

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DE SUL
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA
TESE DE DOUTORADO

**Evolução de espectros de ondas eletrostáticas e
eletromagnéticas em plasmas não térmicos investigada com
uso da teoria de turbulência fraca**

(Evolution of spectra of electrostatic and electromagnetic waves in nonthermal plasmas
investigated with use of weak turbulence theory)

Larissa Teixeira Petruzzellis

Tese realizada sob a orientação do Prof. Dr. Luiz Fernando Ziebell, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Porto Alegre, 4 de março de 2020

Resumo

O objetivo desse trabalho envolve uma aplicação do formalismo da teoria de turbulência fraca para o estudo da evolução conjunta de ondas e partículas, associada a plasmas em situações envolvendo a presença de feixes de partículas. Como objetivo posterior, o estudo se estende e leva em conta características não térmicas na distribuição dos elétrons do plasma de fundo. A justificativa para tal tipo de investigação reside no fato de que plasmas em condições espaciais frequentemente são observados exibindo caudas não térmicas e anisotropias, que não são bem descritas por distribuições Maxwellianas, mas sim por distribuições com caudas do tipo lei de potência, conhecidas de maneira genérica como distribuições "Kappa". No contexto da teoria de turbulência fraca, soluções assintóticas aproximadas, bem como soluções numéricas obtidas usando uma aproximação unidimensional, já mostraram que distribuições Kappa podem ser geradas por processos não lineares, o que contribui para motivar a investigação proposta. A presença de distribuições não térmicas, como as distribuições Kappa, vem sendo observada não só em ambientes naturais, mas também em laboratório, e um estudo mais completo se faz necessário. Para tanto, será apresentada primeiramente uma revisão completa da teoria, que formará as bases para o estudo apresentado. Será mostrada a teoria cinética de plasmas, desde seus aspectos fundamentais. A seguir será discutido o sistema de equações Vlasov-Maxwell na abordagem quase-linear, enfatizando quais as principais características da teoria. Depois, será feita uma revisão de uma formulação relativamente recente, apresentando as bases para a teoria de turbulência fraca, mencionando termo a termo as principais características. A seguir será apresentada a distribuição de velocidades Kappa, sua origem e principais características, encerrando a revisão da literatura. A seguir serão apresentados resultados obtidos no problema da interação feixe-plasma considerando tanto os elétrons do plasma de fundo quanto do feixe incidente como distribuições maxwellianas. Para tanto, serão utilizados dois cenários para o feixe de partículas: o primeiro considerando um feixe único, alinhado na direção do campo, e o segundo utilizando feixes contrapropagantes. Por fim será abordado o efeito da presença de uma distribuição de velocidades do tipo núcleo-halo, tanto nos espectros iniciais das ondas L , S quanto no espectro assintótico das ondas T do plasma. E, como encerramento, serão apresentados efeitos da presença inicial de uma distribuição do tipo núcleo-halo sobre a evolução temporal dos espectros das ondas e das funções de distribuição de velocidades, bem como a evolução dos espectros de emissão do plasma.

Abstract

The objective of this work involves an application of the formalism of the weak turbulence theory to the study of time evolution of waves and particles, associated with plasmas in situations involving the presence of particle beams. As a later objective, the study extends and takes into account non-thermal characteristics in the distribution of electrons in the background plasma. The justification for this type of investigation lies in the fact that plasmas in spatial conditions are often observed exhibiting non-thermal tails and anisotropies, which are not well described by Maxwellian distributions, but by distributions with power law type tails, known in a different way, like Kappa distributions. In the context of weak turbulence theory, approximate asymptotic solutions, as well as numerical solutions obtained using a one-dimensional approximation, have already shown that Kappa distributions can be generated by non-linear processes, which contributes to motivate the proposed investigation. The presence of non-thermal distributions, such as Kappa distributions, has been observed not only in natural environments, but also in the laboratory, and a more complete study is necessary. To this end, a complete review of the theory will be presented first, which will form the basis for the study presented. Plasma kinetic theory will be shown, from its fundamental aspects. Next, the Vlasov-Maxwell system of equations will be discussed in the quasilinear approach, emphasizing the main characteristics of the theory. Then, a review of a relatively recent formulation will be made, presenting the bases for the theory of weak turbulence, mentioning the main characteristics term by term. Next, the Kappa distribution, its origin and main characteristics will be presented, ending the literature review. Next, results obtained in the beam-plasma interaction problem will be presented considering both background electrons and incident beam as Maxwellian distributions. For this purpose, two scenarios will be used for the particle beam: the first considering a single beam, aligned in the direction of the field, and the second using counter-propagating beams. Finally, the effect of the presence of a function distribution of the nucleo-halo type will be addressed, both in the initial spectra of the waves L , S and in the asymptotic spectrum of the waves T of the plasma. And as a closure, the effects of the initial presence of a core-halo distribution on the time evolution of the wave spectra and distribution functions will be presented, as well as the evolution of the plasma emission spectra.

Lista de Figuras

2.1	Contorno de Landau[41]	24
2.2	Contorno de Landau [41]	25
3.1	Função distribuição para os elétrons levando em conta o tempo inicial $t = 0$ e o tempo final $t = \infty$, tanto para as partículas ressonantes, como para as não ressonantes [4].	42
5.1	Função distribuição de velocidade observada pelo satélite WIND a uma distância 1UA para elétrons de alta velocidade na região de vento solar. No painel superior temos o corte transversal paralelo e perpendicular (linhas cheia e pontilhada respectivamente) da VDF observada em comparação com VDF Maxwelliana (linha tracejada). No painel inferior estão representadas as curvas de nível no plano de velocidades (normalizadas à velocidade térmica) paralelo e perpendicular ao campo magnético interplanetário. (Pierrard et al. 1999)	60
6.1	Intensidade da radiação \mathcal{E}_q^T emitida versus frequência normalizada, ω/ω_{pe} , para $V_b/v_{th} = 10$, no instante de tempo normalizado $\tau = t\omega_{pe} = 2000$. A curva em vermelho inclui todos os termos da equação (4.6) e serve de comparação em todos os painéis. No painel (a) a curva azul representa apenas o termo de espalhamento. No painel (b) a curva em azul representa a contribuição do termo $TdLL$. No painel (c) a curva em azul representa a contribuição do termo $TdLS$ na solução completa e o painel (d) representa a contribuição do termo $TdLL + TdTL$ [77].	82
6.2	Efeitos da inclusão do espectro inicial de radiação de fundo. Painel (a) mostra a evolução temporal da intensidade normalizada do campo elétrico $\langle \delta E^2(\mathbf{k}) \rangle$ vs. frequência normalizada ω/ω_{pe} para feixe de partículas com velocidade $v_b/v_{th} = 10$, quando o espectro inicial das ondas T é nulo. Painel (b) mostra o mesmo cenário, exceto pela inclusão do espectro inicial (4.30). [77]	84
6.3	Evolução temporal para a intensidade das ondas (a) de Langmuir, (b) íon-acústicas, (c) e (d) transversais para três velocidades de feixe, $V_v/v_{th} = 6, 8, 10$, curvas azul, vermelha e preta respectivamente [77].	85
6.4	Evolução temporal para as intensidades dos harmônicos $F, 2H$ e $3H$ curvas azul, vermelha e preta respectivamente. Coluna da esquerda, painéis (a), na ausência da radiação de fundo e coluna da direita, painéis (b), na presença da radiação de fundo finita. Para as seguintes velocidades, de cima para baixo, primeira linha $V_b/v_{th} = 6$, segunda linha $V_b/v_{th} = 8$ e terceira linha $V_b/v_{th} = 10$ [77].	87

6.5	Esquema do modelo proposto em grande escala da emissão de radiação do tipo II. Elétrons são acelerados em forma de feixe na região de emissão, excitando ondas de Langmuir que passam por processos não lineares de interações de três ondas. Novo modelo sugere uma distribuição de dupla corcunda para a região de CME, injetando feixes contrapropagantes de elétrons [11].	88
6.6	Intensidade espectral \mathcal{E}_q^T das ondas T em função da frequência z_q^T . Densidades dos feixes forward e backward $N_f = 6.0 \times 10^{-4}$ e $N_b = 4.0 \times 10^{-4}$ respectivamente. Velocidade do feixe forward $U_f = 8$ e os três casos do feixe backward: $U_b = -6.0$ (azul), $U_b = -8.0$ (vermelho) e $U_b = -10.0$ (preto). Os quatro painéis para os diferentes tempos: (a) $\tau = 100$; (b) $\tau = 500$; (c) $\tau = 1000$; e (d) $\tau = 2000$ [78].	90
6.7	Intensidade espectral \mathcal{E}_q^T das ondas T em função da frequência z_q^T . Feixes contrapropagantes com módulos iguais em velocidades $U_f = 10.0$ e $U_b = -10.0$, mas com quatro combinações de densidades: $N_f = 1 \times 10^{-4}$ e $N_b = 0$ (azul); $N_f = 0.8 \times 10^{-4}$ e $N_b = 0.2 \times 10^{-4}$ (vermelho); $N_f = 0.6 \times 10^{-4}$ e $N_b = 0.4 \times 10^{-4}$ (verde); $N_f = 0.5 \times 10^{-4}$ e $N_b = 0.5 \times 10^{-4}$ (preto). Os quatro painéis são para os diferentes tempos: (a) $\tau = 100$; (b) $\tau = 500$; (c) $\tau = 1000$; e (d) $\tau = 2000$ [78].	92
6.8	Intensidade espectral \mathcal{E}^α para as ondas $\alpha = L, ST$ versus tempo τ . Na coluna esquerda estão as variações em relação a velocidade do feixe traseiro $U_b = -6.0, -8.0, -10.0$, curvas azul, vermelha e preta respectivamente. Na coluna da direita a variação relativa às densidades $(N_f, N_b) = (0.5 \times 10^{-4}, 0.5 \times 10^{-4})$; $(N_f, N_b) = (0.6 \times 10^{-4}, 0.4 \times 10^{-4})$; $(N_f, N_b) = (0.8 \times 10^{-4}, 0.2 \times 10^{-4})$ e $(N_f, N_b) = (1.0 \times 10^{-4}, 0 \times 10^{-4})$, curvas azul, vermelha, verde e preta respectivamente [78].	94
6.9	Intensidade espectral, $\mathcal{E}_T = \int d\theta \int dq q \mathcal{E}_q^T$, para cada harmônico, como função do tempo τ . A primeira linha são para a emissão fundamental F ; A linha central representa o segundo harmônico $2H$; e a terceira linha corresponde a emissão do terceiro harmônico $3H$. A coluna da esquerda mostra o caso para densidades e velocidade do feixe dianteiro fixos, $(N_f, N_b) = (6.0 \times 10^{-4}, 4.0 \times 10^{-4})$, $U_f = 8.0$, enquanto o feixe traseiro é variado: $U_b = -6.0$ (azul), $U_b = -8.0$ (vermelho), e $U_b = -10.0$ (preto). Na coluna da direita corresponde à variação com respeito às densidades: $(N_f, N_b) = (0.5 \times 10^{-4}, 0.5 \times 10^{-4})$ (azul), $(N_f, N_b) = (0.6 \times 10^{-4}, 0.4 \times 10^{-4})$ (vermelho), $(N_f, N_b) = (0.8 \times 10^{-4}, 0.2 \times 10^{-4})$ (verde) e $(N_f, N_b) = (1.0 \times 10^{-4}, 0.0 \times 10^{-4})$ (preto), para $U_f = 10.0$, $U_b = -10.0$ [78].	95
7.1	Espectro inicial das ondas eletrostáticas dividido por g , como função do número de onda normalizado, para diversos valores de κ_e . (a) Espectro inicial das ondas L e em (b) Espectro inicial das ondas S . Em ambos os casos é mostrado como referência o espectro levando em conta uma distribuição de velocidades puramente Maxwelliana (curva em vermelho) [53].	102
7.2	(a) Espectro assintótico das ondas T dividido por g , \mathcal{E}_q^T , vs número de onda normalizado q para $n_{\kappa_e}/n_e = 0.1$ e diversos valores do parâmetro κ_e . O caso com $n_{\kappa_e}/n_e = 0$, a saber o caso com distribuição puramente Maxwelliana, está mostrado como referência (curva em vermelho). O painel (b) mostra em detalhes a região do espectro assintótico para pequenos valores de q [53].	104

- 7.3 Evolução temporal da função distribuição de velocidades dos elétrons Φ_e vs velocidade paralela à propagação u_{\parallel} . No painel (a) para $n_{\kappa,e}/n_e = 0$ e no painel (b) para $n_{\kappa,e}/n_e = 5 \times 10^{-2}$; Evolução temporal do espectro das ondas de Langmuir, $\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L$, vs vetor de onda q_{\parallel} , considerando (c) $n_{\kappa,e}/n_e = 0$ e (d) $n_{\kappa,e}/n_e = 5 \times 10^{-2}$; Evolução temporal do espectro das ondas transversais, $\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^T$, vs q_{\parallel} , considerando (e) $n_{\kappa,e}/n_e = 0$ e (f) $n_{\kappa,e}/n_e = 5 \times 10^{-2}$; Evolução temporal do espectro das ondas transversais, $\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^T$, vs frequência normalizada $z_{\mathbf{q}}^T$, considerando (e) $n_{\kappa,e}/n_e = 0$ e (f) $n_{\kappa,e}/n_e = 5 \times 10^{-2}$ [53]. 107

Sumário

1	Introdução	8
2	Revisão da Literatura - Teoria Cinética	12
2.1	Descrição Estatística de um Plasma	12
2.2	Equação de Vlasov	16
2.2.1	Conservação do Número de Partículas	17
2.2.2	Admite Múltiplas Soluções	18
2.2.3	Conservação da Entropia	19
2.3	Sistema de Equações Vlasov-Maxwell	19
2.4	Linearização do Sistema Vlasov-Maxwell	20
2.4.1	Solução da Equação de Vlasov Linearizada para o Caso Eletrostático	21
2.4.2	Consequências do Tratamento Linear: <i>Landau Damping</i>	24
3	Revisão da Literatura - Teoria Quase-Linear	29
3.1	Sistemas de Equações Vlasov-Maxwell na Aproximação Quase-Linear	29
3.2	Equação de Difusão Quase-Linear	31
3.2.1	Coefficiente de Difusão Quase-Linear	33
3.2.2	Densidade Espectral	34
3.3	Leis de Conservação na Teoria Quase-Linear	36
3.3.1	Conservação do Número de Partículas	37
3.3.2	Conservação de Energia	37
3.4	Aplicação da Teoria Quase-Linear: Instabilidade <i>Bump-in-tail</i>	38
3.4.1	Troca de Energia entre Partículas Ressonantes e Não Ressonantes	38
3.4.2	O comportamento da Função Distribuição de Partículas	40
4	Revisão da literatura - Teoria de Turbulência Fraca	44
4.1	Formulação Teórica	45
4.1.1	Equações Cinéticas das Ondas L , S e T	45
4.1.2	Equação Cinética das Partículas	48
4.1.3	Forma da Função Distribuição	52
4.1.4	Espectros Iniciais	53
5	Revisão da Literatura - Distribuições Kappa	58
5.1	Presença de VDFs Kappa em Plasmas Espaciais	59
5.2	Dependência da Distribuição com os Graus de Liberdade	61
5.3	Função Kappa Como Solução Assintótica de Equilíbrio	62
5.4	Função Distribuição Não Térmica	66
5.4.1	Relação de Dispersão das Ondas L e S	68

	7
5.4.2	Espectros Iniciais 72
6	Interação Feixe-Plasma 78
6.1	Emissão de Plasma com Feixe Único 79
6.1.1	Parâmetros Iniciais e Análise Numérica 79
6.1.2	Mecanismos de Emissão 81
6.1.3	Efeitos da Radiação de Fundo 83
6.1.4	Evolução Temporal da Energia Espectral Total para os Modos L , S e T 85
6.1.5	Evolução Temporal da Energia Espectral Total para as Emissões F , $2H$ e $3H$ 86
6.2	Emissão de Plasma com Feixes Contra-Propagantes 87
6.2.1	Parâmetros Iniciais e Análise Numérica 88
6.2.2	Efeito da Variação da Velocidade do Feixe Traseiro 90
6.2.3	Efeito da Variação das Densidades dos Feixes Contrapropagantes . . . 91
6.2.4	Evolução Temporal da Energia Espectral Total para os Modos L , S e T 93
6.2.5	Evolução Temporal da Energia Espectral Total para as Emissões F , $2H$ e $3H$ 94
7	Efeito da Presença de uma Combinação de Funções Distribuição 97
7.1	Parâmetros Iniciais 98
7.2	Espectros Iniciais das Ondas L , S e T 99
7.3	Análise Numérica 101
7.4	Efeito nos Espectros Iniciais das Ondas L e S 102
7.5	Efeito no Espectro Assintótico das Ondas T 103
7.6	Efeito na Interação Feixe-Plasma 104
7.6.1	Evolução Temporal da Função Distribuição 105
7.6.2	Evolução Temporal do Espectro das Ondas L e T 105
7.6.3	Evolução Temporal do Espectro das Emissões de Plasma 106
8	Considerações Finais 108
A	Cálculo das integrais I_1 e I_2 110
B	Cálculo das expressões I_1 e I_2 com limite superior na velocidade 114

Capítulo 1

Introdução

Física de plasmas é essencialmente o estudo dos gases ionizados de baixa densidade. O termo “*plasma*” foi utilizado pela primeira vez por Lewi Tonks e Irving Langmuir em 1929 no artigo *Oscillations in Ionized Gases* para descrever "uma coleção de partículas carregadas" no estudo de oscilações em descargas elétricas. No entanto, a maior característica do estado de plasma, a saber o longo alcance da força de Coulomb e conseqüentemente o comportamento coletivo exibido por partículas carregadas, já tinha sido anteriormente conhecida e descrita por Lord Rayleigh em 1906, em sua análise sobre oscilações eletrônicas no modelo de Thomson para o átomo [18, 2, 5].

A denominação de “*quarto estado da matéria*” foi inventada por William Crookes, em 1879, e provém da seguinte ideia: quando um material sólido é aquecido esse sofre uma transição de fase, geralmente para a fase líquida. Se a esse líquido for adicionado mais calor, em algum momento, passará para o estado gasoso. Caso for acrescido a esse gás mais energia, alguns átomos serão ionizados e em temperaturas acima de 100,000 K a maior parte dessa matéria está em um estado ionizado e esse é denominado como o quarto estado. O estado de plasma pode existir abaixo dessa temperatura, desde que haja um mecanismo de ionização do gás e se a densidade for baixa o suficiente para que a recombinação não seja tão rápida [2, 5].

Naturalmente, todo gás ionizado não pode ser considerado um plasma, pois sempre há um certo grau de ionização em qualquer gás. A definição mais comum é a seguinte: *um plasma é um gás quase-neutro dotado de partículas positivas e negativas, que exhibe um comportamento coletivo*. Uma definição mais profunda dos termos “quase-neutro” e “comportamento coletivo” se faz necessária.

O gás em questão deve ser quase-neutro, ou seja, a densidade de partículas carregadas deve ser suficientemente grande para que em um elemento de volume do sistema a diferença entre as densidades de partículas positivas e negativas seja considerada apenas uma flutuação. É importante notar que, embora não tenham limites, essas partículas não são "livres".

As cargas elétricas produzem campos elétricos, mesmo quando em repouso, e quando se movem representam correntes elétricas, que geram campos magnéticos associados. Como resultado, cada uma é afetada pelos campos das outras. Isto determina o comportamento coletivo com muitos graus de liberdade. O gás ionizado deve também apresentar o que se chama de “blindagem”, em outras palavras, qualquer carga de um determinado sinal vai atrair cargas do sinal oposto e repelir cargas do mesmo sinal, de modo que a efetividade da força elétrica dessa carga acaba limitada a uma determinada distância, conhecida como *comprimento de Debye*.

Mesmo assim, a interação entre as partículas ocorre à distância, não dependendo apenas de colisões diretas, como acontece em gases neutros. Para um plasma que contenha elétrons e íons o comprimento de Debye é definido, no sistema CGS gaussiano, da seguinte forma [2, 6, 5]

$$\lambda_D = \left(\frac{T}{8\pi n q_e^2} \right)^{1/2},$$

onde n é a densidade ou dos íons ou dos elétrons, T é a temperatura, à qual foi incorporada a constante de Boltzman e está em unidades de energia, e q_e é a carga de um elétron.

Outro parâmetro importante é o chamado parâmetro do plasma g , que é proporcional ao inverso do número de partículas contidas em uma esfera de Debye (esfera cujo raio é λ_D) e é definido como

$$g = \frac{1}{n\lambda_D^3}.$$

Com o propósito da blindagem eletrônica ocorrer e a descrição estatística ter validade o número de partículas nessa esfera deve ser enorme, ou seja, $g \ll 1$ e essa suposição chama-se de *aproximação do plasma*. O parâmetro do plasma é sem dúvida o mais importante parâmetro adimensional associado com o plasma e pode ser interpretado como a medida do grau em que o plasma ou os efeitos coletivos influenciam no comportamento das partículas individualmente [18].

No que se refere à abordagem teórica, temos quatro principais: a teoria orbital, a teoria de vários fluidos, a teoria magnetohidrodinâmica e a teoria cinética, e cada uma delas considera diferentes aproximações. A teoria orbital consiste em rastrear o movimento individual de cada partícula com a presença de campos elétricos e magnéticos externos. Ela é usada no estudo de plasmas de pouca densidade e é uma teoria importante para verificar os efeitos físicos dos processos dinâmicos que ocorrem no plasma [4, 5].

Na teoria de vários fluidos, como existem colisões entre as partículas do plasma, cada espécie mantém uma função de distribuição local de equilíbrio, logo, cada espécie pode ser tratada como um fluido diferente. As equações da eletrodinâmica são utilizadas assim como as equações da hidrodinâmica e descrevem as conservações de energia, massa e momentum para cada espécie. A teoria magnetohidrodinâmica (MHD), trata o plasma como um único fluido, somando as equações sobre todas espécies e é útil para estudar fenômenos de baixa frequência que ocorrem em plasmas condutores imersos em campos magnéticos externos [5].

Na teoria cinética, é preciso conhecer a função de distribuição do conjunto de partículas as quais contém todas informações do sistema. As equações cinéticas descrevem a evolução temporal da função distribuição, a partir da qual quantidades físicas de interesse podem ser calculadas. É no âmbito da teoria cinética que nosso estudo se encontra. Desprezando-se efeitos colisionais, os plasmas podem ser descritos pelas equações de Maxwell e por equações de Vlasov para as funções distribuições dos diferentes tipos de partículas do plasma. O sistema de equações formado é complexo e frequentemente é tratado com uso de aproximações, como a aproximação linear e a aproximação quase-linear [6, 18].

A chamada teoria de turbulência fraca é uma abordagem que vai além da teoria quase-linear, incorporando efeitos não lineares de baixa ordem e constituindo-se em um conjunto de equações acopladas para a evolução das funções distribuição de velocidades das partículas e para a evolução das intensidades dos diferentes tipos de ondas levadas em consideração, equações essas que fazem uso de relações de dispersão lineares para essas ondas.

A formulação da teoria de turbulência fraca foi em grande parte desenvolvida entre o final dos anos 1950 e o início dos anos 1970, na sua grande maioria por cientistas da antiga União Soviética [58, 59, 62, 61]. A maioria dos estudos encontrados na literatura dizem respeito a problemas envolvendo oscilações eletrostáticas em plasmas não magnetizados e efeitos eletromagnéticos são usualmente incorporados à teoria apenas no sentido formal. Em período relativamente recente, a teoria de turbulência fraca foi abordada a partir de primeiros princípios, de forma sistemática, inicialmente apenas incorporando efeitos eletrostáticos [63], depois incorporando ao formalismo efeitos de emissão espontânea e depois estendendo o formalismo para incluir efeitos de interações eletromagnéticas [64, 65, 71, 70].

No âmbito do grupo de Física de Plasmas do IF-UFRGS, temos utilizado o formalismo desenvolvido nesses trabalhos recentes para estudo da interação entre um feixe de elétrons e um plasma [63, 64, 65]. Nos primeiros estudos foram apenas incorporados efeitos eletrostáticos, primeiro em uma dimensão e depois em duas dimensões [72]. Foram incluídos inicialmente no formalismo apenas os efeitos de natureza quase-linear e de decaimento de ondas, além do efeito das flutuações espontâneas. Posteriormente foram inseridos os efeitos de espalhamento de ondas, inicialmente considerando apenas o efeito de espalhamento por interação com os íons e mais recentemente, incluído o efeito de espalhamento de ondas devido a interação com elétrons [73, 74, 70].

Mais recentemente a abrangência dos estudos foi estendida, com a inclusão de ondas eletromagnéticas no tratamento numérico do problema. Esse desenvolvimento pode ser motivado considerando que a interação feixe-plasma é caracterizada não só por turbulência de Langmuir como também por emissão de radiação. Como bons exemplos desses tipos de interação na natureza podem ser mencionados os fenômenos de emissão de radiação solar dos tipos II e III (type II and III radio bursts).

É nesse âmbito que se desenvolve esse trabalho. O objetivo desse trabalho envolve uma aplicação do formalismo da teoria de turbulência fraca para o estudo da evolução conjunta de ondas e partículas, associada a plasmas em situações não-térmicas, como é o caso das situações envolvendo a presença de feixes em plasmas. A abordagem é motivada por resultados preliminares que mostram que na presença de um feixe de partículas com características adequadas pode ocorrer a emissão de ondas eletromagnéticas com picos de intensidade bem pronunciados em frequências que correspondem à frequência de plasma e a seu harmônico.

Outro objetivo é investigar outras formas de características não-térmicas. A justificativa para tal tipo de investigação reside no fato de que plasmas em condições espaciais frequentemente são observados exibindo caudas não térmicas e anisotropias, que não são bem descritas por distribuições Maxwellianas, mas sim por distribuições com caudas do tipo lei de potência, conhecidas de maneira genérica como distribuições "Kappa". No contexto da teoria de turbulência fraca, soluções assintóticas aproximadas, bem como soluções numéricas obtidas usando uma aproximação unidimensional, já mostraram que distribuições Kappa podem ser geradas por processos não lineares, o que contribui para motivar a investigação proposta.

Esta tese está dividida em oito capítulos: os cinco primeiros capítulos abrangem toda revisão da teoria que será utilizada. Essa revisão está dividida da seguinte forma: o capítulo 2 abordará uma revisão da teoria cinética, apresentando o sistema de equações Vlasov-Maxwell e evidenciando seu caráter auto-consistente. No mesmo capítulo, serão apresentados, para uma situação relativamente simples, os procedimentos que levam à relação de dispersão na aproximação linear. Como aplicação, será obtida a relação de dispersão para ondas de Langmuir, em um plasma Maxwelliano, e a caracterização do amortecimento de Landau para os elétrons.

No capítulo 3 será apresentada a aplicação do formalismo quase-linear ao sistema de equações Vlasov-Maxwell, sendo deduzida a equação de difusão quase-linear, o coeficiente de difusão que aparece nessa equação, a expressão para a variação temporal da amplitude espectral e as principais propriedades dessa formulação. A dedução será acompanhada por uma discussão sobre as diferenças entre a teoria quase-linear e a abordagem linear apresentada no capítulo anterior, bem como os seus limites de validade. Como aplicação, serão obtidas as principais características da instabilidade do tipo *bump-in-tail*, que formarão as bases para a teoria de turbulência fraca, a qual será abordada posteriormente.

O capítulo 4 versará sobre a teoria de turbulência fraca, apresentando o sistema de equações que descrevem a evolução temporal das intensidades espectrais das ondas e da função distribuição de velocidades. Serão apresentados também as expressões para os espectros iniciais das ondas estudadas. Por fim, no último capítulo de revisão, a saber 5, é apresentada a distribuição de partículas Kappa, sua origem, suas principais características e sua aplicação em plasmas espaciais.

Aqui se encerram as contribuições da revisão bibliográfica e damos início à pesquisa realizada. Nos dois capítulos seguintes serão apresentados os resultados da interação feixe-plasma, utilizando uma descrição Maxwelliana para o plasma de fundo, no qual serão apresentados dois quadros para o feixe incidente: (i) emissão de plasma com feixe único, detalhando os diferentes mecanismos de emissão e analisando a evolução temporal dos espectros a partir da interação de um plasma de fundo e um feixe de partículas; (ii) emissão de plasma com feixes contrapropagantes, que caracteriza também os diferentes mecanismos de emissão de radiação eletromagnética, mas agora em um cenário que contém um plasma de fundo interagindo com feixes contrapropagantes de densidade e velocidade distintos.

Em segundo, temos o capítulo 7 que trata do problema da caracterização de um plasma de fundo descrito por de distribuição de velocidades do tipo núcleo-halo: consiste em um núcleo Maxwelliano e um halo não-Maxwelliano (função distribuição Kappa). Vamos apresentar as modificações nos espectros iniciais na presença desta distribuição, bem como, no âmbito da interação feixe-plasma, os resultados das emissões de plasma nos mesmos moldes da primeira parte do capítulo anterior.

Por fim, o 8 é dedicado às considerações finais, ao resumo dos resultados e ao fechamento da tese.

Capítulo 2

Revisão da Literatura - Teoria Cinética

Um plasma é um sistema que contém um número muito grande de partículas carregadas que interagem, de modo que, para essa análise, é apropriado usar uma abordagem estatística. Determinar como a posição e a velocidade variam ao longo do tempo é fundamental para que se possa obter informações completas sobre um sistema físico. No âmbito da teoria cinética, todas as informações fisicamente relevantes sobre o sistema estão contidas na função distribuição de partículas.

Entretanto, a tamanha quantidade e variedade de componentes impossibilita a determinação desses parâmetros partícula a partícula. Outra dificuldade é determinar a correlação que existe entre seus componentes. Por serem partículas carregadas e em movimento, campos elétricos e magnéticos são gerados e, assim, uma partícula é capaz de afetar outras à distância [5]. O objetivo aqui é estudar um plasma quente e de baixa densidade. Sendo assim, podemos desconsiderar efeitos colisionais entre as partículas.

Essas características definem um sistema com comportamento coletivo, autoconsistente e com interações de médio alcance, no qual, além de não haver efeitos colisionais, o campo gerado por uma partícula induz ou alimenta o campo gerado por outras, sem a necessidade de qualquer intervenção externa.

O conteúdo a ser apresentado tem um caráter de revisão, baseado em abordagem da literatura [18, 2, 5, 6, 7] e foi amplamente revisado em [41].

2.1 Descrição Estatística de um Plasma

Uma descrição completa de um plasma seria conhecer, para cada partícula, sua posição e velocidade em função do tempo. Desta forma, a função $N_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$:

$$N_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{i=1}^{N_\alpha^T} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(\mathbf{t})] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{v}_i(\mathbf{t})], \quad (2.1)$$

descreve inteiramente o sistema microscópico das partículas da espécie α . Temos também que a quantidade

$$N_\alpha^T = \int N_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3x d^3v,$$

é definida como o número total de partículas da espécie α .

É conveniente definir a variável \mathbf{X} hexadimensional no espaço de fases de maneira que $\mathbf{X} = (\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Assim temos que $N_\alpha^T = \int N_\alpha(\mathbf{X}, t) d^6\mathbf{X}$ e $d^6\mathbf{X} = d^3x d^3v$.

Para descrever os campos elétricos e magnéticos temos as equações de Maxwell no sistema CGS de unidades:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}^M &= 4\pi \sum_\alpha q_\alpha \int N_\alpha(\mathbf{X}, t) d^6\mathbf{X}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B}^M &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E}^M &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^M}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B}^M &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^M}{\partial t} + \frac{4\pi}{m_\alpha c} \sum_\alpha q_\alpha \int N_\alpha(\mathbf{X}, t) d^6\mathbf{X}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde m_α e q_α são, respectivamente, a massa e a carga da partícula da espécie α . O índice M indica que os campos elétrico e magnético contidos nas equações de Maxwell são microscópicos. Os campos macroscópicos são obtidos através de uma média dos campos microscópicos [41].

Supondo que há conservação do número de partículas no espaço de fase, podemos escrever:

$$\frac{dN_\alpha(\mathbf{X}, t)}{dt} = \frac{\partial N_\alpha(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial N_\alpha(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E}^M + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}^M}{c} \right) \cdot \frac{\partial N_\alpha(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (2.3)$$

a qual é chamada de *equação de Klimontovich-Dupree* [18].

Uma abordagem estatística trabalha com funções que dão a probabilidade da partícula ser encontrada em um volume infinitesimal do espaço de fase. Podemos definir uma função distribuição F_N que contenha toda informação estatística do sistema:

$$F_N(\mathbf{X}_{\alpha 1}, \dots, \mathbf{X}_{\alpha N_\alpha^T}, \mathbf{X}_{\beta 1}, \dots, \mathbf{X}_{\beta N_\beta^T}; \dots, t) \prod_\gamma d^6\mathbf{X}_{\gamma 1} \dots d^6\mathbf{X}_{\gamma N_\gamma^T}. \quad (2.4)$$

Dessa forma, a expressão (2.4) é a probabilidade de que, no tempo t , as partículas das espécies $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ estejam em torno dos pontos $\mathbf{X}_{\alpha 1}, \dots, \mathbf{X}_{\alpha N_\alpha^T}; \mathbf{X}_{\beta 1}, \dots, \mathbf{X}_{\beta N_\beta^T} \dots$ no espaço de fase. Temos que F_N deve ser normalizada, então:

$$\int F_N(\mathbf{X}_{\alpha 1}, \dots, \mathbf{X}_{\alpha N_\alpha^T}; \mathbf{X}_{\beta 1}, \dots, \mathbf{X}_{\beta N_\beta^T}, t) \prod_\gamma d^6\mathbf{X}_{\gamma 1} \dots d^6\mathbf{X}_{\gamma N_\gamma^T} = 1, \quad (2.5)$$

sendo γ todas as espécies de partículas do sistema. A probabilidade de se encontrar uma certa partícula da espécie α em torno do ponto \mathbf{X}_α no espaço de fases sofre influência de todas as outras partículas do sistema, e uma descrição estatística completa exigiria o total conhecimento das correlações entre as partículas, o que torna inviável uma formulação a partir da distribuição de todas as partículas. No entanto, podemos obter distribuições reduzidas. Por exemplo, a distribuição de uma partícula qualquer da espécie α é obtida integrando a função distribuição completa sobre todas as outras coordenadas, exceto as da partícula em questão. A saber:

$$f_\alpha(\mathbf{r}_{\alpha 1}, \mathbf{v}_{\alpha 1}, t) = V \int F_N d^6\mathbf{X}_{\alpha 2} \dots d^6\mathbf{X}_{\alpha N_\alpha^T} \prod_\gamma d^6\mathbf{X}_{\gamma 1} \dots d^6\mathbf{X}_{\gamma N_\gamma^T}, \quad (2.6)$$

onde V é o volume total do sistema. Então temos que a quantidade $\left(\frac{1}{V}\right) f_\alpha(\mathbf{r}_{\alpha 1}, \mathbf{v}_{\alpha 1}, t) d^6 \mathbf{X}_{\alpha 1}$ é a probabilidade de encontrar uma partícula do tipo α em um elemento de volume $d^6 \mathbf{X}_{\alpha 1}$ do espaço de fases, em torno de $(\mathbf{r}_{\alpha 1}, \mathbf{v}_{\alpha 1})$, no instante t . Entretanto, a probabilidade de se encontrar esta mesma partícula é afetada pela presença de outra partícula nas suas proximidades, e essa informação não está contida em f_α , pois essa distribuição é a mais reduzida possível. A fim de incluir esta influência, podemos definir a distribuição para duas partículas (de espécies α e β), analogamente à distribuição de partícula única:

$$f_{\alpha\beta}(\mathbf{X}_{\alpha 1}, \mathbf{X}_{\beta 1}, t) = V^2 \int F_N d^6 \mathbf{X}_{\alpha 2} \dots d^6 \mathbf{X}_{\alpha N_\alpha^T} d^6 \mathbf{X}_{\beta 2} \dots d^6 \mathbf{X}_{\beta N_\beta^T} \prod_{\xi} d^6 \mathbf{X}_{\xi 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\xi N_\xi^T}, \quad (2.7)$$

a quantidade $\left(\frac{1}{V^2}\right) f_{\alpha\beta}(\mathbf{X}_{\alpha 1}, \mathbf{X}_{\beta 1}, t) d^6 \mathbf{X}_{\alpha 1} d^6 \mathbf{X}_{\beta 1}$ é a probabilidade de encontrarmos simultaneamente as partículas $\alpha 1$ e $\beta 1$ nos elementos de volume $d^6 \mathbf{X}_{\alpha 1}$ e $d^6 \mathbf{X}_{\beta 1}$ em torno dos pontos $\mathbf{X}_{\alpha 1}$ e $\mathbf{X}_{\beta 1}$ no espaço de fases, respectivamente. Caso as partículas α e β sejam independentes, teremos $f_{\alpha\beta} = f_\alpha f_\beta$. A função (2.7) carrega mais informações que a (2.6), no entanto, continua incompleta. Podemos obter a função distribuição m partículas de maneira similar, essa irá conter mais informações que a função distribuição para $m - 1$ partículas, porém permanece sendo reduzida [41].

Agora, uma vez que cada termo de $N_\alpha = \sum_i \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_i)$ descreve a localização da partícula em termos das condições iniciais e que F_N nos dá a probabilidade de termos um determinado conjunto de C.I's, então podemos descrever as distribuições reduzidas em termos das médias dos produtos de N_α sobre todas as possibilidades de condições iniciais.

Assim, o valor médio de $N_\alpha(\mathbf{X}, t)$ é, em termos da função distribuição reduzida para partícula única:

$$\begin{aligned} \langle N_\alpha(\mathbf{X}, t) \rangle &= \int F_N N_\alpha(\mathbf{X}, t) d^6 \mathbf{X}_{\alpha 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\alpha N_\alpha^T} d^6 \mathbf{X}_{\beta 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\beta N_\beta^T} d^6 \mathbf{X}_{\gamma 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\gamma N_\gamma^T} \\ &= n_\alpha f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $n_\alpha = \frac{N_\alpha^T}{V}$ é a densidade média de partículas do tipo α .

Cabe notar que em meios não homogêneos, a densidade em cada ponto pode ser obtida integrando sobre as velocidades, e denotada como $n_\alpha(\mathbf{x}, t)$,

$$n_\alpha(\mathbf{x}, t) = \int n_\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v},$$

de modo que é frequente o uso de um símbolo diferente para indicar a densidade média, como \bar{n}_α , por exemplo. Entretanto, como trataremos apenas de meios homogêneos neste trabalho, sem uso do conceito de densidade como função da posição, usaremos por simplicidade o símbolo n_α para a densidade média, sem risco de confusão.

Para a média envolvendo duas partículas, pode-se mostrar [18]:

$$\langle N_\alpha(\mathbf{X}, t) N_\beta(\mathbf{X}', t) \rangle = n_\alpha n_\beta f_{\alpha\beta}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) + \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}') f_\alpha(\mathbf{X}, t). \quad (2.9)$$

Além disso, se a interação entre as partículas é nula, teremos $\langle N_\alpha N_\beta \rangle \rightarrow \langle N_\alpha \rangle \langle N_\beta \rangle = n_\alpha n_\beta f_\alpha f_\beta$. Os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} macroscópicos são determinados através das médias das equações de Maxwell microscópicas (2.2). Assim, quando feitas, teremos os campos em função da distribuição de uma partícula f_α :

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{E}^M \rangle = \int F_N \mathbf{E}^M d^6 \mathbf{X}_{\alpha 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\alpha N_\alpha^T} d^6 \mathbf{X}_{\beta 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\beta N_\beta^T} d^6 \mathbf{X}_{\gamma 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\gamma N_\gamma^T},$$

$$\mathbf{B} = \langle \mathbf{B}^M \rangle = \int F_N \mathbf{B}^M d^6 \mathbf{X}_{\alpha 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\alpha N_\alpha^T} d^6 \mathbf{X}_{\beta 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\beta N_\beta^T} d^6 \mathbf{X}_{\gamma 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\gamma N_\gamma^T}.$$

O sistema físico é totalmente descrito pela evolução temporal da função de distribuição completa, F_N , e essa equação é chamada de *equação de Liouville*. A determinação de todas as condições de contorno iniciais para a função distribuição completa é muito difícil de ser obtida. Por isso, faremos uso de distribuições reduzidas, com as quais ao mesmo tempo é viável obter informações relevantes do sistema e é possível a determinação das condições iniciais.

Para obter uma equação para a distribuição reduzida de uma partícula começamos por tomar a média espacial de (2.3) e juntamente com a definição obtida em (2.8) teremos

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_\alpha}{n_\alpha m_\alpha} \left\langle \left(\mathbf{E}^M + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}^M}{c} \right) \cdot \frac{\partial N_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle = 0. \quad (2.10)$$

Embora não seja explícita a correlação entre as partículas na equação acima, ela existe, e para melhor visualizarmos, utilizamos a aproximação de Coulomb. Nesta supomos que efeitos retardados e contribuições do campo magnético, $\mathbf{B}^M = 0$, são negligenciados.

Admitindo que $\mathbf{B}^M = 0$, podemos escrever o campo elétrico em função de um potencial escalar ϕ^M , e juntamente com a equação de Poisson obtemos:

$$\phi^M(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha \int \frac{N_\alpha(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' d\mathbf{p}' \quad (2.11)$$

Agora podemos reescrever a equação (2.10) como

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = \\ & - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left[\left\langle \left(\mathbf{E}^M + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}^M}{c} \right) \cdot \frac{\partial N_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle - \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Para partículas não interagentes, pode-se mostrar que o lado direito dessa equação é nulo.

Usando-se a equação (2.11), pode-se mostrar que a equação (2.12) não é fechada para f_α , pois envolve a média do produto $\langle N_\alpha N_\beta \rangle$ e, portanto, depende da distribuição de duas partículas. Deve-se determinar então uma equação para a evolução temporal de $f_{\alpha\beta}$, e ao fazer isso, mostra-se que essa equação também não é independente, porque nela aparece a distribuição de três partículas $f_{\alpha\beta\gamma}$. Genericamente, pode-se mostrar que na equação de evolução temporal para a distribuição de $n - 1$ partículas ($n < N$) aparecerá a distribuição para n partículas, formando uma hierarquia de equações, denominada de hierarquia BBGKY (Bogolyubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon).

Uma maneira conveniente de expressar as distribuições de mais de uma partícula é em termos de produtos de funções distribuição de partícula única. Por exemplo, as distribuições de duas e três partículas podem ser escritas como:

$$f_{\alpha\beta}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) = f_\alpha(\mathbf{X}, t) f_\beta(\mathbf{X}', t) + g_{\alpha\beta}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t), \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \mathbf{X}'', t) &= f_{\alpha}(\mathbf{X}, t) f_{\beta}(\mathbf{X}', t) f_{\gamma}(\mathbf{X}'', t) \\
&\quad + f_{\alpha}(\mathbf{X}, t) g_{\beta\gamma}(\mathbf{X}', \mathbf{X}'', t) \\
&\quad + f_{\beta}(\mathbf{X}', t) g_{\alpha\gamma}(\mathbf{X}, \mathbf{X}'', t) \\
&\quad + f_{\gamma}(\mathbf{X}'', t) g_{\alpha\beta}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) \\
&\quad + g_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \mathbf{X}'', t),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

onde $g_{\alpha\beta}$ e $g_{\alpha\beta\gamma}$ são, respectivamente, as correlações de ordem dois e três [18, 2, 5, 6]. Em um sistema no qual as partículas são independentes, as correlações de qualquer ordem serão nulas.

Assim como uma descrição estatística com a função de distribuição completa F_N é inviável, determinar todas as correlações de um sistema com muitas partículas também o é. Entretanto, aproximações podem ser feitas para as correlações, gerando assim, um conjunto fechado de equações para as distribuições reduzidas. Considerando um gás neutro e rarefeito, por exemplo, o comprimento r_0 , parâmetro associado às interações entre partículas, é muito menor que a distância média entre elas, dada por $n^{-1/3}$, no qual n é a densidade de partículas. Sendo assim, é razoável supor que as correlações nesse caso são da ordem de $(nr_0^3)^{k-1}$, onde k é a ordem da correlação (para partículas completamente independentes, $nr_0^3 = 0$ ou $g_{\alpha\beta} = 0$). Dessa maneira, teríamos $g_{\alpha\beta} \sim nr_0^3$ e $g_{\alpha\beta\gamma} \sim (nr_0^3)^2$, o que nos mostra que (considerando $nr_0^3 \ll 1$) a correlação de terceira ordem $g_{\alpha\beta\gamma}$ será muito menor que a de segunda ordem $g_{\alpha\beta}$, que por sua vez será muito menor que o produto das distribuições independentes $f_{\alpha}f_{\beta}$.

O parâmetro em que estamos interessados nesse caso é $g = 1/n\lambda_D^3 \ll 1$ e pode-se mostrar que as correlações do tipo $g_{\alpha\beta}$ são pequenas quando comparadas com $f_{\alpha}f_{\beta}$ no caso de $g \ll 1$ [18]. E a razão disso é que a distribuição conjunta $f_{\alpha\beta}$ em um volume pequeno V , bem maior do que o volume ocupado por uma partícula ($\sim n^{-1}$) mas bem menor do que o volume de uma esfera de Debye, é determinada por muitas partículas no exterior de V , e não pela separação entre as partículas, de modo que a distribuição $f_{\alpha\beta}$ para uma boa aproximação é aquela que independe da interação entre duas partículas $f_{\alpha\beta} \approx f_{\alpha}f_{\beta}$. Essa aproximação torna-se exata para $g \rightarrow 0$. Então, podemos fechar a cadeia de equações desprezando as correlações de mais alta ordem. Na próxima sessão será apresentada a *Equação de Vlasov*, que é a equação cinética de ordem zero, na qual todas as correlações são desprezadas.

2.2 Equação de Vlasov

Uma aproximação muito útil consiste em descrever a dinâmica de um plasma considerando que os movimentos das partículas do plasma são governados pela soma dos campos externos aplicados e os campos internos médios macroscópicos, suavizados no espaço e no tempo, devido à presença e ao movimento de todas as partículas do plasma. A determinação desses campos ainda é um problema complexo, e exige que seja obtida uma solução auto-consistente. [5].

A denominada *Equação de Vlasov* é uma equação diferencial parcial que descreve a evolução temporal da função distribuição das partículas e leva em conta os campos internos médios macroscópicos.

Como mencionado anteriormente, a descrição mais simples da cadeia de equações estatísticas é aquela que despreza todas as correlações. Dessa forma, a Equação de Vlasov é:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right] f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0, \tag{2.15}$$

onde $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ e $\nabla_{\mathbf{v}} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$.

Podemos ainda adicionar um termo à equação acima referente às colisões entre as partículas.

Ao perturbarmos o estado de equilíbrio de um plasma (injetando um feixe de partículas, por exemplo), este leva um tempo característico até que volte novamente ao equilíbrio (mediante colisões), esse parâmetro é chamado de *tempo de relaxação*. Se o plasma for suficientemente "quente" e rarefeito, o tempo de relaxação será maior do que o tempo característico de muitos fenômenos ondulatórios que podem ocorrer no plasma, e só é interessante levá-lo em conta no caso de estudo de fenômenos de longa duração.

Como estamos interessados em fenômenos ondulatórios cujos períodos são bem menores do que o intervalo de tempo típico entre colisões, podemos desconsiderar o termo colisional. A equação de Vlasov apresenta algumas propriedades interessantes, as quais serão discutidas a seguir.

2.2.1 Conservação do Número de Partículas

Característica também das equações exatas, a equação de Vlasov conserva o número total de partículas. Isto é, a variação temporal do número total de partículas é nula. A fim de mostrar tal propriedade vamos começar multiplicando a equação (2.15) por n_{α} e integrando sobre todo o intervalo no espaço de fases:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int n_{\alpha} f_{\alpha} d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \int n_{\alpha} \left[-\mathbf{v} \cdot \nabla - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right] f_{\alpha} d\mathbf{x} d\mathbf{v}. \quad (2.16)$$

Sabendo que a função distribuição deve se anular nos limites de integração, temos do primeiro termo

$$\int \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha} d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \sum_i \int v_i \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i} dx_i dx_j dx_k d\mathbf{v} = 0.$$

Do segundo, uma vez que o campo elétrico \mathbf{E} é função apenas de \mathbf{x} e t , mas não de \mathbf{v} , e usando novamente a propriedade da f_{α} nos limites

$$\int \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha} d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \sum_i \int E_i \left[\int \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial v_i} dv_i dv_j dv_k \right] d\mathbf{x} = 0.$$

De maneira similar, no terceiro termo temos

$$\int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha} d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \int v_i B_j \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial v_k} dv_i dv_j dv_k d\mathbf{x} = 0.$$

Assim, temos que a equação (2.16) resulta em

$$\frac{\partial}{\partial t} \int n_{\alpha} f_{\alpha} d\mathbf{x} d\mathbf{v} = 0.$$

E, portanto, conclui-se que o número de partículas é constante.

