

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

**AÇÕES COOPERATIVAS E TECNOLOGIAS MÓVEIS: PLANEJAMENTO,  
PRÁTICA E ANÁLISE DE UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES SOBRE FUNÇÕES  
REAIS NA ESCOLA BÁSICA**

**SHÉRIDAN DOS REIS PINTO**

Porto Alegre  
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

**AÇÕES COOPERATIVAS E TECNOLOGIAS MÓVEIS: PLANEJAMENTO,  
PRÁTICA E ANÁLISE DE UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES SOBRE FUNÇÕES  
REAIS NA ESCOLA BÁSICA**

**SHÉRIDAN DOS REIS PINTO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Rodrigo Sychocki da Silva

Porto Alegre

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

**AÇÕES COOPERATIVAS E TECNOLOGIAS MÓVEIS: PLANEJAMENTO,  
PRÁTICA E ANÁLISE DE UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES SOBRE FUNÇÕES  
REAIS NA ESCOLA BÁSICA**

**Shéridan dos Reis Pinto**

Dissertação aprovada em 26 de agosto de 2020.

Banca Examinadora:

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Leandra Anversa Fioreze (PPGEMAT – FACED – UFRGS)

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Marlusa Benedetti da Rosa (Colégio de Aplicação – UFRGS)

Prof. Dr. Vandoir Stormowski (PPGEMAT – IME – UFRGS)

Prof. Dr. Rodrigo Sychocki da Silva (orientador, PPGEMAT – IME – UFRGS)

## RESUMO

Esta pesquisa busca apresentar como ocorre o trabalho coletivo de estudantes do oitavo ano com o uso de *smartphones* no estudo de Funções de Variável Real. Por meio de uma sequência de atividades, propomos aos estudantes construir, experimentarem e refletirem sobre os conceitos abordados sobre funções. Caracterizamos o presente estudo em um viés metodológico qualitativo que consistiu na elaboração, aplicação e reflexão teórica de uma sequência de atividades sobre Introdução às Funções, Função Afim e Função Quadrática com a utilização do aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator*. Houveram dois experimentos com sujeitos diferentes que compõem os dados desse estudo. Os dados produzidos pelos estudantes que são os áudios dos diálogos e produções escritas constituíram o material para análise e reflexão da pesquisa. O conceito de cooperação de Jean Piaget foi utilizado como fundamentação teórica desse estudo para analisarmos como o trabalho coletivo dos estudantes durante a sequência de atividades os leva em direção ao conhecimento, seja por meio de suas ações sobre a tecnologia móvel ou suas ações uns sobre os outros ao longo do processo. O uso do aplicativo *GeoGebra* recebe destaque nesse estudo, já que por meio do seu uso o diálogo entre os sujeitos aconteceu gerando pequenos avanços graduais na busca e elaboração dos conceitos abordados nas atividades. Por fim, verificamos que a partir dos resultados obtidos com a pesquisa, ações cooperativas se fizeram presentes levando os sujeitos em busca da construção dos conhecimentos matemáticos.

**Palavras-chave:** Cooperação. Ensino de Matemática. Funções. Planejamento de aula. Tecnologias digitais móveis.

## **Abstract**

This research seeks to present how the collective work of eighth year students with the use of smartphones occurs in the study of Real Variable Functions. Through a sequence of activities, we propose to students to build, experiment and reflect on the concepts about functions. We characterized the present study in a qualitative methodological bias that consisted of the elaboration, application and theoretical reflection of a sequence of activities on Introduction to Functions, Affine Function and Quadratic Function using the GeoGebra Graphing Calculator application. There were two experiments with different subjects that make up the data for this study. The data produced by the students that are the audios of the dialogues and written productions constituted the material for analysis and reflection of the research. Jean Piaget's concept of cooperation was used as the theoretical basis for this study to analyze how the collective work of students during the sequence of activities leads them towards knowledge, either through their actions on mobile technology or their actions on each other throughout the process. The use of the GeoGebra application is highlighted in this study, since through its use the dialogue between the students happened, generating small gradual advances in the search and elaboration of the concepts covered in the activities. Finally, we found that from the results obtained with the research, cooperative actions were present, taking the students in search of the construction of mathematical knowledge.

**Keywords:** Cooperation. Functions. Lesson planning. Math teaching. Mobile technology.

## Lista de Figuras

Figura 1: Layout do aplicativo <i>GeoGebra Graphing Calculator</i> .....	27
Figura 2: Gráfico da atividade 2. ....	44
Figura 3: Atividade 3. Item (b). Gráfico feito pelos estudantes. ....	50
Figura 4: Função afim. Gráfico do problema 1. ....	57
Figura 5: Função afim. Resolução do problema 1. ....	58
Figura 6: Função quadrática. Problema 1. ....	67
Figura 7: Função quadrática. Problema 2. ....	71
Figura 8: Esquema sobre as ações cooperativas do sujeito com o uso do <i>smartphone</i> . ....	81

## Lista de Quadros

Quadro 1: Cronograma de atividades.....	28
Quadro 2: Início do diálogo do grupo. Atividade 1. Item (a).....	30
Quadro 3: Atividade 1. Item (b).....	30
Quadro 4: Atividade 1. Item (c).....	31
Quadro 5: Atividade 2. Análise do gráfico. ....	32
Quadro 6: Atividade 2. Item (a). ....	33
Quadro 7: Atividade 2. Item (a). ....	34
Quadro 8: Atividade 2. Item (b).....	35
Quadro 9: Atividade 2. Item (c). ....	35
Quadro 10: Atividade 2. Item (d).....	36
Quadro 11: Atividade 3.....	37
Quadro 12: Atividade 4. Variáveis independente e dependente. ....	38
Quadro 13: Atividade 4. Função.....	39
Quadro 14: Atividade 4. Grandezas.....	40
Quadro 15: Introdução às funções. Atividade 1. Item (a). ....	42
Quadro 16: Introdução às funções. Atividade 1. Item (b).....	42
Quadro 17: Trecho 1.....	42
Quadro 18: Trecho 2.....	43
Quadro 19: Trecho 3.....	43
Quadro 20: Introdução às funções. Atividade 1. Item (c). ....	43
Quadro 21: Introdução às funções. Atividade 2. Item (a). ....	45
Quadro 22: Trecho 1.....	45
Quadro 23: Trecho 2.....	46
Quadro 24: Introdução às funções. Atividade 2. Item (b).....	46
Quadro 25: Introdução às funções. Atividade 2. Item (c). ....	47
Quadro 26: Introdução às funções. Atividade 2. Item (d). ....	47
Quadro 27: Introdução às funções. Atividade 2. Item (e). ....	48
Quadro 28: Introdução às funções. Atividade 2. Item (f). ....	48
Quadro 29: Introdução às funções. Atividade 3. Item (a). ....	49
Quadro 30: Introdução às funções. Atividade 3. Item (b).....	50
Quadro 31: Introdução às funções. Atividade 3. Item (c). ....	51
Quadro 32: Introdução às funções. Atividade 4. Item (a). ....	52
Quadro 33: Introdução às funções. Atividade 4. Itens (b) e (c). ....	52
Quadro 34: Introdução às funções. Atividade 4. Item (d).....	52
Quadro 35: Trecho 2.....	54
Quadro 36: Trecho 3.....	55
Quadro 37: Função Afim. Problema 1. Item (a). ....	56
Quadro 38: Função afim. Problema 1. Item (a). ....	57
Quadro 39: Função afim. Problema 1. Item (b). ....	58
Quadro 40: Função afim. Problema 1. Item (c). ....	59
Quadro 41: Função Afim. Problema 2. Item (a). ....	59
Quadro 42: Função afim. Problema 2. Item (b). ....	60
Quadro 43: Função afim. Problema 2. Item (c). ....	60
Quadro 44: Função afim. Problema 2. Item (d). ....	60
Quadro 45: Função afim. Atividade 4.....	61
Quadro 46: Função afim. Atividade 5.....	61
Quadro 47: Função afim. Atividade 6.....	62
Quadro 48: Função afim. Atividade 8.....	63
Quadro 49: Função quadrática. Problema 1.....	64
Quadro 50: Função quadrática. Problema 1. Trecho 2.....	65
Quadro 51: Função quadrática. Problema 1. Trecho 3.....	66
Quadro 52: Função quadrática. Problema 2. Trecho 1.....	68
Quadro 53: Função quadrática. Problema 2. Trecho 2.....	68
Quadro 54: Função quadrática. Problema 2. Trecho 3.....	69
Quadro 55: Função quadrática. Atividade 1. ....	72
Quadro 56: Função quadrática. Atividade 2. ....	72

Quadro 57: Função quadrática. Atividade 3. ....	73
Quadro 58: Função quadrática. Atividade 4. ....	74
Quadro 59: Função quadrática. Atividades 5, 6 e 7. ....	75
Quadro 60: Função quadrática. Atividade 8. ....	75
Quadro 61: Função quadrática. Atividade 10. ....	77

## Sumário

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>3</b>
<b>2 APORTES TEÓRICOS .....</b>	<b>7</b>
2.1 Tecnologias móveis no ensino de funções.....	7
2.2 Estudos correlatos sobre tecnologias móveis na Educação Matemática .....	11
2.3 A cooperação .....	15
2.4 Estudos correlatos sobre cooperação entre os estudantes no ensino e aprendizagem .....	20
<b>3 PROCESSOS METODOLÓGICOS .....</b>	<b>24</b>
3.1 Metodologia .....	24
3.2 Sujeitos da pesquisa .....	25
3.3 Materiais e Métodos.....	26
<b>4 ANÁLISES DOS EXPERIMENTOS .....</b>	<b>29</b>
4.1 O experimento piloto .....	29
4.2 Experimento final.....	41
4.2.1 Introdução às funções .....	41
4.2.2 Função afim .....	56
4.2.3 Função quadrática .....	64
<b>5. ANÁLISE GLOBAL DOS EXPERIMENTOS .....</b>	<b>79</b>
<b>6 REFLEXÕES FINAIS .....</b>	<b>83</b>
<b>7 REFERÊNCIAS .....</b>	<b>86</b>
<b>APÊNDICE A- Termo de assentimento dos experimentos piloto e final .....</b>	<b>91</b>
<b>APÊNDICE B- Termo de concordância da instituição dos experimentos piloto e final..</b>	<b>92</b>
<b>APÊNDICE C- Termo de consentimento informado dos experimentos piloto e final.....</b>	<b>93</b>
<b>APÊNDICE D- Produto técnico .....</b>	<b>94</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Ser professor é ser pesquisador (MARQUES, 2007). Atuando como professora de matemática dentro de uma sala de aula com diferentes sujeitos com diferentes visões de mundo e sociedade, vemos o quão necessário é o professor não parar de estudar, de pesquisar. Durante minha caminhada acadêmica no curso de licenciatura em matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) tive a oportunidade de participar de uma bolsa de extensão em que os estudantes do 9º ano do ensino fundamental do Colégio de Aplicação da UFRGS estudavam matemática por meio de projetos de aprendizagem<sup>1</sup>. Nesse período o professor orientador dessa bolsa estava finalizando sua Tese de Doutorado sobre o Ensino da Matemática por meio de projetos baseando-se na teoria construtivista de Jean Piaget onde foi que tive meu primeiro contato com a mesma.

Enquanto eu estava atuando na função de bolsista, na graduação, estava me encaminhando para os momentos finais do curso realizando a disciplina de Laboratório de Ensino e Aprendizagem III. Durante essa disciplina, nossa turma elaborou uma sequência de atividades que incluía o prelúdio do estudo de Funções de Variável Real para uma melhor compreensão dos conteúdos estudados nas disciplinas de Cálculo da UFRGS. A partir desse planejamento de atividades, a prática foi apresentada em um artigo<sup>2</sup>. Essa disciplina foi o que me motivou na construção de uma pesquisa para o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) da Graduação sobre o estudo de Funções.

Quando a pesquisa do TCC se iniciou, eu atuava ainda como bolsista no Colégio de Aplicação. Naquele momento, auxiliava nas aulas de matemática do professor com os estudantes do 1º ano do Ensino Médio. O conteúdo que eles estavam estudando era Função Afim. Como o próximo conteúdo a ser estudado por eles seria Função Quadrática, propus a meu orientador de TCC a construção e aplicação com esses estudantes de uma sequência de atividades que envolvesse o estudo da Função Quadrática com a utilização do aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator*. O estudo foi desenvolvido e baseado teoricamente no conceito de Cooperação de Piaget (1973). A pesquisa oportunizou produzir um artigo<sup>3</sup> que explana sobre uma aprendizagem de funções quadráticas em um contexto no uso da

---

<sup>1</sup> O desenvolvimento de um projeto de aprendizagem se dá pela busca por informações que esclareçam aos questionamentos de um sujeito sobre sua realidade. Ou seja, um projeto de aprendizagem é uma metodologia de ensino que consiste no desenvolvimento de atividades de investigação sobre uma questão que incomoda o sujeito. (FAGUNDES *et al.* 2006)

<sup>2</sup> Artigo sobre a realização da sequência de atividades realizada em 2017 pelos estudantes da graduação na disciplina de Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática III, disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/paper/viewFile/6541/3109>. Acesso em julho de 2020.

<sup>3</sup> Artigo disponível em: <https://doi.org/10.14483/23464712.13317>. Acesso em julho de 2020.

tecnologia móvel. Após a graduação, comecei a lecionar em uma escola privada de Porto Alegre (RS) e durante esse período me inscrevi para ingressar no curso de Mestrado Acadêmico em Ensino de Matemática também pela UFRGS. Um projeto de pesquisa foi elaborado, o ingresso ocorreu e esse projeto tomou forma de dissertação, o estudo que agora lhes é apresentado. Além disso, como pesquisadora, as experiências que tive durante as disciplinas de educação na UFRGS durante a graduação e o mestrado me fizeram analisar o espaço da sala de aula e a atuação da professora de matemática de outra forma: “É preciso ensinar os alunos a pensar” (PIAGET, 1945, p.154 apud CAMARGO, BECKER, 2012, p.541).

Construímos essa dissertação de mestrado que é fruto de três inquietações da pesquisadora que na escola em que atuava como professora de matemática constatou que 1) A presença dos *smartphones* com os estudantes era corriqueira, todos estudantes da turma em que essa pesquisa foi aplicada tinham em sala de aula seu celular; 2) Trabalhos em grupo não ocorriam na turma e 3) a professora vislumbrou um potencial em explorar o estudo da matemática na turma fazendo a ligação entre equações de 1º e 2º grau com as Funções de Variável Real. Assim, a pergunta central dessa pesquisa é: Como o trabalho coletivo aliado ao uso de *smartphones* estão relacionados com a aprendizagem de funções no oitavo ano?

A partir do questionamento que norteia essa pesquisa entendemos que nosso objetivo geral seja: observar, analisar e refletir sobre o trabalho coletivo dos estudantes no estudo de funções ao fazer uso das tecnologias móveis a partir de ações subsidiadas por meio de diálogo entre os pares. Enquanto objetivos secundários, temos: (1) Planejar e executar uma sequência de atividades que envolvesse a exploração das funções de variável real por meio do uso da tecnologia móvel; (2) Averiguar se em um ambiente coletivo que envolva ações cooperativas há construção de conceitos matemáticos sobre funções de variável real por parte dos sujeitos; (3) Investigar como o uso de dispositivos móveis auxilia os estudantes participantes da pesquisa na exploração do assunto funções, funções afins e funções quadráticas.

Quando a pesquisa aconteceu, a pesquisadora atuou como professora de matemática em uma escola privada de Porto Alegre (RS). Lecionou na escola por dois anos com turmas do oitavo ano do Ensino Básico. Os estudantes e sujeitos dessa pesquisa tinham 14 anos em média. Na época, a motivação da pesquisadora em estudar sobre as Funções de Variável Real emergiu em sala de aula. No currículo da escola, em matemática, os estudantes do oitavo ano estudavam os conteúdos exigidos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o nono ano, ou seja, eles estavam adiantados na disciplina de matemática, comparando com as demandas da BNCC.

As diretrizes curriculares nacionais demandam o estudo de funções no ensino médio, porém, a BNCC determina o prelúdio do estudo desse conteúdo no nono ano do ensino básico. Como habilidade delimitada pela BNCC sobre funções consta: “Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis” (BRASIL, 2018, p. 317). Ou seja, o prelúdio do conceito de Funções é demandado pela BNCC já no nono ano do Ensino Fundamental. Como os estudantes do oitavo ano da escola em que a pesquisa aconteceu teriam que estudar sobre esses conceitos, a professora considerou interessante e proveitoso unir as equações de 1º e 2º grau já estudadas por eles aplicando-as com as Funções de Variável Real.

Além disso, o Ensino da Matemática, segundo a BNCC, demanda o trabalho cooperativo entre os pares e o uso da tecnologia digital, o documento delimita como competências sobre o trabalho cooperativo:

Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 2018, p. 267)

O trabalho coletivo insere-se nessa pesquisa quando a professora começa a lecionar na escola e percebe como os estudantes realizavam atividades de matemática de forma autônoma sem interação com os colegas. Além da BNCC demandar a interação entre sujeitos de forma cooperativa na busca de soluções de problemas, construímos uma sequência de atividades para que os estudantes que participaram da pesquisa pudessem, em pares, irem em direção a construção dos conceitos matemáticos.

Sobre o uso das tecnologias digitais, o documento menciona como competência para o ensino da matemática “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (BRASIL, 2018, p. 267). Como mencionamos anteriormente, a presença dos *smartphones* era habitual entre os estudantes e os mesmos constantemente os utilizavam durante as aulas. Explorar essas tecnologias como ferramentas no estudo de matemática além de ser uma competência da BNCC, entendemos que possa auxiliar na potencialização do estudo de conceitos matemáticos.

Justificamos a escolha do tema dessa pesquisa por ele apresentar a potencialidade das tecnologias móveis, bem como do trabalho coletivo, em contribuir de forma significativa para

o processo de aprendizagem dos estudantes. Além disso, a utilização das tecnologias móveis no estudo da matemática promove a mobilidade do estudante em aprender e interagir com o *smartphone*, por ele estar cada vez mais presente na vida dos mesmos (WHITE, MARTIN, 2014). Seguiremos a linha de pesquisa qualitativa, em que elaboramos, aplicamos e refletimos teoricamente sobre os dados produzidos por estudantes em uma sequência de atividades que explorou a Introdução às Funções; Função afim e Função quadrática. Essas atividades foram realizadas pelos estudantes da turma de oitavo ano de uma escola privada de Porto Alegre.

Sobretudo, explorar o fato de os sujeitos da pesquisa trabalharem em conjunto por meio de diálogos e reflexões tendo como base o que Piaget (1973) afirma ser essencial para a produção e aperfeiçoamento dos conhecimentos: a cooperação. Buscando refletir sobre o planejamento das atividades que ocorreram em caráter coletivo e fizeram uso da tecnologia móvel, consideramos relevante a realização dessa pesquisa.

Logo, este estudo está organizado em 6 capítulos. No Capítulo 2 situa-se os aportes teóricos em duas seções, uma sobre a utilização de dispositivos móveis na educação, com subseções sobre o estudo de Funções com tecnologia e trabalhos já realizados sobre esse tema e a segunda seção desse capítulo aborda o processo cognitivo contendo duas subseções, cooperação na perspectiva de Jean Piaget e trabalhos correlatos sobre esse tópico; no capítulo 3 expõem-se os processos metodológicos dessa pesquisa, contendo subseções da metodologia utilizada nessa pesquisa, os sujeitos participantes, os materiais e métodos utilizados; as análises do experimento piloto ocorrido constam no capítulo 4 juntamente à análise e exposição dos dados do experimento final, no capítulo 5 realizamos uma análise global relacionando os dois experimentos e, por fim, apresentamos no capítulo 6 as considerações finais sobre a pesquisa.

## 2 APORTES TEÓRICOS

Neste capítulo trazemos as contribuições de autores que dialogam sobre as tecnologias móveis na Educação Matemática e o conceito de cooperação de Piaget (1973). Além disso, apresentamos em cada seção os trabalhos correlatos aos temas abordados. Entendemos que esse capítulo sustente a perspectiva teórica do presente trabalho de pesquisa e irá contribuir para a análise dos dados produzidos nessa pesquisa.

### 2.1 Tecnologias móveis no ensino de funções

Ter seu *smartphone* sem acesso à internet é algo difícil de imaginar (BAIRRAL, 2018). Atualmente, as tecnologias móveis como *smartphones* e *tablets* encontram-se cada vez mais presentes na vida dos jovens (WHITE, MARTIN, 2014). Esses recursos tecnológicos transformaram o jeito em que nos comunicamos, recebemos informações e lidamos com dados em suas diferentes formas. (WHITE, MARTIN, 2014). As tecnologias digitais móveis estão presentes na vida atual dos seres humanos, entendemos que a exploração das potencialidades desses recursos pode ser benéfica para o sujeito. Ao longo desta seção apresentamos e refletimos sobre quais sejam tais potencialidades e estabelecemos relações dessas com a presente pesquisa.

As salas de aula, na época atual, são caracterizadas por estudantes inquietos. Movimentação e conversas desses sujeitos estão presentes no ambiente de aprendizagem (CORDEIRO, 2015). Devido a essa agitação, devemos repensar as formas de estudar matemática. Como os dispositivos móveis estão presentes na vida desses estudantes, o dia a dia das escolas passa a ser um espaço composto por tecnologias digitais, o modo *Online*, e o modo *Offline* onde o quadro e giz estão presentes também, por exemplo. (CORDEIRO, 2015). Além disso, Cordeiro (2015) comenta que

(...) os alunos já são seres híbridos, suas práticas estão intimamente relacionadas com a conectividade (comunicação, redes sociais, vídeos, fotografias), e passam a evadir-se simbolicamente de um cotidiano que não oferece experiências relacionadas à cultura digital (produção, vivência digital *online* e *off-line*). Eles criam seus próprios territórios informacionais, compartilhados ou não como seus professores e escola. Eles controlam esses territórios a partir do momento que detêm suas senhas e decidem seus grupos de compartilhamento. (CORDEIRO, 2015, p. 296)

O tema tecnologia móvel permeia as práticas de ensino da matemática, pelo fato desses estudantes estarem constantemente conectados. Atualmente, lidamos com uma geração conectada à internet por meio de *smartphones* e essa geração é formada por jovens que cada vez mais utilizam e se apropriam dessas tecnologias digitais (SONEGO, 2019). Consideramos

possível trazer o uso desses recursos tecnológicos contemporâneos para o desenvolvimento de atividades dentro das salas de aula. Porém, Sonego (2019) afirma que a inclusão desses dispositivos requer planejamento e conhecimento das funcionalidades desses recursos tecnológicos por parte dos educadores. Sobre o papel do professor perante esses recursos digitais que podem ser implementados em sala de aula cabe a ele arriscar, Silva (2018, p. 22) considera que “se o docente arrisca, experimenta e de certa forma tenta inovar, rompe-se com a ideia unidirecional do ensino que prioriza a transmissão em oposição a construção de conhecimentos”. Consideramos que explorar as tecnologias móveis que já estão presentes no cotidiano dos estudantes possa auxiliar na busca pelo conhecimento dos mesmos.

Existe a presença dos *smartphones* na sala de aula em que a pesquisa aconteceu, para utilizar as tecnologias móveis, o professor precisa desenvolver e se apropriar das potencialidades que esses recursos digitais têm a oferecer para implementá-la em sala de aula (FRANKLIN, PENG, 2008). Além disso, o que os professores mencionam sobre as dificuldades de às vezes pensarem que os estudantes vão ter dificuldades em manusear e utilizar essas tecnologias pode impedir que as mesmas sejam exploradas nas aulas de matemática. Nesse sentido, Franklin e Peng (2008) comentam sobre o início de sua pesquisa sobre os estudantes produzirem vídeos sobre conceitos matemáticos utilizando computadores. Eles discorrem que o primeiro comentário dos educadores, participantes da pesquisa, foi de que os estudantes teriam muita dificuldade em manusear os programas de criação de vídeo, o que foi contestado no decorrer da prática, os sujeitos utilizaram bem e sem dificuldades os *softwares* propostos. Sustentando o que Franklin e Peng (2008) mencionaram sobre o receio dos professores em utilizar as tecnologias em sala de aula, Higuchi (2011), comenta que apesar da presença de celulares nesse ambiente, entre os estudantes no Brasil, eles não são incorporados e utilizados em atividades pedagógicas, inclusive, como resultado de sua pesquisa, os professores entrevistados comentam que desconhecem as possibilidades de aplicação desses dispositivos móveis na educação.

Como mencionado pelos autores anteriormente, os *smartphones* de uma forma significativa estão presentes no cotidiano, conseqüentemente na sala de aula com os estudantes. Pensar sobre práticas pedagógicas que incluam esse recurso no estudo de conceitos matemáticos pode ser positivo para a busca do conhecimento dos sujeitos.

Como percebemos em nossas salas de aula, muitos estudantes possuem, hoje em dia, um *smartphone* (BAIRRAL, 2017). Como é recorrente a presença desse dispositivo, a sociedade espera que esse recurso seja explorado dentro das escolas (STORMOWSKI, 2018).

Para que haja esse aproveitamento no ensino é necessário debater e refletir como esses dispositivos possam ser úteis nas organizações educacionais.

Moura e Carvalho (2010), em seu estudo, discorrem sobre as potencialidades do uso de dispositivos móveis na educação. Segundo as autoras, podemos integrar esses dispositivos em atividades em sala de aula, pois os mesmos podem se tornar “fonte de motivação dos alunos pela escola e pelo processo de ensino e aprendizagem” (MOURA, CARVALHO, 2010, p.1006). Adendo as potencialidades que os dispositivos móveis propiciam aos estudantes, Martins *et al* (2018), verificaram em seu estudo que os mesmos se apresentam como um recurso para novas formas de construção e desenvolvimento do conhecimento por parte dos sujeitos.

Ainda como recurso de motivação em querer aprender a matemática, as tecnologias móveis propiciam a mobilidade e o uso desses dispositivos contribui para a aproximação do que interessa o estudante e a matemática (WHITE, MARTIN, 2014). Batista (2011) também elenca que a mobilidade e a praticidade são possibilidades extras que o uso de dispositivos móveis pode proporcionar aos sujeitos em sala de aula. Trazer para a realidade do estudante um recurso que o mesmo vem utilizando sempre e já conhece pode favorecer e proporcionar a ele experiências de aprendizagens inovadoras. (MOURA, CARVALHO, 2010). Para que essa interação, estudante com *smartphone*, ocorra de forma efetiva é necessário que os sujeitos estejam com essas tecnologias em mãos durante a realização das atividades matemáticas, “pois é dessa maneira que seu potencial para qualificar a aprendizagem pode ser aproveitado” (STORMOWSKI, 2018, p. 109).

As tecnologias digitais possibilitam simulações, visualizações, experimentações, levantamento de hipóteses, entre outras ações enquanto as tecnologias móveis ampliam as possibilidades de explorações que podem auxiliar na mobilidade, praticidade, alcance de maior número de pessoas, aprendizagens em contextos reais etc. (BATISTA, 2011). Consideramos que a utilização de *smartphones* nessa pesquisa forneça a mobilidade que os mesmos proporcionam aos sujeitos que os utilizam. Além disso, a escolha do emprego das tecnologias móveis no estudo da matemática supre a falta de estrutura das escolas em disponibilizar laboratórios de informática, estudantes que não tenham computadores em casa ou os que disponibilizam da mobilidade de estudar onde estiver a qualquer momento (BATISTA, 2011).

Os *smartphones* favorecem formas mais flexíveis de transladar, girar, mover a partir do toque na tela (BAIRRAL, 2017). Uma das características que atua como facilitadora e

medeia a aprendizagem dos sujeitos é a particularidade da interação *touchscreen* possibilitada pelos *smartphones* “(...) a identificação de formas variadas de *touchscreen* poderá trazer novos *insights*<sup>4</sup> cognitivos para a educação matemática com esse tipo de tecnologia digital.” (BAIRRAL, 2013, p.17). White e Martin (2014) também discorrem sobre as potencialidades do *touchscreen*: “Dada a importância do toque e gesto por usar os dispositivos móveis e outros dispositivos *touchscreen*, vemos um melhor aprendizado sobre as aplicações da matemática das ações nesse espaço como recursos críticos” (WHITE, MARTIN, 2014, p. 9). A partir do ato do toque na tela, ou seja, a interação *touchscreen* o estudante pode estar aperfeiçoando seus conhecimentos e entendimentos sobre a matemática e suas aplicações. Além disso, essa modalidade de interação com o *smartphone* é importante para os sujeitos ampliarem suas habilidades de exploração e argumentação sobre conceitos matemáticos (BAIRRAL, 2013).

O ato do toque na tela ao interagir com um dispositivo móvel como o *smartphone* pode gerar para o sujeito novas descobertas e aprendizagens além de dinamizar o ensino promovendo novas explorações conceituais em sala de aula (BAIRRAL, 2017). Sobre a construção do conhecimento matemático e a interação com o dispositivo móvel:

(...) quando um sujeito manuseia um dispositivo móvel em tarefas matemáticas, cabe ressaltar a importância de considerar a conjunção (*gestos+toques+escrita+construção\_na\_tela*) na construção do conhecimento matemático, sem priorizar uma delas, geralmente, a escrita. Haverá momento em que a fala ou a manipulação em tela serão mais propícias a descobertas e refinamentos conceituais. Em outras circunstâncias, as diferentes formas de registros, inclusive a escrita e as construções no *software*, poderão ser igualmente úteis. (BAIRRAL, 2017, p.105)

Como comentado por Bairral (2017) na citação anterior, a manipulação do dispositivo móvel pode oportunizar ao estudante descobertas e elaboração de hipóteses sobre conceitos matemáticos explorados nas atividades. Além disso, os toques na tela constituem outra linguagem que possui particularidades e implicações nos pensamentos dos sujeitos (BAIRRAL, 2017). As manipulações feitas na tela de um *smartphone* pode transparecer e materializar o pensamento para favorecer a interação com o dispositivo (BAIRRAL, 2017).

Apresentamos nessa seção o que os estudos consultados elencam sobre as potencialidades que a utilização dos *smartphones* ou tecnologias móveis propiciam aos sujeitos que estão com esses recursos em mãos durante o processo de estudo. As

---

<sup>4</sup> O termo *insight* não está em sintonia com o pensamento de Piaget, o qual não considera o *insight* como elemento para a aprendizagem. Aqui está sendo mencionado em consonância com Bairral (2017) que o utiliza.

possibilidades que as tecnologias têm a oferecer quando as utilizamos no ambiente educacional são: Motivação dos estudantes, mobilidade, praticidade, simulações, visualizações, elaboração de conjecturas, experimentações, recurso *touchscreen*, novas descobertas.

Portanto, trazer para a sala de aula a utilização e interação com *smartphone* pode oportunizar ao sujeito novas descobertas e motivá-lo a querer aprender matemática. Além disso, a utilização dos dispositivos móveis pode contribuir para a busca e construção de conceitos matemáticos por meio das experimentações, simulações, manipulação das tecnologias através do uso do *GeoGebra Graphing Calculator*. Assim, entendemos que explorar as potencialidades da interação com o *smartphone* seja profícuo para essa pesquisa.

## **2.2 Estudos correlatos sobre tecnologias móveis na Educação Matemática**

Esta seção consiste em um estudo realizado feito à luz da busca, consulta, reflexão e exposição de pesquisas realizadas que versam o tema abordado. Trazemos estudos que dialogam sobre o ensino de Funções de Variável Real por meio do uso da tecnologia móvel. Nesse sentido, Sena *et al* (2014) realizaram um mapeamento sobre aplicativos de dispositivos móveis com fins educativos no estudo da matemática que podem ser utilizados nos diferentes níveis de ensino (fundamental, médio, superior). O mapeamento foi realizado nos anos de 2013 e 2014, assim, os autores concluem que há necessidade de inovações no processo de ensino e aprendizagem em matemática, pois eles constatam que há poucas iniciativas que utilizem os dispositivos móveis como auxiliares no estudo desse conteúdo.

Indo ao encontro da formação de professores, Padilha e Prado (2016) exploraram em seu artigo compreender como professores de Matemática da Educação Básica se apropriam dos recursos dos *tablets* para ensinar Função Afim. Eles constataram a importância de instituições que formam professores em explorarem as potencialidades que essas tecnologias podem oferecer para os educadores desfrutarem do seu uso no Ensino da Matemática. Sendo um tema muito abordado atualmente no cenário educacional, a utilização das tecnologias móveis vem sendo debatida e se tornando um tema indispensável na prática e formação dos docentes (PADILHA, PRADO, 2016).

Com o objetivo de compor em aulas de matemática a utilização dos recursos digitais em atividades, Gerstberger *et al* (2016), realizaram uma pesquisa qualitativa sobre uma prática pedagógica realizada no Ensino Médio. A criatividade e entusiasmo dos estudantes na resolução das atividades propostas pelos autores foram constatadas pelo uso do celular em aula. Nesse sentido de inserir a tecnologia móvel no ambiente educacional, Obata (2019)

realizou uma pesquisa para analisar artigos científicos sobre o Ensino da Matemática mediado por tecnologias móveis. O objetivo foi de descrever que possibilidades ocorrem com esses recursos digitais. Três perspectivas foram elencadas na conclusão da análise da autora: inovação, referente a metodologia para práticas pedagógicas, aprofundamento e ampliação dos conteúdos matemáticos devido a utilização das tecnologias móveis e mudanças de compreensão dos estudantes para aprender matemática. Essas três possibilidades apresentadas pela autora decorreram da análise de quatro trabalhos que discorrem sobre o uso das tecnologias móveis em aulas de matemática.

