

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO**

PAULA ETIELE SARMENTO SCHUSTER

**UMA PROFESSORA EM CYBERFORMAÇÃO COM TECNOLOGIAS DIGITAIS
DE REALIDADE AUMENTADA:
como se dá a constituição do conhecimento matemático?**

Porto Alegre

2020

PAULA ETIELE SARMENTO SCHUSTER

**UMA PROFESSORA EM CYBERFORMAÇÃO COM TECNOLOGIAS DIGITAIS
DE REALIDADE AUMENTADA:
como se dá a constituição do conhecimento matemático?**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS.

Orientador: Prof. Dr. Maurício Rosa

Porto Alegre

2020

PAULA ETIELE SARMENTO SCHUSTER

**UMA PROFESSORA EM CYBERFORMAÇÃO COM TECNOLOGIAS DIGITAIS
DE REALIDADE AUMENTADA:
como se dá a constituição do conhecimento matemático?**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS.

BANCA EXAMINADORA

Prof^ª. Dr^ª. Gelsa Knijnik, UNISINOS

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba, UNESP

Prof. Dr. Rodrigo Dalla Vecchia, UFRGS

AGRADECIMENTOS

Ao meu querido orientador, Professor Maurício Rosa:
pelo apoio, dedicação, puxões de orelha e muitas horas dispensadas a mim durante essa escrita. Certamente, ao concluir esta etapa acadêmica me apresento numa versão mais madura e humana, que só se fez possível devido à caminhada ao teu lado.
Obrigada por sempre me incentivar a pensar!

À banca desta dissertação:
Professor Doutor Marcelo Borba, agradeço as conversas (sérias e descontraídas), conselhos e contribuições para que a dissertação acontecesse.
Professora Doutora Gelsa Knijnik, por mais uma vez estar presente em minha formação acadêmica, por me proporcionar o primeiro contato com a pesquisa, carinho e palavras sábias.
Professor Doutor Rodrigo Dalla Vecchia, pelo acompanhamento da minha jornada na UFRGS, contribuições e apoio desde que essa pesquisa era apenas um projeto.

Ao grupo de pesquisa:
vocês foram peças fundamentais nesta jornada. Obrigada pelas leituras, contribuições, companhia (em congressos, cafés, almoços, reuniões), generosidade e “trocas” de angústias.

Aos meus amigos e familiares:
por fazerem parte desta caminhada desde o começo, pelo apoio, incentivo, confiança, pelas conversas, risadas, por acreditarem em mim quando nem eu mais acreditava e, principalmente, pela amizade sincera.

RESUMO

A presente pesquisa investiga como uma professora constitui conhecimento matemático quando está em Cyberformação com Tecnologias Digitais de Realidade Aumentada. Em termos de pesquisa qualitativa, o foco do estudo é o processo formativo vivenciado pela professora/pesquisadora, que é sujeito de seu próprio estudo. Dessa forma, a produção de dados foi registrada por meio de gravações de áudio e vídeo, em diferentes momentos: estudos individuais da professora/pesquisadora com TD, no planejamento em dupla da atividade matemática desenvolvida durante o curso de extensão e, nas reuniões com o seu professor orientador. Essa produção de dados foi analisada visando responder à pergunta diretriz “*Como se dá a constituição do conhecimento matemático de uma professora em Cyberformação com TD de RA?*”. Nesse sentido, entendemos que essa constituição se dá: “Com-Holográficos”, “Por meio da Oralidade-com-TD de RA” e, “Com-o-Cybercorpo: em termos de corpo-próprio-com-TD de RA”. A primeira categoria refere-se aos excertos em que evidenciamos o ato de ser-com-TD de RA, nos quais a professora/pesquisadora ao estar no contexto criado pela RA, se pluga com essa tecnologia pela materialidade que a expressa, possibilitando assim uma mudança de perspectiva e alteração da performance da professora/pesquisadora. Na segunda categoria, destacamos os diferentes sentidos que a expressão oral assume no contexto de RA, e suas implicações na forma de participação nesse contexto, evidenciando o ato de pensar-com-TD de RA. A última categoria refere-se aos atos de saber-fazer-com-TD de RA, os quais são evidenciados, para nós, por meio do movimento corpóreo da professora/pesquisadora, identificando o ato de agir com intencionalidade, onde ela se percebe fazendo e reflete sobre isso. Nossa pesquisa sugere que a constituição do conhecimento matemático de uma professora em Cyberformação com TD de RA, se dá por meio dessas três interações com o contexto de forma indissociável e embora tenham sido evidenciadas por nós em momentos diferentes, não deixam de acontecer conjuntamente, como fluxos que se perpassam.

Palavras-chave: Educação Matemática; Formação de Professores; Geogebra AR; Aprendizagem Situada.

ABSTRACT

The present research investigates how a teacher constitutes mathematical knowledge in Cybereducation with Digital Technologies (DT) of Augmented Reality (AR). In terms of qualitative research, the focus of the study is on the formative process experienced by the teacher/researcher, who becomes the subject of her own study. This data production was analysed in order to answer the guiding question *“How it occurs the constitution of the mathematical knowledge of a teacher in Cybereducation with DT of AR?”*. In this way, we understand this constitution occurs: “With-Holographic”, “Through Orality-with-DT of AR” and “With-the-Cyberbody: in terms of own-body-with- DT of AR”. The first category refers to the excerpts in which we highlight the act of being-with-DT of AR, where the teacher/researcher, being in the context created by the AR, is plugged into this technology by the materiality that expresses it, thus enabling a change perspective and change in the performance of the teacher/researcher. In the second category, we highlight the different meanings that oral expression takes in the context of AR, and its implications in the form of participation in that context, highlighting the act of thinking-with-DT of AR. The last category refers to the acts of know-how-to-do-with-DT of AR, which are evidenced, for us, through the body movement of the teacher/researcher, identifying the act of carrying out with intentionality, where she perceives herself doing and reflecting on that. Our research suggests that the constitution of the mathematical knowledge of a teacher in Cybereducation with DT of AR, occurs through these three interactions with the context inseparably and although they were evidenced by us at different times, they still happen together, as flows that pass through themselves.

Keywords: Mathematics Education; Education of Teachers; Geogebra AR; Situated Learning

SUMÁRIO

| | |
|--|-----|
| 1 ÂNGULO INICIAL | 9 |
| 1.1 TRAJETÓRIA | 9 |
| 1.2 REVISÃO DE LITERATURA | 12 |
| 1.3 QUESTÕES E OBJETIVOS | 19 |
| 1.4 COMPOSIÇÃO DA DISSERTAÇÃO | 20 |
| 2. EXPONDO A BASE TEÓRICA | 22 |
| 2.1 REALIDADE AUMENTADA | 22 |
| 2.2 CONSTITUIÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO | 26 |
| 2.3 CYBERFORMAÇÃO | 30 |
| 2.3.1 Forma/ação com Professores | 31 |
| 2.3.2 Cyberformação com professores/professoras de matemática | 32 |
| 2.3.3 Cyberformação-com-TD de RA | 36 |
| 2.4 APRENDIZAGEM SITUADA | 42 |
| 3. LENTE METODOLÓGICA | 49 |
| 3.1 CURSO DE EXTENSÃO | 50 |
| 3.2 ATIVIDADE-MATEMÁTICA-COM-TD DE RA | 51 |
| 3.3 RECURSOS UTILIZADOS | 54 |
| 3.3.1 Blender | 54 |
| 3.3.2 Aplicativo AndAR - Android Augmented Reality | 55 |
| 3.3.3 GeoGebra Augmented Reality e 3D Calculator | 58 |
| 3.4 PRODUÇÃO DE DADOS | 59 |
| 4. FOCANDO NA DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE DADOS | 60 |
| 4.1 APRESENTAÇÃO DOS DADOS | 60 |
| 4.2 ANÁLISE DOS DADOS | 61 |
| 4.2.1 Com-Holográficos | 62 |
| 4.2.1.1 Ponto máximo de uma função de duas variáveis reais | 62 |
| 4.2.1.2 Ponto de sela de uma função de duas variáveis reais | 69 |
| 4.2.1.3 Curvas de nível | 74 |
| 4.2.2 Oralidade-com-TD-de-RA | 83 |
| 4.2.2.1 Encontrando a variável dependente | 83 |
| 4.2.2.2 Estudando o domínio de uma função | 88 |
| 4.2.2.3 Calculando o volume do troféu | 93 |
| 4.2.3 Cybercorpo em termos de corpo-próprio-com-TD de RA | 95 |
| 4.2.3.1 Planejando a construção do troféu | 96 |
| 4.2.3.2 Entrando no gráfico pelo seu domínio | 99 |
| 4.2.3.3 Alinhando o troféu | 103 |
| 5. COMPOSIÇÕES FINAIS | 107 |

1 ÂNGULO INICIAL

Ao darmos início à escrita desta pesquisa, intitulada *Uma professora em Cyberformação com Tecnologias Digitais de Realidade Aumentada: como se dá a constituição do conhecimento matemático?*, entendemos ser necessário realizar um aprofundamento teórico que embase as ações tomadas na investigação, assim como a organização entre essas ações, a visão de mundo e a visão de conhecimento. Antes disso, apresentamos como fundamento inicial para a pesquisa, a trajetória da pesquisadora como forma de justificativa pessoal para a investigação. Consideramos necessário, também, apresentar uma revisão de literatura que enquadre a pesquisa no âmbito da região de inquérito Educação Matemática e que embase as ações de investigação de modo a justificar de maneira científica a pesquisa, indicando o que acreditamos que ela pode contribuir para essa área, bem como a pergunta de pesquisa, os objetivos e a composição da dissertação.

1.1 TRAJETÓRIA

Durante a graduação em Licenciatura em Matemática, fui¹ Bolsista de Iniciação Científica, realizando algumas investigações com a perspectiva da Etnomatemática, por meio da qual estudei sobre as matemáticas que são produzidas e as semelhanças que estas apresentam com a matemática escolar. A partir desses estudos, os quais fomentam a investigação e o entendimento de matemáticas de grupos culturais e, também, do ingresso no Mestrado Acadêmico, se originaram questionamentos de: como se constitui o conhecimento matemático estando conectado às Tecnologias Digitais (TD)? Seriam os/as internautas um grupo cultural específico? Haveria uma matemática a ser produzida e estudada nessa perspectiva? Em especial com as Tecnologias de Realidade Aumentada (RA), as quais se tornaram “febre” entre as gerações de crianças, jovens e adolescentes na esfera mundial, por meio do jogo Pokémon GO (BBC Brasil, 2016) criado para smartphones no ano de 2016?

Diante desses questionamentos, passei a recordar-me como se dava o uso das tecnologias para a constituição do conhecimento durante a minha trajetória enquanto aluna no Ensino Médio e no Ensino Superior. No Ensino Médio, nas aulas de matemática e física, eu utilizava a calculadora científica. Nesse momento, o objetivo principal desse uso era

¹ Por se tratar da trajetória pessoal, neste momento utilizo a primeira pessoa do singular como tempo verbal.

agilizar os cálculos e encontrar rapidamente a resposta. Também, o uso de computadores, passou a ser um pré-requisito para uma possível melhor colocação no mercado de trabalho, por consequência, a escola passou a se preocupar com a formação dos/das alunos/alunas² nesse sentido, principalmente, por se tratar de uma escola técnica. Então, passei a ter aulas da disciplina de informática, na qual aprendi o básico do manuseio de softwares computacionais. A escola tinha alguns projetores e um laboratório de informática. O laboratório era utilizado somente na disciplina de informática, não ficava à disposição para os/as demais professores/professoras, diferentemente dos projetores. Mesmo tendo à disposição os projetores, poucos/poucas professores/professoras faziam uso, e quando o faziam era para substituir a escrita no quadro negro. Recordo que a professora de física criava algumas apresentações em *power point*, nas quais escrevia os textos que deveriam ser copiados pelos/pelas alunos/alunas.

Na graduação, cursei uma disciplina chamada *Tecnologias Digitais e Educação Matemática*, na qual conhecemos alguns softwares matemáticos que poderiam ser utilizados por mim, enquanto professora, para ensinar matemática. Conheci o *Excel Planilhas*, *Geogebra*, *WinPlot* e *Graphmatica* e algumas propostas de como usá-los com os meus/minhas futuros/futuras alunos/alunas, assim como, os/as meus/minhas professores/professoras do Ensino Médio faziam com a calculadora. Nesta disciplina, então, utilizamos as TD, basicamente, para agilizar o processo de cálculo, construção de figuras geométricas ou gráficos, dedicando o maior intervalo de tempo para refletir separadamente sobre as propriedades e características dos conteúdos expostos. Ou seja, entendo hoje que havia uma disjunção entre o uso das TD e a constituição do conhecimento matemático.

Nesse sentido, analisando o contato que tive nos dois momentos, enquanto aluna no Ensino Médio e na minha graduação, com as TD, percebi que este uso se justificava mais no modismo e na velocidade para resolver um cálculo ou esboçar um gráfico, do que nas potencialidades para a constituição do conhecimento matemático. Ingressando no Mestrado Acadêmico em Ensino de Matemática, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, conheci o Professor Doutor Maurício Rosa (orientador desta pesquisa) e entrei em contato com a proposta de trabalho com as TD concebida pela Cyberformação (ROSA, 2008). Segundo Rosa (2015) a nomenclatura "Cyberformação" é composta por duas ideias centrais,

² O grupo de pesquisa, no qual a pesquisadora se insere, utiliza essa forma de escrita como uma das maneiras de reforçar a questão do gênero como forma de reconhecimento e empoderamento feminino. O uso, por exemplo, da forma aluno/aluna e não aluno (a) ou aluno/a justificasse, pois, softwares de acessibilidade para pessoas com deficiência visual reconhecem/leem de maneira mais evidente quando assim escrito.

nas quais o prefixo "cyber" é visto como indicativo da inserção de Tecnologias Digitais na própria "formação", a qual é entendida a partir de Bicudo (2003), como um processo no qual não há conclusão total, ou seja, o/a professor/professora nunca está formado/formada, mas em constante forma/ação, perpassada por várias dimensões, dentre as quais se destacam, no nosso caso, a específica (matemática), a pedagógica e a tecnológica, compreendendo o trabalho com o aparato tecnológico como potencializador da constituição do conhecimento matemático e não como agilizador ou elemento de modismo.

Assim, a partir da minha inserção no curso de extensão denominado *Cyberformação com professores de matemática: o uso de Tecnologias de Realidade Aumentada*, que foi ofertado pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul e ministrado pelo professor Dr. Maurício Rosa, é que me lanço à Cyberformação com TD de RA. Nesse curso, foi discutida a concepção de que o ambiente que se constitui ao estarmos plugados às TD de RA é bem específico, o qual possibilita pensar matematicamente, também de uma maneira específica, ou seja, somente possível neste ambiente, própria dele, caracterizando assim essa tecnologia como possível potencializadora nesse processo de estudar. Ao identificar essa especificidade discutida no curso e relacioná-la ao ambiente constituído ao jogarmos Pokémon GO, passei a investigar esse ambiente como sendo próprio, específico.

Segundo Lave e Wenger (1991, p.31), "[...] podemos entender a aprendizagem situada como algo contínuo de nossa participação no mundo", sendo assim, "[...] a aprendizagem é um aspecto integral e inseparável da prática". Para os autores, conforme os/as aprendizes se relacionam ao participar no mundo, a sua maneira de participar vai se alterando já que vão conhecendo mais sobre o contexto, criando uma identidade e participando de uma maneira plena, possibilitando assim a constituição do conhecimento.

A partir disso, em conjunto com o meu orientador, propomos a investigação sobre como se dá a constituição do conhecimento matemático de uma professora em Cyberformação com TD de RA, utilizando inicialmente o software Blender e o aplicativo AndAR e na sequência do desenrolar desse estudo o GeoGebra Augmented Reality³ (software e aplicativo que promovem RA), pois, antes mesmo de analisarmos um grupo conectado à cibercultura como um todo, cabia investigar de forma profícua e bem particular como uma professora constituía conhecimento matemático com essas tecnologias, até então pouco conhecidas na Educação Matemática. Especificamente, para poder analisar como seria

³ Esse software foi lançado durante o desenvolvimento dessa pesquisa, com a sua popularização tivemos o interesse em utilizá-lo em nosso trabalho.

a constituição do conhecimento matemático com esses recursos tecnológicos, a opção mais válida e garantida era se auto analisar. Julgando que seria interessante escolher para falar do conhecimento constituído e entender esse processo, a própria pessoa que o constitui. Assim, defendemos a opção metodológica em que a própria pesquisadora foi sujeito de seu estudo, como já realizada e rigorosamente escrita por Nunes (2011).

Posteriormente, então, busquei pesquisas já desenvolvidas abarcando o uso de Tecnologias Digitais, especificamente, de realidade aumentada, constituição do conhecimento matemático com tecnologias, e formação de professores/professoras por meio da concepção de Cyberformação, em bancos de dados como periódicos da CAPES e o Google Scholar. Utilizei buscas também com as variações dessas palavras-chave em inglês e, a partir dos estudos encontrados, constitui a revisão de literatura deste estudo.

1.2 REVISÃO DE LITERATURA

Ao lermos⁴ estudos sobre a produção do conhecimento matemático e o uso de tecnologias, uma das primeiras produções que nos chamou a atenção foi a de Barbosa (2009). Em sua pesquisa, a autora investigou como o coletivo formado por alunos/alunas e Tecnologias da Informação e Comunicação, produz o conhecimento de função composta e regra da cadeia a partir da abordagem gráfica. Os/as alunos/alunas trabalharam em duplas, utilizando *software* gráfico Winplot para realizar oito atividades que exploravam propriedades dos tópicos em estudo. Durante a realização das atividades, os/as alunos/alunas trabalharam completando uma tabela impressa, disponibilizada pela pesquisadora, a partir das suas observações e conclusões feitas com a utilização do *software*. Segundo a autora, as atividades propostas, por meio da visualização, possibilitaram a geração de conjecturas acerca das propriedades de composição de função e a regra da cadeia. Ela evidencia essas conjecturas apresentando excertos das falas dos/das alunos/alunas onde alguns destacam que já tinham estudado esses conteúdos, mas que não sabiam como se havia chegado naquela regra ou fórmula matemática. O resultado dessa pesquisa indica que a matemática produzida por humanos com computadores é qualitativamente diferente da produzida por humanos com papel e lápis. A partir dessa conclusão, entendemos que a justificativa da inserção das TD, na pesquisa de Barbosa (2009), não é pelo modismo ou como substituta de outras mídias, mas, pensada como uma possibilidade de perceber elementos que só são possíveis por meio

⁴ Nos referimos à primeira pessoa do plural pelo fato da escrita dessa pesquisa ter sido feita de forma coletiva, com a pesquisadora, o orientador e o grupo de pesquisa.

dela. Em nossa pesquisa, pensamos na utilização das TD como partícipes da produção do conhecimento, o que, segundo nosso entendimento, se assemelha ao feito por Barbosa (2009) com um viés teórico próximo ao que evidenciamos nesse estudo. Além disso, em nossa investigação consideramos que por estarmos num processo de autoavaliação, teremos mais possibilidades para perceber as diferenças qualitativas entre a matemática produzida com TD e sem ela, caso essa diferença exista também em nosso estudo. Consideramos que a principal diferença entre o estudo de Barbosa (2009) e o nosso seja a perspectiva quanto à utilização das tecnologias. Barbosa (2009) foca-se mais em noções de experimentação, visualização e demonstração ao trabalhar com tecnologias educativas, enquanto que nós ao trabalharmos com tecnologias móveis, focamos na interatividade e na performance matemática.

Destacamos também Oliveira (2014) que em sua pesquisa de mestrado, investigou como se dava a produção de ideias matemáticas sobre o tópico de funções de duas variáveis reais, utilizando o software MAXIMA. Esse software foi usado para introduzir esses conceitos numa disciplina ministrada para o curso superior de Engenharia. Em sua investigação, o autor criou uma sequência didática que, segundo ele, propunha aos/as alunos/alunas utilizar as TD de maneira diferente do que o tradicionalmente feito, já que não apresentava primeiro um conceito matemático, com explicação e resolução de alguns exemplos pelo/pela professor/professora para que depois os/as alunos/alunas reproduzissem com a TD. Em sua sequência didática, a ideia era começar utilizando a TD para que, a partir da manipulação, os/as alunos/alunas pudessem formular ideias matemáticas sobre funções de duas variáveis reais para posteriormente formalizar esse conceito. Diferentemente de Oliveira (2014) em nosso estudo, não pensamos na utilização da TD para iniciar ou concluir um conteúdo, separando a conceituação matemática do uso das TD, e sim em consonância, na qual não se faz necessária essa divisão entre os momentos. No estudo de Oliveira (2014), a análise dos dados produzidos foi orientada em três eixos: a visualização, a transição do cálculo de uma para várias variáveis reais e o papel das mídias (principalmente do software MAXIMA) na produção do conhecimento. Este estudo chamou a nossa atenção pois possui duas categorias de análise que se assemelham com as potencialidades vislumbradas por nós, ao trabalharmos com RA, uma delas é o eixo intitulado “a visualização”, a outra é a “oralidade e a escrita”. Assim, o estudo de Oliveira (2014) destaca que a principal potencialidade de trabalhar com TD é a visualização proporcionada. Segundo o autor, a visualização do espaço tridimensional é facilitada pela mídia e contribuiu para a formulação de conjecturas e para a produção do conhecimento. Acreditamos que nosso estudo se aproxima dessa categoria de análise, já que entendemos que a visualização de um objeto

tridimensional é potencializada nesse espaço, porém, avançamos ao entender o uso das TD, especialmente, de RA, para além de uma outra maneira de visualização, pois, possibilita uma imersão e uma composição do mundano com o virtual, que é própria da RA. Assim, consideramos que vamos além da visualização e passamos a pensar na intencionalidade com a qual nos relacionamos com o objeto virtual.

Além da categoria descrita no parágrafo anterior, a análise que o autor faz sobre a produção do conhecimento matemático evidencia a oralidade e a escrita, as quais também se destacaram por serem pensadas, por ele, como uma relação trivial para produzir conhecimento. Oliveira (2014) destaca que a possibilidade de movimentar essas imagens permite escrever matematicamente sobre elas e finalmente se expressar oralmente. Em nosso estudo, pensamos que a oralidade e escrita também podem compor a constituição do conhecimento matemático, não somente pela possibilidade de movimentar e perceber alguns elementos que não seriam possíveis sem esse movimento, mas, também, por estarmos situados num contexto próprio que é a RA, onde algumas expressões da matemática podem ter outros significados que não sejam aqueles academicamente usados.

Direcionados por essas possibilidades de ampliação que a RA pode proporcionar, apresentamos uma pesquisa que traz uma perspectiva sobre a utilização de RA para a produção do conhecimento. Nessa perspectiva, a pesquisa de Forte e Kirner (2009) desenvolve um *software* Educacional com RA voltado para aplicações de física e matemática. O *software* foi testado por estudantes e professores/professoras, cujos dados, conforme afirmam os autores, permitiram sua análise sob diversos pontos de vista. Entre eles, a utilização da RA em ambientes de ensino e de aprendizagem é capaz de oferecer características com alto grau de interesse e facilitação da compreensão de conceitos estudados a partir da interação direta com seus objetos, devido a isso, os autores afirmam que a tecnologia se apresenta madura educacionalmente. No entanto, eles não revelam como e por que essa TD proporciona esse interesse e facilidade na compreensão de conceitos. Dessa forma, o questionamento que fica é como podemos afirmar que as pessoas se sentiram motivadas e interessadas? Essa percepção é do pesquisador ou dos/das pesquisados/pesquisadas? Não obstante, os autores afirmam que “[...] o ambiente mostra-se de fácil utilização e com interface motivadora” (FORTE; KIRNER, 2009, p.6), considerando que a utilização da RA apresenta interface acessível e potencializa o ambiente real com elementos visuais, envolvendo informações e objetos virtuais tridimensionais. Para nós, cabe, diferentemente da associação da motivação a elementos gráficos tridimensionais, indagar

como esses elementos tridimensionais podem ou não permitir a constituição de conhecimento matemático? E se permitem, como isso se dá? Como ocorre essa constituição?

Lemos e Carvalho (2010) também apresentam o desenvolvimento e uma proposta de utilização de um *software* usando técnicas de RA para o apoio ao ensino da relação de Euler, a qual associa o número de vértices, faces e arestas de um poliedro convexo. O objetivo desse software, chamado SISEULER, é ser objeto de aprendizagem, proporcionando por meio da visualização e manipulação de objetos um melhor entendimento da relação de Euler, utilizando para isso os poliedros de Platão. Porém, do mesmo modo que na pesquisa de Forte e Kirner (2009), os autores não definem o que seria um melhor entendimento, nem discutem em relação a que ele seria melhor, também não fica claro como foi verificado esse melhor entendimento. De acordo com os autores, a RA torna a visualização do objeto tridimensional mais atraente, estimulando o processo investigativo dos/das alunos/alunas e tornando os processos de ensino e de aprendizagem mais valioso, sendo o SISEULER o fator motivador no que se refere ao interesse dos/das alunos/alunas, mas, a atração, a motivação e o que seria a valoração desses processos não foram discutidas teoricamente. Em nosso entendimento e visando o que buscamos com nossa pesquisa, ressaltamos que se faz necessário um estudo que trate da constituição do conhecimento matemático com RA e não somente estudos relacionados ao possível interesse dos/das estudantes ao utilizarem essas. Quais as especificidades das TD de RA para a constituição do conhecimento matemático? O que muda no sentido de descoberta de aspectos matemáticos que sem essas TD não seriam possíveis? Ou mesmo que tipo de potencialização dessa constituição essas tecnologias podem trazer?

Metodologicamente, para que a pesquisa ocorresse, Lemos e Carvalho (2010) ofertaram uma oficina com professores/professoras da educação básica, sendo que os dados registrados a partir da oficina foram usados para aperfeiçoamento do software e da atividade projetada para ele. Em nossa pesquisa, também visamos à formação com⁵ professores/professoras, porém, além do curso de extensão ofertado e entendido como contexto de pesquisa, cabe diferenciar a especificidade da constituição do conhecimento da própria pesquisadora, como ato autorreflexivo e necessário para esse estudo.

Em contrapartida aos estudos apresentados anteriormente, trazemos o que Martins e Guimarães (2012) discutem em seu trabalho, os desafios encontrados no uso das tecnologias de Realidade Virtual (RV) e RA em escolas. Os autores discutem estas tecnologias e os

⁵ Usamos a expressão formação com professores/professoras de matemática pois compreendemos que todos nós estamos nessa busca contínua pela forma/ação (CALDEIRA, 2016).

pontos principais a serem superados para a inserção delas no contexto educacional de maneira cotidiana. As dificuldades na geração de conteúdos pelos/pelas professores/professoras; o processo e as ferramentas de desenvolvimento e os custos envolvidos são alguns aspectos discutidos na pesquisa. Além disso, salientam que, embora seja possível encontrar licenças de RV e RA com baixo custo, as escolas públicas não estão preparadas para a conversão de seus laboratórios de informática em laboratórios para o uso dessas tecnologias, apontando como dificuldade a falta de equipamentos e despreparo das pessoas que gerenciam estes laboratórios. Embora sejam importantes os aspectos descritos na pesquisa, consideramos que no momento atual, não necessariamente precisamos ter uma sala específica para utilizar essas TD, ou equipamentos disponibilizados pela escola, por exemplo. Pois, com avanço tecnológico, para a utilização da RA hoje, necessitamos de modo geral de um dispositivo móvel, seja um smartphone ou tablet conectado a um software, aplicativo específico ou apenas utilizando sua câmera nos modelos mais recentes, os quais já fazem parte da vida de amplo número de alunos/alunas. Além do problema de uso de laboratório apresentado, Martins e Guimarães (2012) salientam que os/as professores/professoras na época da pesquisa realizada não se sentiam seguros/seguras para o uso de recursos computacionais em suas aulas, limitando muitas vezes o uso de Internet para produção de material de referência bibliográfica. De acordo com Borba, Scucuglia, Gadanidis (2016), essa insegurança com o uso de recursos computacionais caracterizam o que chamam de segunda fase das tecnologias digitais em Educação Matemática, fortemente marcada pelos riscos de sair da zona de conforto, já que as atividades investigativas nesse contexto têm um caráter aberto, visando explorar as múltiplas soluções para um problema. Já existente nesta segunda fase, porém presente com mais força na terceira, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2016) reforçam, e concordamos, que uma possível solução para a falta de segurança dos/das professores/professoras, que também pode ocorrer nos dias de hoje, pode ser a formação continuada de professores/professoras e, para nós, especificamente, na forma/ação desse/dessa professor/professora. Nesse sentido, a nossa pesquisa pode ampliar essa discussão já que ao nos debruçarmos sobre a concepção de Cyberformação, entendemos que o/a professor/professora nunca estará cyberformado/cyberformada, mas sempre em busca desse ser professor/professora idealizado em diferentes momentos da nossa profissão.

Não obstante, em uma proposta de Cyberformação, como a nossa, a tecnologia é tomada/entendida como partícipe do processo de constituição do conhecimento, ou seja, constituição-de-conhecimento-com-TD, em com-junto (ROSA,2008) e, nesse viés, a perspectiva da Cyberformação defende que o trabalho com TD pode ampliar, potencializar

e/ou transformar a cognição matemática de forma personalizada. Assim, passamos a apresentar alguns trabalhos desenvolvidos sob esta concepção.

Inicialmente, apresentamos o estudo desenvolvido por Seidel (2013), em sua tese de doutorado que teve como objetivo revelar como o/a professor/professora de matemática em Cyberformação percebe-se professor/professora online no que tange aos aspectos de ensino e de aprendizagem de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. Para alcançar o objetivo o autor lançou-se à percepção do que se mostra nas expressões do percebido pelos sujeitos da pesquisa durante a experiência vivida em um curso de extensão. Teve como aportes teóricos a Cyberformação na formação com professores/professoras com tecnologia e a percepção por meio dos estudos de Merleau-Ponty. O objetivo foi alcançado quando o/a professor/professora consegue estar em um movimento fluído (movimento do conhecimento matemático, movimento do conhecimento pedagógico e movimento do conhecimento tecnológico) articulando-se uns com os outros nesta totalidade, sem se separar, possibilitando assim que a constituição do conhecimento seja resultado das ações com seus/suas alunos/alunas, configurando um meio que pode potencializar a constituição do conhecimento matemático. Em nosso estudo, estaremos trabalhando também sob a perspectiva da Cyberformação, partindo de um curso de extensão que, diferentemente do ofertado por Seidel, foi presencial e mais interessado na dimensão matemática da forma/ação da professora/pesquisadora, do que nas demais dimensões que nos constituem, embora saibamos que essas dimensões não são estanques. Assim, estamos focando na constituição de conhecimento matemático de uma professora para que possamos analisar como ela se dá com o uso de TD de RA, por meio de dispositivos móveis.

Além disso, buscando por pesquisas em que houvesse uma intersecção entre Cyberformação e dispositivos móveis, apresentamos a produção de Caldeira (2016). Em sua dissertação, ele investigou como professores/professoras em Cyberformação estabelecem conexões matemáticas entre os pares, vislumbrando uma forma/ação com smartphones por meio das redes sociais. Nessa concepção de Cyberformação mobile, as TD são consideradas como partícipes do processo de produção do conhecimento, sendo suscitada de maneira “informal”, já que estava em consonância com as redes sociais. Para isso, foram disponibilizados smartphones para que os/as participantes pudessem acessar as redes sociais, e comunicar-se, enquanto estivessem em diferentes lugares geográficos e em diferentes tempos cronológicos. Nesse sentido, a pesquisa infere que a produção do conhecimento matemático pode se dar em todos os momentos e em todos os lugares, tornando o recurso tecnológico partícipe do processo, podendo ampliar e/ou potencializar as conexões

matemáticas feitas de forma compartilhada por professores/professoras. Em nossa investigação também estaremos utilizando smartphones e tablets para criar o ambiente de realidade aumentada. Não estaremos considerando, neste trabalho, a constituição do conhecimento matemático entre os/as professores/professoras, pois, consideramos que não nos cabe, no momento, avaliarmos essa constituição de maneira externa. Então, a nossa escolha em analisarmos a constituição do conhecimento matemático da própria professora/pesquisadora justifica-se, em relação à pesquisa de Caldeira (2016), ao investigar o aspecto da totalidade em termos de conexões, mesmo agindo de forma individual, pois, consideramos que já estamos conectados ao mundo, com-o-mundo e com todo o aparato que esse apresenta. Logo, nos embasamos no estudo de Caldeira (2016) e focamos nas TD de RA, assim como, na possibilidade de uma individualidade conectada.

Aproximamos a nossa pesquisa de duas outras que foram realizadas considerando a concepção de Cyberformação como as anteriores, porém, que já trabalharam com TD de RA. Para isso, iniciamos apresentando a pesquisa de Bulla (2016) que investigou como a RA pode potencializar/transformar o design de tarefas em termos da Modelagem Matemática no estudo de funções de duas variáveis reais. Para tanto, ele criou objetos virtuais para as atividades, que foram desenvolvidos no software Blender e visualizados em RA através do aplicativo AndAR. Assim, nessa pesquisa, o autor defende que por meio da Percepção do pesquisador e da Heterogeneidade do Ambiente de Realidade Aumentada, o desenvolvimento de atividades com o software Blender em conjunto com o aplicativo AndAR, pode potencializar/transformar o *design* de tarefas em termos de Modelagem Matemática no estudo de funções de duas variáveis reais. Buscando ampliar o que já foi feito por Bulla, agora nos debruçamos em entender como se dá a constituição do conhecimento matemático com TD de RA, considerando o ambiente criado por ela como próprio desse trabalho e podendo ser considerado como uma forma de se fazer matemática estando conectado a essa TD.

Também, em seu estudo, Resende (2016) investigou as possibilidades das TD dos dispositivos móveis (smartphones e tablets) de participar do processo da produção do conhecimento matemático por meio da RA. O objetivo de seu estudo foi investigar o desenvolvimento de *design* de atividades utilizando softwares de modelagem gráfica e aplicativos de RA com funções de duas variáveis reais. Desse modo, ele evidencia que a dimensão tecnológica se configurou como atuante e partícipe no processo de *design* de atividades com RA, ou seja, a dimensão tecnológica foi fundamental no *design* de atividades como meios de produção do conhecimento matemático. Diferentemente de Resende (2016),

embora em nosso estudo a dimensão tecnológica esteja iminente, estaremos centrados na dimensão matemática, por meio da qual queremos discutir, entre outros atos, como se dá o pensar matematicamente no ambiente da RA.

Diante das pesquisas até aqui apresentadas é possível justificarmos o porquê do desenvolvimento desta pesquisa, a qual pretende investigar como a própria professora/pesquisadora constitui conhecimento matemático, estando em Cyberformação com TD de RA, visto que este estudo considera: a) as TD como partícipes do processo de constituição do conhecimento e não como auxiliares ou facilitadoras; b) apresenta uma concepção de forma/ação com professores/professoras para que se trabalhe com as TD de RA, conforme a pesquisa de Martins e Guimarães (2012) aponta como necessário; e c) dá continuidade às pesquisas feitas por Bulla (2016) e Resende (2016) sob um novo enfoque, que é como se dá a constituição do conhecimento matemático por uma professora em Cyberformação com TD de RA, focando na dimensão matemática dessa formação e considerando o ambiente como um contexto de Aprendizagem Situada, ou seja, queremos investigar esta matemática que se faz com o trabalho com tecnologias, especificamente no contexto de RA, em termos da dimensão matemática da própria Cyberformação.

Na próxima seção apresentamos as questões advindas dessas e de outras leituras, bem como o contexto da pesquisa, os objetivos e a pergunta diretriz.