2.2.2 Admite Múltiplas Soluções

Em contraste com as equações exatas nas quais admitem solução única de equilíbrio, a equação de Vlasov admite inúmeras soluções.

Os denominados estados de metaequilíbrio são aqueles estados possíveis apenas para escalas de tempo muito menores do que o tempo entre colisões. Uma solução possível deve satisfazer a condição:

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = 0,$$

então de (2.15) temos:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right] f_{\alpha 0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0. \quad (2.17)$$

Tendo os campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} podemos escrever as seguintes equações de movimento para uma dada partícula:

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt'} = \mathbf{v}' \quad \text{e} \quad \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}}{dt'} \right), \quad (2.18)$$

cujas soluções são $\mathbf{x}'(t)$ e $\mathbf{v}'(t)$. Dentre a família de soluções escolhemos aquela que satisfaz a condição $(\mathbf{x}', \mathbf{v}') = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$ no instante $t' = t$. Se as quantidades $a'(\mathbf{x}', \mathbf{v}')$ e $b'(\mathbf{x}', \mathbf{v}')$ forem constantes de movimento dessa partícula, elas devem satisfazer

$$\begin{aligned} \frac{da'}{dt'} &= \mathbf{v}' \cdot \frac{\partial a'}{\partial \mathbf{x}'} + \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} \cdot \frac{\partial a'}{\partial \mathbf{v}'} = 0, \\ \frac{db'}{dt'} &= \mathbf{v}' \cdot \frac{\partial b'}{\partial \mathbf{x}'} + \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} \cdot \frac{\partial b'}{\partial \mathbf{v}'} = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Supondo uma função arbitrária $f = f(a', b')$ e levando em conta as equações (2.18) e as condições (2.19), vemos que esta deverá satisfazer a equação de Vlasov no equilíbrio

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right] f(a', b') = \\ & \mathbf{v}' \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial a'} \frac{\partial a'}{\partial \mathbf{x}'} + \frac{\partial f}{\partial b'} \frac{\partial b'}{\partial \mathbf{x}'} \right] + \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial a'} \frac{\partial a'}{\partial \mathbf{v}'} + \frac{\partial f}{\partial b'} \frac{\partial b'}{\partial \mathbf{v}'} \right] = \\ & \frac{\partial f}{\partial a'} \left[\mathbf{v}' \cdot \frac{\partial a'}{\partial \mathbf{x}'} + \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} \cdot \frac{\partial a'}{\partial \mathbf{v}'} \right] + \frac{\partial f}{\partial b'} \left[\mathbf{v}' \cdot \frac{\partial b'}{\partial \mathbf{x}'} + \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} \cdot \frac{\partial b'}{\partial \mathbf{v}'} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Como $(\mathbf{x}', \mathbf{v}') = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$ para todo instante $t' = t$, temos que a função $f(a', b')$ satisfaz à condição de ser solução estacionária da equação de Vlasov. Em outras palavras, soluções que são funções de constantes de movimento assumem valores constantes ao longo de trajetórias reais no espaço de fase e, assim, satisfazem a equação de Vlasov.

2.2.3 Conservação da Entropia

Seja a definição usual de entropia

$$S = - \sum_{\alpha} \int f_{\alpha} \ln(f_{\alpha}) d\mathbf{x} d\mathbf{v}. \quad (2.21)$$

Calculando a variação temporal da equação acima e utilizando as equações (2.15) e (2.16) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= - \sum_{\alpha} \int \left[\mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right] f_{\alpha} d\mathbf{x} d\mathbf{v}, \\ \frac{dS}{dt} &= \frac{1}{n_{\alpha}} \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \int n_{\alpha} f_{\alpha} d\mathbf{x} d\mathbf{v}, \\ \frac{dS}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ou seja, na aproximação que usa a equação de Vlasov, a entropia permanece constante.

Vamos agora supor sistemas em que a função distribuição pode ser decomposta em uma soma de uma função distribuição de ordem zero e de uma perturbação,

$$f_{\alpha} = f_{\alpha 0}(t) + f_{\alpha 1}(t),$$

sendo que $f_{\alpha 0}$ é constante ou varia lentamente no tempo em relação a $f_{\alpha 1}$ [18, 7]. Para tais sistemas, é conveniente definir a entropia da seguinte maneira

$$S^* = - \int f_{\alpha 0}(t) \ln[f_{\alpha 0}(t)] d\mathbf{x} d\mathbf{v}.$$

Com essa nova definição, levando-se em conta a evolução da $f_{\alpha 0}$ sob efeito das perturbações, pode-se mostrar que a entropia não mais é constante e pode ser usada para mensurar o crescimento da desordem do sistema [18].

2.3 Sistema de Equações Vlasov-Maxwell

Juntamente com as equações de Maxwell formamos o seguinte sistema:

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha} = 0, \quad (2.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha} d\mathbf{v}, \quad (2.24)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha} d\mathbf{v}, \quad (2.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.27)$$

que é denominado *sistema de Vlasov-Maxwell*.

A densidade de carga do plasma ρ e a densidade da corrente \mathbf{J} são dadas pelas seguintes expressões:

$$\rho = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$$

e

$$\mathbf{J} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v},$$

nas quais a soma em α leva em conta as diferentes espécies de partículas carregadas, com $\alpha = i$, para íons e $\alpha = e$, para elétrons.

Os fenômenos descritos por esse sistema (plasmas estacionários, ou seja, aqueles em que não há deslocamento efetivo de carga, ondas em plasmas, instabilidades,...) ocorrem em escalas de tempos muito menores que o tempo típico entre colisões ($\tau_{coletivo} \ll \tau_{colisional}$) [18, 6].

As expressões (2.23) a (2.27) formam um conjunto completo e auto-consistente de equações, no qual fica explícito que, embora não haja colisões entre as partículas, elas interagem entre si através de campos eletromagnéticos gerados e modificados internamente não só pelo seu próprio deslocamento e pelo deslocamento de outras partículas carregadas através do plasma, mas também apenas pela presença de carga [5].

2.4 Linearização do Sistema Vlasov-Maxwell

O conjunto de equações Vlasov-Maxwell é não-linear, devido aos produtos dos campos e das distribuições e, conseqüentemente, difícil de solucionar. No entanto, muitos fenômenos podem ser caracterizados como pequenas perturbações da solução de equilíbrio de Vlasov e podem ser tratados pelo método da *linearização*. As equações geradas são muito mais simples de resolver e formam as bases de muitas teorias modernas que tratam de fenômenos não lineares, plasmas empoeirados, interação feixe plasma, entre outros [18, 2, 6].

Escrevemos os campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} e a função distribuição f_{α} como uma soma de seus valores no equilíbrio mais uma perturbação,

$$\begin{aligned} f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= f_{\alpha 0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \epsilon f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{x}, t) + \epsilon \mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{B}_0(\mathbf{x}, t) + \epsilon \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \tag{2.28}$$

onde $\epsilon \ll 1$ é um parâmetro utilizado para indicar que a perturbação tem módulo bem menor do que a parte não perturbada, caso em que a teoria linear pode ser utilizada como uma boa aproximação. O índice "0" indica o valor da grandeza no equilíbrio e o "1", da perturbação. Inserindo as quantidades (2.28) no sistema Vlasov-Maxwell (2.23)-(2.27), desprezando termos de ordem ϵ^2 e separando o sistema de equações de acordo com os termos de ordem ϵ^0 e ϵ^1 obtemos respectivamente,

ϵ^0 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_{\alpha 0} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0} &= 0, \\
\nabla \cdot \mathbf{E}_0 &= 4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \int f_{\alpha 0} d\mathbf{v}, \\
\nabla \times \mathbf{B}_0 &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha 0} d\mathbf{v}, \\
\nabla \times \mathbf{E}_0 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t}, \\
\nabla \cdot \mathbf{B}_0 &= 0,
\end{aligned} \tag{2.29}$$

ϵ^1 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha 1} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 1}, \\
= -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}, \\
\nabla \cdot \mathbf{E}_1 &= 4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha 1} d\mathbf{v}, \\
\nabla \times \mathbf{B}_1 &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha 1} d\mathbf{v}, \\
\nabla \times \mathbf{E}_1 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}, \\
\nabla \cdot \mathbf{B}_1 &= 0.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Um ponto importante a salientar é que o conjunto de equações obtido serve para descrever perturbações de pequena amplitude que ocorrem no plasma, com tempos característicos bem menores do que tempo médio entre colisões. Na próxima subseção será explorada como exemplo a solução mais simples do conjunto de equações para as perturbações: o caso eletrostático.

2.4.1 Solução da Equação de Vlasov Linearizada para o Caso Eletrostático

Seja um plasma espacialmente homogêneo. Se, no instante $t = 0$, uma pequena quantidade de carga for deslocada, a perturbação inicial pode ser descrita como

$$f(t = 0) = f_{\alpha 0}(v_x, v_y, v_z) + \epsilon f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t = 0).$$

E, considerando que o campo elétrico no equilíbrio é nulo e o caso não magnetizado, teremos

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \epsilon \mathbf{E}_1 = \epsilon \mathbf{E}_1,$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \epsilon \mathbf{B}_1 = 0.$$

Naturalmente as condições acima nos levam a

$$\rho_0 = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \int f_{\alpha 0} d\mathbf{v} = 0,$$

$$\mathbf{J}_0 = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha 0} d\mathbf{v} = 0.$$

Sabemos que no caso puramente eletrostático, $\mathbf{B}_1 = 0$, o campo elétrico está diretamente relacionado à variação espacial do potencial elétrico, com seu vetor sendo oposto à direção de crescimento do potencial. Ou seja, o campo elétrico é o negativo do gradiente do potencial:

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla\Phi_1,$$

e também temos que

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = 0.$$

A função de distribuição de equilíbrio $f_{\alpha 0}$ é admitida como constante no tempo, então o termo que leva sua derivada temporal é nulo. E, como é pressuposto o plasma homogêneo, o termo referente à sua derivada espacial, dado por $\nabla f_{\alpha 0}$, também o é. Feita a aproximação eletrostática, o sistema de equações lineares é reduzido a

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha 1} - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla\Phi_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0} = 0, \quad (2.31)$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = -4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha 1} d\mathbf{v}. \quad (2.32)$$

Para resolver o sistema de equações Vlasov-Maxwell linearizado, vamos escrever as quantidades $f_{\alpha 1}$ e Φ_1 em termos de suas transformadas de Fourier no espaço e de Laplace no tempo

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, p) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f_{\alpha 1} dt, \\ \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, p) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \Phi_1 dt. \end{aligned} \quad (2.33)$$

É importante notar que a transformada de Laplace só estará definida para $\text{Re}(p) \geq p_0$, no qual p_0 é suficientemente grande e garante a convergência da integral. A vantagem dessa representação é que a propriedade de derivadas da transformada de Fourier nos permite substituir as derivadas espaciais, ∇ , e temporais, $\frac{\partial}{\partial t}$, por $i\mathbf{k}$ e $-i\omega$ respectivamente, uma vez que $\omega = ip$. Uma vez conhecida $\tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}}$, podemos inverter as integrais (2.33) e assim determinar $f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ e $\Phi_1(\mathbf{x}, t)$. As transformadas inversas são definidas como

$$\begin{aligned} f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} e^{pt} \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}} dp, \\ \Phi_1(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} e^{pt} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} dp. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Aplicando as transformadas de Fourier e de Laplace nas equações (2.31) e (2.32) e lembrando que $f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0}(\mathbf{v})$ temos o seguinte sistema de equações:

$$(p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}} = f_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t = 0) + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (i\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}) \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}, \quad (2.35)$$

$$k^2 \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} = 4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \int \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}} d\mathbf{v}. \quad (2.36)$$

Substituindo (2.35) em (2.36) e, eliminando $\tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}}$ obtemos uma expressão para $\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}$:

$$k^2 \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \int \frac{f_{\alpha\mathbf{k}}(t=0) d\mathbf{v}}{p+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}}{1 + 4\pi \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \frac{1}{k^2} \int \frac{\mathbf{k}\cdot\nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0} d\mathbf{v}}{ip-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}}, \quad (2.37)$$

onde temos ainda que $\text{Re}(p) \geq p_0$. A fim de simplificar a apresentação desta equação para $\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}$, seja u a componente da velocidade paralela a \mathbf{k}

$$u = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{k}|}.$$

Sendo assim, temos

$$F_{\alpha 0}(u) \equiv \int f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) \delta\left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{k}|}\right) d\mathbf{v},$$

$$\tilde{F}_{\alpha\mathbf{k}} \equiv \int \tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}} \delta\left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{k}|}\right) d\mathbf{v}.$$

Definimos também a frequência angular do plasma para partículas do tipo α como

$$\omega_{p\alpha}^2 = \frac{4\pi n_{\alpha} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}}.$$

De modo que podemos definir a função dielétrica $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{k}, ip)$ de um plasma para ondas eletrostáticas de frequência $\omega = ip$:

$$D(\mathbf{k}, ip) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F_{\alpha 0} / \partial u}{u - ip / |\mathbf{k}|} du. \quad (2.38)$$

Utilizando as definições recém feitas, substituindo (2.38) em (2.37), temos as seguintes expressões para $\tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}}$ e para $\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}$ respectivamente:

$$\tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v}, p) = \frac{1}{p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \left[f_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t=0) + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (i\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}) \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} \right], \quad (2.39)$$

$$\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} = \frac{-i}{|k^3| D(\mathbf{k}, ip)} \sum_{\alpha} 4\pi n_{\alpha} q_{\alpha} \int \frac{F_{\alpha\mathbf{k}}(u, t=0)}{u - ip / |\mathbf{k}|} du. \quad (2.40)$$

Para resolver este sistema, precisamos determinar as transformadas inversas, e com isso, começamos pela expressão de Φ_1 , pois a dependência temporal da transformada de Fourier do potencial que aparece em $f_{\alpha 1}$ é consequência do mesmo. Então, seja a transformada inversa de Laplace definida em (2.34) para o potencial,

$$\Phi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \frac{e^{pt} dt}{D(\mathbf{k}, ip)} 4\pi \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha} q_{\alpha}}{k^2} \int \frac{F_{\alpha\mathbf{k}}(u, t=0)}{(p+i|\mathbf{k}|u)} du. \quad (2.41)$$

Tomamos um valor de p_0 com $p > p_0$ de modo a garantir a convergência das integrais que definem as transformações de Laplace, de tal forma que todas as singularidades de $\Phi_{\mathbf{k}}(p)$ devem estar à esquerda do contorno de integração. De maneira geral, não é possível calcular analiticamente estas integrais, no entanto, é possível determinar soluções para tempos muito distantes da perturbação inicial. Assim, o comportamento assintótico do sistema é determinado pelos modos normais de oscilação do plasma, e não pelo resultado obtido após o estado de transição ocasionado pela perturbação inicial.

2.4.2 Consequências do Tratamento Linear: *Landau Damping*

O contorno de integração na equação (2.41) é muito importante, pois existem valores os quais anulam o denominador, gerando singularidades. A fim de evitar tais pontos e obter a solução assintótica, devemos deformar o contorno de integração no espaço de p e como consequência, deformar também o contorno no espaço de velocidades, assegurando que o contorno passe sempre por baixo dos polos de $\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}$, conforme mostrado na Figura 2.1. Esse contorno é chamado de *contorno de Landau*, após Landau, em 1946, solucionar a equação de Vlasov como um problema de valor inicial, desenvolvendo tal técnica [19].

Supondo que todos os zeros da função $D(\mathbf{k}, ip)$ estejam à esquerda de p_0 , Figura 2.2, deformando o contorno de integração transpondo para o lado de $\text{Re}(p) < 0$ por um parâmetro σ afim de que fique à direita dos pólos, mas contornando todas as singularidades, p_j , e sendo R_j o resíduo, com $R_j = \lim_{p \rightarrow p_j} (p - p_j) \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p)$, e fazendo a integração de todo caminho, ficamos com as seguintes integrais:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{k}}(t) = & \sum_j R_j e^{p_j(\mathbf{k})t} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+p_0}^{-i\infty-\sigma} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p) e^{pt} dp \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p) e^{pt} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{+i\infty-\sigma}^{+i\infty+p_0} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p) e^{pt} dp, \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde $D[\mathbf{k}, ip_j(\mathbf{k})] = 0$. Na equação (2.42), o segundo e o quarto termos são pequenos, se a $\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p)$ for a zero rapidamente com $|p| \rightarrow \infty$ [18].

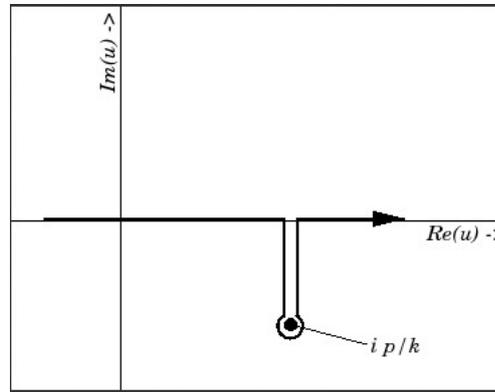


Figura 2.1: Contorno de Landau[41]

Já o terceiro, torna-se exponencialmente menor que os termos referentes às contribuições dos pólos para $t \rightarrow \infty$. No caso de termos $\text{Re}(p_j) < 0$, ou seja, no caso dos pólos estarem todos à esquerda do eixo, então todas as contribuições para $\Phi_{\mathbf{k}}$ são amortecidas. No entanto, se tivermos polos localizados à direita do eixo, $\text{Re}(p_j) > 0$, então teremos o surgimento de instabilidades. Assim a solução assintótica para a equação de Vlasov é dada por,

$$\Phi_{\mathbf{k}}(t \rightarrow \infty) = \sum_{j=1}^N R_j e^{p_j(\mathbf{k})t}, \quad (2.43)$$

onde p_j são as singularidades de $\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}$, em número de N [18].

Podemos escrever de uma maneira mais familiar, em termos de uma frequência dividida em parte real e imaginária, definida por $p_j = -i\omega_j = -i\omega_{rj} + \omega_{ij}$. E a solução em termos da

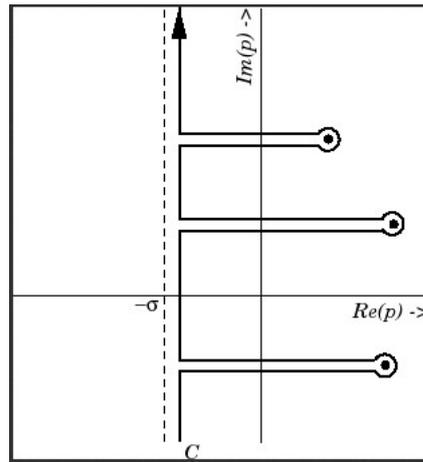


Figura 2.2: Contorno de Landau [41]

frequência

$$\Phi_{\mathbf{k}}(t \rightarrow \infty) = \sum_{j=1}^N R_j e^{(-i\omega_{rj} + \omega_{ij})t}.$$

Assim, as singularidades que têm $\omega_{ij} < 0$, representam oscilações amortecidas, já as que têm $\omega_{ij} > 0$, oscilações que são amplificadas. Em outras palavras, o comportamento assintótico das perturbações fica determinado pelos pontos nos quais $D(\mathbf{k}, \omega)$ é zero.

A equação resultante

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int_L \frac{\partial F_{\alpha 0} / \partial u}{u - \omega / |k|} du = 0, \quad (2.44)$$

é chamada de *relação de dispersão do plasma*, pois fornece uma expressão para a frequência de oscilação do plasma ω em função do número de onda k característico. É importante notar que tal relação de dispersão só existe para tempos inferiores ao tempo médio entre colisões. O índice L no limite de integração representa o caminho de integração no plano complexo, contorno de Landau, mencionado anteriormente.

O sistema mais simples que podemos considerar é ondas de alta frequência em um plasma livre de campos elétrico e magnético e em equilíbrio termodinâmico. Como vamos considerar oscilações de alta frequência e velocidade de fase muito maior que a velocidade térmica das partículas do plasma, isto é, a velocidade associada à temperatura das partículas, $\omega/k \gg v_{\text{térmica}}$, podemos considerar os íons como estando em repouso. Para os elétrons, supomos uma função distribuição do tipo maxwelliana

$$F_{e0} = n_e \left(\frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\left(\frac{m_e v^2}{2T_e} \right)}, \quad (2.45)$$

onde T_e , n_e e m_e são a temperatura, na qual foi incorporada a constante de Boltzmann e está em unidades de energia, a densidade de equilíbrio e a massa dos elétrons. A função F_{e0} está normalizada de modo que $\int d^3v F_{e0} = n_e$, mas podemos também definir uma forma normalizada à unidade, ou seja $f_{e0} = F_{e0}/n_e$, tal que $\int d^3v f_{e0} = 1$. Temos também que a velocidade está separada em componente paralela u e componente perpendicular v_{\perp} ao vetor de onda \mathbf{k} de tal forma que $v^2 = u^2 + v_{\perp}^2$.

Substituindo a expressão para a função distribuição inicial (2.45) na relação de dispersão (2.44) e introduzindo as variáveis $z = \omega/\sqrt{2}ku_e$, $y = u/\sqrt{2}u_e$ e $u_e = \sqrt{T_e/m_e}$ teremos

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 u_e^2} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int_L \frac{e^{-y^2}}{z-y} dy \right] = 0. \quad (2.46)$$

Podemos reescrever a equação de dispersão (2.46) em termos da função de dispersão do plasma,

$$Z(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_L \frac{e^{-y^2}}{y-z} dy, \quad (2.47)$$

função que foi bastante investigada e desenvolvida por *Fried & Conte*, em 1961, e que tem propriedades bem conhecidas e tabeladas [10]. Assim teremos

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 u_e^2} [1 + zZ(z)] = 0.$$

Essa relação de dispersão pode ser resolvida de forma numérica. No entanto, para certos casos, podemos fazer uso de algumas propriedades da função $Z(z)$ e assim obter um resultado analítico. Como estamos considerando ondas de altas frequências, com $\omega/k \gg u_e$, temos $|z| \gg 1$, e, uma vez que podemos escrever a variável z em parte real e imaginária $z = x + iy$, e que $|\text{Im}(z)| \ll 1$, a função $Z(z)$ pode ser escrita de forma analítica [18]

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_L \frac{e^{-z^2}}{y-z} dy = -\frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{4z^4} + \frac{15}{8z^6} + \dots \right) + i\sqrt{\pi}e^{-z^2}.$$

Considerando apenas os três primeiros termos da expansão temos

$$D(\mathbf{k}, \omega) \simeq 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 u_e^2} \left[-\frac{1}{2z^2} - \frac{3}{4z^4} + iz\sqrt{\pi}e^{-z^2} \right] = 0. \quad (2.48)$$

Separando a relação de dispersão em parte real D_r e parte imaginária D_i , e como temos $|\omega_i| \ll |\omega_r|$, então podemos expandir a relação de dispersão em torno da frequência ω_r

$$\begin{aligned} D(\mathbf{k}, \omega) &\simeq D(\mathbf{k}, \omega_r) + i\omega_i \left. \frac{\partial D(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_r} \\ &= D_r(\mathbf{k}, \omega_r) + iD_i(\mathbf{k}, \omega_r) + \omega_i \left[i \frac{\partial D_r(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} - \frac{\partial D_i(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right] \Big|_{\omega=\omega_r}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Da equação (2.49) temos que a parte real da relação de dispersão é

$$D_r(\mathbf{k}, \omega) \Big|_{\omega=\omega_r} - \omega_i \left. \frac{\partial D_i(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_r} = 0,$$

e como $|\omega_i| \ll |\omega_r|$ podemos aproximar a parte real da relação de dispersão na seguinte forma

$$D_r(\mathbf{k}, \omega) \Big|_{\omega=\omega_r} \simeq 0.$$

E assim, da equação (2.48) e, utilizando a definição de z feita anteriormente, temos

$$\omega^4 - \omega_{pe}^2 \omega^2 - 3\omega_{pe}^2 k^2 u_e^2 = 0,$$

equação que pode ser facilmente resolvida,

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{\omega_{pe}^2}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + 12k^2 u_e^2 / \omega_{pe}^2} \right], \\ \omega^2 &\simeq \frac{\omega_{pe}^2}{2} \left[1 \pm \left(1 + 6 \frac{k^2 u_e^2}{\omega_{pe}^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.50)$$

O último passo é justificado porque $k^2 u_e^2 / \omega_{pe}^2 \ll 1$. São obtidas duas soluções matemáticas para ω_r , no entanto, a raiz negativa de (2.50) fornece uma frequência imaginária, o que não nos interessa. A raiz positiva resulta em

$$\omega_r^2 = \omega_{pe}^2 \left(1 + 3 \frac{k^2 u_e^2}{\omega_{pe}^2} \right).$$

Essa raiz é consistente, uma vez que já é sabido da teoria de fluidos que para tais condições a frequência real ω_r é bem próxima da frequência natural do plasma ω_{pe} , logo a condição $k^2 u_e^2 / \omega_{pe}^2 \ll 1$ é condizente com a aproximação inicial $(\omega/k) \gg u_e$. Portanto, para as ondas de alta frequência, ou também conhecidas como "ondas de Langmuir"

$$\omega = \omega_{pe} \left(1 + 3 \frac{k^2 u_e^2}{\omega_{pe}^2} \right)^{1/2} \simeq \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{k^2 u_e^2}{\omega_{pe}^2} \right).$$

Considerando a parte imaginária da equação (2.49), obtemos

$$\omega_i = -\frac{D_i(\mathbf{k}, \omega_r)}{\partial D_r(\mathbf{k}, \omega) / \partial \omega |_{\omega_r}},$$

e com o uso da expressão (2.48) chegamos à seguinte expressão para a parte imaginária da frequência angular da onda,

$$\omega_i = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega^4}{k^3 u_e^3} e^{-\left(\frac{\omega^2}{2k^2 u_e^2}\right)}. \quad (2.51)$$

Em termos do comprimento de Debye λ_{De} , as frequências, real e imaginária, ficam respectivamente

$$\begin{aligned} \omega_r &= \omega_{pe} \left(1 + k^2 \lambda_{De}^2 \right)^{1/2}, \\ \omega_i &\simeq -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}}{k^3 \lambda_{De}^3} e^{-\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2k^2 \lambda_{De}^2}\right)}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde em ω_i utilizamos o fato de que podemos substituir $\omega_r \simeq \omega_{pe}$ sem perda de precisão, exceto no argumento da exponencial, pois esse é mais sensível a pequenas diferenças. As equações obtidas (2.52) são válidas para oscilações de grandes comprimentos de onda $\lambda \gg \lambda_{De}$ e, como dito anteriormente, isso condiz com o fato de que assumimos que a velocidade de fase é bem acima da velocidade térmica.

O significado físico do amortecimento de Landau

O avanço teórico do amortecimento de ondas sem dissipação de energia por colisões é, talvez, o resultado mais surpreendente da pesquisa em física de plasmas até meados da primeira metade do século 20. O amortecimento de Landau é uma característica de plasmas não colisionais, mas também pode ter aplicação em outras áreas da física, como por exemplo na abordagem cinética para a formação de galáxias [31]. Estrelas podem ser consideradas como átomos que interagem gravitacionalmente em um plasma, em vez de interagirem via forças eletromagnéticas.

Instabilidades do gás das estrelas formam os braços em forma de espiral das galáxias, e esse processo é controlado pelo amortecimento de Landau [2].

A principal característica das ondas de Langmuir é predita pela teoria de Vlasov, ao passo que, sob as mesmas hipóteses, está completamente fora de alcance da teoria de fluidos [18].

O amortecimento não colisional das ondas, e por consequência do potencial eletrostático associado, é um fenômeno de ressonância, proporcional à inclinação da função distribuição, entre os elétrons que se movem próximos à velocidade de fase do plasma. O amortecimento é caracterizado pela parte imaginária e negativa da frequência, cuja magnitude é pequena se comparada à parte real da frequência normal de oscilação do plasma (2.52).

Em distribuições nas quais a amplitude decresce com o aumento do módulo da velocidade, a exemplo das distribuições Maxwellianas, existem mais partículas com velocidades menores do que com velocidades maiores que a velocidade de fase das ondas no plasma. Portanto, há mais partículas que podem ser aceleradas pela onda do que freadas, o que significa mais partículas ganhando energia da onda do que perdendo, o que tem como consequência a diminuição da energia da onda.

De (2.52) observamos que o tempo do amortecimento de Landau $1/\omega_i$ é muito maior do que o tempo de uma oscilação $2\pi/\omega_{pe}$ para modos de oscilação com comprimentos de ondas bastante longos ($k\lambda_{De} \rightarrow 0$). À medida que consideremos ondas com comprimentos de onda menores, tendendo a aproximar-se do comprimento de onda de Debye λ_{De} , o amortecimento é acentuado, e a oscilação do plasma não pode mais ser considerada como um modo normal.

Como foi visto anteriormente, devido à derivada negativa, plasmas com distribuições Maxwellianas só podem dar origem a efeitos de amortecimento, o que elimina efeitos de instabilidades nesses sistemas. Entretanto, quando adicionamos um feixe de elétrons ao plasma, a função distribuição pode apresentar um pico na região de velocidades correspondente à velocidade do feixe, grande o suficiente para que exista uma região de derivada positiva, originando instabilidades. Pode-se dizer que nesse caso ocorre um efeito oposto ao amortecimento de Landau [6], pois há uma amplificação de ondas nessa região. O acompanhamento da variação da amplitude das ondas ao longo do tempo requer a inclusão de efeitos não-lineares, não pode ser tratado com o uso da aproximação linear do sistema Vlasov-Maxwell, e será tratado no próximo capítulo.

Capítulo 3

Revisão da Literatura - Teoria Quase-Linear

Teorias que são baseadas em modelos lineares tem grande vantagem, pois contam com o princípio da superposição: uma poderosa ferramenta que, em conjunto com autovalores e autovetores, fornecem as bases para que se forme um sistema autoconsistente de equações, descrevendo inúmeros fenômenos. Entretanto, existem muitos outros fenômenos, igualmente importantes, nos quais esse princípio é quebrado parcial ou totalmente. A quebra parcial ou total desse princípio significa que modos normais com diferentes valores próprios já não são mais independentes entre si e começam, portanto, a interagir uns com os outros. Tais interações resultam em termos não lineares no sistema de equações que descrevem o sistema, ou em outras palavras, em termos que envolvem o produto de variáveis dependentes [4].

A gama de efeitos não lineares é tão grande que uma classificação se faz necessária. Uma maneira de categorizar é conforme se a não linearidade é forte ou fraca. Em situações nas quais os efeitos não lineares são suficientemente fracos, é razoável supor a teoria linear como primeira aproximação e a partir dela construir um modelo não linear para o sistema, como por exemplo, adicionando alguma perturbação de baixa amplitude. Já para os efeitos mais fortes, a teoria linear falha completamente e o comportamento não linear deve ser incorporado à formulação diretamente.

Este capítulo tratará de como ondas em plasmas podem afetar a função distribuição de velocidades das partículas na abordagem da teoria quase-linear. A formulação a ser apresentada abordará exemplos relativamente simples, visando dar um caráter didático e auto-contido ao presente texto, resumindo procedimentos que podem ser encontrados em livros-texto bem conhecidos, como as Refs. [18], [3] e [7].

3.1 Sistemas de Equações Vlasov-Maxwell na Aproximação Quase-Linear

Na aproximação linear supomos que tanto as funções distribuição quanto os campos são compostos por uma contribuição de equilíbrio e uma perturbação de pequena amplitude. Consideramos também que as contribuições de ordem zero são independentes do tempo e, a partir das equações para as perturbações, as quais são de ordem um, obtemos a relação de

dispersão (2.44). Por exemplo, supondo oscilações eletrostáticas e considerando a distribuição de equilíbrio do tipo Maxwelliana, obtivemos a parte real e imaginária da frequência das ondas de Langmuir, conforme equações (2.52).

A teoria em plasma que leva em conta os efeitos das oscilações na parte não oscilante da função distribuição, mas ainda assume a validade do princípio da superposição, é chamada de teoria quase-linear e esse tipo de aproximação para estudar oscilações em plasma é chamada de aproximação quasi-linear. Quando obtivemos a aproximação linear da equação de Vlasov, supusemos que a função de equilíbrio, $f_{\alpha 0}$, era independente do tempo. Agora na aproximação quase-linear, vamos admitir que a $f_{\alpha 0}$ possa variar com o tempo, embora de forma bem mais lenta que a variação das perturbações, e também que $|f_{\alpha 1}| \ll f_{\alpha 0}$.

Seja um plasma não magnetizado. Supomos uma pequena perturbação na distribuição e no campo elétrico do plasma

$$f_{\alpha} = f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1.$$

Partimos da equação de Vlasov para o caso eletrostático para partículas do tipo α

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha} = 0. \quad (3.2)$$

O campo elétrico \mathbf{E} pode ser obtido através da Lei de Gauss,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (3.3)$$

Para obter as equações para a evolução temporal das quantidades de ordem zero e de ordem um, vamos introduzir médias espaciais das quantidades de interesse. A média espacial da função de distribuição de velocidades é expressa da seguinte forma:

$$\langle f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = \langle f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t) \rangle + \langle f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle, \quad (3.4)$$

onde a média de f_{α} é dada por

$$\langle f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = \frac{1}{V} \int f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r}. \quad (3.5)$$

As flutuações relacionadas a $f_{\alpha 1}$ são aleatórias, sendo assim, sua média é nula e, conseqüentemente, a média da função de distribuição será a própria função de equilíbrio:

$$\langle f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t). \quad (3.6)$$

O termo de primeira ordem na expressão do potencial elétrico tende a zero nas extremidades, então a média espacial do campo elétrico de primeira ordem também será nula:

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle = -\frac{1}{V} \int \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} = 0. \quad (3.7)$$

A média espacial da equação de Vlasov é dada pela seguinte equação

$$\frac{\partial \langle f_\alpha \rangle}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \langle f_\alpha \rangle + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle = 0. \quad (3.8)$$

Estamos considerando $\mathbf{E}_0 = \mathbf{0}$, assim o campo elétrico terá apenas a contribuição de ordem um e será denotado como \mathbf{E}_1 . Substituindo (3.1) ficamos com:

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1}) \right\rangle + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left[\langle \mathbf{E}_1 \rangle \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} + \left\langle \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle \right] = 0. \quad (3.9)$$

Temos que o segundo termo é anulado, pois tanto a derivada espacial de $f_{\alpha 0}$ quanto a média da derivada de $f_{\alpha 1}$ são zeros. No terceiro, a exemplo de $\langle f_{\alpha 1} \rangle$, a média espacial de \mathbf{E}_1 também vai a zero e obtemos, portanto, uma equação para a evolução temporal de $f_{\alpha 0}$:

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left\langle \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle. \quad (3.10)$$

A equação (3.10) pode ser substituída no termo referente à derivada temporal de $f_{\alpha 0}$ na equação (3.2), resultando em

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \underbrace{\left[\mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{v}} - \left\langle \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle \right]}_{\text{termos de segunda ordem}} = 0. \quad (3.11)$$

Os termos de flutuações de segunda ordem, assinalados em (3.11), tornam o sistema de equações Vlasov-Maxwell aberto. Dessa maneira, sempre precisaremos adicionar termos de ordem $n + 1$ para obter equações que descrevem a evolução temporal do sistema, envolvendo flutuações de ordem n . Entretanto, nessa aproximação, esses termos são muito menores do que as flutuações de primeira ordem e podem ser desprezados. Com essa aproximação, obtemos uma equação que é formalmente igual à equação obtida na aproximação linear, com a diferença de que agora a $f_{\alpha 0}$ varia no tempo:

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (3.12)$$

Assim, temos um sistema acoplado constituído pelas equações (3.3), (3.10) e (3.12). A aproximação quase linear é então baseada em duas escalas de tempo: ondas de $f_{\alpha 0}$ variam lentamente em relação a $f_{\alpha 1}$ e essa evolução é descrita pela equação (3.10).

Na próxima seção será discutido quais as consequências dessa mudança na distribuição de partículas do plasma.

3.2 Equação de Difusão Quase-Linear

O nosso objetivo com a aproximação quase-linear é obter resultados para instabilidades geradas por efeitos não lineares, então trataremos somente o caso em que existe região com $\partial f_{\alpha 0} / \partial \mathbf{v} > 0$.

Supondo que a solução tanto para $f_{\alpha 1}$ quanto \mathbf{E}_1 seja tipo ondas planas,

$$\begin{aligned} f_{\alpha 1} &= f_{\alpha \mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \\ \mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

E aplicando na equação (3.12), assim pode-se rescrevê-la em termos de \mathbf{k} e ω ,

$$f_{\alpha \mathbf{k}} = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}}}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)}. \quad (3.14)$$

Da Lei de Gauss,

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} \int \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}}}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} d\mathbf{v}, \quad (3.15)$$

podemos escrever o campo elétrico em função do potencial $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, então

$$k^2 \Phi_{\mathbf{k}} = 4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}}}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} \Phi_{\mathbf{k}} d\mathbf{v}. \quad (3.16)$$

E, supondo o caso unidimensional, do mesmo modo que foi feito na aproximação linear, chegamos à equação de dispersão

$$1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int_L \frac{\partial f_{\alpha 0} / \partial u}{u - \omega / |k|} du = 0. \quad (3.17)$$

A equação (3.17) tem a mesma estrutura que a encontrada na aproximação linear (2.44), a diferença é que agora $f_{\alpha 0}$ representa a média espacial da função de distribuição de velocidades e varia lentamente com o tempo de acordo com (3.10). Por conta dessa lenta evolução temporal, o uso dessa relação é válido somente para o caso em que o número de partículas ressonantes é muito menor do que o número total de partículas do sistema [3].

O objetivo agora é obter a equação para a evolução temporal de $f_{\alpha 0}$. De (3.10), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} &= -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{1}{V} \int \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{x} = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{1}{V} \int d\mathbf{x} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{E}_1 f_{\alpha 1}) - f_{\alpha 1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{E}_1 \right) \\ &= -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{1}{V} \int d\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{E}_1 f_{\alpha 1}) = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int d\mathbf{x} \mathbf{E}_1 f_{\alpha 1} d\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde levamos em conta que o campo elétrico independe da velocidade.

Podemos também reescrever \mathbf{E}_1 e $f_{\alpha 1}$ em termos das transformadas

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{k}, \\ f_{\alpha \mathbf{k}} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int f_{\alpha \mathbf{k}}(\omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

e, utilizando (3.19) em (3.18), obtemos

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int_V \left[\frac{1}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{k}}(\omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{k} \int \frac{1}{(2\pi)^3} f_{\alpha \mathbf{k}'}(\omega) e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{k}' \right] d\mathbf{x}, \quad (3.20)$$

mas sabemos que, no limite $V \rightarrow \infty$, da definição da delta de Dirac,

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'),$$

então,

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{1}{V} \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}(\omega) f_{\alpha \mathbf{k}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{-\mathbf{k}})t} d\mathbf{k}. \quad (3.21)$$

3.2.1 Coeficiente de Difusão Quase-Linear

Na aproximação quase-linear as interações não-lineares não são levadas em conta nas equações para as perturbações, no entanto são mantidas na equação para a evolução temporal da função de distribuição de velocidades de ordem zero [58]. Esses efeitos são observados em $f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t)$ como mudanças na sua forma e essas mudanças se devem a efeitos de difusão no espaço de velocidades. Tanto a intensidade, quanto a forma dessa difusão são dadas pelo coeficiente de difusão quase-linear.

A fim de expressar (3.21) em termos de $f_{\alpha 0}$, é preciso verificar algumas propriedades de $E_{\mathbf{k}}$ e $\omega(\mathbf{k})$ no espaço de Fourier [4]. Seja a transformada de Fourier unidimensional do campo elétrico

$$E(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{E}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \quad (3.22)$$

note que o lado esquerdo da equação deve ser real pois representa uma quantidade física. Tomando agora seu complexo conjugado temos

$$E^*(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{E}^*(k) e^{i(-kx + \omega^*(k)t)} dk, \quad (3.23)$$

Determinamos as propriedades de paridade determinando uma nova variável de integração $k' = -k$ e notando que $\int_{-\infty}^{+\infty} dk$ corresponde a $\int_{-\infty}^{+\infty} dk'$, uma vez que $dk' = -dk$ e que os limites da variável k ($-\infty, +\infty$) correspondem aos limites ($+\infty, -\infty$) variável k' [4]. Com isso, a equação (3.23) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int \tilde{E}^*(-k') e^{i(k'x + \omega^*(-k')t)} dk' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \tilde{E}^*(-k) e^{i(k'x + \omega^*(-k)t)} dk, \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde utilizamos o fato de que $E(x, t) = E^*(x, t)$.

As equações (3.22) e (3.24) são idênticas no lado esquerdo, então o lado direito das duas também devem ser. Então, $\tilde{E}(k)$ e $\omega(k)$ devem satisfazer condições de paridade, que em três dimensões podem ser expressas, respectivamente, como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}) = \mathbf{E}^*(-\mathbf{k}),$$

$$\omega(-\mathbf{k}) = -\omega^*(\mathbf{k}),$$

onde o superíndice * denota o complexo conjugado, e onde passamos a usar $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ ao invés de $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k})$, por simplicidade. A exemplo do que foi feito na aproximação linear, a frequência $\omega(k)$

pode ser escrita como uma soma das partes real e imaginária: $\omega(\mathbf{k}) = \omega_r(\mathbf{k}) + i\omega_i(\mathbf{k})$. Dessa forma, a condição de simetria fica

$$\begin{aligned}\omega_r(-\mathbf{k}) + i\omega_i(-\mathbf{k}) &= -[\omega_r(\mathbf{k}) + i\omega_i(\mathbf{k})]^* \\ &= -\omega_r(\mathbf{k}) + i\omega_i(\mathbf{k}).\end{aligned}\quad (3.25)$$

Com isso, conclui-se que $\omega_r(-\mathbf{k}) = -\omega_r(\mathbf{k})$ e também que $\omega_i(-\mathbf{k}) = \omega_i(\mathbf{k})$, ou seja, a parte real da frequência $\omega(k)$ é uma função ímpar, enquanto que a parte imaginária é uma função par em \mathbf{k} [4]. Com base nessas conclusões, podemos reescrever o argumento da exponencial da equação (3.21), e em conjunto com a equação (3.14), teremos uma equação para a evolução temporal de $f_{\alpha 0}$ em termos da amplitude do campo elétrico,

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \frac{1}{V} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int \frac{\mathbf{E}_{-\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}}}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{k}.\quad (3.26)$$

O campo elétrico pode ser relacionado com o potencial da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbf{k}} &= -i\mathbf{k}\Phi_{\mathbf{k}}, \\ \mathbf{E}_{-\mathbf{k}} &= i\mathbf{k}\Phi_{-\mathbf{k}}, \\ \Phi_{\mathbf{k}}\Phi_{-\mathbf{k}} &= \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}}{k^2},\end{aligned}\quad (3.27)$$

de forma que a equação (3.26) pode ser escrita como

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \frac{1}{V} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int \frac{\Phi_{-\mathbf{k}}\Phi_{\mathbf{k}}}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} \mathbf{k} \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} \right) d\mathbf{k}.\quad (3.28)$$

É importante lembrar que, pelas propriedades de simetria no espaço de Fourier, temos $\Phi_{\mathbf{k}}(t) = \Phi_{-\mathbf{k}}(t)$. Expressando os produtos escalares de (3.28) em forma de somatórios e utilizando as relações de (3.27) obtemos uma equação diferencial de segunda ordem, conhecida como "equação de difusão quase-linear":

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial v_i} \left[D_{ij} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} \right],\quad (3.29)$$

onde D_{ij} é o coeficiente de difusão quase-linear, o qual tem a seguinte forma

$$D_{ij} = \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \frac{1}{V} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)k^2} k_i k_j d\mathbf{k}.\quad (3.30)$$

Conclui-se, portanto, que a teoria quase-linear leva à difusão lenta de $f_{\alpha 0}$ devido às ondas do plasma.

3.2.2 Densidade Espectral

Uma questão importante a ser abordada diz respeito à conexão entre a evolução das ondas devida aos efeitos não lineares e a evolução da função de distribuição de velocidades. Já vimos que a difusão das partículas no espaço de velocidades depende do coeficiente D_{ij} , que por

sua vez depende da amplitude dos campos das ondas, mas ainda não conhecemos em detalhe a dependência entre a evolução das ondas e a da função distribuição.

Tomando a média do quadrado do campo elétrico, dividida por 8π , temos:

$$\left\langle \frac{E_k^2}{8\pi} \right\rangle = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{V} \int d\mathbf{x} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{E}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k} \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{E}_{k'} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}'. \quad (3.31)$$

Utilizando a representação integral da função delta de Dirac, temos

$$\left\langle \frac{E_k^2}{8\pi} \right\rangle = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{V} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_k^* = \int \mathcal{E}_k(t) d\mathbf{k}, \quad (3.32)$$

em que

$$\mathcal{E}_k(t) \equiv \frac{1}{8\pi} \frac{1}{V} \frac{|\mathbf{E}_k(t)|^2}{(2\pi)^3}, \quad (3.33)$$

é conhecida como densidade espectral do campo elétrico associada com o vetor de onda \mathbf{k} [7].

Sabemos que $\mathcal{E}_k(t)$ varia com o tempo, conforme as ondas vão sendo amplificadas ou absorvidas. Devemos lembrar que essa quantidade representa a intensidade espectral das flutuações que ocorrem no plasma, ou seja, essas ondas oscilam com a parte real da frequência determinada pela relação de dispersão e tem uma amplitude lentamente variável, dependendo da parte imaginária da frequência [59, 34]. As amplitudes dessas ondas são proporcionais a $e^{\omega_i t}$, de modo que podemos escrever

$$\mathcal{E}_k(t) = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{V} \frac{|\mathbf{E}_k|^2}{8\pi^3} e^{2\omega_i(\mathbf{k})t} = \mathcal{E}_k e^{2\omega_i(\mathbf{k})t}. \quad (3.34)$$

Podemos também escrever na forma de uma equação diferencial,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_k(t)}{\partial t} = 2\omega_i(\mathbf{k}) \mathcal{E}_k(t). \quad (3.35)$$

Substituindo (3.32) em (3.30), obtemos uma expressão que relaciona a amplitude do espectro das ondas geradas por efeitos não-lineares à difusão da função de distribuição de velocidades:

$$D_{ij} = 8\pi \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \int \frac{\mathcal{E}_k}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)k^2} k_i k_j d\mathbf{k}. \quad (3.36)$$

A expressão (3.36) é bastante simples; no entanto, temos um denominador o qual depende da frequência ω , que é uma quantidade complexa, e, portanto, não tem a forma mais interessante. Para buscar uma expressão mais conveniente, é preciso multiplicar e dividir o coeficiente D_{ij} de (3.36) pelo complexo conjugado de $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)$

$$\begin{aligned} D_{ij} &= 8\pi \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \int \frac{\mathcal{E}_k k_i k_j}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)k^2} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega^*)}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega^*)} d\mathbf{k} \\ &= 8\pi \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \int \frac{\mathcal{E}_k k_i k_j [\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r(\mathbf{k}) + i\omega_i(\mathbf{k})]}{ik^2 |\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega|^2} d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Agora, separando essa última em dois limites de integração, de $-\infty$ até 0 e de 0 até $+\infty$, invertendo os limites de integração e, fazendo a troca de $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ ficamos com a seguinte expressão para o coeficiente de difusão:

$$D_{ij} = 8\pi \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \left\{ \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}} k_i k_j}{ik^2} \frac{[-\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r(-\mathbf{k}) + i\omega_i(-\mathbf{k})]}{[-\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r(-\mathbf{k})]^2 + \omega_i^2(-\mathbf{k})} d\mathbf{k} \right. \\ \left. + \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}} k_i k_j}{ik^2} \frac{[\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r(\mathbf{k}) + i\omega_i(\mathbf{k})]}{[\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r(\mathbf{k})]^2 + \omega_i^2(\mathbf{k})} d\mathbf{k} \right\}. \quad (3.38)$$

Usando a simetria de $\omega(\mathbf{k})$, é fácil verificar que D_{ij} pode ser escrito da seguinte forma:

$$D_{ij} = 8\pi \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_i(\mathbf{k}) \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t)}{k^2 [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r(\mathbf{k}))^2 + \omega_i^2(\mathbf{k})]} k_i k_j d\mathbf{k}. \quad (3.39)$$

Considerando que, no contexto de validade da teoria quase-linear, a parte imaginária da frequência deve ser pequena a fim de garantir evolução temporal lenta, podemos usar a seguinte propriedade matemática:

$$\lim_{\omega_i \rightarrow 0} \frac{\omega_i}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r)^2 + \omega_i^2} = \pi \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega). \quad (3.40)$$

Dessa forma, obtemos um conjunto completo de equações auto-consistentes da aproximação quase-linear:

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial v_i} \left[D_{ij} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} \right], \quad (3.41)$$

onde

$$D_{ij} = 8\pi \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \int \frac{k_i k_j}{k^2} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \pi \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega) d\mathbf{k}, \quad (3.42)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} = 2\omega_i(\mathbf{k}) \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t). \quad (3.43)$$

Cabe lembrar que a parte imaginária da frequência das ondas, ω_i , que aparece na equação para a evolução do espectro das ondas, é obtida através da solução da relação de dispersão, que, como vimos, depende da distribuição $f_{\alpha 0}$. O conjunto de equações obtidas (3.41)-(3.43) através das suposições (3.6) e (3.7), além da hipótese que $|\omega_r| \gg |\omega_i|$, obviamente contém menos informação que o conjunto original de equações (3.2) e (3.3), e, além disso, tem uma região de validade mais limitada. No entanto, tais deficiências são compensadas pela simplicidade do sistema final de equações da teoria quase-linear [62].