Utilizando o *smartphone* dentro da sala de aula, Lima *et al* (2014), realizaram um estudo com objetivo de investigar a utilização da internet como mediadora da interação entre os estudantes em contexto escolar. Os autores concluem que quando os estudantes utilizaram esses recursos, a cooperação e interação foram estimuladas e assim, “proporcionaram a troca de experiências e opiniões, e a construção de conceitos, favorecendo a aprendizagem” (LIMA *et al*, 2014, p.8).

Ainda sobre os benefícios da utilização da tecnologia móvel, Silva e Oliveira (2018) apresentam em seu artigo um estudo sobre a utilização de um aplicativo criado e suportado por *smartphones* nas aulas de matemática. Após a utilização do aplicativo em sala de aula por professores e estudantes, os autores analisaram seus discursos sobre o aplicativo. Sobre as considerações finais e as contribuições para a aprendizagem, os autores destacam que sua utilização pode auxiliar no processo de construção do conhecimento do estudante. Além disso, para o professor, os autores destacam que o uso das tecnologias móveis em sala de aula “permitiu ao professor um novo recurso para o uso em sua prática pedagógica, que tornasse o Ensino de Matemática mais prático e dinâmico” (SILVA, OLIVEIRA, 2018, p.220).

Já Carvalho (2015), objetiva, em sua dissertação, investigar a presença dos dispositivos móveis em sala de aula para verificar se é possível sua utilização no ensino e aprendizagem da matemática. O autor realizou uma pesquisa quantitativa, coletando dados estatísticos sobre escolas e as tecnologias utilizadas em aula. O autor conclui que os dispositivos móveis não são utensílios presentes. Os trabalhos apresentados até aqui expõem como a tecnologia móvel pode ser profícua para o sujeito em seu estudo da matemática.

Iniciando as explorações dos trabalhos que discorrem sobre o estudo de conceitos matemáticos com o uso das tecnologias móveis em aula, Romanello (2016) em sua dissertação pesquisou sobre o uso do celular inteligente (*smartphone*) para o ensino do conceito de Função. Os sujeitos da pesquisa foram estudantes do 9º ano que realizaram

atividades sobre exploração de gráficos de Função Afim e Quadrática. Como resultados de sua pesquisa Romanello (2016) identificou que o uso do celular

(...) tem as potencialidades de: proporcionar discussões matemáticas frente ao conteúdo estudado; dar voz a curiosidade dos alunos pelo fato de poderem explorar os gráficos que desejarem, podendo testar suas conjecturas; possibilitar a generalização de resultados, por meio da exploração e investigação; permitir a discussão de conteúdos de anos posteriores devido ao envolvimento e curiosidade dos alunos durante as aulas; proporcionar a interação aluno-professor e aluno-aluno no momento de discussão das atividades; e permitir que os alunos se expressassem matematicamente tanto na forma escrita como na forma oral. (ROMANELLO, 2016, p. 123)

Romanello (2016) constatou que o uso do *smartphone* fez emergir debates e construção de hipóteses sobre os gráficos da Função Quadrática. Entendemos que explorar a manipulação dos gráficos das funções no *GeoGebra Graphing Calculator* também pode convergir para a promoção dos diálogos entre os estudantes na sala de aula. Além disso, como citado por Romanello (2016), a utilização da tecnologia móvel oportunizou aos estudantes conversar sobre matemática na forma escrita e oral, o que contribui teoricamente para nossa pesquisa, já que pretendemos utilizar o aplicativo para a exploração dos conceitos das Funções.

Ainda sobre a utilização do *smartphone* no estudo de conceitos matemáticos, Nogueira (2018) utilizou o aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator* no ensino de Funções Exponencial e Logarítmica. Estudantes do 1º ano do Ensino Médio realizaram explorações sobre os parâmetros de cada função em seus respectivos gráficos. O autor concluiu que a utilização do aplicativo oportunizou aos estudantes a visualização, dinamicidade na exploração gráfica e conduziu-os na elaboração de conjecturas sobre as particularidades das Funções Exponencial e Logarítmica.

Em consonância aos autores anteriores, Concordido, Barbosa e Silva (2020) propuseram atividades para estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio sobre Função Quadrática utilizando o aplicativo *GeoGebra* em *smartphones*. A exploração do gráfico da Função Quadrática proporcionou aos estudantes a dinamicidade de manipular o gráfico da Função. Além disso, os autores comentam que a sala de aula clássica, com quadro e giz, se tornou um laboratório de matemática, o que foi importante, pois a escola não abrigava em suas instalações esse tipo de infraestrutura.

O estudo das Funções Quadráticas com o auxílio da tecnologia móvel foi explorado por Silva e Pinto (2019). Os autores escreveram sobre uma sequência de atividades realizada pelos estudantes da pesquisa em que utilizaram o aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator*

na resolução e exploração de atividades que contribuíssem para a cooperação entre os mesmos. Foi constatado que “o celular foi propulsor das discussões inerentes às atividades propostas” (Silva, Pinto, 2019, p. 1). Além disso, eles destacam que “a utilização da tecnologia móvel por meio de um aplicativo que os sujeitos pudessem interagir entre si e com o artefato tecnológico foi o meio para que acontecessem os diálogos” (SILVA, PINTO, 2019, p. 123).

Cruz (2018) traz em sua dissertação uma pesquisa sobre as potencialidades do *software* GeoGebra em dispositivos móveis para o estudo das Funções Exponenciais. Ela constatou que o recurso móvel possibilitou aos estudantes a visualização, interação e construção dos conhecimentos sobre as Funções Exponenciais. A autora destaca em sua resposta à questão central da pesquisa:

Assim, a utilização desses recursos tecnológicos como mediadores da aprendizagem possibilitou que os participantes desse estudo compreendessem os conteúdos relacionados com funções exponenciais de uma maneira diferenciada, que seria dificultado se fossem utilizadas somente as ferramentas tradicionais de desenho como o lápis, a régua e o papel. (CRUZ, 2018, p.150)

Adendo aos trabalhos apresentados que empregaram as tecnologias móveis no estudo da matemática, Ladeira (2015), em sua dissertação, utilizou esses dispositivos como recursos mediadores para o ensino de Funções do primeiro grau. A autora objetivou investigar os subsídios que as tecnologias móveis podem trazer para a Educação Matemática, especificamente para o ensino de Funções Afim. Ela conclui que os *smartphones*

(...) ofereceram vantagens logísticas educacionais como, por exemplo, a portabilidade do processo de ensino e aprendizagem e a mobilidade e a interatividade dos participantes promovidas com a inserção desses dispositivos no ambiente escolar. (LADEIRA, 2015, p.221)

Elencados os trabalhos correlatos sobre o uso da tecnologia móvel em sala de aula, percebemos que a mesma contribui e atua como mediadora na construção de conhecimento do sujeito. No começo desta seção apresentamos os estudos que dialogam sobre a ausência do uso de tecnologias móveis em aulas de matemática. Seguindo a apresentação dos estudos, temos autores que discorrem sobre as potencialidades do uso desses recursos digitais na Educação Matemática. Entendemos que aderir e utilizar as tecnologias móveis pode contribuir para uma nova forma do estudante de explorar os conceitos matemáticos em sala de aula.

Como exposto pelos trabalhos que apresentaram as potencialidades do uso da tecnologia móvel na Educação Matemática, a mobilidade, construção de conceitos

matemáticos, diálogo entre os pares, visualização e interação com *softwares* se deu através da utilização dos *smartphones*. Consideramos sua utilização importante para nossa pesquisa pelo fato de que esses dispositivos se fazem presente na vida cotidiana de nossos estudantes e ao mesmo tempo eles podem utilizá-los para dialogar e construir conceitos matemáticos em sala de aula.

Os estudos apresentados evidenciam a importância da utilização de tecnologias no ensino de Funções de Variável Real e como elas influenciaram na construção do conhecimento dos estudantes. Parte das pesquisas consultadas posiciona o professor como mediador do conteúdo abordado e os estudantes como foco dentro da sala de aula trabalhando em conjunto. Entendemos que um estudo de matemática guiado pela tecnologia e mediado pelo professor possa ser significativo e profícuo na construção de conceitos e ideias matemáticas.

### 2.3 A cooperação

“(...) o conhecimento humano é essencialmente coletivo e a vida social constitui um dos fatores essenciais da formação e do crescimento dos conhecimentos pré-científicos e científicos.” (PIAGET, 1973, p. 17)

A partir desse trecho iniciamos a seção. As ideias sobre cooperação propostas por Jean Piaget, precursor no desenvolvimento da Teoria da Equilibração e da Epistemologia Genética, serão apresentadas e utilizadas nesta pesquisa para a construção e análise dos dados produzidos dentro da sala de aula pelos estudantes.

Essa pesquisa pretende realizar uma análise sobre as contribuições da cooperação entre os estudantes na construção de conceitos e ideias matemáticas. Portanto, as articulações entre os fazeres individuais e coletivos dos sujeitos que estarão envolvidos na presente pesquisa constituem um elemento de incomensurável importância para a análise e reflexões sobre os dados produzidos. Sobre o trabalho coletivo, Piaget (1973) ressalta que o mesmo conduz à formação das noções racionais e as regras lógicas são executadas em comum antes de ser um pensamento comum. Ele ainda afirma que a razão, o conhecimento humano é “comunicação, discurso, e conjunto de conceitos” (PIAGET, 1973, p.82).

Sobre cooperação, Piaget (1973) apresenta:

A cooperação consiste nela mesma num sistema de operações, de tal forma que as atividades do sujeito se exercendo sobre os objetos, e as atividades dos sujeitos quando agem uns sobre os outros se reduzem na realidade a um só e mesmo sistema de conjunto, no qual os aspectos lógicos são inseparáveis na forma como no conteúdo. (PIAGET, 1973, p.103)

A partir desse sistema de operações que compreende a cooperação faz-se necessário investigar aspectos para verificá-la nos diálogos entre os pares. As trocas de ideias entre os sujeitos são comumente utilizadas por Piaget (1973) como trocas de proposições, sendo proposição um “ato de comunicação” (PIAGET, 1973, p. 106). Os equilíbrios de troca, ou seja, “as características do estado no qual os interlocutores se encontrarão de acordo ou intelectualmente satisfeitos” (PIAGET, 1973, p. 108) ocorrem em meio ao ato de cooperação. Com isso, em caso de não haver acordo por parte dos sujeitos sobre alguma proposição, não haverá equilíbrio de troca, fazendo com que a discussão sobre certo assunto prossiga, sem que uma solução parcialmente estável esteja construída.

Piaget (1973) questiona como uma troca de ideias vai se constituir em cooperação de pensamento. Para isso, devemos estabelecer os equilíbrios de trocas, já exemplificados anteriormente e, após, estruturar um conjunto de regras que forma uma lógica formal.

Sobre os equilíbrios de troca, Piaget (1973, p. 108) menciona que são necessárias três condições que os comportam. São elas:

1ª Condição: Dois sujeitos devem estar em uma mesma escala de valores (regras morais e jurídicas etc.) intelectuais, apresentados por meio de símbolos comuns homogêneos. Essa escala deve comportar três características complementares: a) uma linguagem; b) um sistema de fundamentos definidos entre indivíduos, mesmo que convirjam inteiramente ou divirjam em parte, mas que seja possível traduzir esses fundamentos de um sistema de um sujeito para o sistema do outro; c) certo número de proposições pondo estes fundamentos em relação, admitidos em acordo, que também valham de referência em caso de discussão entre os sujeitos.

2ª Condição: Igualdade geral dos valores em jogo nas variações de proposições em que Piaget (1973) enfatiza que deve haver: a) o acordo sobre os valores reais e virtuais; e b) a conservação das proposições reconhecidas. Sem acordo, não há equilíbrio e as discussões só são possíveis se houver as conservações.

3ª Condição: Possibilidade de retornar sem cessar às validades reconhecidas anteriormente, ou seja, é a atualização possível em todo o tempo dos valores virtuais. Esta condição causa reversibilidade (compreender pontos de vista diferentes), e também a reciprocidade (concordar com diferentes pontos de vista).

Camargo e Becker (2012, p. 536) referenciam o que é valor para Jean Piaget, segundo as autoras, para Piaget, o valor “é individual e construído através de reflexões que o sujeito realiza quando contrasta o sentimento e a diferenciação que é capaz de fazer do outro com quem se relaciona nas trocas sociais”. Ou seja, na primeira condição do equilíbrio de troca, os

sujeitos devem ter domínio dos mesmos “conhecimentos”, por exemplo, em sala de aula, os estudantes de uma mesma turma podem estar em uma mesma escala de valores para o início das trocas de proposições. Assim, a partir da existência da primeira condição, entendemos que a segunda, que seria a igualdade de valores, o acordo entre essas possíveis trocas de proposições que pode ocorrer entre os sujeitos e a terceira condição que é a reciprocidade e reversibilidade podem acontecer e acarretar os equilíbrios de troca.

Piaget (1973), ainda destaca que essas três condições acontecem somente em trocas cooperativas. Em casos em que o egocentrismo ou coação por parte dos sujeitos surgem, o equilíbrio não é atingido. Nas palavras do autor: “O estado de equilíbrio, tal como é definido pelas três condições precedentes, está assim subordinado a uma situação social de cooperação autônoma, fundamentada sobre a igualdade e a reciprocidade dos parceiros” (PIAGET, 1973, p. 110). Em consonância ao que Piaget (1973) comenta sobre o estado de equilíbrio em ações cooperativas, Oliveira (2019) enfatiza que para a cooperação existir nas salas de aulas é necessário “desfazer-se do egocentrismo intelectual e moral, libertar-se das coações sociais e criar um ambiente em que as relações sejam simétricas por meio da reciprocidade” (OLIVEIRA, 2019, p. 155). Entendemos que o papel do professor em um ambiente permeado por ações cooperativas seja de mediar as atividades dos estudantes, agindo como um “especialista, um tutor, um guia que opera com as crianças sem impedir a liberdade da criança e nem proibir seus primeiros passos em direção à autonomia” (OLIVEIRA, 2019, p.155).

Caracterizado o equilíbrio de trocas, segundo Piaget (1973), o mesmo comporta um sistema de normas e essas normas constituem agrupamentos que coincidem com os da lógica das proposições, mesmo que não admitam essa lógica no seu ponto inicial. Primeiramente, em uma relação de troca, independente de condições iniciais postas nessa relação, Piaget (1973, p. 111), enfatiza que a conservação obrigada dos valores virtuais, ou o contrário, gera a construção de duas regras: uma sobre regras de comunicação ou de troca e outra sobre a abstração feita ao equilíbrio interno das ações individuais. Sobre a segunda regra, Piaget (1973) diz que o princípio da identidade mantém constante uma proposição durante trocas posteriores, e o princípio da contradição conservando sua verdade, sendo ela reconhecida como verdadeira ou não, sem possibilidade, coincidentemente, de afirmá-la ou negá-la.

Posteriormente, a atualização que possivelmente sempre ocorre dos fatores virtuais obriga de maneira recíproca os indivíduos a voltarem em seus argumentos para conciliar as proposições atuais em relação às proposições anteriores. Nesse cenário, a conservação obrigada, comentada anteriormente, não permanece fixa, sem movimento, porém causa o desenvolvimento da propriedade fundamental: “a reversibilidade operatória, fonte de

coerência de toda a construção formal” (PIAGET, 1973, p. 112), que, segundo Piaget (1973) opõe o pensamento lógico ao pensamento espontâneo.

Em suma, Piaget (1973, p.112) conclui que após as produções posteriores de proposições e os acordos entre os sujeitos sendo regulados pela reversibilidade e pela conservação obrigada, eles tomam uma das três formas expostas a seguir: a) as proposições de um sujeito podem corresponder às proposições de um outro sujeito, decorrendo um agrupamento sob a forma de correspondência termo a termo entre duas séries isomorfas de proposições; b) As proposições de um dos sujeitos podem ser simétricas às do outro, deduzindo uma verdade, um acordo em comum, justificando seus pontos de vista; c) As proposições de um dos indivíduos pode complementar ou completar as do outro, adicionando conjuntos complementares.

Sendo assim, Piaget (1973) enfatiza que a troca de proposições forma uma lógica, pois ocasiona o agrupamento das proposições trocadas, sendo um agrupamento próprio a cada sujeito, em função das trocas com outros, e um agrupamento geral ocasionado pelas correspondências, reciprocidades ou complementaridades. Deste modo, a troca estabelece uma terceira lógica, que acorda com a lógica das proposições individuais.

Sobre a lógica, Piaget (1973) argumenta que o agrupamento é um sistema de substituições possíveis (sendo pensamento individual ou cooperação social em um sistema de cooperações). Essas substituições possíveis que constituem uma lógica geral coletiva e individual caracterizando a forma de equilíbrio comum em ações sociais e individualizadas. E esse equilíbrio comum que constrói a lógica formal.

Evidenciadas as condições dos equilíbrios de trocas entre os sujeitos que só são possíveis em ações cooperativas, o conceito de cooperação é apresentado por Piaget (1973, p.105): “é operar em comum, isto é, ajustar por meio de novas operações (...) de correspondência, reciprocidade ou complementaridade”. Ou seja, cooperação em uma discussão de um grupo de estudantes sobre um determinado assunto matemático, por exemplo, pode ser exercida pela troca de ideias e pensamentos desses estudantes sobre o mesmo.

Outra palavra que em seu significado se assemelha à cooperação é a colaboração. Porém, para Piaget (1973), a colaboração “resume-se à reunião das ações que são realizadas isoladamente pelos parceiros, mesmo quando o fazem na direção de um objetivo comum” (p. 105). Ou seja, em um trabalho coletivo, os sujeitos realizam suas “tarefas” separadamente para talvez, ao fim, como resolução, unir o que cada um fez para o resultado final. Destacadas as diferenças entre cooperação e colaboração, estaremos interessados em explorar as

contribuições da cooperação, já que a mesma, segundo Piaget (1973) descentra o sujeito de seu egocentrismo inicial e o faz operar em conjunto com outros sujeitos.

Para identificarmos a cooperação nos diálogos entre os pares desta pesquisa exemplificamos nesta seção as três ações que caracterizam a cooperação. Relembrando-as: Ação de correspondência é quando, por exemplo, em uma discussão entre duas pessoas sobre determinado assunto, as duas expressam a mesma opinião ou pensamento sobre o assunto, assim identificaríamos pensamentos correspondentes. A ação de reciprocidade seria destacada quando encontramos ideias recíprocas ou simétricas na conversa entre os pares. Por último, mas não menos importante, temos a ação de complementaridade que pode estar descrita em uma discussão em que um sujeito complementa a ideia ou raciocínio do outro com argumentos complementares.

Segundo Piaget (1936) a cooperação é um elemento necessário na produção e desenvolvimento dos conhecimentos. Para evoluir é necessário cooperar, a qual segundo o autor:

(...) não age somente sobre a tomada de consciência do indivíduo e sobre o seu senso de objetividade, mas termina, afinal, por constituir toda uma estrutura normativa que remata sem dúvida o funcionamento da inteligência individual, mas completando-a no sentido da reciprocidade. (...) A cooperação é verdadeiramente criadora, ou o que vem a ser o mesmo, constitui a condição indispensável para a completa formação da razão. (PIAGET, 1993, p. 8)

Camargo e Becker (2012) destacam que a cooperação como metodologia se refere ao sujeito ter a capacidade de coordenar pontos de vista, sendo expectador de outros sujeitos com quem se relaciona e buscando entender essas ideias do outro. Esse tipo de assimilação é entendido como cognitiva e intelectual, pois o sujeito pode apenas escutar as proposições do outro e optar por não assimilar o que foi dito. Quando o indivíduo leva em conta o ponto de vista do outro, ele precisa conservar e trazer como conteúdo para sua reflexão. Assim ele pode comparar o seu ponto de vista e o do outro sujeito para poder pensar por meio de outros ângulos e mesmo que o ponto de vista próprio do sujeito seja mantido, ele terá analisado e alterado sua compreensão do próprio ponto de vista, pois a reflexão propicia a tomada de consciência.

Em aulas de matemática, a cooperação pode ser estimulada a partir de atividades que valorizam a ação em conjunto dos estudantes. Nessas tarefas a troca de pensamentos e reflexões entre os sujeitos oportuniza que a cooperação conduza à aprendizagem. Bona (2012) enfatiza que a cooperação pode oportunizar ao sujeito a criação de novas realidades e

conhecimentos sobre matemática. Essa criação, aos indivíduos, estimula reflexões as quais segundo Piaget (1973), são necessárias quando se observa que “o desenvolvimento das operações racionais supõe uma cooperação entre os indivíduos liberando-os de seu egocentrismo intelectual inicial” (PIAGET, 1973, p. 83). E essa cooperação nas ações e operações efetivas do pensamento que ampliam a forma do aprender do sujeito. (Piaget, 1973)

A razão e seu elemento social de cooperação, “a cooperação é indispensável à elaboração da razão” (PIAGET, 1973, p.5). Ou seja, notamos que a cooperação seja um elemento indispensável na produção e aperfeiçoamento dos conhecimentos. Para evoluir é necessário, não suficiente, cooperar. Assim, podemos compreender que cooperação exercida em ações coletivas, contribui para reflexões e posteriormente a formação de conhecimentos sobre determinados fatos. Dessa forma, consideramos importante investigar tal concepção dentro da sala de aula, já que a mesma pode ser considerada um ambiente coletivo e social.

#### **2.4 Estudos correlatos sobre cooperação entre os estudantes no ensino e aprendizagem**

Esta seção compõe-se de uma análise e apresentação de trabalhos acadêmicos realizados e que exploram as ideias de Jean Piaget sobre cooperação. As pesquisas apresentadas aqui debatem sobre o ensino da matemática a partir do viés da cooperação entre os sujeitos.

Sobre a importância de se conhecer as ideias de Piaget, Gomes e Ghedin (2012) em seu estudo apresentam uma súmula da teoria proposta pelo autor e como esta pode ser importante na execução do trabalho do professor. É um estudo formado por uma revisão de literatura sobre a composição intelectual da criança durante sua educação escolar. Os autores decorrem sobre tópicos da Teoria da Epistemologia Genética de Piaget e um desses tópicos denomina-se a teoria de Piaget na sala de aula que enfatiza a importância de considerar o momento do sujeito de aprender, sobre isso, os autores declaram que:

(...) em sala de aula é necessário respeitar o momento do sujeito, o instante em que o estudante está pronto para aprender determinado conteúdo, possibilitando a ele experiências que possa agir ativamente no processo, conseguindo um equilíbrio entre o que já conhece e aquilo que é novo e que precisa conhecer por meio da interação com outros sujeitos. (GOMES, GHEDIN 2012, p. 8)

Em consonância com Gomes e Ghedin (2012) sobre o momento do sujeito aprender e o papel do professor nessa ação, Treviso (2013) apresenta um parecer da percepção de relações sociais no trabalho de Piaget assim como as consequências dessa visão para a educação escolar. Em sua pesquisa, a autora conclui que na perspectiva de Jean Piaget sobre

as relações sociais na escola, deve-se haver a *secundarização* da função do professor, fazer com que o estudante aprenda a aprender.

A partir de nossas pesquisas sobre os trabalhos que se baseiam na cooperação entre os sujeitos para o ensino da matemática encontramos o suporte da tecnologia digital juntamente ao conceito de cooperação. Silva e Pinto (2019) realizaram uma pesquisa para analisar como a cooperação entre os estudantes influenciou na aprendizagem de funções quadráticas. Os autores construíram uma sequência de atividades em que os estudantes utilizaram o aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator* para estudarem e dialogarem sobre as particularidades da Função Quadrática. Segundo eles

Notou-se que oportunizar momentos de compartilhamento e enfrentamento de situações de forma conjunta é profícuo para o grupo (coletivo) e também benéfico para o sujeito (individual). Tal metodologia de trabalho diametralmente se afasta da prática unidirecional de divulgação dos conhecimentos em sala de aula, e dessa forma, enfatiza-se aqui a importância de se trabalhar em sala de aula atividades de forma conjunta e com características cooperativas. (SILVA, PINTO, 2019, p.123)

Entendemos que proporcionar trabalhos em grupo e atividades que possam permitir o diálogo entre os estudantes, como evidenciado por Silva e Pinto (2019) podem contribuir para a aprendizagem de conceitos matemáticos. Em consonância aos autores referindo-se a cooperação, Carvalho e Scherer (2013) desenvolveram uma pesquisa para analisar as possibilidades de oportunizar momentos de cooperação entre estudantes a partir da utilização da lousa digital pelo professor para ensinar matemática. O experimento em sala de aula consistiu em na realização de atividades em conjunto pelos estudantes utilizando a lousa para expor suas resoluções. Os autores constataram que o uso da lousa digital na abordagem construtivista de Jean Piaget proporcionou uma produção realizada por várias mãos. Nas palavras dos autores: “é como se todos pudessem manipular a tela na busca de soluções” (CARVALHO, SCHERER, 2013, p. 16).

Em sala de aula, mantendo a ideia de respeito do momento do sujeito aprender a aprender, Krakecker *et al* (2017), apresentam em seu artigo um recorte de uma experimentação realizada com mestrandos de um programa de pós-graduação em matemática, cujo objetivo foi investigar possibilidades de aprendizagem por meio de um processo cooperativo utilizando para isso o *software* GeoGebra. Os autores concluem que a partir das atividades elaboradas sobre geometria no *software*, as mesmas contribuíram para emergirem discussões com fins cooperativos.

Ainda na sala de aula, Martins, Bianchini e Yaegashi (2017), caracterizaram como qualitativa sua pesquisa que analisou a interação entre vinte e um estudantes na aplicação de

três desafios da *Webquest* em que nos resultados do estudo, a cooperação se fez presente. Sobre a influência do trabalho coletivo na aprendizagem, os autores concluem que

O envolvimento do sujeito numa situação, seja interagindo com objetos seja com pessoas, possibilita a construção de novas ideias bem como melhor compreensão da realidade enquanto aprendem. As trocas por reciprocidade ou cooperação promoveram, naquele contexto interativo, o avanço no conhecimento matemático. (MARTINS, BIANCHINI e YAEGASHI, 2017, p.304)

Em um experimento na graduação de estudantes e em concordância com os autores destacados acima sobre a cooperação contribuir na construção de conhecimento do sujeito, Silva, Ribeiro e Silva (2013) exibem o resultado de um estudo ligado ao uso tecnologias de informação e comunicação (TIC) que mostra como os estudantes agem cooperativamente possibilitando a aprendizagem em comunidades de prática. Os autores utilizaram a ideia de cooperação apresentada por Piaget, na qual a mesma possibilitou a prosperidade das discussões trazidas pelos estudantes, postos no âmbito da disciplina.

No Ensino Médio, em seu artigo, Bona, Basso e Fagundes (2011), apresentam os resultados parciais de uma pesquisa de doutorado com os estudantes, explicando o local de aprendizagem digital para a Matemática utilizando o conceito de cooperação para analisar como aprender a aprender a matemática. Os autores concluem que “Os estudantes fazem uso da cooperação para solucionar problemas cognitivos de forma qualitativa” (BASSO, BONA e FAGUNDES, 2011, p.6).

Em outra pesquisa ainda no Ensino Médio, Bona *et. al.* (2014) apresentam um fragmento de uma pesquisa-ação sobre o espaço de aprendizagem digital da matemática com os estudantes. A pesquisa, entre outros aspectos, objetivou mostrar que a mídia citada é um espaço de aprendizagem digital que permite o aprender a aprender a matemática por cooperação.

Para encerrarmos a seção apresentamos o que Corbellini (2011) pesquisou sobre a cooperação na sala de aula. O seu estudo objetivou investigar como a cooperação pode ser incrementada em ambientes virtuais de aprendizagem e quais as implicações para esta prática. Ela utiliza as ideias de Piaget sobre cooperação para estabelecer uma correspondência com a prática experimentada no estudo. Segundo a autora para a cooperação entre os sujeitos existir é preciso que existam espaços físico ou virtual, havendo possibilidades de trocas entre os estudantes. Ainda sobre a cooperação, a autora salienta que “Na sociedade atual, globalizada, a demanda é por sujeitos que trabalhem de uma forma inovadora e para tanto a educação tem

uma função primordial: de formar sujeitos ativos, capazes de construir o seu conhecimento” (CORBELLINI, 2011, p.9).

Destacados esses trabalhos os quais usam como aporte teórico para a construção da pesquisa as ideias de Piaget sobre cooperação, evidenciamos a relevância de utilizar esse conceito na análise do experimento de ensino que ocorrerá no presente estudo. Ademais, as pesquisas correlatas constituem-se num recorte que, para todos os efeitos, demonstraram resultados positivos de que as ações cooperativas auxiliam no aprender do sujeito.

### 3 PROCESSOS METODOLÓGICOS

Apresentamos nessa seção a descrição da metodologia de pesquisa adotada nesse estudo, os sujeitos participantes e os materiais e métodos utilizados para podermos responder a pergunta que norteia a pesquisa. Além disso, em materiais e métodos, apresentamos a sequência de atividades elaborada que utiliza o aplicativo para *smartphones*: *GeoGebra Graphing Calculator* e visa estimular o trabalho coletivo dos estudantes.

#### 3.1 Metodologia

A abordagem qualitativa foi a metodologia utilizada nessa pesquisa, já que pretendemos analisar como ocorre trabalho coletivo de estudantes do oitavo ano do ensino básico com o uso de *smartphones* no estudo de funções de variável real. Destacamos que o papel do investigador durante a pesquisa é essencial, dado que ele esteve presente em todo experimento e em um diário de campo registrou durante e após as atividades os aspectos importantes que contribuíram para o resultado dessa pesquisa.

Para construir uma possível resposta à pergunta central dessa pesquisa e a realização dos objetivos gerais e específicos, escolhemos desenvolver uma metodologia que visasse explicar o problema em estudo. Para isso o caminho escolhido foi usar o conceito de pesquisa qualitativa.

Sobre os aspectos da pesquisa qualitativa:

Os aspectos essenciais da pesquisa qualitativa consistem na escolha adequada de métodos e teorias convenientes; no reconhecimento e na análise de diferentes perspectivas; nas reflexões dos pesquisadores a respeito de suas pesquisas como parte do processo de produção de conhecimento; e na variedade de abordagens e métodos. (FLICK, 2009, p.23)

Além disso, Bodgan e Biklen (1994) citam as cinco características de uma pesquisa qualitativa, as quais serão explanadas a seguir.

Característica 1: A fonte dos dados é o ambiente natural, tomando o investigador como o objeto principal:

Os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência. (...) (Metz, 1978) Os investigadores qualitativos assumem que o comportamento humano é significativamente influenciado pelo contexto em que ocorre, deslocando-se, sempre que possível, ao local de estudo. (BODGAN, BIKLEN, 1994, p.48)

A primeira característica exposta acima se adéqua, já que a pesquisadora esteve dentro da sala de aula com os estudantes, sujeitos dessa pesquisa, em seu ambiente natural.

Característica 2: A pesquisa qualitativa é descritiva, ou seja, “os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que os dados foram registrados ou transcritos” (BODGAN, BIKLEN, p.48, 1994).

Os dados produzidos pelos estudantes do oitavo ano se enquadram em diálogos que foram gravados e transcritos na íntegra pela pesquisadora. Formando assim um conjunto de informações na forma de palavras que foram analisadas.

Característica 3: Em pesquisa qualitativa há predominantemente “Interesse no processo da pesquisa do que pelos resultados” (BODGAN, BIKLEN, p.49, 1994). Como estaremos analisando como ocorre o trabalho coletivo de estudantes do oitavo ano no estudo de funções de variável real, estamos interessados no processo dessa construção de conhecimento por parte dos sujeitos da pesquisa.

Característica 4: Há uma tendência de análise dos dados de forma indutiva:

Não recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando. (...) está-se a construir um quadro que vai ganhando forma à medida que se recolhem e examinam as partes. (BODGAN, BIKLEN, 1994, p.50)

Os dados produzidos pelos sujeitos dessa pesquisa foram analisados de forma indutiva. A partir da transcrição dos diálogos entre os estudantes as análises foram construídas e por fim pudemos construir uma resposta à pergunta central dessa pesquisa.

Característica 5: Destaca-se a importância do significado: “Os investigadores que fazem uso deste tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas” (BODGAN, BIKLEN, 1994, p.50). Como destacado na quinta característica, estivemos interessados em como diferentes estudantes com diferentes pensamentos realizaram juntos a sequência de atividades proposta e como ocorreu esse trabalho coletivo entre eles. Assim, a abordagem qualitativa se adéqua nessa pesquisa.

### **3.2 Sujeitos da pesquisa**

Desenvolvemos essas atividades durante as aulas da pesquisadora no ambiente em que atuou como professora de matemática do 8º ano do ensino fundamental. A escola demandava 5 períodos de 1 hora/aula de 50 minutos cada de matemática. Então realizamos as atividades

em 9 períodos, totalizando duas semanas de prática. Como a professora dispunha de três turmas de 30 alunos cada no oitavo ano, ela escolheu uma das três turmas para a atividade.

Como a sequência de atividades era extracurricular escolhemos a turma 82, pois era a que já tinha tido contato com todos os conteúdos demandados pelo plano anual de Ensino de Matemática da escola. As outras duas turmas, 81 e 83, ainda estavam em processo de estudo dos conteúdos finais do ano, por isso a professora não conseguiu aplicar a sequência de atividades com as mesmas.

Destacamos que um dos grupos da turma escolhida já teve contato com uma das atividades dessa pesquisa, pois eles compõem os resultados do experimento piloto já realizado e que será apresentado nos capítulos seguintes. Apesar disso, o restante dos estudantes teve contato apenas com equações do primeiro e segundo graus. Além disso, todos os estudantes dessa turma possuíam *smartphones* para a realização das atividades.