1.3 QUESTÕES E OBJETIVOS

Atualmente vivenciamos uma sociedade avançada tecnologicamente devido aos recursos que surgem constantemente. Segundo Vanini, Rosa, Justo e Pazuch (2013) existem indivíduos que acessam a Internet com diferentes propósitos (redes sociais, trocas de arquivos, conversas etc.) e de diferentes maneiras (computadores, tablets, smartphones). Além da Internet, bancos, lojas, supermercados e diferentes serviços requerem movimentações financeiras por meio digital, nossos canais de comunicação e de informação estão atrelados a esses recursos tecnológicos. Ou seja, podemos dizer que as Tecnologias Digitais estão presentes em praticamente todos momentos, em todos lugares e em todas as ações do ser humano, direta ou indiretamente.

Este avanço tecnológico, bem como todas as transformações sociais, permite modificações no ensino, na aprendizagem e na formação com professores/professoras, se fazendo necessária a reflexão sobre esses processos com o uso desse aparato tecnológico. Dessa forma, consideramos importante investigar como se dá a constituição do conhecimento

matemático vinculando às TD, em específico, às de RA, já que se configuram por um ambiente próprio, possibilitando a composição entre o mundano e o virtual. Também, nos cabe investigar essa constituição de conhecimento matemático por meio da formação, sob o viés da dimensão matemática dessa formação com professores/professoras de matemática, uma vez que a sociedade educacional atual está, em grande parte, introduzida no mundo cibernético e a fração dos/das estudantes começa a interagir com tecnologias de RA.

Assim, consideramos que a matemática que o/a professor/professora produz ao desenvolver atividades com TD de RA pode se mostrar de modo diferente daquela que ele/ela produz sem essas tecnologias. Queremos, então, investigar esta matemática que se faz com o trabalho com tecnologias de RA sob a concepção da Cyberformação, em termos da dimensão específica dessa formação, no nosso caso, a dimensão matemática.

Assim, a pergunta diretriz do processo investigativo que apresentamos é:

Como se dá a constituição do conhecimento matemático de uma professora em Cyberformação com Tecnologias Digitais de Realidade Aumentada?

Nesta pesquisa, então, foram utilizados os recursos tecnológicos de Realidade Aumentada: *software* Blender aliado com o aplicativo AndAR e posteriormente o Geogebra AR. O Blender é um *software* de modelagem e animação em três dimensões (3D). Por possuir um código aberto, seus/suas usuários/usuárias podem acessar informações da programação envolvida em todos os seus recursos. De acordo com Bulla (2016), o *software* Blender é um programa de computação gráfica que permite produções de alta definição de imagens e animações, pode ser usado livremente para diferentes finalidades, utilizando noções de geometria, funções de duas variáveis reais, entre outros. A escolha do *software* Blender justifica-se pela sua possibilidade em salvar arquivos com extensões compatíveis com o aplicativo AndAR, o qual é utilizado para o uso da Realidade Aumentada na plataforma Android. Posteriormente, com o avanço da tecnologia no decorrer do estudo, utilizamos também os aplicativos Geogebra Augmented Reality e o 3D Calculator, ambos são aplicativos vinculados ao GeoGebra, possibilitando trabalhar com RA e que foram disponibilizados na rede, no decorrer dessa pesquisa.

1.4 COMPOSIÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Essa pesquisa está organizada em cinco capítulos. O primeiro capítulo intitulado “Ângulo Inicial” apresenta momentos da trajetória pessoal da pesquisadora que fizeram com que essa despertasse seu interesse pelo tema da pesquisa, além de evidenciar a revisão de

literatura, que teve como objetivo apresentar alguns estudos sobre constituição do conhecimento matemático com tecnologias, formação com professores/professoras por meio da concepção de Cyberformação e uso de tecnologias digitais, especificamente, algumas de realidade aumentada. Nesse capítulo, ainda trazemos a pergunta diretriz e objetivos orientadores da pesquisa.

No capítulo intitulado “Expondo a Base Teórica”, apresentamos uma contextualização histórica sobre o surgimento e evolução da tecnologia de realidade aumentada, conceituando-a e explicando as diferenças entre ela e a realidade virtual. Destacamos a concepção de Cyberformação, fortemente enraizada nos atos de ser-com, pensar-com e saber-fazer-com-TD. No nosso caso, destacando a própria RA, evidenciamos o contexto no qual a professora/pesquisadora se insere e, por meio dos pressupostos da Aprendizagem Situada, nos debruçamos sobre o entendimento da constituição do conhecimento matemático dessa professora nesse espaço/tempo/contexto diferenciado.

No capítulo 3, “Lente Metodológica”, apresentando a origem qualitativa da pesquisa, pois se centra no entendimento e interpretação de dados e de discursos, já que a intencionalidade não é coletar informações de um número grande de sujeitos, mas, de analisar e compreender os dados produzidos, a fim de responder à pergunta diretriz. Evidenciamos os procedimentos metodológicos escolhidos a fim de garantir o rigor científico necessário, visto que a pesquisadora se torna sujeito de seu próprio estudo. Em termos de pesquisa qualitativa, entrelaçamos nossas visões de mundo, de conhecimento e nossos procedimentos metodológicos.

Já no capítulo “Focando na Descrição e Análise dos Dados”, apresentamos e discutimos os dados produzidos, dando os encaminhamentos que possam responder à pergunta diretriz. A descrição e análise dos dados está organizada em três categorias de análise, intituladas: “Com-Holográficos”, “Por meio da Oralidade-com-TD de RA” e “Com-o-Cybercorpo: em termos de corpo-próprio-com-TD de RA”.

O capítulo “Composições Finais” sintetiza os resultados alcançados e aponta pesquisas futuras que possam vir a ser realizadas de forma a colaborar com a Educação Matemática em termos de Cyberformação com professores/professoras de matemática e a constituição do conhecimento matemático com TD de RA nessa concepção.

2. EXPONDO A BASE TEÓRICA

Neste capítulo, apresentamos a base teórica deste estudo, por meio da conceituação e teorizações sobre Realidade Aumentada (RA), entendida como uma composição do ambiente virtual⁶ com o mundano. Também, sobre a constituição do conhecimento, especialmente a constituição do conhecimento matemático com Tecnologias Digitais sob a concepção da Cyberformação, a qual evidencia a formação com professores/professoras e/com o trabalho com tecnologias, fortemente enraizadas nos atos de ser-com, pensar-com e saber-fazer-com-TD, no nosso caso, especificamente com TD de RA.

2.1 REALIDADE AUMENTADA

O conceito de Realidade Aumentada (RA) assim como de Realidade Virtual (RV) são presentes no avanço da tecnologia, possibilitando interações com computadores, aplicativos e dispositivos móveis. Segundo Kirner e Siscoutto (2007, p.19),

Realidade virtual e aumentada são áreas recentes do conhecimento que vem dando, aos usuários, melhores condições de interação com aplicações computacionais, propiciando a eles interações naturais e potencialização de suas capacidades. Para isso, muitos recursos são utilizados, envolvendo hardware, software, periféricos, redes, tecnologias especiais, técnicas de projeto e avaliação e do desenvolvimento de aplicações.

Considerando as interações que são possibilitadas com essas TD e suas capacidades de potencializar o uso de aplicações computacionais, bem como suas utilizações em diversas áreas do conhecimento, inferimos que a Educação Matemática também pode ser uma área na qual elas sejam exploradas. Vislumbramos diferentes frentes para essa exploração, entre elas: formação com professores/professoras e/ou atividades desenvolvidas pelos/pelas alunos/alunas. Neste estudo, pensaremos na sua inserção e trabalho no campo da Educação Matemática como sendo um ambiente que cria possibilidades de expandir e potencializar a constituição do conhecimento.

Embora estejamos falando da RV e RA concomitantemente, é importante ressaltar que são de épocas e características distintas. Segundo Kirner e Kirner (2011), ambas surgiram nos Estados Unidos, na década de 60, porém, o primeiro projeto de RA só foi desenvolvido em 1980, pela Força Aérea Americana. Essas tecnologias apresentam diferentes características de interação com o usuário, enquanto a RV cria um ambiente totalmente

⁶ Utilizaremos nessa seção a palavra virtual como é utilizada no senso comum, uma vez que as referências da área de Ciência da Computação a utilizam desse modo, ou seja, como sinônimo aquilo que é digital, computacional, informático.

imersivo dependente de equipamentos de visualização, como os óculos de realidade virtual (Figura 1).

Figura 1: Óculos de Realidade Virtual



Fonte: Freire (2016)

A RA, por sua vez, proporciona uma variação desse ambiente virtual que projeta objetos sobrepostos ou em composição, em tempo real, com a realidade mundana, complementando-a ao invés de substituí-la (KIRNER, SISCOOTTO, 2007), podendo ser utilizada por dispositivos móveis com sistema operacional IOS (Figura 2), o qual é um sistema operacional móvel da Apple Inc, desenvolvido para iPhones, iPod e iPad e não podendo ser utilizado em outros hardwares.

Figura 2: Realidade Aumentada com dispositivo móvel iOS



Fonte: a pesquisa

Também, com o sistema operacional Android (Figura 3), o qual é um sistema operacional baseado no núcleo Linux e atualmente desenvolvido pela empresa de tecnologia Google.

Figura 3: Realidade Aumentada com dispositivo móvel Android



Fonte: a pesquisa

De acordo com Antonic (2005), a história efetiva da RA começou com pesquisadores/pesquisadoras da empresa de aviação Boeing⁷, nos anos 90, como uma alternativa aos caros diagramas e dispositivos de marcação utilizados para orientar os/as trabalhadores/trabalhadoras no chão da fábrica. Os pesquisadores Tom Caudell e David Mizell propuseram a substituição das grandes placas de contraplacado, que continham instruções de fiação projetadas individualmente para cada plano, por um aparelho montado na cabeça que exibiria os esquemas específicos de um avião através de vidros de alta tecnologia e os projetaria em tábuas polivalentes e reutilizáveis. A interface era denominada I-IUDset, e em vez de reconfigurar cada placa de compensado manualmente em cada etapa do processo de fabricação, as instruções de fiação personalizadas seriam essencialmente usadas pelo/pela trabalhador/trabalhadora e alteradas rápida e eficientemente por meio de um sistema de computador. De modo genérico, essa interface projetava imagens virtuais sobre superfícies mundanas mostrando a exata posição de furos, o valor de seus respectivos diâmetros, especificação de brocas, assim como a referência de cabos que por eles deveriam ser passados. Tom Caudell denominou Realidade Aumentada todo esse processo, pois, permitia aumentar o campo visual do/da usuário/usuária com informação necessária para o desempenho de sua tarefa.

⁷ Empresa multinacional fundada em 1916. Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Boeing>.

Com os avanços tecnológicos,

Essas aplicações ficaram mais acessíveis [...] no início dos anos 2000, com a convergência de técnicas de visão computacional, software e dispositivos com melhor índice de custo-benefício. Além disso, o fato dos objetos virtuais serem trazidos para o espaço físico do usuário (por sobreposição) permitiu interações tangíveis mais fáceis e naturais, sem o uso de equipamentos especiais. Por isso, a realidade aumentada vem sendo considerada uma possibilidade concreta de vir a ser a próxima geração de interface popular, a ser usada nas mais variadas aplicações em espaços internos e externos (KIRNER; SISCOOTTO, 2007, p. 5).

Neste sentido, “[...] a realidade aumentada apresenta a vantagem de permitir o uso de ações tangíveis e de operações multimodais, envolvendo voz, gestos, tato, etc., facilitando o trabalho do usuário sem a necessidade de treinamento.” (KIRNER, SISCOOTTO, 2007, p.6). Os autores acreditam que a convergência tecnológica e o desenvolvimento estão apontando para interfaces computacionais baseadas em RA. De fato, o potencial dessa tecnologia pode ser observado nas mais variadas áreas, destacamos que há dispositivos para áreas educacionais, jogos e aplicativos para áreas profissionais, como bioengenharia, física, geologia, engenharia, arquitetura, entre outras (FIALHO, 2018).

Em especial na área da educação, nos detemos em estudar os processos de constituição do conhecimento pensando na inserção das tecnologias, especialmente a de RA, como possível potencializadora desses processos visto que os/as discentes do século XXI compõem a nova geração conhecida como “nativos digitais”. De acordo com Prensky (2001) o termo “nativo digital” é atribuído à pessoa cujo nascimento se deu a partir de 1980, quando a tecnologia digital começou a ser inserida em larga escala em diversos aparelhos e dispositivos que substituíram a então tecnologia analógica aplicada aos telefones e aos televisores, embora geralmente seja aplicada para designar toda a geração surgida a partir do início do século XXI. Caracterizando os/as nossos/nossas alunos/alunas como “nativos digitais”, imersos/imersas em um mundo cada vez mais digital e globalizado, onde as distâncias estão sendo dizimadas, a comunicação e a interação pegam “carona” na utilização das mídias digitais que unem nações, línguas, interesses e saberes, acreditamos que não é mais possível pensar em Educação, especificamente em Educação Matemática, dissociada das tecnologias.

Além dos computadores, os dispositivos móveis, tais como tablets e smartphones, estão presentes na sociedade, cada vez mais fazendo parte das tarefas rotineiras dos/das usuários/usuárias. Essa inserção das tecnologias móveis vem mudando a maneira como buscamos informações, conhecimento, nossa maneira de estudar, de trabalhar, etc. Levando isso em consideração, utilizamos aplicações da RA nos dispositivos móveis que são aparelhos que estão com os/as professores/professoras e alunos/alunas (RESENDE, 2016).

O uso da RA em dispositivos móveis para a Educação Matemática pode completar e inovar o campo educacional com intenção de atingir os/as educandos/educandas no processo de aprendizagem e na formação com professores/professoras (RESENDE, 2016). Nunes (2011), mesmo não atuando com RA, revela:

Essa necessidade de atualização de conhecimento, visando a desenvolver novas competências nos indivíduos no que se refere ao uso das TI (tecnologias informáticas), leva-nos a pensar em como elaborar atividades que usufruem dessa tecnologia, contribuindo nas formas de agir, pensar e se relacionar em um contexto social, no qual esses indivíduos estão inseridos. Além disso, leva-nos também a procurar formar pessoas críticas, [...] para atuarem com os recursos tecnológicos disponíveis na sociedade. (NUNES, 2011, p. 17).

Ao pensarmos na inserção da RA na área da Educação Matemática estamos preocupados em como ela se dará, visto que nosso objetivo não é utilizá-las como facilitadoras, para acelerar um cálculo ou exigir menos esforço, mas, como um recurso que amplie os estímulos sensoriais, acrescentando no domínio intelectual tanto do/da professor/professora quanto do/da aluno/aluna como “[...] capacidade de adquirir, organizar, armazenar, analisar, relacionar, integrar, aplicar e transmitir informação.” (FORTE; KIRNER, 2009, p.2), especialmente porque a RA possibilita uma experiência diferente de uma decorrida na tela de um computador, em virtude dos objetos não estarem “presos” ou “amarrados” apenas à realidade cibernética (BULLA, 2016).

Apoiando-se nisso, acreditamos que a experiência com RA cria um novo contexto, que é a própria RA, no qual há a composição de objetos virtuais com a realidade mundana. Essa composição, possibilita ações mais tangíveis, permite que o nosso modo de ser, de pensar e de viver ao estarmos nela, sejam modificados, levando-nos a conclusões que só são possíveis ali, conseqüentemente podendo modificar a nossa constituição do conhecimento.

Nas próximas seções, expomos a concepção de constituição do conhecimento adotada nesta pesquisa bem como a concepção de uso de tecnologias como potencializadora desta constituição por meio dos pressupostos teóricos da Cyberformação.

2.2 CONSTITUIÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Embora em muitas pesquisas, inclusive nas apresentadas na seção de revisão de literatura, não sejam evidenciadas as diferenças entre constituição e produção do conhecimento, o que por muitas vezes pode fazer com que consideremos sinônimos, em nosso estudo, buscamos por uma compreensão, uma vez que nossa pergunta diretriz se refere à constituição explicitamente.

Nesse sentido, Rosa e Bicudo (2018, p. 42) dizem que

A constituição diz da articulação dos dados sensórios sentidos que se fazem no corpo-encarnado e que vão se articulando na própria carnalidade desse corpo, e no movimento dessa articulação vai definindo unidades, percebendo fenômenos e articulando e expressando compreensão. A produção incide mais sobre as compreensões expressas, objetivadas na intersubjetividade e que permanecem na historicidade sociocultural.

Assim, entendemos que a produção do conhecimento se refere a algo já constituído e expresso, ou seja, produzimos conhecimento sobre algo que outra pessoa já constituiu e expressou. Assim, quem constitui é que cria. Essa criação não se refere a algo totalmente novo, inovador, mas é entendida com as diferentes maneiras de sintetizar, incorporar e expressar. Ao constituir conhecimento matemático, por exemplo, não seguimos a forma expressa em sala de aula, com o conhecimento já sintetizado como expresso nos livros didáticos, por exemplo, mas vamos constituindo-o na totalidade do nosso ser, com nossas distinções políticas, ideológicas, pedagógicas, etc.

Em nossa pesquisa adotamos a concepção de constituição do conhecimento sob a postura fenomenológica, trazendo alguns autores/autoras e trabalhos que consideramos relevantes e suficientes para sustentar a nossa investigação. Então, a constituição do conhecimento é um movimento complexo, pois é a conexão múltipla que ocorre no

[...] entrelaçamento dos sentidos experienciados no corpo-próprio ou corpo-encarnado, pelos diferentes órgãos, como audição, tato, visão, paladar, olfato e um sexto, cinestesia (movimento sentido), que vão se amalgamando e possibilitando a percepção [...] (BICUDO; SILVA, 2018, p. 157).

Assim,

Abrange muitos atos intencionais da consciência e modos de sentidos que fazem ao sujeito vivente serem entrelaçados e irem, aos poucos, constituindo uma forma que vai se presentificando à consciência, de maneira que o sujeito *pode se dar conta* disso que está compreendendo o mundo-vida. (ROSA; BICUDO, 2019, *online*)

Nessa perspectiva, mundo-vida é

[...] uma totalidade harmônica, uma universalidade coerente dos objetos existentes, de “nós”, conjunto de seres humanos, entendidos como eu-o-homem individual e todos nós juntos que, como seres viventes, pertencemos ao mundo. E esse é o mundo validado pela nossa intencionalidade e pela vida em comum com o outro, tomando individualmente ou como conjunto de pessoas, como comunidade, como cultura. Assim, “mundo” é afirmado como um campo universal ao qual são dirigidos nossos atos, quer seja experienciando, teorizando, conhecendo, exercendo atividade práticas, efetuando ações, etc. É a vida diretamente vivida nesse campo. (BICUDO; ROSA, 2010, p. 68).

Entendemos mundo-vida, então, como sendo os modos de sermos no espaço/tempo em que vivemos com outros seres humanos, demais seres vivos e natureza, com o mundo, bem como todas as explicações científicas, religiosas e de outra natureza. Sendo o mundo não um objeto, uma coisa, mas é onde somos, realizando as nossas ações junto aos sujeitos que conosco estão nessa materialidade espaço/temporal, assim como com tudo o que no mundo há.

Somos, portanto, sujeitos encarnados neste mundo-vida, donde não podemos nos entender como sujeitos abstratos, desvinculando a constituição do conhecimento da nossa materialidade. “Somos sujeitos encarnados e nosso pensar é encarnado” (ROSA; BICUDO, 2019, p.1), pois, há uma materialidade biológica que subjaz o “ser” e que sustenta as possibilidades imanentes do humano, assim, o corpo que permite o ato de ser no/com o mundo, é parte do processo de constituição do conhecimento.

Nessa perspectiva, entendemos o corpo, segundo Merleau-Ponty (1999), como sendo corpo-próprio, uma unidade, não fragmentando o que é fisiológico do que é psicológico, mente e matéria, sendo um organismo singular, que até então não é sem a materialidade do seu corpo, nem do mundo onde se encontra com o outro. Rosa e Bicudo (2019), entendem que assim como o mundo-vida, o corpo-próprio não é tomado como dado em si, de modo objetivo, mas como os diferentes modos que vão constituindo essa carnalidade e as diferentes maneiras de estar vivo. Para tanto, o corpo vivente se constitui de modo duplo, sendo físico, biológico, mas, que também permite avaliar suas qualidades e sentir sensações, lançar-se ao mundo.

Segundo Merleau-Ponty (1999, p.3) “[...] tudo aquilo que sei do mundo, mesmo por ciência, eu sei a partir de uma visão minha ou de uma experiência do mundo sem a qual os símbolos da ciência não poderiam dizer nada. Todo o universo da ciência é construído sobre o mundo vivido”. Entendemos, então, que não é viável explicar um fenômeno a partir de elementos separados e/ou isolados. Assim, o mundo que percebemos não deve ser explicado como uma coleção de objetos e de informações sensoriais independentes, pois, juntas, podem nos dar um sentido coerente a esse todo indeterminado, que é a própria experiência perceptiva do mundo. Assim, como “[...] o mundo é inseparável do sujeito [...]” (MERLEAU-PONTY, 1999, p.576) entendemos que todo conhecimento nasce ou se constitui no mundo humano da experiência vivida.

Dessa forma, de acordo com Rosa e Bicudo (2019) somos constituídos de três esferas sensoriais: carnal, psíquica e espiritual, onde embora sejam esferas identificadas separadamente, se entrelaçam no corpo-próprio. Enquanto a esfera “[...] carnal, realiza atos concernentes ao sentir e perceber, a psíquica ao gostar, desejar, comparar e a espiritual aos atos que realizam juízo de melhor que, pior que, maior, menor, etc. Essas esferas não são separadas, porém entrelaçadas na própria unidade do corpo-próprio” (ROSA; BICUDO, 2019, *online*), como afirmamos. O corpo-próprio possui sua materialidade intrínseca em um organismo vivo, o qual de modo intencional, sempre se dirige a algo, buscando saber do que se trata, com um foco. Assim, “Os atos do sujeito encarnado também não se exaurem em si,

mas, para se consumarem necessitam ser articulados e expressos em uma materialidade apropriada à visibilidade do que está sendo constituído como conhecimento.” (ROSA; BICUDO, 2019, *online*). Logo, por meio da linguagem é que essa expressão ganha forma, organizando-se e expondo-se. Essa linguagem, de acordo com a nossa intencionalidade, que se dá ao nos lançarmos no mundo, busca comunicar o percebido. Assim, entendemos que a percepção se dá, segundo Bicudo e Silva (2018) no encontro entre corpo-próprio e aquilo a ser percebido. A força do percebido está atuante no momento da percepção, portanto, não está centrada apenas no ser que percebe. Bicudo e Silva (2018) ainda explicam que a aquilo que é percebido é entendido como real para todos/todas que vivem a mesma situação. Nessa comunicação, entendemos o comportamento de quem nos rodeia identificando semelhanças com o nosso comportamento e, portanto, podemos entender ambos os comportamentos.

Além da constituição de conhecimento como um movimento que ocorre no corpo-próprio, por meio de suas experiências, destacamos também a presença do cossujeito. “O cossujeito, sujeito com quem se está no mundo-vida, também compreende e pode compreender o dito em uma linguagem articulada e expressa em sua materialidade.” (ROSA; BICUDO, 2019, *online*), propiciando um movimento dialógico, que se constitui através do convívio e que resultam em produtos histórico-sócio-culturais, inclusive a matemática.

Nesse sentido, de acordo com Vanini (2015), por muito tempo a matemática foi defendida como soberana, sendo estruturalmente demonstrável e axiomática, porém, assumimos a defesa de uma matemática que não é a que precisa ser soberana, disciplinar, acadêmica e ocidental, embora entendemos a sua importância. Estamos interessados em um fazer matemático que busca pelo sentido do que está sendo realizado, buscando romper as relações de poder estabelecidas por aqueles/aquelas que a dominam. Ao nos debruçarmos sobre essa intenção de romper essas relações nos deparamos com diversos questionamentos, tais como: o que é matemática? Há uma única matemática? O que trata a matemática?

Compreendemos que a constituição do conhecimento matemático, segundo Rosa e Bicudo (2019, p.4) abre-se a “[...] uma possibilidade, a qual se apresenta ao assumirmos a ‘matemática acadêmica’ como a etnomatemática do grupo que defende o formalismo e focarmos na constituição do conhecimento que vai além dessa Matemática, mas que a assume como importante e não como soberana”. Entendemos aqui a etnomatemática, de acordo com Miarka (2011) “[...] como posição e atitude de conhecimento que assume a realidade e as necessidades relacionadas a um panorama cultural e aos indivíduos que o compõem.” (MIARKA, 2011, p.406). Assim, para tratar da constituição do conhecimento matemático tratamos a “matemática acadêmica” como práticas sociais realizadas por um grupo cultural,

dentre essas práticas, além de categorizar, teorizar e axiomatizar, também estão a de sentir, intuir, de expressar o compreendido. Assim, o conhecimento matemático constituído vai além do que é estabelecido pela “Matemática Acadêmica”, ao mesmo tempo que entendemos não ser possível uma ruptura total com a “Matemática Acadêmica”, visto a nossa familiaridade com ela, mas, possibilitando uma desfixação conceitual que é imposta por essa matemática. Defendemos que embora a “Matemática Acadêmica” seja suporte lógico para diferentes campos, ela também é frequentemente solicitada pelo nosso modo de estar no mundo-vida.

Dentre esses modos de estarmos no mundo vida, então, investigamos a matemática que pode ser constituída pelas pessoas, imersas na cibercultura (LÉVY, 1999) que é uma cultura específica que trata de pessoas conectadas a Tecnologias Digitais. De acordo com Lévy (1999), as conexões suplementares permitem igualdade, novas fontes de informação, pelas quais se torna cada vez mais difícil fechar ou dominar uma informação. Com base nisso, identificamos a concepção de constituição do conhecimento matemático e uma proximidade com a etnomatemática, já que por meio das tecnologias podemos ter contato com a matemática discutida em/por qualquer cultura diferente da que pertencemos e, também, com a própria Matemática Acadêmica, em diferentes níveis, abrindo possibilidades de constituição do conhecimento. Assim, ao entendermos que as Tecnologias Digitais são materialidades disponíveis a nós na realidade mundana, focamos em explicitar nossa compreensão sobre elas sob a perspectiva da Cyberformação.

2.3 CYBERFORMAÇÃO

A evolução tecnológica e popularização das tecnologias ocasionaram diversos estudos sobre o seu uso na Educação, especialmente na Educação Matemática. Dentre esses estudos é possível observamos que os discursos foram sendo modificados. Nas décadas de 1970 e 1980, alguns/algumas estudiosos/estudiosas defendiam o discurso de que o uso das tecnologias pelos/pelas estudantes em sala de aula faria com que o processo de aprendizagem fosse mecanizado. No entanto, os discursos dos estudos mais recentes estão preocupados em responder a outros questionamentos que vão além da defesa ou contrariedade ao uso dessas tecnologias, pois essa contradição já foi superada, de maneira geral, no discurso produzido pelos/pelas professores/professoras. Assim, a Educação Matemática se transformou em termos de concepção da inserção tecnológica em sala de aula e pesquisas, sobre essa transformação, por exemplo Rosa, Vanini e Seidel (2011), se referem a como está sendo

tratada a produção do conhecimento matemático com o uso das tecnologias no contexto educacional.

Diante disso, em pesquisas que investigam as potencialidades do trabalho com TD nas aulas de matemática, é importante olhar para a formação com professores/professoras, no que diz respeito ao trabalho com aparatos tecnológicos em sua prática pedagógica. Acreditamos que além de inserir a tecnologia nos ambientes de ensino e de aprendizagem, o/a docente pode suscitar uma reflexão contínua sobre sua prática.

2.3.1 Forma/ação com Professores

Segundo Richt (2010) o/a professor/professora constitui-se nas suas articulações com o mundo, num processo complexo que envolve suas práticas sociais, suas interações com os outros sujeitos sociais em um processo histórico e dinâmico, incluindo sua formação profissional. Fiorentini (2005) destaca que formação de uma prática docente envolve a reprodução ou o cultivo de valores que vão além dos conteúdos a ser ensinados, abarcando o jeito de ser e de se relacionar com/no mundo. Para nós, a formação com professores/professoras é compreendida como uma totalidade, não sendo representada ou ocorrida apenas nos processos de formação profissional formais da academia ou na reprodução e cultivo de valores. Nesta pesquisa, a formação com professores/professoras é entendida como um processo de forma/ação (BICUDO, 2003). Isso quer dizer que a formação abarca a constituição em totalidade do ser, a qual não se encerra em processos formais educativos, mas, também, está ligada às vivências, às concepções, às práticas. Portanto, o ato de formar-se não acontece num curto período, no qual o sujeito pode armazenar informações e se estabelece, mas, acontece por meio de um “[...] movimento contínuo, no qual a ação de dar forma persegue a constituição do ‘ser’ em sua totalidade [e] que compreende as dimensões profissional, social, emocional e todas que subsidiam esse ‘ser’, no decorrer de suas ações, formam o professor [...]” (CALDEIRA, 2016, p.27). A forma/ação consiste no movimento de constante busca dos processos de constituição cognitiva, social, ética, etc., envolvendo diversos aspectos simultâneos desse “ser” que está no mundo e que é com o mundo.

Segundo Cadeira (2016), essa perspectiva de forma/ação com professores/professoras apresenta especificidades quando aliada às TD, pois, de acordo com Rosa (2015) e Seidel (2013) não estamos interessados em uma formação na qual às TD surgem para facilitar ou agilizar os processos de ensino e de aprendizagem. Igualmente, nosso interesse também não

é elencar ou sugerir características que o/a professor/professora “deve ter” para o trabalho com TD, visto que novas tecnologias surgem rapidamente e seria inviável que antes de utilizá-las o/a professor/professora as “dominasse”. Então, entendemos a formação com TD como um processo aberto, o qual vai se modificando ao longo do tempo, reconstruindo o ser professor/professora, e não como uma reprodução de metodologias.

Essa concepção de formação, assumida por nós, traz características específicas do que entende ser a matemática, do que compreende por ensino e por aprendizagem, e do porquê inserir Tecnologias Digitais (TD) nas aulas de matemática. Essas especificidades constituem uma concepção teórica chamada Cyberformação.

2.3.2 Cyberformação com professores/professoras de matemática

A Cyberformação defende a não reprodução de atividades já feitas em outros materiais, como, por exemplo, livros didáticos, materiais manipulativos e sequências didáticas, dando a elas apenas uma “nova cara” em que os recursos tecnológicos são utilizados somente por modismo, por exemplo. Ao fazer isso, entende o aparato tecnológico como materialidade expressa com a qual se realiza o processo cognitivo, trazendo aspectos que são específicos da tecnologia, que podem contribuir para potencializar esse processo. Assim, a nomenclatura “Cyberformação” é composta por duas ideias centrais em conjunto, “cyber” e “formação”. O termo “formação”, como já explicitado anteriormente (forma/ação) é a ação contínua de dar forma (BICUDO, 2003). No entanto, não é uma forma como sendo objeto ou produto extraído de uma forma, como se houvesse uma produção massiva de bolos, por exemplo. A forma aqui é dada pela compreensão das múltiplas dimensões do “ser” professor/professora, as quais se moldam em fluxos contínuos e que perseguem um estado “ideal” que se concebe como jamais aprendido, atingido, mas perseguido por meio dos atos de “ser”, de “pensar” e de “saber-fazer”. A forma/ação, ou ação de dar forma é plástica, artística, estética, ética, crítica... e compreende que essa ação, esse processo, não é conclusivo em definitivo, pois, é movimento contínuo.

Na Cyberformação, então, o prefixo “cyber” é o indicativo da inserção de TD, trabalhando com ambientes cibernéticos e “[...] todo aparato tecnológico que a eles se vinculam e/ou produzem, como fator proeminente dessa formação” (ROSA, 2011, p. 2). Esse aparato caracteriza-se como fator proeminente, partícipe do processo de constituição do conhecimento e que amplia e/ou potencializa esse processo.

Logo, a Cyberformação se dá na relação entre as várias dimensões que constituem a formação em sua totalidade, como, por exemplo, dimensão psicológica, dimensão cultural, dimensão histórica, etc. Nesta pesquisa, focamos na dimensão específica (no caso, matemática) e ao voltarmos o nosso olhar para essa dimensão, como quem faz “um recorte”, não significa que deixamos de lado que a Cyberformação se dá na relação dinâmica entre as diferentes dimensões. Constatamos, então, que não poderíamos desconsiderar o contexto no qual estamos inseridos, investigando a constituição do conhecimento matemático de uma professora com TD de RA, ou seja, “[...] sobre processos e recursos tecnológicos e sua produção, [é possível evidenciar] que tanto a formação específica como a pedagógica, as quais não se desvinculam da formação tecnológica, se fazem presentes na imersão dos professores no mundo cibernético.” (ROSA, 2015, p. 70). Portanto, entendemos ser importante também atribuímos sentidos às dimensões pedagógica e tecnológica.

A dimensão específica que neste estudo trata-se de matemática, elenca características específicas do assunto com a intenção de que os sujeitos em formação compreendam suas relações com o contexto. Falamos da dimensão específica referindo-se a ela como dimensão matemática e buscando “[...] possibilidades de contextualização da prática docente, aspectos específicos da matemática para que ocorra o ensino e a aprendizagem [...]” (CALDEIRA, 2016, p.29) e “[...] relações implícitas à própria matemática como linguagem, como ferramenta e/ou campo de estudo” (ROSA, 2015, p.67). De acordo com Seidel (2013), então, a dimensão matemática deve compreender uma matemática que vai sendo constituída pelo ambiente e pela intencionalidade das pessoas que a vivenciam, trata-se de uma matemática aberta, que não está concluída, pronta, mas, se constitui no ambiente, proporcionando a constituição do conhecimento matemático, segundo Rosa (2015), o fazer matemática.

Nos estudos de Vanini (2015) e Caldeira (2016) fica compreendido que na concepção da Cyberformação, a dimensão matemática não se refere apenas à matemática acadêmica ou escolar, defendida como soberana, mas, à uma matemática que faça sentido. Assim, consideramos a matemática emergente no contexto da RA como uma matemática que faça sentido, visto que é no trabalho com RA, é no contexto próprio da RA que o/a usuário/usuária poderá perceber elementos que, muitas vezes, só são possíveis de se perceber ali, e vai alternando sua maneira de participar neste contexto, ou seja, constituindo o conhecimento.

A dimensão pedagógica, por sua vez, refere-se ao processo em que as tecnologias passam a integrar os processos de ensino e de aprendizagem, transformando-os. Segundo Seidel (2013), a dimensão pedagógica representa as “[...] ações pedagógicas que ocorrem com o mundo cibernético [...]” (SEIDEL, 2013, p.61), apresentando, então, formas de pensar,

refletir e agir sobre algo que só seja possível com o uso da TD, deixando de lado os métodos que se baseiam em sequências do tipo, “faça isso, depois faça isso”, como se fossem “receitas”, em uma linearidade perceptível.

A dimensão tecnológica está justamente relacionada à inserção das TD na perspectiva do ser-com, pensar-com e saber-fazer-com-TD, as quais são ações descritas em relação ao trabalho educacional com TD (ROSA, 2008, 2015, 2018). Nesse sentido, a concepção da Cyberformação considera as TD como partícipes na constituição do conhecimento, sendo de extrema importância, como dito na dimensão pedagógica, pois, possibilitam conclusões que sem elas não seriam possíveis ou que sem elas não haveria certa abertura a novas questões e conjecturas, o que justifica sua inserção por seu caráter potencializador.

Assim, o ato do ser-com-TD é o movimento do “ser”, que se manifesta no mundo, com o seu entorno, e as TD, então, se fazem no mundo, são o mundo com ele, então, não como uma associação estanque entre o ser humano e a tecnologia, mas, como ação intencional de transformação deste devir do “ser”, constituindo-se em *com-junto*, pois,

“Com” [...] [as TD], [...] há a necessidade de um meio físico [...] para que o ser cibernético possa: pensar, agir, sentir, imaginar, etc. Ou seja, cognitivamente estou com o mundo cibernético o tempo todo. “Junto”, pois é no processo que o ser existe, é contextualizado, é junto ao mundo construído no ciberespaço [ou com outro aparato tecnológico] que ele se presentifica. De todo modo, me presentifico no decorrer da minha vivência no ciberespaço, ou seja, no vir-a-ser com os outros, com o mundo e comigo mesmo [...]. (ROSA, 2008, p.81).