3.3 Leis de Conservação na Teoria Quase-Linear

Um aspecto importante a ser destacado da aproximação quase-linear é a presença de leis de conservação. Tais relações são extremamente fortes na física e são consequências naturais do conjunto original de equações. Nas próximas subseções os argumentos de $f_\alpha(\mathbf{v}, t)$, $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t)$ e $D_{ij}(\mathbf{v}, t)$ serão suprimidos para uma notação mais compacta.

3.3.1 Conservação do Número de Partículas

Diretamente da variação temporal do número de partículas, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int n_\alpha f_{\alpha 0} d\mathbf{v} = \int n_\alpha \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} d\mathbf{v}. \quad (3.44)$$

E, substituindo $\partial f_{\alpha 0}/\partial t$ diretamente de (3.41)

$$\begin{aligned} \int n_\alpha \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} d\mathbf{v} &= \int n_\alpha \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial v_i} \left(D_{ij} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} \right) d\mathbf{v} \\ &= \int dv_j \int dv_k \int \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial v_i} \left(D_{ij} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} \right) dv_i \\ &= \int dv_j \int dv_k \sum_{ij} \left(D_{ij} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{\partial N_\alpha}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Temos, assim, que o número total de partículas de uma mesma espécie é constante. Consequentemente, a densidade de probabilidade para cada componente do plasma mantém sua normalização à unidade em qualquer instante de tempo.

3.3.2 Conservação de Energia

Nesta subseção vamos mostrar que a densidade de energia cinética das partículas somada à energia das ondas é conservada. Para mostrar tal propriedade, fazemos a variação temporal da energia cinética das partículas e, já substituindo $\partial f_{\alpha 0}/\partial t$ de (3.41)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_\alpha \frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha \int \mathbf{v}^2 f_{\alpha 0} d\mathbf{v} \right) &= \frac{1}{2} \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha \sum_{ij} \int \mathbf{v}^2 \frac{\partial}{\partial v_i} \left(D_{ij} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} \right) d\mathbf{v} \\ &= \frac{1}{2} \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha \sum_{ij} \int \left[v_i^2 \frac{\partial}{\partial v_i} \left(D_{ij} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} \right) + \sum_{k \neq i} v_k^2 \frac{\partial}{\partial v_i} \left(D_{ij} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} \right) \right] d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Realizando a integração por partes e reorganizando os termos, ficamos com

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} = - \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha \sum_{ij} \int v_i D_{ij} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} d\mathbf{v}, \quad (3.47)$$

onde E_p é a energia cinética associada às partículas. Substituindo a expressão (3.36) para o coeficiente de difusão quase-linear obtemos:

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} = -2i \sum_\alpha \omega_{p\alpha}^2 \sum_i \int \frac{k_i \mathcal{E}_k}{k^2} d\mathbf{k} \int \frac{v_i \mathbf{k}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v}. \quad (3.48)$$

Reescrevendo como um produto escalar e adicionando o termo $(+\omega - \omega)$ no numerador da integral em \mathbf{v} temos o seguinte resultado [18]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial t} &= 2i \int \frac{\mathcal{E}_k}{k^2} d\mathbf{k} \sum_\alpha \omega_{p\alpha}^2 \int \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega + \omega) \mathbf{k}}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} \\ &= 2i \int \frac{\mathcal{E}_k}{k^2} d\mathbf{k} \sum_\alpha \omega_{p\alpha}^2 \int \left[\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\omega \mathbf{k} \cdot \partial f_{\alpha 0} / \partial \mathbf{v}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} \right] d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

O primeiro termo dentro dos colchetes é nulo e, usando a relação de dispersão (3.17) no segundo teremos

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} = 2i \int [\omega_r(\mathbf{k}) + i\omega_i(\mathbf{k})] \mathcal{E}_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}. \quad (3.50)$$

E, uma vez que $\omega_r(\mathbf{k})$ é uma função ímpar em k e $\omega_i(\mathbf{k})$ par, apenas o termo envolvendo ω_i será diferente de zero na integração em k . Então temos

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} + \int 2\omega_i(\mathbf{k}) \mathcal{E}_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} = 0. \quad (3.51)$$

Fazendo uso da relação (3.43)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[E_p + \int \mathcal{E}_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} \right] &= 0, \\ E_p + E_\omega &= \text{constante}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Esse resultado nos mostra que a energia das partículas somada à energia das ondas, $E_p + E_\omega$, é conservada. Em outras palavras, há troca de energia entre ondas e partículas e, assim, a energia não é conservada, individualmente [4].

3.4 Aplicação da Teoria Quase-Linear: Instabilidade *Bump-in-tail*

A incidência de um feixe de elétrons em um plasma pode dar início a processos turbulentos que envolvem a geração e amplificação de ondas eletrostáticas de alta frequência através de efeitos lineares e não lineares relacionados à interação onda-partícula. A interação das partículas do feixe incidente com as ondas presentes no plasma ocorre via ressonância, levando a alterações na função de distribuição de velocidades dos elétrons e no espectro das ondas, um processo conhecido como “instabilidade bump-in-tail”. Esse nome está relacionado à existência de um segundo pico na distribuição de velocidades, na região do feixe de partículas, criando uma região onde a derivada da função de distribuição é positiva, condição propícia ao aparecimento de instabilidades.

Quando a instabilidade é pequena e o crescimento das ondas é lento, emprega-se, como uma primeira aproximação, a teoria quase-linear para descrever como as ondas afetam a distribuição de velocidades de equilíbrio do plasma. A transferência de energia entre partículas e ondas continua até que o sistema atinja um estado estacionário [3, 34]. Efeitos não lineares relacionados à interação onda-partícula e a interações onda-onda, de ordem mais alta, podem levar à geração da chamada “turbulência de Langmuir”, e também à emissão de ondas eletromagnéticas, através de processos conhecidos como decaimento e espalhamento de ondas. Essas interações são observadas na natureza como, por exemplo, fenômenos de emissão de radiação solar dos tipos II e III, além de ser uma ocorrência comum em plasmas de laboratório, como foi demonstrado experimentalmente em [16].

3.4.1 Troca de Energia entre Partículas Ressonantes e Não Ressonantes

Na seção 3.3 vimos que a soma da energia associada às partículas com a energia proveniente do campo elétrico das ondas é constante. No entanto, para uma melhor compreensão do comportamento das partículas é preciso distingui-las entre ressonantes e não ressonantes.

Seja um plasma Maxwelliano unidimensional, considerando ondas de Langmuir. Temos que a variação temporal da energia cinética das partículas pode ser dividida na soma da variação de energia associada às partículas ressonantes E_{pr} e às não ressonantes E_{pnr} ,

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} = \frac{\partial E_{pr}}{\partial t} + \frac{\partial E_{pnr}}{\partial t}. \quad (3.53)$$

E, a partir da equação (3.47), analisando primeiramente a variação de energia cinética das partículas ressonantes, temos

$$\frac{\partial E_{pr}}{\partial t} = - \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \int v D^r \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v} dv. \quad (3.54)$$

O termo D^r corresponde ao coeficiente de difusão quase linear associado às partículas ressonantes o qual, em uma dimensão, tem a seguinte forma [4]

$$D^r = \frac{8\pi^2 q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^2} \int \mathcal{E}_k \frac{1}{|k|} \delta(v - \omega_r / |k|) dv. \quad (3.55)$$

Sabendo que para ondas de Langmuir as partes real e imaginária da frequência são dadas por

$$\omega_r = \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_{De}^2 \right) \approx \omega_{pe}, \quad (3.56)$$

$$\omega_i = \frac{\pi \omega_{pe}^2}{2 k^2} \left| \omega_r \right| \left. \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v} \right|_{v=\omega_r/|k|}. \quad (3.57)$$

E usando a definição da frequência ω_{pe} , a equação (3.54) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{pr}}{\partial t} &= -2\pi\omega_{pe}^2 \int \mathcal{E}_k dk \int v \frac{1}{|k|} \delta\left(v - \frac{\omega_r}{|k|}\right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v} dv \\ &= -2\pi\omega_{pe}^2 \int \mathcal{E}_k \frac{\omega_r}{|k|^2} \left. \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v} \right|_{v=\omega_r/|k|} dk \\ &= -2 \int 2\omega_i \mathcal{E}_k dk \\ &= -2 \frac{\partial}{\partial t} \left[\int \mathcal{E}_k dk \right] \\ \frac{\partial E_{pr}}{\partial t} &= -2 \frac{\partial E_{\omega}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Um aspecto interessante a ser observado é que as partículas ressonantes do plasma ganham duas vezes a energia perdida pelas ondas. Foi visto na seção anterior que a energia cinética de todas as partículas permanece constante, sendo assim, partículas não ressonantes deveriam ceder energia às ressonantes. De acordo com (3.51), (3.53) e (3.58) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial t} &= \frac{\partial E_{pr}}{\partial t} + \frac{\partial E_{pnr}}{\partial t} \\ -\frac{\partial E_{\omega}}{\partial t} &= -2 \frac{\partial E_{\omega}}{\partial t} + \frac{\partial E_{pnr}}{\partial t} \\ \frac{\partial E_{pnr}}{\partial t} &= \frac{\partial E_{\omega}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Como resultado obtemos que, quando a energia das partículas que estão fora da região de ressonância aumenta (e/ou diminui), a energia das ondas também aumenta (e/ou diminui) e isso se dá às custas (em benefício) das partículas ressonantes.

3.4.2 O comportamento da Função Distribuição de Partículas

Partículas ressonantes

Podemos definir f_{e0r} como a distribuição inicial dos elétrons ressonantes, isto é, elétrons os quais estejam com velocidades próximas à região de ressonância $v \simeq \omega/k$, e uma amplitude espectral $\mathcal{E}(k, t)$ finita. Para essas partículas temos a seguinte equação de difusão quase-linear unidimensional:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{e0r}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial v} D^r \frac{\partial f_{e0}}{\partial v} \\ &= \frac{8\pi^2 e^2}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[\int \mathcal{E}_k \frac{1}{|v|} \delta\left(k - \frac{\omega_r}{v}\right) \frac{\partial f_{e0r}}{\partial v} dk \right] \\ &= \frac{8\pi^2 e^2}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\mathcal{E}_{k=\omega_r/|v|}}{|v|} \frac{\partial f_{e0r}}{\partial v} \Big|_{k=\omega_r/|v|} \right), \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde foi utilizado D^r , o coeficiente de difusão associado às partículas ressonantes já mencionado anteriormente em (3.55).

Na ressonância, podemos substituir $\partial f_{e0r}/\partial v$ de (3.57)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{e0r}}{\partial t} &= \frac{8\pi^2 e^2}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\mathcal{E}_{k=\omega_r/|v|}}{|v|} \left(\frac{2k^2 \omega_i}{\pi \omega_{pe}^2 \omega_r} \right) \Big|_{k=\omega_r/|v|} \right] \\ &= \frac{2\omega_{pe}}{n_e m_e} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{2\omega_i \mathcal{E}_k}{|v|^3} \right), \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde na última linha foi utilizada a seguinte aproximação: $\omega_r \approx \omega_{pe}$, de acordo com (3.56). Com (3.51) a expressão acima pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[f_{e0r} - \frac{2\omega_{pe}}{n_e m_e} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\mathcal{E}_k}{|v|^3} \right) \right] = 0.$$

Realizando a integração com respeito ao tempo obtemos

$$f_{e0r}(v, t) - f_{e0r}(v, 0) = \frac{2\omega_{pe}}{n_e m_e} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\mathcal{E}_k}{|v|^3} \right). \quad (3.62)$$

Por definição $\mathcal{E}_k(\frac{\omega_r}{v}, t)$ é nula para qualquer valor de velocidade v que não esteja dentro dos limites de ressonância $v_r^{min} < v < v_r^{max}$, pois fora desse alcance, não existem ondas para as quais as partículas podem entrar em ressonância. Admitindo que $n_{er}(t)$ corresponde ao número de partículas ressonantes no instante t , integrando, agora, a equação (3.62) em relação à velocidade e dentro dos limites da ressonância podemos verificar que

$$\begin{aligned} \int_{v_r^{min}}^{v_r^{max}} f_{e0r}(v, t) dv &= \int_{v_r^{min}}^{v_r^{max}} f_{e0r}(v, 0) dv \\ n_{er}(t \rightarrow \infty) &= n_{er}(t = 0). \end{aligned}$$

Dessa forma, o número de partículas ressonantes permanece inalterado com o passar do tempo. A equação (3.58) revela que a energia associada às partículas ressonantes não é conservada e pode ser transformada em energia para as ondas; no entanto, acabamos de observar que o número de partículas é constante. Uma mudança na energia dessas partículas sem alterar seu número só é possível ajustando o número das que estão um pouco mais lentas e rápidas do que ω/k . Por exemplo, caso haja uma diminuição no número de partículas com velocidade $v \simeq (\omega/k)_-$, deve haver, obrigatoriamente, um correspondente aumento no número de partículas ressonantes com velocidade $v \simeq (\omega/k)_+$ e esse processo promove uma transferência líquida de energia da onda para as partículas, o que caracteriza o amortecimento de Landau e requer $\partial f_{e0r}/\partial v < 0$. O produto do aumento do número de partículas com $v \simeq (\omega/k)_+$ e o decréscimo das partículas com $v \simeq (\omega/k)_-$ nivela f_{e0r} e forma um platô [4].

Partículas não ressonantes

Assim como para a parte ressonante, podemos atribuir uma função distribuição de velocidades associada às partículas não ressonantes f_{e0nr} , em outras palavras, àquelas que satisfazem $(kv - \omega_r) \neq 0$. A equação de difusão associada a essas partículas é dada por [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{e0nr}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial v} D^{nr} \frac{\partial f_{e0nr}}{\partial v} \\ &= \frac{2\omega_{pe}^2}{n_e m_e} \frac{\partial}{\partial v} \int \mathcal{E}_k \frac{\omega_i}{(kv - \omega)^2} \frac{\partial f_{e0nr}}{\partial v} dk. \end{aligned} \quad (3.63)$$

A grande maioria das partículas não ressonantes possui velocidade muito menor que a onda $v \ll \omega_r/k$, de forma que podemos assumir $\omega^2 \approx \omega_{pe}^2$. Assim temos

$$\frac{\partial f_{e0nr}}{\partial t} = \frac{1}{n_e m_e} \frac{\partial}{\partial v} \int 2\mathcal{E}_k \omega_i \frac{\partial f_{e0nr}}{\partial v} dk. \quad (3.64)$$

Substituindo (3.43) e integrando em relação ao tempo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{e0nr}}{\partial t} &= \frac{1}{n_e m_e} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{E}(k, t) dk \right] \frac{\partial^2 f_{e0nr}}{\partial v^2} \\ f_{e0nr}(v, t) - f_{e0nr}(v, 0) &= \frac{1}{m_e n_e} \left[\int (\mathcal{E}(k, t) - \mathcal{E}(k, 0)) dk \right] \frac{\partial^2 f_{e0nr}}{\partial v^2}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

O lado direito da equação acima é nulo para velocidades fora da região não ressonante. Sendo assim, se integrarmos em dv dos dois lados, é fácil verificar que o número de partículas não ressonantes também permanece inalterado com o passar do tempo. Podemos assumir que, para um tempo suficientemente longo, o espectro inicial de ondas é totalmente absorvido e, assim, escrever

$$f_{e0nr}(v, \infty) = f_{e0nr}(v, 0) - \frac{1}{m_e n_e} \left[\int \mathcal{E}(k, 0) dk \right] \frac{\partial^2 f_{e0nr}}{\partial v^2}. \quad (3.66)$$

É importante notar que na região de velocidades onde $\frac{\partial^2 f_{e0nr}}{\partial v^2} > 0$ haverá uma queda no número de partículas não ressonantes e na região $\frac{\partial^2 f_{e0nr}}{\partial v^2} < 0$, um aumento. Em distribuições do tipo Maxwellianas desenvolver-se-ão dois platôs, conforme mostrado na Figura 6.6: na região de

baixas velocidades e outro na região de altas velocidades com um gradiente acentuado entre eles. A difusão que ocorre no espaço de velocidades leva a um "achatamento" da função distribuição na região entre o corpo e o feixe, com o desaparecimento da derivada na distribuição. Ocorre também um ligeiro resfriamento da distribuição na região não ressonante em função da energia que as partículas não ressonantes cedem às ressonantes, como veremos a seguir.

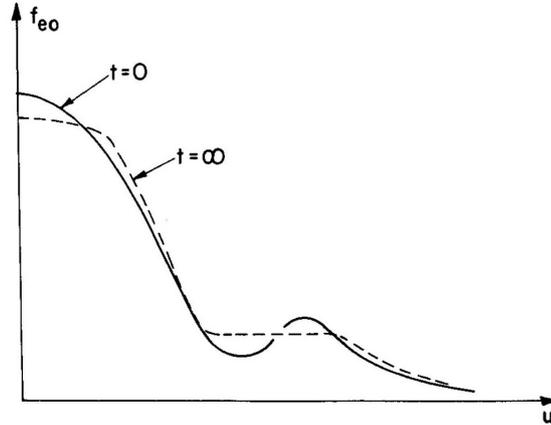


Figura 3.1: Função distribuição para os elétrons levando em conta o tempo inicial $t = 0$ e o tempo final $t = \infty$, tanto para as partículas ressonantes, como para as não ressonantes [4].

A fim de verificar tal fenômeno, podemos definir uma temperatura efetiva T_{ef} e sua variação no tempo como

$$\frac{d(T_{ef})}{dt} = \frac{2}{n_e} \frac{d}{dt} \int \mathcal{E}(k, t) dk, \quad (3.67)$$

A expressão então pode ser integrada

$$T_{ef}(t) = T_0 + \frac{2}{n_e} \int \mathcal{E}(k, t) dk, \quad (3.68)$$

e assim obter uma expressão para a temperatura em função do tempo e da amplitude espectral. Atente que T_0 é a temperatura na qual o espectro de ondas é nulo. Utilizando as expressões (3.65) e (3.67) obtemos

$$\frac{\partial f_{e0nr}}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\frac{T_{ef}}{2m} \right) \frac{\partial^2 f_{e0nr}}{\partial v^2}. \quad (3.69)$$

E se a função distribuição f_{e0nr} for considerada como função de T_{ef} ao invés de t , a equação (3.69) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial f_{e0nr}}{\partial(T_{ef})} = \frac{1}{2m} \frac{\partial^2 f_{e0nr}}{\partial v^2}, \quad (3.70)$$

e tem a seguinte solução

$$f_{e0nr} = n_e \sqrt{\frac{m}{2\pi T_{ef}(t)}} e^{-\left(\frac{mv^2}{2T_{ef}(t)}\right)}. \quad (3.71)$$

Ao substituir o termo $T_{ef}(t)$ pela expressão encontrada em (3.68) e obtemos uma relação direta entre a função distribuição das partículas não ressonantes e a amplitude espectral [18, 4]

$$f_{e0nr} = n_e \sqrt{\frac{m/2\pi}{T_0 + \frac{2}{n_e} \int \mathcal{E}(k, t) dk}} e^{-\left(\frac{mv^2/2}{T_0 + \frac{2}{n_e} \int \mathcal{E}(k, t) dk}\right)}. \quad (3.72)$$

Assim, o amortecimento da onda, isto é, a absorção do espectro $\mathcal{E}(k, t)$ corresponde a um resfriamento efetivo das partículas não ressonantes. Como mostrado em (3.51) e (3.59), essa redução da energia cinética das partículas não ressonantes e da energia associada ao campo elétrico corresponde a uma transferência para as partículas ressonantes [4]. Da mesma forma, um aumento da energia das ondas, como ocorre na instabilidade *bump-in-tail*, corresponde a um aquecimento efetivo das partículas não ressonantes [18].

Capítulo 4

Revisão da literatura - Teoria de Turbulência Fraca

Processos e características de excitação e saturação de ondas eletromagnéticas por um feixe de partículas, como por exemplo a instabilidade *bump-in-tail*, podem ser bem descritos pela teoria quase-linear [18]. No entanto, fenômenos não-lineares são fundamentais no estudo da interação feixe-plasma. Nesses processos ocorrem interações entre ondas de mesmo tipo e diferentes comprimentos de onda e também interações de diferentes tipos de ondas. Podem ser geradas, por exemplo, ondas eletrostáticas retroespalhadas, harmônicos da frequência fundamental e ondas eletromagnéticas (ondas T transversais). Quando esses efeitos são de pequena magnitude, e são levados em conta apenas em baixa ordem, temos a chamada *teoria de turbulência fraca*.

Sua formulação teve início entre o fim dos anos 1950 e início dos anos 1970, na sua grande maioria por cientistas da extinta União Soviética, como por exemplo A. A. Vedenov, E. P. Velikhov, R. Z. Sagdeev, N. V. Tsytovich, entre outros. A maior parte da teoria encontrada na literatura é concentrada no estudo do caso eletrostático em plasmas não magnetizados e, quando efeitos eletromagnéticos são incorporados às análises, frequentemente aparecem apenas no sentido formal. Recentemente, a teoria de turbulência fraca foi abordada a partir de primeiros princípios, de forma sistemática, inicialmente incluindo apenas oscilações eletrostáticas, depois incorporando o efeito de interações eletromagnéticas [63, 64]. Esse desenvolvimento pode ser motivado considerando que a interação feixe-plasma é caracterizada não só por turbulência de Langmuir como também por emissão de radiação eletromagnética (EM). Como bons exemplos de efeitos desse tipo de interação na natureza podem ser mencionados os fenômenos de radiação solar dos tipos II e III.

A geração e emissão de radiação eletromagnética é um subproduto de processos não-lineares da interação feixe-plasma [63]. A emissão de radiação é o resultado da conversão parcial da energia cinética do feixe de elétrons em radiação EM, e esse processo é dado da seguinte forma: num primeiro momento há a excitação de ondas de Langmuir (L), por meio da instabilidade *bump-in-tail*. Ocorre então o acoplamento não linear, envolvendo os fenômenos de decaimento e espalhamento, que converte parte da energia das ondas turbulentas em radiação EM. O processo envolve uma fusão das ondas de Langmuir primárias e retroespalhadas, gerando radiação eletromagnética com frequência igual ao dobro da frequência de plasma ($2\omega_{pe}$), também chamado de primeiro harmônico $2H$, e/ou o decaimento de ondas L em uma onda transversa (T) na frequência de plasma (emissão fundamental F) e uma onda do tipo íon acústica (S). Tal cenário é bem discutido na literatura, tendo sido delineado há mais de meio século [13], e

análises mais detalhadas se fazem necessárias [63, 64, 65, 72, 73].

4.1 Formulação Teórica

Recentemente, a teoria foi formulada a partir de primeiros princípios, de forma sistemática, primeiro numa abordagem eletrostática, mais tarde introduzindo efeitos eletromagnéticos [63, 64, 65], obtendo um conjunto completo e autosuficiente de equações que descrevem o sistema. Nesta subseção serão apresentadas as equações cinéticas para os modos normais de oscilação do plasma e para as partículas, bem como a caracterização de cada termo. Uma revisão detalhada de toda formulação que será aqui apresentada pode ser encontrada na dissertação de mestrado *Evolução não linear de ondas eletrostáticas e eletromagnéticas no contexto da teoria de turbulência fraca em plasmas*, publicada em 2014, e também em trabalhos como os já mencionados [63, 64, 65], bem como em trabalhos mais recentes, como [74, 75, 76, 77].

4.1.1 Equações Cinéticas das Ondas L , S e T

As intensidades dos modos normais de oscilação, as eletrostáticas Langmuir (L) e íon acústicas (S), e eletromagnéticas transversais (T), podem ser definidas pelas intensidades espectrais dos campos elétricos e magnéticos correspondentes. Para os modos longitudinais eletrostáticos, as intensidades $I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}$ para $\alpha = L, S$ são definidas por:

$$\langle \delta E_{\parallel}^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega} = \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} \delta(\omega - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}).$$

Para as ondas transversais (T), as intensidades dos campos elétrico e magnéticos são dadas respectivamente por:

$$\langle \delta E_{\perp}^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega} = \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{k}}^{\sigma T} \delta(\omega - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^T), \quad \langle \delta B^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega} = \left| \frac{ck}{\omega} \right|^2 \langle \delta E_{\perp}^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega}.$$

As formas das relações de dispersão para as ondas L, S e T são respectivamente:

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{k}}^L &= \omega_{pe} (1 + 3k^2 \lambda_D^2)^{1/2}, \\ \omega_{\mathbf{k}}^S &= k C_S (1 + 3T_i/T_e)^{1/2} (1 + k^2 \lambda_D^2)^{-1/2}, \\ \omega_{\mathbf{k}}^T &= (\omega_{pe}^2 + c^2 k^2)^{1/2}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde a frequência de plasma, ω_{pe} e o comprimento de Debye λ_D são definidos da seguinte forma: $\omega_{pe} = (4\pi n_e e^2/m_e)^{1/2}$, e $\lambda_D = (T_e/4\pi n_e e^2)^{1/2} = v_{th}/\sqrt{2}\omega_{pe}$. Temos que n_e, e, m_e, T_e são, respectivamente, densidade, carga elétrica, massa e temperatura dos elétrons e T_i é a temperatura dos íons. Também definimos a velocidade térmica dos elétrons $v_{th} = (2T_e/m_e)^{1/2}$ e a velocidade íon acústica $C_s = (T_e/m_i)^{1/2}$, na qual m_i é a massa dos íons.

O conjunto de equações que descrevem o comportamento dinâmico das intensidades das ondas será descrito a seguir. Primeiro, temos a equação cinética para as ondas L :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} &= \frac{4\pi e^2}{m_e k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \left(n_e e^2 F_e(\mathbf{v}) + \pi \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{v}} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} \right) + \sum_{\sigma' \sigma'' = \pm 1} \int d\mathbf{k}' V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^L \\
 &\times \left(\frac{\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' S}}{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}} - \frac{\sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' S} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}} - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} \right) \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S) \\
 &+ \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^L \left[\frac{n_e e^2}{\omega_{pe}^2} (\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma L}) [F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})] \right. \\
 &\left. + \frac{\pi m_e}{m_i} I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_i(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right] \times \delta[\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}],
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde os coeficientes $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^L$, $U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^L$ e $\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$ são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^L &= \frac{\pi e^2 \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L}{2T_e^2} \frac{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}, \\
 U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^L &= \frac{\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L e^2}{n_e m_e^2 \omega_{pe}^2} \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2}, \\
 \mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} &= |k|^3 \lambda_D^3 \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{3T_i}{T_e} \right)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

A primeira integral em velocidades do lado direito da equação (4.2), o qual contém a condição de ressonância $\delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$, representa os processos de emissão espontânea (proporcional a $F_e(\mathbf{v})$) e induzida (proporcional a $\partial F_e(\mathbf{v})/\partial \mathbf{v}$) das ondas de Langmuir. Tais termos ditam a interação linear onda-partícula e os processos físicos descritos por eles são processos descritos pela teoria quase-linear. A segunda integral, aquela que envolve $d\mathbf{k}'$, denota a interação não linear entre três ondas. É o termo que representa o processo de decaimento envolvendo uma onda L em outra onda L e uma onda S e está indicado pela condição de ressonância $\delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S)$. Por último, a integral que contém $\int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v}$ denota os fenômenos de espalhamento espontâneo (proporcional a $[F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})]$) e induzido (proporcional a $\partial F_i/\partial \mathbf{v}$), envolvendo duas ondas de Langmuir e as partículas. Esse é um processo não linear indicado pela condição de ressonância $\delta[\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}]$ [77].

A equação cinética das ondas S é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\partial t \mu_{\mathbf{k}}} &= \frac{4\pi \mu_{\mathbf{k}} e^2}{m_e k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \left[n_e e^2 [F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})] + \pi \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_i(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}} \right] + \sum_{\sigma' \sigma''} \int d\mathbf{k}' V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^S \left(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' L} - \frac{\sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}}} - \frac{\sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}}} \right) \\
 &\times \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L),
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

no qual o coeficiente $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^S$ tem a seguinte expressão:

$$V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^S = \frac{\pi e^2 \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \mu_{\mathbf{k}} [\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')]^2}{4T_e^2 k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}. \tag{4.5}$$

Os primeiros dois termos do lado direito da equação (4.4) caracterizam, respectivamente, os processos de emissão espontânea e induzida das ondas S . Esses fenômenos de interação onda-partícula são descritos pelo fator de ressonância $\delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$ e são descritos na teoria quase-linear. O termo proporcional a $[F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})]$ refere-se à emissão espontânea, enquanto que o outro, à induzida. A seguir, temos os termos não lineares associados a integral em \mathbf{k}' são governados pela condição de ressonância $\delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L)$ que representa o decaimento envolvendo três ondas, a saber uma onda S em duas ondas L . Não é levada em consideração a interação onda-partícula (efeitos de espalhamento induzido e espontâneo envolvendo duas ondas S e as partículas) uma vez que a massa dos íons é muito grande deixando o processo ineficiente e lento na escala de tempo de interesse [77].

A equação cinética para as ondas T é dada por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma T}}{\partial t} &= \sum_{\sigma'\sigma''} \int d\mathbf{k}' V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{TLL} \left(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^T I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' L} - \frac{\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma T}}{2} - \frac{\sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma T}}{2} \right) \\
 &\times \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^T - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L) + \sum_{\sigma'\sigma''} \int d\mathbf{k}' V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{TLS} \left(\frac{\sigma\omega_{\mathbf{k}}^T I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' S}}{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}} + \frac{\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' S} I_{\mathbf{k}}^{\sigma T}}{2\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}} \right. \\
 &\left. - \frac{\sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma T}}{2} \right) \times \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^T - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S) + \sum_{\sigma'\sigma''} \int d\mathbf{k}' V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{TTL} \left(\frac{\sigma\omega_{\mathbf{k}}^T I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' T} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' L}}{2} \right. \\
 &\left. - \frac{\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^T I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma T}}{2} - \frac{\sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' T} I_{\mathbf{k}}^{\sigma T}}{4} \right) \times \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^T - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^T - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L) \\
 &+ \sum_{\mathbf{k}'} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} U_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^T \left\{ \frac{\hat{n}e^2}{\omega_{pe}^2} \left(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^T I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma T}}{2} \right) [F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})] \right. \\
 &\left. + \pi \frac{m_e}{m_i} I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma T}}{2} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_i(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right\} \times \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^T - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}],
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde os coeficientes $V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{TLL}$, $V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{TLS}$, $V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{TTL}$ e $U_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^T$ são respectivamente:

$$\begin{aligned}
 V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{TLL} &= \frac{\pi e^2 \sigma \omega_{\mathbf{k}}^T}{32 m_e^2 \omega_{pe}^2} \frac{(\mathbf{k} \times \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \left(\frac{k'^2}{\sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L} - \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}{\sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L} \right)^2, \\
 V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{TLS} &= \frac{\pi e^2 \sigma \omega_{\mathbf{k}}^T}{4 T_e^2} \frac{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} (\mathbf{k} \times \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}, \\
 V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{TTL} &= \frac{\pi e^2 \sigma \omega_{\mathbf{k}}^T}{4 m_e^2} \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}{(\omega_{\mathbf{k}}^T)^2 (\omega_{\mathbf{k}'}^T)^2} \left(1 + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \right), \\
 U_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^T &= \frac{e^2 \sigma \omega_{\mathbf{k}}^T}{2 \hat{n} m_e^2 \omega_{pe}^2} \frac{(\mathbf{k} \times \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2}.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

É interessante observar que não há contribuição de termos relacionados com os efeitos de emissão espontânea e induzida, isto é, efeitos de natureza quase-linear. Isso deve-se ao fato de que, tendo em vista a relação de dispersão das ondas T em (4.1), nenhuma partícula pode

assumir velocidade maior que a velocidade da luz no vácuo, não sendo possível então satisfazer a condição de ressonância onda-partícula [77].

Os primeiros termos do lado direito da equação (4.6), aqueles que estão dentro do parênteses e são multiplicados pela condição de ressonância $\delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^T - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L)$, representam o processo de união entre duas ondas do tipo L formando uma onda do tipo T e é simbolizado geralmente na literatura como $L + L \leftrightarrow T$. Esse fenômeno é responsável pela emissão do segundo harmônico com a frequência da onda T próxima a duas vezes a frequência do plasma $\omega \sim 2\omega_{pe}$. Os termos associados com a segunda integral em $\int d\mathbf{k}'$, aqueles relacionados com a condição de ressonância $\delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^T - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S)$ descrevem o decaimento de uma onda L em uma onda S e uma onda T na faixa da frequência natural de plasma $\omega \sim \omega_{pe}$. Esse é um dos processos responsáveis pela emissão fundamental e é habitualmente simbolizado na literatura como $T \leftrightarrow L + S$. A terceira integral em $\int d\mathbf{k}'$, associada com a condição de ressonância $\delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^T - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^T - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L)$, representa o processo de decaimento de uma onda T e uma onda L em outra onda T , simbolizado por $T \leftrightarrow T + L$. Esse, é conhecido como o análogo incoerente do conhecido Efeito Raman e é responsável pela geração de harmônicos mais altos da frequência de plasma, especialmente pela emissão do terceiro harmônico $\omega \sim 3\omega_{pe}$.

O termo com a integral $\int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \dots$ representa os fenômenos de espalhamento espontâneo e induzido envolvendo as ondas T e L com as partículas. O espalhamento induzido é dominado basicamente pelos prótons, representado na literatura por $(T \leftrightarrow p + L)$, e por essa razão que só é levada em conta sua contribuição. No entanto, para o espalhamento espontâneo, proporcional a $[F_e + F_i]$, há a contribuição tanto dos prótons, quanto dos elétrons $(T \leftrightarrow e + L)$. Esses processos estão relacionados com a condição de ressonância não linear $\sigma\omega_{\mathbf{k}}^T - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v} = 0$ e representam um mecanismo alternativo para a emissão fundamental. A equação cinética completa para as ondas T , envolvendo a interação com as ondas L e S e as partículas, só foi obtida recentemente por [76].

4.1.2 Equação Cinética das Partículas

A equação cinética para as partículas é dada por:

$$\frac{\partial F_a(\mathbf{v})}{\partial t} = \frac{\pi e_a^2}{m_a^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L,S} \int d\mathbf{k} \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \times \left(\frac{m_a \mu_{\mathbf{k}}^\alpha \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L}{4\pi^2 k} F_a(\mathbf{v}) + I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial F_a(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right), \quad (4.8)$$

onde $a = i, e$ representa os íons e os elétrons, respectivamente, $\mu_{\mathbf{k}}^L = 1$ e $\mu_{\mathbf{k}}^S = \mu_{\mathbf{k}}$ que está definido em (4.3).

O primeiro termo do lado direito da equação (4.8) está associado às flutuações espontâneas e é proporcional à função distribuição. O segundo termo refere-se ao efeito de difusão quase-linear e é proporcional a $\partial F_a / \partial \mathbf{v}$.

A sequência de equações (4.2)-(4.8) forma um conjunto completo e autoconsistente e são as bases para a teoria de turbulência fraca. Para fins de análise numérica, vamos então reescrever essas equações de forma a ter um conjunto adimensional.

Formas Adimensionais das Equações Cinéticas das Ondas e das Partículas

Primeiro, introduziremos as seguintes quantidades normalizadas:

$$\begin{aligned}
 z &\equiv \frac{\omega}{\omega_{pe}}, & \tau &\equiv \omega_{pe} t, & \mathbf{q} &\equiv \frac{\mathbf{k} v_{th}}{\omega_{pe}}, & \mathbf{u} &\equiv \frac{\mathbf{v}}{v_{th}}, \\
 \mu_{\mathbf{q}}^L &= 1, & \mu_{\mathbf{q}}^T &= 1, & \mu_{\mathbf{q}}^S &= \frac{q^3}{2^{2/3}} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \left(1 + \frac{3T_i}{T_e}\right)^{1/2}, \\
 g &= \frac{1}{2^{2/3} (4\pi)^2 n_e \lambda_{De}^3}.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

O parâmetro g é proporcional ao já mencionado parâmetro do plasma (ver seção 1), mas utilizaremos a mesma notação g , por simplicidade. Podemos também definir a função distribuição de velocidade das partículas e o espectro das ondas:

$$\Phi_a(\mathbf{u}) = v_{th}^3 F_a(\mathbf{v}), \quad \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha} = \frac{(2\pi)^2 g I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{m_e v_{th}^2 \mu_{\mathbf{k}}^{\alpha}}. \tag{4.10}$$

A equação para as ondas L toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} &= \left\{ \frac{\pi \mu_{\mathbf{q}}^L}{q^2} \int d\mathbf{u} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) \times \left(g \Phi_e(\mathbf{u}) + (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \Phi_e(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right) \right\}_{Lql} \\
 &+ \left\{ 2\sigma \mu_{\mathbf{q}}^L z_{\mathbf{q}}^L \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \int d\mathbf{q}' \frac{\mu_{\mathbf{q}'}^L \mu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^S (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')^2}{q^2 q'^2 |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2} \right. \\
 &\times \left[\sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{\sigma'' S} - (\sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{\sigma'' S} + \sigma'' z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L}) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right] \\
 &\times \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - \sigma'' z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^S) \left. \right\}_{LdLS} \tag{4.11} \\
 &+ \left\{ \sigma z_{\mathbf{q}}^L \sum_{\sigma' = \pm 1} \int d\mathbf{q}' \int d\mathbf{u} \frac{\mu_{\mathbf{q}}^L \mu_{\mathbf{q}'}^L (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')^2}{q^2 q'^2} \right. \\
 &\times \left[g(\sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}) [\Phi_e(\mathbf{u}) + \Phi_i(\mathbf{u})] + \frac{m_e}{m_i} \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right] \\
 &\times \left[\delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \mathbf{u}) \right] \left. \right\}_{LsLL}.
 \end{aligned}$$

Na equação (4.11), a qual descreve a evolução temporal do espectro das ondas L , o primeiro termo do lado direito relaciona-se com os efeitos de emissão espontânea e induzida, de caráter quase-linear, e é indicado por Lql . O segundo termo do lado direito denota o efeito de decaimento envolvendo três ondas, a saber duas ondas L e uma onda S , e é representado por $LdLS$. O terceiro termo está associado com o processo de espalhamento envolvendo duas ondas L e as partículas e está indicado por $LsLL$.

A equação que descreve a evolução temporal do espectro das ondas S , na forma adimensional, é dada por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S}}{\partial \tau} = & \left\{ \frac{\pi \mu_{\mathbf{q}}^S}{q^2} \int d\mathbf{u} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^S - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) \left[g [\Phi_e(\mathbf{u}) + \Phi_i(\mathbf{u})] + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \left(\mathbf{q} \cdot \frac{\partial \Phi_e(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right] \right\}_{Sql} \\
 & + \left\{ \sigma z_{\mathbf{q}}^L \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \int d\mathbf{q}' \frac{\mu_{\mathbf{q}}^S \mu_{\mathbf{q}'}^L \mu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^L [\mathbf{q}' \cdot (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')]^2}{q^2 q'^2 |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2} \right. \\
 & \times \left[\sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{\sigma'' L} - (\sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{\sigma'' L} + \sigma'' z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L}) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \right] \\
 & \left. \times \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^S - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - \sigma'' z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^L) \right\}_{SdLL}.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Os primeiros termos do lado direito da equação (4.12), aqueles que estão dentro do primeiro par de chaves, descrevem os processos de emissão espontânea e induzida e estão indicados por Sql . O segundo par de chaves está associado com o processo de decaimento envolvendo três ondas, duas ondas L e uma onda do tipo S , e está designado por $SdLL$.

A equação para as ondas T é dada por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}_q^{\sigma T}}{\partial \tau} = & \left\{ \frac{\sigma \mu_q^T z_q^T}{32} \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \int d\mathbf{q}' \frac{\mu_{q'}^L \mu_{q-q'}^L (\mathbf{q} \times \mathbf{q}')^2}{q^2 q'^2 |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2} \left(\frac{q'^2}{\sigma' z_{q'}^L} - \frac{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2}{\sigma'' z_{q-q'}^L} \right)^2 \right. \\
 & \times \left[2\sigma z_q^T \mathcal{E}_{q'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{q-q'}^{\sigma'' L} - (\sigma' z_{q'}^L \mathcal{E}_{q-q'}^{\sigma'' L} + \sigma'' z_{q-q'}^L \mathcal{E}_{q'}^{\sigma' L}) \mathcal{E}_q^{\sigma T} \right] \\
 & \times \left. \delta(\sigma z_q^T - \sigma' z_{q'}^L - \sigma'' z_{q-q'}^L) \right\}_{TdLL} \\
 & + \left\{ \sigma \mu_q^T z_q^T \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \int d\mathbf{q}' \frac{\mu_{q'}^L \mu_{q-q'}^S (\mathbf{q} \times \mathbf{q}')^2}{q^2 q'^2 |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2} \right. \\
 & \times \left[2\sigma z_q^T \mathcal{E}_{q'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{q-q'}^{\sigma'' S} - (\sigma' z_{q'}^L \mathcal{E}_{q-q'}^{\sigma'' S} + \sigma'' z_{q-q'}^L \mathcal{E}_{q'}^{\sigma' L}) \mathcal{E}_q^{\sigma T} \right] \\
 & \times \left. \delta(\sigma z_q^T - \sigma' z_{q'}^L - \sigma'' z_{q-q'}^S) \right\}_{TdLS} \\
 & + \left\{ \frac{\sigma z_q^T}{8} \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \int d\mathbf{q}' \frac{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2}{(z_q^T)^2 (z_{q'}^T)^2} \left(1 + \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')^2}{q^2 q'^2} \right) \right. \\
 & \times \left[2\sigma z_q^T \mathcal{E}_{q'}^{\sigma' T} \mathcal{E}_{q-q'}^{\sigma'' L} - (\sigma' 2z_{q'}^T \mathcal{E}_{q-q'}^{\sigma'' L} + \sigma'' z_{q-q'}^L \mathcal{E}_{q'}^{\sigma' T}) \mathcal{E}_q^{\sigma T} \right] \\
 & \times \left. \delta(\sigma z_q^T - \sigma' z_{q'}^T - \sigma'' z_{q-q'}^L) \right\}_{TdTL} \\
 & + \left\{ \sigma z_q^T \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \int d\mathbf{q}' \int d\mathbf{u} \frac{\mu_q^T \mu_{q'}^L (\mathbf{q} \times \mathbf{q}')^2}{q^2 q'^2} \right. \\
 & \times \left[g \left(\sigma_q^T \mathcal{E}_{q'}^{\sigma' L} - \sigma' z_{q'}^L \frac{\mathcal{E}_q^{\sigma T}}{2} \right) [\Phi_e(\mathbf{u}) + \Phi_i(\mathbf{u})] \right. \\
 & + \left. \frac{m_e}{m_i} \mathcal{E}_{q'}^{\sigma' L} \frac{\mathcal{E}_q^{\sigma T}}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right] \\
 & \times \left. \left[\delta(\sigma z_q^T - \sigma' z_{q'}^L - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \mathbf{u}) \right] \right\}_{TsTL}.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Para as ondas transversais, o primeiro termo do lado direito da equação (4.13) descreve a fusão de duas ondas L em uma onda T de frequência aproximadamente duas vezes a frequência do plasma (representando o primeiro harmônico ou *H emission*). Pode-se dizer que esse processo de fusão de duas ondas é oposto ao de decaimento e está indicado por $TdLL$. O segundo termo, indicado por $TdLS$, descreve a influência do processo de decaimento de uma onda L em uma onda T (de frequência próxima a frequência fundamental) e uma onda S , que é um dos processos que mais contribuem para a emissão fundamental (*F emission*). O terceiro termo, representado por $TdTL$, representa a fusão de três ondas de uma onda L e uma T na frequência fundamental em outra onda T de frequência mais alta. O último termo, $TsTL$ descreve o espalhamento não linear envolvendo uma onda L em uma onda T (na frequência fundamental), mediado pelas partículas. Este é o outro processo responsável pela emissão fundamental do plasma [77].

A equação para a evolução temporal da função distribuição das partículas $\Phi_a(\mathbf{u})$ na forma adimensional tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_a(\mathbf{u})}{\partial \tau} &= \frac{e_a^2 m_e^2}{e^2 m_a^2} \sum_{\sigma} \sum_{\alpha=L,S} \int d\mathbf{q} \left(\frac{\mathbf{q}}{q} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right) \mu_{\mathbf{q}}^{\alpha} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^{\alpha} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) \\ &\times \left(g \frac{m_a}{m_e} \frac{\sigma z_{\mathbf{q}}^L}{q} \Phi_a(\mathbf{u}) + \mathcal{E}^{\sigma \alpha} \frac{\mathbf{q}}{q} \cdot \frac{\partial \Phi_a(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde $a = e, i$ representa e os elétrons e i os íons. As relações de dispersão para os modos normais do plasma dadas por (4.1) na forma adimensional são dadas por:

$$\begin{aligned} z_{\mathbf{q}}^L &= \left(1 + \frac{3}{2} q^2 \right)^{1/2}, \\ z_{\mathbf{q}}^S &= \frac{qA}{(1 + q^2/2)^{1/2}}, \\ z_{\mathbf{q}}^T &= \left(1 + \frac{c^2}{v_{th}^2} q^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde a constante A é dada por:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{3T_i}{T_e} \right)^{1/2}. \quad (4.16)$$

A equação cinética das partículas, (4.14), é dada sob a forma da equação de Fokker-Planck, na qual contém no lado direito os termos de arraste (primeiro termo), sendo proporcional a função distribuição, e de difusão quase-linear (segundo termo) sendo proporcional a $\partial \Phi_a / \partial \mathbf{u}$.

É interessante salientar que para os elétrons, tanto a turbulência de Langmuir quanto a íon-acústica contribuem para a difusão. No entanto, para os íons a turbulência de Langmuir pode ser desprezada, uma vez que a frequência dessas ondas é muito alta e os íons não conseguem responder.

Outro ponto interessante a se observar é que nas equações cinéticas dos espectros das ondas os termos associados ao parâmetro de plasma g correspondem aos processos espontâneos de emissão e espalhamento. Já na equação para a evolução temporal da função distribuição de partículas, o termo com o parâmetro g descreve o arrasto que surge devido aos efeitos das flutuações espontâneas [77].

