

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**ÉVERTON DOS SANTOS VIANA**

**TÉCNICAS DE CONTROLE BASEADO  
EM EVENTOS PARA SEGUIMENTO DE  
REFERÊNCIA E REJEIÇÃO DE  
PERTURBAÇÃO**

Porto Alegre  
2020

**ÉVERTON DOS SANTOS VIANA**

**TÉCNICAS DE CONTROLE BASEADO  
EM EVENTOS PARA SEGUIMENTO DE  
REFERÊNCIA E REJEIÇÃO DE  
PERTURBAÇÃO**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Controle e Automação

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.

Porto Alegre  
2020

**ÉVERTON DOS SANTOS VIANA**

**TÉCNICAS DE CONTROLE BASEADO  
EM EVENTOS PARA SEGUIMENTO DE  
REFERÊNCIA E REJEIÇÃO DE  
PERTURBAÇÃO**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr., UFRGS  
Doutor pela Université Paul Sabatier de Toulouse - Toulouse,  
França

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rafael da Silveira Castro, PUCRS  
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga, UFOP  
Doutor pela Universidade Estadual de Campinas – São Paulo, Brasil

Prof. Dr. Jeferson Vieira Flores, UFRGS  
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Coordenador do PPGEE: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Sérgio Haffner.

Porto Alegre, outubro de 2020.

## **DEDICATÓRIA**

À Tays, luz da minha vida.

## **AGRADECIMENTOS**

À toda minha família em especial à minha mãe Neci por todo o apoio e amor.

À minha esposa Tays, pelo carinho, compreensão e incentivo de sempre.

Ao professor João Manoel, pela excelente orientação, paciência e conhecimento passado ao longo do trabalho.

Ao professor Luciano Gonçalves Moreira, pela disponibilidade em ajudar, sempre contribuindo e compartilhando conhecimento.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da UFRGS, pela oportunidade de realização deste trabalho.

## RESUMO

O presente trabalho aborda técnicas de controle baseado em eventos para o problema de seguimento de referência e rejeição de perturbação, aplicado a sistemas lineares em tempo discreto. Neste contexto, a atualização do sinal de controle está condicionada à geração de um evento que depende da avaliação de uma função de disparo, de forma que o sistema em malha fechada siga referências e rejeite perturbações em regime permanente. Inicialmente, o problema é apresentado considerando que os estados da planta e do sistema exógeno, que gera os sinais de referência e perturbação, estão disponíveis para medição. Com base na teoria de Lyapunov, são propostas condições para a estabilidade do sistema em malha fechada em termos de desigualdades matriciais lineares ou *Linear Matrix Inequalities (LMIs)*, para regulação perfeita e prática em regime permanente. A regulação prática é proposta usando um critério de disparo relaxado, a fim de evitar que ocorram atualizações periódicas de controle em regime permanente, no caso de uma perturbação ou referência não constante. Problemas de otimização convexos são propostos para calcular os parâmetros das funções de disparo, com o objetivo de reduzir as atualizações de controle. Em seguida, o problema é abordado considerando que os estados do sistema não estão disponíveis para medição, neste caso, uma lei de controle com base em um observador de estados para a realimentação dinâmica do erro de seguimento de referência é utilizada. Na sequência, é abordado o problema de regulação de saída considerando um modelo incerto para a planta, de modo a garantir a rejeição perfeita e prática de perturbação para o sistema em malha fechada. Exemplos numéricos são apresentados ao longo do trabalho para ilustrar a eficiência da estratégia proposta.

**Palavras-chave:** Controle Baseado em Eventos, Seguimento de Referência e Rejeição de Perturbação, Problema de Regulação de saída, Sistemas Incertos, Sistemas de Controle em Rede.

## ABSTRACT

This present work addresses event-based control techniques for reference tracking and disturbance rejection problem applied to discrete-time linear systems. In this context, the update of the control signal is conditioned to the generation of an event that depends on the evaluation of a trigger function, so that the closed loop systems track the references and rejects the disturbances in steady state. Firstly, the full information problem is presented, i.e., when all the states of the plant and of the exosystem, which generates the reference and the disturbance signals, are available as measurements. Conditions in terms of linear matrix inequalities (LMIs) are proposed based on Lyapunov theory for perfect and practical regulation in steady state. The practical disturbance rejection is proposed by a relaxed trigger criterion, in order to avoid the periodic control updates in steady state, in the case of non-constant disturbances. Convex optimization problems are proposed to compute the trigger functions aiming at reducing the control updates. Thereafter, the problem is addressed considering that states are not available as measurements, in this case, a control law based on a state observer for the dynamic tracking error feedback is used. Then, the output regulation problem is addressed considering an uncertain model, in order to guarantee the perfect and practical rejection of disturbance for the closed loop system. Numerical examples are presented throughout the work to illustrate the efficiency of the proposed strategy.

**Keywords:** Event-Triggered Control, Tracking and Disturbance Rejection, Output Regulation Problem, Uncertain Systems, Network Control Systems.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 –	Sistema em malha fechada com sistema exógeno. . . . .	22
Figura 2 –	Esquema <i>PETC</i> com realimentação de estados. . . . .	30
Figura 3 –	Exemplo 1: simulação para o caso do critério não relaxado. . . . .	39
Figura 4 –	Exemplo 1: evolução do sinal de controle e tempo entre eventos para o caso do critério não relaxado. . . . .	40
Figura 5 –	Exemplo 1: simulação para o caso do critério relaxado. . . . .	41
Figura 6 –	Exemplo 1: evolução do sinal de controle e tempo entre eventos para o caso do critério relaxado. . . . .	42
Figura 7 –	Exemplo 2: simulação para o caso do critério não relaxado. . . . .	44
Figura 8 –	Exemplo 2: evolução do sinal de controle e tempo entre eventos para o caso do critério não relaxado. . . . .	45
Figura 9 –	Exemplo 2: simulação para o caso do critério relaxado. . . . .	46
Figura 10 –	Exemplo 2: evolução do sinal de controle e tempo entre eventos para o caso do critério relaxado. . . . .	46
Figura 11 –	Exemplo 3: simulação para o caso do critério não relaxado. . . . .	48
Figura 12 –	Exemplo 3: simulação para o caso do critério relaxado. . . . .	48
Figura 13 –	Esquema <i>PETC</i> aplicado ao controlador dinâmico. . . . .	53
Figura 14 –	Exemplo 4: simulação para o caso do critério não relaxado. . . . .	58
Figura 15 –	Exemplo 4: evolução do sinal de controle e tempo entre eventos para o caso do critério não relaxado. . . . .	58
Figura 16 –	Exemplo 4: simulação para o caso do critério relaxado. . . . .	59
Figura 17 –	Exemplo 4: evolução do sinal de controle e tempo entre eventos para o caso do critério relaxado. . . . .	60
Figura 18 –	Exemplo 5: simulação para o caso do critério não relaxado. . . . .	63
Figura 19 –	Exemplo 5: evolução do sinal de controle e tempo entre eventos para o caso do critério não relaxado. . . . .	63
Figura 20 –	Exemplo 5: simulação para o caso do critério relaxado. . . . .	64
Figura 21 –	Exemplo 5: evolução do sinal de controle e tempo entre eventos para o caso do critério relaxado. . . . .	65
Figura 22 –	Exemplo 6: simulação para o caso do critério não relaxado. . . . .	66
Figura 23 –	Exemplo 6: evolução do sinal de controle e tempo entre eventos para o caso do critério não relaxado. . . . .	67
Figura 24 –	Exemplo 6: simulação para o caso do critério relaxado. . . . .	68
Figura 25 –	Exemplo 6: evolução do sinal de controle e tempo entre eventos para o caso do critério relaxado. . . . .	68
Figura 26 –	Exemplo 7: simulação para o caso do critério não relaxado com $\beta = 0,001$ . . . . .	79

Figura 27 – Exemplo 7: simulação para o caso do critério não relaxado com $\beta = 0,02$ .	79
Figura 28 – Exemplo 7: simulação para o caso do critério não relaxado com $\beta = 0,03$ .	80
Figura 29 – Exemplo 7: simulação para o caso do critério relaxado com $\beta = 0,001$ .	81
Figura 30 – Exemplo 7: simulação para o caso do critério relaxado com $\beta = 0,02$ .	82
Figura 31 – Exemplo 7: simulação para o caso do critério relaxado com $\beta = 0,03$ .	82

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Exemplo 1: número de atualizações do sinal de controle para $k \in [0 \ 300]$ . . . . .	41
Tabela 2 –	Exemplo 1: número de atualizações do sinal de controle e máximo $ e[k] $ em regime permanente para diferentes valores de $\sigma$ com $k \in [0 \ 300]$ . . . . .	42
Tabela 3 –	Exemplo 2: número de atualizações do sinal de controle para $k \in [0 \ 300]$ . . . . .	47
Tabela 4 –	Exemplo 4: número de atualizações do sinal de controle para $k \in [0 \ 300]$ . . . . .	60
Tabela 5 –	Exemplo 7: matrizes obtidas para PO 5 . . . . .	78
Tabela 6 –	Exemplo 7: matrizes obtidas para PO 6. . . . .	81
Tabela 7 –	Exemplo 7: número de atualizações do sinal de controle para cada limite de incerteza para $k \in [0 \ 300]$ . . . . .	83

## LISTA DE ABREVIATURAS

DAR	<i>Diferencial-Algebraic Representation</i>
ETC	<i>Event-triggered Control</i>
ETM	<i>Event-triggering Mechanism</i>
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i>
NCS	<i>Networked Control System</i>
PMI	Princípio do Modelo Interno
PETC	<i>Periodic Event-triggered Control</i>
ZOH	<i>Zero-Order Hold</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\sum$	Somatório
$0_{n \times m}$	Matriz de dimensão $n \times m$ com todos elementos nulos
$I_n$	Matriz identidade de ordem $n$
$M'$	Matriz transposta da matriz $M$
$M > (\geq) 0$	Matriz (semi)definida positiva
$\text{tr}(M)$	Traço da matriz $M$
$\text{diag}(m_1, \dots, m_n)$	Matriz do tipo bloco diagonal, cujos blocos são $m_1$ a $m_n$
$\lambda_{\min}(M)$	Menor autovalor da matriz $M$
$\lambda_{\max}(M)$	Maior autovalor da matriz $M$
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
*	Usado em matrizes simétricas para representar o respectivo elemento transposto da matriz
$\mathbb{R}^n$	Espaço euclidiano de ordem $n$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto de matrizes reais de ordem $n \times m$
$\mathcal{E}(P, \eta)$	Elipsoide definido por $xPx \leq \eta$
$\mathcal{S}$	Bola de raio $\sqrt{\sigma^{-1}}$

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	14
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	17
<b>2.1</b>	<b>Controle baseado em eventos</b>	17
2.1.1	Monitoramento da Função de Disparo: Contínuo vs. Periódico	17
2.1.2	Critérios de disparo	19
<b>2.2</b>	<b>Problema de Regulação de saída</b>	21
2.2.1	Formulação do Problema	21
2.2.2	Realimentação Estática de Estados	24
2.2.3	Realimentação Dinâmica do Erro	25
2.2.4	Princípio do Modelo Interno	25
2.2.5	Problema de Regulação de Saída Sob a Estratégia de Controle Baseado em Eventos	26
<b>2.3</b>	<b>Comentários Finais</b>	27
<b>3</b>	<b>CONTROLE BASEADO EM REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS</b>	28
<b>3.1</b>	<b>Introdução</b>	28
<b>3.2</b>	<b>Formulação do Problema</b>	28
3.2.1	Estratégia de Controle Baseado em Eventos	30
<b>3.3</b>	<b>Condições de Estabilidade</b>	31
3.3.1	Estratégia de Controle Baseado em Eventos com Relaxação	33
<b>3.4</b>	<b>Problemas de Otimização</b>	35
<b>3.5</b>	<b>Exemplos numéricos</b>	37
3.5.1	Exemplo 1: seguimento de referência constante e rejeição de perturbação senoidal	37
3.5.2	Exemplo 2: seguimento de uma referência periódica composta por sinais com frequências múltiplas	43
3.5.3	Exemplo 3: dinâmica do sistema em malha fechada sob incertezas nos parâmetros	47
<b>3.6</b>	<b>Comentários Finais</b>	49
<b>4</b>	<b>CONTROLE BASEADO EM UM OBSERVADOR DE ESTADOS</b>	50
<b>4.1</b>	<b>Introdução</b>	50
<b>4.2</b>	<b>Formulação do Problema</b>	51
4.2.1	Estratégia de Controle Baseado em Eventos	52
<b>4.3</b>	<b>Condições de Estabilidade</b>	54
4.3.1	Estratégia de Controle baseado em Eventos com Relaxação	55

<b>4.4</b>	<b>Problemas de Otimização</b>	56
<b>4.5</b>	<b>Exemplos numéricos</b>	56
4.5.1	Exemplo 4: seguimento de referência constante e rejeição de perturbação senoidal	56
4.5.2	Exemplo 5: seguimento e rejeição de sinais senoidais	61
4.5.3	Exemplo 6: sistema incerto	65
<b>4.6</b>	<b>Comentários Finais</b>	69
<b>5</b>	<b>REGULAÇÃO DE SAÍDA ROBUSTA</b>	70
<b>5.1</b>	<b>Introdução</b>	70
<b>5.2</b>	<b>Formulação do Problema</b>	70
5.2.1	Estratégia de Controle Baseado em Eventos	72
<b>5.3</b>	<b>Condições de Estabilidade</b>	73
5.3.1	Estratégia de Controle Baseado em Eventos com Relaxação	75
<b>5.4</b>	<b>Problemas de Otimização</b>	76
<b>5.5</b>	<b>Exemplo Numérico</b>	77
5.5.1	Exemplo 7: regulação de saída robusta	77
<b>5.6</b>	<b>Comentários Finais</b>	83
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	84
	<b>REFERÊNCIAS</b>	87
	<b>APÊNDICE A CONCEITOS BÁSICOS</b>	92
<b>A.1</b>	<b>Estabilidade de Sistemas Dinâmicos</b>	92
A.1.1	Estabilidade no Sentido de Lyapunov	92
A.1.2	Conjuntos Invariantes	93
<b>A.2</b>	<b>Sistemas Incertos</b>	93
A.2.1	Incertezas Limitadas em Norma	94
<b>A.3</b>	<b>Desigualdades Matriciais Lineares</b>	95
A.3.1	Definição	95
A.3.2	Complemento de Schur	95
A.3.3	<i>S-Procedure</i>	96
A.3.4	Lema de Finsler	96

# 1 INTRODUÇÃO

Com a difusão dos sistemas de controle em rede ou *Network Control Systems (NCSs)*, muitas estratégias de controle, com foco em garantia de estabilidade em malha fechada e síntese de controladores, têm sido propostas conforme mostrado por (HESPANHA; NAGHSHTABRIZI; XU, 2007) e suas referências, a fim de proporcionar uma melhor utilização dos recursos, como por exemplo, economia de banda, economia de energia (LIAN; MOYNE; TILBURY, 1999; YOOK; TILBURY; SOPARKAR, 2002; AKYILDIZ *et al.*, 2002; MAZO; TABUADA, 2011; ZHANG; GAO; KAYNAK, 2013) e redução na fadiga dos atuadores (MOREIRA, 2018). Neste contexto, por exemplo, é desejável que estes recursos sejam utilizados com eficiência, de modo que as ações de controle ocorram somente quando o sinal de controle aplicado à planta necessite efetivamente ser atualizado, ao contrário da abordagem clássica ou periódica, também chamada de *time-triggered control* (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997), onde claramente pode ocorrer o desperdício de recursos.

A fim de evitar o desperdício dos recursos acima mencionados, uma alternativa de estratégia de controle utilizada em *NCSs* é o chamado controle baseado em eventos ou *Event-triggered Control (ETC)*. Nesta abordagem, a atualização do sinal de controle está condicionada à geração de um evento, que ocorre através da avaliação de uma função que depende da evolução dos estados ou das saídas do sistema, resultando em uma redução da atualização de controle (HEEMELS; JOHANSSON; TABUADA, 2012). Com isso, a partir dos trabalhos de (ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 1999) e (ÅRZÉN, 1999), inúmeras aplicações tem motivado o estudo da estratégia de controle baseado em eventos no campo de *NCSs*, como por exemplo (LUNZE; LEHMANN, 2010), (LEHMANN; JOHANSSON, 2012), (MARCHAND *et al.*, 2013), (SBARBARO; TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2014), (POSTOYAN *et al.*, 2015), (TARBOURIECH *et al.*, 2016), (MOREIRA *et al.*, 2019, 2020) entre outras abordagens apresentadas recentemente no *survey* descrito por (PENG; LI, 2018).

Grande parte dos trabalhos sobre controle baseado em eventos encontrados na literatura concentram-se em um mecanismo de disparo que realiza um monitoramento contínuo dos estados ou das saídas do sistema. No entanto, considerando que os controladores são

em geral implementados sobre plataformas digitais, é mais adequado que o mecanismo de disparo monitore os estados ou as saídas do sistema em instantes discretos de amostragem, gerando um evento se uma determinada condição de disparo for violada. Essa ideia foi apresentada por (HEEMELS; DONKERS; TEEL, 2011, 2013) através do *Periodic Event-triggered Control (PETC)*. No caso de sistemas lineares o *PETC* possibilita o uso de um controlador baseado na discretização exata do sistema, diferentemente da estratégia de monitoramento em tempo contínuo, no qual o controlador resultante precisa ainda ser discretizado para implementação em *NCSs*, o que resulta em um controlador aproximado daquele projetado (HEEMELS *et al.*, 2015). Neste contexto pode-se citar o trabalho apresentado por (GROFF, 2016), no qual a partir de um modelo discretizado do sistema, propõe-se condições de estabilidade em malha fechada através de desigualdades matriciais lineares ou *Linear Matrix Inequalities (LMIs)*, utilizadas na solução de problemas de otimização convexos para o cálculo dos parâmetros do critério de disparo.

Sob estas abordagens, o problema de seguimento de referência e rejeição de perturbação tem sido estudado. Neste problema, é desejável que mesmo com a estratégia de controle baseado em eventos se consiga seguir referências e rejeitar perturbações, sendo estas propriedades garantidas em geral através do Princípio do Modelo Interno (PMI), (FRANCIS; WONHAM, 1975). Em (QIAN; LIU; FENG, 2019) este problema é investigado considerando um controle adaptativo para lidar com incertezas no sistema e um mecanismo de disparo que monitora continuamente a saída da planta, de forma a garantir um intervalo mínimo entre eventos e o perfeito seguimento de referência e rejeição de perturbação. Em (MA; GHASEMI; SONG, 2019) uma abordagem para o problema de seguimento de referência é apresentada. Este trabalho implementa um controlador repetitivo que considera uma estratégia periódica de monitoramento, o que acaba por reduzir as atualizações de controle, sendo este um dos poucos trabalhos que implementam *PETC* para o problema de seguimento de referência, mas sem considerar a rejeição de perturbação. Outro trabalho recente é apresentado por (SBARBARO; GOMES DA SILVA JR.; MOREIRA, 2020), no qual o perfeito seguimento de referência e rejeição de perturbação aplicado a sistemas lineares em tempo discreto é tratado, porém a estratégia proposta não é robusta diante de incertezas paramétricas na planta.

Motivado por esse contexto, o presente trabalho aborda o problema de seguimento de referência e rejeição de perturbação em regime permanente aplicado a sistemas lineares sob a estratégia de controle baseado em eventos periódica. Neste caso, um *framework* de sistemas discretos no tempo é utilizado. Esta abordagem é baseada nas ideias apresentadas por (SBARBARO; GOMES DA SILVA JR.; MOREIRA, 2020). Para tanto, os seguintes objetivos específicos podem ser identificados:

- Proposta de uma estratégia de controle considerando uma realimentação estática de estados, com foco no seguimento de referência e rejeição de perturbação perfeita e prática em regime permanente;

- Proposta de uma estratégia de controle considerando uma realimentação dinâmica do erro, com foco no seguimento de referência e rejeição de perturbação perfeita e prática em regime permanente;
- Proposta de uma estratégia para o problema de regulação de saída perfeita e prática em regime permanente, considerando incertezas paramétricas na planta.

Com base nestes objetivos, a organização desta dissertação de mestrado é apresentada como segue.

No Capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica referente à estratégia de controle baseado em eventos e o problema de regulação de saída. Neste sentido também são abordados os principais conceitos que envolvem a estratégia de controle baseado em eventos e o problema de regulação de saída.

No Capítulo 3, é apresentada a formulação da estratégia proposta para uma lei de controle com realimentação estática de estados. Neste contexto, condições para a estabilidade na forma de *LMI*s são propostas para o perfeito seguimento de referência em regime permanente. A abordagem é então estendida para o problema de regulação de saída prática, no qual é proposto um critério de disparo relaxado. Além disso, problemas de otimização são apresentados para o cálculo da função de disparo com objetivo de reduzir as atualizações de controle. Exemplos numéricos e simulações são utilizados para validar e comparar os resultados obtidos.

No Capítulo 4, o mesmo problema é abordado, porém com o uso de uma realimentação dinâmica do erro. Nesta abordagem considera-se um controlador baseado em um observador de estados, no qual é realizada a estimação dos estados da planta e do sistema exógeno. Com isso, tem-se que o controlador implementa o modelo interno, visto que este contém uma cópia das dinâmicas dos sinais de referência e perturbação. Exemplos numéricos ilustram os resultados obtidos.

No Capítulo 5, diferentemente do capítulo anterior, uma abordagem *LMI* baseada no Lema de Finsler é apresentada para o problema de regulação de saída. Neste caso, considera-se que a planta possui incertezas paramétricas limitadas em norma, além de ser afetada por um sinal de perturbação na entrada de controle. Problemas de otimização convexa são empregados para sintetizar a função de disparo a fim de se obter uma redução nas atualizações de controle. Exemplos numéricos ilustram a eficiência desta abordagem.

Por fim, no Capítulo 6, são apresentadas conclusões e algumas discussões sobre as perspectivas de trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta uma revisão bibliográfica sobre a estratégia de controle baseado em eventos e sobre o problema de regulação de saída, bem como os principais conceitos que envolvem estes dois temas, os quais são utilizados ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

### 2.1 Controle baseado em eventos

Diferentemente da estratégia de controle amostrado (digital) clássico, onde a atualização do sinal de controle ocorre em instantes de amostragem igualmente espaçados no tempo, a estratégia de controle baseado em eventos realiza esta atualização em instantes específicos de tempo, nos quais uma determinada condição é satisfeita, o que implica em atualizações aperiódicas do sinal de controle. Basicamente, a estratégia de controle baseada em eventos é descrita através de dois elementos: a lei de controle e o mecanismo de disparo ou *Event-triggering Mechanism (ETM)*. Nesta estratégia, o *ETM* decide através de uma regra ou condição de disparo, quando a entrada de controle será atualizada (HEEMELS; JOHANSSON; TABUADA, 2012). Neste trabalho será proposta uma estratégia de controle baseado em eventos aplicada a sistemas lineares em tempo discreto.

#### 2.1.1 Monitoramento da Função de Disparo: Contínuo vs. Periódico

O monitoramento da função de disparo pode ser realizado através de duas abordagens: monitoramento contínuo, *i.e.*, a avaliação da condição de disparo é realizada durante todo o tempo, (WANG; LEMMON, 2011; MAZO; TABUADA, 2011; BORGERS; HEEMELS, 2014; MOREIRA *et al.*, 2019) ou monitoramento periódico (*PETC*), no qual a avaliação da condição de disparo é realizada em instantes discretos de tempo (HEEMELS; DONKERS; TEEL, 2011, 2013; CHEN; HAO, 2015; GROFF *et al.*, 2016). O *PETC* pode ser melhor entendido através do algoritmo abaixo:

---

**Algoritmo 1** Estratégia de controle baseado em eventos
 

---

```

if  $k = 0$  then
  Calcula  $u[0]$ 
   $i \leftarrow 0$ 
else
  if  $f(\cdot) > 0$  then
    Gera evento
     $i \leftarrow i + 1$ 
     $n_i \leftarrow k$ 
    Calcula  $u[n_i]$ 
     $u[k] \leftarrow u[n_i]$ 
  else
     $u[k] \leftarrow u[n_i]$ 
  end if
end if

```

---

Neste algoritmo tem-se que após a inicialização, dada em  $k = 0$ , uma determinada função de disparo é avaliada. Deste modo, se em um dado instante de tempo  $k$ , a função de disparo  $f(\cdot)$  for positiva, primeiramente um evento é gerado, seguido da atualização do instante de tempo  $n_i$ , após o sinal de controle é calculado e transmitido para o dispositivo atuador, *i.e.*,  $u[k] = u[n_i]$ , fazendo com que a entrada de controle seja efetivamente atualizada. Caso contrário, o sinal de controle é mantido constante na entrada da planta no intervalo  $[n_i, n_i + T)$  através de um *Zero-Order Hold (ZOH)*.

De forma comparativa, o *PETC* apresenta vantagens frente à avaliação contínua da função de disparo. A implementação do *ETM* com monitoramento contínuo requer principalmente que seja assegurada a existência de intervalo mínimo entre eventos, caso contrário o *ETM* poderá implicar no comportamento de *Zenão* (TABUADA, 2007), o que na prática impossibilita a implementação da estratégia. Já o *PETC* garante que o intervalo entre eventos seja de no mínimo um período de amostragem, não sendo possível a ocorrência de comportamento de *Zenão*. Outra vantagem é que esta estratégia possibilita a implementação em diversos padrões de *time-sliced scheduling*, que é o período de tempo alocado para execução de uma determinada tarefa em arquiteturas de sistemas multitarefas (HEEMELS *et al.*, 2015). É importante observar que em muitos casos a abordagem com monitoramento contínuo necessita da discretização do controlador e do monitoramento periódico dos sinais em um estágio final de implementação, o que resulta em uma estratégia *PETC*, mas sem garantias formais. Este fato tem motivado o estudo diretamente com o *PETC*, visto ainda que *NCSs* são geralmente implementados em plataformas digitais.

### 2.1.2 Critérios de disparo

O principal ponto da estratégia de controle baseada em eventos consiste em definir o critério de disparo. Para melhor ilustrar como se dá esta definição, suponha o seguinte sistema linear em tempo discreto, obtido através da discretização exata de um sistema em tempo contínuo, (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997):

$$x[k + 1] = Ax[k] + Bu[k], \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Tem-se então os principais critérios utilizados na literatura.

- *Critérios de erro absoluto*: este tipo de critério considera a medida de erro absoluto entre o valor do estado ou saída no último evento e seu valor atual, *i.e.*, definido por  $\delta_x[k] = x[n_i] - x[k]$ , de forma, que se a norma de  $\delta_x[k]$  for maior que um escalar positivo  $\epsilon$ , então um evento é gerado, ou seja, se  $\|\delta_x[k]\| \geq \epsilon$ , então o sinal de controle deve ser atualizado. É possível reescrever este critério como  $\delta_x[k]' \delta_x[k] \geq \epsilon^2$ , o que equivale a fazer

$$\delta_x[k]' \epsilon^{-2} I \delta_x[k] \geq 1. \quad (2)$$

Este critério é usado por exemplo em (TIBERI; ARAÚJO; JOHANSSON, 2012) e (DURAND; MARCHAND, 2009). Observe que estes trabalhos consideram a aplicação do critério em tempo contínuo, porém do ponto de vista de critério a análise não se altera. Uma forma de generalizar o critério do erro absoluto, consiste em substituir  $\epsilon^{-2}I$  por uma matriz de ponderação  $Q_\epsilon$  real e simétrica positiva definida de dimensões apropriadas. Desta forma, tem-se o seguinte critério

$$\delta_x[k]' Q_\epsilon \delta_x[k] \geq 1. \quad (3)$$

Assim, cada variável de estado, bem como os termos cruzados serão ponderados de forma diferente, o que implica em um maior grau de liberdade no projeto de  $Q_\epsilon$  e conseqüentemente uma possível maior redução na geração de eventos. Este critério pode ser descrito no formato utilizado no Algoritmo 1. Para isso, basta somar -1 em ambos os lados da desigualdade, o que leva a  $\delta_x[k]' Q_\epsilon \delta_x[k] - 1 \geq 0$  e, portanto a  $f(\delta_x[k]) = \delta_x[k]' Q_\epsilon \delta_x[k] - 1 \geq 0$ .

Observe-se que este critério evita a ocorrência de comportamento de *Zenão* quando utilizado em um *ETM* com monitoração contínua. Porém não leva à estabilidade assintótica do sistema em malha fechada, ou seja, o estado não irá convergir para a origem, mas para uma região em torno desta, a qual depende de  $\epsilon$  ou  $Q_\epsilon$ . Este fato tem motivado a implementação dos critérios de erro relativo.

- *Critérios de erro relativo*: um critério deste tipo, considerando sistemas de tempo contínuo, foi proposto por (TABUADA, 2007), que demonstrou sua capacidade de

garantir a estabilidade assintótica, bem como ausência de comportamento de *Zenão* para uma ampla classe de sistemas mesmo com implementações contínuas. Neste tipo de critério, um evento será gerado se a relação entre a norma de  $\delta_x[k]$  e a norma do estado  $x[k]$  for maior ou igual a um limiar dado por  $\sigma_0 > 0$ , conforme segue

$$\frac{\|\delta_x[k]\|}{\|x[k]\|} \geq \sigma_0. \quad (4)$$

Observe que (4) pode ser reescrita como  $\|\delta_x[k]\| \geq \sigma_0 \|x[k]\|$ , ou, equivalentemente como:

$$f(\delta_x[k], x[k]) = \delta_x[k]' \delta_x[k] - \sigma_0 x[k]' x[k] \geq 0. \quad (5)$$

Considerando a aplicação do critério (5) com monitoramento periódico pode-se citar o trabalho de (HEEMELS; DONKERS; TEEL, 2011), ao passo que (TALLA-PRAGADA; CHOPRA, 2012) o utiliza considerando o monitoramento contínuo.

Assim, utilizando a mesma técnica apresentada no erro absoluto, tem-se então uma generalização do critério através de matrizes de ponderação. Neste caso, uma nova função de disparo pode ser definida como:

$$f(\delta_x[k], x[k]) = \delta_x[k]' Q_{\delta_x} \delta[k] - x[k]' Q_{\sigma} x[k], \quad (6)$$

*i.e.*, um evento é gerado se  $\delta_x[k]' Q_{\delta_x} \delta[k] \geq x[k]' Q_{\sigma} x[k]$ , onde  $Q_{\delta_x}$  e  $Q_{\sigma}$  são matrizes reais e simétricas definidas positivas de dimensões apropriadas que devem ser escolhidas pelo projetista. Este critério pode garantir a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada, sendo utilizado em (GROFF, 2016) no contexto de monitoramento periódico e (MOREIRA *et al.*, 2016) no contexto de monitoramento contínuo.

