

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UM ESTUDO DE MODELOS MATEMÁTICOS BIFÁSICOS PARA TENDÕES E
LIGAMENTOS SOB GRANDES DEFORMAÇÕES

por

Jonatas Stefanello Fagundes

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Maio de 2020

UM ESTUDO DE MODELOS MATEMÁTICOS BIFÁSICOS PARA TENDÕES E
LIGAMENTOS SOB GRANDES DEFORMAÇÕES

por

Jonatas Stefanello Fagundes
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler

Aprovada por:

Prof. Dr. Eduardo Alberto Fancello POSMEC/UFSC

Prof. Dr. Samir Maghous PPGEC/UFRGS

Prof. Dr. Rodrigo Rossi PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Fernando Marcelo Pereira
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 26 de Maio de 2020

AGRADECIMENTOS

Acima de tudo, agradeço o apoio incondicional da minha mãe Ieda, e meus avós Iziberto e Doriltes, durante todo o desenvolvimento desta dissertação.

Agradeço ao professor Jakson Manfredini Vassoler pela amizade, orientação e apoio na realização deste trabalho. Agradeço também aos colegas do Grupo de Mecânica Aplicada (GMAp) pela amizade e contribuição no trabalho realizado.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro deste trabalho e pela bolsa concedida.

RESUMO

Tendões e ligamentos apresentam uma porcentagem considerável do seu peso constituída por fluido, impactando diretamente seu comportamento mecânico, principalmente em relação a efeitos viscosos. Uma abordagem apropriada para a descrição deste material é a teoria bifásica, na qual as propriedades mecânicas intrínsecas de cada fase, assim como suas interações, são levadas em consideração. Dessa forma, este trabalho tem como objetivo avaliar se modelos bifásicos encontrados na literatura são capazes de representar o comportamento mecânico de tendões e ligamentos sob grandes deformações. A teoria bifásica foi usada para descrever o tecido como uma mistura contínua de duas fases incompressíveis: uma fase sólida hiperelástica, e um fluido invíscido. Formulações de elementos finitos, baseadas em elementos mistos e em penalidade foram implementadas. O custo computacional e acurácia dos resultados foram avaliados para um tecido isotrópico no caso de compressão confinada. Também se estudou uma relação constitutiva anisotrópica para a fase sólida, com inclusão de fibras alinhadas, sob os carregamentos de tração monotônica e cíclica e sob compressão não confinada. Os resultados obtidos para o caso de compressão confinada para ambas formulações mostraram boa concordância em relação a valores da literatura, com a formulação por elementos mistos possuindo vantagem no custo computacional. Para o carregamento de tração, a resposta mecânica foi dominada pela rigidez das fibras, apresentado pouca dissipação viscosa quando comparada com o caso compressivo. Utilizando leis e parâmetros de material retirados da literatura, o modelo apresentou capacidade de representar respostas típicas de força e deslocamento, porém o movimento de fluido apresentou tendencia contrária quando comparados com dados experimentais de tendões e ligamentos. Esses resultados demonstram que os modelos constitutivos usualmente utilizados na teoria bifásica, considerando as leis de material e permeabilidade utilizadas aqui, são insuficientes para representar o comportamento da fase sólida e fluida de tecidos biológicos com anisotropia, tais como tendões e ligamentos, podendo ser necessário adaptar as leis de material e de permeabilidade para tais tecidos.

Palavras-chave: Tendão; Ligamento; Modelos Bifásicos; Elementos Finitos; Deformações Finitas.

ABSTRACT

Tendons and ligaments present a considerable percentage of their weight constituted by fluid, which directly impacts on its mechanical behavior, mainly due to viscous effects. An appropriate approach for the description of this material is the biphasic theory, in which the intrinsic mechanical properties of each phase, as well as their interactions, are taken into account. Therefore, this work has the objective of evaluating if biphasic models found in the literature are capable of representing the mechanical behavior of tendons and ligaments in large strains. The biphasic theory was used to describe the tissue as a continuous mixture of two incompressible phases: a hyperelastic solid phase, and an inviscid fluid. Finite element formulations, based on mixed elements and penalty technique, were implemented. The computational cost and accuracy of results were evaluated for an isotropic tissue in the case of confined compression. An anisotropic constitutive relation for the solid phase, with inclusion of aligned fibers, was also studied under monotonic and cyclic traction and under unconfined compression. The results for the confined compression for both formulations showed good agreement with the literature, where mixed elements formulation having advantages in the computational cost. For the tractive loading, the mechanical response was dominated by the stiffness of the fibers, presenting little viscous dissipation when compared to the compressive case. Using material laws and parameters taken from the literature, the model was able to represent typical responses of force and displacement, however the movement of the fluid showed an opposite trend when compared with experimental data on tendons and ligaments. These results demonstrate that the constitutive models usually used in the biphasic theory, considering the material and permeability laws used here, are insufficient to represent the behavior of the solid and fluid phases of biological tissues with anisotropy, such as tendons and ligaments, possibly being necessary to adapt the material laws and permeability for such tissues.

Keywords: Tendon; Ligament; Biphasic Model; Finite Element; Finite Deformations.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos e Estrutura do Trabalho	2
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1	Morfologia de Tendões e Ligamentos	4
2.2	Comportamento Mecânico de Tendões e Ligamentos	6
2.3	Efeito do fluido no comportamento mecânico de tendões e ligamentos	9
2.4	Modelagem matemática-numérica de ligamentos e tendões	13
3	FORMULAÇÃO DA TEORIA BIFÁSICA	15
3.1	Hipóteses e cinemática	15
3.2	Balanco de Massa	18
3.3	Balanco de Momentum Linear	20
3.4	Segunda lei da termodinâmica	20
3.5	Relações constitutivas	21
3.5.1	Sumário	24
4	FORMULAÇÕES POR ELEMENTOS FINITOS	25
4.1	Formulação por Penalidade	25
4.1.1	Forma Fraca	25
4.1.2	Discretização por Elementos Finitos	28
4.2	Formulação v - p	30
4.2.1	Forma Fraca	30
4.2.2	Discretização por Elementos Finitos	33
4.3	Linearização Parcial	35
4.4	Discretização Temporal	36
5	METODOLOGIA E RESULTADOS	40
5.1	Benchmark	40
5.2	Casos de Estudo para Tecidos Biológicos	48

5.2.1	Tração e compressão não confinadas em placas adesivas	48
5.2.2	Carregamento cíclico	54
6	CONCLUSÃO	58
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	59

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Hierarquia de tendões e ligamentos [adaptado de Wang, 2006].	5
Figura 2.2	Resposta típica de um ensaio de tração em tendão com carregamento alinhado às fibras de colágeno [adaptado de Wang, 2006].	7
Figura 2.3	Fenômeno de histerese apresentado em um ensaio cíclico de tração em tendão [adaptado de Wilchez, 2012].	9
Figura 3.1	Cinemática de uma mistura bifásica [adaptado de Ricken et al., 2010].	16
Figura 4.1	Condições de contorno atuantes na formulação de penalidade.	27
Figura 4.2	Condições de contorno atuantes na formulação $v-p$	32
Figura 5.1	Diagrama esquemático de um ensaio de compressão confinada. Adaptado de Holmes, 1986b	41
Figura 5.2	Pressão normalizada ao longo do tempo para alturas de 0,5 mm, 0,75 mm e 0,944 mm para o carregamento de fluência. Marcadores indicam resultados por diferenças finitas e linhas contínuas indicam resultados obtidos por elementos finitos mistos e por penalidade, onde estas estão visualmente sobrepostas.	43
Figura 5.3	Pressão normalizada ao longo do tempo para alturas de 0,5 mm, 0,75 mm e 0,944 mm para o carregamento de relaxação. Marcadores indicam resultados por diferenças finitas e linhas contínuas indicam resultados obtidos por elementos finitos mistos e por penalidade, onde estas estão visualmente sobrepostas.	44
Figura 5.4	Alongamento axial ao longo do tempo para alturas de 0,5 mm, 0,75 mm e 0,944 mm para o caso de fluência. Marcadores indicam resultados por diferenças finitas e linhas contínuas indicam resultados obtidos por elementos finitos mistos e por penalidade, onde estas estão visualmente sobrepostas.	44

Figura 5.5	Alongamento axial ao longo do tempo para alturas de 0,5 mm, 0,75 mm e 0,944 mm para o caso de relaxação. Marcadores indicam resultados por diferenças finitas e linhas contínuas indicam resultados obtidos por elementos finitos mistos e por penalidade, onde estas estão visualmente sobrepostas.	45
Figura 5.6	Tensão axial normalizada ao longo da altura para $\tau = 0,1$, $\tau = 0,01$ e $\tau = 0,001$. Marcadores indicam resultados por diferenças finitas e linhas contínuas indicam resultados obtidos por elementos finitos mistos e por penalidade, onde estas estão visualmente sobrepostas.	45
Figura 5.7	Pressão normalizada ao longo da altura para $\tau = 0,01$, $\tau = 0,05$, $\tau = 0,06$ e $\tau = 0,1$. Marcadores indicam resultados por diferenças finitas e linhas contínuas indicam resultados obtidos por elementos finitos mistos e por penalidade, onde estas estão visualmente sobrepostas.	46
Figura 5.8	Força de reação vertical ao longo do tempo por fase (Relaxação).	46
Figura 5.9	Diagrama esquemático de compressão e tração não confinadas em placa impermeável adesiva (adaptado de Wu e Herzog, 2000)	49
Figura 5.10	Malha de elementos finitos utilizada para o caso de tração e compressão não confinada com placas adesivas.	50
Figura 5.11	Valor da força de reação vertical ao longo do tempo para o carregamento de tração.	50
Figura 5.12	Valor da força de reação vertical ao longo do tempo para o carregamento de compressão.	51
Figura 5.13	Fluxo fluido no contorno da coluna ao longo do tempo para o carregamento de tração	51
Figura 5.14	Fluxo fluido no contorno da coluna ao longo do tempo para o carregamento de compressão.	52
Figura 5.15	Deslocamento radial máximo ($r = 1\text{mm}$, $Z = 0\text{mm}$) ao longo do tempo para o carregamento de tração.	52
Figura 5.16	Deslocamento radial máximo ($r = 1\text{mm}$, $Z = 0\text{mm}$) ao longo do tempo para o carregamento de compressão.	53

Figura 5.17	Pressão ao longo do raio em $Z = 0\text{mm}$ no tempo de 50s, 100s e 500s para o carregamento de tração	53
Figura 5.18	Pressão ao longo do raio em $Z = 0\text{mm}$ no tempo de 50s, 100s e 500s para o carregamento de compressão.	54
Figura 5.19	Distribuição de pressão em $t = 50\text{ s}$ para o carregamento de tração.	54
Figura 5.20	Distribuição de pressão em $t = 50\text{ s}$ para o carregamento de compressão.	55
Figura 5.21	Carregamento aplicado para o caso cíclico.	55
Figura 5.22	Deslocamento axial ao longo do tempo para o carregamento cíclico.	56
Figura 5.23	Fluxo fluido no contorno da coluna ao longo do tempo para o carregamento cíclico.	57
Figura 5.24	Deslocamento radial máximo ($r = 1\text{mm}$, $Z = 0\text{mm}$) ao longo do tempo para o carregamento cíclico.	57

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	Sumário das equações governantes do problema bifásico.	24
Tabela 3.2	Incógnitas primárias do problema bifásico	24
Tabela 5.1	Parâmetros de material	42
Tabela 5.2	Normas de erro entre formulações em elementos finitos e diferenças finitas para pressão normalizada e alongamento nas alturas $Z = 5,00 \times 10^{-1} \text{ mm}, 7,50 \times 10^{-1} \text{ mm}, 9,44 \times 10^{-1} \text{ mm}$. . .	47
Tabela 5.3	Tempo médio de simulação para formulação de penalidade e elementos mistos.	47
Tabela 5.4	Parâmetros de ψ_{ani}^s	48

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

\mathbf{X}^α	Posição de partícula da fase α na configuração de referência
\mathbf{x}	Posição de uma partícula na configuração atual
t	Tempo
\mathbf{U}^α	Função de deslocamento Lagrangeano para partícula da fase α
\mathbf{V}^α	Função de velocidade Lagrangeana para partícula da fase α
\mathbf{u}^α	Função de deslocamento Euleriano para partícula da fase α
\mathbf{v}^α	Função de velocidade Euleriana para partícula da fase α
\mathbf{F}^α	Gradiente de deformação para partícula da fase α
J^α	Jacobiano de deformação para partícula da fase α
\mathbf{C}^α	Deformação de Cauchy-Green à direita para partícula da fase α
\mathbf{L}^α	Gradiente de velocidade para partícula da fase α
\mathbf{D}^α	Tensor taxa de deformação para partícula da fase α
\mathbf{W}^α	Tensor <i>spin</i> para partícula da fase α
dm^α	Unidade infinitesimal de massa do constituinte α
dV^α	Unidade infinitesimal do constituinte α
dV	Unidade infinitesimal de volume da mistura
\mathbf{v}	Velocidade da mistura
p	Pressão hidrostática
I_i	Invariantes do tensor deformação \mathbf{C}^s
k_i	Parâmetros de material
\mathbf{a}_o	Vetor de direção das fibras
q	Função peso para obtenção da forma fraca da equação de conservação de massa.
$\bar{\mathbf{t}}^s$	Força de superfície prescrita
\bar{Q}	Fluxo de fluido prescrito
J_Γ^s	Razão de elementos de área antes e após a deformação
N^α	Funções de interpolação das variáveis cinemáticas da fase α
N_p	Função de interpolação da pressão hidrostática
\mathbb{C}	Módulo tangente elástico

Símbolos Gregos

Ω_0	Domínio na configuração de referência para a fase α
Γ_0^α	Contorno do domínio na configuração de referência para a fase α
Ω	Domínio na configuração atual
Γ_0^α	Contorno do domínio na configuração atual
χ^α	Função de movimento de uma partícula da fase α
ρ_T^α	Densidade real da fase α
ρ^α	Densidade aparente da fase α
ρ	Densidade da mistura
ϕ^α	Fração de volume do constituinte α
σ^α	Tensor tensão de Cauchy para a fase α
π^α	Troca de <i>momentum</i> devido a interação entre as fases
Ψ^α	Função de energia livre da fase α
σ_E^s	Tensor tensão de Cauchy elástica
S_E^s	Tensor tensão 2º Piola-Kirchhoff elástico
ζ	Tensor de arrasto difusivo
κ	Tensor de permeabilidade
α_i	Parâmetros de material
Ψ_{ani}^s	Função de energia livre devido a anisotropia da fase sólida
β	Fator de penalização
ω^α	Funções peso para obtenção da forma fraca.
ω	Parâmetro do método trapezoidal de integração temporal.

1 INTRODUÇÃO

A busca pelo aumento da qualidade e expectativa de vida, acentuada nos últimos anos, vem destacando a necessidade crescente de interação entre medicina e engenharia. Nesse sentido, o campo de pesquisa da biomecânica busca estudar como a combinação de estímulos mecânicos externos e internos agem sobre os diferentes tecidos que compõem os seres vivos. A compreensão e estudo do comportamento mecânico de tais tecidos são de grande importância para aplicações tais como auxílio em procedimentos cirúrgicos, projeto de próteses de maior qualidade e tratamentos mais efetivos de lesões. Dentro deste contexto, se tem obtido avanços significativos no estudo de sistemas biomecânicos complexos, buscando a modelagem mecânica cada vez mais fidedigna dos diversos tecidos que compõem o corpo humano.

A modelagem do comportamento mecânico de tecidos biológicos apresenta diversos desafios devido a características intrínsecas do material, que possui diversos processos biológicos, mecânicos e químicos. A maior parte destes tecidos apresentam comportamento mecânico complexo, com presença de anisotropia e grandes deformações dentro do seu regime fisiológico de funcionamento [Cowin e Doty, 2007]. Além disso, esses tecidos são, em geral, porosos e permeáveis, apresentando água como principal componente em termos de volume e peso [Ateshian, 2017]. A importância da fase fluida presente em tais tecidos já era conhecida por alguns dos primeiros investigadores da área da biomecânica [Maroudas e Bullough, 1968; McEwen, 1958]. Se sabe, por exemplo, que a presença de fluido produz efeitos mecânicos importantes, tais como a pressurização intersticial e comportamento mecânico viscoso devido ao movimento do fluido relativo ao material sólido [Ehret et al., 2017]. Portanto, é importante o desenvolvimento de modelos constitutivos que incorporem de forma explícita na sua formulação a presença do fluido intersticial.

De forma a incluir o efeito do fluido interno no comportamento mecânico de tecidos dentro de uma formulação termodinamicamente consistente, Mow et al., 1980 incorporaram, nos seus estudos, modelos de representação baseadas em abordagens bifásicas (fluido e sólido), a qual é baseada na teoria de misturas de Truesdell e Toupin, 1960. Inicialmente limitada a análises lineares, a teoria bifásica foi estendida para incluir não linearidades tais como deformações finitas [Suh et al., 1991], permeabilidade dependente da deformação [Holmes e Mow, 1990], modelos hiperelásticos e de permeabilidade anisotrópicos [Federico

e Grillo, 2012] e viscoelasticidade intrínseca da fase sólida [Suh e Bai, 1998].

Dentre os tecidos nos quais a teoria bifásica foi aplicada com sucesso se destaca a cartilagem, por ser o primeiro tecido analisado com esta teoria, e no qual ainda se encontra a maior parte das aplicações desta formulação. Além da cartilagem, a teoria bifásica tem sido aplicada na modelagem dos mais diversos tipos de tecidos, tais como pele [Oftadeh et al., 2018], córnea [Bryant e McDonnell, 1998], menisco [LeRoux e Setton, 2002], tecido arterial [Huyghe et al., 1991] e tendão [Khayyeri et al., 2015]. Dentro destes tecidos, tendões e ligamentos se destacam por ainda existir uma carência de informações a respeito do efeito e influência do fluido nas propriedades mecânicas do mesmo [Lozano et al., 2019].

Experimentos realizados mostram que alterações na concentração do fluido intersticial de tendões e ligamentos ocasiona diversos efeitos nas suas características mecânicas. Entretanto, o mecanismo pelo qual tais efeitos ocorrem é desconhecido, e modelos capazes de representar esses comportamentos ainda são pouco estudados. Devido a isso, faz-se necessário o estudo de modelos bifásicos aplicados a tendões e ligamentos de modo a se obter uma compreensão mais completa do comportamento mecânico dos mesmos.

A aplicação da teoria bifásica em problemas de interesse prático irá usualmente envolver a utilização de modelos de materiais, condições de contorno e geometrias complexas. Em tais casos, normalmente a solução analítica não é possível para condições fisiologicamente significantes. Além disso, estudos experimentais possuem limitações que tornam a aquisição de dados extremamente difícil em casos de interesse clínico. Para isso, ferramentas numéricas são necessárias. Dentre estas ferramentas, o método de elementos finitos se destaca como o mais utilizado para tal aplicação [Spilker et al., 1990]. Dentre as possíveis formulações de elementos finitos que podem ser usadas para resolver o problema bifásico, duas se destacam por serem as mais utilizadas: formulação baseada em penalidade [Chan et al., 2000; Pérez del Palomar e Doblaré, 2006] e formulação baseada em elementos mistos de velocidade (ou deslocamento) e pressão ($v-p$) [Ateshian et al., 2010; Un e Spilker, 2006].

1.1 Objetivos e Estrutura do Trabalho

O presente trabalho tem como objetivo principal a avaliação da capacidade de modelos bifásicos clássicos encontrados na literatura para a representação do comportamento

mecânico típico de tendões e ligamentos.

Para isto, este estudo se subdivide em dois objetivos parciais. O primeiro será implementar um código de elementos finitos para grandes deformações seguindo a formulação de penalidade e $v-p$, onde será usado um caso uniaxial simples como *benchmark* de modo a avaliar as vantagens e desvantagens de ambas as formulações frente a acurácia e tempo de processamento. A avaliação do caso de *benchmark* também será utilizado para mostrar as características básicas da resposta mecânica da teoria bifásica. O segundo objetivo secundário será a investigação do comportamento mecânico do modelo para casos de tração e compressão, usualmente utilizados para a caracterização mecânica de tecidos biológicos. Nesse caso pretende-se incorporar anisotropia na descrição do comportamento mecânico da fase sólida, e comparar os resultados obtidos de forma qualitativa com dados experimentais para tendão e ligamento, disponíveis na literatura.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: O Capítulo 2 apresenta uma descrição simplificada da morfologia de ligamentos e tendões, assim como o seu comportamento mecânico e as principais técnicas descritas na literatura para modelar matematicamente este comportamento. O Capítulo 3 mostra de forma breve a cinemática e equações governantes da teoria bifásica conforme desenvolvido em Mow et al., 1980. O Capítulo 4 desenvolve as duas formulações de elementos finitos utilizadas neste trabalho: formulação por penalidade, na qual a equação de conservação da massa é penalizada, e uma formulação por elementos mistos, conhecida como $v-p$. No Capítulo 5 são apresentados e discutidos os resultados obtidos, e por fim o Capítulo 6 descreve as principais conclusões atingidas e recomendações para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo é apresentado uma breve descrição da morfologia e hierarquia da estrutura de tendões e ligamento, assim como os principais pontos de seu comportamento mecânico. Também é feito uma revisão do estado da arte sobre os diversos paradigmas utilizados para a modelagem matemática-numérica destes tecidos.

2.1 Morfologia de Tendões e Ligamentos

Os tendões e ligamentos são tecidos moles, fibrosos e elásticos, sendo classificados na categoria de tecidos conectivos densos regulares [Mescher, 2018]. Em geral, as diferenças entre tendões e ligamentos não são consideradas, devido a grande similaridade apresentada pelos mesmos [Cowin e Doty, 2007]. Ambos tecidos apresentam pouca vascularização, com fibras de colágeno dispostas em uma configuração quase paralela, com função de guiar o movimento articular transmitindo cargas entre músculos no caso do ligamento, e entre músculo e ossos no caso do tendão, com a mínima perda de energia. A configuração de fibras quase paralelas é formada em resposta a esforços de tração exercidas em um sentido preferencial, a qual esses tecidos estão geralmente expostos, de forma a oferecer máxima resistência a essas forças [Nordin e Frankel, 2012]. Tendões e ligamentos possuem grande variabilidade em relação à forma e tamanho, apresentando configurações de fita, leque, achatados ou cilíndricos. Sua forma e propriedades estão relacionadas com a função do sistema músculo-esquelético no qual eles se localizam [Franchi et al., 2007].

Os constituintes dos tendões e ligamentos podem ser divididos em três categorias fundamentais: água, células e matriz extracelular. Considerando o peso total, a água é o principal constituinte com 65-70% do peso. A matriz extracelular representa cerca de 80% em peso do tendão, sendo que a parcela sólida desta é composta principalmente de fibras proteicas de colágeno tipo I (75-99%) e tipo III (1-14%) [Cowin e Doty, 2007]. Dentre os componentes não colágenos, fibras de elastina compõem até 2% do peso seco, e proteoglicanos até 0.2% [Nordin e Frankel, 2012]. As células presentes são em sua maioria fibroblastos especializados (90-95%) [Cowin e Doty, 2007], chamados de tenócitos.