4.1.3 Forma da Função Distribuição

Em muitos problemas físicos envolvendo a teoria cinética, a função Maxwelliana é uma das distribuições de velocidades mais utilizadas. Em um plasma em equilíbrio térmico, tanto os íons quanto os elétrons tem uma distribuição contínua de velocidades que é dada pela distribuição de Maxwell-Boltzmann em três dimensões,

$$F_{\alpha}(\mathbf{v}) = n_{\alpha 0} \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi T_{\alpha}} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_{\alpha}}{2\pi T_{\alpha}} v^2 \right), \quad (4.17)$$

onde m_{α} e T_{α} são a massa e a temperatura associada à partícula do tipo $\alpha = e, i$. A função $F_{\alpha}(\mathbf{v})$ é normalizada de maneira que

$$\int F_{\alpha}(\mathbf{v}) d^3 v = \int n_{\alpha 0} f_{\alpha}(\mathbf{v}) d^3 v = n_{\alpha 0}. \quad (4.18)$$

Usando quantidades adimensionais dadas em (4.9), a função $f_\alpha(\mathbf{u})$ é dada por:

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{u}) &= \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_\alpha T_e}{m_e T_\alpha} u^2 \right), \\ \Phi_\alpha(\mathbf{u}) &= v_{th}^3 f_\alpha(\mathbf{u}) = \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_e m_\alpha}{T_\alpha m_e} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_\alpha T_e}{m_e T_\alpha} u^2 \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

No âmbito do trabalho apresentado nesta tese, as aplicações de interesse são em duas dimensões. Sendo assim, a função distribuição de Maxwell-Boltzmann em duas dimensões é dada pela seguinte expressão:

$$F_\alpha(\mathbf{v}) = n_{\alpha 0} \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha} \right) \exp\left(-\frac{m_\alpha}{2T_\alpha} v^2 \right), \quad (4.20)$$

onde m_α e T_α novamente são a massa e a temperatura associada à partícula do tipo $\alpha = e, i$. A função $F_\alpha(\mathbf{v})$ está também normalizada à unidade.

Uma propriedade importante - válida tanto para duas, quanto para três dimensões - que será utilizada é

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \mathbf{u}} = -2 \frac{m_\alpha T_e}{m_e T_\alpha} \mathbf{u} \Phi_\alpha. \quad (4.21)$$

Em duas dimensões, os vetores normalizados que representam a velocidade e o vetor de onda são dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_x \mathbf{e}_x + u_z \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{q} &= q_x \mathbf{e}_x + q_z \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Para as análises que seguem, adotamos a propagação do feixe de partículas na direção paralela ao eixo z , sendo a direção perpendicular relativa ao eixo x .

4.1.4 Espectros Iniciais

Para analisar a evolução temporal de qualquer sistema dinâmico é fundamental que sejam determinadas as condições iniciais, e para a física de plasmas isso não seria diferente. Vamos assumir um estado de equilíbrio quase estacionário, assim as intensidades dos espectros das ondas L e S podem ser obtidas equilibrando os termos de emissão espontânea e induzida. Já para o tratamento numérico das ondas T há dois cenários. O primeiro é quando inicialmente as ondas T não estão presentes. É a abordagem padrão encontrada nos livros didáticos. Em via de regra, plasmas térmicos supostamente não emitem radiação eletromagnética em plasmas não magnetizados devido ao processo de emissão espontânea. Essa situação, já mencionada anteriormente, deve-se ao fato de que ondas transversais em plasmas não magnetizados possuem velocidades de fase que excedem a velocidade da luz no vácuo, justificando, portanto, a ausência dos termos relacionados aos processos quase-lineares nas equações (4.6) ou (4.13). O segundo caso, recentemente discutido em [76, 75], consiste em que, quando efeitos não lineares são levados em conta, plasmas térmicos não só emitem espontaneamente os modos longitudinais L e S , como também o modo transversal T através do espalhamento não linear. Nesta subseção serão apresentadas as intensidades espectrais iniciais para os modos normais do plasma, utilizando uma abordagem em duas dimensões.

Espectro Inicial das Ondas de Langmuir

Para as ondas de Langmuir, de acordo com a (4.11), os termos que contribuem para a intensidade espectral inicial são apenas os de emissão espontânea e induzida. Levando em conta apenas os termos quase lineares do lado direito, usando $\mu_{\mathbf{q}}^L = 1$ e assumindo um estado quase estacionário com $\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} / \partial \tau \simeq 0$, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} &= \frac{\mu_{\mathbf{q}}^L \pi}{q^2} \int d\mathbf{u} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) \left[g \Phi_e(\mathbf{u}) + (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \Phi_e(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right] \simeq 0 \\
 &= \frac{\pi}{q^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du_x \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \left[g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \left(q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \right] \simeq 0 \\
 &= \frac{\pi}{q^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du_x \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \left[g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (-2q_x u_x - 2q_z u_z) \Phi_e \right] \simeq 0 \\
 &= \frac{\pi}{q^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du_x \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \Phi_e \left[g - 2(\sigma z_{\mathbf{q}}^L)^2 \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right] \simeq 0 \\
 \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}(0) &= \frac{g}{2(\sigma z_{\mathbf{q}}^L)^2}.
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Espectro Inicial das Ondas Íon-acústicas

Para as ondas S fazemos o mesmo balanceamento. Da equação (4.12), com $\mu_{\mathbf{q}}^S$ definido em (4.9), levando em conta apenas os termos da primeira linha, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S}}{\partial \tau} &= \frac{\pi \mu_{\mathbf{q}}^S}{q^2} \int d\mathbf{u} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^S - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) \left[g [\Phi_e(\mathbf{u}) + \Phi_i(\mathbf{u})] + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \left(\mathbf{q} \cdot \frac{\partial \Phi_e(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right] \simeq 0 \\
 &= \frac{\pi \mu_{\mathbf{q}}^S}{q^2} \int_{-\infty}^{+\infty} du_z \int_{-\infty}^{+\infty} du_x \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^S - q_x u_x - q_z u_z) \\
 &\quad \times \left[g(\Phi_e + \Phi_i) + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \left(q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + \frac{m_e}{m_i} q_x \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_x} + q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} + \frac{m_e}{m_i} q_z \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_z} \right) \right] \simeq 0 \\
 &= \frac{\pi \mu_{\mathbf{q}}^S}{q^2} \int_{-\infty}^{+\infty} du_z \int_{-\infty}^{+\infty} du_x \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^S - q_x u_x - q_z u_z) \\
 &\quad \times \left[g(\Phi_e + \Phi_i) - 2\sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \left((q_x u_x + q_z u_z) \Phi_e + \frac{m_e}{m_i} \frac{m_i}{m_e} \frac{T_e}{T_i} \Phi_i (q_x u_x + q_z u_z) \right) \right] \simeq 0 \\
 &= \frac{\pi \mu_{\mathbf{q}}^S}{q^2} \int_{-\infty}^{+\infty} du_z \int_{-\infty}^{+\infty} du_x \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^S - q_x u_x - q_z u_z) \\
 &\quad \times \left[g(\Phi_e + \Phi_i) - 2\sigma^2 z_{\mathbf{q}}^S z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \left(\Phi_e + \frac{T_e}{T_i} \Phi_i \right) \right] \simeq 0.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

De maneira geral, as temperaturas associadas tanto para os íons quanto para os elétrons

não são iguais $T_e \neq T_i$, assim, a expressão para o espectro inicial das ondas S é dada pela seguinte expressão:

$$\mathcal{E}_q^{\sigma S}(0) = \frac{g \int_{-\infty}^{+\infty} du_z \int_{-\infty}^{+\infty} du_x \delta(\sigma z_q^S - q_x u_x - q_z u_z) (\Phi_e + \Phi_i)}{2\sigma^2 z_q^L z_q^S \int_{-\infty}^{+\infty} du_z \int_{-\infty}^{+\infty} du_x \delta(\sigma z_q^S - q_x u_x - q_z u_z) \left(\Phi_e + \frac{T_e}{T_i} \Phi_i\right)}. \quad (4.25)$$

A solução para as integrais envolvendo as partículas do tipo β , ($\beta = e, i$) elétrons e íons respectivamente, é dada por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du_z \int_{-\infty}^{+\infty} du_x \Phi_\beta \delta[\sigma z_q^S - q_x u_x - q_z u_z] = \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_\beta T_e}{m_e T_\beta}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{q_x^2 + q_z^2}} \exp\left(-\frac{m_\beta T_e (\sigma z_q^S)^2}{m_e T_\beta (q_x^2 + q_z^2)}\right). \quad (4.26)$$

Então, aplicando a solução (4.26) em (4.25), a expressão para o espectro inicial das ondas íon-acústicas é dada por:

$$\mathcal{E}_q^{\sigma S}(0) = \frac{g \left[\exp\left(-\frac{(z_q^S)^2}{q^2}\right) + \left(\frac{m_i T_e}{m_e T_i}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(z_q^S)^2}{q^2}\right) \right]}{2z_q^L z_q^S \left[\exp\left(-\frac{(z_q^S)^2}{q^2}\right) + \frac{T_e}{T_i} \left(\frac{m_i T_e}{m_e T_i}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(z_q^S)^2}{q^2}\right) \right]}, \quad (4.27)$$

onde usamos o fato de que $q^2 = q_x^2 + q_z^2$ e que $\sigma^2 = 1$.

Espectro Inicial das Ondas Transversais

Em caso de adoção do segundo cenário mencionado no início da presente sub-seção, o qual leva em conta a presença de um espectro de ondas transversas geradas por processos não lineares, precisamos discutir os mecanismos que atuam nesses processos. Os conhecidos mecanismos de emissão de radiação incluem *bremmstrahlung*, radiação giro- e síncrotron, a instabilidade *cyclotron maser* e a emissão de plasma. Em plasmas não magnetizados, apenas os efeitos de *bremmstrahlung* e de emissão de plasma são viáveis. Destes, na ausência de colisões, *bremmstrahlung* torna-se inoperante, e a emissão de plasma requer a presença de um feixe de elétrons, seguido de vários processos de espalhamento e conversão de radiação. No entanto, em um artigo recentemente publicado, Ziebell et al. (2014b) [76] discute um novo tipo de processo de emissão para plasmas em um estado termodinâmico de quase equilíbrio entre as partículas e ondas de Langmuir turbulentas. O mecanismo de emissão de radiação proposto não é previsto pela teoria linear, mas depende de processos de ressonância não-linear entre partículas e ondas.

No artigo *Spontaneous emission of electromagnetic radiation in turbulent plasmas*, é discutida a relevância dos espectros dos modos normais do plasma. Da equação (1), obtém-se o espectro das ondas L , bem conhecido da literatura. O espectro das ondas S também pode ser obtido a partir da equação (1) de [76], no entanto, no âmbito do presente trabalho, a contribuição das flutuações eletrostáticas de baixa frequência, que possuem magnitude inferior, são portanto, descartadas.

A equação restante de interesse é a equação de evolução temporal para as ondas T . Dentre os termos da equação cinética, os que se referem aos efeitos de emissão espontânea e induzida, ditados pela condição de ressonância linear, envolvendo onda e partícula, $(\sigma z_q^L - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} = 0)$, não são importantes, uma vez que tal condição não pode ser satisfeita devido ao fato de que a

velocidade de fase é maior que a velocidade da luz no vácuo, fato que justifica sua ausência em (4.6) e em (4.13).

Os termos não lineares de decaimento, associados à condição de ressonância envolvendo três ondas, $(\sigma z_{\mathbf{q}}^T - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - \sigma'' z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^L = 0)$ e $(\sigma z_{\mathbf{q}}^T - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - \sigma'' z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^S = 0)$, acabam desempenhando um papel secundário no processo de geração de radiação, uma vez que esses processos envolvem trocas de momento e energia apenas entre as ondas, não envolvendo as partículas. Conseqüentemente, o único termo relevante é aquele relacionado com o espalhamento induzido (proporcional à derivada de Φ_i) e espontâneo (proporcional a $[\Phi_e + \Phi_i]$) na equação (4.13) e indicado por $TsTL$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma T}}{\partial \tau} = \sigma z_{\mathbf{q}}^T \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \int d\mathbf{q}' \int d\mathbf{u} \frac{\mu_{\mathbf{q}}^T \mu_{\mathbf{q}'}^L (\mathbf{q} \times \mathbf{q}')^2}{q^2 q'^2} \left[g \left(\sigma_{\mathbf{q}}^T \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma T}}{2} \right) [\Phi_e(\mathbf{u}) + \Phi_i(\mathbf{u})] \right. \\ \left. + \frac{m_e}{m_i} \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma T}}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right] \delta[\sigma z_{\mathbf{q}}^T - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \mathbf{u}] \simeq 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Deve ser observado que ainda que a condição de ressonância linear não possa ser satisfeita, a condição de ressonância não linear pode. Isso pode acontecer se as frequências das ondas T e L forem suficientemente próximas uma da outra, $z_{\mathbf{q}}^T \sim z_{\mathbf{q}'}^L$.

Usando a propriedade da função delta de Dirac, ficamos apenas com a integração em $d\mathbf{q}'$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma T}}{\partial \tau} = \sigma z_{\mathbf{q}}^T \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \int d\mathbf{q}' \frac{\mu_{\mathbf{q}}^T \mu_{\mathbf{q}'}^L (\mathbf{q} \times \mathbf{q}')^2}{q^2 q'^2 |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \left\{ g \left(\sigma_{\mathbf{q}}^T \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma T}}{2} \right) [\Phi_e(\mathbf{u}_{\text{res}}) + \Phi_i(\mathbf{u}_{\text{res}})] \right. \\ \left. - 2 \frac{T_e}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^T - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma T}}{2} \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \Phi_i(\mathbf{u}_{\text{res}}) \right\} \simeq 0, \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde a velocidade que satisfaz a condição de ressonância é dada por $\mathbf{u}_{\text{res}} = \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^T - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|}$, usamos também que $(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \mathbf{u} = \sigma z_{\mathbf{q}}^T - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L$ e que $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{u}} = -2 \frac{m_i}{m_e} \frac{T_e}{T_i} \mathbf{u} \Phi_i$.

Devido ao fator exponencial associado às distribuições das partículas, a região de integração mais significativa é em torno de $q' = q_*$, onde $z_{q_*}^L = z_{\mathbf{q}}^T$, o que implica $q_*^2 = \frac{2c^2}{3v_{te}^2} q^2$, de modo que $q_* \gg q$. O fator exponencial pode, portanto, ser representado aproximadamente por uma função delta de Dirac centrada em torno de q_* . Ao utilizar tal aproximação na integração sobre q' na equação (4.29) e empregando o resultado obtido em (4.23) para a intensidade espectral inicial das ondas L , obtemos a expressão para a radiação de equilíbrio "turbulento" das ondas T [76]

$$\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma T}(0) = \frac{g}{1 + 3q_*^2}, \quad q_* = \left(\frac{2}{3} \frac{c^2}{v_{th}^2} \right)^2 q. \quad (4.30)$$

Portanto, de acordo com Ziebell et al. 2014a, chegamos à conclusão de que elétrons energéticos devem gerar radiação eletromagnética de frequência próxima à frequência de plasma, mesmo na ausência de qualquer fonte de energia livre, como um feixe de partículas [76].

Assim, temos os três espectros iniciais associados aos modos normais de oscilação do plasma. As relações encontradas em (4.23) e (4.27) são bem conhecidas na literatura. Já a relação (4.30) trata-se de uma novidade, a qual pode ser encontrada em trabalhos recentes, como [77, 78] por exemplo, e que deve ser utilizada caso seja adotado o cenário que leva em conta a atuação de efeitos não lineares anteriormente ao instante considerado como instante inicial da análise.

No capítulo 6 serão apresentados dois trabalhos recentes envolvendo a interação feixe-plasma, fazendo uso da formulação teórica aqui apresentada.

Capítulo 5

Revisão da Literatura - Distribuições Kappa

Funções distribuição de velocidade (VDF) ¹ que exibem uma dependência do tipo lei de potência na cauda de alta energia têm sido objeto de intensa investigação pela comunidade de física de plasma [40, 23, 27, 28, 33].

Tais funções, conhecidas como distribuições Kappa ou supertérmicas, foram encontradas para proporcionar uma melhor adaptação às VDFs medidas por espaçonaves em diversas regiões de plasma espaciais. As partículas de alta velocidade que estão nessa cauda não só levam a consequências importantes em relação à aceleração e à temperatura (quantidades físicas essenciais na abordagem cinética), como também possuem um papel importante nas interações onda-partícula [40, 30].

Outro aspecto importante é que essas funções se ajustam melhor às funções distribuição observadas usando apenas três parâmetros (densidade, temperatura e índice κ). É comum encontrar modelos que propõem a superposição de duas funções Maxwellianas, no entanto tais modelos necessitam de quatro parâmetros (densidades n_1 , n_2 e temperaturas T_1 , T_2) e não possuem um ajuste tão preciso [23].

Existem muitas formulações matemáticas para as distribuições Kappa e, nos últimos anos, duas delas se destacam na literatura [30]:

$$\begin{aligned} p(\varepsilon_K)^1 &\sim \left[1 + \frac{1}{\kappa_*} \cdot \frac{\varepsilon_K - U(T_*, \kappa_*)}{k_B T_*} \right]^{-\kappa_*}, \\ p(\varepsilon_K)^2 &\sim \left[1 + \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\varepsilon_K - U(T)}{k_B T} \right]^{-\kappa-1} \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann, T é a temperatura, ε_K é a energia cinética e U é a energia interna (a qual se reduz à energia cinética média $\langle \varepsilon_K \rangle$ na ausência de uma energia potencial) [30].

Essas duas formulações tornam-se matematicamente equivalentes quando temos $\kappa_* = \kappa + 1$ e $T_* = T \cdot \kappa / (\kappa + 1)$. Suas diferenças principais residem tanto na definição de temperatura

¹ Por questão de notação, a sigla para "função distribuição de velocidade" deveria ser FDV, no entanto vamos usar a sigla em inglês - VDF, de *velocity distribution functions* - por ser de uso consagrado na literatura da área.

quanto em sua conexão com a mecânica estatística. A saber, embora ambas formulações estejam fortemente baseadas no conceito da mecânica estatística não-extensiva, a primeira (com expoente κ_*) está associada à versão mais antiga e incompleta da teoria, enquanto que a segunda (com expoente $-\kappa - 1$) está conectada à versão mais moderna e corrigida da teoria [30].

Uma maneira de caracterizar o índice κ é comparar a inclinação da cauda energética da VDF Kappa com uma função Maxwelliana. O valor do índice κ determina a inclinação do espectro de energia das partículas supratérmicas que formam a cauda da VDF, conforme ilustrado na Figura (1) do artigo [40]. Nesta figura estão representados diferentes valores de κ (linhas pontilhadas) e comparados com uma função do tipo Maxwelliana (linha contínua). É possível notar que à medida que os valores de κ aumentam, a função supertérmica se aproxima da Maxwelliana (no caso limite $\kappa \rightarrow \infty$, elas são iguais) [40].

5.1 Presença de VDFs Kappa em Plasmas Espaciais

Distribuições com caudas térmicas foram observadas em vários plasmas espaciais, e funções supertérmicas, com o coeficiente espectral kappa compreendido no intervalo $2 < \kappa < 6$, foram identificadas para melhor ajustar os dados obtidos por satélites na região dos ventos solares (Gloeckler et al. 1992; Maksimovic et al. 1997a), na região da magnetosfera terrestre (Gloeckler and Hamilton 1897), na região *plasmashet* terrestre (Bame et al. 1967, entre outros), na região da *magnetosheath* (Formisano et al. 1973), também na região da magnetosfera de outros planetas como Mercúrio, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno, entre outros. Um estudo detalhado de muitos trabalhos envolvendo essas regiões pode ser encontrado em [40].

Na região dos ventos solares as distribuições de velocidade de elétrons caracterizam-se por um núcleo térmico e uma população de cauda supertérmica [38]. Estas VDF são também caracterizadas por uma componente *strahl* alinhada com o campo magnético interplanetário. Na Figura (5.1) está representada a função distribuição de velocidade observada pelo satélite WIND a uma distância 1 UA (unidade astronômica) para elétrons de alta velocidade na região de vento solar [40]. No painel superior temos os dados experimentais para o corte transversal paralelo e perpendicular (linhas cheia e pontilhada respectivamente) da VDF observada em comparação com uma função Maxwelliana (linha tracejada), que mostra um ajuste razoável na zona do núcleo térmico ($-2 < y < 2$), porém não se adapta bem na cauda (halo) supertérmica. No painel inferior estão representadas as curvas de nível no plano de velocidades (normalizadas à velocidade térmica) paralelo e perpendicular ao campo magnético interplanetário [40].

A função distribuição de velocidades dos elétrons medida pela sonda espacial Ulysses foi ajustada com funções Kappa no artigo de Maksimovic et al. (1997a) [40]. Nesse trabalho, eles mostraram uma anticorrelação global entre a velocidade do vento solar e o valor do parâmetro κ , que sustenta o resultado teórico, baseado na teoria cinética, de que os elétrons supertérmicos influenciam a aceleração do vento solar [33]. No trabalho de Qureshi et al. de 2002 [43] foi utilizada a função Kappa generalizada para se ajustar aos dados colhidos pelos satélites da missão CLUSTER. A evolução radial de populações de elétrons não térmicos no vento solar de baixa latitude com as observações das sondas espaciais Helios, Cluster e Ulysses mostram que o número relativo de elétrons de *strahl* diminui com a distância radial, enquanto que o número relativo de elétrons no halo aumenta (Stverak et al., 2009). As observações de caudas supratérmicas de elétrons no vento solar sugerem sua existência na coroa solar, já que a trajetória livre média eletrônica no vento solar é de cerca de $1AU$. Verificou-se que as medições de carga

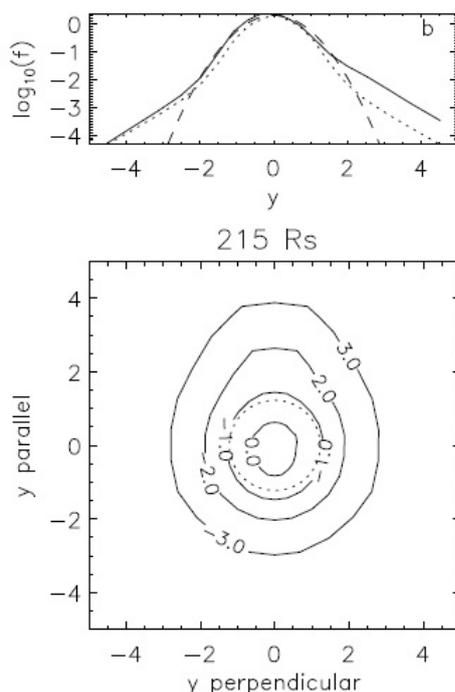


Figura 5.1: Função distribuição de velocidade observada pelo satélite WIND a uma distância 1UA para elétrons de alta velocidade na região de vento solar. No painel superior temos o corte transversal paralelo e perpendicular (linhas cheia e pontilhada respectivamente) da VDF observada em comparação com VDF Maxwelliana (linha tracejada). No painel inferior estão representadas as curvas de nível no plano de velocidades (normalizadas à velocidade térmica) paralelo e perpendicular ao campo magnético interplanetário. (Pierrard et al. 1999)

iônica indicadas por Ulysses foram consistentes com VDF Kappa de elétrons na região da coroa com índice kappa entre $5 < \kappa < 10$ (Ko et al., 1996) [40]. Um estudo mais completo da detecção de VDFs Kappa pode ser encontrado em trabalhos como [40, 33].

Vários mecanismos têm sido propostos para explicar a origem das caudas supertérmicas das VDFs e a ocorrência de distribuições de Kappa nas regiões do vento solar, da coroa e de outros plasmas espaciais. A primeira foi sugerida no trabalho *Plasma Distribution Function in a Superthermal Radiation Field* dos autores Akira Hasegawa, Kunioki Mima, and Minh Duong-van de 1985, que mostraram que um plasma imerso em um campo de radiação supratérmica sofre difusão no espaço de velocidades que é aumentada pelas flutuações do campo Coulombiano induzidas por fótons. Esta difusão produz uma distribuição do tipo lei de potência $(E/E_0)^{-\Lambda}$, com uma energia E maior do que uma energia crítica E_0 , onde a energia de transição E_0 e a potência Λ são inversamente proporcionais à intensidade do campo associado aos fótons [14].

No artigo publicado por Rudolf A. Treumann, em 2001, ele desenvolve uma teoria para mostrar que VDFs Kappa correspondem a um estado de equilíbrio termodinâmico particular [55, 56]. Foi proposta uma nova teoria cinética colisional, do tipo Boltzmann, incluindo o termo de correlações. No estado de "equilíbrio" (este que seria um estado turbulento porém estável, longe do estado de equilíbrio térmico padrão) seria produzida uma VDF de partícula única na forma de uma função Lorentziana generalizada semelhante, mas não idêntica, a uma distribuição Kappa [54], conforme cita Pierrard em seu trabalho [40].

No trabalho de Leubner (2002) [22] ele mostra que distribuições Kappa são consequência

da generalização da entropia na estatística não extensiva proposta por Tsallis [57], fisicamente relacionadas à natureza de longo alcance do potencial de Coulomb, turbulência e intermitência [24, 57]. A distribuição tipo kappa é equivalente à função distribuição de índice q obtida da maximização da entropia de Tsallis. Sistemas sujeitos a interações e correlações de longo alcance estão fundamentalmente relacionadas com distribuições não-Maxwellianas [25]. Questões fundamentais sobre as distribuições Kappa em plasmas espaciais e distribuições de prótons interplanetárias são enfatizadas em [23]. Livadiotis e McComas (2009) também examinaram como as distribuições Kappa surgem naturalmente da mecânica estatística de Tsallis e fornecem uma base teórica sólida para descrever sistemas complexos [26, 40].

Em suma, quaisquer que sejam os mecanismos de formação das caudas supertérmicas, a função distribuição Kappa é uma ferramenta matemática útil para generalizar as distribuições de velocidade para as funções do tipo lei de potência observadas, e a função de distribuição de velocidades Maxwelliana é então um caso particular correspondente ao valor assintótico de κ no limite em que $\kappa \rightarrow \infty$ [40].

5.2 Dependência da Distribuição com os Graus de Liberdade

Nesta seção será abordada a dependência da distribuição de velocidades com o número de graus de liberdade. O estudo completo é encontrado em [30] e em suas inúmeras referências.

As distribuições de velocidades Kappa são formuladas essencialmente a fim de descrever um hamiltoniano formado pela componente cinética e pela componente potencial. No entanto, a parcela da energia potencial em relação à energia total é muito pequena e pode ser desprezada. Consequentemente a distribuição de velocidades é isotrópica [30].

Em um sistema de partículas com d graus de liberdade, a distribuição de velocidades $P(\mathbf{u}; \mathbf{u}_b; \kappa, T)$ é dada por [30]:

$$P(\mathbf{u}; \mathbf{u}_b; \kappa, T) = \left[\pi \theta^2 \left(\kappa - \frac{d}{2} \right) \right]^{-d/2} \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\kappa - d/2 + 1)} \left[1 + \frac{1}{\kappa - d/2} \frac{|\mathbf{u} - \mathbf{u}_b|^2}{\theta^2} \right]^{-\kappa-1}, \quad (5.2)$$

onde $\theta = \sqrt{2k_B T/m}$ é a velocidade térmica e \mathbf{u}_b é a velocidade média das partículas. Na literatura é possível encontrar trabalhos que consideram a energia potencial diferente de zero. Um bom exemplo é [29], no qual o autor desenvolve a teoria e as formulações das distribuições de velocidades Kappa que descrevem sistemas de partículas que levam em conta a energia potencial. Neste trabalho o autor estuda três diferentes casos: (i) potencial radial $\phi(\mathbf{r})$ no qual não há dependência das variáveis angulares, (ii) potencial angular $\phi(\theta, \varphi)$ no qual há a dependência na variável polar e/ou azimutal e (iii) potenciais com dependência tanto da posição, quanto na velocidade $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ [29].

Por fim, ainda podemos considerar distribuições anisotrópicas. A anisotropia entre os graus de liberdade associados à translação ocorre quando a energia cinética das partículas não é dividida em porções iguais entre os três graus de liberdade. Sendo assim, tanto nas análises estatísticas quanto nas derivações da formulação os graus de liberdade devem ser tratados todos juntos e não separados. Por exemplo, o teorema de equipartição de energia não poderá ser aplicado a cada um dos três graus de liberdade, mas a todos eles juntos [30]. Nesses casos de

anisotropia, no entanto, a temperatura T do sistema ainda é dada pela energia cinética média total:

$$\langle \varepsilon_K \rangle = \frac{1}{2}k_B T_x + \frac{1}{2}k_B T_y + \frac{1}{2}k_B T_z = \frac{3}{2}k_B T.$$

No capítulo 7 será discutido o problema do vento solar como uma combinação de função de distribuição de velocidades dos elétrons e seu espectro de flutuações de Langmuir associado. Para tanto, será utilizado um núcleo Maxwelliano e uma cauda supraenergética Kappa isotrópica e em duas dimensões. Alguns exemplos de distribuições anisotrópicas podem ser encontradas na seção 5 do artigo [30].

5.3 Função Kappa Como Solução Assintótica de Equilíbrio

Em ambientes tanto de laboratório quanto natural, como nas regiões de vento solar, distribuições de elétrons supertérmicos ou não-Maxwellianos são frequentemente observados. Como mencionado na seção 5.1, as VDF's que apresentam uma cauda enérgica são muitas vezes modeladas pela chamada distribuição Kappa, mas sua origem física não é claramente compreendida. Algumas propostas de explicação já foram discutidas na seção 5.1, mas na presente seção retomamos o assunto discutindo uma série de três artigos que abordam o tema, primeiro em uma dimensão [66], depois em três dimensões [67, 68].

A introdução do modelo Kappa para as distribuições de partículas facilita a análise dos dados obtidos, não só por sondas espaciais, mas também em laboratórios. No entanto, no que diz respeito à sua origem física não existe uma compreensão clara [66]. Em várias abordagens não autoconsistentes, o espectro turbulento de um dado modo de onda é adotado e a equação cinética das partículas é resolvida para obter soluções do tipo lei de potência ou Kappa [14, 32, 47]. No entanto, P. H. Yoon [66] propõe uma formulação autoconsistente para a formação de distribuições não Maxwellianas que resultariam da interação de longa escala de tempo entre elétrons e a turbulência de Langmuir. Esta interação, por sua vez, levaria a um estado de quase equilíbrio turbulento, e este tipo de solução de estado estacionário pode representar um equilíbrio meta-estável cujas propriedades estatísticas podem ser modeladas fenomenologicamente por teorias termodinâmicas não-extensivas [66].

A partir da equação cinética apresentada em [66] para os elétrons, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial v_i} \left(A_i f_e + D_{ij} \frac{\partial f_e}{\partial v_j} \right), \\ A_i &= \frac{e^2}{4\pi m_e} \int d\mathbf{k} \frac{k_i}{k^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}), \\ D_{ij} &= \frac{\pi e^2}{m_e^2} \int d\mathbf{k} \frac{k_i k_j}{k^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde f_e é a função distribuição dos elétrons, e e m_e são a carga e a massa dos elétrons respectivamente, $I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}$ e $\omega_{\mathbf{k}}^L$ a intensidade espectral e a relação de dispersão das ondas L respectivamente. É interessante notar que, quando a equação cinética é expressa na forma adimensional, o coeficiente A_i é proporcional ao parâmetro de plasma, $g = 1/(n\lambda_D^3)$, e isso mostra que no limite de Vlasov (quando é descartado o efeito colisional), a equação cinética se reduz a uma equação de difusão no espaço de velocidades.

Em uma dimensão, a equação acima é reduzida a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_e}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial v} \left(A f_e + D \frac{\partial f_e}{\partial v} \right), \\ A &= \frac{e^2 v}{4\pi m_e} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^\infty dk \delta(\sigma \omega_k^L \pm kv), \\ D &= \frac{\pi e^2}{m_e^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^\infty dk \delta(\sigma \omega_k^L \pm kv) I_k^L.\end{aligned}\tag{5.4}$$

Desta forma, podemos ver que o estado assintótico é dado por

$$f_e = C \exp(-Av/D),\tag{5.5}$$

onde C é a constante de normalização. Supondo um *ansatz* que a distribuição assintótica é do tipo kappa,

$$\begin{aligned}f_e &= \frac{C}{(1 + m_e v^2 / 2\kappa' T_e)^\kappa}, \\ C &= \frac{m_e^{1/2}}{(2\pi T_e)^{1/2}} \frac{\Gamma(\kappa)}{\kappa^{1/2} \Gamma(\kappa - 1/2)}.\end{aligned}\tag{5.6}$$

Observe que (5.6) adota dois parâmetros diferentes, κ e κ' , permitindo maior independência. É sabido que a temperatura para o modelo Kappa é diferente da temperatura Maxwelliana. A relação entre a temperatura efetiva e T_e é $T_{eff} = T_e \kappa' / (\kappa - 3/2)$ [66].

A relação entre temperaturas será abordada na próxima subseção com maiores detalhes.

Após definirmos a função distribuição, a pergunta pertinente a fazer é: qual é a intensidade espectral I_k^L consistente com (5.6)? Para responder essa pergunta, [66], a partir de (5.5), após algumas considerações e fazendo uso da condição de ressonância $|v| = \omega_{pe}/k$, chega à seguinte expressão para a intensidade espectral:

$$I_L(k) = \frac{\kappa'}{\kappa} \frac{T_e}{4\pi^2} \left(1 + \frac{1}{\kappa' (\kappa v_e / \omega_{pe})^2} \right),\tag{5.7}$$

onde $v_e^2 = 2T_e/m_e$ é a velocidade térmica dos elétrons [66].

É interessante observar que a intensidade espectral é encontrada assumindo apenas que a função distribuição f_e é Kappa. E a princípio, não há nenhuma evidência física para que essa intensidade satisfaça a equação cinética não linear no estado assintótico. Assim, uma discussão acerca das ondas se faz necessária.

A partir da relação geral de dispersão,

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{k} \int \frac{\partial f_a / \partial v}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i0} = 0,\tag{5.8}$$

é possível determinar as expressões para a relação de dispersão tanto das ondas L , quanto para as ondas S , agora no âmbito da função distribuição Kappa [66],

$$(\omega_k^L)^2 = \omega_{pe} \left(1 + \frac{\kappa'}{\kappa - 3/2} \frac{3k^2 v_e^2}{2\omega_{pe}^2} \right)$$

e

$$(\omega_k^S)^2 = \frac{k^2 T_e}{m_i} \frac{\kappa' / (\kappa - 1/2) + 3T_i / T_e}{1 + [\kappa' / (\kappa - 1/2)] (k^2 v_e^2 / 2\omega_{pe}^2)}.$$

A partir da equação completa de evolução temporal das ondas, após uma série de considerações matemáticas sobre cada termo, levando em conta a função distribuição Kappa, P. H. Yoon chega a um conjunto de equações, para as ondas L e S ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} &= \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} \right|_{\text{emissão}} + \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} \right|_{\text{decaimento}} + \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} \right|_{\text{espalhamento}}, \\ \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\partial t} &= \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\partial t} \right|_{\text{emissão}} + \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\partial t} \right|_{\text{decaimento}}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde cada termo está especificado em [66]. Considerando agora a situação estacionária, $\partial/\partial t \rightarrow 0$. De acordo com estudos anteriores, é sabido que a turbulência iônica participa a partir do estágio intermediário da evolução não-linear do processo de geração da turbulência de Langmuir. No entanto, é possível mostrar que as ondas íon-acústicas se estabelecem ao nível das flutuações térmicas, não sendo interessantes quando o objetivo é chegar a um estágio assintoticamente estável. Podemos assim ignorar os efeitos de decaimento das ondas L que envolvem as ondas S . O processo de espalhamento dos elétrons (por exemplo o amortecimento de Landau pelos elétrons), quando comparado com outros (espalhamento de íons térmicos), é também desprezível [66]. A partir dessas e de outras considerações (acerca de simetria existente em \mathbf{k} , e da unidimensionalidade), obtém-se a seguinte equação

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int dv \delta(\omega_k^L - kv) \left(\frac{ne^2}{\pi} f_e + \omega_k I_k k \frac{\partial f_e}{\partial v} \right) \\ &- \left(\frac{\kappa - 1/2}{\kappa'} \right)^2 \frac{\pi e^2}{2T_e^2} \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm} \omega_k \int dk' \frac{\mu_{k-k'}}{|k - k'|^2} \times \delta(\omega_k^L - \sigma' \omega_{k'}^L - \sigma'' \omega_{k-k'}^S) \sigma'' I_{k'}^L I_k^L \\ &- \left(\frac{\kappa - 1/2}{\kappa'} \right)^2 \frac{\omega_k^L}{4\pi n T_i} \sum_{+, -} \int dk' \int dv \delta[\omega_k^L \mp \omega_{k'}^L - (k - k')v] \\ &\times \left[\frac{T_i}{4\pi^2} (\pm \omega_{k'}^L I_{k'}^L - \omega_k^L I_k^L) + I_{k'}^L I_k^L (\omega_k^L \mp \omega_{k'}^L) \right] f_i. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Após algumas considerações quanto aos diferentes sinais de $\sigma', \sigma'' = \pm 1$, e descartando alguns termos que não satisfazem a condição de ressonância, chega-se a equação (30) de [66]. Fazendo o balanceamento entre os termos de emissão espontânea e induzida, isto é, entre os dois primeiros termos do lado direito da equação (30), temos

$$\left(\frac{ne^2}{\pi} f_e(v) + I_L(k) \omega_{pe} k \frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{v=\omega_{pe}/k} = \frac{ne^2}{\pi} \left[1 - I_L(k) \frac{\kappa}{\kappa'} \frac{4\pi^2}{T_e} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\kappa' \kappa^2 v_e^2} \right)^{-1} \right] [f_e]_{v=\omega_{pe}/k} = 0, \quad (5.11)$$

o que nos leva a

$$I_L(k) = \frac{\kappa'}{\kappa} \frac{T_e}{4\pi^2} \left(1 + \frac{1}{\kappa' (\kappa v_e / \omega_{pe})^2} \right), \quad (5.12)$$

a mesma expressão obtida em (5.7) [66]. Note que chegamos a essa expressão apenas partindo da distribuição assintótica (5.6). Agora, resta determinar se de fato, (5.6) e (5.12) são consistentes

com termos não lineares da equação cinética das ondas L . Fazendo uma série de simplificações, vide [66], obtemos uma equação de balanceamento para os termos não lineares ($n.l$),

$$\begin{aligned}
 n.l = & \frac{2^{5/2}\pi^{3/2}}{3} \left(1 + \frac{3T_i \kappa - 1/2}{T_e \kappa'} \right) \left(\frac{\kappa'}{\kappa - 1/2} \right)^2 \\
 & \times \left[6k\lambda_{De} I_L^2(k) + \frac{\kappa - 3/2}{\kappa'} \frac{1}{\lambda_{De}} I_L(k) \frac{dI_L(k)}{dk} \right] - \frac{2}{3} \left(\frac{m_i T_e}{m_e T_i} \right)^{1/2} \frac{\kappa - 3/2}{\kappa'} \\
 & \times \left[\frac{T_i}{4\pi^2} \left(1 + \frac{\kappa'}{\kappa - 3/2} \frac{3k^2 v_e^2}{4\omega_{pe}^2} \right) \frac{dI_L(k)}{d(3k^2 v_e^2 / 4\omega_{pe}^2)} + \frac{\kappa'}{\kappa - 3/2} I_L^2(k) - \frac{\kappa'}{\kappa - 3/2} \frac{T_i}{4\pi^2} I_L(k) \right].
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Os primeiros dois termos no lado direito, os quais correspondem à interação ressonante envolvendo três ondas, podem ser ignorados por serem menores do que os termos de espalhamento, os quais são os três últimos por um fator de $(m_e/m_i)^{1/2}$. Igualando essa última equação a zero (apenas os três últimos termos são considerados), isso nos leva a uma expressão alternativa para a intensidade de turbulência de Langmuir assintoticamente estável,

$$I_L(k) = \frac{T_i}{4\pi^2} \left(1 + \frac{4(\kappa - 3/2)}{3} \frac{\omega_{pe}^2}{\kappa' \kappa^2 v_e^2} \right). \tag{5.14}$$

Por outro lado, sabemos da equação (5.7) ou, equivalentemente, a (5.12) que a distribuição Kappa estacionária (5.6) tem um espectro de turbulência auto-consistente dado pela equação (5.12) [66]. Igualando as equações (5.14) a (5.12) ou (5.7), temos

$$\begin{aligned}
 \kappa &= \frac{9}{4} = 2.25 \\
 \kappa' &= \frac{T_i}{T_e} \kappa = \frac{9T_i}{4T_e}.
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Isto é, se κ e κ' são dados pela equação (5.15), então a solução assintótica no tempo da equação cinética de onda produz uma solução consistente se equilibrarmos as emissões espontâneas e induzidas ou se equilibrarmos os processos de espalhamento espontâneo e induzido, e o espectro de turbulência assintótico resultante também é consistente com a função de distribuição de velocidade de elétrons Kappa [66].

No trabalho [67], o autor revisa o mesmo problema, agora em três dimensões. No entanto o tratamento tridimensional tem inconsistências: leva a uma função de distribuição de velocidade de elétrons isotrópicos, mas à turbulência anisotrópica de Langmuir no espaço de número de onda. Os resultados para κ e κ' são dados por

$$\begin{aligned}
 \kappa &= \frac{13}{4} = 3.25 \\
 \kappa' &= \frac{T_i}{T_e} (\kappa - 1),
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

isso mostra que $\kappa_{3D} = \kappa_{1D} + 1$, no entanto o valor de $\kappa' = 2.25(T_i/T_e)$ permanece o mesmo tanto para uma dimensão, quanto para três [67].

Em um terceiro trabalho, o autor revisita o problema da solução isotrópica de estado estacionário tridimensional para elétrons supratérmicos e turbulência de Langmuir [68]. Como já mencionado, na referência [66] obtém-se uma solução unidimensional matematicamente rigorosa e consistente. No entanto, a extensão tridimensional tentada em [67] leva a uma anisotropia da turbulência de Langmuir no espaço de número de onda. Tal resultado é inconsistente com a suposição de que o plasma está imerso em um campo magnético ambiente fraco, mas finito. No entanto, para um plasma genuinamente livre de campo, onde não há direção preferencial, as soluções de estado estacionário devem ser isotrópicas tanto para os elétrons quanto para a turbulência. É nesse contexto que o problema foi reformulado e as soluções determinadas nas equações (24), (32), (43) e (44) de [68].

O índice κ rederivado em [68] é o mesmo determinado em [67], a saber $\kappa = 2.25$, no caso tridimensional, enquanto que em [66] foi obtido $\kappa_{1D} = 1.15$ [68]. Isto mostra que a relação geral $\kappa_{3D} = \kappa_{1D} + 1$ é satisfeita independentemente do valor de κ_{1D} . Outro aspecto interessante é que o índice kappa $\kappa = 2.25$ está próximo do valor crítico kappa de $\kappa = 2.5$, que representa a fronteira entre o chamado "próximo do equilíbrio" e "longe do equilíbrio" de acordo com a teoria baseada na mecânica termo-estatística não-extensiva. Esse resultado é bastante interessante na medida em que este trabalho não invoca o conceito de mecânica estatística não-extensiva [68].