- *Critério de erro relativo relaxado*: este critério pode ser visto como uma extensão do critério do erro relativo. Neste caso, considera-se a seguinte função de disparo

$$f(\delta_x[k], x[k]) = \delta_x[k]' Q_{\delta_x} \delta[k] - x[k]' Q_{\sigma} x[k] - \gamma, \quad (7)$$

onde  $\gamma$  representa uma escalar positivo. Logo, um evento é gerado se  $\delta_x[k]' Q_{\delta_x} \delta[k] - x[k]' Q_{\sigma} x[k] > \gamma$ . Este critério não leva à estabilidade assintótica devido ao escalar  $\gamma$ , uma vez que a condição de disparo nunca irá ocorrer próximo à origem. Neste caso, a convergência dos estados irá ocorrer para um ponto de equilíbrio diferente da origem, quando aplicado em sistemas estáveis e para um ciclo limite em sistemas instáveis. Em geral este critério corresponde a uma estabilidade prática, *i.e.*, com um pequeno erro limitado em regime permanente, conforme abordado em (BORGERS; HEEMELS, 2014; LEHMANN; JOHANSSON, 2012; SBARBARO; GOMES DA SILVA JR.; MOREIRA, 2020).

## 2.2 Problema de Regulação de saída

O problema de seguimento de referência e regulação de saída é um tema de grande importância prática dentro da teoria de controle. Este problema consiste principalmente no projeto de uma lei de controle capaz de estabilizar uma determinada planta, e garantir que a saída do sistema em malha fechada atinja ou siga uma referência e rejeite perturbações externas. Deste modo, devido ao crescente avanço tecnológico, este problema tem sido objeto de constante estudo, com aplicações em diversas áreas da engenharia, sendo a estabilidade, precisão no seguimento e rejeição de perturbações fatores de grande relevância.

Em geral, este problema é tratado na literatura com base no PMI e considera que os sinais de referência e perturbação são modelados por um sistema exógeno ou *exosystem* (SABERI; SANNUTI; STOOORVOGEL, 2000), para solução das chamadas equações de regulação (FRANCIS; WONHAM, 1975; BYRNES; PRISCOLI; ISIDORI, 1997).

A seguir, o problema de seguimento de referência e rejeição de perturbação, será formalmente definido. Estas definições servirão como base para teoria apresentada ao longo do trabalho.

### 2.2.1 Formulação do Problema

Considere uma planta linear afetada por perturbações, onde deseja-se, em malha fechada, que suas saídas sigam assintoticamente um sinal de referência predefinido. Neste caso, supõe-se que os sinais de perturbação e referência são gerados por um sistema linear autônomo, chamado de sistema exógeno (*exosystem*). Desta forma, considere a seguinte equação que descreve a planta:

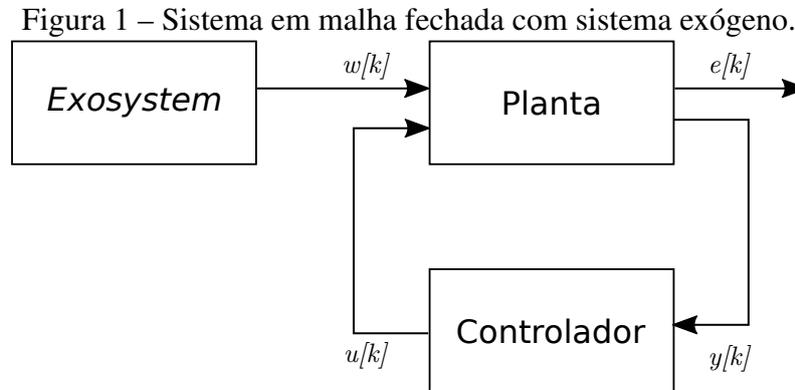
$$\begin{aligned}x[k + 1] &= Ax[k] + Bu[k] + Ew[k], \\y[k] &= Cx[k], \\e[k] &= Cx[k] + Qw[k], \quad k \in \mathbb{N},\end{aligned}\tag{8}$$

onde  $x[k] \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u[k] \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle,  $w[k] \in \mathbb{R}^{n_s}$  é o vetor de estados do sistema exógeno,  $y[k] \in \mathbb{R}^{n_y}$  representa o sinal de saída,  $e[k] \in \mathbb{R}^{n_e}$  representa o erro entre o sinal de saída e a referência, e  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $E$  e  $Q$  são matrizes reais constantes de dimensões apropriadas. Assume-se que  $w[k]$  é gerado pelo seguinte sistema exógeno:

$$w[k + 1] = Sw[k], \quad k \in \mathbb{N},\tag{9}$$

onde  $S \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$  é uma matriz real constante com uma estrutura  $S = \text{diag}(S_1, S_2, \dots, S_{n_s})$ , que contém as dinâmicas dos sinais de referência, dado por  $r[k] = -Qw[k]$  e perturbação, dado por  $d[k] = C_d w[k]$ , sendo  $C_d$  uma matriz real constante de dimensão apropriada. Note que o sinal negativo na referência foi considerado a partir da definição do erro de

seguimento, que é dado por  $e[k] = y[k] - r[k]$ . A estrutura incluindo o sistema exógeno é esquematizada na Figura 1. Observe que, nesta figura, os sinais  $r[k]$  e  $d[k]$  estão implicitamente representados no sinal  $w[k]$ .



Fonte: do autor

Assim, conforme mencionado, deseja-se que as saídas da planta sigam um sinal de referência predefinido. Isto equivale a fazer com que o sinal de erro seja nulo em regime permanente, *i.e.*,  $e[k]$  deve convergir assintoticamente para zero, mesmo na presença de perturbações. Se este comportamento ocorrer, assumimos que o erro de seguimento de referência é regulado para zero, portanto a perturbação é perfeitamente rejeitada e a referência é seguida em regime permanente.

De um modo geral, o erro de seguimento de referência não converge naturalmente para zero, sendo então necessário determinar uma lei de controle  $u[k]$  que resulte neste comportamento. A forma mais simples de implementação desta lei de controle é assumir que todos os estados (planta e sistema exógeno) estão disponíveis para medição, sendo então implementada uma lei de controle por realimentação estática desses estados. Contudo, muitas vezes não é possível implementar esta abordagem, pois geralmente nem todos os estados da planta estão disponíveis, tampouco os do sistema exógeno. Em virtude disso, é mais natural considerar que o sinal de controle é gerado através da realimentação dinâmica do erro. Desta forma, pode-se considerar dois problemas de regulação: o primeiro, chamado “*full information regulation problem*”, que implementa uma realimentação estática dos estados do sistema, e o segundo, denominado de realimentação dinâmica do erro de seguimento de referência (SABERI; SANNUTI; STOORVOGEL, 2000). Estes dois problemas são formalmente definidos a seguir.

**Definição 2.2.1** (Realimentação estática de estados). *Considere a planta apresentada em (8), o sistema exógeno apresentado em (9) e uma lei de controle dada por:*

$$u[k] = K_x x[k] + K_r w[k]. \quad (10)$$

*O full information regulation problem é o problema de determinação das matrizes  $K_x$  e  $K_r$ , de modo que os seguintes problemas sejam solucionados*

- *Estabilização: o sistema*

$$x[k + 1] = (A + BK_x) x[k], \quad (11)$$

*é assintoticamente estável;*

- *Regulação: para qualquer condição inicial  $(x[0], w[0])$ , as trajetórias do sistema*

$$\begin{aligned} x[k + 1] &= (A + BK_x) x[k] + (BK_r + E) w[k], \\ w[k + 1] &= Sw[k], \\ e[k] &= Cx[k] + Qw[k], \end{aligned} \quad (12)$$

*são tais que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e[k] = 0. \quad (13)$$

Observe que o sistema sem a perturbação é assintoticamente estável, então as variáveis internas são limitadas para referências e perturbações limitadas.

**Definição 2.2.2** (Realimentação dinâmica do erro). *Considere a planta apresentada em (8), o sistema exógeno apresentado em (9) e um controlador dado por:*

$$\begin{aligned} \xi[k + 1] &= F\xi[k] + Ge[k], \\ u[k] &= H\xi[k]. \end{aligned} \quad (14)$$

*O problema de regulação dinâmica do erro é o problema de determinação das matrizes  $F$ ,  $G$  e  $H$  do controlador (14), tal que os seguintes problemas sejam solucionados*

- *Estabilização: o sistema*

$$\begin{aligned} x[k + 1] &= Ax[k] + BH\xi[k], \\ \xi[k + 1] &= F\xi[k] + GCx[k], \end{aligned} \quad (15)$$

*é assintoticamente estável;*

- *Regulação: para qualquer condição inicial  $(x[0], \xi[0], w[0])$ , as trajetórias do sistema*

$$\begin{aligned} x[k + 1] &= Ax[k] + BH\xi[k] + Ew[k], \\ \xi[k + 1] &= F\xi[k] + Ge[k], \\ w[k + 1] &= Sw[k], \\ e[k] &= Cx[k] + Qw[k], \end{aligned} \quad (16)$$

*são tais que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e[k] = 0. \quad (17)$$

### 2.2.2 Realimentação Estática de Estados

Considerando a Definição 2.2.1 previamente apresentada, deseja-se agora estabelecer condições necessárias e suficientes para a existência de um controlador que resolva o problema de regulação de saída com realimentação estática de estados, de forma que seja possível construí-lo sempre que ele existir. Para este problema, são assumidas as seguintes hipóteses:

**A1** O par  $(A, B)$  é estabilizável;

**A2** A matriz  $S$  é anti Schur-estável.

Sem perda de generalidade, a hipótese A2 implica que não há condições iniciais  $w[0]$  de modo que o sinal  $w[k]$  convirja assintoticamente para zero. Na verdade, se a matriz  $S$  for Schur-estável, então os sinais de referência e perturbação irão convergir para zero, *i.e.*, a perturbação não terá efeito sobre o comportamento assintótico do sistema e a referência poderá ser seguida considerando um ganho estabilizante para o sistema em malha fechada. Assim, a hipótese A2 implica que o sistema exógeno gera sinais de referência e perturbação que não se extinguem com o tempo, sendo estes os sinais de interesse para a abordagem deste trabalho.

Sob estas hipóteses, considera-se o teorema a seguir.

**Teorema 1** (Realimentação estática de estados (SABERI; SANNUTI; STOORVOGEL, 2000)). *Considere que todos os estados do sistema estão disponíveis para medição. Suponha que as hipóteses A1 e A2 são satisfeitas. Então o problema em questão é resolvido se e somente se existirem matrizes  $\Pi$  e  $\Gamma$ , que verificam o seguinte sistema de equações matriciais lineares:*

$$\begin{aligned}\Pi S &= A\Pi + B\Gamma + E, \\ 0 &= C\Pi + Q.\end{aligned}\tag{18}$$

*Além disso, uma lei de controle adequada, que realimenta os estados é dada por:*

$$u[k] = K_x x[k] + (\Gamma - K_x \Pi) w[k],\tag{19}$$

*onde  $K_x$  é uma matriz que dever ser determinada de modo que  $(A + BK_x)$  seja Schur-estável.*

O conjunto de equações descrito em (18), também chamado de equações de regulação, representa a solução do problema de regulação de saída para o caso de sistemas lineares. Este problema foi inicialmente abordado por (FRANCIS; WONHAM, 1975) através da solução da equação de Sylvester, sendo generalizado posteriormente por (BYRNES; PRISCOLI; ISIDORI, 1997) para o caso de sistemas não lineares. Neste caso,  $\Pi w[k]$  representa a trajetória de referência do estado, *i.e.*, a trajetória a ser seguida pelo estado quando  $k \rightarrow \infty$  para que seja efetivamente obtido que  $e[k] \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

Considerando  $\Gamma$  e  $\Pi$  incógnitas na equação (18), o seguinte resultado provê condições necessárias e suficientes para que as equações de regulação tenham solução.

**Lema 2.2.1** (HAUTUS 1970). *O sistema de equações (18), com incógnitas  $\Gamma$  e  $\Pi$ , tem solução para qualquer  $E$  e  $Q$ , se e somente se*

$$\text{rank} \left( \begin{bmatrix} A - \lambda I_n & B \\ C & 0_m \end{bmatrix} \right) = n + m, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \mid \det(\lambda I_{n_s} - S) = 0.$$

Basicamente, este lema implica que o problema de realimentação estática tem solução se e somente se os autovalores do sistema exógeno  $S$  não coincidirem com os zeros de transmissão do sistema (8).

### 2.2.3 Realimentação Dinâmica do Erro

Para este problema, considera-se a seguinte hipótese:

**A3** O par  $\left( \begin{bmatrix} C & Q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & E \\ 0_{n_s \times n} & S \end{bmatrix} \right)$  é observável.

Esta hipótese complementa as condições para a solução do problema de realimentação dinâmica do erro, conforme enunciado no teorema a seguir.

**Teorema 2** (Realimentação dinâmica do erro (SABERI; SANNUTI; STOORVOGEL, 2000)). *Considere o problema de realimentação dinâmica do erro. Suponha que as hipóteses A1, A2 e A3 sejam satisfeitas. Existe uma lei de controle descrita pela equação (14) que resolve o problema de realimentação dinâmica do erro se e somente se existirem duas matrizes  $\Pi$  e  $\Gamma$  de modo que as equações de regulação (18) sejam verificadas.*

*Além disso, uma lei de controle adequada é dada por:*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}[k+1] \\ \hat{w}[k+1] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}[k] \\ \hat{w}[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u[k] \\ &+ \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} C & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}[k] \\ \hat{w}[k] \end{bmatrix} - e[k] \right), \end{aligned} \quad (20)$$

$$u[k] = K_x \hat{x}[k] + (\Gamma - K_x \Pi) \hat{w}[k],$$

onde  $K_x$ ,  $G_1$  e  $G_2$  são matrizes a serem determinadas, tais que

$$(A + BK_x) \text{ e } \begin{bmatrix} A + G_1 C & E + G_1 C \\ G_2 Q & S + G_2 Q \end{bmatrix}, \quad (21)$$

sejam Schur-estáveis.

Note que (20) é na verdade um observador de estados dos sistemas (8) e (9).

### 2.2.4 Princípio do Modelo Interno

A partir do Teorema 2 tem-se que um controlador que resolve o problema de realimentação dinâmica do erro é descrito da forma (14), com  $\xi[k] = [\hat{x}[k]' \ \hat{w}[k]']'$ , apresenta

matrizes  $F$ ,  $G$  e  $H$ , dadas por:

$$F = \begin{bmatrix} A + G_1C + BK_x & E + G_1Q + B(\Gamma - K_x\Pi) \\ G_2C & S + G_2Q \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} -G_1 \\ -G_2 \end{bmatrix}; \quad (22)$$

$$H = \begin{bmatrix} K_x & (\Gamma - K_x\Pi) \end{bmatrix}.$$

Uma propriedade importante do Teorema 2 diz respeito ao princípio do modelo interno, sendo formalizada a seguir.

**Propriedade 1** (Princípio do Modelo Interno). *A matriz  $F$  apresentada em (22) é tal que*

$$F\Sigma = \Sigma S \quad (23)$$

para alguma matriz  $\Sigma$  com  $\text{rank } n_s$ . Assim, qualquer autovalor de  $S$  é também autovalor de  $F$ .

*Prova.* Defina-se  $\Sigma$  como

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Pi \\ I \end{bmatrix}, \quad (24)$$

tal que por construção  $\text{rank}(\Sigma) = n_s$ . Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned} F\Sigma &= \begin{bmatrix} A\Pi + G_1C\Pi + BK_x\Pi + E + G_1Q + B(\Gamma - K_x\Pi) \\ G_2C\Pi + S + G_2Q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A\Pi + G_1C\Pi + BK_x\Pi + E + G_1Q + B(\Gamma - K_x\Pi) \\ S + G_2(C\Pi + Q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi S \\ S \end{bmatrix} = \Sigma S \end{aligned} \quad (25)$$

Para mostrar que qualquer autovalor de  $S$  é também autovalor de  $F$ , pode-se considerar que  $\lambda$  e  $v$  correspondem respectivamente a um autovalor e a um autovetor da matriz  $S$ . Então  $Sv = \lambda v$ , logo

$$F\Sigma v = \Sigma Sv = \lambda \Sigma v, \quad (26)$$

que mostra que  $\lambda$  é um autovalor de  $F$  com autovetor  $\Sigma v$ .  $\square$

Essa propriedade conhecida como o PMI, pode ser interpretada de forma que o controlador que resolve o problema do regulação de saída deve conter uma cópia do sistema exógeno, *i.e.*, deve ser capaz de gerar uma cópia dos sinais de referência e perturbação.

## 2.2.5 Problema de Regulação de Saída Sob a Estratégia de Controle Baseado em Eventos

No contexto de controle baseado em eventos, o problema de regulação de saída é tratado com objetivo de garantir as propriedades de regulação, levando em conta que as atualizações do sinal controle ocorrem de forma aperiódica. Além disso, questões

relacionadas à modelagem do sistema, incertezas, atrasos de comunicação, entre outras, originadas da implementação de *NCSs* tem sido abordadas recentemente. Neste sentido, pode-se citar o trabalho de (QIAN; LIU; FENG, 2019), no qual o problema de robustez é tratado, sendo consideradas incertezas na planta e no sistema exógeno. Já (ASTOLFI; POSTOYAN; VAN DE WOUW, 2019) abordam o problema considerando a existência de transmissões incertas, sendo estas geradas por um protocolo de rede que pode apresentar o problema de *scheduling*. Tais efeitos são modelados com o sistema descrito através de um modelo híbrido, sendo propostas condições *LMI*s para garantia de regulação de saída perfeita e prática.

Há de se considerar que os trabalhos mencionados acima empregam um *ETM* que realiza o monitoramento contínuo da saída do sistema. Nota-se ainda que existem poucos trabalhos que abordam o seguimento de referência e rejeição de perturbação considerando *PETC*. Um dos poucos trabalhos nesse sentido é apresentado por (MA; GHASEMI; SONG, 2019). Neste trabalho, uma abordagem baseada no PMI para o problema de seguimento de referência é apresentada, sendo implementado um controlador repetitivo que considera uma estratégia periódica de monitoramento, *i.e.*, *PETC*, com objetivo de seguir referências, mas sem considerar a rejeição de perturbação. Outro trabalho recente é apresentado em (SBARBARO; GOMES DA SILVA JR.; MOREIRA, 2020), no qual é abordado o problema de seguimento de referência e rejeição de perturbações aplicado a sistemas lineares em tempo discreto. Neste trabalho é utilizado um controlador baseado em um observador de estados com objetivo de garantir a regulação de saída perfeita e prática de perturbação para o sistema em malha fechada, porém o mesmo não é robusto diante de incertezas paramétricas na planta, pelo fato de não implementar o modelo interno levando em conta os modos de referência.

### 2.3 Comentários Finais

Este capítulo apresentou a revisão bibliográfica e os principais conceitos relacionados à estratégia de controle baseado em eventos e ao problema de regulação de saída. Inicialmente foram apresentadas as motivações para o uso da estratégia de controle baseado em eventos, bem como o algoritmo a ser utilizado, além dos tipos de monitoramento da função de disparo e critérios usuais de disparo. Em seguida, o problema de regulação de saída foi apresentado, sendo considerada primeiramente uma estratégia básica, do tipo realimentação estática de estados, seguida da abordagem com realimentação dinâmica do erro. Além disso, hipóteses relevantes para solução destes problemas foram apresentadas. Por fim, estes temas foram relacionados de forma a apresentar as perspectivas do trabalho. Nos próximos capítulos, estes conceitos serão utilizados para o desenvolvimento de técnicas de controle baseado em eventos para seguimento de referência e rejeição de perturbação aplicadas a sistemas lineares em tempo discreto.

## 3 CONTROLE BASEADO EM REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

### 3.1 Introdução

Neste capítulo será apresentado o problema de seguimento de referência e rejeição de perturbação sob a estratégia de controle baseado em eventos, levando em consideração o caso onde todos os estados (planta e sistema exógeno) estão disponíveis para medição, também chamado na literatura de *full information regulation problem*.

Com base na ideias propostas por (SBARBARO; GOMES DA SILVA JR.; MOREIRA, 2020), condições em termos de *LMI*s serão estabelecidas para o perfeito seguimento de referência e rejeição de perturbação em regime permanente. As condições serão então estendidas para o problema de regulação de saída prática. Neste caso, considera-se um critério de disparo relaxado, a fim de evitar o comportamento periódico da estratégia em regime permanente no caso de perturbações não constantes, ou seja, a degeneração da estratégia de controle baseado em eventos em uma estratégia *time-triggered*, ou equivalentemente, de atualização periódica do sinal de controle. Problemas de otimização convexos são formulados para calcular os parâmetros das funções de disparo com o objetivo de reduzir as atualizações do sinal de controle. Por fim, exemplos numéricos são apresentados para ilustrar a eficiência da estratégia proposta.

### 3.2 Formulação do Problema

Considere o seguinte sistema linear em tempo discreto

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] + Ew[k], \\ y[k] &= Cx[k], \\ e[k] &= Cx[k] + Qw[k], \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{27}$$

onde  $x[k] \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u[k] \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle,  $w[k] \in \mathbb{R}^{n_s}$ , representa os sinais de referência e perturbação,  $y[k] \in \mathbb{R}^{n_y}$  representa o sinal de saída,  $e[k] \in \mathbb{R}^{n_e}$  representa o erro entre o sinal de saída e a referência, e  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $E$  e  $Q$  são

matrizes reais constantes de dimensões apropriadas. Assume-se que  $w[k]$  é gerado pelo seguinte sistema exógeno:

$$w[k + 1] = Sw[k], \quad k \in \mathbb{N}, \quad (28)$$

onde  $S \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$  é uma matriz real constante com uma estrutura  $S = \text{diag}(S_1, S_2, \dots, S_{n_s})$ , que contém as dinâmicas dos sinais de referência, dada por  $r[k] = -Qw[k]$  e perturbação, dada por  $d[k] = C_d w[k]$ , sendo  $C_d$  uma matriz real constante de dimensão apropriada.

Considera-se uma lei de controle que realimenta os estados da planta (27) e do sistema exógeno (28), dada por:

$$u[k] = K_x x[k] + K_r w[k], \quad (29)$$

onde  $K_x \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $K_r \in \mathbb{R}^{m \times n_s}$ . Sendo  $K_r = (\Gamma - K_x \Pi)$ , pode-se reescrever (29), como:

$$u[k] = K_x x[k] + (\Gamma - K_x \Pi) w[k], \quad (30)$$

Desta forma, assumem-se as seguintes hipóteses:

**A4** O ganho  $K_x$  é tal que  $(A + BK_x)$  é Schur-estável.

**A5** As matrizes  $\Pi$  e  $\Gamma$  satisfazem as equações de regulação:

$$\begin{aligned} \Pi S &= A\Pi + B\Gamma + E, \\ 0 &= C\Pi + Q. \end{aligned} \quad (31)$$

Considerando agora a seguinte transformação de coordenadas (SABERI; SANNUTI; STOOORVOGEL, 2000)

$$\bar{x}[k] = x[k] - \Pi w[k]. \quad (32)$$

Tem-se que  $\bar{x}[k]$  define o erro de regulação do estado, *i.e.*, representa a diferença entre a trajetória do estado e a trajetória de referência do estado, dada por  $\Pi w[k]$ . A partir de (32), tem-se que a dinâmica do erro de regulação de estado é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{x}[k + 1] &= x[k + 1] - \Pi w[k + 1], \\ &= Ax[k] + Bu[k] + Ew[k] - \Pi Sw[k]. \end{aligned} \quad (33)$$

Considerando-se a lei de controle (30) e o erro de regulação do estado (32), tem-se que (33) equivale a:

$$\bar{x}[k + 1] = A\bar{x}[k] + A\Pi w[k] + BK_x \bar{x}[k] + B\Gamma w[k] + Ew[k] - \Pi Sw[k]. \quad (34)$$

Através da aplicação das equações de regulação em (31) à equação (34), tem-se então que:

$$\bar{x}[k + 1] = (A + BK_x) \bar{x}[k]. \quad (35)$$

Como, sob a hipótese A4, a matriz  $(A + BK_x)$  é Schur-estável, conclui-se que  $\bar{x}[k] \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Logo, considerando-se o erro de seguimento de referência, dado na equação (27), e a hipótese A5, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 e[k] &= Cx[k] + Qw[k] \\
 &= C(\bar{x}[k] + \Pi w) + Qw[k] \\
 &= C\bar{x}[k] + (C\Pi + Q)w[k] \\
 &= C\bar{x}[k],
 \end{aligned} \tag{36}$$

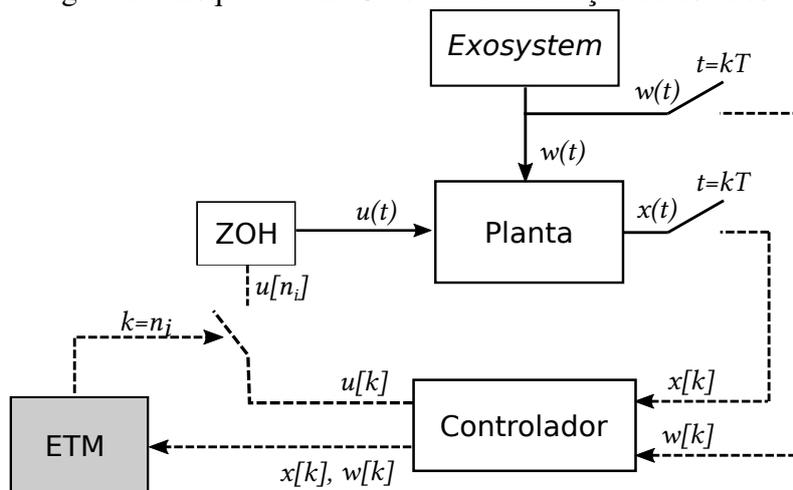
donde conclui-se que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e[k] = 0. \tag{37}$$

### 3.2.1 Estratégia de Controle Baseado em Eventos

A Figura 2 representa um esquema *PETC* com uma lei de controle do tipo realimentação de estados. Observa-se que a saída da planta, dada por  $x(t)$ , é monitorada periodicamente nos instantes de tempo  $kT$ , sendo  $k \in \mathbb{N}$  e  $T$  o período de amostragem. Entretanto, o sinal de controle  $u(t)$  será atualizado nos instantes de tempo  $n_i T$ , sendo que estes instantes só ocorrem quando o critério de disparo é violado. Além disso, o sinal de controle é mantido constante na entrada da planta no intervalo  $[n_i, n_i + T)$  através de um *ZOH*. O critério de disparo consiste basicamente em avaliar uma função. Se o valor desta função, que depende basicamente dos estados ou das saídas do sistema ultrapassar um certo limite, então um evento é gerado.

Figura 2 – Esquema *PETC* com realimentação de estados.



Fonte: do autor

Assim, tem-se que a atualização do sinal de controle ocorrerá somente nos instantes de tempo  $n_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ). Desta forma considerando-se a lei de controle descrita em (30) e o erro de regulação de estado descrito em (32), tem-se a lei de controle reescrita

como:

$$u[k] = u[n_i] = K_x \bar{x}[n_i] + \Gamma w[n_i], \forall k \in [n_i, n_{i+1}). \quad (38)$$

Definindo-se as variáveis que representam a diferença entre o valor dos estados na última atualização de controle (*i.e.*, no instante correspondente ao último evento) e o valor atualmente medido como

$$\begin{aligned} \delta_x[k] &\triangleq \bar{x}[n_i] - \bar{x}[k], \\ \delta_w[k] &\triangleq w[n_i] - w[k], \end{aligned} \quad (39)$$

pode-se considerar a seguinte função de disparo quadrática a ser utilizada no Algoritmo 1:

$$f(\delta_x[k], \delta_w[k], \bar{x}[k]) = \delta_x[k]' Q_{\delta_x} \delta_x[k] + \delta_w[k]' Q_{\delta_w} \delta_w[k] - \bar{x}[k]' Q_\sigma \bar{x}[k], \quad (40)$$

onde  $Q_{\delta_x} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_{\delta_w} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$  e  $Q_\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são matrizes simétricas positivas definidas que serão calculadas. O Algoritmo 1 estabelece que se em um dado instante de tempo  $k \in \mathbb{N}$  a função de disparo  $f(\delta_x[k], \delta_w[k], \bar{x}[k])$  for positiva, o sinal de controle é calculado e transmitido para o dispositivo atuador, *i.e.*, a entrada de controle da planta é efetivamente atualizada. Caso contrário, o valor de controle aplicado no último evento é mantido.

O desafio consiste em projetar as matrizes  $Q_{\delta_x}$ ,  $Q_{\delta_w}$  e  $Q_\sigma$  da função de disparo (40), de modo que  $\bar{x}[k]$  tenda assintoticamente para zero com a lei de controle (38), visando a redução da geração de eventos, ou equivalentemente, a redução nas atualizações do controle.

### 3.3 Condições de Estabilidade

Nesta seção serão apresentadas condições descritas na forma de *LMIs* para garantia de estabilidade do sistema em malha fechada sob a estratégia de controle baseado em eventos. Estas condições serão utilizadas posteriormente para formular problemas de otimização convexos para a determinação dos parâmetros da função de disparo.

Considerando-se as equações em (39), pode-se reescrever a lei de controle (38), da seguinte forma:

$$u[k] = u[n_i] = K_x \bar{x}[k] + K_x \delta_x[k] + \Gamma w[k] + \Gamma \delta_w[k], \forall k \in [n_i, n_{i+1}). \quad (41)$$

Aplicando (32) e (41) em (33), tem-se a dinâmica do erro de regulação do estado sob a estratégia de controle baseado em eventos descrita por:

$$\begin{aligned} \bar{x}[k+1] &= (A + BK_x) \bar{x}[k] + A \Pi w[k] + BK_x \delta_x[k] + B \Gamma w[k] + B \Gamma \delta_w[k] \\ &\quad + E w[k] - \Pi S w[k]. \end{aligned} \quad (42)$$

Com base nas equações mostradas em (31), pode-se simplificar a equação (42) conforme segue:

$$\bar{x}[k+1] = (A + BK_x) \bar{x}[k] + BK_x \delta_x[k] + B\Gamma \delta_w[k]. \quad (43)$$

Deste modo, considerando-se que as hipóteses A4 e A5 são satisfeitas e uma função de Lyapunov candidata  $V(x[k])$ , a ideia é calcular os parâmetros da função de disparo  $f(\delta_x[k], \delta_w[k], \bar{x}[k])$  de forma a garantir que  $\Delta V(\bar{x}[k]) = V(\bar{x}[k+1]) - V(\bar{x}[k]) < 0 \forall k \geq 0$ . Esta ideia é formalizada no seguinte teorema através de uma função de Lyapunov quadrática.