A estrutura básica de tendões e ligamentos pode ser descrita em vários níveis hierárquicos [Kannus, 2000]. A Figura 2.1 ilustra os principais níveis com bases nas estruturas de colágeno. No primeiro nível hierárquico se encontra a molécula de colágeno,

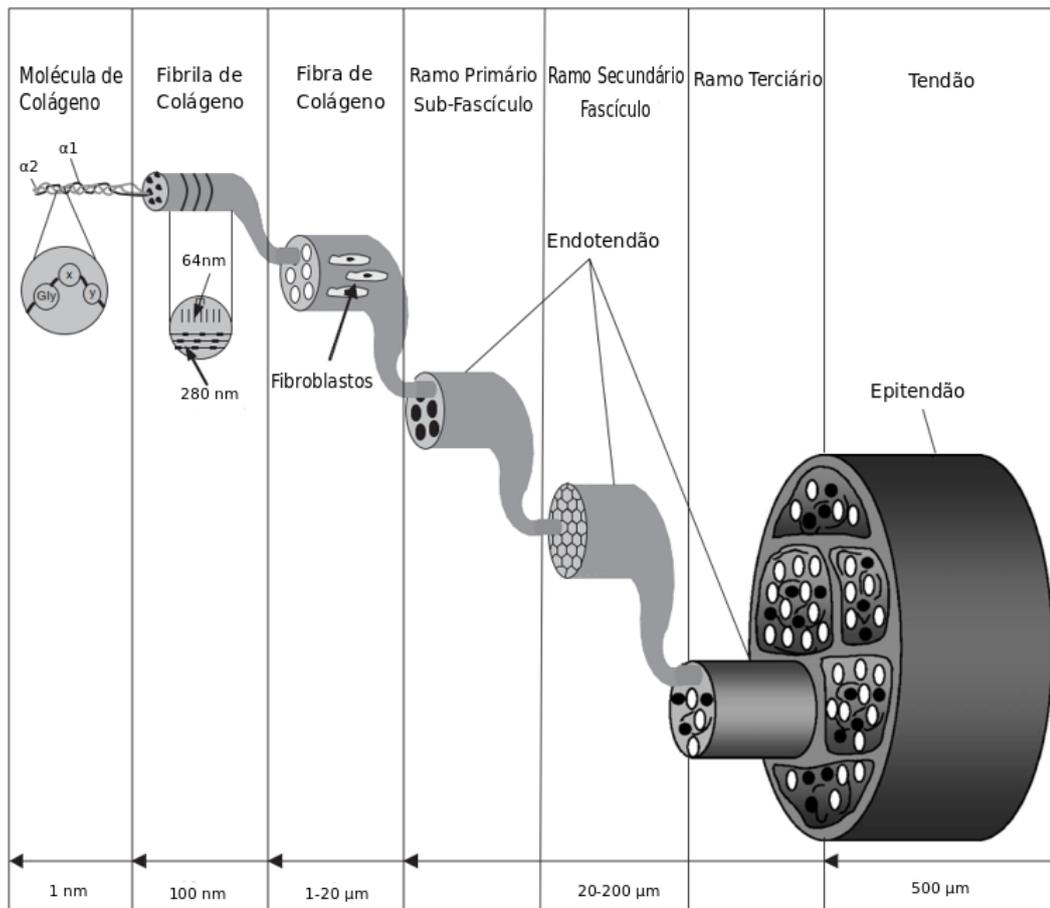


Figura 2.1 – Hierarquia de tendões e ligamentos [adaptado de Wang, 2006].

sendo produzida pelos tenócitos. As microfibrilas são uma estrutura helicoidal composta pela junção de 5 moléculas de colágeno, rodeadas por uma camada de proteoglicanos. A sua resistência e estabilidade são adquiridas durante a maturação através de ligações cruzadas intermoleculares. As microfibrilas se juntam para formar uma fibrila, a qual apresenta um formato de tripla hélice com periodicidade, possuindo um comprimento muito maior que o diâmetro [Cowin e Doty, 2007]. A resistência destas fibrilas irá depender principalmente das ligações covalentes cruzadas que irão se formar entre as moléculas de colágeno [Cowin e Doty, 2007]. Os proteoglicanos terão um efeito importante nessas ligações, determinando a espessura e o padrão de união das fibrilas [Mescher, 2018]. Os proteoglicanos também são o principal constituinte da substância base, a qual é uma matriz de aspecto gelatino que promove a hidratação do tecido devido a suas propriedades hidrofílicas [Nordin e Frankel, 2012].

As fibrilas se juntam e formam a fibra de colágeno, com os tenócitos se alinhando

entre o arranjo destas fibras. Uma camada de tecido conjuntivo frouxo contendo vasos sanguíneos e nervos, chamada de endotendão irá juntar as fibras de colágeno, formando um ramo primário chamado sub-fascículo [Wang, 2006]. Vários sub-fascículo serão unidos formando um ramo secundário chamado fascículo, os quais se unem com outros fascículos formando um ramo terciário, ambos rodeados pelo endotendão. Os fascículos não apresentam acoplamento lateral, sendo livres para deslizarem de acordo com a solicitação mecânica aplicada. Isso é facilitado por um gel de proteoglicanos que existe entre o endotendão e a superfície dos fascículos [Kannus, 2000].

Um grupo de ramos terciários se unira para formar o tendão e ligamento, o qual será envolto pelo epitendão. O epitendão é uma rede fibrilar de colágeno fina e densa, contendo fibrilas na direção longitudinal, oblíqua e transversal. Em alguns tendões pode existir uma camada extra de tecido chamada de paratendão, que atua como uma manga elástica, permitindo o deslizamento dos tendões contra tecidos circundantes com baixa fricção [Cowin e Doty, 2007].

As fibras que compõe o tecido em seu estado indeformado formam um padrão ondulado característico conhecido como *crimp* [Kannus, 2000]. Essas ondulações têm um papel importante no comportamento mecânico do tecido, permitindo a extensão deste sem ser necessário estender as fibrilas. Em um trabalho de Starborg et al. [2013] se verificou que essa característica é devido à forma helicoidal das fibras em meio a uma matriz predominantemente de células.

O fluido intersticial presente na matriz extracelular pode escoar livremente dentro do interior do tecido [Butler et al., 1997], sendo particularmente importante em tecidos pouco vascularizados como tendão e ligamento, promovendo o fornecimento de nutrientes e remoção de dejetos tóxicos [Chen et al., 1998]. Segundo Reese e Weiss, 2013 este escoamento também está implicado no efeito de mecanotransdução, sendo de fundamental importância no comportamento normal de fascículos.

2.2 Comportamento Mecânico de Tendões e Ligamentos

As características mecânicas de tendões e ligamentos apresenta uma forte dependência das propriedades das fibras de colágeno e da organização e proporção dos seus constituintes [Cowin e Doty, 2007]. Devido ao arranjo quase unidirecional apresentado pelas fibras, tendões e ligamentos são geralmente considerados transversalmente isotró-

picos [Vassoler et al., 2012]. Os ensaios mecânicos realizados em tendões e ligamentos geralmente consistem em ensaios de tração ao longo da direção preferencial da fibra de colágeno, devido a esse ser o principal carregamento fisiológico experimentado pelos tecidos [Cowin e Doty, 2007]. A curva típica resultante deste ensaio é mostrada na Figura 2.2, apresentando um comportamento não-linear .

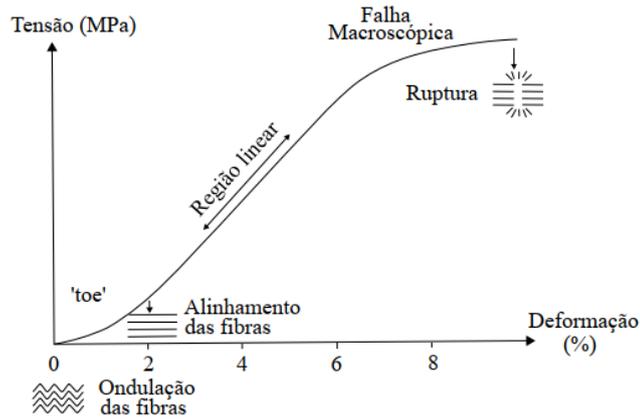


Figura 2.2 – Resposta típica de um ensaio de tração em tendão com carregamento alinhado às fibras de colágeno [adaptado de Wang, 2006].

Uma curva tensão-deformação típica de tendões e ligamentos apresenta uma região inicial de baixa rigidez, onde o tecido é deformado até cerca de 1,5-4%, embora possa ocorrer uma considerável variabilidade entre espécimens [Carlstedt, 1987]. Nessa região ocorre a perda do padrão ondulado apresentado pelas fibras, com um aumento de rigidez. Conforme o carregamento aumenta ocorre uma transição gradual para uma região quase-linear, na qual as fibras de colágeno já estão completamente solicitadas e dominam o comportamento mecânico do tecido. Essa região linear ocorre até cerca de 4-6% de deformação [Wang, 2006]. Ao fim da região linear, pequenas e irregulares quedas na tensão são observadas devido à falha progressiva de fibras de colágeno. Ao atingir cerca de 8-10% de deformação ocorre falha macroscópica das fibras. Segundo Johnson et al., 1994, a ruptura total para tendão patelar humano ocorre em cerca de 14-15% de deformação. Sob condições fisiológicas normais, tendões e ligamentos são sujeitos a uma tensão que é cerca de $\frac{1}{3}$ da tensão última de ruptura [Cowin e Doty, 2007], que em termos de deformação corresponde a cerca de 4% [Franchi et al., 2007].

Tendões e ligamentos apresentam comportamento mecânico altamente anisotrópico, o qual é creditado à estrutura unidirecional apresentada pelas fibras de colágeno.

Quapp e Weiss, 1998 e Chuong et al., 1991 realizaram ensaios de tração em amostras com a carga alinhada de forma paralela e perpendicular às fibras de colágeno. Os resultados mostraram que tendões e ligamentos apresentam resistência mecânica e rigidez muito maiores na direção paralela, sendo as fibras de colágeno os principais elementos que suportam carga. Embora normalmente se considere que as fibras de colágeno não apresentem resistência a compressão, Böl et al., 2015 demonstrou em ensaios de compressão semi-confinada que a direção das fibras permanece sendo uma direção de isotropia transversal, e que mecanismos distintos de resistência atuam para suportar esforços compressivos paralelos e perpendiculares às fibras.

Quando submetidos a ensaios cíclicos de tração, tendões e ligamentos apresentam um comportamento dissipativo, como pode ser visto na Figura 2.3, onde se observa o fenômeno de histerese. Este comportamento está associado as características viscoelásticas apresentadas pelo tecido Cowin e Doty, 2007. Quando ligamentos e tendões são sujeitos a taxas crescentes de carregamento, a porção linear da curva tensão-deformação se torna mais inclinada, indicando um aumento da rigidez do tecido [Nordin e Frankel, 2012]. Se considera que o comportamento viscoelástico apresentado advém da viscoelasticidade inerente da matriz sólida de colágeno e sua interação com o líquido intersticial presente [Oftadeh et al., 2018; Cowin e Doty, 2007], sugerindo que mecanismos dependentes e independentes do escoamento do fluido podem contribuir em diferentes níveis estruturais [Reese e Weiss, 2013]. Entretanto, o mecanismo que governa o comportamento viscoelástico do tecido ainda não é completamente compreendido [Reese e Weiss, 2013; Shen et al., 2011; Lozano et al., 2019; Oftadeh et al., 2018].

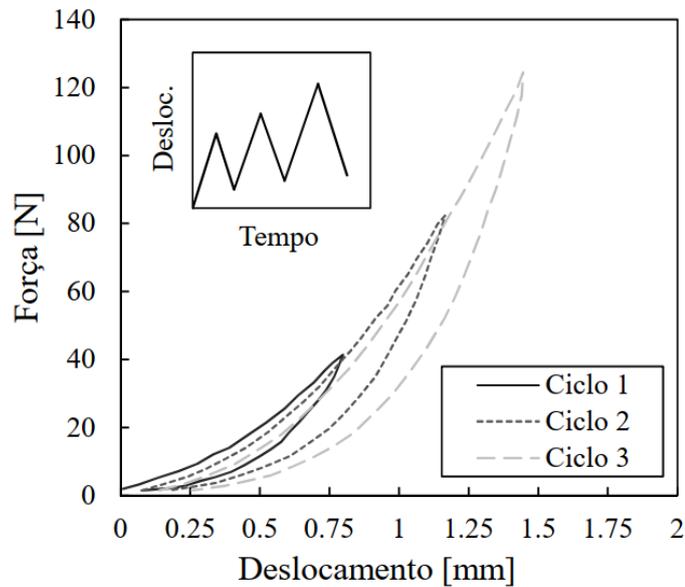


Figura 2.3 – Fenômeno de histerese apresentado em um ensaio cíclico de tração em tendão [adaptado de Wilchez, 2012].

2.3 Efeito do fluido no comportamento mecânico de tendões e ligamentos

Embora a água seja um dos principais componentes de tendões e ligamentos, ainda existe uma considerável falta de informações sobre o seu efeito nas propriedades mecânicas destes tecidos, e nos mecanismos pelos quais esses efeitos ocorrem [Lozano et al., 2019].

O primeiro trabalho a fazer menção sobre o efeito da hidratação se deve a Viidik e Lewin, 1966, onde se declara que a mudança na concentração de fluido em ligamentos influem fortemente na curva tensão-deformação obtida em ensaios uniaxiais quando comparado com o tecido fresco. Neste trabalho também se afirma que ao imergir o ligamento em solução salina, ocorre uma dilatação no tecido, assim como um aumento na deformação de ruptura. Estudos posteriores viriam a confirmar, e às vezes contradizer estes resultados. Em Lanir et al., 1988, os autores chegam a conclusão que a hidratação não possui efeito significativo na resposta mecânica das fibras de colágeno. Já em Haut e Powlison, 1990, se encontrou que amostras de tendão apresentam maior rigidez e tensão de ruptura quando imersas em fluido, comparado à condição ao ar, conclusão esta também obtida por Adeeb et al., 2004. Contradizendo estes resultados, Chimich et al., 1992 afirma que ligamentos e tendões testados ao ar apresentam maior rigidez. Em Lozano et al., 2019, foi reportado que o módulo elástico e tensão de ruptura aumentam com o decréscimo

da concentração de fluido no tecido. Haut e Haut, 1997 realizou ensaios de tração com tendões submergidos em soluções hipertônicas e hipotônicas, concluindo que para taxa de deformação de $50 \%s^{-1}$ a hidratação aumenta a rigidez, e para taxa de $0.5 \%s^{-1}$ a hidratação diminui a rigidez do tecido. A influência do fluido se manifesta similarmente no comportamento viscoelástico.

Uma possível explicação para estes fenômenos é dada por Lozano et al., 2019, que teoriza que uma diminuição na concentração de fluido interno causaria um aumento da fricção entre as fibras, e conseqüente perda de energia na forma de calor, embora não existam evidências experimentais que suportem esta teoria. Ao examinar amostras de ligamento, Thornton et al., 2001 constatou que o aumento da concentração de fluido causa uma diminuição no comprimento funcional do tecido, com geração de pré-tensões positivas. Já Masic et al., 2015 afirma que a remoção de água causa um encurtamento da molécula de colágeno, ocasionando tensões trativas de magnitude muito maior que as transmitidas pelos músculos.

A influência do fluido também se manifesta no comportamento compressível do tecido. É amplamente mencionado na literatura a redução de volume de tendões e ligamentos em resposta a carregamentos de tração e compressão, com simultânea exsudação de líquido [Böl et al., 2015; Reese e Weiss, 2013; Adeeb et al., 2004]. Comportamento similar foi exibido em ensaio de tração feitos em conjunto com ressonância magnética, sendo encontrado que o carregamento causa um movimento radial do fluido intersticial, do centro do tecido para as suas extremidades [Han et al., 2000; Helmer et al., 2004, 2006]. Dados obtidos em ensaios com carregamentos cíclicos indicam uma perda de fluido durante o carregamento, com posterior reabsorvimento no descarregamento, assim como uma diminuição do diâmetro da amostra em ciclos sucessivos. O fluido reabsorvido após o termino do ciclo de carga chega a superar a quantidade original, e de forma análoga o diâmetro da amostra pode também exceder o valor inicial [Lanir et al., 1988].

O valor do coeficiente de Poisson esta intimamente ligado com a redução de volume e exsudação de fluido [Lavagnino et al., 2008]. Valores típicos de Poisson aparente (valor médio do tecido) encontrados para tendões e ligamentos sob tração são geralmente maiores que 1 [Lynch et al., 2003; Hewitt et al., 2001], embora valores negativos também tenham sido reportados [Gatt et al., 2015]. Já para compressão, o coeficiente de Poisson é menor que 0,5, caracterizando diminuição de volume [Böl et al., 2015]. Vários trabalhos citam

uma dependência do coeficiente de Poisson em função da deformação [Reese e Weiss, 2013; Swedberg et al., 2014], atingindo um valor máximo em pequenas deformações, seguido por um decaimento não linear [Ahmadzadeh et al., 2015]. Teorias micromecânicas procuram explicar o mecanismo causando o alto valor do coeficiente de Poisson e conseqüente exsudação de fluido usando como base a configuração espacial apresentada pelas fibras de colágeno [Atkinson et al., 1997; Reese et al., 2010], ou ligações interfibrilares [Ahmadzadeh et al., 2015], mas a questão permanece em aberto. É interessante notar uma investigação recente de Carniel et al., 2019 na qual se questiona o procedimento experimental utilizado na obtenção do coeficiente de Poisson, e a sua validade como uma medida da deformação transversal e mudança de volume.

O comportamento viscoelástico também sofre influência do fluido [Woo et al., 1981]. Tendões e ligamentos submersos em soluções hidratantes apresentam comportamento viscoso mais pronunciado e rápido que espécimens testados ao ar ou em soluções desidratantes [Haut e Powlison, 1990; Chimich et al., 1992; Haut e Haut, 1997; Atkinson et al., 1999]. No trabalho de Thornton et al., 2001, se observou que o efeito da concentração de fluido na viscosidade é mais significativo para ensaios de relaxação do que fluência, indicando um mecanismo de ação diferente de acordo com o modo de carregamento. Se acredita que o comportamento viscoelástico apresentado seja uma mescla da viscosidade intrínseca do tecido, juntamente com mecanismos devido ao escoamento do fluido [Oftadeh et al., 2018; Reese e Weiss, 2013]. Entretanto, dificuldades experimentais em desacoplar os dois efeitos impedem uma investigação das situações em que cada mecanismo seja dominante.

Embora pouco explorado na literatura, existem evidências experimentais de que a permeabilidade em tendões e ligamentos seja transversalmente isotrópica, devido à distribuição unidirecional de fibras de colágeno, que agiriam como obstáculos para o movimento do fluido [Böl et al., 2015; Han et al., 2000]. Valores de permeabilidade disponíveis na literatura se baseiam em estudos puramente numéricos [Chen et al., 1998], ou em ajuste de parâmetros usando dados de ensaios de tração [Khayyeri et al., 2015; Yin e Elliott, 2004]. Até o momento, segundo conhecimento do autor, não existem valores de permeabilidade de tendões e ligamentos obtidos em ensaios dedicados.

O fluido intersticial presente em tendões e ligamentos também é considerado como um dos principais agentes de mecanotransdução, efeito no qual sinais derivados de esforços mecânicos são transmitidos a células do tecido provocando a sua adaptação. Em Slack

et al., 1984 se verificou um aumento na atividade metabólica em tendões sujeitos a carregamentos trativos, o que os autores sugerem ser uma manifestação da nutrição celular causada pelo movimento de fluido. Giori et al., 1993 reporta que as células do tendão são sensíveis a alterações na pressão hidrostática, e que um aumento nesta leva a uma maior produção de tecido cartilaginoso, fenômeno conhecido por ocorrer nas regiões em que o tendão está em contato com osso, sofrendo esforços compressivos. Segundo Adeb et al., 2004, a atração entre o fluido intersticial e as moléculas proteoglicanas induzem gradientes de pressão no tecido, o que é importante para os casos em que o tendão está sujeito a esforços compressivos, já que de acordo com Böl et al., 2015, essa forma de solicitação causa um aumento drástico na quantidade de proteoglicanos.

Uma diminuição do conteúdo de água do tecido está relacionado a um aumento na produção de colagenase, que por sua vez causa um decréscimo na quantidade e densidade de colágeno, enfraquecendo as propriedades mecânicas de ligamentos e tendões devido à desorganização induzida nas fibras de colágeno [Lozano et al., 2019]. Esse efeito também foi verificado por Lavagnino et al., 2008 através de um modelo multiescala bifásico em conjunto com experimentos, sendo causado por tensões cisalhantes induzidas pelo fluido intersticial, ao nível celular. Já no trabalho de Butler et al., 1997, simulações computacionais forneceram valores de pressão e escoamento de fluido altas o suficiente para, de acordo com os autores, servir como mecanismo de mecanotransdução para autorregulação celular em situações fisiológicas.

Devido a importância que a concentração de fluido possui na resposta mecânica do tecido, cuidados devem ser tomados em ensaios mecânicos de forma a replicar as condições de hidratação *in-vivo*. Por exemplo, correlações entre propriedades mecânicas e dados antropomórficos (idade, sexo, etc ...) possuem maior probabilidade de serem encontrados para concentrações de água próximas da fisiológica [Lozano et al., 2019]. Cuidados também devem ser tomados na escolha do fluido no qual o tecido é preservado. Estudos de Chimich et al., 1992; Safa et al., 2017 demonstraram que mudanças na composição da solução usada para manter a hidratação de ligamentos pode modificar a concentração de água interna e a resposta mecânica do tecido. Nesse sentido, ainda se desconhece se o uso de solução salina é uma forma efetiva de manter a hidratação fisiológica de tecidos moles, tais como tendões e ligamentos [Lozano et al., 2019], embora esta ainda seja a abordagem mais utilizada em ensaios mecânicos [Wilchez, 2012]. Dentro desse contexto, também se

destaca a importância da pressão osmótica na geração de forças em tendões, efeito esse salientado em um estudo experimental de Masic et al., 2015.

2.4 Modelagem matemática-numérica de ligamentos e tendões

No estudo de tendões e ligamentos, modelos puramente fenomenológicos são os mais utilizados, geralmente com uso de modelos viscoelásticos clássicos para representar o comportamento dependente do tempo, e com inclusão da hipótese de material incompressível [Pioletti et al., 1998; Vassoler et al., 2012, 2016; Hirokawa e Tsuruno, 2000; Song et al., 2004; Woo et al., 1993; Peña et al., 2007; Tang et al., 2011; Peña et al., 2008].