Durante o experimento, a pesquisadora dispôs os estudantes em grupos e os mesmos decidiram quantos integrantes iria compor cada grupo. Eles escolheram seus parceiros para a realização do trabalho. Ao final do experimento, escolhemos dois grupos para a análise dos dados. Um formado por dois estudantes e o outro por três componentes. Selecionamos esses dois grupos, pois os mesmos apresentaram discussões enriquecedoras durante as atividades, isso chamou a atenção da pesquisadora na realização da sequência. Além disso, como era uma sequência de atividades extracurricular alguns grupos não se interessaram em participar da pesquisa, acarretando na não finalização das atividades.

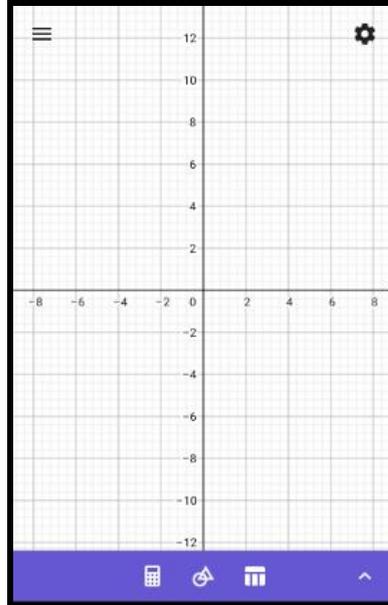
### **3.3 Materiais e Métodos**

Com o objetivo de responder a pergunta central dessa pesquisa visamos proporcionar e estimular os sujeitos no trabalho coletivo e utilização de seus *smartphones* julgamos necessária a escolha adequada dos métodos de produção dos dados. Elaboramos uma sequência de atividades que envolveu a introdução às funções, a função afim e a função quadrática para ir ao encontro das aplicações das equações de primeiro e segundo grau que os estudantes já estudaram. Contextualizar os estudantes do 8º ano dessa escola com as funções foi a motivação que nos fez pensar e construir uma sequência de atividades que conseguisse explorar e promover ambientes de diálogos e reflexões sobre matemática entre os pares.

As atividades elaboradas visaram promover o diálogo entre os pares para que as ações cooperativas pudessem emergir juntamente a utilização do aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator* atuando como um meio para que esses diálogos e reflexões sobre matemática pudessem acontecer. Esse aplicativo é gratuito e disponível para *download* na loja de

aplicativos dos *smartphones*. Apresentamos na figura 1 o layout do aplicativo executado na tela do *smartphone*.

Figura 1: Layout do aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator*



Fonte: Arquivo pessoal.

Como a ideia foi promover em sala de aula o momento em que os estudantes através do trabalho coletivo pudessem ir em busca dos conceitos matemáticos, por meio dessas atividades, ações cooperativas entre os sujeitos, decidimos gravar os áudios das discussões entre os estudantes durante a execução da sequência. Esses áudios gravados foram transcritos na íntegra pela pesquisadora.

Utilizamos um *software* de reprodução de áudio e vídeo VLC que é gratuito e o *software* Word, criador de documentos de textos para a digitação das falas dos estudantes. A escolha do software de áudio mencionado se deu pois ele possui ferramentas de alterar a velocidade de reprodução dos áudios e isso auxiliou na hora da transcrição.

Após a aplicação do experimento essas transcrições formaram ao final da pesquisa os dados a serem analisados pela pesquisadora, sobre eles:

Os dados são simultaneamente as provas e as pistas. Coligidos cuidadosamente, servem como fatos inegáveis que protegem a escrita que possa ser feita de uma especulação não fundamentada. Os dados ligam-nos ao mundo empírico e, quando sistemática e rigorosamente recolhidos, ligam a investigação qualitativa a outras formas de ciência. Os dados incluem os elementos necessários para pensar de forma adequada e profunda acerca dos aspectos da vida que pretendemos explorar. (BOGDAN, BIKLEN, 1994, p. 149)

Em consonância aos autores, os dados produzidos são as notas de campo contendo anotações do professor mediador/investigador e áudios das aulas que foram analisados. Dois tipos de informações compõem as notas de campo, segundo Bogdan e Biklen (1994, p.150). Um é descritivo contendo descrições de imagens por escritos, pessoas, ações e conversas. Todos esses dados são observados pelo professor mediador/ investigador. O outro aspecto dessas notas é de cunho reflexivo que inclui as opiniões do observador.

Além disso, o cronograma e a sequência de atividades realizadas estão explícitos a seguir. Elaboramos essas atividades de acordo com a metodologia adotada e cada uma das atividades buscou promover discussões, as quais podem gerar reflexões por parte dos estudantes.

Quadro 1: Cronograma de atividades

<b>Data da atividade</b>	<b>Duração</b>	<b>Atividade</b>
27 e 28 de novembro de 2019	2 períodos- 100 minutos	Introdução às funções
29 de novembro e 03 de dezembro de 2019	2 períodos- 100 minutos	Função afim
04, 05 de dezembro de 2019	4 períodos- 200 minutos	Função quadrática

Fonte: Arquivo pessoal.

Como exposto na tabela acima, as atividades foram divididas e exploradas pelos sujeitos da pesquisa na seguinte ordem: 1º Introdução às funções, 2º Função Afim e 3º Função Quadrática. Na atividade Introdução às Funções, por meio de análises, construções de gráficos e tabelas os sujeitos podem explorar os conceitos de taxa de variação, variáveis (independente e dependente), grandezas e função. Os estudantes também utilizaram o aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator* para realizarem a construção de um gráfico em uma das atividades. Problemas e exploração gráfica foram explanados nas atividades de Função Afim e Quadrática, nessas atividades os estudantes utilizaram o aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator* na experimentação sobre os papéis dos coeficientes das funções afim e quadrática e encontro dos zeros das funções.

No decorrer da resolução das atividades, alguns registros foram produzidos pelos sujeitos da pesquisa. Os cálculos foram feitos em papel e os diálogos foram gravados nos seus *smartphones*. Após o término de toda a sequência, por meio da plataforma Google Drive, os estudantes compartilharam esses áudios com a professora. A sequência de atividades realizada pelos estudantes está disponível integralmente no apêndice D.

## **4 ANÁLISES DOS EXPERIMENTOS**

Apresentamos nesse capítulo as análises dos dados produzidos pelos estudantes envolvidos na realização de dois experimentos da pesquisa. Exibimos os resultados da sequência de atividades aplicada relacionada com os aportes teóricos presentes e discutidos anteriormente nessa pesquisa: a influência da tecnologia móvel no ensino de funções e o trabalho coletivo sob o conceito de cooperação de Piaget (1973). Pretendemos debater sobre como as atividades que promoveram a cooperação entre os estudantes fazendo uso das tecnologias digitais contribuíram para que os mesmos trilhassem uma construção do conhecimento matemático gradativo, desenvolvendo suas ações de reflexão. Apresentaremos os resultados do experimento piloto da atividade Introdução às funções que ocorreu antes da qualificação dessa dissertação e após o experimento final que ocorreu pós qualificação com alterações e sugestões da banca. Escolhemos essa forma de apresentação para a comparação e análise das mudanças e semelhanças da sequência de atividades aplicadas.

### **4.1 O experimento piloto**

O experimento piloto foi realizado por três estudantes da turma 82 do oitavo ano, eles formam o grupo 2 que realizou as atividades de Função Afim e Função Quadrática do experimento final. O grupo realizou a primeira atividade, sobre introdução às funções. Apresentaremos as transcrições juntamente às análises dos áudios do grupo nesta seção.

Os áudios produzidos durante o experimento didático constituíram uma fonte para análise do ocorrido em sala de aula. A partir da escuta e das análises feitas foi possível inferir sobre a importância de oportunizar em sala de aula momentos para o compartilhamento de ideias e construção de conhecimentos pelos estudantes, necessários ao atual contexto de sociedade o qual todos estão inseridos.

Para localizar o leitor quanto aos destaques feitos nos trechos transcritos, ao longo da exposição por meio de quadros definimos uma identificação dos trechos em análise que estarão em negrito e identificados com a legenda: [COOP] para cooperação, utilizamos essa distinção para localizar o leitor nos trechos em que identificamos indícios de ações cooperativas. Na primeira atividade sobre introdução às funções não encontramos indícios nos diálogos do grupo em que os estudantes utilizam seus dispositivos móveis para a resolução das atividades. Utilizamos as letras A, B e C para identificar e preservar as identidades dos sujeitos desta pesquisa.

Os diálogos expostos nos quadros a seguir expressam as resoluções da sequência de atividades dessa pesquisa. A mesma está presente integralmente no apêndice D.

Quadro 2: Início do diálogo do grupo. Atividade 1. Item (a).

A: Entre o período de janeiro até fevereiro de 2018, o que você pode afirmar sobre as informações fornecidas pelo gráfico, houve um crescimento do país? (responde) Na verdade não, né? Decaiu, né?

**B: É, eu acho que não, decaiu. [COOP]**

**C: Decaiu bastante. [COOP]**

**B: Decaiu. [COOP]**

(...)

**C: Sim, mas tipo, teve uma diminuição na expectativa para o desempenho do PIB quanto mais pro final do ano menor... [COOP]**

**A e B: Menor... [COOP]**

**A: expectativa. [COOP]**

**B: Sim. [COOP]**

**C: Foi piorando. [COOP]**

**A: Tá, entendi. [COOP]**

**B: Foi piorando. Por causa da greve dos caminhoneiros, também. [COOP]**

A: Acho que por várias...

**B: Por vários motivos, greve dos caminhoneiros, aí o preço do diesel. [COOP]**

A: Tá.

C: Podemos afirmar...

B: Acho que não houve crescimento.

A: Afirmer, que no início do ano havia mais expectativa do desempenho do PIB.

B: E não houve crescimento, né?

A: É, houve decadência.

C: Tá, acho que...

B: Deu.

Fonte: Dados do experimento piloto.

Nesse início de diálogo (Quadro 2) percebemos que os estudantes estão expondo suas primeiras conclusões ao ter uma primeira impressão sobre os dados expostos no gráfico. Nota-se que os mesmos estão demonstrando as mesmas opiniões ao concordarem que houve uma diminuição no crescimento do PIB em 2018. Durante o momento do diálogo, podemos observar o início de uma troca de proposições e perceber que os estudantes parecem estar em equilíbrio ao exporem suas opiniões, Piaget (1973) discorre que em ações cooperativas temos o equilíbrio das trocas de proposições.

Ainda no quadro 2, salientamos a presença da primeira condição para que exista o equilíbrio de troca que segundo Piaget (1973) só é possível em ações cooperativas. Os sujeitos A, B e C estão em uma mesma escala de valores: Por meio de uma linguagem os três sujeitos estabelecem suas hipóteses e argumentos para responder à primeira questão e utilizam suas proposições para assim entrarem em possível acordo dentro de sua discussão.

Quadro 3: Atividade 1. Item (b).

A: Como você denomina essa variação do gráfico que expressa a expectativa de crescimento do país?

A: ãh, essa variação no gráfico que expressa a expectativa de crescimento no país? (relendo

em voz alta com indícios na voz no pensamento da resposta da questão).

A: Tá bom.

**B: Sei lá, queda? [COOP]**

**A: Tá bom, calma gente. É um... É uma decadência, um... [COOP]**

**C: É. [COOP]**

**B: Decaimento, sei lá. [COOP]**

**C: É, decadência. [COOP]**

**A: Uma decadência de desempenho. [COOP]**

**C: É. [COOP]**

A: é isso será?

C: Hum.

A: Isso é matemática de...

B: É uma interpretação (C: Eu tô achando...) . Eu acho que interpretação, não é muito matemática, mas é interpretação. Sei lá.

A: Tá, eu botei uma decadência na expectativa.

B: É.

C: Tá.

A: Hum.

Fonte: Dados do experimento piloto

Em negrito (quadro 3), demarcamos o que entendemos como o início de uma resposta do estudante A seguido da concordância do estudante C para com o A. Visualizamos que nesse trecho há traços de uma cooperação com ações de correspondência e complementaridade, dialogando com as ideias de Piaget (1973) sobre as ações que emergem a cooperação. Sobre os equilíbrios de troca, identificamos a primeira condição como uma mesma escala de valores.

Quadro 4: Atividade 1. Item (c)

C: Você pode identificar os motivos que explicam este tipo de variação?

A: Ah, tá a gente (...) algumas coisas né. **Os EUA impõe sobre a taxa ao aço dando início a guerra comercial. [COOP]**

**C: Guerra comercial entre EUA e China, né? [COOP]**

**B: Greve dos caminhoneiros. [COOP]**

**A: Sim, greve dos caminhoneiros, ãh, o aumento no preço da gasolina e no diesel. [COOP]**

B: Mas, gente, to com uma dúvida.

**C: Instabilidade econômica pela campanha eleitoral. [COOP]**

**B: É, tudo tá aqui dentro. [COOP]**

A: É.

**B: Mas, tipo, uma coisa, na greve dos caminhoneiros não diminuiu o preço do diesel? [COOP]**

**A: Não, tava muito alto, aí eles fizeram a greve... [COOP]**

**C: e mesmo assim, se tu for olhar, na verdade, só diminuiu o preço do diesel, por que o da gasolina permaneceu (B: Aumentou) (pausa, mudança de opinião talvez?),**

**aumentou e mesmo depois que eles conseguiram (A: E voltou, é)... [COOP]**  
**A: E voltou pro mesmo preço, então, tipo... [COOP]**  
**B: Não mudou nada. [COOP]**  
**A: A gente piorou muito pra dizer que melhorou, a gente voltou pra onde tava. [COOP]**  
**B: é. [COOP]**  
A: Tá, então, uma guerra comercial... (escrevendo)  
A: Tá, guerra comercial entre EUA e China... (escrevendo)  
A: Vamos colocar instabilidade política, alguma coisa assim?  
C e B: Uhum.  
A: Tá.  
B: Tá, vamos lá.  
A: Eu coloquei guerra comercial entre EUA e China e greve dos caminhoneiros e instabilidade política, aumento da gasolina.  
B: Taxas dos... Não teve taxas dos EUA também?  
A: Acho que sim.  
C: É que foi a guerra.  
A: Por causa da guerra.  
B: É.

Fonte: Dados do experimento piloto

No item 3 da atividade 1, os estudantes expressaram suas opiniões sobre a variação do preço da gasolina. A resposta dos sujeitos exposta no quadro 4 mostra seus argumentos e seus conhecimentos a nível mundial ao mencionarem sobre uma guerra comercial entre duas grandes potências. Ou seja, eles parecem ter já construído esse conhecimento e o relacionaram com o gráfico analisado. Identificamos a primeira e a segunda condição dos equilíbrios de troca que Piaget (1973) menciona, mesma escala de valores entre os sujeitos e conservação de proposições em os estudantes concordarem que o PIB nacional analisado no gráfico exposto na questão está baixo.

Quadro 5:Atividade 2. Análise do gráfico.

A: Tá, ó. O gráfico abaixo expressa o preço médio do litro da gasolina e do diesel nos postos de abastecimento ao longo do ano de 2018.  
B: Tá.  
**C: Nossa, caro pra caramba. [COOP]**  
**B: Meu deus. [COOP]**  
**C: Socorro. [COOP]**  
**A: Nossa, muito caro. [COOP]**  
**B: Muito caro. Preço médio por litro nos postos...2018. É tem posto que tava cobrando 7 reais o litro. [COOP]**  
**A: É, mas esse tipo, sei lá, em Fernando de Noronha. [COOP]**  
**B: É, tipo assim ó, no fim do mundo. 90 reais o litro, tipo isso. É, lá no deserto do Atacama na Argentina é tipo 9 reais o litro da gasolina, tipo. Custa teu rim, tu paga tudo. [COOP]**

**A: Aqui o auge foi 4,71. [COOP]**  
**B: Mínima do ano. [COOP]**  
**A: 4,75. [COOP]**  
**B: O auge, o preço mais alto foi 4,75. Tá. [COOP]**

Fonte: Dados do experimento piloto

Piaget (1973) menciona as três condições para identificação dos equilíbrios de troca, mesma escala de valores, conservação de proposições e atualização dos valores virtuais que causa a reversibilidade e a reciprocidade entre as trocas dos sujeitos. No quadro 5, os estudantes comentam sobre as informações fornecidas pelo gráfico antes de responderem às questões. Nos diálogos destacados, percebe-se como o conhecimento prévio de um determinado assunto interliga-se com a análise do gráfico (primeira condição). Ao mesmo tempo em que os estudantes se impressionam com o preço da gasolina e diesel, o estudante B, por exemplo, citou um local, em que o preço é exorbitante, segundo ele. Esses diálogos demonstram como os estudantes relacionam dados gráficos com situações cotidianas, como exemplificadas pelo quadro 4, além disso mostrou a concordância entre os três estudantes após exemplificados suas proposições sobre o preço da gasolina e diesel (segunda condição).

Quadro 6: Atividade 2. Item (a).

A: Analisando o gráfico acima, o que você pode concluir sobre a variação do mesmo?  
**A: tá, tipo, sempre em maio sobe tudo aqui, não sei por quê. [COOP]**  
**B: Em maio sobe tudo aqui... [COOP]**  
**C: Não, é que ta tendo muito, até subiu, teve um grande, sempre que teve um aumento no preço do petróleo, né. [COOP]**  
**A: E do dólar... [COOP]**  
**B: Dólar atinge 4,18. [COOP]**  
**A: Tipo, ó. [COOP]**  
**B: Ó, quando o dólar atingiu também... [COOP]**  
**C: É, mas diminuiu. [COOP]**  
**B: Quando o dólar... [COOP]**  
**C: Quando o dólar atingiu 4,19, baixou. [COOP]**  
**B: Baixou. Tá. [COOP]**  
A: Mas é o recorde histórico, porque tá muito caro. Não falam disso. Tá, barril de petróleo bate 75 dólares pela primeira vez em três anos.  
C: Aí começou a subir aí vem o inverno... É tem sido isso, o aumento do petróleo.

Fonte: Dados do experimento piloto

No trecho grifado (quadro 6) destacamos uma discussão entre os três estudantes. Presenciamos a partilha de ideias e opiniões/posições para avançar na compreensão da atividade. Sobre esse tipo de ação, Silva e Pinto (2019) consideram que atividades feitas em conjunto e com o compartilhamento de ideias além de ser benéfico em termos de uma formação plural para o grupo contribui também na formação individual do sujeito.

Quadro 7: Atividade 2. Item (a).

A: Tá, o que a gente pode concluir sobre a variação do mesmo? Que quando aumenta, tipo,...

B: Ah (mostrando entusiasmo na resposta), que quando aumenta a procura por petróleo, o petróleo (**C: Quando diminui o petróleo...**) [COOP]. Quando diminui a quantidade de petróleo, aumenta...é a lei da oferta e da procura.

A: Tá, quando... (escrevendo).

**C: Ah se tu for olhar, isso vai acontecer cada vez com mais frequência, por que daqui a pouco o petróleo não vai ter mais né.** [COOP]

**A: É, não é uma fonte renovável, não né?** [COOP]

**B e C: Não.** [COOP]

**B: Petróleo não é renovável.** [COOP]

**A: É, então, acabou, acabou.** [COOP]

**B: Não, um dia vai ser renovável, um dia nós vamos morrer, os corpos que tão ali no cemitério vão...**[COOP]

**A: Ah, mas demora...** [COOP]

A: Mas tipo....

B: Vão, vai demorar um milhão de anos..

A: São mil anos.

A: São mil anos.

B:É são mais de mil anos. É vai ser...quando os nossos tataratataratara netos tiverem aqui vai ter petróleo renovável então tipo...

C: Se eles tiverem aqui ainda.

A: A gente não vai mais usar petróleo, com certeza. A gente vai usar sei lá...

B: Tipo, usar a vida.

A: A mente.

B: A mente, ó.

A: Carregue meu carro.

B: Vai carro, vai carro.

Fonte: Dados do experimento piloto.

No quadro 7, no primeiro trecho grifado, identificamos os dois conceitos presentes nesse diálogo. Ao mesmo tempo em que o estudante B está formulando uma resposta sobre a variação do gráfico, o estudante C contribui com sua resposta para complementar a resposta de B. Nesse instante percebemos uma das características da cooperação de Piaget (1973) em que quando há cooperação entre os sujeitos, ocorra também concomitantemente um movimento de complementaridade.

A partir da fala: “C: Ah se tu for olhar, isso vai acontecer cada vez com mais frequência, por que daqui a pouco o petróleo não vai ter mais né. ”, o estudante C contribui com o fato de que o petróleo um dia irá acabar, em seguida, o estudante A complementa que o petróleo é um combustível fóssil não renovável. Seguindo o mesmo assunto da discussão, o estudante B complementa ainda mais, refletindo que um dia o petróleo poderá ser renovável.

Novamente, há índicos de complementaridade com reflexões as quais é discutido nas aulas de matemática assuntos que contribuem uma formação global e plural dos sujeitos.

Quadro 8: Atividade 2. Item (b).

A: Tá, ã, em qual, quais períodos houve decréscimo no preço da gasolina e do diesel?  
**A: No início do ano. Não, no início do ano, não. [COOP]**  
**C: Que houve decréscimo, ãh, ou ficou no dólar, atingiu 4,19 no novo recorde começou a decrescer foi naquele período depois que o Bolsonaro foi eleito. [COOP]**  
**B e A: É. [COOP]**  
**B: Bolsonaro eleito presidente. [COOP]**  
**A: E o dólar atingindo 4,19. Só não entendi porquê que esse dólar tá mais caro, a gasolina tá mais barata, não faz nenhum sentido né. [COOP]**  
**B: Por que eles vendem pros EUA, eu acho. E aí o dólar vem mais caro e aí eles lucram mais. [COOP]**  
**A: Tu acha? [COOP]**  
**B: Eu a...Sei lá eu tô tentando pensar isso. (A: É, pode ser) Tipo, eles vendem (A: tem que ter uma...) tipo a Petrobras vende pros EUA, não, mas eu acho que isso não faz muito sentido. Não, é que os EUA não tem muito petróleo, então, provavelmente, alguém vende pra lá, tipo sei lá, porque que eles querem a Venezuela? Porque na Venezuela tem petróleo. [COOP]**  
**C: Isso é verdade. É, faz sentido. [COOP]**  
**A: Faz sentido. [COOP]**  
 B: Tá, então tipo eu acho que o... É.  
 A: Quando o dólar...(escrevendo)

Fonte: Dados do experimento piloto.

No quadro 8 percebemos o início da discussão entre os estudantes sobre o decréscimo do preço da gasolina e diesel. Nesse momento, pela análise gráfica, os estudantes tentam convergir para um consenso sobre a causa do decréscimo. Temos trocas de proposições entre A, B e C. Então, no trecho grifado iniciando na fala de: “B: Eu a...Sei lá eu tô tentando pensar isso. (A: É, pode ser) Tipo, eles vendem (A: tem que ter uma...) tipo a Petrobras vende pros EUA, não, mas eu acho que isso não faz muito sentido. Não, é que os EUA não tem muito petróleo, então, provavelmente, alguém vende pra lá, tipo sei lá, porque que eles querem a Venezuela? Porque na Venezuela tem petróleo. ”, o estudante B reflete sobre as exportações de petróleo para justificar o decréscimo no preço da gasolina e diesel.

Piaget (1973) menciona que as trocas de equilíbrio ocorrem em ações cooperativas. As ações dos sujeitos no quadro 8 explanadas acima mostram como ocorreram essas trocas de proposições entre os três sujeitos. A primeira condição de mesma escala de valores entre os estudantes é constatada, assim como a segunda condição de conservação de proposições.

Quadro 9: Atividade 2. Item (c).

C: Tá, maior variação negativa?

**C: Eu acho que foi a do... a maior variação, eu acho que foi a do início da greve dos caminhoneiros, por que mesmo a máxima do ano tendo a si, a variação não foi tão grande, tão ruim quanto a da greve, né? [COOP]**

**A: É, tipo aqui foi aumentando, mas tipo, foi aumentando aos poucos, aqui tipo tava 4,2 e subiu pra 4,6 do nada, isso aumenta muito né. [COOP]**

**B: É. Tá. [COOP]**

C: acho que essa e qual foi a menor?

**A: Eu acredito que quando o dólar atinge R\$4,19, por que, tipo, o diesel diminui muito e a gasolina diminui tipo, vai diminuindo. A partir daí, ela diminui até chegar... [COOP]**

**B: Ou pode ser o do Bolsonaro, não? [COOP]**

**C: É, mas. Pode ser também, pode ser os dois. Mas eu acho mais fácil se a gente for olhar pelo diesel é o do dólar. [COOP]**

**A: Claramente, uma linha tipo reta aqui. [COOP]**

Fonte: Dados do experimento piloto

As ações dos sujeitos expostas aqui estão concomitantes às ações cooperativas de Piaget (1973). Observamos as duas condições dos equilíbrios de troca, correspondência e complementaridade entre as proposições dos estudantes.

Nos trechos grifados, no quadro 9, destacamos a interação entre os estudantes em que eles argumentam com dados expostos no gráfico sobre a maior variação negativa. Analisando as falas dos estudantes C e A, percebemos um exemplo e manifestação de complementaridade, característica da cooperação, assim que o estudante C argumenta com uma resposta, o A complementa com o dado exposto no gráfico. No final do diálogo exposto entre os estudantes ainda no quadro 9, também se nota um início de argumento matemático. Quando o estudante C e A discutem sobre a inclinação da reta exposta no gráfico.

Quadro 10: Atividade 2. Item (d).

**B: Agora complicou, expresse coordenadas cartesianas...**

**B: Eu acho que eu ainda sei coordenadas cartesianas. Vamos ver...**

**A: É tipo quatro maio, quatro junho, é isso?**

**B: É.**

**A: Por que tem uns números aqui do lado.**

**C: É. Eu acho que. É pode ser.**

**A: Tá, deixa eu ver. Expresse em coordenadas cartesianas o ponto indicado pela flecha. O ponto indicado pela flecha é o 4,614 que é exatamente quando o governo anuncia subsídio do diesel.**

**B: Uhum.**

**A: Isso é exatamente quando inicia junho no ponto, tipo, seria, sei lá 4,7.**

**B: dia 28 do 5 de junho.**

**A: Dia 28 do cinco de junho, só que a gente não quer a data né.**

**C: As coordenadas.**

**A: É, então é tipo quando começa junho.**

C: Tá, daria metade, vamos dizer que da mais ou menos a metade de 4 e 5 aqui.  
 A: É da tipo. (pausa na gravação)  
 A: Tá, então seria 4,6 ãhn, no mês de junho.  
 C: Tá, junho e 4,614 e daí aconteceria.  
 A: ãhn, tá.  
 C: Seria aqui, no mais 4.  
 C: Você pode contar, não necessariamente...

Fonte: Dados do experimento piloto

Os trechos do quadro 10, expressam o diálogo entre os estudantes sobre o que seriam as coordenadas cartesianas de um ponto destacado no gráfico. O objetivo dessa questão era os estudantes refletirem sobre as variáveis independentes e dependentes em um gráfico. Porém, no diálogo expresso não identificamos, especificamente, essa discussão. Mas no final do diálogo entre o grupo o estudante C indica a sua resposta: “Tá, junho e 4,614 e daí aconteceria”. Como os estudantes manifestaram e concordaram com os argumentos um do outro, não identificamos elementos para possíveis ações cooperativas. Consideramos que as trocas entre os sujeitos não se enquadram nas condições de Piaget (1973) das trocas de equilíbrio.

Quadro 11: Atividade 3.

**A: É, a cada 15 minutos, adiciona 25. É basicamente isso. [COOP]**  
**B: É. É tipo, quando aumenta 15 aqui, aumenta 25 do outro lado, é isso? [COOP]**  
**A: Ou seja, ele tá, 25 por 15 minutos. Por que ai a gente pode multiplicar isso pra fazer por hora. [COOP]**  
**A: é uma regra de três, a cada 15 minutos... [COOP]**  
**A: Isso, tá, então, a cada 15 minutos ele anda 25km e 60 minutos ele vai andar x, enfim... [COOP]**  
 B: Você consegue dizer qual é a velocidade média do veículo, da média por minuto do veículo?  
**A: Tá, então 15 minutos ele anda 25, em um minuto ele vai andar x, né? Dai vai ficar 25 igual a 15x ai divide 25 por 15... [COOP]**  
**B: Ele anda 25, então em 1 minuto ele vai andar x... [COOP]**  
**A: Sim, é isso, que vai ser 25 dividido por 15. [COOP]**  
**B: Alguém faz 25 dividido por 15. Não, mas calma. [COOP]**  
**B: em 15 minutos ele andou 25... [COOP]**  
**A: Vai dar 1,6. [COOP]**  
**C: 1,6? [COOP]**  
**A: Não tipo em 1 hora ele anda 100km... [COOP]**  
**B: Tá então se em uma hora ele anda 100km... [COOP]**  
**A: Então ele ta 100km por hora... [COOP]**  
 B: Sim, se uma hora ele andou 100km, ele tá a 100km por hora.  
 A: Sim, então a média dele por hora é 100km, ou seja, que a média dele por minuto...  
 B: É 100 dividido por 60.

A: Sim, mas é...  
 B: Divide 100 por 60..eu acho que vai dar certo. Eu acho que a gente chegou num lugar que a gente não entendeu como...  
 A: então, de novo deu 1,666666...  
 B: Então, ele tá andando 1,666...  
 A: Ele anda, ele anda 1,... ele anda 1km e 600 metros por minuto.  
 B: É, 1 km e 600 metros por minuto. É que faz sentido o que tu disse, só que tem que dividir por 6, não adianta, tudo que tu tiver que fazer aqui, tem que dividir por 60.  
 A: Tá, então a velocidade média do veículo por minuto é...é 1,6 km/minuto...  
 B: 1,6 metro dividido por minuto. Não, 1,6 km dividido por minuto.  
 A: E, e 100km (escrevendo) por hora. É assim que né, faz a... a razão. Alguém sabe? É assim né?

Fonte: Dados do experimento piloto

O objetivo da atividade 3 era os estudantes calculassem a velocidade média de um veículo fictício em movimento ao explorar e interpretar os dados de uma tabela apresentada. Em amarelo, no quadro 11, grifamos uma parte do diálogo do grupo. Eles debatem sobre como encontrar o valor da velocidade média do veículo, e no final se dão conta que em uma hora, o veículo percorre 100 quilômetros, logo ele transita a 100 km/h. Percebemos que o diálogo entre os componentes favoreceu a construção da solução para a atividade, identificamos exemplos de ações cooperativas entre os participantes.

Por meio da exposição de seus argumentos A e B demonstram em suas falas concordância ao exporem seu entendimento da variação da posição do objeto da atividade. Piaget (1973) comenta que em ações cooperativas os sujeitos podem demonstrar correspondência em suas proposições.

Quadro 12: Atividade 4. Variáveis independente e dependente.

B: Grandeza é uma equação... pelo amor de Deus...  
 A: tá, eu sei variável dependente e variável independente.  
 B: Tá, isso a gente sabe.  
 A: Tá, então vamos escrever... ãhn, variável dependente é...  
**B: É a que pode mudar... [COOP]**  
**A: É a que depende da... [COOP]**  
**B: Variável independente... [COOP]**  
**A: é que vai mudando conforme o... [COOP]**  
**B: A coordenada cartesiana... [COOP]**  
**A: É conforme a variável independente, ele muda né. [COOP]**  
**B: Não, acho que tipo ela varia, mas tipo junho vai ser sempre junho... [COOP]**  
**A: Sim, sim, eu sei... [COOP]**  
**B: E aquela ali vai variar. Então uma varia e a outra não. [COOP]**  
**C: É a que sofre variações devido a outras variáveis... [COOP]**  
**B: E ela depende da independente. [COOP]**

**A: É. [COOP]**  
**A: Tá, variável independente? [COOP]**  
**B: É a que não muda nunca. [COOP]**  
**A: É a variável que não pode ser mudada. [COOP]**

Fonte: Dados do experimento piloto

O grupo decidiu iniciar respondendo o que sabiam sobre variáveis independente e dependente. No trecho grifado no quadro 12, percebemos que os estudantes entraram em consenso sobre o conceito de variáveis. Podem-se identificar elementos de cooperação quando identificamos ações de correspondência em diálogos. Nesse trecho os estudantes demonstram concordar entre si com as afirmações sobre as variáveis entre si. À medida que A, B e C vão expondo seus argumentos sobre o que entendem sobre as variáveis, percebemos as ações de complementaridade. Piaget (1973) comenta que a partir desses tipos de ações os sujeitos podem liberar-se de seu egocentrismo intelectual para ir em busca em conjunto do conhecimento.

Quadro 13: Atividade 4. Função.

**A: Tá, função...**  
**B: O que a coisa faz. [COOP]**  
**A: A função de cada um, eu acho. É isso? [COOP]**  
**B: É tipo, a função do tomate é ser comido, é tipo isso. [COOP]**  
**C: Não, é pra falar o que é o conceito de função. [COOP]**  
**A: É falar o conceito de função?**  
**C: É. A proposta é investigar... [COOP]**  
**A: Função é a função, é... é o que cada termo... [COOP]**  
**C: Faz? [COOP]**  
**A: É o que cada termo é responsável. [COOP]**  
**C: É... [COOP]**  
**A: A gente tá falando em função em relação a esses conceitos, né? Porque se for a função em geral, é tipo, o que cada pessoa o que cada coisa... [COOP]**

Fonte: Dados do experimento piloto

Sobre o conceito de função, identificamos dúvidas perante os estudantes, as quais estão mostradas no quadro 13. No primeiro trecho grifado constatamos que o estudante B relaciona o significado de função com o que cada objeto ou sujeito é responsável por fazer. Já o estudante C discorda e com as contribuições do estudante A, concluem que função é que o cada termo é responsável. Por fim, o estudante A relaciona função às atividades estudadas, mas o grupo não explicita diretamente o conceito de função. Entendemos que há uma

tentativa de complementaridade no sentido de convergir à construção de uma ideia, a qual é solicitada pela atividade, mas que a mesma não demonstra totalidade ou aderência dos participantes.

