabalha-se tradicionalmente com C-comódulos à direita. Este texto, no entanto, pretende introduzir a noção de módulos de Yetter-Drinfeld, campo de estudo onde maneja-se tradicionalmente C-comódulos à esquerda. Trabalharemos com esses últimos.

Exemplo 3.1.1. *Seja B uma biálgebra. Então K é um B-módulo e B-comódulo com ação e coação definida, para $k \in K$, por*

$$b \cdot k = \varepsilon(b)k, \qquad\qquad \rho(k) = k1_B \otimes 1_K.$$

Exemplo 3.1.2. *(Ação regular à esquerda) Seja A uma álgebra. Então A é um A-módulo com ação definida, para a, $x \in A$, por*

$$a \cdot x = ax.$$

Exemplo 3.1.3. *Seja C uma coálgebra. Então C é um C-comódulo com coação definida, para $c \in C$, por*

$$\rho(c) = \sum c_1 \otimes c_2.$$

Exemplo 3.1.4. *Seja H uma álgebra de Hopf. Um espaço vetorial V é um H-módulo e H-comódulo com ação e coação definidas, para $h \in H$, $v \in V$, por*

$$h \cdot v = \varepsilon(h)v \qquad\qquad \rho(v) = 1_H \otimes v.$$

Exemplo 3.1.5. *Sejam M e N H-módulos. Então $M \otimes N$ é um H-módulo com ação definida, para $h \in H$, $m \in M$, $n \in N$, por*

$$h \cdot (m \otimes n) = \sum h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n.$$

De fato, sejam h, $g \in H$, $m \in M$, $n \in N$. Tem-se

$$\begin{aligned}
h \cdot (g \cdot (m \otimes n)) &= h \cdot (\sum g_1 \cdot m \otimes g_2 \cdot n) \\
&= \sum h_1 \cdot (g_1 \cdot m) \otimes h_2 \cdot (g_2 \cdot n) \\
&= \sum (h_1 g_1) \cdot m \otimes (h_2 g_2) \cdot n \\
&= \sum (hg)_1 \cdot m \otimes (hg)_2 \cdot n \\
&= (hg) \cdot (m \otimes n)
\end{aligned}$$

e, ainda,

$$1_H \cdot (m \otimes n) = 1_H \cdot m \otimes 1_H \cdot n = m \otimes n.$$

Exemplo 3.1.6. *Sejam M, N H-comódulos. Então $M \otimes N$ é um H-comódulo com coação definida, para $m \in M$, $n \in N$, por*

$$\rho(m \otimes n) = \sum m_{(-1)} n_{(-1)} \otimes (m_{(0)} \otimes n_{(0)}).$$

De fato, tem-se

$$\begin{aligned}
&\sum (m \otimes n)_{(-1)} \otimes (m \otimes n)_{(0)_{(-1)}} \otimes (m \otimes n)_{(0)_{(0)}} \\
&= \sum m_{(-1)} n_{(-1)} \otimes (m_{(0)} \otimes n_{(0)})_{(-1)} \otimes (m_{(0)} \otimes n_{(0)})_{(0)} \\
&= \sum m_{(-1)} n_{(-1)} \otimes m_{(0)_{(-1)}} n_{(0)_{(-1)}} \otimes (m_{(0)_{(0)}} \otimes n_{(0)_{(0)}}) \\
&= \sum m_{(-1)_1} n_{(-1)_1} \otimes m_{(-1)_2} n_{(-1)_2} \otimes (m_{(0)} \otimes n_{(0)}) \\
&= \sum (m_{(-1)} n_{(-1)})_1 \otimes (m_{(-1)} n_{(-1)})_2 \otimes (m_{(0)} \otimes n_{(0)}) \\
&= \sum (m \otimes n)_{(-1)_1} \otimes (m \otimes n)_{(-1)_2} \otimes (m \otimes n)_{(0)}
\end{aligned}$$

e, ainda,

$$\begin{aligned}\sum \varepsilon((m\otimes n)_{(-1)})(m\otimes n)_{(0)} &= \sum \varepsilon(m_{(-1)}n_{(-1)})m_{(0)}\otimes n_{(0)}\\ &= \sum \varepsilon(m_{(-1)})\varepsilon(n_{(-1)})m_{(0)}\otimes n_{(0)}\\ &= \sum \varepsilon(m_{(-1)})m_{(0)}\otimes \varepsilon(n_{(-1)})n_{(0)}\\ &= m\otimes n.\end{aligned}$$

Exemplo 3.1.7. *Seja C uma coálgebra. Então é C um C^*-módulo à esquerda com ação definida, para $c\in C$, $f\in C^*$, por*

$$f\cdot c=\sum f(c_2)c_1.$$

De fato, sejam f, $g\in C^*$, $c\in C$. Tem-se

$$\begin{aligned}f\cdot(g\cdot c) &= f\cdot(\sum g(c_2)c_1)\\ &= \sum g(c_2)f\cdot c_1\\ &= \sum g(c_2)f(c_{1_2})c_{1_1}\\ &= \sum f(c_{2_1})g(c_{2_2})c_1\\ &= \sum f*g(c_2)c_1\\ &(f*g)\cdot c,\end{aligned}$$

e, ainda,

$$\varepsilon\cdot c=\sum\varepsilon(c_2)c_1=c.$$

Exemplo 3.1.8. *(Ação adjunta à esquerda) Seja H uma álgebra de Hopf. Então H é um H-módulo e H-comódulo com ação e coação definidas, para h, $x\in H$, por*

$$h\cdot x=\sum h_1xS(h_2),\qquad\qquad \rho(h)=\sum h_1\otimes h_2.$$

De fato, tem-se, para $h,\ g,\ x \in H$,

$$\begin{aligned} h\cdot(g\cdot x) &= h\cdot\left(\sum g_1 x S(g_2)\right)\\ &= \sum h_1 g_1 x S(g_2) S(h_2)\\ &= \sum h_1 g_1 x S(h_2 g_2)\\ &= \sum (hg)_1 x S((hg)_2)\\ &= (hg)\cdot x \end{aligned}$$

e, ainda,

$$1_H \cdot h = 1_H h S(1_H) = h.$$

A propriedade da coação decorre do Exemplo 3.1.3.

Exemplo 3.1.9. *(Coação adjunta à esquerda) Seja H uma álgebra de Hopf. Então H é um H-módulo e H-comódulo com ação e coação definidas, para $h,\ x \in H$, por*

$$h\cdot x = hx, \qquad\qquad \rho(h) = \sum h_1 S(h_3)\otimes h_2$$

A propriedade da ação decorre do Exemplo 3.1.2. *Para a coação, tem-se*

$$\begin{aligned} \sum h_{(-1)}\otimes h_{(0)_{(-1)}}\otimes h_{(0)_{(0)}} &= \sum h_1 S(h_3)\otimes h_{2_1} S(h_{2_3})\otimes h_{2_2}\\ &= \sum h_1 S(h_5)\otimes h_2 S(h_4)\otimes h_3\\ &= \sum h_{1_1} S(h_{3_2})\otimes h_{1_2} S(h_{3_1})\otimes h_2\\ &= \sum h_{1_1} S(h_3)_1\otimes h_{1_2} S(h_3)_2\otimes h_2\\ &= \sum (h_1 S(h_3))_1\otimes (h_1 S(h_3))_2\otimes h_2\\ &= \sum h_{(-1)_1}\otimes h_{(-1)_2}\otimes h_{(0)} \end{aligned}$$

e, ainda,

$$\sum \varepsilon(h_{(-1)})h_{(0)} = \sum \varepsilon(h_1 S(h_3))h_2$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum \varepsilon(h_1)\varepsilon(S(h_3))h_2 \\
&= \sum \varepsilon(h_1)\varepsilon(h_3)h_2 \\
&= \sum \varepsilon(h_1)h_2 \\
&= h.
\end{aligned}
$$

Exemplo 3.1.10. *Seja G um grupo e V um espaço vetorial. Então V é um KG-comódulo se, e somente se, $V = \bigoplus\limits_{g\in G} V_g$, em que $V_g = \{v \in V \mid \rho(v) = g \otimes v\}$. Neste caso, a coação é definida, para $v_g \in V_g$, por*

$$\rho(v_g) = g \otimes v_g.$$

Se $V = \bigoplus\limits_{g\in G} V_g$, temos, para $v_g \in V_G$,

$$
\begin{aligned}
\sum v_{g_{(-1)}} \otimes v_{g_{(0)_{(-1)}}} \otimes v_{g_{(0)_{(0)}}} &= g \otimes g \otimes v_g \\
&= \Delta(g) \otimes v_g \\
&= \sum v_{g_{(-1)_1}} \otimes v_{g_{(-1)_2}} \otimes v_{g_{(0)}}
\end{aligned}
$$

e, ainda,

$$\sum \varepsilon(v_{g_{(-1)}})v_{g_{(0)}} = \varepsilon(g)v_g = 1_K v_g = v_g.$$

Segue da linearidade de ρ a tese.

Se V é um H-comódulo, podemos sem perda de generalidade escrever, para $v \in V$, $\rho(v) = \sum\limits_g g\otimes v_g$. Como V é um KG-comódulo, temos $v = \sum\limits_g \varepsilon(g)v_g = \sum\limits_g v_g$. Seja $g \in G$. Provemos que $v_g \in V_g$. Escrevamos $\rho(v_g) = \sum\limits_h h \otimes v_{g_{(h)}}$. Como V é um KG-comódulo, temos

$$\sum g \otimes g \otimes v_g = \sum \Delta(g) \otimes v_g = \sum g \otimes \rho(v_g) = \sum g \otimes h \otimes v_{g_{(h)}}$$

Seja $h \in G$ e sejam g^*, $h^* \in (KG)^*$ tal que, para $x \in G$, $g^*(x) = \delta_{g,x}$, $h^*(x) = \delta_{h,x}$, em que δ é o delta de Kronecker. Aplicando $g^* \otimes h^* \otimes I_V$ à identidade acima, tem-se *que* $v_{g_{(h)}} = v_g \delta_{g,h}$*, donde segue que* $\rho(v_g) = g \otimes v_g$*. Resta mostrar que a soma é direta. Tem-se que* $0 \in V_g$*, para todo* $g \in G$*, pois* $0 = \rho(0) = g \otimes 0$*. Ainda, se* $v = v_g = \sum_{h \neq g} v_h$*, tomando* $g^* \in (KG)^*$ *como acima definido, tem-se*

$$v_g = (g^* \otimes I_V)(g \otimes v_g) = (g^* \otimes I_V)(\rho(v)) = (g^* \otimes I_V)(\sum_{h \neq g} h \otimes v_h) = 0,$$

donde segue que $V_g \bigcap \sum_{h \neq g} V_h = 0$.

Seja H uma álgebra de Hopf. Pode-se induzir sobre o dual de um H-módulo uma estrutura de H-módulo e, se H tem antípoda bijetora, sobre o dual de um H-comódulo de dimensão finita sobre H, uma estrutura de H-comódulo.

Proposição 3.1.1. *Seja* H *uma álgebra de Hopf e seja* M *um* H*-módulo. Então* M^* *é um* H*-módulo com ação definida, para* $h \in H$*,* $m \in M$ *e* $f \in M^*$*, por*

$$(h \cdot f)(m) = f(S(h) \cdot m).$$

Demonstração: De fato, tem-se que

$$\begin{aligned}
(h \cdot (g \cdot f))(m) &= (g \cdot f)(S(h) \cdot m) \\
&= f(S(g) \cdot (S(h) \cdot m)) \\
&= f(S(g)S(h) \cdot m) \\
&= f(S(hg) \cdot m) \\
&= ((hg) \cdot f)(m)
\end{aligned}$$

e, ainda,

$$(1 \cdot f)(m) = f(S(1) \cdot m) = f(1 \cdot m) = f(m).$$

□

Seja H uma álgebra de Hopf de antípoda bijetora e seja M um H-comódulo de dimensão finita sobre H. Seja $\{m_i\}_{i\in I}$ uma base de M sobre H. Consideremos em $M^* = \mathrm{Hom}(M, K)$ sua base dual $\{f_i\}$ definida por $f_i(m_j) = \delta_{i,j}$, em que δ é o delta de Kronecker. Definimos a coação, para $f \in M^*$, por

$$\rho(f) = \sum S^{-1}(m_{i_{(-1)}}) \otimes f(m_{i(0)})f_i.$$

É ρ assim definida a única soma em $H \otimes M^*$ satisfazendo a propriedade

$$(\sum f_{(-1)}f_{(0)})(m) = \sum S^{-1}(m_{(-1)})f(m_{(0)}),$$

para todo $m \in M$. Nomea-la-emos de propriedade de $\rho(f)$. De fato, ρ satisfaz tal propriedade, pois, escrevendo $m = \sum_j a_j m_j$, tem-se

$$\begin{aligned}
(\sum f_{(-1)}f_{(0)})(m) &= \sum S^{-1}(m_{i_{(-1)}})f(m_{i_{(0)}})f_i(m) \\
&= \sum S^{-1}(m_{i_{(-1)}})f(m_{i_{(0)}})f_i(\sum_j a_j m_j) \\
&= \sum \sum_j S^{-1}(m_{i_{(-1)}})f(m_{i_{(0)}})a_j f_i(m_j) \\
&= \sum S^{-1}(m_{i_{(-1)}})f(m_{i_{(0)}})a_i \\
&= \sum S^{-1}(a_i m_{i_{(-1)}})f(m_{i_{(0)}}) \\
&= \sum S^{-1}(m_{(-1)})f(m_{(0)}),
\end{aligned}$$

em cuja última identidade segue de $\sum a_i m_{i_{(-1)}} \otimes m_{i_{(0)}} = \sum a_i \rho(m_i) = \rho(\sum a_i m_i) = \rho(m) = \sum m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$. Seja $\sum h_k \otimes g_k \in H \otimes M^*$ tal que $\sum h_k g_k(m) = \sum S^{-1}(m_{(-1)})f(m_{(0)})$, para todo $m \in M$. Tem-se

$$\begin{aligned}
\sum f_{(-1)} \otimes f_{(0)} &= \sum S^{-1}(m_{i_{(-1)}}) \otimes f(m_{i_{(0)}})f_i \\
&= \sum S^{-1}(m_{i_{(-1)}})f(m_{i_{(0)}}) \otimes f_i \\
&= \sum \sum_k h_k g_k(m_i) \otimes f_i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum \sum_k h_k \otimes g_k(m_i) f_i \\
&= \sum_k h_k \otimes \sum g_k(m_i) f_i \\
&= \sum_k h_k \otimes g_k,
\end{aligned}
$$

o que demonstra a unicidade de $\sum f_{(-1)} \otimes f_{(0)}$.