Uma abordagem que vem ganhando predominância dentro do estudo de tecidos fibrosos são os modelos multiescala. Como exemplo desta abordagem, pode-se citar os trabalhos de Carniel et al., 2018; Carniel e Fanello, 2019, o qual utiliza uma formulação variacional de homogenização para investigar o comportamento viscoelástico de tendões.

Os modelos bifásicos entram como uma evolução dos modelos puramente fenomenológicos, mantendo as vantagens dos mesmos e incluindo dentro de sua formulação informações sobre o fluido intersticial e sua interação com a matriz sólida. Para a aplicação em tendões e ligamentos, poucos estudos utilizando modelos bifásicos são encontrados na literatura, já que esses modelos são aplicados geralmente para cartilagem [Ateshian, 2017; Pierce et al., 2013; Wu e Herzog, 2000]. Por exemplo, Yin e Elliott, 2004 utiliza um modelo bifásico analítico para representar o comportamento unidimensional de tendões em tração sob pequenas deformações. Já usando elementos finitos em um regime de grandes deformações, Khayyeri et al., 2015 utiliza um modelo poroviscoelástico anisotrópico, previamente desenvolvido para cartilagem, para tentar caracterizar o comportamento do tendão em tração. Embora a resposta de força-deslocamento numérica tenha apresentado concordância com o resultado de um ensaio cíclico trativo, o modelo apresentou influxo de fluido e aumento de volume durante tração, contradizendo a observação experimental. Procurando melhorar essa resposta, Swedberg et al., 2014 propôs um potencial hiperelástico no qual uma função descrevendo o coeficiente de Poisson é incluída, obtendo resultados qualitativamente coerentes para a deformação volumétrica, evolução do Poisson com deformação, e exsudação de fluido no caso de tração. Entretanto, não se verificou a resposta para solicitações multiaxiais, ou se o modelo possui capacidade de representar dados experimentais.

Dentro os modelos micromecânicos e multiescala aplicados em tendões e ligamento que tenham utilizado a teoria bifásica em suas formulações, se salienta os trabalhos de Atkinson et al., 1997; Ahmadzadeh et al., 2015. Dentre estes, todos conseguiram representar o comportamento tensão-deformação característico, assim como a exsudação de fluido durante a tração, embora o mecanismo micromecânico assumido pelo modelo para obter tais resultados tenha sido distinto em cada trabalho.

Em vista do que foi exposto, existem vários modelos de materiais disponíveis para a representação do comportamento mecânico de tendões e ligamentos. Entretanto, levando em consideração a carência de estudos numéricos investigando o efeito do fluido no comportamento mecânico de tendões e ligamento, este trabalho irá estudar a utilização de um modelo bifásico para a representação destes tecidos. Neste sentido, o modelo implementado irá seguir a formulação e relações constitutivas clássicas na teoria bifásica, as quais foram desenvolvidas para caracterização de cartilagem, de modo a avaliar se esses modelos são adequados para tendões e ligamentos.

3 FORMULAÇÃO DA TEORIA BIFÁSICA

Esta seção irá apresentar de forma simplificada a cinemática, equações governantes, e hipóteses principais que compõem a teoria bifásica. Para uma dedução mais detalhada, consultar Mow et al., 1980 e de Boer, 2000.

3.1 Hipóteses e cinemática

Na teoria bifásica, os materiais são considerados como uma mistura continua binária composta de uma matriz sólida, preenchida por uma fase líquida. A teoria bifásica, conforme formulada por Mow et al., 1980, foi desenvolvida a partir da teoria de misturas [Truesdell e Toupin, 1960] com o objetivo de descrever o comportamento mecânico de tecidos moles hidratados, em especial cartilagem. Baseado no comportamento experimental destes tecidos, diversas hipóteses e simplificações são impostas para a obtenção das equações governantes da teoria bifásica. Primeiramente, ambas as fases são assumidas inertes, e não sofrem nenhuma mudança ou interação química. Cada fase é considerada intrinsecamente incompressível. Embora essa seja uma hipótese geralmente razoável para a fase líquida, a incompressibilidade da fase sólida deverá ser comprovada experimentalmente para o tecido ao qual se deseja estudar. Se sabe que essa hipótese é razoável para tecidos cuja composição da fase sólida é dada principalmente por colágeno [Bachrach et al., 1998]. Também se assume que o material é submetido a deformações isotérmicas, e sem produção de calor. Por fim, a mistura é suposta imiscível, e se considera que o esqueleto sólido poroso está saturada por líquido em todos os instantes de tempo. Nas definições que seguem, quantidades com sobrescrito “*s*” e “*f*” designam quantidades relacionadas a fase sólida e fluída respectivamente.

Em uma mistura bifásica, cada fase ocupa simultaneamente o mesmo volume espacial. Isso significa que uma partícula do esqueleto sólido e do fluido podem ocupar o mesmo volume infinitesimal na configuração atual. Cada fase possui uma configuração de referência, definida pelo domínio Ω_o^α e contorno Γ_o^α , e uma configuração atual, compartilhada por todos os constituintes, definida pelo domínio Ω e contorno Γ , conforme ilustrado na Figura 3.1. Por questões de conveniência, a configuração de referência da fase líquida é suposta como sendo a mesma do esqueleto sólido, já que essa é geralmente a única identificável.

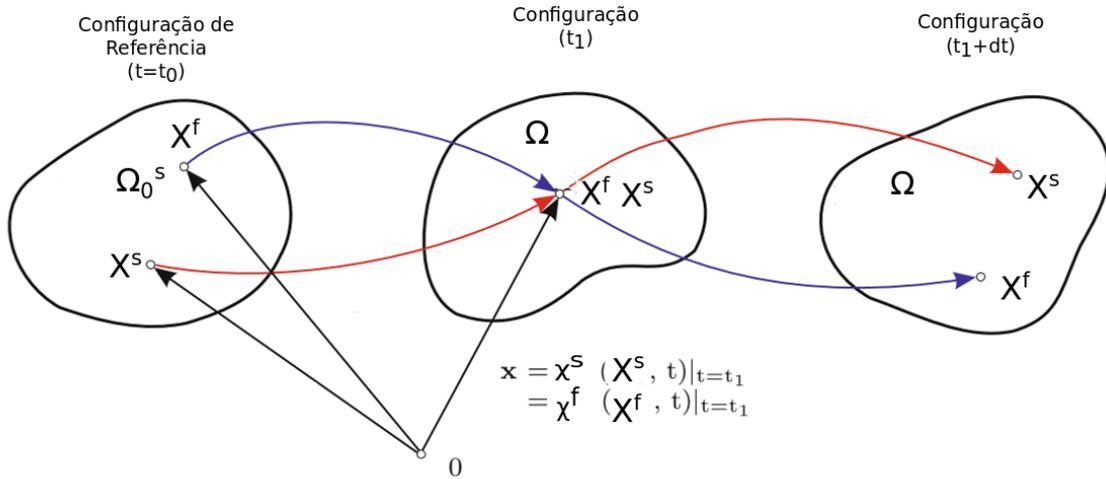


Figura 3.1 – Cinemática de uma mistura bifásica [adaptado de Ricken et al., 2010].

A posição de uma partícula da fase α na configuração de referência (coordenadas materiais ou Lagrangeanas) é dada por \mathbf{X}^α , onde $\alpha = \{s, f\}$. A posição na configuração atual (coordenadas espaciais ou Eulerianas) de partículas de ambas as fases são dadas por \mathbf{x} . O movimento de cada partícula é independente, sendo descrito pela função de movimento (ou mapeamento) χ^α , invertível e suave, definida pela relação:

$$\mathbf{x} = \chi^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) \quad (3.1)$$

O deslocamento de uma partícula é definido por:

$$\mathbf{U}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}^\alpha, t) - \mathbf{X}^\alpha \quad (3.2)$$

A velocidade é definida pela derivada no tempo, de acordo com:

$$\mathbf{V}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) = \frac{\partial \chi^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t)}{\partial t} \quad (3.3)$$

A versão espacial do deslocamento e velocidade são obtidas usando a inversa da função de movimento:

$$\mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}^\alpha(\chi^{\alpha^{-1}}, t) \quad (3.4)$$

$$\mathbf{v}^\alpha(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}^\alpha(\chi^{\alpha^{-1}}, t) \quad (3.5)$$

O gradiente de deformação \mathbf{F}^α , Jacobiano J^α e deformação de Cauchy-Green à direita \mathbf{C}^α são definidos pelas relações clássicas da elasticidade [Holzapfel, 2002].

$$\mathbf{F}^\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}^\alpha} \quad (3.6)$$

$$J^\alpha = \det(\mathbf{F}^\alpha) \quad (3.7)$$

$$\mathbf{C}^\alpha = \mathbf{F}^{\alpha T} \mathbf{F}^\alpha \quad (3.8)$$

Vale salientar que o Jacobiano da deformação do esqueleto sólido J^s irá fornecer uma medida da deformação volumétrica aparente da matriz sólida. A hipótese de incompressibilidade não implica que $J^s = 1$, já que o volume aparente do esqueleto sólido pode mudar através da entrada e saída do fluido, e conseqüente fechamento e abertura dos poros.

O gradiente da velocidade é definido como:

$$\mathbf{L}^\alpha = \frac{\partial \mathbf{v}^\alpha}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.9)$$

Sendo que \mathbf{L}^α pode ser separado na sua parte simétrica \mathbf{D}^α e antissimétrica \mathbf{W}^α :

$$\mathbf{D}^\alpha = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^\alpha + \mathbf{L}^{\alpha T}) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{W}^\alpha = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^\alpha - \mathbf{L}^{\alpha T}) \quad (3.11)$$

onde \mathbf{D}^α é chamado tensor taxa de deformação, e \mathbf{W}^α é chamado de tensor de spin.

As misturas imiscíveis são definidas como aquelas onde localmente se pode distinguir o volume dos seus constituinte, e devido a isso admite a definição de dois tipos de densidade: a densidade real ρ_T^α , e a densidade aparente ρ^α . A densidade real de um constituinte α é definida como a razão entre um elemento de massa infinitesimal dm^α por uma unidade infinitesimal de volume do mesmo constituinte:

$$\rho_T^\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{dm^\alpha}{dV^\alpha} \quad (3.12)$$

Já a densidade aparente de um constituinte α é definida como a razão entre um elemento de massa infinitesimal dm^α por uma unidade infinitesimal de volume da mistura:

$$\rho^\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{dm^\alpha}{dV} \quad (3.13)$$

A restrição de que ambas as fases são intrinsecamente incompressíveis impõe que a densidade verdadeira deve ser constante ($\rho_T^\alpha = cte$). Usando a definição da densidade aparente conforme Equação 3.13, pode-se definir a densidade da mistura como:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha} \rho^{\alpha}(\mathbf{x}, t) \quad (3.14)$$

É conveniente definir uma velocidade média que represente a mistura. Essa velocidade é definida de forma que o fluxo de massa total da mistura seja igual à soma do fluxo de massa de cada constituinte:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha} \rho^{\alpha} \mathbf{v}^{\alpha} \quad (3.15)$$

Pela mistura ser imiscível, a fração de volume da fase α é definida por:

$$\phi^{\alpha}(\mathbf{x}, t) = \frac{dV^{\alpha}}{dV} \quad (3.16)$$

Fisicamente ϕ^{α} representa o volume do constituinte α presente em um volume infinitesimal da mistura, e a mesma deve estar contida no intervalo $0 \leq \phi^{\alpha} \leq 1$ para ter sentido físico. Como o esqueleto sólido é suposto saturado por líquido durante todos os instantes de tempos (inexistência de vazios), a fração de volume é sujeita a restrição adicional:

$$\phi^s + \phi^f = 1 \quad (3.17)$$

e em consequência a densidade real e aparente são relacionadas de acordo com:

$$\rho^{\alpha} = \rho_T^{\alpha} \phi^{\alpha} \quad (3.18)$$

3.2 Balanço de Massa

A forma diferencial da equação de conservação de massa para o constituinte α segue um formato similar ao apresentado para materiais monofásicos. Usando a hipótese de inexistência de reações químicas entre as fases, a equação de conservação de massa pode ser expressa como:

$$\frac{D^{\alpha} \rho^{\alpha}}{Dt} + \rho^{\alpha} \nabla \cdot \mathbf{v}^{\alpha} = 0 \quad (3.19)$$

onde o operador $\frac{D^\alpha(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \nabla(\cdot) \cdot \mathbf{v}^\alpha$ representa a derivada material no tempo seguindo o movimento da fase α . Um formato mais conveniente para a Equação 3.19 é obtido usando a fração de volume ϕ^α para eliminar a presença da densidade aparente. Usando Equação 3.18 juntamente com a hipótese de incompressibilidade, se obtêm:

$$\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}^\alpha \phi^\alpha) = 0 \quad (3.20)$$

Fazendo a soma da Equação 3.20 para $\alpha = \{s, f\}$, e usando a condição de saturação dada pela Equação 3.17, se chega no formato desejado para a equação de conservação de massa:

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}^s \phi^s + \mathbf{v}^f \phi^f) = 0 \quad (3.21)$$

A condição de incompressibilidade aplicada a fase sólida permite relacionar a densidade aparente e fração volumétrica na configuração deformada e de referência:

$$\rho_T^s = \frac{\rho^s}{\phi^s} = \frac{\rho_0^s}{\phi_0^s} \quad (3.22)$$

onde o subscrito “0” indica quantidades avaliadas na configuração de referência. Para um volume de controle infinitesimal seguindo a fase sólida, a densidade aparente na configuração deformada e de referência são relacionadas pelo Jacobiano da deformação sólida.

$$\rho^s = \frac{\rho_0^s}{J^s} \quad (3.23)$$

Usando a Equação 3.22 e a Equação 3.17 na Equação 3.23, pode-se determinar a fração volumétrica atual de ambas as fases a partir da deformação volumétrica da matriz sólida:

$$\phi^s = \frac{\phi_0^s}{J^s} \quad (3.24)$$

$$\phi^f = 1 - \frac{\phi_0^s}{J^s} \quad (3.25)$$

Se nota pelas Equações 3.24 e 3.25, que de forma a cumprir a restrição de fração volumétrica menor que a unidade, J^s deverá ter como limite inferior ϕ_0^s , ou seja, $J^s \geq \phi_0^s$.

3.3 Balanço de Momentum Linear

Dentre a maioria dos tecidos moles, termos inerciais e forças de corpo externas (tais como gravidade) tem efeito desprezível para as taxas de deformação experimentadas fisiologicamente, devido à baixa permeabilidade destes tecidos [Holmes, 1986a]. Incorporando estas hipóteses, a lei de conservação de *momentum* para cada fase da mistura é expressa como:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^s + \boldsymbol{\pi}^s = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^f + \boldsymbol{\pi}^f = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$ é o tensor tensão de Cauchy para a fase α , e $\boldsymbol{\pi}^\alpha$ é uma força de corpo difusiva interna que representa troca de *momentum* devido à interação entre as fases. A troca de *momentum* representada por $\boldsymbol{\pi}^\alpha$ deve se equilibrar internamente, fornecendo uma relação de ação-reação:

$$\boldsymbol{\pi}^s = -\boldsymbol{\pi}^f \quad (3.28)$$

3.4 Segunda lei da termodinâmica

Para uma mistura bifásica cumprindo com as hipóteses expressas, a 2ª lei da termodinâmica é definida pela expressão [Almeida, 1995]:

$$-\rho^s \frac{D^s \Psi^s}{Dt} - \rho^f \frac{D^f \Psi^f}{Dt} + \boldsymbol{\sigma}^s : \mathbf{D}^s + \boldsymbol{\sigma}^f : \mathbf{D}^f + \boldsymbol{\pi}^s \cdot (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) \geq 0 \quad (3.29)$$

onde Ψ^α representa a função de energia livre da fase α por unidade de volume da mistura. A equação de conservação de massa, descrita pela Equação 3.21, representa uma restrição ao processo termodinâmico, e como tal é introduzida na 2ª lei através de um multiplicador de Lagrange p , de acordo com Truesdell e Toupin, 1960. Após algumas manipulações algébricas, a Equação 3.29 é reescrita como:

$$\begin{aligned} & -\rho^s \frac{D^s \Psi^s}{Dt} - \rho^f \frac{D^f \Psi^f}{Dt} + (\boldsymbol{\sigma}^s + \phi^s p \mathbf{I}) : \mathbf{D}^s + (\boldsymbol{\sigma}^f + \phi^f p \mathbf{I}) : \mathbf{D}^f + \\ & (\boldsymbol{\pi}^s - p \nabla \phi^s) \cdot (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.5 Relações constitutivas

As equações cinemáticas e de balanço apresentadas são válidas, independente da estrutura e propriedades do material bifásico. Entretanto, elas não são em número suficiente para possibilitar uma solução do problema. Para isso é necessário estabelecer as relações constitutivas, as quais irão caracterizar a resposta dos constituintes.

De forma a estabelecer os modelos constitutivos para tecidos biológicos, Mow et al., 1980 introduziu hipóteses adicionais referentes ao comportamento mecânico da matriz sólida e do fluido. Se assume que a matriz sólida é hiperelástica, e que o efeito da viscosidade do fluido é desprezível (fluido invíscido). Adicionalmente, é assumido que todo o efeito de dissipação mecânica provêm do arrasto friccional devido ao movimento relativo do fluido na matriz sólida, a ser incorporado no termo de interação $\boldsymbol{\pi}^\alpha$.

A hipótese de que a matriz sólida seja hiperelástica implica que a sua energia livre depende apenas do valor instantâneo da sua deformação, dado pelo gradiente de deformação \mathbf{F}^s . Devido ao requisito de objetividade, pode-se eliminar a dependência de \mathbf{F}^s em favor do tensor de deformação de Cauchy-Green a direita \mathbf{C}^s :

$$\Psi^s = \Psi^s(\mathbf{C}^s) \quad (3.31)$$

A hipótese de que o fluido é invíscido indica que a energia livre Ψ^f independe da taxa de deformação \mathbf{D}^f . Como o fluido também é considerado incompressível, Ψ^f não irá depender de nenhuma variável do processo, e devido a isso se pode assumir que $\Psi^f = 0$. Usando destas hipóteses, com algumas manipulações algébricas, a 2ª lei da termodinâmica para misturas bifásicas é reescrita como:

$$\begin{aligned} & \left(-2\mathbf{F}^s \frac{\partial \Psi^s(\mathbf{C}^s)}{\partial \mathbf{C}^s} \mathbf{F}^{sT} + \boldsymbol{\sigma}^s + \phi^s p \mathbf{I} \right) : \mathbf{D}^s + \left(\boldsymbol{\sigma}^f + \phi^f p \mathbf{I} \right) : \mathbf{D}^f + \\ & (\boldsymbol{\pi}^s - p \nabla \phi^s) \cdot (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Como a desigualdade expressa pela Equação 3.32 deve ser válida para qualquer processo termodinâmico, encontra-se a seguinte estrutura:

$$\boldsymbol{\sigma}^s = \boldsymbol{\sigma}_E^s - \phi^s p \mathbf{I} \quad (3.33)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_E^s = 2 \mathbf{F}^s \frac{\partial \Psi^s(\mathbf{C}^s)}{\partial \mathbf{C}^s} \mathbf{F}^{sT} \quad (3.34)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^f = -\phi^f p \mathbf{I} \quad (3.35)$$

$$(\boldsymbol{\pi}^s - p \nabla \phi^s) \cdot (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) \geq 0 \quad (3.36)$$

As Equações 3.33 e 3.34 mostram que a tensão de Cauchy atuante no esqueleto sólido $\boldsymbol{\sigma}^s$ é decomposta em duas contribuições. A parcela elástica, representada por $\boldsymbol{\sigma}_E^s$ é completamente determinada pelo campo de deformações, de forma análoga a sólidos hiperelásticos monofásicos. A segunda contribuição advém da pressão hidrostática p , sendo ponderada pela fração de volume ϕ^s , a qual é determinada por equilíbrio. Devido à hipótese de fluido inviscido, o campo de tensões do fluido terá contribuição apenas da pressão hidrostática, conforme mostra a Equação 3.35. A parcela dissipativa é dada pela Equação 3.36, a qual deverá ser positiva de forma a cumprir a 2ª lei da termodinâmica.

Ao se buscar soluções numéricas, será mais conveniente expressar a tensão $\boldsymbol{\sigma}_E^s$ usando uma quantidade expressa na configuração de referência. Para isso se utiliza o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff \mathbf{S}_E^s , sendo obtido pela operação de *push-back* de $\boldsymbol{\sigma}_E^s$ [Holzapfel, 2002]:

$$\mathbf{S}_E^s = J^s \mathbf{F}^{s-1} \boldsymbol{\sigma}_E^s \mathbf{F}^{s-T} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{S}_E^s = 2 \frac{\partial \Psi^s}{\partial \mathbf{C}^s} \quad (3.38)$$

Assumindo que a troca de *momentum* entre as fases seja proporcional a velocidade relativa entre as mesmas, e buscando um formato similar a clássica lei de Darcy de consolidação de solos, a seguinte equação constitutiva é assumida:

$$\boldsymbol{\pi}^s = p \nabla \phi^s + \boldsymbol{\zeta} (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) \quad (3.39)$$

onde $\boldsymbol{\zeta}$ é um tensor de 2ª ordem positivo definido, chamado de tensor de arrasto difusivo, o qual representa a resistência ao escoamento de fluido na matriz sólida. O uso da relação representada na Equação 3.39 automaticamente satisfaz a 2ª lei da termodinâmica, dada pela Equação 3.36.

Introduzindo as Equações 3.35 e 3.39 na equação de conservação de *momentum* da fase fluída, Equação 3.27, resulta na lei de Darcy:

$$\boldsymbol{\kappa} \nabla p = -\phi^f (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) \quad (3.40)$$

onde $\boldsymbol{\kappa} = \phi^{f^2} \boldsymbol{\zeta}^{-1}$ é o tensor de permeabilidade, o qual relaciona o gradiente de pressão necessário para causar um certo fluxo de fluido.

A função de energia livre Ψ^s é, em geral expressa através dos invariantes do tensor deformação \mathbf{C}^s . Neste trabalho, é usado a função de energia proposta por Holmes e Mow, 1990, e expressa abaixo:

$$\Psi^s = \alpha_o \frac{\exp(\alpha_1(I_1 - 3) + \alpha_2(I_2 - 3))}{I_3^n} \quad (3.41)$$

onde α_0, α_1 e α_2 são parâmetros de material, e para que a configuração indeformada seja livre de tensões, $n = \alpha_1 + 2\alpha_2$. Para os casos em que o material é modelado como transversalmente isotrópico, a parcela adicional anisotrópica da função de energia será dada por [Holzapfel et al., 2000]:

$$\Psi_{ani}^s = \frac{k_1}{2k_2} \left[\exp(k_2(I_4^s - 1)^2) - 1 \right] \quad (3.42)$$

onde k_1 e k_2 são parâmetros do material, e I_4^s é o pseudo invariante definido como:

$$I_4^s = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C}^s \mathbf{a}_0 \quad (3.43)$$

com \mathbf{a}_0 sendo o vetor unitário que denota a direção principal do material na configuração de referência. Sob o regime de grandes deformações, a permeabilidade se torna dependente da deformação. Assumindo que essa dependência seja devido apenas a deformação volumétrica aparente da matriz sólida, se utiliza o modelo isotrópico de permeabilidade criado por Holmes e Mow, 1990:

$$\boldsymbol{\kappa} = \kappa_0 \left(\frac{\phi_0^s \phi^f}{(1 - \phi_0^s) \phi^s} \right)^L \exp \left(\frac{M(I_3 - 1)}{2} \mathbf{I} \right) \quad (3.44)$$

onde L e M são propriedades do material, e κ_0 é o valor de permeabilidade para o corpo indeformado. Se nota que Equação 3.44 tem um comportamento assintótico, o que indica que a permeabilidade do material será nula uma vez que todos os poros tenham sido fechados:

$$\lim_{J^s \rightarrow \phi_0^s} \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0} \quad (3.45)$$

O limite exposto pela Equação 3.45 representa o ponto de consolidação, no qual os poros do material estão totalmente fechados, e de acordo com Equação 3.24, $\phi^s = 1$.