5.4 Função Distribuição Não Térmica

Conforme mencionado no início deste capítulo, existem diferentes formas de descrever a função de distribuição de velocidades Kappa. Apesar das diversas descrições, a partir de agora a formulação apresentada será redefinida e unificada, a fim de não haver confusão ou má interpretação dos resultados. A função distribuição de velocidades utilizada neste trabalho é isotrópica e está definida em Summers & Thorne [51] e também em Pierrard & Lazar [40]. Vamos chamá-la de função Kappa tipo I (*KI distribution*), e tem a seguinte forma:

$$f_{\beta,\kappa}(\mathbf{v}) = A \left(1 + \frac{v^2}{\kappa v_{\beta,\kappa}^2} \right)^{-(\kappa+1)}, \quad (5.17)$$

onde β é o tipo de partícula, A é a constante de normalização, $v_{\beta,\kappa}$ é a velocidade generalizada térmica associada ao parâmetro κ e $v_{\beta} = (2T_{\beta}/m_{\beta})^{1/2}$ é a velocidade térmica da partícula de massa m_{β} . A constante de normalização é obtida integrando sobre todo intervalo e igualando a $n_{\beta 0}$. Em 3D temos,

$$n_{\beta 0} = \int f_{\beta,\kappa}(\mathbf{v}) d^3v = 4\pi A \int_0^{\infty} v^2 \left(1 + \frac{v^2}{\kappa v_{\beta,\kappa}^2} \right)^{-(\kappa+1)} dv, \quad (5.18)$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis,

$$t = \frac{v^2}{\kappa v_{\beta,\kappa}^2}, \quad v = t^{1/2} \kappa^{1/2} v_{\beta,\kappa}, \quad dv = \frac{\kappa^{1/2} v_{\beta,\kappa}}{2t^{1/2}} dt,$$

temos:

$$n_{\beta 0} = A \cdot 2\pi \kappa^{3/2} v_{\beta}^3 \int_0^{\infty} t(1+t)^{-(\kappa+1)} dt, \quad (5.19)$$

e, utilizando a seguinte integral,

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{w+z}} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad (5.20)$$

com ($\Re z > 0$, $\Re w > 0$), e no presente caso, $z = 3/2$, $z + w = \kappa + 1$ e $w = \kappa - 1/2$, temos que a constante de normalização em três dimensões é dada pela expressão:

$$A = \frac{n_{\beta 0}}{\pi^{3/2} \kappa^{3/2} v_{\beta, \kappa}^3} \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\kappa - 1/2)}, \quad (5.21)$$

e a VDF Kappa em três dimensões normalizada é dada por

$$f_{\beta, \kappa}(\mathbf{v}) = \frac{n_{\beta 0}}{\pi^{3/2} \kappa^{3/2} v_{\beta, \kappa}^3} \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\kappa - 1/2)} \left(1 + \frac{v^2}{\kappa v_{\beta, \kappa}^2} \right)^{-(\kappa+1)}. \quad (5.22)$$

À exemplo do caso Maxwelliano, a abordagem de interesse é em duas dimensões. Sendo assim, para fins de análise numérica é importante que tenhamos a função distribuição de velocidade normalizada em $2D$, que difere da forma tridimensional encontrada na literatura. Assim, a normalização em duas dimensões é dada por:

$$\begin{aligned} n_{\beta 0} &= A \cdot 2\pi \int_0^{\infty} t^{1/2} \kappa^{1/2} v_{\beta, \kappa} (1+t)^{-(\kappa+1)} \frac{\kappa^{1/2} v_{\beta, \kappa}}{2t^{1/2}} dt \\ &= A \cdot \pi \int_0^{\infty} \kappa v_{\beta, \kappa}^2 (1+t)^{-(\kappa+1)} dt \\ &= A \pi \kappa v_{\beta, \kappa}^2 \left[\frac{(1+t)^{-\kappa-1+1}}{-\kappa-1+1} \right]_{\lim_{t \rightarrow 0}}^{\lim_{t \rightarrow \infty}} \\ n_{\beta 0} &= A \pi \kappa v_{\beta, \kappa}^2 \left[-\frac{1}{\kappa \infty} + \frac{1}{\kappa(1+0)} \right], \\ \Rightarrow A &= \frac{n_{\beta 0}}{\pi v_{\beta, \kappa}^2}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

onde foi utilizada a mesma mudança de variáveis da função tridimensional. Em suma, a função distribuição de velocidades na forma bidimensional é dada pela seguinte expressão:

$$f_{\beta, \kappa}(\mathbf{v}) = \frac{n_{\beta 0}}{\pi v_{\beta, \kappa}^2} \left(1 + \frac{v^2}{\kappa v_{\beta, \kappa}^2} \right)^{-(\kappa+1)}. \quad (5.24)$$

A velocidade generalizada $v_{\beta, \kappa}$ que aparece na expressão (5.24) da função distribuição de velocidades pode ser determinada a partir do segundo momento da função distribuição, para

dois graus de liberdade, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{2}T_\beta &= \int \frac{m_\beta v^2}{2} F_{\beta,\kappa}(\mathbf{v}) d^2v, \\
 T_\beta &= \int_0^\infty \frac{m_\beta v^2}{2} \frac{1}{\pi v_{\beta,\kappa}^2} \left(1 + \frac{v^2}{\kappa v_{\beta,\kappa}^2}\right)^{-(\kappa+1)} 2\pi v dv, \\
 T_\beta &= \frac{m_\beta}{v_{\beta,\kappa}^2} \int_0^\infty v^3 \left(1 + \frac{v^2}{\kappa v_{\beta,\kappa}^2}\right)^{-(\kappa+1)} dv, \\
 T_\beta &= \frac{m_\beta v_{\beta,\kappa}^2 \kappa^2 \Gamma(2)\Gamma(\kappa-1)}{2 \Gamma(\kappa+1)}, \\
 T_\beta &= \frac{m_\beta v_{\beta,\kappa}^2}{2} \frac{\kappa}{(\kappa-1)}. \\
 \frac{2T_\beta}{m_\beta} &= v_{\beta,\kappa}^2 \frac{\kappa}{(\kappa-1)}, \\
 v_{\beta,\kappa}^2 &= \frac{(\kappa-1)}{\kappa} v_\beta^2,
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

onde foi usada a mesma mudança de variáveis feita para a normalização de $f_{\beta,\kappa}(\mathbf{v})$, a velocidade térmica $v_\beta^2 = 2T_\beta/m_\beta$ e a definição $f_{\beta,\kappa}(\mathbf{v}) = n_{\beta 0} F_{\beta,\kappa}(\mathbf{v})$. A forma da velocidade generalizada em duas dimensões difere da forma da velocidade em três dimensões. De maneira similar pode-se obter uma expressão para $v_{\beta,\kappa}$ para três graus de liberdade e o resultado - já conhecido na literatura - é:

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{2}\Theta_\kappa &= \int \frac{m_\beta v^2}{2} F_{\beta,\kappa}(\mathbf{v}) d^3v, \\
 \frac{3}{2}\Theta_\kappa &= \int_0^\infty \frac{m_\beta v^2}{2} \frac{1}{\pi^{3/2} \kappa^{3/2} v_{\beta,\kappa}^3} \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa-1/2)} \left(1 + \frac{v^2}{\kappa v_{\beta,\kappa}^2}\right)^{-(\kappa+1)} 4\pi v^2 dv, \\
 \frac{3}{2}\Theta_\kappa &= \frac{2m_\beta}{\sqrt{\pi} \kappa^{3/2} v_{\beta,\kappa}^3} \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa-1/2)} \int_0^\infty \frac{v^4}{(1 + v^2/v_{\beta,\kappa}^2)^{\kappa+1}} dv \\
 \frac{3}{2}\Theta_\kappa &= \frac{m_\beta \kappa v_{\beta,\kappa}^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa-1/2)} \frac{\Gamma(5/2)\Gamma(\kappa-3/2)}{\Gamma(\kappa+1)}. \\
 \frac{2\Theta_\kappa}{m_\beta} &= \frac{\kappa}{(\kappa-3/2)} v_{\beta,\kappa}^2, \\
 v_{\beta,\kappa}^2 &= \frac{\kappa-3/2}{\kappa} v_\beta^2.
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

5.4.1 Relação de Dispersão das Ondas L e S

No capítulo 2 introduzimos o conceito de função dielétrica e a partir dele, calculamos a relação de dispersão para o caso eletrostático. Aqui vamos proceder de maneira similar, mas fazendo uso da função Kappa definida em (5.24). De (2.38), para o caso eletrostático bidimensional ($v^2 = v_x^2 + v_z^2$), temos:

$$1 - \sum_\beta \frac{\omega_{p\beta}^2}{n_{\beta 0} k^2} \int_L d^2v \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla f_\beta}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} = 0, \tag{5.27}$$

onde o índice L na integração significa que o contorno é de Landau. Em variáveis adimensionais (a mesma mudança de variáveis realizada nos capítulos anteriores) e assumindo que o vetor de onda adimensional \mathbf{q} seja ao longo do eixo z temos:

$$1 - \sum_{\beta} \frac{\omega_{p\beta}^2}{n_{\beta 0} q^2} \frac{1}{\omega_{pe}^2} \int_L d^2 u \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla_u \Phi_{\beta}}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} - z} = 0,$$

$$1 - \sum_{\beta} \frac{\omega_{p\beta}^2}{n_{\beta 0} q^2} \frac{1}{\omega_{pe}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} du_z \int_{-\infty}^{+\infty} du_x \frac{1}{(u_z - z/q)} \frac{\partial}{\partial u_z} \left[\frac{n_{\beta 0}}{\pi u_{\beta, \kappa}^2} \left(1 + \frac{u_x^2 + u_z^2}{\kappa u_{\beta, \kappa}^2} \right)^{-(\kappa+1)} \right]. \quad (5.28)$$

Vamos primeiro realizar a integração na variável perpendicular u_x :

$$I = \frac{n_{\beta 0}}{\pi u_{\beta, \kappa}^2} \eta^{-(\kappa+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{u_x^2}{\kappa u_{\beta, \kappa}^2 \eta} \right)^{-(\kappa+1)} du_x,$$

$$I = 2 \frac{n_{\beta 0}}{\pi u_{\beta, \kappa}^2} \eta^{-(\kappa+1)} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{u_x^2}{\kappa u_{\beta, \kappa}^2 \eta} \right)^{-(\kappa+1)} du_x, \quad (5.29)$$

onde $\eta = 1 + \frac{u_z^2}{\kappa u_{\beta, \kappa}^2}$. Fazemos agora uma mudança de variáveis,

$$t = \frac{u_x^2}{\kappa u_{\beta, \kappa}^2 \eta}, \quad dt = \frac{2u_x du_x}{\kappa u_{\beta, \kappa}^2 \eta},$$

e substituindo na expressão (5.29), obtemos uma integral já conhecida e podemos utilizar a relação (5.20) para resolvê-la:

$$I = \frac{2n_{\beta 0}}{\pi u_{\beta, \kappa}} \eta^{-(\kappa+1)} \frac{\kappa^{1/2} u_{\beta, \kappa} \eta^{1/2}}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^{-1/2}}{(1+t)^{(\kappa+1)}} dt,$$

$$I = \frac{n_{\beta 0} \kappa^{1/2}}{\pi^{1/2} u_{\beta, \kappa}} \frac{\Gamma(\kappa + 1/2)}{\Gamma(\kappa + 1)} \eta^{-(\kappa+1/2)}. \quad (5.30)$$

Inserindo o resultado obtido acima na equação (5.28) temos:

$$1 - \sum_{\beta} \frac{\omega_{p\beta}^2}{\omega_{pe}^2 q^2} \frac{\kappa^{1/2}}{\pi^{1/2} u_{\beta, \kappa}} \frac{\Gamma(\kappa + 1/2)}{\Gamma(\kappa + 1)} \int_L du_z \frac{1}{u_z - z/q} \frac{\partial}{\partial u_z} \left(1 + \frac{u_z^2}{\kappa u_{\beta, \kappa}^2} \right)^{-(\kappa+1/2)} = 0,$$

$$1 + \sum_{\beta} \frac{\omega_{p\beta}^2}{\omega_{pe}^2 q^2} \frac{\kappa^{1/2}}{\pi^{1/2} u_{\beta, \kappa}} \frac{\Gamma(\kappa + 1/2)}{\Gamma(\kappa + 1)} \frac{2(\kappa + 1/2)}{\kappa u_{\beta, \kappa}^2} \int_L du_z \frac{u_z}{u_z - z/q} \frac{\partial}{\partial u_z} \left(1 + \frac{u_z^2}{\kappa u_{\beta, \kappa}^2} \right)^{-(\kappa+1/2)} = 0, \quad (5.31)$$

lembrando que o índice L na integral representa o contorno de Landau. Fazemos então uma mudança de variáveis,

$$s = \frac{u_z}{u_{\beta, \kappa}}, \quad \zeta_{\beta}^0 = \frac{z}{q u_{\beta, \kappa}} = \frac{\omega}{k v_{\beta, \kappa}},$$

realizando a integração e fazendo uso da propriedade da função Gama, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, obtemos uma expressão para a relação de dispersão

$$1 + 2 \sum_{\beta} \frac{\omega_{p\beta}^2}{\omega_{pe}^2 q^2} \frac{1}{u_{\beta, \kappa}} \frac{\kappa + 1/2}{\kappa} \frac{\Gamma(\kappa + 1/2)}{\Gamma(\kappa)} \left(\frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\kappa + 3/2)} 1 + \frac{\Gamma(\kappa - 1/2)}{\Gamma(\kappa)} \zeta_{\beta}^0 Z_{\kappa}^{(3/2)}(\zeta_{\beta}^0) \right) = 0,$$

$$1 + 2 \sum_{\beta} \frac{\omega_{p\beta}^2}{\omega^2} (\zeta_{\beta}^0)^2 \left(1 + \frac{\Gamma(\kappa - 1/2)}{\kappa \Gamma(\kappa)} \frac{\Gamma(\kappa + 3/2)}{\Gamma(\kappa)} \zeta_{\beta}^0 Z_{\kappa, \beta}^{(3/2)}(\zeta_{\beta}^0) \right) = 0, \quad (5.32)$$

onde a função $Z_{\kappa,\beta}^{(3/2)}(\zeta_\beta^0)$ é a função relação de dispersão de plasma para distribuições do tipo κ de ordem m ,

$$Z_\kappa^m(\xi) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \frac{\Gamma(\kappa)}{\kappa^{1/2} \Gamma(\kappa - 1/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(s - \xi)(1 + s^2/\kappa)^{\kappa+m}}, \quad (5.33)$$

que se reduz à função definida por Summers & Thorne [51], para $m = 1$, e pode ser escrita em termos da Função Hipergeométrica de Gauss,

$$Z_\kappa^{(m)}(\xi) = \frac{i\Gamma(\kappa)\Gamma(\kappa + m + 1/2)}{\kappa^{1/2}\Gamma(\kappa - 1/2)\Gamma(\kappa + m + 1)} {}_2F_1 \left[1, 2\kappa + 2m; \kappa + m + 1; \frac{1}{2} \left(1 + \frac{i\xi}{\kappa^{1/2}} \right) \right]. \quad (5.34)$$

Essa relação de dispersão pode ser resolvida de forma numérica. No entanto, para certos casos, podemos fazer uso de algumas propriedades da função relação de dispersão de plasma e assim obter um resultado analítico. De maneira similar feita para as ondas de Langmuir utilizando uma função distribuição Maxwelliana na subseção 2.4.2, supondo grandes velocidades de fase e expandindo o integrando da função $Z_\kappa^m(\xi)$ chega-se a uma equação simplificada para a relação de dispersão.

Para as ondas de Langmuir, temos a seguinte relação de dispersão para as ondas L :

$$1 - \sum_{\beta} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{1}{(\zeta_\beta^0)^2} \right) = 0. \quad (5.35)$$

E, ignorando o efeito dos íons, temos:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} \frac{1}{(\zeta_e^0)^2} \right) &= 0, \\ 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} \frac{k^2 v_{e,\kappa}^2}{\omega^2} \right) &= 0, \\ 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e} \frac{k^2 v_e^2}{\omega^2} \right) &= 0, \\ \omega^4 - \omega_{pe}^2 \omega^2 - \frac{3}{2} k^2 v_e^2 \omega_{pe}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Usando a fórmula de Báskara, temos

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{1}{2} \left[\omega_{pe}^2 \pm \left(\omega_{pe}^4 + 6k^2 \omega_{pe}^2 v_e^2 \right)^{1/2} \right], \\ \omega^2 &= \frac{\omega_{pe}^2}{2} \left[1 \pm \left(1 + 6 \frac{k^2 v_e^2}{\omega_{pe}^2} \right)^{1/2} \right] \simeq \frac{\omega_{pe}^2}{2} \left[1 \pm \left(1 + 3 \frac{k^2 v_e^2}{\omega_{pe}^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.37)$$

e, considerando apenas a raíz positiva, temos a relação de dispersão das ondas L para uma função distribuição kappa tipo I:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_{pe}^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{k^2 v_e^2}{\omega_{pe}^2} \right) \\ \omega_k^L &= \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{k^2 v_e^2}{\omega_{pe}^2} \right)^{1/2} = \omega_{pe} \left(1 + 3k^2 \lambda_{De}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

que é a mesma expressão obtida no capítulo 2 na equação (2.50). Note que utilizamos a definição de $v_{\kappa,e} = \frac{\kappa-1}{\kappa} v_e^2$ em duas dimensões, mas poderíamos realizar o mesmo procedimento para três dimensões e obter o mesmo resultado.

Para as ondas íon-acústicas utilizamos diferentes aproximações: para a contribuição dos íons supomos grandes velocidades de fase, enquanto que para a contribuição dos elétrons, supomos pequenas velocidades de fase. Assim, para as ondas S,

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\kappa_i}{\kappa_i - 1} \frac{1}{(\zeta_i^0)^2} \right) + 2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\kappa_e}{\kappa_e} (\zeta_e^0)^2 &= 0, \\
 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\kappa_i}{\kappa_i - 1} \frac{k^2 v_{i,\kappa}^2}{\omega^2} \right) + 2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\omega^2}{k^2 v_{e,\kappa}^2} &= 0, \\
 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\kappa_i}{\kappa_i - 1} \frac{\kappa_i - 1}{\kappa_i} \frac{k^2 v_i^2}{\omega^2} \right) + 2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} \frac{\omega^2}{k^2 v_e^2} &= 0, \\
 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{k^2 v_i^2}{\omega^2} \right) + 2 \frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} &= 0, \\
 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - 3k^2 \lambda_{De}^2 \frac{\omega_{pi}^4}{\omega^4} \frac{T_i}{T_e} + \frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} &= 0, \\
 \omega^4 \left(\frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} + k^2 \lambda_{De}^2 \right) - \omega_{pi}^2 k^2 \lambda_{De}^2 \omega^2 - 3k^4 \lambda_{De}^4 \omega_{pi}^4 \frac{T_i}{T_e} &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Usando novamente a fórmula de Báskara, admitindo que $T_e \gg T_i$ e $k^2 \lambda_{De} \ll 1$, fazendo algumas aproximações e considerando a raiz positiva, temos:

$$\begin{aligned}
 \omega^2 &= \frac{1}{2 \left(\frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} + k^2 \lambda_{De}^2 \right)} \left[\omega_{pi}^2 k^2 \lambda_{De}^2 \pm \left(\omega_{pi}^4 k^4 \lambda_{De}^4 + 12 \left(\frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} + k^2 \lambda_{De}^2 \right) k^4 \lambda_{De}^4 \omega_{pi}^4 \frac{T_i}{T_e} \right)^{1/2} \right], \\
 \omega^2 &= \frac{\omega_{pi}^2 k^2 \lambda_{De}^2}{2 \left(\frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} + k^2 \lambda_{De}^2 \right)} \left[1 \pm \left(1 + 12 \frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} \frac{T_i}{T_e} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{6k^2 \lambda_{De}^2 \frac{T_i}{T_e}}{1 + 12 \frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} \frac{T_i}{T_e}} \right) \right], \\
 \omega^2 &= \frac{\omega_{pi}^2 k^2 \lambda_{De}^2}{2 \left(\frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} + k^2 \lambda_{De}^2 \right)} \left[1 \pm \left(1 + 12 \frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} \frac{T_i}{T_e} \right)^{1/2} \right], \\
 \omega^2 &= \frac{\omega_{pi}^2 k^2 \lambda_{De}^2}{2 \left(\frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} + k^2 \lambda_{De}^2 \right)} \left[1 \pm \left(1 + 6 \frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} \frac{T_i}{T_e} \right) \right], \\
 \omega^2 &= \frac{\omega_{pi}^2 k^2 \lambda_{De}^2}{\left(\frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} + k^2 \lambda_{De}^2 \right)} \left(1 + 3 \frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} \frac{T_i}{T_e} \right), \\
 \omega_{\mathbf{k}}^S &= \frac{\omega_{pe} k \lambda_{De}}{\left(\frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} + k^2 \lambda_{De}^2 \right)^{1/2}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \left(1 + 3 \frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} \frac{T_i}{T_e} \right)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Caso seja utilizada a expressão em três dimensões da velocidade generalizada $v_{\kappa,\beta} = \frac{\kappa-3/2}{\kappa} v_\beta^2$, seguindo os mesmos passos, é possível chegar na seguinte expressão para a relação de dispersão das ondas S:

$$\omega_{\mathbf{k}}^S = \frac{\omega_{pe} k \lambda_{De}}{\left(\frac{\kappa_e - 1/2}{\kappa_e - 3/2} + k^2 \lambda_{De}^2\right)^{1/2}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \left(1 + 3 \frac{\kappa_e - 1/2 T_i}{\kappa_e - 3/2 T_e}\right)^{1/2}. \quad (5.41)$$

5.4.2 Espectros Iniciais

Os espectros iniciais são obtidos, como já mencionado em 4.1.4, fazendo o balanceamento dos termos de emissão espontânea e induzida, quando falamos das ondas de Langmuir e das íon-acústicas.

Já para as ondas transversais, trabalhamos com o termo assintótico associado ao espalhamento envolvendo ondas T e L . Conforme mencionado anteriormente, quando falamos em espectros iniciais de ondas transversais há dois casos a serem considerados. O primeiro é bem conhecido na literatura padrão e assume-se que as ondas transversais não existem no instante inicial, por serem produto de interações lineares de outros tipos de ondas. O segundo caso, no entanto, é uma descoberta recente e foi detalhado na seção 4.1.4. No trabalho *Spontaneous emission of electromagnetic radiation in turbulent plasmas*, Ziebell *et al.* propõem a geração de um espectro assintótico das ondas T produzido por mecanismos não lineares, logo no início da interação, e que aqui será tomado como sendo o espectro inicial das ondas transversais.

A seguir serão apresentadas expressões para os espectros iniciais das ondas (utilizando um procedimento similar ao feito no fim do capítulo 4), mas agora admitindo um plasma de fundo descrito por uma VDF Kappa tipo I. Vale ressaltar que a função distribuição bem como as equações apresentadas a seguir estão na forma adimensional. As variáveis adimensionais utilizadas foram definidas em (4.9).

Ondas de Langmuir

A partir da equação cinética das ondas L , (4.11), usando $\mu_{\mathbf{q}}^L = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} &= \mu_{\mathbf{q}}^L \frac{\pi}{q^2} \int d\mathbf{u} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) \left(g \Phi_e(\mathbf{u}) + (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \Phi_e(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right), \\ \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} &= \frac{\pi}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_{-\infty}^{\infty} du_x \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \left[g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \left(q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \right], \\ \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} &= \frac{\pi}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_{-\infty}^{\infty} du_x \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \left[g \Phi_e \right. \\ &\quad \left. + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \frac{\kappa_e + 1}{\kappa_e} \left(-q_x \frac{2u_x}{u_{e,\kappa}^2} \left(1 + \frac{u^2}{\kappa_e u_{e,\kappa}^2} \right)^{-1} - q_z \frac{2u_z}{u_{e,\kappa}^2} \left(1 + \frac{u^2}{\kappa_e u_{e,\kappa}^2} \right)^{-1} \right) \Phi_e \right], \\ \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} &= \frac{\pi}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_{-\infty}^{\infty} du_x \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \left[g \Phi_e \right. \\ &\quad \left. - (\sigma z_{\mathbf{q}}^L)^2 \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \frac{2}{u_{e,\kappa}^2} \frac{\kappa_e + 1}{\kappa_e} \left(1 + \frac{u^2}{\kappa_e u_{e,\kappa}^2} \right)^{-1} \Phi_e \right] \simeq 0. \end{aligned}$$

Então, usando a condição de ressonância obtemos e uma expressão para $\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}$ a partir do

equilíbrio,

$$\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} = \frac{g}{2(z_{\mathbf{q}}^L)^2} \frac{I_1}{I_2}, \quad (5.42)$$

onde,

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \Phi_e \delta \left[\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z \right], \quad (5.43)$$

$$I_2 = \frac{\kappa_e + 1}{\kappa_e - 1} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \Phi_e \left(1 + \frac{u^2}{\kappa_e u_{e,\kappa}^2} \right)^{-1} \delta \left[\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z \right]. \quad (5.44)$$

As integrais (5.43) e (5.44) podem ser obtidas analiticamente. Utilizando a expressão (A.17), obtida no Apêndice A, a razão I_1/I_2 é dada por

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{\kappa_{\alpha} u_{\alpha,\kappa}^2 q^2 + (\sigma z_{\mathbf{q}}^L)^2}{\kappa_{\alpha} u_{\alpha,\kappa}^2 q^2} \right) \frac{\kappa_{\alpha} - 1}{\kappa_{\alpha} + 1/2}. \quad (5.45)$$

Note que encontramos uma divergência na região de $q \rightarrow 0$ e para sanar este problema, foi imposto um limite superior para a variável velocidade no cálculo das integrais, de forma que $u = u_f = c/v_{te}$. Utilizando as expressões (B.4) e (B.6), obtidas no Apêndice B, temos [53]:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} &= \frac{g}{2(z_{\mathbf{q}}^L)^2} \left(\frac{\kappa_e u_{e,\kappa}^2 q^2 + (\sigma z_{\mathbf{q}}^L)^2}{\kappa_e u_{e,\kappa}^2 q^2} \right) \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 1} \frac{{}_2F_1(1/2, \kappa_e + 1; 3/2; -t_{me})}{{}_2F_1(1/2, \kappa_e + 2; 3/2; -t_{me})}, \quad (q^2 > (z_{\mathbf{q}}^L/u_f)^2) \\ \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} &= \frac{g}{2(z_{\mathbf{q}}^L)^2} \left(\frac{\kappa_e u_{e,\kappa}^2 + u_f^2}{\kappa_e u_{e,\kappa}^2} \right) \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 1}, \quad (q^2 \leq (z_{\mathbf{q}}^L/u_f)^2). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Ondas Íon-Acústicas

Para as ondas S , procedemos de maneira similar. A partir dos termos de emissão induzida e espontânea da equação (4.12),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S}}{\partial \tau} &= \frac{\pi \mu_{\mathbf{q}}^S}{q^2} \int d\mathbf{u} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^S - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) \left[g[\Phi_e(\mathbf{u}) + \Phi_i(\mathbf{u})] \right. \\ &\quad \left. + (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\mathbf{q} \cdot \frac{\partial \Phi_e(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \right], \end{aligned} \quad (5.47)$$

separando nas componentes paralela e perpendicular e substituindo as funções distribuição de velocidades para os íons e para os elétrons,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S}}{\partial \tau} &= \frac{\pi \mu_{\mathbf{q}}^S}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_{-\infty}^{\infty} du_x \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^S - q_x u_x - q_z u_z) \\ &\times \left[g (\Phi_e + \Phi_i) + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \left(-\frac{2}{u_{e,\kappa}^2} \frac{\kappa_e + 1}{\kappa_e} \left(1 + \frac{u^2}{\kappa_e u_{e,\kappa}^2} \right)^{-1} (q_x u_x + q_z u_z) \Phi_e \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{m_e}{m_i} \frac{2}{u_{i,\kappa}^2} \frac{\kappa_i + 1}{\kappa_i} \left(1 + \frac{u^2}{\kappa_i u_{i,\kappa}^2} \right)^{-1} (q_x u_x + q_z u_z) \Phi_i \right) \right]. \end{aligned}$$

Usando a condição de ressonância e reorganizando os termos, ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_q^{\sigma S}}{\partial \tau} &= \frac{\pi \mu_q^S}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_{-\infty}^{\infty} du_x \delta(\sigma z_q^S - q_x u_x - q_z u_z) \\ &\times \left[g (\Phi_e + \Phi_i) - (\sigma z_q^L)(\sigma z_q^S) \mathcal{E}_q^{\sigma S} \left(\frac{2}{u_{e,\kappa}^2} \frac{\kappa_e + 1}{\kappa_e} \left(1 + \frac{u^2}{\kappa_e u_{e,\kappa}^2} \right)^{-1} \Phi_e \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{m_e}{m_i} \frac{2}{u_{i,\kappa}^2} \frac{\kappa_i + 1}{\kappa_i} \left(1 + \frac{u^2}{\kappa_i u_{i,\kappa}^2} \right)^{-1} \Phi_i \right) \right], \\ \frac{\partial \mathcal{E}_q^{\sigma S}}{\partial \tau} &= \frac{\pi \mu_q^S}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_{-\infty}^{\infty} du_x \delta(\sigma z_q^S - q_x u_x - q_z u_z) \\ &\times \left[g (\Phi_e + \Phi_i) - 2z_q^L z_q^S \mathcal{E}_q^{\sigma S} \left(\frac{\kappa_e + 1}{\kappa_e - 1} \left(1 + \frac{u^2}{\kappa_e u_{e,\kappa}^2} \right)^{-1} \Phi_e + \frac{T_e}{T_i} \frac{\kappa_i + 1}{\kappa_i - 1} \left(1 + \frac{u^2}{\kappa_i u_{i,\kappa}^2} \right)^{-1} \Phi_i \right) \right] \simeq 0. \end{aligned}$$

No equilíbrio, encontramos uma expressão para a intensidade espectral inicial para as ondas íon acústicas:

$$\mathcal{E}_q^{\sigma S} = \frac{g}{2z_q^L z_q^S} \left(\frac{I_1^e + I_1^i}{I_2^e + \frac{T_e}{T_i} I_2^i} \right) = \frac{g}{2z_q^L z_q^S} \frac{I_1^e}{I_2^e} \left(\frac{1 + I_1^i/I_1^e}{1 + \frac{T_e}{T_i} I_2^i/I_2^e} \right). \quad (5.48)$$

Aqui também encontramos uma divergência na região de $q \rightarrow 0$, então vamos utilizar os resultados obtidos no Apêndice B, mas agora tanto para íons quanto elétrons. A expressão para o espectro inicial das ondas S , para $(\sigma z_q^S/q)^2 < u_j^2$, é dada por [53]

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q^{\sigma S} &= \frac{g}{2z_q^L z_q^S} \left(\frac{\kappa_e u_{e,\kappa}^2 q^2 + (\sigma z_q^S)^2}{\kappa_e u_{e,\kappa}^2 q^2} \right) \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 1} \frac{{}_2F_1(1/2, \kappa_e + 1; 3/2; -t_{me})}{{}_2F_1(1/2, \kappa_e + 2; 3/2; -t_{me})} \left(\frac{1 + I_1^i/I_1^e}{1 + \frac{T_e}{T_i} I_2^i/I_2^e} \right), \\ I_1^i/I_1^e &= \frac{u_{e,\kappa}^2}{u_{i,\kappa}^2} \left(\frac{\kappa_i u_{i,\kappa}^2 q^2}{\kappa_i u_{i,\kappa}^2 q^2 + (\sigma z_q^S)^2} \right)^{\kappa_i + 1} \left(\frac{\kappa_e u_{e,\kappa}^2 q^2 + (\sigma z_q^S)^2}{\kappa_e u_{e,\kappa}^2 q^2} \right)^{\kappa_e + 1} \frac{{}_2F_1(1/2, \kappa_i + 1; 3/2; -t_{mi})}{{}_2F_1(1/2, \kappa_e + 1; 3/2; -t_{me})}, \\ I_2^i/I_2^e &= \frac{\kappa_i + 1}{\kappa_i - 1} \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 1} \frac{u_{e,\kappa}^2}{u_{i,\kappa}^2} \left(\frac{\kappa_i u_{i,\kappa}^2 q^2}{\kappa_i u_{i,\kappa}^2 q^2 + (\sigma z_q^S)^2} \right)^{\kappa_i + 2} \left(\frac{\kappa_e u_{e,\kappa}^2 q^2 + (\sigma z_q^S)^2}{\kappa_e u_{e,\kappa}^2 q^2} \right)^{\kappa_e + 2} \\ &\times \frac{{}_2F_1(1/2, \kappa_i + 2; 3/2; -t_{mi})}{{}_2F_1(1/2, \kappa_e + 2; 3/2; -t_{me})}. \end{aligned}$$

Para $(\sigma z_q^S/q)^2 \geq u_j^2$ as expressões são as mesmas, mas agora avaliadas em $(\sigma z_q^S/q)^2 = u_j^2$. Neste limite, temos que $t_{m\alpha} \rightarrow 0$, e as funções hipergeométricas tendem à unidade.

Ondas Transversais

Para as ondas transversais, a forma assintótica do espectro pode ser obtida de forma aproximada, levando em consideração apenas o termo da equação (4.13) associado ao fenômeno de espalhamento envolvendo ondas L e T [75, 76]. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma T}}{\partial \tau} &= \sigma z_{\mathbf{q}}^T \sum_{\sigma'=\pm 1} \int d\mathbf{q}' \int d\mathbf{u} \frac{\mu_{\mathbf{q}}^T \mu_{\mathbf{q}'}^L (\mathbf{q} \times \mathbf{q}')^2}{q^2 q'^2} \left[g \left(\sigma_{\mathbf{q}}^T \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma T}}{2} \right) [\Phi_e(\mathbf{u}) + \Phi_i(\mathbf{u})] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m_e}{m_i} \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma T}}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right] \delta[\sigma z_{\mathbf{q}}^T - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \mathbf{u}] \simeq 0
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

Podemos utilizar coordenadas esféricas no espaço de velocidades, considerando o eixo z ao longo de $\mathbf{q} - \mathbf{q}'$,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma T}}{\partial \tau} &= \sigma z_{\mathbf{q}}^T \sum_{\sigma'=\pm 1} \int d\mathbf{q}' \frac{(\mathbf{q} \times \mathbf{q}')^2}{q^2 q'^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty du u^2 \delta[\sigma z_{\mathbf{q}}^T - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \mathbf{u}] \\
 &\quad \times \left[g \left(\sigma_{\mathbf{q}}^T \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma T}}{2} \right) [\Phi_e(\mathbf{u}) + \Phi_i(\mathbf{u})] + \frac{m_e}{m_i} \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma T}}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right],
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

onde $\mu_{\mathbf{q}}^T = \mu_{\mathbf{q}'}^L = 1$. Lembrando que a função distribuição depende apenas de u , e usando a condição de ressonância, temos

$$\begin{aligned}
 & - (\sigma z_{\mathbf{q}}^T) \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{q}' \frac{(\mathbf{q} \times \mathbf{q}')^2}{q^2 q'^2} \times \left[g \left(\sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma T}}{2} - \sigma z_{\mathbf{q}}^T \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \right) [I_1^e + I_1^i] \right. \\
 & \quad \left. + \frac{m_e}{m_i} \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma T}}{2} (\sigma z_{\mathbf{q}}^T - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \frac{2}{u_{i,\kappa}^2} \frac{(\kappa_i + \alpha_i)}{\kappa_i} I_2^i \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

Isolando $\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma T}$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma T} &= 2(\sigma z_{\mathbf{q}}^T) \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{q}' \frac{(\mathbf{q} \times \mathbf{q}')^2}{q'^2} \left[g \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} [I_1^e + I_1^i] \right] \\
 &\quad \times \left\{ \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{q}' \frac{(\mathbf{q} \times \mathbf{q}')^2}{q'^2} \left[g(\sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) [I_1^e + I_1^i] + \frac{m_e}{m_i} \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^T - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \frac{2}{u_{i,\kappa}^2} \frac{(\kappa_i + \alpha_i)}{\kappa_i} I_2^i \right] \right\}^{-1}.
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

Podemos substituir os resultados obtidos em (A.8) e (A.16), assim temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma T} &= 2(\sigma z_{\mathbf{q}}^T) \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{q}' \frac{(\mathbf{q} \times \mathbf{q}')^2}{q'^2 |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \\
 &\quad \times \left\{ g \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \left[\frac{1}{\pi^{1/2} \kappa_e^{1/2} u_{e,\kappa}} \frac{\Gamma(\kappa_e)}{\Gamma(\kappa_e - 1/2)} \left(1 + \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^T - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2 / |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2}{\kappa_e u_{e,\kappa}^2} \right)^{-(\kappa_e)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{\pi^{1/2} \kappa_i^{1/2} u_{i,\kappa}} \frac{\Gamma(\kappa_i)}{\Gamma(\kappa_i - 1/2)} \left(1 + \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^T - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2 / |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2}{\kappa_i u_{i,\kappa}^2} \right)^{-(\kappa_i)} \right] \right\} \\
 &\quad \times \left\{ \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{q}' \frac{(\mathbf{q} \times \mathbf{q}')^2}{q'^2 |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \left[g(\sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \left(\frac{1}{\pi^{1/2} \kappa_e^{1/2} u_{e,\kappa}} \frac{\Gamma(\kappa_e)}{\Gamma(\kappa_e - 1/2)} \left(1 + \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^T - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2 / |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2}{\kappa_e u_{e,\kappa}^2} \right)^{-(\kappa_e)} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{\pi^{1/2} \kappa_i^{1/2} u_{i,\kappa}} \frac{\Gamma(\kappa_i)}{\Gamma(\kappa_i - 1/2)} \left(1 + \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^T - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2 / |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2}{\kappa_i u_{i,\kappa}^2} \right)^{-(\kappa_i)} \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{m_e}{m_i} \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^T - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \frac{2}{u_{i,\kappa}^2} \frac{1}{\pi^{1/2} \kappa_i^{1/2} u_{i,\kappa}} \frac{\Gamma(\kappa_i)}{\Gamma(\kappa_i - 1/2)} \left(1 + \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^T - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2 / |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2}{\kappa_i u_{i,\kappa}^2} \right)^{-(\kappa_i+1)} \right] \right\}^{-1}.
 \end{aligned}$$

Para a integração, vamos utilizar coordenadas esféricas no espaço de \mathbf{q}' , considerando o eixo z ao longo de \mathbf{q} , temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma T} &= 2(\sigma z_q^T) \sum_{\sigma'} (2\pi) \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \int_0^\infty dq' q'^2 \frac{q^2 q'^2 \sin^2 \theta'}{q'^2 (q^2 + q'^2 - 2qq' \cos \theta')^{1/2}} g \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \\
 &\times \left[\frac{1}{\kappa_e^{1/2} u_{e,\kappa}} \frac{\Gamma(\kappa_e)}{\Gamma(\kappa_e - 1/2)} \left(1 + \frac{(\sigma z_q^T - \sigma' z_{q'}^L)^2}{\kappa_e u_{e,\kappa}^2 (q^2 + q'^2 - 2qq' \cos \theta')} \right)^{-\kappa_e} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\kappa_i^{1/2} u_{i,\kappa}} \frac{\Gamma(\kappa_i)}{\Gamma(\kappa_i - 1/2)} \left(1 + \frac{(\sigma z_q^T - \sigma' z_{q'}^L)^2}{\kappa_i u_{i,\kappa}^2 (q^2 + q'^2 - 2qq' \cos \theta')} \right)^{-\kappa_i} \right] \\
 &\times \left\{ \sum_{\sigma'} (2\pi) \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \int_0^\infty dq' q'^2 \frac{q^2 q'^2 \sin^2 \theta'}{q'^2 (q^2 + q'^2 - 2qq' \cos \theta')^{1/2}} \left[g(\sigma' z_{q'}^L) \right. \right. \\
 &\quad \times \left(\frac{1}{\kappa_e^{1/2} u_{e,\kappa}} \frac{\Gamma(\kappa_e)}{\Gamma(\kappa_e - 1/2)} \left(1 + \frac{(\sigma z_q^T - \sigma' z_{q'}^L)^2}{\kappa_e u_{e,\kappa}^2 (q^2 + q'^2 - 2qq' \cos \theta')} \right)^{-\kappa_e} \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{\kappa_i^{1/2} u_{i,\kappa}} \frac{\Gamma(\kappa_i)}{\Gamma(\kappa_i - 1/2)} \left(1 + \frac{(\sigma z_q^T - \sigma' z_{q'}^L)^2}{\kappa_i u_{i,\kappa}^2 (q^2 + q'^2 - 2qq' \cos \theta')} \right)^{-\kappa_i} \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{m_e}{m_i} \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} (\sigma z_q^T - \sigma' z_{q'}^L) \frac{2}{u_{i,\kappa}^2} \frac{1}{\kappa_i^{1/2} u_{i,\kappa}} \frac{\Gamma(\kappa_i)}{\Gamma(\kappa_i - 1/2)} \left(1 + \frac{(\sigma z_q^T - \sigma' z_{q'}^L)^2}{\kappa_i u_{i,\kappa}^2 (q^2 + q'^2 - 2qq' \cos \theta')} \right)^{-(\kappa_i+1)} \right] \right\}^{-1}.
 \end{aligned}$$

Simplificando a expressão acima e assumindo que o espectro assintótico das ondas L permanece o mesmo que o espectro inicial, dependendo apenas do valor absoluto do número de onda, temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma T} &= 2(\sigma z_q^T) \sum_{\sigma'} \int_0^\infty dq' q'^2 \int_{-1}^1 d\mu' \frac{(1 - \mu'^2)}{(q^2 + q'^2 - 2qq'\mu')^{1/2}} g \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \quad (5.53) \\
 &\times \left(\frac{1}{\kappa_e^{1/2} u_{e,\kappa}} \frac{\Gamma(\kappa_e)}{\Gamma(\kappa_e - 1/2)} \left(1 + \frac{(\sigma z_q^T - \sigma' z_{q'}^L)^2}{\kappa_e u_{e,\kappa}^2 (q^2 + q'^2 - 2qq'\mu')} \right)^{-\kappa_e} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\kappa_i^{1/2} u_{i,\kappa}} \frac{\Gamma(\kappa_i)}{\Gamma(\kappa_i - 1/2)} \left(1 + \frac{(\sigma z_q^T - \sigma' z_{q'}^L)^2}{\kappa_i u_{i,\kappa}^2 (q^2 + q'^2 - 2qq'\mu')} \right)^{-\kappa_i} \right) \\
 &\times \left[\sum_{\sigma'} \int_0^\infty dq' q'^2 \int_{-1}^1 d\mu' \frac{(1 - \mu'^2)}{(q^2 + q'^2 - 2qq'\mu')^{1/2}} \left[g(\sigma' z_{q'}^L) \right. \right. \\
 &\quad \times \left(\frac{1}{\kappa_e^{1/2} u_{e,\kappa}} \frac{\Gamma(\kappa_e)}{\Gamma(\kappa_e - 1/2)} \left(1 + \frac{(\sigma z_q^T - \sigma' z_{q'}^L)^2}{\kappa_e u_{e,\kappa}^2 (q^2 + q'^2 - 2qq'\mu')} \right)^{-\kappa_e} \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{\kappa_i^{1/2} u_{i,\kappa}} \frac{\Gamma(\kappa_i)}{\Gamma(\kappa_i - 1/2)} \left(1 + \frac{(\sigma z_q^T - \sigma' z_{q'}^L)^2}{\kappa_i u_{i,\kappa}^2 (q^2 + q'^2 - 2qq'\mu')} \right)^{-\kappa_i} \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{m_e}{m_i} \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} (\sigma z_q^T - \sigma' z_{q'}^L) \frac{2}{u_{i,\kappa}^2} \frac{1}{\kappa_i^{1/2} u_{i,\kappa}} \frac{\Gamma(\kappa_i)}{\Gamma(\kappa_i - 1/2)} \left(1 + \frac{(\sigma z_q^T - \sigma' z_{q'}^L)^2}{\kappa_i u_{i,\kappa}^2 (q^2 + q'^2 - 2qq'\mu')} \right)^{-(\kappa_i+1)} \right] \right]^{-1}.
 \end{aligned}$$

Como podemos observar, esta é uma expressão bem complexa, no entanto podemos abordá-la de forma aproximada. Para a distribuição Maxwelliana, na seção (4.1.4), demonstramos que a expressão correspondente tem a contribuição mais significativa para o integrando em $q' = q_*$, de tal forma que $z_{q_*}^L = z_q^T$. Assumindo que este é o caso também para distribuições Kappa,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q^{\sigma T} &\simeq 2(\sigma z_q^T) g \mathcal{E}_{q_*}^{\sigma L} \int_0^\infty dq' q'^2 \int_{-1}^1 d\mu' \frac{(1 - \mu'^2)}{(q^2 + q'^2 - 2qq'\mu')^{1/2}} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\kappa_e^{1/2} u_{e,\kappa}} \frac{\Gamma(\kappa_e)}{\Gamma(\kappa_e - 1/2)} + \frac{1}{\kappa_i^{1/2} u_{i,\kappa}} \frac{\Gamma(\kappa_i)}{\Gamma(\kappa_i - 1/2)} \right) \\ &\quad \times \left[\sum_{\sigma'} \int_0^\infty dq' q'^2 \int_{-1}^1 d\mu' \frac{(1 - \mu'^2)}{(q^2 + q'^2 - 2qq'\mu')^{1/2}} \left[g(\sigma z_q^T) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(\frac{1}{\kappa_e^{1/2} u_{e,\kappa}} \frac{\Gamma(\kappa_e)}{\Gamma(\kappa_e - 1/2)} + \frac{1}{\kappa_i^{1/2} u_{i,\kappa}} \frac{\Gamma(\kappa_i)}{\Gamma(\kappa_i - 1/2)} \right) \right] \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Assim, temos uma expressão para o espectro inicial das ondas transversais:

$$\mathcal{E}_q^{\sigma T} \simeq 2\mathcal{E}_{q_*}^{\sigma L}. \quad (5.54)$$

Encerra-se aqui a revisão da literatura que forma uma base teórica para o trabalho realizado e que será apresentado a seguir. No próximo capítulo será abordado o problema da interação feixe-plasma, bem como os mecanismos de emissão devidos à interação não linear entre onda-onda e onda-partícula [77, 78]; No capítulo subsequente será apresentado uma análise do conjunto completo de equações da teoria de turbulência fraca na presença de uma distribuição composta por uma combinação de um núcleo Maxwelliano e uma cauda energética do tipo lei de potência [53].

Capítulo 6

Interação Feixe-Plasma

A observação de emissão de radiação solar e sua subsequente classificação é realizada desde os anos 1950. Baseada tanto na morfologia espectral quanto nas escalas de desenvolvimento, as emissões estão classificadas em cinco tipos. Para as emissões do tipo II e tipo III, a morfologia mostra um espectro de emissão de duas bandas, consistindo na emissão fundamental (F) e de seu harmônico ($2H$), de frequência igual a duas vezes a frequência fundamental [11, 12].

A interpretação padrão desses fenômenos envolve o seguinte cenário: elétrons energéticos na região da fonte dessas emissões excitam turbulência de Langmuir, por meio da instabilidade *bump-in-tail*. Ocorre então o acoplamento não linear, envolvendo decaimento e espalhamento, que converte parte da energia das ondas turbulentas em radiação eletromagnética. O processo envolve uma fusão das ondas de Langmuir, primária (L) e retroespalhada (L'), gerando radiação eletromagnética com frequência igual ao dobro da frequência de plasma, e/ou o decaimento de ondas L em uma onda transversal (T) na frequência de plasma e uma onda do tipo íon-acústica (S). Esse cenário padrão é bastante discutido na literatura, mas análises quantitativas detalhadas, baseadas em soluções numéricas, não estavam disponíveis até recentemente [74, 75, 76, 77].

A geração de radiação eletromagnética (EM) é um subproduto de processos de interações não lineares e esses processos podem ser esquematizados da seguinte maneira [12]:

$$\begin{aligned}L &\rightarrow L' + S \\L &\rightarrow S + T(\omega_{pe}) \\L + L' &\rightarrow T(2\omega_{pe}).\end{aligned}$$

No âmbito do grupo de Física de Plasmas da UFRGS, o formalismo desenvolvido nos trabalhos recentes vem sendo utilizado para o estudo da interação entre um feixe de elétrons e um plasma. Foi desenvolvida uma rotina numérica capaz de solucionar as equações de diferenças finitas obtidas a partir do conjunto completo de equações (4.11)-(4.15), aplicando o método "splitting" para lidar com as derivadas parciais da equação para as partículas e o método Runge-Kutta de quarta ordem para as equações para as ondas, partindo de um estado inicial em que os espectros iniciais das ondas são fornecidos.

Neste capítulo serão apresentados dois trabalhos realizado pelo grupo (ambos utilizando uma abordagem bidimensional), o primeiro considerando a interação entre um feixe de partículas e o plasma, e o segundo com feixes contrapropagantes [77, 78].

6.1 Emissão de Plasma com Feixe Único

Nesta seção será apresentado um estudo das emissões em um plasma térmico a partir de processos não lineares. Aqui pretende-se caracterizar os efeitos causados pela variação de velocidade do feixe de partículas nos mecanismos de emissão.

6.1.1 Parâmetros Iniciais e Análise Numérica

A fim de estudar os diferentes fenômenos associados com a emissão de radiação em um plasma por um feixe de partículas, precisamos definir primeiro a forma da distribuição de partículas iônicas:

$$F_i(\mathbf{v}) = \frac{m_i}{2\pi T_i} \exp\left(-\frac{m_i v^2}{2\pi T_i}\right), \quad (6.1)$$

ou na forma adimensional temos:

$$\Phi_i(\mathbf{u}) = \frac{1}{\pi} \frac{T_e}{T_i} \frac{m_i}{m_e} \exp\left(-\frac{m_i}{m_e} \frac{T_e}{T_i} u^2\right). \quad (6.2)$$

onde a função é normalizada por $\int \Phi_i(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = 1$.

É assumido que os íons não sofrem grandes alterações durante a simulação computacional, sendo, portanto, considerados estacionários. Já para os elétrons, é admitida a presença de uma distribuição de fundo e um feixe de partículas alinhado na direção do campo. Feixes contra-propagantes ou com outras formas de distribuição que não seja a maxwelliana não serão levadas em conta. Assim, os elétrons inicialmente são considerados como a soma de um plasma isotrópico de fundo com uma distribuição Gaussiana deslocada [77].

A distribuição inicial em duas dimensões é dada a seguir:

$$F_e(\mathbf{v}, 0) = \frac{1 - n_b/n_0}{\pi v_{th}^2} \exp\left(-\frac{v_{\perp}^2}{v_{th}^2} - \frac{(v_{\parallel} - V_0)^2}{v_{th}^2}\right) + \frac{n_b/n_0}{\pi v_{tb}^2} \exp\left(-\frac{v_{\perp}^2}{v_{tb}^2} - \frac{(v_{\parallel} - V_b)^2}{v_{tb}^2}\right). \quad (6.3)$$

Aqui temos que $v_{th}^2 = 2T_e/m_e$ é a velocidade térmica associada ao plasma de fundo, $v_{tb}^2 = 2T_{beam}/m_e$ é a velocidade térmica associada ao feixe, e V_0 e V_b são as velocidades de deriva do plasma de fundo e do feixe respectivamente. Temos também que V_0 é definido de tal forma que garante uma velocidade de deriva líquida nula para a distribuição dos elétrons, isto é,

$$V_0 = \frac{n_b V_b}{n_0 - n_b}, \quad (6.4)$$

conservando assim a condição de corrente livre. A sua forma adimensional é dada pela seguinte expressão:

$$\Phi_e(\mathbf{u}, 0) = \frac{1 - n_b/n_0}{\pi} \exp\left[-u_{\perp}^2 - \left(u_{\parallel} - \frac{V_0}{v_{th}}\right)^2\right] + \frac{n_b/n_0}{\pi} \frac{T_e}{T_{beam}} \exp\left\{-\frac{T_e}{T_{beam}} \left[u_{\perp}^2 + \left(u_{\parallel} - \frac{V_b}{v_{th}}\right)^2\right]\right\}. \quad (6.5)$$

As intensidades iniciais das ondas L e S são obtidas equilibrando os termos de emissão espontânea e induzida, levando em consideração a população de fundo. Conforme visto em (4.1.4), as expressões para os espectros iniciais na forma adimensional são dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q^{\sigma L}(0) &= \frac{g}{2(\sigma z_q^L)^2}, \\ \mathcal{E}_q^{\sigma S}(0) &= \frac{g \left[\exp\left(-\frac{(z_q^S)^2}{q^2}\right) + \left(\frac{m_i T_e}{m_e T_i}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(z_q^S)^2}{q^2}\right) \right]}{2z_q^L z_q^S \left[\exp\left(-\frac{(z_q^S)^2}{q^2}\right) + \frac{T_e}{T_i} \left(\frac{m_i T_e}{m_e T_i}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(z_q^S)^2}{q^2}\right) \right]}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Para as ondas transversais, numericamente, vamos considerar dois casos, conforme mencionado na seção (4.1.4). O primeiro é bem comum e nele assume-se que inicialmente as ondas T são nulas. Nesse cenário, leva-se em conta que não há emissão de radiação eletromagnética via processos espontâneos, o que se deve ao fato de que tais processos estão associados à condição de ressonância e nela a velocidade de fase excederia a velocidade da luz no vácuo. No entanto, recentes estudos sugerem que quando efeitos não lineares são levados em conta, ondas T são emitidas via processo de espalhamento [76]. De fato, dentre os vários termos do lado direito da equação (4.13), apenas o termo de espalhamento não-linear, indicado por $TsTL$, já pode ser responsável pela emissão de ondas em modo T mesmo em plasmas quiescentes. A abordagem que leva em conta a presença dessas ondas já no instante inicial constitui o segundo caso discutido na seção (4.1.4). O espectro inicial para as ondas transversais é então dado por:

$$\mathcal{E}_q^{\sigma T}(0) = \frac{g}{1 + 3q_*^2}, \quad (6.7)$$

onde q_* é o mesmo definido em (4.30).