Quadro 14: Atividade 4. Grandezas.

<p>B: Tá, agora a tal da grandeza...</p> <p>C: A gente aprendeu isso já. Não é a razão?</p> <p><b>A: É, tipo a razão é aquele negocinho que tem a barra que é tipo a relação entre duas grandezas. [COOP]</b></p> <p><b>C: Isso. [COOP]</b></p> <p><b>A: As grandezas... tipo densidade demográfica é uma razão entre pessoas.... [COOP]</b></p> <p><b>B: Entre um número e outro é uma razão. A grandeza é uma razão. [COOP]</b></p> <p><b>A: A grandeza não é uma razão. A grandeza... [COOP]</b></p> <p><b>B: É uma razão. [COOP]</b></p> <p><b>A: A grandeza não é uma razão, não, tipo, habitantes por km, habitantes é uma grandeza e km é outra grandeza, eu acho, e aí a razão é a razão entre as duas grandezas. [COOP]</b></p> <p><b>B: É quantidade, a grandeza é uma quantidade. [COOP]</b></p>
---

Fonte: Dados do experimento piloto

No quadro 14, percebemos as discussões entre os estudantes A e B. Enquanto o B afirma que grandeza é uma razão, o estudante A discorda e afirma que a razão é uma relação entre duas grandezas. Identificamos operações de complementaridade nesse diálogo e argumentações do estudante A para o B apresentando exemplos de grandezas. Por fim, o estudante B expõe o que entendeu sobre grandezas. Nesse diálogo, novamente nos deparamos com exemplos de falas que convergem para uma complementaridade, característica da cooperação entre sujeitos segundo o referencial teórico de Piaget.

O experimento aqui mostrado e analisado constitui-se num primeiro exercício de pesquisa. A proposta de pesquisa busca dialogar com as ideias piagetianas sobre a construção de conhecimentos por meio da construção e reflexão das ideias construídas a partir da relação com os objetos de estudo. Para Piaget (1973) as três condições que caracterizam as trocas de equilíbrio só ocorrem em ações cooperativas. Identificamos duas dessas condições ao longo da análise dos quadros expostos nessa seção. Além disso complementaridade e correspondência foram duas das ações cooperativas identificadas nos diálogos.

A terceira característica, a de reciprocidade, para Piaget (1973), tem a ver com o sujeito concordar com pontos de vistas diferentes, relacionamos essa concordância em o sujeito respeitar e ouvir os argumentos do outro. Nesse experimento, os sujeitos cooperam durante a resolução das atividades e demonstram ouvir, complementar, corresponder e até mesmo discordar com os argumentos um dos outros. Camargo e Becker (2012) referem-se a

metodologia da cooperação como essas ações do sujeito ouvir o ponto de vista do outro, assimilar e poder coordenar internamente para mudar ou manter seu próprio ponto de vista.

O experimento e as reflexões provenientes a partir de sua execução mostram ser possível a partir do diálogo entre os pares em sala de aula, conversar sobre matemática em contextos que não estejam necessariamente prontos e acabados. Com isso, entende-se que a análise exposta na presente seção cumpre com o objetivo de mostrar que o exercício de diálogo entre os pares converge para uma possível construção de conhecimentos, os quais são cada vez mais necessários, porém não suficientes, para se realizar uma leitura e interpretação do mundo que se está inserido.

## **4.2 Experimento final**

Apresentamos nessa seção os dados produzidos pelos estudantes nas três atividades que compõe a sequência didática desta pesquisa. Exibiremos os mesmos em três tópicos com sua análise relacionada aos aportes teóricos. Os três itens são: Introdução às funções; Função afim; Função quadrática. Nestas atividades temos participações de dois grupos: Grupo 1 com dois componentes e Grupo 2 com três componentes. Para nos referirmos ao grupo 1, identificaremos os estudantes como A1 e A2, para preservarmos suas identidades. O grupo 2 será identificado por A3, A4 e A5. Durante a resolução das atividades os integrantes A4 e A5 não aparecem em alguns diálogos, pois no dia os mesmos se ausentaram. Escolhemos os áudios do grupo 1 para a atividade Introdução às Funções, pois o grupo 2 já havia realizado a mesma exemplificada e analisada no experimento piloto dessa pesquisa. Os áudios do grupo 2 aparecem nas atividades de Função Afim e Quadrática, pois o grupo 1 não iniciou as mesmas.

Utilizaremos as legendas [COOP] para indícios de cooperação e [COOP + TDM] Cooperação e Tecnologia Digital Móvel para indícios de cooperação atuando com o aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator*.

### **4.2.1 Introdução às funções**

Esta foi a primeira atividade realizada pelos grupos. Vamos expor na íntegra os diálogos entre os estudantes do grupo 1 (A1 e A2). A atividade foi realizada durante uma aula de matemática e o grupo realizou as gravações em áudio no dispositivo móvel de A1. Os mesmos gravaram suas discussões quando resolviam as atividades e quando o tema dispersava para assuntos aleatórios no ambiente, os mesmos pausavam para depois retornar às gravações.

Nesse dia, a professora pesquisadora conseguiu mediar essas atividades com o grupo. Na sala havia um número reduzido de estudantes, em torno de 20, pois as atividades foram extracurriculares, como mencionado na metodologia dessa pesquisa.

Quadro 15: Introdução às funções. Atividade 1. Item (a).

A1: A expectativa do PIB, crescente ou decrescente?  
 A2 e A1: Decrescente.  
 Professora: O que é o PIB?  
 A1: PIB é o produto interno bruto.  
 Professora: Pra que serve o PIB do Brasil?  
**A1: Pra calcular... [COOP]**  
**A2: Pra calcular todos os ganhos... [COOP]**  
**A1: Todos os ganhos dentro do... [COOP]**  
**A2: De indústrias... [COOP]**  
**A1: De indústrias de tudo que é produzido no Brasil. [COOP]**  
**A2: É o lucro que o Brasil tem. [COOP]**  
**A1: É todo produto, todos os ganhos de todos os produtos. [COOP]**  
**A2: É, os bens que o Brasil ganhar. [COOP]**

Fonte: Dados do experimento final

Sobre a resposta do item (a) da atividade 1 A1 e A2 demonstram concordância e respondem que houve decréscimo no número do PIB (Produto Interno Bruto) do Brasil. No trecho grifado, no quadro 15, A1 e A2, a partir de uma pergunta da professora, discorrem sobre o significado de PIB do Brasil. Temos um início de troca de ideias que segundo Piaget (1973) podem se encaminhar para os equilíbrios de troca.

Quadro 16: Introdução às funções. Atividade 1. Item (b).

A2: Como você denomina essa variação do gráfico para essa expectativa do crescimento do país? Expectativa... denomina? A variação do gráfico.  
**A1: A variação? Como assim? [COOP]**  
**A2: Se decaiu, então não cresceu. Decréscimo. [COOP]**  
**A1: Bá, baixou bastante... [COOP]**  
**A2: Decréscimo, que decresce. Tem pré-disposição a decrescer mais. [COOP]**  
**Professora: Tá e a variação, essa decrescente, como que a gente pode chamar em matemática?**  
**A1: Decréscimo? [COOP]**  
**A2: Diminui? [COOP]**  
**Professora: Diminui... uma variação... [COOP]**  
**A1: Negativa. [COOP]**  
**A2: Ah, negativa. [COOP]**  
**Professora: Aham. [COOP]**

Fonte: Dados do experimento final

Para facilitar a análise dividimos os diálogos do quadro 16 em três quadros distintos, após cada quadro se apresenta a análise.

Quadro 17: Trecho 1.

**A1: A variação? Como assim? [COOP]**  
**A2: Se decaiu, então não cresceu. Decréscimo. [COOP]**  
**A1: Bá, baixou bastante... [COOP]**

Fonte: Dados do experimento final.

Observamos no quadro 17 que A1 e A2 discutem sobre o que seria variação. Com seu argumento, A2 explica com suas palavras o que é variação e A1, após ouvir a explicação, responde à pergunta do item (b) expressando sua opinião sobre o movimento da curva do gráfico. Temos indícios de cooperação. Segundo Piaget (1973) para existir a cooperação torna-se necessário ter diálogo, proposições para assim estabelecer equilíbrios de troca. Além disso, a reciprocidade está permeando o início dos diálogos dos estudantes.

Quadro 18: Trecho 2.

**A2: Decrescimento, que decresce. Tem pré-disposição a decrescer mais. [COOP]**

Fonte: Dados do experimento final.

Nesse trecho, o estudante expressa sua resposta à questão da variação do gráfico, mas também expõe uma análise futura ao mencionar sobre a pré-disposição a decrescer mais. Salientamos esse trecho para evidenciar que o estudante A2 estava expondo seu pensamento crítico e analítico da situação do gráfico. Elencamos como uma colaboração. Pois o estudante expõe seu pensamento, colabora com sua opinião sobre a análise do gráfico. Piaget (1973) menciona que em diálogos cooperativos existem as colaborações por meio de argumentos expostos por cada sujeito.

Quadro 19: Trecho 3.

**Professora: Tá e a variação, essa decrescente, como que a gente pode chamar em matemática?**

**A1: Decréscimo? [COOP]**

**A2: Diminui? [COOP]**

**Professora: Diminui... uma variação... [COOP]**

**A1: Negativa. [COOP]**

**A2: Ah, negativa. [COOP]**

**Professora: Aham.**

Fonte: Dados do experimento piloto.

Já no início do trecho grifado no quadro 19, a professora tenta auxiliar os estudantes a pensarem sobre como denominar a variação expressa por eles. Identificamos que os dois, A1 e A2, expõem o que pensam sobre a pergunta da professora e o que seria uma possível resposta. Percebemos também que a ação da professora não foi mostrar aos estudantes que a variação era negativa, foi a partir de um questionamento dela que os dois estudantes chegaram a essa conclusão. Treviso (2013) expõe que para Piaget dentro das relações sociais na sala de aula deve haver a secundarização da ação do professor, os estudantes que devem desempenhar o papel de querer aprender. Em consonância, Oliveira (2019) destaca que o professor atuando como mediador ou guia em sala de aula pode contribuir para a autonomia dos estudantes.

Quadro 20: Introdução às funções. Atividade 1. Item (c).

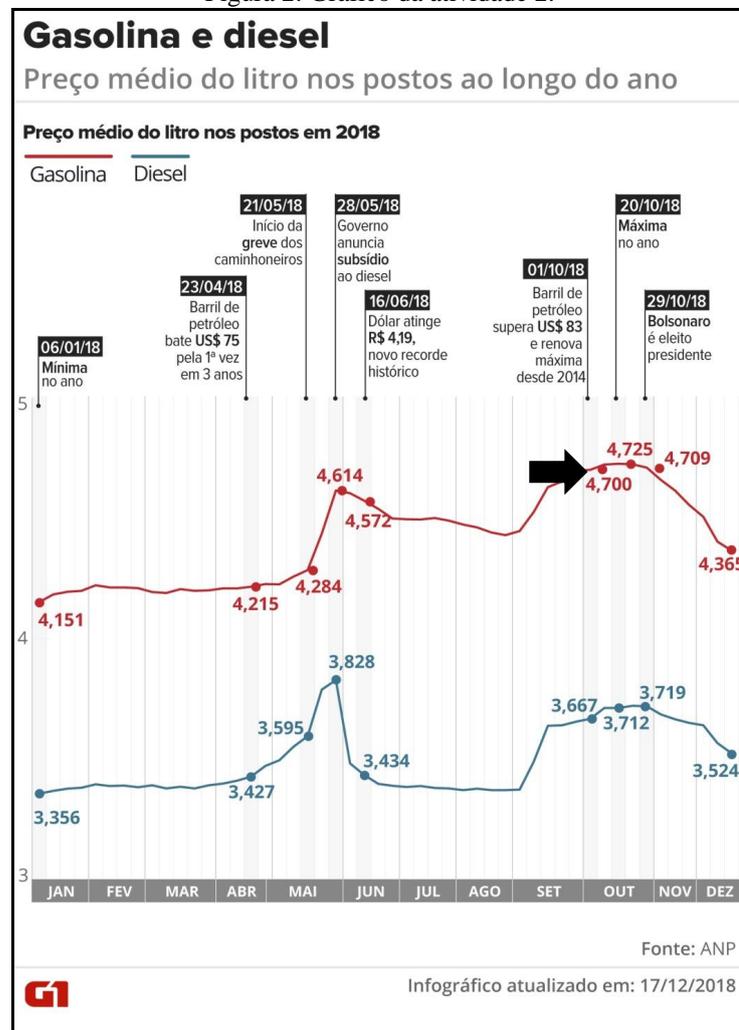
**A1: (c) você pode identificar os motivos que expliquem esse tipo de variação?**

A2: Sim, o início da greve dos caminhoneiros, falou no texto aqui.  
 A1: É aqui ó, a greve dos caminhoneiros, aumento do dólar. A chegada...  
 A2: O aumento do dólar aconteceu por causa da greve, né?  
 A1: Início da campanha eleitoral...

Fonte: Dados do experimento final.

No quadro 20, A2 e A1 estão expondo suas respostas ao item (c). Percebemos que os dois expressam a mesma conclusão sobre os motivos que acarretaram no decaimento do PIB. Assim que A1 comenta sobre o aumento do dólar, A2 complementa e pergunta se seria correto o aumento do dólar ser ocasionado pela greve dos caminhoneiros. Por fim esse questionamento não foi discutido pelos estudantes e os mesmos seguiram na realização das próximas atividades.

Figura 2: Gráfico da atividade 2.



Fonte: Adaptado do site: <https://g1.globo.com/retrospectiva/2018/noticia/2018/12/21/retrospectiva-2018-a-economia-brasileira-em-6-graficos.ghtml>

A segunda atividade era sobre o gráfico que expunha o preço da gasolina e do diesel. Na figura 2 trazemos o gráfico para situar melhor o leitor sobre as respostas e discussões dos sujeitos.

Quadro 21: Introdução às funções. Atividade 2. Item (a).

**A1: Tá, a gente parou na gasolina e diesel. Analisando o gráfico acima o que você pode concluir sobre o preço da gasolina e do diesel? Vamos ver.**

**A2: Mais ou menos a mesma coisa que tinha aparecido no último gráfico, então...**

**A1: Eles vão ter uma variação parecida.**

**A2: Que eles estavam andando tudo bem, até que teve a greve dos caminhoneiros, os dois subiram mais ou menos no mesmo nível, o diesel subiu mais, mas os dois subiram muito, depois os dois caíram drasticamente, aí seguiram até as eleições que aí subiram de novo e aí, logo em seguida, eles baixaram.**

**A1: Ah, e a relação de preço deles, normalmente, é muito parecida, porque eles vem da mesma origem, eles são do petróleo, então, tudo bem, pode ter casos de variação de preço mas aqui tá muito parecido, a subida e a descida deles, que é a mesma fonte.**

**Professora: Isso vocês concluem como? Por que que vocês concluem que a variação é a mesma da gasolina e do diesel?**

**A1: Porque se tu for olhar eles estão subindo de preço no mesmo momento, mesmo período, mesmo não exatamente, mas próximo, né, aí eles decaem de novo em um período parecido e depois sobem de novo.**

**Professora: Então por causa do período?**

**A1: É, é que a variação deles de subida e descida tá acontecendo no mesmo tempo. Se um tá subindo, o outro da subindo também.**

**Professora: Mas é a mesma taxa de variação?**

**A1: Não exatamente.**

**A2: O diesel subiu mais do que, na relação, o diesel subiu mais que a gasolina, pelo que deu pra perceber**

**A1: Subiu mais. E desceu mais também, porque olha...**

**A2: E desceu mais, sim, mais drasticamente.**

**A1: E aqui teve um pico também, que aqui não teve.**

**A2: Mais estreito.**

**A1: O diesel trabalhou mais com picos, se for parar pra pensar, não é um negócio mais uniforme.**

Fonte: Dados do experimento final.

Iremos separar os trechos grifados no quadro 21 em duas partes para exemplificar e analisar os conceitos presentes nesse diálogo entre os estudantes.

Quadro 22: Trecho 1.

**A1: Tá, a gente parou na gasolina e diesel. Analisando o gráfico acima o que você pode concluir sobre o preço da gasolina e do diesel? Vamos ver. [COOP]**

**A2: Mais ou menos a mesma coisa que tinha aparecido no último gráfico, então...**

**A1: Eles vão ter uma variação parecida. [COOP]**

**A2: Que eles estavam andando tudo bem, até que teve a greve dos caminhoneiros, os dois subiram mais ou menos no mesmo nível, o diesel subiu mais, mas os dois subiram muito, depois os dois caíram drasticamente, aí seguiram até as eleições que aí subiram de novo e aí, logo em seguida, eles baixaram. [COOP]**

Fonte: Dados do experimento final.

Apresentamos no quadro 22, o trecho grifado que expõe a resposta dos estudantes em acordo ao item (a) da atividade. Apenas pela análise gráfica o estudante A2 expõe sobre as diferentes variações presentes na curva do gráfico. A partir dessa resposta que as outras

discussões expostas no próximo quadro emergiram. Identificamos como cooperação esses trechos, pois a partir da proposição de A2 houve um começo de trocas entre os sujeitos.

Quadro 23: Trecho 2.

**A1: Ah, e a relação de preço deles, normalmente, é muito parecida, porque eles vêm da mesma origem, eles são do petróleo, então, tudo bem, pode ter casos de variação de preço mas aqui tá muito parecido, a subida e a descida deles, que é a mesma fonte. [COOP]**

**Professora: Isso vocês concluem como? Por que que vocês concluem que a variação é a mesma da gasolina e do diesel? [COOP]**

**A1: Porque se tu for olhar eles estão subindo de preço no mesmo momento, mesmo período, mesmo não exatamente, mas próximo, né, aí eles decaem de novo em um período parecido e depois sobem de novo. [COOP]**

**Professora: Então por causa do período? [COOP]**

**A1: É, é que a variação deles de subida e descida tá acontecendo no mesmo tempo. Se um tá subindo, o outro tá subindo também. [COOP]**

**Professora: Mas é a mesma taxa de variação? [COOP]**

**A1: Não exatamente. [COOP]**

**A2: O diesel subiu mais do que... na relação, o diesel subiu mais que a gasolina, pelo que deu pra perceber. [COOP]**

**A1: Subiu mais. E desceu mais também, porque olha... [COOP]**

**A2: E desceu mais, sim, mais drasticamente. [COOP]**

**A1: E aqui teve um pico também, que aqui não teve. [COOP]**

**A2: Mais estreito. [COOP]**

**A1: O diesel trabalhou mais com picos, se for parar pra pensar, não é um negócio mais uniforme. [COOP]**

Fonte: Dados do experimento final.

No quadro 23, o estudante A1 expõe que o fato da variação das duas curvas do gráfico ser parecida é porque os dois elementos são derivados da mesma origem. Isso demonstra uma reflexão do estudante que surge a partir da análise do gráfico. Piaget (1973) se refere ao ato reflexivo em Estudos Sociológicos, então exibimos nesse trecho um exercício intelectual a partir da troca entre os sujeitos.

Ainda no quadro 23, percebemos a ação da professora, pois a mesma começa a questionar os estudantes tentando fazer emergir mais reflexões intelectuais sobre a variação do gráfico. A partir desses questionamentos os estudantes aprofundam suas reflexões e expõem todos seus pensamentos no trecho grifado. Sobre essas ideias de A1 e A2 expostas no quadro, podemos perceber a correspondência das falas dos mesmos, Piaget (1973) estabelece que em equilíbrios de troca a correspondência entre proposições se faz presente, assim podemos considerar que esses dois sujeitos estão agindo cooperativamente.

Quadro 24: Introdução às funções. Atividade 2. Item (b).

**A2: Ahn.**

**A1: Mais por junho. [COOP]**

**A2: Acho que... [COOP]**

**A1: Por junho. [COOP]**

**A2: Por junho e aqui em dezembro. [COOP]**

**A1: É. [COOP]**

**A2: Dezembro e novembro. [COOP]**

**A1: A gasolina começou um pouco em maio, a gasolina começou um pouco mais em maio do que o diesel, mas ambos foram descendo em junho, tudo bem que o diesel teve uma queda drástica e a gasolina foi uma queda normal, eu acho, e aí subiram de novo em setembro, é desceram mais dezembro, novembro. Aí a gasolina desceu mais que o diesel aqui, ó. Então beleza. [COOP]**

Fonte: Dados do experimento final.

Exposto no quadro 24 estão os trechos grifados que expressam a complementaridade entre as falas dos estudantes. Piaget (1973) afirma que em atos de cooperação temos ações de complementaridade também. Além disso, o estudante A1 exemplificou sua resposta expondo, em sua última fala, a exploração da questão dada a eles.

Quadro 25: Introdução às funções. Atividade 2. Item (c).

**A2: Ah, então foi mais ou menos em maio e junho.**

**A1: Aqui ele se mantém normalmente reto, não tem muita, sobe um pouco, desce um pouco, entendeu? Mas por abril, maio...**

**A2: É, abril, maio.**

**A1: Até junho começa a subir, depois desce e aí volta ao normal aqui, mais ou menos, e sobe de novo em setembro, outubro se mantém nessa subida e novembro começa a descer de novo, novembro e dezembro.**

Fonte: Dados do experimento final.

No quadro 25, os estudantes expõem suas respostas e percebemos que a resposta de A1 no início do diálogo muda a análise feita por A2 e o mesmo concorda com A1. Piaget (1973) diz que em trocas cooperativas podem haver essas divergências e ao mesmo tempo um estudante pode complementar o outro e até mesmo fazer com que a proposição do outro seja alterada a partir de argumentos expostos.

Quadro 26: Introdução às funções. Atividade 2. Item (d).

A1: Mas é a maior variação dos dois juntos ou de...?

Professora: De cada um.

**A2: A gasolina ficou bem pior na época das eleições comparada ao diesel, porque se tu olhar aqui na linha, essa aqui subiu mais na época das eleições do que na época da greve. [COOP]**

**A1: Só que ela subiu num tempo menor, maior, desculpa. [COOP]**

**A2: E esse daqui na greve dos caminhoneiros ficou bem pior do que na época das eleições. [COOP]**

**A1: é, foi a diferença, tipo, o diesel se afetou mais com a greve dos caminhoneiros, do que com... mas deixa eu ler a pergunta de novo. A maior variação negativa, então. O sora, mas esse negativa se refere a gente pagando o preço da gasolina ou de descida do preço? [COOP]**

Professora: É a descida, porque o que decresce...

A1: É o negativo, né?

Professora: É o negativo. O que tu diminui, né?

A1: Então, maior variação negativa seria... bom, vamos ver o diesel.

**A2: Variação negativa os dois foram no começo do ano. Os dois estavam com o preço bem menor que no final, mesmo que no final já tenha decaído. [COOP]**

**A1: Ah, mas isso foi um estado negativo. A variação... acho que foi a maior queda foi da greve dos caminhoneiros que em maio subiu. [COOP]**

Professora: E da gasolina?

**A2: E da gasolina acho que foi, olha aqui, olha o tamanho da descida, aqui ele desceu pouquinho, mas aqui... [COOP]**

**A1: Aqui foi a maior subida da gasolina e ela desce quase, não é o mesmo nível, mas chegou um pouco perto do, do quando ela começou. [COOP]**

**Professora: Então vocês estão comparando pela curva. [COOP]**

**A2: Sim. [COOP]**

**A1: Porque se fosse só o estado seria o ponto mais negativo, mas a variação seria a maior variação do ponto alto que ela tava pro ponto baixo. [COOP]**

Fonte: Dados do experimento final.

Os trechos grifados no quadro 26 expressam a construção da resposta dos estudantes ao item de forma cooperativa. Os mesmos ao dialogarem entre si vão expondo argumentos como ideias, proposições para chegarem a uma conclusão. Piaget (1973) refere-se à terceira condição dos equilíbrios de troca em que a mesma causa a reversibilidade e a reciprocidade, uma significando que os sujeitos compreendem os pontos de vista um do outro e a outra que concordam.

Quadro 27: Introdução às funções. Atividade 2. Item (e).

**A1: Bom, a gente não tem o plano cartesiano aqui, mas dá pra ir pelo gráfico. Seria...**

Professora: Quem seria o x e quem seria o y?

**A2: x os meses e... [COOP]**

**A1: e y seria... [COOP]**

**A2: O preço. [COOP]**

**A1: O preço, é. [COOP]**

**Professora: Então no caso, 4,7 ele seria? [COOP]**

**A1: Seria outubro, tudo bem que outubro é um mês que tá com bastante tamanho aqui, não tem como saber especificamente em qual parte de outubro, mas seria outubro e provavelmente 4.6, 4.7. [COOP]**

Fonte: Dados do experimento final.

No quadro 27, os estudantes sem dificuldades expõem o que consideram como variável dependente (y) e variável independente (x), implicitamente, analisando o gráfico. Podemos dizer que houve complementaridade quando A2 complementa a fala de A1 de que y representa o preço exposto no gráfico.

Quadro 28: Introdução às funções. Atividade 2. Item (f).

**A1: Outubro, aqui seria outubro (Preço eixo x e mês eixo y). Seria o mesmo resultado, só muda a ordem. [COOP]**

**A2: Só que seria mais pra cá. [COOP]**

**A1: Não, porque é o mesmo tamanho, ah é um quadrado, não, não, é um retângulo. Não mudaria nada, na verdade, só a posição. Não, né? Pelo que eu vejo, não muda nada. [COOP]**

**A2: Não. [COOP]**

Fonte: Dados do experimento final.

No quadro 28, consideramos que houve diálogo entre os dois estudantes favorecendo a emergência de cooperação para que ao final os dois concordassem em suas respostas. Nessa

questão objetivamos que os mesmos observassem que se as coordenadas trocassem de lugar a interpretação dos dados seria diferente, os meses dependeriam do preço da gasolina, caso que acontece quando podemos inverter funções. Porém, os sujeitos, apesar de A1 dizer que mudariam as ordens de x e y, A2 e ele não exploraram mais sobre essa fala e concluem que a alternância das coordenadas não mudaria nada.

Quadro 29: Introdução às funções. Atividade 3. Item (a).

**A2: Tá, dividir um pelo o outro, não. Não sei, única coisa que eu consigo pensar. [COOP]**  
**Professora: Por que que divide um pelo outro?**  
**A1: Em física, a velocidade seria... [COOP]**  
**A2: Ah, sim, [COOP]**  
**A1: O tempo pela... distância ou distância pelo tempo. [COOP]**  
**Professora: Como que é medida a velocidade? A unidade de medida da velocidade?**  
**A1: A distância pelo tempo, quilômetros por hora. [COOP]**  
**Professora: Nesse caso vai ser por?**  
**A1: Quilômetros por minuto. É como calculam tiro, né? Eles calculam por minuto, né? [COOP]**  
**A2: É. Vamos fazer na calculadora. [COOP]**  
**A1: A gente pode usar? [COOP]**  
**Professora: Pode.**  
**A1: Tirando Estados Unidos, né? Estados Unidos é em metros. [COOP]**  
**Professora: É? Metros por segundo?**  
**A1: Metros não, milhas. [COOP]**  
**Professora: Isso.**  
**A2: 1,6667.**  
**A1: Quilômetros por minuto.**  
**Professora: Anotem aí. Deu, agora a gente vai fazer por hora.**  
**A2: Por hora? Então divide por 60? [COOP]**  
**Professora: O que divide por 60?**  
**A2: O resultado final. [COOP]**  
**A1: Não. Divide os minutos por 60. [COOP]**  
**A2: Ah tá, beleza. [COOP]**  
**A1: Aí tu já tem o resultado. Ah, não vai dar um número legal isso daí, sora. [COOP]**  
**Professora: 135... 2.25. Aí tu vai pegar os 2.25 horas?**  
**A1: 225 dividido por 2.25. [COOP]**  
**A2: 100 km/h. [COOP]**  
**A1: O cara conseguiu manter uma velocidade constante, hein? [COOP]**  
**A2: Desconta o arranco, porque o arranco teria que ir de 0 a 100. [COOP]**  
**A1: Sim, a média. Mas se ele tivesse... [COOP]**  
**A2: Só que ele teria que acelerar depois pra manter essa média. [COOP]**  
**A1: Se ele tivesse um carro elétrico, ele teria um tempo de aceleração menor. Porque tu já tem a tua rotação máxima direto. [COOP]**  
**A2: Realmente. [COOP]**

Fonte: Dados do experimento final.

No quadro 29, os estudantes não demonstraram dificuldades em calcular e encontrar a velocidade do móvel. Percebemos também que os dois mantêm o diálogo entre si, um complementando as falas do outro. Piaget (1973) estabelece que a cooperação é o operar em

comum, fato evidenciado no quadro. A partir da resolução da questão os estudantes conversaram sobre conceitos de física e trouxeram para discussão informações sobre unidades de medidas de outro país.

Quadro 30: Introdução às funções. Atividade 3. Item (b).

**A1: A gente não teria que botar todos os números? [COOP+TDM]**

**A2: É que nem fazer um plano cartesiano, colocar todos os pontinhos e ligar os pontos e aí fazer uma reta curvada. [COOP+TDM]**

**A1: Porque tu faria assim ó, por exemplo, ah com 45 minutos de viagem o cara chegou a 75 km em relação a cidade dele. Tá, vamos fazer o gráfico. [COOP+TDM]**

**A2: Como a gente marca? Tipo a gente tem a função de desenhar? [COOP+TDM]**

**Professora: Tem. Para marcar o ponto a gente coloca parênteses e bota as coordenadas.**

A2: Ah. Então vamos começar por 0.

A1: 0,0.

*Depois de colocados todos os pontos da tabela.*

A1: Terminamos, professora.

**Professora: Está pronto o gráfico?**

**A2: Não, falta colocar a linha. [COOP+TDM]**

**Professora: Como fazemos essa linha? No GeoGebra a gente vai utilizar a ferramenta reta.**

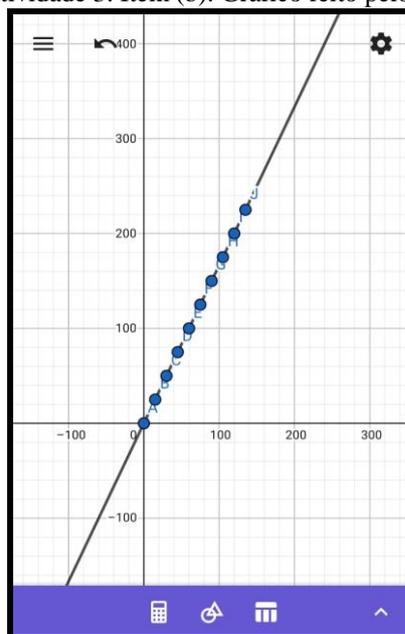
**A2: É infinito. [COOP+TDM]**

**A1: Pegou todos os pontos. [COOP+TDM]**

Fonte: Dados do experimento final.

Nos trechos grifados no quadro 30 percebemos que a tecnologia móvel se fez presente. Os estudantes, como foi sugerido na questão, utilizaram o aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator* para construírem o gráfico. Percebemos que professora os auxiliou indicando como poderiam plotar os pontos no aplicativo e o resultado obtido está expresso na figura 13.

Figura 3: Atividade 3. Item (b). Gráfico feito pelos estudantes.



Fonte: Dados do experimento piloto.

Como exposto no quadro 30, os estudantes mantêm o diálogo para resolverem e construir o gráfico. No final do diálogo percebemos uma análise do estudante A2 que menciona que a figura feita no aplicativo é infinita. Porém não percebemos análises acentuadas sobre o assunto. Sobre as características da cooperação presentes nos trechos grifados, A1 e A2 estão realizando trocas de proposições sobre a plotagem dos pontos no aplicativo. Essas trocas possuem as condições de Piaget (1973) das trocas de equilíbrio: mesma escala de valores e conservação das proposições com reciprocidade de trocas. Bairral (2017) discorre sobre o uso dos dispositivos móveis auxiliar os sujeitos em criar novas descobertas e aprendizagens além de dinamizar o ensino. No quadro 30 presenciamos que tecnologia móvel foi uma mediadora e facilitadora para que os estudantes criassem seu gráfico expressando os dados da tabela.

Quadro 31: Introdução às funções. Atividade 3. Item (c).

**A1: O conceito tem muito a ver com proporção, né? É razão.** A gente tem que só completar a tabelinha. Primeiro a gente tem que completar a tabela. 84 dividido por 60. Divide 84 por 60 pra ter bonitinho. Mas se 84 quilômetros a gente vai fazer em 1 hora, dá pra dividir 500 por 84? Não, é por 84?

A2: Então vamos ver, 84 dividido por 60. 1,4.

A1: Então tem que fazer 1,4 vezes...

A2: 20.

A1: 20 vezes 1,4. Olha que bonito, 40...

A2: 56

A1: Exato, 56. Agora não dobrou...

A2: Vamos pra 80?

A1: Dobrou igual. 56 vezes 2.

A2: É 102. Próximo?

A1: 100

A2: 140.

A1: Sora a gente completou a tabela a gente fez o exercício.

Professora: Ata, qual vai ser a duração em minutos da viagem?

A1: Ah, depois tem.