3.5.1 Sumário

Os resultados obtidos nesta seção, assim como uma contagem do número de equações e incógnitas é apresentado nas Tabelas 3.1 e 3.2, onde se nota que o número de equações é igual ao número de incógnitas, características de um problema bem-posto. Com a adição das corretas condições de contorno e condições iniciais (a serem obtidas na próxima seção), o problema está pronto para ser tratado e resolvido numericamente através do método de elementos finitos.

Tabela 3.1 – Sumário das equações governantes do problema bifásico.

Descrição	Equação	Nº
Conservação <i>momentum</i> fase sólida	$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_E^s - \phi^s \nabla p - \phi^{f^2} \boldsymbol{\kappa}^{-1}(\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^f) = 0$	3
Conservação <i>momentum</i> fase fluida	$\boldsymbol{\kappa} \nabla p + \phi^f (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) = 0$	3
Conservação de massa	$\nabla \cdot (\phi^s \mathbf{v}^s + \phi^f \mathbf{v}^f) = 0$	1
Relação constitutiva tensão sólida elástica	$\boldsymbol{\sigma}_E^s = 2\mathbf{F}^s \frac{\partial \Psi^s(\mathbf{C}^s)}{\partial \mathbf{C}^s} \mathbf{F}^{sT}$	6
Soma número de equações		13

Tabela 3.2 – Incógnitas primárias do problema bifásico

Descrição	Incógnitas	Nº
Velocidade sólida	$\mathbf{v}^s(\mathbf{u}^s)$	3
Velocidade fluido	\mathbf{v}^f	3
Tensão sólida elástica	$\boldsymbol{\sigma}_E^s$	6
Pressão hidrostática	p	1
Soma número de incógnitas		13

4 FORMULAÇÕES POR ELEMENTOS FINITOS

Nesta seção serão apresentadas duas formulações de elementos finitos capazes de resolver as equações da teoria bifásica discutidas na seção anterior. Primeiramente será apresentado uma formulação baseada em penalidade, na qual a equação de conservação de massa é resolvida de forma aproximada, com a introdução de um fator de penalização β . Também será apresentada uma formulação baseada em elementos mistos, na qual a velocidade sólida e pressão são as variáveis primárias do problema, com a eliminação da velocidade do fluido, e devido a isso essa formulação recebe o nome de formulação $v-p$.

A forma fraca é obtida para ambas as formulações usando o método dos resíduos ponderados. Um processo de discretização espacial usando elementos finitos é efetuado, seguido por uma discretização temporal através de um método trapezoidal de diferenças finitas [Hughes, 2000]. Isso resulta em um sistema de equações não linear, o qual será resolvido iterativamente por Newton-Raphson, através de uma linearização parcial, no qual apenas o termo não linear devido a deformação do esqueleto sólido é linearizado. Para ambas as formulações as integrais são realizadas sobre a configuração de referência, caracterizando uma abordagem Lagrangeana total [Bathe, 2007]. Mais informações sobre as formulações de penalidade e $v-p$ podem ser encontradas em Almeida e Spilker, 1997.

4.1 Formulação por Penalidade

4.1.1 Forma Fraca

Nesta formulação a equação de conservação de massa é substituída por uma forma penalizada da mesma [Suh et al., 1991]:

$$\nabla \cdot (\phi^s \mathbf{v}^s + \phi^f \mathbf{v}^f) + \frac{p}{\beta} = 0 \quad (4.1)$$

onde β é um fator de penalização, o qual deve ser grande o suficiente de forma a cumprir a equação de conservação de massa de forma aproximada. Usando o método de resíduos ponderados, multiplicam-se as equações de conservação de *momentum* da fase sólida e fluida, Equações 3.26 e 3.27, pelas funções peso \mathbf{w}^s e \mathbf{w}^f , respectivamente, e a Equação 4.1 por uma função peso q , e integra-se as mesmas no domínio Ω . As funções peso \mathbf{w}^s e \mathbf{w}^f devem ser C^0 contínuas em Ω e cumprir a forma homogênea das condições de contorno

essenciais. O único requisito imposto na função peso q é que a mesma seja quadrado integrável em Ω ($q \in L^2(\Omega)$).

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\mathbf{w}^s \cdot \left(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_E^s - \phi^s \nabla p - \phi^{f^2} \boldsymbol{\kappa}^{-1}(\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^f) \right) \right] d\Omega + \\ & \int_{\Omega} \left[\mathbf{w}^f \cdot \left(-\phi^f \nabla p + \phi^{f^2} \boldsymbol{\kappa}^{-1}(\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^f) \right) + q \left(\nabla \cdot (\phi^s \mathbf{v}^s + \phi^f \mathbf{v}^f) + \frac{p}{\beta} \right) \right] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para passar Equação 4.2 para a forma fraca, é usado integração por partes e o teorema da divergência, de forma a obter:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\text{tr}(\nabla \mathbf{w}^{sT} \boldsymbol{\sigma}_E^s) - p \nabla \cdot (\phi^s \mathbf{w}^s + \phi^f \mathbf{w}^f) + \phi^{f^2} \boldsymbol{\kappa}^{-1}(\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^f) \cdot (\mathbf{w}^s - \mathbf{w}^f) \right] d\Omega + \\ & \int_{\Omega} \left[-q \left(\nabla \cdot (\phi^s \mathbf{w}^s + \phi^f \mathbf{w}^f) \right) + \frac{p}{\beta} \right] d\Omega = \int_{\Gamma_t^s} \mathbf{w}^s \cdot \bar{\mathbf{t}}^s d\Gamma - \int_{\Gamma_t^f} \mathbf{w}^f \bar{p} \phi^f \cdot \mathbf{n} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal a Γ , $\bar{\mathbf{t}}^s$ é o valor prescrito de tração agindo na matriz sólida e \bar{p} é o valor prescrito de pressão, e ambas correspondem as condições de contorno naturais do problema. A força de superfície $\bar{\mathbf{t}}^s$ é obtida pela seguinte expressão:

$$\bar{\mathbf{t}}^s = (\boldsymbol{\sigma}_E^s - \phi^s p \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} \quad (4.4)$$

As condições de contorno essenciais são dadas por:

$$\mathbf{u}^s(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}^s, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u^s \quad (4.5)$$

$$\mathbf{v}^f(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{v}}^f, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u^f \quad (4.6)$$

onde $\bar{\mathbf{u}}^s$ é o valor prescrito de deslocamento sólido na porção do contorno Γ_u^s e $\bar{\mathbf{v}}^f$ é a velocidade líquida prescrita na porção do contorno Γ_u^f . É importante salientar que cada ponto de Γ deve possuir uma condição de contorno associada a fase sólida e líquida, conforme pode ser observado na Figura 4.1 e Equação 4.7.

$$\Gamma_t^s \cup \Gamma_u^s = \Gamma_t^f \cup \Gamma_u^f = \Gamma \quad (4.7)$$

A condição inicial corresponde a prescrição do campo de deslocamento no instante $t = 0$, o qual deverá ser compatível com as condições de contorno essenciais do problema:

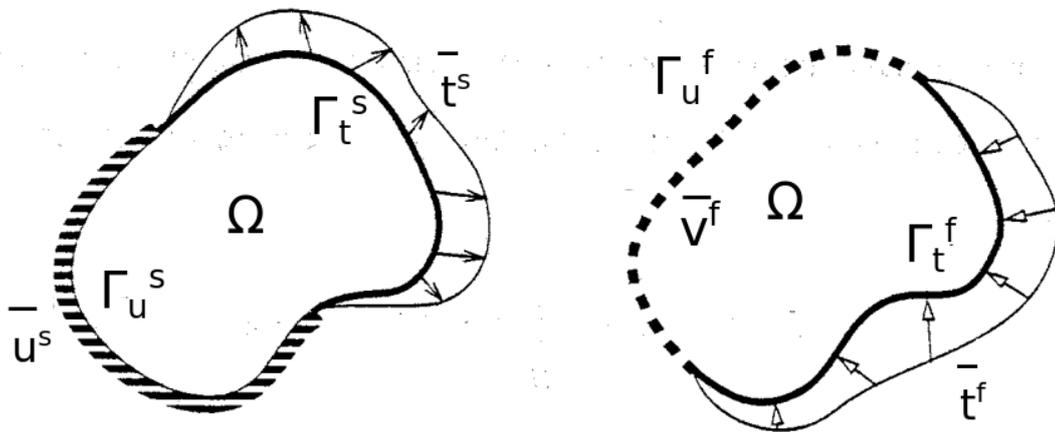


Figura 4.1 – Condições de contorno atuantes na formulação de penalidade.

$$\mathbf{u}^s(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_o(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega_0 \quad (4.8)$$

Neste trabalho sempre será considerado uma condição inicial homogênea ($\mathbf{u}_0 = 0$). A Equação 4.3 envolve integrais avaliadas sobre a configuração atual desconhecida. Seguindo a abordagem Lagrangeana total, a forma fraca é reescrita na configuração de referência utilizando relações clássicas da mecânica do meio contínuo [Holzapfel, 2002]:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0^s} \left[\text{tr} \left(\nabla_x \mathbf{w}^s \mathbf{w}^{sT} \mathbf{F}^s \mathbf{S}_E^s \right) + J^s \phi^{f2} \boldsymbol{\kappa}^{-1} (\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^f) \cdot (\mathbf{w}^s - \mathbf{w}^f) \right. \\ & \left. - \nabla \cdot \left(\phi^f \mathbf{w}^f + \phi^s \mathbf{w}^s \right) p J^s - q \left(\nabla \cdot \left(\phi^f \mathbf{v}^f + \phi^s \mathbf{v}^s \right) + \frac{p}{\beta} \right) J^s \right] d\Omega_0 = \\ & \int_{\Gamma_{t_0}^s} \mathbf{w}^s \cdot \bar{\mathbf{t}}^s J_\Gamma^s d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_{t_0}^f} \mathbf{w}^f \cdot \phi^f \bar{\mathbf{p}} \mathbf{N} \mathbf{F}^{s-1} J^s d\Gamma_0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde \mathbf{N} é o vetor normal a Γ_0 , e J_Γ^s é uma razão de elementos de área infinitesimais definida por:

$$J_\Gamma^s = \frac{d\Gamma}{d\Gamma_0} = J^s \sqrt{\mathbf{N} \mathbf{C}^{s-1} \mathbf{N}} \quad (4.10)$$

A Equação 4.9 corresponde a forma fraca Lagrangeana do problema bifásico para a formulação por penalidade, na qual será utilizado o método de elementos finitos para solução.

4.1.2 Discretização por Elementos Finitos

De forma a obter um sistema de equações algébricas que possibilite a solução do problema, discretiza-se o domínio Ω_0^s em n_e elementos, e interpolam-se as funções peso e variáveis primárias presentes na Equação 4.9 em função de seus valores nodais. Neste trabalho se usa o método de elementos finitos de Galerkin, no qual as funções peso são interpoladas com as mesmas funções que as variáveis do problema. As quantidades associadas a um elemento são denotadas com o subscrito $(\cdot)_h$.

$$\mathbf{u}_h^s = N^{sa} \mathbf{u}^{sa}, \quad a = 1 : n_v \quad (4.11)$$

$$\mathbf{v}_h^s = N^{sa} \mathbf{v}^{sa}, \quad a = 1 : n_v \quad (4.12)$$

$$\mathbf{v}_h^f = N^{fa} \mathbf{v}^{fa}, \quad a = 1 : n_v \quad (4.13)$$

$$\mathbf{w}_h^s = N^{sa} \mathbf{w}^{sa}, \quad a = 1 : n_v \quad (4.14)$$

$$\mathbf{w}_h^f = N^{fa} \mathbf{w}^{fa}, \quad a = 1 : n_v \quad (4.15)$$

$$p_h = N_p^c p^c, \quad c = 1 : n_p \quad (4.16)$$

$$q_h = N_p^c q^c, \quad c = 1 : n_p \quad (4.17)$$

onde n_v é o número de nós cinemáticos (velocidade e deslocamento) do elemento, e n_p é o número de nós de pressão. Vale salientar que embora \mathbf{u}^s e \mathbf{v}^s estejam ambos sendo discretizados, eles não variáveis independentes, já que eles estão relacionados por meio da derivada temporal $\mathbf{v}^s = \dot{\mathbf{u}}^s$. Por questão de conveniência será usada as mesmas funções de interpolação para a fase sólida e fluida ($N^f = N^s = N$). As funções de interpolação cinemáticas devem ser C^0 , enquanto a interpolação da pressão N_p pode ser apenas C^{-1} , já que a mesma não apresenta derivadas ou condições de contorno essenciais na forma fraca. A interpolação da pressão não pode ser escolhida de forma arbitrária devido a problemas de *locking* pela condição de incompressibilidade. Tipicamente é necessário o uso de um polinômio de ordem menor que o usado para a interpolação dos campos de velocidade [Almeida e Spilker, 1997]. A geometria utiliza as mesmas funções de interpolação usadas nas velocidades e no deslocamento.

Usando as Equações 4.11 a 4.17 dentro da forma fraca, se obtêm:

$$\begin{aligned}
& \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_{0e}^s} \left[\text{tr} \left(\nabla_x \mathbf{w}^{sT} \mathbf{F}^s \mathbf{S}_E^s \right) - \mathbf{w}^{sa} N^a N^b J^s \phi^{f^2} \boldsymbol{\kappa}^{-1} (\mathbf{v}^{sb} - \mathbf{v}^{fb}) - \right. \\
& \mathbf{w}^{fa} N^a N^b J^s \phi^{f^2} \boldsymbol{\kappa}^{-1} (\mathbf{v}^{sb} - \mathbf{v}^{fb}) - N_p^c p^c J^s \nabla \cdot (\mathbf{w}^{sa} \phi^s N^a) - \\
& \left. N_p^c p^c J^s \nabla \cdot (\mathbf{w}^{fa} \phi^s N^a) - q^d N_p^d J^s \nabla \cdot \left(\phi^s N^a \mathbf{v}^{sa} + \phi^f N^a \mathbf{v}^{fa} + \frac{N_p^c p^c}{\beta} \right) \right] d\Omega_0 = \\
& \sum_{e=1}^{n_e} \left[\mathbf{w}^{sa} \int_{\Gamma_{t_0}^{se}} N^a \bar{\mathbf{t}}^s J_\Gamma^s d\Gamma_0 - \mathbf{w}^{fa} \int_{\Gamma_{t_0}^{fe}} N^a (\mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^{s-1}) \bar{p} \phi^f J^s d\Gamma_0 \right]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

onde a repetição de índices indica somatória, e $a, b = 1 : n_v$ e $c, d = 1 : n_p$. Coletando os termos a Equação 4.18 pode ser reescrita em um formato matricial:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{eT} & \mathbf{q}^{eT} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_2^e & -\mathbf{A}_{mp}^{eT} \\ -\mathbf{A}_{mp}^e & -\frac{\mathbf{H}_{mp}^e}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}^e \\ \mathbf{p}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}^{se} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) = \sum_{e=1}^{n_e} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{eT} & \mathbf{q}^{eT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{te} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

As submatrizes apresentadas na Equação 4.19 são abertas nas expressões abaixo:

$$[\mathbf{v}^e] = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{se} & \mathbf{v}^{fe} \end{bmatrix}^T \tag{4.20}$$

$$[\mathbf{w}^e] = \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{se} & \mathbf{w}^{fe} \end{bmatrix}^T \tag{4.21}$$

$$[\mathbf{A}_{mp}^e] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{se} & \mathbf{A}^{fe} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

$$[\mathbf{Y}_2^e]^{ab} = \int_{\Omega_{0e}^s} N^a \phi^{f^2} \boldsymbol{\kappa} N^b J^s d\Omega_0 \tag{4.23}$$

$$[\mathbf{H}_{mp}^e]^{cd} = \int_{\Omega_{0e}^s} N_p^c N_p^d J^s d\Omega_0 \tag{4.24}$$

$$[\mathbf{A}^{\alpha e}]^{cb} [\mathbf{v}^\alpha]^b = \int_{\Omega_{0e}^s} N_p^c \nabla \cdot (\phi^\alpha N^b \mathbf{v}^{\alpha b}) J^s d\Omega_0 \tag{4.25}$$

$$[\mathbf{f}^{te}] = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{se} \\ \mathbf{f}^{fe} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_{t_0}^{se}} N^a \bar{\mathbf{t}}^s J_\Gamma^s d\Gamma_0 \\ - \int_{\Gamma_{t_0}^{fe}} N^a (\mathbf{n}_o \cdot \mathbf{F}^{-1}) \bar{p} \phi^f J^s d\Gamma_0 \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

$$\mathbf{w}^{seT} \mathbf{g}^{se} = \int_{\Omega_{0e}^s} (\text{tr} \nabla_x \mathbf{w}^{sT} \mathbf{F}^s \mathbf{S}_E^s) d\Omega_0 \tag{4.27}$$

Como a interpolação da pressão não necessita ser contínua, um processo de condensação estática pode ser aplicado ao nível de elemento de forma a remover a pressão como incógnita. Isolando \mathbf{p}^e na Equação 4.19:

$$\mathbf{p}^e = -\beta(\mathbf{H}_{mp}^e \mathbf{A}_{mp}^e \mathbf{v}^e) \quad (4.28)$$

Substituindo a expressão para \mathbf{p}^e dentro da Equação 4.19, obtêm-se:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{w}^{eT} [(\beta \mathbf{Y}_1^e + \mathbf{Y}_2^e) \mathbf{v}^e + \mathbf{g}^e] = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{w}^{eT} [\mathbf{f}^{te}] \quad (4.29)$$

onde:

$$\mathbf{Y}_1^e = \mathbf{A}_{mp}^{eT} \mathbf{H}_{mp}^{e-1} \mathbf{A}^e \quad (4.30)$$

$$\mathbf{g}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^{se} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \quad (4.31)$$

Após o processo de superposição, assumindo valores arbitrários para os coeficientes das funções peso, chega-se no sistema de equações não linear, a ser resolvido a cada instante de tempo:

$$\mathbf{Y} \mathbf{v} + \mathbf{g}(\mathbf{u}^s) = \mathbf{f} \quad (4.32)$$

onde:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_2 + \beta \mathbf{Y}_1 \quad (4.33)$$

Convém destacar que para esta formulação, a pressão hidrostática será encontrada no pós-processamento, de acordo com Equação 4.28. Mesmo que a pressão não apareça como uma variável do sistema de equações final, as funções de interpolação N_p escolhidas irão entrar no cálculo das submatrizes \mathbf{A}_{mp}^e e \mathbf{H}_{mp}^e .

4.2 Formulação v - p

4.2.1 Forma Fraca

Nesta formulação, as equações governantes devem ser manipuladas de forma a eliminar a velocidade do fluido \mathbf{v}^f como variável primária. Com o uso da condição de saturação, Equação 3.17, pode-se reescrever a equação de conservação de massa, Equação 3.21, obtendo:

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}^s + \phi^f(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s)) = 0 \quad (4.34)$$

Utilizando Equações 3.40 e 4.34 junto da Equação 3.26, se obtêm o novo conjunto de equações governantes, efetivamente eliminando \mathbf{v}^f .

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_E^s - p\mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad (4.35)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}^s - \kappa \nabla p) = \mathbf{0} \quad (4.36)$$

A Equação 4.35 representa a conservação de *momentum* linear total da mistura, e a Equação 4.36 corresponde a equação de conservação de massa sob a hipótese implícita de que o fluxo de fluido obedece à lei de Darcy, Equação 3.40. Procedendo de forma similar a Seção 4.1.1, se multiplica as equações governantes do problema, nesse caso Equações 4.35 e 4.36, pelas funções peso \mathbf{w}^s e q respectivamente, e integra-se o resultado no domínio Ω . Para esta formulação, ambas as funções peso \mathbf{w}^s e q deverão ser C^0 contínuas em Ω , e cumprir a forma homogênea das condições de contorno essenciais.

$$\int_{\Omega} \left[\mathbf{w}^s \cdot (\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_E^s - p\mathbf{I})) + q(\nabla \cdot (\mathbf{v}^s - \kappa \nabla p)) \right] d\Omega = 0 \quad (4.37)$$

Usando integração por partes e o teorema da divergência, a equação Equação 4.37 é passada para a forma fraca.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\text{tr} \left(\nabla \mathbf{w}^{sT} \boldsymbol{\sigma}_E^s \right) - q \nabla \cdot \mathbf{v}^s - p \nabla \cdot \mathbf{w}^s - \kappa \nabla p \cdot \nabla q \right] d\Omega = \\ \int_{\Gamma_t^s} \mathbf{w}^s \cdot \bar{\mathbf{t}}^s d\Gamma + \int_{\Gamma_t^f} q \bar{Q} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.38)$$

Sendo que a expressão para as condições de contorno naturais $\bar{\mathbf{t}}^s$ e \bar{Q} mostradas na Figura 4.2 e dadas por:

$$\bar{\mathbf{t}}^s = (\boldsymbol{\sigma}_E^s - p\mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} \quad (4.39)$$

$$\bar{Q} = -\kappa \nabla p \cdot \mathbf{n} \quad (4.40)$$

Fisicamente, $\bar{\mathbf{t}}^s$ representa o valor prescrito de tração agindo na mistura, e \bar{Q} representa o fluxo de fluido prescrito. É importante salientar que a definição de $\bar{\mathbf{t}}^s$ para

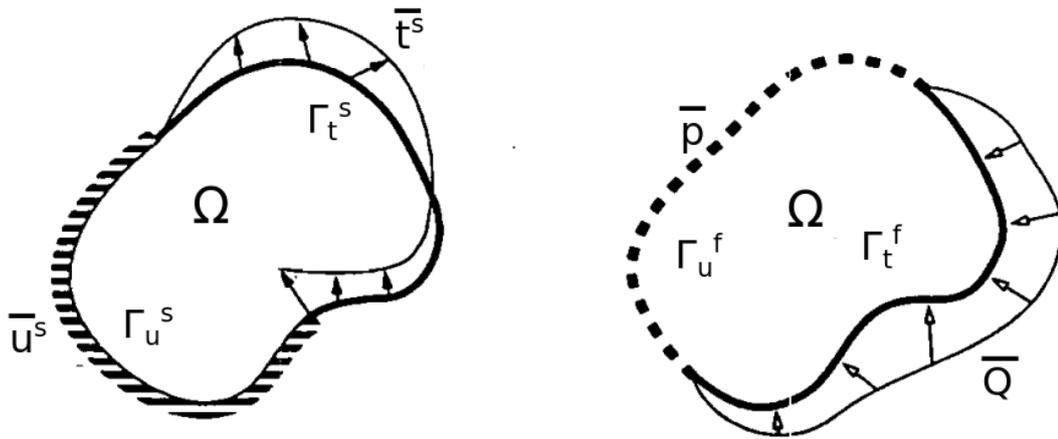


Figura 4.2 – Condições de contorno atuantes na formulação $v-p$.

a formulação por penalidade apresenta diferenças em relação a da formulação $v-p$. Na formulação por penalidade, conforme Equação 4.4, $\bar{\mathbf{t}}^s$ fornece o valor de tração prescrita agindo apenas na matriz sólida, enquanto a Equação 4.39 corresponde a tração prescrita agindo na mistura, na sua totalidade (e não apenas na matriz sólida).