Observe que os espectros iniciais de propagação, tanto para frente ($\sigma = +1$) quanto para trás ($\sigma = -1$), são assumidos iguais, isto é, os espectros são isotrópicos em q . O parâmetro de entrada g está relacionado com o parâmetro de plasma que é uma medida importante para a discretização das partículas. Ele deve ser suficientemente pequeno para que o sistema se qualifique como plasma. Todavia, o parâmetro de plasma não é exatamente zero, mas finito. No meio heliosférico real tal parâmetro é da ordem de 10^{-8} a 10^{-6} , no entanto aqui tomamos o valor $1/(n_e \lambda_D^3) = 5 \times 10^{-3}$, muito maior, a fim de facilitar o procedimento numérico, uma vez que valores mais realísticos fariam com que as intensidades espectrais iniciais fossem muito pequenas, o que levaria à necessidade de um tempo maior de simulação computacional, até que fossem obtidos resultados significativos na evolução do sistema de ondas e partículas.

O valor adotado da razão entre a densidade do feixe e a densidade do plasma de fundo é $n_b/n_0 = 10^{-3}$, sendo muito maior do que os valores detectados em emissões solares típicas do tipo III. Esses podem chegar a 10^{-6} , especialmente perto de 1 UA. Entretanto, escolhemos trabalhar com um feixe não tão realístico, mais robusto, de modo que o trabalho computacional possa ser facilitado. Tomamos a direção de propagação do feixe para ser ao longo do eixo z .

Em relação às temperaturas, vamos considerar a temperatura associada ao plasma de fundo igual à associada aos elétrons $T_e = T_{beam}$. A razão de temperaturas entre os íons e elétrons é tomada como sendo $T_i/T_e = 1/7$. Normalmente esse valor é menor que a unidade, mas pode assumir valores da ordem da unidade ou até mesmo maiores. Em geral, espera-se que, a menos

que T_i/T_e seja pequeno, as ondas íon-acústicas são fortemente amortecidas, não possibilitando a interação de ressonância envolvendo três ondas. No entanto, tanto as soluções numéricas da teoria de turbulência fraca eletrostática, como as simulações PIC envolvendo a instabilidade feixe-plasma mostram que as interações envolvendo as ondas S são significativas mesmo quando T_i/T_e tem ordem maior do que a unidade [69, 44]. O valor adotado aqui é baseado em trabalhos anteriores, de modo que podemos comparar diretamente os resultados [77].

Para todas as situações a seguir, o passo temporal normalizado será $\Delta\tau = 0.1$. Para a solução numérica utilizamos condições que já vem sendo usadas em outros trabalhos produzidos no âmbito do grupo: para as ondas L e S grade de 51×51 pontos para as componentes perpendicular e paralela do vetor de onda $(q_\perp, q_\parallel) = (q_x, q_z)$, com $0 < q_x < 0.6$ e $0 < q_z < 0.6$. Para as ondas T , grade de 71×71 com as mesmas condições para (q_x, q_z) .

Em relação às velocidades, utilizamos uma grade de 62×125 para as componentes perpendicular e paralela $(u_\perp, u_\parallel) = (u_x, u_z)$, com $0 < u_x < 15$ e $-15 < u_z < 15$.

6.1.2 Mecanismos de Emissão

A equação cinética para a evolução temporal das ondas T contém, no seu lado direito, diversos termos que são responsáveis pela geração e emissão de radiação na frequência de plasma e seus harmônicos. Ao introduzir esses termos, afirmamos que o termo $TdLL$ é responsável pela emissão do segundo harmônico, $L + L' \rightarrow T(2\omega_{pe})$, que os termos $TdLS$ e $TsTL$ são responsáveis pela emissão fundamental, $L \rightarrow S + T(\omega_{pe})$ e $L + p \rightarrow T(\omega_{pe})$ respectivamente, onde $p = e, i$ pode ser elétrons e íons, e que TdT é o termo que leva à emissões de harmônicos mais altos (com frequências acima de $2\omega_{pe}$). Ao examinar atentamente as várias condições de ressonância, podemos entender o porquê dessas interpretações [77].

Analisamos então o primeiro termo do lado direito da equação (4.13). Este termo é ditado pela interação não linear, envolvendo duas ondas L , cada uma com frequência próxima a ω_{pe} , e uma onda transversal. Se as duas ondas de Langmuir sofrerem uma interferência construtiva, então o modo T resultante deverá ter uma frequência próxima de $2\omega_{pe}$. Uma interpretação similar pode ser feita para os termos $TdLS$ e $TsTL$. Entretanto, como os dois contribuem para a emissão fundamental, é preciso identificar qual deles é mais relevante, e isso não pode ser feito apenas considerando a estrutura matemática de cada termo. Também fizemos a afirmação que a radiação de fundo vem principalmente de $TsTL$. Novamente, uma análise quantitativa se faz necessária.

Uma maneira de verificar todas essas afirmações é resolvendo o sistema de equações, transformando cada termo da equação cinética das ondas T em uma espécie de "botão liga-desliga", a fim de que seja estabelecida a importância real de cada termo ao longo da simulação numérica. Foram feitas análises para três velocidades do feixe de elétrons, com $V_b/v_{th} = 6, 8, 10$. Dentre estes, o caso que mostrou uma emissão mais eficaz do terceiro harmônico foi o caso com $V_b/v_{th} = 10$, e será comentado a seguir [77].

O resultado representado na Figura (6.1) mostra o espectro total normalizado das ondas T em função do instante de tempo normalizado $\tau = t\omega_{pe} = 2000$, para o caso no qual o feixe de elétrons tem a velocidade $V_b/v_{th} = 10$. O espectro total é encontrado integrando sobre todos os números de onda, e em coordenadas polares, temos:

$$\mathcal{E}^T = \int q \mathcal{E}_q^T d\theta$$

onde $q = (q_{\perp}^2 + q_{\parallel}^2)^{1/2}$, $\theta = \cos^{-1}(q_{\parallel}/q)$ e também foi utilizada a relação de dispersão para as ondas T mostrada em (4.15).

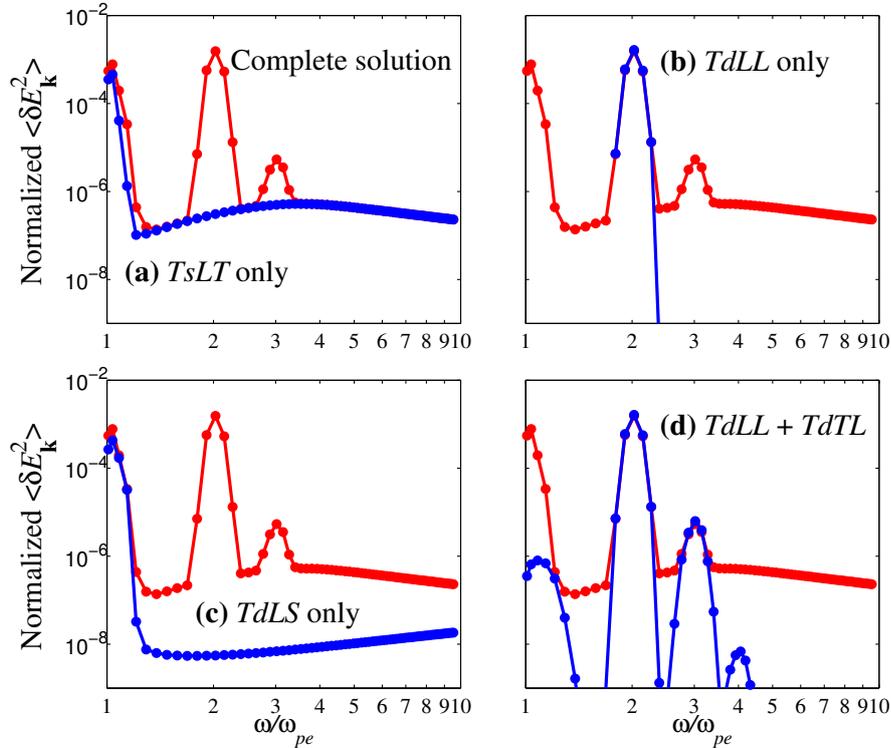


Figura 6.1: Intensidade da radiação $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}^T$ emitida versus frequência normalizada, ω/ω_{pe} , para $V_b/v_{th} = 10$, no instante de tempo normalizado $\tau = t\omega_{pe} = 2000$. As linhas em vermelho representam o espectro completo, enquanto as linhas em azul representam o resultado obtido levando em conta diferentes mecanismos físicos. A curva em vermelho está presente em todos os painéis a fim de de comparação. No painel (a) a curva azul representa apenas o termo de espalhamento $TsTL$. No painel (b) a curva em azul representa a contribuição do termo de decaimento de uma onda T em duas ondas L , $TdLL$. No painel (c) a curva em azul representa a contribuição do termo de decaimento de uma onda T em uma onda L e uma onda S , $TdLS$, e o painel (d) representa a contribuição dos termos $TdLL + TdTL$ que representam o efeito do decaimento de duas ondas L em uma onda T , junto com o decaimento de uma onda T e uma onda L , em uma onda T [77].

No painel (a) da Figura (6.1), a curva em vermelho representa a solução completa, incluindo todos os termos da equação (4.6), e a curva em azul representa apenas o termo de espalhamento $TsTL$. Podemos observar que o termo de espalhamento contribui para a geração de radiação com frequência próxima a $\omega \sim \omega_{pe}$, confirmando a hipótese que tal termo é mesmo responsável pela emissão fundamental (primeiro harmônico). Outro ponto interessante a ser observado é que o termo $TsTL$ também gera a radiação de fundo em toda banda de frequência e é governado pela expressão (4.30) [76, 75].

O painel (b) da Figura (6.1) compara a solução numérica completa (em vermelho) com o cálculo que inclui apenas o termo $TdLL$. Neste caso, podemos ver que o processo de fusão entre duas ondas de Langmuir (primária e retroespalhada) gera radiação eletromagnética de frequência $\omega \sim 2\omega_{pe}$, corroborando com a afirmação de que esse termo é responsável pela emissão do

segundo harmônico.

Outra afirmação é que o segundo termo do lado direito da equação (4.13) contribui para a emissão fundamental e o painel (c) mostra justamente isso. Comparando-se a solução completa (em vermelho) e o cálculo envolvendo apenas o termo de decaimento (em azul), pode-se verificar que o processo $L \rightarrow S + T(\omega_{pe})$ participa da geração da emissão fundamental tanto quanto o termo $TsTL$. Isso mostra que ao discutir a emissão F , deve-se incluir tanto os processos de decaimento $L \rightarrow S + T(\omega_{pe})$ quanto de espalhamento $L + p \rightarrow T(\omega_{pe})$, e ignorar um ou outro fenômeno pode não só levar a um erro qualitativo, mas também a um erro quantitativo [77].

A Figura 6.1 (c) também mostra que o termo $TdLS$ contribui para a radiação de fundo, mas a intensidade gerada é de magnitude muito menor do que a gerada pelo termo $TsTL$, conforme visto no painel (a). Consequentemente, nossa alegação inicial de que o termo de espalhamento é quase que exclusivamente responsável pela geração da radiação de fundo é verificada.

Por fim, temos o painel (d), que compara os resultados da simulação completa com o cálculo numérico envolvendo apenas os termos $TdLL$ e $TdTL$. A finalidade aqui é compreender melhor o papel do termo $TdTL$ na geração de harmônicos mais altos (terceiro em diante). A inclusão do termo $TdLL$ garante a existência prévia das ondas T necessárias para o processo $L + T \rightarrow T$. Outros processos referidos anteriormente também envolvem a presença das ondas transversais, mas apenas o processo $L + T \rightarrow T$ necessita da preexistência de um modo T para existir, por essa razão os termos $TdLL$ e $TdTL$ foram mantidos nos cálculos numéricos.

O resultado apresentado no painel (d) mostra que o processo $TdTL$ não só leva à emissão do terceiro harmônico ($3H$), mas também contribui para a emissão fundamental. Observando a curva azul, pode-se discernir uma emissão muito fraca do quarto harmônico ($4H$), que é totalmente ocultada sob a radiação de fundo de modo que se torna indetectável na solução completa representada pela curva vermelha. No entanto, essa descoberta indica que, para uma velocidade de feixe extremamente alta (caso para o qual o formalismo da teoria de turbulência fraca não é mais aplicável), o processo ditado por $TdTL$ pode ser capaz de levar a emissões de harmônicos de frequências mais altas ($\omega > 3\omega_{pe}$).

Um último ponto a ser analisado é a contribuição para a emissão do segundo harmônico. Nos painéis (b) e (d) pode-se verificar que os picos em torno de $2\omega_{pe}$ possuem magnitudes praticamente idênticas, o que nos leva a concluir que o termo $TdLL$ é quase exclusivamente responsável pela emissão do segundo harmônico.

6.1.3 Efeitos da Radiação de Fundo

Nesta parte do trabalho será mostrado o efeito da inclusão do espectro de radiação de fundo na evolução temporal da intensidade espectral total. Como já mencionado, recentemente se chegou a conclusão que a radiação de fundo está presente mesmo na ausência de um feixe de partículas [76, 75] e, para mostrar isso vamos explorar os efeitos da inclusão do espectro inicial das ondas T no instante inicial versus o cálculo sem essa intensidade inicial, ao longo da evolução temporal.

O termo responsável por esse efeito está descrito na equação (4.13), indicado por $TsTL$, e está associado ao espalhamento envolvendo uma onda L e uma onda T , mediado pelas partículas do sistema. Levando a um regime quase estacionário, apenas esse termo contribuiria para a

intensidade espectral inicial. Fazendo $\partial \mathcal{E}_q^T / \partial \tau \simeq 0$ na equação referida acima, chegamos a uma expressão para o espectro inicial (4.30). Para o cálculo numérico utilizamos um feixe de partículas de densidade constante $n_b/n_0 = 10^{-3}$ e de velocidade $v_b/v_{th} = 10$.

A Figura (6.2) mostra um painel comparativo, sendo a figura superior (a) o caso com intensidade inicial nula e o inferior (b) incluindo o espectro inicial das ondas transversais.

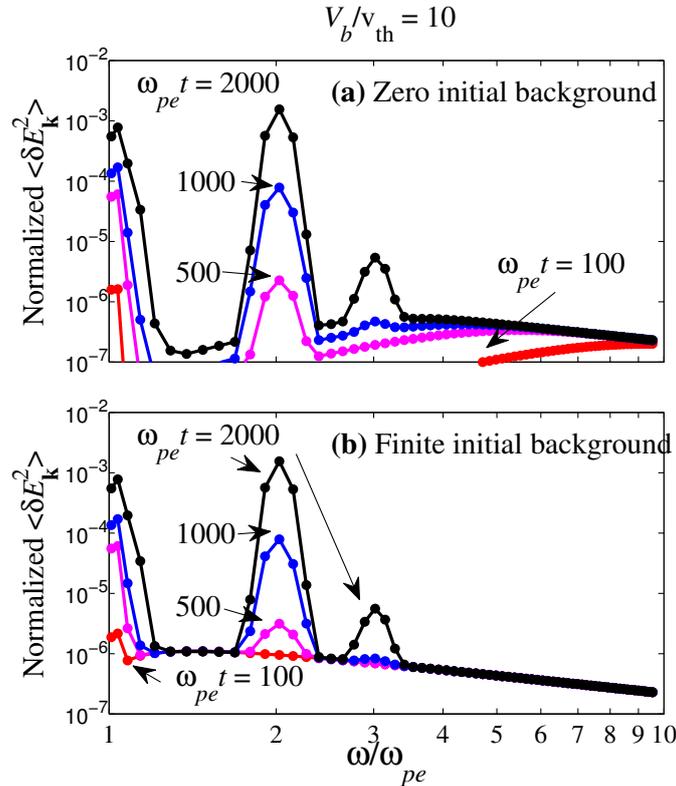


Figura 6.2: Efeitos da inclusão do espectro inicial de radiação de fundo. Painel (a) mostra a evolução temporal da intensidade normalizada do campo elétrico $\langle \delta E^2(\mathbf{k}) \rangle$ vs. frequência normalizada ω/ω_{pe} para feixe de partículas com velocidade $v_b/v_{th} = 10$, quando o espectro inicial das ondas T é nulo. Painel (b) mostra o mesmo cenário, exceto pela inclusão do espectro inicial (4.30). [77]

Quando iniciamos a simulação numérica sem o nível de radiação inicial - figura (a) -, o sistema gera rapidamente a radiação de fundo através do termo (4.28). De fato, o gráfico superior da Figura (6.2) mostra o rápido aumento da intensidade de radiação de fundo à medida que o sistema evolui. O painel inferior mostra a mesma simulação computacional, exceto que começamos o cálculo numérico com o estado assintótico do espectro inicial de ondas T .

Como se pode ver, o espectro de fundo, que é dado por uma lei de potência inversa para grandes valores de ω , não parece sofrer qualquer alteração apreciável à medida que a dinâmica progride. Em relação aos picos associados aos três primeiros harmônicos, quando inserimos o nível inicial de radiação de fundo, a energia livre associada ao feixe leva a emissões com amplitudes mais elevadas.

Até o presente momento, discutimos vários aspectos da emissão de plasma e antes de seguir para o estudo de emissões de plasma na presença de feixes contrapropagantes, nas

próximas duas subseções vamos analisar a evolução temporal das intensidades tanto dos modos próprios do plasma quando das emissões dos três harmônicos.

6.1.4 Evolução Temporal da Energia Espectral Total para os Modos L , S e T

Na Figura (6.3) estão exibidos quatro painéis: o painel (a) representa a intensidade total das ondas de Langmuir $\int d\mathbf{k} I_L(\mathbf{k})$, no painel (b) a intensidade total das ondas íon acústicas $\int d\mathbf{k} I_S(\mathbf{k})$, e por fim nos painéis (c) e (d) a intensidade total das ondas transversais $\int d\mathbf{k} I_T(\mathbf{k})$ na ausência e na presença da radiação de fundo respectivamente, ao longo da evolução temporal. Em cada painel temos representadas as curvas para três velocidades de feixe distintas $V_b/v_{th} = 6, 8, 10$, curvas azul, vermelha e preta respectivamente.

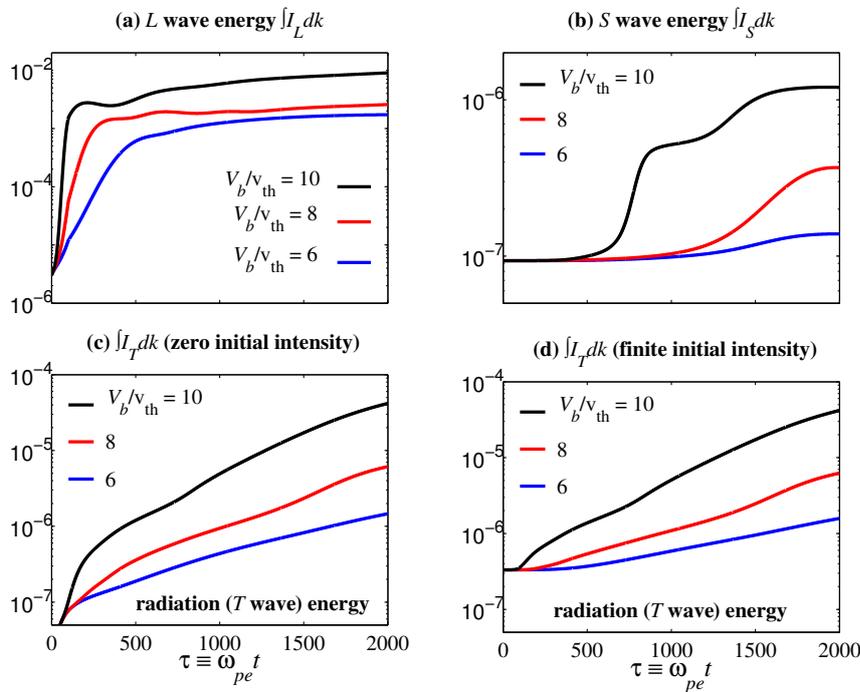


Figura 6.3: Evolução temporal para a intensidade das ondas (a) de Langmuir, (b) íon-acústicas, (c) e (d) transversais para três velocidades de feixe, $V_b/v_{th} = 6, 8, 10$, curvas azul, vermelha e preta respectivamente [77].

A Figura (6.3) mostra que a geração de turbulência de Langmuir através da instabilidade *bump-in-tail* é o primeiro e mais rápido processo que se destaca envolvendo a emissão de plasma. Em estágios bastantes iniciais da evolução temporal é possível observar o crescimento exponencial das ondas de Langmuir e sua posterior saturação.

Um fato curioso a ser observado é a comparação dos painéis (b) e (c). É esperado, por intuição, que a geração de energia das ondas S seja mais rápida do que a emissão de radiação das ondas T , uma vez que no início da evolução temporal os processos quase-lineares e de decaimento envolvendo as ondas L e S sejam predominantes, mas não é isso que ocorre. Em trabalhos anteriores, como por exemplo [17], são comparadas as taxas de geração de radiação das ondas de Langmuir e da emissão do segundo harmônico. A Figura 3 desse artigo mostra

comportamento semelhante com a Figura (6.3) pelo menos no sentido qualitativo. Outro trabalho que faz uma comparação similar é o trabalho de Rhee et. al [45]. Esse trabalho compara o crescimento das ondas de Langmuir com o surgimento das emissões dos harmônicos $2H$, $3H$ e $4H$ - ver Figura 5. Entretanto nenhum desses dois trabalhos insere as ondas íon-acústicas na comparação e como consequência não foi possível discernir se a geração dos harmônicos era mais rápida do que a geração do modo S . A presente investigação mostra que a produção de radiação segue de perto a geração da turbulência de Langmuir e, surpreendentemente, a turbulência iônica ocorre apenas após um intervalo de tempo significativo. Tal descoberta, que não poderia ter sido prevista em princípio, é nova [77].

Por fim, comparando os painéis (c) e (d) da Figura (6.3), observamos um comportamento qualitativamente semelhante a longo prazo, porém seus comportamentos para tempos iniciais são bastantes distintos. No caso da ausência da intensidade inicial, a energia de radiação é quase que imediatamente gerada, de acordo com o termo $TsTL$. Em contraste, quando adicionamos uma intensidade inicial finita, a geração de radiação eletromagnética acontece no momento esperado de um processo de instabilidade não linear típico. Ou seja, somente depois que a intensidade das ondas de Langmuir excede um determinado valor, a radiação então é gerada [77].

6.1.5 Evolução Temporal da Energia Espectral Total para as Emissões F , $2H$ e $3H$

Na Figura (6.4) traçamos a evolução temporal das emissões dos três primeiros harmônicos. Os painéis da coluna esquerda, designados por (a) mostram a evolução temporal da energia de radiação $\int d\mathbf{k} I_T(\mathbf{k})$ para cada harmônico versus o tempo $\omega_{pe}t$, para o caso de ausência da radiação inicial. As curvas azul, vermelha e preta representam o comportamento das emissões fundamental (F), segundo ($2H$) e terceiro harmônicos ($3H$) respectivamente. De cima pra baixo, as linhas (1), (2) e (3) correspondem às diferentes velocidades do feixe $V_b/v_{th} = 6, 8, 10$ respectivamente. Os painéis da coluna da direita, designados por (b), são aos mesmos que os do lado esquerdo, exceto que os resultados correspondem aos cálculos numéricos considerando um espectro inicial finito para as ondas T .

Em trabalhos como [17] e [45], são apresentados apenas a evolução temporal do segundo harmônico em diante, e isto deve-se ao fato de que nas simulações numéricas utilizadas, a técnica PIC não permite uma solução próxima à emissão fundamental. Em nosso estudo não temos essa restrição, uma vez que operamos no espaço de Fourier. Se excluirmos o modo fundamental, o comportamento geral do modo do segundo harmônico crescendo mais rapidamente do que o terceiro é consistente com as simulações obtidas por [17] e [45]. A nova descoberta, de acordo com o presente trabalho, é que a emissão fundamental ocorre antes dos modos harmônicos mais elevados. É interessante observar que embora inicialmente o modo fundamental cresça mais rapidamente, o segundo harmônico apresenta um crescimento mais tardio e que eventualmente equipara e ultrapassa o modo fundamental ($V_b/v_{th} = 8$ e 10 respectivamente). Mesmo para o caso de menor velocidade, ($V_b/v_{th} = 6$), podemos supor que eventualmente a energia do modo $2H$ vai ultrapassar a do modo F se tivéssemos executado o código por mais tempo [77].

Saber se as emissões do tipo III são feitas das emissões F ou H ainda é uma questão não resolvida na literatura [9, 46]. Se nossas análises feitas até agora servem de guia, acreditamos que o componente harmônico acabará por dominar o fundamental a longo prazo. De fato, a Figura 9 do artigo [9] mostra que, de forma esquemática, o pico fundamental se manifesta primeiro,

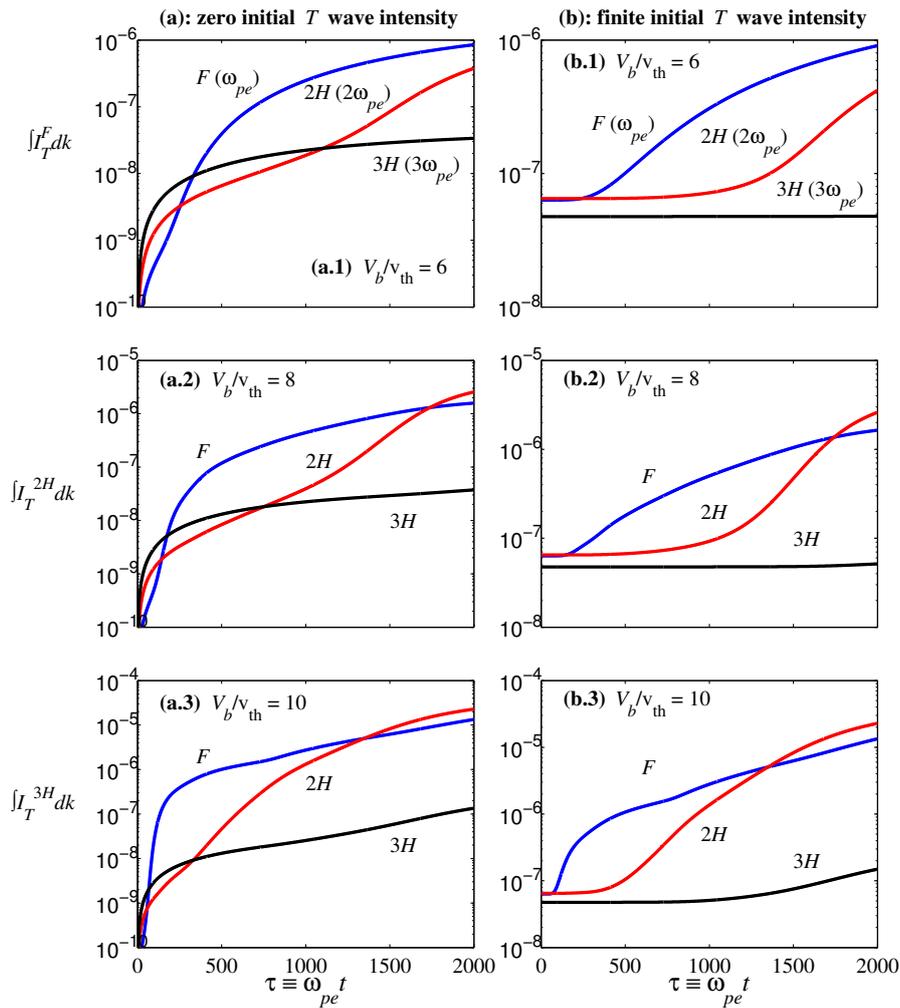


Figura 6.4: Evolução temporal para as intensidades dos harmônicos F , $2H$ e $3H$ curvas azul, vermelha e preta respectivamente. Coluna da esquerda, painéis (a), na ausência da radiação de fundo e coluna da direita, painéis (b), na presença da radiação de fundo finita. Para as seguintes velocidades, de cima para baixo, primeira linha $V_b/v_{th} = 6$, segunda linha $V_b/v_{th} = 8$ e terceira linha $V_b/v_{th} = 10$ [77].

porém mais tarde, é dominado pelo harmônico, que é uma conclusão baseada em observações [77] e parece ser consistente com o observado na Figura (6.4).

6.2 Emissão de Plasma com Feixes Contra-Propagantes

Como citado anteriormente, a emissão de radiação na frequência de plasma, ω_{pe} , e/ou em seus harmônicos ($2\omega_{pe}$ e $3\omega_{pe}$) é o resultado da conversão parcial não linear da energia cinética associada ao feixe de elétrons em energia de radiação EM e são exemplos desse processo as emissões solares do tipo II e tipo III (*type-II and type-III radio bursts*).

O cenário mais aceito para a emissão do tipo II envolve a aceleração de elétrons na forma de feixe gerada por uma ejeção de massa coronária (CME), uma emissão de partículas solar.

Esses elétrons acelerados interagem com o plasma de fundo levando à interação feixe-plasma. É esperado que as emissões do tipo III sejam semelhantes [78].

O estudo que segue trata de um ponto importante levantado por Ganse et al. 2012a [11], que observou que a frente de choque abrange uma grande área espacial, que contempla variações na frequência de plasma. Se a emissão de plasma gerada por um feixe deve ocorrer em cada ponto associado à frente de choque CME, então as emissões de tipo II devem ser observadas numa ampla banda de frequência. No entanto, as emissões de tipo II são invariavelmente de banda limitada.

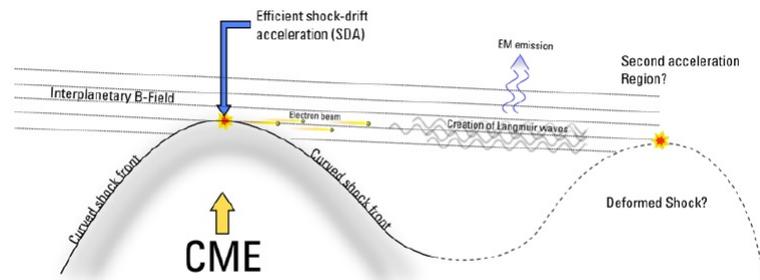


Figura 6.5: Esquema do modelo proposto em grande escala da emissão de radiação do tipo II. Elétrons são acelerados em forma de feixe na região de emissão, excitando ondas de Langmuir que passam por processos não lineares de interações de três ondas. Novo modelo sugere uma distribuição de dupla corcunda para a região de CME, injetando feixes contrapropagantes de elétrons [11].

Esses autores teorizam que as emissões de tipo II podem estar relacionadas com circunstâncias especiais na região de interação, onde a geometria da distribuição de choque é tal que forma uma dupla corcunda (*double hump*), como ilustrado na Figura (6.5). Eles argumentam que preferencialmente a emissão de radiação toma lugar numa região de depressão, prensada entre duas frentes de onda, onde há feixes de elétrons contrapropagantes. Para demonstrar quantitativamente tal hipótese, [11, 12] realizaram uma simulação do tipo PIC (*particle-in-cell*) e mostraram que a emissão de plasma é mais eficaz para o caso de feixes contrapropagantes quando comparados com um único feixe. Um resultado similar foi encontrado por [60] no que se refere ao aumento da emissão do modo $2H$ no caso de feixes opostos.

A análise apresentada a seguir trata do mesmo tema, mas com uma abordagem numérica diferente. Aqui será empregada uma solução numérica da teoria eletromagnética de turbulência fraca e é complementar aos estudos anteriores. A simulação numérica feita, ao contrário do método PIC, baseia-se em equações teóricas que contêm vários termos que podem ser identificados com processos físicos específicos, fornecendo uma riqueza maior de detalhes. Esse estudo foi publicado recentemente [78].

6.2.1 Parâmetros Iniciais e Análise Numérica

Utilizaremos como base o mesmo conjunto de equações (4.11)-(4.14) referido anteriormente, bem como a função distribuição para os íons (6.2). As configurações iniciais são tais que os íons são considerados como estacionários e os elétrons, bem como as ondas, evoluem no tempo. A função distribuição inicial para os elétrons é composta por uma Maxwelliana de

fundo e um par de feixes, um para frente e outro para trás, associados às densidades n_f e n_b respectivamente. A expressão para a distribuição inicial em $2D$ e em variáveis adimensionais é dada por:

$$\begin{aligned} \Phi_e(\mathbf{u}, 0) = & \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{n_f}{n_0} - \frac{n_b}{n_0} \right) \exp \left[-u_{\perp}^2 - \left(u_{\parallel} - \frac{v_0}{v_{te}} \right)^2 \right] \\ & + \frac{1}{\pi} \frac{n_f T_e}{n_0 T_f} \exp \left\{ \frac{T_e}{T_f} \left[u_{\perp}^2 + \left(u_{\parallel} - \frac{v_f}{v_{tf}} \right)^2 \right] \right\} \\ & + \frac{1}{\pi} \frac{n_b T_e}{n_0 T_b} \exp \left\{ \frac{T_e}{T_b} \left[u_{\perp}^2 + \left(u_{\parallel} - \frac{v_b}{v_{tb}} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Aqui temos que $v_{te} = (2T_e/m_e)^{1/2}$, $v_{tf} = (2T_f/m_e)^{1/2}$ e $v_{tb} = (2T_b/m_e)^{1/2}$ são respectivamente as velocidades térmicas associadas ao plasma de fundo, ao feixe dianteiro e traseiro, e v_0, v_f e v_b são as velocidades de deriva associados com o plasma, o feixe dianteiro e o feixe traseiro. A velocidade v_0 é determinada de tal maneira a garantir que tenhamos velocidade líquida de deriva zero para a distribuição total dos elétrons, isso é, $v_0 = -(n_f v_f + n_b v_b)/(n_0 - n_f - n_b)$.

As intensidades espectrais iniciais para as ondas L e S são obtidas equacionando os termos de emissão induzida e espontânea, e suas expressões normalizadas são dadas respectivamente por (4.23) e (4.27) obtidas anteriormente. Para as ondas T , assumimos que o espectro inicial é zero. Observe que os espectros iniciais, para $(\sigma \pm 1)$, são isotrópicos em q . Para a evolução temporal com passo fixo, vamos adotar o intervalo de tempo normalizado $\Delta\tau = 0.1$. A grade de pontos para o vetor de onda é a mesma utilizada anteriormente: 51×51 pontos para as componentes perpendicular e paralela do vetor $(q_{\perp}, q_{\parallel})$, com $0 < q_{\perp} < 0.6$ e $0 < q_{\parallel} < 0.6$. E em relação às velocidades, utilizamos uma grade de 63×125 para as componentes perpendicular e paralela $(u_{\perp}, u_{\parallel})$, com $0 < u_{\perp} < 15$ e $-15 < u_{\parallel} < 15$.

Os tamanhos das grades para as análises numéricas são escolhidos de forma que tenham a maior resolução com o menor custo computacional. Cada análise computacional em $2D$ leva em torno de um dia para ser finalizada e um acréscimo, por exemplo, de duas vezes na grade de resolução levaria a um custo computacional quatro vezes maior. Sendo assim, tal acréscimo torna-se desnecessário para descrever a evolução temporal do sistema uma vez que a grade escolhida contempla todos os principais fenômenos.

Em nossa análise numérica vamos considerar o caso de uma distribuição Maxwelliana para o plasma de fundo e um par de feixes contra-propagantes. A densidade total dos feixes é tal que

$$N_f + N_b = (n_f + n_b)/n_0 = 1 \times 10^{-3}.$$

Vamos analisar os efeitos obtidos em duas situações distintas. A primeira é quando variamos a velocidade do feixe contrário à direção de propagação, mantendo a densidade dos feixes constante. A segunda situação a ser analisada é quando, mantendo as velocidades dos feixes contra-propagantes iguais em módulo, variamos suas densidades. Nas duas situações, mostraremos a intensidade espectral normalizada das ondas T como função do número de onda normalizado q , ao integrar

$$\int d\theta q \mathcal{E}_q^T,$$

onde $\theta = \cos^{-1} q_{\parallel}/q$, e $q = (q_{\perp}^2 + q_{\parallel}^2)^{1/2}$. Por fim, vamos mostrar também a evolução temporal dos espectros de energia. Os resultados obtidos foram recentemente publicados [78], e também apresentados em um encontro nacional dedicado à área de Física de Plasmas [42] e serão mostrados a seguir.

6.2.2 Efeito da Variação da Velocidade do Feixe Traseiro

Vamos investigar os efeitos da variação de velocidades no feixe de direção contrária a de propagação. Em relação à densidade dos feixes contrapropagantes, vamos assumir suas densidades constantes. As densidades dos feixe dianteiro e traseiro são $N_f = 6.0 \times 10^{-4}$ e $N_b = 4.0 \times 10^{-4}$ respectivamente. Para o feixe mais denso, fixamos a velocidade em $U_f = 8.0$, e para o feixe menos denso temos as seguintes configurações: $U_b = -6.0, -8.0, -10.0$. Os resultados obtidos na evolução temporal para quatro tempos distintos estão mostrados em um quadro comparativo em (6.6).

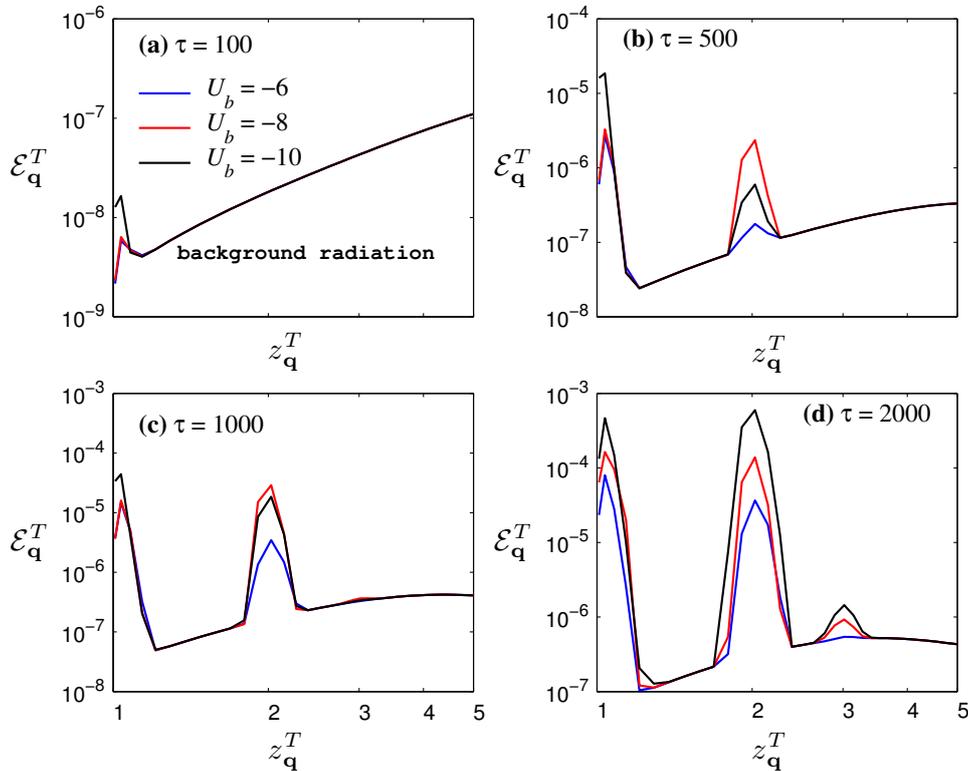


Figura 6.6: Intensidade espectral \mathcal{E}_q^T das ondas T em função da frequência z_q^T . Densidades dos feixes forward e backward $N_f = 6.0 \times 10^{-4}$ e $N_b = 4.0 \times 10^{-4}$ respectivamente. Velocidade do feixe forward $U_f = 8$ e os três casos do feixe backward: $U_b = -6.0$ (azul), $U_b = -8.0$ (vermelho) e $U_b = -10.0$ (preto). Os quatro painéis para os diferentes tempos: (a) $\tau = 100$; (b) $\tau = 500$; (c) $\tau = 1000$; e (d) $\tau = 2000$ [78].

Na porção superior esquerda da Fig. (6.6) são mostrados os resultados do espectro normalizado das ondas T , \mathcal{E}_q^T , obtidos no tempo $\tau = 100$, para os três casos de velocidades do feixe pra trás. Mesmo que a presente simulação considere o espectro inicial das ondas T nulo, um espectro de fundo é gerado, abrangendo toda gama de frequências. Esse é o resultado de um

mecanismo de emissão recentemente descoberto, fruto da interação não linear associada ao termo de espalhamento $TsTL$ descrito em (4.29). Logo nos primeiros momentos há o crescimento do pico correspondente à emissão fundamental (F). Nesse ponto da evolução temporal, a emissão F é muito fraca, e as intensidades associadas as velocidades tanto para $U_b = -6.0$ quanto para $U_b = -8.0$ são quase as mesmas. Para o caso $U_b = -10.0$, por outro lado, exibe um pico mais elevado. Nesse estágio da evolução, não há a presença ainda de nenhum harmônico [78].

Na Figura 6.6 (b) são mostrados os resultados da evolução temporal para o tempo $\tau = 500$. O crescimento do pico associado a emissão fundamental desenvolve-se da mesma forma que foi apresentado em 6.6 (a), no sentido de que os picos associados às velocidades $U_b = -6.0$ e $U_b = -8.0$ são similares tanto em altura quanto em largura, enquanto que o associado a $U_b = -10.0$ exibe quase uma ordem de grandeza maior. Nesse ponto da evolução já é possível identificar a emissão do primeiro harmônico ($2H$). Verifica-se que a emissão $2H$ tem maior amplitude quando temos a configuração de feixes contra-propagantes de mesmo módulo de velocidade (curva vermelha) [78].

Observemos agora a Figura 6.6 (c), a qual corresponde ao tempo $\tau = 1000$. De maneira geral a emissão fundamental apresenta o mesmo comportamento, no sentido de que ele continua crescendo, e o caso com $U_b = -10.0$ ainda é mais alto do que os outros, no entanto sua magnitude agora é 5 – 6 vezes maior, em vez de quase 10 vezes como no caso mostrado em 6.6 (b). A emissão do seu harmônico também continua crescendo, mantendo a tendência observada na figura anterior. Isto é, o caso de velocidades iguais, $U_f = -U_b = 8.0$, parece ter o pico mais alto, mas os outros casos também mostram um aumento contínuo do modo H , de modo que as diferenças não são tão significativas como na Figura 6.6 (b). Observa-se que o pico H gerado no caso $U_b = -10.0$ (curva preta) aproxima-se do gerado no caso $U_b = -6.0$ [78].

Na porção inferior direita da Figura (6.6), temos a imagem (d) que corresponde ao passo temporal $\tau = 2000$. Observa-se que, quando comparado com a Figura 6.6 (c), a emissão fundamental continua a crescer, mas a uma taxa mais lenta, e o caso com $U_b = -10.0$ (preto), ainda mantém a maior amplitude dentre os três casos. Os picos do modo F para os casos $U_b = -6.0$ (azul) e $U_b = -8.0$ (vermelha) são bastante comparáveis, com uma ligeira dominância do pico obtido com $U_b = -8.0$. Os picos associados com a emissão do harmônico possuem magnitudes comparáveis com a do fundamental, com a magnitude do caso $U_b = -10.0$ ultrapassando o caso $U_b = -8.0$. Isso mostra que, enquanto o feixe simétrico promoveu uma excitação mais rápida da emissão do harmônico, o caso assimétrico, com $U_b = -10.0$, afinal alcança e passa o caso simétrico, uma vez que ele tem mais energia livre. Também é interessante notar que, neste ponto da evolução temporal, o terceiro harmônico começa a se desenvolver com uma magnitude que é maior para o caso de maior velocidade para o feixe para trás [78].

6.2.3 Efeito da Variação das Densidades dos Feixes Contrapropagantes

Na Figura (6.7) investigamos o efeito da variação na densidade relativa associada aos feixes contrapropagantes. Consideramos velocidades iguais de propagação para os dois feixes $U_f = 10.0$ e $U_b = -10.0$ e quatro combinações de densidades: (1) $N_f = 1 \times 10^{-4}$ e $N_b = 0$ (azul); (2) $N_f = 0.8 \times 10^{-4}$ e $N_b = 0.2 \times 10^{-4}$ (vermelho); (3) $N_f = 0.6 \times 10^{-4}$ e $N_b = 0.4 \times 10^{-4}$ (verde); (4) $N_f = 0.5 \times 10^{-4}$ e $N_b = 0.5 \times 10^{-4}$ (preto). O primeiro caso corresponde a apenas um feixe para frente, enquanto que o quarto, a dois feixes de iguais velocidades e densidades. Lembrando que as densidades relativas N_f e N_b são de tal maneira que a densidade total é mantida constante $N_f + N_b = (n_f + n_b)/n_0 = 1 \times 10^{-3}$ [78].

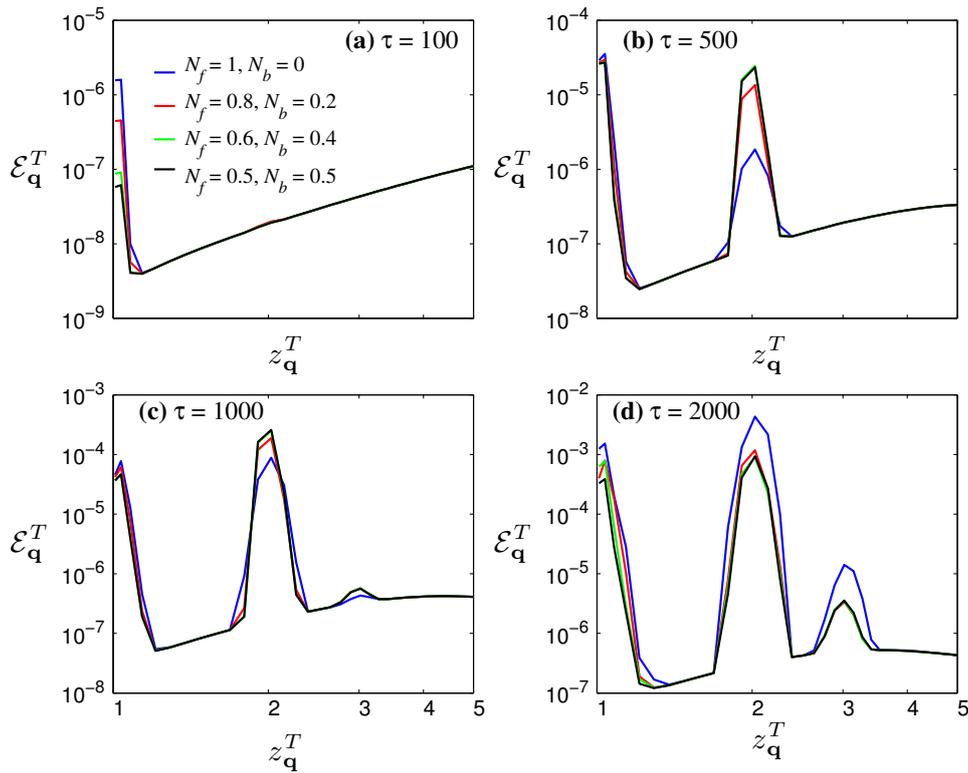


Figura 6.7: Intensidade espectral \mathcal{E}_q^T das ondas T em função da frequência z_q^T . Feixes contra-propagantes com módulos iguais em velocidades $U_f = 10.0$ e $U_b = -10.0$, mas com quatro combinações de densidades: $N_f = 1 \times 10^{-4}$ e $N_b = 0$ (azul); $N_f = 0.8 \times 10^{-4}$ e $N_b = 0.2 \times 10^{-4}$ (vermelho); $N_f = 0.6 \times 10^{-4}$ e $N_b = 0.4 \times 10^{-4}$ (verde); $N_f = 0.5 \times 10^{-4}$ e $N_b = 0.5 \times 10^{-4}$ (preto). Os quatro painéis são para os diferentes tempos: (a) $\tau = 100$; (b) $\tau = 500$; (c) $\tau = 1000$; e (d) $\tau = 2000$ [78].

Na Figura 6.7(a) são mostrados os resultados obtidos para $\tau = 100$. De maneira similar ao que foi visto em 6.6(a), vemos, já nesse estágio inicial, que a radiação de fundo está bem estabelecida, mesmo na ausência inicial das ondas T . O pico correspondente a emissão fundamental já é evidente, é mais alto para o caso de um único feixe (curva azul) e diminui progressivamente à medida que a densidade do feixe para trás aumenta e a densidade do feixe dianteiro diminui [78].

Na porção superior direita mostramos os resultados para $\tau = 500$. Nesse momento o pico associado à emissão do harmônico ($2H$) é bastante considerável. O caso (4), de densidades iguais, exibe um crescimento mais rápido no modo $2H$, comportamento oposto ao observado para o modo F . Os casos (3) e (4) apresentam resultados semelhantes de modo que as duas curvas (preta e verde) quase se sobrepõem. À medida que a diferença de densidades dos feixes aumenta, o pico referente ao harmônico $2H$ continua a diminuir, de modo que no caso de feixe único (curva azul) a magnitude alcançada é uma ordem de grandeza menor que aquela obtida nos demais casos [78].