Proposição 3.1.2. *Sejam H uma álgebra de Hopf de antípoda bijetora e M um H-comódulo de dimensão finita sobre H. Então M^* é um H-comódulo com a coação acima definida.*

Demonstração. Sejam $f \in M^*$, $m \in M$. Tem-se

$$
\begin{aligned}
(\Delta \otimes I) \circ \rho(f) &= (\Delta \otimes I)(\sum S^{-1}(m_{i_{(-1)}}) \otimes f(m_{i_{(0)}}) f_i) \\
&= \sum \Delta(S^{-1}(m_{i_{(-1)}})) \otimes f(m_{i_{(0)}}) f_i \\
&= \sum S^{-1}(m_{i_{(-1)_2}}) \otimes S^{-1}(m_{i_{(-1)_1}}) \otimes f(m_{i_{(0)}}) f_i \qquad \text{(por } iii) \text{ de Prop. 2.2.2)} \\
&= \sum S^{-1}(m_{i_{(-1)_2}}) f(m_{i_{(0)}}) \otimes S^{-1}(m_{i_{(-1)_1}}) \otimes f_i \\
&= \sum S^{-1}(m_{i_{(0)_{(-1)}}}) f(m_{i_{(0)_{(0)}}}) \otimes S^{-1}(m_{i_{(-1)}}) \otimes f_i \\
&= \sum f_{(-1)} f_{(0)}(m_{i_{(0)}}) \otimes S^{-1}(m_{i_{(-1)}}) \otimes f_i \\
&= \sum f_{(-1)} \otimes S^{-1}(m_{i_{(-1)}}) \otimes f_{(0)}(m_{i_{(0)}}) f_i \\
&= \sum f_{(-1)} \otimes \rho(f_{(0)}) \\
&= (I \otimes \rho) \circ \rho(f)
\end{aligned}
$$

e, ainda,

$$
\begin{aligned}
\sum \varepsilon(f_{(-1)}) f_{(0)}(m) &= \sum \varepsilon(f_{(-1)} f_{(0)}(m)) \\
&= \sum \varepsilon(S^{-1}(m_{(-1)}) f(m_{(0)})) \\
&= \sum f(m_{(0)}) \varepsilon(S^{-1}(m_{(-1)}))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum f(m_{(0)})\varepsilon(m_{(-1)}) && \text{(de } iv\text{) de Prop. 2.2.2)} \\
&= f(\sum \varepsilon(m_{(-1)})m_{(0)}) \\
&= f(m).
\end{aligned}
$$

□

Podemos naturalmente definir homomorfismos de A-módulos e de C-comódulos e fazemo-lo da seguinte forma:

Definição 3.1.5. *Seja A uma álgebra e M, N dois A-módulos à esquerda com ações μ_M e μ_N. Uma transformação linear $f : M \to N$ é um homomorfismo de A-módulos à esquerda se é comutativo o seguinte diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes M \arrow[r, "I\otimes f"] \arrow[d, "\mu_M"'] & A \otimes N \arrow[d, "\mu_N"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}
$$

Equivalentemente, é f um homomorfismo de A-módulos à esquerda se, para $m \in M$,

$$f(a \cdot m) = a \cdot f(m).$$

Definição 3.1.6. *Seja C uma coálgebra e sejam M,N dois C-comódulos à direita com as coações ρ_M e ρ_N. Uma transformação linear $g : M \to N$ é um homomorfismo de C-comódulos à esquerda se é comutativo o seguinte diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\
C \otimes M \arrow[r, "I\otimes g"'] & C \otimes N
\end{tikzcd}
$$

Equivalentemente, é g um homomorfismo de C-comódulos à esquerda se tem-se, para $m \in M$,

$$\sum g(m)_{(-1)} \otimes g(m)_{(0)} = \sum m_{(-1)} \otimes g(m_{(0)}).$$

Proposição 3.1.3. *i) Sejam $f : M \to N$ e $g : N \to L$ homomorfismos de H-módulos. Então $g \circ f$ é um homomorfismo de H-módulos.*

ii) Sejam $f : M \to L$ e $g : N \to O$ homomorfismos de H-módulos. Então $f \otimes g : M \otimes N \to L \otimes O$ é um homomorfismo de H-módulos.

iii) Se $g : M \to N$, $h : N \to L$ são homomorfismos de H-comódulos, então $h \circ g$ é um homomorfismo de H-comódulos

iv) Sejam $g : M \to L$ e $h : N \to O$ homomorfismos de H-comódulos. Então $f \otimes g : M \otimes N \to L \otimes O$ é um homomorfismo de H-comódulos.

v) Seja $f : M \to N$ um homomorfismo de H-módulos. Então $f^* : N^* \to M^*$ é um homomorfismo de H-módulos.

vi) Seja $f : M \to N$ um homomorfismo de H-comódulos. Se H tem antípoda bijetora, então $f^* : N^* \to M^*$ é um homomorfismo de H-comódulos.

Demonstração: Omitiremos a demonstração de i) e ii). Para iii), seja $m \in M$. Tem-se

$$\begin{aligned}\sum h(g(m))_{(-1)} \otimes h(g(m))_{(0)} &= \sum g(m)_{(-1)} \otimes h(g(m_{(0)}))\\ &= \sum m_{(-1)} \otimes h(g(m_{(0)})).\end{aligned}$$

Para iv), sejam $m \in M$, $n \in N$. Tem-se

$$\begin{aligned}\sum((g \otimes h)(m \otimes n))_{(-1)} \otimes ((g \otimes h)(m \otimes n))_{(0)} &= \sum(g(m) \otimes h(n))_{(-1)} \otimes (g(m) \otimes h(n))_{(0)}\\ &= \sum g(m)_{(-1)}h(n)_{(-1)} \otimes (g(m)_{(0)} \otimes h(n)_{(0)})\\ &= \sum m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes (g(m_{(0)}) \otimes h(n_{(0)}))\\ &= \sum(m \otimes n)_{(-1)} \otimes (g \otimes h)((m \otimes n)_{(0)}).\end{aligned}$$

Para v), sejam $h \in H$, $n^* \in N^*$, $m \in M$. Tem-se

$$(f^*(h \cdot n^*))(m) = (h \cdot n^*)(f(m))$$

$$= n^*(S(h) \cdot f(m))$$
$$= n^*(f(S(h) \cdot m)) \qquad \text{(f é homomorfismo de módulos)}$$
$$= (n^* \circ f)(S(h) \cdot m)$$
$$= (f^*(n^*))(S(h) \cdot m)$$
$$= (h \cdot f^*(n^*))(m).$$

Para $vi)$, sejam $h \in H$, $n^* \in N^*$. Tem-se

$$\begin{aligned}((I \otimes f^*) \circ \rho)(n^*) &= (I \otimes f^*)(\sum n^*_{(-1)} \otimes n^*_{(0)}) \\ &= \sum n^*_{(-1)} \otimes f^*(n^*_{(0)}).\end{aligned}$$

Mostremos que satisfaz $\sum n^*_{(-1)} \otimes f^*(n^*_{(0)})$ a propriedade de $\rho(f^*(n^*))$, donde seguirá que é f um homomorfismo de H-comódulos. Seja $m \in M$. Tem-se

$$\begin{aligned}(\sum n^*_{(-1)} f^*(n^*_{(0)}))(m) &= \sum n^*_{(-1)} n^*_{(0)}(f(m)) \\ &= \sum S^{-1}(f(m)_{(-1)}) n^*(f(m)_{(0)}) \quad \text{(propriedade de } \rho(n^*)) \\ &= \sum S^{-1}(m_{(-1)}) n^*(f(m_{(0)})) \\ &= \sum S^{-1}(m_{(-1)})(f^*(n^*))(m_{(0)}).\end{aligned}$$

□

Pode-se induzir em um H-módulo à esquerda uma estrutura de H-módulo à direita e em um H-comódulo à esquerda uma estrutura de H-comódulo à direita da seguinte forma:

Proposição 3.1.4. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então*

i) Seja M um H-módulo à esquerda Então podemos definir em M uma estrutura de H-módulo à direita definida, para $h \in H$, $m \in M$, por $m \cdot h = S(h) \cdot m$.

ii) Seja M um H-comódulo à esquerda. Então podemos definir uma estrutura de H-comódulo à direita definida, para $m \in M$, por $\rho'(m) = \sum m_{(0)} \otimes S(m_{(-1)})$.

Demonstração: $i)$ Sejam g, $h \in H$, $m \in M$. Tem-se

$$\begin{aligned}(m \cdot h) \cdot g &= S(g) \cdot (m \cdot h)\\ &= S(g) \cdot (S(h)m)\\ &= (S(g)S(h)) \cdot m\\ &= (S(hg)) \cdot m\\ &= m \cdot (hg)\end{aligned}$$

e, ainda,

$$m \cdot 1 = S(1) \cdot m = 1 \cdot m = m.$$

$ii)$ Seja $m \in M$. Tem-se

$$\begin{aligned}(\rho' \otimes I) \circ \rho'(m) &= (\rho' \otimes I)(\sum m_{(0)} \otimes S(m_{(-1)}))\\ &= \sum \rho'(m_{(0)}) \otimes S(m_{(-1)})\\ &= \sum m_{(0)_{(0)}} \otimes S(m_{(0)_{(-1)}}) \otimes S(m_{(-1)})\\ &= \sum m_{(0)} \otimes S(m_{(-1)_2}) \otimes S(m_{(-1)_1})\\ &= \sum m_{(0)} \otimes S(m_{(-1)})_1 \otimes S(m_{(-1)})_2\\ &= (I \otimes \Delta)(\sum m_{(0)} \otimes S(m_{(-1)}))\\ &= (I \otimes \Delta) \circ \rho'(m)\end{aligned}$$

e, ainda,

$$\begin{aligned}(I \otimes \varepsilon) \circ \rho'(m) &= (I \otimes \varepsilon)(\sum m_{(0)} \otimes S(m_{(-1)}))\\ &= \sum \varepsilon(S(m_{(-1)}))m_{(0)}\end{aligned}$$

$$= \sum \varepsilon(m_{(-1)})m_{(0)}$$
$$= m.$$

□

Definição 3.1.7. *Seja M um C-comódulo à esquerda. Um subespaço vetorial $N \subseteq M$ é um subcomódulo se $\rho(N) \subseteq C \otimes N$.*

Observe que N é um C-comódulo com a restrição $\rho_N = \rho_M\big|_N$.

Os comódulos comportam-se de forma semelhante a módulos em relação a homomorfismos. O leitor poderá facilmente demonstrar as seguintes proposições, utilizando o análogo resultado para espaços vetoriais.

Proposição 3.1.5. *Sejam M um C-comódulo à esquerda e $N \subseteq M$ um subcomódulo. O espaço vetorial quociente M/N possui uma única estrutura de C-comódulo à esquerda $\overline{\rho} : M/N \to C \otimes M/N$ tal que a projeção canônica $p : M \to M/N$ é um homomorfismo de C-comódulos, definida, para $m \in M$, por $\overline{\rho}(\overline{m}) = \sum m_{(-1)} \otimes \overline{m_{(0)}}$.*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\rho"'] & M/N \arrow[d, dotted, "\overline{\rho}"] \\
C \otimes M \arrow[r, "I\otimes p"'] & C \otimes M/N
\end{tikzcd}$$

. □

Proposição 3.1.6 (Teorema dos homomorfismos para comódulos)**.** *Sejam $f : M \to N$ um homomorfismo de C-comódulos à esquerda e $p : M \to M/Ker(f)$ a projeção canônica. Então existe um único homomorfismo $\overline{f} : M/Ker(f) \to N$ tal que $f = \overline{f} \circ p$. Além disso, $\overline{f}$ é um isomorfismo entre $M/Ker(f)$ e $Im(f)$.*

. $\square$

3.2 Módulos de Yetter-Drinfeld

Apresentaremos uma importante relação de compatibilidade entre a estrutura de H-módulo e de H-comódulo de um mesmo espaço vetorial.

Definição 3.2.1. *Seja H uma álgebra de Hopf. Um módulo de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H é um espaço vetorial M que é um H-módulo à esquerda e um H-comódulo à esquerda possuindo a seguinte propriedade de compatibilidade, para $h \in H$ e $m \in M$:*

$$\rho(h \cdot m) = \sum (h \cdot m)_{(-1)} \otimes (h \cdot m)_{(0)} = \sum h_1 m_{(-1)} S(h_3) \otimes h_2 \cdot m_{(0)}.$$

Os módulos de Yetter-Drinfeld possuem grande importância para álgebras de Nichols e grupos quânticos.