**Teorema 3.** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_{\delta_x} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_{\delta_w} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$  e  $\bar{Q}_\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que*

$$\left( \begin{bmatrix} -P & 0_n & 0_{n \times n_s} & I_n \\ * & -Q_{\delta_x} & 0_{n \times n_s} & 0_n \\ * & * & -Q_{\delta_w} & 0_{n_s \times n} \\ * & * & * & -\bar{Q}_\sigma \end{bmatrix} + \Psi_0 \right) < 0, \quad (44)$$

seja verificada, sendo

$$\Psi_0 = \begin{bmatrix} (A + BK_x)' \\ (BK_x)' \\ (B\Gamma)' \\ 0_n \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} (A + BK_x) & BK_x & B\Gamma & 0_n \end{bmatrix}, \quad (45)$$

então as trajetórias do erro de regulação, dado pela equação (43), sob a estratégia de controle baseado em eventos proposta no Algoritmo 1 com a função de disparo definida em (40), sendo  $Q_\sigma = \bar{Q}_\sigma^{-1}$ , convergem assintoticamente para a origem.

*Prova.* Seja uma função quadrática candidata a função de Lyapunov, dada por  $V(\bar{x}[k]) = \bar{x}[k]' P \bar{x}[k]$  e sua variação entre instantes de amostragem  $\Delta V(\bar{x}[k]) = V(\bar{x}[k+1]) - V(\bar{x}[k])$ , o que pode ser escrita como

$$\Delta V(\bar{x}[k]) = \nu[k]' \Psi_1 \nu[k], \quad (46)$$

com  $\nu[k] = [\bar{x}[k]' \ \delta_x[k]' \ \delta_w[k]']'$ , e

$$\Psi_1 = \left( \begin{bmatrix} (A + BK_x)' \\ (BK_x)' \\ (B\Gamma)' \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} (A + BK_x) & BK_x & B\Gamma \end{bmatrix} - \text{diag}(P, 0_n, 0_{n_s}) \right). \quad (47)$$

Considerando-se agora que  $Q_\sigma = \bar{Q}_\sigma^{-1}$  e aplicando-se o complemento de Schur em (44), tem-se que

$$\left( \begin{bmatrix} Q_\sigma & 0_n & 0_{n \times n_s} \\ * & -Q_{\delta_x} & 0_{n \times n_s} \\ * & * & -Q_{\delta_w} \end{bmatrix} + \Psi_1 \right) < 0. \quad (48)$$

Logo, pré e pós multiplicando (48) por  $\nu[k]'$  e  $\nu[k]$ , conclui-se que se (44) é satisfeita então:

$$\Delta V(\bar{x}[k]) < \delta_x[k]'Q_{\delta_x}\delta_x[k] + \delta_w[k]'Q_{\delta_w}\delta_w[k] - \bar{x}[k]'Q_{\sigma}\bar{x}[k]. \quad (49)$$

Suponha agora que  $n_{i+1} - n_i \geq 1$  e  $k \in [n_i, n_{i+1})$ . Neste caso, pelo Algoritmo 1, tem-se que  $f(\delta_x[k], \delta_w[k], \bar{x}[k]) \leq 0$ , *i.e.*,

$$\delta_x[k]'Q_{\delta_x}\delta_x[k] + \delta_w[k]'Q_{\delta_w}\delta_w[k] - \bar{x}[k]'Q_{\sigma}\bar{x}[k] \leq 0, \quad (50)$$

e segue que  $\Delta V(\bar{x}[k]) < 0$ ,  $\forall k \in [n_i, n_{i+1})$ .

Por outro lado, suponha que em um determinado instante  $k$ ,  $f(\delta_x[k], \delta_w[k], \bar{x}[k]) > 0$ , então, pelo Algoritmo 1, um evento ocorre e  $n_i = k$ , logo, tem-se que  $\delta_x[k] = 0$  e  $\delta_w[k] = 0$ . Assim, de (49), segue que

$$\Delta V(\bar{x}[k]) < -\bar{x}[k]'Q_{\sigma}\bar{x}[k] < 0, \quad \forall k = n_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (51)$$

Logo, se (44) é satisfeita, conclui-se que  $\Delta V(\bar{x}[k]) < 0$ ,  $\forall k \geq 0$ , o que garante que  $\bar{x}[k] \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .  $\square$

### 3.3.1 Estratégia de Controle Baseado em Eventos com Relaxação

O Teorema 3 apresentado garante o perfeito seguimento de referência e rejeição de perturbação para a saída do sistema em regime permanente, porém pode levar a estratégia de controle baseado em eventos a realizar atualizações periódicas do sinal de controle, *i.e.*, a estratégia de controle baseado em eventos não tem efeito em regime permanente, quando aplicada uma perturbação não constante (*e.g.*, sinais senoidais ou periódicos). A fim de evitar este comportamento, será apresentado um critério de disparo relaxado para o problema em questão, conforme apresentado na Seção 2.1. O critério de disparo relaxado considera uma constante real  $\gamma > 0$  adicional na função de disparo, sendo esta descrita como:

$$\begin{aligned} f_{\gamma}(\delta_x[k], \delta_w[k], \bar{x}[k]) &= f(\delta_x[k], \delta_w[k], \bar{x}[k]) - \gamma \\ &= \delta_x[k]'Q_{\delta_x}\delta_x[k] + \delta_w[k]'Q_{\delta_w}\delta_w[k] - \bar{x}[k]'Q_{\sigma}\bar{x}[k] - \gamma, \end{aligned} \quad (52)$$

de modo que um evento seja gerado quando  $f_{\gamma}(\delta_x[k], \delta_w[k], \bar{x}[k]) > 0$ . Desta forma, admite-se que as trajetórias do erro de regulação do estado não convirjam para a origem como anteriormente, mas fiquem confinadas dentro de um conjunto positivamente invariante elipsoidal, dado por:

$$\mathcal{E}(P, \eta) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n, \bar{x}'P\bar{x} \leq \eta\}, \quad (53)$$

onde  $\eta$  é um escalar positivo. Essa ideia é formalizada no seguinte teorema:

**Teorema 4.** Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_{\delta_x} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_{\delta_w} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$ ,  $\bar{Q}_\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e escalares positivos  $\tau \in (0,1)$  e  $\bar{\gamma}$ , tais que

$$\left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc} -(1-\tau)P & 0_n & 0_{n \times n_s} & I_n \\ * & -Q_{\delta_x} & 0_{n \times n_s} & 0_n \\ * & * & -Q_{\delta_w} & 0_{n_s \times n} \\ * & * & * & -\bar{Q}_\sigma \end{array} \right] + \Psi_2 \end{array} \right) < 0, \quad (54)$$

$$\begin{bmatrix} -\eta\tau & 1 \\ 1 & -\bar{\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (55)$$

sejam verificadas, sendo

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} (A + BK_x)' \\ (BK_x)' \\ (B\Gamma)' \\ 0_n \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} (A + BK_x) & BK_x & B\Gamma & 0_n \end{bmatrix}, \quad (56)$$

então as trajetórias do erro de regulação do estado, dado pela equação (43), sob a estratégia de controle baseado em eventos proposta no Algoritmo 1 com a função de disparo definida em (52), sendo  $Q_\sigma = \bar{Q}_\sigma^{-1}$  e  $\gamma = \bar{\gamma}^{-1}$ , convergem em tempo finito para o conjunto positivamente invariante  $\mathcal{E}(P, \eta)$ .

*Prova.* Para mostrar que as trajetórias convergem para  $\mathcal{E}(P, \eta)$  em tempo finito, é suficiente garantir que

$$\Delta V(\bar{x}[k]) < -\mu V(\bar{x}[k]), \quad \forall \bar{x}[k] \notin \mathcal{E}(P, \eta) \quad (57)$$

para algum escalar positivo  $\mu$ , o que implica que  $V(\bar{x}[k])$  será exponencialmente decrescente  $\forall \bar{x}[k] \notin \mathcal{E}(P, \eta)$ .

Note que se  $\bar{x}[k] \notin \mathcal{E}(P, \eta)$ , então  $\bar{x}[k]'P\bar{x}[k] - \eta > 0$ . Logo, considerando que  $f_\gamma(\cdot) = f(\cdot) - \gamma \leq 0 \quad \forall k$ , uma condição suficiente para garantir (57), pode ser obtida via *S-Procedure*, i.e., se existir um escalar positivo  $\tau$ , tal que

$$\Delta V(\bar{x}[k]) - f(\cdot) + \gamma + \tau \bar{x}[k]'P\bar{x}[k] - \tau\eta < -\mu V(\bar{x}[k]). \quad (58)$$

Considerando-se  $\gamma = \bar{\gamma}^{-1}$ , através do complemento de Schur aplicado a (55) garante-se que:

$$-\tau\eta + \gamma < 0. \quad (59)$$

Por outro lado, seguindo os mesmos passos da prova do Teorema 3, pode-se mostrar que se (54) é satisfeita, então existe um escalar positivo  $\mu$ , suficientemente pequeno, tal que  $\Delta V(\bar{x}[k]) - f(\cdot) + \tau \bar{x}[k]'P\bar{x}[k] < -\mu V(\bar{x}[k])$ . Assim, pode-se concluir que (58) é satisfeita se as desigualdades matriciais (54) e (55) são verificadas, o que implica que  $\Delta V(\bar{x}[k]) < -\mu \bar{x}[k]'P\bar{x}[k], \forall \bar{x}[k] \notin \mathcal{E}(P, \eta)$ .

Para mostrar que  $\mathcal{E}(P, \eta)$  é um conjunto positivamente invariante com relação ao sistema (35), considera-se que (58) é satisfeita. Neste caso segue que:

$$\bar{x}[k+1]'P\bar{x}[k+1] - \bar{x}[k]'P\bar{x}[k] - f(\cdot) + \tau\bar{x}[k]'P\bar{x}[k] + \gamma - \tau\eta < 0. \quad (60)$$

Fazendo  $\tau_1 = (1 - \tau)$  e isolando  $\tau$ , *i.e.*,  $\tau = 1 - \tau_1$  em (60), tem-se que:

$$\bar{x}[k+1]'P\bar{x}[k+1] - \tau_1\bar{x}[k]'P\bar{x}[k] - f(\cdot) + \gamma + \tau_1\eta - \eta < 0. \quad (61)$$

Como  $f_\gamma(\cdot) = f(\cdot) - \gamma \leq 0, \forall k > 0$ , segue que:

$$\bar{x}[k+1]'P\bar{x}[k+1] - \eta - \tau_1(\bar{x}[k]'P\bar{x}[k] - \eta) < 0, \quad (62)$$

e, portanto,

$$\bar{x}[k+1]'P\bar{x}[k+1] - \eta < \tau_1(\bar{x}[k]'P\bar{x}[k] - \eta). \quad (63)$$

Assim, como  $\tau_1 > 0$  e para todo  $\bar{x}[k] \in \mathcal{E}(P, \eta)$  tem-se que  $\bar{x}[k]'P\bar{x}[k] - \eta \leq 0$ , de (63) é possível concluir que:

$$\bar{x}[k+1]'P\bar{x}[k+1] - \eta < 0, \quad (64)$$

e, portanto,  $\bar{x}[k+1] \in \mathcal{E}(P, \eta)$ , o que prova a invariância positiva do conjunto  $\mathcal{E}(P, \eta)$ .  $\square$

### 3.4 Problemas de Otimização

A função de disparo proposta em (40), garante a estabilidade do sistema (43) sob a estratégia de controle baseado em eventos, fazendo com que o erro de regulação do estado convirja para zero quando  $k \rightarrow \infty$ , o que resulta no perfeito seguimento de referência e rejeição de perturbação em regime permanente.

Considerando-se as matrizes  $Q_{\delta_x}$ ,  $Q_{\delta_w}$ ,  $\bar{Q}_\sigma$  e  $P$  como variáveis, tem-se que (44) é uma *LMI*. Assim, o objetivo consiste em calcular os parâmetros  $Q_{\delta_x}$ ,  $Q_{\delta_w}$  e  $Q_\sigma = \bar{Q}_\sigma^{-1}$  da função de disparo (40), de modo a reduzir o número de eventos gerados usando otimização convexa. Com base nas ideias utilizadas em (MOREIRA *et al.*, 2019), um critério adequado para o cálculo destes parâmetros pode ser o seguinte:

$$\text{minimizar } \text{tr}(Q_{\delta_x}) + \text{tr}(Q_{\delta_w}) + \text{tr}(\bar{Q}_\sigma).$$

Neste caso, é implicitamente considerada a “minimização” das matrizes de ponderação  $Q_{\delta_x}$ ,  $Q_{\delta_w}$  e a “maximização” de  $Q_\sigma$  através da “minimização” de sua inversa  $\bar{Q}_\sigma$ , o que implica em deixar a função de disparo (40) negativa por mais tempo e conseqüentemente reduzir o número de eventos. Assim, o seguinte problema de otimização é proposto:

**PO 1:**

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar } \text{tr}(Q_{\delta_x}) + \text{tr}(Q_{\delta_w}) + \text{tr}(\bar{Q}_\sigma) \\
& \text{sujeito a: } (44), \tag{65} \\
& P = P' > 0, Q_{\delta_x} = Q'_{\delta_x} > 0, Q_{\delta_w} = Q'_{\delta_w} > 0, \bar{Q}_\sigma = \bar{Q}'_\sigma > 0.
\end{aligned}$$

Note que o problema (65) é convexo, pois (44) é uma *LMI* e o critério de otimização é linear nas variáveis de decisão.

Por outro lado, para a função de disparo relaxada (52), além das matrizes  $Q_{\delta_x}$ ,  $Q_{\delta_w}$  e  $\bar{Q}_\sigma$ , o parâmetro  $\gamma$  deve ser escolhido de forma apropriada. Lembrando que neste caso é possível garantir somente que as trajetórias de (43) convergirão para um conjunto positivamente invariante  $\mathcal{E}(P, \eta)$ , ou equivalentemente, o erro de seguimento de saída em regime permanente não irá convergir para zero, mas será limitado. Portanto, um compromisso entre um valor relativamente pequeno para o erro de seguimento de saída em regime permanente e a redução das atualizações de controle deve ser estabelecido. Com esse objetivo, considera-se a seguinte restrição:

$$P - \eta\sigma C'C \geq 0. \tag{66}$$

Essa restrição garante que  $\mathcal{E}(P, \eta) \subset \mathcal{S}_\sigma$ , com

$$\mathcal{S}_\sigma = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n; \bar{x}'C'C\bar{x} \leq \sigma^{-1}\}, \tag{67}$$

o que implica que a trajetória do erro de regulação em regime permanente dado por  $e = C\bar{x}$ , ficará confinada em uma bola de raio  $\sqrt{\sigma^{-1}}$ , *i.e.*, o erro de regulação em regime permanente pode ser ajustado pelo valor de  $\sigma$ .

A ideia é, portanto, levar em conta no critério, além da minimização de matrizes  $Q_{\delta_x}$ ,  $Q_{\delta_w}$  e  $\bar{Q}_\sigma$ , a maximização de  $\gamma$ , ou equivalentemente, a minimização de  $\bar{\gamma}$ , garantindo que a restrição (66) seja verificada para uma dada tolerância  $\sigma$ . Neste caso, o uso de  $\bar{\gamma}$  ao invés de se utilizar diretamente a variável  $\gamma$ , consiste em se obter de fato uma minimização da função objetivo, *i.e.*, uma melhor aproximação do problema real. Deste modo, evita-se que o valor da função objetivo permaneça o mesmo, caso as variáveis sejam incrementadas na mesma proporção, uma vez que seria necessário minimizar  $-\gamma$ . Assim, o seguinte problema de otimização é proposto:

**PO 2:**

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar } \text{tr}(Q_{\delta_x}) + \text{tr}(Q_{\delta_w}) + \text{tr}(\bar{Q}_\sigma) + \bar{\gamma} \\
& \text{sujeito a: } (54), (55) \text{ e } (66), \tag{68} \\
& P = P' > 0, Q_{\delta_x} = Q'_{\delta_x} > 0, Q_{\delta_w} = Q'_{\delta_w} > 0, \bar{Q}_\sigma = \bar{Q}'_\sigma > 0, \bar{\gamma} > 0.
\end{aligned}$$

Devido às multiplicações de  $\eta\tau$  e  $\tau P$  em (54) e (55), respectivamente, observa-se que o problema (68) não é convexo. Por outro lado, como  $\tau$  é um escalar, a solução das *LMIs* pode ser obtida através de uma busca iterativa do menor valor da função objetivo, dado um *grid* de valores de  $\tau$  predefinidos entre 0 e 1.

Os resultados obtidos para estes problemas de otimização serão discutidos nos exemplos numéricos a seguir.

### 3.5 Exemplos numéricos

A seguir serão apresentados exemplos numéricos e simulações para ilustrar o método desenvolvido.

#### 3.5.1 Exemplo 1: seguimento de referência constante e rejeição de perturbação senoidal

Para ilustrar o método proposto, será considerado um sistema instável em malha aberta, originalmente apresentado em (HEEMELS; DONKERS; TEEL, 2011) e representado na forma de espaço de estados em tempo contínuo como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -0,05505 \\ 1,715 \end{bmatrix} d(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \end{aligned} \quad (69)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle,  $d(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$  representa o sinal de perturbação,  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  representa o sinal de saída.

Realizando-se a discretização deste sistema através de um *ZOH* para um período de amostragem  $T = 0,1s$ , obtém-se o seguinte sistema em tempo discreto:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \begin{bmatrix} 0,9889 & 0,1162 \\ -0,2325 & 1,3376 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 0,0055 \\ 0,1162 \end{bmatrix} u[k] + \begin{bmatrix} 0,004 \\ 0,2 \end{bmatrix} d[k], \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x[k]. \end{aligned} \quad (70)$$

Assume-se que o vetor  $w[k]$ , que contém os sinais de referência  $r[k]$  e perturbação  $d[k]$ , é gerado por um sistema exógeno, representado como:

$$\begin{aligned} w[k+1] &= Sw[k], \\ r[k] &= Qw[k], \\ d[k] &= C_d w[k], \end{aligned} \quad (71)$$

de modo que  $S = \text{diag}(S_r, S_d)$ , *i.e.*, contém em sua diagonal as dinâmicas do modelo da referência e da perturbação. Para este exemplo, deseja-se seguir uma referência constante e rejeitar uma perturbação senoidal contínua de frequência  $\omega = 0,25\pi$  rad/s, o que implica

em uma frequência discreta de  $\Omega = \omega T = 0,0785$ . Observe que esta senóide em tempo discreto não é periódica, pois a frequência  $\Omega$  não é uma fração inteira de  $2\pi$ . Neste caso, tem-se que as matrizes  $S_r$ ,  $S_d$ ,  $Q$  e  $C_d$ , são descritas por:

$$S_r = 1; \quad S_d = \begin{bmatrix} 0,9969 & 0,0785 \\ -0,0785 & 0,9969 \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (72)$$

Assim, tem-se que:

$$E = B_d C_d = \begin{bmatrix} 0 & 0,004 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (73)$$

O cálculo do ganho  $K_x$  foi realizado considerando-se o projeto por alocação de polos, de modo que  $(A + BK_x)$  seja Schur-estável. Neste caso considerou-se o posicionamento dos polos em 0,81 e 0,84, o que resultou no seguinte ganho:

$$K_x = \begin{bmatrix} -0,6111 & -5,7918 \end{bmatrix}. \quad (74)$$

Resolvendo-se então as equações de regulação dadas em (31), obtém-se:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0551 & -0,0021 \end{bmatrix}; \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 2 & -1,8808 & 0,0432 \end{bmatrix}. \quad (75)$$

Visto que  $K_r = \Gamma - K_x \Pi$ , tem-se:

$$K_r = \begin{bmatrix} 2,6111 & -1,5618 & 0,0313 \end{bmatrix}. \quad (76)$$

Deseja-se então projetar os parâmetros da função de disparo de modo a reduzir o número de eventos gerados com o perfeito seguimento de referência e rejeição de perturbação em regime permanente. Para isso, solucionando-se PO 1, obtêm-se as seguintes matrizes que serão utilizadas na função de disparo (40):

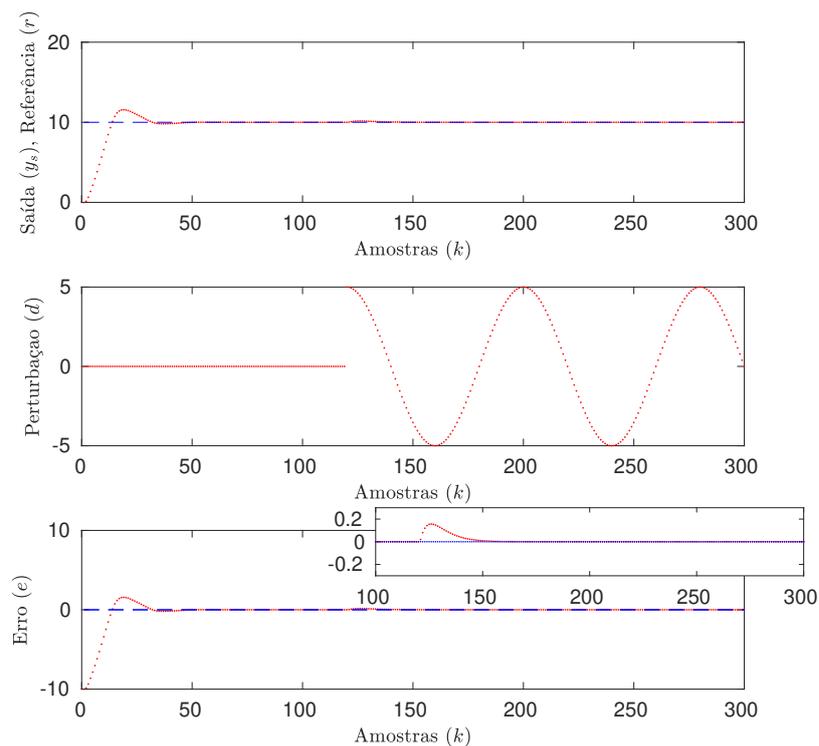
$$\begin{aligned} Q_{\delta_x} &= \begin{bmatrix} 0,0390 & 0,3663 \\ 0,3663 & 3,4723 \end{bmatrix}, \\ Q_{\delta_w} &= \begin{bmatrix} 0,8784 & -0,8257 & 0,0190 \\ -0,8257 & 0,7769 & -0,0178 \\ 0,0190 & -0,0178 & 0,0008 \end{bmatrix}, \\ Q_{\sigma} &= \begin{bmatrix} 0,4170 & 0,0005 \\ 0,0005 & 0,3613 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (77)$$

As simulações do sistema em malha fechada com a função  $f(\delta_x[k], \delta_w[k], \bar{x}[k])$  são mostradas nas figuras 3 e 4, respectivamente. As condições iniciais utilizadas foram  $x[0] = [0 \ 0]^T$ . Considera-se a referência como um degrau de amplitude 10 aplicado no instante  $k = 0$  e a perturbação como sendo um sinal senoidal com frequência constante igual a  $\Omega = 0,0785$  e amplitude 5, sendo aplicada no instante  $k = 120$ . O último gráfico

apresenta os instantes em que ocorreram eventos, sendo o número de instantes de amostragem transcorridos desde a última atualização de controle representado pela altura das marcações, podendo ser interpretado como o intervalo entre eventos. A linha horizontal tracejada corresponde a um instante de amostragem.

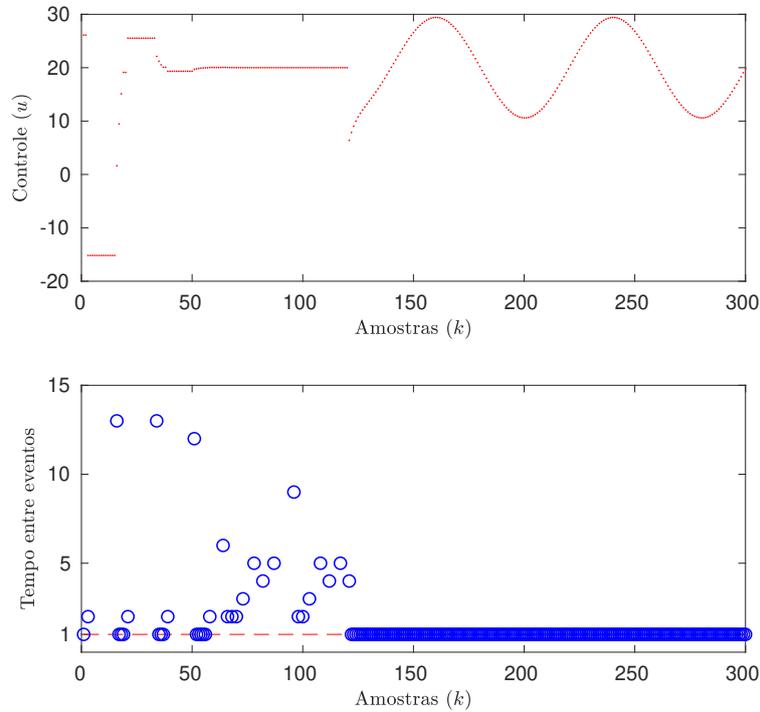
Observa-se que mesmo quando a perturbação é aplicada, o perfeito seguimento de referência ocorre, porém a estratégia passa a realizar atualizações periódicas do controle em regime permanente.

Figura 3 – Exemplo 1: simulação para o caso do critério não relaxado.



Fonte: do autor

Figura 4 – Exemplo 1: evolução do sinal de controle e tempo entre eventos para o caso do critério não relaxado.



Fonte: do autor

É importante destacar a necessidade de que a atualização do sinal de controle seja periódica após a introdução da perturbação. Isto pode ser explicado pelo fato da perturbação ser variante no tempo, sendo necessário que o sinal de controle assuma outro valor exato no próximo instante, a fim de garantir o erro nulo em regime permanente. Deste modo, com objetivo de reduzir o número de atualizações do controle a partir da tolerância de um pequeno erro de regulação, considera-se agora a função de disparo  $f_\gamma(\delta_x[k], \delta_w[k], \bar{x}[k])$ , descrita em (52). Solucionando-se então o PO 2 com  $\sigma = 1$ , foi obtido  $\tau = 0,04$  e os seguintes parâmetros para a função de disparo:

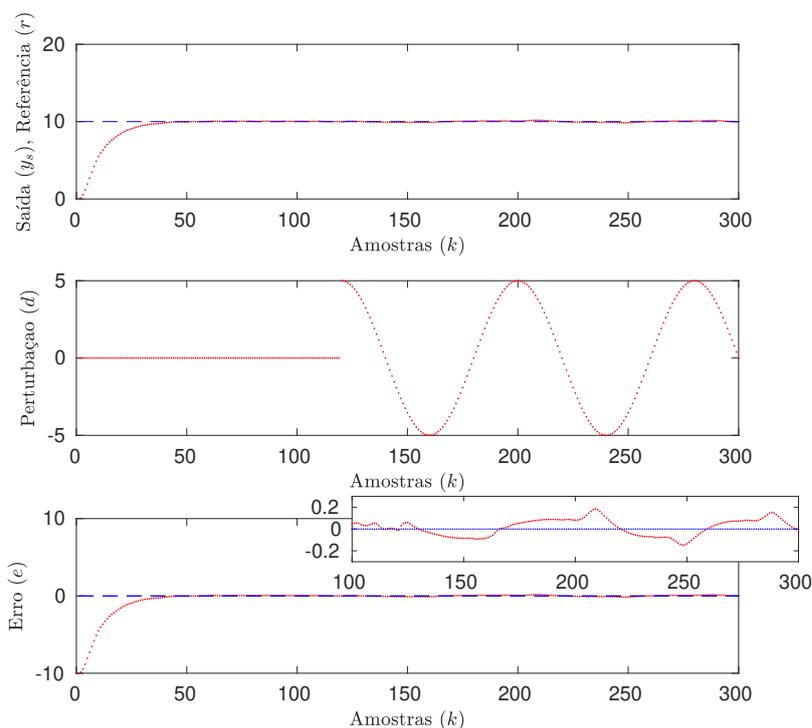
$$\begin{aligned}
 Q_{\delta_x} &= \begin{bmatrix} 0,0634 & 0,5901 \\ 0,5901 & 5,5937 \end{bmatrix}, \\
 Q_{\delta_w} &= \begin{bmatrix} 1,4161 & -1,3306 & 0,0306 \\ -1,3306 & 1,2525 & -0,0288 \\ 0,0306 & -0,0288 & 0,0018 \end{bmatrix}, \\
 Q_\sigma &= \begin{bmatrix} 0,3721 & -0,0321 \\ -0,0321 & 0,4510 \end{bmatrix}, \\
 \gamma &= 0,2955.
 \end{aligned} \tag{78}$$

Sob as mesmas condições iniciais e características do sinal de referência e perturbação

das simulações anteriores e a função  $f_\gamma(\cdot)$ , tem-se as simulações para o sistema em malha fechada mostradas nas figuras 5 e 6, respectivamente.

Nota-se um comportamento semelhante ao caso anterior, porém, quando a perturbação é aplicada, ocorre uma rejeição prática, pois o erro em regime permanente limita-se à tolerância predefinida, resultando em uma redução no número de atualizações do sinal de controle em regime permanente, não exigindo que a atualização do mesmo se torne periódica.

Figura 5 – Exemplo 1: simulação para o caso do critério relaxado.