Ou seja, são possibilidades de o sujeito vivente se atualizar em materialidades como bits, avatares, imagens, sons, expondo-se. Desse modo, as TD se tornam meio pelo qual o “ser” se desvela ao mostrar-se.

Conforme Rosa (2008, p.83)

[...] quando me percebo no mundo cibernético, há uma ação reflexiva sobre esse processo e dessa forma construo minha identidade virtual de modo a estabelecer relações com os outros e com o mundo, que também ajudo a construir por me fazer presença nele. É uma ação cognitiva que me leva a estabelecer uma multiplicidade de [...] [sentidos] e relações com o mundo e com as múltiplas possibilidades de ser neste tempo/espaço específico.

Assim, entendemos que cada pessoa que está conectada às TD pode realizar diversas transformações já que “[...] tudo que vemos em formato digital – palavras, números, imagens, animações – torna[m]-se mais [...] suscetíveis a mudanças.” (MURRAY, 2003, p.153).

Essas mudanças podem acontecer também no contexto educacional, quando a presença das TD se revela como uma materialidade que é enlaçada pela intencionalidade, ou seja, quando o sujeito vivente busca compreender ou resolver algo que para ele/ela está sendo solicitado. Assim, entendemos as TD como meio, não no sentido limitado aos meios de comunicação, mas, como algo que possibilita alcançar um fim, no caso, a constituição do

conhecimento matemático. Sendo então, uma mídia que pode possibilitar a mudança de perspectiva e alterar a performance humana.

As TD no contexto educacional

Não são entendidas como próteses, pois não substituirão o ser humano e nem parte deste. Próteses dentárias, ortopédicas etc. substituem ou repõem o que falta no ser humano. São seus complementos e não necessariamente estão envolvidas no processo de pensar. Da mesma forma, a mídia não é entendida como ferramenta, pois ela não ocupa um papel de suplementação para o ser humano, como uma chave de fenda, por exemplo, que é usada para tornar o trabalho mais ágil, mais eficiente ou mais econômico. Ou seja, a mídia não é mera extensão do homem. A mídia está envolvida no próprio pensar. (ROSA, 2018, p. 260)

Nesse ínterim, compreendemos as TD como partícipes no movimento de constituir conhecimento, de forma que cada um/uma possa se perceber com elas, assim como constituir conhecimento nas relações com o mundo e com os outros.

Nessa constituição do conhecimento, o pensar-com-TD é o ato de pensar que emerge com/pelos meios tecnológicos, caracterizado pela imersão no ambiente cibernético, revelando que “[...] a tecnologia envolvida no processo cognitivo não está ali para agilizar o processo somente, mas participa efetivamente da [constituição] [...] do conhecimento.” (ROSA, 2015, p.74), ou seja, o pensar-com-TD, por exemplo, “[...] se consolida se esse uso considerar a mídia como parte do processo cognitivo, como meio que abre diferentes fronteiras, diferentes horizontes de pensar sobre o mesmo tópico matemático.” (ROSA, 2015, p.75).

Também, o saber-fazer-com-TD, conforme Rosa (2008), caracteriza-se pela *agency*, compreendida como a ação com vontade e senso de realização, como ato performático, o qual é narrativamente constituído de diversos modos e, em muitos casos, com diferentes recursos. Assim, segundo Rosa (2008, p. 123), é o “[...] agir no sentido de fazer, construir, produzir, projetar”. O saber-fazer-com-TD, então, identifica o ato de agir com intencionalidade, de forma que ao fazer, me perceba fazendo e reflita sobre isso. De acordo com Bicudo e Rosa (2013, p.87), a intencionalidade é entendida

[...] como um fio invisível que nos mantém plugado a tudo o que nos cerca e que também traz o sentido percebido em um fluxo em que fluem ações conscientes, como às físico, psicológico e espirituais, abrindo possibilidades de ações reflexivas, em que nos damos conta de nós mesmos, de nossas ações e do que dizem.

Segundo Caldeira (2016) esse fio condutor é fundamental para a *agency*, nos mantendo plugados a tudo que nos cerca, a dinâmica das dimensões, a perspectiva de trabalho com as TD no processo de forma/ação, o saber-fazer-com-TD, tudo está interconectado e é interdependente.

Considerando que as TD podem transformar e/ou potencializar a maneira de fazer matemática, baseado nos atos de ser-com, pensar-com e saber-fazer-com-TD, passamos a pensar no ambiente mundano-cibernético criado com o uso da TD de RA, especificamente.

2.3.3 Cyberformação-com-TD de RA

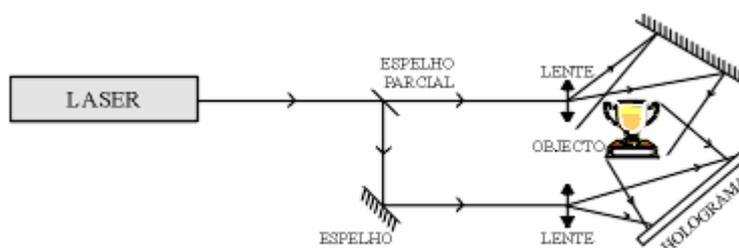
A Realidade Aumentada, conforme explicitado anteriormente, possibilita uma experiência diferente da decorrida ao utilizarmos um computador. A RA possibilita ao/a seu/sua usuário/usuária maior liberdade para interagir, já que por meio da composição entre objetos virtuais e mundanos, podemos “tocar”, circundar e visualizar os objetos em um ambiente 3D, o que pode possibilitar um grau de compreensão maior sobre ele, comparado a sua visualização apenas por meio de uma projeção 2D.

O ato de tocar ao estarmos no contexto de RA não se refere ao contato físico, no sentido do tato. Tocar, no contexto da RA, refere-se a visualizar de maneira sobreposta, de modo que possamos manipular o objeto virtual utilizando o nosso corpo biologicamente encarnado, mas sem a possibilidade de descrever a textura do que tocamos. Também, de modo específico podemos circundar os objetos virtuais. O ato de circundar extrapola o significado literal do verbo, que é estar em volta, rodear, já que no contexto da RA podemos romper a limitação de observação externa do objeto virtual. Romper essa limitação de observação, significa que podemos entrar no objeto, mas esse entrar não é como quem entra numa piscina, é um entrar onde podemos nos acoplar a ele, unindo-nos, compondo-nos.

Entendemos que essa materialidade, criada no contexto da RA, permite uma releitura, interferindo no nosso modo de pensar e agir, já que quando nos “plugamos” às TD, nos transformamos, como, por exemplo, em um jogo, “[...] identifico-me com a personagem do jogo, lanço-me, plugo-me ao mundo digital e sou, sentindo-me estar sendo, aquele que investe na aventura” (ROSA, 2015, p.71) e assim sou-com-TD e me identifico no ambiente cibernético. Do mesmo modo, ao estarmos com o ambiente de RA, embora estejamos em uma composição, nos sentimos “investindo na aventura”, já que somos o ciberespaço, nos presentificamos “[...] no “ser-com”, em “com-junto”, ser e ciberespaço. Devido a isso, esse ser é múltiplo, pois o ciberespaço também o é. Há uma multiplicidade de seres, os quais variam com o ciberespaço, enquanto mundo; com os outros pertencentes a esse mundo [...]” (ROSA, 2008, p.79), ou seja, no contexto da RA, especificamente em nossa pesquisa, os holográficos possibilitam uma ação reflexiva da professora/pesquisadora, possibilitando a ela ser-com-TD de RA. De acordo com Rosa (2017), o vocábulo “holográficos” é constituído a

partir da ideia de gráficos com aspectos de hologramas. Hologramas são imagens tridimensionais obtidas a partir de projeção de luzes sobre figuras. Podendo ser pensados como “fotografias em três dimensões”, os hologramas se formam por meio da propriedade ondulatória da luz (CIÊNCIA VIVA, 2020). Diferem-se das fotos tradicionais (2D) pois estas registram somente a intensidade das ondas luminosas, enquanto que os hologramas gravam também as saliências e vales de ondas criando, com o auxílio de raio laser, as imagens em 3D. Então, sua criação consiste, basicamente, na propagação de luz em somente uma direção (por isso o uso de laser), em um filme hipersensível. A luz do raio é dividida em dois feixes: um ilumina o objeto e reflete sobre o filme e o segundo ilumina diretamente o filme (TECHTUDO, 2015).

Figura 4: Esquema para criação de um holograma



Fonte: Ciência Viva (2020)

Hologramas não são uma tecnologia tão recente, já que sua criação está datada em 1948 (TECHTUDO, 2015), em suas versões mais simplificadas podem ser encontradas em diferentes situações cotidianas, como por exemplo, em cartões de crédito, onde são usadas para evitar falsificações (Figura 5).

Figura 5: Holograma em cartão de crédito



Fonte: a pesquisa

Porém, suas projeções mais elaboradas não são tão comuns assim e geralmente estão associadas a filmes futurísticos e de ficção científica (Figura 6).

Figura 6: Interação com holograma 3D



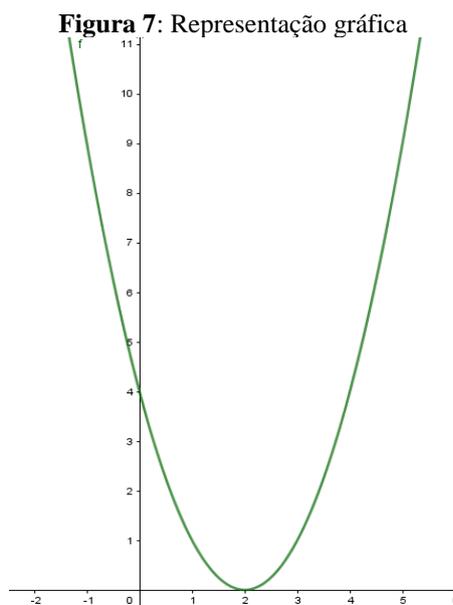
Fonte: Filme “Iron Man 3”

No entanto, para nós, as projeções que estudamos apresentam características que as diferem desses hologramas por serem criadas não por esquemas com feixe de luzes, mas, por meio de smartphones, extrapolando assim a questão dinâmica e corpórea. Além de apresentarem características de gráficos matemáticos, uma vez que, a origem da palavra gráfico vem “[...] do grego *grapho*, corresponde a fazer marcas, desenhar, marcar uma pedra, um pedaço de madeira ou uma folha de papel. Pode também ser traduzido para *graphein* também por escrever.” (GRÁFICO, 2020). Logo, para nós, desde a origem da palavra gráfico, é possível identificar a necessidade de se fazer entender e/ou explicar com registros visuais no intuito de organizar e contribuir com a compreensão.

Atualmente, na Matemática Acadêmica, existem várias representações gráficas utilizadas nas mais diferentes situações. Dentre essas representações destacamos: gráfico de coluna, histogramas, gráfico de setor, gráfico de linha, etc. Na maioria desses gráficos é possível encontrarmos o eixo cartesiano, onde identificamos uma relação entre as variáveis que estão sendo representadas por ele. Dentre esses gráficos, destacamos a definição de gráfico de funções de uma variável.

De acordo com Lima (2006), o gráfico de “[...] uma relação R entre os conjuntos X e Y é o subconjunto $G(R)$ do produto cartesiano⁸ $X \times Y$ formado pelos pares (x, y) tais que $x R y$. Assim, $G(R) = \{(x, y) \in X \times Y; x R y\}$ ” (LIMA, 2006, p.81), ou seja, quando existir uma relação R , entre os conjuntos X e Y , o subconjunto dessa relação será o par ordenado (x, y) , contido no produto cartesiano $X \times Y$. A figura formada por esses pontos é o que chamamos de “curva” da função (Figura 7).

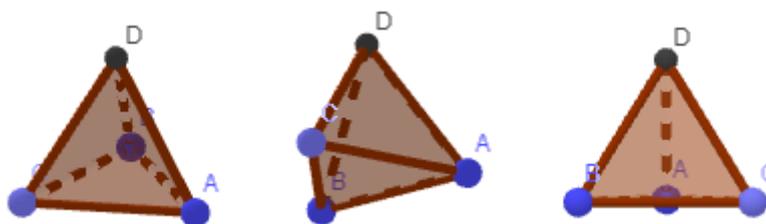
⁸ “O produto cartesiano $X \times Y$ de dois conjuntos X e Y é o conjunto $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados (x, y) cuja primeira coordenada x pertence a X e cuja segunda coordenada y pertence a Y .”. (LIMA, 2013).



Fonte: a pesquisa

Existem diferentes softwares para traçar gráficos, entre eles destacamos: GeoGebra 2D e 3D, Minitab 18, Graphmatica, entre outros. Todos os softwares citados projetam gráficos com visualização planificada, ou seja, apresentam uma visualização estática ou com movimentação restrita, onde mesmo que seja possível visualizar o gráfico por diferentes ângulos, essa se dá de maneira planificada, como podemos observar na Figura 8.

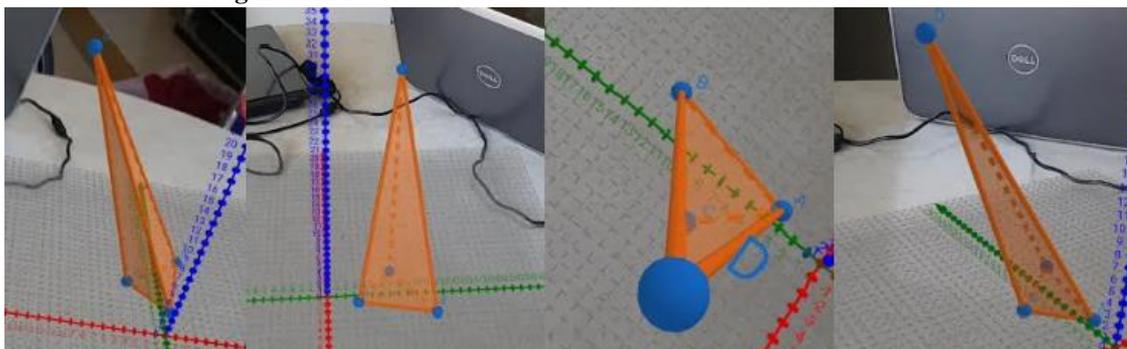
Figura 8: Diferentes vistas de um tetraedro no GeoGebra 3D



Fonte: a pesquisa

Nesse sentido, não restringimos a nomenclatura da projeção dos objetos virtuais no contexto de RA a gráficos e no caso da Figura 8 a grafos possíveis, pois, esse ambiente possibilita uma interação enriquecida com esses objetos. O envolvimento do/da usuário/usuária ao buscar as diferentes vistas de um tetraedro (mesmo sólido pensado no GeoGebra), por exemplo, requer mais do que a manipulação de mouse e teclas de computador. Esse envolvimento se dá na totalidade do corpo-próprio do/da usuário/usuária naquele momento, já que o seu movimento corpóreo, por exemplo, se torna indispensável para que essas diferentes vistas sejam possíveis (Figura 9).

Figura 9: Diferentes vistas de um tetraedro no GeoGebra AR



Fonte: a pesquisa

Pressupomos que olhando para as Figuras 8 e 9, o/a leitor/leitora venha a pouco perceber sobre a discussão acima apresentada, já que em ambas apresentamos imagens planificadas. Em uma tentativa que se evidencie essas diferenças, convidamos o/a leitor/leitora a aproximar a câmera do seu smartphone ao *QR Code*⁹ abaixo e assistir o vídeo¹⁰ que gerou as vistas da Figura 9.

Figura 10: QR Code: diferentes vistas



Fonte: a pesquisa

Entendemos que esse envolvimento em sua totalidade é, por si só, algo que modifica a constituição do conhecimento, pois, essas diferentes visualizações permitidas pelo ato de mover-se em torno do gráfico se dão de maneira diferente do que manipular um gráfico planificado. Essa totalidade de ações permite que, no contexto da RA, o/a usuário/usuária conecte-se com o holográfico, transformando-se, utilizando do seu corpo biologicamente encarnado não mais de forma restrita aos sentidos expressos na realidade mundana, mas passando a ser “[...] alguém que se caracteriza por estar com as tecnologias.” (ROSA, 2015,

⁹ Código QR é um código de barras bidimensional que pode ser facilmente escaneado usando a maioria dos smartphones. Esse código pode ser convertido em texto (interativo), e-mail, sites, links, vídeos e etc. (WIKIPÉDIA, 2020).

¹⁰ Esse vídeo também está disponível na plataforma YouTube por meio do link: <<https://www.youtube.com/watch?v=YPsd-QcM0Zk>>

p.70), ou seja, só existe na conexão, só se presentifica com o plugar-se (BICUDO; ROSA, 2010), pois as TD de RA é que sustenta essa vivência, no contexto próprio dela. Segundo Rosa (2015) essa TD se torna mídia envolvida, ou seja, torna-se o meio para abrir conexões com o contexto da RA. Assim, entendemos que é nessa transformação que o ser existe, sendo contextualizado, revelando a concepção de ser-com-TD de RA.

Ao explicitarmos “[...] a concepção de pensar-com para uma completa indissociabilidade “ser” [...]” (ROSA, 2008, p. 117) e contexto de RA, entendemos que podemos estar nos tornando *cyborgs*, ou seja, é “[...] a percepção de quem somos quando estamos conectados à máquina, quando estamos inseridos em um ambiente virtual [contexto de RA], no qual a simbiose entre [corpo-próprio] [...] e computador [no nosso caso, TD de RA] pode acontecer [...]” (ROSA, 2008, p.117). Nesse sentido, o nosso corpo biologicamente encarnado compõe o ambiente mundano, ampliado pelo virtual na RA, fomentando a discussão da relação entre o “ser”, o “pensar” e o “saber-fazer-com-essa-TD”. O corpo é compreendido por nós, em sua totalidade, não sendo fragmentado em corpo físico e consciência, mas como unidade, assim, “[...] a experiência do corpo próprio (...) revela-nos um modo de existência ambíguo.” (MERLEAU-PONTY, 1999, p.268). Assumimos, então, o termo corpo-próprio, como modo de dizer desse organismo singular, que não é sem a materialidade do seu corpo, nem do mundo onde se encontra. Ao estarmos no mundo com TD de RA, somos com ele, nos presentificamos em uma faceta própria desse contexto, onde temos o corpo-próprio-com-TD de RA.

Diante do que foi discutido anteriormente sobre Cyberformação, entendemos que ao estarmos inseridos/inseridas no contexto de RA, vivenciando-o, experienciando-o, abarcamos a experiência vivida por meio da percepção e essa possibilita o ser-com-TD de RA. Nesse sentido, por meio do ato reflexivo, o ser-com-TD de RA enseja o pensar-com esse contexto, de modo a, estando plugados/plugadas, nos permitir saber-fazer-com-TD de RA, ou seja, habitar a RA intencionalmente em uma forma diferenciada daquela vivida na realidade mundana, exclusivamente (ROSA, 2017).

Essa experiência vivida no contexto da RA, segundo Rosa (2017), também é uma experiência estética, pois, não visualizo as TD em termos de todo seu engenho analítico, onde sua programação e meios para que fossem possíveis são prioritariamente valorizados, mas, porque olho para o contexto da RA, como algo que fascina, que remete-me a especulação, por ser um substantivo que “[...] designa qualquer análise, investigação (...) independente de doutrinas” (ABBAGNANO, 2003, p.367). Assim, durante essa experiência que nos remete à vivência que permite explorar/experimentar o belo, em nosso contexto específico da RA,

vivenciar as informações que os holográficos evidenciam, mostrando-se a partir do movimento, da cor, da composição com o mundano, e de todas as relações que se façam com esses aspectos para que se constitua conhecimento matemático, os atos de ser-com, pensar-com e saber-fazer-com TD de RA, muitas vezes são expressados pela oralidade.

Nessa perspectiva, destacamos em nossa pesquisa a oralidade, pois, segundo Maltempi e Rosa (2004), é por meio dela que se dá, na maioria das vezes, o processo de descrição/expressão de ideias. Entretanto, entendemos que quando estamos com RA, a oralidade pode adquirir características únicas, extrapolando a “[...]noção de diálogo [que] tem sido desenvolvida (...) com base na possibilidade de contato direto, onde as pessoas compartilham o mesmo espaço físico.” (BORBA; PENTEADO, 2012, p.80) e também do diálogo existente entre pessoas à distância, pois, não necessariamente há uma interlocução com outra pessoa, mas, consigo mesmo. Ou seja, a própria experiência estética permite que haja um sentimento que venha a ser correlacionado, em termos de linguagem, à apóstrofe que “[...] é a invocação de algo ou alguém pra indicar e expressar algum sentimento como surpresa, indignação ou outros” (CORTES, 2020, n.p) . No caso, essa figura de linguagem é pontual, momentânea, mas emerge quando se está com algo evoca, chama a atenção. Mais que isso, permite que se “fale consigo mesma(o)”, para não dizer “fale com o smartphone” ou “fale com o tablet”.

Diante do apresentado até aqui, passamos a pensar no ambiente-cibernético criado com o uso das TD de RA como um contexto situado de aprendizagem e, para tanto, explanamos os pressupostos da Teoria da Aprendizagem Situada a seguir.

2.4 APRENDIZAGEM SITUADA

Os estudos sobre Aprendizagem Situada (LAVE, 1991) e Cognição Distribuída (SALOMON, 1993), surgiram, para investigar as relações entre cognição e contexto social, focalizando não somente os processos individuais mas também coletivos de construção do conhecimento, considerando o conhecimento, o pensamento e o significado como produções da atividade social (ALMEIDA, 2012).

Os primeiros estudos sobre Aprendizagem Situada iniciaram-se na década de 80, quando Lave teve a concepção de que a aprendizagem é uma questão de participação em prática. Nessa perspectiva, *Cognition in practice*, de Jean Lave, é uma obra em destaque, sendo publicada pela primeira vez em 1988. Na obra, a autora desenvolveu um projeto de Matemática para Jovens e Adultos nos Estados Unidos, cujo objetivo foi investigar o uso da

aritmética, observando os/as participantes da pesquisa em diferentes contextos, considerando primordialmente situações que não são consideradas acadêmicas, ou seja, não acontecem em sala de aula, como, por exemplo, o ato de fazer compras no supermercado, cozinhar e/ou fazer dietas.

No estudo de Lave (1991), para descobrir maneiras de teorizar na prática cotidiana, algumas situações forneceram descrições detalhadas, como a compra de um macarrão, pesquisando a marca, o preço, a quantidade. Durante uma compra de macarrão, tanto os/as participantes da pesquisa de Lave (1991) quanto nós, ao escolhermos se levamos o pacote maior ou o menor comparando seus preços, não somos influenciados/influenciadas somente por essas duas grandezas e suas relações implícitas, mas também por outros fatores que estão envolvidos neste ato. Questões que possivelmente podem surgir são: ao comprar o pacote maior e pagar mais, mesmo que valha a pena em termos de preço versus quantidade, terei dinheiro para comprar os demais itens necessários? É vantajoso que eu armazene uma quantidade maior de macarrão ou espere para comprar mais quando for necessário? Desse modo, a aprendizagem de matemática pode se dar nesse contexto, de maneira que os problemas a serem resolvidos surgem por meio de uma situação e sua resposta é desenvolvida durante o problema (LAVE, 1991).

Destacamos um trecho do livro *Cognition in practice*, na qual a autora propõe uma reflexão sobre a aprendizagem de matemática sob uma visão situada:

Só há três ou quatro maçãs em casa, e tenho quatro filhos; isso será ao menos duas por cabeça nos próximos dias. Este tipo de coisas que tenho que repor. Só disponho de um pouco de espaço na geladeira, portanto não posso enchê-la completamente... Agora estou em casa durante o verão, são boas para comer entre as refeições. (MURTAUGH, 1985, p.188 *apud* LAVE, 1991, p.18, tradução nossa¹¹).

De acordo com Lave (1991), esse problema vai além do problema matemático convencional, dividir as maçãs pela quantidade de pessoas que moram nessa casa, possibilitando diferentes resoluções. Antes de realizar a simples divisão das maçãs por pessoas, surgem outras questões que devem ser levadas em consideração, visto que são essenciais para se chegar a uma conclusão, por exemplo, todos/todas os/as moradores/moradoras comem maçãs? Quem precisa de uma ingestão maior das vitaminas presentes nesse alimento? Ou quem está com maior fome no momento? O que é mais importante, tomando o “mais” como recurso matemático comparativo? Com isso queremos

¹¹ “Sólo hay tres o cuatro (manzanas) en casa, y tengo cuatro hijos; eso serán al menos dos por cabeza en los próximos tres días. Este es el tipo de cosas que tengo que reponer. Sólo dispongo de un cierto espacio en la nevera, por lo que no puedo llenarla completamente... Ahora que estoy en casa durante el verano, son buenas para comer entre horas.”

expor que esse problema se define na resposta e a resposta se desenvolve durante o problema, ou seja, problema e resposta se estruturam nessa situação, neste contexto. A resposta, então, depende da formação cultural ou social dada na situação, depende da análise da totalidade das atividades do grupo em que podem emergir os sentidos constituídos e expressos pela linguagem.

Contestando, então, abordagens cognitivistas e de transferência da aprendizagem, Lave (1991) defende que a unidade de análise, não é o/a indivíduo/indivíduoa, nem é apenas o contexto, mas a relação entre eles/elas, a dialética construída de maneiras particulares de experiências situadas.

Considerando o que já foi exposto, acreditamos que no contexto da RA, especialmente pela concepção de uso de TD defendida por nós, essa relação entre problema e resposta também se estabelece, já que é uma experiência diferenciada capaz de modificar a maneira como o/a usuário/usuária interage com os objetos virtuais, modificando a maneira de agir e pensar com esses objetos e com seu entorno mundano, propiciando que questões surjam somente ao estar nesse contexto. Assim, na RA, problema e resposta podem surgir amarrados, ou seja, podem surgir problemas e respostas que só sejam possíveis lá.

Dando continuidade aos seus estudos Jean Lave publica, juntamente com Etienne Wenger, sua obra mais conhecida *Situated Learning: peripheral legitimate participation* (1991). Neste trabalho, os/as autores/autoras começam a analisar a Aprendizagem Situada considerando o engajamento de participação na prática. Nessa pesquisa realizada com parceiras de Yucatec, alfaiates da Libéria, oficiais intendentess da marinha, açougueiros e alcoólicos anônimos, os/as autores/autoras observaram que os/as aprendizes de alfaiates, por exemplo, não reduziam a sua aprendizagem a repetições mecânicas ou situações intencionalmente didáticas, mas que aquela aprendizagem era inseparável da prática social. Igualmente acontecia com as parceiras, oficiais, açougueiros e alcoólicos anônimos. E a partir disso, conceituaram a aprendizagem situada como uma construção de conhecimento no engajamento em práticas sociais, em grupos sociais e/ou contextos específicos. No contexto específico da RA, entendemos que o engajamento de participação na prática se revela pela intencionalidade, ao se perceber com a RA, em uma mistura de realidade mundana e holográficos, há uma ação reflexiva situada, iniciada com a percepção de localização e pertencimento.

No artigo *The practice of learning*, Lave (1993) dá ênfase ao contexto, uma vez que Aprendizagem Situada diz respeito a pesquisas de pessoas agindo nos cenários cotidianos. O contexto é entendido como o mundo social constituído em relação às pessoas agindo. Dessa

forma, contexto e atividade são flexíveis e estão em constante mudança. Segundo Lave (1993) “[...] estas mudanças no conhecimento e ação são centrais para o que nós chamamos de aprendizagem” (LAVE, 1991, p.24).

Lave e Wenger assumem que “[...] podemos entender a aprendizagem situada como algo contínuo de nossa participação no mundo [...]” (LAVE; WENGER, 1991, p. 31), sendo assim, “[...] a aprendizagem é um aspecto integral e inseparável da prática social.” (LAVE; WENGER, 1991, p. 31). Para os/as autores/autoras, conforme os/as aprendizes se relacionam ao participar no mundo, a sua maneira de participar vai se alterando já que vão conhecendo mais sobre o contexto, criando uma identidade e participando de uma maneira plena. Essa mudança na forma de participação em uma determinada situação não é linear, já que ao estarmos no/com o mundo sofremos alterações diárias, então um problema que ontem sabíamos responder, hoje pode configurar-se diferentemente.

Assim, a aprendizagem situada pressupõe que aprender é um processo no qual ocorrem elementos que configuram uma situação passível de grande diversidade de sentidos, de referências e analogias vinculadas às suas culturas de origem.

A natureza da aprendizagem situada é de caráter relacional entre o/a aprendiz e o contexto em que ocorre a aprendizagem. Assim, o/a aprendiz não é um/uma receptor/receptora passivo/passiva de conhecimento que está no mundo, ao contrário, é o engajamento integral (corpo, mente, sensibilidades e contexto) sobre as situações e com as situações que acarretam recíprocas mudanças. Sobre essas mudanças, Lave (1988), discute que a sociedade não é algo pronto, que deva ser internalizada pelos indivíduos. Segundo a autora, essa perspectiva traz em si premissas simplificadoras da homogeneidade cultural, emitindo “[...] uma teoria que contemple atores sociais ativos, localizados no tempo e no espaço, agindo reflexiva e recursivamente sobre o mundo em que vivem e que simultaneamente constroem.” (LAVE, 1988, p.8).

Dessa forma, entendemos que novos contextos podem surgir de acordo com as mudanças que acontecem diante da nossa participação no mundo, dentre essas mudanças, no nosso estudo, destacamos a inserção de tecnologias, especificamente, podemos destacar a RA. Essa, cria um novo contexto onde temos a realidade mundana sendo complementada por objetos cibernéticos, constituindo-se em uma única realidade (BICUDO; ROSA, 2010), que é a própria Realidade Aumentada.

Nesse ínterim, a aprendizagem se relaciona ao participar no/com o mundo e, para Lave e Wenger (1991) essa participação pode ser caracterizada como Participação Periférica Legítima (PPL). Assim, “[...] a participação periférica diz respeito a estar no mundo social.

Lugares e perspectivas em mudança fazem parte das trajetórias de aprendizagem dos atores, das identidades em desenvolvimento e formas de filiação”. (LAVE; WENGER, 1991, p. 36).

A PPL significa que os/as aprendizes participam de contextos e que quanto mais conhecem sobre eles vão sendo encaminhados/encaminhadas para uma participação mais ativa, chegando a sua participação plena. No entanto, nesta pesquisa questionamos essa linearidade no avanço da participação, pois consideramos que no mundo atual, as comunidades (sejam elas de trabalho, de profissionais, familiares, etc.) não se mantêm inalteradas por um grande período de tempo, o que dificultaria que o/a aprendiz tivesse completo domínio dela para que depois atingisse uma participação plena. Assim, entendemos que esse movimento de participação periférica para uma participação plena é um movimento contínuo e infundável, visto que em um determinado momento a nossa participação pode ser plena e após mudanças nessa comunidade voltar a ser periférica.

A PPL prevê que a relação entre novato/novata e veterano/veterana garante uma mudança na participação do/da novato/novata, já que nesse contato com o/a veterano/veterana, eles/elas podem conversar sobre suas experiências, suas atividades, tornando o/a novato/novata parte da comunidade de prática. A aprendizagem é considerada a mudança na forma de participação do sujeito, tornando-se um/uma membro/membra pleno/plena, engajado/engajada. Lave e Wegner (1991) argumentam que a aprendizagem situada frequentemente não é previamente planejada, e acontece quando os indivíduos participam cada vez mais de uma comunidade de prática. O/A aprendiz adquire conhecimentos, comportamentos e crenças estabelecidos na comunidade de prática, e isso ocorre à medida que ele/ela participa mais e mais de uma comunidade. Ao trabalharmos com tecnologias, é comum, encontrarmos pessoas que não fazem parte da comunidade acadêmica, por exemplo, mas que têm um domínio maior sobre elas. Isso deve-se ao fato de que as gerações mais novas nasceram em um mundo já plugado, onde as tecnologias são presença constante em suas vidas. Com isso, inferimos que não é, necessariamente, o/a veterano/veterana quem conduz o/a novato/novata para a participação plena na comunidade e por consequência proporcionando que ele/ela aprenda, mas a troca entre eles/elas que possibilita isso. Novamente estabelecemos essa relação como infundável, já que não acreditamos que em um dado momento (tempo/espço) o/a novato/novata esteja pronto/pronta, já tenha aprendido tudo com o/a veterano/veterana, ou vice e versa, mas, que essa relação possibilita uma mudança de participação e uma aprendizagem contínua.

Além disso, ao entendermos o indivíduo em sua totalidade, como discutido na seção de constituição do conhecimento, inclusive na relação com o contexto em que se situa,

inferimos que no contexto específico da RA, bem como em diferentes contextos de aprendizagem situada, os/as aprendizes, ou usuários/usuárias da TD de RA, não tem o papel de receptores/receptoras de conhecimento sobre os fatos relacionados a esse contexto. Já que a aprendizagem situada busca compreender as ações em um contexto no/com o mundo, o papel dos/das aprendizes se dá na mobilidade, articulação, experiência, ou seja, vivência no/com o mundo.

Lave e Wenger (1991, p.98) ainda revelam que “[...] a comunidade de prática é um conjunto de relações entre pessoas, atividade e mundo, ao longo do tempo e em relação com outras comunidades de prática tangenciais e sobrepostas.” Os/as autores/autoras defendem que a aprendizagem não acontece por repetição de uma dada instrução, ou por aquisição do conhecimento, mas na participação no currículo de aprendizagem no ambiente da comunidade (LAVE; WENGER, 1991, p. 100), o que ocorre em conjunto com diversas práticas que possibilitam a PPL e se “[...] relaciona a uma maneira de ser no mundo social e não de vir a saber sobre ele” (LAVE; WENGER, 1991, p. 100). Em nossa pesquisa, não temos uma inserção em uma comunidade de prática, como entendida pelos/pelas autores/autoras. Também, ao estarmos vivenciando o avanço tecnológico, entendemos que os pressupostos e argumentos trazidos pelos/pelas autores/autoras podem não ser consonantes ao momento atual. Dizemos isso, pois em 1991 quando os/as autores/autoras trataram as comunidades de prática como um conjunto de relações entre pessoas, estávamos ainda em um momento inicial da popularização das tecnologias, caracterizada segundo Borba, Scucuglia e Gadanidis (2016) como o início da segunda fase das tecnologias digitais em Educação Matemática, na qual as tecnologias ainda estavam associadas no âmbito da educação, especialmente da Educação Matemática, ao seu uso para a experimentação, visualização e demonstração. Porém, ao ter se avançado em relação ao papel das tecnologias na educação e nos processos de ensino e de aprendizagem, explicitados pela caracterização da quarta fase, na qual a telepresença e interatividade ganham força, entendemos que a aprendizagem em contextos situados também avança, especificamente, por termos avançado e modificado os espaços/tempos de comunicação e interação. Com isso, queremos dizer que, para nós, a comunidade de prática já não é mais entendida somente como um conjunto de relações entre pessoas juntas fisicamente, mas também ao estarmos com/no contexto criado pelas TD. Se antes as comunidades de prática possibilitavam relações de “[...] uma maneira de *ser* no mundo social[...]

 (LAVE; WEGNER, 1991, p.100), agora com as TD podem possibilitar uma maneira de ser-com-TD no/com o mundo.

Nessa perspectiva, a Prática Social refere-se ao fazer algo que não é disjunto de um contexto histórico social, pois, esse contexto oferece uma estrutura e um sentido a esse fazer. A prática social pode incluir linguagem, ferramentas, documentos, imagens, símbolos, critérios específicos, entendimentos e visões de mundo. Wenger (1998) destaca que embora tenha a nomenclatura de prática, é importante evidenciar que não existe uma separação entre teoria e prática. O autor esclarece que teorias são objetivas em si mesmas, mas, afirma que elas não estão desvinculadas de um contexto de determinadas práticas específicas. O processo de engajamento na prática sempre envolve a pessoa como um todo, agindo e conhecendo. A produção de uma teoria é uma prática em tal contexto (WENGER, 1998).

Para Wegner (1998), viver é um constante processo de negociação de significado e o engajamento no mundo é o principal aspecto desse processo. Essas negociações podem envolver a linguagem, embora não fiquem limitadas a ela. A negociação de significado contempla dois processos: a participação e a reificação.