As condições de contorno essenciais para esta formulação são dadas por:

$$\mathbf{u}^s(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}^s, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u^s \quad (4.41)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = \bar{p}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u^f \quad (4.42)$$

Passando a Equação 4.38 para configuração de referência, se obtém:

$$\int_{\Omega_0^s} \left[\text{tr} \left(\nabla_x \mathbf{w}^{sT} \mathbf{F}^s \mathbf{S}_E^s \right) - \left(q \nabla \cdot \mathbf{v}^s + p \nabla \cdot \mathbf{w}^s + \kappa \nabla p \cdot \nabla q \right) J^s \right] d\Omega_0 + \int_{\Gamma_{t_0}^s} \mathbf{w}^s \cdot \bar{\mathbf{t}}^s J_\Gamma^s d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_{t_0}^f} q \bar{Q} J_\Gamma^s d\Gamma_0 \quad (4.43)$$

A Equação 4.43 corresponde a forma fraca Lagrangeana do problema bifásico para a formulação $v-p$, na qual será utilizado o método de elementos finitos para solução.

4.2.2 Discretização por Elementos Finitos

De maneira similar ao realizado para a formulação de penalidade na Seção 4.1.2, o domínio Ω_0^s é discretizando em n_e elementos, e as funções peso e variáveis primária da Equação 4.43 são interpoladas.

$$\mathbf{u}_h^s = N^{sa} \mathbf{u}^{sa}, \quad a = 1 : n_v \quad (4.44)$$

$$\mathbf{v}_h^s = N^{sa} \mathbf{v}^{sa}, \quad a = 1 : n_v \quad (4.45)$$

$$\mathbf{w}_h^s = N^{sa} \mathbf{w}^{sa}, \quad a = 1 : n_v \quad (4.46)$$

$$p_h = N_p^c p^c, \quad c = 1 : n_p \quad (4.47)$$

$$q_h = N_p^c q^c, \quad c = 1 : n_p \quad (4.48)$$

Nesta formulação, a forma fraca envolve derivadas e condições de contorno essenciais na variável p . Devido a isso, as funções de interpolação de pressão N_p deverão ser C^0 , assim como as de interpolação das variáveis cinemáticas. As considerações feitas sobre *locking* continuam a ser válidas, e a interpolação da pressão, em geral, deverá ser de ordem menor que a da velocidade e deslocamento. Assim como na formulação por penalidade, a geometria é interpolada usando com as mesmas funções utilizadas para a velocidade e deslocamento. Usando as Equações 4.44 a 4.48 dentro da forma fraca, Equação 4.43:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_{0e}^s} \left[\text{tr} \left(\nabla_x \mathbf{w}^{sT} \mathbf{F}^s \mathbf{S}_E^s \right) - \nabla \cdot (N^a \mathbf{w}^{sa}) N_p^d p^d J^s - \right. \\ & \left. q^c \left(\nabla N_p^c \cdot \boldsymbol{\kappa} \nabla N_p^d p^d + N_p^c \nabla \cdot (N^b \mathbf{v}^{sb}) \right) J^s \right] d\Omega_0 = \\ & \sum_{e=1}^{n_e} \left[\mathbf{w}^{sa} \cdot \int_{\Gamma_{t_0}^{se}} N^a \bar{\mathbf{t}}^s J_\Gamma^s d\Gamma_0 + q^c \int_{\Gamma_{t_0}^{fe}} N_p^c \bar{Q} J_\Gamma^s d\Gamma_0 \right] \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde a repetição de índices indica somatória, e $a, b = 1 : n_v$ e $c, d = 1 : n_p$. Coletando os termos a Equação 4.18 pode ser reescrita em um formato matricial:

$$\sum_{e=1}^{n_{et}} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{seT} & \mathbf{q}^{eT} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{A}_{vp}^{eT} \\ -\mathbf{A}_{vp}^e & -\mathbf{H}_{vp}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{se} \\ \mathbf{p}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}^{se} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) = \sum_{e=1}^{n_{et}} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{eT} & \mathbf{q}^{eT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{te} \\ \mathbf{Q}^e \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

onde \mathbf{g}^{se} corresponde a contribuição elástica não linear da fase sólida, conforme Equação 4.27. As submatrizes restantes apresentadas na Equação 4.50 são mostradas nas

expressões abaixo:

$$[\mathbf{A}_{vp}^e]^{ca} [\mathbf{v}^{se}]^a = \int_{\Omega_{0e}^s} N_p^c \nabla \cdot (N^a \mathbf{v}^{sa}) J^s d\Omega_0 \quad (4.51)$$

$$[\mathbf{H}_{vp}^e]^{cd} = \int_{\Omega_{0e}^s} \nabla N_p^c \boldsymbol{\kappa} \nabla N_p^d J^s d\Omega_0 \quad (4.52)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}^{te^a} \\ \mathbf{Q}^{e^a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_{t0}^{se}} N^a \bar{t} J_{\Gamma_0}^s d\Gamma_0 \\ \int_{\Gamma_{t0}^{fe}} N_p^c \bar{Q} J_{\Gamma_0}^s d\Gamma_0 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Agrupando as submatrizes, chega-se na seguinte forma compacta:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{w}^{eT} [\mathbf{Y}_{vp}^e + \mathbf{g}^e] = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{w}^{eT} [\mathbf{f}^e] \quad (4.54)$$

onde:

$$\mathbf{v}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{se} \\ \mathbf{p}^e \end{bmatrix} \quad \mathbf{w}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{se} \\ \mathbf{q}^e \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

$$\mathbf{g}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^{se} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{te} \\ \mathbf{Q}^e \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$\mathbf{Y}_{vp}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{A}_{vp}^{eT} \\ -\mathbf{A}_{vp}^e & -\mathbf{H}_{vp}^e \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Após o processo de superposição, assumindo valores arbitrários para os coeficientes das funções peso, chega-se em um sistema de equações não linear análogo a Equação 4.32, que deve ser resolvido a cada instantes de tempo:

$$\mathbf{Y} \mathbf{v} + \mathbf{g}(\mathbf{u}^s) = \mathbf{f} \quad (4.58)$$

Deve-se lembrar que nesta formulação, o vetor de incógnitas \mathbf{v} contém os valores de pressão nodais, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^s & \mathbf{p} \end{bmatrix}^T$. O valor de velocidade nodal do fluido será encontrado por pós-processamento, de acordo com:

$$\mathbf{v}^f = -\frac{\boldsymbol{\kappa} \nabla p}{\phi^f} + \mathbf{v}^s \quad (4.59)$$

4.3 Linearização Parcial

Na resolução do problema bifásico, a forma fraca correspondente as formulações de penalidade e v - p apresentam várias não linearidades. Para ambas as formulações, a discretização por elementos finitos resulta em um sistema de equações diferenciais não lineares de 1º ordem no tempo:

$$\mathbf{Y}\mathbf{v} + \mathbf{g}(\mathbf{u}^s) = \mathbf{f} \quad (4.60)$$

De forma a obter uma solução para a Equação 4.60 através de um processo iterativo de Newton-Raphson, uma operação de linearização da equação deve ser efetuada. Seguindo trabalhos anteriores na área [Almeida e Spilker, 1997; Suh et al., 1991; Suh e Spilker, 1994; Almeida e Spilker, 1998], se escolhe utilizar uma linearização parcial, em que apenas a parcela elástica da fase sólida $\mathbf{g}(\mathbf{u}^s)$, é linearizada. Embora uma linearização completa do problema seja possível, isso raramente é feito devido ao excessivo custo computacional implicado, sendo usual em aplicações bifásicas a linearização apenas da parcela elástica [Un e Spilker, 2006; Almeida, 1995]. No sistema de equações 4.60, a parcela elástica da fase sólida advém da seguinte integral:

$$G^s(\mathbf{u}^s) = \int_{\Omega_0^s} \text{tr} \left(\nabla_x \mathbf{w}^{sT} \mathbf{F}^s \mathbf{S}_E^s \right) d\Omega_0 \quad (4.61)$$

O processo de linearização da Equação 4.61 é baseado no conceito de derivada direcional na direção de um incremento de deslocamento $\Delta \mathbf{u}^s$. Aplicando a linearização conforme descrito em Bathe, 2007 resulta na seguinte expressão:

$$\mathcal{L}\{G^s(\mathbf{u}^s)\}[\Delta \mathbf{u}^s] = G^s + \delta G^s \quad (4.62)$$

$$\delta G^s = \int_{\Omega_0^s} \left[(\nabla_x \mathbf{w}^{sT} \mathbf{F}^s)^{sim} : \mathbb{C} : (\mathbf{F}^{sT} \nabla_x \Delta \mathbf{u}^s)^{sim} + \text{tr} \left(\nabla_x \mathbf{w}^{sT} \nabla_x \Delta \mathbf{u}^s \mathbf{S}_E^s \right) \right] d\Omega_0 \quad (4.63)$$

onde $(\cdot)^{sim}$ indica a parcela simétrica da quantidade, e \mathbb{C} é o tensor de 4º ordem, correspondente ao módulo tangente elástico, sendo obtido por:

$$\mathbb{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}_E^s}{\partial \mathbf{C}^s} = 4 \frac{\partial^2 \Psi^s}{\partial \mathbf{C}^s \partial \mathbf{C}^s} \quad (4.64)$$

Usando as funções de interpolação do deslocamento, definidas nas Equações 4.11 e 4.44, obtenho a forma discretizada da Equação 4.62:

$$\mathcal{L}\{G^s(\mathbf{u}^s)\}[\Delta\mathbf{u}^s] = \mathbf{w}^{sT} [\mathbf{g}^{se}(\mathbf{u}^s) + \mathbf{K}^{se} \Delta\mathbf{u}^s] \quad (4.65)$$

onde \mathbf{K}^{se} é a matriz de rigidez elástica do elemento, a qual é usualmente decomposta em duas parcelas:

$$\mathbf{K}^{se} = \mathbf{K}_L^{se} + \mathbf{K}_G^{se} \quad (4.66)$$

$$\mathbf{K}_L^{se} = \int_{\Omega_{0e}^s} \mathbf{B}_L^T \mathbb{C} \mathbf{B}_L d\Omega_0 \quad (4.67)$$

$$\mathbf{K}_G^{se} = \int_{\Omega_{0e}^s} \mathbf{B}_{NL}^T \tilde{\mathbf{S}}_E^s \mathbf{B}_{NL}^T d\Omega_0 \quad (4.68)$$

Na literatura de elementos finitos, a matriz \mathbf{K}_L é conhecida por matriz de rigidez linear, e a matriz \mathbf{K}_G como matriz de rigidez geométrica. O vetor \mathbf{g}^{se} corresponde ao resíduo das forças internas elásticas, sendo obtido por:

$$\mathbf{g}^{se} = \int_{\Omega_{0e}^s} \mathbf{B}_L^T \mathbf{S}_E^s d\Omega_0 \quad (4.69)$$

Usando o resultado da linearização, o sistema de equações a ser resolvido se torna:

$$\mathbf{Y} \mathbf{v} + \mathbf{g}(\mathbf{u}^s) + \mathbf{K} \Delta\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (4.70)$$

onde:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

$$\Delta\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u}^s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

4.4 Discretização Temporal

O sistema de equações apresentado pela Equação 4.60 é válido para todos os instantes de tempo. Para possibilitar a sua solução é necessário relacionar o deslocamento sólido \mathbf{u}^s , com a sua derivada temporal \mathbf{v}^s . Para isso será utilizado um esquema trapezoidal de discretização temporal, conforme Hughes, 2000. Particionando a dimensão temporal em valores discretos:

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n, \quad (t_{n+1}, t_n, \dots, t_0) \quad (4.73)$$

Portanto, no instante de tempo atual t_{n+1} , se procura os valores de incógnitas nodais que satisfaçam:

$$\mathbf{Y}_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{g}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} \quad (4.74)$$

onde o subíndice n indica o instante de tempo em que a quantidade é avaliada. Usando a linearização do termo elástico, conforme Seção 4.3:

$$(\mathbf{g}_{n+1}^s)^i = (\mathbf{g}_{n+1}^s)^{i-1} + (\mathbf{K}_{n+1}^s)^{i-1} \Delta \mathbf{u}^s \quad (4.75)$$

onde o super escrito i indica a iteração do processo de Newton-Raphson. Dessa forma a matriz tangente $(\mathbf{K}_{n+1}^s)^{i-1}$ será calculada usando o campo de deslocamento $(\mathbf{u}_{n+1}^s)^{i-1}$. Um esquema de solução temporal trapezoidal genérico admite a seguinte interpolação para o deslocamento entre os instantes t_{n+1} e t_n :

$$\mathbf{u}_{n+1}^s = \mathbf{u}_n^s + \Delta t \mathbf{v}_\omega^s \quad (4.76)$$

onde \mathbf{v}_ω^s são os componentes da velocidade no instante ω , contido no intervalo (t_{n+1}, t_n) . A velocidade \mathbf{v}_ω^s é obtida por uma interpolação linear entre \mathbf{v}_{n+1}^s e \mathbf{v}_n^s :

$$\mathbf{v}_\omega^s = (1 - \omega) \mathbf{v}_n^s + \omega \mathbf{v}_{n+1}^s, \quad \omega \in [0, 1] \quad (4.77)$$

Inserindo Equação 4.77 em Equação 4.76 e considerando o processo iterativo de solução para a obtenção da solução:

$$(\mathbf{u}_{n+1}^s)^i = \mathbf{u}_n^s + (1 - \omega) \Delta t \mathbf{v}_n^s + \omega \Delta t (\mathbf{v}_{n+1}^s)^i \quad (4.78)$$

Usando Equação 4.78 no sistema de equações a ser resolvido, e supondo que o vetor de carregamentos seja independente do campo de deslocamento, obtenho após algumas manipulações algébricas o seguinte sistema de equações:

$$[\mathbf{Y}_{n+1}^{i-1} + \omega \Delta t \mathbf{K}_{n+1}^{i-1}] (\Delta \mathbf{v}) = \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{Y}_{n+1}^{i-1} \mathbf{v}_{n+1}^{i-1} - \mathbf{g}_{n+1}^{i-1} \quad (4.79)$$

É importante salientar, que para a formulação por penalidade, e para a formulação

v - p , o vetor de incógnitas nodais $\Delta \mathbf{v}$ é dado respectivamente por:

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v}^s \\ \Delta \mathbf{v}^f \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v}^s \\ \Delta \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

Segundo Suh e Spilker, 1994, o método trapezoidal utilizado é incondicionalmente estável para $\omega \geq 0.5$. No trabalho aqui realizado, se utiliza $\omega = 0.5$ em todas as análises. A Equação 4.79 é resolvida iterativamente para cada incremento de tempo Δt até atingir a convergência. O processo de solução pode ser resumido de acordo com as seguintes etapas:

- Se $i = 1$: $\mathbf{v}_{n+1}^{i-1} = \mathbf{v}_n$ (4.82)

- Estimativa inicial: $\mathbf{v}_{n+1}^i = \mathbf{v}_{n+1}^{i-1}$ (4.83)

$$\mathbf{u}_{n+1}^{s^i} = \mathbf{u}_n^s + \Delta t \mathbf{v}_{n+1}^{s^{i-1}} \quad (4.84)$$

- Solução: $[\mathbf{Y}_{n+1}^{i-1} + w \Delta t \mathbf{K}_{n+1}^{i-1}](\Delta \mathbf{v}) = \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{Y}_{n+1}^{i-1} \mathbf{v}_{n+1}^{i-1} - \mathbf{g}_{n+1}^{i-1}$ (4.85)

- Correção: $\mathbf{v}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{v}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{v}$ (4.86)

$$\mathbf{u}_{n+1}^{s^{i+1}} = \mathbf{u}_{n+1}^{s^i} + \omega \Delta t \Delta \mathbf{v}^s \quad (4.87)$$

- Próxima iteração: $i = i + 1$ (4.88)

O processo iterativo continua até os critérios de convergência serem satisfeitos. Nesse trabalho, a convergência é atingida quando duas condições são cumpridas [Almeida e Spilker, 1998]:

$$\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{|\Delta \mathbf{v}^1|} \leq \text{TOL}_1 \quad (4.89)$$

$$|res| \leq \text{TOL}_2 \quad (4.90)$$

onde $|\cdot|$ corresponde a norma L_2 , $\Delta \mathbf{v}^1$ é a solução da primeira iteração, res é o resíduo da Equação 4.79 (lado direito da equação), e TOL_1 e TOL_2 são a tolerância para o primeiro e segundo critério de convergência, respectivamente. Neste trabalho, os valores de tolerância utilizados são:

$$\text{TOL}_1 = 1e - 4 \quad (4.91)$$

$$\text{TOL}_2 = 1e - 6 \quad (4.92)$$

5 METODOLOGIA E RESULTADOS

As duas formulações descritas foram implementadas em um código de Matlab, desenvolvido *in-house*. Após a implementação das formulações, primeiramente se investigou um teste de benchmark, de forma a verificar acurácia e custo computacional de ambas as formulações, e selecionar aquela julgada mais apropriada. Também se aproveitou o teste de benchmark para se conhecer algumas características da resposta fornecida por um modelo bifásico

Após o teste de benchmark, se realizou a investigação do modelo bifásico para casos típicos de tração e compressão, já que esses carregamentos são os usualmente utilizados na caracterização de tecidos biológicos. Para esta etapa se realizou a adição de anisotropia na descrição do comportamento mecânica do esqueleto sólido, adição esta normalmente feita em modelos fenomenológicos de tendões e ligamentos, e se utilizou apenas a formulação selecionada superior no benchmark.

5.1 Benchmark

Para o estudo de benchmark das formulações, foi escolhido o caso de compressão confinada, já que por se tratar de um problema unidimensional o mesmo pode ser resolvido por diferenças finitas (ver Almeida e Spilker, 1997 para detalhes), fornecendo um resultado de referência para comparação. Um diagrama representando um típico ensaio de compressão confinada é mostrado em Figura 5.1.

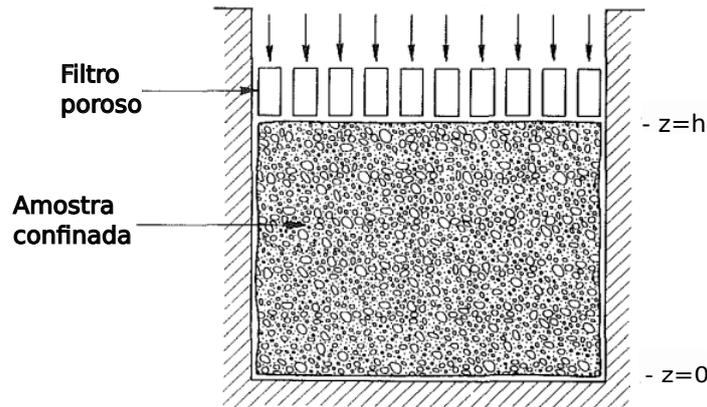


Figura 5.1 – Diagrama esquemático de um ensaio de compressão confinada. Adaptado de Holmes, 1986b

A geometria simulada corresponde a uma coluna de $2,5 \times 10^{-1}$ mm de diâmetro e 1 mm de altura. Foram analisados um caso de relaxação, com uma deformação imposta $\epsilon_o = -0.1$ em $t_o = 5,0 \times 10^1$ s, e um caso de fluência com carregamento $\sigma_o = 2,664 \times 10^{-1}$ MPa. Para o caso de relaxação e fluência o carregamento foi discretizado usando 721 intervalos de tempo para um tempo final de $1,20 \times 10^2$ s.

A função de energia livre de Helmholtz Ψ^s e a função de permeabilidade seguem a Equação 3.41 e Equação 3.44, respectivamente, e são mostradas novamente:

$$\kappa = \kappa_0 \left(\frac{\phi_0^s \phi^f}{(1 - \phi_0^s) \phi^s} \right)^L \exp \left(\frac{M(I_3 - 1)}{2} \right) \quad (5.1)$$

$$\Psi^s = \alpha_0 \frac{\exp(\alpha_1(I_1 - 3) + \alpha_2(I_2 - 3))}{I_3^n - \alpha_0} \quad (5.2)$$

Os parâmetros de material utilizados foram retirados de Almeida e Spilker, 1997 e são apresentados na Tabela 5.1:

Foi testado uma malha de 11 elementos retangulares axissimétricos espaçados de forma regular. Para elementos de ambas as formulações se utilizou uma interpolação quadrática nas variáveis cinemáticas (deslocamento e velocidade) e uma interpolação linear para a pressão.

Tabela 5.1 – Parâmetros de material

Parâmetro	Valor
α_o	0.1084 MPa
α_1	0.592
α_2	0.0846
κ_o	$2.519e-15 \frac{m^4}{Ns}$
L	0.0848
M	4.638
ϕ_o^s	0.2
n	0.7612

Nas Figuras 5.2 a 5.7 são mostrados os resultados obtidos por elementos finitos para o carregamento de relaxação e fluência, comparados com os resultados de referência, obtido por diferenças finitas em Almeida e Spilker, 1997. Os resultados são normalizados utilizando o módulo agregado $H_a = 3,3 \times 10^{-1}$ MPa e tempo de difusão $t_d = 1,200 \times 10^3$ s, quantidades que caracterizam a equação unidimensional que governa o problema (Holmes, 1986b). Na Tabela 5.2 é mostrado a norma Euclidiana de erro entre os resultados obtidos pelas formulações em elementos finitos e os resultados obtidos por diferenças finitas.

Pode-se notar que a formulação de penalidade apresentou uma norma de erro menor que a de elementos mistos, porém, como observado nas Figuras 5.2 a 5.7, os resultados apresentados são muito similares, com ambas apresentando bons resultados.