**A2: Tá, então multiplica... então tá a relação é de quilômetro... a cada minuto a gente percorre tanta quantidade de metros, então a gente só tem que fazer o cálculo inverso? [COOP]**

**A1: Dá pra fazer por outra maneira... tu faz essa distância, não os minutos, tu faz vezes, não isso é minutos, ah, já ta em minutos. Não deixa, deixa, eu to louco já. [COOP]**

**A2: É que eu acho que vai dar um número de sinal muito grande. [COOP]**

**A1: 1,4, isso. 2500 sobre 7. [COOP]**

**Professora: 357 minutos? [COOP]**

**A2: Bonitinho ó. Aham. [COOP]**

**Professora: Faz sentido, né? [COOP]**

**A1: Tá, mas o que que tu fez mesmo? [COOP]**

**A2: Eu só dividi o 500 por 1,4, porque eu tava fazendo o cálculo inverso. [COOP]**

**A1: Ah, sim, pra dar os minutos. Sim, sim. [COOP]**

Fonte: Dados do experimento final.

No primeiro trecho destacado no quadro 31 percebemos que o estudante A1 comenta que as atividades que eles estão realizando é similar à razão e proporção, conteúdo estudado por eles naquele trimestre em matemática. Essa observação do estudante mostra como os sujeitos estão conectando as atividades realizadas com os conteúdos matemáticos já estudados por eles.

Ainda no quadro 31, no segundo trecho destacado, percebemos que os dois estudantes estão em busca de formas para calcular a duração da viagem do automóvel. Porém, percebemos que o estudante A2 calcula o tempo da viagem sozinho. Após a resolução explica para A1 como ele resolveu. Apesar de A2 não ter discutido com seu colega que cálculo estava fazendo, o mesmo compartilhou com A1 como chegou na duração da viagem. Analisando esse trecho a troca ocorreu por meio de colaboração do estudante A2 para o A1. A primeira condição das trocas de equilíbrio de Piaget (1973) é satisfeita, porém não consideramos que os diálogos expressem a segunda e terceira condições com as falas dos estudantes.

Quadro 32: Introdução às funções. Atividade 4. Item (a).

<p>Professora: O que é grandeza? A1: Grandeza é qualquer coisa que dá pra contar que tem a mesma medida entre si...</p>
---

Fonte: Dados do experimento final.

No quadro 32 não identificamos diálogo entre os sujeitos. Concluímos que nesse trecho não encontramos trocas entre A1 e A2, logo, não estabelecendo equilíbrios, sem cooperação.

Quadro 33: Introdução às funções. Atividade 4. Itens (b) e (c).

<p><b>A1: Tá, variável dependente: uma variável, ela vai mudar o seu valor. [COOP]</b>  <b>A2: Quilômetros por hora, não? [COOP]</b>  <b>A1: com o valor de outra, ela depende da outra. [COOP]</b>  <b>Professora: E quem é essa outra?</b>  <b>A2: x e y? [COOP]</b>  <b>A1: A variável independente. [COOP]</b>  <b>Professora: Quem seria dependente e quem seria independente no x e no y?</b>  <b>A2: y dependente do x? [COOP]</b>  <b>Professora: Isso. E x?</b>  <b>A2: Dependente do y, não? [COOP]</b>  <b>A1: É que depende do caso. [COOP]</b>  <b>Professora: Se o y é o dependente do x, o x é o?</b>  <b>A1: Independente. [COOP]</b></p>
---

Fonte: Dados do experimento final.

No quadro 33, destacamos os trechos em que depreendemos que os estudantes, a partir das trocas de ideias conseguem estabelecer o que entendem por variáveis dependente e independente. Ao corresponderem em suas ideias, Piaget (1973) caracteriza essa correspondência como uma ação características de cooperação.

Quadro 34: Introdução às funções. Atividade 4. Item (d).

<p>A1: Bom, função. Assim, a gente nunca teve essa matéria...</p>
---

A2: Mas, vamos tentar, né?

A1: Parece que função seria, bom pelo nome seria a função de uma variável em relação a outra? De uma variável independente o que ela atua pra mudar a outra. Por exemplo, a dependente seria, sei lá, velocidade e a outra seria distância ou minutos, sei lá. [COOP]

Professora: Tá, mas a velocidade seria, no caso se a velocidade fosse constante...[COOP]

A1: Ela depende de duas variáveis. [COOP]

Professora: Isso, depende de duas variáveis. Quem seria a dependente e a independente nessas variáveis? [COOP]

A1: A independente seria, depende, porque por exemplo se eu aumentar...[COOP]

Professora: Se tu está usando tempo e distância, quem é dependente de quem?

A1: Depende, porque por exemplo seu eu aumentar a distância na conta, a velocidade da pessoa vai manter a mesma, a velocidade é constante. [COOP]

A2: Se tomando a distância, aumento a distância eu tenho que começar a ir mais rápido, mas se eu aumentar o tempo, tu tem que ir mais devagar. [COOP]

Professora: Mas a velocidade é a mesma.

A1: Por exemplo, o tempo  $t$  é igual a uma fração, se eu aumentar a distância e não alterar os minutos, tecnicamente o objeto que está se locomovendo, ele está mais rápido. [COOP]

Professora: Sim, mas a velocidade do objeto é a mesma.

A2: Em relação a quê? [COOP]

Professora: A velocidade do objeto é a mesma. O que vai ser dependente e independente nessas variáveis, distância ou tempo?

A2: Quem divide o outro? [COOP]

Professora: Quem depende do outro?

A1: O minuto seria dependente e a distância seria...não. [COOP]

A2: Acho que, eu to tentando pensar, é que o tempo tu pode passar pro outro lado pra descobrir, quando tu quer a distância, isso que eu tô pensando. Não faz sentido, mas é o que eu tô pensando. [COOP]

A1: É que tu precisa dos dois, os dois são dependentes um do outro pra tu ter velocidade. Só sabendo a distância, tu não tem como medir a velocidade, só sabendo a distância, sem saber o tempo. [COOP]

Professora: Então, quem manda na distância?

A1: A ve...

Professora: Temos outro problema: quem está mandando na distância. Quem está determinando o valor da distância?

A1: O governo federal (risos).

Professora: Quem está determinando...nos problemas anteriores, quem está determinando o valor da distância?

A1: Nos anteriores? Deixa eu ver aqui?

A1: A gente tá sabendo a distância pelo minuto, ou seja, o tempo.

Professora: Então, quem está determinando a distância?

A1: O tempo.

A1: Mas eu também poderia, se eu soubesse dessa proporção eu poderia saber o tempo sem a distância. Se eu soubesse que eu teria que dividir esses números aqui, pela distância eu poderia saber os minutos. Então a distância também está determinando o tempo. Por isso que eu falo que os dois são dependentes.

Professora: Sim, mas, estando no real agora o tempo, ele vai ser sempre independente?

**A1: O tempo seria independente.**  
**Professora: Sempre?**  
**A1: Não.**  
**Professora: Na nossa vida, o tempo é sempre independente?**  
**A1: Olha... depende de qual relação.**  
**Professora: Não, na vida real, toda nossa vida.**  
**A1: Ele é independente, ele só corre.**

Fonte: Dados do experimento final.

No quadro 34 percebemos que houve um diálogo longo sobre o conceito de função. Vamos separar os trechos grifados em partes para uma efetiva análise e situar o leitor.

Quadro 35: Trecho 2.

**A1: Parece que função seria, bom pelo nome seria a função de uma variável em relação a outra? De uma variável independente o que ela atua pra mudar a outra. Por exemplo, a dependente seria, sei lá, velocidade e a outra seria distância ou minutos, sei lá. [COOP]**  
**Professora: Tá, mas a velocidade seria, no caso se a velocidade fosse constante...**  
**A1: Ela depende de duas variáveis. [COOP]**  
**Professora: Isso, depende de duas variáveis. Quem seria a dependente e a independente nessas variáveis?**  
**A1: A independente seria, depende, porque por exemplo se eu aumentar... [COOP]**  
**Professora: Se tu está usando tempo e distância, quem é dependente de quem?**  
**A1: Depende, porque por exemplo seu eu aumentar a distância na conta, a velocidade da pessoa vai manter a mesma, a velocidade é constante. [COOP]**  
**A2: Se tomando a distância, aumento a distância eu tenho que começar a ir mais rápido, mas se eu aumentar o tempo, tu tem que ir mais devagar. [COOP]**  
**Professora: Mas a velocidade é a mesma.**  
**A1: Por exemplo, o tempo  $t$  é igual a uma fração, se eu aumentar a distância e não alterar os minutos, tecnicamente o objeto que está se locomovendo, ele está mais rápido. [COOP]**  
**Professora: Sim, mas a velocidade do objeto é a mesma.**  
**A2: Em relação a quê? [COOP]**  
**Professora: A velocidade do objeto é a mesma. O que vai ser dependente e independente nessas variáveis, distância ou tempo?**  
**A2: Quem divide o outro? [COOP]**  
**Professora: Quem depende do outro?**  
**A1: O minuto seria dependente e a distância seria...não. [COOP]**

Fonte: Dados do experimento final.

No quadro 35, o estudante A1 já diz o que entende sobre função inclusive expressa um exemplo de onde podemos encontrar um tipo de função, velocidade, distância e tempo. A partir dessa fala a professora pesquisadora intervém e começa os questionamentos para aprofundar o entendimento dos estudantes sobre as atividades realizadas. Novamente, temos o estudante com o papel principal em sua aprendizagem e a professora como mediadora desse processo. Piaget (1973) menciona que a cooperação é criadora de novas realidades e é indispensável na elaboração da razão. Como exposto nos diálogos grifados identificamos ações cooperativas e diálogos para reflexões dos sujeitos sobre o que estão aprendendo.

Quadro 36: Trecho 3.

**A2: Acho que, eu tô tentando pensar, é que o tempo tu pode passar pro outro lado pra descobrir, quando tu quer a distância, isso que eu tô pensando. Não faz sentido, mas é o que eu tô pensando. [COOP]**

**A1: É que tu precisa dos dois, os dois são dependentes um do outro pra tu ter velocidade. Só sabendo a distância, tu não tem como medir a velocidade, só sabendo a distância, sem saber o tempo. [COOP]**

**Professora: Então, quem manda na distância?**

**A1: A velocidade...**

Professora: Temos outro problema: quem está mandando na distância. Quem está determinando o valor da distância?

A1: O governo federal (risos).

**Professora: Quem está determinando...nos problemas anteriores, quem está determinando o valor da distância? [COOP]**

**A1: Nos anteriores? Deixa eu ver aqui? A gente tá sabendo a distância pelo minuto, ou seja, o tempo. [COOP]**

**Professora: Então, quem está determinando a distância? [COOP]**

**A1: O tempo. Mas eu também poderia, se eu soubesse dessa proporção eu poderia saber o tempo sem a distância. Se eu soubesse que eu teria que dividir esses números aqui, pela distância eu poderia saber os minutos. Então a distância também está determinando o tempo. Por isso que eu falo que os dois são dependentes. [COOP]**

**Professora: Sim, mas, estando no real agora o tempo, ele vai ser sempre independente? [COOP]**

**A1: O tempo seria independente. [COOP]**

**Professora: Sempre? [COOP]**

**A1: Não. [COOP]**

**Professora: Na nossa vida, o tempo é sempre independente? [COOP]**

**A1: Olha... depende de qual relação. [COOP]**

**Professora: Na vida real, toda nossa vida. [COOP]**

**A1: Ele é independente, ele só corre. [COOP]**

Fonte: Dados do experimento final.

Neste quadro (36) percebemos um diálogo enriquecido de discussões entre os estudantes e as intervenções da professora com questões norteadoras para a construção do conhecimento dos mesmos. Notamos que a partir das trocas de ideias emergiu assuntos de matemática que propiciaram a construção de conceitos, pois eles expressam o que entendem sobre variável dependente, independente, grandezas envolvidas e que uma função rege e estabelece relações entre esses assuntos.

Nos trechos com a legenda [COOP] identificamos indícios de ações cooperativas. A2 e A1 estão debatendo sobre a variável “tempo”. Nesse momento identificamos o que Piaget (1973) comenta sobre ação de correspondência. Ainda nesse quadro, elencamos os trechos dos diálogos da professora e o estudante A1. Treviso (2013) comenta sobre a *secundarização* do professor em sala de aula, ou seja, o estudante se tornar o ator principal em busca do conhecimento. Identificamos que a ação da professora pesquisadora pode ter levado o estudante A1 às conclusões de que o tempo é uma variável independente.

Nesta primeira atividade em que exploramos uma introdução às funções, conseguimos perceber que os estudantes demonstraram seu entendimento sobre grandezas, variáveis dependente e independente e função. Nas análises expostas pontuamos um momento em que as tecnologias móveis atuaram e que a cooperação se fez presente em praticamente todos os quadros.

Sobre a utilização do aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator* entendemos que o papel desempenhado pela manipulação do aplicativo no *smartphone* contribuiu para que as discussões sobre matemática emergissem durante um momento dentre as atividades de Introdução às Funções. Além disso, White e Martin (2014) comentam que a interação *touchscreen* auxilia na busca ao conhecimento matemático aos sujeitos pelo fato da mesma em contribuir com as manipulações instantâneas pelos sujeitos. Assim como os outros autores apresentados nos aportes teóricos sobre as tecnologias digitais móveis na educação, eles comentam sobre a mobilidade, praticidade, experimentações etc. que o uso dos *smartphones* pode oferecer aos sujeitos durante aulas de matemática. Consideramos que o uso desses recursos tecnológicos que aparecerem neste experimento auxiliaram na promoção dos diálogos entre os sujeitos por meio da sua utilização e, conseqüentemente na presença da cooperação.

A partir dos diálogos utilizados como dados para essa pesquisa, entendemos que o conceito de cooperação tenha sido presente. Pontuamos nas falas dos sujeitos os momentos em que percebemos as trocas de proposições. Identificamos nessas trocas as três condições necessárias para as trocas de equilíbrio que segundo Piaget (1973) só são possíveis em ações cooperativas. Assim, como Piaget (1973) menciona que a cooperação é essencial na elaboração da razão, percebemos que os debates e diálogos entre os estudantes sobre as atividades sobre Introdução às Funções podem ter contribuído para ao final da atividade elencarem os conceitos sobre Grandezas, Variáveis e Função.

#### 4.2.2 Função afim

Participaram e produziram os dados expostos nesta atividade os estudantes do grupo 2 A3, A4 e A5. A atividade foi realizada durante uma aula de matemática e o grupo realizou as gravações em áudio no dispositivo móvel de A3. Os mesmos gravaram durante os 100 minutos de aula. Neste dia a aula de matemática tinha dois períodos. Participaram da aula 30 estudantes. Assim, a professora pesquisadora não conseguiu estar presente em todas as discussões do trio.

Quadro 37: Função Afim. Problema 1. Item (a).

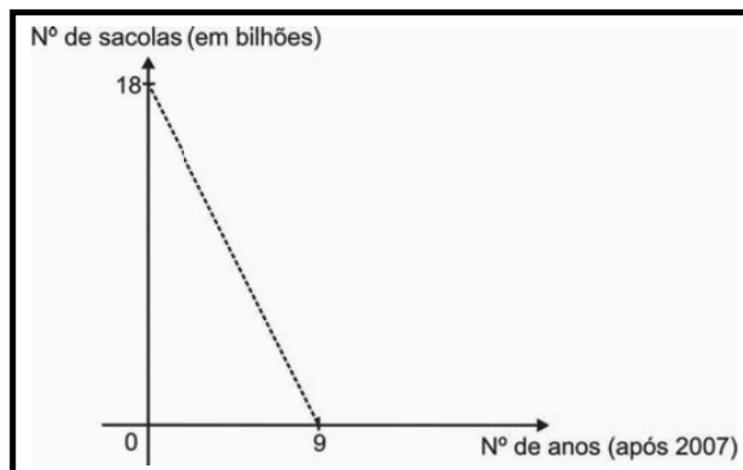
A4: No Brasil em 2007. Considere a origem o ano aqui, né?
---

A3: É, origem o ano.  
 A5: O quê que houve aí?  
**A4: Nós não entendemos a utilidade desse 9 aqui. [COOP]**  
**A3: Acho que o 9... [COOP]**  
**A5: De 18. É que eles prometeram acabar com as sacolas até 2016 então diminuiu o número de sacolas pra 9. [COOP]**  
**A4: Não, aqui é o número de anos. [COOP]**  
**A5: Ah. Deve ser 2009. [COOP]**  
**A4: Não, mas aqui é 2007. Número de anos seria mais 9. [COOP]**

Fonte: Dados do experimento final.

O trecho grifado no quadro 37 expõe o diálogo entre os estudantes A4 e A5 sobre a análise gráfica. A partir da exposição de opiniões entre os dois estudantes, percebemos que a estudante A4 está discordando do estudante A5, perante o significado do número 9, exposto no gráfico. Abaixo exemplificamos o mesmo e no quadro 38 analisamos a continuação do diálogo do grupo:

Figura 4: Função afim. Gráfico do problema 1.



Fonte: Arquivo pessoal.

Quadro 38: Função afim. Problema 1. Item (a).

**A4 e A5: Ah, 2016.** Tá, que eles iam abolir o...  
 A5: Tá, mas depois daqui.  
 A4: Eu não sei nem o que. Ah de acordo com as informações... A gente deveria construir esse gráfico no GeoGebra?  
 A3: Aham.  
**A3: Não tem um triângulo aqui, não? Podia ter um triângulo pronto. [COOP+TDM]**  
**A4: ãhn. Acho que a gente deveria fazer uma função, não? [COOP+TDM]**  
**A3: Vamos colocar uma semirreta nesse gráfico. [COOP+TDM]**  
 A5: B, não se arrasta nada no GeoGebra.  
 A3: É que eu preciso ir pra cima.  
 A4: Espera, espera.  
**A3: Tentar mexer no gráfico. [COOP+TDM]**  
**A4: Tá, ãhn, botar uma linha aí. [COOP+TDM]**  
**A3: Uma reta do gráfico. [COOP+TDM]**  
**A4: Apenas um triângulo retângulo, sabe? [COOP+TDM]**  
**A3: Então. [COOP+TDM]**  
**A5: Cadê a hipotenusa, cadê os catetos? [COOP+TDM]**

A3: Então tá, vamos dizer assim. Vamos dizer que isso aqui é de 2007, 2009, 2010, 2011. Tá. **Então 10 bilhões de sacolas.**  
 A3: É que assim, eu não sei a ordem desse negócio ainda.  
**A4: Mas a gente só precisa de algo pra gente conseguir ver qual é a relação entre eles, sabe? Tipo, em qual pontinho ele se encontraria aqui. Porque assim, olhando, a gente não tem esse dado, mas se a gente criar esse gráfico, gráfico a gente saberia, então a gente... [COOP+TDM]**

Fonte: Dados do experimento final.

No início do diálogo do quadro 38, percebemos que os estudantes A4 e A5 expressam seu entendimento sobre o que seria o 9 exposto no gráfico. Notamos que o estudante A4 pode ter auxiliado na conclusão do estudante A5 ao discutirem sobre o que seria o número 9 no quadro 37 para que no quadro 38, os dois entrassem em um acordo sobre o significado do número. Assim, expusemos uma troca de ideias que segundo Piaget (1973), por meio do acordo entre os dois interlocutores houve de certa forma cooperação.

Ainda no quadro 38, os trechos seguintes expressam as primeiras ideias dos estudantes para elucidarem o item (a) do problema 1. Eles utilizam o aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator* para auxiliá-los na construção de uma resolução para o problema. A ação de explorar o aplicativo para tentar obter êxito na atividade vem ao encontro com o que Bairral (2017) comenta que no ato do toque na tela de *smartphones* são possibilitadas novas descobertas, abordagens que conseqüentemente favorecem a aprendizagem.

Enquanto os estudantes estão manipulando o aplicativo para reproduzir o gráfico do problema, eles comentam sobre utilizar o conhecimento dos lados do triângulo retângulo para um início de resolução. Então, A3 indica a resposta e A4 argumenta que eles precisariam do gráfico do problema no *GeoGebra* para que pudessem encontrar exatamente o ponto que expressa o número de sacolas em 2011. Porém, a discussão parece ter ficado em aberto, pois eles prosseguiram sem argumentos e registraram a resposta de 10 bilhões no material escrito como exposto na figura 5.

Figura 5: Função afim. Resolução do problema 1.

Problema 1  
 a) 10 bilhões de sacolas

Fonte: Dados do experimento final.

Quadro 39: Função afim. Problema 1. Item (b).

A4: Tá. Explore com seu grupo e identifique as possíveis causas dessa diminuição.  
 A3: Quê?  
 A4: Possíveis causas dessa diminuição?  
**A5: Causas: os mercados começarem a diminuir o uso. [COOP]**  
 A4: Áhn.  
**A5: E as pessoas começarem a usar sacolas reutilizáveis. Tipo. [COOP]**  
**A4: Sim, mas eu acho que foi uma medida do governo, não? Que se acabasse em 2016,**

então. [COOP]

**A5: Coisa que não aconteceu, porque até hoje eu uso sacola plástica. [COOP]**

**A4: É, então. Ahn, então seriam: conscientização da população e leis, leis não. Medidas governamentais que previnem... [COOP]**

Fonte: Dados do experimento final.

No quadro 39, percebemos como os estudantes A4 e A5 encontram-se em correspondência ao analisarem as causas da diminuição do número de sacolas plásticas. Essa correspondência pode ser considerada, segundo Piaget (1973), como possível ação cooperativa. Além disso, Piaget (1973) comenta que desenvolver reflexões contempla a cooperação entre os sujeitos e os mesmos se soltam do seu pensamento individual inicial.

Quadro 40: Função afim. Problema 1. Item (c).

A4: Ó. Em 2019 o número do consumo de sacolas plásticas foi erradicado?

**A4, A3 e A5: Não. [COOP]**

**A4: Ahn, o uso de sacolas plásticas ainda é frequente? E pode-se dizer que a única opção. Se não levar as tuas. [COOP]**

**A3: É. [COOP]**

**A5: E que é uma incomodação braba, porque tu vai entrar dentro do troço e... [COOP]**

**A4: É, eu brigo com meus pais pra levarem sacolas reutilizáveis. [COOP]**

**A3: É frequente e.. [COOP]**

**A4: Ahn. E quase como a única opção. [COOP]** Tá. O que está sendo feito para que esse consumo seja reduzido? Ahn.

A5: A gente já botou né.

**A4: Assim, nada, mas campanhas, tem mais campanhas de plástico e essas coisas, mas não é nenhuma medida governamental, tipo lei, é só tipo uma galera falando usa sacola de pano, sabe? [COOP]**

**A3: É, nada... [COOP]**

**A4: Nada muito oficial e nada muito. Tá, enfim. [COOP]**

Fonte: Dados do experimento final.

No quadro 40, notamos que há troca entre os pares. O trio de estudantes está discutindo sobre o consumo de sacolas plásticas atualmente. Como há trocas, podemos classificá-las como trocas de equilíbrio já que elas obedecem às três condições de Piaget (1973) para estarem em equilíbrio e estabelecerem a cooperação: 1ª Mesma escala de valores: percebemos pelos diálogos dos sujeitos que eles estão em um mesmo nível de conhecimento sobre o ambiente em que estão emersos. 2ª Igualdade de valores: Os sujeitos demonstram acordar uns com os outros sobre o uso das sacolas plásticas no meio ambiente. 3ª possibilidade de reciprocidade, concordância com os pontos de vista uns dos outros.

Quadro 41: Função Afim. Problema 2. Item (a).

A5: Tá tudo errado, eu uso 42. Mas eu uso sapato 40, às vezes, Tá certo, tá certo.

A4: Ah, a estimativa é correta.

Fonte: Dados do experimento final.

Como exposto no quadro 41, os estudantes realizaram a medida do pé de A5 e concluíram que a estimativa da relação do problema estava correta. Neste quadro não percebemos trocas de pensamentos para possível cooperação.

Quadro 42: Função afim. Problema 2. Item (b).

**A3: É 28 vezes 6, na verdade, mas tudo bem. [COOP]**  
**A4: 28 vezes 5. [COOP]**  
**A3: Vezes 6, porque 28 ali também mais 28 de novo. [COOP]**  
**A4: Mas aqui tu troca o x por 28. [COOP]**  
**A3: Sim, mas 28 vezes 5 mais 28. [COOP]**  
**A4: Sim é. [COOP]**

Fonte: Dados do experimento final.

Como exposto no quadro 42, as estudantes A4 e A3 estão dialogando sobre como resolver o problema 2, item (b), em que as mesmas têm que substituir na relação expressa a incógnita  $x$  por 28. A3 expõe seu modo de calcular e A4 discorda, então A3 explica seu raciocínio, A4 concorda com o modo de resolução de A3, porém, não temos indícios de que A4 possa ter entendido a explicação exposta por A3. Ainda assim, a troca de proposições, segundo Piaget (1973) pode significar que os indivíduos estejam convergindo para o equilíbrio.

Quadro 43: Função afim. Problema 2. Item (c).

A3: 42.  
A4: Ahn, numeração 42? O valor é 36, passa o 4 pra lá, deu, alguém tem um lápis ai? Daí passa, 36 vezes 4.  
A4: 36 vezes 4, 144. Menos 28.  
A3: menos 28.  
A4: Dividido por 5.  
A3: 23cm.

Fonte: Dados do experimento final.

Como exposto no quadro 44, as estudantes A4 e A3 estão conversando sobre como estão resolvendo o item (c) do problema 2. Descrevendo os cálculos, sem apresentar dificuldades, as mesmas terminam ao evidenciar a resposta de 23cm. Aqui não iremos pontuar nenhuma característica apresentada nos aportes teóricos, pois não encontramos.

Quadro 44: Função afim. Problema 2. Item (d).

**A4: Faça um esboço do gráfico do e de x, não sei como pronuncia isso.**  
**A3: Deve ser um número no geogebra tem que colocar o que seria...**  
**A4: N zero. Se x for zero vai dar.**  
**A3: Zero, não tem muita.**  
**A4: Vai ser 28 dividido por 4.**  
**A3: É.**  
**A4: Tá, enfim.**

Fonte: Dados do experimento final.

No quadro 44, os estudantes não explicitam o esboço do gráfico. Os trechos grifados expressam duas conclusões distintas entre A4 e A3, porém entre a mudança das respostas, não houve indícios de debate entre as duas. Percebemos que A4 começa a analisar, A3 indica sua

resposta já indicando que seria zero e A expõe a sua resposta de que seria “28 dividido por 4”. As duas não concluem ou exploram o porquê dessa forma de encaminhamento para a solução e seguem para a próxima atividade.

Sobre as atividades de plotar a função no gráfico (atividades 1, 2 e 3) a partir da observação constatamos que na atividade 1, A3, A4 e A5 não demonstraram dificuldades em plotar a função  $f(x) = ax + b$  no GeoGebra. Nas atividades 2 e 3 os estudantes descreveram o que observaram na tela do *smartphone*. Na variação do controle deslizante “a”, o gráfico fez movimentos nos sentidos horário e anti-horário, os três estudantes compartilharam da mesma opinião e na atividade 3, o trio descreveu o movimento do gráfico como para baixo e para cima, quando variaram o controle deslizante “b”. Percebemos ao interagirem com a tela do *smartphone*, no GeoGebra, conseguiram visualizar o efeito de variar um dos parâmetros da função afim, sendo convergente ao que White e Martin (2014) discorrem sobre a importância da utilização de *smartphones* e como eles podem auxiliar na aprendizagem dos estudantes.

Quadro 45: Função afim. Atividade 4.

<p><b>A4: Qual é o papel desempenhado pelo parâmetro a? [COOP+TDM]</b>  <b>A3: Da medida em x? Do eixo x? Não sei. [COOP+TDM]</b>  <b>A4: Pode ser. [COOP+TDM]</b>  <b>A3: Pode ser? [COOP+TDM]</b>  <b>A4: Pode ser. [COOP+TDM]</b></p>
--

Fonte: Dados do experimento final.

Como expomos nos trechos grifados do quadro 45, A3, com indícios de dúvidas em sua resposta, questiona A4 se o parâmetro “a” era o valor do gráfico no eixo x, A4 sem questionar A3 responde que poderia ser essa a resposta. As duas estudantes não exploraram além do que foi apresentado no quadro 45. Novamente, no quadro 45, os sujeitos exploraram o papel de um dos parâmetros da função, agora atribuindo uma hipótese a ele, a qual pode ser verificada via ação no GeoGebra, trazemos a discussão de Bairral (2017) que menciona o ato do toque na tela do celular como um elemento que possa oportunizar aos sujeitos novas descobertas e aprendizagens, pois os estudantes manipularam o controle deslizante com seus toques na tela projetando a variação do gráfico da função no *smartphone*.

Quadro 46: Função afim. Atividade 5.

<p>A3: Qual é o papel desempenhado pelo parâmetro b?  <b>A4: Da medida ao eixo. [COOP+TDM]</b>  <b>A3: Eixo y? Vamos ver. [COOP+TDM]</b>  <b>A4: Não, é que ele mexe nos dois, ó. [COOP+TDM]</b>  <b>A3: Ah ele mexe nos dois. [COOP+TDM]</b>  <b>A4: Então...ambos mexem nos dois, né. [COOP+TDM]</b>  <b>A3: É. Esse aqui, não, esse aqui só mexe no x. O a, porque o b tá pretinho ali o outro não. [COOP+TDM]</b></p>
---

**A4: Ah, verdade. Tá então ele dá a medida ao eixo y. [COOP+TDM]**

Fonte: Dados do experimento final.

Os trechos grifados no quadro 46, percebemos que A4, ao variar o controle deslizante “b”, conclui que tanto o controle deslizante “a” quanto “b” influenciam nas medidas  $x$  e  $y$  do gráfico. A partir desse apontamento, A3 concorda, mas na próxima fala grifada discorda de A4, apontando que o valor de  $x$  não altera e sim o valor de  $y$ . Por fim, A4 concorda com o argumento expresso por A3. Nesse trecho, entendemos que a utilização do aplicativo colaborou com o diálogo entre os pares, no sentido de que a partir do movimento na tela as hipóteses elaboradas pelos estudantes terem sido colocadas em teste, assim como destaca White e Martin (2014) expõe sobre a utilização de dispositivos *touchscreen* pode potencializar a construção e entendimento de conceitos matemáticos.

Ao mesmo tempo, o aplicativo foi o meio para que os argumentos fossem expostos e discutidos. Piaget (1973) afirma que se temos trocas de proposições e as mesmas encontram-se em equilíbrio, temos cooperação, é o que está sendo exposto no quadro 46 que a partir das ideias expostas por A3 e A4. Por fim as duas entram em acordo entram em acordo e concluem que o parâmetro  $b$  tem alguma relação com a medida de  $y$ .

Quadro 47: Função afim. Atividade 6.

A4: Voltando. Tá, então seria -3. Tem que escrever aqui?  
 A3: Ah verdade.  
 A4:  $x = -3$ . A gente tá achando um número pra zerar o  $x$ . Pra ser  $f(x) = 0$ . Analisando...  
 A3: Sim.  
**Professora aponta para o gráfico e pergunta:**  
**Professora: Onde é a raiz dessa função?**  
**A3 aponta para o eixo x.**  
**Professora: Tá, e  $x$  é quanto?**  
 A3: 9.  
 Professora:  $x$  é 9?  
 A3: -9  
 A4:  $x$  é 9.  
**Professora: Onde está o eixo  $x$  e o eixo  $y$ ?**  
**A4: Tá o eixo  $y$  tava ali (vertical) e o eixo  $x$  ta aqui (horizontal). [COOP+TDM]**  
**Professora: Tá, se o eixo  $y$  tava ali o  $x$  era quanto ali?**  
**A4: -9. [COOP+TDM]**  
**Professora: Se o eixo  $y$  era aquele ali quanto que era o  $x$ ?**  
**A3: Zero? [COOP+TDM]**  
**Professora: Zero.**  
**A4: O  $y$  -9. [COOP+TDM]**  
**Professora: Isso. Se o  $y$  tá aqui, vamos tirar o zoom, se o  $y$  tá aqui ele ta cortando bem ali no -9, bem no eixo  $x$  e no -9. Logo se o  $x$  ta aqui, quanto que é o  $y$  nesse caso aqui?**  
**A3: 1. [COOP+TDM]**  
**Professora: 1. Agora se eu coloco meu ponto aqui? Quanto que vai ser meu  $y$ ?**  
**A3: Zero. [COOP+TDM]**

**Professora: E o  $x$  é quanto?**

**A4 e A3: 9. [COOP+TDM]**

**Professora: O que o gráfico faz no eixo  $x$ ?**

**A4: Corta. Tá é o número que passa exatamente quando corta o eixo  $x$ .  
[COOP+TDM]**

Fonte: Dados do experimento final.

Os trechos grifados no quadro 47 demonstram a ação da professora pesquisadora. Como já mencionado por Treviso (2013), entende-se que a função do professor seja nesses momentos a de realizar uma mediação para que o estudante aprenda a aprender. Por meio de questionamentos a professora incentiva que A4 e A3 reflitam sobre como deva ser representado o zero de uma função. A partir da análise gráfica as duas estudantes com mediação da professora, continuaram a explorar as atividades com os dados expressos pelos gráficos das funções.

Ainda no quadro 47, as ações cooperativas são evidenciadas, já que há discussão entre os pares. Piaget (1973), enfatiza que a cooperação é um sistema de operações em que as atividades dos sujeitos se exercendo sobre os objetos ou sobre os outros se reduzem a um sistema de conjunto. Como expresso no quadro 48, os estudantes agem sobre o aplicativo para que o aplicativo seja o meio para que as discussões emirjam e assim os estudantes agem uns sobre os outros com argumentos que os levam a estabelecer conceitos matemáticos sobre os zeros das funções.

Quadro 48: Função afim. Atividade 8.