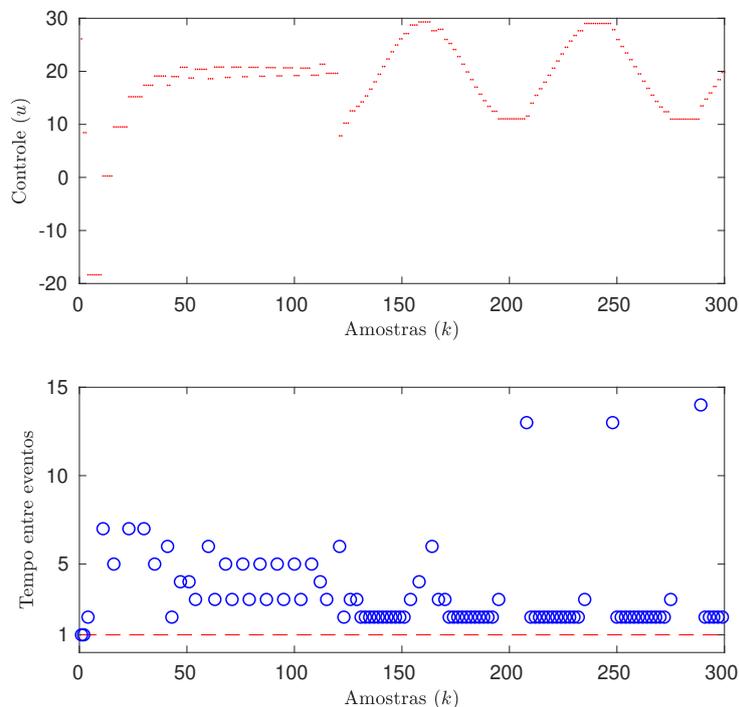
Fonte: do autor

A Tabela 1 apresenta o número de atualizações do sinal de controle tendo como referência a estratégia de controle periódico. Observa-se uma redução de 28,67% e 68,67% para PO 1 e PO 2 respectivamente, quando comparado com a estratégia de controle com atualização periódica, o que ilustra a eficiência da estratégia de controle baseado em eventos para redução na atualização do sinal de controle.

Tabela 1 – Exemplo 1: número de atualizações do sinal de controle para  $k \in [0 \ 300]$ .

Estratégia de controle	Atualizações do controle
<b>Time-triggered (atualização periódica)</b>	300
<b>PO 1</b>	214
<b>PO 2 (<math>\sigma = 1</math>)</b>	94

Figura 6 – Exemplo 1: evolução do sinal de controle e tempo entre eventos para o caso do critério relaxado.



Fonte: do autor

A Tabela 2 apresenta influência dos valores de  $\sigma$  no erro de seguimento de referência para  $k \geq 150$  (regime permanente) e na redução das atualizações de controle. Observa-se principalmente que o erro em regime permanente, permanece limitado entre valores relativamente pequenos, enquanto que o número de atualizações no sinal de controle apresenta maior variação.

Tabela 2 – Exemplo 1: número de atualizações do sinal de controle e máximo  $|e[k]|$  em regime permanente para diferentes valores de  $\sigma$  com  $k \in [0 \ 300]$ .

$\sigma$	máx. $ e[k] $	Atualizações do controle
0,000001	1,2871	71
0,0001	0,4904	73
0,001	0,4904	73
0,01	0,4533	74
0.1	0,1915	85
1	0,1838	94
10	0,015	173
100	0,0091	201
1000	0,0089	218

Estes resultados evidenciam de forma clara que existe um compromisso entre uma determinada tolerância ao erro e a redução das atualizações do sinal de controle para perturbações não constantes.

### 3.5.2 Exemplo 2: seguimento de uma referência periódica composta por sinais com frequências múltiplas

Deseja-se agora avaliar o comportamento da planta (70) em malha fechada, sob a estratégia de controle baseado em eventos, considerando-se somente o seguimento de uma referência periódica. Para isso, será definida uma referência composta pela soma de dois sinais senoidais contínuos de frequências  $\omega_1 = 0,25\pi$  rad/s e  $\omega_2 = 1,5\pi$  rad/s, o que resulta respectivamente nas frequências em tempo discreto  $\Omega_1 = \omega_1 T = 0,0785$  e  $\Omega_2 = \omega_2 T = 0,454$ . Deste modo, têm-se estes sinais gerados através de um sistema exógeno  $S = \text{diag}(S_{r1}, S_{r2})$ , cujos blocos matriciais  $S_{r1}$  e  $S_{r2}$  são dados por:

$$S_{r1} = \begin{bmatrix} 0,9969 & 0,0785 \\ -0,0785 & 0,9969 \end{bmatrix}; S_{r2} = \begin{bmatrix} 0,891 & 0,454 \\ -0,454 & 0,891 \end{bmatrix}. \quad (79)$$

Neste caso, tem-se a seguinte matriz  $Q$ :

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (80)$$

Considerando-se o mesmo ganho estabilizante (74), tem-se então as matrizes  $\Gamma$  e  $\Pi$  que satisfazem a hipótese A5, dadas por

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -0,0015 & 0,7845 & -0,0575 & 4,7929 \end{bmatrix}, \quad (81)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1,4750 & -2,3007 & -16,4997 & -18,6415 \end{bmatrix},$$

o que resulta no seguinte ganho  $K_r$ :

$$K_r = \begin{bmatrix} 2,0772 & 2,2430 & -16,2215 & 9,1181 \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Solucionando-se PO 1, obtêm-se as seguintes matrizes que serão utilizadas na função de disparo (40):

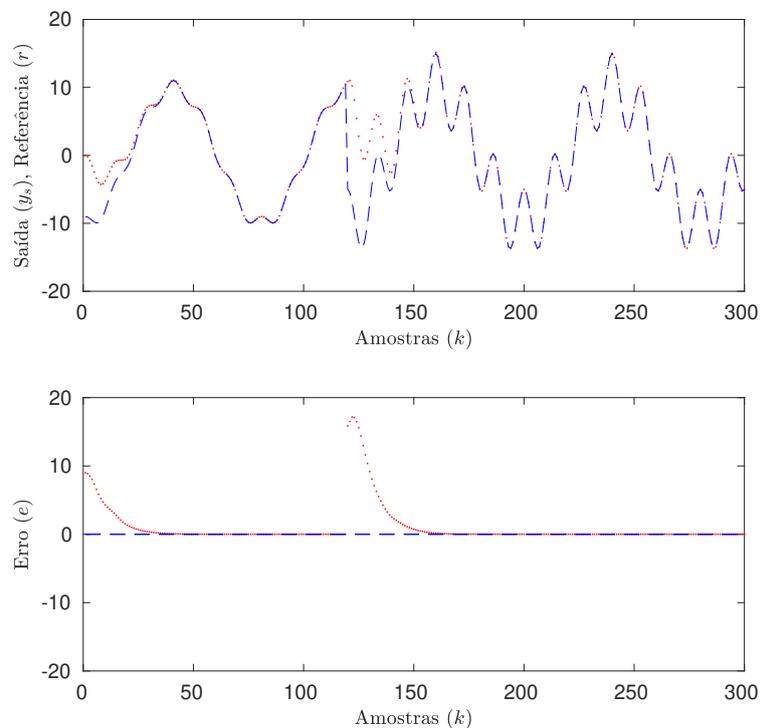
$$Q_{\delta_x} = \begin{bmatrix} 0,0423 & 0,367 \\ 0,367 & 3,4802 \end{bmatrix},$$

$$Q_{\delta_w} = \begin{bmatrix} 0,056 & -0,082 & -0,586 & -0,662 \\ -0,082 & 0,131 & 0,914 & 1,032 \\ -0,586 & 0,914 & 6,557 & 7,404 \\ -0,662 & 1,032 & 7,404 & 8,369 \end{bmatrix}, \quad (83)$$

$$Q_{\sigma} = \begin{bmatrix} 0,1157 & 0,0002 \\ 0,0002 & 0,1004 \end{bmatrix}.$$

As simulações do critério não relaxado são mostradas nas figuras 7 e 8, respectivamente. As condições iniciais utilizadas foram  $x[0] = [0 \ 0]'$ . Os sinais que compõem a referência são definidos inicialmente com amplitudes  $-10$  e  $1$ , para as senoides de frequências  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , respectivamente, sendo estas amplitudes alteradas no instante  $k = 120$  para  $-10$  e  $-5$ , o que altera a trajetória de referência, conforme mostrado na linha tracejada.

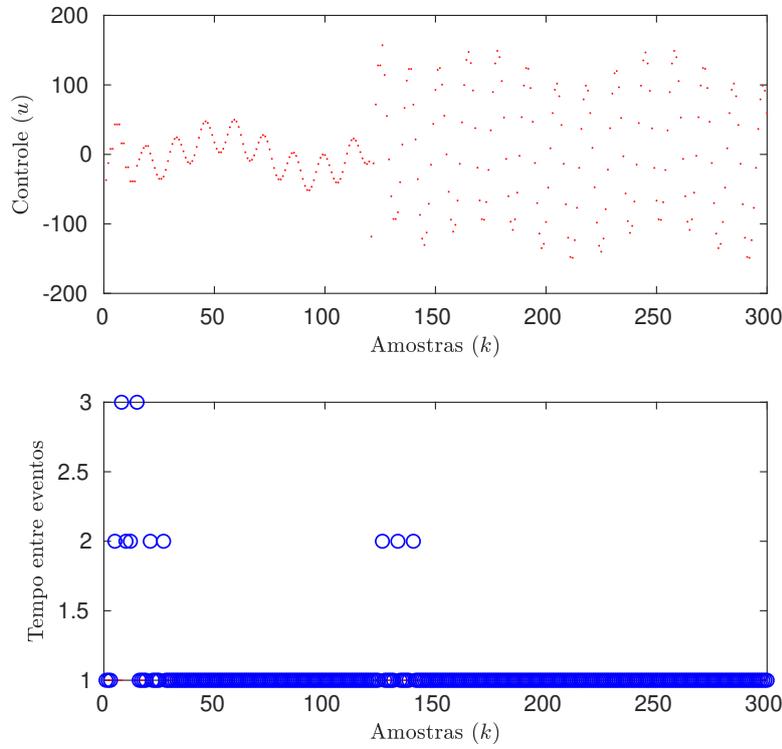
Figura 7 – Exemplo 2: simulação para o caso do critério não relaxado.



Fonte: do autor

É possível verificar na Figura 7, que a estratégia proposta estabelece que o sinal de referência seja perfeitamente seguido, o que resulta em um erro nulo em regime permanente. Contudo, observa-se na Figura 8, que devido ao comportamento dinâmico do sinal de referência, a estratégia proposta leva a uma atualização periódica do sinal de controle, visto que não está sendo tolerado um erro de seguimento de referência em regime permanente.

Figura 8 – Exemplo 2: evolução do sinal de controle e tempo entre eventos para o caso do critério não relaxado.



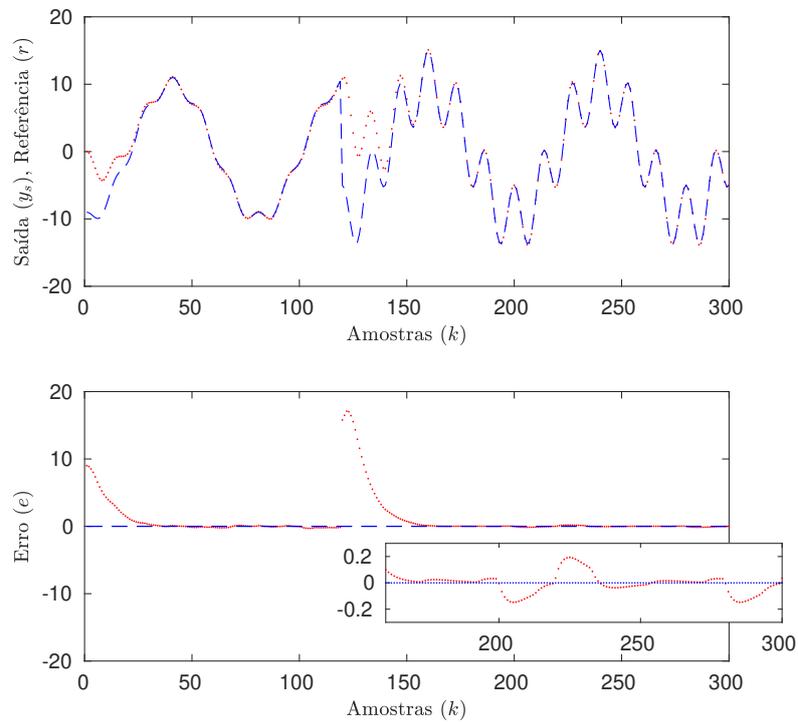
Fonte: do autor

Também é possível notar que o tempo entre eventos somente é maior que 1 nos instantes iniciais e após a alteração de amplitude dos sinais que compõem a referência, *i.e.*, nos transitórios. Logo, com o objetivo de reduzir o número de atualizações do controle, considera-se  $\sigma = 0,01$  para a solução do PO 2, o que resulta em  $\tau = 0,01$  e nas seguintes matrizes, utilizadas na função de disparo (52):

$$\begin{aligned}
 Q_{\delta_x} &= \begin{bmatrix} 0,0454 & 0,3885 \\ 0,3885 & 3,6865 \end{bmatrix}, \\
 Q_{\delta_w} &= \begin{bmatrix} 0,06 & -0,087 & -0,622 & -0,703 \\ -0,087 & 0,1398 & 0,971 & 1,097 \\ -0,622 & 0,971 & 6,9676 & 7,8672 \\ -0,703 & 1,097 & 7,8672 & 8,8928 \end{bmatrix}, \\
 Q_{\sigma} &= \begin{bmatrix} 0,1103 & 0,0009 \\ 0,0009 & 0,1002 \end{bmatrix}, \\
 \gamma &= 1,3527.
 \end{aligned} \tag{84}$$

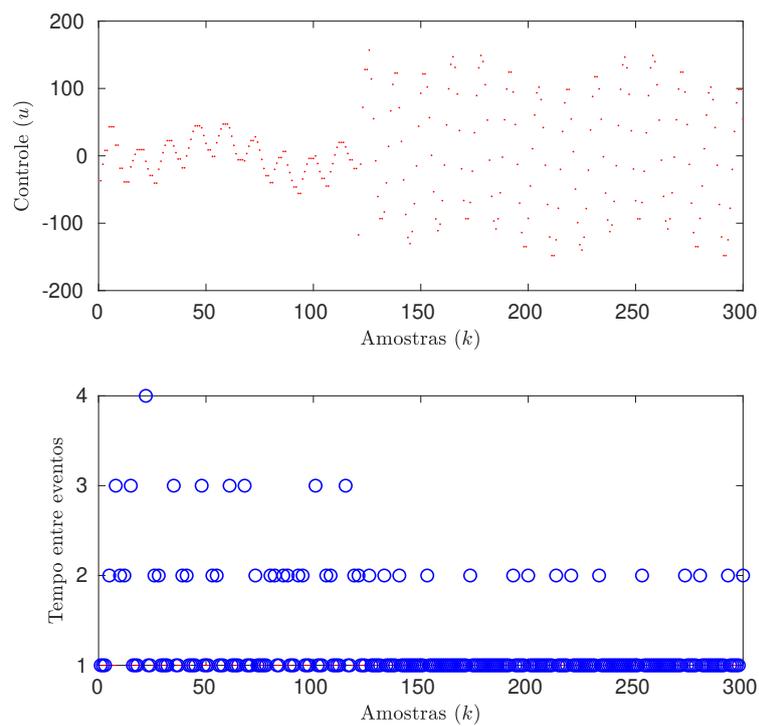
As simulações com o critério relaxado são mostradas nas figuras 9 e 10. Para estas simulações, foram consideradas as mesmas condições iniciais e características do sinal de referência do caso sem relaxação.

Figura 9 – Exemplo 2: simulação para o caso do critério relaxado.



Fonte: do autor

Figura 10 – Exemplo 2: evolução do sinal de controle e tempo entre eventos para o caso do critério relaxado.



Fonte: do autor

Nota-se que através da Figura 9 que o erro em regime permanece limitado em torno de zero, o que resulta em um aumento no tempo entre eventos, e por consequência, uma redução nas atualizações de controle conforme mostrado na Figura 10.

A Tabela 3, apresenta o número de atualizações do sinal de controle para cada simulação.

Tabela 3 – Exemplo 2: número de atualizações do sinal de controle para  $k \in [0 \ 300]$ .

Estratégia de controle	Atualizações do controle
<b><i>Time-triggered</i></b> (atualização periódica)	300
<b>PO 1</b>	288
<b>PO 2</b> ( $\sigma = 0,01$ )	246

Observa-se a influência da relaxação na redução de eventos, mesmo para referências periódicas, sob o compromisso de tolerar-se um pequeno erro de seguimento de referência em regime permanente. Com relação a uma atualização periódica, obtém-se uma redução de 4% e 18% com os parâmetros da função de disparo obtidos por PO 1 e PO 2, respectivamente.

### 3.5.3 Exemplo 3: dinâmica do sistema em malha fechada sob incertezas nos parâmetros

Deseja-se agora avaliar o comportamento do sistema em malha fechada com a estratégia proposta, porém sob a presença de incertezas nos parâmetros da planta. Para este caso, considera-se o sistema (70), com as mesmas matrizes  $K_x$ ,  $\Pi$ ,  $\Gamma$  e parâmetros da função de disparo obtidos através do PO 1 e PO 2. Neste caso considera-se que a matriz  $A$  em (70) é substituída por  $A_\Delta = A + D\Delta[k]E_A$ ;  $\Delta[k]' \Delta[k] \leq I_n$ , ou seja, uma incerteza limitada em norma. Para fins de simulação considera-se:

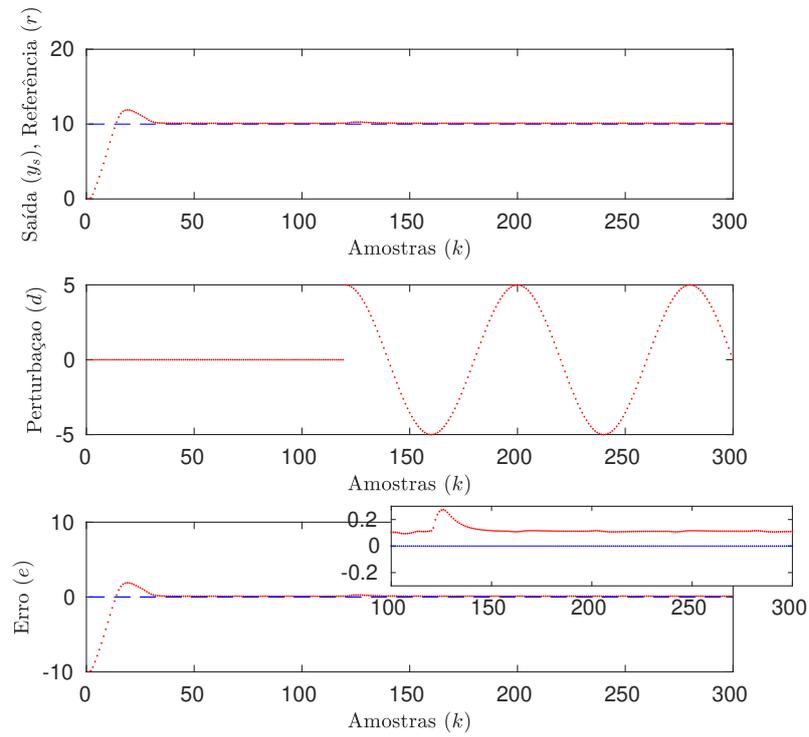
$$D = 0,001I_n; \quad E_A = I_n; \quad \Delta[k] = I_n, \quad (85)$$

o que altera os autovalores originais do sistema (70), *i.e.*,  $\sigma_A = (1,1051, 1,2214)$ , para  $\sigma_{A_\Delta} = (1,1061, 1,2224)$ .

As figuras 11 e 12 apresentam a simulação para o caso do critério sem relaxação e com relaxação respectivamente, considerando  $x[0] = [0 \ 0]'$ .

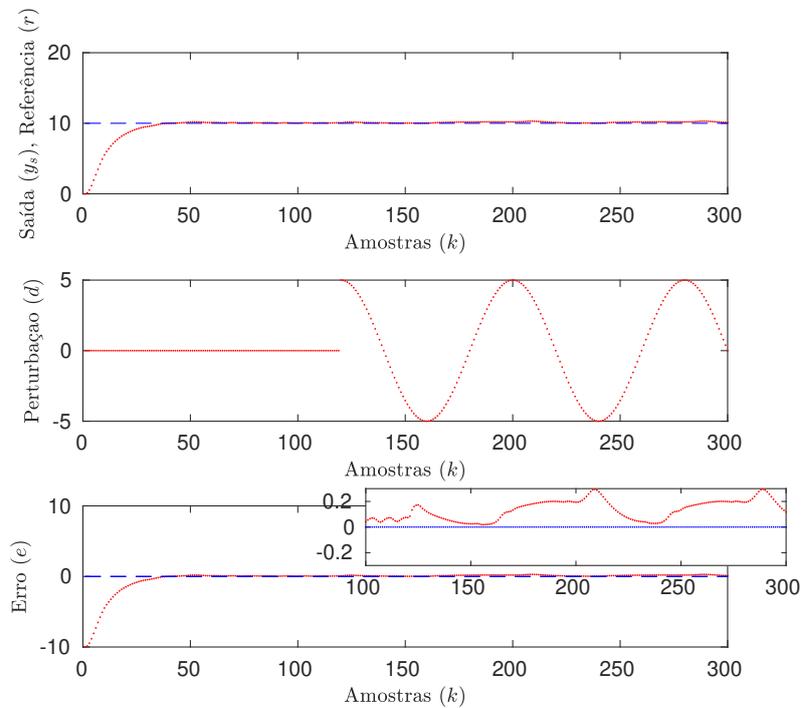
Conforme esperado, verifica-se que o erro em regime permanente não é nulo. Estes resultados decorrem de não se levar em consideração o princípio do modelo interno na estratégia de controle. Logo, conclui-se que a abordagem *full information* possui, além da limitação prática de acesso a todos os estados do sistema, uma limitação relacionada à robustez. Estes problemas serão novamente abordados no próximo capítulo.

Figura 11 – Exemplo 3: simulação para o caso do critério não relaxado.



Fonte: do autor

Figura 12 – Exemplo 3: simulação para o caso do critério relaxado.



Fonte: do autor

### 3.6 Comentários Finais

Neste capítulo foi apresentada a estratégia de controle baseado em eventos para seguimento de referência e rejeição de perturbações considerando-se um controle do tipo realimentação estática dos estados da planta e do sistema exógeno. Condições descritas na forma de *LMI*s foram propostas com objetivo de garantir a rejeição perfeita e prática de perturbações. Problemas de otimização convexos com foco na redução da atualização do controle foram propostos, a fim de calcular os parâmetros das funções de disparo. Os exemplos de simulações ilustram a eficiência da estratégia proposta, porém é importante ressaltar as limitações da implementação de uma lei de controle para o caso *full information*. Na prática, normalmente os estados do sistema não estão disponíveis para medição. Além disso, a lei de controle depende também do conhecimento do estado do sistema exógeno, o qual em geral (sobretudo quando há perturbação) não é acessível, o que inviabiliza a estratégia. Outra questão limitante desta abordagem, é que o método desenvolvido não é robusto. Uma forma de garantir robustez a variações paramétricas poderia ser realizada com a utilização do PMI, como será visto no próximo capítulo.

## 4 CONTROLE BASEADO EM UM OBSERVADOR DE ESTADOS

### 4.1 Introdução

No capítulo anterior, a estratégia de controle baseado em eventos foi implementada considerando-se uma realimentação estática dos estados. Neste caso, além do vetor de estados da planta, tem-se que o vetor de estados do sistema exógeno deve estar disponível para medição. Esta premissa não caracteriza um grande problema se o vetor de estados do sistema exógeno estiver associado somente a uma referência, porém para o caso de perturbação, implica que estes estados sejam mensuráveis. Na prática, contudo isso não ocorre, sendo necessário utilizar um controle baseado em um observador de estados. Nesse sentido, pode-se citar o trabalho de (JETTO; ORSINI, 2011), no qual a estratégia de controle baseado em eventos é abordada com base em um observador de estados, sendo proposta uma condição de disparo descrita através do erro de seguimento de referência, porém sem considerar a rejeição de perturbação. Em (GROFF *et al.*, 2016) a estratégia de controle baseado em eventos também é abordada considerando um observador de estados, porém para uma referência não variante no tempo e sem levar em conta a rejeição de perturbação.

Neste capítulo será apresentado um controlador baseado em um observador de estados tanto para os estados da planta quanto para os estados do sistema exógeno, a fim de se obter o seguimento de referência e rejeição de perturbação. Neste caso, tem-se que as dinâmicas do sinal de referência e perturbação estão inseridas no controlador, no qual se verificam as equações de regulação. Este fato satisfaz o princípio do modelo interno, sendo essa a principal diferença quando comparado ao trabalho apresentado em (SBARBARO; GOMES DA SILVA JR.; MOREIRA, 2020).

Da mesma forma que no capítulo anterior, serão primeiramente apresentadas condições de estabilidade em termos de *LMIs* para o perfeito seguimento de referência rejeição de perturbação em regime permanente e, em seguida, a extensão para o problema de regulação de saída prática. Problemas de otimização convexos são propostos para calcular os parâmetros das funções de disparo com o objetivo de reduzir as atualizações do sinal de controle. Por fim, exemplos numéricos são apresentados.

## 4.2 Formulação do Problema

Seja o seguinte observador de estados construído a partir da planta (27) e do sistema exógeno (28):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}[k+1] \\ \hat{w}[k+1] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & E \\ 0_{n_s \times n} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}[k] \\ \hat{w}[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0_{n_s \times m} \end{bmatrix} u[k] - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} (\hat{e}[k] - e[k]), \\ \hat{e}[k] &= C\hat{x}[k] + Q\hat{w}[k], \end{aligned} \quad (86)$$

onde  $\hat{x}[k] \in \mathbb{R}^n$  e  $\hat{w}[k] \in \mathbb{R}^{n_s}$  são os estados do observador,  $u[k] \in \mathbb{R}^m$  é a entrada,  $\hat{e}[k] \in \mathbb{R}^{n_e}$  é o erro de regulação de saída estimado e  $L_1 \in \mathbb{R}^{n \times n_e}$  e  $L_2 \in \mathbb{R}^{n_s \times n_e}$  são os ganhos do observador. Note que (86) é um observador de estados da planta e do sistema exógeno, *i.e.*, é também um observador da referência e da perturbação. Desta forma, tem-se a dinâmica do erro de observação dada por:

$$\tilde{x}[k+1] = (A_o - L_o C_o) \tilde{x}[k], \quad (87)$$

onde:

$$\begin{aligned} A_o &= \begin{bmatrix} A & E \\ 0_{n \times n_s} & S \end{bmatrix}; \quad L_o = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}; \quad C_o = \begin{bmatrix} C & Q \end{bmatrix}; \\ \tilde{x}[k] &= \begin{bmatrix} \tilde{x}_1[k] \\ \tilde{x}_2[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}[k] - x[k] \\ \hat{w}[k] - w[k] \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (88)$$

Considerando-se os estados observados, define-se a seguinte lei de controle:

$$u[k] = \begin{bmatrix} K_x & K_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}[k] \\ \hat{w}[k] \end{bmatrix} = K_x \hat{x}[k] + (\Gamma - K_x \Pi) \hat{w}[k]. \quad (89)$$

São assumidas as seguintes hipóteses:

**A6** Os ganhos  $K_x$  e  $L_o$  são tais que  $(A + BK_x)$  e  $(A_o - L_o C_o)$  são Schur-estáveis.

**A7** As matrizes  $\Pi$  e  $\Gamma$  satisfazem as equações de regulação:

$$\begin{aligned} \Pi S &= A\Pi + B\Gamma + E, \\ 0 &= C\Pi + Q. \end{aligned} \quad (90)$$

Seja agora a seguinte transformação de coordenadas, que representa o erro de regulação do estado estimado:

$$\bar{x}[k] = \hat{x}[k] - \Pi\hat{w}[k]. \quad (91)$$

De (86) tem-se então que a dinâmica de (91) pode ser descrita como:

$$\begin{aligned}\bar{x}[k+1] &= \hat{x}[k+1] - \Pi\hat{w}[k+1], \\ &= A\hat{x}[k] + Bu[k] + E\hat{w}[k] - L_1C_o\tilde{x}[k] - \Pi S\hat{w}[k] + \Pi L_2C_o\tilde{x}[k].\end{aligned}\quad (92)$$

De forma equivalente, considerando-se a lei de controle (89) e o erro de regulação (91), tem-se que a equação (92) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}\bar{x}[k+1] &= (A + BK_x)\bar{x}[k] + A\Pi\hat{w}[k] + E\hat{w}[k] + B\Gamma\hat{w}[k] - L_1C_o\tilde{x}[k] - \Pi S\hat{w}[k] \\ &\quad + \Pi L_2C_o\tilde{x}[k].\end{aligned}\quad (93)$$

Por fim, a partir das equações de regulação (90), tem-se a equação (93) reescrita de forma simplificada como:

$$\bar{x}[k+1] = (A + BK_x)\bar{x}[k] + (-L_1 + \Pi L_2)C_o\tilde{x}[k].\quad (94)$$

Assim, assumindo que os ganhos  $L_o$ ,  $K_x$  e  $K_r$  foram obtidos de modo a satisfazer as hipóteses A6 e A7, então  $(A + BK_x)$  e  $(A_o - L_oC_o)$  serão Schur-estáveis, logo  $\tilde{x}[k] \rightarrow 0$  e em consequência  $\bar{x}[k] \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Desta forma, verifica-se que  $e[k] = 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ , conforme mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} e[k] &= \lim_{k \rightarrow \infty} (Cx[k] + Qw[k]) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} C(\hat{x}[k] - \tilde{x}_1[k]) + \lim_{k \rightarrow \infty} Q(\hat{w}[k] - \tilde{x}_2[k]) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (C\hat{x}[k] + Q\hat{w}[k]) + \lim_{k \rightarrow \infty} (C\tilde{x}_1[k] + Q\tilde{x}_2[k]),\end{aligned}\quad (95)$$

como  $\tilde{x}[k] \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$  e  $\hat{x}[k] = \bar{x}[k] + \Pi\hat{w}[k]$ , tem-se que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e[k] = \lim_{k \rightarrow \infty} C\bar{x}[k] + \lim_{k \rightarrow \infty} (C\Pi + Q)\hat{w}[k],\quad (96)$$

considerando que  $C\Pi + Q = 0$ , então

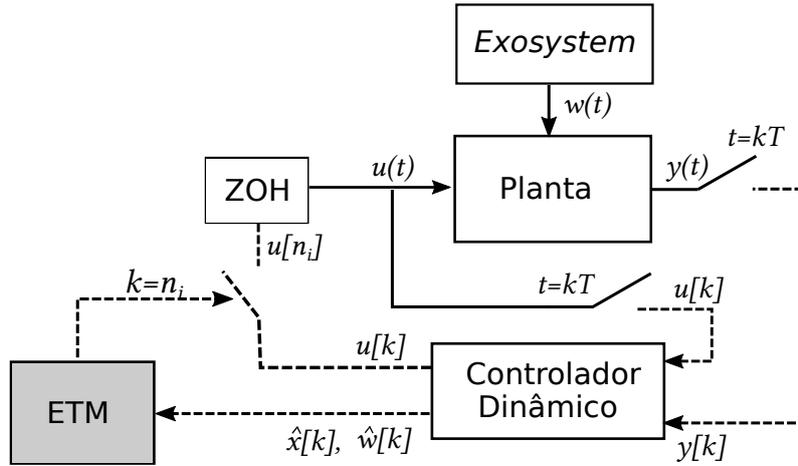
$$\lim_{k \rightarrow \infty} e[k] = \lim_{k \rightarrow \infty} C\bar{x}[k] = 0.\quad (97)$$

**Observação 1:** Note que o observador pode ser descrito considerando qualquer saída medida  $y[k]$ , e não necessariamente o sinal de erro.