Nas Figuras 5.2 a 5.7 já é possível notar algumas características do comportamento mecânico do modelo bifásico. Por exemplo, durante toda a duração da aplicação do carregamento o mesmo é suportado principalmente pela pressão hidrostática, o que indica que a fase fluída é a principal responsável pela resistência a carga para esse caso. Isso é salientado ao separar a parcela da força de reação devido à fase sólida e fluída, conforme mostra a Figura 5.8, onde foi usado os resultados obtidos pela formulação de penalidade.

Analisando Figura 5.5 e Figura 5.7, se nota que após o fim da rampa de deslocamento, ocorre uma diminuição progressiva do alongamento da amostra, causado pela exsudação de fluido, a qual também leva a uma diminuição da pressão hidrostática interna, em direção ao equilíbrio. Isso condiz fisicamente com o que se espera que ocorra para um sólido permeável saturado de fluido.

O tempo médio de execução para cada formulação é mostrado na Tabela 5.3. O processador usado foi um *Intel Core i7* 4,00 GHz.

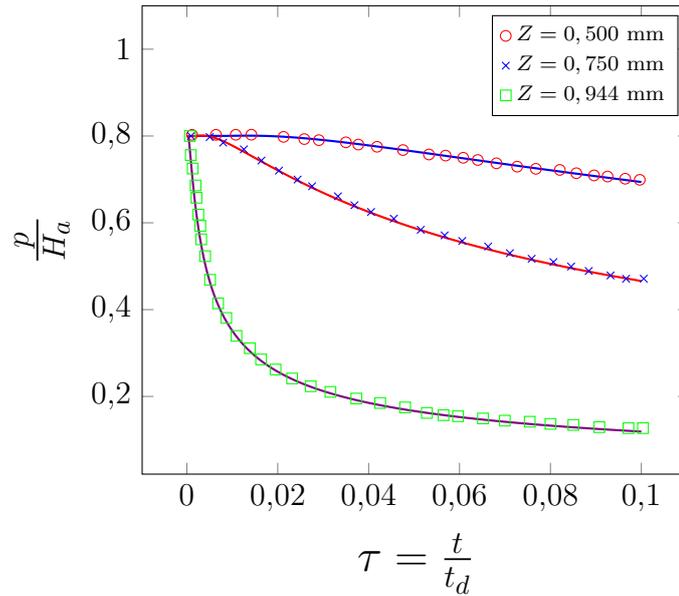


Figura 5.2 – Pressão normalizada ao longo do tempo para alturas de 0,5 mm, 0,75 mm e 0,944 mm para o carregamento de fluência. Marcadores indicam resultados por diferenças finitas e linhas contínuas indicam resultados obtidos por elementos finitos mistos e por penalidade, onde estas estão visualmente sobrepostas.

Se nota uma clara vantagem da formulação de elementos mistos em relação ao tempo de execução. Vale salientar que foi usado o mesmo critério de convergência para ambas as formulações, assim como a mesma malha de elementos finitos e quantidade de passos na discretização do carregamento. Devido a isso, nas análises posteriores serão usados apenas os elementos mistos *v-p*.

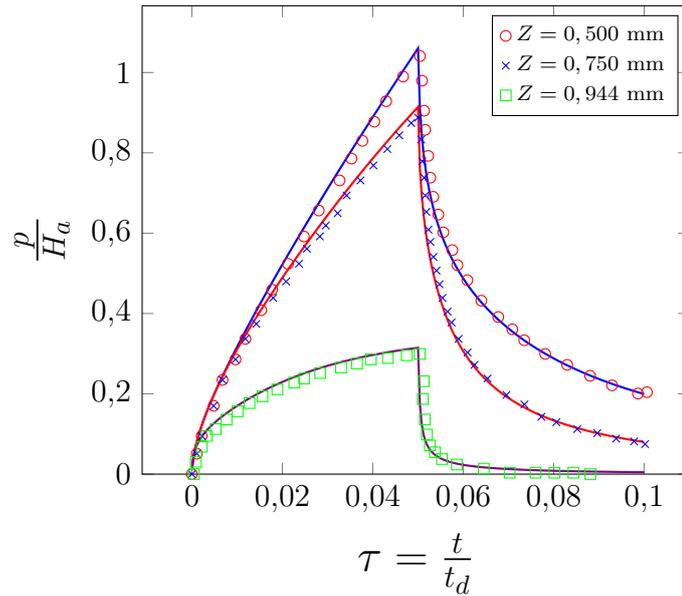


Figura 5.3 – Pressão normalizada ao longo do tempo para alturas de 0,5 mm, 0,75 mm e 0,944 mm para o carregamento de relaxação. Marcadores indicam resultados por diferenças finitas e linhas contínuas indicam resultados obtidos por elementos finitos mistos e por penalidade, onde estas estão visualmente sobrepostas.

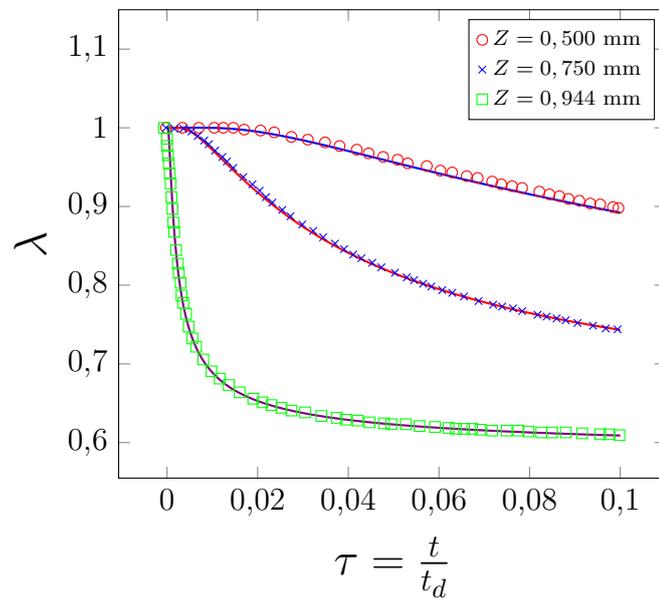


Figura 5.4 – Alongamento axial ao longo do tempo para alturas de 0,5 mm, 0,75 mm e 0,944 mm para o caso de fluência. Marcadores indicam resultados por diferenças finitas e linhas contínuas indicam resultados obtidos por elementos finitos mistos e por penalidade, onde estas estão visualmente sobrepostas.

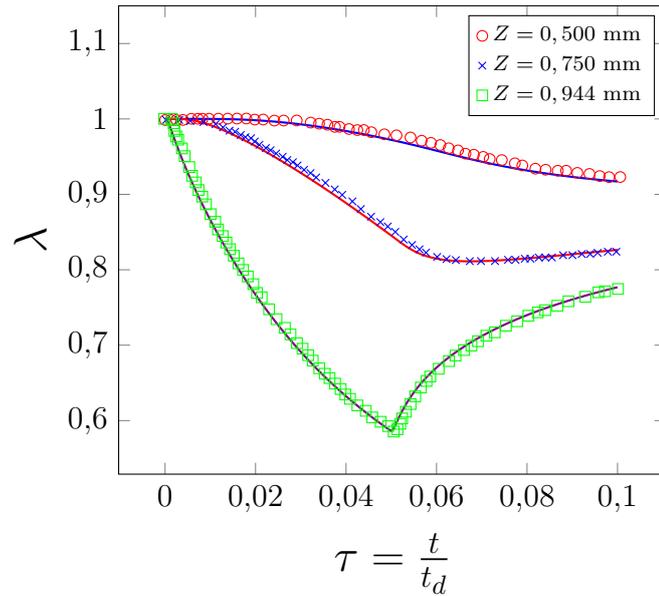


Figura 5.5 – Alongamento axial ao longo do tempo para alturas de 0,5 mm, 0,75 mm e 0,944 mm para o caso de relaxação. Marcadores indicam resultados por diferenças finitas e linhas contínuas indicam resultados obtidos por elementos finitos mistos e por penalidade, onde estas estão visualmente sobrepostas.

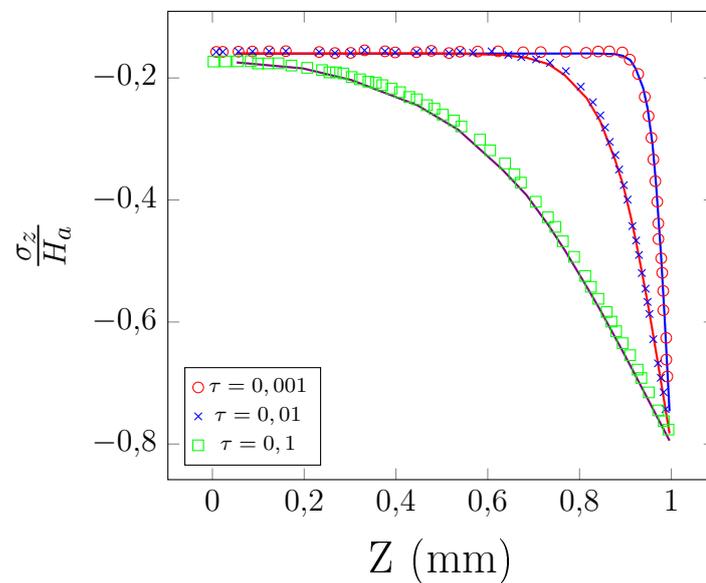


Figura 5.6 – Tensão axial normalizada ao longo da altura para $\tau = 0,1$, $\tau = 0,01$ e $\tau = 0,001$. Marcadores indicam resultados por diferenças finitas e linhas contínuas indicam resultados obtidos por elementos finitos mistos e por penalidade, onde estas estão visualmente sobrepostas.

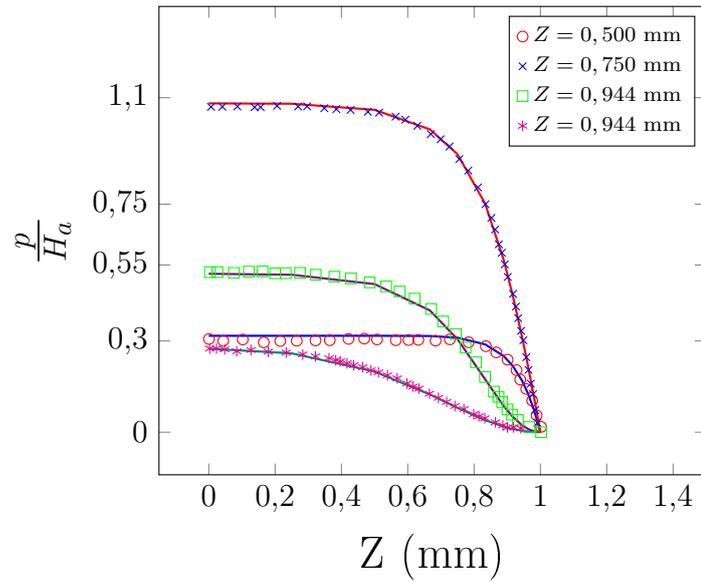


Figura 5.7 – Pressão normalizada ao longo da altura para $\tau = 0,01$, $\tau = 0,05$, $\tau = 0,06$ e $\tau = 0,1$. Marcadores indicam resultados por diferenças finitas e linhas contínuas indicam resultados obtidos por elementos finitos mistos e por penalidade, onde estas estão visualmente sobrepostas.

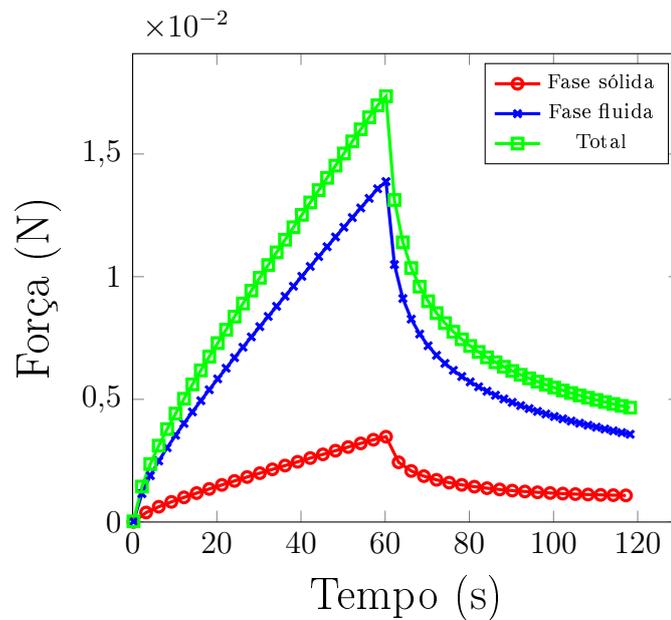


Figura 5.8 – Força de reação vertical ao longo do tempo por fase (Relaxação).

Tabela 5.2 – Normas de erro entre formulações em elementos finitos e diferenças finitas para pressão normalizada e alongamento nas alturas

$$Z = 5,00 \times 10^{-1} \text{ mm}, 7,50 \times 10^{-1} \text{ mm}, 9,44 \times 10^{-1} \text{ mm}$$

	Formulação mista	Formulação penalidade
Pressão normalizada $\frac{p}{H_a}$ (Relaxação)	0.438	0.198
Pressão normalizada $\frac{p}{H_a}$ (Fluência)	0.099	0.090
Alongamento λ (Relaxação)	0.083	0.042
Alongamento λ (Fluência)	0.072	0.069

Tabela 5.3 – Tempo médio de simulação para formulação de penalidade e elementos mistos.

Carregamento(Formulação)	Tempo de execução
Relaxação (elementos mistos)	93,4 s
Relaxação (penalidade)	214 s
Fluência (elementos mistos)	89,4 s
Fluência (penalidade)	281,7 s

5.2 Casos de Estudo para Tecidos Biológicos

5.2.1 Tração e compressão não confinadas em placas adesivas

Com o objetivo de verificar a capacidade de representação do comportamento mecânico de tecidos biológicos frente a diferentes modos de deformação, estes modelos bifásicos foram estudados frente a um teste de relaxação em tração e compressão não confinada. Estes são casos geralmente utilizados em ensaios experimentais para caracterizar o comportamento de tecidos biológicos [Böl et al., 2015; Carniel et al., 2019]. Para se aproximar a uma situação mais realista frente a ensaios de tendões e ligamentos, neste estudo foi incorporado um modelo de material anisotrópico com fibras para a fase sólida [Holzapfel et al., 2000] dado pela Equação 3.42, e mostrado novamente abaixo:

$$\psi_{ani}^s = \frac{k_1}{2k_2} \exp(k_2(I_4 - 1)^2 - 1) \quad (5.3)$$

No caso em que a fibra está em compressão ($I_4 \leq 1$), a contribuição anisotrópica é suposta nula. A parcela isotrópica de ψ^s , assim como a função de permeabilidade κ e parâmetros usados são iguais aos da seção anterior. Para o caso de tração e compressão as fibras são orientadas na direção do carregamento. Para ter semelhança com o tecido estudado, se utilizou uma rigidez da fibra 5 vezes maior que a rigidez da matriz. Embora a contribuição devido ao potencial anisotrópico seja nula quando as fibras estão em compressão, como os casos de estudo utilizam uma condição de contorno de placas adesivas, se espera a ocorrência de um campo de deformações complexo. Com isso a rigidez adicional das fibras deve influenciar a resposta mesmo para o carregamento compressivo.

Os parâmetros de material usados para ψ_{ani}^s são mostrados na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Parâmetros de ψ_{ani}^s

Parâmetro	Valor
k_1	5×10^{-1} MPa
k_2	2

A geometria utilizada consiste em uma coluna de diâmetro 2 mm e altura de 1 mm. O deslocamento aplicado para o caso de tração e compressão foi de 2×10^{-1} mm, aplicados

em forma de rampa até o tempo $t_0 = 5,0 \times 10^1$ s, após o qual é mantido constante. Um diagrama esquemático representando este ensaio é mostrado na Figura 5.9:

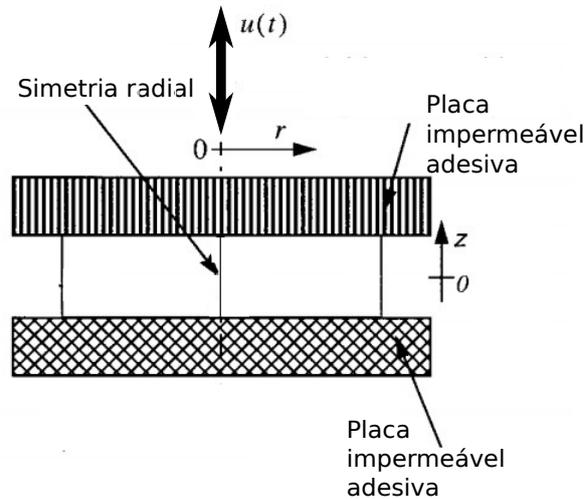


Figura 5.9 – Diagrama esquemático de compressão e tração não confinadas em placa impermeável adesiva (adaptado de Wu e Herzog, 2000)

O contato da amostra com a placa superior e inferior é modelado como completamente adesivo ($u_r = 0$), e a placa é suposta completamente impermeável. No caso da tração, a placa impermeável adesiva representa o mordente que estaria restringindo o movimento de deslocamento e escoamento de fluido. A pressão é assumida nula na lateral da amostra cilíndrica, permitindo com que o fluido escoe livremente. A malha utilizada para esta análise é mostrada na Figura 5.10, sendo composta de elementos axissimétricos retangulares quadráticos na interpolação da velocidade e das coordenadas, e lineares na interpolação da pressão.

Os resultados obtidos na análise são apresentados nas Figuras 5.11 a 5.20:

Analisando as Figuras 5.11 e 5.12 percebe-se que o comportamento viscoso da força de reação é mais pronunciado para o caso de compressão do que para o de tração. No modelo bifásico a viscosidade mecânica é controlada pelo movimento relativo de fluido, que foi de maior magnitude para o caso de tração (ver Figuras 5.13 e 5.14). Como a rigidez extra, fornecida pela anisotropia da fase sólida só é ativada quando a fibra esta em tração, esta poderia agir como uma possível causa para a menor magnitude do efeito viscoso na força de reação. Em tecidos biológicos moles, essa anisotropia geralmente decorre devido à presença de fibras de colágeno (tendão e ligamentos, por exemplo), as quais possuem uma

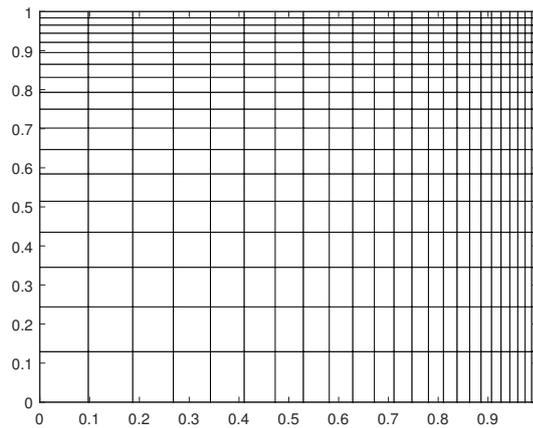


Figura 5.10 – Malha de elementos finitos utilizada para o caso de tração e compressão não confinada com placas adesivas.

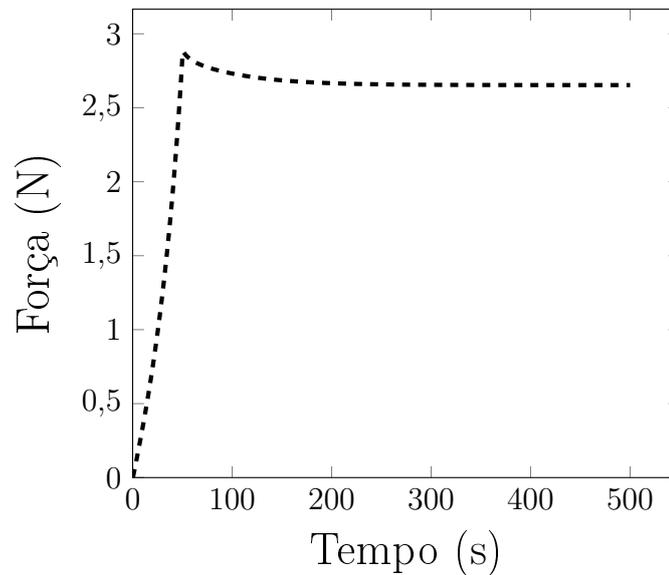


Figura 5.11 – Valor da força de reação vertical ao longo do tempo para o carregamento de tração.

rigidez muito maior que a matriz na qual elas se encontram [Böl et al., 2015], e também apresentam uma viscosidade inerente [Sanjeevi et al., 1982] independente do escoamento do fluido, a qual não foi incluída neste modelo.

Na Figuras 5.13 e 5.14 valores positivos de fluxo denotam saída de fluido, e valores negativos, entrada. Logo se nota que ocorre a saída de líquido da amostra em compressão, e entrada de líquido na tração, o que é devido ao gradiente de pressão gerado pelo carregamento (Figuras 5.15 e 5.16), e é coerente com o esperado pela lei de Darcy. Entretanto,

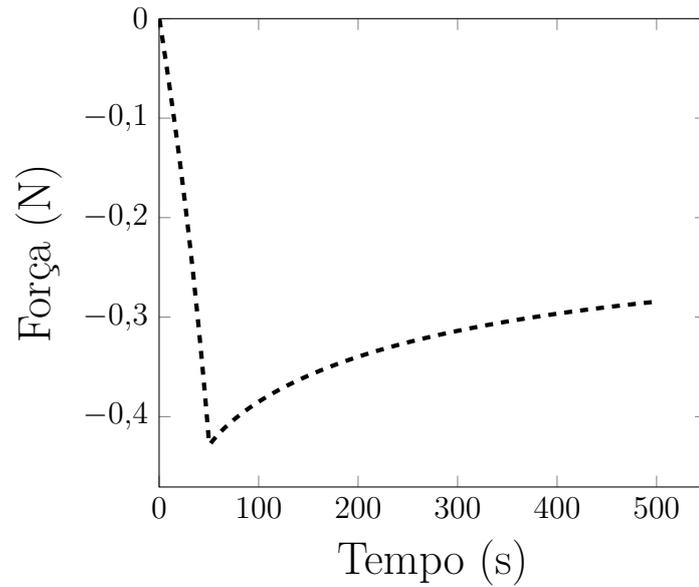


Figura 5.12 – Valor da força de reação vertical ao longo do tempo para o carregamento de compressão.