Exemplo 3.2.1. *Seja V um espaço vetorial. Então V é um H-módulo de Yetter-Drinfeld com ação e coação definidas, conforme o Exemplo* 3.1.4*, para $h \in H$, $v \in V$,*

$$h \cdot v = \varepsilon(h) v, \qquad \rho(v) = 1_H \otimes v.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\sum h_1 v_{(-1)} S(h_3) \otimes h_2 \cdot v &= \sum h_1 1_H S(h_3) \otimes \varepsilon(h_2) v \\
&= \sum h_1 S(h_3 \varepsilon(h_2)) \otimes v \\
&= \sum h_1 S(h_2) \otimes v \\
&= 1_H \varepsilon(h) \otimes v \\
&= 1_H \otimes \varepsilon(h) v \\
&= 1_H \otimes h \cdot v \\
&= \rho(h \cdot v).
\end{aligned}$$

Exemplo 3.2.2. *Sejam M, N dois H-módulos de Yetter-Drinfeld. Então $M \otimes N$ é um módulo de Yetter-Drinfeld com ação e coação definidas, conforme os Exemplos* 3.1.5 *e* 3.1.6*, para $h \in H$, $m \in M$ e $n \in N$, por*

$$h \cdot (m \otimes n) = \sum h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n, \quad \rho(m \otimes n) = \sum m_{(-1)} n_{(-1)} \otimes (m_{(0)} \otimes n_{(0)}).$$

De fato, sejam $m \in M$, $n \in N$, $h \in H$. Tem-se

$$\begin{aligned}
\rho(h \cdot (m \otimes n)) &= \sum \rho(h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n) \\
&= \sum (h_1 \cdot m)_{(-1)} (h_2 \cdot n)_{(-1)} \otimes (h_1 \cdot m)_{(0)} \otimes (h_2 \cdot n)_{(0)} \\
&= \sum h_{1_1} m_{(-1)} S(h_{1_3}) h_{2_1} n_{(-1)} S(h_{2_3}) \otimes h_{1_2} \cdot m_{(0)} \otimes h_{2_2} \cdot n_{(0)} \\
&= \sum h_1 m_{(-1)} S(h_3) h_4 n_{(-1)} S(h_6) \otimes h_2 \cdot m_{(0)} \otimes h_5 \cdot n_{(0)} \\
&= \sum h_1 m_{(-1)} \varepsilon(h_3) n_{(-1)} S(h_5) \otimes h_2 \cdot m_{(0)} \otimes h_4 \cdot n_{(0)} \\
&= \sum h_1 m_{(-1)} n_{(-1)} S(h_5) \otimes (h_2 \varepsilon(h_3)) \cdot m_{(0)} \otimes h_4 \cdot n_{(0)} \\
&= \sum h_1 m_{(-1)} n_{(-1)} S(h_4) \otimes h_2 \cdot m_{(0)} \otimes h_3 \cdot n_{(0)} \\
&= \sum h_1 m_{(-1)} n_{(-1)} S(h_3) \otimes h_{2_1} \cdot m_{(0)} \otimes h_{2_2} \cdot n_{(0)} \\
&= \sum h_1 (m_{(-1)} n_{(-1)}) S(h_3) \otimes h_2 \cdot (m_{(0)} \otimes n_{(0)}) \\
&= \sum h_1 (m \otimes n)_{(-1)} S(h_3) \otimes h_2 \cdot (m \otimes n)_{(0)}.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.2.3. *(Ação adjunta à esquerda de H) Seja H uma álgebra de Hopf. H é um H-módulo de Yetter-Drinfeld com ação e coação definidas, conforme o Exemplo* 3.1.8*, para h, $x \in H$ por*

$$h \cdot x = \sum h_1 x S(h_2), \qquad \rho(x) = \sum x_1 \otimes x_2.$$

De fato,

$$\rho(h \cdot x) = \rho(\sum h_1 x S(h_2))$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum (h_1 x S(h_2))_1 \otimes (h_1 x S(h_2))_2 \\
&= \sum h_{1_1} x_1 S(h_2)_1 \otimes h_{1_2} x_2 S(h_2)_2 \\
&= \sum h_{1_1} x_1 S(h_{2_2}) \otimes h_{1_2} x_2 S(h_{2_1}) \\
&= \sum h_1 x_1 S(h_4) \otimes h_2 x_2 S(h_3) \\
&= \sum h_1 x_1 S(h_3) \otimes h_2 \cdot x_2 \\
&= \sum h_1 x_{(-1)} S(h_3) \otimes h_2 \cdot x_{(0)}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 3.2.4. *(Coação adjunta à esquerda de H) Seja H uma álgebra de Hopf. Então H é um H-módulo de Yetter-Drinfeld com ação e coação definidas, conforme o Exemplo* 3.1.9*, para h, $x \in H$ por*

$$
h \cdot x = hx, \qquad\qquad \rho(x) = \sum x_1 S(x_3) \otimes x_2.
$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
\rho(h \cdot x) &= \rho(hx) \\
&= \sum (hx)_1 S((hx)_3) \otimes (hx)_2 \\
&= \sum h_1 x_1 S(h_3 x_3) \otimes h_2 x_2 \\
&= \sum h_1 x_1 S(x_3) S(h_3) \otimes h_2 x_2 \\
&= \sum h_1 (x_1 S(x_3)) S(h_3) \otimes h_2 \cdot x_2 \\
&= \sum h_1 x_{(-1)} S(h_3) \otimes h_2 \cdot x_{(0)}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 3.2.5. *Seja G um grupo. Sabemos do Exemplo* 3.1.10 *que um espaço vetorial V é um KG-comódulo se, e somente se, $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$, em que $V_g = \{v \in V \mid \rho(v) = g \otimes v\}$. Tem-se que V, com ação definida, para $h \in H$, $v \in V$, por*

$h \cdot v = \varepsilon(h)v$ e coação definida, para $v_g \in V_g$, por $\rho(v_g) = g \otimes v_g$ é um módulo de Yetter-Drinfeld sobre KG se, e somente se, $g \cdot v_h \in V_{ghg^{-1}}$, para todos g, $h \in G$.

De fato, se V é um H-módulo de Yetter-Drinfeld, tem-se

$$\begin{aligned}\rho(g \cdot v_h) &= \sum g_1 v_{h_{(-1)}} S(g_3) \otimes g_2 \cdot v_{h_{(0)}} \\ &= ghg^{-1} \otimes g \cdot v_h \\ &= ghg^{-1} \otimes \varepsilon(g) v_h \\ &= ghg^{-1} \otimes v_h,\end{aligned}$$

logo $g \cdot v_h \in V_{ghg^{-1}}$. Reciprocamente, se $g \cdot v_h \in V_{ghg^{-1}}$, tem-se

$$\begin{aligned}\rho(g \cdot v_h) &= ghg^{-1} \otimes g \cdot v_h \\ &= \sum g_1 v_{h_{(-1)}} S(g_3) \otimes g_2 \cdot v_{h_{(0)}},\end{aligned}$$

donde segue que V é um H-módulo de Yetter-Drinfeld.

Exemplo 3.2.6. *Seja V o espaço vetorial gerado pela base $\{x_{(ij)}\}_{1 \leq i,j \leq n}$, em que (ij) é a transposição que leva i em j e j em i. V é um módulo de Yetter-Drinfeld sobre $K\mathbb{S}_n$ com ação e coação definidas para $g \in \mathbb{S}_n$ por*

$$g \cdot x_{(ij)} = sgn(g) x_{(g(i)g(j))}, \qquad \rho(x_{(ij)}) = (ij) \otimes x_{(ij)},$$

em que $sgn(g)$ é o sinal da permutação g. De fato,

$$\begin{aligned}\rho(g \cdot x_{(ij)}) &= \rho(sgn(g) x_{(g(i)g(j))}) \\ &= sgn(g)(g(i)g(j)) \otimes x_{(g(i)g(j))} \\ &= sgn(g) g(ij) g^{-1} \otimes x_{(g(i)g(j))} \\ &= g(ij)g^{-1} \otimes sgn(g) x_{(g(i)g(j))} \\ &= g(ij)g^{-1} \otimes g \cdot x_{(ij)} \\ &= g_1 x_{(ij)_{(-1)}} S(g_3) \otimes g_2 \cdot x_{(ij)_{(0)}}.\end{aligned}$$

Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora e seja M um H-módulo de Yetter-Drinfeld de dimensão finita. Então tem M^* uma estrutura de H-módulo e de H-comódulo definida, conforme as Proposições 3.1.1 e 3.1.2, para $h \in H$, $f \in M^*$, $m \in M$, por

$$(h \cdot f)(m) = f(S(h) \cdot m), \qquad \rho(f) = \sum S^{-1}(m_{i_{(-1)}}) \otimes f(m_{i_{(0)}})f_i,$$

em que $\{m_i\}_{i \in I}$ é uma base de M e $\{f_i\}_{i \in I}$ é sua base dual.

Proposição 3.2.1. *Sejam H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora e M um H-módulo de Yetter-Drinfeld de dimensão finita. Então M^* é um H-módulo de Yetter-Drinfeld com a ação e a coação acima definidas.*

Demonstração: Sejam $h \in H$, $f \in M^*$ e $m \in M$. Mostremos que satisfaz $\sum h_1 f_{(-1)} S(h_3) \otimes (h_2 \cdot f_{(0)})$ a propriedade de $\rho(h \cdot f)$. De fato,

$$\begin{aligned}
&\sum h_1 f_{(-1)} S(h_3)(h_2 \cdot f_{(0)})(m) \\
&= \sum h_1 f_{(-1)} S(h_3) f_{(0)}(S(h_2) \cdot m) \\
&= \sum h_1 f_{(-1)} f_{(0)}(S(h_2) \cdot m) S(h_3) \\
&= \sum h_1 S^{-1}((S(h_2) \cdot m)_{(-1)}) f((S(h_2) \cdot m)_{(0)}) S(h_3) && \text{(prop. de } \rho(f)) \\
&= \sum h_1 S^{-1}(S(h_2)_1 m_{(-1)} S(S(h_2)_3)) f(S(h_2)_2 \cdot m_{(0)}) S(h_3) && \text{(M é YD)} \\
&= \sum h_1 S^{-1}(S(h_{2_3}) m_{(-1)} S(S(h_{2_1}))) f(S(h_{2_2}) \cdot m_{(0)}) S(h_3) \\
&= \sum h_1 S^{-1}(S(h_4) m_{(-1)} S(S(h_2))) f(S(h_3) \cdot m_{(0)}) S(h_5) \\
&= \sum h_1 S(h_2) S^{-1}(m_{(-1)}) h_4 S(h_5) f(S(h_3) \cdot m_{(0)}) \\
&= \sum 1_H \varepsilon(h_1) S^{-1}(m_{(-1)}) 1_H \varepsilon(h_3) f(S(h_2) \cdot m_{(0)}) \\
&= \sum S^{-1}(m_{(-1)}) f(S(\varepsilon(h_1) h_2 \varepsilon(h_3)) \cdot m_{(0)}) \\
&= \sum S^{-1}(m_{(-1)}) f(S(h) \cdot m_{(0)}) \\
&= \sum S^{-1}(m_{(-1)})(h \cdot f)(m_{(0)}).
\end{aligned}$$

□

Encerramos esta sessão apresentando a noção de homomorfismos de módulos de Yetter-Drinfeld e algumas de suas propriedades, que decorrem imediatamente das análogas propriedades de homomorfismos de módulos e de comódulos.

Definição 3.2.2. *Um homomorfismo de H-módulos de Yetter-Drinfeld é um homomorfismo de H-módulos e de H-comódulos.*

Proposição 3.2.2. *i) Sejam $f : M \to N$ e $g : N \to O$ homomorfismos de H-módulos de Yetter-Drinfeld. Então é $g \circ f : M \to O$ um homomorfismo de H-módulos de Yetter-Drinfeld.*

ii) Sejam $f : M \to L$ e $g : N \to O$ homomorfismos de H-módulos de Yetter-Drinfeld. Então é $f \otimes g : M \otimes N \to L \otimes O$ um homomorfismo de H-módulos de Yetter-Drinfeld.

iii) Seja $f : M \to N$ um homomorfismo de H-módulos de Yetter-Drinfeld. Se H tem antípoda bijetora, então é $f^* : N^* \to M^*$ um homomorfismo de H-módulos de Yetter-Drinfeld.

□

Capítulo 4

Álgebras de Hopf trançadas

4.1 Espaços vetoriais trançados

Apresentaremos neste capítulo o conceito de tranças e espaços vetoriais e álgebras de Hopf trançadas. Tais conceitos são de grande importância no estudo de álgebras de Nichols, teoria das representações e grupos quânticos.

Definição 4.1.1. *Seja V um espaço vetorial. Uma trança de V é um isomorfismo linear $c : V \otimes V \to V \otimes V$ satisfazendo a equação de tranças*

$$(c \otimes I) \circ (I \otimes c) \circ (c \otimes I) = (I \otimes c) \circ (c \otimes I) \circ (I \otimes c).$$

Um espaço vetorial possuindo uma trança é chamado de espaço vetorial trançado.

Exemplo 4.1.1 (Trança diagonal)**.** *Seja V um espaço vetorial. Então é V um espaço vetorial trançado com c definida, para u, $v \in V$, por*

$$c(u \otimes v) = q_{u,v} v \otimes u,$$

em que $q_{u,v} \in K$ *é não-nulo. Claramente* c *é uma transformação linear. Sejam* u*,* v*,* $w \in V$*. Tem-se*

$$\begin{aligned}((c \otimes I) \circ (I \otimes c) \circ (c \otimes I))(u \otimes v \otimes w) &= ((c \otimes I) \circ (I \otimes c))(q_{u,v} v \otimes u \otimes w) \\ &= (c \otimes I)(q_{u,w} q_{u,v} v \otimes w \otimes u) \\ &= q_{v,w} q_{u,w} q_{u,v} w \otimes v \otimes u \\ &= q_{u,v} q_{u,w} q_{v,w} w \otimes v \otimes u \\ &= (I \otimes c)(q_{u,w} q_{v,w} w \otimes u \otimes v) \\ &= ((I \otimes c) \circ (c \otimes I))(q_{v,w} u \otimes w \otimes v) \\ &= ((I \otimes c) \circ (c \otimes I) \circ (I \otimes c))(u \otimes v \otimes w).\end{aligned}$$

Uma vasta e importante classe de exemplos de tranças são da forma acima.