#### 4.2.1 Estratégia de Controle Baseado em Eventos

Deseja-se agora implementar a estratégia de controle baseado em eventos utilizando um esquema *PETC*. Neste caso o *ETM* monitora periodicamente a saída do controlador, (*i.e.*, quando  $t = kT$ ), e obtém os estados estimados  $\hat{x}[k]$  e  $\hat{w}[k]$ . Assim, se o critério de disparo for violado, então o sinal controle será atualizado, que ocorre no instante de

Figura 13 – Esquema *PETC* aplicado ao controlador dinâmico.



Fonte: do autor

tempo  $n_i$ . Neste caso o valor do sinal de controle é mantido constante através do *ZOH* até que um novo evento seja gerado. A Figura 13 ilustra esta implementação.

Assim, tem-se que a lei de controle descrita em (89) sob a estratégia de controle baseado em eventos será atualizada somente nos instantes de tempo  $n_i$ , logo tem-se que:

$$u[k] = u[n_i] = K_x \hat{x}[n_i] + (\Gamma - K_x \Pi) \hat{w}[n_i] = K_x \bar{x}[n_i] + \Gamma \hat{w}[n_i], \forall k \in [n_i, n_{i+1}). \quad (98)$$

Desta forma, definindo

$$\begin{aligned} \delta_x[k] &\triangleq \bar{x}[n_i] - \bar{x}[k], \\ \delta_w[k] &\triangleq \hat{w}[n_i] - \hat{w}[k], \end{aligned} \quad (99)$$

tem-se que

$$u[k] = K_x \bar{x}[k] + \Gamma \hat{w}[k] + K_x \delta_x[k] + \Gamma \delta_w[k]. \quad (100)$$

Considerando as equações (87), (92) e (100), tem-se que as dinâmicas de  $\bar{x}[k]$  e  $\tilde{x}[k]$  sob a estratégia de controle baseado em eventos são dadas pela equação abaixo:

$$x_a[k+1] = A_a x_a[k] + B_a \delta_x[k] + B_{aw} \delta_w[k], \quad (101)$$

onde

$$\begin{aligned} x_a[k] &= \begin{bmatrix} \bar{x}[k]' & \tilde{x}[k]' \end{bmatrix}', \\ A_a &= \begin{bmatrix} (A + BK_x) & -L_1 C_o + \Pi L_2 C_o \\ 0_{n_s \times n} & (A_o - L_o C_o) \end{bmatrix}, \\ B_a &= \begin{bmatrix} BK_x \\ 0_{(n+n_s) \times n} \end{bmatrix}, \\ B_{aw} &= \begin{bmatrix} B\Gamma \\ 0_{(n+n_s) \times n_s} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (102)$$

Em virtude dos estados da planta e do sistema exógeno não estarem disponíveis para medição, deseja-se determinar os parâmetros da seguinte função disparo quadrática:

$$f(\delta_x[k], \delta_w[k], \bar{x}[k]) = \delta_x[k]' Q_{\delta_x} \delta_x[k] + \delta_w[k]' Q_{\delta_w} \delta_w[k] - \bar{x}[k]' Q_{\sigma} \bar{x}[k], \quad (103)$$

onde  $Q_{\delta_x} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_{\delta_w} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$  e  $Q_{\sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são matrizes simétricas positivas definidas que serão calculadas. É importante salientar que somente medidas efetivamente mensuráveis são utilizadas na função de disparo, *i.e.*, como  $\bar{x}[k] = \hat{x}[k] - \Pi \hat{w}[k]$  e  $\hat{x}$  e  $\hat{w}[k]$  estão disponíveis para medição, então todos os argumentos da função (103) estão disponíveis. Deste modo, deseja-se que o sistema em malha fechada (101), sob a estratégia de controle baseado em eventos dado pela função (103), seja assintoticamente estável e a geração de eventos seja reduzida ou equivalentemente, que o sinal de controle seja atualizado o mínimo possível.

### 4.3 Condições de Estabilidade

Nesta seção serão apresentadas condições para garantia de estabilidade do sistema em malha fechada (101) sob a estratégia de controle baseado em eventos. Assim, considerando-se que os ganhos  $L_o$ ,  $K_x$  e  $K_r$  foram obtidos de forma a satisfazer as hipóteses A6 e A7, pode-se enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 5.** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P \in \mathbb{R}^{(2n+n_s) \times (2n+n_s)}$ ,  $Q_{\delta_x} \in \mathbb{R}^{(2n+n_s) \times (2n+n_s)}$ ,  $Q_{\delta_w} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$  e  $\bar{Q}_{\sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que*

$$\left( \begin{bmatrix} -P & 0_{(2n+n_s) \times n} & 0_{(2n+n_s) \times n_s} & U_o \\ * & -Q_{\delta_x} & 0_{n \times n_s} & 0_n \\ * & * & -Q_{\delta_w} & 0_{n_s \times n} \\ * & * & * & -\bar{Q}_{\sigma} \end{bmatrix} + \Psi_3 \right) < 0, \quad (104)$$

é verificada, sendo

$$U_o = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times (n+n_s)} \end{bmatrix}', \quad (105)$$

$$\Psi_3 = \begin{bmatrix} A'_a \\ B'_a \\ B'_{aw} \\ 0_{n \times (2n+n_s)} \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} A_a & B_a & B_{aw} & 0_{(2n+n_s) \times n} \end{bmatrix}, \quad (106)$$

então as trajetórias do sistema (101), sob a estratégia de controle baseado em eventos proposta no Algoritmo 1 com a função de disparo definida em (103), sendo  $Q_{\sigma} = \bar{Q}_{\sigma}^{-1}$ , convergem assintoticamente para a origem.

*Prova.* A prova segue os mesmos passos da prova do Teorema 3, porém considerando-se o sistema (101). Assim, tem-se que (104) garante que  $x_a[k] \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .  $\square$

Como o  $\tilde{x}[k]$  garante que  $\bar{x}[k]$  converge assintoticamente para zero tem-se que  $\bar{x}[k]$  e  $\tilde{x}[k] \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ , o que garante a regulação de saída perfeita em regime permanente.

### 4.3.1 Estratégia de Controle baseado em Eventos com Relaxação

Conforme apresentado no capítulo anterior, será assumido um critério de relaxação para o problema em questão, dado a partir da seguinte função de disparo:

$$f_\gamma(\delta_x[k], \delta_w[k], \bar{x}[k]) = \delta_x[k]' Q_{\delta_x} \delta_x[k] + \delta_w[k]' Q_{\delta_w} \delta_w[k] - \bar{x}[k]' Q_\sigma \bar{x}[k] - \gamma. \quad (107)$$

Desta forma o erro de regulação estimado  $\bar{x}[k]$ , não irá convergir para a origem, mas para um conjunto positivamente invariante elipsoidal  $\hat{\mathcal{E}}(P, \eta) = \{x_a \in \mathbb{R}^{2n+n_s}, x_a' P x_a \leq \eta\}$ . Neste caso, tem-se que as trajetórias ficarão confinadas no conjunto  $\hat{\mathcal{E}}(P, \eta)$  em regime permanente. Com isso, o seguinte teorema pode ser enunciado considerando o critério relaxado:

**Teorema 6.** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P \in \mathbb{R}^{(2n+n_s) \times (2n+n_s)}$ ,  $Q_{\delta_x} \in \mathbb{R}^{(2n+n_s) \times (2n+n_s)}$ ,  $Q_{\delta_w} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$ ,  $\bar{Q}_\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e escalares positivos  $\tau \in (0, 1)$  e  $\bar{\gamma}$ , tais que*

$$\left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc} -(1-\tau)P & 0_{(2n+n_s) \times n} & 0_{(2n+n_s) \times n_s} & U_o \\ * & -Q_{\delta_x} & 0_{n \times n_s} & 0_n \\ * & * & -Q_{\delta_w} & 0_{n_s \times n} \\ * & * & * & -\bar{Q}_\sigma \end{array} \right] + \Psi_3 \\ < 0, \end{array} \right) \quad (108)$$

$$\begin{bmatrix} -\eta\tau & 1 \\ 1 & -\bar{\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (109)$$

sejam verificadas, então as trajetórias do sistema (101), sob a estratégia de controle baseado em eventos proposta no Algoritmo 1 com a função de disparo definida em (107), sendo  $Q_\sigma = \bar{Q}_\sigma^{-1}$  e  $\gamma = \bar{\gamma}^{-1}$ , convergem em tempo finito para o conjunto positivamente invariante  $\hat{\mathcal{E}}(P, \eta)$ .

*Prova.* Seguindo os mesmos passos da prova do Teorema 4, tem-se que se as desigualdades (108) e (109) são satisfeitas então  $\Delta V(x_a[k]) < f_\gamma(\delta_x[k], \delta_w[k], \bar{x}[k]) - \tau x_a[k]' P x_a[k] + \tau\eta$ . O restante da prova é semelhante à prova do Teorema 4 e consiste em demonstrar que se a desigualdade (111) for verificada, então as trajetórias do sistema (101) convergirão em regime permanente para um conjunto positivamente invariante  $\hat{\mathcal{E}}(P, \eta)$ .  $\square$

## 4.4 Problemas de Otimização

A partir das condições de estabilidade previamente apresentadas, deseja-se projetar os parâmetros da função de disparo de modo a reduzir o número de eventos gerados. Assim, similarmente à Seção 3.4 o seguinte problema de otimização é proposto no caso da função de disparo não relaxada.

**PO 3:**

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \text{tr}(Q_{\delta_x}) + \text{tr}(Q_{\delta_w}) + \text{tr}(\bar{Q}_\sigma) \\ & \text{sujeito a: (104),} \end{aligned} \quad (110)$$

$$P = P' > 0, Q_{\delta_x} = Q'_{\delta_x} > 0, Q_{\delta_w} = Q'_{\delta_w} > 0, \bar{Q}_\sigma = \bar{Q}'_\sigma > 0.$$

Para a estratégia de controle baseado em eventos com a condição de disparo relaxada, tem-se também o objetivo de garantir que a trajetória do erro de regulação dada por  $e = C\bar{x}$ , permaneça confinada em uma bola de raio  $\sqrt{\sigma^{-1}}$ , quando  $k \rightarrow \infty$ , *i.e.*, o erro em regime permanente pode ser ajustado através de  $\sigma$ . Com isso, deve-se levar em consideração a seguinte restrição:

$$P - \eta \begin{bmatrix} \sigma C' C & 0_{n \times (n+n_s)} \\ * & 0_{n+n_s} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (111)$$

a qual garante que  $\hat{E}(P, \eta) \subset \hat{S}_\sigma$ , com  $\hat{S}_\sigma = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n; \bar{x}' C' C \bar{x} \leq \sigma^{-1}\}$ . Logo, além da minimização de matrizes  $Q_{\delta_x}$ ,  $Q_{\delta_w}$  e  $\bar{Q}_\sigma$ , a maximização de  $\gamma$ , ou equivalentemente, a minimização de  $\bar{\gamma}$ , também deve ser considerada. Para o critério relaxado será utilizado então o problema de otimização a seguir.

**PO 4:**

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \text{tr}(Q_{\delta_x}) + \text{tr}(Q_{\delta_w}) + \text{tr}(\bar{Q}_\sigma) + \bar{\gamma} \\ & \text{sujeito a: (108), (109), (111),} \end{aligned} \quad (112)$$

$$P = P' > 0, Q_{\delta_x} = Q'_{\delta_x} > 0, Q_{\delta_w} = Q'_{\delta_w} > 0, \bar{Q}_\sigma = \bar{Q}'_\sigma > 0, \bar{\gamma} > 0.$$

## 4.5 Exemplos numéricos

A seguir serão apresentados exemplos numéricos e simulações para ilustrar o método desenvolvido.

### 4.5.1 Exemplo 4: seguimento de referência constante e rejeição de perturbação senoidal

Para este exemplo considera-se a mesma planta instável em malha aberta apresentada em (70). Também se considera o sistema exógeno definido em (72), *i.e.*, um sistema capaz de gerar uma referência constante e uma perturbação senoidal contínua de frequência  $\omega = 0,25\pi$  rad/s, *i.e.*, com frequência discreta de  $\Omega = \omega T = 0,0785$ . Assim, considerando-se

que  $(A + BK_x)$  deve ser Schur-estável e a hipótese A7 é satisfeita, os seguintes ganhos  $K_x$  e  $K_r$ , e matrizes  $\Gamma$  e  $\Pi$  foram obtidos:

$$\begin{aligned} K_x &= \begin{bmatrix} -0,6111 & -5,7918 \end{bmatrix}, \\ \Pi &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0551 & -0,0021 \end{bmatrix}, \\ \Gamma &= \begin{bmatrix} 2 & -1,8808 & 0,0432 \end{bmatrix}, \\ K_r &= \begin{bmatrix} 2,6111 & -1,5618 & 0,0313 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (113)$$

Para o cálculo dos ganhos do observador, considerou-se o posicionamento dos polos do observador em malha fechada em 0,6, 0,61, 0,62, 0,63, 0,64, o que resultou no seguinte ganho  $L_o$ , tal que  $(A_o - L_o C_o)$  é Schur-estável:

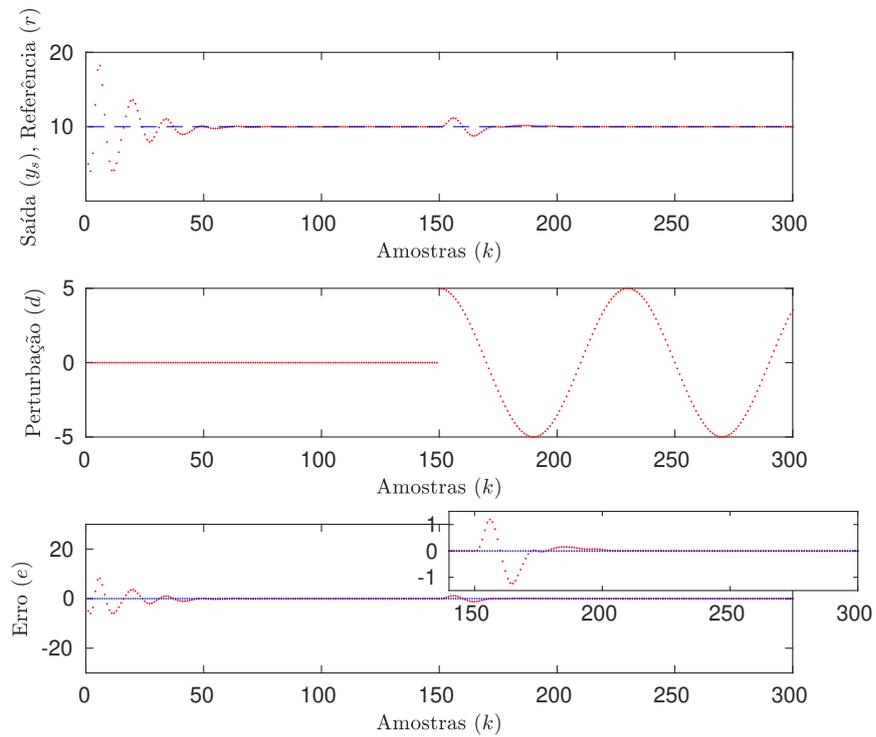
$$L_o = \begin{bmatrix} -52,7814 & 14,4909 & -55,0018 & -35,1532 & 51,7253 \end{bmatrix}'. \quad (114)$$

Deseja-se agora projetar os parâmetros da função de disparo de modo a reduzir o número de eventos gerados com o perfeito seguimento de referência e rejeição de perturbação em regime permanente. Para isso, solucionando-se o PO 3, obtêm-se as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} Q_{\delta_x} &= \begin{bmatrix} 0,0387 & 0,3664 \\ 0,3664 & 3,4723 \end{bmatrix}, \\ Q_{\delta_w} &= \begin{bmatrix} 0,8782 & -0,8259 & 0,0190 \\ -0,8259 & 0,7766 & -0,0178 \\ 0,0190 & -0,0178 & 0,0004 \end{bmatrix}, \\ Q_{\sigma} &= \begin{bmatrix} 0,4170 & 0,0006 \\ 0,0006 & 0,3613 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (115)$$

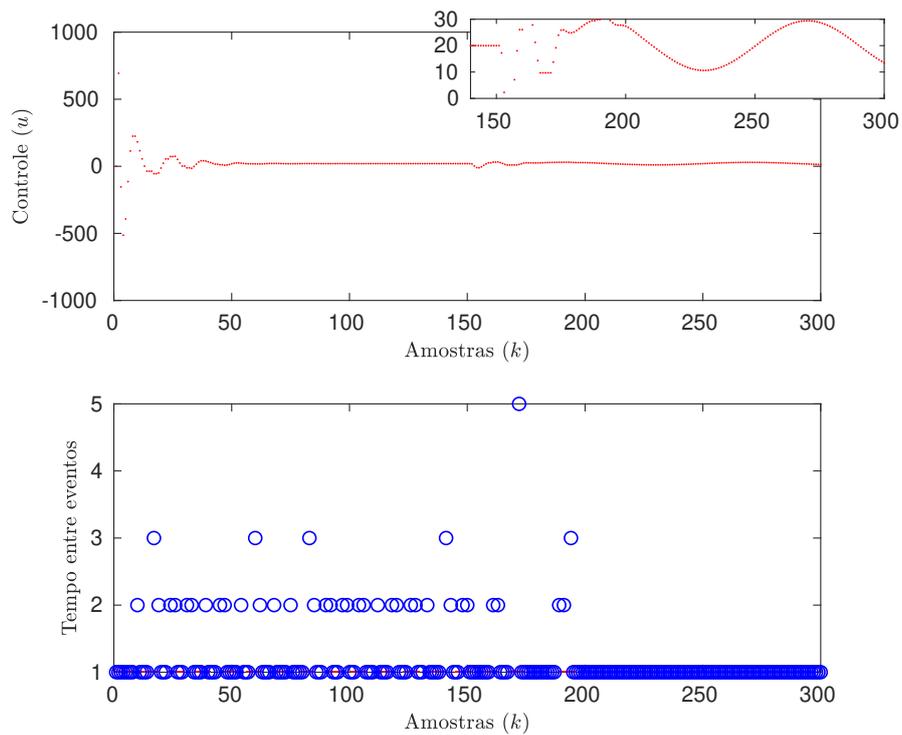
As simulações do sistema em malha fechada com a função  $f(\delta_x[k], \delta_w[k], \bar{x}[k])$  são mostradas nas figuras 14 e 15 respectivamente. As condições iniciais utilizadas foram  $x[0] = [5 \ -8]'$ ,  $\hat{x}[0] = [0 \ 0]$  e  $\hat{w}[0] = [0 \ 0 \ 0]'$ . Uma perturbação senoidal com frequência discreta igual a  $\Omega = 0,0785$  e amplitude 5 foi aplicada no instante  $k = 150$ . Conforme esperado, o perfeito seguimento de referência e rejeição de perturbação é atingido em regime permanente, ocorrendo a degeneração da estratégia de controle baseado em eventos para uma estratégia *time-triggered* periódico, devido a presença do sinal de perturbação no instante  $k = 150$ .

Figura 14 – Exemplo 4: simulação para o caso do critério não relaxado.



Fonte: do autor

Figura 15 – Exemplo 4: evolução do sinal de controle e tempo entre eventos para o caso do critério não relaxado.



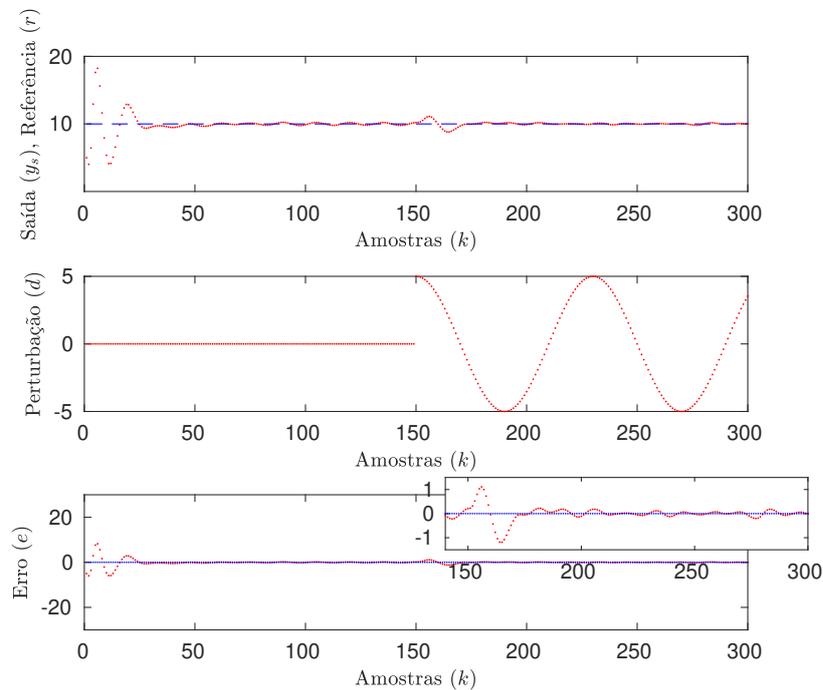
Fonte: do autor

A fim de evitar a atualização de controle periodicamente em regime permanente, será considerado agora o critério de disparo relaxado. Logo, solucionando-se PO 4 para  $\sigma = 1$ , a solução ótima foi obtida com  $\tau = 0,04$  e os seguintes parâmetros para a função de disparo (107):

$$\begin{aligned}
 Q_{\delta_x} &= \begin{bmatrix} 0,0633 & 0,5898 \\ 0,5898 & 5,5906 \end{bmatrix}, \\
 Q_{\delta_w} &= \begin{bmatrix} 1,4143 & -1,3290 & 0,0305 \\ -1,3290 & 1,2508 & -0,0287 \\ 0,0305 & -0,0287 & 0,0017 \end{bmatrix}, \\
 Q_{\sigma} &= \begin{bmatrix} 0,3722 & -0,0327 \\ -0,0327 & 0,4506 \end{bmatrix}, \\
 \gamma &= 0,2938.
 \end{aligned} \tag{116}$$

Sob as mesmas condições iniciais e características do sinal de referência e perturbação das simulações anteriores e a função  $f_{\gamma}(\cdot)$ , têm-se as simulações para o sistema em malha fechada mostradas nas figuras 16 e 17, respectivamente.

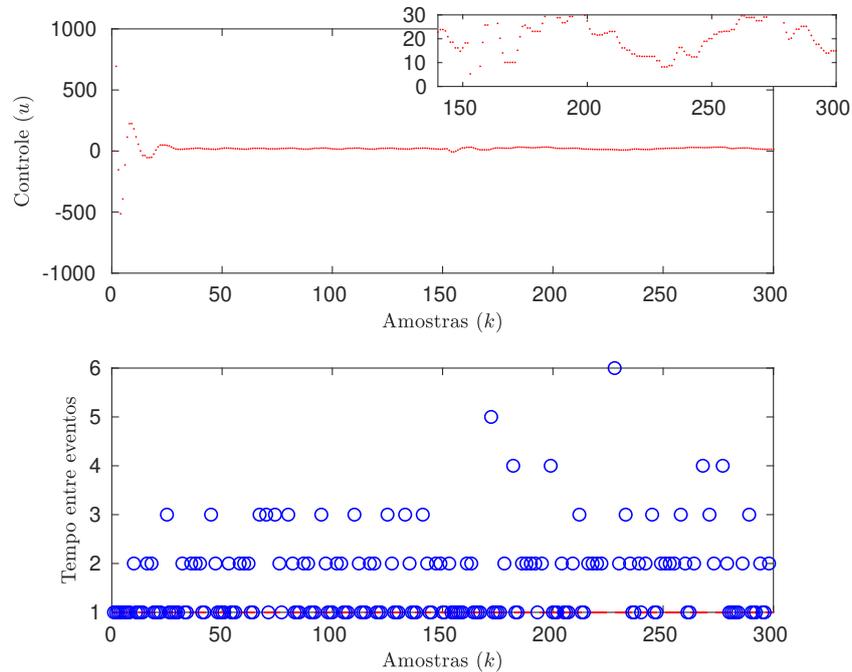
Figura 16 – Exemplo 4: simulação para o caso do critério relaxado.



Fonte: do autor

Como esperado, observa-se um erro em regime permanente, mas cujo módulo é menor que 1. As simulações com o critério relaxado reforçam assim o propósito da estratégia, *i.e.*, um dado o erro em regime atribuído via projeto, resulta em redução no número de eventos.

Figura 17 – Exemplo 4: evolução do sinal de controle e tempo entre eventos para o caso do critério relaxado.



Fonte: do autor

A redução no número de eventos pode ser observada na Tabela 4.

Tabela 4 – Exemplo 4: número de atualizações do sinal de controle para  $k \in [0 \ 300]$ .

Estratégia de controle	Atualizações do controle
<b><i>Time-triggered</i> (atualização periódica)</b>	300
<b>PO 3</b>	253
<b>PO 4 (<math>\sigma = 1</math>)</b>	186

Observa-se que, com relação a uma atualização periódica, obtém-se uma redução de 15,6% e 38% com os parâmetros da função de disparo obtidos por PO 3 e PO 4 respectivamente, quando considerado  $\sigma = 1$ . Apesar de ser uma redução menor, quando comparado com a estratégia de realimentação de estados, verifica-se que o uso do observador é eficiente, visto que é possível relaxar ainda mais o critério de disparo através de  $\sigma$ . A seguir será explorado o caso de seguimento e rejeição de sinais senoidais.

#### 4.5.2 Exemplo 5: seguimento e rejeição de sinais senoidais

Para este caso, será considerado o seguinte sistema linear instável em tempo contínuo, adaptado do sistema apresentado em (GROFF *et al.*, 2016):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u(t) + d(t)), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t).\end{aligned}\tag{117}$$

Deste modo, sendo (117) discretizado através de um *ZOH*, com  $T = 0,1s$ , tem-se o seguinte sistema em tempo discreto:

$$\begin{aligned}x[k+1] &= \begin{bmatrix} 1,0201 & 0,1007 \\ 0,4027 & 1,0201 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 0,005 \\ 0,1007 \end{bmatrix} u[k] \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0,005 & 0 \\ 0 & 0,1007 & 0 \end{bmatrix} w[k], \\ y[k] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x[k].\end{aligned}\tag{118}$$

Será levado em consideração que os sinais de referência e perturbação, são ambos senoidais e de amplitude 5, porém com frequências distintas, sendo  $0,2\pi$  rad/s para o sinal de referência e  $0,5\pi$  rad/s para o sinal de perturbação, com frequências discretas  $\Omega_1 = 0,0628$  e  $\Omega_2 = 0,1571$ , respectivamente. Assim, considerando-se que as hipóteses A6 e A7 devem ser satisfeitas, os seguintes ganhos e matrizes  $\Gamma$  e  $\Pi$  foram obtidos:

$$\begin{aligned}K_x &= \begin{bmatrix} -7,023 & -3,525 \end{bmatrix}, \\ L_o &= \begin{bmatrix} 41,3917 & 37,2677 & 39,1301 & 32,5508 & -93,6650 & 69,9166 \end{bmatrix}', \\ \Pi &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6306 & 0,0004 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Gamma &= \begin{bmatrix} -4,3928 & -0,1381 & -1,0040 & 0 \end{bmatrix}, \\ K_r &= \begin{bmatrix} 2,637 & 2,0849 & -1,0027 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{119}$$

Os parâmetros da função de disparo para os casos com e sem relaxação são descritos a seguir:

- Parâmetros obtidos por PO 3:

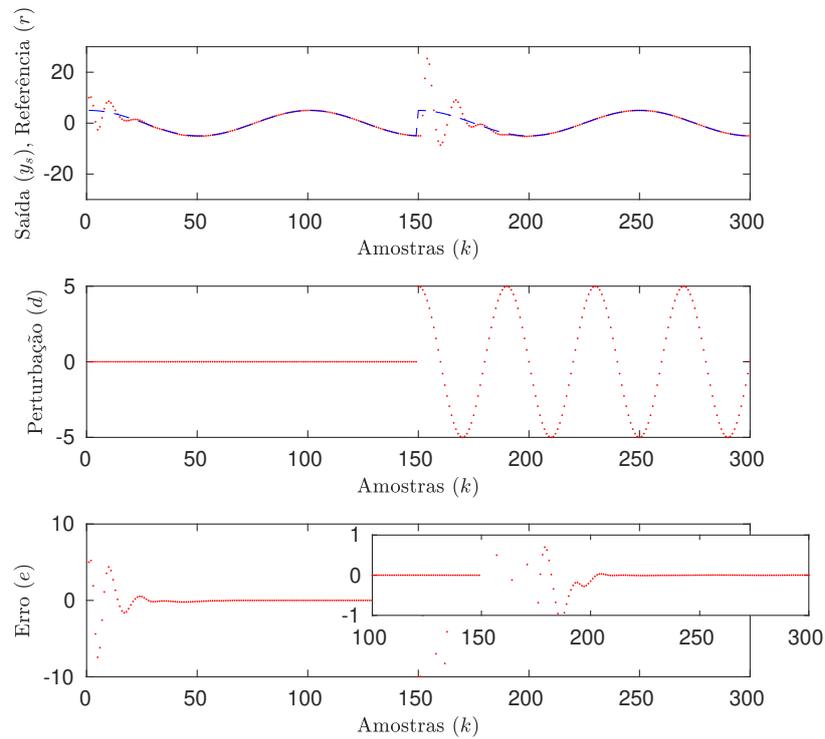
$$\begin{aligned}
 Q_{\delta_x} &= \begin{bmatrix} 3,2759 & 1,6424 \\ 1,6424 & 0,8241 \end{bmatrix}, \\
 Q_{\delta_w} &= \begin{bmatrix} 2,2312 & 0,0701 & 0,5099 & 0 \\ 0,0701 & 0,0027 & 0,0160 & 0 \\ 0,5099 & 0,0160 & 0,1171 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0005 \end{bmatrix}, \\
 Q_{\delta_\sigma} &= \begin{bmatrix} 0,3358 & -0,0001 \\ -0,0001 & 0,2888 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{120}$$

- Parâmetros obtidos por PO 4:

$$\begin{aligned}
 \tau &= 0,03, \\
 Q_{\delta_x} &= \begin{bmatrix} 4,3379 & 2,1749 \\ 2,1749 & 1,0912 \end{bmatrix}, \\
 Q_{\delta_w} &= \begin{bmatrix} 2,9547 & 0,0929 & 0,6752 & 0 \\ 0,0929 & 0,0035 & 0,0212 & 0 \\ 0,6752 & 0,0212 & 0,1549 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0006 \end{bmatrix}, \\
 Q_{\delta_\sigma} &= \begin{bmatrix} 0,3017 & -0,0095 \\ -0,0095 & 0,3176 \end{bmatrix}, \\
 \gamma &= 0,4815.
 \end{aligned} \tag{121}$$

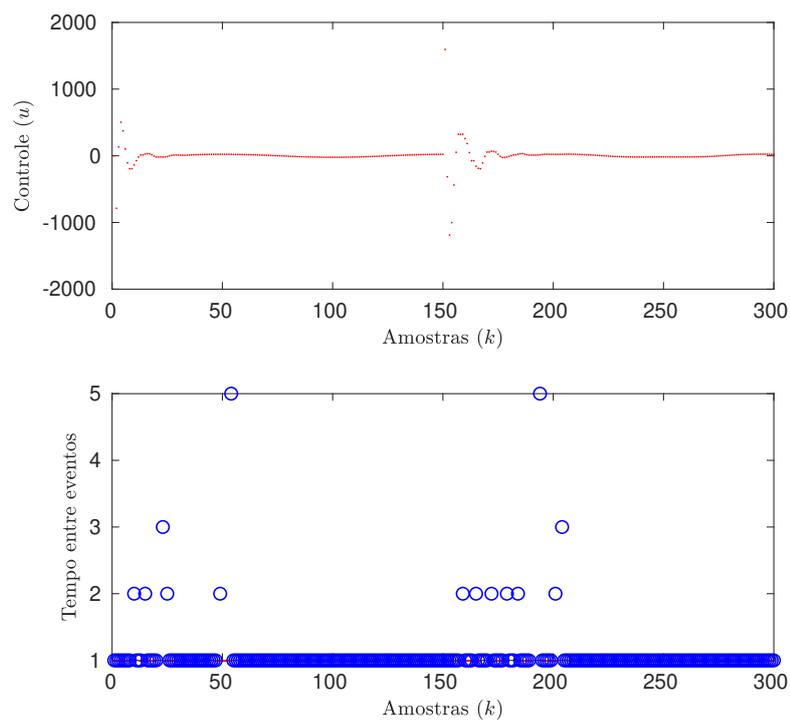
As figuras 18 e 19 apresentam as simulações para o caso sem relaxação. Conforme esperado, observa-se que a perturbação é perfeitamente rejeitada, ocorrendo a degeneração da estratégia de controle baseado em eventos para uma estratégia *time-triggered* periódico devido à dinâmica da referência, logo o uso do critério relaxado se torna uma alternativa para redução na atualização de controle.