A participação na comunidade de prática é um processo complexo que une o fazer, o falar, o pensar, o sentir e o pertencer, envolvendo a pessoa como um todo. Ela também vai além do envolvimento direto em uma tarefa determinada, pois, exige um reconhecimento mútuo, ou seja, a participação na comunidade de prática tem o potencial de transformação nos dois sentidos, do individual para o coletivo e vice-versa.

Entendemos que a discussão teórica feita até aqui permite indicar o contexto projetado ao trabalharmos com TD de RA, como um contexto de aprendizagem situada, onde nossas ações caracterizam o trabalho nesse contexto, de modo que me perceba nesse, sendo-com, pensando-com e sabendo-fazer-com-TD de RA.

3. LENTE METODOLÓGICA

Nossa investigação se caracteriza como uma pesquisa qualitativa, pois, está mais centrada no processo de compreender "*como se dá*", do que no resultado final (BOGDAN, BIKLEN, 1994). Uma vez que, estamos focando no entendimento e interpretação de dados e discursos, já que a intenção não foi coletar informações de um número grande de sujeitos, mas de analisar e compreender os dados produzidos por uma única professora, que é a professora/pesquisadora. Objetivamos responder à pergunta diretriz da pesquisa: "*Como se dá a constituição do conhecimento matemático de uma professora em Cyberformação com Tecnologias Digitais de Realidade Aumentada?*".

Em termos de pesquisa qualitativa, entrelaçamos nossas visões de mundo, de conhecimento e nossos procedimentos metodológicos. A escolha em analisar e compreender os discursos da própria professora/pesquisadora justifica-se por acreditarmos que nenhum instrumento avaliativo, como provas e trabalhos, por exemplo, são realmente capazes de avaliar a constituição do conhecimento, já que são informações coletadas em um determinado momento, de uma determinada forma, representando apenas um recorte de todo o processo.

Para que a professora/pesquisadora pudesse se perceber em Cyberformação e investigar a própria formação, o primeiro procedimento metodológico foi a matrícula como aluna no curso de extensão "Cyberformação com professores de matemática: o uso de Tecnologias de Realidade Aumentada". A matrícula no curso implicava na criação (segundo procedimento metodológico) e posterior trabalho com alunos/alunas da Educação Básica, com uma atividade-com-TD de RA (terceiro procedimento metodológico). Assim, uma vez que a visão de formação de professores/professoras da pesquisadora suscitava práticas de sala de aula que se identificavam com o que ela buscava e que essa, já acreditava em uma formação com professores/professoras que aconteça plugada ao mundo, o qual é abundantemente tecnológico, fez sentido buscar por uma formação que transcendia e que, possivelmente, favorecia o desejo natural de formação que a professora/pesquisadora vivenciava. Nessa perspectiva, coube registrar todos os momentos passados de forma subjetiva (construção e resolução de atividades-matemáticas), assim como, os momentos vivenciados com os/as participantes do curso, em especial sua dupla de produção da atividade, com os/as alunos/alunas no decorrer de trabalho com a atividade desenvolvida e com os/as integrantes de seu grupo de pesquisa. Consequentemente, se analisar participando desses momentos, refletindo sobre seu próprio movimento de constituição de conhecimento matemático na perspectiva da Cyberformação.

Com base nisso, a pesquisa objetivou investigar a constituição do conhecimento matemático da professora/pesquisadora nessa forma/ação, no decorrer do desenvolvimento de atividades-matemáticas-com-TD, trabalhando com Realidade Aumentada, visto que, a visão de conhecimento proposta no próprio curso, e que também é a assumida pela professora/pesquisadora, concebe o trabalho-com-TD como um ato pelo qual se pode “ser-com”, “pensar-com” e, conseqüentemente, “saber-fazer-com-TD”. Não obstante, tanto a visão de mundo, quanto a de conhecimento, atreladas à de forma/ação, incentivam a colaboração como processo natural de se estar comigo mesmo, com os outros e com o mundo, de maneira intencional. Uma vez que, atualmente, vivenciamos uma sociedade avançada tecnologicamente, através de recursos que surgem constantemente.

Este avanço tecnológico bem como todas as transformações sociais, permitem modificações no ensino, na aprendizagem e na formação com professores/professoras, se fazendo necessária a reflexão sobre esses processos com o uso desse aparato tecnológico. A partir disso, vamos contextualizar o ambiente da pesquisa.

3.1 CURSO DE EXTENSÃO

O curso de extensão intitulado "Cyberformação com professores de matemática: o uso de Tecnologias de Realidade Aumentada", ocorreu no período de 01 a 24 de junho de 2017. Este curso de extensão foi ofertado pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. A carga horária foi de 40 horas, sendo 12 horas presenciais, correspondentes a quatro sábados, 8 horas de leituras feitas a distância, 12 horas de planejamento de atividade em grupo com orientação dos ministrantes e 8 horas de trabalho com alunos da educação básica.

O primeiro encontro presencial do curso aconteceu no dia 03 de junho de 2017. Neste dia, os/as professores/professoras de matemática matriculados no curso puderam se familiarizar com o *software* Blender, com a Realidade Aumentada e com o aplicativo AndAr. Anteriormente a este encontro foi disponibilizado um manual, que contemplava as indicações de download e instalação dos recursos tecnológicos, bem como os pré-requisitos para a sua utilização, no caso do aplicativo AndAR, que necessita de um smartphone com sistema operacional Android. Neste encontro, foram exploradas algumas potencialidades do Blender, em especial o recurso que se refere a conceitos matemáticos, o “Z Math Surface”. Por exemplo, para adicionarmos uma função de duas variáveis reais no *software* Blender era preciso acessar o recurso “Z Math Surface” que estava disponível clicando, nesta ordem, nos seguintes comandos “Adicionar”, “Malha”, “Math Function” e “Z Math Surface”

O segundo encontro foi o momento em que a concepção de Cyberformação e o planejamento de atividade com Tecnologias Digitais foram discutidos, propiciando aos/às professores/professoras em formação continuada organizarem-se em grupos e elaborar uma atividade-matemática-com-TD de RA que pudesse ser desenvolvida com seus/suas alunos/alunas. A continuação desta atividade se deu no terceiro encontro, no qual os grupos testaram as suas atividades, observando os encaminhamentos que deveriam ser melhor explicados, os cuidados que deveriam ter antes e durante o desenvolvimento da proposta, além de pensar em quais questionamentos poderiam ser feitos para conduzir os/as alunos/alunas a alcançarem os objetivos estabelecidos. Os encontros de orientação individuais a cada grupo foram pré-agendados no decorrer das semanas, entre os encontros presenciais, por meio do Skype e/ou presencialmente.

O último encontro presencial foi para socializar as propostas didáticas feitas e a partir das sugestões para potencializá-las. Neste encontro também se comentou sugestões para alterações que poderiam ser feitas no curso, caso os ministrantes desejassem repeti-lo, e as principais aprendizagens de cada participante.

As horas dedicadas à leitura foram contempladas com os textos: "Manuais Blender e AndAr", disponibilizado pelos professores e "Educação Matemática, Tecnologias Digitais e Educação a Distância: pesquisas contemporâneas" (ROSA; BAIRRAL; AMARAL, 2015), a fim de contribuir para o entendimento da concepção de uso das TD sobre a perspectiva da Cyberformação e na elaboração da atividade.

3.2 ATIVIDADE-MATEMÁTICA-COM-TD DE RA

A atividade apresentada nessa seção refere-se àquela desenvolvida pela professora/pesquisadora e sua dupla. Ela foi desenvolvida em consonância com Design Instrucional (FILATRO, 2008), o qual em um dos encontros foi apresentado e discutido, considerando como elementos básicos na construção de atividades-com-TD de RA os que seguem, de acordo com a Figura 11.

Figura 11: Elementos Básicos na Construção de Atividades-com-TD-de-RA

| Elementos Básicos na Construção de Atividades-com-Tecnologias-Digitais-de-RA | |
|---|---|
| Conteúdo a ser trabalhado | É um recorte de determinado conteúdo, onde se destacará o tópico a ser estudado com as ações que a serem exploradas, pensadas-com-TD. |
| Temas e Objetivos | O tema de uma atividade é o assunto a ser abordado na atividade (ex.: arte, biologia, astronomia,...) e o objetivo é o que se deseja alcançar após se explorar a atividade (no caso educacional pode ser a aprendizagem, a revisão, a introdução de um determinado conteúdo, entre outros). |
| Descrição do Ambiente /Contexto em texto | É a construção do cenário da atividade. A ideia é fazer com que o objeto se ligue a que? Qual contexto? (uma galeria de arte, um microscópio, o espaço sideral etc...) |
| Chamado a Aventura / Convite a experimentação | É algo inusitado que acontece para que os estudantes se sintam convidados a explorar a atividade. |
| Enredo | É o desenvolvimento da atividade em si, as perguntas a serem lançadas, o uso das TD como partícipes do processo (início, meio e fim da atividade), onde ocorrem as ações, as situações desafiantes, as informações, entre outras ações. |
| Meta-enredo | É como se chama as ações em paralelo, ou seja, as alternativas, decisões a serem tomadas em separado da própria atividade (ex. pesquisa no Google, uso da calculadora, uso de outro software, cálculo com lápis e papel etc.). |
| Desafios | São situações presentes na atividade que fazem o estudante pensar, refletir, conjecturar, objetivando prosseguir na atividade. |

Fonte: a pesquisa

O conteúdo a ser trabalhado, destacado pela professora/pesquisadora e sua dupla, foi funções e geometria analítica. Na atividade, o tema era matemática e o objetivo construir um troféu para a gincana pedagógica. O contexto ou descrição do ambiente foi aquele no qual a construção ocorreu. Ou seja, a atividade foi desenvolvida em uma turma de 3º ano do ensino médio, do Curso Técnico em Plástico do IFSul, que é onde ocorre a gincana pedagógica. O convite à aventura, para que os/as alunos/alunas se sentissem convidados/convidadas a explorar a atividade, se deu a partir da seguinte provocação "a gincana do IFSul neste ano tem como tema "Volta ao Mundo", como de costume a premiação para as três melhores equipes será medalhas, vocês já pensaram se a equipe vencedora ganhasse um troféu? Como você gostaria que fosse esse troféu? Se você pudesse construir, como ele seria?". O enredo, que é a descrição das atividades em si, segue conforme a aplicação da atividade em sala de aula.

O segundo momento, então, foi o desenvolvimento da atividade¹² com os/as alunos/alunas, o qual ocorreu no período de 25 de julho a 22 de agosto de 2017, com 30 alunos. Este momento foi organizado em três encontros presenciais, referentes a 8 horas-aula.

¹² É importante destacar que o desenvolvimento do troféu foi executado anteriormente pela professora/pesquisadora e sua dupla (professora regente da turma em que a atividade foi aplicada), de forma a conhecerem as potencialidades da própria atividade e identificar problemas possíveis na construção de um troféu.

Previamente ao primeiro encontro, as professoras disponibilizaram para os/as alunos/alunas através do Q-Acadêmico¹³, o manual utilizado no curso de extensão para que os/as alunos/alunas pudessem instalar o *software* Blender e o aplicativo AndAr em seus celulares ou computadores. No primeiro encontro, foram apresentados alguns recursos do Blender e feita uma demonstração com o AndAr para que os/as alunos/alunas conhecessem os recursos. Neste encontro, foi feito o convite à aventura, com a intenção de mobilizar os/as alunos/alunas já que a atividade visava a criação de um troféu para a gincana escolar, que é um evento tradicional na escola e tem uma ampla aceitação. Os/as alunos/alunas foram orientados a trabalhar em grupos de 4 estudantes, nos quais pelo menos um/uma participante de cada grupo possuísse celular com sistema operacional Android, possibilitando assim a utilização do aplicativo AndAR. Ainda neste encontro os/as alunos/alunas, em grupos, tiveram um momento para que pudessem idealizar o troféu que gostariam de receber como prêmio, caso a sua equipe fosse a campeã, e manipular o *software* Blender. Importante destacar que na turma de 30 alunos, apenas uma menina já tinha utilizado o *software* para criar avatares para o jogo *The Sims*.

O segundo encontro foi dedicado para que os grupos trabalhassem na construção do troféu. Este encontro foi importante, pois houve várias interações entre alunos/alunas e professoras e alunos/alunas. Nestas interações os diferentes pares estiveram num processo de construção, no qual as professoras não eram as detentoras do domínio de todos os recursos do *software* Blender, mas, orientavam o trabalho ao mesmo tempo em que também aprendiam novos recursos com os/as alunos/alunas. Nesse encontro, também o pensamento matemático foi percebido com mais clareza, pois, aproveitando as dificuldades surgidas no decorrer da construção do troféu como, por exemplo, encaixar diferentes formas geométricas, os questionamentos foram sendo feitos pelos/pelas alunos/alunas às professoras e vice-versa. Em vários momentos os/as alunos/alunas estabeleceram relações entre as dificuldades encontradas, as soluções e a matemática envolvida na situação. Nesse sentido, os/as estudantes foram orientados/orientadas a se reunirem em horário extraclasse e finalizar os seus troféus, de forma que dúvidas poderiam ser expressas por e-mail e nas aulas “cotidianas” com uma das professoras.

¹³ O Sistema Q-Acadêmico é o software responsável pelo controle acadêmico do Instituto Federal Sul-rio-grandense. Através dele, os alunos podem ter acesso ao pedido de matrícula, horário de aulas, acompanhar suas notas, datas de prova, conteúdo de atividades disponibilizado pelos professores, data de apresentação de trabalhos, boletim, histórico, matriz curricular do curso, podem trocar mensagens com o professor ou com a coordenadoria. Para acessar o sistema, os alunos deveriam utilizar sua matrícula e senha. Disponível em: <http://qacademico.ifsul.edu.br/>. Acesso em 24 de março de 2018.

O terceiro encontro foi destinado para a apresentação dos troféus construídos pelos grupos à turma. Neste encontro os/as alunos/alunas puderam contar os procedimentos que haviam adotado para superar as dificuldades encontradas no processo e relatar o que acreditavam ter aprendido nessa atividade. Os/as alunos/alunas entregaram, neste dia, um relatório individual no qual descreveram a sua experiência ao participar dessa atividade, utilizando principalmente linguagem matemática como forma de identificar o que foi produzido.

3.3 RECURSOS UTILIZADOS

Nesta pesquisa, então, foram utilizados, os recursos tecnológicos de Realidade Aumentada: *software* Blender aliado com o aplicativo AndAR, o Geogebra Augmented Reality (RA) e o 3D Calculator. Nessa seção apresentaremos e descreveremos os *softwares* e aplicativos utilizados no processo de produção de dados.

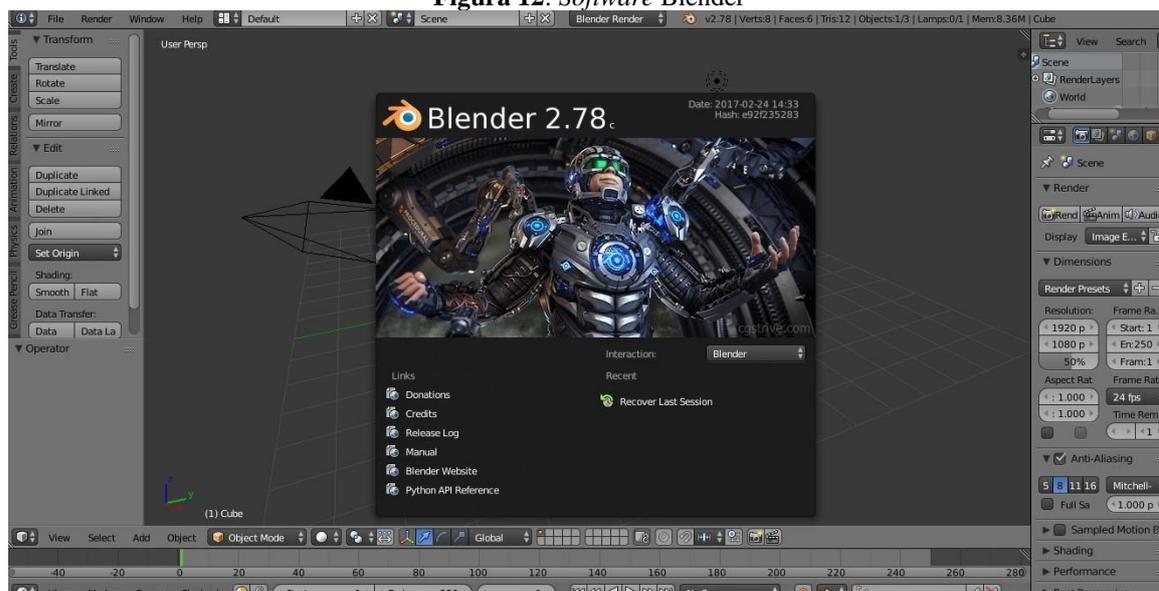
3.3.1 Blender

O Blender é um *software* de modelagem e animação em três dimensões (3D). Por possuir um código aberto, seus/suas usuários/usuárias podem acessar informações da programação envolvida em todos os seus recursos. O *software* Blender é um programa de computação gráfica que permite produções de alta definição de imagens e animações, pode ser usado livremente para diferentes finalidades, utilizando noções de Geometria, Funções de duas variáveis reais, entre outros (GUMSTER, 2015).

A escolha do *software* Blender justifica-se, pois além de ser gratuito e ter uma grande quantidade de recursos, pela sua possibilidade em salvar arquivos com extensão wavefront¹⁴ compatível com o aplicativo AndAR, que foi utilizado para o uso da Realidade Aumentada na plataforma Android. O *software* destacou-se por ter uma funcionalidade pela qual é possível gerar gráficos de funções matemáticas, o “Math Function”. Esse recurso nos permite trabalhar com funções de duas variáveis reais com o *software*, sendo uma janela de álgebra, na qual conseguimos digitar a função.

¹⁴ Formato de arquivo para definir objetos em 3D.

Figura 12: Software Blender



Fonte: a pesquisa

O *software* está disponível para download no site oficial¹⁵, na área específica para download, podendo ser utilizado em várias plataformas: Windows, Mac OSX e Linux (GRUMSTER, 2015). A instalação, indiferentemente da plataforma, segundo Resende (2016) é rápida, com somente algumas janelas de aceitação da licença, opções de programa e localização no computador e conclusão.

Sendo basicamente um *software* para criação e manipulação de objetos em três dimensões, utilizando os eixos x, y e z, no Blender também é possível criar ambientes de quatro dimensões, considerando o tempo como uma delas, através de objetos animados e movimento (RESENDE, 2016). Mesmo sendo um *software* livre e fácil de instalar no computador, o Blender oferece muitas funções e opções, trazendo uma composição de ferramentas para criar, modelar, movimentar, produzir jogos, etc. (GRUMSTER, 2015).

Utilizamos em consonância ao software Blender, o aplicativo AndAR para disponibilizar funções de duas variáveis reais em Realidade Aumentada.

3.3.2 Aplicativo AndAR - Android Augmented Reality

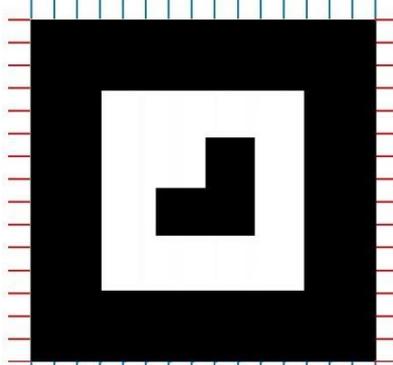
AndAR é um aplicativo da plataforma Android de Realidade Aumentada. Assim como o Blender, o AndAR também possui um código aberto, ou seja dá ao/à usuário/usuária a liberdade de executar o aplicativo para qualquer propósito, inclusive possibilitando modificações e melhoras. O aplicativo estava disponível para download até o primeiro

¹⁵ Disponível: <https://www.blender.org/>

semestre de 2018 na Google Play Store. A partir desta data não foi mais possível realizar o download, mas em dispositivos já instalados o aplicativo continua funcionando normalmente, de onde também pode ser copiado para outros dispositivos.

Para que os objetos sejam projetados a partir do aplicativo AndAR é necessário utilizar um marcador (marker) (KANNO, 2010), conforme a Figura 13.

Figura 13: Marker com borda



Fonte: a pesquisa

O aplicativo AndAR depois de instalado no dispositivo móvel permite que o/a usuário/usuária tenha acesso a uma pequena biblioteca de objetos 3D, por meio de um aplicativo complementar chamado AndAR Model Viewer. Dentre esses objetos estava disponível uma planta, um sofá, um boneco do superman, etc. Após a escolha do objeto, o aplicativo projeta esse, por meio da *interface* do celular apontada para o marcador impresso, conforme a Figura 14.

Figura 14: Visualização de objeto pelo aplicativo AndAR



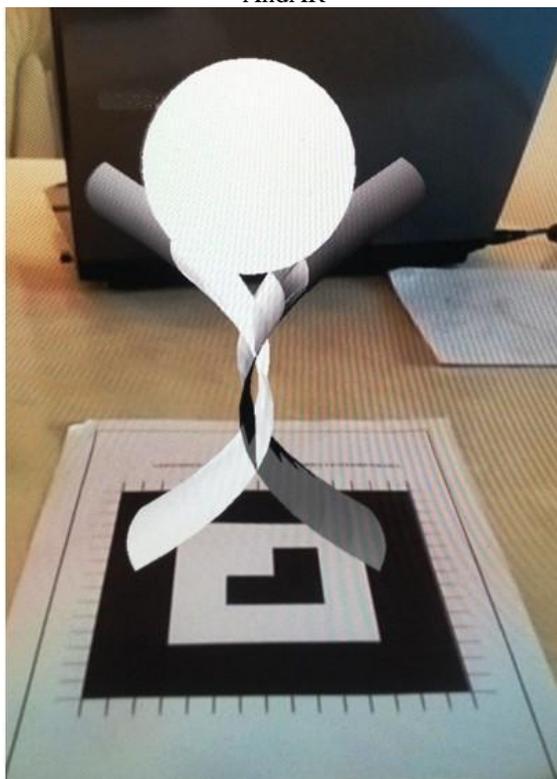
Fonte: a pesquisa

Além dos modelos prontos é possível criar outros objetos através de *softwares* de modelagem 3D, como o Blender. Porém, o objeto criado deve ser exportado no formato *wavefront*, contando que após o nome atribuído ao objeto, a extensão do arquivo deve aparecer “.obj”, para que o AndAR consiga reconhecer o objeto no marcador impresso. Além disso, para que possamos encontrar os objetos no formato *wavefront* na memória dos

dispositivos móveis, é necessário instalar o aplicativo OI File Manager¹⁶. Esse aplicativo é um gerenciador de arquivos que estão salvos no seu dispositivo, permitindo que o/a usuário/usuária procure arquivos salvos de maneira mais rápida, facilitando a busca do objeto criado no Blender e exportado para o AndAR.

Após carregar o objeto desejado no AndAR basta apontarmos a câmera do dispositivo móvel para o centro do marcador para visualizarmos o objeto escolhido na tela do aparelho utilizado (Figura 15).

Figura 15: Objeto criado no software Blender e visualizado em Realidade Aumentada com o aplicativo AndAR



Fonte: a pesquisa

Para explorar o objeto em RA, o/a usuário/usuária pode contornar o objeto (continuando apontando a câmera para o centro do marcador) visualizando-o de diferentes ângulos, aumentar ou diminuir o seu tamanho deslizando o dedo sobre a tela do dispositivo móvel, capturar uma imagem (tirar uma foto, como na figura acima), transladar e/ou rotacioná-lo.

Além do *software* Blender e do aplicativo AndAR, durante a realização desse estudo foi utilizado outros dois aplicativos de realidade aumentada lançados posteriormente à oferta do curso de extensão.

¹⁶ Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=org.openintents.filemanager&hl=pt_BR

3.3.3 GeoGebra Augmented Reality e 3D Calculator

O GeoGebra é um *software* gratuito e multiplataforma de matemática dinâmica (disponível para os sistemas Windows, macOS, Chrome OS e Linux, bem como para iOS e Android), considerado segundo seus criadores para todos os níveis de ensino. Ele integra geometria, álgebra, planilhas eletrônicas, gráficos, estatísticas e cálculo em um único ambiente. Além do *software* o GeoGebra disponibiliza o chamado GeoGebraTube¹⁷ que é um repositório de vídeos que podem ser compartilhados ou feito download gratuitamente.

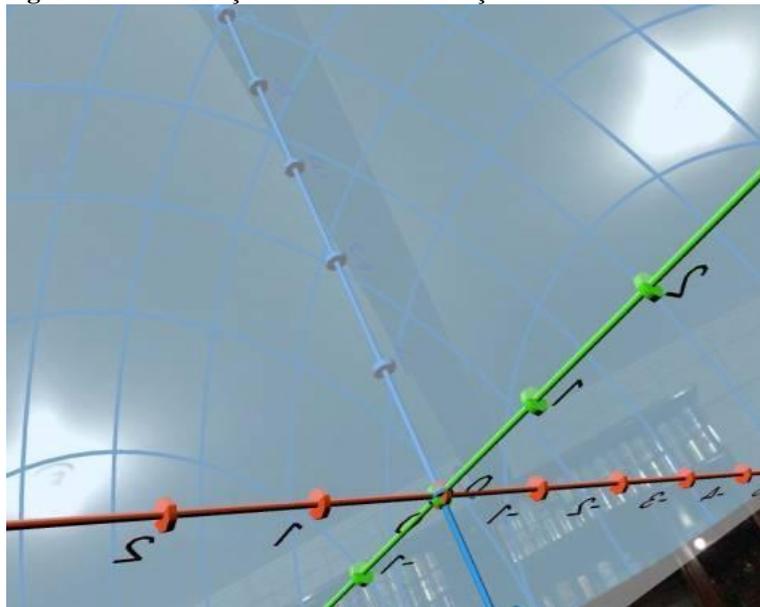
Existem dois aplicativos do GeoGebra para trabalharmos com RA. O primeiro a ser lançado foi o GeoGebra Augmented Reality, disponível somente para o sistema operacional iOS. Posterior a esse lançamento, foi disponibilizado também a sua versão para o sistema operacional Android, com poucas alterações em sua *interface*, intitulado 3D Calculator.

O GeoGebra Augmented Reality e o 3D Calculator possibilitam criar gráficos de matemática em 3D, através da janela de álgebra, na qual podem ser inseridas funções de uma ou duas variáveis reais, além dos objetos tridimensionais já disponíveis (cubo, esfera, pirâmide, cilindro, entre outros).

Ambos aplicativos não necessitam de um marcador para centralizar o objeto que está sendo visualizado, o que acaba dando mais liberdade para o/a usuário/usuária no momento de complementar sua visualização com objetos físicos, como por exemplo, uma caneta, e também ao se movimentar em torno dele. O movimento do dispositivo móvel em torno do gráfico fica mais livre, já que o/a usuário/usuária não precisa ficar sempre direcionado para um ponto (como é o caso do AndAR), possibilitando além da visualização dos lados e superior, a visualização “por dentro” do objeto (Figura 16), gerando uma experiência diferenciada do aplicativo AndAR.

¹⁷ Disponível em: geogebra.org

Figura 16: Visualização interna de uma função de duas variáveis reais



Fonte: a pesquisa

Trabalhar com esses recursos foi uma implicação da participação no curso de extensão, ou seja, foi a partir dele que a professora/pesquisadora teve contato com as TD de RA.

3.4 PRODUÇÃO DE DADOS

Os instrumentos para a produção dos dados foram: anotações da pesquisadora/professora em diferentes momentos (no curso de extensão, no planejamento individual e coletivo da atividade, nas orientações com o seu orientador e conversas com o grupo de pesquisa), nas quais foram registradas informações, dúvidas e atitudes consideradas importantes e que pudessem responder à pergunta diretriz da investigação (essas anotações foram digitadas em um arquivo no formato Word e organizadas por datas); gravações de áudio e vídeo, pois armazenam as falas e as imagens importantes para a análise; e-mails; e conversas através do aplicativo WhatsApp, as quais também serviram para a produção de dados, principalmente durante as discussões em grupo e com o grupo de pesquisa.

4. FOCANDO NA DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo, descrevemos os dados produzidos ao longo dessa pesquisa, tentando responder à pergunta diretriz por meio da análise desses dados. Inicialmente os dados foram produzidos a partir de um curso de extensão intitulado “Cyberformação com professores de matemática: o uso da Tecnologia da Realidade Aumentada”, no planejamento da atividade que a matrícula nesse curso implicava e seu respectivo trabalho/desenvolvimento com alunos. Porém, dada a necessidade de produzir mais dados que expressassem claramente indícios de respostas à pergunta diretriz, a professora/pesquisadora estudou individualmente algumas atividades/exercícios sobre funções de duas variáveis reais utilizando TD de RA, de forma a focar a dimensão matemática da Cyberformação, a qual, por vezes, pode se dar mais de forma individual, no sentido de ser-consigo-mesmo, não excluindo obviamente o ser-com-o-mundo e, em outros momentos, o ser-com-os-outros (ROSA, 2008).

A produção de dados referentes aos momentos em que a professora/pesquisadora esteve estudando/pensando com o TD de RA foram gravados em vídeo e áudio, pelos quais é possível identificar um ato de "pensar alto", no sentido da professora/pesquisadora conversar consigo mesma.

A investigação se mostrou inspiradora para a autora, uma vez que possibilitou uma interlocução teórica entre a Teoria da Aprendizagem Situada e a perspectiva da Cyberformação, se relacionando com as TD. Questionamentos sobre a evolução das TD e as suas implicações no ensino e na aprendizagem de matemática-com-TD (ROSA, 2008), a partir de problemáticas levantadas na orientação, emergiram. Diante disso, neste capítulo apresentamos as categorias de análise constituídas durante a leitura dos dados produzidos durante a pesquisa, os quais nos assistem para responder à pergunta diretriz:

Como se dá a constituição do conhecimento matemático de uma professora em Cyberformação com Tecnologias Digitais de Realidade Aumentada?

De antemão, explicamos como os dados da pesquisa são apresentados, para que o/a leitor/leitora possa compreender como o processo analítico se desenvolveu ao longo dessa pesquisa.

4.1 APRESENTAÇÃO DOS DADOS

Os dados da pesquisa foram produzidos em quatro momentos: curso de extensão (momento 1 - M1), planejamento da atividade (momento 2 - M2), e professora/pesquisadora

estudando/pensando funções de duas variáveis reais com TD de RA (momento 3 - M3). Dentro de cada momento foi evidenciada as principais projeções que possam favorecer a possível resposta à pergunta diretriz desse estudo. Os dados referentes a esses momentos foram gravados em vídeo e áudio (VA). Durante a produção dos dados, para a visualização em RA, foram utilizados o aplicativo AndAr (AD) e os aplicativos GeoGeobra AR e 3D Calculator (GG).

Na análise desses momentos, cada etapa foi intitulada de acordo com o conteúdo que apresenta, após o título apresentamos o instrumento de pesquisa utilizado na produção de dados, qual software de RA foi utilizado, a data de gravação e o intervalo de tempo em que ocorreu a filmagem. Por exemplo, *M3 - Projeção 1: Encontrando a variável dependente no gráfico de RA (VA; GG; 28/05/2018; 00:04:33 - 00:07:36)*.

Além disso, outras indicações também foram utilizadas para traduzir os eventos ocorridos durante a pesquisa:

- quando não foi possível entender o que foi dito, utilizamos (...);
- quando necessitamos suprimir algum trecho do diálogo, por não ser conveniente ou relevante à análise, utilizamos [...];
- quando necessitamos incluir algum comentário, esclarecendo alguma ação realizada durante a fala, utilizamos (texto entre parênteses).

As projeções consideradas importantes, para possivelmente respondermos à pergunta diretriz, foram organizadas em três categorias de análise, intituladas: Com-Holográficos, Por meio da Oralidade-com-TD de RA, Com-o-Cybercorpo: em termos de corpo-próprio-com-TD de RA.

4.2 ANÁLISE DOS DADOS

A categoria **Com-Holográficos** é constituída a partir da ideia de gráficos com aspectos de hologramas, conforme Rosa (2017), mesmo não sendo hologramas propriamente ditos, os gráficos que são visualizados com RA trazem características particulares desse tipo de gráfico.

Na categoria, intitulada **Por meio da Oralidade-com-TD de RA**, evidenciamos os diferentes sentidos que uma expressão oral pode assumir em consonância com o contexto no qual se insere, nesse caso durante a constituição de conhecimento com RA. Assim, a oralidade apresenta-se como verbalização das sensações e das hipóteses que levantamos ao

trabalharmos com RA, traduzindo para a nossa linguagem habitual (oral e escrita – no caso, algébrica) aquilo que produzimos com/no contexto de RA.

Na categoria **Com-o-Cybercorpo: em termos de corpo-próprio-com-TD de RA**, identificamos o que acontece quando nos movimentamos a fim de visualizar o holográfico por diferentes ângulos, sendo possível “caminhar através dele”, assim como, “entrar nele”. Entendemos que por meio do nosso corpo estamos mobilizando o nosso pensar.

4.2.1 Com-Holográficos

Diante do que foi apresentado no capítulo teórico dessa dissertação, entendemos a constituição do conhecimento não se dá sem a materialidade do corpo-próprio, já que somos sujeitos encarnados, nosso pensar também é (ROSA; BICUDO, 2019). Sendo nossa carnalidade as diferentes maneiras de estar vivo e por consequência de se lançar às experiências vividas, destacamos nessa categoria de análise a constituição do conhecimento matemático com TD de RA se dá com-holográficos. Então, as projeções apresentados a seguir apresentam momentos em que por meio dos holográficos a professora/pesquisadora se pluga, se conecta e se lança à TD de RA, de modo a ser-com-TD de RA, a ser-com-o-holográfico, provocando uma imersão no/com/ao contexto de RA.

4.2.1.1 Ponto máximo de uma função de duas variáveis reais

Na primeira projeção desta categoria destacamos um momento em que a professora/pesquisadora estava estudando os pontos de máximo e mínimo de funções de duas variáveis reais por meio da RA. A necessidade de entender e identificar esses pontos no holográfico projetado surgiram durante o planejamento da construção do troféu pelos/pelas alunos/alunas. As professoras proponentes da atividade se preocupavam em explicar para os alunos a importância das figuras construídas por eles/elas se encaixarem (ou seja, terem pelo menos um ponto em comum) possibilitando assim a sua impressão em uma impressora 3D. Essa situação está apresentada e discutida na Projeção 7: Planejando a construção do troféu, em nossa última categoria de análise. Embora a alternativa encontrada durante a atividade ter sido a de traçar uma reta tangente, a professora/pesquisadora interessou-se em identificar qual seria o ponto mais alto ou mais baixo dos holográficos, para isso, ela debruçou-se sobre uma função de duas variáveis reais $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$ que foi uma das funções utilizadas na atividade de construção do troféu.

M3 - Projeção 1: Analisando o ponto de máximo (VA; GG; 07/03/2020; 00:00:01 – 00:03:51)

[00:00:01] eu tô interessada em localizar, identificar né, os pontos de máximo e mínimo quando existirem, de algumas funções

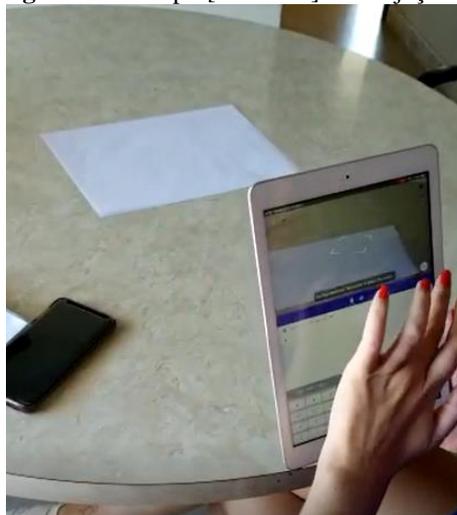
[00:00:12] eu vou começar, com uma função $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

[00:00:22] primeira coisa que eu vou fazer é colocar o GeoGebra pra trabalhar com Realidade Aumentada e eu vou inserir a função

[00:00:31] então a função como eu já falei é $9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

[00:00:47] essa folha que tá aparecendo no vídeo (Figura 17) eu tô usando só porque fica melhor, um pouco mais fácil de visualizar em cima da folha branca

Figura 17: Tempo [00:00:47] da Projeção 1



Fonte: a pesquisa

[00:00:56] então é só por isso, né, porque no GeoGebra a gente não precisa de nenhum (...), de nenhum marcador

[00:01:06] e aí agora ele vai reconhecer o plano

[00:01:12] ou deveria pelo menos

[00:01:17] tá

[00:01:22] e aí aparece o gráfico lá. Então o que a gente pode ver aqui é que essa função gera um parabolóide¹⁸ (Figura 18), e aí se eu tô interessada em estudar os pontos de máximo ou de mínimo, eu vou ver se essa curvatura do parabolóide, essa concavidade, vai ficar pra cima ou pra baixo

Figura 18: Tempo [00:00:47] da Projeção 1



Fonte: a pesquisa

¹⁸ Segundo Stewart (2013), um parabolóide é uma superfície quadrática de tipo espacial.