Exemplo 4.1.2. *Seja* H *uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora e seja* M *um* H*-módulo de Yetter-Drinfeld. Então* M *é um espaço vetorial trançado com* c *definida, para* m*,* $n \in M$*, por*

$$c(m \otimes n) = m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)}.$$

Claramente c *é uma transformação linear. Ainda, é um isomorfismo, cuja inversa é definida por* $c^{-1}(n \otimes m) = m_{(0)} \otimes S^{-1}(m_{(-1)}) \cdot n$*. De fato, tem-se*

$$\begin{aligned}c^{-1} \circ c(m \otimes n) &= c^{-1}(\sum m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)}) \\ &= \sum m_{(0)_{(0)}} \otimes S^{-1}(m_{(0)_{(-1)}}) \cdot (m_{(-1)} \cdot n) \\ &= \sum m_{(0)} \otimes (S^{-1}(m_{(-1)_2}) m_{(-1)_1}) \cdot n \\ &= \sum m_{(0)} \otimes (S^{-1}(m_{(-1)_2}) S^{-1}(S(m_{(-1)_1}))) \cdot n \\ &= \sum m_{(0)} \otimes (S^{-1}(S(m_{(-1)_1}) m_{(-1)_2})) \cdot n \\ &= \sum m_{(0)} \otimes (S^{-1}(\varepsilon(m_{(-1)}) 1_H)) \cdot n \\ &= \sum \varepsilon(m_{(-1)}) m_{(0)} \otimes S^{-1}(1_H) \cdot n\end{aligned}$$

$$= m \otimes 1_H \cdot n$$

$$= m \otimes n$$

e, ainda,

$$\begin{aligned}
(c \circ c^{-1})(n \otimes m) &= c(\sum m_{(0)} \otimes S^{-1}(m_{(-1)}) \cdot n) \\
&= \sum (m_{(0)_{(-1)}} \cdot (S^{-1}(m_{(-1)}) \cdot n) \otimes m_{(0)_{(0)}} \\
&= \sum (m_{(-1)_2} S^{-1}(m_{(-1)_1})) \cdot n \otimes m_{(0)} \\
&= \sum \varepsilon(m_{(-1)}) 1_H \cdot n \otimes m_{(0)} \\
&= n \otimes (\sum \varepsilon(m_{(-1)}) m_{(0)}) \\
&= n \otimes m.
\end{aligned}$$

Provemos que c satisfaz a equação da trança. De fato, sejam m, n, l $\in M$*. Tem-se*

$$\begin{aligned}
&((c \otimes I) \circ (I \otimes c) \circ (c \otimes I))(m \otimes n \otimes l) \\
&= ((c \otimes I) \circ (I \otimes c))(\sum m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)} \otimes l) \\
&= (c \otimes I)(\sum m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)_{(-1)}} \cdot l \otimes m_{(0)_{(0)}}) \\
&= \sum ((m_{(-1)} \cdot n)_{(-1)} \cdot (m_{(0)_{(-1)}} \cdot l)) \otimes (m_{(-1)} \cdot n)_{(0)} \otimes m_{(0)_{(0)}} \\
&= \sum (m_{(-1)_1} n_{(-1)} S(m_{(-1)_3}) \cdot (m_{(0)_{(-1)}} \cdot l) \otimes m_{(-1)_2} \cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)_{(0)}} \\
&= \sum (m_{(-1)_1} n_{(-1)} S(m_{(-1)_3}) m_{(0)_{(-1)}}) \cdot l \otimes m_{(-1)_2} \cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)_{(0)}} \\
&= \sum (m_{(-1)_1} n_{(-1)} S(m_{(-1)_3}) m_{(-1)_4}) \cdot l \otimes m_{(-1)_2} \cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)} \\
&= \sum (m_{(-1)_1} n_{(-1)} S(m_{(-1)_{3_1}}) m_{(-1)_{3_2}}) \cdot l \otimes m_{(-1)_2} \cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)} \\
&= \sum (m_{(-1)_1} n_{(-1)} \varepsilon(m_{(-1)_3}) 1_H) \cdot l \otimes m_{(-1)_2} \cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)} \\
&= \sum (m_{(-1)_1} n_{(-1)}) \cdot l \otimes (\varepsilon(m_{(-1)_3}) m_{(-1)_2}) \cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)} \\
&= \sum (m_{(-1)_1} n_{(-1)}) \cdot l \otimes m_{(-1)_2} \cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)} \\
&= \sum (m_{(-1)} n_{(-1)}) \cdot l \otimes m_{(0)_{(-1)}} \cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)_{(0)}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=(I \otimes c)(\sum (m_{(-1)}n_{(-1)}) \cdot l \otimes m_{(0)} \otimes n_{(0)}) \\
&=(I \otimes c)(\sum m_{(-1)} \cdot (n_{(-1)} \cdot l) \otimes m_{(0)} \otimes n_{(0)}) \\
&=((I \otimes c) \circ (c \otimes I))(m \otimes n_{(-1)} \cdot l \otimes n_{(0)}) \\
&=((I \otimes c) \circ (c \otimes I) \circ (I \otimes c)(m \otimes n \otimes l).
\end{aligned}
$$

O exemplo acima pode ser generalizado no seguinte sentido: sejam M e N H-módulos de Yetter-Drinfeld. Definimos $c_{M,N} : M \otimes N \to N \otimes M$, para $m \in M$, $n \in N$, por

$$c_{M,N}(m \otimes n) = m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)}.$$

A classe de aplicações c satisfaz a seguinte equação generalizada da trança: para quaisquer H-módulos de Yetter-Drinfeld M, N e L, tem-se

$$(c_{N,L} \otimes I_M) \circ (I_N \otimes c_{M,L}) \circ (c_{M,N} \otimes I_L) = (I_L \otimes c_{M,N}) \circ (c_{M,L} \otimes I_N) \circ (I_M \otimes c_{N,L}).$$

A trança $c_{M,N}$ possui inversa $c_{M,N}^{-1} : N \otimes M \to M \otimes N$ definida por $c_{M,N}^{-1}(n \otimes m) = m_{(0)} \otimes S^{-1}(m_{(-1)}) \cdot n$. Além disso, para cada M, N, $c_{M,N}$ é um isomorfismo de H-módulos de Yetter-Drinfeld. De fato, sejam $h \in H$, $m \in M$, $n \in N$. Tem-se

$$
\begin{aligned}
c(h \cdot (m \otimes n)) &= c(\sum h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n) \\
&= \sum (h_1 \cdot m)_{(-1)} \cdot (h_2 \cdot n) \otimes (h_1 \cdot m)_{(0)} \\
&= \sum (h_{1_1} m_{(-1)} S(h_{1_3})) \cdot (h_2 \cdot n) \otimes h_{1_2} \cdot m_{(0)} \\
&= \sum (h_{1_1} m_{(-1)} S(h_{1_3}) h_2) \cdot n \otimes h_{1_2} \cdot m_{(0)} \\
&= \sum (h_1 m_{(-1)} S(h_3) h_4) \cdot n \otimes h_2 \cdot m_{(0)} \\
&= \sum (h_1 m_{(-1)} \varepsilon(h_3) 1_H) \cdot n \otimes h_2 \cdot m_{(0)} \\
&= \sum (h_1 m_{(-1)}) \cdot n \otimes (\varepsilon(h_3) h_2) \cdot m_{(0)} \\
&= \sum h_1 \cdot (m_{(-1)} \cdot n) \otimes h_2 \cdot m_{(0)} \\
&= h \cdot (\sum m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)})
\end{aligned}
$$

$$= h \cdot c(m \otimes n)$$

e, ainda,

$$\begin{aligned}
\sum c(m\otimes n)_{(-1)} \otimes c(m\otimes n)_{(0)} &= \sum (m_{(-1)}\cdot n)_{(-1)} m_{(0)_{(-1)}} \otimes (m_{(-1)}\cdot n)_{(0)} \otimes m_{(0)_{(0)}} \\
&= \sum m_{(-1)_1} n_{(-1)} S(m_{(-1)_3}) m_{(0)_{(-1)}} \otimes m_{(-1)_2}\cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)_{(0)}} \\
&= \sum m_{(-4)} n_{(-1)} S(m_{(-2)}) m_{(-1)} \otimes m_{(-3)}\cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)} \\
&= \sum m_{(-3)} n_{(-1)} S(m_{(-1)_1}) m_{(-1)_2} \otimes m_{(-2)}\cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)} \\
&= \sum m_{(-3)} n_{(-1)} \varepsilon(m_{(-1)}) \otimes m_{(-2)}\cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)} \\
&= \sum m_{(-3)} n_{(-1)} \otimes (m_{(-2)}\varepsilon(m_{(-1)}))\cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)} \\
&= \sum m_{(-2)} n_{(-1)} \otimes m_{(-1)}\cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)} \\
&= \sum m_{(-1)} n_{(-1)} \otimes m_{(0)_{(-1)}}\cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)_{(0)}} \\
&= \sum (m\otimes n)_{(-1)} \otimes c((m\otimes n)_{(0)}).
\end{aligned}$$

Em linguagem de categorias, tal fato significa que a categoria dos H-módulos de Yetter-Drinfeld é uma categoria trançada, o que justifica o nome das noções apresentadas nesta seção.

4.2 As álgebras trançadas

Introduziremos neste capítulo o conceito de álgebras de Hopf trançadas. Não obstante estas são usualmente definidas como uma álgebra de Hopf em uma categoria trançada, restringiremos esta noção à categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld sobre uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora.

Definição 4.2.1. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora. Uma álgebra trançada sobre H é uma álgebra R que é um H-módulo de Yetter-Drinfeld e as transformações lineares que definem sua estrutura, m e u, são homorfismos de módulos de Yetter-Drinfeld.*

Seja R uma álgebra trançada. Sua multiplicação m é um homorfismo de H-módulos e de H-comódulos, donde segue, para $h \in H$, r, $s \in R$, que

$$h \cdot (m(r \otimes s)) = m(h \cdot (r \otimes s)),$$
$$\sum m(r \otimes s)_{(-1)} \otimes m(r \otimes s)_{(0)} = \sum (r \otimes s)_{(-1)} \otimes m((r \otimes s)_{(0)}),$$
$$u(h \cdot 1_K) = h \cdot u(1_K),$$
$$\sum u(1_K)_{(-1)} \otimes u(1_K)_{(0)} = \sum 1_{K_{(-1)}} \otimes u(1_{K_{(0)}}).$$

Satisfaz, portanto, R as propriedades

$$h \cdot (rs) = \sum (h_1 \cdot r)(h_2 \cdot s),$$
$$\sum (rs)_{(-1)} \otimes (rs)_{(0)} = \sum r_{(-1)} s_{(-1)} \otimes r_{(0)} s_{(0)},$$
$$h \cdot 1_R = \varepsilon(h) 1_R,$$
$$\rho(1_R) = 1_H \otimes 1_R.$$

Definição 4.2.2. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora. Uma coálgebra trançada sobre H é uma coálgebra R que é um H-módulo de Yetter-Drinfeld e as transformações lineares que definem sua estrutura, Δ e ε, são homorfismos de módulos de Yetter-Drinfeld.*

Seja R uma coálgebra trançada. Sua comultiplicação Δ e sua counidade ε são homomorfismos de H-módulos e de H-comódulos, donde segue, para $h \in H$, $r \in R$, que

$$\Delta(h \cdot r) = h \cdot \Delta(r),$$
$$\sum \Delta(r)_{(-1)} \otimes \Delta(r)_{(0)} = \sum r_{(-1)} \otimes \Delta(r_{(0)}),$$
$$\varepsilon(h \cdot r) = h \cdot \varepsilon(r),$$
$$\sum \varepsilon(r)_{(-1)} \otimes \varepsilon(r)_{(0)} = \sum r_{(-1)} \otimes \varepsilon(r_{(0)}).$$

Satisfaz, portanto, R as propriedades

$$\sum (h \cdot r)_1 \otimes (h \cdot r)_2 = \sum h_1 \cdot r_1 \otimes h_2 \cdot r_2,$$

$$\sum r_{1_{(-1)}} r_{2_{(-1)}} \otimes r_{1_{(0)}} \otimes r_{2_{(0)}} = \sum r_{(-1)} \otimes r_{(0)_1} \otimes r_{(0)_2},$$
$$\varepsilon(h \cdot r) = \varepsilon(h)\varepsilon(r),$$
$$\sum r_{(-1)} \otimes \varepsilon(r_{(0)}) = \varepsilon(r)1_H \otimes 1_R.$$

Sejam R e S álgebras trançadas. Então tem $R \otimes S$ através da trança $c_{S,R}$, definida, para $r \in R$, $s \in S$, por, $c_{S,R}(s \otimes r) = s_{(-1)} \cdot r \otimes s_{(0)}$, uma estrutura de álgebra trançada definida por

$$m_{R \otimes S} = (m_R \otimes m_S) \circ (I \otimes c_{S,R} \otimes I), \qquad u_{R \otimes S} = (u_R \otimes u_S) \circ \phi,$$

em que $\phi : K \to K \otimes K$ definida, para $k \in K$, por $\phi(k) = k \otimes 1$, é o isomorfismo canônico. Chamaremos essa multiplicação de multiplicação trançada e escreveremos $R \underline{\otimes} S$ para $R \otimes S$ com a estrutura de álgebra descrita acima.