A Figura 6.7(c) mostra a situação em $\tau = 1000$. Os picos associados com as emissões fundamental e harmônico, F e $2H$, continuam a se desenvolver, atingindo níveis comparáveis. Podemos observar que a magnitude do modo $2H$ ainda é menor no caso de feixe único, no

entanto se aproxima dos outros casos, quando comparado com a Figura 6.7(b) para $\tau = 500$. É possível observar também o surgimento do terceiro harmônico, mas de intensidade bastante pequena. Na porção inferior direita temos os resultados obtidos para o tempo $\tau = 2000$. Nesse ponto é possível observar que o terceiro harmônico é bastante visível, e o caso dominante é aquele com feixe dianteiro mais denso (azul). Note que, em $\tau = 2000$, a magnitude do pico do modo $2H$ é maior no caso de feixe único, em contraste com o que foi observado em tempos anteriores. O que se observa é que a ocorrência de feixes contrapropagantes de densidades comparáveis faz crescer mais rapidamente o pico $2H$, quando comparado com o caso (1), mas a intensidade final alcançada pelo harmônico tende a ser maior para um feixe único mais intenso [78].

6.2.4 Evolução Temporal da Energia Espectral Total para os Modos L , S e T

A densidade de energia espectral \mathcal{E}_α total para cada modo, α , como função do tempo τ , pode ser obtida integrando sobre todo "pitch angle" θ e o número de onda q ,

$$\mathcal{E}_\alpha(\tau) = \int d\theta \int dq q \mathcal{E}_q^\alpha(\tau).$$

Na Figura 6.8 mostramos a evolução temporal das densidades de energia total para cada modo. Apresenta-se nos painéis do lado esquerdo, de cima para baixo, a evolução temporal das ondas L , S e T , para as quais fixamos a densidade de partículas do feixe dianteiro $N_f = 6.0 \times 10^{-4}$ e traseiro $N_b = 4.0 \times 10^{-4}$ e a velocidade do feixe dianteiro $U_f = 8.0$, e variamos a velocidade do feixe traseiro $U_b = -6.0, -8.0$ e -10.0 , curvas azul, vermelha e preta respectivamente, como mostrados na Figura 6.6. Do mesmo modo, no lado direito, de cima para baixo, temos a energia em função do tempo para os modos L, S e T , mas agora fixando as velocidades $U_f = 10.0$ e $U_b = -10.0$ e variando as densidades relativas dos feixes em quatro configurações: (1) $(N_f, N_b) = (0.5 \times 10^{-4}, 0.5 \times 10^{-4})$, (2) $(N_f, N_b) = (0.6 \times 10^{-4}, 0.4 \times 10^{-4})$, (3) $(N_f, N_b) = (0.8 \times 10^{-4}, 0.2 \times 10^{-4})$ e (4) $(N_f, N_b) = (1.0 \times 10^{-4}, 0 \times 10^{-4})$, curvas azul, vermelha, verde e preta respectivamente. São os mesmos casos como os apresentados na Figura 6.7.

Os dois painéis da primeira linha em 6.8 mostram a evolução temporal da densidade de energia para as ondas L , que mostram um crescimento exponencial e uma quase-saturação em torno do instante $\tau \approx 300$. Observa-se que no caso de maior velocidade do feixe traseiro $U_b = -10.0$ produz uma energia de saturação mais alta para as ondas L , o que é esperado, no entanto a variação das densidades dos feixes não apresenta significativas alterações na energia. Em vez disso, na porção superior direita o painel mostra que o caso de um único feixe leva a um crescimento exponencial mais rápido das ondas L e que o caso de feixes simétricos contrapropagantes a um crescimento mais lento da instabilidade [78].

A linha central é referente a evolução para as ondas S e mostra que o crescimento relativo é muito menor quando comparado com as ondas L . A imagem central à esquerda revela que o aumento da energia das ondas íon-acústicas é mais nítido se as velocidades dos feixes (dianteiro e traseiro) forem iguais, e também revela o menor crescimento ocorrendo para o caso do feixe traseiro de menor velocidade. Na imagem central à direita temos que o crescimento da energia das ondas S tende a ser mais rápido no caso (4), quando temos um único feixe presente, em oposição ao caso (1), no qual a densidade total de partículas é dividida entre os feixes contrapropagantes [78].

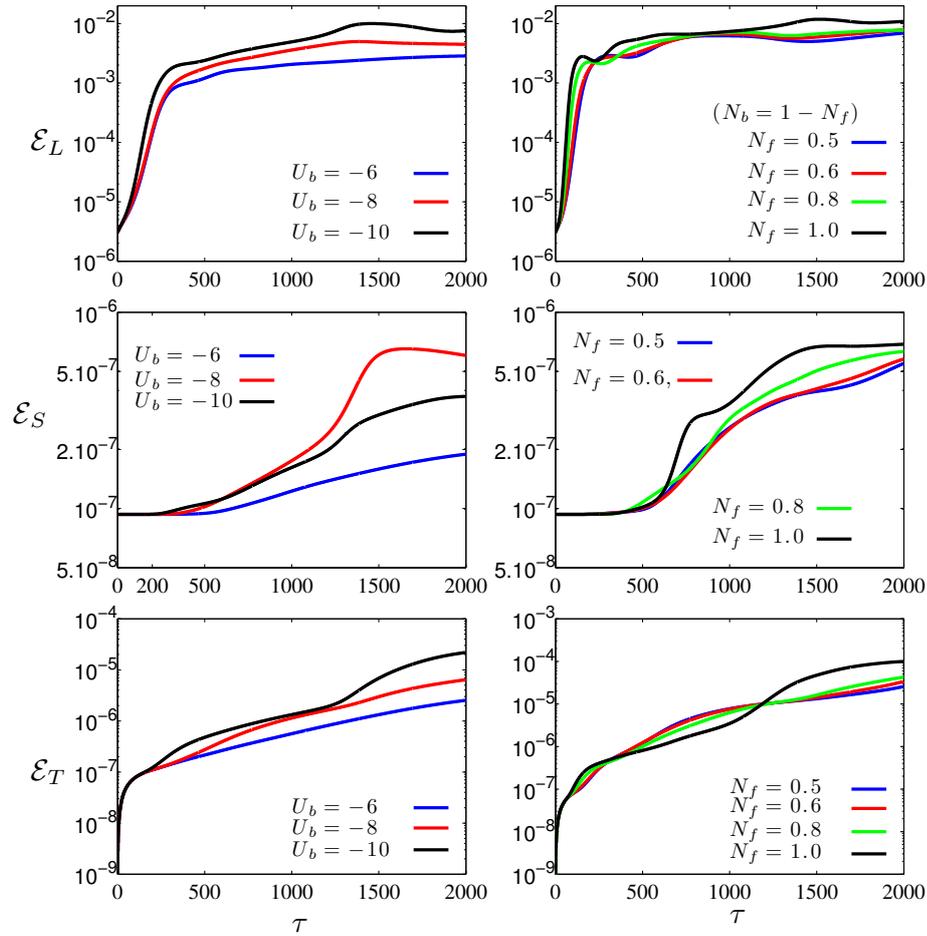


Figura 6.8: Intensidade espectral \mathcal{E}^α para as ondas $\alpha = L, ST$ versus tempo τ . Na coluna esquerda estão as variações em relação a velocidade do feixe traseiro $U_b = -6.0, -8.0, -10.0$, curvas azul, vermelha e preta respectivamente. Na coluna da direita a variação relativa às densidades $(N_f, N_b) = (0.5 \times 10^{-4}, 0.5 \times 10^{-4})$; $(N_f, N_b) = (0.6 \times 10^{-4}, 0.4 \times 10^{-4})$; $(N_f, N_b) = (0.8 \times 10^{-4}, 0.2 \times 10^{-4})$ e $(N_f, N_b) = (1.0 \times 10^{-4}, 0 \times 10^{-4})$, curvas azul, vermelha, verde e preta respectivamente [78].

Na última linha da Figura 6.8 são mostrados os resultados obtidos para a evolução das ondas transversais. É possível identificar que o modo T cresce da intensidade inicial zero para um valor finito quase que imediatamente. Este é o início da emissão espontânea devido ao plasma de fundo previsto pelo termo não linear $TsTL$ (4.28). A tendência geral na evolução temporal da densidade de energia das ondas T está de acordo com o observado nos modos longitudinais L e S . No caso do feixe traseiro de maior velocidade, $U_b = -10.0$ (curva preta na porção inferior esquerda), há mais energia de partícula livre disponível e, portanto, a radiação é mais intensa. Quando as velocidades dos feixes são fixadas e as densidades variadas, novamente, não se percebem mudanças significativas na energia de radiação [78].

6.2.5 Evolução Temporal da Energia Espectral Total para as Emissões F , $2H$ e $3H$

Até agora, vimos que a dinâmica geral da interação feixe plasma não está fortemente ligada à presença de um único feixe ou se há um feixe secundário, o que está relacionado com diferenças mais sutis na evolução temporal do sistema, e tais efeitos podem ser vistos mais claramente na evolução temporal das intensidades espectrais de cada harmônico [78].

Assim, na Figura 6.9 é mostrado um quadro comparativo da evolução temporal da energia de radiação de cada harmônico do espectro das ondas T . Os painéis da coluna da esquerda mostram a dependência na velocidade do feixe traseiro e os painéis da direita, mostram as variações ocasionadas pelas modificações nas densidades. Para cada linha, temos uma emissão diferente: na parte superior a emissão fundamental F , na parte do meio a emissão do (segundo) harmônico $2H$ e na parte de baixo a emissão do terceiro harmônico $3H$. As frequências características da emissão fundamental, segundo e terceiro harmônicos são ω_{pe} , $2\omega_{pe}$ e $3\omega_{pe}$ respectivamente [78].

Analisando a primeira linha, referente à emissão fundamental, para o caso de densidades fixas, o feixe traseiro de maior velocidade conduz a um nível mais alto de radiação (curva preta), e para velocidades fixas o caso de feixe único (curva preta) leva a uma geração mais rápida. Em relação à emissão do segundo harmônico, $2H$, no painel centro esquerda, podemos ver que o caso com $U_b = -8.0$ (curva vermelha) possui o crescimento mais rápido e uma vez que o feixe dianteiro tem a velocidade $U_f = 8.0$, a curva vermelha representa o caso de feixes contrapropagantes idênticos.

O painel centro direito, aquele que avalia a dependência em relação as densidades relativas, mostra que o crescimento mais rápido ocorre quando os dois feixes opostos possuem características similares (curva azul mostra-se a mais rápida), mas que o estado assintótico é tal que a emissão do harmônico é mais intensa quando temos um único feixe, mais denso e intenso.

Na parte inferior da Figura 6.9 temos a evolução temporal da emissão do terceiro harmônico $3H$. Nele não é identificada quase nenhuma dependência na variação da velocidade do feixe traseiro e apenas uma pequena dependência quanto a variação nas densidades: em um estado assintótico parece que um feixe único produz uma emissão mais intensa do que dois feixes de densidades iguais [78].

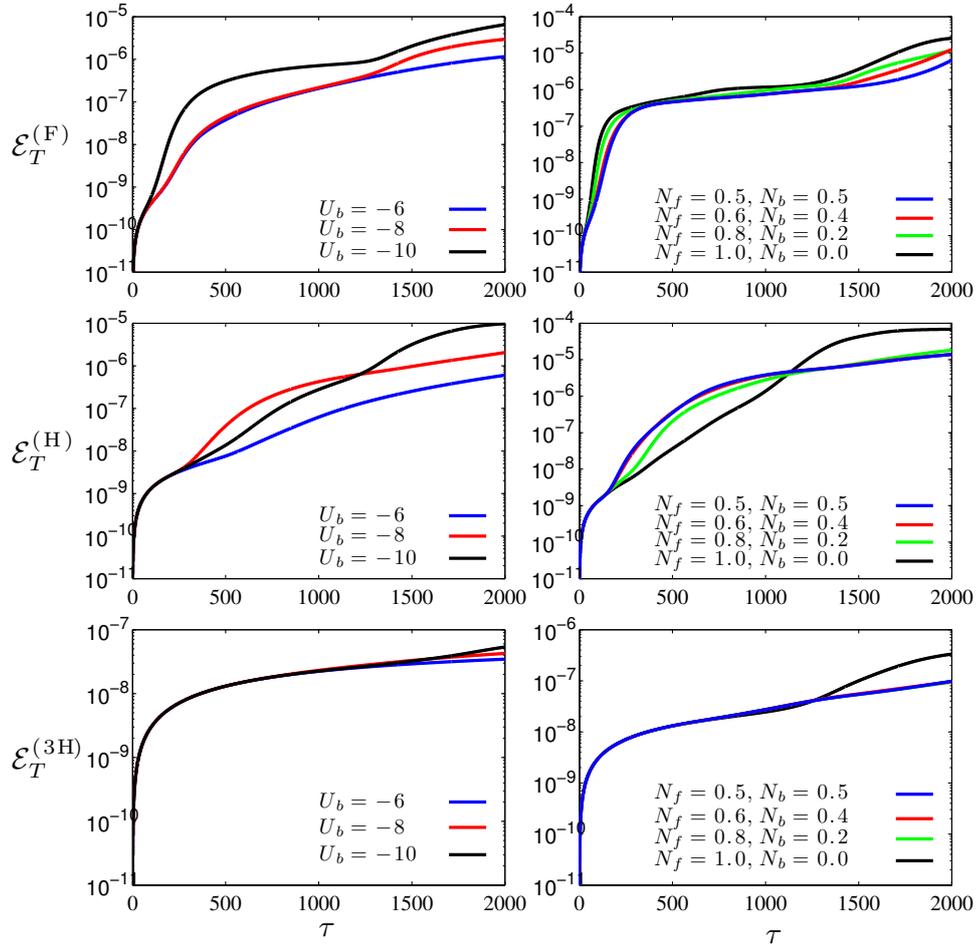


Figura 6.9: Intensidade espectral, $\mathcal{E}_T = \int d\theta \int dq q \mathcal{E}_q^T$, para cada harmônico, como função do tempo τ . A primeira linha são para a emissão fundamental F ; A linha central representa o segundo harmônico $2H$; e a terceira linha corresponde a emissão do terceiro harmônico $3H$. A coluna da esquerda mostra o caso para densidades e velocidade do feixe dianteiro fixos, $(N_f, N_b) = (6.0 \times 10^{-4}, 4.0 \times 10^{-4})$, $U_f = 8.0$, enquanto o feixe traseiro é variado: $U_b = -6.0$ (azul), $U_b = -8.0$ (vermelho), e $U_b = -10.0$ (preto). Na coluna da direita corresponde à variação com respeito às densidades: $(N_f, N_b) = (0.5 \times 10^{-4}, 0.5 \times 10^{-4})$ (azul), $(N_f, N_b) = (0.6 \times 10^{-4}, 0.4 \times 10^{-4})$ (vermelho), $(N_f, N_b) = (0.8 \times 10^{-4}, 0.2 \times 10^{-4})$ (verde) e $(N_f, N_b) = (1.0 \times 10^{-4}, 0.0 \times 10^{-4})$ (preto), para $U_f = 10.0$, $U_b = -10.0$ [78].

Capítulo 7

Efeito da Presença de uma Combinação de Funções Distribuição

Observações feitas em plasmas espaciais mostram a existência de partículas descritas por funções de distribuição de velocidades não térmicas, frequentemente apresentando anisotropias, como mencionado anteriormente, no capítulo 5.

Elétrons do vento solar são tipicamente modelados por uma combinação de funções de distribuição de velocidades: um núcleo Maxwelliano (com energia na faixa de dezenas de elétron-volts) e uma cauda supratérmica (com energia entre 100 e 1000 elétron-volts). Denominamos esse tipo de distribuição de velocidades do tipo núcleo-halo. Existem ainda para uma faixa de energia maior, ou seja de 20 a 200 keV, os elétrons na região do *superhalo* e, assim como as distribuições dos elétrons no halo, essas partículas são frequentemente modeladas pela distribuição Kappa [53].

Para a condição de partículas rápidas no vento solar, observa-se frequentemente que um feixe de elétrons alinhado chamado *strahl* flui para longe do Sol. Os elétrons do *strahl* são caracterizados pela faixa de energia semelhante à dos elétrons na região de halo. Observações mostram que a densidade numérica destes elétrons diminui à medida em que a distância do Sol aumenta, enquanto a densidade do halo aumenta, mas a densidade combinada permanece constante, sendo de 4% a 5% da densidade total dos elétrons. Os elétrons mais energéticos, na região do *superhalo*, contribuem muito pouco para a densidade total dos elétrons, já que a densidade numérica não chega a mais de 10^{-6} da densidade total, mas devido a sua alta energia, sua presença é evidente tanto no espectro de velocidades, quanto de energia [53].

Sendo assim, estudar os espectros de ondas eletrostáticas e eletromagnéticas, incluindo sua evolução temporal, na presença de uma função distribuição que leve em conta não só elétrons do núcleo, mas também uma porcentagem de elétrons energéticos descritos por uma distribuição não térmica, torna-se relevante para compreender o cenário físico por completo.

A seguir será apresentado um estudo dos espectros das ondas, bem como a evolução temporal das equações eletromagnéticas no âmbito da teoria de turbulência fraca na presença de uma função de distribuição de velocidades do tipo núcleo-halo. Esse estudo foge um pouco da proposta inicial da presente tese, mas mesmo assim consideramos que é pertinente ao desenvolvimento do trabalho. A análise completa pode ser encontrada em [53].

7.1 Parâmetros Iniciais

A fim de estudar a evolução temporal das equações cinéticas, precisamos definir primeiramente a função de distribuição de velocidades. Ela será tridimensional e isotrópica, tanto para os íons, quanto para os elétrons, e será a soma de um núcleo Maxwelliano $f_{\beta,M}(\mathbf{v})$ e um halo Kappa $f_{\beta,\kappa}(\mathbf{v})$:

$$f_{\beta}(\mathbf{v}) = \left(1 - \frac{n_{\kappa,\beta}}{n_e}\right) f_{\beta,M}(\mathbf{v}) + \frac{n_{\kappa,\beta}}{n_e} f_{\beta,\kappa}(\mathbf{v}), \quad (7.1)$$

onde $n_{\kappa,\beta}/n_e$ é a densidade relativa de partículas no halo das distribuições do tipo β , $v_{\beta,\kappa}$ é o parâmetro, associado à partícula β , já mencionado anteriormente que possui a mesma dimensão da velocidade térmica $v_{\beta} = \sqrt{2T_{\beta}/m_{\beta}}$ e se reduz a ela quando $\kappa_{\beta} \rightarrow \infty$. As expressões das funções $f_{\beta,M}(\mathbf{v})$ e $f_{\beta,\kappa}(\mathbf{v})$ são dadas respectivamente por:

$$f_{\beta,M}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\pi^{3/2} v_{\beta}^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_{\beta}^2}\right), \quad (7.2)$$

$$f_{\beta,\kappa}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\pi^{3/2} \kappa^{3/2} v_{\beta,\kappa}^3} \frac{\Gamma(\kappa_{\beta} + 1)}{\Gamma(\kappa_{\beta} - 1/2)} \left(1 + \frac{v^2}{\kappa_{\beta} v_{\beta,\kappa}^2}\right)^{-(\kappa_{\beta} + 1)}. \quad (7.3)$$

Por simplicidade, vamos definir expressões adimensionais para a velocidade \mathbf{v} e para o número de onda \mathbf{k} , para a frequência natural das ondas do tipo $\alpha = L, S, T$, para o tempo t , através da velocidade térmica dos elétrons v_e e da frequência natural do plasma ω_{pe} :

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{v_e}; \quad \mathbf{q} = \frac{\mathbf{k}v_e}{\omega_{pe}}$$

$$z_{\mathbf{q}}^{\alpha} = \frac{\omega_{\mathbf{q}}^{\alpha}}{\omega_{pe}}; \quad \tau = \omega_{pe}t.$$

Podemos também definir as seguintes quantidades adimensionais:

$$u = \frac{v}{v_e}; \quad u_{\beta,\kappa} = \frac{v_{\beta,\kappa}}{v_e}; \quad u_{\beta} = \frac{v_{\beta}}{v_e}$$

$$\mu = \frac{m_e}{m_i}; \quad \delta_e = \frac{n_{\kappa,e}}{n_e}; \quad \delta_i = \frac{n_{\kappa,i}}{n_i}, \quad (7.4)$$

e em termos destas, definir expressões adimensionais para a relação de dispersão das ondas, para a intensidade espectral $I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}$ e das funções de distribuição de velocidades, tanto do núcleo, quanto para o halo [53]

$$\begin{aligned}
 z_{\mathbf{q}}^L &= (1 + 3/2q^2)^{1/2}, \\
 z_{\mathbf{q}}^S &= \frac{q}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \left(1 + 3 \frac{T_i}{T_e} \right)^{1/2} (1 + 1/2q^2)^{-1/2}, \\
 z_{\mathbf{q}}^T &= \left(1 + \frac{c^2}{v_e^2} q^2 \right)^{1/2}, \\
 \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha} &= \frac{(2\pi)^2 g I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{m_e v_e^2 \mu_{\mathbf{k}}^{\alpha}}, \\
 \Phi_{\beta,M}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{\pi^{3/2} u_{\beta}^3} \exp\left(-\frac{u^2}{u_{\beta}^2}\right), \\
 \Phi_{\beta,\kappa}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{\pi^{3/2} \kappa^{3/2} u_{\kappa,\beta}^3} \frac{\Gamma(\kappa_{\beta} + 1)}{\Gamma(\kappa_{\beta} - 1/2)} \left(1 + \frac{u^2}{\kappa_{\beta} u_{\beta,\kappa}^2} \right)^{-(\kappa_{\beta} + 1)}, \\
 \Phi_{\beta}(\mathbf{u}) &= (1 - \delta_{\beta}) \Phi_{\beta,M}(\mathbf{u}) + \delta_{\beta} \Phi_{\beta,\kappa}(\mathbf{u}).
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

7.2 Espectros Iniciais das Ondas L , S e T

Vimos as expressões dos espectros iniciais das ondas de Langmuir e íon-acústicas tanto para uma distribuição Maxwelliana quanto para uma não térmica. No entanto, para a combinação destas duas funções as expressões para os espectros iniciais apresentam algumas modificações. O procedimento é o mesmo: a partir do conjunto de equações cinéticas mencionadas anteriormente no capítulo 4, balancear os termos de emissão induzida e espontânea, mas agora utilizando a composição de funções como função distribuição de velocidades.

A partir da equação cinética para as ondas L para os elétrons, considerando apenas os termos de emissão espontânea e induzida, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L}{\partial \tau} &= \frac{\pi}{q^2} \int d\mathbf{u} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) \\
 &\quad \times \left(g \Phi_e(\mathbf{u}) + (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \Phi_e(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right).
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Usando coordenadas esféricas no espaço de velocidades e admitindo que a direção do vetor de onda \mathbf{q} esteja ao longo do eixo z e fazendo $\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L / \partial \tau = 0$, podemos chegar a seguinte expressão :

$$\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L = \frac{g}{2(z_{\mathbf{q}}^L)^2} \frac{(1 - \delta_e) I_M^{eL} + \delta_e I_1^{eL}}{(1 - \delta_e) I_M^{eL} + \frac{\delta_e u_e^2 (\kappa_e + 1)}{u_{e,\kappa}^2} I_2^{eL}}. \tag{7.7}$$

onde as expressões para $I_M^{\beta\alpha}$, $I_1^{\beta\alpha}$ e $I_2^{\beta\alpha}$ são respectivamente:

$$I_M^{\beta\alpha} = \int d^3 u \Phi_{\beta,M}(u) \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^{\sigma} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}),$$

$$I_1^{\beta\alpha} = \int d^3u \Phi_{\beta,\kappa}(u) \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^\sigma - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}),$$

$$I_M^{\beta\alpha} = \int d^3u \left(1 + \frac{u^2}{\kappa_\beta u_{\beta,\kappa}^2}\right)^{-1} \Phi_{\beta,\kappa}(u) \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^\sigma - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}).$$

As integrais $I_M^{\beta\alpha}$, $I_1^{\beta\alpha}$ e $I_M^{\beta\alpha}$ acima podem ser resolvidas analiticamente e, considerando $\beta = e$ obtemos a seguinte expressão para o espectro inicial das ondas de Langmuir $\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L(0)$ [53]:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^L(0) &= \frac{g}{2(z_{\mathbf{q}}^L)^2} \left[(1 - \delta_e) \exp(\xi_e) + \frac{\delta_e u_e}{\kappa_e^{1/2} u_{e,\kappa}} \frac{\Gamma(\kappa_e)}{\Gamma(\kappa_e - 1/2)} \frac{1}{(1 + \xi_{e,\kappa})^{\kappa_e}} \right] \\ &\times \left[(1 - \delta_e) \exp(\xi_e) + \frac{\delta_e u_e^3}{\kappa_e^{3/2} u_{e,\kappa}^3} \frac{\Gamma(\kappa_e + 1)}{\Gamma(\kappa_e - 1/2)} \frac{1}{(1 + \xi_{e,\kappa})^{\kappa_e + 1}} \right]^{-1}, \quad (7.8) \\ \xi_e &= \frac{(z_{\mathbf{q}}^L/q^2)^2}{u_e^2}, \quad \xi_{e,\kappa} = \frac{(z_{\mathbf{q}}^L/q^2)^2}{\kappa_e u_{e,\kappa}^2}. \end{aligned}$$

Para as ondas íon acústicas partimos da seguinte expressão de balanceamento energético:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^S}{\partial \tau} &= \mu_{\mathbf{q}}^S \frac{\pi}{q^2} \int d\mathbf{u} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^S - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) \left[g (\Phi_e(\mathbf{u}) + \Phi_i(\mathbf{u})) \right. \\ &\quad \left. + (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\mathbf{q} \cdot \frac{\partial \Phi_e(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right) \right], \quad (7.9) \\ \mu_{\mathbf{q}}^S &= \frac{q^3}{2^{3/2}} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \left(1 + \frac{3T_i}{T_e} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Empregando passos semelhantes aos realizados no caso de ondas L , obtemos que o espectro inicial de ondas S obedece à seguinte expressão [53]:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^S(0) &= \frac{g}{2(z_{\mathbf{q}}^L)(z_{\mathbf{q}}^S)} \left[(1 - \delta_e) \exp(-\xi_e) + \frac{\delta_e u_e}{\kappa_e^{1/2} u_{e,\kappa}} \frac{\Gamma(\kappa_e)}{\Gamma(\kappa_e - 1/2)} \frac{1}{(1 + \xi_{e,\kappa})^{\kappa_e}} \right. \\ &\quad \left. + (1 - \delta_i) \exp(-\xi_i) + \frac{\delta_i u_e}{\kappa_i^{1/2} u_{i,\kappa}} \frac{\Gamma(\kappa_i)}{\Gamma(\kappa_i - 1/2)} \frac{1}{(1 + \xi_{i,\kappa})^{\kappa_i}} \right] \\ &\times \left[(1 - \delta_e) \exp(\xi_e) + \frac{\delta_e u_e^3}{\kappa_e^{3/2} u_{e,\kappa}^3} \frac{\Gamma(\kappa_e + 1)}{\Gamma(\kappa_e - 1/2)} \frac{1}{(1 + \xi_{e,\kappa})^{\kappa_e + 1}} \right. \\ &\quad \left. + \mu(1 - \sigma_i) \frac{u_e^3}{u_i^3} \exp(-\xi_i) + \frac{\delta_i \mu u_e^3}{\kappa_i^{3/2} u_{i,\kappa}^3} \frac{\Gamma(\kappa_i + 1)}{\Gamma(\kappa_i - 1/2)} \frac{1}{(1 + \xi_{i,\kappa})^{\kappa_i + 1}} \right]^{-1}, \quad (7.10) \\ \xi_i &= \frac{(z_{\mathbf{q}}^L/q^2)^2}{u_i^2}, \quad \xi_{i,\kappa} = \frac{(z_{\mathbf{q}}^L/q^2)^2}{\kappa_i u_{i,\kappa}^2}. \end{aligned}$$

Para falar em ondas transversais devemos lembrar que na sub-seção (4.1.4) para a distribuição Maxwelliana, obtemos a seguinte expressão para o chamado "equilíbrio turbulento" das ondas T , demonstrando que a expressão correspondente tem a contribuição mais significativa para o integrando em $q' = q_*$, de tal forma que $z_{q_*}^L = z_q^T$:

$$\mathcal{E}_q^{\sigma T} \simeq 2\mathcal{E}_{q_*}^{\sigma L}. \quad (7.11)$$

E, demonstramos em (5.4.2), utilizando um plasma de fundo como uma função de distribuição não térmica, que a expressão para o equilíbrio assintótico para distribuições Kappa é igual a expressão encontrada para o caso Maxwelliano.

Aqui o cenário é um pouco distinto: temos como descrição do plasma uma combinação de duas funções de distribuição de velocidades. Sendo assim, é importante que se discuta novamente no âmbito da equação cinética das ondas transversais o termo de espalhamento das ondas T e L , pois este torna-se dominante na evolução temporal do sistema, a fim de verificar se há modificações em seu espectro assintótico. Este desenvolvimento foi recentemente feito em Ref. [53] e o resultado que se obtém é o seguinte:

$$\mathcal{E}_q^{\sigma T} \simeq 2\mathcal{E}_{q_*}^{\sigma L}, \quad q_* = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{c}{v_e} q, \quad (7.12)$$

resultado idêntico ao já encontrado em (5.4.2).

7.3 Análise Numérica

Para a análise da evolução temporal das quantidades espectrais, utilizaremos como base o mesmo conjunto de equações (4.11)-(4.14) referido nos capítulos anteriores. As configurações iniciais são tais que os íons são considerados como estacionários (sendo descritos por uma distribuição Maxwelliana e, portanto, $\delta_i = 0$) e os elétrons, bem como as ondas, evoluem no tempo. A função distribuição inicial para os elétrons é composta pela soma de um núcleo Maxwelliano $\Phi_{e,M}$ com um halo na forma de uma distribuição do tipo kappa $\Phi_{e,\kappa}$ definido em (7.5).

Para todas as situações a seguir, o passo temporal normalizado será $\Delta\tau = 0.1$ e o parâmetro de plasma será $(n\lambda_D^3)^{-1} = 5.0 \times 10^{-3}$. Para a solução numérica utilizamos condições que já vem sendo usadas em outros trabalhos produzidos no âmbito do grupo: para as ondas L e S grade de 51×51 pontos para as componentes perpendicular e paralela do vetor de onda $(q_\perp, q_\parallel) = (q_x, q_z)$, com $0 < q_x < 0.6$ e $0 < q_z < 0.6$. Para as ondas T , grade de 71×71 com as mesmas condições para (q_x, q_z) .

Em relação às velocidades, utilizamos uma grade de 51×101 para as componentes perpendicular e paralela $(u_\perp, u_\parallel) = (u_x, u_z)$, com $0 < u_x < 12$ e $-12 < u_z < 12$.

Em relação às temperaturas, utilizamos $T_e/T_i = 2$, pois está de acordo com os valores observados nas regiões dos ventos solares [53]. Para a temperatura do feixe de partículas T_b , utilizamos como sendo igual à dos elétrons do plasma $T_b = T_e$.

A seguir serão apresentados os efeitos da combinação de funções de distribuição de velocidades (para diferentes valores do parâmetro κ_e) nos espectros iniciais das ondas L e

S , quando comparados com o caso Maxwelliano, bem como os efeitos desta distribuição de velocidades do tipo núcleo-halo no espectro assintótico das ondas transversais.

E por fim será apresentado uma revisão do problema da interação feixe-plasma, mas agora no âmbito desta nova combinação de distribuição de velocidades.

7.4 Efeito nos Espectros Iniciais das Ondas L e S

A fim de demonstrar os efeitos da presença de uma cauda energética nos espectros iniciais das ondas L , obtido a partir da equação (7.8), e S , obtido através da equação (7.10), vamos considerar que a população de elétrons no halo seja 10% da população total dos elétrons, sendo assim, em unidades adimensionais teremos $\delta_e = 0.1$.

A Figura (7.1) mostra o espectro das ondas eletrostáticas dividido pelo parâmetro de plasma g em função no vetor de onda normalizado $qk v_e / \omega_{pe}$ para diversos valores do índice kappa ($\kappa_e = 2.5, 5, 10, 20$ e 40). O painel 7.1(a) à esquerda representa o espectro inicial das ondas de Langmuir, enquanto que o espectro das ondas íon acústicas está à direita em 7.1(b). Em ambos os painéis, o caso de uma distribuição puramente Maxwelliana está representado para fins de comparação (curva vermelha contínua). É interessante lembrar que para grandes valores de κ_e é esperado que o comportamento da função de distribuição de velocidades Kappa se assemelhe ao comportamento de uma função Maxwelliana.

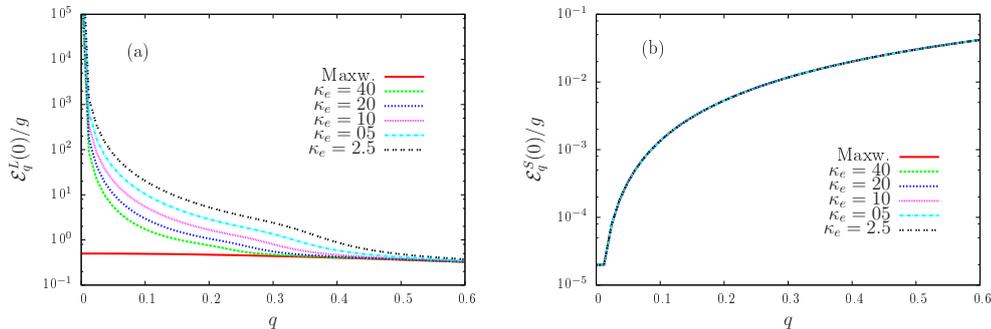


Figura 7.1: Espectro inicial das ondas eletrostáticas dividido por g , como função do número de onda normalizado, para diversos valores de κ_e . (a) Espectro inicial das ondas L e em (b) Espectro inicial das ondas S . Em ambos os casos é mostrado como referência o espectro levando em conta uma distribuição de velocidades puramente Maxwelliana (curva em vermelho) [53].

A Figura 7.1(a) nos mostra que o valor de $\mathcal{E}_q^L(0)$, no caso da presença da população Kappa, é superior ao valor obtido no caso de uma distribuição puramente Maxwelliana, com uma diferença que já é perceptível na escala da figura, mesmo para o limite superior mostrado, $q = 0.6$ e aumenta para valores menores de q , apresentando um pico divergente para $q \rightarrow 0$. Portanto, podemos dizer que o maior valor do espectro inicial das ondas L acontece quando temos $\kappa_e = 2.5$.

A explicação para a divergência apresentada em $q \rightarrow 0$ pode ser feita através da análise da expressão (7.8) do espectro das ondas de Langmuir. Na presença de elétrons da cauda energética, mesmo que essa seja uma fração muito pequena da população total de elétrons, verifica-se que para valores suficientemente pequenos de q a contribuição associada aos elétrons do núcleo

tende a zero, devido ao fator exponencial $\exp\left(-\frac{1}{u_e^2}\left(\frac{z_q^L}{q}\right)^2\right)$. E sendo assim, nestas regiões, a distribuição do halo torna-se dominante e o espectro inicial $\mathcal{E}_q^L(0)$ pode ser aproximado da seguinte forma [53]:

$$\mathcal{E}_q^L(0) \simeq \frac{g}{2(z_q^L)^2} \frac{u_{e,\kappa_e}^2}{u_e^2} \left(1 + \frac{(z_q^L/q^2)^2}{\kappa_e u_{e,\kappa_e}^2}\right).$$

Já para grandes valores de κ_e , ou seja $\kappa_e \rightarrow \infty$, esta expressão se reduz a $g/2(z_q^L)^2$, a qual é a expressão para o espectro inicial das ondas de Langmuir quando estamos utilizando uma função de distribuição de velocidades puramente Maxwelliana, como era o esperado.

A Figura 7.1(b) mostra os resultados dos espectros iniciais $\mathcal{E}_q^S(0)$, assumindo diversos valores de κ_e . Podemos observar que o valor do espectro inicial das ondas íon acústicas independe do índice κ_e na escala utilizada, pois as curvas se sobrepõem umas às outras, diferentemente do espectro inicial das ondas de Langmuir.

Foi também estudado o espectro das ondas L e S para um mesmo valor de κ_e , mas variando a proporção da população no núcleo (Maxwelliano) e no halo (Kappa). O resultado foi que tanto o espectro das ondas de Langmuir quanto para o espectro das ondas íon acústicas, o valor da densidade populacional com distribuição Kappa não interfere em seus respectivos espectros iniciais, desde que esse valor não seja nulo [53].

7.5 Efeito no Espectro Assintótico das Ondas T

Nesta seção será discutido o efeito de elétrons energéticos do halo no espectro assintótico das ondas transversais.

Na Figura (7.2) é mostrado o espectro assintótico das ondas T , \mathcal{E}_q^T , dividido pelo parâmetro de plasma g como função do vetor de onda normalizado para os mesmos valores de κ_e estudados na seção anterior, utilizando a expressão (7.12) deduzida no início deste capítulo.

No painel 7.2(a) são exibidas as diversas curvas obtidas associados aos diferentes valores de κ_e e o painel 7.2(b) mostra em detalhes a região do espectro assintótico para valores de $q < 0.1$. Com o objetivo de estabelecer uma comparação, em ambos os painéis o caso puramente Maxwelliano está representado na curva em vermelho.

Vamos examinar primeiramente o caso $\delta_e = 0$ que está representado pela linha contínua vermelha. Este resultado é explicado pela análise da expressão (7.12), que mostra que o espectro das ondas T é proporcional ao espectro das ondas L , dado pela equação (7.8), avaliado em $q = q_*$. Se a população do halo (descrita através da função de distribuição de velocidades Kappa) se aproxima de zero, ou seja $\delta_e = 0$, as contribuições associadas à distribuição desaparecem em (7.8), e as contribuições devidas à população maxwelliana no numerador e no denominador são canceladas, e o espectro acaba sendo dado por [53]:

$$\mathcal{E}_q^T \simeq 2 \frac{g}{2(z_{q_*}^L)^2} = \frac{g}{2 + 3q_*^2}.$$

Na região de $q = 0$ a amplitude do espectro das ondas T é duas vezes a magnitude do espectro das ondas L no caso da distribuição eletrônica de Maxwell, no entanto decai mais

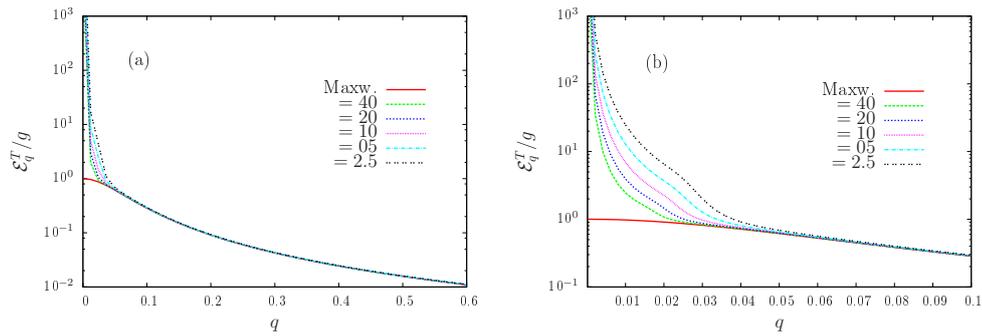


Figura 7.2: (a) Espectro assintótico das ondas T dividido por g , \mathcal{E}_q^T , vs número de onda normalizado q para $n_{\kappa,e}/n_e = 0.1$ e diversos valores do parâmetro κ_e . O caso com $n_{\kappa,e}/n_e = 0$, a saber o caso com distribuição puramente Maxwelliana, está mostrado como referência (curva em vermelho). O painel (b) mostra em detalhes a região do espectro assintótico para pequenos valores de q [53].

rapidamente para valores maiores de q , uma vez que $q_* \gg q$. Com a presença de uma população no halo descrita por uma distribuição Kappa, a Figura 7.2(a) mostra que o espectro de ondas T é modificado na região de pequenos números de ondas, em comparação com o espectro obtido no caso puramente Maxwelliano.

A Figura 7.2(b) mostra em detalhes a região na qual $q < 0.1$, para as mesmas condições discutidas na Figura 7.2(a). A ampliação da escala mostra claramente o aumento na magnitude do espectro das ondas T para valores pequenos do vetor de onda normalizado. Por exemplo, pode-se verificar que para $q = 0.02$, a intensidade do espectro das ondas no caso de $\kappa_e = 2.5$ é cerca de uma ordem de magnitude acima da intensidade exibida no caso de $\kappa_e = 40$ (mais próximo ao caso Maxwelliano) [53].

Por fim, foi realizado um estudo sobre a dependência do espectro assintótico das ondas T na densidade relativa δ_e , para um valor fixo do índice κ_e . Os resultados obtidos mostraram que o espectro das ondas na presença de uma distribuição do tipo kappa é quase independente da densidade numérica desta população. A única característica que vale ressaltar nos espectros é a presença de um pico em torno de $q = 0$, que ocorre para qualquer valor finito de δ_e , e desaparece no caso puramente Maxwelliano $\delta_e = 0$ [53].

7.6 Efeito na Interação Feixe-Plasma

Esta seção tem por objetivo entender as consequências desta combinação de distribuições de velocidades no problema da instabilidade feixe-plasma. Para tanto consideramos um feixe de elétrons isotrópico Maxwelliano de densidade relativa $n_b/n_e = 1.0 \times 10^{-3}$, temperatura igual à temperatura dos elétrons $T_b = T_e$ e velocidade normalizada u_b igual a $u_b = 6.0$. O subíndice b na temperatura, na densidade e na velocidade associam estas quantidades ao feixe, do inglês 'beam'. Consideramos os íons como sendo estacionários e não evoluem no tempo. Os elétrons, bem como as ondas, sim.

Na Figura (7.3) estão dispostos oito painéis divididos em duas colunas e quatro linhas. Os painéis que estão dispostos na coluna à esquerda (a), (c), (e) e (g) mostram respectivamente a evolução temporal da função distribuição dos elétrons em função da componente paralela da

velocidade, do espectro das ondas de Langmuir e do espectro das ondas transversais como função do vetor de onda paralelo, e do espectro das ondas T em função da frequência normalizada, na presença de uma distribuição de velocidades puramente Maxwelliana. Já na coluna à direita, os painéis (b), (d), (f) e (h) representam as mesmas quantidades, mas agora levando em consideração uma distribuição de velocidades do tipo núcleo-halo com valor fixo do índice $\kappa_e = 5$ e densidade relativa $\delta_e = 0,05$. Nos painéis estão expostos os resultados para seis valores de tempo $\tau = 100, 200, 500, 1000, 1500$ e 2000 .

7.6.1 Evolução Temporal da Função Distribuição

Vamos analisar a primeira linha da Figura 7.3. A função de distribuição de elétrons para cada caso é apresentada nos painéis 7.3(a) e 7.3(b), respectivamente, para vários valores de τ , entre $\tau = 100$ e $\tau = 2000$. Nos dois painéis, pode-se notar o achatamento gradual do pico da distribuição do feixe e a formação de um platô na região de velocidades entre o feixe e a distribuição do núcleo. Na 7.3(a), também notamos o aparecimento de uma pequena população de elétrons retroespalhados, que começam a se distinguir em $\tau \simeq 1000$. No painel 7.3(b), esses elétrons retroespalhados não são perceptíveis na escala utilizada, pois a distribuição do halo já possuía uma população considerável naquela região do espaço de velocidade [53].

7.6.2 Evolução Temporal do Espectro das Ondas L e T

A segunda linha da Figura 7.3 exibe o resultados do espectro unidimensional das ondas L , enquanto que na terceira linha temos os resultados do espectro unidimensional das ondas T , ambos para os tempos normalizados $\tau = 100, 200, 500, 1000, 1500$ e 2000 . Como mencionado anteriormente, o painel mais à esquerda representa o cenário no qual $\delta_e = 0$, enquanto o mais à direita, o $\delta_e \neq 0$.

Os painéis 7.3(c) e 7.3(d) mostram a projeção em $1D$ do espectro de ondas L . A figura em $2D$ pode ser encontrada em [53]. No painel (c), nota-se que em $\tau = 100$, a única característica distintiva no espectro das ondas L dos dois cenários é o pico primário gerado em $q_z = 0.2$, na região espectral em que as ondas estão em ressonância com os elétrons na região de velocidades positivas na distribuição de velocidades. No instante $\tau = 200$, já existe um indício de um pico retroespalhado em $q_z \simeq -0.2$. E em $\tau = 500$ esse pico retroespalhado parece bem mais desenvolvido. Note também que também há um perfil no espectro de ondas, contínuo entre os dois picos. Esta é apenas uma projeção unidimensional do anel formado pelos efeitos de espalhamento e decaimento, que é visto na representação em duas dimensões.

Por outro lado, quando a função de distribuição é composta também por uma distribuição Kappa, o espectro das ondas L em $\tau = 100$ apresenta o pico gerado pelo efeito quase-linear em $q_z \simeq 0.2$, e também o pico em torno de $q = 0$, característica do espectro em equilíbrio na presença de uma distribuição Kappa. Devido à aproximação que adotamos, de uma velocidade ressonante limitante, o espectro em $q = 0$ é finito em vez de divergente. A projeção em $1D$ no painel 7.3(d) mostra em $\tau = 200$ o indício de um pico retroespalhado. Em $\tau = 500$, o espectro da figura 7.3(d) torna-se semelhante ao que aparece na figura 7.3(c), mas esse é apenas o efeito da projeção unidimensional. O espectro real no caso da Fig. 7.3(d) é constituído pelos picos primário e retroespalhado, pelo valor aproximado em $q = 0$ e pela estrutura do anel formada por efeitos não lineares, como mostrado na Fig. 4(d) de [53].

A projeção 1D do espectro de ondas T aparece representada nas figuras 7.3(e) e 7.3(f), para os mesmos valores de τ utilizados. Nestes dois painéis, a sequência de linhas mostra inicialmente a formação de um espectro de fundo das ondas T , somado ao crescimento de um pico de onda em torno de $q_z = 0$. Entre os instantes $\tau = 500$ e $\tau = 1000$, outras estruturas pontiagudas aparecem nas representações, que são as projeções da estrutura de um anel estreito mostrada nas Figs. 4(e) e 4(f) de [53]. As curvas na Figura 7.3, mostram que o espectro das ondas T obtido no caso da distribuição eletrônica puramente maxwelliana é muito semelhante ao espectro da onda T obtido no caso da presença de um "halo" descrito por uma distribuição Kappa. A única diferença notável é que os picos que aparecem no espectro da onda T são ligeiramente mais altos no caso de $\delta_e \neq 0$, painel 7.3(e), do que no caso de $\delta_e = 0$, painel 7.3(f), para o mesmo valor de τ [53].

7.6.3 Evolução Temporal do Espectro das Emissões de Plasma

Por fim, na última linha da Figura 7.3 mostra-se o espectro das ondas T integrado ao longo do *pitch angle*. Ou seja, este painel mostra a quantidade

$$\mathcal{E}_q = \int_0^{2\pi} d\theta q \mathcal{E}_q^T$$

como função da frequência de plasma normalizada. Ela exhibe as intensidades das emissões dos harmônicos do plasma para os tempos $\tau = 100, 200, 500, 1000, 1500$ e 2000 .

Em ambos os painéis é possível identificar a formação completa do espectro de fundo (associado ao termo de espalhamento $TsTL$) e da formação da emissão fundamental (com frequência igual à frequência fundamental do plasma), logo nos primeiros instantes da evolução temporal. Posteriormente, identificamos também nos dois painéis a formação do pico do primeiro harmônico, de frequência igual a duas vezes a frequência fundamental, entre os instantes $\tau = 500$ e $\tau = 1000$.

A comparação entre as figuras 7.3(h) e 7.3(g) mostra que as curvas obtidas em ambos os casos são qualitativamente iguais, com a única diferença de que os picos são ligeiramente mais altos no caso de $\delta_e \neq 0$, mostrado na Figura 7.3(h) [53].