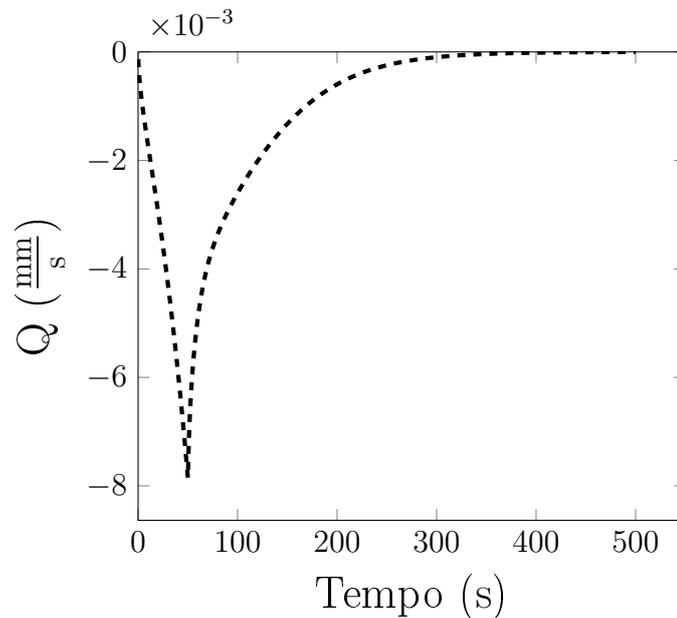


Figura 5.13 – Fluxo fluido no contorno da coluna ao longo do tempo para o carregamento de tração .

se sabe que vários tecidos cartilagosos apresentam uma exsudação de fluido durante carregamento de tração [Ehret et al., 2017], o que contrasta com o esperado pela teoria bifásica com as hipóteses usadas neste trabalho. Isso indica que o modelo constitutivo aqui estudado, com os respectivos potenciais e parâmetros de material escolhidos, levam a

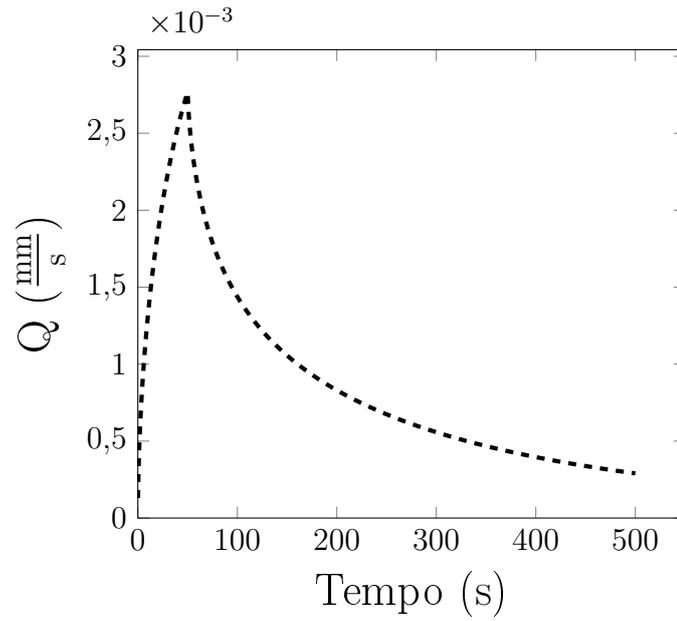


Figura 5.14 – Fluxo fluido no contorno da coluna ao longo do tempo para o carregamento de compressão.

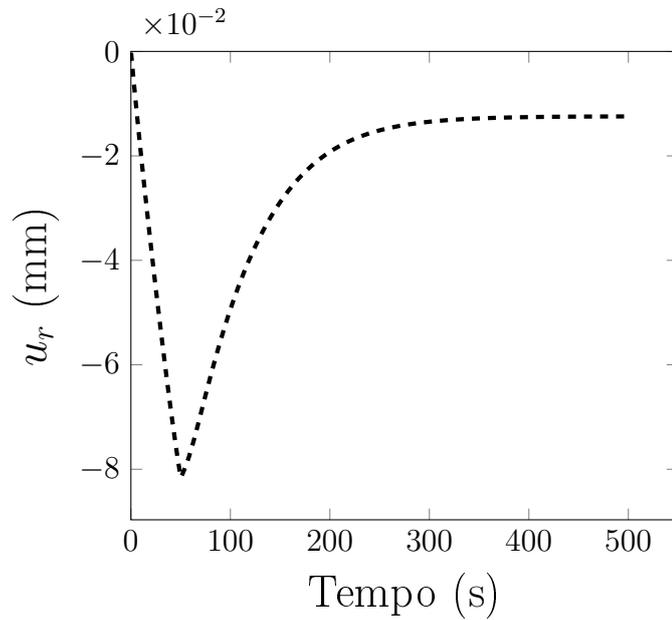


Figura 5.15 – Deslocamento radial máximo ($r = 1\text{mm}$, $Z = 0\text{mm}$) ao longo do tempo para o carregamento de tração.

respostas inconsistentes do comportamento do fluido com as esperadas, apesar das respostas mecânicas de força e deslocamento estarem coerentes. A Figuras 5.15 e 5.16 mostra que após o termino da aplicação da rampa de deslocamento em $t = 5,0 \times 10^1 \text{s}$, a troca

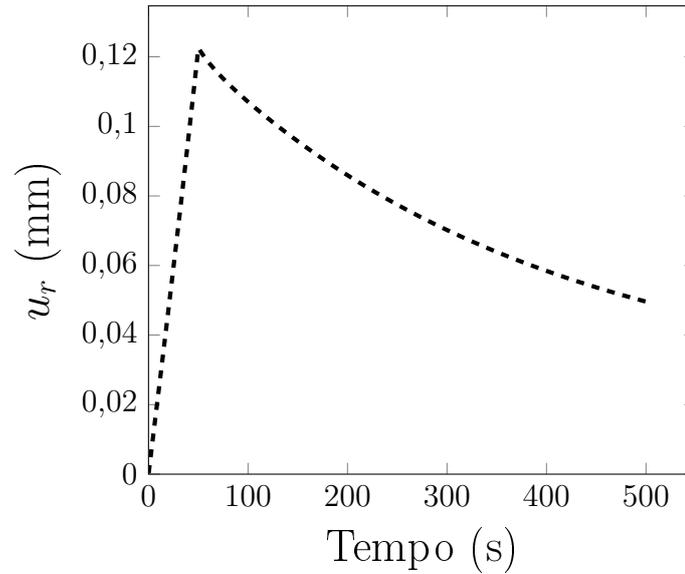


Figura 5.16 – Deslocamento radial máximo ($r = 1\text{mm}$, $Z = 0\text{mm}$) ao longo do tempo para o carregamento de compressão.

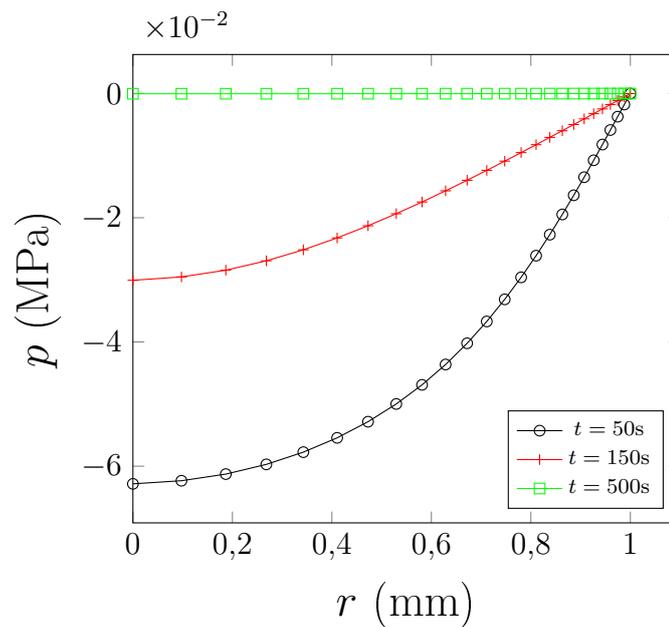


Figura 5.17 – Pressão ao longo do raio em $Z = 0\text{mm}$ no tempo de 50s, 100s e 500s para o carregamento de tração

de fluido com o ambiente produz uma relaxação no deslocamento radial, fazendo com que a geometria se aproxime à sua configuração original em relação ao seu formato. Já a Figuras 5.17 e 5.18 mostra que para o caso de tração o estado de equilíbrio é alcançado para $t = 5,00 \times 10^2\text{s}$, pois, a pressão hidrostática é nula nesse instante. Isso não ocorre

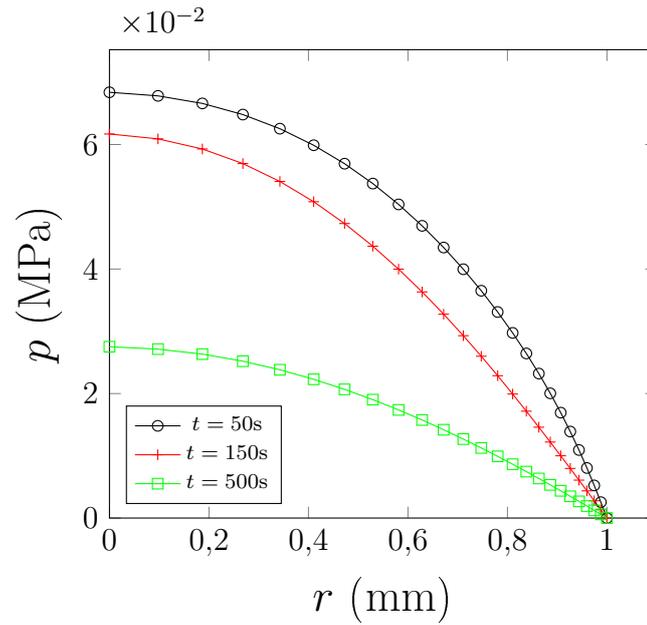


Figura 5.18 – Pressão ao longo do raio em $Z = 0\text{mm}$ no tempo de 50s, 100s e 500s para o carregamento de compressão.

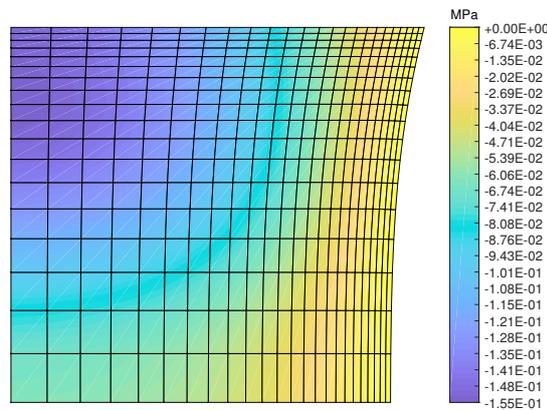


Figura 5.19 – Distribuição de pressão em $t = 50\text{ s}$ para o carregamento de tração.

para o caso de compressão, indicando que o equilíbrio ainda não foi alcançado para esse carregamento.

5.2.2 Carregamento cíclico

Com o objetivo de estudar a representação do comportamento mecânico de tendões e ligamentos, o modelo bifásico utilizado foi estudado frente a um carregamento cíclico em tração. A geometria utilizada consiste em uma amostra cilíndrica de diâmetro

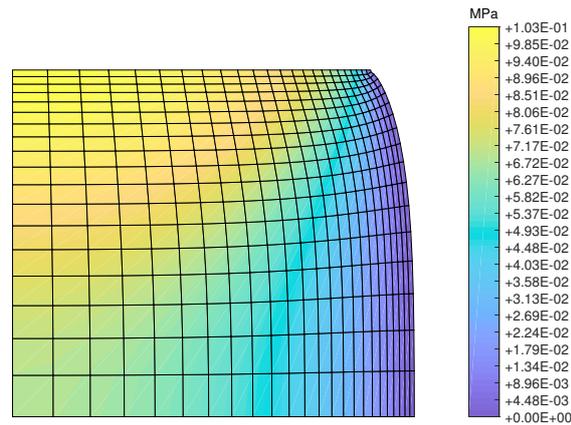


Figura 5.20 – Distribuição de pressão em $t = 50$ s para o carregamento de compressão.

$2,5 \times 10^{-1}$ mm e 1 mm de altura. O contato da amostra com a placa superior e inferior é modelado como completamente adesivo ($u_r = 0$), e a placa é suposta completamente impermeável. A pressão é considerada nula na lateral da amostra cilíndrica, permitindo com que o fluido escoe livremente. Os modelos de materiais, propriedades e malha de elementos finitos utilizadas são as mesmas da Seção 5.2.1. O carregamento utilizado para este caso é mostrado na Figura 5.21.

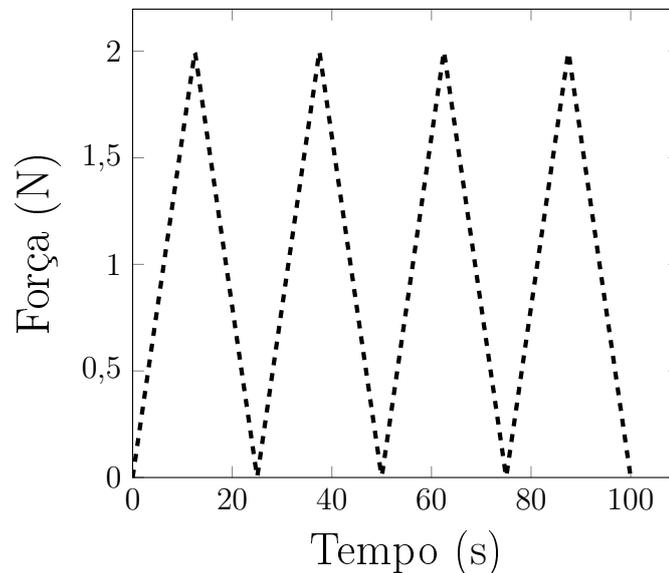


Figura 5.21 – Carregamento aplicado para o caso cíclico.

Os resultados obtidos na análise são apresentados nas Figuras 5.22 a 5.24. Analisando a Figura 5.22 percebe-se que o comportamento mecânico viscoso apresentado é

pouco pronunciado, comportamento este condizente com o obtido para o caso monotônico, Figura 5.11. Analisando a Figura 5.23, se percebe que para o caso cíclico, ocorre ganho e perda de fluido, sendo que nos últimos ciclos de carga, a quantidade de fluido saindo supera a quantidade entrando. Isso apresenta similaridades com o exposto por Lanir, 1980, o qual reporta perda e reabsorvimento de fluido no tendão ao longo de ciclos de carregamentos sucessivos. Já a Figura 5.24 mostra que durante o descarregamento, o diâmetro da amostra chega a superar o seu valor original, o que também concorda com resultados experimentais obtidos por Lanir, 1980.

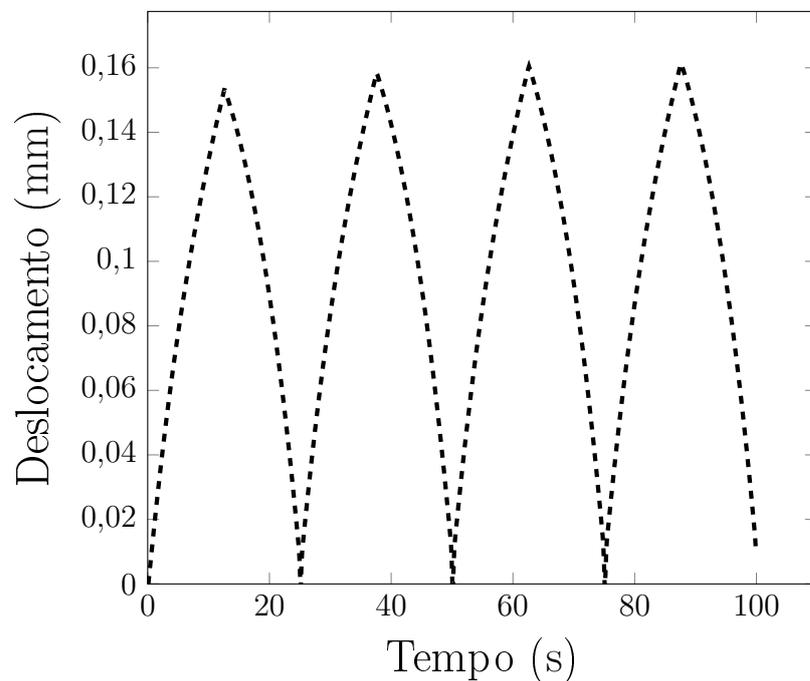


Figura 5.22 – Deslocamento axial ao longo do tempo para o carregamento cíclico.

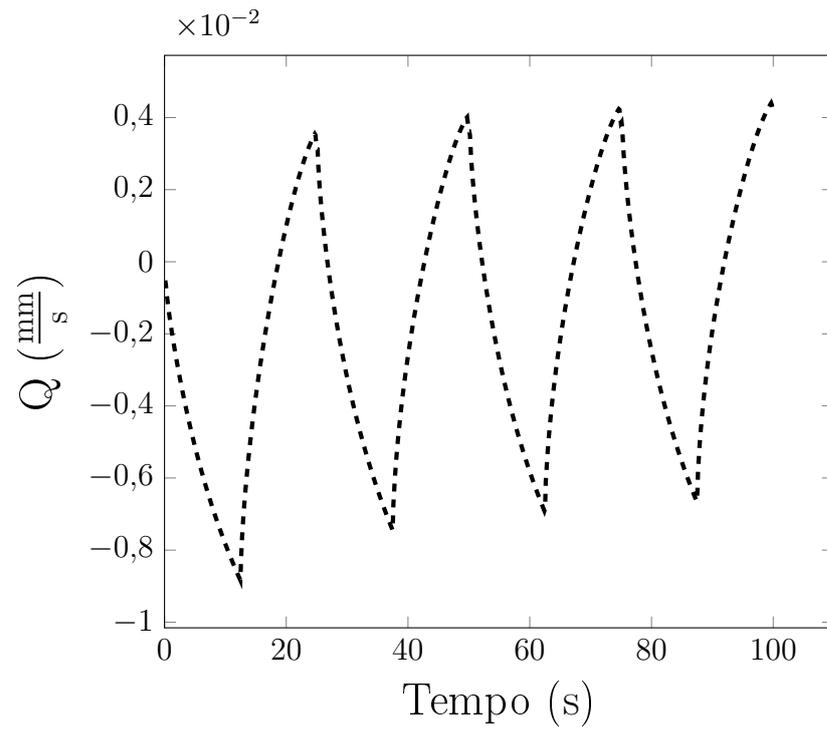


Figura 5.23 – Fluxo fluido no contorno da coluna ao longo do tempo para o carregamento cíclico.

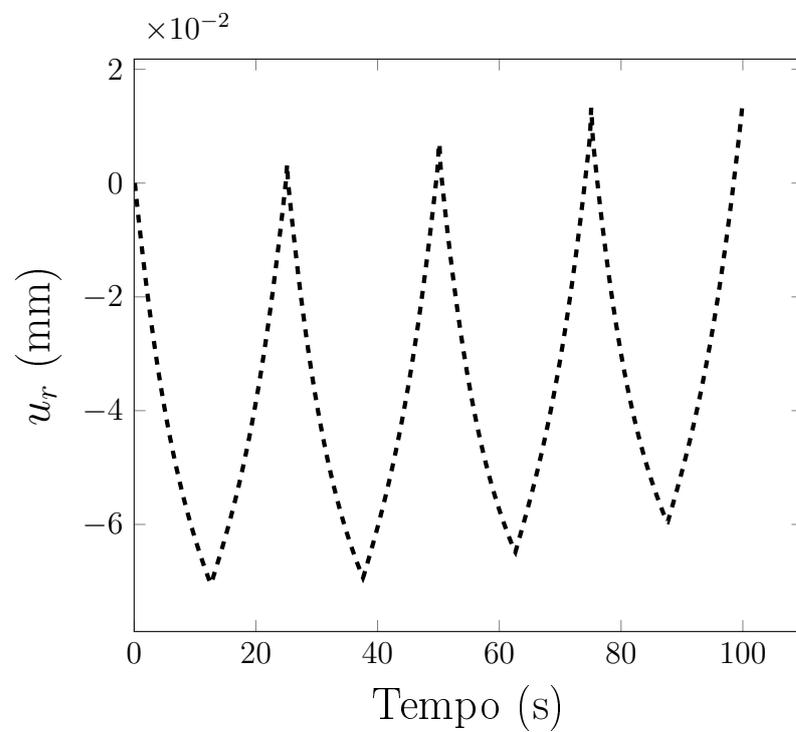


Figura 5.24 – Deslocamento radial máximo ($r = 1\text{mm}$, $Z = 0\text{mm}$) ao longo do tempo para o carregamento cíclico.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi estudado e implementado duas formulações de elementos finitos para a solução do problema bifásico em grandes deformações, sendo uma formulação baseada em penalidade, e outra baseada em elementos mistos de pressão e velocidade sólida. Como esperado, ambas formulações apresentaram resultados com boa concordância em relação a uma solução de referência obtida por diferenças finitas para o caso de compressão confinada, entretanto, a formulação baseada em elementos mistos obteve grande vantagem no quesito custo computacional, e por isso foi preferida nos testes subsequentes.

Para testar as capacidades e limitações da resposta mecânica da teoria bifásica aplicada em tecidos biológicos, foram realizados testes numéricos de tração e compressão não confinada. Foi incorporado uma lei anisotrópica para a matriz sólida, que representaria a presença de fibras alinhadas, sendo que a rigidez destas fibras foi assumida muito maior que a rigidez da matriz. A força de reação obtida para o caso de tração foi dominado pela rigidez das fibras, apresentando pouco comportamento dissipativo quando comparado com o resultado obtido para a carga compressiva, o que pode indicar a necessidade de inclusão de leis viscoelásticas independentes do movimento de fluido para governar a dissipação mecânica das fibras. Para o carregamento de tração, apesar da resposta de força estar condizente, o modelo apresentou entrada de líquido na amostra, apresentando discrepância com resultados experimentais de tecidos colagenosos, que preveem a exsudação de fluido. Já o resultado encontrado na evolução do fluxo e deslocamento radial para o carregamento cíclico apresenta algumas das características encontradas na resposta experimental.

Tais resultados evidenciam a necessidade de adequação das leis constitutivas do modelo bifásico para tecidos biológicos com anisotropia, tanto da fase sólida como da fluida. Entretanto, se salienta a carência em relação a dados experimentais quantificando o efeito que o fluido intersticial exerce no comportamento mecânico de tendões e ligamentos. Tais informações ajudariam o desenvolvimento e validação de potenciais elásticos descrevendo o comportamento da matriz sólida, e funções de permeabilidade que melhor caracterizem o movimento do fluido dentro do regime fisiológico do tecido. Outro fator a se destacar é em relação à separação entre os efeitos dissipativos devido ao movimento de fluido e a viscosidade intrínseca apresentada pelo colágeno [Huang et al., 2003]. No momento, ainda

não existem procedimentos experimentais reportados capazes de separar a contribuição dos dois efeitos, o que dificulta uma correta validação de modelos poroviscoelásticos.