Sejam r, $r' \in R$, s, $s' \in S$. Tem-se

$$\begin{aligned}
(r \otimes s)(r' \otimes s') &= ((m_R \otimes m_S) \circ (I \otimes c_{S,R} \otimes I))(r \otimes s \otimes r' \otimes s') \\
&= (m_R \otimes m_S)(\sum r \otimes s_{(-1)} \cdot r' \otimes s_{(0)} \otimes s') \\
&= \sum r(s_{(-1)} \cdot r') \otimes s_{(0)} s'.
\end{aligned}$$

De fato, tal multiplicação é associativa. Sejam r, r', $r'' \in R$, s, s', $s'' \in S$. Tem-se

$$\begin{aligned}
((r \otimes s)(r' \otimes s'))(r'' \otimes s'') &= (r(s_{(-1)} \cdot r') \otimes s_{(0)} s')(r'' \otimes s'') \\
&= r(s_{(-1)} \cdot r')((s_{(0)} s')_{(-1)} \cdot r'') \otimes (s_{(0)} s')_{(0)} s'' \\
&= r(s_{(-1)} \cdot r')((s_{(0)_{(-1)}} s'_{(-1)}) \cdot r'') \otimes s_{(0)_{(0)}} s'_{(0)} s'' \\
&= r(s_{(-1)_2} \cdot r')((s_{(-1)_1} s'_{(-1)}) \cdot r'') \otimes s_{(0)} s'_{(0)} s'' \\
&= r(s_{(-1)_2} \cdot r')(s_{(-1)_1} \cdot (s'_{(-1)} \cdot r'')) \otimes s_{(0)} s'_{(0)} s'' \\
&= r(s_{(-1)} \cdot (r'(s'_{(-1)} \cdot r''))) \otimes s_{(0)}(s'_{(0)} s'') \\
&= (r \otimes s)(r'(s'_{(-1)} \cdot r'') \otimes s'_{(0)} s'') \\
&= (r \otimes s)((r' \otimes s')(r'' \otimes s'')).
\end{aligned}$$

É $1_R \otimes 1_S$ a unidade de $m_{R\underline{\otimes}S}$, pois

$$(1_R \otimes 1_S)(r \otimes s) = \sum 1_R(1_{S_{(-1)}} \cdot r) \otimes 1_{S_{(0)}} s = 1_R(1_H \cdot r) \otimes 1_S s = r \otimes s$$

e, ainda,

$$\begin{aligned}
(r \otimes s)(1_R \otimes 1_S) &= \sum r(s_{(-1)} \cdot 1_R) \otimes s_{(0)} 1_S \\
&= \sum r\varepsilon(s_{(-1)}) 1_R \otimes s_{(0)} \\
&= r \otimes \sum \varepsilon(s_{(-1)}) s_{(0)} \\
&= r \otimes s.
\end{aligned}$$

Definição 4.2.3. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora. Uma biálgebra trançada sobre H é uma álgebra trançada e coálgebra trançada R sobre H tal que são as transformações lineares que definem sua estrutura de coálgebra, $\Delta : R \to R\underline{\otimes}R$ e $\varepsilon : R \to K$ são homorfismos de álgebras.*

Seja R uma biálgebra trançada. Sua comultiplicação Δ e sua counidade ε são homorfismos de álgebras, donde segue, para r, $s \in R$, que

$$\begin{aligned}
&\sum (rs)_1 \otimes (rs)_2 = \sum r_1(r_{2_{(-1)}} \cdot s_1) \otimes r_{2_{(0)}} s_2, \\
&\Delta(1_R) = 1_R \otimes 1_R, \\
&\varepsilon(rs) = \varepsilon(r)\varepsilon(s), \\
&\varepsilon(1_R) = 1_K.
\end{aligned}$$

Definição 4.2.4. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora. Uma álgebra de Hopf trançada R sobre H é uma biálgebra sobre H que possui uma antípoda $S : H \to H$ que é um homomorfismo de H-módulos e de H-comódulos.*

Em resumo, uma álgebra de Hopf trançada R sobre uma álgebra de Hopf H, com antípoda bijetora, é uma álgebra de Hopf que é um H-módulo de Yetter-Drinfeld satisfazendo, para r, $s \in R$, $h \in H$, as propriedades

(álgebra trançada)

$$h \cdot (rs) = \sum (h_1 \cdot r)(h_2 \cdot s),$$

$$\sum (rs)_{(-1)} \otimes (rs)_{(0)} = \sum r_{(-1)} s_{(-1)} \otimes r_{(0)} s_{(0)},$$

$$h \cdot 1_R = \varepsilon(h) 1_R,$$

$$\rho(1_R) = 1_H \otimes 1_R,$$

(coálgebra trançada)

$$\sum (h \cdot r)_1 \otimes (h \cdot r)_2 = \sum h_1 \cdot r_1 \otimes h_2 \cdot r_2,$$

$$\sum r_{1_{(-1)}} r_{2_{(-1)}} \otimes r_{1_{(0)}} \otimes r_{2_{(0)}} = \sum r_{(-1)} \otimes r_{(0)_1} \otimes r_{(0)_2},$$

$$\varepsilon(h \cdot r) = \varepsilon(h) \varepsilon(r),$$

$$\sum r_{(-1)} \otimes \varepsilon(r_{(0)}) = \varepsilon(r) 1_H \otimes 1_R,$$

(biálgebra trançada)

$$\sum (rs)_1 \otimes (rs)_2 = \sum r_1 (r_{2_{(-1)}} \cdot s_1) \otimes r_{2_{(0)}} s_2,$$

$$\Delta(1_R) = 1_R \otimes 1_R,$$

$$\varepsilon(rs) = \varepsilon(r) \varepsilon(s),$$

$$\varepsilon(1_R) = 1_K,$$

(álgebra de Hopf trançada)

$$\sum S(r_1) r_2 = \varepsilon(r) 1_R = \sum r_1 S(r_2),$$

$$S(h \cdot r) = h \cdot S(r),$$

$$\sum S(r)_{(-1)} \otimes S(r_{(0)}) = \sum r_{(-1)} \otimes S(r_{(0)}).$$

A seguinte proposição mostra que a existência de uma antípoda numa biálgebra trançada garante que esta é uma álgebra de Hopf trançada.

Proposição 4.2.1. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora e seja R uma biálgebra trançada sobre H. Se R possui uma antípoda S, então é S um* *homomorfismo de H-módulos de Yetter-Drinfeld e, portanto, é R uma álgebra de Hopf trançada.*

Demonstração: Mostremos que S é homorfismo de H-módulos. Para tanto, consideremos a álgebra $Hom(H \otimes R, R)$ com o produto convolução, que possui unidade $u_R \circ \varepsilon_{H\otimes R}$, e sejam F, G, $P : H \otimes R \to R$ definidas, para $h \in H$, $r \in R$, por

$$F(h \otimes r) = S(h \cdot r), \qquad G(h \otimes r) = h \cdot S(r), \qquad P(h \otimes r) = h \cdot r.$$

Provaremos que $G * P = u_R \circ \varepsilon_{H\otimes R} = P * F$, donde concluiremos que $F = G$ e seguirá a tese. Tem-se

$$\begin{aligned}
(G * P)(h \otimes r) &= \sum G((h_1 \otimes r_1)P(h_2 \otimes r_2) \\
&= \sum (h_1 \cdot S(r_1))(h_2 \cdot r_2) \\
&= h \cdot (\sum S(r_1) r_2) && \textit{(m é hom. de H-módulos)} \\
&= h \cdot (\varepsilon_R(r) 1_R) \\
&= \varepsilon_R(r)\varepsilon_H(h) 1_R \\
&= \varepsilon_{H\otimes R}(h \otimes r) 1_R \\
&= u_R \circ \varepsilon_{H\otimes R}(h \otimes r)
\end{aligned}$$

e, também,

$$\begin{aligned}
(P * F)(h \otimes r) &= \sum P(h_1 \otimes r_1)F(h_2 \otimes r_2) \\
&= \sum (h_1 \cdot r_1) S(h_2 \cdot r_2) \\
&= \sum (h \cdot r)_1 S((h \cdot r)_2) && \textit{(Δ é hom. de H-módulos)} \\
&= \varepsilon_R(h \cdot r) 1_R \\
&= h \cdot \varepsilon_R(r) 1_R && \textit{(ε_R é hom. de H-módulos)} \\
&= \varepsilon_R(r)\varepsilon_H(h) 1_R \\
&= u_R \circ \varepsilon_{H\otimes R}(h \otimes r).
\end{aligned}$$

Mostremos que S é morfismo de H-comódulos. Para tanto, consideremos a álgebra $Hom(R, H \otimes R)$ com o produto convolução, que possui unidade $u_{H\otimes R} \circ \varepsilon_R$, e sejam F, $G : R \to H \otimes R$ definidas, para $r \in R$, por

$$F(r) = \sum S(r)_{(-1)} \otimes S(r)_{(0)}, \qquad G(r) = \sum r_{(-1)} \otimes S(r_{(0)}).$$

Provemos que $G * \rho = u_{H\otimes R} \circ \varepsilon_R = \rho * F$, donde concluiremos que $F = G$ e seguirá a tese. Tem-se

$$\begin{aligned}
(G * \rho)(r) &= \sum G(r_1)\rho(r_2) \\
&= \sum (r_{1_{(-1)}} \otimes S(r_{1_{(0)}}))(r_{2_{(-1)}} \otimes r_{2_{(0)}}) \\
&= \sum r_{1_{(-1)}} r_{2_{(-1)}} \otimes S(r_{1_{(0)}}) r_{2_{(0)}} \\
&= \sum r_{(-1)} \otimes S(r_{(0)_1}) r_{(0)_2} && (\Delta \text{ é hom. de } H\text{-comódulos}) \\
&= \sum r_{(-1)} \otimes \varepsilon_R(r_{(0)}) 1_R \\
&= \varepsilon_R(r) 1_H \otimes 1_R && (\varepsilon_R \text{ é hom. de } H\text{-comódulos}) \\
&= u_{H\otimes R} \circ \varepsilon_R(r)
\end{aligned}$$

e, também,

$$\begin{aligned}
(\rho * F)(r) &= \sum \rho(r_1) F(r_2) \\
&= \sum (r_{1_{(-1)}} \otimes r_{1_{(0)}})(S(r_2)_{(-1)} \otimes S(r_2)_{(0)}) \\
&= \sum r_{1_{(-1)}} S(r_2)_{(-1)} \otimes r_{1_{(0)}} S(r_2)_{(0)} \\
&= \sum (r_1 S(r_2))_{(-1)} \otimes (r_1 S(r_2))_{(0)} && (m \text{ é hom. de } H\text{-comódulos}) \\
&= \sum (\varepsilon_R(r) 1_R)_{(-1)} \otimes (\varepsilon_R(r) 1_R)_{(0)} \\
&= \rho(\varepsilon_R(r) 1_R) \\
&= \varepsilon_R(r) \rho(1_R) \\
&= \varepsilon_R(r) 1_H \otimes 1_R && (u \text{ é hom. de } H\text{-comódulos}) \\
&= u_{H\otimes R} \circ \varepsilon_R(r).
\end{aligned}$$

□

A seguinte proposição decorre imediatamente do fato de que a projeção sobre o espaço quociente é um homomorfismo de módulos de Yetter-Drinfeld.

Proposição 4.2.2. *Sejam R uma álgebra de Hopf trançada e I um ideal, coideal, submódulo e subcomódulo de R tal que $S(I) \subseteq I$. Então é R/I uma álgebra de Hopf trançada.*

. $\square$

Exemplo 4.2.1. *Seja M um H-módulo de Yetter-Drinfeld. Então sua álgebra tensorial $T(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{\otimes n}$, em que $M^{\otimes 0} = K$ e $M^{\otimes n} = \underbrace{M \otimes \ldots \otimes M}_{n \text{ vezes}}$, $n > 1$, com sua estrutura de álgebra definida no Exemplo 2.1.4, é uma álgebra de Hopf trançada. Sua estrutura de álgebra de Hopf trançada é definida aplicando a propriedade universal às transformações lineares $\Delta : M \to T(M)\underline{\otimes}T(M)$, $\varepsilon : M \to K$ e $S : M \to T(M)^{op}$ definidas, para $m \in V$, por*

$$\Delta(m) = m\overline{\otimes}1_K + 1_K\overline{\otimes}m, \qquad \varepsilon(m) = 0, \qquad S(m) = -m,$$

em que $T(M)\underline{\otimes}T(M)$ é uma álgebra com a multiplicação trançada. Note como essa estrutura é diferente da apresentada no Exemplo 2.1.4. Para ilustrarmos esse fato, sejam m, $n \in M$. Então tem-se

$$\begin{aligned}
\Delta(mn) &= \Delta(m)\Delta(n) \\
&= (m\underline{\otimes}1_K + 1_K\underline{\otimes}m)(n\underline{\otimes}1_K + 1_K\underline{\otimes}n) \\
&= (m\underline{\otimes}1_K)(n\underline{\otimes}1_K) + (m\underline{\otimes}1_K)(1_K\underline{\otimes}n) \\
&+ (1_K\underline{\otimes}m)(n\underline{\otimes}1_K) + (1_K\underline{\otimes}m)(1_K\underline{\otimes}n) \\
&= m((1_K)_{(-1)} \cdot n)\underline{\otimes}(1_K)_{(0)}1_K + m((1_K)_{(-1)} \cdot 1_K)\underline{\otimes}(1_K)_{(0)}n \\
&+ 1_K(m_{(-1)} \cdot n)\underline{\otimes}m_{(0)}1_K + 1_K(m_{(-1)} \cdot 1_K)\underline{\otimes}m_{(0)}n \\
&= mn\underline{\otimes}1_K + m\underline{\otimes}n + m_{(-1)} \cdot n\underline{\otimes}m_{(0)} + \varepsilon(m_{(-1)})1_K\underline{\otimes}m_{(0)}n
\end{aligned}$$

$$= mn\underline{\otimes}1_K + m\underline{\otimes}n + m_{(-1)} \cdot n\underline{\otimes}m_{(0)} + 1_K\underline{\otimes}\varepsilon(m_{(-1)})m_{(0)}n$$

$$= mn\underline{\otimes}1_K + m\underline{\otimes}n + m_{(-1)} \cdot n\underline{\otimes}m_{(0)} + 1_K\underline{\otimes}mn.$$

É $T(M)$ *um módulo de Yetter-Drinfeld com ação e coação definidas, para* $h \in H$, $m = m_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_1^{(n)} \otimes \ldots \otimes m_n^{(n)} \in T(M)$, *em que* $m_0 \in K$, $m_i^{(n)} \in M$, *para* $1 \leq i \leq n$, *por*

$$h \cdot (m) = \varepsilon(h)m_0 + \sum_{n=1}^{\infty} h_1 \cdot m_1^{(n)} \otimes \ldots \otimes h_n \cdot m_n^{(n)},$$

$$\rho(m) = m_0 1_H \otimes 1_K + \sum_{n=1}^{\infty} (m_1^{(n)})_{(-1)} \ldots (m_n^{(n)})_{(-1)} \otimes ((m_1^{(n)})_{(0)} \otimes \ldots \otimes (m_n^{(n)})_{(0)}).$$