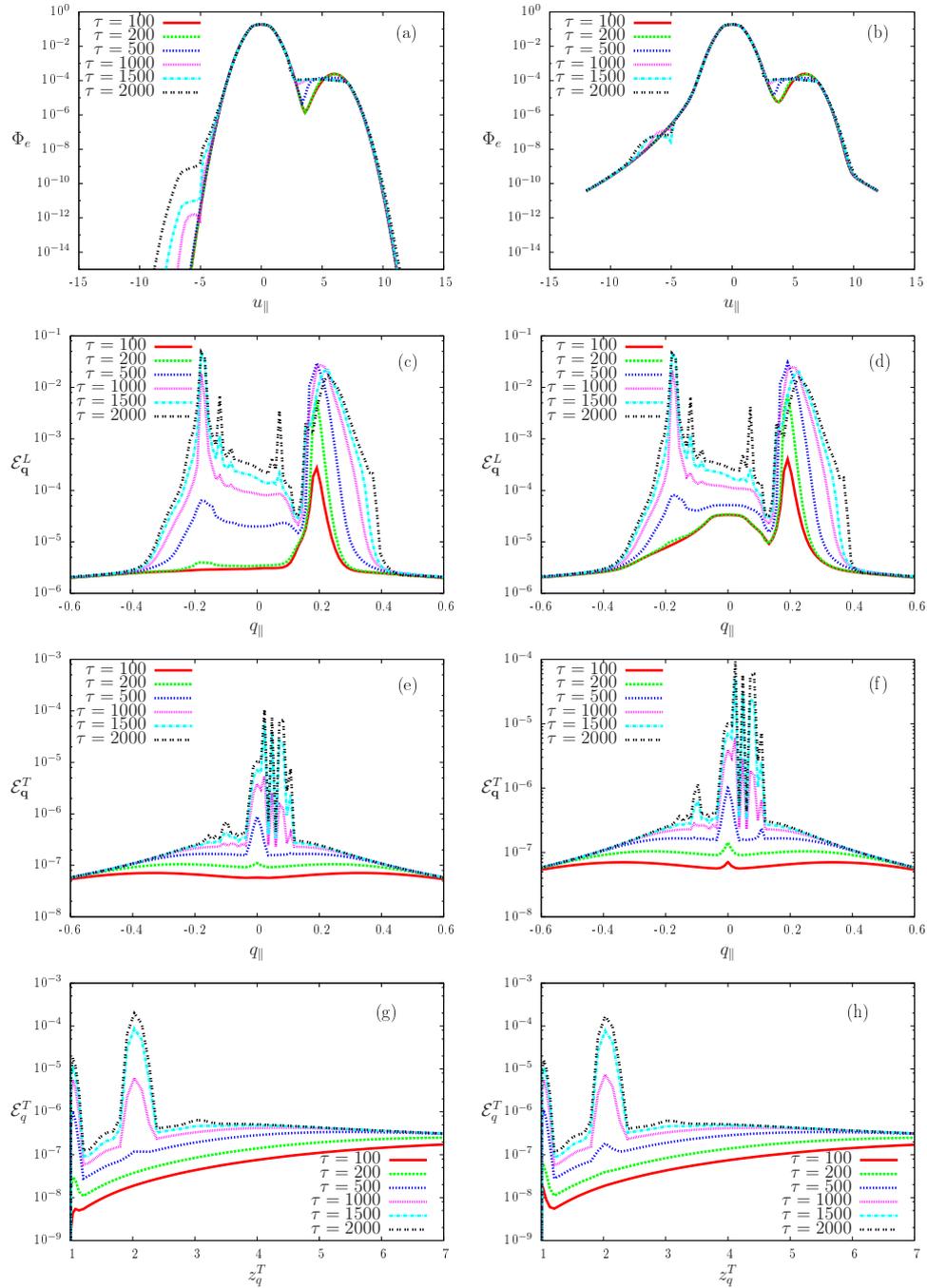


Figura 7.3: Evolução temporal da função distribuição de velocidades dos elétrons Φ_e vs velocidade paralela à propagação u_{\parallel} . No painel (a) para $n_{\kappa,e}/n_e = 0$ e no painel (b) para $n_{\kappa,e}/n_e = 5 \times 10^{-2}$; Evolução temporal do espectro das ondas de Langmuir, \mathcal{E}_q^L , vs vetor de onda q_{\parallel} , considerando (c) $n_{\kappa,e}/n_e = 0$ e (d) $n_{\kappa,e}/n_e = 5 \times 10^{-2}$; Evolução temporal do espectro das ondas transversais, \mathcal{E}_q^T , vs q_{\parallel} , considerando (e) $n_{\kappa,e}/n_e = 0$ e (f) $n_{\kappa,e}/n_e = 5 \times 10^{-2}$; Evolução temporal do espectro das ondas transversais, \mathcal{E}_q^T , vs frequência normalizada z_q^T , considerando (g) $n_{\kappa,e}/n_e = 0$ e (h) $n_{\kappa,e}/n_e = 5 \times 10^{-2}$ [53].

Capítulo 8

Considerações Finais

As emissões de plasma vem sendo objeto de estudo desde os anos 1950, e sua caracterização é importante no entendimento de emissões solares do tipo II e III, por exemplo. A parte inicial do trabalho foi realizada considerando o plasma de fundo com distribuições do tipo Maxwelliano. Como etapa posterior, o estudo foi estendido levando em conta características não térmicas na distribuição dos elétrons do plasma de fundo. A presença de distribuições não térmicas, como as distribuições Kappa, vem sendo observada não só em ambientes naturais, mas também em laboratório, e um estudo mais completo se faz necessário. A introdução da nova forma da distribuição leva a modificações em todos os níveis de complexidade, tanto no aspecto analítico, quanto numérico.

Este trabalho foi dividido da seguinte forma: nos capítulos (2)-(5) foi realizada uma revisão completa da literatura, formando assim, as bases para o trabalho subsequente apresentado nos capítulos (6) e (7).

No capítulo (2) foi apresentado uma revisão da teoria cinética, descrevendo o sistema de equações de Vlasov-Maxwell, sua linearização e como consequência o fenômeno *Landau damping*. O capítulo (3) dá seguimento à revisão da literatura com a abordagem quase-linear, do sistema de equações acima mencionado. Neste capítulo são abordadas as principais características da teoria quase-linear como a conservação de energia e do número de partículas, e como aplicação a instabilidade *bump-in-tail*, a qual é responsável pela geração de processos turbulentos a partir da incidência de um feixe de partículas no plasma. O capítulo (4) versou sobre as equações cinéticas das ondas e das partículas no âmbito da teoria de turbulência fraca. Caracterizou os diferentes termos associados aos fenômenos de espalhamento e de decaimento envolvendo ondas e partículas, bem como os espectros iniciais das ondas. Por fim, no capítulo (5) mostrou-se que há uma dependência das distribuições Kappa com os graus de liberdade do sistema, bem como que tais distribuições são soluções assintóticas de equilíbrio da equação cinética das partículas. Encerrou-se portanto as contribuições para a revisão teórica proposta.

O capítulo (6) abordou o problema da interação feixe-plasma considerando tanto os elétrons do plasma de fundo quanto do feixe incidente como distribuições maxwellianas. Para tanto, foram utilizados dois cenários para o feixe de partículas: o primeiro considerando um feixe único, alinhado na direção do campo, e o segundo utilizando feixes contrapropagantes.

Na primeira parte analisamos as contribuições de cada um dos termos da equação cinética para as ondas transversais, associados aos diferentes fenômenos, nas emissões do plasma com frequências múltiplas à frequência fundamental. Foi explorado também a contribuição do

termo de espalhamento envolvendo duas ondas T e uma onda L na formação do espectro de fundo. Por fim examinamos a evolução temporal da energia total das ondas do plasma, bem como das emissões F , $2H$ e $3H$. Na segunda parte foi analisado o efeito da variação do feixe retropropagante, bem como a variação das densidades dos feixes contrapropagantes no âmbito das instabilidades feixe-plasma. O capítulo foi encerrado após o exame da evolução temporal da energia total das ondas do plasma, bem como das emissões F , $2H$ e $3H$ utilizando feixes contrapropagantes.

E por último, o capítulo (7) abordou o efeito da presença de uma distribuição de velocidades do tipo núcleo-halo, tanto nos espectros iniciais das ondas L , S quanto no espectro assintótico das ondas T do plasma. E, para encerrar a análise, foram apresentados efeitos da presença inicial de uma distribuição do tipo núcleo-halo sobre a evolução temporal dos espectros das ondas e das funções de distribuição de velocidades, bem como mostrada a evolução dos espectros de emissão do plasma.

Apêndice A

Cálculo das integrais I_1 e I_2

Começamos pelo cálculo de I_1 , para o caso geral que α refere-se ao tipo de partícula e β , ao tipo de onda:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \Phi_\alpha \delta \left[\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - q_x u_x - q_z u_z \right]. \quad (\text{A.1})$$

Começamos pela integração na variável u_z , utilizando a propriedade da função Delta de Dirac:

$$I_1 = \frac{1}{|q_z|} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left[\Phi_\alpha \right]_{u_z = (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - q_x u_x) / q_z}. \quad (\text{A.2})$$

A integral na variável u_x será da seguinte forma,

$$\int_{-\infty}^{\infty} du_x \left[\Phi_\alpha \right]_{u_z = (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - q_x u_x) / q_z} = \frac{1}{\pi u_{\alpha, \kappa}^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left[\left(1 + \frac{u^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha, \kappa}^2} \right)^{-(\kappa_\alpha + 1)} \right]_{u_z = a u_x + b}, \quad (\text{A.3})$$

onde foram utilizadas as seguintes definições

$$a = -\frac{q_x}{q_z}, \quad b = \frac{\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta}{q_z}.$$

Substituindo o valor de u_z

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha, \kappa}^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left(1 + \frac{(1+a^2)u_x^2 + 2abu_x + b^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha, \kappa}^2} \right)^{-(\kappa_\alpha + 1)}, \\ &= \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha, \kappa}^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left(1 + \frac{(1+a^2)}{\kappa_\alpha u_{\alpha, \kappa}^2} \left(u_x^2 + 2\frac{ab}{1+a^2}u_x + \frac{b^2}{1+a^2} \right) \right)^{-(\kappa_\alpha + 1)}, \\ &= \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha, \kappa}^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left(1 + \frac{b^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha, \kappa}^2 (1+a^2)} + \frac{(1+a^2)}{\kappa_\alpha u_{\alpha, \kappa}^2} \left(u_x + \frac{ab}{1+a^2} \right)^2 \right)^{-(\kappa_\alpha + 1)}, \quad (\text{A.4}) \\ &= \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha, \kappa}^2} \left(1 + \frac{b^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha, \kappa}^2 (1+a^2)} \right)^{-(\kappa_\alpha + 1)} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left(1 + \frac{(1+a^2)^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha, \kappa}^2 (1+a^2) + b^2} \left(u_x + \frac{ab}{1+a^2} \right)^2 \right)^{-(\kappa_\alpha + 1)}. \end{aligned}$$

Seja,

$$v = u_x + \frac{ab}{1+a^2}, \quad dv = du_x,$$

então,

$$I_1 = \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} \left(1 + \frac{b^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1+a^2)}\right)^{-(\kappa_\alpha+1)} \int_{-\infty}^{\infty} dv \left(1 + \frac{(1+a^2)^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1+a^2) + b^2} v^2\right)^{-(\kappa_\alpha+1)}. \quad (\text{A.5})$$

Fazendo uma nova mudança de variáveis,

$$t = \frac{(1+a^2)^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1+a^2) + b^2} v^2,$$

temos

$$dt = 2 \frac{(1+a^2)^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1+a^2) + b^2} v dv$$

e

$$dt = \frac{2(1+a^2)}{(\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1+a^2) + b^2)^{1/2}} t^{1/2} dv.$$

Substituindo na expressão acima, temos

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} 2 \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1+a^2) + b^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1+a^2)}\right)^{-(\kappa_\alpha+1)} \frac{(\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1+a^2) + b^2)^{1/2}}{2(1+a^2)} \int_0^\infty dt \frac{t^{-1/2}}{(1+t)^{\kappa_\alpha+1}} \\ &= \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1+a^2)}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1+a^2) + b^2}\right)^{\kappa_\alpha+1/2} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2}{1+a^2}\right)^{1/2} \int_0^\infty dt \frac{t^{-1/2}}{(1+t)^{\kappa_\alpha+1}}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Utilizando a relação (5.20) para valores de z , $w+z$ e w dados respectivamente por $z = 1/2$, $w+z = w+1/2 = \kappa_\alpha + 1$ e $w = \kappa_\alpha + 1/2$, temos

$$I_1 = \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2 |q_z|} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1+a^2)}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1+a^2) + b^2}\right)^{\kappa_\alpha+1/2} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2}{1+a^2}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(\kappa_\alpha + 1/2)}{\Gamma(\kappa_\alpha + 1)}. \quad (\text{A.7})$$

Utilizando as definições de a e b , obtemos por fim

$$I_1 = \frac{1}{u_{\alpha,\kappa}^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 q^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 q^2 + (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta)^2}\right)^{\kappa_\alpha+1/2} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2}{q^2}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(\kappa_\alpha + 1/2)}{\Gamma(\kappa_\alpha + 1)}. \quad (\text{A.8})$$

Para I_2 procedemos de forma semelhante. De (5.44), mas para o caso geral em que α refere-se ao tipo de partícula e β , ao tipo de onda,

$$I_2 = \frac{\kappa_\alpha + 1}{\kappa_\alpha - 1} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \Phi_\alpha \left(1 + \frac{u^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2}\right)^{-1} \delta[\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - q_x u_x - q_z u_z], \quad (\text{A.9})$$

realizando a integração na variável u_z ,

$$I_2 = \frac{\kappa_\alpha + 1}{\kappa_\alpha - 1} \frac{1}{|q_z|} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left[\left(1 + \frac{u^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2} \right)^{-1} \Phi_\alpha \right]_{u_z = (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - q_x u_x)/q_z}. \quad (\text{A.10})$$

a integral em u_x será da seguinte forma

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\kappa_\alpha + 1}{\kappa_\alpha - 1} \frac{1}{|q_z|} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left[\left(1 + \frac{u^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2} \right)^{-1} \Phi_\alpha \right]_{u_z = (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - q_x u_x)/q_z} \\ &= \frac{\kappa_\alpha + 1}{\kappa_\alpha - 1} \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left[\left(1 + \frac{u^2}{\kappa_\alpha u_{\beta,\kappa}^2} \right)^{-(\kappa_\alpha+2)} \right]_{u_z = a u_x + b}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

onde utilizamos as seguintes definições

$$a = -\frac{q_x}{q_z}, \quad b = \frac{\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta}{q_z}.$$

Substituindo o valor de u_z , procedendo da mesma forma feita anteriormente, chegamos a

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\kappa_\alpha + 1}{\kappa_\alpha - 1} \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} \left(1 + \frac{b^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1 + a^2)} \right)^{-(\kappa_\alpha+2)} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left(1 + \frac{(1 + a^2)^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1 + a^2) + b^2} \left(u_x + \frac{ab}{1 + a^2} \right)^2 \right)^{-(\kappa_\alpha+2)}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Seja,

$$v = u_x + \frac{ab}{1 + a^2}, \quad dv = du_x,$$

então,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\kappa_\alpha + 1}{\kappa_\alpha - 1} \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} \left(1 + \frac{b^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1 + a^2)} \right)^{-(\kappa_\alpha+2)} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{(1 + a^2)^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1 + a^2) + b^2} v^2 \right)^{-(\kappa_\alpha+2)} dv. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Realizando uma nova mudança de variáveis,

$$t = \frac{(1 + a^2)^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1 + a^2) + b^2} v^2,$$

com

$$dt = 2 \frac{(1 + a^2)^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1 + a^2) + b^2} v dv$$

e

$$dt = \frac{2(1 + a^2)}{(\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1 + a^2) + b^2)^{1/2}} t^{1/2} dv,$$

temos,

$$I_2 = \frac{\kappa_\alpha + 1}{\kappa_\alpha - 1} \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1 + a^2)}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1 + a^2) + b^2} \right)^{\kappa_\alpha + 3/2} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2}{1 + a^2} \right)^{1/2} \int_0^\infty dt \frac{t^{-1/2}}{(1 + t)^{\kappa_\alpha + 2}} \quad (\text{A.14})$$

Utilizando novamente a relação (5.20), mas agora para valores de z , $w + z$ e w dados respectivamente por $z = 1/2$, $w + z = w + 1/2 = \kappa_\alpha + 2$ e $w = \kappa_\alpha + 3/2$, temos

$$I_2 = \frac{\kappa_\alpha + 1}{\kappa_\alpha - 1} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} \frac{\sqrt{\pi}}{|q_z|} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1 + a^2)}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1 + a^2) + b^2} \right)^{\kappa_\alpha + 3/2} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2}{1 + a^2} \right)^{1/2} \frac{\Gamma(\kappa_\alpha + 3/2)}{\Gamma(\kappa_\alpha + 2)}. \quad (\text{A.15})$$

Utilizando as definições de a e b , obtemos por fim

$$I_2 = \frac{\kappa_\alpha + 1}{\kappa_\alpha - 1} \frac{1}{u_{\alpha,\kappa}^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 q^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 q^2 + (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta)^2} \right)^{\kappa_\alpha + 3/2} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2}{q^2} \right)^{1/2} \frac{\Gamma(\kappa_\alpha + 3/2)}{\Gamma(\kappa_\alpha + 2)}. \quad (\text{A.16})$$

O quociente I_1/I_2 de (5.42), pode ser então calculado,

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{I_2} &= \frac{1}{u_{\alpha,\kappa}^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 q^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 q^2 + (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta)^2} \right)^{\kappa_\alpha + 1/2} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2}{q^2} \right)^{1/2} \frac{\Gamma(\kappa_\alpha + 1/2)}{\Gamma(\kappa_\alpha + 1)} \\ &\times \frac{\kappa_\alpha - 1}{\kappa_\alpha + 1} u_{\alpha,\kappa}^2 \sqrt{\pi} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 q^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 q^2 + (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta)^2} \right)^{-\kappa_\alpha - 3/2} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2}{q^2} \right)^{-1/2} \frac{\Gamma(\kappa_\alpha + 2)}{\Gamma(\kappa_\alpha + 3/2)}. \end{aligned}$$

Fazendo algumas simplificações, chegamos à seguinte expressão para I_1/I_2

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 q^2 + (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta)^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 q^2} \right) \frac{\kappa_\alpha - 1}{\kappa_\alpha + 1/2}. \quad (\text{A.17})$$

Assim encontramos uma divergência na região de $q \rightarrow 0$ e para sanar este problema, foi imposto um limite superior para a variável velocidade no cálculo das integrais, de forma que $u_f^2 = u_x^2 + u_z^2$. O cálculo dessas integrais está detalhado no apêndice seguinte.

Apêndice B

Cálculo das expressões I_1 e I_2 com limite superior na velocidade

Da expressão (5.43), temos

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \Phi_\alpha \delta \left[\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - q_x u_x - q_z u_z \right] \Theta \left[u_f^2 - u_x^2 - u_z^2 \right],$$

onde o índice α se refere ao tipo de partícula e β , ao de onda. É adotado limite superior na variável de velocidade de tal forma que $u_f = c/v_e$, onde c é a velocidade da luz. Realizando primeiro a integração na variável u_z e fazendo a seguinte mudança de variáveis,

$$a = -\frac{q_x}{q_z}, \quad b = \frac{\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta}{q_z},$$

temos

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{|q_z|} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left[\Phi_\alpha \right]_{u_z = (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - q_x u_x) / q_z} \Theta \left[u_f^2 - u_x^2 - (a u_x + b)^2 \right], \\ &= \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha, \kappa}^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left[\left(1 + \frac{u^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha, \kappa}^2} \right)^{-(\kappa_\alpha + 1)} \right]_{u_z = a u_x + b} \Theta \left[u_f^2 - u_x^2 (1 + a^2) - 2 a b u_x - b^2 \right]. \end{aligned}$$

Utilizando o valor de $u_z = a u_x + b$ em u^2 e, rearranjando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left(1 + \frac{(1+a^2)u_x^2 + 2abu_x + b^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2} \right)^{-(\kappa_\alpha+1)} \\
 &\quad \times \Theta \left[u_f^2 - u_x^2(1+a^2) - 2abu_x - b^2 \right], \\
 &= \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} \left(1 + \frac{b^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2(1+a^2)} \right)^{-(\kappa_\alpha+1)} \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left(1 + \frac{(1+a^2)^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2(1+a^2) + b^2} \left(u_x + \frac{ab}{1+a^2} \right)^2 \right)^{-(\kappa_\alpha+1)} \\
 &\quad \times \Theta \left[\frac{u_f^2}{1+a^2} - \frac{b^2}{(1+a^2)^2} - \left(u_x + \frac{ab}{1+a^2} \right)^2 \right].
 \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variáveis,

$$v = u_x + \frac{ab}{1+a^2}, \quad dv = du_x,$$

temos,

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} \left(1 + \frac{b^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2(1+a^2)} \right)^{-(\kappa_\alpha+1)} \int_{-\infty}^{\infty} dv \left(1 + \frac{(1+a^2)^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2(1+a^2) + b^2} v^2 \right)^{-(\kappa_\alpha+1)} \\
 &\quad \times \Theta \left[\frac{u_f^2}{1+a^2} - \frac{b^2}{(1+a^2)^2} - v^2 \right].
 \end{aligned}$$

Agora, fazendo uso da simetria em torno da variável v , assumindo o limite superior na velocidade $v = c/v_e$ e mais uma mudança de variáveis,

$$t = \frac{(1+a^2)^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2(1+a^2) + b^2} v^2, \quad dt = 2 \frac{(1+a^2)^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2(1+a^2) + b^2} v dv, \quad (\text{B.1})$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} 2 \left(1 + \frac{b^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2(1+a^2)} \right)^{-(\kappa_\alpha+1)} \int_0^{\infty} dv \left(1 + \frac{(1+a^2)^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2(1+a^2) + b^2} v^2 \right)^{-(\kappa_\alpha+1)} \\
 &\quad \Theta \left[\frac{u_f^2}{1+a^2} - \frac{b^2}{(1+a^2)^2} - v^2 \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} 2 \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1+a^2) + b^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1+a^2)} \right)^{-(\kappa_\alpha+1)} \frac{(\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1+a^2) + b^2)^{1/2}}{2(1+a^2)} \\
 &\quad \times \int_0^{t_{m\alpha}} dt \frac{t^{-1/2}}{(1+t)^{\kappa_\alpha+1}}, \\
 &= \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1+a^2)}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1+a^2) + b^2} \right)^{\kappa_\alpha+1/2} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2}{1+a^2} \right)^{1/2} \\
 &\quad \times \int_0^{t_{m\alpha}} dt \frac{t^{-1/2}}{(1+t)^{\kappa_\alpha+1}},
 \end{aligned}$$

onde $t_{m\alpha}$ é dado por

$$t_{m\alpha} = \frac{(1+a^2)}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1+a^2) + b^2} \left(u_f^2 - \frac{b^2}{(1+a^2)} \right)$$

A solução só tem validade para $t_{m\alpha} > 0$, o que significa $u_f^2 > b^2/(1+a^2)$. Usando o programa de integração numérica *Mathematica*, chegamos a uma expressão em termos das funções hipergeométricas de Gauss,

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \Phi_\alpha \delta [\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - q_x u_x - q_z u_z] \\
 &= \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} \frac{2}{|q_z|} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1+a^2)}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1+a^2) + b^2} \right)^{\kappa_\alpha+1} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \left(u_f^2 - \frac{b^2}{1+a^2} \right)^{1/2} {}_2F_1(1/2, \kappa_\alpha + 1; 3/2; -t_{m\alpha}).
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

Por fim, usando as definições de a e b , temos uma expressão para I_1 :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \Phi_\alpha \delta [\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - q_x u_x - q_z u_z] \\
 &= \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} \frac{2}{q} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 q^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 q^2 + (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta)^2} \right)^{\kappa_\alpha+1} \left(u_f^2 - \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta)^2}{q^2} \right)^{1/2} {}_2F_1(1/2, \kappa_\alpha + 1; 3/2; -t_{m\alpha}).
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

Podemos calcular I_2 de maneira similar. De (5.44) e admitindo novamente um limite superior na velocidade,

$$I_2 = \frac{\kappa_\alpha + 1}{\kappa_\alpha - 1} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \Phi_\alpha \left(1 + \frac{u^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2} \right)^{-1} \delta [\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - q_x u_x - q_z u_z] \Theta [u_f^2 - u_x^2 - u_z^2],$$

onde α se refere ao tipo de partícula e β , ao tipo de onda. Realizando a integração em u_z e a mesma mudança de variáveis $a = -q_x/q_z$ e $b = \sigma z_{\mathbf{q}}^\beta/q_z$,

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{\kappa_\alpha + 1}{\kappa_\alpha - 1} \frac{1}{|q_z|} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left[\left(1 + \frac{u^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2} \right)^{-1} \Phi_\alpha \right]_{u_z = (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - q_x u_x)/q_z} \Theta [u_f^2 - u_x^2 (1+a^2) - 2abu_x - b^2], \\
 &= \frac{\kappa_\alpha + 1}{\kappa_\alpha - 1} \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left[\left(1 + \frac{u^2}{\kappa_\alpha u_{\beta,\kappa}^2} \right)^{-(\kappa_\alpha+2)} \right]_{u_z = au_x + b} \Theta [u_f^2 - u_x^2 (1+a^2) - 2abu_x - b^2].
 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de u_z e rearranjando os termos,

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{\kappa_\alpha + 1}{\kappa_\alpha - 1} \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left(1 + \frac{(1+a^2)u_x^2 + 2abu_x + b^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2} \right)^{-(\kappa_\alpha+2)} \\
 &\quad \times \Theta \left[u_f^2 - u_x^2(1+a^2) - 2abu_x - b^2 \right] \\
 &= \frac{\kappa_\alpha + 1}{\kappa_\alpha - 1} \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left(1 + \frac{b^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2(1+a^2)} + \frac{(1+a^2)}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2} \left(u_x + \frac{ab}{1+a^2} \right)^2 \right)^{-(\kappa_\alpha+2)} \\
 &\quad \times \Theta \left[\frac{u_f^2}{1+a^2} - \frac{b^2}{(1+a^2)^2} - \left(u_x + \frac{ab}{1+a^2} \right)^2 \right], \\
 &= \frac{\kappa_\alpha + 1}{\kappa_\alpha - 1} \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} \left(1 + \frac{b^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2(1+a^2)} \right)^{-(\kappa_\alpha+2)} \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left(1 + \frac{(1+a^2)^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2(1+a^2) + b^2} \left(u_x + \frac{ab}{1+a^2} \right)^2 \right)^{-(\kappa_\alpha+2)} \\
 &\quad \times \Theta \left[\frac{u_f^2}{1+a^2} - \frac{b^2}{(1+a^2)^2} - \left(u_x + \frac{ab}{1+a^2} \right)^2 \right].
 \end{aligned}$$

Seja

$$v = u_x + \frac{ab}{1+a^2}, \quad dv = du_x,$$

temos,

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{\kappa_\alpha + 1}{\kappa_\alpha - 1} \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} \left(1 + \frac{b^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2(1+a^2)} \right)^{-(\kappa_\alpha+2)} \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dv \left(1 + \frac{(1+a^2)^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2(1+a^2) + b^2} v^2 \right)^{-(\kappa_\alpha+2)} \Theta \left[\frac{u_f^2}{1+a^2} - \frac{b^2}{(1+a^2)^2} - v^2 \right], \\
 &= 2 \frac{\kappa_\alpha + 1}{\kappa_\alpha - 1} \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} \left(1 + \frac{b^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2(1+a^2)} \right)^{-(\kappa_\alpha+2)} \\
 &\quad \times \int_0^{\infty} dv \left(1 + \frac{(1+a^2)^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2(1+a^2) + b^2} v^2 \right)^{-(\kappa_\alpha+2)} \Theta \left[\frac{u_f^2}{1+a^2} - \frac{b^2}{(1+a^2)^2} - v^2 \right].
 \end{aligned}$$

Definindo t da mesma forma que em (B.1),

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{\kappa_\alpha + 1}{\kappa_\alpha - 1} \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} 2 \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1 + a^2) + b^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1 + a^2)} \right)^{-(\kappa_\alpha + 2)} \frac{\left(\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1 + a^2) + b^2 \right)^{1/2}}{2(1 + a^2)} \\
 &\quad \times \int_0^{t_{m\alpha}} dt \frac{t^{-1/2}}{(1 + t)^{\kappa_\alpha + 2}}, \\
 &= \frac{\kappa_\alpha + 1}{\kappa_\alpha - 1} \frac{1}{|q_z|} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1 + a^2)}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1 + a^2) + b^2} \right)^{(\kappa_\alpha + 3/2)} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2}{1 + a^2} \right)^{1/2} \\
 &\quad \times \int_0^{t_{m\alpha}} dt \frac{t^{-1/2}}{(1 + t)^{\kappa_\alpha + 2}}.
 \end{aligned}$$

Usando o programa de integração numérica *Mathematica* e fazendo as simplificações necessárias, temos

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{\kappa_\alpha + 1}{\kappa_\alpha - 1} \frac{1}{\pi u_{\alpha,\kappa}^2} \frac{2}{q} \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1 + a^2)}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 (1 + a^2) + b^2} \right)^{(\kappa_\alpha + 2)} \left(u_f^2 - \frac{b^2}{1 + a^2} \right)^{1/2} \\
 &\quad \times {}_2F_1(1/2, \kappa_\alpha + 2; 3/2; -t_{m\alpha}).
 \end{aligned}$$

A razão entre I_1 e I_2 é, então, dada por

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 q^2 + (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta)^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 q^2} \right) \frac{\kappa_\alpha - 1}{} \frac{{}_2F_1(1/2, \kappa_\alpha + 1; 3/2; -t_{m\alpha})}{{}_2F_1(1/2, \kappa_\alpha + 2; 3/2; -t_{m\alpha})}. \quad (\text{B.4})$$

E, no caso limite superior $u_f \rightarrow \infty$, então $t_{m\alpha} \rightarrow \infty$. Considerando esse limite, as funções hipergeométricas assumem a seguinte forma

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{t_{m\alpha}} {}_2F_1(1/2, \kappa_\alpha + 1; 3/2; -t_{m\alpha}) &\rightarrow \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\kappa_\alpha + 1/2)}{\Gamma(\kappa_\alpha + 1)} - t_{m\alpha}^{-\kappa_\alpha} \frac{1}{\kappa_\alpha + 1/2} \frac{1}{t_{m\alpha}^{1/2}}, \\
 2\sqrt{t_{m\alpha}} {}_2F_1(1/2, \kappa_\alpha + 2; 3/2; -t_{m\alpha}) &\rightarrow \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\kappa_\alpha + 3/2)}{\Gamma(\kappa_\alpha + 2)} - t_{m\alpha}^{-\kappa_\alpha} \frac{1}{\kappa_\alpha + 3/2} \frac{1}{t_{m\alpha}^{3/2}},
 \end{aligned}$$

então,

$$\frac{{}_2F_1(1/2, \kappa_\alpha + 1; 3/2; -t_{m\alpha})}{{}_2F_1(1/2, \kappa_\alpha + 2; 3/2; -t_{m\alpha})} \rightarrow \frac{\Gamma(\kappa_\alpha + 1/2)}{\Gamma(\kappa_\alpha + 1)} \frac{\Gamma(\kappa_\alpha + 2)}{\Gamma(\kappa_\alpha + 3/2)} = \frac{\kappa_\alpha + 1}{\kappa_\alpha + 1/2},$$

e o quociente I_1/I_2 é

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 q^2 + (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta)^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 q^2} \right) \frac{\kappa_\alpha - 1}{\kappa_\alpha + 1/2}, \quad (\text{B.5})$$

expressão que corresponde à Eq. (A.17), obtida no Apêndice A.

Por outro lado, no limite inferior, o valor mínimo de q que pode ser considerado é tal que $(\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta/q)^2 = u_f^2$, pois para valores menores obteríamos $t_{m\alpha} < 0$. Considerando o limite inferior para \mathbf{q} , $t_{m\alpha} \rightarrow 0$, para as funções hipergeométricas,

$$2\sqrt{t_{m\alpha}} {}_2F_1(1/2, \kappa_\alpha + 1; 3/2; -t_{m\alpha}) \rightarrow 2\sqrt{t_{m\alpha}} - \frac{2}{3}(\kappa_\alpha + 1)t_{m\alpha}^{3/2} + \dots,$$

$$2\sqrt{t_{m\alpha}} {}_2F_1(1/2, \kappa_\alpha + 2; 3/2; -t_{m\alpha}) \rightarrow 2\sqrt{t_{m\alpha}} - \frac{2}{3}(\kappa_\alpha + 2)t_{m\alpha}^{3/2} + \dots$$

Assim, para $t_{m\alpha} \rightarrow 0$

$$\frac{{}_2F_1(1/2, \kappa_\alpha + 1; 3/2; -t_{m\alpha})}{{}_2F_1(1/2, \kappa_\alpha + 2; 3/2; -t_{m\alpha})} \rightarrow 1,$$

e também,

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 q^2 + (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta)^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 q^2} \right) \frac{\kappa_\alpha - 1}{\kappa_\alpha + 1} = \left(\frac{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2 + u_f^2}{\kappa_\alpha u_{\alpha,\kappa}^2} \right) \frac{\kappa_\alpha - 1}{\kappa_\alpha + 1}. \quad (\text{B.6})$$

Referências Bibliográficas

- [1] S. Abe, “General pseudoadditivity of composable entropy prescribed by the existence of equilibrium,” *Phys. Rev.*, vol. E, p. 061105, Nov 2001.
- [2] A. I. Akhiezer, I. A. Akhiezer, R. V. Polovin, A. G. Sitenko, and K. N. Stepanov, *Plasma Electrodynamics, vol. 1, Linear Theory*. New York: Pergamon, 1975.
- [3] A. I. Akhiezer, I. A. Akhiezer, R. V. Polovin, A. G. Sitenko, and K. N. Stepanov, *Plasma Electrodynamics, vol. 2, Non-Linear Theory and Fluctuations*. New York: Pergamon, 1975.
- [4] P. M. Bellan, *Fundamentals of Plasma Physics*. São José dos Campos: Cambridge, 2006.
- [5] J. A. Bittencourt, *Fundamentals of Plasma Physics*. São José dos Campos: INPE-FAPESP, 3rd. ed., 2003.
- [6] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. Vol. 1: Plasma Physics, 2nd. ed.* New York: Plenum, 2nd. ed., 1984.
- [7] R. C. Davidson, *Methods in Nonlinear Plasma Theory*. New York: Academic Press, 1972.
- [8] J. C. Dorelli and J. D. Scudder, “Electron heat flow carried by kappa distributions in the solar corona,” *Geophysical Research Letters*, vol. 23, Dezember 1999.
- [9] G. A. Dulk, L. J. Steinberg, and S. Hoang, “Type iii bursts in interplanetary space - fundamental or harmonic?,” *Astronomy and Astrophysics*, vol. 141, pp. 30–38, December 1984.
- [10] B. D. Fried and S. D. Conte, *The Plasma Dispersion Function*. New York: Academic Press, 1961.
- [11] U. Ganse, P. Killian, F. Spanier, and R. Vainio, “Nonlinear wave interactions as emission process of type ii radio bursts,” *The Astrophysical Journal*, vol. 751, p. 6, July 2012.
- [12] U. Ganse, P. Killian, R. Vainio, and F. Spanier, “Emission of type ii radio bursts - single beam versus two-beam scenario,” *Solar Physics*, vol. 280, p. 11, October 2012.
- [13] V. L. Ginzburg and V. V. Zhelezniakov, “On the mechanisms of sporadic solar radio emission,” *Symposium - International Astronomical Union*, vol. 9, pp. 574–582, January 1959.
- [14] A. Hasegawa, K. Mima, , and M. Duong-van, “Plasma distribution function in a superthermal radiation field,” *Physical Review Letters*, vol. 277, pp. 81–95, June 1985.
- [15] W. J. Heikkila, *Earth’S Magnetosphere: Formed by the Low-Latitude Boundary Layer*. Elsevier Science & Technology, 2011.

- [16] D. M. Karfidov, A. M. Rubenchik, K. F. Sergeichev, and I. A. Sychev, “Strong Langmuir turbulence excited in a plasma by an electron beam,” *Zhurnal Eksperimental’noi i Teoreticheskoi Fiziki*, vol. 98, pp. 1592–1604, Nov 1990. In Russian. *Physics of Plasmas*, 12:042306, 2005.
- [17] Y. Kasaba, H. Matsumoto, and Y. Omura, “One- and two-dimensional simulations of electron beam instability: Generation of electrostatic and electromagnetic 2f p waves,” *Journal of Geophysical Research*, vol. 106, pp. 18693–18711, September 2001.
- [18] N. A. Krall and A. W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics*. New York: McGraw-Hill, 1973.
- [19] L. D. Landau, “On the vibration of the electronic plasma,” *J. Phys. U.S.S.R.*, vol. 10, no. 1, pp. 10–25, 1946.
- [20] S. Landi and F. G. E. Pantellini, “On the temperature profile and heat flux in the solar corona: Kinetic simulations,” *Astronomy and Astrophysics*, vol. 372, pp. 686 – 701, June 2001.
- [21] J. Lemaire and V. Pierrard, “Kinetic models of solar and polar winds,” *Astrophysics and Space Science*, vol. 227, p. 169–180, June 2001.
- [22] M. P. Leubner, “A nonextensive entropy approach to kappa-distributions,” *Astrophysics and Space Science*, vol. 282, p. 573–579, November 2002.
- [23] M. P. Leubner, “Fundamental issues on kappa-distributions in space plasmas and interplanetary proton distributions,” *AIP*, vol. 11, April 2004.
- [24] M. P. Leubner and Z. Voros, “A nonextensive entropy approach to solar wind intermittency,” *The Astrophysical Journal*, vol. 618, pp. 547–555, January 2005.
- [25] M. P. Leubner, “Consequences of entropy bifurcation in non-maxwellian astrophysical environments,” *Nonlinear Processes in Geophysics*, vol. 15, pp. 531–540, July 2008.
- [26] G. Livadiotis and D. J. McComas, “Beyond kappa distributions: Exploiting tsallis statistical mechanics in space plasmas,” *Journal of Geophysical Research*, vol. 114, p. 469–478, November 2009.
- [27] G. Livadiotis and D. J. McComas, “Invariant kappa distribution in space plasmas out of equilibrium,” *The Astrophysical Journal*, vol. 741, p. 28, November 2011.
- [28] G. Livadiotis, “Lagrangian temperature: derivation and physical meaning for systems described by kappa distributions,” *MDPI - Entropy*, vol. 16, p. 4290–4308, November 2014.
- [29] G. Livadiotis, “Kappa distribution in the presence of a potential energy,” *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, vol. 120, pp. 880–903, Feb 2015.
- [30] G. Livadiotis, “Introduction to special section on origins and properties of kappa distributions: statistical background and properties of kappa distributions in space plasmas,” *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, vol. 120, pp. 1607–1619, Jan 2015.
- [31] D. Lynden-Bell, “The stability and vibrations of a gas of stars,” *Mon. Not. R. astr. Soc.*, vol. Soc. 124, no. 4, pp. 279–296, 1962.

- [32] C. Yu Ma and D. Summers, "Formation of power-law energy spectra in space plasmas by stochastic acceleration due to whistler-mode waves," *Geophysical Research Letters*, vol. 26, p. 1121–1124, November 1998.
- [33] M. Maksimovic, V. Pierrard, and J. F. Lemaire, "A kinetic model of the solar wind with kappa distribution functions in the corona," *Astronomy and Astrophysics*, vol. 324, p. 725–734, December 1997.
- [34] D. B. Melrose, *Instabilities in Space and Laboratory Plasmas*. New York: Cambridge, 1986.
- [35] A. Olsson and P. Janhunen, "Field-aligned conductance values estimated from Maxwellian and kappa distributions in quiet and disturbed events using Freja electron data," *Ann. Geophysicae*, vol. 16, pp. 298–302, 1998.
- [36] V. Pierrard, "New model of magnetospheric current-voltage relationship," *JGR*, vol. 101, p. 2669, February 1996.
- [37] V. Pierrard, G. V. Khazanov, and J. Lemaire, "Recent advances in the polar wind theories and observations," *J. Atmosph. Sol. Terr. Phys.*, vol. 69, pp. 2048–2057, February 1996.
- [38] V. Pierrard, M. Maksimovic, and J. Lemaire, "Self-consistent model of solar wind electrons," *Journal of Geophysical Research Atmospheres*, vol. 106, pp. 29305–29312, December 2001.
- [39] V. Pierrard and H. Lamy, "The effects of the velocity filtration mechanism on the minor ions of the corona," *Solar Physics*, vol. 216, p. 47–58, September 2003.
- [40] V. Pierrard and M. Lazar, "Kappa distributions: theory and applications in space plasmas," *Solar Physics*, vol. 267, p. 153–174, November 2010.
- [41] L. T. Petruzzellis, "Evolução não linear de ondas eletrostáticas e eletromagnéticas no contexto da teoria de turbulência fraca em plasmas," Master's thesis, UFRGS, 2014.
- [42] L. T. Petruzzellis, L. F. Ziebell, R. Gaelzer, J. Pavan, and P. H. Yoon, "Weak turbulence analysis of the plasma emission by counter-streaming electron beams," in *XIII Encontro Brasileiro de Física de Plasmas*, (Natal, RN, Brasil), SBF, SBF, 03 setembro - 07 setembro 2016. Poster presentation.
- [43] M. N. S. Qureshi, G. Pallochia, R. Bruno, M. B. Cattaneo, V. F. H. Reme, J. M. Bosqued, I. D. J. A. Sauvaud, L. M. Kistler, E. Möbius, B. K. C. W. Carlson, J. P. McFadden, G. K. Parks, M. McCarthy, A. Korth, R. Lundin, and A. Balogh, "Solar wind particle distribution function fitted via the generalized kappa distribution function: Cluster observations," *AIP Conference Proceedings*, vol. 679, p. 489, September 2003.
- [44] K. Rha, C. Ryu, and P. H. Yoon, "Asymmetric electron distributions in the solar wind," *The Astrophysical Journal*, vol. 755, p. 6, September 2013.
- [45] T. Rhee, C. Ryu, M. Woo, H. Kaang, S. Yi, and P. H. Yoon, "Multiple harmonic plasma emission," *The Astrophysical Journal*, vol. 694, pp. 618–625, March 2009.
- [46] P. A. Robinson and I. Cairns, "Fundamental and harmonic emission in type III solar radio bursts - II. dominant modes and dynamic spectra," *Solar Physics*, vol. 181, pp. 395–428, August 1998.

- [47] D. A. Roberts and J. A. Miller, “Generation of nonthermal electron distributions by turbulent waves near the sun,” *Geophysical Research Letters*, vol. 25, March 1998.
- [48] J. D. Scudder, “On the causes of temperature change in inhomogeneous low-density astrophysical plasmas,” *Astrophysical Journal*, vol. 398, pp. 299–318, October 1992.
- [49] J. D. Scudder, “Why all stars should possess circumstellar temperature inversions,” *Astrophysical Journal*, vol. 398, pp. 319–349, April 1992.
- [50] J. D. Scudder, “Ion and electron suprathermal tail strengths in the transition region: Support for the velocity filtration model of the corona,” *Astrophysical Journal*, vol. 427, pp. 446–452, May 1994.
- [51] D. Summers and R. M. Thorne, “The modified plasma dispersion function,” *AIP*, vol. 3, April 1991.
- [52] S. Tama, T. Changa, and V. Pierrard, “Kinetic modeling of the polar wind,” *Astrophysics and Space Science*, vol. 69, p. 1984–2027, November 2007.
- [53] S. F. Tigik, L. T. Petruzzellis and R. Gaelzer, “Weakly turbulent processes in the presence of inverse power-law velocity tail population,” *AIP*, vol. 24, p. 112902(13p), Nov 2017.
- [54] R. A. Treumann, “Kinetic theoretical foundation of lorentzian statistical mechanics,” *IOP Science*, vol. 59, no. 1, 1999.
- [55] R. A. Treumann, “Generalized-lorentzian thermodynamics,” *IOP Science*, vol. 59, no. 3, 1999.
- [56] R. A. Treumann, “Stationary plasma states far from equilibrium,” *AIP*, vol. 11, March 2004.
- [57] R. A. Treumann and C. H. Jaroschek, “Gibbsian theory of power-law distributions,” *Physical Review Letters*, vol. 100, April 2008.
- [58] V. N. Tsytovich, *Nonlinear Effects in a Plasma*. New York: Plenum, 1970.
- [59] V. N. Tsytovich, *An Introduction to the Theory of Plasma Turbulence*. New York: Pergamon, 1977.
- [60] T. Umeda, “Electromagnetic plasma emission during beam-plasma interaction: Parametric decay versus induced scattering,” *JGR*, vol. 115, January 2010.
- [61] A. A. Vedenov, E. P. Velikhov, and R. Z. Sagdeev, “Nonlinear oscillations of rarified plasma,” *Nuclear Fusion*, vol. 1, no. 2, pp. 82–100, 1961.
- [62] A. A. Vedenov, “Quasi-linear theory of a plasma (theory of a weakly turbulent plasma),” *Translated from Atomnaya Energiya*, vol. 13, pp. 5–24, July 1962. Original article submitted Jan. 26, 1962.
- [63] P. H. Yoon, “Generalized weak turbulence theory,” *Phys. Plasmas*, vol. 7, pp. 4858–4871, Dec. 2000.
- [64] P. H. Yoon, “Effects of spontaneous fluctuations on the generalized weak turbulence theory,” *Physics Of Plasmas*, vol. 12, p. 042306, 2005.
- [65] P. H. Yoon, “Statistical theory of electromagnetic weak turbulence,” *Physics of Plasmas*, vol. 13, pp. 022302, 15p., 2006.

- [66] P. H. Yoon, “Asymptotic equilibrium between langmuir turbulence and suprathermal electrons,” *AIP*, vol. 18, December 2011.
- [67] P. H. Yoon, “Asymptotic equilibrium between langmuir turbulence and suprathermal electrons in three dimensions,” *AIP*, vol. 19, January 2012.
- [68] P. H. Yoon, “Electron kappa distribution and steady-state langmuir turbulence,” *AIP*, vol. 19, May 2012.
- [69] P. H. Yoon, J. Hong, S. Kim, J. L. J. Lee, J. Park, K. Park, and J. Seough, “Asymmetric solar wind electron distributions,” *The Astrophysical Journal*, vol. 755, p. 6, August 2012.
- [70] P. H. Yoon, L. F. Ziebell, R. Gaelzer, and J. Pavan, “Electromagnetic weak turbulence theory revisited,” *Phys. Plasmas*, vol. 19, pp. 102303, 9pp, Oct. 2012.
- [71] P. H. Yoon, L. F. Ziebell, R. Gaelzer, R. P. Lin, and L. Wang, “Langmuir turbulence and suprathermal electrons,” *Space Science Reviews*, vol. 173, pp. 459–489, Nov. 2012.
- [72] L. F. Ziebell, R. Gaelzer, and P. H. Yoon, “Nonlinear development of weak beam-plasma instability,” *Phys. Plasmas*, vol. 8, pp. 3982–3995, Sept. 2001.
- [73] L. F. Ziebell, R. Gaelzer, J. Pavan, and P. H. Yoon, “Two-dimensional nonlinear dynamics of beam-plasma instability,” *Plasma Phys. Contr. Fusion*, vol. 50, pp. 085011, 15p., 2008.
- [74] L. F. Ziebell, R. Gaelzer, and P. H. Yoon, “Dynamics of Langmuir wave decay in two-dimensions,” *Phys. Plasmas*, vol. 15, pp. 032303, 11p., Mar. 2008.
- [75] L. F. Ziebell, P. H. Yoon, R. Gaelzer, and J. Pavan, “Transition from thermal to turbulent equilibrium with a resulting electromagnetic spectrum,” *Phys. Plasmas*, vol. 21, p. 012306, Jan 2014.
- [76] L. F. Ziebell, P. H. Yoon, F. J. R. S. Jr., R. Gaelzer, and J. Pavan, “Spontaneous emission of electromagnetic radiation in turbulent plasmas,” *Phys. Plasmas*, vol. 21, p. 010701, Jan 2014.
- [77] L. F. Ziebell, P. H. Yoon, L. T. Petruzzellis, R. Gaelzer, and J. Pavan, “Plasma emission by nonlinear electromagnetic processes,” *The Astrophysical Journal*, vol. 806, p. 22, June 2015.
- [78] L. F. Ziebell, L. T. Petruzzellis, P. H. Yoon, R. Gaelzer, and J. Pavan, “Plasma emission by counter-streaming electron beams,” *The Astrophysical Journal*, vol. 818, pp. 279–296, February 2016.