[00:01:39] no nosso caso, ele tem concavidade pra baixo, então ele vai ter um ponto máximo, e esse ponto máximo pelo que dá pra identificar aqui, no eixo z vai ser um ponto (...)

Figura 19: Tempo [00:01:39] na Projeção 1



Fonte: a pesquisa

[00:01:59] que vai, no eixo z vai corresponder ao ponto 11 (Figura 20), então se a gente colocar (...) a régua ali, até fica um pouco mais fácil de ver, que aqui ó tá bem alinhado com o ponto 11

Figura 20: Tempo [00:01:59] na Projeção 1



Fonte: a pesquisa

[00:02:16] e aí agora, eu vou fazer uma visualização por cima do gráfico (Figura 21) pra conseguir quais são os pontos que vão aparecer lá no eixo x e y

Figura 21: Tempo [00:01:59] na Projeção 1

Fonte: a pesquisa

[00:02:28] tá

[00:02:33] então no eixo x que o que tá sendo representado em vermelho aqui no meu gráfico, eu consigo identificar que o meu ponto através dessas, através dessas parábolas que tão desenhadas aqui em cima do gráfico...

[00:02:51] essa aqui é uma delas, eu consigo ver que ele tá...

[00:02:57] no ponto -1 de x , tá então eu tenho o -1 pro x , 11 pro y e pro z ...

[00:03:07] -1 pro x , 11 pro z e pro y ...

[00:03:18] pro y ele vai tá bem no meio entre 0 e (...)

[00:03:26] e o 1

[00:03:29] então ele vai tá no $0,5$

[00:03:38] tá bem no meio entre o 1 e 0

[00:03:42] então o ponto de máximo da função vai ser $(-1, 0,5, 11)$

[00:03:51] esse é o ponto de máximo e a gente pode afirmar isso porque se a gente traçar (...) considerar esse ponto crítico¹⁹ (Figura 22) que é o ponto que eu falei agora, e passar pelo parabolóide, várias parábolas que sobem aqui nele, passando por esse ponto crítico (a professora/pesquisadora utiliza esse conceito matemático no contexto de RA de acordo com os conhecimentos que possui previamente sobre ele), todas as parábolas vão ter esse ponto como sendo o ponto de máximo, então por isso que a gente pode afirmar que ele é o ponto máximo desse parabolóide.

Figura 22: Tempo [00:03:51] na Projeção 1

Fonte: a pesquisa

¹⁹ “Um ponto (a,b) é chamado de **ponto crítico** (ou *ponto estacionário*) de f se (...) suas derivadas parciais não existir.” (STEWART, 2013, p.850).

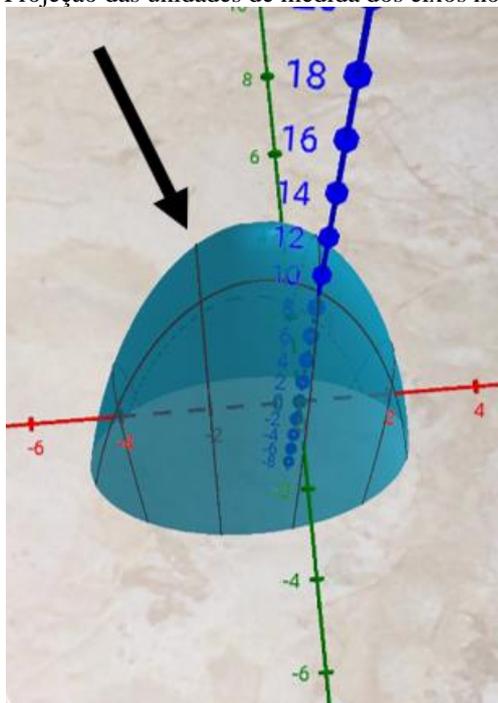
Nesta projeção, destacamos a maneira encontrada pela professora/pesquisadora para encontrar o ponto de máximo da função estudada, utilizando somente o holográfico, sem recorrer à resolução algébrica, a partir do momento [00:01:22], no qual o holográfico da função está projetado sob a mesa onde a professora/pesquisadora está trabalhando. Nesse momento, a professora/pesquisadora identifica que o holográfico ali projetado representa um parabolóide recorrendo aos seus conhecimentos prévios e a lembrança de alguns gráficos de funções de duas variáveis reais já construídos por ela durante sua vida acadêmica.

Após identificar que o holográfico ali projetado refere-se a um parabolóide, a professora/pesquisadora anda em volta do holográfico para que possa ter diferentes visualizações (explicitado na Figura 19) e certificar-se que “[00:01:39] [...] *ele tem concavidade para baixo, então [...] vai ter um ponto máximo.*”. Entendemos esse andar em volta do gráfico como uma especulação, como algo que fascina ao possibilitar descobrir fatos sobre a função que está sendo estudada de uma maneira diferente da algébrica. Para nós, esse “caminhar em torno de” possibilita a professora/pesquisadora uma ação reflexiva, já que transforma a sua participação nesse contexto, onde ela passa a ser “[...] alguém que se caracteriza por estar com as tecnologias.” (ROSA, 2015, p.70), interferindo sua maneira de pensar e agir, intencionalmente habitando o contexto criado pela RA de modo reflexivo e percebendo que ao “[00:02:16] [...] *fazer uma visualização por cima do gráfico [...]*”, abrem-se “[...] possibilidades de ações reflexivas, em que nos damos conta de nós mesmos, de nossas ações e do que dizem.” (BICUDO; ROSA, 2013, p.87), podendo concluir assim “[00:02:16] [...] *quais são os pontos que vão aparecer [...] no eixo x e y.*”. Entendemos que, de acordo com Rosa (2008), quando a professora/pesquisadora se percebe, situa-se no contexto criado pela RA, já que há uma ação reflexiva sobre esse processo, ela está envolta pela ação de ser-com-TD de RA.

Ao estar no contexto da RA, a professora/pesquisadora identifica elementos utilizados frequentemente no contexto da Matemática Acadêmica ou escolar, mesmo que na RA possam não se apresentar da mesma forma. Verificamos isso quando percebe que o “[00:02:33] [...] *eixo x [...] está sendo representado em vermelho [...]*”, e que ele pode estar tanto na horizontal ou na vertical nesse contexto, dependendo da maneira e da perspectiva de visualização que ela faz do holográfico, enquanto que em um gráfico estático, normalmente essa coordenada está sempre na mesma posição em relação ao/a leitor/leitora, na horizontal. Entendemos que ao girar um livro com a imagem de um gráfico, por exemplo, poderíamos também ter o eixo das abscissas representado em outra direção, porém o restante do contexto, textos e imagens, estariam também invertidas, dificultando ou impossibilitando sua

compreensão. Além disso, o holográfico se constitui com elementos que não costumamos elencar no gráfico estático, um exemplo disso é a projeção das unidades de medidas utilizadas em cada eixo ordenado, como pode ser visto na Figura 23. Essa projeção é representada na cor preta, e indicada pela flecha.

Figura 23: Projeção das unidades de medida dos eixos no holográfico.



Fonte: a pesquisa

A projeção das unidades de medidas de cada eixo no holográfico foi bastante importante para a resolução da atividade inicial, ao afirmar que “[00:02:33] [...] *eu consigo identificar o meu ponto através dessas, através dessas parábolas que tão desenhadas em cima do gráfico...*”. Ou seja, a constituição do conhecimento aqui se apresentou de maneira indissociável do contexto criado pela RA, visto que foram características próprias desse contexto que possibilitaram a resolução do problema inicial, sendo uma ação cognitiva que levou a professora/pesquisadora a estabelecer sentidos com o mundo e com as possibilidades de situar-se nesse espaço específico da RA, de ser-com-TD de RA (ROSA, 2008).

Após identificar o ponto de máximo da função, que era “[00:03:42] [...] *(-1, 0.5, 11)*”, utilizando como referência elementos próprios do holográfico, a professora/pesquisadora preocupa-se em garantir que esse ponto seja máximo em relação a todas as possíveis visualizações da função. Para isso, além de novamente “andar em volta do holográfico”, a professora/pesquisadora verifica a hipótese de que se “[00:03:51] [...] *passar pelo parabolóide várias parábolas que sobem [...] nele, passando por esse ponto crítico, todas as parábolas vão ter esse ponto como sendo ponto de máximo, então por isso que a*

gente pode afirmar que ele é o ponto máximo [...]”. Ao fazer isso, ela visualiza diferentes parábolas acopladas ao parabolóide, que tenham o ponto crítico pertencente a sua representação. Com isso, percebe que todas elas terão o ponto crítico como sendo o seu ponto de máximo, ou seja, terão concavidade para baixo. Para nós, nesse momento, a professora/pesquisadora não segue as formas expressas comumente nos livros didáticos ou sintetizadas em aulas de matemática, embora utilize aspectos já existentes, o fazer em termos matemáticos se mostra diferente, ou seja, evidencia a constituição do conhecimento matemático. Nesse sentido, ao realizar esses testes com parábolas acopladas ao parabolóide a professora/pesquisadora visualizou essas parábolas de duas maneiras: a primeira delas tendo como referência o eixo x e a segunda tendo como referência o eixo y. Então, testou as parábolas do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ e do tipo $f(y) = dy^2 + ey + f$, encontrando em ambas “[00:03:51] [...] *todas às parábolas vão ter esse ponto como sendo o ponto de máximo [...]”*, ou seja, terão a concavidade para baixo, isso significa que ambos os coeficientes a e d são negativos, o que, associado à visualização do holográfico, permitiu que a professora/pesquisadora afirmasse que o ponto crítico “[00:03:51] [...] *é o ponto máximo desse parabolóide.*”.

Embora em sua atividade com o holográfico a professora/pesquisadora não tenha utilizado o Teste da Segunda Derivada (Figura 24) para identificar os valores de máximo e mínimo, é possível encontrarmos indícios em sua resolução no contexto de RA que indiquem uma semelhança entre o que é feito com o holográfico e a resolução algébrica do teorema. Dizemos isso, pois de maneira genérica, podemos afirmar que parábolas com coeficientes que acompanham o termo ao quadrado (no caso, a e d) são negativos e, devido a isso, conforme Lima (2013, p.122) “Se a parábola é o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, sua tangente (...) tem inclinação igual a $2ax_0 + b$.”, terão também retas tangentes com coeficientes angulares negativos. Com isso teríamos as retas $f'(x) = -ax + b$ e $f'(y) = -dy + e$. Caso quisermos também saber a taxa de variação da própria variação destas funções teríamos $f''(x) = -a$ e $f''(y) = -d$, ou seja, a derivada segunda também seria negativa.

Figura 24: Teste da Segunda Derivada

3 Teste da Segunda Derivada Suponha que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em uma bola aberta com centro em (a, b) , e suponha que $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ [ou seja, (a, b) é um ponto crítico de f]. Seja

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

- (a) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é um mínimo local.
- (b) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então $f(a, b)$ é um máximo local.
- (c) Se $D < 0$, então $f(a, b)$ não é mínimo local nem máximo local.

Fonte: Stewart (2013, p. 851)

De acordo com o teorema, para que tenhamos um ponto de máximo precisamos que $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$. Assim, temos que $f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2 > 0$, como o segundo termo sempre será negativo, já que todo número real elevado ao quadrado resulta em um número real positivo, necessariamente o primeiro termo deve ser positivo, e isso só irá ocorrer quando $f_{xx}(a, b)$ e $f_{yy}(a, b)$ forem simultaneamente ou maiores ou menores que zero, e maior que o segundo termo. Entendemos, então, que ao analisarmos as possíveis parábolas acopladas ao parabolóide, considerando como domínio o eixo x e posteriormente o eixo y , ao pensarmos na sua concavidade e, por consequência, em sua reta tangente, que nos direciona à derivada segunda, a professora/pesquisadora faz, mesmo que de maneira mais direta, essa relação entre as diferentes parábolas que podem ser acopladas ao parabolóide.

4.2.1.2 Ponto de sela de uma função de duas variáveis reais

Após realizar a atividade apresentada na projeção anterior, a professora/pesquisadora deu continuidade, isto é, sentiu-se instigada a dar continuidade aos estudos de ponto de máximo e de mínimo. Para tanto escolheu a função de duas variáveis reais $f(x, y) = x^2 - y^2 + 8$, que surgiu quando vislumbravam funções cujos gráficos se aproximariam da base (Figura 25) escolhida por ela e sua colega de curso. A função acima citada não foi utilizada efetivamente na construção do troféu, porém, ao revisitar o estudo de pontos críticos (conforme Figura 24), a professora/pesquisadora remeteu-se a essa função como uma possibilidade de estudar no contexto da RA, uma função que não possui ponto de máximo ou de mínimo.

Figura 25: Base do troféu construído no curso de extensão

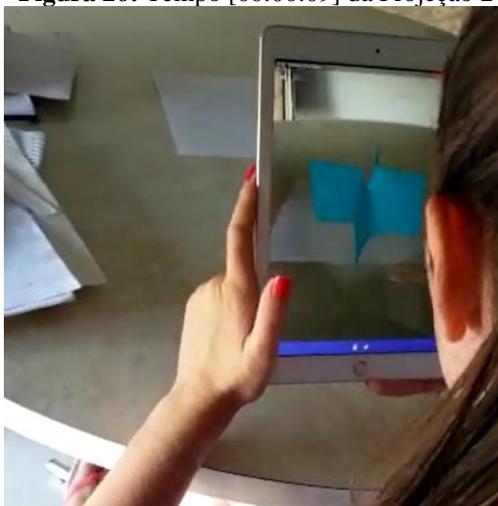


Fonte: a pesquisa

M3 - Projeção 2: Analisando o ponto de sela (VA; GG; 07/03/2020; 00:00:09 – 00:03:15)

[00:00:09] já tô conseguindo visualizar ela (referindo-se ao gráfico da função, conforme figura 26), então nesse gráfico da função $f(x, y) = x^2 - y^2 + 8$, vou identificar se ele tem um ponto de máximo ou de mínimo e aí identificar qual é

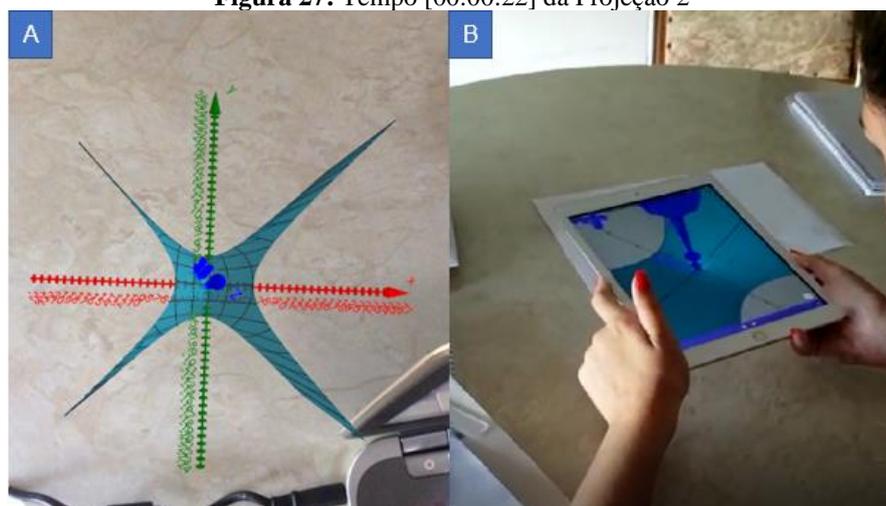
Figura 26: Tempo [00:00:09] da Projeção 2



Fonte: a pesquisa

[00:00:22] já dá pra ver né, pelo formato do gráfico que ele não vai ter um ponto de máximo ou de mínimo, mas que ele tem esse ponto crítico (conforme explicitado anteriormente, a professora/pesquisadora refere-se a esse conceito matemático no contexto de RA de acordo com os seus conhecimentos prévios sobre ele) aqui que vai ser no ponto zero (Figura 27). No ponto zero, zero e oito, então esse é um ponto crítico do gráfico

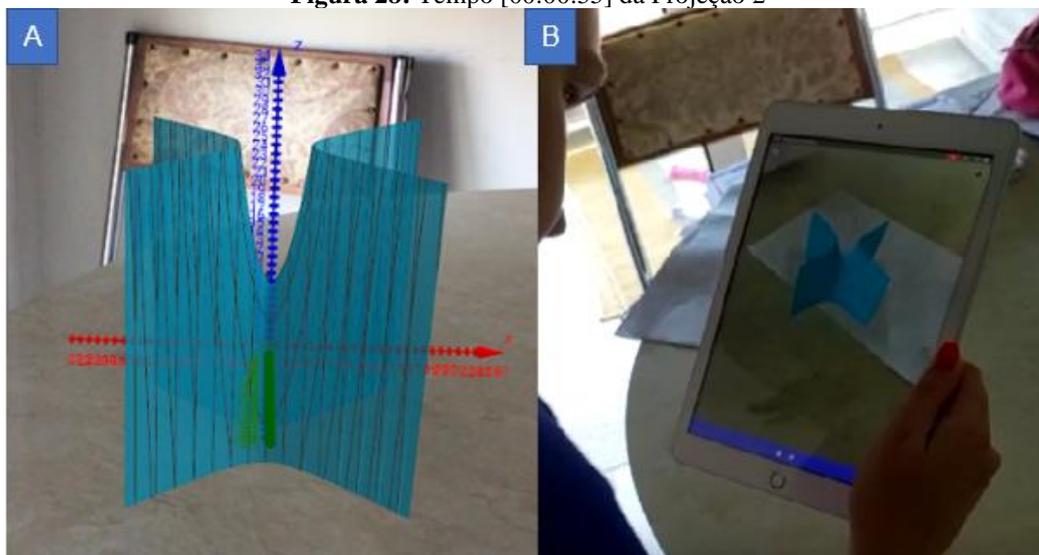
Figura 27: Tempo [00:00:22] da Projeção 2



Fonte: a pesquisa

[00:00:55] se a gente olhar em relação ao eixo x , em relação ao eixo x , a gente vai ter, se pegar só o eixo x (Figura 28), a gente vai ter uma concavidade pra cima e aí nesse ponto vai ser um ponto de mínimo. Então, se a gente fosse traçar né, como eu tinha pensado, de traçar uma parábola, a gente ia ter uma parábola de concavidade pra cima e um ponto de mínimo local²⁰ (assim, como ponto crítico a professora/pesquisadora utiliza esse conceito de acordo com seus conhecimentos prévios)

Figura 28: Tempo [00:00:55] da Projeção 2



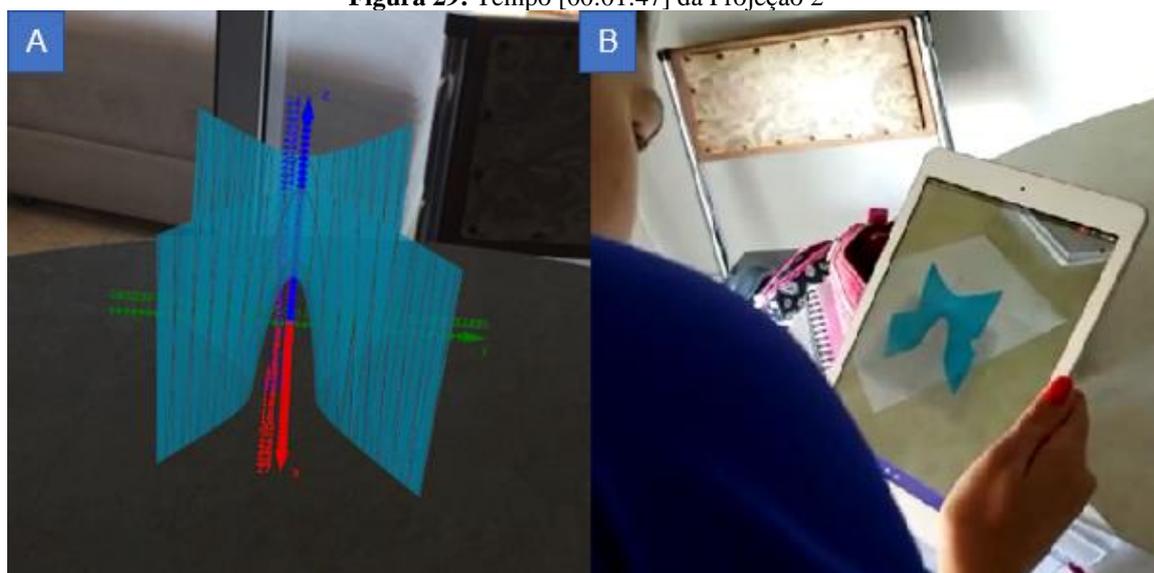
Fonte: a pesquisa

[00:01:47] mas, se a gente for olhar isso em relação a y (Figura 29), a gente vai ter um ponto, vai ter ao contrário, vai ter uma parábola com concavidade pra baixo e aí esse ponto $(0,0,8)$ vai ser um ponto de máximo local²¹

²⁰ “Se $f(x,y) \geq f(a,b)$ quando (x,y) está próximo de (a,b) , então f tem um **mínimo local**.” (STEWART, 2013, p.850).

²¹ “Uma função de duas variáveis tem um **máximo local** em (a,b) se $f(x,y) \leq f(a,b)$ quando (x,y) está próximo de (a,b) .” (STEWART, 2013, p.850).

Figura 29: Tempo [00:01:47] da Projeção 2



Fonte: a pesquisa

[00:02:15] acho que desse lado aqui dá pra ver melhor, quase as duas coisas acontecendo ao mesmo tempo, onde pra lá é um ponto de máximo e aqui é um ponto de mínimo

[00:02:35] tá, então isso é o que a gente chama de ponto de sela, mas eu tô pensando porque que a gente pode dizer que é um ponto de sela, considerando aquele teorema lá (referindo-se ao teorema da regra da cadeia) que diz que pra ser um ponto de sela o determinante tem que ser menor que zero

[00:03:15] ah eu acho que vai ser menor do que zero porque eu vou ter, se eu fosse traçar uma reta tangente ou um plano tangente nesse caso, a gente ia ter um plano decrescente e um plano crescente, então com coeficiente, um coeficiente positivo e outro com coeficiente negativo e aí na hora de fazer as multiplicações lá das derivadas né, da derivada primeira a gente teria uma multiplicação de um número positivo por um número negativo e aí a resposta vai ser um número negativo, logo menor do que zero. Acho que por isso.

Esta projeção demonstra também a determinação de ponto crítico de uma função de duas variáveis reais utilizando o contexto da RA, e as interações possíveis nele. No entanto, nesse caso o ponto crítico não pode ser caracterizado como um ponto de mínimo ou de máximo já que essa determinação muda, pois se “[00:00:55] se a gente olhar em relação ao eixo x [...] a gente vai ter uma concavidade pra cima e aí nesse ponto vai ser um ponto de mínimo [...]”, “[00:01:47] mas, se a gente for olhar [...] em relação a y , [...] vai ter uma parábola com concavidade para baixo e aí esse ponto [...] vai ser um ponto de máximo [...]”. Como a determinação desse ponto depende do ângulo de visualização, ou seja, da coordenada tomada como referencial, a professora/pesquisadora conclui que “[00:02:35] [...] então isso é o que a gente chama de ponto de sela [...]”.

De acordo com Lave (1991), evidenciamos que o centro de análise ao estarmos no/com contexto de RA, não é o indivíduo, nem apenas o contexto, visto que as diferentes visualizações (que são apresentadas nas Figuras 26, 27, 28 e 29) são meio para que a professora/pesquisadora possa chegar a conclusões matemáticas, sendo então a relação entre eles, construída de maneira particular nessa experiência situada. Sendo assim, a aprendizagem também tem esse caráter relacional entre o contexto de RA e a professora/pesquisadora. Consideramos importante ressaltar que esse caráter relacional não se dá como uma relação de associação entre a professora/pesquisadora e a tecnologia, mas como a ação intencional da professora/pesquisadora ao manifestar-se nesse mundo, vivenciando-a intencionalmente (ROSA, 2017).

Ao dizer que “[00:00:55] [...] se a gente fosse traçar né, como eu tinha pensando, de traçar uma parábola [...]”, a professora/pesquisadora faz referência à maneira já utilizada por ela anteriormente para pensar em parábolas acopladas ao parabolóide, de maneira que possa generalizar uma conclusão. De acordo com Caldeira (2016), entendemos que ao fazer isso a professora/pesquisadora não está apenas utilizando as TD de RA para facilitar ou acelerar um determinado processo, mas, utilizando-se de algo que vislumbrou com elas e que resolve a atividade naquele contexto. Para nós também, é possível identificar que a professora/pesquisadora se lança à atividade sem que seja preciso “dominar” essa tecnologia, aprendendo com ela, estando em um movimento contínuo de forma/ação (SEIDEL, 2013).

Identificamos que o contexto da RA possibilitou também a professora/pesquisadora pensar em novas questões e conjecturas, trazendo o questionamento ao Teste da Segunda Derivada, ao relacionar com o que era evidenciado pelo holográfico. Essa dialética entre a professora/pesquisadora e o contexto de RA, evidencia que ela não é uma receptora passiva de conhecimento que está no mundo, sendo por meio do seu engajamento integral (corpo, mente, sensibilidades e contexto) com as situações que possibilita concluir, por exemplo, “[00:03:15] [...] que vai ser menor do que zero porque eu vou ter [...] um plano decrescente e um plano crescente, então [...] um coeficiente positivo e outro com coeficiente negativo e [...] teria a multiplicação de um número positivo por um número negativo e aí a resposta [...] vai ser um número negativo, logo menor que zero.[...]”. Assim, justificando o seu caráter potencializador da inserção das TD de RA, já que as TD foram partícipes nessa conclusão, feita pela professora/pesquisadora (ROSA, 2008). e

4.2.1.3 Curvas de nível

A projeção a seguir refere-se ao momento em que a professora/pesquisadora esteve estudando curvas de nível de modo geométrico utilizando os holográficos no contexto da RA. Essa atividade refere-se ao estudo de algumas atividades indicadas pelo professor orientador.

Figura 30: Tempo [00:00:55] da Projeção 2

3- Esboce o mapa de contorno de $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y + 3)^2$ usando as curvas de nível $k = 3, 8, 10$.

Fonte: atividade/exercício de material de aula, proposto pelo professor orientador em reunião de orientação no dia 07 de maio de 2018.

Essa atividade tinha como objetivo determinar o mapa de contorno usando curvas de nível de forma algébrica. Entretanto, como a professora/pesquisadora estava trabalhando com RA, a proposta para esse momento era desenvolvê-la neste contexto. Antes de apresentarmos a projeção, retomamos brevemente esses conceitos.

Segundo Stewart (2013), existem três métodos diferentes para visualizar uma função: diagrama de flechas, gráfico e mapa de contorno. O autor salienta que esse último é um método que tomamos emprestado dos cartógrafos, “[...] em que pontos com elevação constantes são ligados para formar *curvas de contorno* ou *curvas de nível*.” (STEWART, 2013, p. 796). Ele define:

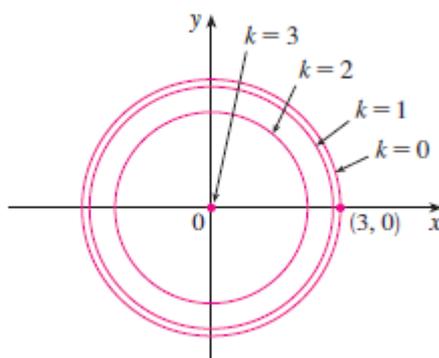
Figura 31: Definição de curva de nível

Definição As curvas de nível de uma função f de duas variáveis são aquelas com equação $f(x, y) = k$, onde k é uma constante (na imagem de f).

Fonte: Stewart (2013, p. 796)

Então, curva de nível é o conjunto de todos os pontos do domínio de f nos quais o valor de f é k , ou seja, onde o gráfico f tem altura k . Assim, as curvas de nível são pensadas como no gráfico de f no plano horizontal $z=k$ projetadas sobre o plano xy . Segundo Stewart (2013, p.796, grifos do autor), “[...] se você traçar às curvas de nível da função e visualizá-las elevadas para a altura indicada, poderá **imaginar** o gráfico da função colocando as duas informações juntas.”.

Um conjunto dessas curvas de nível é chamado de mapa de contornos. Stewart exemplifica por meio da Figura 32.

Figura 32: Mapa de contorno

Fonte: Stewart (2013, p. 798)

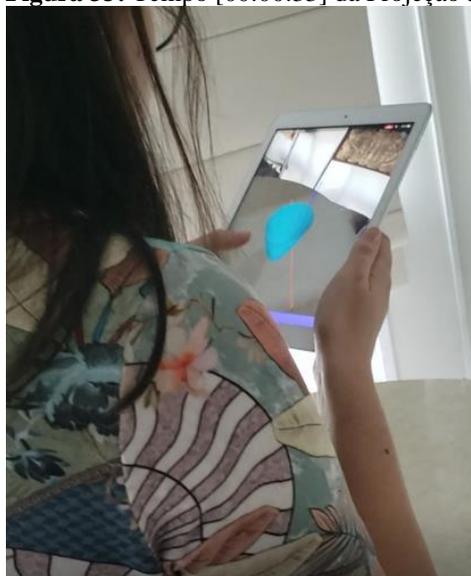
Apresentamos agora a transcrição do momento em que a professora/pesquisadora esteve desenvolvendo a atividade acima exposta.

M3 - Projeção 3: Estudando curvas de nível (VA; GG; 20/08/2018; 00:00:09 – 00:08:35)

[00:00:09] eu to fazendo o estudo de curvas de nível, de funções de duas variáveis [reais], e aí a função que eu vou fazer é $x-2^2$, ah não, $(x-2)^2+(y+3)^2$.

[00:00:20] então eu vou projetar essa função em realidade aumentada, ahh (...), a malha e o eixo já tava, já tinha deixado pronto, já tava projetado, então eu vou ter (...)

[00:00:33] essa função aqui (Figura 33)

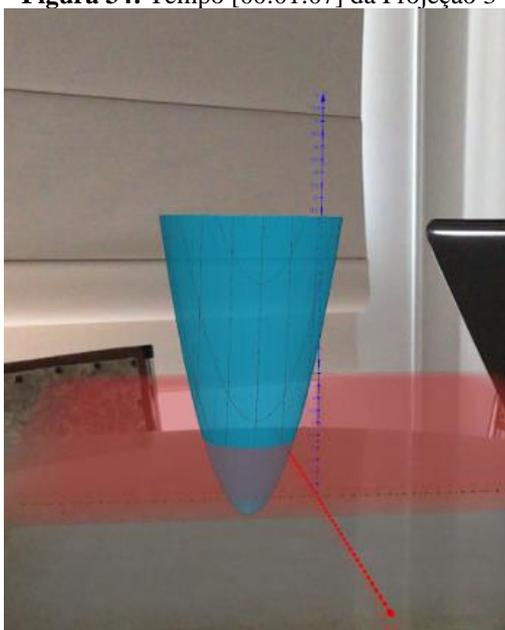
Figura 33: Tempo [00:00:33] da Projeção 3

Fonte: a pesquisa

[00:00:42] tá, e se eu quiser saber (...) três valores de k para ver os domínios então eu vou começar com quando o k for igual a 3, então vai ter um plano que vai cortar esse, essa função (...) onde o y for 3, na altura 3.

[00:01:07] se a gente for olhar de lado (...) esse aqui não vai dar pra ver muito bem (Figura 34) porque é pouco, fica pouco afastado do plano da mesa, mas conforme a gente aumenta o, conforme a gente coloca mais alto no eixo x , no eixo y , fica mais fácil de visualizar

Figura 34: Tempo [00:01:07] da Projeção 3



Fonte: a pesquisa

[00:01:28] então eu vou pegar e vou olhar por cima do gráfico, que aí eu vou conseguir ver bem certinho também qual vai ser o meu ponto de mínimo no caso dessa função

[00:01:41] que vai ser o centro da minha, da minha circunferência, que vai ter no domínio

[00:01:47] então se eu, se eu conseguir entrar no gráfico por cima, como eu tô fazendo agora (Figura 35), eu vou conseguir identificar que meu centro...

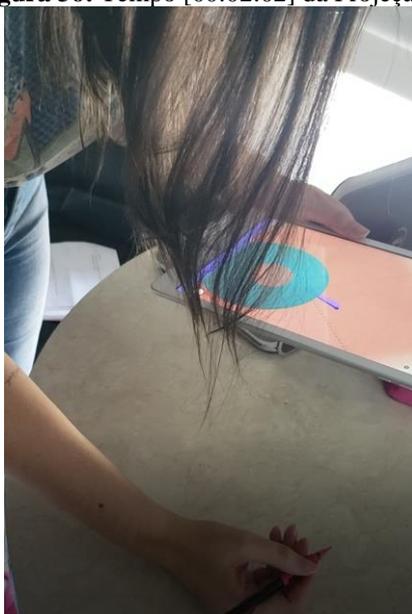
Figura 35: Tempo [00:01:47] da Projeção 3



Fonte: a pesquisa

[00:01:59] vou pegar um lápis que eu acho que vai ficar mais fácil

[00:02:02] pra eu conseguir identificar, que o meu centro vai tá bem aqui (Figura 36), até no gráfico ele marca com uma cor um pouco mais clarinha, onde é o ponto, o ponto (...) de centro que fica, que nesse caso fica bem pontudinha assim, que o gráfico é bem pontudinho

Figura 36: Tempo [00:02:02] da Projeção 3

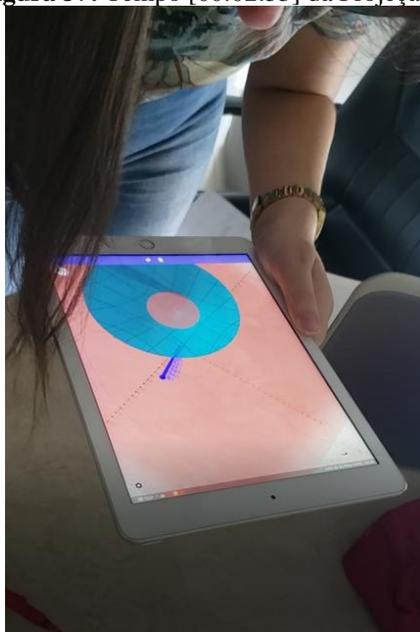
Fonte: a pesquisa

[00:02:23] então, dá tipo que um reflexo na, no plano

[00:02:29] então eu vou conseguir ver bem que o centro da minha circunferência vai ser, aqui essa projeção aqui, do eixo x, tá um pouco desalinhado aqui não tá formando bem certinho, mas corresponde ao 2, tá

[00:02:48] porque se a gente olhar esse aqui tá bem em cima do zero, do eixo x, o eixo x é o vermelho

[00:02:53] tá bem em cima do zero, então esse aqui vai ser a projeção do número 2 (Figura 37), e esse aqui vai ser a projeção, hã, esse aqui é a projeção do número 1, essa aqui é a projeção do número 2

Figura 37: Tempo [00:02:53] da Projeção 3

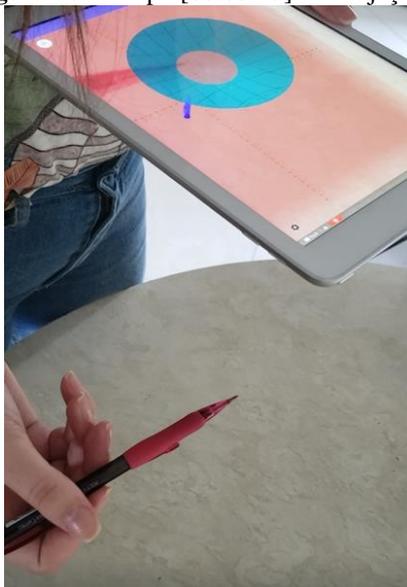
Fonte: a pesquisa

[00:03:02] então o ponto, o valor da distância pra x vai ser 2, e o valor da distância pra y, a gente vai olhar no outro sentido

[00:03:13] então esse primeiro aqui vai ser o zero, quando, quando o y for zero, quando for -1 (...)