**A3: Que definição poderíamos adotar para a função estudada?**

**A4: Qual definição poderíamos adotar para a função estudada? ãhn... É meio que isso.**

**A3: É, é isso.**

**A4: Não, tá, uma função afim, afim que fala? É aquela que possui uma raiz real.  
[COOP+TDM]**

**A3: Tá bom. [COOP+TDM]**

**A4: Possui uma raiz real, ãhn... Tá, a gente tem que dizer isso só não sei como... tal que... se  $y$  for igual a 0,  $x$  vai ser igual a zero, né, mas não sei dizer isso em uma palavra bonita. Tal que os valores somados de  $x$  e  $y$  sejam zero? Não. [COOP+TDM]**

**A3: É, pode ser. É. [COOP+TDM]**

**A4: Não sei se “tal que” cabe nessa frase. [COOP+TDM]**

**A3: Tal que os valores de  $x$  e  $y$  se anulam, dando zero. [COOP+TDM]**

**A4: Isso, se anulam, melhor do que somados. [COOP+TDM]**

Fonte: Dados do experimento final.

A atividade 8 consistiu em apresentar um conceito para o tipo de função estudada. A4, no trecho grifado no quadro 48, nomeia a função estudada como “afim” e que possui raiz real, porém, durante o diálogo com A3, as duas concordam que os valores de  $x$  e  $y$  se anulam nesse tipo de função. A partir desse diálogo não entendemos de forma clara em que as estudantes estão se referindo, mas pela fala de A4: “*Possui uma raiz real, ãhn... Tá, a gente tem que dizer isso só não sei como... tal que... se  $y$  for igual a 0,  $x$  vai ser igual a zero, né, mas não sei*

*dizer isso em uma palavra bonita. Tal que os valores somados de  $x$  e  $y$  sejam zero? Não.*”, podemos concluir que as duas estudantes consideram que o gráfico da função afim intercepta de alguma forma os dois eixos coordenados  $x$  e  $y$ .

Após a exposição dos diálogos nos quadros apresentados, vemos que a partir das trocas de ideias e pensamentos entre A3, A4 e A5, os mesmos conseguem formular conceitos para os objetos em estudo. Durante o experimento de ensino observou-se constantes trocas entre os pares, os quais a cada novo desafio ou impasse eram colocados em questionamento para debate e reflexão coletiva. Entendemos que esse tipo de ação, segundo Piaget (1973), caracterizado por meio de equilíbrios parciais que vão sendo “atualizados” conforme nova ação pelo sujeito faz com que novos pensamentos sejam criados e ideias debatidas, caracterizando dessa forma um trabalho cooperativo.

Além disso, a partir das nossas observações nos diálogos estabelecidos entre os estudantes e também com a mediação da professora, concluímos que o uso das tecnologias móveis, em particular o *smartphone*, também contribuiu nos momentos de construção de argumentos sobre o conceito matemático em estudo. Isso faz com que coexista, de forma implícita, um aumento e melhora na construção das hipóteses matemáticas em estudo e também haja uma exigência pessoal sobre um melhor uso das funcionalidades disponibilizadas pela tecnologia, tornando assim o *smartphone* um elemento copartícipe do processo de ensino, por parte do professor, e da aprendizagem, por parte do estudante.

#### **4.2.3 Função quadrática**

O grupo que participou destas atividades era composto pelos estudantes A3, A4 e A5. A sequência foi realizada durante uma aula de matemática e o grupo realizou as gravações em áudio no dispositivo móvel de A3. Os mesmos gravaram durante os 50 minutos de aula resolvendo os problemas 1 e 2 com a presença das duas estudantes A3 e A4, pois A5 estava doente no dia e não pôde comparecer na aula. O restante das atividades foi realizado e gravado durante os outros 50 minutos de aula por A3 e A5 na semana seguinte, neste dia A4 não se fez presente e não justificou sua falta. O total de estudantes presentes na aula foi de 30. Assim, a professora pesquisadora não conseguiu estar presente em todas as discussões das duplas.

Quadro 49: Função quadrática. Problema 1.

<p><b>A4: Ele quer construir, então, 200 metros de cerca. Tá, ele, tá. O que seriam três lances de cerca? Ah, tá, tipo, três, mas tem quatro, não? Ah o cercado do vizinho. A área desse cercado seria <math>x</math> por <math>y</math>. Não? [COOP]</b></p> <p><b>A3: É. [COOP]</b></p> <p><b>A4: <math>x</math> vezes <math>y</math>. De acordo com as dimensões do retângulo... Hum... não sei. [COOP]</b></p> <p><b>A3: Eu vi essa folha, fiquei olhando pra ela durante 10 minutos e não cheguei a</b></p>
--

**conclusão nenhuma. Então... [COOP]**

**A4: É tipo a área seria y vezes x, mas é que... [COOP]**

**A3: Vamos lá. [COOP]**

**A4: Tá, ele tem 200 metros de cerca e ele fez três lances. Não pode supor medidas então eu diria x vezes y. Tá então a área pode ser denominada por x vezes y, pode ser encontrada, pode ser sei lá... Sora. [COOP]**

Fonte: Dados do experimento final.

Apresentamos no quadro 49 o início da discussão entre A3 e A4 sobre o problema 1. Percebemos que as trocas de proposições contendo informações sobre o problema e como proceder para resolvê-lo acontecem de A4 para A3. Além disso, pela fala de A3: “*Eu vi essa folha, fiquei olhando pra ela durante 10 minutos e não cheguei a conclusão nenhuma.*” Podemos concluir que ao iniciar os diálogos e as trocas de proposições essa posição declarada pelo estudante A3 mudou. É o que exibiremos nos próximos quadros.

Quadro 50: Função quadrática. Problema 1. Trecho 2.

**A4: Aqui a gente, tipo, a gente tem que fazer alguma coisa mais complicada do que x vezes y? Porque pede área. [COOP]**

**Professora: Só que ele não quer em número?**

**A4: Mas como a gente vai achar um número se a gente não tem nada? [COOP]**

**Professora: Mas o que a gente tem, ó, vamos lá. Um fazendeiro quer construir um cercado em forma de um retângulo para confinar o gado. Com o dinheiro que ele tem é possível fazer apenas 200 metros de cerca, então um perímetro de 200 metros. Certo? Resolveu então aproveitar uma parte da cerca do vizinho para economizar, então essa parte aqui e construiu apenas três lances de cercado.**

**A4: Só que dai o perímetro não é 200, porque esse aqui não conta. O perímetro é desses três aqui. [COOP]**

**Professora: Então esse mais esse mais esse dá quanto?**

**A4: 200. [COOP]**

**Professora: Isso construa uma relação matemática que permita obter a área desse cercado de acordo com as dimensões do retângulo.**

**A4: Tá, é... Sim só que sora, tipo fica  $2x + y = 200$ ... [COOP]**

**Professora: E?**

**A4: Ah, fica um sistema, x vezes y é igual ao o que, sora? [COOP]**

**Professora: Ao o que? Quando a gente faz x vezes y a gente descobre o quê?**

**A3 e A4: Área. [COOP]**

**Professora: Área, então isso aqui é igual a...**

**A3 e A4: Área. [COOP]**

**A4: Mas como assim, sora? Não tem nada pra igualar. [COOP]**

**Professora: A área, no caso, vai ser a nossa, vamos dizer o que varia.**

**A4: Tá. [COOP]**

**A3: Entendi. [COOP]**

Fonte: Dados do experimento final.

Grifamos todas as falas do diálogo do quadro 50, pois nele está exposto todas as trocas de proposições e ideias entre as estudantes com a professora. Em um primeiro momento analisamos a ação da professora pesquisadora que está auxiliando as estudantes a organizarem suas ideias já pensadas e conversadas no quadro 50. Essa ação vai ao encontro com o que

Gomes e Ghedin (2012) enfatizam sobre respeitar o momento do sujeito em aprender possibilitando a ele experiências para ele agir nesse processo.

Em um segundo momento, classificamos as proposições e ideias expostas por A4 como ações cooperativas. Piaget (1973) elencou as três condições para o equilíbrio das trocas. Neste momento estamos presenciando a primeira: mesma escala de valores, a segunda: igualdade de valores e a terceira: reciprocidade como um respeito aos argumentos do outro. As estudantes estão expondo suas ideias e pensamentos para possivelmente entrarem em acordo e resolver o problema. Logo, podemos dizer que estão construindo uma ação cooperativa.

Quadro 51: Função quadrática. Problema 1. Trecho 3.

**Professora: Então vamos pensar de novo. Daqui o que a gente pode extrair daqui?**

**A4:  $x+y$  é igual a 100. [COOP]**

**A3: Não. [COOP]**

**Professora: O que a gente pode usar nessa equação de  $2x+y$  é igual a 200?**

**A3: Dá pra deixar  $y$  é igual a  $200 - 2x$ . [COOP]**

**Professora: Então...deixar tudo em função de uma só, né? Então vamos lá.**

**(Estão escrevendo).**

**Professora: Ok, então dependendo do valor do meu  $x$  o que acontece com a minha área?**

**A4: Varia. Quando o  $x$  assumir um valor mais alto. Sei lá, depende do valor do  $x$ . [COOP]**

**Professora: Tá, então a minha dica pra vocês é colocar essa função aqui lá no geogebra.**

**A4: Tá.**

**A3: Tá bom, então a gente.**

**A4: Não, ele segue pra sempre. [COOP+TDM]**

**Professora: Então, quando que a área vai ser a máxima possível?**

**A4: Ata.**

**A3: 5000.[COOP+TDM]**

**Professora: A área vai ser quanto?**

**A4:  $x$  assumir o valor de 5000. [[COOP+TDM]**

**Professora: Se a área é 5000, quanto que vai ser o meu  $x$ ?**

**A4: Tem que substituir, aí faz o negócio?[COOP+TDM]**

**A3: Ah.[COOP+TDM]**

**Professora: Pode ser.**

**A3: Tá, daí faz uma função...[COOP+TDM]**

**A4: Ai tem que fazer esse cálculo, só que a gente tem duas incógnitas, né?[COOP+TDM]**

**A3: Sim, a gente vai ter que fazer uma, ai como e que é o nome? Bháskara. [COOP]**

**A4: É.[COOP+TDM]**

**A3: A gente vai ter que fazer Bháskara.[COOP+TDM]**

**A4: Ah, sim. Bháskara, que saudades, saudades, eu juro que tava com saudades.**

**A3: Não com esses números, são maravilhosos. A gente coloca 50 que tá tudo certo.**

**A4: É isso, 50. Tá, então o  $x$ , quando o  $x$  assumir o valor de 50.**

**A3: Deixa só eu checar na calculadora se essa coisa tá certa. Eu sei que não é certo, mas eu não tô com paciência de fazer esse cálculo na cabeça, nem que a vaca tussa. Vezes 50,**

menos 2 vezes  $50^2$  que é igual, tá dando tudo errado aqui, ao quadrado vezes 4. Vai dar zero.

A4: Vai dar zero, é isso.

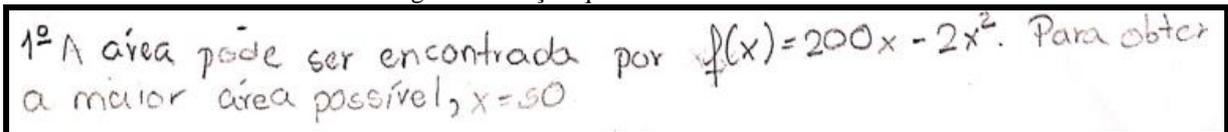
A3: Tá.

**A4: Tá, então... A maior área possível será 5000, quando x assumir o valor de 50, ou -50. Acho que tem que ser 50, porque tipo assim a gente passou ele pra lá negativo pra fazer bháskara, né, mas tipo, quando a gente volta ele positivo, aqui tem que ser 50, pra assumir o valor.[COOP+TDM]**

Fonte: Dados do experimento final.

Como exposto no quadro 51, A3 e A4, com o auxílio da professora conseguem encontrar os caminhos para a resolução do problema. Expomos no quadro 50 que os estudantes encontraram duas relações com os valores de  $x$  e  $y$ , uma com a área do terreno e outra com a soma dos três lados. No quadro 51 ainda com a professora mediando, A3 expõe que as duas equações podem juntar-se ao dizer que podia deixar o valor de  $y$  dependendo do valor de  $x$ . As estudantes não expõem em falas como escreveram as relações, mas as mesmas constam no material escrito da figura 16.

Figura 6: Função quadrática. Problema 1.



1ª A área pode ser encontrada por  $f(x) = 200x - 2x^2$ . Para obter a maior área possível,  $x = 50$ .

Fonte: Dados do experimento final.

Seguindo a análise do quadro 51, após A4 e A3 construírem a relação que expressa a área deste terreno em função da medida de um de seus lados, a professora indica que elas podem utilizar o *GeoGebra* para a resolução do problema de encontrar o lado que expressa a área máxima possível. Ao utilizarem o aplicativo as duas estudantes encontram o valor da área máxima que é o ponto máximo do gráfico da função. White e Martin (2014) enfatizam que a interação *touchscreen* evidencia um melhor aprendizado das aplicações matemáticas. Constatamos isso, pois o aplicativo foi o meio para que os diálogos ocorressem e as estudantes investigaram até solucionar seu problema.

Após essa investigação, A3 e A4, com a mediação da professora, conseguem estabelecer a relação entre a função quadrática e a resolução de uma equação do 2º grau. As mesmas declaram que é necessário realizar a fórmula resolvente de uma equação quadrática para encontrar o valor de  $x$  que expressa a área máxima do problema. No quadro 51, notamos como uma dupla discutindo sobre matemática com o aplicativo em mãos conseguiu aplicar o conteúdo já estudado (equações de 2º grau) em um novo, desconhecido a princípio (função quadrática). Segundo Piaget (1973) a cooperação consiste em um sistema de operações em que as atividades de sujeito exercendo sobre o objeto ou o inverso se reduzem a um só sistema. Assim, o aplicativo através da representação gráfica, produzida nele e o

conhecimento prévio sobre equações do segundo grau são os objetos de análise dos sujeitos. Os estudantes realizam inclusive uma operação de segunda ordem quando conseguem eliminar o valor negativo do  $x$ .

Quadro 52: Função quadrática. Problema 2. Trecho 1.

A4: Tá, qual a medida de  $h$  em metro... Dá pra fazer aqui ó, Pitágoras.  
 A3: Que Pitágoras? Seria muito bom se desse.  
 A4: Qual foi teu pensamento aí?  
 A3: Não sei, eu só sei que  $x+3$  é igual a  $y$ , é a única coisa.  
 A4: Ah, porque até aqui tem que ter 3.  
 A3: Mas mesmo assim, o restante não tem como juntar aleatoriamente o número.  
 A4: Porque aqui ele tá dizendo que aqui é três e aqui é quatro?  
 A3: Porque 4 é a largura, esse aqui.  
 A4: Ai nossa, que burra. Hum... tá pera. ãhn. Tá, aqui a gente pode dizer que é  $x$ , né. Tá é  $3+x$ .  
 A3: Vamos fazer no GeoGebra pra ver o que dá.  
 A4: GeoGebra.

Fonte: Dados do experimento final.

O quadro 52 expressa o início da construção da resolução do problema 2. A3 e A4 estão trocando suas ideias iniciais sobre os dados do problema juntamente a análise da figura. Elas finalizam a primeira parte do trecho sugerindo utilizar o GeoGebra para conseguirem a resolução. Iremos expor o restante dos trechos da resolução do problema para ao final relacionarmos o que foi apresentado em nossos aportes teóricos.

Quadro 53: Função quadrática. Problema 2. Trecho 2.

**A4: Função de  $x$ ,  $3+x$ .**  
**A3: É, vamos tacar no GeoGebra, vai que da alguma coisa. Deu zero. [COOP+TDM]**  
**A4: Deu zero. [COOP+TDM]**  
**A3: Deu 3 e -3. [COOP+TDM]**  
**A4: É, a raiz seria -3, né, é a mesma coisa que a gente fez ali em cima. Sora. [COOP+TDM]**  
 Exploração gráfica no geogebra.  
 Professora: Acharam o  $x$ ?  
 A3: Esse aqui foi bom, o problema é esse aqui agora.  
 A4: O quê que é isso sora? Aqui, tá certo?  
 Professora: Aham. Qual é a dúvida.  
**A4: Porque se a gente fazer uma função aqui vai dar -3 aí não faz nenhum sentido. [COOP+TDM]**  
**Professora: Tá, mas o que é isso aqui?**  
**A3: Uma abóboda. [COOP+TDM]**  
**A4: Uma abóboda. Pode ser um gráfico no GeoGebra se tu quiser. [COOP+TDM]**  
**Professora: Hum, e como a gente pode chamar esse gráfico. Ele é de qual das equações? Do 1º grau ou do 2º grau?**  
**A4: Do 2º. De, não sei do quê que é. [COOP+TDM]**  
**A3: Não sei. [COOP+TDM]**  
**Professora: Como que era esse gráfico aqui? (referindo-se ao problema 1).**  
**A4: Esse é de 2º. [COOP+TDM]**  
**A3: 2º Grau, então esse também é. [COOP+TDM]**  
**A4: Ah, que ele ficava assim, tá. [COOP+TDM]**

**Professora:** Ele ficava como?  
**A4:** Assim. [COOP+TDM]  
**Professora:** O que quer dizer “assim”?  
**A4:** Não sei, é um arco. [COOP+TDM]  
**A3:** É, um arco. É de um... [COOP+TDM]  
**A4:** Então, a gente tem que fazer uma equação que tenha uma coisa biquadrada lá, não sei o que. [COOP+TDM]  
**A3:** Mas qual tem biquadrada, esse que é o problema. [COOP+TDM]  
**A4:** Não, não é biquadrada que eu quis dizer. [COOP+TDM]  
**A3:** Ao quadrado. [COOP+TDM]  
**A4:** É ao quadrado, algo que dê a bhaskara, Tá. Do 2º grau. [COOP+TDM]  
**A3:** É. [COOP+TDM]

Fonte: Dados do experimento final.

Os trechos grifados no quadro 53 expressam os diálogos de A3 e A4 expondo suas ideias para a resolução do problema. Analisando a ação da professora, percebemos que ela auxiliou os estudantes na chegada à conclusão que precisariam de uma função do 2º grau, segundo elas.

Até construírem um consenso, as estudantes iniciam suas discussões no quadro 53 colocando no GeoGebra alguma informação que segundo elas resultou em 0 ou 3 e -3. Novamente a utilização de um dispositivo móvel, um aplicativo de matemática, possibilitou os diálogos entre os estudantes que segundo Bairral (2017) oportuniza aos estudantes a construção do conhecimento.

Quadro 54: Função quadrática. Problema 2. Trecho 3.

**A4:** Sora, não tem x ao quadrado. Não tem x ao quadrado. Porque a gente sabe que isso é 3, né? Por causa disso aqui. Tá, 3. Daí isso aqui a gente denominou x.  
**Professora:** Tá.  
**A4:**  $x+3 = 10$ . Só que assim não é uma equação de 2º grau, é uma equação de 1º grau, e aí a gente descobriria que x é -3.  
**Professora:** Tá, o que mais a gente sabe do problema?  
**A4:** Tem essas medidas aqui, só que elas parecem inúteis. [COOP]  
**Professora:** Vamos pensar, se tu coloca eixo x e eixo y nessa figura, tá?  
**A4:** Eixo... [COOP]  
**Professora:** Eixo x e eixo y, quanto que seria esse x aqui? Se aqui é zero?  
**A4:** 5. [COOP]  
**Professora:** 5. Esse y aqui?  
**A3 e A4:** 3. [COOP]  
**Professora:** 3, e o x? Zero, né?  
**A3 e A4:** Aham. [COOP]  
**Professora:** Então tu vai ter quantos pontos? Dois, né? ãhn, cadê, esse aqui vai ser 5 e zero e...falta mais algum? Esse aqui né, quanto que é o x dele?  
**A3 e A4:** 4. [COOP]  
**Professora:** E quanto que é o y?  
**A3 e A4:** h. [COOP]  
**Professora:** Tem três pontos, o que a gente pode fazer agora?  
**Silêncio.**  
**Professora:** Vamos pensar. Como que é uma equação do 2º grau, como que ela é

formada? Uma equação do 2º grau.

A4: É, x ao quadrado mais x mais c, algo assim. [COOP]

Professora: Igual a...

A4: zero. [COOP]

Professora: Zero. Como que a gente denomina o cara que tá na frente do x ao quadrado?

A4: a. [COOP]

Professora: Na frente do x?

A3 e A4: b. [COOP]

Professora: Tá, então agora a gente vai usar isso aqui pra fazer isso aqui. Só que aí em vez de ser zero, quanto que vai ser esses valores aqui?

A3: y? [COOP]

Professora: O y.

A4: Ata.

Professora: Tentem agora, usar isso aqui pra achar isso.

A4: Tá. Então se aqui a gente tiver 3 igual, daí vai dar tudo zero, vai zerar tudo. Acho que a gente poderia usar esse. [COOP]

A3: Usar esse. [COOP]

A4: Acho que aqui não precisa de nada, né? [COOP]

A3: É, acho que não. [COOP]

A4: Seria sei lá, um zero. [COOP]

A3: Tá bom.

A4: É que não tem nenhum número no mundo que elevado ao quadrado mais 4x vai ser 3. [COOP]

A3: É. [COOP]

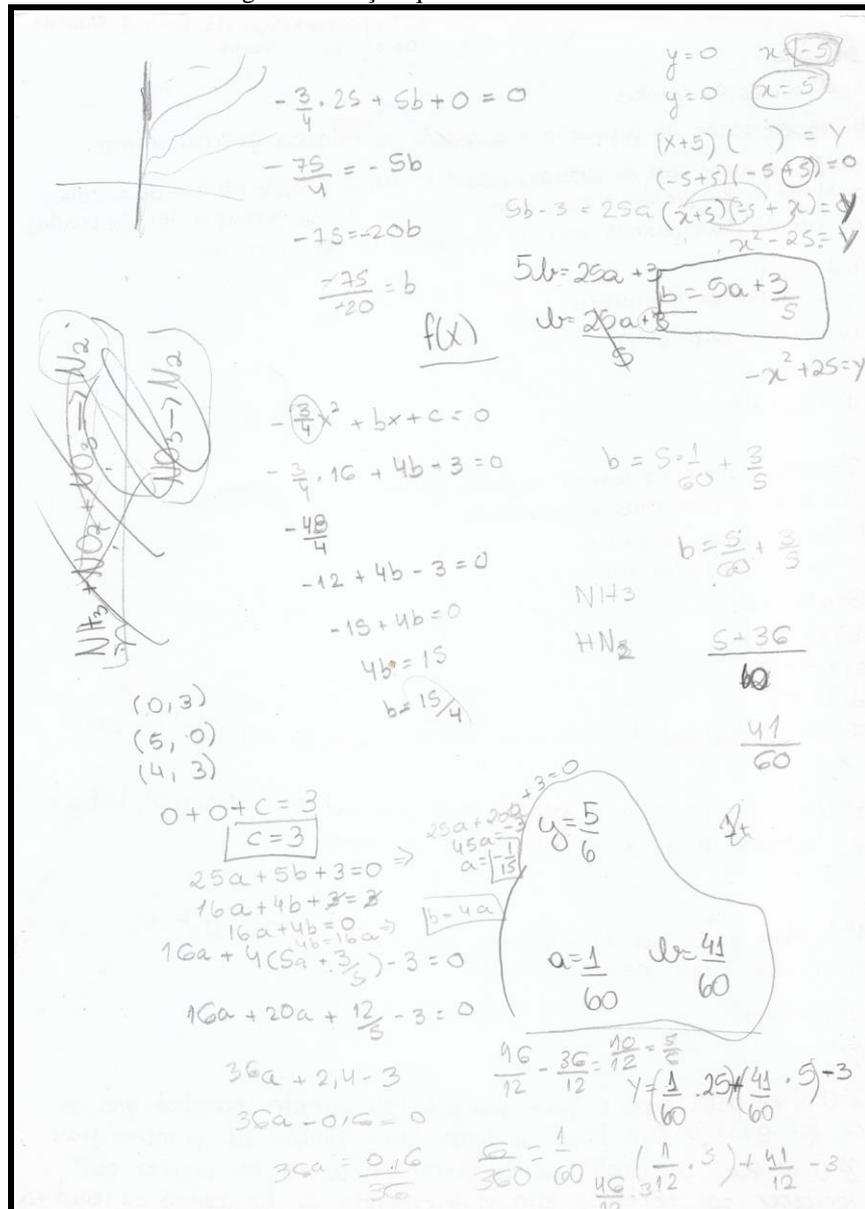
A4: É, mas a gente pode passar esse 1 pra cá e...

A3: Passa esse zero pra cá.

Fonte: Dados do experimento final.

Para exemplificar o que está exposto no diálogo do quadro 54 trazemos na figura 17 os cálculos que estão expostos nas falas dos estudantes A3 e A4.

Figura 7: Função quadrática. Problema 2.



Fonte: Dados do experimento final.

A ação da professora fez com que A3 e A4 construíssem o sistema exposto na figura 7. Analisando o diálogo do quadro 54 estão expostas as trocas de ideias entre as estudantes indicando primeiramente a colocação dos eixos coordenados na figura, por sugestão da professora, para encontrar os pontos existentes. Assim que encontram os pares ordenados a professora relembra dos parâmetros das equações de 2º grau e indica às estudantes a utilizarem os pontos encontrados para construir o sistema de equações da figura 7. Porém, as estudantes encontram para o parâmetro c o valor de 3, que na resolução do problema seria zero.

Consideramos o processo de resolução das atividades nesta pesquisa e as influências da cooperação com o uso do aplicativo GeoGebra, mesmo que ao final do problema A3 e A4

não conseguiram calcular o valor da altura da abóboda. Notamos e mostramos que a partir do diálogo entre as estudantes e as ações da professora, elas conseguiram estabelecer relações entre os conteúdos já estudados (equações quadráticas) e as funções de 2º grau (ainda não estudado). Piaget (1973) enfatiza que o trabalho coletivo contribui à formação da razão, do conhecimento dos indivíduos. Desta forma mostramos como os diálogos e as trocas de ideias entre A3 e A4 contribuiu para eles estabelecerem as relações de conceitos matemáticos.

Quadro 55: Função quadrática. Atividade 1.

A5: Sora, me ensina a plotar isso aqui.  
 Professora: É só colocar essa parte aqui,  $ax^2+bx+c$  igual a  $y$ . Tá certo, coloca  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ali. Aí coloca  $ax^2$ ...  
 A5: Não tem como colocar ao quadrado.  
 A3: Não, vai aqui.  
 A5: Ah, deixa...mas como é que bota, vamos ver. Eu quero aprender a botar.  
 A3: Põe  $f$ .  
 A5: Botei.  
 A3:  $abc$ .  
 A5:  $f$ .  
 A3: Volta pro  $f$ . Põe isso aqui,  $x$  outro coisinha, a outra parte do.  
 A5: ah.  
 A3: igual.  
 A5: deu uma bugada aqui.  
 A3: Igual, aí tu põe essa parte aqui.  
 A5: Como é que é  $x^2$ .  
 A3: Não, tem que por antes. Põe o  $x$ .  
 A5: Ah tá...  $ax^2 + bx + c$ . Tá.  
 A3: Daí clica no coisinha ali, ali embaixo. Foi.  
 A5: Foi.

Fonte: Dados do experimento final.

Como exposto no quadro 55, A3 auxiliou A5 a plotar a função no aplicativo. Não percebemos trocas de ideias para efetiva cooperação.

Quadro 56: Função quadrática. Atividade 2.

A3: Vamos lá. Varie o controle deslizante  $a$ , o que você pode afirmar sobre o movimento da tela? Explique.  
**A3: Vai pra cima e pra baixo. [COOP+TDM]**  
**A5: Ele tá aumentando. [COOP+TDM]**  
**A3: Não, pra cima e pra baixo. [COOP+TDM]**  
**Professora: O que é esse pra cima e pra baixo. Que observação boa. O que aconteceu ali?**  
**A3: Ficou, é, ficou uma reta. [COOP+TDM]**  
**A5: Uma reta, ele fica uma reta. Quase fica uma reta. [COOP+TDM]**  
**A3: Aqui ó. É, calma. [COOP+TDM]**  
**Professora: Onde que fica uma reta?**  
 A3: Ah.  
**Professora: O quê que tem que acontecer para ser uma reta?**  
**A3: É, tem que passar por -1. Não sei. Ah, o valor do  $a$ . [COOP+TDM]**  
**Professora: O valor do  $a$  tem que ser quanto?**

**A3: Zero. [COOP+TDM]**

**Professora: Se o a é zero, então a gente tem uma...**

**A3: Reta. [COOP+TDM]**

**A5: Mas, ó, o valor do a não é sempre zero. Ah, ele é zero, ah porque é menos. Se tu botar o valor do a igual a zero, ele fica uma reta. [COOP+TDM]**

**Professora: Por quê?**

**A5: Porque não tem inclinação, daí né? Não é isso? [COOP+TDM]**

**A3: Porque varia a figura? [COOP+TDM]**

**Professora: Pensem nessa parte aqui, ó. Se o a é zero, não vai ter o que na função?**

**A3: O  $x^2$ . [COOP+TDM]**

**Professora: Se tu não tem o  $x^2$ , tu vai ter uma função de?**

**A3: Primeiro grau. [COOP+TDM]**

**A5: Ah, se não tem o  $x^2$ , tá, tá. [COOP+TDM]**

**Professora: Então o a varia?**

**A5: Eu tô até agora extasiado com isso aqui ó. Que legal ó. Parece um bigodinho de gato ó. [COOP+TDM]**

**Professora: Então tu classifica esse gráfico como bigodinho?**

**A5: É, bigodinho de gato. Meu Deus, isso aqui tá... É um bigodinho de gato gente, fica mexendo assim. É espontâneo, sabe?**

Fonte: Dados do experimento final.

Como exposto no quadro 56, percebemos como o aplicativo GeoGebra auxiliou os estudantes na visualização e entendimento sobre o que o parâmetro  $a$  faz no gráfico. Lima *et al* (2014) afirmaram que utilizar as tecnologias móveis em sala de aula proporcionou a construção de conceitos favorecendo a aprendizagem.

Além disso, Piaget (1973) já exemplificou que em trocas de ideias quando as mesmas estão em equilíbrio, há cooperação. Notamos que a cooperação surge a partir do momento que A3 e A5 utilizam o GeoGebra para explorarem a variação do controle deslizante do parâmetro  $a$  da função. Os autores citados nos aportes teóricos dessa pesquisa no eixo das tecnologias digitais, Bairral (2017), White e Martin (2014), Cordeiro (2015), Martins *et al* (2018) e Batista (2010) convergem para a ideia de que a tecnologia móvel propicia aos estudantes motivação, experimentação, mobilidade, levantamento de hipóteses. É o que percebemos no quadro 56 quando A5 e A3 dialogam sobre o parâmetro da função.

Quadro 57: Função quadrática. Atividade 3.

**A5: Faz uma dancinha. Quando ele fica negativo, ele desce pro outro lado. Quanto ele tá no zero, ele fica neutro. [COOP+TDM]**

**A3: Não, quando ele fica negativo, ele fica negativo em  $x$ . [COOP+TDM]**

**A5: Quando ele fica negativo, ele desce pra cá. Quando ele tá positivo ele tá desse lado. Positivo, ele tá desse lado. [COOP+TDM]**

**Professora: Então se ele tá positivo, ele tá em qual lado?**

**A3: Tá no lado positivo do  $x$ . [COOP+TDM]**

**A5: No lado dos números positivos. Ele corta o eixo  $y$ , porque o  $x$  é aqui. [COOP+TDM]**

**Professora: Ele corta o eixo  $y$ , crescendo ou decrescendo?**

**A3: Crescendo. [COOP+TDM]**

Professora: Crescendo, e se ele está negativo, ele vai cortar o eixo y?

**A5: Do outro lado, do lado direito. [COOP+TDM]**

**A3: Então a gente coloca... [COOP+TDM]**

Fonte: Dados do experimento final.

Como exposto nas falas de A3 e A5 o quadro 57, percebemos novamente as trocas de proposições entre os dois, a interação com o aplicativo e as ações da professora. Notamos que o GeoGebra é o meio para que as trocas de proposições aconteçam. Silva e Pinto (2019) já enfatizam que o uso do celular seja um propulsor das discussões dos estudantes em uma atividade. Como exposto, vemos que a manipulação no aplicativo fez com que A3 e A5 convergissem e entrassem em acordo sobre a influência do parâmetro  $b$  no gráfico. Essa correspondência entre as trocas de proposições entre os dois estudantes vai de acordo com a cooperação de Piaget (1973).

Quadro 58: Função quadrática. Atividade 4.

**A3: Então, tá, o eixo x, o c, ele faz... ele sobe e desce o eixo y. [COOP+TDM]**

Professora: Sobe e desce?

**A3: No y. [COOP+TDM]**

**A5: Ele varia no eixo y. [COOP+TDM]**

Professora: Tá, no eixo y. agora analisa o valor do  $c$  e o valor do gráfico.

**A5: Tá, quando ele tá positivo, ele fica mais alto, quando ele tá negativo... [COOP+TDM]**

Professora: Quanto que é o  $c$  quando ele tá positivo. Pega um valor arbitrário.

**A5: 5. [COOP+TDM]**

Professora: E quanto que tá no gráfico?

**A5: 5. [COOP+TDM]**

Professora: Tá, agora tenta outro. Põe um valor arbitrário pro  $c$ , qualquer valor.

**A3: 3.9. [COOP+TDM]**

**A5: O valor do  $c$  é exatamente o valor do gráfico. [COOP+TDM]**

Professora: 3.9, onde está no gráfico?

**A3: Não sei. [COOP+TDM]**

Professora: Então coloca um valor inteiro.

**A3: 4. [COOP+TDM]**

Professora: 4, se o  $c$  é 4, no gráfico é?