Note que as somas acima são finitas. Esta estrutura de H*-módulo de Yetter-Drinfeld é obtida através das estruturas dos Exemplos* 3.2.1 *e* 3.2.2 *(estendida para uma quantidade finita de tensoriais).*

Analogamente ao Exemplo 2.1.4, $T(M)$ *é uma álgebra de Hopf com as aplicações acima. Basta verificarmos as propriedades de álgebra e de coálgebra trançada; as propriedades de biálgebra trançada decorre da propriedade universal da álgebra tensorial e a existência da antípoda implicará que* $T(M)$ *é uma álgebra de Hopf trançada. De fato, sejam* $h \in H$, $m = m_{[1]} \ldots m_{[k]} \in M^{\otimes k}$, $n = n_{[1]} \ldots n_{[l]} \in M^{\otimes l}$, $m_[i]$, $m_[j] \in M$, $i \leq k$, $j \leq l$. *Tem-se*

$$\begin{aligned} h \cdot (mn) = h \cdot (m \otimes n) &= h \cdot (m_{[1]} \otimes \ldots \otimes m_{[k]} \otimes n_{[1]} \otimes \ldots \otimes n_{[l]}) \\ &= \sum (h_1 \cdot m_{[1]} \otimes \ldots \otimes h_k \cdot m_{[k]}) \otimes (h_{k+1} \cdot n_{[1]} \otimes \ldots \otimes h_{k+l} \cdot n_{[l]}) \\ &= \sum (h_1 \cdot (m_{[1]} \otimes \ldots \otimes m_{[k]}))(h_2 \cdot (n_{[1]} \otimes \ldots \otimes n_{[l]})) \\ &= \sum (h_1 \cdot m)(h_2 \cdot n), \end{aligned}$$

e, ainda,

$$\begin{aligned} \sum (mn)_{(-1)} \otimes (mn)_{(0)} = &\sum (m_{[1]} \otimes \ldots \otimes m_{[k]} \otimes n_{[1]} \otimes \ldots \otimes n_{[l]})_{(-1)} \\ &\otimes (m_{[1]} \otimes \ldots \otimes m_{[k]} \otimes n_{[1]} \otimes \ldots \otimes n_{[l]})_{(0)} \end{aligned}$$

$$= \sum (m_{[1]_{(-1)}} \dots m_{[k]_{(-1)}})(n_{[1]_{(-1)}} \dots n_{[l]_{(-1)}})$$

$$\otimes ((m_{[1]_{(0)}} \otimes \dots \otimes m_{[k]_{(0)}}) \otimes (n_{[1]_{(0)}} \otimes \dots \otimes n_{[l]_{(0)}}))$$

$$= \sum (m_{[1]} \dots m_{[k]})_{(-1)}(n_{[1]} \dots n_{[l]})_{(-1)}$$

$$\otimes ((m_{[1]} \otimes \dots \otimes m_{[k]})_{(0)}(n_{[1]} \otimes \dots \otimes n_{[l]})_{(0)})$$

$$= \sum m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes m_{(0)}n_{(0)},$$

donde seguem as igualdades $h \cdot (rs) = \sum (h_1 \cdot r)(h_2 \cdot (s))$ *e* $\sum (rs)_{(-1)} \otimes (rs)_{(0)} = \sum r_{(-1)}s_{(-1)} \otimes r_{(0)}s_{(0)}$*, para todos* $r,\ s \in T(M)$*. Mais ainda,* $h \cdot 1_K = \varepsilon(h)1_K$ *e, finalmente,* $\rho(1_K) = 1_H \otimes 1_K$*. Logo é* $T(M)$ *uma álgebra trançada.*

Provemos que $T(M)$ *é uma coálgebra trançada. Sejam* $h \in H$*,* $m \in n$*. Tem-se*

$$\begin{aligned}
h \cdot \Delta(m) &= h \cdot (m \overline{\otimes} 1_K + 1_K \overline{\otimes} m) \\
&= \sum h_1 \cdot m \overline{\otimes} h_2 \cdot 1_K + h_1 \cdot 1_K \overline{\otimes} h_2 \cdot m \\
&= \sum h_1 \cdot m \otimes \varepsilon(h_2)1_K + \varepsilon(h_1)1_K \overline{\otimes} h_2 \cdot m \\
&= \sum (h_1\varepsilon(h_2)) \cdot m \overline{\otimes} 1_K + 1_K \overline{\otimes} (\varepsilon(h_1)h_2) \cdot m \\
&= h \cdot m \overline{\otimes} 1_K + 1_K \overline{\otimes} h \cdot m \\
&= \Delta(h \cdot m).
\end{aligned}$$

Para demonstrar a identidade para todo elemento de $T(M)$*, é suficiente mostrar que vale para todo elemento da forma* mn*, em que* $m,\ n \in M$*. De fato,*

$$\begin{aligned}
\Delta(h \cdot (mn)) &= \Delta(\sum (h_1 \cdot m)(h_2 \cdot n)) \\
&= \sum (h_1 \cdot m)(h_2 \cdot n) \overline{\otimes} 1_K + h_1 \cdot m \overline{\otimes} h_2 \cdot n \\
&+ (h_1 \cdot m)_{(-1)} \cdot (h_2 \cdot n) \overline{\otimes} (h_1 \cdot m)_{(0)} + 1_K \overline{\otimes} (h_1 \cdot m)(h_2 \cdot n) \\
&= \sum h \cdot (mn) \overline{\otimes} 1_K + h_1 \cdot m \overline{\otimes} h_2 \cdot n \\
&+ (h_{1_1} m_{(-1)} S(h_{1_3})) \cdot (h_2 \cdot n) \overline{\otimes} h_{1_2} \cdot m_{(0)} + 1_K \overline{\otimes} h \cdot (mn) \\
&= \sum h \cdot (mn) \overline{\otimes} 1_K + h_1 \cdot m \overline{\otimes} h_2 \cdot n \\
&+ (h_1 m_{(-1)} S(h_3) h_4) \cdot n \overline{\otimes} h_2 \cdot m_{(0)} + 1_K \overline{\otimes} h \cdot (mn)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum h \cdot (mn)\overline{\otimes}1_K + h_1 \cdot m\overline{\otimes}h_2 \cdot n \\
&+ (h_1 m_{(-1)}\varepsilon(h_3)1_H) \cdot n\overline{\otimes}h_2 \cdot m_{(0)} + 1_K\overline{\otimes}h \cdot (mn) \\
&= \sum h \cdot (mn)\overline{\otimes}1_K + h_1 \cdot m\overline{\otimes}h_2 \cdot n \\
&+ (h_1 m_{(-1)}\varepsilon(h_3)) \cdot n\overline{\otimes}h_2 \cdot m_{(0)} + 1_K\overline{\otimes}h \cdot (mn) \\
&= \sum h \cdot (mn)\overline{\otimes}1_K + h_1 \cdot m\overline{\otimes}h_2 \cdot n \\
&+ (h_1 m_{(-1)}) \cdot n\overline{\otimes}(h_2\varepsilon(h_3)) \cdot m_{(0)} + 1_K\overline{\otimes}h \cdot (mn) \\
&= \sum h \cdot (mn)\overline{\otimes}1_K + h_1 \cdot m\overline{\otimes}h_2 \cdot n \\
&+ h_1 \cdot (m_{(-1)} \cdot n)\overline{\otimes}(h_2\varepsilon(h_3)) \cdot m_{(0)} + 1_K\overline{\otimes}h \cdot (mn) \\
&= \sum (h_1\varepsilon(h_2)) \cdot (mn)\overline{\otimes}1_K + h_1 \cdot m\overline{\otimes}h_2 \cdot n \\
&+ h_1 \cdot (m_{(-1)} \cdot n)\overline{\otimes}(h_2\varepsilon(h_3)) \cdot m_{(0)} + 1_K\overline{\otimes}(\varepsilon(h_1)h_2) \cdot (mn) \\
&= \sum h_1 \cdot (mn)\overline{\otimes}\varepsilon(h_2)1_K + h_1 \cdot m\overline{\otimes}h_2 \cdot n \\
&+ h_1 \cdot (m_{(-1)} \cdot n)\overline{\otimes}(h_2\varepsilon(h_3)) \cdot m_{(0)} + \varepsilon(h_1)1_K\overline{\otimes}h_2 \cdot (mn) \\
&= \sum h_1 \cdot (mn)\overline{\otimes}h_2 \cdot 1_K + h_1 \cdot m\overline{\otimes}h_2 \cdot n \\
&+ h_1 \cdot (m_{(-1)} \cdot n)\overline{\otimes}(h_2\varepsilon(h_3)) \cdot m_{(0)} + h_1 \cdot 1_K\overline{\otimes}h_2 \cdot (mn) \\
&= h \cdot (\sum (mn\overline{\otimes}1_K + m\overline{\otimes}n + (m_{(-1)}\overline{\otimes}m_{(0)} + 1_K\overline{\otimes}mn) \\
&= h \cdot \Delta(mn).
\end{aligned}
$$

Tem-se, ainda,

$$
\begin{aligned}
\rho(\Delta(m)) &= \rho(m\overline{\otimes}1_K + 1_K\overline{\otimes}m) \\
&= \sum m_{(-1)}(1_K)_{(-1)} \otimes m_{(0)}\overline{\otimes}(1_K)_{(0)} + m_{(-1)}(1_K)_{(-1)} \otimes (1_K)_{(0)}\overline{\otimes}m_{(0)} \\
&= \sum m_{(-1)}1_H \otimes m_{(0)}\overline{\otimes}1_K + m_{(-1)}1_H \otimes 1_K\overline{\otimes}m_{(0)} \\
&= \sum m_{(-1)} \otimes (m_{(0)}\overline{\otimes}1_K + 1_K\overline{\otimes}m_{(0)}) \\
&= \sum m_{(-1)} \otimes \Delta(m_{(0)}) \\
&= (I \otimes \Delta) \circ \rho(m).
\end{aligned}
$$

Similarmente, para demonstrar a identidade para todo elemento de $T(M)$, é sufi-

ciente mostrar que vale para todo elemento da forma mn, em que m, $n \in M$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\rho(\Delta(mn)) &= \rho(mn\overline{\otimes}1_K) + \rho(m\overline{\otimes}n) + \rho(m_{(-1)}\cdot n\overline{\otimes}m_{(0)}) + \rho(1_K\overline{\otimes}mn) \\
&= \sum (mn)_{(-1)}(1_K)_{(-1)} \otimes (mn)_{(0)}\overline{\otimes}(1_K)_{(0)} + m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes m_{(0)}\overline{\otimes}n_{(0)} \\
&+ (m_{(-1)}\cdot n)_{(-1)}m_{(0)_{(-1)}} \otimes (m_{(-1)}\cdot n)_{(0)}\overline{\otimes}m_{(0)_{(0)}} \\
&+ (1_K)_{(-1)}(mn)_{(-1)} \otimes (1_K)_{(0)}\overline{\otimes}(mn)_{(0)} \\
&= \sum (mn)_{(-1)}1_H \otimes m_{(0)}n_{(0)}\overline{\otimes}1_K + (mn)_{(-1)} \otimes m_{(0)}\overline{\otimes}n_{(0)} \\
&+ m_{(-1)_1}n_{(-1)}S(m_{(-1)_3})m_{(0)_{(-1)}} \otimes m_{(-1)_2}\cdot n\overline{\otimes}m_{(0)_{(0)}} \\
&+ (mn)_{(-1)}1_H \otimes 1_K\overline{\otimes}m_{(0)}n_{(0)} \\
&= \sum (mn)_{(-1)} \otimes m_{(0)}n_{(0)}\overline{\otimes}1_K + (mn)_{(-1)} \otimes m_{(0)}\overline{\otimes}n_{(0)} \\
&+ m_{(-4)}n_{(-1)}S(m_{(-2)})m_{(-1)} \otimes m_{(-3)}\cdot n\overline{\otimes}m_{(0)} + (mn)_{(-1)} \otimes 1_K\overline{\otimes}m_{(0)}n_{(0)} \\
&= \sum (mn)_{(-1)} \otimes m_{(0)}n_{(0)}\overline{\otimes}1_K + (mn)_{(-1)} \otimes m_{(0)}\overline{\otimes}n_{(0)} \\
&+ m_{(-3)}n_{(-1)}\varepsilon(m_{(-1)})1_H \otimes m_{(-2)}\cdot n\overline{\otimes}m_{(0)} + (mn)_{(-1)} \otimes 1_K\overline{\otimes}m_{(0)}n_{(0)} \\
&= \sum (mn)_{(-1)} \otimes m_{(0)}n_{(0)}\overline{\otimes}1_K + (mn)_{(-1)} \otimes m_{(0)}\overline{\otimes}n_{(0)} \\
&+ m_{(-3)}n_{(-1)} \otimes \varepsilon(m_{(-1)})m_{(-2)}\cdot n\overline{\otimes}m_{(0)} + (mn)_{(-1)} \otimes 1_K\overline{\otimes}m_{(0)}n_{(0)} \\
&= \sum (mn)_{(-1)} \otimes m_{(0)}n_{(0)}\overline{\otimes}1_K + (mn)_{(-1)} \otimes m_{(0)}\overline{\otimes}n_{(0)} \\
&+ m_{(-2)}n_{(-1)} \otimes m_{(-1)}\cdot n\overline{\otimes}m_{(0)} + (mn)_{(-1)} \otimes 1_K\overline{\otimes}m_{(0)}n_{(0)} \\
&= \sum (mn)_{(-1)} \otimes m_{(0)}n_{(0)}\overline{\otimes}1_K + (mn)_{(-1)} \otimes m_{(0)}\overline{\otimes}n_{(0)} \\
&+ m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes m_{(0)_{(-1)}}\cdot n\overline{\otimes}m_{(0)_{(0)}} + (mn)_{(-1)} \otimes 1_K\overline{\otimes}m_{(0)}n_{(0)} \\
&= \sum (mn)_{(-1)} \otimes (m_{(0)}n_{(0)}\overline{\otimes}1_K + m_{(0)}\overline{\otimes}n_{(0)} \\
&+ m_{(0)_{(-1)}}\cdot n_{(0)}\overline{\otimes}m_{(0)_{(0)}} + 1_K\overline{\otimes}m_{(0)}n_{(0)}) \\
&= \sum (mn)_{(-1)} \otimes \Delta(m_{(0)}n_{(0)}) \\
&= \sum (mn)_{(-1)} \otimes \Delta((mn)_{(0)}) \\
&= (I \otimes \Delta) \circ \rho(mn).
\end{aligned}
$$