[00:03:25] tem que virar melhor se não, não vai dar pra ver (ajustando o tablet, Figura 38)

Figura 38: Tempo [00:03:25] da Projeção 3



Fonte: a pesquisa

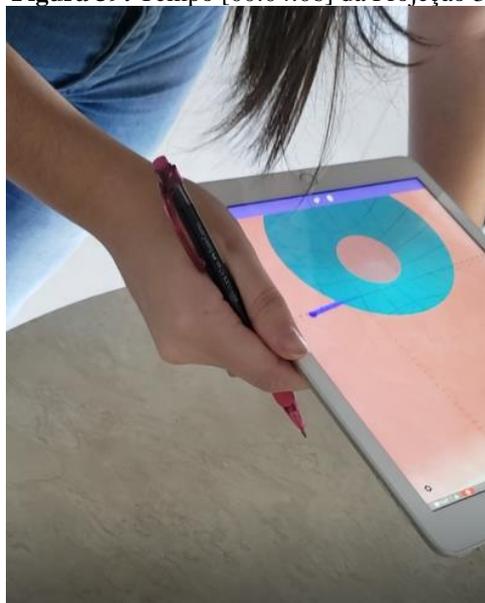
[00:03:35] agora sim, esse aqui vai ser o 0, esse aqui vai ser o -1, -2, -3 aqui ó

[00:03:48] então esse ponto vai tá bem aqui no meio, que é aquele que eu falei que é um pouco mais clarinho, que dá um reflexo

[00:03:57] vai ser -2 e menos, aliás, 2 no x e -3 no y, então vai ser o ponto (2,-3)

[00:04:06] e ai se eu olhar pro corte que essa curva de nível, quando $z=3$, faz né, no meu gráfico, eu vou conseguir perceber que o domínio vai ser uma função (...), vai ser uma circunferência com centro (2,-3) e de raio menor de que 2 (Figura 39)

Figura 39: Tempo [00:04:06] da Projeção 3



Fonte: a pesquisa

[00:04:27] então o primeiro corte, o corte de nível que eu escolhi foi $z=3$ a resposta pro domínio vai ser uma função, vai ser uma circunferência desse tipo que eu falei

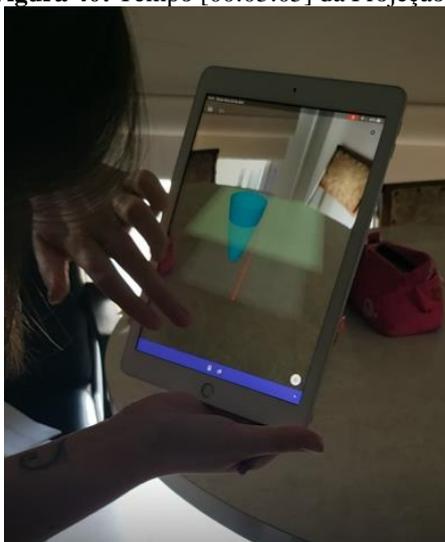
[00:04:39] agora se eu trocar né, eu vou fazer 3 testes, se eu trocar, se eu escolher um $z=8$

[00:04:51] então dá pra ver um pouco melhor

[00:05:00] o corte que faz ali na, opa

[00:05:05] o corte que faz na minha, na minha, no meu gráfico, na minha função, dá pra, consegue ver um pouquinho melhor onde é que fica esse gráfico, porque é um pouco mais alto, fica mais fácil de enxergar (Figura 40)

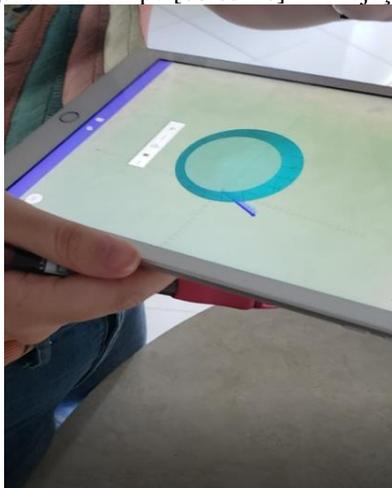
Figura 40: Tempo [00:05:05] da Projeção 3



Fonte: a pesquisa

[00:05:16] então, agora eu vou fazer a mesma coisa, vou fazer a visualização por cima né (Figura 41), como se eu tivesse entrando nessa função e aí o meu ponto de centro vai ser o mesmo né, porque eu tô trabalhando com a mesma função

Figura 41: Tempo [00:05:16] da Projeção 3

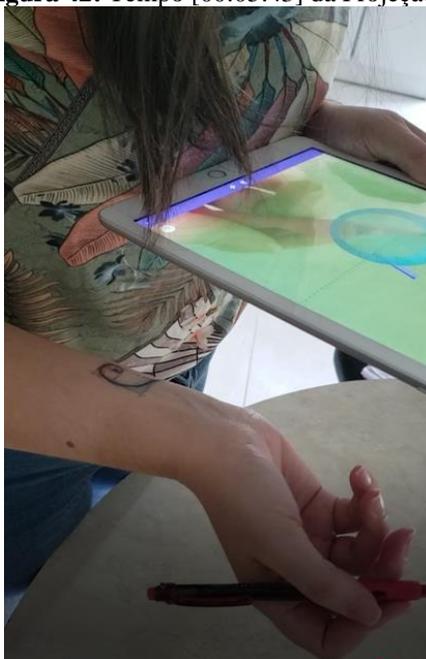


Fonte: a pesquisa

[00:05:28] então também vou ter uma circunferência, e o meu ponto de centro vai continuar sendo o (2,-3)

[00:05:34] só que agora, eu tenho uma circunferência que ela vai ter um raio (...) 1, 2, menor do que 3

[00:05:43] então a aumentei (...) a distância vamos dizer assim desse ponto mínimo da função, dessa parte onde a função é mais baixa, e por consequência tô mais de longe, mais de cima, a circunferência que projeta no plano, é uma circunferência maior (Figura 42)

Figura 42: Tempo [00:05:43] da Projeção 3

Fonte: a pesquisa

[00:06:04] então é uma circunferência com mesmo centro $(2, -3)$ só que com um raio, menor do que 3

[00:06:14] e o último teste que eu vou fazer é quando eu tiver um corte no $z=10$, então também dá pra ver (...) dá pra enxergar bem o corte porque também como eu disse é mais pra cima né, então essa parte de baixo onde eu não to usando fica um pouco mais evidente, mais fácil de olhar

[00:06:36] e aí mesmo, vai ser a mesma coisa, vai seguir a mesma lógica, porque o meu ponto de centro continua sendo o mesmo, mesma função, e quando mais (...) que eu possa observar é que quanto mais longe né, quanto mais eu subo, esse ponto, esse corte em relação a z , maior é minha circunferência vai ficando, como se eu tivesse olhando, olhando de mais longe ela, então mais ampla ela vai ficando

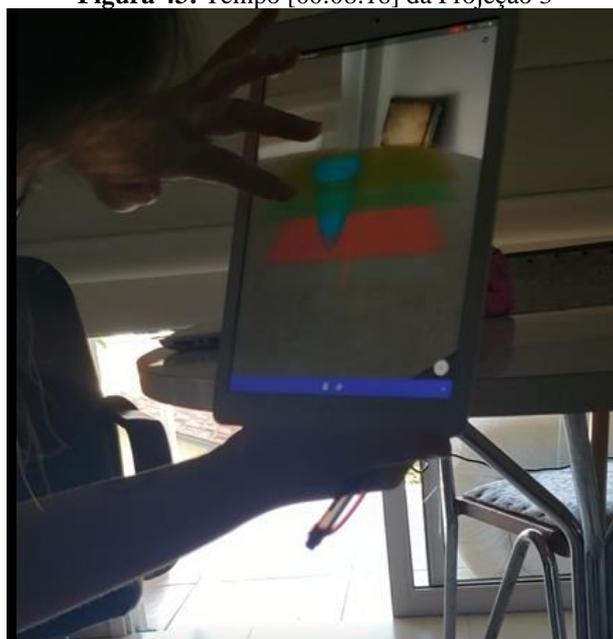
[00:07:00] se a gente tivesse trabalhando com um parabolóide que fosse, que tivesse um ponto de máximo né, uma concavidade para cima, muito provavelmente ia acontecendo o contrário né, conforme eu fosse diminuindo o meu eixo z maior ia ficando meu domínio, então maior ele ia se projetando

[00:07:20] porque claro quando a gente aproxima do ponto máximo ou do ponto mínimo (...) a gente vai diminuindo a circunferência ou enfim, o domínio que vai sendo ali projetado de modo que a gente chegue até o ponto né, então por isso que aumenta, nesse meu caso, como é um ponto de mínimo, conforme eu subo aumenta o domínio e conforme eu diminui, se fosse um ponto de máximo conforme eu diminui também aumentasse, aumentaria né

[00:07:45] então essa aqui, quando meu $z=10$, que é meu segundo corte, que tá de amarelo, mesma coisa, o centro da circunferência é o mesmo $(2, -3)$ e o raio da circunferência vai ser um raio com 1, 2, 3, menor do que 4

[00:08:05] então esse foi, essas foram as três circunferências, os três cortes em relação a z , as três curvas de níveis que eu testei

[00:08:16] eu vou habilitar as três ao mesmo tempo pra que a gente consiga visualizar (Figura 43), acho que vai dar pra visualizar um pouco melhor

Figura 43: Tempo [00:08:16] da Projeção 3

Fonte: a pesquisa

[00:08:22] vou dar um zoom no gráfico, aumenta um pouco

[00:08:26] e aí não sei se vai (...) dá pra ver, acho que (...)

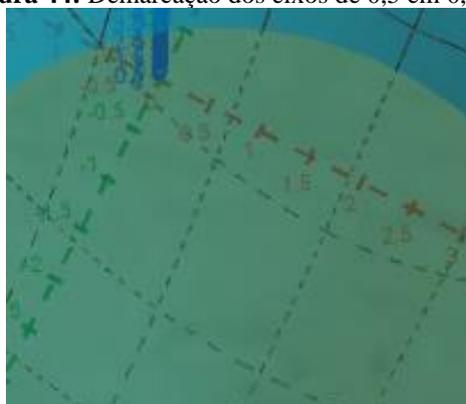
[00:08:35] acho que assim dá pra ver um pouco mais, só o verde e o amarelo tão um pouco mais próximos então quase não dá pra enxergar a partezinha azul né, que é o próprio parabolóide, mas então as curvas de nível estão sendo representadas por esses planos ai, na cor que eu (...) indiquei

Na projeção destacada, a professora/pesquisadora estuda a função “[00:00:09] [...] $(x-2)^2 + (y+3)^2$.” projetando-a em RA. Para realizar o estudo de curvas de nível, ela trabalha com três valores para k , os quais irão interseccionar o parabolóide estudado. No entanto ao escolher “[00:00:42] [...] três valores de k para ver os domínios [...]”, a professora/pesquisadora não identifica a curva de nível conforme a sua definição matemática (Figura 31), mas, a projeção desse corte no domínio da função (Figura 35), ou seja, determina quais são os pontos que estão contidos no interior do parabolóide quando faz esse corte, já que analisa a “[00:01:41] [...] circunferência que vai ter no domínio.” e não quais são os pontos extremos nessa circunferência. Assim, determina os valores para os quais temos $f(x, y) < k$ e não $f(x, y) = k$.

Evidenciando esse equívoco da professora/pesquisadora ao desenvolver a atividade proposta, entendemos que ela se lança ao contexto de RA, de modo que os conhecimentos matemáticos acadêmicos dela não ocupassem uma posição central, possibilitando a ela vivências intencionais que foram se constituindo intersubjetivamente junto e na cibercultura. De acordo com Vanini (2015), esse fazer matemático que busca pelo sentido do que está sendo realizado se mostra, pois, no caso da professora/pesquisadora, ao estar no contexto da RA, ela não tem elementos que evidenciem os pontos extremos da circunferência que

determina os valores para os quais $f(x, y) = k$, já que os eixos estão demarcados de 0,5 em 0,5 cm (Figura 44). Então, ao concluir que “[00:04:06] [...] quando $z = 3$ [...] o domínio vai ser [...] uma circunferência com centro $(2, -3)$ e de raio menor de que 2.”, embora não tenha definido uma curva de nível como se faz formalmente, entendemos que os demais movimentos que antecedem a essa conclusão, como “[00:01:47] [...] conseguir entrar no gráfico por cima [...]” e precisar “[00:03:25] [...] virar melhor se não, não vai dar pra ver.” mostram o envolvimento da professora/pesquisadora na busca pelo sentido do que está realizando, na sua constituição por meio dessas articulações e interações com o mundo cibernético, especificamente com o contexto da RA, entendendo esse aparato tecnológico como materialidade expressa com a qual se realiza o processo cognitivo.

Figura 44: Demarcação dos eixos de 0,5 em 0,5 cm



Fonte: a pesquisa

De acordo com Seidel (2013), a Cyberformação entende a dimensão matemática como uma matemática aberta, fruto de uma construção da matemática pelo ambiente e pela intencionalidade das pessoas que a vivenciam, construindo-se no ambiente e proporcionando a constituição do conhecimento matemático. Durante a realização dessa atividade proporcionou a professora/pesquisadora uma experiência única do contexto com RA que é a visualização de diferentes ângulos do “[00:05:05] [...] corte que faz [...] no meu gráfico [...]”, ou seja, dos pontos do tipo $(x, y, 3)$, já que quando estamos trabalhando com gráficos estáticos costumamos apenas observar a projeção desses pontos no plano formado pelos eixos x e y (Figura 34 e 38).

Essas experiências únicas, são entendidas pela Teoria da Aprendizagem Situada, como uma matemática que faça sentido, visto que no contexto próprio da RA existem alguns elementos que só são possíveis ali, e vai alternando sua maneira de participar neste contexto, ou seja, produzindo conhecimento. Essas transformações na participação neste contexto, se revelam pela intencionalidade da professora/pesquisadora ao se perceber no mundo cibernético e em sua ação reflexiva sobre esse processo, construindo uma identidade virtual.

Ao entrar “[00:05:16] [...] nessa função [...]” e identificar que “[00:05:16] [...] o meu ponto de centro vai ser o mesmo [...]”, evidenciamos essas transformações, onde a professora/pesquisadora passa a pensar no sujeito vivente como parte do holográfico, projetando-se no holográfico como materialidade, entendendo-se não apenas como sujeito biologicamente encarnado mas como um ser que é com a TD de RA, ou seja, dando forma a ação do que entendemos ao ser-com-TD de RA.

4.2.2 Oralidade-com-TD-de-RA

Como já exposto no capítulo teórico desta pesquisa, compreendemos a constituição do conhecimento, especificamente a constituição do conhecimento matemático, como um movimento que abrange vários atos intencionais da consciência que não se exaurem em si, mas que precisam ser articulados e expressos (ROSA; BICUDO, 2019). Sendo por meio da linguagem que essa expressão se organiza, ganha forma e pode ser exposta, destacamos em nossa segunda categoria de análise a constituição do conhecimento matemático com TD de RA por meio da oralidade. Assim, os recortes apresentados a seguir apresentam momentos em que por meio da oralidade podemos identificar o ato de pensar-com-TD de RA provocando uma alteração na forma de participação nesse próprio contexto.

4.2.2.1 Encontrando a variável dependente

A primeira projeção dessa categoria refere-se à produção de dados pela qual a pesquisadora está estudando/pensando funções de duas variáveis reais a partir de uma atividade indicada pelo orientador.

Anteriormente à apresentação do excerto, entendemos ser necessário apresentar brevemente o conceito de imagem de uma função, bem como discutir a maneira que esse conceito é apresentado no material consultado.

Figura 45: Definição de função no livro “Números e Funções Reais”

Dados os conjuntos X, Y , uma *função* $f : X \rightarrow Y$ (lê-se “uma função de X em Y ”) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$ (leia-se “ y igual a f de x ”). O conjunto X chama-se o *domínio* e Y é o *contradomínio* da função f . Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a *imagem* de x pela função f , ou o *valor* assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \mapsto f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$.

Exemplos particularmente simples de funções são a *função identidade* $f : X \rightarrow X$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in X$ e as *funções constantes* $f : X \rightarrow Y$, onde se toma um elemento $c \in Y$ e se põe $f(x) = c$ para todo $x \in X$.

É importante ressaltar que $f(x)$ é a imagem do elemento $x \in X$ pela função f , ou o valor da função f no ponto $x \in X$. Os livros antigos, bem como alguns atuais, principalmente os de Cálculo, costumam dizer “a função $f(x)$ ” quando deveriam dizer “a função f ”. Algumas vezes essa linguagem inexata torna a comunicação mais rápida e fica difícil resistir à tentação de usá-la. Mas é indispensável a cada momento ter a noção precisa do que se está fazendo.

Fonte: Lima (2013, p. 36)

A imagem de uma função de uma variável, segundo Lima (2013), é indicada pelo conjunto de elementos $f(x)$ pertencente ao conjunto Y , já definido como contradomínio da função f . Destacamos que o autor apresenta uma preocupação com a linguagem escrita, e pressupomos que se estenda para a linguagem oral, já que ressalta que a linguagem considerada (pela matemática acadêmica como) inexata pode gerar conceituações não adequadas, mas não faz referência a linguagem gráfica, ou seja, a interpretação gráfica deste conceito. Entendemos o posicionamento de Lima (2013) ao manter o rigor para se expressar matematicamente, visto que sem ele podemos construir erroneamente um conceito, porém, questionamos a ausência da discussão gráfica nessa conceituação, já que entendemos que com ela também é possível expandir o entendimento acerca desse conceito. Esse questionamento é embasado também pela nossa experiência enquanto professores/professoras, onde percebemos que, em geral, os livros didáticos evidenciam a resolução algébrica, onde o procedimento basicamente é a substituição da variável independente na lei de formação da função para encontrar a imagem.

Com base nesses questionamentos, a professora/pesquisadora estuda o conceito de imagem em funções de duas variáveis reais a partir do seu gráfico, por meio da seguinte atividade/exercício proposto pelo professor orientador.

Figura 46: Atividade proposto pelo professor orientador

1- Dada a função $f(x, y) = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)}$, determine:

a) $f(0,0)$

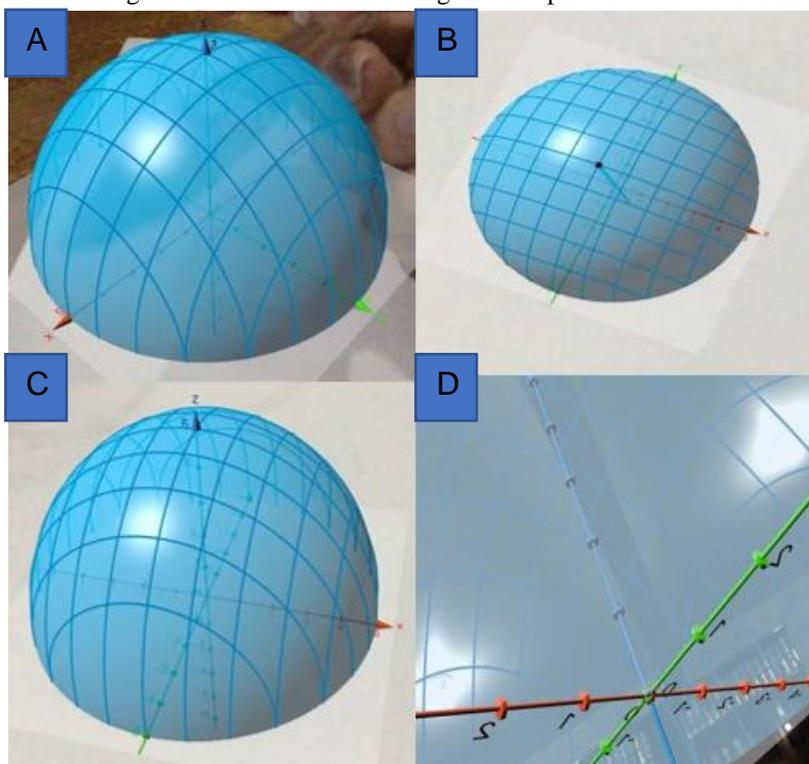
b) $f(3,4)$

c) $f(0,-3)$

Fonte: atividade/exercício de material de aula, proposto pelo professor orientador em reunião de orientação no dia 07 de maio de 2018.

Em sua formulação inicial, essa atividade tinha como objetivo determinar a variável dependente a partir das duas variáveis independentes, de forma algébrica. Entretanto, como a professora/pesquisadora estava trabalhando com Realidade Aumentada, a parte de cálculo algébrico não foi intencionada, embora posteriormente utilizada. Assim, a professora/pesquisadora, utilizou o aplicativo GeoGebra AR, obtendo o seguinte holográfico.

Figura 47: Holográfico visto de diferentes ângulos no aplicativo GeoGebra AR



Fonte: a pesquisa

Partindo desses diferentes ângulos (Figura 47A, 47B, 47C, 47D) para visualizar a mesma função a professora/pesquisadora pretendia compreender como, por meio da RA, seria possível encontrar a variável dependente. Como podemos observar na transcrição dessa projeção, onde a professora/pesquisadora está resolvendo essas atividades/exercícios:

M3 - Projeção 4: Encontrando a variável dependente no gráfico de RA (VA; GG; 28/05/2018; 00:04:33 - 00:07:36).

[00:04:33] se eu pegar a coordenada x igual a 5 e y igual a zero meu ponto vai ficar bem aqui (apontando para a localização do ponto no holográfico) e eu quero ver onde esse ponto vai se ligar com z.

[00:05:00] ah entendi. Essas linhas aqui estão relacionadas com os pontos, aqui vai ser o -5, -4,-3,-2,-1,0 (enquanto conta em ordem crescente os pontos localizados no eixo das abscissas). Então as linhas centrais representam o centro do plano x,y, a origem.

[00:05:31] então se eu quero saber, deixa eu ver aqui quais são os pontos que eu quero saber...

[00:05:44] o ponto (0,-2) (a escolha deste ponto foi um engano da professora/pesquisadora, já que na atividade proposta ela deveria encontrar o ponto (0,-3), eu vou ter que pegar aqui o 5,4,3 (contando em ordem decrescente de acordo com as linhas destacadas em azul marinho, até chegar no -2), esse aqui o -2, então vai estar nessa linha aqui. E o zero é essa aqui do meio.

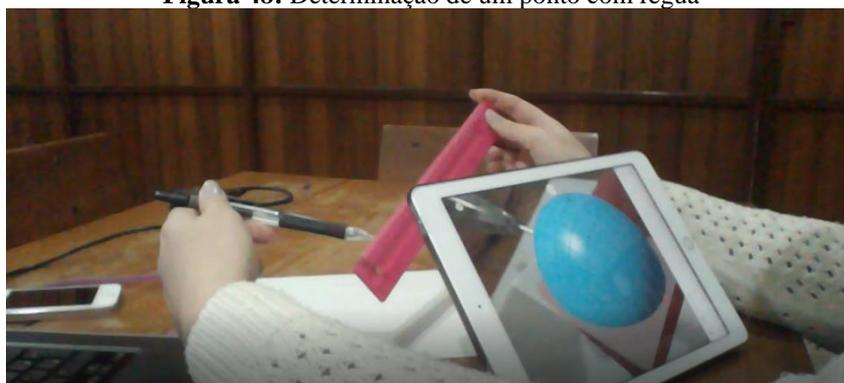
[00:06:14] então vai ser esse ponto bem aqui. (apontando para a localização do ponto (0,-2) no holográfico)

[00:06:17] e ai se eu traçar uma reta paralela, ao plano, na verdade ao eixo, porque os eixos são perpendiculares entre si. Se eu traçar uma reta paralela aqui ó, eu vou ver onde o 0 e o -2 se encontram com o z. Traçar não, posso ir com a régua aqui e já visualizo.

[00:06:43] vai dar um pouco acima do 4. Vou conferir pra ver se algebricamente vai dar a mesma coisa.

[00:07:36] é, vai dar 4,58, 4,6 aproximadamente.

Ao se lançar à essa atividade, a primeira dificuldade da professora/pesquisadora foi identificar onde estaria o encontro entre os eixos x e y, do plano cartesiano, para então pensar na localização da variável dependente. A dificuldade surge, pois, no contexto da RA, e especificamente, no holográfico a visualização dos pontos correspondentes ao eixo das abscissas e sua respectiva correspondência com o eixo das ordenadas se dava por meio de linhas esféricas, diferente do que fazemos ao traçar, em duas dimensões, ou seja, em outro contexto, o gráfico de uma função de uma variável, por exemplo. Ao pensar sobre essa localização a professora/pesquisadora percebe que as linhas em azul escuro (podem ser observadas na Figura 47) são as linhas correspondentes a cada valor dos eixos.

Figura 48: Determinação de um ponto com régua

Fonte: a pesquisa

Podemos perceber que ao encontrar o ponto $(0, -2)$, que são possíveis variáveis independentes dessa função, a professora/pesquisadora pensa maneiras de relacioná-la com variável dependente. “[00:06:17] [...] se eu traçar uma reta paralela [...] ao eixo, porque os eixos são perpendiculares entre si. Se eu traçar uma reta paralela aqui ó, eu vou ver onde o 0 e o -2 se encontram com o z.” Identificamos que a professora/pesquisadora expressa trabalhando com RA, alguns conceitos da matemática acadêmica, como “traçar”, “reta paralela” e “eixos perpendiculares”. E, em alguns momentos identifica que essa linguagem não está apropriada ao trabalho com RA, ao dizer, por exemplo, que não vai traçar a reta paralela, vai só indicar com uma régua onde seria essa reta. Trabalhando com a composição do mundano e do virtual, não seria possível traçar a reta da qual a professora/pesquisadora fala, já que seria um desenho flutuante sobre a mesa onde trabalha, ou seja, no uso da TD de RA não faz sentido o conceito de traçar uma reta. Assim, podemos afirmar que a ação de encontrar uma reta paralela com a régua, sem ser necessária desenhá-la, podendo compor régua e holográfico, adquire um significado em seu uso, naquela especificidade e não de um modo universal válido para todas as representações de um gráfico.

Ao mudar a forma como se expressa, com a TD de RA, utilizando-a como partícipe para produzir conhecimento matemático, identificamos que o modo de participação desta professora nesse contexto sofre uma alteração, já que ela diz “[00:06:17] [...] Traçar não, posso ir com a régua aqui e já visualizo.”. A professora/pesquisadora que, inicialmente, recorre a uma linguagem matemática acadêmica, visto que é a que mais teve contato durante sua formação, percebe que naquela situação não faz sentido, ou seja, começa a fazer conjecturas que só são possíveis por estar com TD de RA. Entendemos, segundo Rosa e Bicudo (2019), que os atos dos sujeitos encarnados necessitam ser articulados e expressos em uma materialidade apropriada à visibilidade do que está sendo constituído como conhecimento, neste caso ao estar imersa no ambiente mundano-cibernético da RA, a

professora/pesquisadora percebe que as articulações expressas por suas falas não são apropriadas, já que naquele ambiente não podem ser executadas, precisando então encontrar alternativas que façam sentido e que possam ser executadas naquele contexto. As alternativas apropriadas foram pensadas pela professora/pesquisadora ao estar no contexto específico, com a TD de RA, assim assumimos que ela tem seu pensamento modificado e reestruturado por essa tecnologia.

Segundo Rosa (2018) quando assumimos as TD como partícipes na constituição do conhecimento matemático, alterando à nossa maneira de pensar por meio da nossa imersão nela, executamos o ato de pensar-com-TD de RA. Destacamos ainda, que segundo Rosa, Pazuch e Vanini (2015), o ato de pensa-com-TD, especificamente com TD de RA, explicita as tecnologias como partícipes, não sendo usadas somente para agilizar o processo, mas sim como potencializadoras e ampliadoras do processo de constituição do conhecimento, para nós, constituição do conhecimento matemático.

Segundo Lave e Wegner (1991), conforme o sujeito compreende e se integra de um contexto, suas maneiras de participar sofrem alterações. Entendemos que, neste excerto, conforme a professora/pesquisadora se apropria do contexto da RA, vai transformando sua maneira de participação, abrindo-se para novas possibilidades naquela situação específica, embora não deixando de se apoiar em saberes acadêmicos, parte de sua trajetória. Para nós, a professora/pesquisadora apoia-se nos saberes acadêmicos, pois tudo aquilo que sabemos se dá a partir de uma experiência e de uma visão própria nossa (MERLEAU-PONTY, 1999). Então a transformação na sua maneira de participação no contexto da RA se expressa em apropriação do contexto de acordo com o que sabe do mundo, a partir de uma visão e/ou experiência própria, abrindo novas possibilidades naquele ambiente de RA. Ao vislumbrar essas possibilidades, entendemos que o conhecimento está se constituindo no mundo humano da experiência vivida (MERLEAU-PONTY, 1999), especificamente no contexto criado pela RA.

4.2.2.2 Estudando o domínio de uma função

Antes de apresentarmos o recorte analisado, apresentamos brevemente algumas definições do conceito de domínio, inicialmente de uma função com uma variável real e seguindo com funções de duas ou mais variáveis reais.

Figura 49: Definição de função encontrada no capítulo 2 "Funções" de Fundamentos de Matemática I

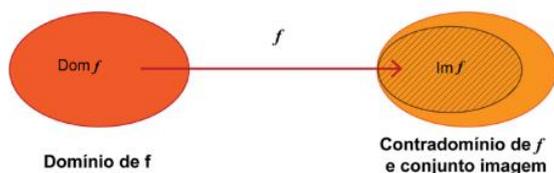


Figura 2.3: Domínio, contradomínio e o conjunto imagem de uma função.

Os elementos de B que são imagem de algum elemento do conjunto A é um subconjunto de B denominado conjunto imagem de f (indicado como $\text{Im } f$, ou I).

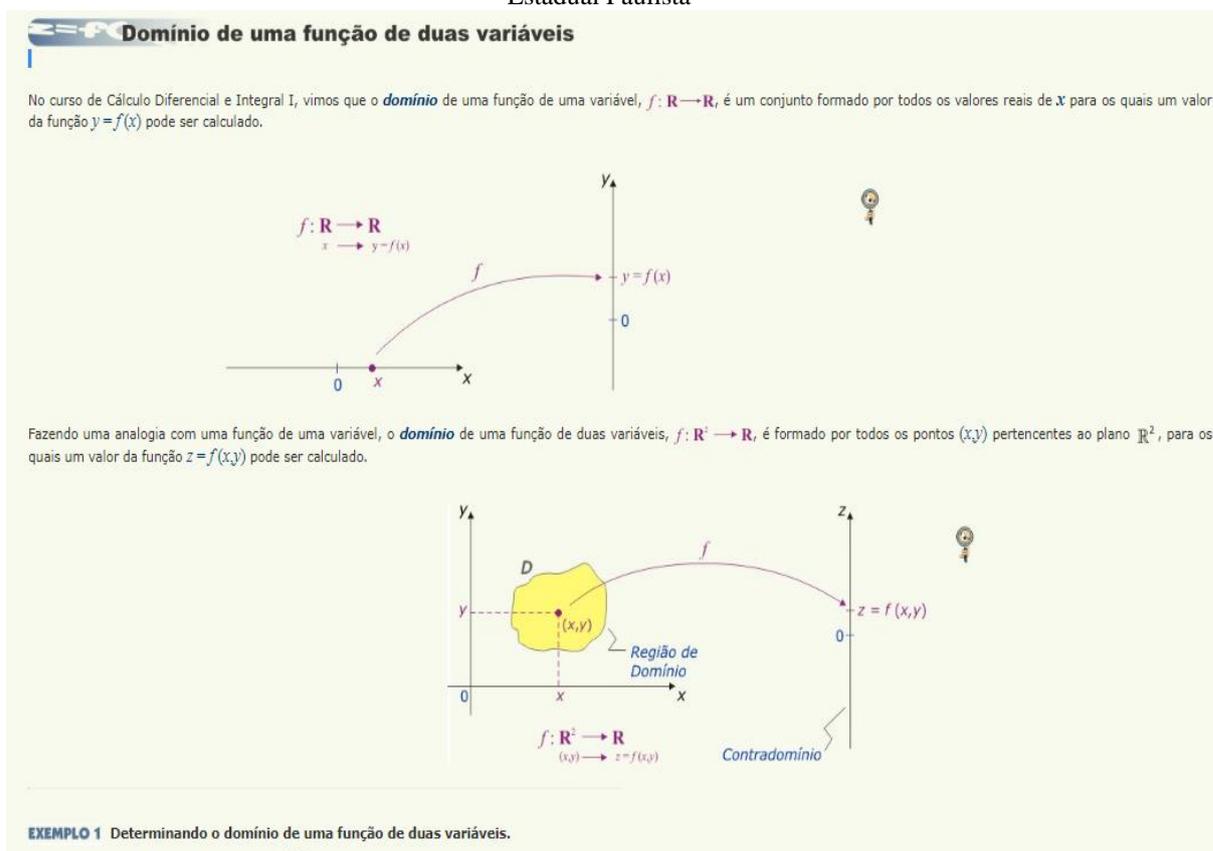
Fonte: Marques (s/d, p.34)

Mais geralmente, no contexto da teoria dos conjuntos, o conjunto A é denominado domínio de f (indicado como $\text{Dom } f$) ao passo que o conjunto B é o contradomínio de f (indicado como $\text{CD } f$).

No material pesquisado, a definição do que é uma função é dada por meio de conjuntos, sendo considerado o conjunto A , ou como chamado nos livros didáticos, do conjunto de "partida". Com funções de duas variáveis reais, o domínio é construído de forma análoga às funções de uma variável real. Como podemos observar nas Figura 50, o domínio é apresentado como um subconjunto de pares ordenados (x, y) para os quais $f(x, y)$ é associado a um único número real.

Consideramos importante destacar que os materiais pesquisados não apresentam a representação geométrica do domínio e não fazem menção a sua representação. Consideramos então que o domínio nesses cursos provavelmente é explorado, *a priori*, de forma algébrica e possivelmente sem ou com pouca conexão com a sua representação gráfica. Destacamos também que durante a sua trajetória, enquanto aluna de graduação, a professora/pesquisadora esteve vinculada às disciplinas que estruturaram o estudo desse tema também focando na forma algébrica.

Figura 50: Definição de domínio de uma função de duas variáveis reais encontrada no site da Universidade Estadual Paulista



Fonte: Bizelli (s/d)

Embasados por essa intenção em estudar/pensar o domínio de uma função de duas variáveis por meio de seu gráfico, inicialmente dispensando cálculos algébricos, é que a professora/pesquisadora se lança a trabalhar com a seguinte atividade, proposto pelo professor orientador.