**A3 e A5: 4. [COOP+TDM]**

Professora: Escolhe outro valor pro  $c$ .

**A5: Vai pro mesmo valor. Que legal. [COOP+TDM]**

Professora: Conseguiu ver, A3?

**A3: Acho que consegui ver sim. [COOP+TDM]**

Fonte: Dados do experimento final.

No quadro 58 expomos as discussões dos estudantes sobre o parâmetro  $c$ . Novamente presenciemos que a influência da manipulação do aplicativo fez emergir as discussões e trocas entre A3 e A5. Cruz (2018) afirma que a utilização dos dispositivos móveis em aula os torna mediadores da aprendizagem. Assim como o aplicativo foi o mediador da aprendizagem, Piaget (1973) estabelece que a cooperação é formadora da razão, logo a influência da

cooperação nesta atividade proporciona um entendimento, leva os estudantes a compreenderem o que o parâmetro  $c$  faz no gráfico de uma função quadrática.

Quadro 59: Função quadrática. Atividades 5, 6 e 7.

Professora: Então vamos lá, eu acho que a 5, 6 e 7 vocês já responderam na 2, 3 e 4, né. A 5, qual é o papel que desempenha o parâmetro  $a$ ?

**A3: Ele varia o... Ah, ele vai pra cima e pra baixo e ele permite permitir. Ai eu tô falando tudo errado. Ah, ele vai pra cima e pra baixo e permite permitir se vai ser ou não uma função de 1º ou 2º grau, tanto é que se  $a$  é igual a zero, ele vai ser uma equação de 1º grau, uma função afim, não uma quadrática. [COOP+TDM]**

Professora: Tá. 6, qual o papel do parâmetro  $b$ ?

**A3: Do parâmetro  $b$ , ele varia, ele cresce ou decresce dependendo se é positivo ou negativo, ele fica caminhando no eixo  $y$ . [COOP+TDM]**

Professora: E o papel do parâmetro  $c$ ?

**A3: Foi o que a gente falou, vai determinar onde corta o  $y$  e vai ser o mesmo valor. [COOP+TDM]**

Professora: Então. O  $a$ , o quê que é esse pra cima em matemática? Quer dizer que o  $a$  é?

**A3: Eu sei o que tu tá falando, é concavidade se é positiva, eu sei qual é, mas não lembro o nome. [COOP+TDM]**

Professora: Positivo. Então se tá pra cima, a tua função é positiva ou negativa?

**A3 e A5: Positivo. [COOP+TDM]**

Professora: Se a concavidade tá pra baixo?

**A3 e A5: O  $a$  vai ser negativo. [COOP+TDM]**

Fonte: Dados do experimento final.

Exposto no quadro 59, temos a resposta final dos estudantes sobre o papel dos parâmetros na função quadrática. Reiteramos que a partir do trabalho coletivo que emergiu a cooperação juntamente a utilização do aplicativo os estudantes construíram seus argumentos sobre o papel dos parâmetros. Como exemplificado nos aportes teóricos desta pesquisa, White e Martin (2014), Bairral (2017) e Batista (2011) enfatizam que utilizar as tecnologias móveis em sala de aula auxilia na aprendizagem dos estudantes por toda potencialidade que o aplicativo utilizado em um *smartphone* pode propiciar. Constatamos isso com a aplicação desta sequência de atividades que proporcionou aos estudantes essas discussões e os mesmos manipulando, agindo ativamente na resolução das atividades elaboraram conjecturas importantes para a construção do conceito da função quadrática.

Essas discussões ou trocas de ideias entendemos que são ações cooperativas. Trazemos Piaget (1973) que exemplifica e mostra como podemos identificar a cooperação nos diálogos dos indivíduos e é isso que mostramos nesta atividade. O trabalho coletivo propiciou aos estudantes explorarem e dialogarem sobre matemática. Desta forma, em conjunto os mesmos conseguiram estabelecer conjecturas sobre as funções quadráticas, conteúdo nunca explorado por eles antes sem necessitarem de teoria pronta e acabada.

Quadro 60: Função quadrática. Atividade 8.

**A3: O  $b$  deu concavidade positiva, as raízes reais é  $-1$  e  $1$ . [COOP+TDM]**

Professora: Como que tu soube que as raízes reais são -1 e 1?

**A3: Porque elas passam, porque elas são os pontos que passam pelo eixo x. [COOP+TDM]**

**A5: Tá, e esse aqui o primeiro? [COOP+TDM]**

**A3: Não sei, eu achei que tu tava fazendo. [COOP+TDM]**

**A5: Tá, então deixa que eu faço. [COOP+TDM]**

**A3: Não sei se tem que fazer todas. [COOP+TDM]**

**A5: To fazendo. [COOP+TDM]**

**A3: Tá, o quê que da pra... [COOP+TDM]**

**A5: -3x... [COOP+TDM]**

A3: Faz todos, sora?

**A5: Tá, o y é -1. [COOP+TDM]**

Professora: Tá. Mas e as raízes dessa função?

**A3: Aqui eu imagino que. Aqui é positivo, mas ela só corta o eixo x em -1. Então só tem uma raiz aqui. [COOP+TDM]**

**A5: Tá meio louco aqui. [COOP+TDM]**

**A3: É. Acho que é -1, aqui só tem uma raiz que é -1. [COOP+TDM]**

**A5: Tá e aqui é y. o y é 3. [COOP+TDM]**

**A3: Não tem raiz real. Não tem, aparentemente. [COOP+TDM]**

Professora: Não tem?

**A5: Então quando o y é zero. Então não corta então não tem raiz, porque não corta o eixo x. [COOP+TDM]**

Professora: Tá, e se essa função não tem raiz o que que acontece com a bháskara dela?

**A5: É não pertence aos reais? [COOP+TDM]**

Professora: Isso.

**A3: A última também não tem. Também não é real. [COOP+TDM]**

Professora: Qual não é real?

**A3: Essa aqui é real, essa aqui também só que essa aqui não é nem essa. [COOP+TDM]**

Professora: Então, o que você pode afirmar sobre as raízes do exercício 8, você encontra alguma relação entre os gráficos das funções e as equações já estudadas no trimestre anterior? E aí, qual a relação entre as funções, essa função estudada e...

**A5: Quando não tem raiz real é porque a Bháskara não pertence aos reais. [COOP+TDM]**

Fonte: Dados do experimento final.

White e Martin (2014) e Bairral (2017) discorreram sobre as potencialidades do *touchscreen* em auxiliar na construção de conhecimentos matemáticos. No quadro 60, A3 e A5 exploram as raízes das funções quadráticas, os zeros da função. No início do diálogo a professora pergunta a A3 como ela sabia encontrar as raízes das funções e sua resposta, de imediato foi: onde o gráfico corta o eixo x. Entendemos que o aplicativo se fez presente para auxiliá-los na visualização e realização das tarefas.

Mais ao final do diálogo uma construção dos estudantes aplicando as equações do 2º grau com as atividades sobre função quadrática. Quando o gráfico não corta o eixo x, A5 e A3 comentam que a função não possui raiz real e a professora intervém para relacionar essa interpretação com as equações do 2º grau. Decorre que os estudantes utilizaram o que já

havia estudado e aplicaram esse conhecimento nessas atividades ao explorarem no aplicativo os gráficos das funções. Novamente, entendemos que o aplicativo seja o meio para que as discussões tenham acontecido entre os sujeitos.

As ações cooperativas permearam no quadro 60. A3 e A5 estão constantemente expondo seus argumentos para identificarem que a resolução das equações do 2º grau já estudadas e o gráfico da Função Quadrática estão conectados. Consideramos que essa conclusão dos estudantes ocorreu pelas formas de representação do sujeito possibilitadas pela tecnologia juntamente aos diálogos que caracterizamos como cooperativos entre eles. Assim como Bona (2012) menciona que a cooperação pode ser criadora de novas realidades, Batista (2011) comenta que as tecnologias móveis podem ampliar as possibilidades de explorações.

Quadro 61: Função quadrática. Atividade 10.

A3: Deixa eu ver,  $ax^2 + bx + c = 0$ .  
 Professora: Lembra que isso aqui chega na bhaskara?  
 A3: Aham, eu lembro, todo aquele cálculo.  
 Professora: Só o que acontece na bhaskara? O delta ele não pode ser...  
**A5: Zero. [COOP+TDM]**  
**A3: Zero. [COOP+TDM]**  
**A5: Não, negativo. [COOP+TDM]**  
 Professora: Negativo, então nem sempre vai ter raiz real.  
**A5: O delta pode ser zero né? [COOP+TDM]**  
**A3: Pode. [COOP+TDM]**  
**A5: Fica bugado, mas pode. [COOP+TDM]**  
**A3: Não, fica bom de fazer... [COOP+TDM]**  
 Professora: Tá, então, qual a definição... vamos pensar agora desenho do gráfico, qual a definição pra função afim no desenho do gráfico?  
**A5: Ela sempre tem raiz. [COOP+TDM]**  
 Professora: No desenho do gráfico da função quadrática?  
**A3: É uma...é uma curva...não é curva é côncava, é uma curva meio côncava assim. [COOP+TDM]**  
 Professora: Olhem pro eixo y, pensem que o eixo y é um espelho. Os valores que estão aqui pra x...  
**A3: um espelho o eixo y, tá. [COOP+TDM]**  
 Professora: Pra y são os mesmos...  
**A3: Em x. [COOP+TDM]**  
 Professora: Do outro lado, ou seja, por que que acontece isso, que as vezes pra dois valores diferentes de x a gente tem um mesmo y na parábola? Assim ó. Por que as vezes a gente tem um x aqui, um x aqui, mas um mesmo y, ó? Ela é o que?  
**A5: Simétrica. [COOP+TDM]**  
 Professora: Por que ela é simétrica? Pensem na forma dela.  
**A5: Porque é  $x^2$ . [COOP+TDM]**  
**A3:  $x^2$ . [COOP+TDM]**  
 Professora: Sim, e o  $x^2$  quando a gente quer resolver, sei lá, eu tenho que isso aqui é igual a um mesmo y que é igual a zero, tá? o que eu vou encontrar quando eu igualo isso aqui a zero?  
**A5: Sempre dois valores. [COOP+TDM]**

Professora: Dois valores, por causa da resolução da?

**A5: Da equação. [COOP+TDM]**

Professora: Então a parábola é simétrica, a gente pode dizer isso agora...

**A5: Porque quando a gente resolve a equação do 2º grau a gente sempre encontra dois valores pra x. [COOP+TDM]**

Professora: Isso ai.

Fonte: Dados do experimento piloto.

No quadro 61 notamos como foi importante os estudantes já terem tido o contato com as equações de 2º grau para entenderem o porquê da parábola possuir um eixo de simetria. Nessa atividade a professora pesquisadora auxiliou A3 e A5 a relacionarem o conhecimento adquirido anteriormente com o gráfico explorado no aplicativo.

Concluimos que na resolução desta atividade o *GeoGebra Graphing Calculator* possibilitou ao sujeito um contato diferenciado com os dados e nas discussões dos estudantes auxiliando-os na visualização, manipulação e criação de conjecturas matemáticas sobre as funções quadráticas. A cooperação se fez presente em praticamente todos os diálogos proporcionando aos estudantes a elaboração e construção de seu conhecimento.

Constatamos que os escritos sobre as tecnologias móveis na Educação Matemática, o que Bairral (2017), White e Martin (2014), Batista (2011) e os outros, citados nos trabalhos já realizados, vão ao encontro com o que aconteceu nesta atividade, que a tecnologia móvel proporcionou aos estudantes a construção de ideias matemáticas por meio do recurso *touchscreen* que possibilitou aos sujeitos o levantamento de hipóteses, as explorações gráficas, simulações e visualizações. Além disso, o aplicativo foi o meio para que as discussões e trocas de proposições entre os estudantes acontecessem.

Por fim, a cooperação de Piaget (1973) se fez presente com as trocas de ideias em equilíbrio fazendo com que os estudantes discutissem sobre matemática para a busca da construção de seus conhecimentos sobre as funções estudadas. Por meio de ações de correspondência, complementaridade e reciprocidade a cooperação se fez presente contribuindo para que o sujeito se liberasse de seu egocentrismo intelectual para que em grupo, coletivamente, pudesse ir em busca da autonomia tornando-se o ator principal no desenvolvimento do seu conhecimento.

## 5. ANÁLISE GLOBAL DOS EXPERIMENTOS

Vislumbramos que após a realização dos dois experimentos didáticos precisamos articular as reflexões que foram originadas a partir das relações entre os dois momentos da experimentação desta pesquisa. Vamos analisar como o conceito de cooperação de Jean Piaget e a utilização do aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator* pelo *smartphone* contribuíram para o andamento dessa pesquisa durante a aplicação dos dois experimentos.

Iniciamos esse estudo a partir dos aportes teóricos sobre a cooperação e a utilização das tecnologias móveis, tendo em vista que foi um anseio da pesquisadora em explorar o trabalho coletivo na sala de aula e os *smartphones* estarem presentes no cotidiano dos sujeitos dessa pesquisa influenciou na elaboração da sequência de atividades aplicada nos dois experimentos.

A partir da ideia de abordar uma sequência de atividades que envolvesse o trabalho coletivo e a utilização do *smartphone*, delimitamos como objetivo principal: Observar, analisar e refletir sobre o trabalho coletivo dos estudantes no estudo de funções ao fazer uso das tecnologias móveis a partir de ações subsidiadas por meio de diálogo entre os pares.

Ao elaborarmos o objetivo principal, elencamos três objetivos específicos para serem cumpridos ao longo do desenvolvimento da pesquisa. São eles: (1) Planejar e executar uma sequência de atividades que envolvesse a exploração das funções de variável real por meio do uso da tecnologia móvel; (2) Averiguar se em um ambiente coletivo que envolva ações cooperativas houve construção de conceitos matemáticos sobre funções de variável real por parte dos sujeitos e (3) Investigar como o uso de dispositivos móveis auxiliou os estudantes participantes da pesquisa na exploração do assunto funções, funções afins e funções quadráticas. Assim, pensamos inicialmente que tipo de atividades fariam parte da sequência. A partir da definição das mesmas que seriam exploradas pelos sujeitos participantes da pesquisa, construímos a sequência de atividades (apêndice D).

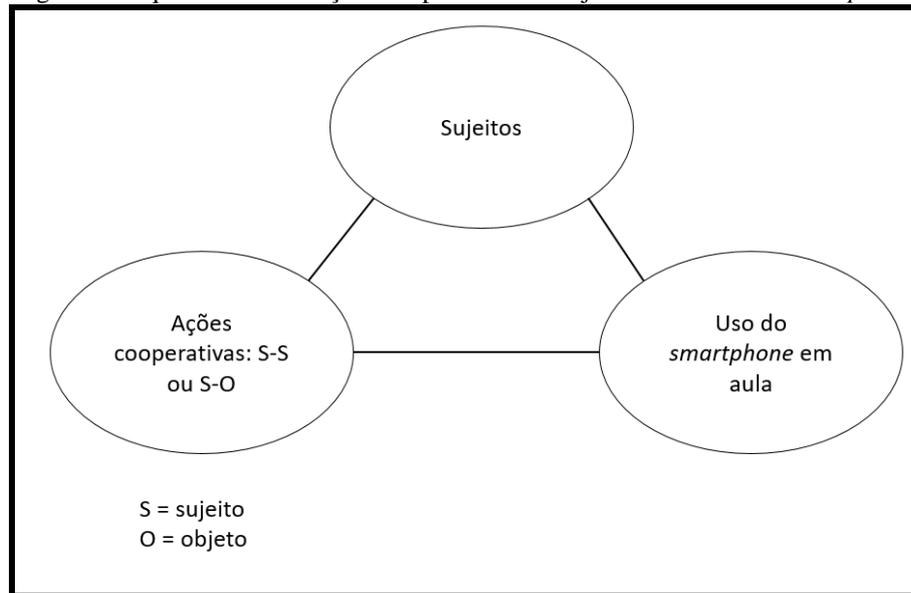
A Introdução às Funções foi o primeiro contato, em relação à pesquisa, que a pesquisadora teve com os estudantes participantes e os dados produzidos por eles para o estudo. Um grupo de três sujeitos de uma mesma turma da escola privada em que a pesquisa aconteceu, compuseram os dados do experimento piloto. O segundo experimento que denominamos o experimento final dessa pesquisa ocorreu com dois grupos distintos de sujeitos da mesma turma dos sujeitos que participaram do experimento piloto. O grupo 1 foi composto de 2 estudantes e o grupo 2 de três componentes.

Como evidenciado na análise dos dados desse experimento piloto, percebemos como o trabalho coletivo permeou durante a resolução da atividade. Os sujeitos envolvidos dialogaram entre si para convergirem ao final a um acordo sobre o que entendiam sobre os conceitos de Função. Expomos como Piaget (1973) exemplifica o conceito de cooperação. Ações que os sujeitos exercem de complementaridade, correspondência e reciprocidade para, assim, entrarem em equilíbrio e convergirem para a autonomia e construção do conhecimento. Nesse primeiro exercício de pesquisa, os estudantes demonstraram que a partir das interações uns com os outros as ações cooperativas os levaram à construção de hipóteses sobre variáveis dependentes e independentes, grandezas e função, cumprindo o segundo objetivo específico elencado nessa pesquisa.

No segundo experimento não houveram mudanças na estrutura da atividade de Introdução às Funções, tendo em vista que sujeitos diferentes iriam realizar essa sequência e conseguimos aplicar as atividades de Função Afim e Quadrática. Evidenciamos na análise do experimento final a presença da cooperação e da influência do aplicativo na resolução das atividades. Entendemos que a tecnologia móvel atuou nesse experimento como propulsor dos diálogos e debates entre os pares. Suas potencialidades de oferecer aos sujeitos a mobilidade, praticidade, experimentações, visualizações, levantamento de hipóteses etc. favoreceram a emersão das ações cooperativas. Assim, consideramos que o terceiro objetivo dessa pesquisa também foi alcançado. Entendemos que os dois experimentos realizados puderam nos ajudar a responder à questão central elaborada no início dessa pesquisa, pois foi a partir dela que o objetivo geral e os objetivos específicos foram elaborados com fins de respondê-la.

A partir da realização dos objetivos elencados nessa pesquisa a partir da execução e análise dos experimentos citados, construímos um esquema que compreendemos ser derivados das análises expostas sobre o trabalho coletivo, o uso da tecnologia móvel e a construção dos conceitos matemáticos sobre funções pelos sujeitos.

Figura 8: Esquema sobre as ações cooperativas do sujeito com o uso do *smartphone*.



Fonte: Arquivo pessoal.

A figura 8 expressa nosso entendimento a partir da análise dos dados produzidos. Os sujeitos a partir de ações cooperativas e com a utilização do *smartphone* conseguiram dialogar com intuito de resolverem as atividades propostas. Sujeito exercendo ações sobre outro sujeito a partir das operações de complementaridade, correspondência e reciprocidade, assim como sujeito e objeto. Consideramos que essas três vertentes estão conectadas, conexão expressa pelos segmentos, e que cada uma exerceu influência na promoção da busca da construção do conhecimento matemático.

Piaget (1973) menciona que a cooperação consiste em um sistema de ações. Essas ações quando sujeitos agem sobre o objeto ou sujeitos agindo uns sobre os outros compõem um único sistema. A figura 8, em nossa concepção, expressa esse sistema. Na exposição dos dados produzidos pelos estudantes percebemos e identificamos o que entendemos sobre trocas de proposições que Piaget (1973) caracterizou. Durante a resolução da sequência de atividades, entendemos que as ações e as trocas entre os sujeitos ocorreram quando os mesmos estavam trocando ideias e conjecturando hipóteses sobre os conceitos abordados. As ações entre sujeito e objeto se deram por meio da utilização e manuseio do aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator*. A partir da manipulação do aplicativo, os estudantes expuseram e trocaram suas ideias e hipóteses sobre o papel dos parâmetros das Funções Afim e Quadrática.

Consideramos que a utilização do *smartphone* proporcionou aos estudantes a emergência das ações cooperativas. Nos aportes teóricos expusemos as potencialidades da utilização das tecnologias móveis no Ensino de Matemática. Entendemos que explorar esses recursos

durante a resolução da sequência de atividades dessa pesquisa contribuiu para que os estudantes pudessem visualizar e manipular os gráficos para elaborarem suas hipóteses sobre os papéis dos parâmetros os zeros das funções, entre outros. Entendemos que a partir das ações entre sujeitos e objeto, os diálogos entre os pares aconteceram de forma que os estudantes conseguiram evidenciar suas perspectivas sobre os conceitos abordados.

A partir do trabalho em grupo na resolução de atividades subsidiadas pelo uso do *smartphone* e com características cooperativas, houveram muitos desequilíbrios e novos equilíbrios a cada desequilíbrio provocada pela interlocução com os pares e com os objetos em análise registrados no GeoGebra. Os estudantes se liberaram de seu egocentrismo intelectual para que o estado de equilíbrio fosse atingido. Entendemos que o estado de equilíbrio foi evidenciado nas análises dos dois experimentos dessa pesquisa. Nos diálogos em que os estudantes expuseram suas perspectivas sobre os conceitos abordados, percebemos as ações de complementaridade, reciprocidade e correspondência. Assim, identificamos que houve cooperação. Além disso, as conjecturas e hipóteses matemáticas elaboradas e evidenciadas por eles nesse estudo expressaram seus entendimentos sobre os conceitos abordados. Logo, compreendemos que a partir das ações cooperativas, os sujeitos puderam liberar-se do seu egocentrismo para buscar sua autonomia na construção do conhecimento.

Ao propormos uma sequência de atividades que envolveu o trabalho coletivo e o uso do *smartphone* foi oportunizado aos estudantes construir suas perspectivas sobre a matemática. Ou seja, ao ofertar aos estudantes o estudo da Introdução às Funções, Função Afim e Quadrática, os levou além da construção desses conceitos. Percebemos que os estudantes desempenharam seu papel cooperativo inseridos no ambiente de sala de aula. Além disso, o trabalho coletivo evidenciou a autonomia dos mesmos ao executarem as atividades propostas. Assim, por meio de uma análise dos dados produzidos no âmbito dessa pesquisa, entendemos que ao explorar ambientes que oportunizem algum trabalho coletivo aliado à utilização da tecnologia móvel possa favorecer a ocorrência de ações cooperativas, sendo que essas são indispensáveis “à elaboração da razão” (PIAGET, 1973, p.5).

## 6 REFLEXÕES FINAIS

Propomos neste capítulo expor algumas reflexões produzidas a partir da presente pesquisa. No início da construção desse estudo objetivamos observar, analisar e refletir sobre o trabalho coletivo de estudantes no estudo de funções ao fazer uso das tecnologias móveis a partir de ações subsidiadas por meio do diálogo entre os pares. Para isso planejamos uma sequência de atividades sobre funções de variável real com o uso de tecnologia móvel, averiguamos que em um ambiente coletivo houve construção de conceitos matemáticos por parte dos sujeitos e investigamos que o uso do *smartphone* auxiliou os estudantes no estudo das funções.

Para podermos ao longo da pesquisa tentar responder à questão que norteou essa pesquisa que foi: “Como ocorre o trabalho coletivo de estudantes do oitavo ano no estudo de funções de variável real com o uso de *smartphones*? ”. Inicialmente, construímos um referencial teórico a partir do trabalho de Piaget (1973) sobre cooperação e autores que debatem sobre o uso de dispositivos móveis na educação matemática que foram eles: Bairral (2017), White e Martin (2014), Batista (2011), entre outros. A partir do estudo de Piaget (1973) que menciona que a cooperação influencia na elaboração da razão do sujeito e os dispositivos móveis auxiliam na aprendizagem, construímos uma sequência de atividades que visaram a exploração desses conceitos no estudo de funções.

Sobre o emprego das tecnologias móveis em aulas de matemática consideramos que a utilização do *smartphone* desempenhou um papel essencial no desenvolvimento da pesquisa. Sem os recursos tecnológicos não seria possível os estudantes interagirem com o aplicativo pelo recurso *touchscreen* que possibilitou a visualização e manipulação das funções afim e quadrática para eles construírem seus argumentos sobre esses conceitos matemáticos. Além disso, relacionamos e entendemos a convergência entre os autores utilizados nessa pesquisa que dialogam sobre o uso e as potencialidades das tecnologias digitais móveis na educação matemática e as ações dos sujeitos da pesquisa enquanto utilizavam seus *smartphones*. Ao manipularem o aplicativo com as funções o diálogo entre os estudantes emergiu e assim eles puderam construir suas hipóteses e conjecturas sobre os conceitos matemáticos explorados.

A cooperação de Piaget (1973) surgiu nessa pesquisa para estudarmos como ocorre o trabalho coletivo entre os estudantes. Entendemos que Estudos Sociológicos seja uma leitura densa teoricamente, mas proporcionou a professora pesquisadora um entendimento sobre como o processo que pode levar a aprendizagem é importante para o sujeito. Piaget (1973) menciona que a cooperação é indispensável a elaboração da razão e percebemos que os

estudantes, durante a elaboração da sequência de atividades, cooperaram para assim entrarem em acordo e possivelmente irem em busca da construção de um conceito matemático. As ações que classificamos como cooperativas durante a análise dos diálogos mostraram como um sujeito pode exercer ação sobre o outro assim como um objeto, manipulação do aplicativo, pode ser o meio para que os sujeitos dialoguem sobre matemática. Assim, as interações sujeito- sujeito e sujeito-objeto, como Piaget (1973) menciona, formam um conjunto de sistemas que caracterizam a cooperação.

Após realizadas as análises dos experimentos constatamos como foi válido proporcionar a esses estudantes ambientes coletivos com investigações e utilização de um aplicativo em um dispositivo móvel nas aulas de matemática. Entendemos que a partir das explorações das atividades os diálogos entre os sujeitos emergiu de forma que os mesmos caminharam na busca e construção de conceitos matemáticos sobre as funções. Além disso, os debates entre eles e a manipulação do aplicativo propiciaram união entre as equações de 1° e 2° grau com as funções afim e quadrática, relação estabelecida pelos estudantes.

Para construirmos uma resposta sobre como o trabalho coletivo ocorreu entre os estudantes ao utilizarem o *GeoGebra Graphing Calculator* entendemos que a partir das discussões e trocas de ideias entre os sujeitos convergindo para uma ação cooperativa propiciou aos mesmos a construção de conceitos matemáticos. Mostramos que na atividade de introdução às funções, após muitos diálogos e trocas de proposições, ocorreu o estabelecimento de conjecturas sobre os conceitos primordiais das funções: as grandezas, variáveis e função. Na função afim, os estudantes resolveram problemas e com o aplicativo estabeleceram conjecturas sobre os parâmetros da função, inclusive a caracterizaram. Por fim, na função quadrática, os estudantes estabeleceram relações com o conteúdo já estudado (equações de 2° grau) com a função quadrática, aplicaram um conhecimento para ir em busca de outro.

Desta forma, consideramos importante a exploração de trabalhos que incitem a cooperação entre os estudantes e utilizem a tecnologia móvel para propiciar debates e possivelmente, a construção do conhecimento. Evidenciamos que no momento das atividades os estudantes não necessitaram da ajuda constante da professora, evidenciando momentos de autonomia por parte dos envolvidos.

Destacamos que esse estudo vem contribuir para a Educação Matemática para proporcionar aos professores aulas que oportunizem seus estudantes a experimentação, criação, discussão de novas realidades e construção de seus próprios conhecimentos. No

apêndice D trazemos a sequência de atividades realizada nessa pesquisa. Entendemos que ela seja um produto que pode contribuir para alterações no contexto escolar.

Olhar para o diálogo entre os pares na sala de aula é um elemento necessário que leva os estudantes a aprendizagem. Além disso, ao oportunizar um trabalho que valorize ações coletivas, onde os sujeitos interajam entre si contribui tanto para o grupo quanto para individual. Assim, entendemos que ele se libera do seu egocentrismo intelectual e segue na construção da sua autonomia. Logo, enfatizamos a importância de explorar em sala de aula atividades coletivas com características cooperativas.

## 7 REFERÊNCIAS

- BAIRRAL, Marcelo Almeida. As manipulações em tela compoem a dimensão corporificada da cognição matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 10, n. 2, p. 99-106, 2017.
- BAIRRAL, Marcelo Almeida. Dimensões a considerar na pesquisa com dispositivos móveis. **Estudos avançados**, v. 32, n. 94, p. 81-95, 2018.
- BAIRRAL, Marcelo Almeida. Do clique ao touchscreen: novas formas de interação e de aprendizado matemático. **REUNIÃO NACIONAL DA ANPED**, v. 36, p. 1-18, 2013.
- BATISTA, Silvia Cristina Freitas. **M-LEARNMAT: modelo pedagógico para atividades de m-learning em matemática. 2011. 225 f.** 2011. Tese de Doutorado. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/48916>. Acesso em: 29 jul. 2020.
- BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.** Porto Editora, 1994.
- BONA, Aline Silva de. **Espaço de aprendizagem digital da matemática: O aprender a aprender por cooperação.** Tese (Doutorado em Informática na Educação)- Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/63132>. Acesso em: 29 jul. 2020.
- BONA, Aline Silva de et al. APRENDENDO MATEMÁTICA NA REDE SOCIAL FACEBOOK POR AÇÕES COOPERATIVA. **ScientiaTec**, v. 1, n. 1, 2014.
- BONA, Aline Silva de; BASSO, Marcus Vinicius; FAGUNDES, Léa da Cruz. A cooperação e/ou a colaboração no Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática. **RENOTE-Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 9, n. 2, 2011. Disponível em: <https://www.seer.ufrgs.br/renote/article/view/25163>. Acesso em: 29 jul. 2020.
- BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, DF, 2018.
- CAMARGO, Liseane Silveira; BECKER, Maria Luíza Rheingantz. O percurso do conceito de cooperação na epistemologia genética. **Educação & Realidade**, v. 37, n. 2, p. 527-549, 2012. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/educacaoerealidade/article/view/17341>. Acesso em: 29 jul. 2020.
- CARVALHO, Luís Filipe de Sousa et al. **Utilização de dispositivos móveis na aprendizagem da matemática no 3.º ciclo.** 2015. Dissertação de Mestrado. Universidade Portucalense.

CARVALHO, Sérgio Freitas; SCHERER, Suely. O Uso da Lousa Digital: possibilidades de cooperação em aulas de matemática. **EM TEIA| Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 4, n. 3, 2014. Disponível em:

<https://periodicos.ufpe.br/revistas/index.php/emteia/article/view/2224>. Acesso em: 29 jul. 2020.

CONCORDIDO, Cláudia Ferreira Reis; BARBOSA, Augusto Cesar de Castro; SILVA, Bruno Guimarães da. Gráficos de funções utilizando o GeoGebra em smartphones. In: **XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática**. 2018. Disponível em:

<http://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/view/225>. Acesso em: 29 jul. 2020.

CORBELLINI, Silvana. Cooperação: uma alavanca no processo de ensino-aprendizagem na educação a distância. **RENOTE-Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 9, n. 2, 2011. Disponível em

<https://www.seer.ufrgs.br/renote/article/view/25109>. Acesso em: 29 jul. 2020.

CORDEIRO, Salette de Fátima Noro. **Tecnologias digitais móveis e cotidiano escolar: espaços/ tempos de aprender**. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação. Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015. Disponível em:

<https://repositorio.ufba.br/ri/handle/ri/17729>. Acesso em: 29 jul. 2020.

CRUZ, Andressa Maria da. **Potencialidades da utilização do Software GeoGebra para o desenvolvimento do conteúdo de funções exponenciais através do smartphone**.

Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2018. Disponível em:

<https://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/10074>. Acesso em: 29 jul. 2020.

FAGUNDES, Léa da Cruz et al. Projetos de Aprendizagem - Uma Experiência Mediada por Ambientes Telemáticos. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, [S.l.], v. 14, n. 1, abr. 2006. ISSN 2317-6121. Disponível em:

<https://www.brie.org/pub/index.php/rbie/article/view/37/31>. Acesso em: 29 jul. 2020. doi:

<http://dx.doi.org/10.5753/rbie.2006.14.1.%p>.

FLICK, Uwe. **Introdução à pesquisa qualitativa**; tradução. Joice Elias Costa. - 3. ecl. - Porto Alegre: Artmed, 2009v. 405 p.

FRANKLIN, Teresa; PENG, Li-Wei. Mobile math: Math educators and students engage in mobile learning. **Journal of computing in higher education**, v. 20, n. 2, p. 69-80, 2008. Disponível em:

<https://www.learntechlib.org/p/68028/>. Acesso em: 29 jul. 2020.

GERSTBERGER, André et al. Uma prática pedagógica utilizando o aparelho celular nas aulas de matemática em uma turma de ensino médio. **Revista Caderno Pedagógico**, v. 13, n. 1, 2016. Disponível em:

<http://www.univates.com.br/revistas/index.php/cadped/article/view/994>. Acesso em: 29 jul. 2020

GOMES, Ruth Cristina Soares; GHEDIN, Evandro. O desenvolvimento cognitivo na visão de Jean Piaget e suas implicações a educação científica. **VIII Encontro Nacional de Pesquisa, ABRAPEC 2011**, 2012. Disponível em:

[http://abrapecnet.org.br/atas\\_enpec/viii/enpec/resumos/R1092-2.pdf](http://abrapecnet.org.br/atas_enpec/viii/enpec/resumos/R1092-2.pdf). Acesso em: 29 jul. 2020.

HIGUCHI, Adriane Aparecida da Silva et al. **Tecnologias móveis na educação**. Dissertação (Mestrado em Educação, Arte e História da Cultura). Universidade Presbiteriana Mackenzie. São Paulo. 2011. Disponível em: <http://tede.mackenzie.br/jspui/handle/tede/1818>. Acesso em: 29 jul. 2020.