Figura 18 – Exemplo 5: simulação para o caso do critério não relaxado.



Fonte: do autor

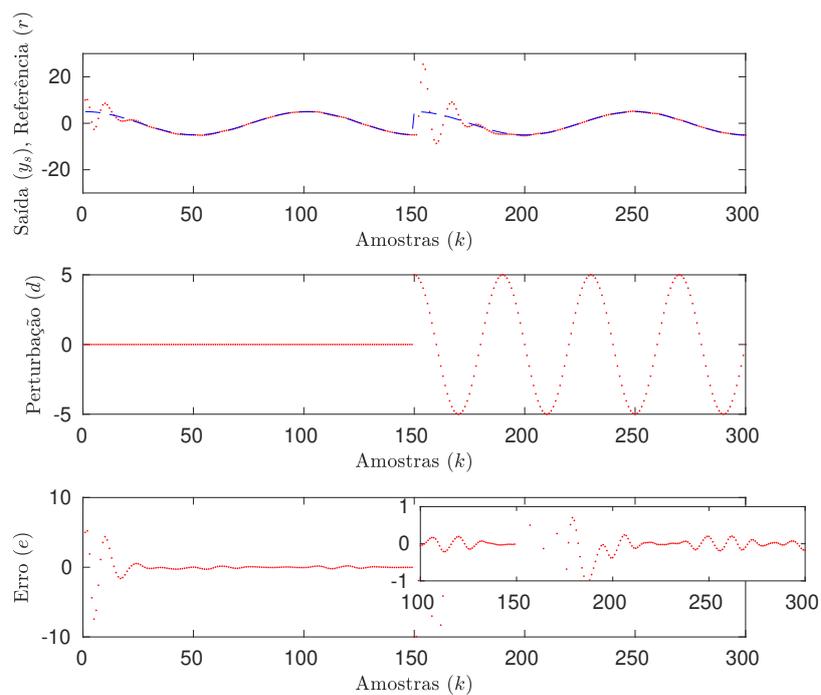
Figura 19 – Exemplo 5: evolução do sinal de controle e tempo entre eventos para o caso do critério não relaxado.



Fonte: do autor

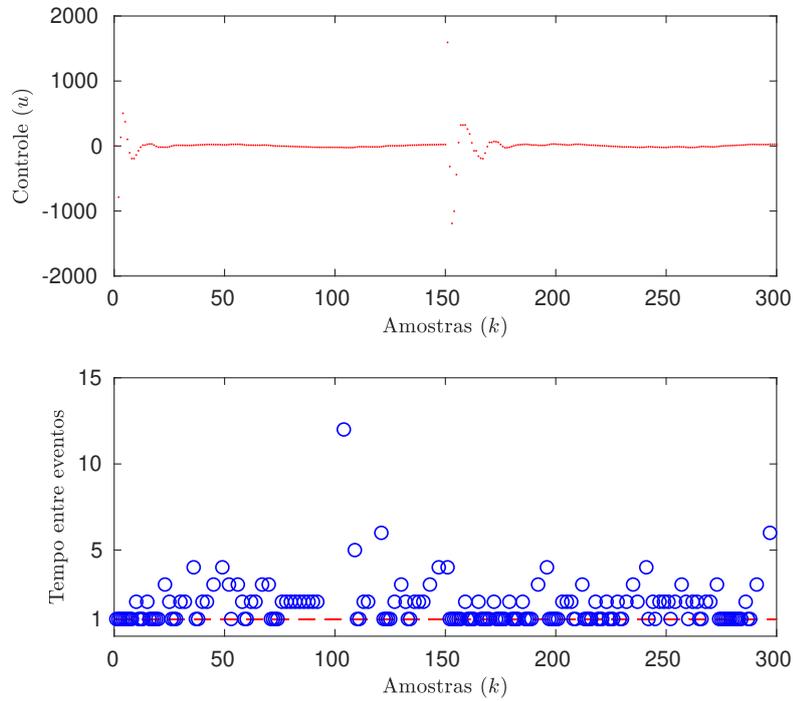
Para a simulação com o critério relaxado, foi definido um  $\sigma = 0,3$ , o que corresponde a admitir uma tolerância ao erro de seguimento de referência em regime permanente de  $\pm 1,82$ . As figuras 20 e 21 ilustram a eficiência da estratégia, sendo gerado 176 eventos, o que corresponde a uma redução de 41% quando comparado com o controle periódico, além do erro em regime, que permaneceu dentro dos limites predefinidos.

Figura 20 – Exemplo 5: simulação para o caso do critério relaxado.



Fonte: do autor

Figura 21 – Exemplo 5: evolução do sinal de controle e tempo entre eventos para o caso do critério relaxado.



Fonte: do autor

#### 4.5.3 Exemplo 6: sistema incerto

Como forma comparativa, será considerado neste exemplo a mesma planta instável em malha aberta apresentada em (70). Também será considerado o sistema exógeno definido em (72), *i.e.*, um sistema capaz de gerar uma referência constante e uma perturbação senoidal contínua de frequência  $\omega = 0,25\pi$  rad/s, *i.e.*, com frequência discreta de  $\Omega = \omega T = 0,0785$ . Os ganhos  $K_x$  e  $K_r$  e as matrizes  $\Gamma$  e  $\Pi$ , que satisfazem as hipóteses A6 e A7, são mostrados em (113). O Ganho  $L_o$  é dado em (114). Desta forma, solucionando-se PO 3, obtêm-se as seguintes matrizes:

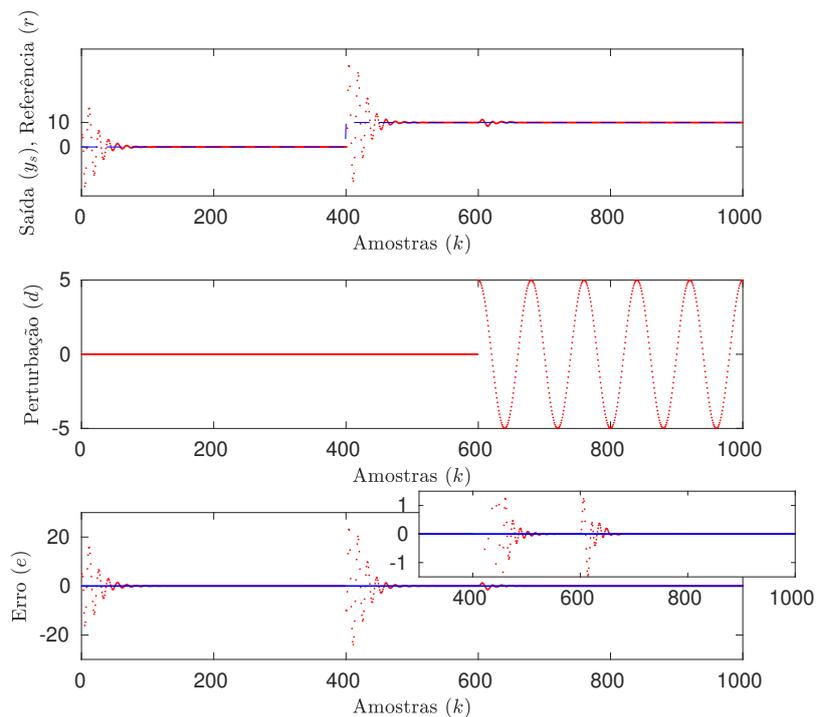
$$\begin{aligned}
 Q_{\delta_x} &= \begin{bmatrix} 0,0396 & 0,3669 \\ 0,3669 & 3,4779 \end{bmatrix}, \\
 Q_{\delta_w} &= \begin{bmatrix} 0,8796 & -0,8264 & 0,0190 \\ -0,8264 & 0,7780 & -0,0179 \\ 0,0190 & -0,0179 & 0,0013 \end{bmatrix}, \\
 Q_{\sigma} &= \begin{bmatrix} 0,4177 & 0,0006 \\ 0,0006 & 0,3616 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{122}$$

As simulações consideram inicialmente uma referência nula, com  $x[0] = [5 \ -10]$ . Após o instante  $k = 400$ , foi aplicada uma referência constante de amplitude 10, seguida

de uma perturbação senoidal de amplitude 5 e frequência  $\Omega = 0,0785$  aplicada no instante  $k = 600$ .

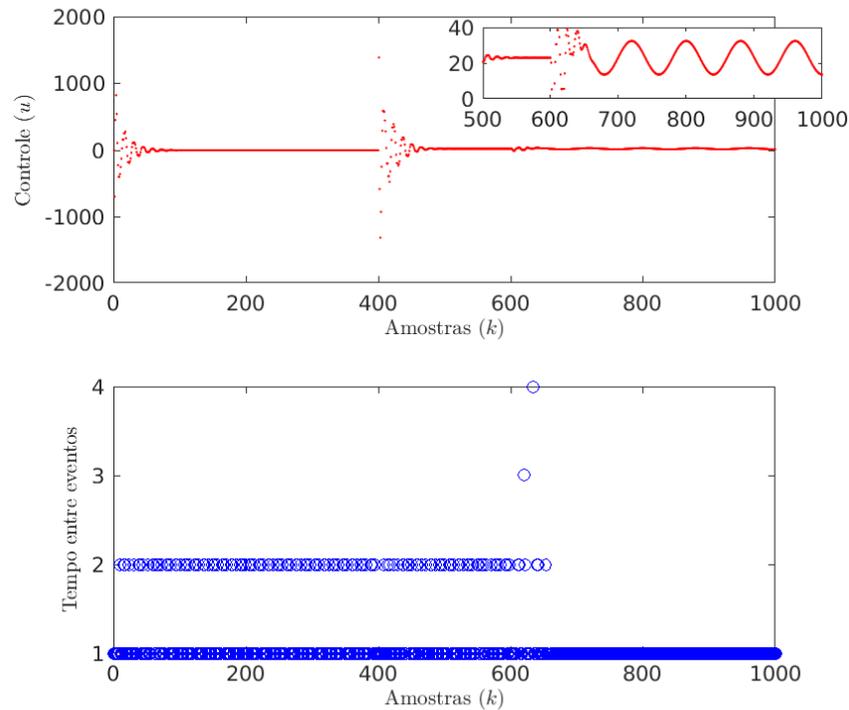
Da mesma forma que no Exemplo 3.5.3, considera-se que a matriz  $A$  em (70) é substituída por  $A_\Delta = A + D\Delta[k]E_A$ ,  $\Delta[k]^T \Delta[k] \leq I_n$ , ou seja, uma incerteza limitada em norma, sendo  $D = 0,01I_n$  e  $E_A = I_n$ . Neste caso os autovalores originais do sistema (70) foram alterados de  $\sigma_A = (1,1051, 1,2214)$ , para  $\sigma_{A_\Delta} = (1,1151, 1,2314)$ . As simulações para o caso sem relaxação são mostradas nas figuras 22 e 23.

Figura 22 – Exemplo 6: simulação para o caso do critério não relaxado.



Fonte: do autor

Figura 23 – Exemplo 6: evolução do sinal de controle e tempo entre eventos para o caso do critério não relaxado.



Fonte: do autor

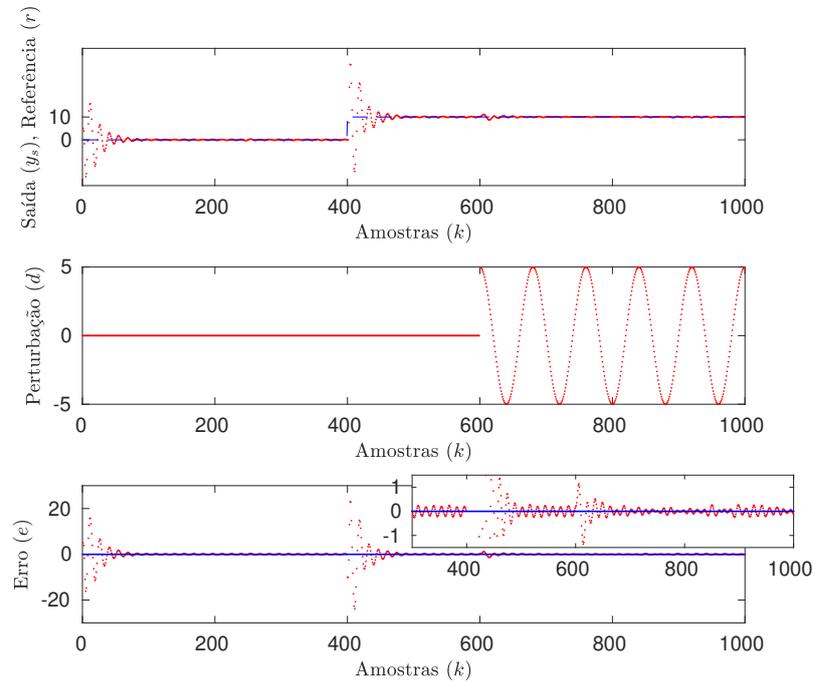
As simulações indicam que a estratégia proposta é robusta, pois é possível seguir e rejeitar perturbações com erro nulo em regime permanente, mesmo na presença de parâmetros incertos na planta.

Para o caso com relaxação, foi solucionado o PO 4 para  $\sigma = 1$ , o que resulta em  $\tau = 0,04$  e nas seguintes matrizes:

$$\begin{aligned}
 Q_{\delta_x} &= \begin{bmatrix} 0,0633 & 0,5898 \\ 0,5898 & 5,5906 \end{bmatrix}, \\
 Q_{\delta_w} &= \begin{bmatrix} 1,4143 & -1,3290 & 0,0305 \\ -1,3290 & 1,2508 & -0,0287 \\ 0,0305 & -0,0287 & 0,0017 \end{bmatrix}, \\
 Q_{\sigma} &= \begin{bmatrix} 0,3722 & -0,0327 \\ -0,0327 & 0,4506 \end{bmatrix}, \\
 \gamma &= 0,2938.
 \end{aligned} \tag{123}$$

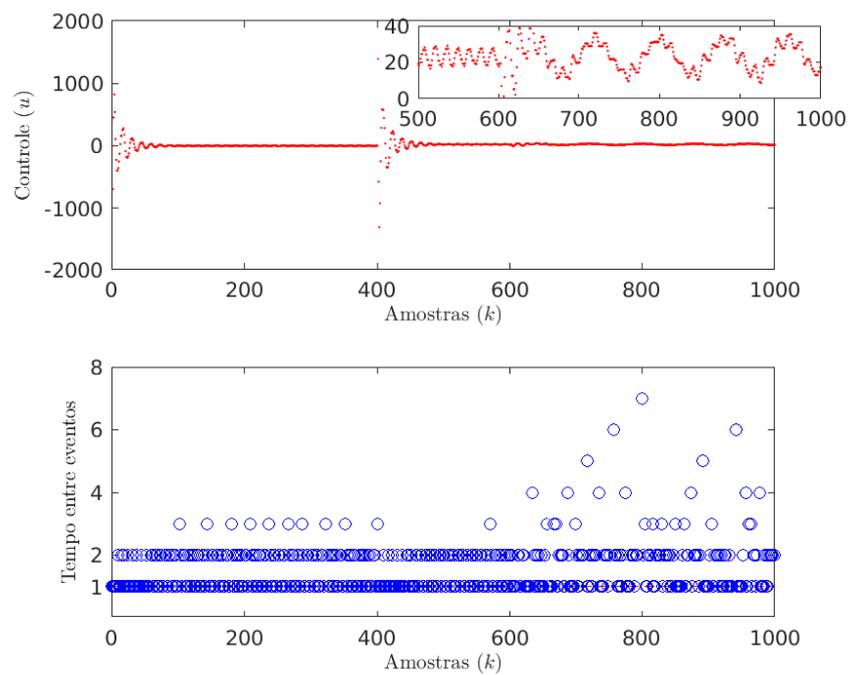
As figuras 24 e 25 ilustram o caso com relaxação:

Figura 24 – Exemplo 6: simulação para o caso do critério relaxado.



Fonte: do autor

Figura 25 – Exemplo 6: evolução do sinal de controle e tempo entre eventos para o caso do critério relaxado.



Fonte: do autor

Observa-se que neste caso, a regulação de saída prática é atingida, com uma redução de 31,7% no número de eventos, mesmo na presença de parâmetros incertos na planta, sendo o erro em regime permanente limitado entre  $\pm 1$ . Conforme previamente abordado, o comportamento robusto do sistema em malha fechada ocorre devido à inserção das dinâmicas dos modelos da referência e da perturbação no controlador. Sobretudo, as simulações indicam que o sistema em malha fechada, com o controlador da forma (14), sob a estratégia de controle baseado em eventos é também robusto com relação a incertezas na planta.

## 4.6 Comentários Finais

Neste capítulo foi apresentada a estratégia de controle baseado em eventos para seguimento de referência e rejeição de perturbações com um controlador baseado em um observador de estados. Um fato importante desta abordagem é que a implementação do controlador baseado em um observador de estados possibilitou a utilização das estimativas dos estados da planta e do sistema exógeno na estratégia de controle baseado em eventos, o que difere do Capítulo 3, no qual era necessário além das medidas dos estados da planta, dispor do estado do sistema exógeno. Neste contexto, condições descritas na forma de *LMI*s foram propostas considerando-se a regulação de saída perfeita e prática. Problemas de otimização convexos foram propostos para o cálculo dos parâmetros das funções de disparo. Os exemplos de simulações ilustram a eficiência da estratégia proposta, em diferentes cenários, podendo-se destacar o caso de incertezas paramétricas, o qual indica que o PMI com controle baseado em eventos é robusto, porém com o “tamanho” da incerteza não quantizado formalmente. No próximo capítulo será tratado o problema de regulação de saída, considerando incertezas paramétricas explicitamente na fase de projeto da estratégia de controle baseado em eventos, de modo a estabelecer condições que garantam formalmente a robustez para o sistema em malha fechada, sob a estratégia de controle baseado em eventos.

## 5 REGULAÇÃO DE SAÍDA ROBUSTA

### 5.1 Introdução

Um problema relevante relacionado ao projeto de estratégias de controle baseado em eventos consiste na avaliação de robustez frente à existência de parâmetros incertos no sistema. De fato, a obtenção de um modelo exato da planta, é em geral, uma tarefa difícil, visto que as informações disponíveis acerca dos parâmetros são comumente incertas. Este problema pode ser formulado, sob determinadas hipóteses, atribuindo-se uma estrutura incerta ao modelo nominal, para o qual deseja-se garantir principalmente as características de estabilidade em malha fechada. Neste capítulo o problema regulação de saída será abordado considerando-se a avaliação de robustez para o problema de rejeição de perturbação, em um caso particular, no qual não é necessária a solução das equações de regulação. Com base na teoria de Lyapunov, um primeiro resultado formal é proposto para garantir que a perturbação seja rejeitada de forma perfeita em regime permanente, sob a estratégia de controle baseado em eventos e considerando a presença de incertezas na planta. Após, este resultado é estendido para o caso de regulação de saída prática. Diferentemente de (SBARBARO; GOMES DA SILVA JR.; MOREIRA, 2020), uma abordagem baseada na aplicação do Lema de Finsler é considerada, o que permite o tratamento de incertezas. Assim, como realizado nos capítulos anteriores, propõem-se condições para a garantia de estabilidade em malha fechada com base em *LMIs*, sendo formulado problemas de otimização convexos para o cálculo dos parâmetros da função de disparo.

### 5.2 Formulação do Problema

Considere uma planta em tempo discreto incerta descrita pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] + Bd[k] + Dp[k], \\
 p[k] &= \Delta[k]q[k], \\
 q[k] &= E_A x[k], \\
 y[k] &= Cx[k],
 \end{aligned} \tag{124}$$

onde  $x[k] \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u[k] \in \mathbb{R}^m$  é a entrada,  $y[k] \in \mathbb{R}^{n_y}$  é a saída,  $d[k] \in \mathbb{R}^m$  é o sinal de perturbação,  $p[k] \in \mathbb{R}^{n_p}$  e  $q[k] \in \mathbb{R}^{n_q}$  são vetores auxiliares,  $\Delta[k] \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$  é uma matriz de incertezas que satisfaz a relação  $\Delta[k] \Delta[k]' \leq I, \forall k \in \mathbb{N}$ ,  $A, B$  e  $C$  são matrizes reais constantes de dimensões apropriadas do modelo nominal e  $D$  e  $E_A$  são matrizes reais constantes de dimensões apropriadas que definem a estrutura da incerteza sobre a matriz  $A$ .

O sinal de perturbação é suposto ser gerado pelo seguinte sistema exógeno:

$$\begin{aligned} w[k+1] &= Sw[k], \\ d[k] &= C_d w[k], \end{aligned} \quad (125)$$

onde  $w[k] \in \mathbb{R}^{n_s}$  é o vetor de estados do modelo dinâmico da perturbação,  $d[k] \in \mathbb{R}^m$  é o sinal de perturbação e  $S$  e  $C_d$  são matrizes reais de dimensões apropriadas.

Com base nas equações (124) e (125), o seguinte observador em tempo discreto é considerado:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}[k+1] \\ \hat{w}[k+1] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & BC_d \\ 0_{n_s \times n} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}[k] \\ \hat{w}[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0_{n_s \times m} \end{bmatrix} u[k] \\ &\quad - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} (\hat{y}[k] - y[k]), \\ \hat{y}[k] &= C \hat{x}[k], \\ \hat{d}[k] &= C_d \hat{w}[k], \end{aligned} \quad (126)$$

onde  $\hat{x}[k] \in \mathbb{R}^n$  e  $\hat{w}[k] \in \mathbb{R}^{n_s}$  são os estados do observador,  $\hat{y}[k] \in \mathbb{R}^{n_y}$  é a saída estimada da planta,  $\hat{d}[k] \in \mathbb{R}^m$  é o sinal de perturbação estimado e  $L_1 \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$  e  $L_2 \in \mathbb{R}^{n_s \times n_y}$  são os ganhos do observador. Considera-se assim, uma lei de controle que realimenta os estados estimados da planta e da perturbação, dada por:

$$u[k] = K_x \hat{x}[k] - C_d \hat{w}[k], \quad (127)$$

onde  $K_x \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é o ganho de realimentação estabilizante. Definindo o erro de observação como sendo

$$\tilde{x}[k] = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1[k] \\ \tilde{x}_2[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}[k] - x[k] \\ \hat{w}[k] - w[k] \end{bmatrix}, \quad (128)$$

tem-se então que o sistema em malha fechada pode ser descrito através das dinâmicas do estado da planta estimado, descrito em (126) e do erro de observação descrito em (128), sendo a lei de controle (127). Assim, tem-se que

$$\hat{x}[k+1] = (A + BK_x) \hat{x}[k] - L_1 \bar{C}_o \tilde{x}[k], \quad (129)$$

$$\tilde{x}[k+1] = (A_o - L_o \bar{C}_o) \tilde{x}[k] - D_o \Delta[k] E_A (\hat{x}[k] - \tilde{x}_1[k]), \quad (130)$$

onde:

$$A_o = \begin{bmatrix} A & BC_d \\ 0_{n_s \times n} & S \end{bmatrix}, \quad (131)$$

$$L_o = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix}', \quad (132)$$

$$\bar{C}_o = \begin{bmatrix} C & 0_{m \times n_s} \end{bmatrix}, \quad (133)$$

$$D_o = \begin{bmatrix} D \\ 0_{n_s \times m} \end{bmatrix}. \quad (134)$$

Assumindo agora que os ganhos  $K_x$  e  $L_o$  foram obtidos de forma que  $(A + BK_x)$  e  $(A_o - L_o\bar{C}_o)$  sejam Schur-estáveis e garantam a estabilidade robusta do sistema em malha fechada (129)-(130), conclui-se que  $\tilde{x} \rightarrow 0$ , logo,  $\hat{x}[k] \rightarrow x[k]$  e  $\hat{\hat{x}}[k] \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

Note que neste caso a garantia de estabilidade robusta do sistema em malha fechada será desenvolvida considerando o estado estimado da planta, *i.e.*, de forma que o estado estimado se acomode para zero em regime permanente.

### 5.2.1 Estratégia de Controle Baseado em Eventos

Nesta seção, será apresentada a implementação da estratégia de controle baseado em eventos proposta para um controlador definido a partir de um observador de estados, dado pelas equações (126) e (127). Considerando-se que a atualização do sinal de controle ocorrerá somente nos instantes de tempo  $n_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ), tem-se que

$$u[k] = u[n_i] = K_x \hat{x}[n_i] - \hat{d}[n_i], \quad \forall k \in [n_i, n_{i+1}). \quad (135)$$

Desta forma, definindo

$$\begin{aligned} \delta_x[k] &\triangleq \hat{x}[n_i] - \hat{x}[k], \\ \delta_d[k] &\triangleq \hat{d}[n_i] - \hat{d}[k], \end{aligned} \quad (136)$$

tem-se (135) reescrita como

$$u[n_i] = u[k] = K_x \hat{x}[k] + K_x \delta_x[k] - \hat{d}[k] - \delta_d[k]. \quad (137)$$

Assim, com base nas equações (126), (128) e na lei de controle (137), pode-se descrever o sistema incerto em malha fechada sob a estratégia de controle baseado em eventos através do seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} x_a[k+1] &= A_a x_a[k] + B_a \delta_x[k] + B_{da} \delta_d[k] + D_a p[k], \\ p[k] &= \Delta[k] q[k], \\ q[k] &= \bar{E} x_a[k]. \end{aligned} \quad (138)$$

onde:

$$\begin{aligned}
x_a[k] &= \begin{bmatrix} \hat{x}[k]' & \tilde{x}[k]' \end{bmatrix}', \\
A_a &= \begin{bmatrix} (A + BK_x) & -L_1\bar{C}_o \\ 0_{(n+n_s)\times n} & (A_o - L_o\bar{C}_o) \end{bmatrix}, \\
B_a &= \begin{bmatrix} BK_x \\ 0_{(n+n_s)\times n} \end{bmatrix}, \\
B_{da} &= \begin{bmatrix} -B \\ 0_{(n+n_s)\times m} \end{bmatrix}, \\
D_o &= \begin{bmatrix} D \\ 0_{n_s\times n_p} \end{bmatrix}, \\
D_a &= \begin{bmatrix} 0_{n\times n_p} \\ -D_o \end{bmatrix}, \\
\bar{E} &= \begin{bmatrix} E_A & -E_A & 0_{n\times n_s} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{139}$$

Note que  $x_a[k] \in \mathbb{R}^{(2n+n_s)}$ ,  $\delta_x[k] \in \mathbb{R}^n$  e  $\delta_d[k] \in \mathbb{R}^m$ . Desta forma, considerando-se que os estados da planta não estão disponíveis para medição, deseja-se determinar os parâmetros da função disparo quadrática dada por:

$$f(\delta_x[k], \delta_d[k], \hat{x}[k]) = \delta_x[k]' Q_{\delta_x} \delta_x[k] + \delta_d[k]' Q_{\delta_d} \delta_d[k] - \hat{x}[k]' Q_{\sigma} \hat{x}[k], \tag{140}$$

onde  $Q_{\delta_x} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_{\delta_d} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $Q_{\sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são matrizes simétricas positivas definidas que serão calculadas, de modo que o sistema em malha fechada com a lei de controle (137) seja assintoticamente estável e a geração de eventos seja reduzida. É importante observar que a função (140) é baseada apenas nas informações efetivamente disponíveis, *i.e.*, os estados estimados da planta e do sistema exógeno.