Figura 51: Atividade/Exercício proposto pelo professor orientador para o cálculo de domínio

Determine o domínio das seguintes funções de maneira geométrica:

a) $\sqrt{x-y}$

b) $\frac{1}{\sqrt{x-y}}$

c) $\sqrt{25 - (x^2 + y^2)}$

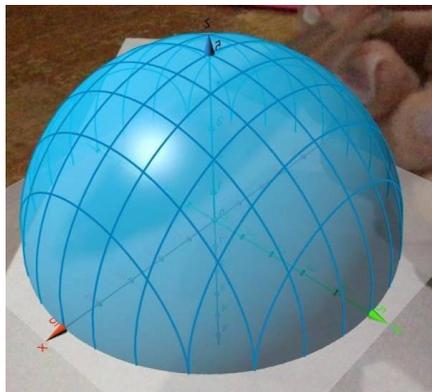
d) $\frac{1}{\sqrt{25 - (x^2 + y^2)}}$

Fonte: atividade/exercício de material de aula, proposto pelo professor orientador em reunião de orientação/formação no dia 07 de maio de 2018.

Durante a realização dessa atividade/exercício destacamos, com nossa projeção, o momento em que a professora/pesquisadora esteve resolvendo as questões "c" e "d". O

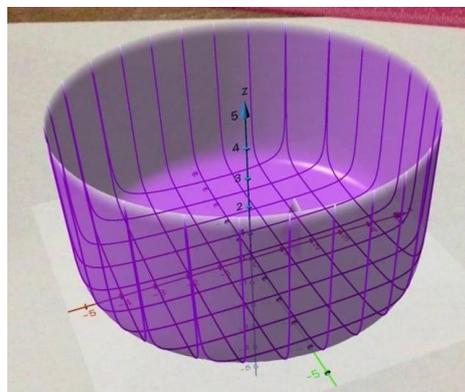
gráfico 1, ao qual a professora se refere, é a representação da função $\sqrt{25 - (x^2 + y^2)}$ (Figura 52) e o gráfico 2 é referente à função $\frac{1}{\sqrt{25 - (x^2 + y^2)}}$ (Figura 53).

Figura 52: Função de duas variáveis "c"



Fonte: a pesquisa

Figura 53: Função de duas variáveis "d"



Fonte: a pesquisa

M3 - Projeção 5: Estudando o domínio de uma função a partir de seu holográfico de RA (VA; GG; 28/05/2018; 00:00:58 - 00:18:00)

[00:00:58] o domínio da função 1 vai ser uma circunferência de raio menor ou igual a 5, porque se olharmos bem o cinco entra no gráfico (Figura 52)

[00:01:26] agora se a gente for olhar pro gráfico 2 (Figura 53), o domínio vai ser uma circunferência de raio estritamente menor do 5. Mas o que eu fiquei pensando, foi que...

[00:02:10] diferente das outras funções, elas não se completam assim (ao dizer isso a professora/pesquisadora está se referindo as demais funções estudadas que apresentaram simetria de rotação em torno do plano criado pelas coordenadas x e y, enquanto percebe que as funções em estudo nesse momento não apresentam)

[00:02:30] se a gente olhar só para a primeira, ela é bem certinha uma esfera.

[00:02:43] já a outra, ela não é, ela parece um pouco diferente, é mais achatada.

[00:02:53] e ai se a gente for olhar pro ponto, se a gente for olhar pro eixo z, a gente vai ver que ela não liga com a coordenada zero, ela está acima do plano.

[00:03:45] e ai eu fiquei pensando porque será que isso acontece?

[00:03:56] por que será que as duas não se completam?

[00:04:01] por que teoricamente, se na primeira, eu encontro, sei lá, 3 no z, na segunda função vou encontrar $\frac{1}{3}$.

[00:04:55] vou considerar x igual a -3 e y igual a zero, se eu considerar esse ponto, eu vou ter em z, o correspondente 4. E se eu fizer usando a outra função, eu vou ter a minha localização tendo $\frac{1}{4}$. (Nesse momento a professora/pesquisadora resolve algebricamente a equação que compõe a função para encontrar a variável dependente).

[00:09:02] por que será que isso acontece? Ele chega bem próximo do zero do y.

[00:09:06] esses pontos aqui embaixo parece que eles não ficam curvadinhos como na outra função.

[00:09:31] o ponto (4,3), por exemplo, que é um ponto...

[00:09:43] em que a função zeraria.

[00:09:59] ai seria uma divisão por zero.

[00:10:03] deixa eu ver como tá representado aqui no gráfico.

[00:10:10] o ponto (4,3), não pertence ao gráfico, claro porque eu não posso dividir por zero.

[00:10:32] então todos os números cujos os quadrados derem 25 não pertencem ao gráfico, óbvio.

[00:10:49] vou tentar ver se tem algum ponto em que os dois gráficos se interceptam.

[...]

[00:15:04] “tô” tentando perceber se eles se interceptam. Vou ver pegando o quadrante positivo.
[...]

[00:17:19] é, de fato, eles não se interceptam.

[00:17:34] quando chega nos pontos (4,1), por exemplo. Não (4,1) faz parte.

[00:18:00] a partir de (4,3) ou (3,4) já não faz parte. Dai (4,4), (4,5), (4,6) também não vão fazer parte, a mesma coisa para os negativos.

No início da resolução dessas atividades/exercícios, a professora/pesquisadora demonstra segurança em afirmar que “[00:00:58] o domínio da função vai ser uma circunferência de raio menor ou igual a 5, porque se olharmos bem o cinco entra no gráfico”. Entendemos que a conclusão da professora/pesquisadora foi facilmente deduzida pois, por meio do holográfico, pode visualizar de forma intuitiva qual era a região, no plano formado pelos eixos x e y, que representava a delimitação do domínio dessa função.

Embora a facilitação de cálculos ou procedimentos da matemática acadêmica não contemplem em sua totalidade o que a concepção da Cyberformação defende, identificamos que ao ter seu procedimento de cálculo de domínio simplificado, a professora/pesquisadora ampliou seu conhecimento sobre o gráfico de funções de duas variáveis, visto que a partir da atividade proposta passou a pensar na constituição do holográfico identificando que “[00:02:10] diferente das outras funções, elas não se completam assim.”. Ao dizer isso, a professora/pesquisadora levanta um questionamento que até então em sua formação não fora discutido, que é a simetria de rotação apresentada ou não em torno do plano criado pelas coordenadas x e y.

Ao estar no/com ambiente de RA, a professora/pesquisadora relata que “[00:02:30] se a gente olhar só para a primeira, ela é bem certinha uma esfera” e “[00:02:43] já a outra, ela não é, ela parece um pouco diferente, é mais achatada”. Para nós, quando as TD, especificamente a TD de RA, propiciam um pensar, identificado a partir da conversa da professora/pesquisadora consigo mesma, que só é possível no ambiente próprio criado por elas, consideramos que elas são partícipes da constituição do conhecimento, pois podem o ampliar. Ao fazer isso, estamos construindo um pensar matemático que é específico desse ambiente, ou seja, estamos desenvolvendo uma matemática situada no ambiente de RA.

Quando a professora/pesquisadora diz que vai “[00:10:49] [...] tentar ver se tem algum ponto em que os dois gráficos se interceptam”, percebemos que ela cria estratégias matemáticas para analisar se o que está lhe parecendo geometricamente é concomitante com a resolução algébrica. Ao sugerir que vai “[00:15:04] pegando o quadrante positivo” identificamos que a estratégia de “pegar um quadrante” só faz sentido no contexto de RA, onde embora não se tenha de forma física uma matéria que represente o holográfico,

conseguimos “tocá-lo” pela composição que a RA projeta, levando-nos a uma nova experiência. Considerando a possibilidade de “pegar”, entendemos que a professora/pesquisadora está imersa no ambiente criado pela RA, estando envolvido nessa simbiose de modo tenha seu pensamento moldado pelo ciberespaço (ROSA, 2008) ao considerar um ato que só é possível nesse ambiente, assim, executando o ato de pensar-com-TD de RA.

Após “pegar o quadrante positivo”, ou seja, após a partir do holográfico projetado por RA, analisar o quadrante positivo da função em estudo, identificamos que a professora/pesquisadora constrói uma conclusão matemática, afirmando que “[00:17:19] [...] de fato, eles não se interceptam.”. Essa conclusão evidencia o que Bicudo e Rosa (2010) denominam por intencionalidade já que se deu pelas possibilidades de ações reflexivas, no nosso caso próprias da RA, trazendo o sentido como fluxo fluídos de ações conscientes, que são as estratégias da professora/pesquisadora, especificamente a de “pegar o quadrante positivo”, propiciando construção do conhecimento matemático. Para nós, essa construção do conhecimento evidenciada anteriormente está vinculada a nossa materialidade pela oralidade, no ato de conversar consigo mesma, já que é dessa forma que a professora/pesquisadora o organiza e o expõe.

Sendo a oralidade a maneira pela qual a professora/pesquisadora expressa o ato de pensar-com-TD de RA, consideramos que o ambiente criado pela RA pode ser considerado um ambiente situado de aprendizagem já que a relação entre problema e resposta se estabeleceu no próprio contexto da RA, modificando a maneira de pensar com/no ambiente.

4.2.2.3 Calculando o volume do troféu

Nessa projeção apresentamos um momento de planejamento individual da atividade do troféu. As discussões apresentadas nessa projeção surgiram após conversa entre a professora/pesquisadora e sua colega de curso de extensão, onde vislumbraram a possibilidade de imprimir o troféu construído em uma impressora 3D, utilizando algum tipo de plástico, já que a turma na qual a atividade foi desenvolvida seria um terceiro ano do Curso Técnico em Plástico.

M3 - Projeção 6: Calculando o volume do troféu (VA; GG; 14/06/2017; 00:27:31 – 00:35:19)

[00:27:31] *eu fiquei pensando naquilo que a Rosana falou, ia ser muito tri se os alunos imprimissem o troféu em 3D.*

[00:27:39] *porque daí, além de ter o troféu no celular, pra ver em RA, eles poderiam aplicar os o que eles viram no curso técnico pra pensar em qual material seria melhor de usar.*

[...]

[00:28:27] *pois é, mas daí também tem a questão do custo, tinha que saber certinho quanto de material que vai precisar, até pra gente se organizar e ver se tem como comprar.*

[...]

[00:29:35] *tá, mas eu acho que eles podem calcular quanto de material precisa pelo volume do que vão imprimir.*

[00:29:42] *se decidirem o tamanho do troféu e utilizar uma escala no Blender, dá pra calcular.*

[00:29:52] *deixa eu pensar melhor como vou fazer.*

[...]

[00:31:54] *acho que se pegar e olhar o troféu por cima, dá pra ver mais ou menos como seria a base dele.*

[00:32:01] *daí vira e vê a altura, e faz como se fosse um prisma, até porque é melhor que sobre material do que falte.*

[00:32:09] *vou tentar.*

[...]

[00:33:14] *tinha que saber qual a função ou lei de formação do formato da base.*

[00:33:19] *que nem no meu caso, que ficou uma circunferência, tinha que saber equação da circunferência.*

[00:33:24] *ah, mas se eu virar e olhar por baixo, eu tenho a malha do Blender.*

[00:33:29] *vou fazer aqui do meu, pra ter uma ideia, vou usar que cada unidade de medida da malha como cm pra ver.*

[...]

[00:34:42] *ah sim, daí eu pego os pontos mais distantes, vejo onde que dá o centro, e conto quanto dá.*

[00:34:53] *que nem no meu aqui deu (...)*

[...]

[00:34:57] *mais ou menos do 4 até o 10, arredondando só pra ter uma ideia.*

[00:35:02] *então o centro é no 7, 3 cm de raio.*

[00:35:08] *vou ver a altura também.*

[...]

[00:35:13] *vamos dizer que deu 12.*

[00:35:15] *daí agora é só calcular.*

Neste excerto, analisamos um excerto onde a professora/pesquisadora conversa consigo mesma lembrando de uma possibilidade discutida no curso de extensão. Ao pensar sobre a possibilidade de imprimir os troféus que os alunos criariam em RA com o Blender. Neste excerto destacamos as estratégias utilizada pela professora/pesquisadora para que os alunos possam “[00:29:35] [...] calcular quanto de material precisa pelo volume do que vão imprimir.”, ou seja, propõe que seja feito um cálculo estimado da quantidade de plástico necessário para a impressão de cada troféu considerando o seu volume. Ao pensar nisso a professora/pesquisadora, se dedica a encontrar uma maneira para que os alunos possam fazer isso durante a construção do seu troféu em RA. O cálculo da quantidade de material durante

a confecção facilitaria possíveis alterações para que o custo da impressão ficasse viável, por isso a preocupação em estimar esses valores.

O trabalho com RA permite “[00:31:54] [...] *pegar e olhar o troféu por cima* [...]” e estimar “[00:31:54] [...] *mais ou menos como seria a base dele*.” Também por meio do movimento do smartphone é possível “[00:32:01] [...] *vira e vê a altura* [...]”. Entendemos, com esses trechos, que durante o trabalho no/com o ambiente de RA, a professora/pesquisadora identificou formas de resolver problemas, como o cálculo do volume, no próprio contexto da RA. Ao pensar em “*pegar*” (mesmo que não seja possível materialmente, como já discutido anteriormente), “*virar*”, ela se encontra engajada naquele contexto, pensando em alternativas que são próprias dele. Segundo os pressupostos da Cyberformação, para nós, esse pensar com o ambiente projetado pelas TD, de modo que a professora/pesquisadora se sinta imersa nele, pode ser caracterizado como o pensar-com-TD de RA.

Realizando os movimentos necessários para que pudesse por em prática os atos pensados, a professora/pesquisadora identifica que “[00:33:14] *tinha que saber qual a função ou lei de formação do formato da base*.” que no caso do troféu construído por ela é “[00:33:19] [...] *uma circunferência* [...]”. Dada uma circunferência é possível que seja calculada sua equação geral, e por consequência sua área, tendo, por exemplo, três pontos pertencentes a ela, porém estando com o ambiente de RA, a alternativa encontrada para calcular a área da base, necessária para o cálculo do volume do prisma, foi “[00:33:24] [...] *virar e olhar por baixo* [...]”, já que pela malha quadriculada teria como ficar visível.

Identificamos por meio da oralidade que a professora/pesquisadora tem sua maneira de participar/estar/trabalhar com/na RA sendo alterada, segundo Lave e Wenger (1991), isso acontece pois ela vai conhecendo mais sobre esse contexto, identificando-se. Essas mudanças acontecem, pois, a professora/pesquisadora não é passiva diante desse contexto, mas está engajada nele.

De acordo com Rosa e Bicudo (2019), entendemos que ao propor por meio da linguagem oral, a professora/pesquisadora vai se constituindo no ambiente de RA, dando visibilidade ao que tem sido construído em termos de conhecimento.

4.2.3 Cybercorpo em termos de corpo-próprio-com-TD de RA

Em consonância com o que foi apresentado teoricamente nesta dissertação, entendemos que a constituição do conhecimento é um movimento complexo pois abrange

muitos atos intencionais da consciência e modos de sentidos que se entrelaçam e fazem com que o sujeito vivente possa tomar a consciência do que está compreendendo do mundo-vida (ROSA; BICUDO, 2019). Entendemos que a constituição do conhecimento, como um ato de agir com intencionalidade, permite que o sujeito vivente se perceba fazendo e reflita sobre isso, o que ao trabalharmos com Tecnologias Digitais é caracterizado, pelos pressupostos da Cyberformação como o ato de saber-fazer-com-TD, para nós, especificamente, saber-fazer-com-TD de RA. Apresentamos, então, os recortes em que por meio do movimento corpóreo podemos identificar o ato de agir com intencionalidade da professora/pesquisadora.

4.2.3.1 Planejando a construção do troféu

Neste excerto destacamos a conversa entre a professora/pesquisadora (Paula) e sua colega de curso de extensão (Rosana), em um dos momentos em que estiveram planejando presencialmente a atividade-matemática-com-TD de RA para ser trabalhada com os alunos do ensino básico. Neste encontro, elas discutem sobre a construção do troféu e como explicariam para os alunos o que desejavam com essa atividade.

M1 - Projeção 7: Planejando a construção do troféu (Somente áudio; AD; 17/06/2017; 00:23:05 - 00:38:40)

[00:23:05] Rosana: vamos ver como está ficando o nosso troféu em RA?

[00:23:09] Paula: tá, vou te mandar o arquivo, daí a gente abre no teu celular, pode ser? (embora estivessem no mesmo ambiente, Paula envia o arquivo com o troféu para a colega Rosana, pois estavam utilizando nesse momento o celular da Rosana para visualizar por meio do aplicativo AndAR).

[00:23:16] Rosana: tá, pode ser.

[00:23:17] Paula: só um pouquinho (Paula envia por e-mail o arquivo para que possa ser visualizado em RA no smartphone da colega).

[00:23:21] Paula: vê aí se tu recebeu (o e-mail)?

[00:23:24] Rosana: tá, pera aí. Recebi aqui, “pera” aí que vou abrir.

[...]

[00:24:35] Rosana: tá, acho que deu (Rosana analisa a projeção do gráfico em RA).

[00:24:36] Paula: tá, deixa eu ver como tá ficando então.

[00:24:43] Rosana: bah, olha só, parece que a esfera não tá encaixando na parte de baixo do troféu (Rosana aponta para o holográfico do troféu).

[00:24:48] Paula: tá, dá um zoom pra gente conseguir ver melhor.

[00:24:56] Rosana: tô tentando, mas não dá pra ver muito bem.

[00:25:00] Paula: pois é, talvez vira o celular e vamos ver se a gente consegue entrar pela parte de baixo ali, sabe?

[00:25:08] Rosana: ah sim, boa ideia.

[00:25:11] Paula: tá vamos ver. Ahh, acho que olhando assim por dentro, dá pra ver bem certinho que não tá encostando, é pouca coisa que tá longe, mas não tá encaixando.

[00:25:26] Rosana: verdade, é nós vamos ter que resolver isso no Blender agora.

[00:25:33] Paula: sim, sim, acho que vamos voltar lá pro Blender e ver se a gente consegue encaixar.

[...]

[00:29:43] **Paula:** tá, olha só, por que que a gente não traça uma reta tangente ali na base e daí a gente vai baixando a esfera até encaixar nela, o que tu acha?

[00:29:55] **Rosana:** tá, mas, deixa eu pensar, essa tangente vai ser pra base e pra esfera? vai ser tangente “pras” duas coisas?

[00:30:04] **Paula:** é eu pensei da gente fazer uma reta e aí essa reta vai ser tangente ali a parte de cima da base e aí a gente vai baixando a esfera até que seja tangente à um ponto da esfera também, depois a gente olha de novo o troféu em RA e se não encaixou bem, a gente volta pro Blender.

[00:30:30] **Rosana:** é pode ser, acho que é uma boa ideia.

[00:30:34] **Paula:** tá.

[00:30:35] **Rosana:** vamos ver se vai dar certo.

[...]

[00:36:45] **Paula:** tá, vou te mandar de novo o arquivo com a reta tangente agora.

[00:36:53] **Rosana:** tá, beleza.

[00:36:56] **Paula:** tá, deu, recebeu?

[00:36:58] **Rosana:** deixa eu ver aqui o arquivo. Sim, recebi.

[00:37:03] **Paula:** tá, olha só, agora vamos pegar e fazer a mesma coisa, vamos pegar e entrar de novo no gráfico e a gente vai entrando por baixo sabe? E aí a gente confere.

[00:37:16] **Rosana:** aham, tá.

[00:37:19] **Paula:** deu?

[00:37:21] **Rosana:** bah, olha só, agora deu.

[00:37:23] **Paula:** bah, que bom.

[00:37:24] **Rosana:** legal, legal.

[00:37:25] **Paula:** vamos aproveitar e já vamos (...). Já vira e já vamos olhar por cima também pra ver se por cima também tá encaixando.

[00:37:36] **Rosana:** aham (enquanto movimenta o smartphone para visualizar)

[00:37:37] **Paula:** encaixou né?

[00:37:38] **Rosana:** “tô” olhando aqui, encaixou sim.

[00:37:41] **Paula:** tá, então tá bom. Ah, olha só que que tu acha de repente a gente falar para os alunos fazerem isso porque talvez quando eles tiverem trabalhando ali no Blender, como não tem bem certinho os pontos das coordenadas, talvez pareça que tá encaixando, mas daí não tá. Então, a gente pode sugerir pra eles fazerem de repente uma reta tangente, e quando eles forem olhar em RA eles conferem sabe? Porque daí conforme eles vão girando o celular, eles conseguem fazer como a gente fez, isso de entrar dentro do gráfico, eles vão conseguir ver bem, acho que é uma boa, né?

[00:38:25] **Rosana:** e o bom é que os alunos são do 3º ano, então eles já viram reta tangente.

[00:38:32] **Paula:** bah, perfeito.

[00:38:33] **Rosana:** é, não vai ser nada novo, digamos assim.

[00:38:37] **Paula:** beleza então. Perfeito.

[00:38:40] **Rosana:** fechou então.

Ao analisarmos o excerto escolhido, destacamos as falas de Paula e de Rosana a partir do momento [00:25:00] em que criam uma maneira de resolver o problema de encaixe entre as duas partes que constituem seu troféu. Nesse momento, as participantes decidem “entrar” no troféu, ou seja, por meio do movimento do corpo com o seu celular conseguem uma visão interna da figura 3D que está sendo projetada em RA. Nesse momento, por meio do movimento corpóreo identificamos a materialidade biológica que subjaz o “ser”, fazendo com que as participantes deixem de se entender como sujeitos abstratos e passem a vincular a constituição do conhecimento a sua materialidade (ROSA; BICUDO, 2019).

Entendemos que os movimento corpóreo realizado pelas participantes do curso aconteceu no sentido proposto por Merleau-Ponty (1999), já que ele surge como uma necessidade para explorar a Realidade Aumentada e acaba criando novas possibilidades de interpretação, como podemos observar durante o movimento do corpo segurando o *smartphone*, onde Paula diz “[00:37:03] [...] vamos pegar e entrar de novo no gráfico e a gente vai entrando por baixo [...]”. Assim, vislumbrando uma solução matemática que pudesse garantir esse “encaixe”, que é a criação de uma reta tangente.

Em consonância com os movimentos corpóreos, Paula pergunta a sua colega se ela “[00:25:00] [...] consegue entrar pela parte de baixo [...]” do troféu. Segundo Lave (1991) quando temos uma situação em que, tanto problema e resposta surgem em um contexto específico, fazendo sentido somente ali, podemos entender que estamos em um contexto de aprendizagem situada. Assim, para nós, a ideia de “entrar” no holográfico é uma maneira de estudar o que está sendo construído de um modo que só é possível naquele ambiente próprio da RA. Ao trabalharmos com o desenho ou projeção de um objeto 3D em um plano bidimensional, como por exemplo a tela de um computador ou uma folha de papel, não faria sentido a proposta de “entrar” nessa projeção.

Entendemos que o contexto criado quando estamos com RA, possibilitou uma mudança na maneira com que as professoras pensassem em manipular um objeto 3D pois, não é possível sugerir essa interação em outro ambiente. Com base nisso, entendemos que o ato de “entrar” no troféu é próprio do contexto criado pela RA, já que surge nesse contexto e só é possível de se resolver nele, resultando em uma aprendizagem que não se concentra nem no indivíduo, nem apenas no contexto, mas na relação entre eles, na dialética construída de maneira particular dessa experiência situada (Lave, 1991) na RA.

Segundo Bicudo e Rosa (2010, p.87) a intencionalidade é entendida como um fio invisível que “[...] traz o sentido percebido em um fluxo em que fluem ações conscientes [...] abrindo possibilidades de ações reflexivas”. Quando Paula diz que “[00:25:00] [...] vamos ver se a gente consegue entrar pela parte de baixo [...]” movimentando seu corpo enquanto segura o celular, há uma intencionalidade, já que o ato de “entrar” no troféu elas se mantêm plugadas ao contexto que as cerca e buscam resolver o problema “[00:24:43] [...] que a esfera não tá encaixando na parte baixo do troféu.”, há, também, uma ação consciente de trazer o sentido do que é percebido quando percebem que “[00:25:11] [...] acho que olhando assim por dentro, dá pra ver bem certinho que não tá encostando, é pouca coisa que tá longe, mas não tá encaixando.”

Entendemos esse agir com intencionalidade, especificamente quando se está conectado a alguma TD, como o ato de saber-fazer-com-TD, de forma que me perceba fazendo e reflita sobre isso, de forma a constituir o conhecimento (ROSA, 2008). A constituição do conhecimento pode ser percebida durante o processo de reflexão, onde a solução encontrada foi moldada pelo meio tecnológico e suas possibilidades (ROSA, 2008), nesse caso pelo contexto da RA, já que foi por meio dele que Paula e Rosana decidiram “[00:29:43] [...] traça[r] uma reta tangente (...)”, moldando o troféu com uma ideia matemática, devido ao troféu moldar/necessitar de ajuste matemático para ficar correto. Isso só pôde ser visualizado ao entrarem no troféu, imergirem no holográfico.

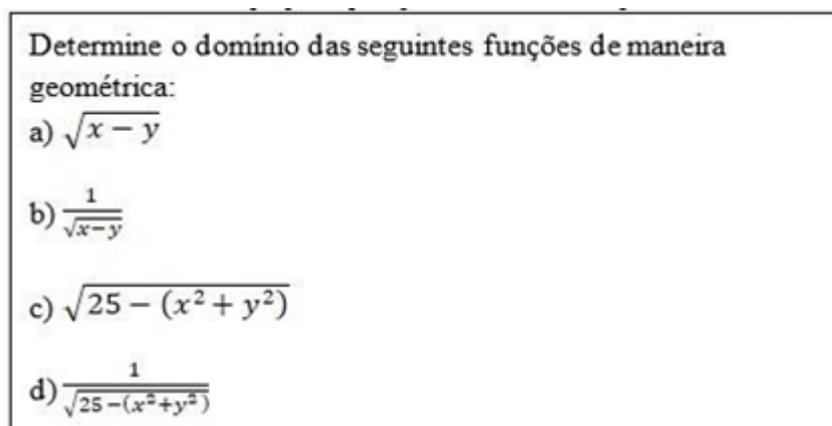
O ato de saber-fazer-com-TD de RA se evidencia pois ao estarmos no/com o contexto criado pela RA, essa tecnologia é partícipe, como podemos perceber na fala de Paula “[00:25:11] [...] olhando assim por dentro, dá pra ver bem certinho que não tá encostando [...]” em que a RA não foi utilizada para agilizar ou facilitar determinada resolução de problema, mas, como um meio, que possibilita alcançar um fim, nesse caso específico, a finalidade é resolver o problema do encaixe da esfera na base do troféu, destacado por Paula e Rosana. Essa resolução foi possível por meio do corpo, já que Paula vai com o seu corpo para olhar o troféu por dentro, ou seja, foi possível por seu corpo-próprio.

Paula propõe ainda “[00:30:04] [...] fazer uma reta e aí essa reta vai ser tangente ali a parte de cima da base e aí a gente vai baixando a esfera até que seja tangente à um ponto da esfera também, depois a gente olha de novo o troféu em RA e se não encaixou bem, a gente volta pro Blender”, demonstrando que embora já tenha vislumbrado uma possível solução para o problema destacado, identifica a necessidade de voltar a observar o troféu em RA para confirmar se a solução estava adequada. Para Lave (1991), a aprendizagem se dá em contexto quando os problemas a serem resolvidos surgem por meio de uma situação e sua resposta surge durante o problema. Assim, entendemos que o problema identificado pelas participantes surgiu no ambiente projetado quando trabalhamos com RA e sua resposta surgiu durante a investigação do problema no próprio contexto da RA. Assim, a TD de RA, para nós, pode ser considerada como um contexto, no qual temos uma aprendizagem situada.

4.2.3.2 Entrando no gráfico pelo seu domínio

Esta projeção refere-se à constituição de dados na qual a professora/pesquisadora está estudando/pensando no domínio de funções de duas variáveis reais e suas representações gráficas, a partir de uma atividade/exercício indicada pelo orientador (Figura 54).

Figura 54: Atividade/Exercício proposto pelo professor orientador para o cálculo de domínio



Fonte: atividade/exercício de material de aula, proposto pelo professor orientador em reunião de orientação/formação no dia 07 de maio de 2018.

M3 - Projeção 8: Entrando no gráfico pelo seu domínio (VA; GG; 28/05/2018; 00:18:29 - 00:27:22)

[00:18:29] deixa eu olhar por baixo (movimentando o seu corpo para que pudesse visualizar a função por baixo).

[...]

[00:19:31] embaixo parece que estão alinhados (abaixando seu corpo e o tablet para que pudesse olhar o gráfico embaixo).

[00:20:00] parece que estão todos no mesmo valor de z.

[00:20:50] parece que só muda a partir do (3,3), os demais são iguais em z.

[...]

[00:22:33] tá eu vou tentar alguns pontos. Eu tentei o ponto (0,3) e achei $\frac{1}{4}$. Agora eu vou tentar um outro ponto, pra ver se isso que eu tô enxergando aqui geometricamente, vale algebricamente. Eu penso que não. (enquanto recorre ao método de resolução algébrico para verificar sua hipótese).

[...]

[00:23:48] mas acho que sei o que tá acontecendo.

[...]

[00:23:51] vou pegar um ponto (-1,-1), que tá no domínio.

[00:24:58] se pegar o ponto (-1,-1), por exemplo, vai dar $\frac{1}{4.79}$ (resolveu algebricamente).

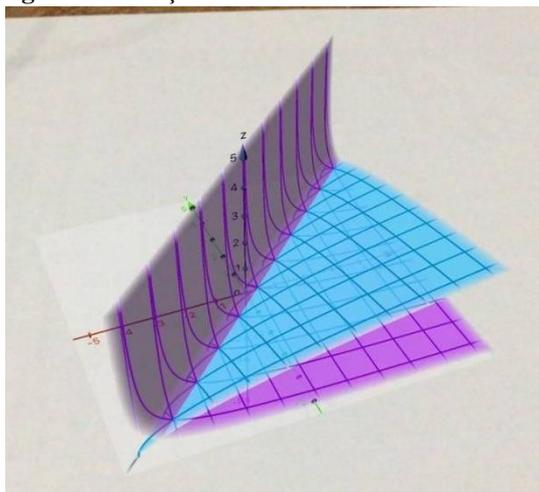
[00:25:09] suponha que eu faça outra escolha, o ponto (2,3), por exemplo.

[00:25:46] o z seria $\frac{1}{3.1}$ (resolveu algebricamente)

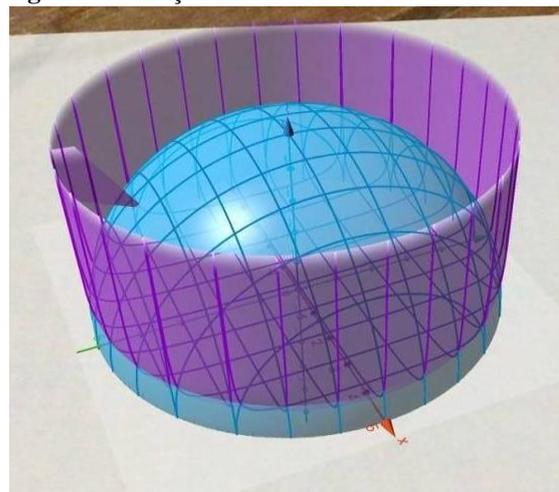
[00:25:49] é na verdade como isso vai dar um número decimal, a diferença entre eles vai ser pequena. Um décimo aproximadamente. Por isso que no gráfico tinha a impressão de estarem alinhados.

[00:26:55] isso! Agora entendi. Na verdade não é que não seja curva embaixo também, mas como a gente tá fazendo uma divisão, um por alguma coisa, a gente tá sempre trabalhando com números pequenos, então quando a gente olha no nosso plano que só tem números inteiros, quando a gente olha a impressão que a gente tem é que está reto.

[00:27:22] até pelo desenho da malha dá pra ter uma ideia de que não é reto. E aí sempre que ele aproxima de números cuja as somas dos quadrados dá mais que 25 eles não se interceptam.

Figura 55: Função de duas variáveis reais "a e "b"

Fonte: a pesquisa

Figura 56: Função de duas variáveis reais "c" e "d"

Fonte: a pesquisa

Neste excerto, destacamos uma dúvida que surgiu quando a professora/pesquisadora estava resolvendo algumas atividades/exercícios propostos pelo seu orientador. Ao estar com a Realidade Aumentada por diferentes ângulos, especialmente quando a professora/pesquisadora movimentava o seu corpo segurando o tablet com o objetivo de observá-lo por baixo, ou seja, como se estivesse “entrando” no gráfico pelo seu domínio, por meio do movimento do seu corpo. Para nós, quando a professora/pesquisadora diz “[00:18:29] *Deixa eu olhar por baixo.*” enquanto movimentava seu corpo em busca de compreender como se mostra o holográfico das funções estudadas, ela o faz com a intenção de se situar na Realidade Aumentada, já que é por meio desse movimento que conclui “[00:19:31] *Embaixo parece que estão alinhados.*”, chegando a seguinte conclusão “[00:20:00] *Parece que estão todos no mesmo valor de z.*”. De acordo com Merleau-Ponty (1999), entendemos que quando a professora/pesquisadora se dispõe a compreender e habitar o holográfico que está a sua volta, por meio do nosso movimento corpóreo, tem diferentes sensações podendo ser associadas à diferentes sentimentos, já que cada objeto convidará à realização de um gesto, em uma determinada situação, em nosso caso específico o gesto era se abaixar para que pudesse ver o gráfico de diferentes ângulos, o que acabou criando as novas possibilidades de interpretação.

Durante a realização dessa atividade/exercício a professora/pesquisadora percebe que os as funções expressas graficamente na figura 31 apresentam simetria de rotação em torno do plano criado pelas coordenadas x e y , e pressupôs que isso também aconteceria com as funções expressas graficamente na figura 32. Porém ao visualizar esses gráficos no contexto da RA percebe que a hipótese criada por ela não estava correta, já que identifica que os

pontos, da função em roxo na figura 32, “[00:19:31] *embaixo parece que estão alinhados.*”, enquanto que os da figura azul não estão.

Destacamos que toda a discussão matemática apresentada nesse excerto só foi possível por estarmos nesse ambiente de RA e pelas diferentes visualizações que ele nos proporciona por meio do nosso movimento corpóreo. Este movimento corpóreo é entendido por nós, sob o embasamento teórico de Aprendizagem Situada (LAVE; WEGNER, 1991) e da Cyberformação (ROSA, 2008), como uma mudança de participação nesse ambiente, pois ao sentir a necessidade de visualizar o holográfico de diferentes ângulos e associar o movimento como uma solução para essa necessidade, a professora/pesquisadora executa o movimento com intencionalidade de quem busca resolver um determinado problema, refletindo sobre esse movimento e tentando aprimorá-lo, assim executando o ato de saber-fazer-com-TD de RA, justificando seu movimento no trabalho com TD de RA, já que ao utilizarmos outros *softwares*, como os citados anteriormente, GeoGebra 3D e Blender, esse movimento corpóreo não faria sentido. E, além disso, transforma a maneira como penso e estou situada nesse contexto.

Embora nosso excerto apresente também que a professora/pesquisadora recorreu à utilização de recursos algébricos a fim de verificar se o que ela estava visualizando no gráfico, de fato acontecia, visto na seguinte fala “[00:22:33] *tá, eu vou tentar alguns pontos. Eu tentei o ponto (0,3) e achei $\frac{1}{4}$. Agora eu vou tentar um outro ponto, pra ver se isso que eu tô enxergando aqui geometricamente, vale algebricamente. Eu penso que não.*”, o que nos evidenciamos aqui é o estopim para que essa discussão surgisse, fazendo com que a professora/pesquisadora testasse sua hipótese inicial e avançasse em relação a representação gráfica de funções de duas variáveis reais. Esse estopim foi o movimento corpóreo, já que foi por meio dele que as dúvidas foram levantadas e que surgiram novas possibilidades de interpretação (MERLEAU-PONTY, 1999).

Então, a professora/pesquisadora, sujeito encarnado naquela situação, lança-se intencionalmente a fazer algo junto com as TD, usando-a como meio, que possibilita alcançar um fim, mesmo que utilizando recursos já conhecidos e desprendidos da RA, altera nela/com ela a sua perspectiva, possibilitando a constituição do conhecimento matemático. Ao lançar-se a esse movimento de fazer algo com as TD de RA, entendemos que o sujeito encarnado está plugado a essa tecnologia de modo que se perceba fazendo e reflita sobre isso, assim aprimorando sua maneira de participar com/nesta tecnologia e passando a executar seus movimentos de maneira menos aleatória e mais eficazes, ou seja, executando o ato de saber-fazer-com-TD de RA.