Seja $m = m_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} m_1^{(n)} \otimes \ldots \otimes m_n^{(n)} \in T(M)$, *em que* $m_0 \in K$, $m_i^{(n)} \in M$, *para* $1 \leq i \leq n$. *Tem-se*

$$\begin{aligned}
\varepsilon(h \cdot m) &= \varepsilon(h \cdot (m_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_1^{(n)} \otimes \ldots \otimes m_n^{(n)})) \\
&= \varepsilon(h \cdot m_0) + \varepsilon(h \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} m_1^{(n)} \otimes \ldots \otimes m_n^{(n)})) \\
&= \varepsilon(h \cdot m_0) \\
&= \varepsilon(\varepsilon(h) m_0) \\
&= \varepsilon(h)\varepsilon(m_0) \\
&= h \cdot \varepsilon(m_0) \\
&= h \cdot \varepsilon(m)
\end{aligned}$$

e, ainda,

$$\begin{aligned}
\sum m_{(-1)} \otimes \varepsilon(m_{(0)}) &= (m_0)_{(-1)} \otimes \varepsilon((m_0)_{(0)}) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (m_1^{(n)})_{(-1)} \ldots (m_n^{(n)})_{(-1)} \otimes \varepsilon((m_1^{(n)})_{(0)} \ldots (m_n^{(n)})_{(0)}) \\
&= m_0 1_H \otimes 1_K \\
&= \varepsilon(m) 1_H \otimes 1_K.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.2.2. *Seja* V *o* K*-espaço vetorial gerado pela base* $\{x_{(ij)}\}_{1 \leq i,j \leq n}$, *em que* (ij) *é a transposição que leva* i *em* j *e* j *em* i. *Como no Exemplo* 3.2.6, V *é um* $K\mathbb{S}_n$*-módulo de Yetter-Drinfeld com ação e coação definidas para* $g \in \mathbb{S}_n$ *por*

$$g \cdot x_{(ij)} = sgn(g) x_{(g(i)g(j))}, \qquad \rho(x_{(ij)}) = (ij) \otimes x_{(ij)},$$

em que $sgn(g)$ *é o sinal da permutação* g. *A álgebra de Fomin-Kirillov é a álgebra tensorial* $T(V)$ *sujeita às relações*

$$x_{(ij)}^2 = 0,$$

$$x_{(ij)}x_{(kl)} = x_{(kl)}x_{(ij)},$$

$$x_{(ij)}x_{(jk)} + x_{(jk)}x_{(ki)} + x_{(ki)}x_{(ij)} = 0, \qquad x_{(jk)}x_{(ij)} + x_{(ki)}x_{(jk)} + x_{(ij)}x_{(ki)} = 0,$$

para i, j, k, $l \leq n$ distintos. Podemo-las induzir em $T(V)$ tomando o quociente $T(V)/I$, em que I é o ideal gerado pelos elementos

$$x_{(ij)}^2,$$

$$x_{(ij)}x_{(kl)} - x_{(kl)}x_{(ij)},$$

$$x_{(ij)}x_{(jk)} + x_{(jk)}x_{(ki)} + x_{(ki)}x_{(ij)},$$

com i, j, k, l distintos. Claramente I é um submódulo e subcomódulo de $T(V)$. Além disso, $S(x_{(ij)}x_{(kl)}) = S(x_{(kl)})S(x_{(ij)}) = x_{(kl)}x_{(ij)}$, para i, j, k, l quaisquer, donde segue evidentemente que $S(I) \subseteq I$. Provemos que I é também um coideal. Para tanto, calculemos $\Delta(x_{(ij)}x_{(kl)})$, para i, j, k, l quaisquer.

$$\begin{aligned}
\Delta(x_{(ij)}x_{(kl)}) &= (x_{(ij)}\overline{\otimes}1_K + 1_K\overline{\otimes}x_{(ij)})(x_{(kl)}\overline{\otimes}1_K + 1_K\overline{\otimes}x_{(kl)}) \\
&= (x_{(ij)}\overline{\otimes}1_K)(x_{(kl)}\overline{\otimes}1_K) + (x_{(ij)}\overline{\otimes}1_K)(1_K\overline{\otimes}x_{(kl)}) \\
&+ (1\overline{\otimes}x_{(ij)})(x_{(kl)}\overline{\otimes}1_K) + (1_K\overline{\otimes}x_{(ij)})(1_K\overline{\otimes}x_{(kl)}) \\
&= x_{(ij)}x_{(kl)}\overline{\otimes}1_K + x_{(ij)}(1_{K_{(-1)}} \cdot 1_K)\overline{\otimes}1_{K_{(0)}}x_{(kl)} \\
&+ 1_K(x_{(ij)_{(-1)}} \cdot x_{(kl)})\overline{\otimes}x_{(ij)_{(0)}}1_K + 1_K\overline{\otimes}x_{(ij)}x_{(kl)} \\
&= x_{(ij)}x_{(kl)}\overline{\otimes}1_K + x_{(ij)}(\varepsilon(Id)1_K)\overline{\otimes}1_Kx_{(kl)} \\
&+ 1_K(sgn(ij)x_{((ij)(k),(ij)(l))})\overline{\otimes}x_{(ij)} + 1_K\overline{\otimes}x_{(ij)}x_{(kl)} \\
&= x_{(ij)}x_{(kl)}\overline{\otimes}1_K + x_{(ij)}\overline{\otimes}x_{(kl)} \\
&- x_{((ij)(k),(ij)(l))}\overline{\otimes}x_{(ij)} + 1_K\overline{\otimes}x_{(ij)}x_{(kl)}
\end{aligned}$$

Tem-se, portanto, para i, j, k, l distintos,

$$\Delta(x_{(ij)}^2) = x_{(ij)}^2\overline{\otimes}1_K + x_{(ij)}\overline{\otimes}x_{(ij)} - x_{(ji)}\overline{\otimes}x_{(ij)} + 1_K\overline{\otimes}x_{(ij)}^2$$

$$= x_{(ij)}^2 \overline{\otimes} 1_K + x_{(ij)} \overline{\otimes} x_{(ij)} - x_{(ij)} \overline{\otimes} x_{(ij)} + 1_K \overline{\otimes} x_{(ij)}^2$$
$$= x_{(ij)}^2 \overline{\otimes} 1_K + 1_K \overline{\otimes} x_{(ij)}^2$$

e, ainda,

$$\begin{aligned}\Delta(x_{(ij)}x_{(kl)} - x_{(kl)}x_{(ij)}) &= (x_{(ij)}x_{(kl)} - x_{(kl)}x_{(ij)}) \overline{\otimes} 1_K + x_{(ij)} \overline{\otimes} x_{(kl)} - x_{(kl)} \overline{\otimes} x_{(ij)} \\ &\quad + x_{(kl)} \overline{\otimes} x_{(ij)} - x_{(ij)} \overline{\otimes} x_{(kl)} + 1_K \overline{\otimes} (x_{(ij)}x_{(kl)} - x_{(kl)}x_{(ij)}) \\ &= (x_{(ij)}x_{(kl)} - x_{(kl)}x_{(ij)}) \overline{\otimes} 1_K + 1_K \overline{\otimes} (x_{(ij)}x_{(kl)} - x_{(kl)}x_{(ij)})\end{aligned}$$

e, mais ainda,

$$\begin{aligned}\Delta(x_{(ij)}x_{(jk)} + x_{(jk)}x_{(ki)} + x_{(ki)}x_{(ij)}) &= (x_{(ij)}x_{(jk)} + x_{(jk)}x_{(ki)} + x_{(ki)}x_{(ij)}) \overline{\otimes} 1_K \\ &+ x_{(ij)} \overline{\otimes} x_{(jk)} - x_{(ik)} \overline{\otimes} x_{(ij)} \\ &+ x_{(jk)} \overline{\otimes} x_{(ki)} - x_{(ji)} \overline{\otimes} x_{(jk)} \\ &+ x_{(ki)} \overline{\otimes} x_{(ij)} - x_{(kj)} - x_{(ki)} \\ &+ 1_K \overline{\otimes} (x_{(ij)}x_{(jk)} + x_{(jk)}x_{(ki)} + x_{(ki)}x_{(ij)}) \\ &= (x_{(ij)}x_{(jk)} + x_{(jk)}x_{(ki)} + x_{(ki)}x_{(ij)}) \overline{\otimes} 1_K \\ &+ (x_{(ij)} - x_{(ji)}) \overline{\otimes} x_{(jk)} \\ &+ (x_{(jk)} - x_{(kj)}) \overline{\otimes} x_{(ki)} \\ &+ (x_{(ki)} - x_{(ik)}) \overline{\otimes} x_{(ij)} \\ &+ 1_K \overline{\otimes} (x_{(ij)}x_{(jk)} + x_{(jk)}x_{(ki)} + x_{(ki)}x_{(ij)}) \\ &= (x_{(ij)}x_{(jk)} + x_{(jk)}x_{(ki)} + x_{(ki)}x_{(ij)}) \overline{\otimes} 1_K \\ &+ (x_{(ij)} - x_{(ij)}) \overline{\otimes} x_{(jk)} \\ &+ (x_{(jk)} - x_{(jk)}) \overline{\otimes} x_{(ki)} \\ &+ (x_{(ki)} - x_{(ki)}) \overline{\otimes} x_{(ij)} \\ &+ 1_K \overline{\otimes} (x_{(ij)}x_{(jk)} + x_{(jk)}x_{(ki)} + x_{(ki)}x_{(ij)}) \\ &= (x_{(ij)}x_{(jk)} + x_{(jk)}x_{(ki)} + x_{(ki)}x_{(ij)}) \overline{\otimes} 1_K\end{aligned}$$

$$+ 1_K \overline{\otimes}(x_{(ij)}x_{(jk)} + x_{(jk)}x_{(ki)} + x_{(ki)}x_{(ij)}).$$

A pertinência $\Delta(x_{(jk)}x_{(ij)}+x_{(ki)}x_{(jk)}+x_{(ij)}x_{(ki)}) \in (T(V)\otimes I)+(I\otimes T(V))$ *é análoga. Segue que* $\Delta(I) \subseteq (I \otimes T(V)) + (T(V) \otimes I)$*. Claramente,* $I \subseteq Ker(\varepsilon)$*. Decorre que a álgebra de Fommin-Kirillov é uma álgebra de Hopf trançada.*

Seja R uma álgebra de Hopf trançada sobre H de dimensão finita. Construiremos sua álgebra de Hopf trançada dual. Para tanto, faremos primeiramente algumas construções. Sejam V, W H-módulos de Yetter-Drinfeld de dimensão finita. Definimos $\Phi : W^* \otimes V^* \to (V \otimes W)^*$, para $f \in W^*$, $g \in V^*$, $v \in V$, $w \in W$, por

$$(\Phi(f \otimes g))(v \otimes w) = g(v)f(w).$$

É Φ um isomorfismo. Provemos que Φ é um homomorfismo de H-módulos de Yetter-Drinfeld. Seja $h \in H$. Tem-se

$$\begin{aligned}
(\Phi(h \cdot (f \otimes g)))(v \otimes w) &= (\Phi(h_1 \cdot f \otimes h_2 \cdot g))(v \otimes w) \\
&= (h_2 \cdot g)(v)(h_1 \cdot f)(w) \\
&= g(S(h_2) \cdot v)f(S(h_1) \cdot w)) && \text{(definição de $\cdot$ no módulo dual)} \\
&= (\Phi(f \otimes g))(S(h_2) \cdot v \otimes S(h_1) \cdot w) \\
&= (\Phi(f \otimes g))(S(h)_1 \cdot v \otimes S(h)_2 \cdot w) && \text{(de ii) de Prop. 2.2.1)} \\
&= (\Phi(f \otimes g))(S(h) \cdot (v \otimes w)) \\
&= (h \cdot (\Phi(f \otimes g)))(v \otimes w).
\end{aligned}$$

Seja $\{v_i\}$ uma base de V, $\{w_j\}$ uma base de W e $\{v_i^*\}$, $\{w_j^*\}$ as bases duais de V^* e W^*. Então $\{v_i \otimes w_j\}$ é uma base de $V \otimes W$ e $\{f_{i,j} = (v_i \otimes w_j)^*\}$ a base dual de $(V \otimes W)^*$. Tem-se

$$\begin{aligned}
&\rho(\Phi(w^* \otimes v^*)) \\
&= \sum S^{-1}((v_i \otimes w_j)_{(-1)}) \otimes (\Phi(w^* \otimes v^*))((v_i \otimes w_j)_{(0)})f_{i,j}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum S^{-1}(v_{i_{(-1)}} w_{j_{(-1)}}) \otimes (\Phi(w^* \otimes v^*))(v_{i_{(0)}} \otimes w_{j_{(0)}}) f_{i,j} && \\
&= \sum S^{-1}(w_{j_{(-1)}}) S^{-1}(v_{i_{(-1)}}) \otimes v^*(v_{i_{(0)}}) w^*(w_{j_{(0)}}) f_{i,j} && \textit{(i) de Prop. 2.2.2)} \\
&= \sum S^{-1}(w_{j_{(-1)}}) w^*(w_{j_{(0)}}) S^{-1}(v_{i_{(-1)}}) v^*(v_{i_{(0)}}) \otimes f_{i,j} && \\
&= \sum w^*_{(-1)} w^*_{(0)}(w_j) v^*_{(-1)} v^*_{(0)}(v_i) \otimes f_{i,j} && \text{(propriedade de } \rho(w^*) \\
&= \sum w^*_{(-1)} v^*_{(-1)} \otimes v^*_{(0)}(v_i) w^*_{(0)}(w_j) f_{i,j} && \text{e de } \rho(v^*)) \\
&= \sum w^*_{(-1)} v^*_{(-1)} \otimes (\Phi(w^*_{(0)} \otimes v^*_{(0)}))(v_i \otimes w_j) f_{i,j} && \\
&= \sum w^*_{(-1)} v^*_{(-1)} \otimes \Phi(w^*_{(0)} \otimes v^*_{(0)}) && \textit{(escrita de} \\
&= (I \otimes \Phi) \circ \rho(w^* \otimes v^*). && \Phi(w^*_{(0)} \otimes v^*_{(0)}) \textit{ na base)}
\end{aligned}
$$