### 5.3 Condições de Estabilidade

Nesta seção serão apresentadas condições descritas na forma de *LMIs* para garantia de estabilidade do sistema em malha fechada incerto sob a estratégia de controle baseado em eventos. Estas condições serão utilizadas posteriormente para formular problemas de otimização convexos para determinação dos parâmetros da função de disparo. Assim, assumindo que os ganhos  $K_x$  e  $L_o$  foram obtidos, tais que  $(A + BK_x)$  e  $(A_o - L_o\bar{C}_o)$  são Schur-estáveis, pode-se enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 7.** *Se existir uma matriz  $L \in \mathbb{R}^{(5n+2n_s+m+n_p)\times(2n+n_s)}$ , matrizes simétricas definidas positivas  $P \in \mathbb{R}^{(2n+n_s)\times(2n+n_s)}$ ,  $Q_{\delta_x} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_{\delta_d} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\bar{Q}_{\sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e um*

escalar positivo  $\alpha$  tais que

$$\left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} P & 0_{(2n+n_s) \times (3n+n_s+m+n_p)} \\ * & -\Phi_o - \alpha\Phi_1 - \Phi_2 \\ & & * \end{array} \right] + L\Upsilon_a + \Upsilon_a' L' & U_a \\ & -\bar{Q}_\sigma \end{array} \right] < 0, \quad (141)$$

seja verificada, sendo

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} P & 0_{(2n+n_s) \times (n+m+n_p)} \\ * & 0_{(n+m+n_p)} \end{bmatrix}, \quad (142)$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0_{(3n+n_s+m)} & 0_{(3n+n_s+m) \times n_p} \\ * & I_{n_p} \end{bmatrix} - \Upsilon_o' \Upsilon_o, \quad (143)$$

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} 0_{(2n+n_s)} & 0_{(2n+n_s) \times n} & 0_{(2n+n_s) \times m} & 0_{(2n+n_s) \times n_p} \\ * & Q_{\delta_x} & 0_{n \times m} & 0_{n \times n_p} \\ * & * & Q_{\delta_d} & 0_{m \times n_p} \\ * & * & * & 0_{n_p} \end{bmatrix}, \quad (144)$$

$$\Upsilon_o = \begin{bmatrix} \bar{E} & 0_n & 0_{n \times m} & 0_{n \times n_p} \end{bmatrix}, \quad (145)$$

$$\Upsilon_a = \begin{bmatrix} -I_{(2n+n_s)} & A_a & B_a & B_{da} & D_a \end{bmatrix}, \quad (146)$$

$$U = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times (n+n_s)} \end{bmatrix}, \quad (147)$$

$$U_a = \begin{bmatrix} 0_{n \times (2n+n_s)} & U & 0_n & 0_{n \times m} & 0_{n \times n_p} \end{bmatrix}', \quad (148)$$

então as trajetórias do sistema em malha fechada incerto (138), sob a estratégia de controle baseado em eventos proposta no Algoritmo 1 com a função de disparo definida em (140), sendo  $Q_\sigma = \bar{Q}_\sigma^{-1}$ , convergem assintoticamente para a origem.

*Prova.* Defina-se os seguintes vetores:

$$\xi_a[k] \triangleq \begin{bmatrix} x_a[k+1]' & \xi_1[k]' \end{bmatrix}', \quad (149)$$

$$\xi_1 \triangleq \begin{bmatrix} x_a[k]' & \delta_x[k]' & \delta_d[k]' & p[k]' \end{bmatrix}'. \quad (150)$$

Como a partir da equação (138),  $\Upsilon_a \xi_a[k] = 0$ , então aplicando-se o complemento de Schur em (141), e considerando-se  $Q_\sigma = \bar{Q}_\sigma^{-1}$ , tem-se que, através do Lema de Finsler, (141) equivale a:

$$\xi_a[k]' \begin{bmatrix} P & 0_{(2n+n_s) \times (3n+n_s+m+n_p)} \\ * & -\Phi_o - \alpha\Phi_1 - \Lambda \end{bmatrix} \xi_a[k] < 0, \quad \forall \xi_a[k] \mid \Upsilon_a \xi_a[k] = 0, \quad (151)$$

com

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -U' Q_\sigma U & 0_{(2n+n_s) \times n} & 0_{(2n+n_s) \times m} & 0_{(2n+n_s) \times n_p} \\ * & Q_{\delta_x} & 0_{n \times m} & 0_{n \times n_p} \\ * & * & Q_{\delta_d} & 0_{m \times n_p} \\ * & * & * & 0_{n_p} \end{bmatrix}. \quad (152)$$

Levando-se em conta que  $f(\delta_x[k], \delta_d[k], \hat{x}[k]) = \xi_1[k]' \Lambda \xi_1[k]$ , de (151) tem-se então que:

$$\xi_a[k]' \begin{bmatrix} P & 0_{(2n+n_s) \times (3n+n_s+m+n_p)} \\ * & -\Phi_o - \alpha \Phi_1 \end{bmatrix} \xi_a[k] < f(\delta_x[k], \delta_d[k], \hat{x}[k]). \quad (153)$$

Uma vez que  $\Delta[k]' \Delta[k] \leq I$  é verificada, então  $\forall \alpha > 0$  tem-se que  $\alpha(p[k]'p[k] - q[k]'q[k]) \leq 0$ . Esta desigualdade pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\xi_a[k]' \begin{bmatrix} 0_{(2n+n_s)} & 0_{(2n+n_s) \times (3n+n_s+m+n_p)} \\ * & \alpha \Phi_1 \end{bmatrix} \xi_a[k] \leq 0. \quad (154)$$

Assim, se (154) é satisfeita, a partir de (153) pode-se concluir que

$$\xi_a[k]' \begin{bmatrix} P & 0_{(2n+n_s) \times (3n+n_s+m+n_p)} \\ * & -\Phi_o \end{bmatrix} \xi_a[k] < f(\delta_x[k], \delta_d[k], \hat{x}[k]), \quad (155)$$

é verificada,  $\forall \xi_a[k]$  tal que  $\Upsilon_a \xi_a[k] = 0$ , *i.e.*, ao longo das trajetórias do sistema (138).

Considerando-se agora uma função quadrática candidata a função de Lyapunov, dada por  $V(x_a[k]) = x_a[k]' P x_a[k]$  e sua variação entre instantes de amostragem  $\Delta V(x_a[k]) = V(x_a[k+1]) - V(x_a[k])$ , tem-se que:

$$\Delta V(x_a[k]) = \xi_a[k]' \begin{bmatrix} P & 0_{(2n+r) \times (3n+n_s+m+n_p)} \\ * & -\Phi_o \end{bmatrix} \xi_a[k], \quad (156)$$

logo, se a desigualdade (141) for satisfeita, conclui-se que  $\Delta V(x_a[k]) < f(\delta_x[k], \delta_d[k], \hat{x}[k])$  ao longo das trajetórias do sistema (138).

Suponha agora que  $n_{i+1} - n_i \geq 1$  e  $k \in [n_i, n_{i+1})$ . Então, pelo Algoritmo 1, tem-se que  $f(\delta_x[k], \delta_d[k], \hat{x}[k]) \leq 0$ , e segue que  $\Delta V(x_a[k]) < 0$ . Por outro lado, suponha que em um determinado instante  $k$ ,  $f(\delta_x[k], \delta_d[k], \hat{x}[k]) > 0$ , então, pelo Algoritmo 1 um evento ocorre e segue que  $\delta_x[k] = 0$  e  $\delta_d[k] = 0$ , logo,  $f(\delta_x[k], \delta_d[k], \hat{x}[k]) = -\hat{x}[k]' Q_\sigma \hat{x}[k] < 0$ . Isto implica que  $\Delta V(x_a[k]) < 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ , o que garante que  $x_a[k] \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .  $\square$

### 5.3.1 Estratégia de Controle Baseado em Eventos com Relaxação

O Teorema 7 garante rejeição perfeita de perturbação em regime permanente, uma vez que é garantida a estabilidade assintótica das trajetórias do sistema em malha fechada para a origem. Como visto nos capítulos precedentes, este fato pode levar a estratégia de controle baseado à estratégia *time-triggered* periódico, (*i.e.*,  $(n_i - n_{i+1} = 1)$  quando  $k \rightarrow \infty$ ) quando aplicada uma perturbação não constante. A fim de evitar este comportamento, será utilizado o mesmo critério de relaxação previamente apresentado, *i.e.*, adicionando uma constante real  $\gamma > 0$  na função de disparo, sendo esta descrita como

$$f_\gamma(\delta_x[k], \delta_d[k], \hat{x}[k]) = \delta_x[k]' Q_{\delta_x} \delta_x[k] + \delta_d[k]' Q_{\delta_d} \delta_d[k] - \hat{x}[k]' Q_\sigma \hat{x}[k] - \gamma, \quad (157)$$

de modo que um evento seja gerado quando  $f_\gamma(\delta_x[k], \delta_d[k], \hat{x}[k]) > 0$ . Neste caso, garante-se que as trajetórias dos estados irão convergir para um conjunto positivamente invariante elipsoidal, dado por:

$$\bar{\mathcal{E}}(P, \eta) = \{x_a \in \mathbb{R}^{2n+n_s}, x_a' P x_a \leq \eta\}. \quad (158)$$

Essas ideias são formalizadas no seguinte teorema:

**Teorema 8.** *Se existir uma matriz  $L \in \mathbb{R}^{(5n+2n_s+m+n_p) \times (2n+n_s)}$ , matrizes simétricas definidas positivas  $P \in \mathbb{R}^{(2n+n_s) \times (2n+n_s)}$ ,  $Q_{\delta_x} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_{\delta_d} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\bar{Q}_\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e escalares positivos  $\alpha, \tau \in (0,1)$  e  $\bar{\gamma}$ , tais que*

$$\begin{bmatrix} \Phi + L\Upsilon_a + \Upsilon_a' L & U_a \\ * & -\bar{Q}_\sigma \end{bmatrix} < 0, \quad (159)$$

$$\begin{bmatrix} -\eta\tau & 1 \\ 1 & -\bar{\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (160)$$

sejam verificadas, sendo

$$\Phi = \begin{bmatrix} P & 0_{(2n+n_s) \times (3n+n_s+m+n_p)} \\ * & -(1-\tau)\Phi_o - \alpha\Phi_1 - \Phi_2 \end{bmatrix}, \quad (161)$$

com  $\Phi_o, \Phi_1, \Phi_2, \Upsilon_a$  e  $U_a$  definidas em (142), (143), (144), (146) e (148) respectivamente, então as trajetórias do sistema em malha fechada (138), sob a estratégia de controle baseado em eventos proposta no Algoritmo 1 com a função de disparo definida em (157), sendo  $Q_\sigma = \bar{Q}_\sigma^{-1}$  e  $\gamma = \bar{\gamma}^{-1}$ , convergem em tempo finito para o conjunto positivamente invariante  $\bar{\mathcal{E}}(P, \eta)$ .

*Prova.* Seguindo os mesmos passos da prova do Teorema 3, tem-se que se as desigualdades (159) e (160) forem verificadas, então  $\Delta V(x_a[k]) < f_\gamma(\delta_x[k], \delta_d[k], \hat{x}[k]) - \tau x_a[k]' P x_a[k] + \tau \eta$ .

□

## 5.4 Problemas de Otimização

A partir das condições de estabilidade previamente apresentadas, deseja-se projetar os parâmetros da função de disparo, de modo a reduzir o número de eventos gerados. De maneira similar aos capítulos anteriores, para o caso do critério não relaxado, considera-se o seguinte problema de otimização:

**PO 5:**

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \text{tr}(Q_{\delta_x}) + \text{tr}(Q_{\delta_d}) + \text{tr}(\bar{Q}_\sigma) \\ &\text{sujeito a: (141),} \end{aligned} \quad (162)$$

$$P = P' > 0, Q_{\delta_x} = Q_{\delta_x}' > 0, Q_{\delta_d} = Q_{\delta_d}' > 0, \bar{Q}_\sigma = \bar{Q}_\sigma' > 0.$$

Assim como nos capítulos precedentes, para o critério relaxado será considerado uma restrição para a garantir que a trajetória do sistema em malha fechada (129), permaneça confinada em uma bola de raio  $\sqrt{\sigma^{-1}}$ , quando  $k \rightarrow \infty$ . Com isso, deve-se levar em consideração a seguinte restrição:

$$P - \eta \begin{bmatrix} \sigma C' C & 0_{n \times (n+n_s)} \\ * & 0_{n+n_s} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (163)$$

Neste caso, (163) garante que  $\bar{\mathcal{E}}(P, \eta) \subset \bar{\mathcal{S}}_\sigma$ , sendo  $\bar{\mathcal{S}}_\sigma = \{x_a \in \mathbb{R}^{2n+n_s}; x_a' \bar{C}'_o \bar{C}_o x_a \leq \sigma^{-1}\}$ . Assim, para o critério relaxado será utilizado o seguinte problema de otimização:

**PO 6:**

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \text{tr}(Q_{\delta_x}) + \text{tr}(Q_{\delta_d}) + \text{tr}(\bar{Q}_\sigma) + \bar{\gamma} \\ & \text{sujeito a: (159), (160), (163),} \\ & P = P' > 0, Q_{\delta_x} = Q'_{\delta_x} > 0, Q_{\delta_d} = Q'_{\delta_d} > 0, \bar{Q}_\sigma = \bar{Q}'_\sigma > 0, \bar{\gamma} > 0. \end{aligned} \quad (164)$$

## 5.5 Exemplo Numérico

A seguir serão apresentados um exemplo numérico e simulações para ilustrar o método desenvolvido.

### 5.5.1 Exemplo 7: regulação de saída robusta

Para ilustrar o método, considera-se o seguinte sistema linear em tempo contínuo instável em malha aberta:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1,1 & 2 \\ 0 & -0,8 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,8 \end{bmatrix} (u(t) + d(t)), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned} \quad (165)$$

Sendo este sistema discretizado através de um *ZOH* com um período de amostragem  $T = 0,1s$  obtém-se o seguinte sistema discreto:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \begin{bmatrix} 1,1163 & 0,2033 \\ 0 & 0,9231 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 0,0081 \\ 0,0769 \end{bmatrix} (u[k] + d[k]), \\ y[k] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x[k]. \end{aligned} \quad (166)$$

Considera-se uma perturbação senoidal e de frequência  $\omega = 0,3\pi$  rad/s, *i.e.*, frequência discreta  $\Omega = 0,0942$  gerada através do seguinte sistema exógeno

$$S = \begin{bmatrix} 0,9956 & 0,0941 \\ -0,0941 & 0,9956 \end{bmatrix}; C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (167)$$

e os ganhos  $K_x$  e  $L_o$ , tais que  $(A + BK_x)$  e  $(A_o - L_o\bar{C}_o)$  são Schur-estáveis, dados por:

$$K_x = \begin{bmatrix} -5,4497 & -4,8817 \end{bmatrix}; \quad L_o = \begin{bmatrix} 1,2905 & 2,1238 & 6,5550 & 3,0815 \end{bmatrix}'. \quad (168)$$

Para a avaliação do efeito da incerteza no sistema, considera-se  $D = \beta I_n$  e  $E = I_n$ , onde  $\beta$  é um escalar que representa o “tamanho” da incerteza. Desta forma, considerando-se o Teorema 7 e solucionando PO 5, foram obtidas as matrizes apresentadas na Tabela 5.

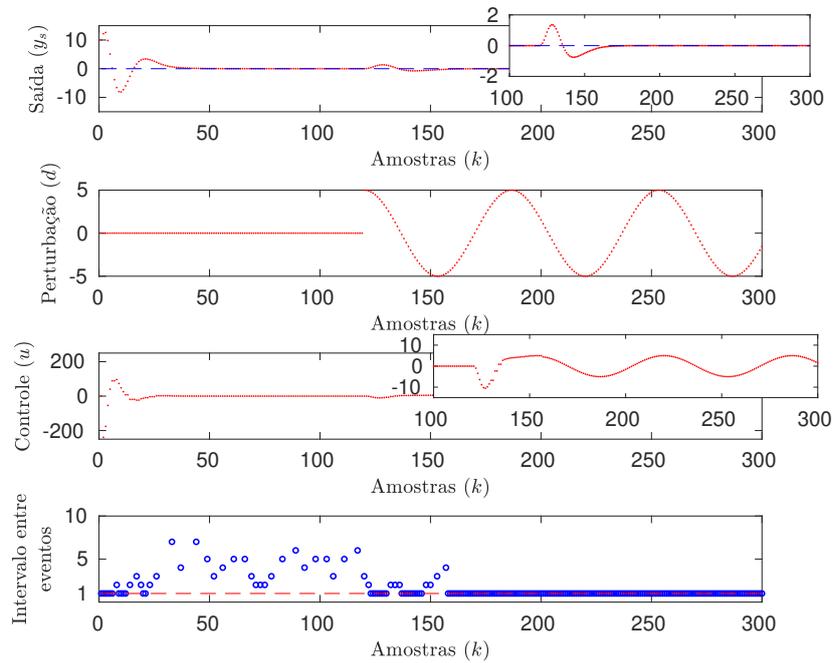
Tabela 5 – Exemplo 7: matrizes obtidas para PO 5

$\beta$	$Q_{\delta_x}$	$Q_{\delta_d}$	$Q_{\sigma}$
0,001	$\begin{bmatrix} 11,0852 & 9,9289 \\ 9,9289 & 8,8950 \end{bmatrix}$	2,731	$\begin{bmatrix} 0,7725 & 0,9637 \\ 0,9637 & 1,9681 \end{bmatrix}$
0,02	$\begin{bmatrix} 11,2964 & 10,1166 \\ 10,1166 & 9,0648 \end{bmatrix}$	2,7835	$\begin{bmatrix} 0,8583 & 1,1240 \\ 1,1240 & 2,2458 \end{bmatrix}$
0,03	$\begin{bmatrix} 11,5662 & 10,3563 \\ 10,3563 & 9,2818 \end{bmatrix}$	2,8502	$\begin{bmatrix} 0,6865 & 0,8163 \\ 0,8163 & 1,6649 \end{bmatrix}$

Os valores de  $\beta$  foram obtidos para soluções factíveis dos problemas e otimização. Neste caso, para  $\beta = 0,03$ , tem-se uma maior alteração dos autovalores originais do sistema (70), *i.e.*, de  $\sigma_A = (1,1163, 0,9231)$ , para  $\sigma_{A_\Delta} = (1,1463, 0,9531)$ , sendo  $A_\Delta = D_{ap}[k]$ .

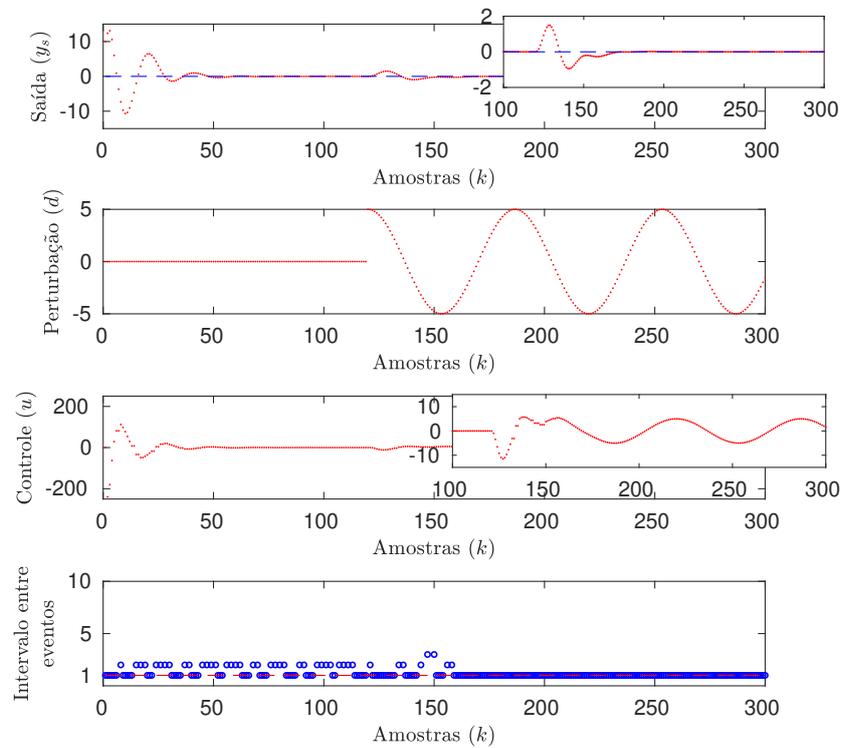
As simulações do sistema em malha fechada com a função de disparo (140) dadas pelas matrizes da Tabela 5, são mostradas nas figuras 26, 27 e 28, respectivamente. As condições iniciais utilizadas foram  $x[0] = [10 \ 5]'$  e  $\hat{x}[0] = [0 \ 0]'$ . Uma perturbação senoidal com frequência discreta  $\Omega = 0,0942$  e amplitude 5 foi aplicada no instante  $k = 120$ .

Figura 26 – Exemplo 7: simulação para o caso do critério não relaxado com  $\beta = 0,001$ .



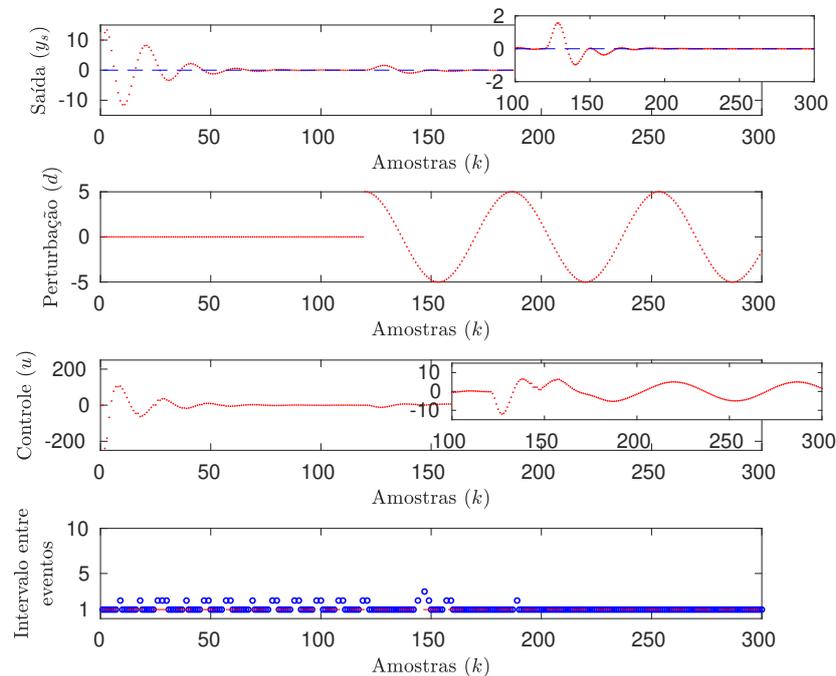
Fonte: do autor

Figura 27 – Exemplo 7: simulação para o caso do critério não relaxado com  $\beta = 0,02$ .



Fonte: do autor

Figura 28 – Exemplo 7: simulação para o caso do critério não relaxado com  $\beta = 0,03$ .



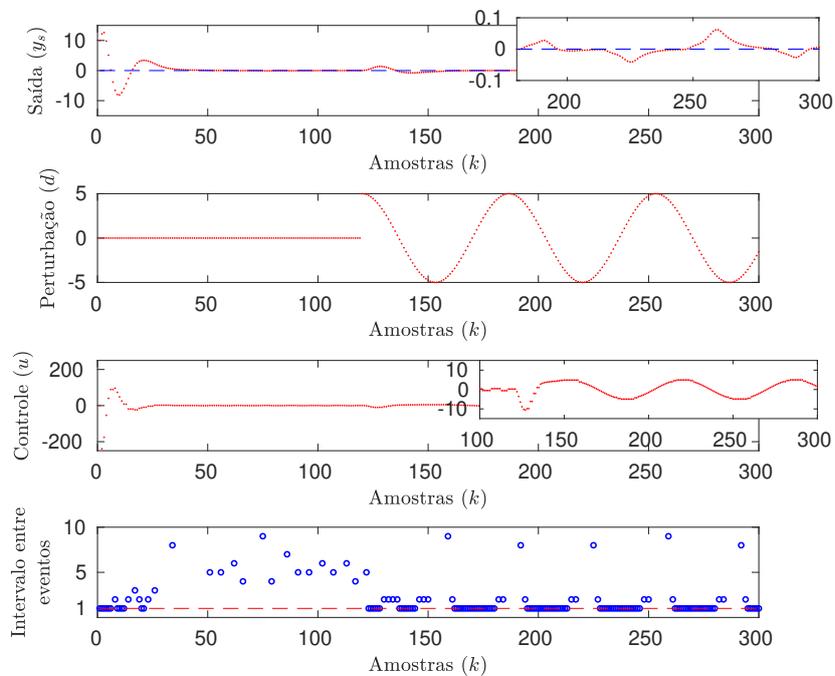
Fonte: do autor

Observa-se que quando há aumento na incerteza, ocorre um aumento no número de eventos gerados e conseqüentemente, uma redução no intervalo entre eventos. Isto já ilustra a eficiência da estratégia, pois mesmo em um pior cenário, onde a incerteza é maior, observa-se a redução da atualização de controle com relação a um controle com atualização periódica. Conforme esperado, quando a perturbação é aplicada, a rejeição perfeita ocorre, porém a estratégia passa a realizar atualizações periódicas do controle em regime permanente. Devido a este comportamento periódico, é interessante relaxar a condição de disparo, de modo que a estratégia volte a realizar atualizações aperiódicas do sinal de controle. Para tanto, considerando-se o Teorema 8 e solucionando-se PO 6 para  $\sigma = 0,7$ , foram obtidas as matrizes apresentadas na Tabela 6, sendo  $\tau = 0,01$  em para todos os limites de incertezas. Considerando-se as mesmas condições iniciais e características do sinal de perturbação das simulações anteriores e a função de disparo (157), dada pelas matrizes da Tabela 6, tem-se as simulações para o sistema em malha fechada mostradas nas figuras 29, 30 e 31, respectivamente.

Nota-se um comportamento semelhante ao caso anterior, *i.e.*, quando se aumenta a incerteza do modelo da planta, o intervalo entre eventos diminui e conseqüentemente, o número de eventos gerados aumenta. Quando a perturbação é aplicada, ocorre uma rejeição prática, pois o erro em regime permanente limita-se à tolerância predefinida, resultando em uma redução no número de atualizações do sinal de controle em regime permanente.

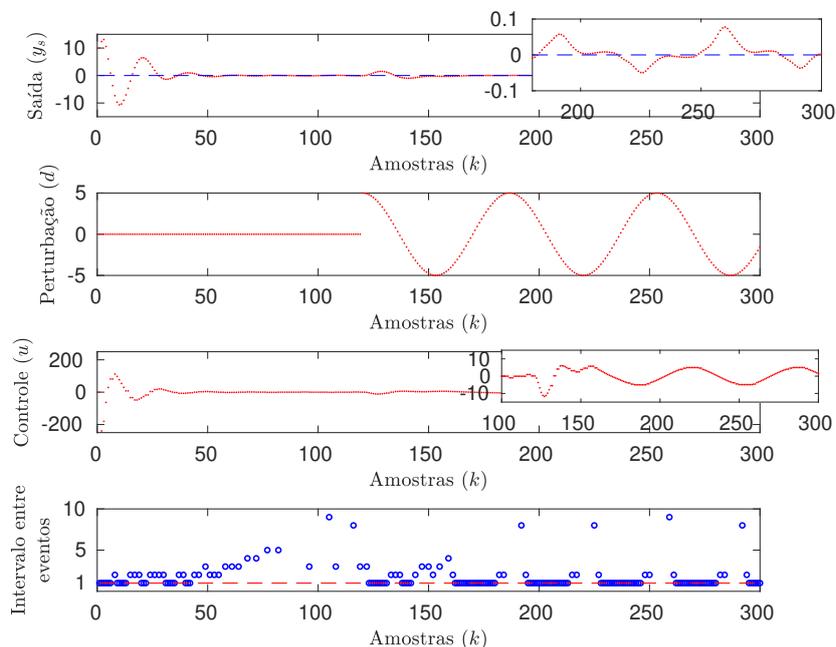
Tabela 6 – Exemplo 7: matrizes obtidas para PO 6.

$\beta$	$Q_{\delta_x}$	$Q_{\delta_d}$	$Q_{\sigma}$	$\gamma$
0,001	$\begin{bmatrix} 12,6289 & 11,3112 \\ 11,3112 & 10,1338 \end{bmatrix}$	3,1113	$\begin{bmatrix} 0,7785 & 0,9961 \\ 0,9961 & 2,0798 \end{bmatrix}$	0,2681
0,02	$\begin{bmatrix} 12,8916 & 11,5451 \\ 11,5451 & 10,3449 \end{bmatrix}$	3,1764	$\begin{bmatrix} 0,9198 & 1,2636 \\ 1,2636 & 2,5554 \end{bmatrix}$	0,2559
0,03	$\begin{bmatrix} 13,2282 & 11,8481 \\ 11,8481 & 10,6146 \end{bmatrix}$	3,2591	$\begin{bmatrix} 0,6201 & 0,7162 \\ 0,7162 & 1,5111 \end{bmatrix}$	0,2297

Figura 29 – Exemplo 7: simulação para o caso do critério relaxado com  $\beta = 0,001$ .