Desta forma, sugere-se que trabalhos futuros tenham foco em objetivos experimentais e de modelagem constitutiva. Na parte experimental sugere-se estudar e executar experimentos que permitam retirar informações quantitativas quanto ao movimento do fluido no interior do tecido e na magnitude de exsudação do mesmo durante carregamentos típicos. A literatura indica que a avaliação de tal movimento é possível de ser realizada através de técnicas de ressonância magnética, embora tal experimento necessariamente ser multidisciplinar, e necessitar apoio de especialistas na área médica ou veterinária. Também sugere-se estudar uma forma de separar o efeito viscoso intrínseco e o decorrente do arrasto do fluido durante os experimentos. Com isso se espera ser possível desenvolver e avaliar modelos de material capazes de descrever um comportamento mais fidedigno em relação a tecidos moles hidratados, tais como tendão e ligamentos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adeeb, S., Ali, A., Shrive, N., Frank, C., e Smith, D. Modelling the Behaviour of Ligaments: A Technical Note, **Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering**, vol. 7(1), p. 33–42, 2004.

Ahmadzadeh, H., Freedman, B. R., Connizzo, B. K., Soslowsky, L. J., e Shenoy, V. B. Micromechanical Poroelastic Finite Element and Shear-Lag Models of Tendon Predict Large Strain Dependent Poisson's Ratios and Fluid Expulsion under Tensile Loading, **Acta Biomaterialia**, vol. 22, p. 83–91, 2015.

Almeida, E. S. **Finite Elements Formulations for Biological Soft Hydrated Tissues under Finite Deformation**. PhD Thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, 1995.

Almeida, E. S. e Spilker, R. L. Mixed and Penalty Finite Element Models for the Nonlinear Behavior of Biphasic Soft Tissues in Finite Deformation: Part I - Alternate Formulations, **Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering**, vol. 1(1), p. 25–46, 1997.

Almeida, E. S. e Spilker, R. L. Finite Element Formulations for Hyperelastic Transversely Isotropic Biphasic Soft Tissues, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 151(3-4), p. 513–538, 1998.

Ateshian, G. A. **Mixture Theory for Modeling Biological Tissues: Illustrations from Articular Cartilage**. In Holzapfel, G. A. e Ogden, R. W., editors, *Biomechanics: Trends in Modeling and Simulation*, Studies in Mechanobiology, Tissue Engineering and Biomaterials, p. 1–51. Springer International Publishing, Cham, 2017.

Ateshian, G. A., Maas, S., e Weiss, J. A. Finite Element Algorithm for Frictionless Contact of Porous Permeable Media Under Finite Deformation and Sliding, **Journal of Biomechanical Engineering**, vol. 132(6), p. 061006, 2010.

Atkinson, T. S., Ewers, B. J., e Haut, R. C. The Tensile and Stress Relaxation Responses of Human Patellar Tendon Varies with Specimen Cross-Sectional Area, **Journal of Biomechanics**, vol. 32(9), p. 907–914, 1999.

Atkinson, T. S., Haut, R. C., e Altiero, N. J. A Poroelastic Model That Predicts Some Phenomenological Responses of Ligaments and Tendons, **Journal of Biomechanical Engineering**, vol. 119(4), p. 400, 1997.

Bachrach, N. M., Mow, V. C., e Guilak, F. Incompressibility of the Solid Matrix of Articular Cartilage under High Hydrostatic Pressures, **Journal of Biomechanics**, vol. 31(5), p. 445–451, 1998.

Bathe, K. J. **Finite Element Procedures**. Klaus-Jurgen Bathe, Boston, Mass., 2007.

Böl, M., Ehret, A. E., Leichsenring, K., e Ernst, M. Tissue-Scale Anisotropy and Compressibility of Tendon in Semi-Confined Compression Tests, **Journal of Biomechanics**, vol. 48(6), p. 1092–1098, 2015.

Bryant, M. R. e McDonnell, P. J. A Triphasic Analysis of Corneal Swelling and Hydration Control, **Journal of Biomechanical Engineering**, vol. 120(3), p. 370–381, 1998.

Butler, S. L. L., Kohles, S. S. S., Thielke, R. J. J., Chen, C., e Vanderby, R. Interstitial Fluid Flow in Tendons or Ligaments: A Porous Medium Finite Element Simulation, **Medical and Biological Engineering and Computing**, vol. 35(6), p. 742–746, 1997.

Carlstedt, C. A. Mechanical and Chemical Factors in Tendon Healing: Effects of Indomethacin and Surgery in the Rabbit, **Acta Orthopaedica Scandinavica**, vol. 58(sup224), p. 1–75, 1987.

Carniel, T. A. e Fancello, E. A. A Variational Homogenization Approach Applied to the Multiscale Analysis of the Viscoelastic Behavior of Tendon Fascicles, **Continuum Mechanics and Thermodynamics**, vol. 31(3), p. 607–626, 2019.

Carniel, T. A., Formenton, A. B. K., Klahr, B., Vassoler, J. M., de Mello Roesler, C. R., e Fancello, E. A. An Experimental and Numerical Study on the Transverse Deformations in Tensile Test of Tendons, **Journal of Biomechanics**, vol. 87, p. 120–126, 2019.

Carniel, T. A., Klahr, B., e Fancello, E. A. A Multiscale Numerical Approach for the Finite Strains Analysis of Materials Reinforced with Helical Fibers, **Mechanics of Materials**, vol. 126, p. 75–85, 2018.

Chan, B., Donzelli, P., e Spilker, R. Mixed-Penalty Biphasic Finite Element Formulation Incorporating Viscous Fluids and Material Interfaces, **Annals of Biomedical Engineering**, vol. 28(6), p. 589–597, 2000.

Chen, C. T., Malkus, D. S., e Vanderby, R. A Fiber Matrix Model for Interstitial Fluid Flow and Permeability in Ligaments and Tendons, **Biorheology**, vol. 35(2), p. 103–118, 1998.

Chimich, D., Shrive, N., Frank, C., Marchuk, L., e Bray, R. Water Content Alters Viscoelastic Behaviour of the Normal Adolescent Rabbit Medial Collateral Ligament, **Journal of Biomechanics**, vol. 25(8), p. 831–837, 1992.

Chuong, C. J., Sacks, M. S., Johnson, R. L., e Reynolds, R. On the Anisotropy of the Canine Diaphragmatic Central Tendon, **Journal of Biomechanics**, vol. 24(7), p. 563–576, 1991.

Cowin, S. C. e Doty, S. B. **Tissue Mechanics**. Springer-Verlag, New York, 2007.

de Boer, R. **Theory of Porous Media: Highlights in the Historical Development and Current State**. vol. 1616, 2000.

Ehret, A. E., Bircher, K., Stracuzzi, A., Marina, V., Zündel, M., e Mazza, E. Inverse Poroelasticity as a Fundamental Mechanism in Biomechanics and Mechanobiology, **Nature Communications**, vol. 8(1), p. 1002, 2017.

Federico, S. e Grillo, A. Elasticity and Permeability of Porous Fibre-Reinforced Materials under Large Deformations, **Mechanics of Materials**, vol. 44, p. 58–71, 2012.

Franchi, M., Trirè, A., Quaranta, M., Orsini, E., e Ottani, V. Collagen Structure of Tendon Relates to Function, **The Scientific World Journal**, vol. 7, p. 404–420, 2007.

Gatt, R., Vella Wood, M., Gatt, A., Zarb, F., Formosa, C., Azzopardi, K. M., Casha, A., Agius, T. P., Schembri-Wismayer, P., Attard, L., Chockalingam, N., e Grima, J. N. Negative Poisson's Ratios in Tendons: An Unexpected Mechanical Response, **Acta Biomaterialia**, vol. 24, p. 201–208, 2015.

Giori, N. J., Beaupré, G. S., e Carter, D. R. Cellular Shape and Pressure May Mediate Mechanical Control of Tissue Composition in Tendons, **Journal of Orthopaedic Research**, vol. 11(4), p. 581–591, 1993.

Han, S., Gemmell, S. J., Helmer, K. G., Grigg, P., Wellen, J. W., Hoffman, A. H., e Sotak, C. H. Changes in ADC Caused by Tensile Loading of Rabbit Achilles Tendon: Evidence for Water Transport, **Journal of Magnetic Resonance**, vol. 144(2), p. 217–227, 2000.

Haut, R. C. e Powlison, A. C. The Effects of Test Environment and Cyclic Stretching on the Failure Properties of Human Patellar Tendons, **Journal of Orthopaedic Research**, vol. 8(4), p. 532–540, 1990.

Haut, T. L. e Haut, R. C. The State of Tissue Hydration Determines the Strain-Rate-Sensitive Stiffness of Human Patellar Tendon, **Journal of Biomechanics**, vol. 30(1), p. 79–81, 1997.

Helmer, K. G., Nair, G., Cannella, M., e Grigg, P. Water Movement in Tendon in Response to a Repeated Static Tensile Load Using One-Dimensional Magnetic Resonance Imaging, **Journal of Biomechanical Engineering**, vol. 128(5), p. 733–741, 2006.

Helmer, K. G., Wellen, J., Grigg, P., e Sotak, C. H. Measurement of the Spatial Redistribution of Water in Rabbit Achilles Tendon in Response to Static Tensile Loading, **Journal of Biomechanical Engineering**, vol. 126(5), p. 651–656, 2004.

Hewitt, J., Guilak, F., Glisson, R., e Parker Vail, T. Regional Material Properties of the Human Hip Joint Capsule Ligaments, **Journal of Orthopaedic Research**, vol. 19(3), p. 359–364, 2001.

Hirokawa, S. e Tsuruno, R. Three-Dimensional Deformation and Stress Distribution in an Analytical/Computational Model of the Anterior Cruciate Ligament, **Journal of Biomechanics**, vol. 33(9), p. 1069–1077, 2000.

Holmes, M. H. Finite Deformation of Soft Tissue: Analysis of a Mixture Model in Uni-Axial Compression, **Journal of Biomechanical Engineering**, vol. 108(4), p. 372–381, 1986a.

Holmes, M. H. Finite Deformations of Soft Tissue: Analysis of a Mixture Model in Uni-Axial Compression, **Journal of Biomechanical Engineering**, vol. 108(4), 1986b.

Holmes, M. H. e Mow, V. C. THE NONLINEAR CHARACTERISTICS OF SOFT GELS AND HYDRATED CONNECTIVE TISSUES IN ULTRAFILTRATION, **Journal of Biomechanics**, vol. 23(11), p. 1145–1156, 1990.

Holzapfel, G. A. Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering Science, **Meccanica**, vol. 37(4-5), p. 489–490, 2002.

Holzapfel, G. A., Gasser, T. C., e Ogden, R. W. A New Constitutive Framework for Arterial Wall Mechanics and a Comparative Study of Material Models, **Journal of elasticity and the physical science of solids**, vol. 61(1), p. 1–48, 2000.

Huang, C.-Y., Soltz, M. A., Kopacz, M., Mow, V. C., e Ateshian, G. A. Experimental Verification of the Roles of Intrinsic Matrix Viscoelasticity and Tension-Compression Nonlinearity in the Biphasic Response of Cartilage, **Journal of Biomechanical Engineering**, vol. 125(1), p. 84–93, 2003.

Hughes, T. J. R. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Dover Publications, Mineola, NY, 1 edition^a ed., 2000.

Huyghe, J. M., van Campen, D. H., Arts, T., e Heethaar, R. M. A Two-Phase Finite Element Model of the Diastolic Left Ventricle, **Journal of Biomechanics**, vol. 24(7), p. 527–538, 1991.

Johnson, G. A., Tramaglino, D. M., Levine, R. E., Ohno, K., Choi, N. Y., e Woo, S. L. Tensile and Viscoelastic Properties of Human Patellar Tendon, **Journal of Orthopaedic Research: Official Publication of the Orthopaedic Research Society**, vol. 12(6), p. 796–803, 1994.

Kannus, P. Structure of the Tendon Connective Tissue, **Scandinavian Journal of Medicine & Science in Sports**, vol. 10(6), p. 312–320, 2000.

Khayyeri, H., Gustafsson, A., Heuveljans, A., Matikainen, M. K., Julkunen, P., Eliasson, P., Aspenberg, P., e Isaksson, H. A Fibre-Reinforced Poroviscoelastic Model Accurately Describes the Biomechanical Behaviour of the Rat Achilles Tendon, **PLoS One**, vol. 10(6), p. e0126869, 2015.

Lanir, Y. A Microstructure Model for the Rheology of Mammalian Tendon, **Journal of Biomechanical Engineering**, vol. 102(4), p. 332–339, 1980.

Lanir, Y., Salant, E. L., e Foux, A. Physico-Chemical and Microstructural Changes in Collagen Fiber Bundles Following Stretch in-Vitro, **Biorheology**, vol. 25(4), p. 591–603, 1988.

Lavagnino, M., Arnoczky, S. P., Kepich, E., Caballero, O., e Haut, R. C. A Finite Element Model Predicts the Mechanotransduction Response of Tendon Cells to Cyclic Tensile Loading, **Biomechanics and Modeling in Mechanobiology**, vol. 7(5), p. 405–416, 2008.

LeRoux, M. A. e Setton, L. A. Experimental and Biphasic FEM Determinations of the Material Properties and Hydraulic Permeability of the Meniscus in Tension, **Journal of Biomechanical Engineering**, vol. 124(3), p. 315, 2002.

Lozano, P. F., Scholze, M., Babian, C., Scheidt, H., Vielmuth, F., Waschke, J., Ondruschka, B., e Hammer, N. Water-Content Related Alterations in Macro and Micro Scale Tendon Biomechanics, **Scientific Reports**, vol. 9, 2019.

Lynch, H., Johannessen, W., Wu, J., Jawa, A., e Elliott, D. Effect of Fiber Orientation and Strain Rate on the Nonlinear Uniaxial Tensile Material Properties of Tendon, **Journal of Biomechanical Engineering**, vol. 125(5), p. 726–731, 2003.

Maroudas, A. e Bullough, P. Permeability of Articular Cartilage, **Nature**, vol. 219(5160), p. 1260, 1968.

Masic, A., Bertinetti, L., Schuetz, R., Chang, S.-W., Metzger, T. H., Buehler, M. J., e Fratzl, P. Osmotic Pressure Induced Tensile Forces in Tendon Collagen, **Nature Communications**, vol. 6(1), p. 1–8, 2015.

McEwen, W. K. Application of Poiseuille’s Law to Aqueous Outflow, **A.M.A. Archives of Ophthalmology**, vol. 60(2), p. 290–294, 1958.

Mescher, A. **Junqueira’s Basic Histology: Text and Atlas, Fifteenth Edition**. McGraw-Hill Education / Medical, New York (NY), 15 edition^a ed., 2018.

Mow, V. C., Kuei, S. C., Lai, W. M., e Armstrong, C. G. Biphasic Creep and Stress Relaxation of Articular Cartilage in Compression: Theory and Experiments, **Journal of Biomechanical Engineering**, vol. 102(1), p. 73, 1980.

Nordin, M. e Frankel, V. H. **Basic Biomechanics of the Musculoskeletal System**. Wolters Kluwer/Lippincott Williams & Wilkins Health, 2012.

Oftadeh, R., Connizzo, B. K., Nia, H. T., Ortiz, C., e Grodzinsky, A. J. Biological Connective Tissues Exhibit Viscoelastic and Poroelastic Behavior at Different Frequency Regimes: Application to Tendon and Skin Biophysics, **Acta Biomaterialia**, vol. 70, p. 249–259, 2018.

Peña, E., Calvo, B., Martínez, M. A., e Doblaré, M. An Anisotropic Visco-Hyperelastic Model for Ligaments at Finite Strains. Formulation and Computational Aspects, **International Journal of Solids and Structures**, vol. 44(3), p. 760–778, 2007.

Peña, E., Peña, J. A., e Doblaré, M. On Modelling Nonlinear Viscoelastic Effects in Ligaments, **Journal of Biomechanics**, vol. 41(12), p. 2659–2666, 2008.

Pérez del Palomar, A. e Doblaré, M. On the Numerical Simulation of the Mechanical Behaviour of Articular Cartilage, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 67(9), p. 1244–1271, 2006.

Pierce, D. M., Ricken, T., e Holzapfel, G. A. A Hyperelastic Biphasic Fibre-Reinforced Model of Articular Cartilage Considering Distributed Collagen Fibre Orientations: Continuum Basis, Computational Aspects and Applications, **Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering**, vol. 16(12), p. 1344–1361, 2013.

Pioletti, D., Rakotomanana, L., Benvenuti, J.-F., e Leyvraz, P.-F. Viscoelastic Constitutive Law in Large Deformations: Application to Human Knee Ligaments and Tendons, **Journal of Biomechanics**, vol. 31(8), p. 753–757, 1998.

Quapp, K. M. e Weiss, J. A. Material Characterization of Human Medial Collateral Ligament, **Journal of Biomechanical Engineering**, vol. 120(6), p. 757–763, 1998.

Reese, S. P., Maas, S. A., e Weiss, J. A. Micromechanical Models of Helical Superstructures in Ligament and Tendon Fibers Predict Large Poisson's Ratios, **Journal of Biomechanics**, vol. 43(7), p. 1394–1400, 2010.

Reese, S. P. e Weiss, J. A. Tendon Fascicles Exhibit a Linear Correlation Between Poisson's Ratio and Force During Uniaxial Stress Relaxation, **Journal of Biomechanical Engineering**, vol. 135(3), p. 034501–034501–5, 2013.

Ricken, T., Dahmen, U., e Dirsch, O. A Biphasic Model for Sinusoidal Liver Perfusion Remodeling after Outflow Obstruction, **Biomechanics and Modeling in Mechanobiology**, vol. 9(4), p. 435–450, 2010.

Safa, B. N., Meadows, K. D., Szczesny, S. E., e Elliott, D. M. Exposure to Buffer Solution Alters Tendon Hydration and Mechanics, **Journal of Biomechanics**, vol. 61, p. 18–25, 2017.

Sanjeevi, R., Somanathan, N., e Ramaswamy, D. A Viscoelastic Model for Collagen Fibres, **Journal of Biomechanics**, vol. 15(3), p. 181–183, 1982.

Shen, Z. L., Kahn, H., Ballarini, R., e Eppell, S. J. Viscoelastic Properties of Isolated Collagen Fibrils, **Biophysical Journal**, vol. 100(12), p. 3008–3015, 2011.

Slack, C., Flint, M. H., e Thompson, B. M. The Effect of Tensional Load on Isolated Embryonic Chick Tendons in Organ Culture, **Connective Tissue Research**, vol. 12(3-4), p. 229–247, 1984.

Song, Y., Debski, R. E., Musahl, V., Thomas, M., e Woo, S. L. Y. A Three-Dimensional Finite Element Model of the Human Anterior Cruciate Ligament: A Computational Analysis with Experimental Validation, **Journal of Biomechanics**, vol. 37(3), p. 383–390, 2004.

Spilker, R. L., Suh, J.-K., Vermilyea, M. E., e Maxian, T. A. **Alternate Hybrid, Mixed, and Penalty Finite Element Formulations for the Biphasic Model of Soft Hydrated Tissues**. In Ratcliffe, A., Woo, S. L.-Y., e Mow, V. C., editors, *Biomechanics of Diarthrodial Joints*, p. 401–435. Springer New York, New York, NY, 1990.

Starborg, T., Kalson, N. S., Lu, Y., Mironov, A., Cootes, T. F., Holmes, D. F., e Kadler, K. E. Using Transmission Electron Microscopy and 3View to Determine Collagen Fibril Size and Three-Dimensional Organization., **Nature protocols**, vol. 8(7), p. 1433–1448, 2013.

Suh, J. K. e Bai, S. Finite Element Formulation of Biphasic Poroviscoelastic Model for Articular Cartilage., **Journal of biomechanical engineering**, vol. 120(2), p. 195–201, 1998.

Suh, J. K. e Spilker, R. L. Indentation Analysis of Biphasic Articular Cartilage: Nonlinear Phenomena under Finite Deformation., **Journal of biomechanical engineering**, vol. 116(February), p. 1–9, 1994.

Suh, J. K., Spilker, R. L., e Holmes, M. H. A Penalty Finite Element Analysis for Nonlinear Mechanics of Biphasic Hydrated Soft Tissue under Large Deformation, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 32(7), p. 1411–1439, 1991.

Swedberg, A. M., Reese, S. P., Maas, S. A., Ellis, B. J., e Weiss, J. A. Continuum Description of the Poisson Ratio of Ligament and Tendon under Finite Deformation, **Journal of Biomechanics**, vol. 47(12), p. 3201–3209, 2014.

Tang, C. Y., Ng, G. Y. F., Wang, Z. W., Tsui, C. P., e Zhang, G. Parameter Optimization for the Visco-Hyperelastic Constitutive Model of Tendon Using FEM, **Bio-Medical Materials and Engineering**, vol. 21(1), p. 9–24, 2011.

Thornton, G. M., Shrive, N. G., e Frank, C. B. Altering Ligament Water Content Affects Ligament Pre-Stress and Creep Behaviour, **Journal of Orthopaedic Research: Official Publication of the Orthopaedic Research Society**, vol. 19(5), p. 845–851, 2001.

Truesdell, C. e Toupin, R. A. **The Classical Field Theories**. Springer, 1960.

Un, K. e Spilker, R. L. A Penetration-Based Finite Element Method for Hyperelastic 3D Biphasic Tissues in Contact. Part II: Finite Element Simulations, **Journal of Biomechanical Engineering**, vol. 128(6), p. 934–942, 2006.

Vassoler, J. M., Reips, L., e Fancello, E. A. A Variational Framework for Fiber-Reinforced Viscoelastic Soft Tissues, **INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING**, vol. 89(December 2011), p. 1691–1706, 2012.

Vassoler, J. M., Stainier, L., e Fancello, E. A. A Variational Framework for Fiber-Reinforced Viscoelastic Soft Tissues Including Damage, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 108(8), p. 865–884, 2016.

Viidik, A. e Lewin, T. Changes in Tensile Strength Characteristics and Histology of Rabbit Ligaments Induced by Different Modes of Postmortal Storage, **Acta Orthopaedica Scandinavica**, vol. 37(2), p. 141–155, 1966.

Wang, J. H. C. Mechanobiology of Tendon, **Journal of Biomechanics**, vol. 39(9), p. 1563–1582, 2006.

Wilchez, D. F. T. **Estudo do comportamento mecânico de ligamentos e tendões utilizando medição ótica**. PhD thesis, 2012.

Woo, S. L.-Y., Gomez, M. A., e Akeson, W. H. The Time and History-Dependent Viscoelastic Properties of the Canine Medial Collateral Ligament, **Journal of Biomechanical Engineering**, vol. 103(4), p. 293–298, 1981.

Woo, S. L.-Y., Johnson, G. A., e Smith, B. A. Mathematical Modeling of Ligaments and Tendons., **Journal of biomechanical engineering**, vol. 115(4B), p. 468–473, 1993.

Wu, J. Z. e Herzog, W. Finite Element Simulation of Location- and Time-Dependent Mechanical Behavior of Chondrocytes in Unconfined Compression Tests, **Annals of Biomedical Engineering**, vol. 28(3), p. 318–330, 2000.

Yin, L. e Elliott, D. M. A Biphasic and Transversely Isotropic Mechanical Model for Tendon:: Application to Mouse Tail Fascicles in Uniaxial Tension, **Journal of Biomechanics**, vol. 37(6), p. 907–916, 2004.