Seja $\zeta : K \to K^*$ definido, para k, $l \in K$, por

$$(\zeta(k))(l) = kl.$$

É ζ um isomorfismo. Provemos que ζ é um homomorfismo de H-módulos de Yetter-Drinfeld. Seja $h \in H$. Tem-se

$$
\begin{aligned}
(h \cdot \zeta(k))(l) &= (\zeta(k))(S(h) \cdot l) \\
&= (\zeta(k))(\varepsilon(S(h))l) \\
&= (\zeta(k))(\varepsilon(h)l) \\
&= \varepsilon(h)kl \\
&= (h \cdot k)l \\
&= (\zeta(h \cdot k))(l)
\end{aligned}
$$

e, também,

$$(I \otimes \zeta) \circ \rho(k) = (I \otimes \zeta)(1_H \otimes k) = 1_H \otimes \zeta(k).$$

Provemos que $1_H \otimes \zeta(k)$ satisfaz a propriedade de $\rho(\zeta(k))$, donde seguirá a identidade. De fato,

$$S^{-1}(l_{(-1)})(\zeta(k))(l_{(0)}) = S^{-1}(1_H)(\zeta(k))(l) = 1_H(\zeta(k))(l).$$

Seja $\eta : K^* \to K$ definido, para $f \in K^*$, por

$$\eta(f) = f(1_K).$$

Afirmamos que $\eta = \zeta^{-1}$, donde seguirá que η é um isomorfismo de H-módulos de Yetter-Drinfeld. De fato,

$$(\zeta \circ \eta(f))(k) = \zeta(f(1_K))(k) = f(1_K)k = f(k),$$

logo $\zeta \circ \eta = I_{K^*}$. Tem-se, ainda,

$$\eta \circ \zeta(k) = \zeta(k)(1_K) = k1_K = k,$$

donde segue que $\eta \circ \zeta = I_K$.

Seja R uma álgebra de Hopf trançada sobre H de dimensão finita. Definimos em R^* a multiplicação $m_{R^*} = \Delta_R^* \circ \Phi$. Sejam f, $g \in R^*$. Notaremos $m_{R^*} = f\underline{*}g$. Tem-se, para $r \in R$

$$\begin{aligned} f\underline{*}g(r) &= (\Delta_R^*(\Phi(f \otimes g)(r) \\ &= (\Phi(f \otimes g))(\Delta_R(r)) \\ &= \sum g(r_1)f(r_2) \\ &= \sum f(r_2)g(r_1). \end{aligned}$$

Definimos a unidade por $u_{R^*} = \varepsilon_R^* \circ \zeta$. Tem-se

$$(u_{R^*}(1))(r) = (\zeta(1))(\varepsilon_R(r)) = \varepsilon_R(r),$$

que é claramente a unidade de $\underline{*}$.

Definimos a comultiplicação por $\Delta_{R^*} = \Phi^{-1} \circ m_R^*$. Tem-se que Δ_{R^*} é a única soma em $R^* \otimes R^*$ satisfazendo a propriedade, para todos r, $s \in R$,

$$f(rs) = \sum f_1(s)f_2(r).$$

De fato, Δ_{R^*} satisfaz tal propriedade, pois

$$\sum f_1(s)f_2(r) = (\Phi \circ \Delta_{R^*}(f))(r \otimes s) = (m_R^*(f))(r \otimes s) = f(rs).$$

A unicidade é demonstrada de forma análoga à da prova feita no capítulo 1, acerca da unicidade da comultiplicação da álgebra dual de uma coálgebra.

Definimos a counidade por $\varepsilon_{R^*} = \eta \circ u_R^*$. Tem-se

$$\varepsilon_{R^*}(f) = \eta(u_R^*(f)) = \eta(f \circ u_R)) = f \circ u_R(1_K) = f(1_R).$$

Definimos a antípoda por $S_{R^*} = S_R^*$. Tem-se

$$(S_{R^*}(f))(r) = f(S(r)).$$

Encerramos este trabalho com o seguinte resultado.

Proposição 4.2.3. *O dual de uma álgebra de Hopf trançada sobre H de dimensão finita é uma álgebra de Hopf trançada.*

Demonstração: São m_{R^*}, u_{R^*}, Δ_{R^*}, ε_{R^*} e S_{R^*} homomorfismos de H-módulos de Yetter-Drinfeld, pois são composições de transformações lineares que o são.

Mostremos que R^* é uma álgebra trançada. Sejam f, g, $p \in R^*$, $r \in R$. Tem-se

$$\begin{aligned}
((f \underline{*} g)\underline{*} p)(r) &= \sum (f \underline{*} g)(r_2)p(r_1) \\
&= \sum f(r_{2_2})g(r_{2_1})p(r_1) \\
&= \sum f(r_2)g(r_{1_2})p(r_{1_1}) \\
&= \sum f(r_2)(g \underline{*} p)(r_1) \\
&= (f \underline{*}(g \underline{*} p))(r).
\end{aligned}$$

Como $u_{R^*}(1_K) = \varepsilon_R$, é R^* uma álgebra trançada.

Mostremos que R^* é uma coálgebra trançada. Para tanto, seja $\theta : R^* \otimes R^* \otimes R^* \to (R \otimes R \otimes R)^*$ definida, para $f,\ g,\ p \in R^*$, $r,\ s,\ t \in R$, por

$$(\theta(f \otimes g \otimes p))(r \otimes s \otimes t) = f(r)g(s)p(t).$$

Claramente, é θ injetiva. Tem-se

$$\begin{aligned}
(\theta((\Delta_{R^*} \otimes I) \circ \Delta_{R^*}(f))(r \otimes s \otimes t) &= (\theta((\Delta_{R^*} \otimes I)(\sum f_1 \otimes f_2))(r \otimes s \otimes t) \\
&= \sum f_{1_1}(r) f_{1_2}(s) f_2(t) \\
&= \sum f_1(sr) f_2(t) \\
&= f(tsr) \\
&= \sum f_1(r) f_2(ts) \\
&= \sum f_1(r) f_{2_1}(s) f_{2_2}(t) \\
&= (\theta(\sum f_1 \otimes f_{2_1} \otimes f_{2_2}))(r \otimes s \otimes t) \\
&= (\theta(I \otimes \Delta_{R^*}) \circ \Delta_{R^*}(f))(r \otimes s \otimes t),
\end{aligned}$$

donde segue da injetividade de θ que $(\Delta_{R^*} \otimes I) \circ \Delta_{R^*} = (I \otimes \Delta_{R^*}) \circ \Delta_{R^*}$. Tem-se ainda

$$\sum \varepsilon_{R^*}(f_1) f_2(r) = \sum f_1(1_R) f_2(r) = f(r1_R) = f(r),$$

donde segue que $\sum \varepsilon_{R^*}(f_1) f_2 = f$. A identidade $\sum f_1 \varepsilon_{R^*}(f_2) = f$ é analogamente demonstrada. Segue que é R^* uma coálgebra trançada.

Mostremos que R^* é uma biálgebra trançada. Provaremos que $\Delta_{R^*} : R^* \to R^* \underline{\otimes} R^*$ é um homomorfismo de álgebras.

$$\begin{aligned}
&\Phi(\Delta_{R^*}(f)\Delta_{R^*}(g))(r \otimes s) \\
&\quad = \Phi(\sum (f_1 \otimes f_2)(g_1 \otimes g_2))(r \otimes s) \\
&\quad = \Phi(\sum f_1 \underline{*} (f_{2_{(-1)}} \cdot g_1) \otimes f_{2_{(0)}} \underline{*} g_2)(r \otimes s) && \text{(def. de } m_{R \underline{\otimes} S})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum (f_1\underline{*}(f_{2_{(-1)}} \cdot g_1))(s)(f_{2_{(0)}}\underline{*}g_2)(r) \\
&= \sum f_1(s_2)(f_{2_{(-1)}} \cdot g_1)(s_1)f_{2_{(0)}}(r_2)g_2(r_1) \\
&= \sum f_1(s_2)((f_{2_{(-1)}}f_{2_{(0)}}(r_2)) \cdot g_1)(s_1)g_2(r_1) \\
&= \sum f_1(s_2)((S^{-1}(r_{2_{(-1)}})f_2(r_{2_{(0)}})) \cdot g_1)(s_1)g_2(r_1) && \text{(propr. de } \rho(f_2)) \\
&= \sum f_1(s_2)f_2(r_{2_{(0)}})(S^{-1}(r_{2_{(-1)}}) \cdot g_1)(s_1)g_2(r_1) \\
&= \sum f_1(s_2)f_2(r_{2_{(0)}})g_1(S(S^{-1}(r_{2_{(-1)}})) \cdot s_1)g_2(r_1) \\
&= \sum f_1(s_2)f_2(r_{2_{(0)}})g_1(r_{2_{(-1)}} \cdot s_1)g_2(r_1) \\
&= \sum f(r_{2_{(0)}}s_2)g(r_1(r_{2_{(-1)}} \cdot s_1)) && \text{(propr. de } \Delta_{R^*}) \\
&= \sum f((rs)_2)g((rs)_1) && (R \text{ é biálg. trançada}) \\
&= (f\underline{*}g)(rs) \\
&= ((f\underline{*}g) \circ m_R)(r \otimes s) \\
&= (m_R^*(f\underline{*}g))(r \otimes s) \\
&= ((\Phi \circ \Phi^{-1} \circ m_R^*)(f\underline{*}g))(r \otimes s) \\
&= (\Phi(\Delta_{R^*}(f\underline{*}g)))(r \otimes s),
\end{aligned}
$$

donde segue da injetividade de Φ que $\Delta_{R^*}(f\underline{*}g) = \Delta_{R^*}(f)\Delta_{R^*}(g)$. Tem-se ainda que

$$
\begin{aligned}
(\Phi(\Delta_{R^*}(\varepsilon_R)))(r \otimes s) &= (m_R^*(\varepsilon_R))(r \otimes s) \\
&= \varepsilon_R(m_R(r \otimes s)) \\
&= \varepsilon_R(rs) \\
&= \varepsilon_R(r)\varepsilon_R(s) \\
&= (\Phi(\varepsilon_R \otimes \varepsilon_R))(r \otimes s),
\end{aligned}
$$

donde segue, da injetividade de Φ, que $\Delta_{R^*}(\varepsilon_R) = \varepsilon_R \otimes \varepsilon_R$. Logo é Δ_{R^*} um homomorfismo de álgebras.

Mostremos agora que ε_{R^*} é um homomorfismo de álgebras. Tem-se

$$\varepsilon_{R^*}(f\underline{*}g) = (f\underline{*}g)(1_R) = \sum f(1_{R_2})g(1_{R_1}) = f(1_R)g(1_R) = \varepsilon_{R^*}(f)\varepsilon_{R^*}(g)$$

e, ainda, $\varepsilon_{R^*}(\varepsilon_R) = \varepsilon_R(1_R) = 1_K$. Logo é R^* uma biálgebra trançada.

Mostremos que R^* é uma álgebra de Hopf trançada. Tem-se

$$\begin{aligned}
(\sum S_{R^*}(f_1)\underline{*}f_2)(r) &= \sum (S_{R^*}(f_1))(r_2)f_2(r_1)\\
&= \sum f_1(S(r_2))f_2(r_1)\\
&= f(\sum r_1 S(r_2))\\
&= f(\varepsilon_R(r)1_R)\\
&= \varepsilon_R(r)f(1_R)\\
&= \varepsilon_{R^*}(f)\varepsilon_R(r).
\end{aligned}$$

A identidade $(\sum f_1\underline{*}S_{R^*}(f_2))(r) = \varepsilon_{R^*}(f)\varepsilon_R(r)$ é analogamente demonstrada. Logo R^* é uma álgebra de Hopf trançada.

□

Referências Bibliográficas

[1] N. Andruskiewitsch, W. Santos (2009). *The beginnings of the theory of Hopf algebras*, Acta Appl Math (2009) 108: 3-17, arXiv:0901.2460 [math.HO].

[2] N. Andruskiewitsch; H.-J., Schneider (2002). *Pointed Hopf algebras*, New directions in Hopf algebras, MSRI series Cambridge Univ. Press; 1–68 (2002).

[3] J. Blasiak, R. Liu, K. Mészáros (2013). *Subalgebras of the Fomin-Kirillov algebra*, arXiv:1310.4112v2 [math.QA].

[4] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu e Ş. Raianu (2001). *Hopf Algebras: An Introduction*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics 235, Marcel Dekker, 2001.

[5] J. Dieudonné (1954). *Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caracteristique* $p > 0$, Comm. Math. Helv.28, (1954), 87–117.

[6] M. Hazewinkel, G. Nadiya, V. Kirichenko (2010). *Coalgebras:Motivation, definitions, and examples.* 10.1090/surv/168/02.

[7] H. Hopf (1941). *Über Die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und Ihre Verallgemeinerungen*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 42, No. 1 (Jan., 1941), pp. 22-52 (31 pages).

[8] D. S. Passman (2014). *Elementary Bialgebra Properties of Group Rings and Enveloping Rings: An Introduction to Hopf Algebras*, Communications in Algebra, 42:5, 2222-2253.

[9] S. Pinter (2013). *Álgebras de Hopf trançadas*, dissertação de mestrado - UFSC.

[10] C. Vay (2016). *Acerca de las álgebras de Fomin-Kirillov*, Actas Del XIII Congreso Dr. Antonio A. R. Monteiro (2015).

[11] G. Velicu (2014). *Grouplike elements for trigonometric and hyperbolic coalgebras*, Journal of Science and Arts. 14. 151-158.