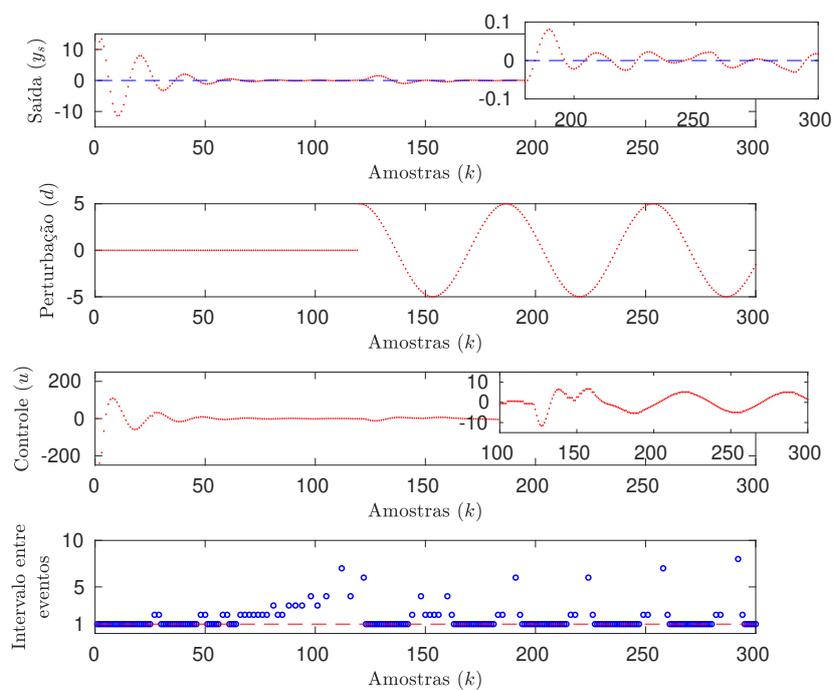
Fonte: do autor

Figura 30 – Exemplo 7: simulação para o caso do critério relaxado com  $\beta = 0,02$ .



Fonte: do autor

Figura 31 – Exemplo 7: simulação para o caso do critério relaxado com  $\beta = 0,03$ .



Fonte: do autor

A Tabela 7 apresenta uma comparação do número de eventos gerados ou atualizações do controle no intervalo  $k \in [1 \ 300]$  para cada critério de disparo e em cada limite de incerteza considerado. Destaca-se que para  $\sigma = 0,7$ , a implementação da estratégia por PO 5 garante uma redução no número de atualizações entre 9 e 30%, enquanto que PO 6 garante uma redução entre 30 e 48,33%, ambos comparados à estratégia de atualização periódica.

Tabela 7 – Exemplo 7: número de atualizações do sinal de controle para cada limite de incerteza para  $k \in [0 \ 300]$ .

$\beta$	PO 5	PO 6	Atualização ( <i>time-triggered</i> )
0,001	209	155	300
0,02	256	174	
0,03	272	208	

Estes resultados ilustram sobretudo que há garantia de redução na atualização do controle, mesmo no pior cenário de incerteza na planta, porém levando em conta o compromisso dado pela tolerância ao erro e a redução das atualizações do sinal de controle.

## 5.6 Comentários Finais

Neste capítulo foi apresentado o projeto da estratégia de controle baseado em eventos aplicada a sistemas lineares incertos em tempo discreto, considerando-se uma lei de controle baseada em um observador para rejeição de perturbações casadas (“*matched*” com a entrada de controle). Condições descritas na forma de *LMIs* foram propostas com objetivo de garantir a rejeição perfeita e prática de perturbação, mesmo na presença de incertezas de na planta. Problemas de otimização convexos com foco na redução da atualização do controle foram propostos a fim de calcular os parâmetros das funções de disparo. Os exemplos de simulações ilustram a eficiência da estratégia proposta, com garantia de redução na atualização do controle mesmo com parâmetros incertos na planta. Estes resultados estabelecem a existência de um compromisso entre a tolerância admitida para o erro em regime permanente e a redução das atualizações de controle. Os resultados apresentados neste capítulo foram publicados em (VIANA; GOMES DA SILVA JR.; MOREIRA, 2020).

## 6 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi proposta uma metodologia de controle baseado em eventos para o problema de seguimento de referência e rejeição de perturbação aplicado a sistemas em tempo discreto. A motivação inicial para este estudo se deu por conta da importância prática deste problema, no qual deseja-se reduzir as atualizações do sinal de controle como forma de reduzir o tráfego desnecessário de mensagens e gasto de energia em transmissões (redes *wireless*). A partir desta motivação, a estratégia foi investigada considerando primeiramente o perfeito seguimento de referência em regime permanente e, após, estendendo para o problema de regulação de saída prática.

Uma abordagem inicial do problema, consistiu na aplicação da estratégia com o uso de uma lei de controle com realimentação estática de estados. Condições para a garantia de estabilidade na forma de *LMI*s foram propostas considerando um critério de disparo não relaxado para o perfeito seguimento de referência em regime permanente, estendendo para o problema de regulação de saída prática, no qual foi proposto um critério de disparo relaxado, conforme discutido em (SBARBARO; GOMES DA SILVA JR.; MOREIRA, 2020). Além disso, problemas de otimização convexa foram formulados com base nas condições propostas, visando a redução das atualizações de controle. Como resultado principal, tem-se que o critério de disparo não relaxado faz com que a aplicação da estratégia de controle baseado ao problema apresente erro de seguimento de referência nulo em regime permanente, porém com comportamento periódico com relação à atualização de controle, quando aplicadas perturbações não constantes, *i.e.*, sem efeito prático em regime permanente. Em contrapartida, um critério de disparo relaxado foi proposto a fim de evitar que ocorram atualizações periódicas de controle em regime permanente, porém com um erro de seguimento diferente de zero em regime permanente. Exemplos numéricos e simulações foram utilizados para validar e comparar os resultados obtidos.

Uma vez que a solução considerando realimentação de estados não é em geral aplicável na prática e também não é robusta a incertezas paramétricas, este problema foi então abordado considerando um controlador baseado em um observador de estados, no qual é realizada a realimentação dinâmica do erro de seguimento. Esta abordagem ilustra uma aplicação mais realista do problema, visto que geralmente os estados do sistema não es-

tão disponíveis para medição. Como resultado principal, tem-se que é possível garantir a rejeição perfeita e prática em regime permanente, considerando a estimativa dos estados. Outro ponto importante, é que o controlador calculado satisfaz o PMI. Como no caso *time-trigger* convencional, este fato indica, através de simulações realizadas, que atinge-se também robustez a incertezas com a lei de controle baseada em eventos, apesar de não ter sido possível estabelecer uma prova formal deste fato.

Por fim, considerou-se a estratégia de controle baseado em eventos para tratar o problema de regulação de saída a partir de uma descrição explícita de incertezas na planta, em um caso particular, no qual considera-se apenas a rejeição a perturbação. Neste caso, a estabilização perfeita e prática da origem foi garantida através de condições *LMIs* que empregam o Lema de Fisnler, no qual se considera o tratamento de incertezas limitadas em norma. Da mesma forma, problemas de otimização convexa foram empregados a fim de se obter uma redução nas atualizações de controle. Exemplos numéricos ilustraram a eficiência desta abordagem.

Os resultados apresentados nos capítulos anteriores apontam algumas perspectivas de continuação deste trabalho, conforme descrito a seguir:

- *Garantia explícita de robustez para o seguimento de referência e rejeição de perturbação no caso genérico:* este problema decorre do Capítulo 4, no qual se utiliza o PMI, porém não se garante robustez diante de uma caracterização explícita de incertezas paramétricas. Neste caso, foi observado através de simulações que o uso do PMI com a estratégia de controle baseado em eventos é robusto, porém não quantizado, sendo ainda necessário uma investigação para se obter uma garantia formal de robustez sob a estratégia de controle baseado em eventos. Esta análise possivelmente irá resultar em uma generalização da entrada de perturbação inclusive para o caso robusto, diferente da abordagem do Capítulo 5, no qual é necessário um casamento entre a entrada de controle e a entrada de perturbação.
- *Problema de co-design:* este problema consiste no projeto simultâneo dos ganhos  $K_x$  e/ou  $L_o$  com os parâmetros da função de disparo, como forma de adicionar mais graus de liberdade ao problema de otimização. Para tanto, seria necessário uma transformação de variáveis para que os problemas de otimização continuem sendo tratados de forma convexa. É importante salientar que para o caso de *co-design* com o ganho  $K_x$ , tem-se uma dificuldade adicional, que consiste em garantir via projeto a solução das equações de regulação, que até então estão sendo garantidas *a priori*. O caso de *co-design* com o ganho  $L_o$  se mostra um caminho menos complexo, porém com restrições estruturais nas matrizes que solucionam as *LMIs*, podendo-se obter resultados mais conservadores.
- *Problema de regulação de saída sob a abordagem PETC considerando atraso na entrada:* o problema de atraso na entrada é comumente tratado em *NCSs* devido a

questões relacionadas a processamento ou comunicação, sendo um campo amplamente estudado. No caso de seguimento de referência e rejeição de perturbação, esta abordagem acaba por modificar a forma de solução das equações de regulação. Este resultado é exposto em (LU; HUANG, 2015), no qual o problema de atraso na entrada é tratado como um problema de estabilização, sendo as equações de regulação calculadas em função do atraso. Desta forma, para a abordagem com *PETC* seria necessário investigar primeiramente a formulação do problema com o erro de regulação, para então propor condições de estabilidade com base na teoria de Lyapunov.

- *PETC com problema de regulação de saída aplicado a sistemas não lineares*: Este problema tem sido amplamente abordado na literatura considerando um *ETM* com monitoramento contínuo, sendo necessário realizar a discretização do controlador em um estágio final de implementação. Neste caso, diante da aplicação usual de *NCSs*, e considerando que existem poucos trabalhos até mesmo para sistemas lineares, a abordagem com *PETC* para o problema de regulação de saída se mostra um campo de estudo a ser explorado, como por exemplo, a generalização para sistemas não lineares racionais utilizando a *DAR (Differential-Algebraic Representation)* ou a generalização para sistemas com saturação (CASTRO; FLORES; SALTON, 2017), (CASTRO, 2019), (CASTRO *et al.*, 2020).

## REFERÊNCIAS

AKYILDIZ, I. F. *et al.* Wireless sensor networks: a survey. **Computer Networks**, [S.l.], v. 38, n. 4, p. 393–422, 2002.

ÅRZÉN, K.-E. A simple event-based PID controller. **IFAC Proceedings Volumes**, Beijing, v. 32, n. 2, p. 8687–8692, 1999.

ASTOLFI, D.; POSTOYAN, R.; VAN DE WOUW, N. Emulation-based output regulation of linear networked control systems subject to scheduling and uncertain transmission intervals. **IFAC-PapersOnLine**, Vienna, v. 52, n. 16, p. 526–531, 2019. 11th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems NOLCOS 2019.

ÅSTRÖM, K. J.; BERNHARDSSON, B. Comparison of periodic and event based sampling for first-order stochastic systems. **IFAC Proceedings Volumes**, Beijing, v. 32, n. 2, p. 5006–5011, 1999.

ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. **Computer-Controlled Systems: theory and design**. 3rd. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997.

BORGERS, D.; HEEMELS, W. Event-separation properties of event-triggered control systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v. 59, n. 10, p. 2644–2656, 2014.

BOYD, S. P. *et al.* **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: SIAM, 1994. v. 15.

BURGAT, C.; BENZAOUIA, A. Stability properties of positively invariant linear discrete time systems. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, [S.l.], v. 143, n. 2, p. 587–596, 1989.

BYRNES, C. I.; PRISCOLI, F. D.; ISIDORI, A. **Output regulation of uncertain nonlinear systems**. Boston: Birkhäuser Basel, 1997.

CASTRO, R. S. **Output regulation of rational nonlinear systems with input saturation**. 2019. 132 p. Tese de doutorado — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.

CASTRO, R. S.; FLORES, J. V.; SALTON, A. T. Stability analysis of output regulated rational nonlinear systems. **IFAC-PapersOnLine**, Toulouse, v. 50, n. 1, p. 8214–8219, 2017. 20th IFAC World Congress.

CASTRO, R. S. *et al.* A stabilization framework for the output regulation of rational nonlinear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v. 65, n. 11, p. 4860–4865, 2020.

CHEN, X.; HAO, F. Periodic event-triggered state-feedback and output-feedback control for linear systems. **International Journal of Control, Automation and Systems**, [S.l.], v. 13, p. 779–787, 2015.

DURAND, S.; MARCHAND, N. Further results on event-based PID controller. *In*: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE (ECC), 2009, Budapest. **Proceedings [...]** New York: IEEE, 2009. p. 1979–1984.

FISCHMAN, A. **Commande robuste des systèmes sous contraintes structurelles**. 1998. 117 p. Thèse de doctorat — Institut national polytechnique, Grenoble, 1998.

FRANCIS, B.; WONHAM, W. The internal model principle for linear multivariable regulators. **Applied Mathematics and Optimization**, Berlin, v. 2, n. 2, p. 170–194, 1975.

GROFF, L. B. **Controle baseado em eventos para sistemas em tempo discreto**. 2016. 75 p. Dissertação de mestrado — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

GROFF, L. B. *et al.* Observer-based event-triggered control: a discrete-time approach. *In*: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC), 2016, Boston. **Proceedings [...]** New York: IEEE, 2016. p. 4245–4250.

HAUTUS, M. Stabilization controllability and observability of linear autonomous systems. **Indagationes Mathematicae (Proceedings)**, [S.l.], v. 73, p. 448–455, 1970.

HEEMELS, W.; DONKERS, M.; TEEL, A. Periodic event-triggered control based on state feedback. *In*: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC), 2011, Orlando. **Proceedings [...]** New York: IEEE, 2011. p. 2571–2576.

HEEMELS, W.; JOHANSSON, K.; TABUADA, P. An introduction to event-triggered and self-triggered control. *In*: IEEE 51ST IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC), 2012, Hawaii. **Proceedings [...]** New York: IEEE, 2012. p. 3270–3285.

HEEMELS, W. P. M. H.; DONKERS, M. C. F.; TEEL, A. R. Periodic event-triggered control for linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v. 58, n. 4, p. 847–861, 2013.

HEEMELS, W. *et al.* **Periodic event-triggered control**. [S.l.]: CRC Press/Taylor & Francis, 2015.

HESPANHA, J. P.; NAGHSHTABRIZI, P.; XU, Y. A Survey of recent results in networked control systems. **Proceedings of the IEEE**, New York, v. 95, n. 1, p. 138–162, 2007.

JETTO, L.; ORSINI, V. Event-triggered internally stabilizing sporadic control for MIMO plants with non measurable state. **IFAC Proceedings Volumes**, Milano, v. 44, n. 1, p. 10225–10230, 2011. 18th IFAC World Congress.

KHALIL, H. K. **Nonlinear systems**. 2nd. ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1996.

LEHMANN, D.; JOHANSSON, K. Event-triggered PI control subject to actuator saturation. **IFAC Proceedings Volumes**, Brescia, v. 45, n. 3, p. 430 – 435, 2012. IFAC Conference on Advances in PID Control.

LIAN, F.-L.; MOYNE, J. R.; TILBURY, D. M. Performance evaluation of control networks for manufacturing systems. *In*: INTERNATIONAL MECHANICAL ENGINEERING CONGRESS AND EXPOSITION (DYNAMIC SYSTEMS AND CONTROL DIVISION), 1999, Nashville. **Proceedings [...]** New York: ASME, 1999. p. 6–7.

LU, M.; HUANG, J. Robust output regulation problem for linear time-delay systems. **International Journal of Control**, [S.l.], v. 88, n. 6, p. 1236–1245, 2015.

LUNZE, J.; LEHMANN, D. Event-based control: a state-feedback approach. **Automatica**, [S.l.], v. 46, p. 211–215, 01 2010.

MA, G.; GHASEMI, M.; SONG, X. Event-triggered modified repetitive control for periodic signal tracking. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs**, [S.l.], v. 66, n. 1, p. 86–90, 2019.

MARCHAND, N. *et al.* Lyapunov event-triggered control: a new event strategy based on the control. **IFAC Proceedings Volumes**, Toulouse, v. 46, n. 23, p. 324 – 328, 2013. 9th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems.

MAZO, M.; TABUADA, P. Decentralized event-triggered control over wireless sensor/actuator networks. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v. 56, n. 10, p. 2456–2461, 2011.

MOREIRA, L. G. **Event-triggered control for rational and Lur'e type nonlinear systems**. 2018. 117 p. Tese de doutorado — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018.

MOREIRA, L. G. *et al.* Event-triggered PI control for continuous plants with input saturation. *In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC)*, 2016, Boston. **Proceedings [...]** New York: IEEE, 2016. p. 4251–4256.

MOREIRA, L. G. *et al.* PI event-triggered control under saturating actuators. **International Journal of Control**, [S.l.], v. 92, n. 7, p. 1634–1644, 2019.

MOREIRA, L. G. *et al.* Observer-based event-triggered control for systems with slope-restricted nonlinearities. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, [S.l.], 2020.

MOREIRA, L. *et al.* Observer-based event-triggered control in the presence of cone-bounded nonlinear inputs. **Nonlinear Analysis: Hybrid Systems**, [S.l.], v. 33, p. 17–32, 2019.

OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. *In: PERSPECTIVES IN ROBUST CONTROL*, 2001. **Proceedings [...]** London: Springer, 2001. p. 241–257.

PENG, C.; LI, F. A survey on recent advances in event-triggered communication and control. **Information Sciences**, [S.l.], v. 457-458, p. 113–125, 2018.

POSTOYAN, R. *et al.* Event-triggered tracking control of unicycle mobile robots. **Automatica**, Tarrytown, v. 52, p. 302–308, 2015.

QIAN, Y.; LIU, L.; FENG, G. Event-triggered robust output regulation of uncertain linear systems with unknown exosystems. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems**, [S.l.], p. 1–10, 2019.

SABERI, A.; SANNUTI, P.; STOORVOGEL, A. **Control of linear systems with regulation and input constraints**. 1st. ed. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

SBARBARO, D.; GOMES DA SILVA JR., J. M.; MOREIRA, L. G. Event-triggered tracking control: a discrete-time approach. **IFAC World Congress**, [S.l.], 2020.

SBARBARO, D.; TARBOURIECH, S.; GOMES DA SILVA JR., J. M. An event-triggered observer based control strategy for SISO systems. *In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL*, 53., 2014, New York. **Proceedings [...]** [S.l.: s.n.], 2014.

TABUADA, P. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v. 52, n. 9, p. 1680–1685, 2007.

TALLAPRAGADA, P.; CHOPRA, N. Event-triggered dynamic output feedback control for LTI systems. *In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC)*, 2012, Hawaii. **Proceedings [...]** New York: IEEE, 2012. p. 6597–6602.

TARBOURIECH, S. *et al.* Observer-based event-triggered control co-design for linear systems. **IET Control Theory Applications**, London, v. 10, n. 18, p. 2466–2473, 2016.

TIBERI, U.; ARAÚJO, J.; JOHANSSON, K. H. On event-based PI control of first-order processes. **IFAC Proceedings Volumes**, Brescia, v. 45, n. 3, p. 448–453, 2012. IFAC Conference on Advances in PID Control.

VIANA, E.; GOMES DA SILVA JR., J. M.; MOREIRA, L. G. Rejeição de perturbações para sistemas discretos no tempo com controle baseado em eventos. *In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA*, 23., 2020, Porto Alegre. **Anais [...]** [S.l.: s.n.], 2020.

WANG, X.; LEMMON, M. Event-triggering in distributed networked control systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v. 56, p. 586–601, 2011.

YOOK, J. K.; TILBURY, D. M.; SOPARKAR, N. R. Trading computation for bandwidth: reducing communication in distributed control systems using state estimators. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, New York, v. 10, n. 4, p. 503–518, 2002.

ZHANG, L.; GAO, H.; KAYNAK, O. Network-Induced Constraints in Networked Control Systems: a survey. **Industrial Informatics, IEEE Transactions on**, New York, v. 9, p. 403–416, 2013.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. **Robust and optimal control**. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1996.

## APÊNDICE A CONCEITOS BÁSICOS

### A.1 Estabilidade de Sistemas Dinâmicos

Uma ferramenta muito importante para a caracterização de estabilidade de sistemas dinâmicos, consiste no segundo método de Lyapunov. A teoria de Lyapunov foi inicialmente desenvolvida com base em equações diferenciais, mas pode ser aplicada às equações de diferenças (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997). A ideia principal é determinar uma função de energia, chamada função de Lyapunov, de modo que ela seja igual a zero no ponto de equilíbrio e positiva em qualquer outro ponto do espaço de estados.

#### A.1.1 Estabilidade no Sentido de Lyapunov

Para melhor entender o método, considere o seguinte sistema autônomo em tempo discreto

$$x[k + 1] = g(x[k]), \quad g(0) = 0. \quad (169)$$

Seja agora as seguintes definições:

**Definição A.1.1** (Ponto de equilíbrio). *Um ponto  $x = x^*$  no espaço de estados é dito ser um ponto de equilíbrio se este tiver a propriedade de sempre que o estado do sistema iniciar em  $x^*$ , este permanecerá em  $x^*$  em todo o tempo futuro.*

Sem perda de generalidade e por conveniência, este estudo está concentrado na análise da estabilidade da origem do  $\mathbb{R}^n$ , mas também pode ser aplicado a qualquer outro ponto através de uma troca de variáveis (KHALIL, 1996).

**Definição A.1.2** (Função de Lyapunov).  *$V(x)$  é uma função de Lyapunov para o sistema (169), se*

- i)  $V(x)$  é contínua em  $x$  e  $V(0) = 0$ ;*
- ii)  $V(x)$  é positiva definida;*
- iii)  $\Delta V(x) = V(g(x)) - V(x)$  é negativa definida.*

**Teorema 9** (Estabilidade no sentido de Lyapunov (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997)). *O ponto de equilíbrio  $x[k] = 0$  é assintoticamente estável se existir uma função de Lyapunov*

punov para o sistema (169). Além disso, se

$$0 < \varphi(\|x\|) \leq V(x), \quad (170)$$

onde  $\varphi(\|x\|) \rightarrow \infty$  quando  $\|x\| \rightarrow \infty$ , então o ponto de equilíbrio é globalmente assintoticamente estável.

O principal problema quanto ao uso do Teorema 9 é encontrar uma função de Lyapunov que caracterize a estabilidade de um sistema. Uma classe útil de funções candidatas de Lyapunov são as funções quadráticas, descritas como:

$$V(x[k]) = x[k]'Px[k] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij}x_i[k]x_j[k]. \quad (171)$$

Para que  $V(x[k])$  seja uma função candidata válida, é suficiente que  $P = P'$  e  $P > 0$ . Considerando (169) como um sistema linear, *i.e.*, com  $g(x[k]) = Ax[k]$ , tem-se então que a diferença entre instantes de amostragem de  $V(x[k])$  será dada por:

$$\Delta V(x[k]) = x[k]'(A'PA - P)x[k]. \quad (172)$$

Logo, para que  $V(x[k])$  seja uma função de Lyapunov, é necessário e suficiente que  $P > 0$ , satisfaça a inequação:

$$A'PA - P < 0. \quad (173)$$

O requisito  $P > 0$ ,  $A'PA - P < 0$ , chamado de inequação matricial de Lyapunov, caracteriza uma forma especial de *LMI*, conceito que será apresentado adiante.

### A.1.2 Conjuntos Invariantes

A teoria de conjuntos invariantes é utilizada no projeto de controladores para garantir que as trajetórias do sistema em malha fechada, uma vez que iniciadas neste conjunto, permaneçam confinadas no seu interior. Este conceito é formalizado a seguir.

**Definição A.1.3.** (BURGAT; BENZAOUIA, 1989) *Um conjunto  $\Omega$  é dito invariante em relação a (169) se*

$$x[0] \in \Omega \rightarrow x[k] \in \Omega, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (174)$$

*o conjunto  $\Omega$  é dito ser positivamente invariante se*

$$x[0] \in \Omega \rightarrow x[k] \in \Omega, \quad \forall k \geq 0. \quad (175)$$

## A.2 Sistemas Incertos

Um modelo matemático, mesmo que detalhado, representa uma aproximação de um sistema físico real, no qual a dinâmica é descrita através de equações. Tal modelo pode

apresentar imprecisões geradas a partir de hipóteses simplificadoras feitas sobre o sistema físico ou simplesmente pelo desconhecimento de certos parâmetros, como: dinâmicas não modeladas, incertezas paramétricas, ruídos, linearização, etc. (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1996).

Em virtude disso, o conceito de robustez surgiu na literatura da teoria de controle para levar em conta as incertezas predefinidas, de modo a garantir as boas propriedades ao sistema controlado (estabilidade, desempenho, etc.) mesmo na presença de incertezas de modelo (FISCHMAN, 1998). Desta forma, é conveniente representar o modelo físico por um sistema incerto, constituído do modelo matemático (sistema nominal) mais incertezas em torno deste, sendo a análise ou projeto feita considerando o sistema incerto.

### A.2.1 Incertezas Limitadas em Norma

No contexto dos sistemas lineares incertos, o conjunto dos modelos considerados podem ser escritos da maneira que segue:

$$\begin{cases} x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] & A \in \mathbf{A} \\ y[k] = Cx[k] & B \in \mathbf{B} \end{cases} \quad (176)$$

onde  $x[k] \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u[k] \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entrada e  $y[k] \in \mathbb{R}^{n_s}$  representa a vetor de saída e  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são os conjuntos compactos que reúnem, respectivamente  $A$  e  $B$  e matrizes reais de dimensões apropriadas admissíveis para o modelo incerto. As incertezas são consideradas pelo fato que as matrizes  $A$  e  $B$  podem ter qualquer valor dos conjuntos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  especificados *a priori*, conforme a definição a seguir.

**Definição A.2.1.** *As incertezas do sistema são limitadas em norma se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  possuem as seguintes estruturas:*

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\Delta[k]) &\triangleq \{A : A = A + A_\Delta = A + D\Delta[k]E_A; \Delta[k]'\Delta[k] \leq I\}, \\ \mathbf{B}(\Delta[k]) &\triangleq \{B : B = B + B_\Delta = B + D\Delta[k]E_B; \Delta[k]'\Delta[k] \leq I\}, \end{aligned} \quad (177)$$

onde  $A$ ,  $B$ , são matrizes reais constantes de dimensões apropriadas do modelo nominal e  $D$ ,  $E_A$  e  $E_B$  são matrizes reais constantes de dimensões apropriadas que definem a estrutura da incerteza sobre as matrizes  $A$  e  $B$  e  $\Delta[k] \in \mathbb{R}^{n_p \times n_q}$  é uma matriz desconhecida, eventualmente variante no tempo, limitada em norma e que representa a fonte das incertezas.

As equações de estados do sistema podem ser escritas neste caso de forma equivalente como segue:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] + Dp[k], \\ p[k] &= \Delta[k]q[k]; \Delta[k]'\Delta[k] \leq I, \\ q[k] &= E_Ax[k] + E_Bu[k], \end{aligned} \quad (178)$$

onde  $p[k] \in \mathbb{R}^{n_p}$  e  $q[k] \in \mathbb{R}^{n_q}$  são vetores auxiliares.

### A.3 Desigualdades Matriciais Lineares

Nesta seção serão apresentados conceitos e resultados referentes à desigualdades matriciais lineares (*LMIs*), sendo estas utilizadas para resolver problemas de análise e projeto de sistemas de controle a partir da solução de problemas de otimização convexa. De acordo com (BOYD *et al.*, 1994), a consequência mais importante desta abordagem é que pode-se garantir de forma segura diversas restrições *LMIs* para os quais nenhuma solução analítica seria encontrada.

#### A.3.1 Definição

Uma *LMI* é uma desigualdade com a seguinte estrutura:

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (179)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é um vetor de variáveis de decisão e  $F_i = F_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, \dots, m$ , são matrizes simétricas conhecidas. A desigualdade (179) pode não ser estritamente positiva, ou seja, pode ser  $\geq 0$ ,  $< 0$  ou ainda  $\leq 0$ .

A grande vantagem em se utilizar *LMIs* é que o seu conjunto solução, denotado por  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) > 0\}$ , é convexo. Esta propriedade é fundamental para tratar problemas mistos de desempenho e robustez como sendo problemas convexos de programação semidefinida, *i.e.*, problemas de otimização convexa que minimizam uma função objetivo linear de um vetor de variáveis de decisão  $x \in \mathbb{R}^n$ , sujeito a restrições do tipo desigualdades matriciais lineares, descritos como:

$$\begin{cases} \min_x c'x \\ \text{sujeito a } F(x) > 0 \end{cases} \quad (180)$$

#### A.3.2 Complemento de Schur

O complemento de Schur é um artifício muito utilizado na teoria de controle para converter um problema não linear convexo em *LMI*, ou vice-versa (BOYD *et al.*, 1994). Este artifício é formalmente apresentado a seguir.

**Lema A.3.1** (Complemento de Schur (BOYD *et al.*, 1994)). *Sejam  $Q = Q'$ ,  $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$ , e  $S$  matrizes reais de dimensões apropriadas. Então:*

$$i) \quad \mathcal{R} > 0, \quad Q - S\mathcal{R}^{-1}S' > 0, \quad (181)$$

$$ii) \quad \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & \mathcal{R} \end{bmatrix} > 0, \quad (182)$$

são equivalentes.

Desta forma o conjunto de inequações não lineares (181) pode ser representado pela *LMI* (182), o que permite o tratamento através de métodos computacionais.

### A.3.3 S-Procedure

O *S-Procedure* é utilizado para se obter uma formulação LMI que garanta que uma função será definida em sinal sempre que outra função for definida em sinal (BOYD *et al.*, 1994). O caso de desigualdades estritas será apresentado a seguir.

**Lema A.3.2** (*S-Procedure* (BOYD *et al.*, 1994)). *Sejam  $T_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , onde  $i = 0, \dots, p$  matrizes simétricas, e sejam escalares  $\tau_1, \dots, \tau_p > 0$ , tais que*

$$T_0 - \sum_{i=1}^p \tau_i T_i > 0, \quad (183)$$

então

$$x' T_0 x > 0, \quad \forall x \neq 0 \text{ tal que } x' T_i x \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (184)$$

é verificada.

### A.3.4 Lema de Finsler

O Lema de Finsler permite que sejam obtidos condições equivalentes para aplicações em *LMIs*. Além disso, o Lema de Finsler tem sido utilizado na teoria de controle principalmente para a eliminação de variáveis em *LMIs*, sendo também chamado de lema da eliminação (BOYD *et al.*, 1994). Este lema é enunciado da seguinte forma:

**Lema A.3.3** (Lema de Finsler (OLIVEIRA; SKELTON, 2001)). *Seja  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $Q \in \mathbb{S}^n$  e  $Y \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ , tal que o posto de  $Y < n$ , então as seguintes afirmações são equivalentes:*

$$i) \quad x' Q x < 0, \quad \forall Y x = 0, \quad x \neq 0. \quad (185)$$

$$ii) \quad Y^{\perp'} Q Y^{\perp} < 0. \quad (186)$$

$$iii) \quad \exists \mu \in \mathbb{R} : Q - \mu Y' Y < 0. \quad (187)$$

$$iv) \quad \exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times n_y} : Q + \mathcal{X} Y + Y' \mathcal{X}' < 0. \quad (188)$$