4.2.3.3 Alinhando o troféu

Nessa projeção apresentamos o diálogo entre a professora/pesquisadora e sua colega de curso de extensão, em seu último encontro de planejamento da atividade-matemática-com-TD-de-RA que desenvolveram com estudantes do ensino médio.

M2 - Projeção 9: Alinhando o troféu (Somente áudio; AD; 21/06/2017; 01:42:03 – 02:02:07)

[01:42:03] *Paula: tá, então abre no teu celular pra gente ver como tá ficando o troféu*

[01:42:07] *Rosana: tá, só um pouquinho*

[01:42:10] *Paula: deu?*

[01:42:12] *Rosana: Sim, consegui*

[01:42:13] *Paula: tá, faz assim, acho que vamos começar olhando bem por cima, o que daí a gente vai olhando pra esfera pra ver como ficou, se tá pixelado ainda ou se deu certo aquele negócio de suavizar que o Felipe falou, sabe?*

[01:42:28] *Rosana: tá vou olhar aqui*

[01:42:30] *Paula: tá então vamos começar por cima e vamos descendo*

[01:42:34] *Rosana: tá, eu vou descendo aqui e tu vai olhando, daí qualquer coisa me diz que a gente para*

[01:42:39] *Paula: tá*

[...]

[01:42:41] *Paula: acho que vira um pouco mais pra direita*

[01:42:44] *Rosana: tá*

[01:42:49] *Paula: bah, tu viu que depois que a gente colocou a reta tangente ficou bem mais fácil de ver né? Tipo se tá encaixando bem certinho?*

[01:42:57] *Rosana: Aham, bem melhor*

[01:42:59] *Paula: acho que a gente tem que tentar falar isso para os alunos [intensifica sua ideia]*

[01:43:04] *Rosana: sim, bem importante. Tá e que que tu tá achando aí do quadriculado?*

[01:43:10] *Paula: eu acho que dava pra suavizar mais*

[01:43:14] *Rosana: pois é, também acho*

[01:43:17] *Paula: mas achei bom que os encaixes que a gente tava se preocupando no sábado, deu certo né*

[01:43:23] *Rosana: aham, bah que bom né*

[01:43:26] *Paula: Sim. Pra mim acho que deu, acho que tá bom*

[01:43:33] *Rosana: queria só ver ele tipo em cima da mesa pra ver como fica, tipo se fosse de verdade mesmo dele estar em cima da mesa*

[01:43:38] *Paula: tá, então faz assim, encosta o celular na mesa, tipo apoia a parte de baixo do celular na mesa que daí vai ficar bem retinho pra gente ver como seria*

[01:43:48] *Rosana: tá beleza*

[...]

[01:43:53] *Paula: parece que ficou um pouco torto tu não acha?*

[01:43:58] *Rosana: aham, parece que tá caindo (risos)*

[01:44:01] *Paula: pois é, agora que achei que tava tudo certo (risos)*

[01:44:04] *Rosana: será que não tem um jeito de alinhar sem mudar tudo? Talvez se a gente rotacionar no eixo z?*

[01:44:13] *Paula: pode até ser, tá já vou abrir aqui no Blender*

[01:44:18] *Rosana: não, espera, acho que não é rotação*

[01:44:21] *Paula: tá, mas daí vai ser o que?*

[01:44:24] *Rosana: pois é, não sei também, mas acho que não é rotação*

[...]

[01:44:30] **Paula:** pois é, tá mas se a gente faz a mesma ideia da reta tangente, só que agora pra ver a inclinação pq agora ele tá inclinado né, tá torto. Se a gente criasse uma reta passando por dois pontos da base, pode ser um de cada lado, de cada arco que a gente colocou, e daí a gente vê o ângulo dessa reta

[01:44:55] **Rosana:** é, pode ser, podemos alinhar com o eixo x?

[01:44:59] **Paula:** sim, com o x

[01:45:01] **Rosana:** mas e o y?

[01:45:04] **Paula:** pois é, será que não é com o x então?

[01:45:12] **Rosana:** não, não é, porque a gente tá pensando só se fosse um gráfico em 2D

[01:45:14] **Paula:** é mesmo. Se fosse 2D o x seria como se fosse a base e o y seria a altura né
[...]

[01:45:24] **Rosana:** é

[01:45:26] **Paula:** Pois é, deixa eu pensar, tá olha só, acho que sei. Se a gente alinhar essa reta ao plano que o eixo x e y formam, considerar o plano que é formado por esses eixos x e y que eu acho que é o que representa a nossa mesa quando a gente olha ele na mesa, o plano do x e do y é como se fosse a mesa

[01:45:53] **Rosana:** ah pode ser

[01:45:54] **Paula:** tá, eu acho que é. Vamos fazer aqui no Blender e depois a gente vê de novo.

[01:46:01] **Rosana:** tá beleza.

[...]

[01:58:46] **Paula:** te mandei o arquivo, abre aí de novo e vamos ver se agora deu.

[02:01:03] **Rosana:** tá, vou abrir aqui e já vemos.

[02:01:08] **Paula:** tá, daí já alinha ali na mesa pra gente ver bem certinho.

[02:01:15] **Rosana:** sim, sim.

[...]

[02:02:03] **Rosana:** deu, olha aqui. Agora deu bem certinho.

[02:02:07] **Paula:** sim, ficou bem bom. Que bom.

Para nós, este excerto destaca-se pelo fato de que as professoras iniciaram movimentando os seus corpos para realizar o movimento do *smartphone* e da RA com a finalidade de ir olhando “[01:42:14] [...] tá pixelado ainda ou se deu certo aquele negócio de suavizar [...]” e a partir dessa visualização detalhada do holográfico surge uma discussão matemática referente a como “[...] alinhar [o troféu] sem mudar tudo [...]”. Entendemos que o movimento corpóreo das professoras foi uma ação com vontade e senso de realização onde o objetivo era visualizar o troféu construído por elas, além disso ao começarem a discutir maneiras de alinhar o troféu, entendemos que por meio do movimento de seus corpos, elas refletem sobre o que construíram e passam a pensar estratégias de resolver o problema identificado.

Ao considerar a construção do troféu já pronta, instigada pela curiosidade de ver o troféu sobre a mesa como se “[01:43:33] [...] fosse de verdade mesmo [...]”, ou seja, como se o holográfico estivesse sobreposto em uma mesa fixamente como um objeto cuja materialidade é própria/exclusiva da realidade mundana não sendo um objeto articulado ao contexto da RA, Paula sugere à Rosana que movimente o *smartphone* de maneira diferente do que foi feito por elas durante o momento em que investigavam a possibilidade de melhorar a aparência estética do troféu construído. Observamos, então, os movimentos ao estarmos

conectados com a RA são intencionais, já que se constituem de acordo com o objetivo desse ato, por exemplo, ao querer observar a parte superior do troféu, enquanto sujeitos encarnados que não estamos sem a nossa materialidade, precisamos movimentar partes do nosso corpo por meio de uma materialidade encarnada.

Ao analisar o “*pixelado*” que poderia ou não estar presente no holográfico, as professoras atentam-se em analisá-lo de cima até embaixo, preocupando-se em observar todos os lados, visto que Paula solicita “[01:42:41] [...] *vira um pouco mais pra direita*”, porém desconsiderando a sua posição sobre a mesa em que o observavam. Ao visualizar o troféu como comumente é conhecido na realidade mundana, pensaram em alinhar o smartphone na mesa, possibilitando assim uma visão frontal e tridimensional dele. Evidenciamos que estas ações no contexto da RA demonstram que as professoras estão atuando com ela, ou seja, agindo com senso de realização, como podemos perceber na fala de Rosana “[02:02:03] [...] *agora deu bem certinho.*” evidenciando que o teste das hipóteses levantadas por elas para resolver o problema da inclinação do troféu foram satisfatórias. Este agir no contexto da RA, é caracterizado por nós como o ato de saber-fazer-com-TD de RA já que demonstra a ação das participantes, o que elas fizeram e como fizeram, percebendo o que se faz e refletindo sobre isso.

Destacamos também que foi por meio do movimento de olhar o troféu sobre a mesa que as professoras perceberam que “[01:43:53] [...] *ficou um pouco torto [...]*”, ou seja, não o percebiam como estando de fato sobre a mesa, já que um dos lados de sua base flutuava sobre ela. Isso aconteceu pois, em momentos anteriores, ao criarem o troféu e o visualizarem em RA, outras questões foram priorizadas por elas, a sua visualização como objeto físico ficou em segundo plano e surgiu apenas quando consideraram que ele estava pronto. Surgindo então a discussão matemática oriunda dessa movimentação corpórea e do smartphone ao pensarem estratégias para que pudessem alinhar o troféu, as professoras retomam uma ideia já discutida por elas em outro momento, que é a criação de uma reta, e avançam na possibilidade de o rotacionar sob um dos eixos ordenados.

Primeiramente essa ideia surge vinculada ao eixo x, podemos perceber no tempo [01:44:55], mas conforme observam o holográfico e se movimentam em torno dele percebem que não podem considerar somente o eixo x, já que se fizessem isso estariam “[01:45:12] [...] *pensando só se fosse um gráfico em 2D*” e então “[01:45:14] [...] *o [eixo] x seria como se fosse a base e o [eixo] y seria a altura [...]*” Porém ao estar num ambiente de RA, onde mundano e virtual se compõem, estão com um objeto em 3D, com isso percebem que o plano constituído pela mesa onde desejam sobrepor o troféu não é constituído por um único eixo

ordenado mas sim “[01:45:26] [...] ao plano que o eixo x e y formam [...]”, e que portanto devem alinhar o troféu em relação a este plano. Entendemos que ao refletir suas hipóteses, reformulando-as, como destacado acima, as professoras estiveram imersas no ambiente mundano-cibernético criado pela RA, onde tecem relações entre elas, com o mundo e individualmente de modo que transformam suas próprias relações (VANINI, 2015). O que nos permite inferir que a TD de RA pode ampliar e/ou potencializar o entendimento sobre esses tópicos matemáticos. Esse pensar e fazer com a TD de RA mostra que as professoras têm seu pensamento potencializado por essa tecnologia e conseguem buscar maneiras de resolver essas situações que ali surgem. Essa potencialização do pensamento é identificada por nós durante a mudança na fala das professoras que inicialmente pretendiam “[01:44:55] [...] alinhar com o eixo x [...]” depois percebem que estão “[01:45:12] [...] pensando só se fosse um gráfico em 2D.”, chegando na conclusão que devem “[01:45:26] [...] alinhar essa reta ao plano que o eixo x e y formam, considerar o plano que é formado por esses eixos de x e y [...]”.

Pondo em prática um pensar que não é disjuncto do seu envolvimento com a RA, mas que se dá na relação simbiótica entre as partes, ou seja, é o pensar-com-TD de RA. Da mesma forma, quando encontram soluções, projetando e construindo meios para que elas aconteçam, também não o fazem de modo desconectado, mas em com-junto (ROSA, 2008) com elas, executando soluções que não fazem sentido se não estivermos com a RA.

Para nós, a especificidade da RA, entendida como Tecnologia Digital partícipe, se evidencia quando identificamos, conforme acima descrito, que é nesse ambiente e com ele que as professoras (no nosso caso) identificam situações a serem repensadas ou resolvidas e a fazem. Assim, são problemas que surgem nesse contexto e sua resposta é desenvolvida durante o problema, o que, de acordo com Lave (1991), caracteriza que essa aprendizagem matemática é própria desse contexto.

5. COMPOSIÇÕES FINAIS

Ao chegarmos na reta final da escrita dessa dissertação, voltamos o nosso olhar reflexivo à ela usando as lentes da Cyberformação, com as quais temos como plano de fundo a certeza de que nunca chegaremos ao final de nossa formação, não estaremos formados/formadas, mas, teremos recortes, que assim como fotografias demonstram uma perspectiva das muitas que nos compõem em nossa totalidade. Sob essas lentes, entendemos essa pesquisa também como inacabada, arriscamos a dizer que pesquisar/estudar tecnologias digitais na área da educação também não chegará a um final. É possível pensarmos em nossas vidas no futuro sem novas tecnologias? Acreditamos que não. Portanto, entendemos a presente pesquisa assim como uma fotografia, que evidencia com mais foco alguns elementos e abarca a outros com menor intensidade.

Iniciamos um processo retrospectivo, como quem olha para essa fotografia recordando do que a antecedeu e tecendo considerações sobre o estado em que se encontra. A pesquisa teve como objetivo investigar como se dá a constituição do conhecimento matemático de uma professora em Cyberformação com Tecnologias Digitais de Realidade Aumentada. Nosso intuito era vislumbrar como se dá a constituição do conhecimento no contexto criado pelas TD de RA ao possibilitar uma composição do ambiente mundano com objetos virtuais. Ao estar nesse contexto, queríamos que essa professora não o utilizasse apenas para a reprodução de atividades ou como facilitador/agilizador de procedimentos que poderiam ser feitos fora dela. Assim, ao investigarmos a constituição do conhecimento da professora que é a própria pesquisadora deste estudo, ou seja, trabalharmos com uma autoanálise, entendemos que fizemos um avanço pois produzimos uma relação dialógica entre a pessoa que produz o conhecimento e a pessoa que analisa esse entendimento.

Ao buscarmos responder a nossa pergunta diretriz, evidenciamos que a constituição do conhecimento matemático, entendido como produção do sujeito vivente no/com o mundo vida, por meio de suas experiências, se dá: pela maneira que a professora/pesquisadora se transforma ao estar no contexto de RA, se materializando com os holográficos; ao conversar consigo mesma e com a TD de RA, trabalhando e pensando com a TD de RA maneiras para resolver problemas que foram acontecendo naquele contexto específico, criado pela RA, propiciando assim uma aprendizagem situada; e por meio do seu movimento corpóreo ao estar nesse ambiente, por exemplo, caminhando em torno dos holográficos ali projetados e,

também, utilizando-se desses movimentos para que pudesse resolver as questões que fossem surgindo naquele contexto, assim, evidenciando o ato de saber-fazer-com-TD de RA.

Sob essa lente, organizamos os nossos dados em três categorias de análise. Na primeira, destacamos o ato da dimensão tecnológica, ser-com, especificamente, o ser-com-TD de RA, ou ainda o ser-com-o-holográfico, caracterizando a imersão da professora/pesquisadora ao estar no contexto da RA. A primeira projeção desta categoria refere-se ao momento em que em estudos individuais a professora/pesquisadora está estudando os pontos de máximo e mínimo de uma função de duas variáveis reais. A necessidade de identificar esses pontos surgiu durante a construção do troféu, onde houve a discussão sobre a possibilidade de impressão em uma impressora 3D do troféu construído. Nesse excerto destacamos a maneira como a professora/pesquisadora se conecta ao contexto da RA, utilizando a possibilidade de caminhar em torno dele para que transformasse sua maneira de participar nesse contexto e que pudessem levar a conclusões sobre o objeto que estava sendo estudado. Ao fazer isso ela utiliza de características que são próprias daquele contexto, como as medidas de cada eixo sendo projetadas no holográfico para que pudessem validar a sua hipótese e afirmar que a função estudada apresentava um ponto de máximo.

A segunda projeção, é ainda decorrente da primeira já que ao perceber o ponto de máximo de uma função de duas variáveis reais no contexto da RA, a professora/pesquisadora se sentiu instigada a continuar pensando em pontos críticos dessas funções e passou a pensar sobre uma função que tinha sido inicialmente pensada para a base do troféu. Ao fazer isso, foi bastante imediato para a professora/pesquisadora continuar utilizando do movimento para visualizar a função de diversos ângulos, pois entendia que a perspectiva da visualização sobre aquela função possibilitava falar e definir coisas novas sobre ela. Então logo percebe que ser um ponto de máximo ou mínimo, depende do eixo que toma como referência, ou seja, quando o dispositivo móvel está paralelamente alinhado com o eixo x, vê um ponto de mínimo, já quando faz isso com o eixo y, vê um ponto de máximo. Essa conclusão se dá sem nenhum procedimento algébrico, que era até então a única maneira pela qual a professora/pesquisadora sabia definir se uma função tinha um ponto de sela, por isso inferimos que a inserção das TD nesse momento proporcionou uma ampliação para ela, evidenciando o seu caráter relacional entre a professora/pesquisadora e o contexto da RA.

Já a terceira projeção, refere-se a um momento em que a professora/pesquisadora estava estudando curvas de níveis por meio de um material disponibilizado pelo professor orientador. Ao realizar esse estudo, a professora/pesquisadora não faz exatamente o que está sendo solicitado na atividade já que não define quais os pares ordenados que terão como

imagem o valor indicado pelo corte no holográfico, mas sim observa qual a projeção desse corte no domínio da função. Ao estar no contexto da RA e buscar por respostas para o problema escolhido, os conhecimentos da matemática acadêmica não ocuparam uma posição central, já que ao buscar um fazer matemático que faça sentido naquele contexto, não percebe que ali não tem elementos que evidenciem o que estava tentando identificar. Ainda assim, percebemos elementos que mostram a transformação da participação da professora/pesquisadora naquele contexto, onde ela passa a se pensar como parte do holográfico, projetando-se naquela materialidade.

Em nossa segunda categoria de análise, intitulada Por meio da Oralidade-com-TD de RA, identificamos as projeções em que por meio da oralidade evidenciamos o pensar-com-TD de RA. A projeção 4, intitulada “Encontrando a variável dependente”, também se refere a um momento em que a professora/pesquisadora estava estudando função de duas variáveis utilizando um material disponibilizado pelo professor orientador. Nessa projeção destacamos as estratégias utilizadas pela professora/pesquisadora para relacionar um ponto pertencente ao domínio de uma função, com sua imagem. Ao fazer isso a professora/pesquisadora percebe por meio da oralidade que algumas ações pensadas por ela não fazem sentido no contexto da RA. Ao perceber isso, altera-se também a maneira com a qual ela resolve determinada situação, ou seja, altera sua forma de participar naquele contexto, sendo a TD de RA participe dessa constituição de conhecimento, já que é por meio dela que a professora/pesquisadora altera o seu modo de pensar, passando então a pensar-com-TD de RA.

Na projeção seguinte, ao estudar o domínio de uma função, destacamos a facilidade da professora/pesquisadora ao determinar qual o domínio de uma função de duas variáveis, já que ela se deu rapidamente por meio da visualização. Embora não seja esse o caráter adotado por nós para a inserção das tecnologias, destacamos essa projeção pois ela explicita como essa atividade pode ampliar o conhecimento sobre o gráfico de uma função de duas variáveis já que se questiona sobre outro aspecto, a simetria de rotação. Ao fazer isso expressa ações como o “pegar” um quadrante. Esse pegar só é possível no contexto da RA, onde conseguimos tocá-lo ou sobrepor a nossa mão no/com ele. Ao realizar esse ato de pensar-com-TD de RA, a professora/pesquisadora chega a conclusões que se deram pela possibilidade de ações reflexivas, o que inferimos caracterizar a constituição do conhecimento matemático.

A projeção 6, refere-se ao momento em que a professora/pesquisadora esteve individualmente repensando sobre a possibilidade discutida com a colega de curso pensando

na possibilidade de imprimir o troféu criado por elas em uma impressora 3D. Nessa projeção, a professora/pesquisadora cria estratégias para que os/as alunos/alunas possam calcular o volume do troféu criado por eles/elas com a finalidade de estimar quando de material seria necessário para sua impressão. Ao fazer isso, novamente a professora/pesquisadora expressa por meio da oralidade, ações que só são possíveis de serem realizadas no contexto específico da RA, já que virar o troféu no sentido de quem faz uma rotação em torno do plano formado pelos eixos x e y , só é possível com a RA.

Em nossa última categoria, apresentamos as projeções em que por meio do movimento corpóreo identificamos o ato de saber-fazer-com-TD de RA, agindo com intencionalidade. Na projeção, “Planejando a construção do troféu”, destacamos uma das conversas entre a professora/pesquisadora e sua colega de curso quando estavam planejando a construção do troféu para ser trabalhada com alunos/alunas da educação básica. Destacamos o movimento corpóreo realizado por elas quando decidem entrar no troféu, buscando uma visualização interna dele do objeto virtual. Entendemos que esse movimento corpóreo surge como uma necessidade para explorar o contexto da RA e é por meio dele que novas possibilidades de abrem já que é por meio dele que percebem que o troféu não está com o encaixe que elas desejam e que permitem criar uma reta tangente, moldando esse problema matematicamente, e resolvendo-o no próprio contexto da RA, assim, sabendo-fazer-com-TD de RA.

“Entrando no gráfico pelo seu domínio”, refere-se também ao estudo do domínio de uma função de duas variáveis reais. Entendemos que ao movimentar seu corpo para entrar no holográfico pelo domínio, a professora/pesquisadora tem a intencionalidade de situar-se na RA, o que gera diferentes sensações e que acabou possibilitando novas possibilidades de interpretações. Destacamos que embora nessa projeção a professora pesquisadora tenha recorrido ao cálculo algébrico, foi o contexto da RA que deu o start para que essa discussão pudesse acontecer.

Em nossa última projeção apresentamos o diálogo entre a professora/pesquisadora e sua colega do curso de extensão, em seu último encontro de planejamento da atividade que desenvolveram com os/as estudantes. Nesse encontro elas buscam maneiras de alinhar o troféu sobre a mesa, como se ele estivesse uma materialidade que é própria/exclusiva da realidade mundana. Ao tentar alinhá-lo, as professoras movimentam o celular e por consequência os seus corpos, destacamos que esse movimentar-se, refere-se a efetuar uma ação no contexto da RA e ver seus resultados de maneira intencional, ou seja, evidenciando o saber-fazer-com-TD de RA.

Em nossa pesquisa, embora tenhamos associado cada ato da dimensão tecnológica da Cyberformação a uma categoria de análise, consideramos importante salientar que elas se perpassam e acontecem de maneira simultânea. Ou seja, olhamos para cada um dos excertos dando visibilidade aquilo que para nós era mais evidente, mas, sempre compreendendo que os outros atos também poderiam ser ali percebidos. Esse fluxo evidencia que ao estarmos no contexto da RA, somos perpassados/perpassadas pelos diferentes fluxos do trabalho com tecnologias digitais, assim, abarcando a totalidade da dimensão tecnológica dessa concepção teórica.

Acreditamos, também, que a nossa pesquisa contribui, no campo da Educação Matemática, para que se possa pensar no trabalho com Tecnologias Digitais em diferentes contextos educacionais, já que evidenciamos o seu caráter potencializador utilizando dispositivos móveis, os quais já fazem parte do cotidiano de nossos alunos nos mais diferentes contextos sociais. Essa potencialidade dos dispositivos móveis, rompe também com a falta de infraestrutura da escola, em relação a laboratórios e equipamentos específicos, já que não se tornam aparatos obrigatórios para o trabalho com RA.

Consideramos relevante para a área, o que discutimos em termos teóricos, trazendo ao debate a proximidade que estamos das tecnologias mais recentes, da construção do conhecimento em movimento de ser-com, pensar-com e saber-fazer-com-TD de RA, em consonância ao que entendemos por estarmos em perpétua ação de dar forma, sendo feitos e refeitos pelas nossas invenções, continuamente construindo o conhecimento matemático.

Assim, ao olharmos para essa pesquisa como em construção, vislumbramos outros focos que não foram os por nós discutidos até o presente momento. O primeiro que evidenciamos refere-se à investigação do contexto de RA com pessoas com dificuldades motoras, onde possivelmente surjam novos desafios na interação. Pensamos também em como podemos utilizar as TD de RA para a formação com professores/professoras preocupada com a Educação Matemática crítica e preocupada com a democracia, ou seja, buscando evidenciar o que fazemos com esse conhecimento matemático que constituímos em um contexto crítico e democrático, assim como, suas implicações.

Além disso, continuamos pensando na incorporação de dispositivos móveis com aplicativos que possibilitem diferentes formas de interação, na prática docente, no que se refere à potencialização da constituição do conhecimento matemático de qualquer professor/professora que se lance à Cyberformação, por meio de um curso de extensão ou por meio de outras práticas educativas, passando a pensar nas Tecnologias Digitais como partícipes da constituição do conhecimento, ou seja, como parte do mundo-vida na qual

ele/ela se insere, onde nunca alcançará a formação em sua plenitude para esse trabalho com diferentes aparatos tecnológicos disponíveis, mas, estará sempre em processo de forma/ação, compreendendo a matemática como uma produção social, no caso, como uma produção imersa na cibercultura, com as TD de RA, por exemplo.

REFERÊNCIAS

- ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2003.
- ALMEIDA, E. G. **Aprendizagem Situada**. In: STIS - SEMINÁRIOS TEÓRICOS INTERDISCIPLINARES DO SEMIOTEC, 1., v. 1, 2012, Belo Horizonte. *Cadernos Didáticos e Anais...* Belo Horizonte: Faculdade de Letras da UFMG, 2012. p. 1-14. ISSN 2317-0247.
- ANTONIAK, Peter. **Augmented reality based user interface for mobile applications and services**. University of Oulu, 2005.
- BARBOSA, J. C. **Modelagem e modelos matemáticos na educação científica**. Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 2, n. 2, p. 69-85, 2009.
- BBC Brasil. **O que é o Pokémon Go e por que está causando tanto furor no mundo dos games?**. Disponível: < <http://www.bbc.com/portuguese/geral-36802725>>. Acesso em 28 de setembro de 2017 às 14h.
- BICUDO, M. A. V. A formação do professor: um olhar fenomenológico. In: BICUDO, M. V. (Org.). **Formação de Professores**. Bauru: EDUSC, 2003.
- BICUDO, M. A. V.; SILVA, A. A. **Análise de descrições de vivências em situações de constituição de conhecimento**. In: Catarina Brandão; José Luís Carvalho; Jaime Ribeiro; António Pedro Costa. (Org.). A prática na Investigação Qualitativa: exemplos de estudos. 1ed. Aveiro: Ludomedia, 2018, v. 2, p. 153-178.
- BICUDO, M. A. V.; ROSA, M. **Realidade e cibernundo: horizontes filosóficos e educacionais antevistos**. Canoas: ULBRA, 2010.
- BIZELLI, M. H. S. S. **Funções de várias variáveis**. Disponível em: <http://calculo.iq.unesp.br/sitenovo/Calculo1/secao_dominio_duasvariaveis.html> . Acesso em: 16 setembro 2018.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Características da investigação qualitativa**. In: Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto Editora, 1994.
- BORBA, Marcelo C.; SCUCUGLIA, Ricardo ; GADANIDIS, G. . **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: Sala de aula e internet em movimento (1ª edição)**. 1ª. ed., 2º reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2016. v. 1. 149p .
- BORBA, M. C; PENTEADO, M. G., Informática e Educação Matemática. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte, 2012. 5 edição
- BULLA, F.D. **Modelagem Matemática na Perspectiva da Realidade Aumentada: possibilidades à formação de professores**. Porto Alegre: UFRGS, 2016. Trabalho de Conclusão de Curso, Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.
- CALDEIRA, J.P.S. **Conexões Matemáticas entre Professores em Cyberformação Mobile**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Luterana do Brasil - ULBRA, Canoas, 2016.
- CIÊNCIA VIVA. **Hologramas**. Disponível em: <<http://www.cienciaviva.pt/projectos/pulsar/hologramas.asp>> . Acesso em: 16 de maio. 2020.

- CORTES, R. **Figuras de linguagem** - o que são? 30 exemplos, como usar e exercícios. Disponível em: <<https://www.gestaoeducacional.com.br/figuras-de-linguagem/>>. Acesso em: 29 de maio de 2020.
- FREIRE, Raquel. **Óculos de realidade virtual**: tudo que você precisa saber antes de comprar. 2016. Disponível em: <<https://www.techtudo.com.br/listas/noticia/2016/03/oculos-de-realidade-virtual-tudo-que-voce-precisa-saber-antes-de-comprar.html>>. Acesso em: 17 maio 2020.
- FIALHO, A. B. **Realidade virtual e aumentada**: tecnologias para aplicações profissionais. São Paulo: Érica, 2018
- FILATRO, A. **Design Instrucional na prática**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2008.
- FIORENTINI, D. **A Formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da Licenciatura em Matemática**. Revista de Educação (Campinas), Campinas, SP, v. 1, n.18, p. 107-115, 2005.
- FORTE, C. E.; KIRNER, C. **Software educacional potencializado com realidade aumentada para uso em matemática e física**. Dissertação (Mestrado em Ciências da computação). Piracicaba: UNIMEP. 2009.
- GRÁFICO. In: Dicionário Etimológico, 2020. Disponível em: <<https://www.dicionarioetimologico.com.br/grafico/>>. Acesso em: 12 maio 2020
- GUMSTER, J. V. **Blender for dummies**. 3. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2015.
- KANNO, K. M. **Sistema de Realidade Aumentada em Dispositivos Móveis para Auxiliar no Tratamento da Doença de Alzheimer**. 2010. 73 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.
- KIRNER, C.; SISCOUTTO, R. A. **Realidade Virtual e Aumentada: Conceitos, Projeto e Aplicações**. Editora SBC – Sociedade Brasileira de Computação, Porto Alegre, 2007. Livro do pré-simpósio, **IX Symposium on Virtual and Augmented Reality**, Petrópolis – RJ, 2007.
- LAVE, J. **Cognition in practice**. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.
- LAVE, J. **Cognición en la práctica**. Barcelona: Paidós, 1991.
- LAVE, J. The practice of learning. In: LAVE, J; CHAIKLYN, S. (org.) **Understanding of practice**: perspectives on Activity and Context. Cambridge: University of Cambridge Press, 1993. p. 3-32.
- LAVE, J.; WENGER, E. **Situated learning**: legitimate peripheral participation. New York: Cambridge University Press, 1991.
- CARVALHO, C.; LEMOS, B. **MaterialDouradoRA** - um software para o ensino-aprendizagem do sistema de numeração decimal-posicional através da Realidade Aumentada. Virtual Reality, 2011.
- LÉVY, P. **Cibercultura**. Trad. Carlos Irineu da Costa. 2 ed. São Paulo: Editora 34, 1999, 264p. (Coleção TRANS).

- LIMA, A. J. R.; HAGUENAUER, C.. **O Uso da Realidade Aumentada no Ensino da Geometria Descritiva**. 2006.
- LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- MALTEMPI, M. V. ; ROSA, M. . **Informática e Jogos: a Tecnologia Lúdica Aplicada à Educação**. Revista Ciência em Extensão, v. 1, p. 118, 2004
- MARTINS, L. **Conheça a origem dos hologramas e as aplicações da tecnologia hoje**. Techtudo, 2015.
- MARTINS, Valéria Farinazzo; DE PAIVA GUIMARÃES, Marcelo. **Desafios para o uso de Realidade Virtual e Aumentada de maneira efetiva no ensino**. In: Anais do Workshop de Desafios da Computação Aplicada à Educação. 2012. p. 100-109.
- MARQUES, G. C. **Fundamentos de Matemática I: funções**. Disponível: <https://midia.atp.usp.br/plc/plc0001/impressos/plc0001_02.pdf>. Acesso em 20 de maio de 2020 às 20h.
- MERLEAU-PONTY, M. Fenomenologia da percepção. São Paulo: Martins Fontes, 1999.
- MIARKA, R. **Etnomatemática: do ôntico ao ontológico**. 2011. 427f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Unesp, Rio Claro, 2011.
- MURRAY, J. H. **Hamlet no Holodeck: o futuro da narrativa no ciberespaço**. Tradução de Elissa Khoury Daher e Marcelo Fernandez Cuzziol. São Paulo: Itaú Cultural: Editora Unesp, 2003
- NUNES, J. de A. **Design instrucional na educação matemática: trajetória de um professor de matemática que elabora atividades sobre funções trigonométricas com a calculadora HP 50G**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Luterana do Brasil - ULBRA, Canoas, 2011.
- OLIVEIRA, F. L. de. **A produção de conhecimento matemático acerca de funções de duas variáveis em um coletivo de seres-humanos-com-mídias**. 2014. 151 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2014.
- PRENSKY, M. **Digital Native, digital immigrants**. Digital Native immigrants. On the horizon, MCB University Press, Vol. 9, N.5, October, 2001. Disponível em:<<http://www.marcprensky.com/writing/Prensky%20-%20Digital%20Natives,%20Digital%20Immigrants%20-%20Part1.pdf>> . Acesso em: 07 fevereiro 2020.
- RESENDE, B. **Realidade Aumentada e Interfaces Naturais na Formação do Professor de Matemática**. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.
- RICHT, A. **Apropriação do conhecimento pedagógico-tecnológico em Matemática e a formação continuada de professores**. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010
- ROSA, M. **A Construção de Identidades Online por meio do Role Playing Game: relações com o ensino e aprendizagem de matemática em um curso à distância**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.

ROSA, M. **Cultura Digital, Práticas Educativas e Experiências Estéticas**: interconexões com a Cyberformação de Professores de Matemática. In: Reunião Anual da ANPED, 34., 2011, Natal, RN. Natal, RN: ANPED, 2011

ROSA, M. Cyberformação com Professores de Matemática: interconexões com experiências estéticas na cultura digital. In.: ROSA, M. BAIRRAL, M. A. AMARAL, R. B. **Educação Matemática, Tecnologias Digitais e Educação a Distância**: pesquisas contemporâneas. Natal (RN): Editora da Física, 2015.

ROSA, M. **Tessituras teórico-metodológicas em uma perspectiva investigativa na Educação Matemática: da construção da concepção de Cyberformação com professores de matemática a futuros horizontes**. In: Andréia Maria Pereira de Oliveira; Maria Isabel Ramalho Ortigão. (Org.). Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática. 1ed. Brasília: SBEM, 2018, v. 1, p. 255-281

ROSA, M. BICUDO, M. A.V. **Focando a constituição do conhecimento matemático que se dá no trabalho pedagógico que desenvolve atividades com tecnologias digitais**. In.: PAULO, R. M.; FIRME, I. C.; BATISTA, C. C. Ser professor com tecnologias: sentidos e significados. São Paulo, Editora da UNESP, 2019.

ROSA, M. BAIRRAL, M. A. AMARAL, R. B. **Educação Matemática, Tecnologias Digitais e Educação a Distância**: pesquisas contemporâneas. Natal (RN): Editora da Física, 2015.

ROSA, M.; VANINI, L.; SEIDEL, D. J. **Produção do Conhecimento Matemático Online**: a resolução de um problema com o Ciberespaço. Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, n. 58, p. 89-113, 2011.

SALOMON, G. **Nenhuma distribuição sem a cognição dos indivíduos: uma visão interacional dinâmica**. In: Cognições Distribuídas: Considerações Psicológicas e Educacionais, Salomon, Gavriel (ed). Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press. 1993

SEIDEL, D. J. **O professor de matemática online percebendo-se em Cyberformação**. Canoas: ULBRA, 2013. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Luterana do Brasil - ULBRA, Canoas, 2013.

STEWART, J. **Cálculo**: volume 2. São Paulo : Cengage Learning, 2013.

VANINI, L. **A Construção da Concepção da Cyberformação por Professores e Tutores de Matemática Online na Formação Continuada e na sua Prática**: uma análise bourdieana. Canoas: ULBRA, 2015. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2015 (prelo).

VANINI, L.; ROSA, M.; JUSTO, J.C.R; PAZUCH, V. **Cyberformação de Professores de Matemática: olhares para a dimensão tecnológica**. In: Revista Acta Scientiae. Canoas: ULBRA. V. 15, n.1, p. 153-171. jan./abr. 2013.

WENGER, E. **Communities of practice**: Learning, meaning and identity. 1998

WIKIPÉDIA. **Cibercultura**. Disponível: < <http://pt.m.wikipedia.org/wiki/Cibercultura>>. Acesso em 07 de agosto de 2018 às 18h.

WIKIPÉDIA. **Código QR**. Disponível: < https://pt.wikipedia.org/wiki/C%C3%B3digo_QR>. Acesso em 20 de maio de 2020 às 21h.