KRAKECKER, Liana et. al. Uma discussão sobre a definição de trapézio por meio do Software Geogebra. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 12, n. 1, p. 133-144, 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2017v12n1p133>. Acesso em: 29 jul. 2020.

LADEIRA, Vanessa Pinheiro. **O ensino do conceito de funções em um ambiente tecnológico: uma investigação qualitativa baseada na teoria fundamentada sobre a utilização de dispositivos móveis em sala de aula como instrumentos mediáticos da aprendizagem**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto. 2015. Disponível em:

<https://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/5761>. Acesso em: 29 jul. 2020.

LIMA, C. C. et al. Aprender com mobilidade: utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação Móveis e Sem Fio como potencializadoras da interação em processos educativos. **RENOTE- Novas tecnologias na Educação**. V. 12 Nº 1, julho, 2014. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/49828>. Acesso em: 29 jul. 2020.

MARQUES, Tânia Beatriz Iwazsko. Professor ou Pesquisador? In: BECKER, Fernando; MARQUES, Tânia Beatriz Iwazsko. (orgs); **Ser professor é ser pesquisador**. Porto Alegre: Mediação, 2007.

MARTINS, André Dias; BIANCHINI, Luciane Guimarães Batistella; YAEGASHI, Solange Franci Raimundo. Webquest e a Afetividade Presente na Construção de Conhecimento Matemático por Alunos do Ensino Médio. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 289-309, Abril. 2017. Disponível em: [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0103636X2017000100016&lng=en&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103636X2017000100016&lng=en&nrm=iso). Acesso em: 29 jul. 2020. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a14>.

MARTINS, Ernane Rosa et al. Tecnologias Móveis em Contexto Educativo: uma Revisão Sistemática da Literatura. **RENOTE-Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 16, n. 1, 2018. Disponível em: <https://www.seer.ufrgs.br/renote/article/view/85926>. Acesso em: 29 jul. 2020.

MOURA, Adelina; CARVALHO, Ana Amélia Amorim. Enquadramento teórico para integração de tecnologias móveis em contexto educativo. **TIC Educa 2010 : actas do ENCONTRO INTERNACIONAL TIC E EDUCAÇÃO**, 1, Lisboa, Portugal, 2010. ISBN 978-989-96999-1-5. p. 1001-1006. Disponível em: <https://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/11140>. Acesso em: 29 jul. 2020.

NOGUEIRA, Eduardo Leandro Peres. **O uso da calculadora gráfica GeoGebra no smartphone como ferramenta para o ensino das funções exponencial e logarítmica**. Dissertação (Mestrado em Profissional em Matemática em Rede Nacional)- Departamento de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2018. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/25377>. Acesso em: 29 jul. 2020.

OBATA, Joice Yuko. **Possibilidades que se abrem para ensino de matemática mediado por tecnologias digitais móveis**. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização Inovação e Tecnologias na Educação) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2019. Disponível em: <http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/15963>. Acesso em: 29 jul. 2020.

OLIVEIRA, Bianca de. As contribuições psicogenéticas para a convivência democrática: da escola para a vida. **Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas**. v. 11, n. 2, p. 145-163, 2019. Disponível em: <http://www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/scheme>. Acesso em: 29 jul. 2020.

OLIVEIRA, Carloney Alves; SILVA, Jenekésia Lins. Possibilidades pedagógicas do uso das tecnologias móveis no ensino de matemática na perspectiva da m-learning. **Revista BoEM**, v. 6, n. 11, p. 200-221, 2018. Disponível em: <http://www.periodicos.udesc.br/index.php/boem/article/view/11918>. Acesso em: 29 jul. 2020.

PADILHA, Willian Rocha; PRADO, Maria Elisabette Brisola Brito. O professor de matemática e as tecnologias digitais móveis no ensino de função polinomial do 1º grau. In: FLORES, Rebeca. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa** pp. 1007-1013. México, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

PIAGET, Jean. Estudos Sociológicos. Rio de Janeiro: Forense, 1973.

PIAGET, Jean. O trabalho por equipes na escola: notas psicológicas. **Revista de Educação**, v.15/16, p.3- 17, 1936. Versão adaptada por Andrea A. Botelho, 1993, 14p.

ROCHA, Willian; BRISOLA, Maria. O professor de matemática e as tecnologias digitais móveis no ensino de função polinomial do 1º grau. In: **Flores, Rebeca (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa** (pp. 1007-1013). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Disponível em <http://funes.uniandes.edu.co/12415/>. Acesso em: 29 jul. 2020.

ROMANELLO, Laís Aparecida. Potencialidades do uso do celular na sala de aula: atividades investigativas para o ensino de função. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática),

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2016. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/148613>. Acesso em: 29 jul. 2020.

SENA, Denise Maciel et al. Aplicativos móveis para o aprendizado de matemática. In: **Brazilian Symposium on Computers in Education (Simpósio Brasileiro de Informática na Educação-SBIE)**. 2014. p. 174. Disponível em : <https://br-ie.org/pub/index.php/sbie/article/view/2943>. Acesso em: 29 jul. 2020.

SILVA, Rodrigo Sychocki da. Da zona de conforto à zona de risco: o tripé teórico-pedagógico-metodológico na formação inicial de professores de matemática. In: SILVA, Rodrigo Sychocki da, (orgs); **Diálogos e reflexões sobre tecnologias digitais na educação**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018.

SILVA, Rodrigo Sychocki da; PINTO, Shéridan dos Reis. Funções quadráticas e tecnologias móveis: ações cooperativas em um experimento no ensino médio. **Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias. Góndola, Ens Aprend Cienc. 14. Colombia, Universidad Distrital Francisco José de Caldas**, 2019. Vol. 14, n. 1 (Ene.-Jun. 2019), p. 108-125. Disponível em: <http://doi.org/10.14483/23464712.13317>. Acesso em: 29 jul. 2020.

SILVA, Rodrigo Sychocki da; RIBEIRO, Alexandre Moretto; SILVA, João Luis Tavares da. História da matemática & tecnologias da informação e comunicação: uma experiência semipresencial cooperativa na formação de professores. **Revista de Educação, Ciência e Tecnologia, Canoas**, v. 2, n. 2, p. 1-20, 2013. Disponível em: <https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/tear/article/view/1804>. Acesso em: 29 jul. 2020.

SONEGO, Anna Helena Silveira. **Arqped-mobile: Uma arquitetura pedagógica com foco na aprendizagem móvel**. Tese (Dourado em Educação) - Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/197443>. Acesso em: 29 jul. 2020.

STORMOWSKI, Vandoir. Vale a pena utilizar tecnologias digitais na educação? In: SILVA, Rodrigo Sychocki da, (orgs); **Diálogos e reflexões sobre tecnologias digitais na educação**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018.

TREVISIO, Vanessa Cristina. **As relações sociais para Jean Piaget: implicações para a educação escolar**. Dissertação (Mestrado Educação Escolar)- Programa de Pós-Graduação em Educação Escolar da Faculdade de Ciências e Letras. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Araraquara, 2013. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/90280>. Acesso em: 29 jul. 2020.

WHITE, Tobin; MARTIN, Lee. Mathematics and mobile learning. **TechTrends**, v. 58, n. 1, p. 64-70, 2014. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360131518300381>. Acesso em: 29 jul. 2020.

## APÊNDICE A- Termo de assentimento dos experimentos piloto e final

### TERMO DE ASSENTIMENTO

Você está sendo convidado a participar da pesquisa DO INDIVIDUAL AO COLETIVO NO ESTUDO DE FUNÇÕES REAIS: UM EXPERIMENTO COM TECNOLOGIAS MÓVEIS NO ENSINO BÁSICO , desenvolvida pela pesquisadora Shéridan dos Reis Pinto. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Rodrigo Sychocki da Silva a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do e-mail sychocki.rodrigo@gmail.com. Tenho ciência de que minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são: Observar, analisar e refletir sobre a construção de conhecimentos matemáticos pelos estudantes ao fazer uso das tecnologias móveis a partir de ações subsidiadas por meio de diálogo entre os pares. Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas por mim será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

Minha colaboração se fará por meio da realização de uma sequência de atividades, bem como da participação em encontro, em que serei observado(a) e minha produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante minha participação, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação. Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação.

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes para a educação matemática, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional. Minha colaboração se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado. Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no e-mail sherydrp@gmail.com. Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av. Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e [emailetica@propesq.ufrgs.br](mailto:emailetica@propesq.ufrgs.br).

Fui ainda informado(a) de que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2019.

Assinatura da pesquisadora:

Assinatura do Orientador da pesquisa:

Assinatura do estudante:

## **APÊNDICE B- Termo de concordância da instituição dos experimentos piloto e final**

### **TERMO DE CONCORDÂNCIA DA INSTITUIÇÃO**

Estamos realizando uma pesquisa intitulada: DO INDIVIDUAL AO COLETIVO NO ESTUDO DE FUNÇÕES REAIS: UM EXPERIMENTO COM TECNOLOGIAS MÓVEIS NO ENSINO BÁSICO, que tem como objetivos: observar, analisar e refletir sobre a construção de conhecimentos matemáticos pelos estudantes ao fazer uso das tecnologias móveis a partir de ações subsidiadas por meio de diálogo entre os pares. Para tanto, solicitamos autorização para realizar este estudo nesta instituição. Também será utilizado um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para cada responsável pelos participantes e um Termo de Assentimento Livre e Esclarecido para cada participante.

A produção dos dados envolverá a aplicação de uma sequência de atividades que deverá ser realizada em conjunto por cerca de 30 jovens no espaço da sala de aula com a presença do professor. A execução da sequência de atividades será realizada pela professora Shéridan dos Reis Pinto, que já atua na escola. Os participantes do estudo serão claramente informados de que sua contribuição é voluntária e pode ser interrompida em qualquer tempo sem nenhum prejuízo. A qualquer momento, tanto os participantes quanto os responsáveis pela Instituição poderão solicitar informações sobre os procedimentos ou outros assuntos relacionados a este estudo.

Todos os cuidados serão tomados para garantir o sigilo e a confidencialidade das informações, preservando a identidade dos participantes bem como das instituições envolvidas. Nenhum dos procedimentos realizados oferece riscos à dignidade do participante. Todo material desta pesquisa ficará sob responsabilidade da pesquisadora, Prof<sup>a</sup>. Shéridan dos Reis Pinto e, após cinco anos, será destruído. Dados individuais dos participantes coletados ao longo do processo não serão informados às instituições envolvidas ou aos familiares, e será realizada a devolução dos resultados, de forma coletiva, para a escola, se assim for solicitado. Agradecemos a colaboração dessa instituição para a realização desta atividade de pesquisa e colocamo-nos à disposição para esclarecimentos adicionais. O professor orientador dessa pesquisa é o Prof. Dr. Rodrigo Sychocki da Silva do Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS. Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Porto Alegre, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2019.

Assinatura da pesquisadora:

Assinatura do Orientador da pesquisa:

Concordamos que os jovens, que estudam no XXXXXXXXXXXXXXXX participem do presente estudo.

Coordenação da escola:

OBS: Esse termo foi disponibilizado a escola em novembro de 2019.

**APÊNDICE C- Termo de consentimento informado dos experimentos piloto e final**  
**TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO**

Eu, \_\_\_\_\_, R.G. \_\_\_\_\_, responsável pelo(a) aluno(a) \_\_\_\_\_, da turma \_\_\_\_\_, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada: DO INDIVIDUAL AO COLETIVO NO ESTUDO DE FUNÇÕES REAIS: UM EXPERIMENTO COM TECNOLOGIAS MÓVEIS NO ENSINO BÁSICO, desenvolvida pela pesquisadora Shéridan dos Reis Pinto. Fui informado (a), ainda, de que a pesquisa é orientada por Rodrigo Sychocki da Silva a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do e-mail sychocki.rodrigo@gmail.com. Tenho ciência de que a participação do (a) aluno (a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado (a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são: Observar, analisar e refletir sobre a construção de conhecimentos matemáticos pelos estudantes ao fazer uso das tecnologias móveis a partir de ações subsidiadas por meio de diálogo entre os pares. Fui também esclarecido (a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio da realização de uma sequência de atividades, bem como da participação em encontro, em que será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante sua participação, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação. Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação. Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes para a educação matemática, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar a pesquisadora responsável no e-mail sherydrp@gmail.com. Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av. Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e email etica@propesq.ufrgs.br. Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2019

Assinatura da pesquisadora:

Assinatura do Orientador da pesquisa:

Assinatura do responsável:

## APÊNDICE D- Produto técnico

### Produto técnico: sequência de atividades do experimento piloto

Neste apêndice apresentamos a sequência de atividades aplicadas no experimento piloto desta pesquisa. Além disso, trazemos sugestões de desenvolvimento em sala de aula. Ressaltamos que os professores poderão alterar a atividade se julgarem necessário. Sabendo que cada escola e cada estudante tem suas diferenças. Assim, ao utilizar as atividades aqui sugeridas, o professor poderá adequar de acordo com as necessidades e demandas da turma.

Contudo, desejamos contribuir com o meio acadêmico e escolar a partir de nossa experiência no desenvolvimento dessa pesquisa por meio da aplicação das atividades, sugerindo ações que podem aperfeiçoar a busca pelo conhecimento dos estudantes. Assim, cada “dia” (2 períodos de 50 minutos cada) de atividades proposta é acompanhado por recomendações de desenvolvimento das mesmas.

#### **Dia 1- Experimento Piloto- Atividade sobre Introdução às funções**

**Sugestão aos professores:** Como já mencionamos na metodologia e expusemos na análise de dados desta pesquisa, todas as atividades aqui apresentadas foram realizadas em grupo. A primeira atividade visa situar os estudantes às notícias econômicas do país em que vivem. Além de perguntas que incitam as opiniões pessoais de cada sujeito, a atividade objetiva que os sujeitos analisem gráficos e tabelas para ao final elencarem seus possíveis entendimentos sobre o conceito de função. A atividade demanda o diálogo entre os pares além de, se eles preferirem, sugere a possibilidade dos mesmos de utilizarem seus *smartphones* tanto para pesquisa na internet quanto ao uso do aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator* para a construção gráfica.

As duas primeiras questões demandam a análise gráfica sobre a situação econômica do país. O objetivo dessas questões é a visualização e compreensão da variação dos dados expostos nos gráficos. A questão 3, objetiva que os estudantes encontrem a taxa de variação e completem as tabelas com as informações que faltam. Elaboramos essa questão para contextualizar os estudantes com a ideia de variação, um prelúdio para depois adentrarem na função afim. Assim como já mencionado, planejamos essas atividades com a finalidade dos estudantes dialogarem entre si para a cooperação existir. Devido a esse objetivo, em cada questão constam a palavra “explore” para instigar e condicionar os estudantes ao diálogo.

Colocamos como opção aos estudantes a utilização do aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator* se assim eles o preferirem. White e Martin (2014), discorrem das potencialidades da utilização do recurso *touchscreen* no aprendizado de conceitos matemáticos. Entendemos que a tecnologia, nesse caso o aplicativo, desempenha um papel de mediar e auxiliar na

aprendizagem matemática dos estudantes, fornecemos aos estudantes a sugestão de utilizá-lo nestas atividades. Por fim, na questão 4, pretendemos atestar se os estudantes conseguiram construir conceitos ou alguma ideia sobre o conceito de função.

Os estudantes têm de responder o que eles entendem sobre Grandeza, variáveis dependente e independente e função. Utilizamos a palavra “explique” para estimular o pensamento do estudante para que em conjunto com seu colega de grupo consigam formular respostas para esses conceitos. Buscamos incentivar os estudantes aos equilíbrios de troca de Piaget (1973) exemplificados na fundamentação teórica desta pesquisa, para assim conter as ações cooperativas. Todas as atividades dessa primeira parte da sequência têm esse objetivo.

## Introdução às funções

1) “O ano de 2018 foi marcado por uma recuperação lenta da economia brasileira, pelo desemprego ainda elevado e pelo crescimento da informalidade. A inflação, por sua vez, permaneceu controlada, mas a disparada dos preços da gasolina e do diesel pesaram no bolso do brasileiro e no custo dos transportes. E foi um dos fatores que motivaram a greve dos caminhoneiros, que paralisou o país por 11 dias no final de maio, afetando a produção, o consumo e o PIB de 2018. Nos mercados, o dólar chegou a bater R\$ 4,19, nova máxima histórica, em meio a incerteza da corrida eleitoral, mas encerra o ano ao redor de R\$ 3,90, em meio às expectativas de uma agenda mais liberal e pró-mercado com a chegada de Jair Bolsonaro à Presidência. Já o Ibovespa, principal índice da bolsa brasileira, renovou máximas históricas no começo de dezembro, mas termina 2018 pressionado pelas preocupações com a desaceleração da economia mundial em meio a um cenário de tensão comercial entre Estados Unidos e China.”

(Disponível em: <https://g1.globo.com/retrospectiva/2018/noticia/2018/12/21/retrospectiva-2018-a-economia-brasileira-em-6-graficos.ghtml>). Considere a imagem abaixo:

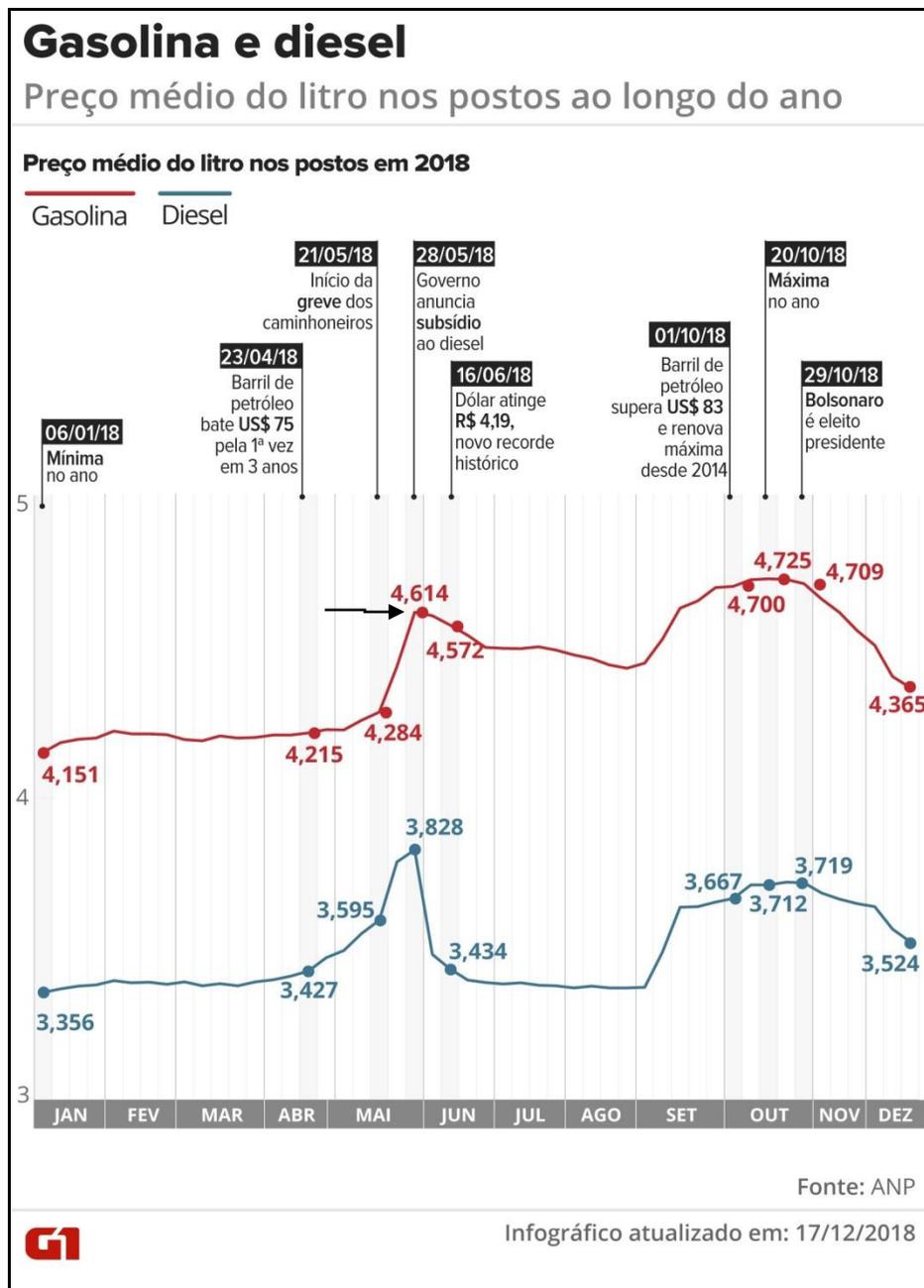


- a) Entre o período de janeiro até dezembro de 2018, o que você pode afirmar sobre as informações fornecidas pelo gráfico? Houve crescimento do país?

- b) Como você denomina essa variação do gráfico que expressa a expectativa de crescimento do país?

- c) Você pode identificar os motivos que explicam esse tipo de variação?

- 2) O gráfico abaixo expressa o preço médio do litro da gasolina e do diesel nos postos de abastecimento ao longo do ano de 2018.



Fonte: <https://g1.globo.com/retrospectiva/2018/noticia/2018/12/21/retrospectiva-2018-a-economia-brasileira-em-6-graficos.ghtml> Acesso em julho de 2020.

- a) Analisando o gráfico acima, o que você pode concluir sobre a variação do mesmo?

- b) Em qual (is) período (s) houve decréscimo no preço da gasolina e do diesel?

- c) Em qual (is) período (s) houve aumento no preço da gasolina e do diesel?

- d) Em qual desses períodos houve uma variação maior negativa? E em qual houve maior variação positiva?

- e) Expresse em coordenadas cartesianas o ponto indicado pela flecha.

- f) Se as coordenadas do ponto anterior trocassem de lugar (a primeira assumisse o valor da segunda e a segunda assumisse o valor da primeira), o que aconteceria com a interpretação dos dados? Explore.

Nas atividades 3 e 4, vocês podem contar com o auxílio do *GeoGebra Graphing Calculator*.

3) A tabela abaixo expressa o deslocamento de um veículo que parte da cidade de Gravataí-RS e pretende chegar em Araranguá- SC. Informação: Assumimos que a velocidade do veículo é constante.

Tempo (minutos)	Distância (Km)
0	0
15	25
30	50
45	75
60	100
75	125
90	150
105	175

120	200
135	225

Fonte: Arquivo pessoal

- a) Você consegue dizer qual a velocidade média por minuto do veículo? E a velocidade média por hora?

- b) Construa no *GeoGebra Graphing Calculator* o gráfico que expressa a distância percorrida em função do tempo percorrido por esse veículo.

- c) Em outra viagem o mesmo veículo, a uma velocidade média de 84 km/h, irá percorrer 500 km. Mantendo a mesma velocidade durante toda a viagem, complete a tabela.

Tempo (minutos)	Distância (Km)
20	
40	
60	84
80	
100	
120	168
140	
160	

- d) Qual vai ser a duração, em minutos, da viagem?

- 4) Após os problemas explorados anteriormente, a proposta é investigar os conceitos a seguir.

Explique o que você entende por:

- a) Grandeza.

- b) Variável dependente.

- c) Variável independente.

d) Função.

**Produto técnico: sequência de atividades do experimento final****Dia 1- Experimento final- Introdução às funções**

**Sugestão aos professores:** Esta primeira atividade aplicada no experimento final da pesquisa mantém os mesmos objetivos já delimitados no apêndice D sobre Introdução às funções do experimento piloto. Sugerimos aos professores irem ao apêndice D para a leitura dos objetivos de cada uma das atividades aqui expostas.

Assim como no experimento piloto, os estudantes realizaram essas atividades de Introdução às funções em um dia de aplicação (2 períodos de 50 minutos cada). As mudanças que destacamos da atividade do experimento piloto para essa é a flecha do gráfico 2 sobre o preço da gasolina e do diesel. Essa alteração se deu pelo mês de outubro ocorrer mais de um momento em que houve a variação no preço da gasolina, podendo promover debates entre os estudantes sobre qual é o par ordenado que pudesse expressar essas informações.

### Introdução às funções

1) “O ano de 2018 foi marcado por uma recuperação lenta da economia brasileira, pelo desemprego ainda elevado e pelo crescimento da informalidade. A inflação, por sua vez, permaneceu controlada, mas a disparada dos preços da gasolina e do diesel pesaram no bolso do brasileiro e no custo dos transportes. E foi um dos fatores que motivaram a greve dos caminhoneiros, que paralisou o país por 11 dias no final de maio, afetando a produção, o consumo e o PIB de 2018. Nos mercados, o dólar chegou a bater R\$ 4,19, nova máxima histórica, em meio a incerteza da corrida eleitoral, mas encerra o ano ao redor de R\$ 3,90, em meio às expectativas de uma agenda mais liberal e pró-mercado com a chegada de Jair Bolsonaro à Presidência. Já o Ibovespa, principal índice da bolsa brasileira, renovou máximas históricas no começo de dezembro, mas termina 2018 pressionado pelas preocupações com a desaceleração da economia mundial em meio a um cenário de tensão comercial entre Estados Unidos e China.” (Disponível em: <https://g1.globo.com/retrospectiva/2018/noticia/2018/12/21/retrospectiva-2018-a-economia-brasileira-em-6-graficos.ghtml>). Considere a imagem abaixo:

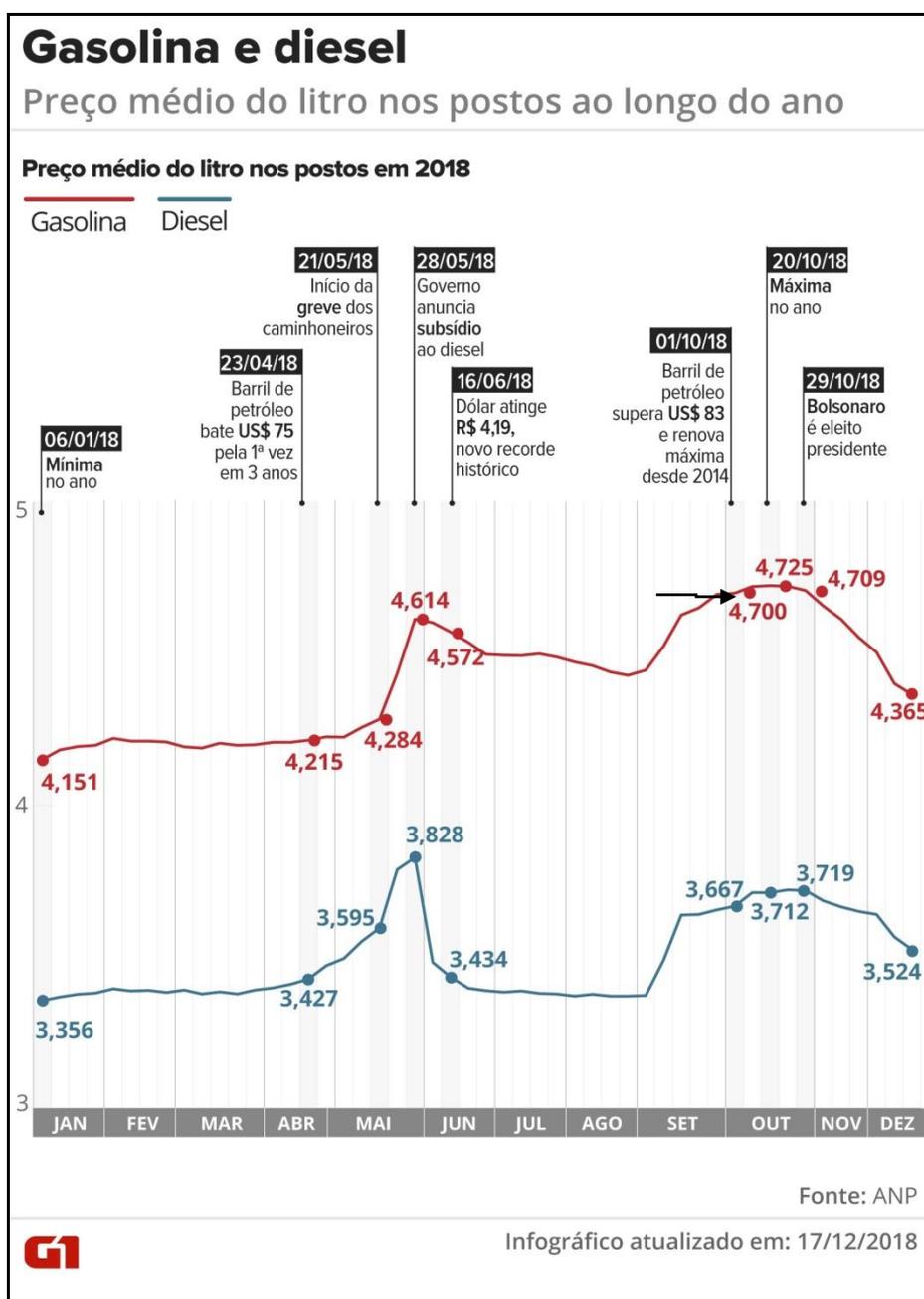


- a) Entre o período de janeiro até dezembro de 2018, o que você pode afirmar sobre as informações fornecidas pelo gráfico? Houve crescimento do país?

- b) Como você denomina essa variação do gráfico que expressa a expectativa de crescimento do país?

- c) Você pode identificar os motivos que explicam esse tipo de variação?

- 2) O gráfico abaixo expressa o preço médio do litro da gasolina e do diesel nos postos de abastecimento ao longo do ano de 2018.



Fonte: <https://g1.globo.com/retrospectiva/2018/noticia/2018/12/21/retrospectiva-2018-a-economia-brasileira-em-6-graficos.ghtml> . Acesso em julho de 2020.

a) Analisando o gráfico acima, o que você pode concluir sobre a variação do mesmo?

b) Em qual (is) período (s) houve decréscimo no preço da gasolina e do diesel?

c) Em qual (is) período (s) houve aumento no preço da gasolina e do diesel?

d) Em qual desses períodos houve uma variação maior negativa? E em qual houve maior variação positiva?

e) Exprese em coordenadas cartesianas o ponto indicado pela flecha.

f) Se as coordenadas do ponto anterior trocassem de lugar (a primeira assumisse o valor da segunda e a segunda assumisse o valor da primeira), o que aconteceria com a interpretação dos dados? Explore.

Nas atividades 3 e 4, vocês podem contar com o auxílio do *GeoGebra Graphing Calculator*.

3) A tabela abaixo expressa o deslocamento de um veículo que parte da cidade de Gravataí-RS e pretende chegar em Araranguá- SC. Informação: Assumimos que a velocidade do veículo é constante.

Tempo (minutos)	Distância (Km)
0	0
15	25
30	50
45	75
60	100
75	125
90	150
105	175
120	200
135	225

Fonte: Arquivo pessoal

- a) Você consegue dizer qual a velocidade média por minuto do veículo? E a velocidade média por hora?

- b) Construa no *GeoGebra Graphing Calculator* o gráfico que expressa a distância percorrida em função do tempo percorrido por esse veículo.

- c) Em outra viagem o mesmo veículo, a uma velocidade média de 84 km/h, irá percorrer 500 km. Mantendo a mesma velocidade durante toda a viagem, complete a tabela.

Tempo (minutos)	Distância (Km)
20	
40	
60	84
80	
100	
120	168
140	
160	

- d) Qual vai ser a duração, em minutos, da viagem?

- 4) Após os problemas explorados anteriormente, a proposta é investigar os conceitos a seguir.

Explique o que você entende por:

- a) Grandeza.

- b) Variável dependente.

- c) Variável independente.

- d) Função.

## **Dia 2: Experimento final- Função Afim**

**Sugestão aos professores:** A segunda atividade explora a experimentação sobre a função afim. Em todas as questões e problemas presentes nessa atividade objetivamos e tentamos promover o diálogo entre os pares para a emergência da cooperação. Entendemos que a elaboração de algumas questões sobre o problema 1, retirado e adaptado para essa sequência de atividades do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), fez com que questões sociais emergissem e os estudantes, em ações cooperativas, dialogaram sobre o mundo em que estão inseridos. Os debates estão exemplificados nos dados dessa pesquisa.

Escolhemos o problema 1 evidenciado na figura 7 do ENEM, pois com o mesmo elaboramos questões norteadoras que, entendemos, possam fazer emergir o diálogo entre os pares para assim promover a cooperação. Além disso, sugerimos nessa tarefa a utilização do aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator* para também auxiliar na emergência das ações cooperativas.

O problema 2 desta atividade de Função Afim foi retirado do livro *Funções Reais de uma Variável Real: um Curso EAD para Licenciatura*<sup>5</sup>. Escolhemos esse problema, pois o mesmo é uma aplicação prática de uma função afim. Acreditamos necessária a exploração deste pelos estudantes pela contextualização que o mesmo proporciona unindo equações do 1º grau e função afim.

Assim como nas atividades exemplificadas anteriormente, sugerimos na resolução de uma das questões deste problema a utilização do aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator*. Além da mediação que a tecnologia digital proporciona aos estudantes de matemática, Moura e Carvalho (2010) citadas nos aportes teóricos dessa pesquisa, enfatizam que essa utilização também é uma forma de motivação dos estudantes para estudar matemática.

Elaboramos 8 atividades focadas no uso do aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator*. Buscamos explorar as potencialidades do aplicativo no *smartphone* explícitas nos aportes teóricos dessa pesquisa para favorecer às ações cooperativas dos estudantes. Além disso, o objetivo dessas atividades é a investigação dos estudantes sobre os papéis dos parâmetros da função afim e o desenho gráfico para que na última atividade possam refletir e dizer o que entenderam sobre o conceito dessa função.

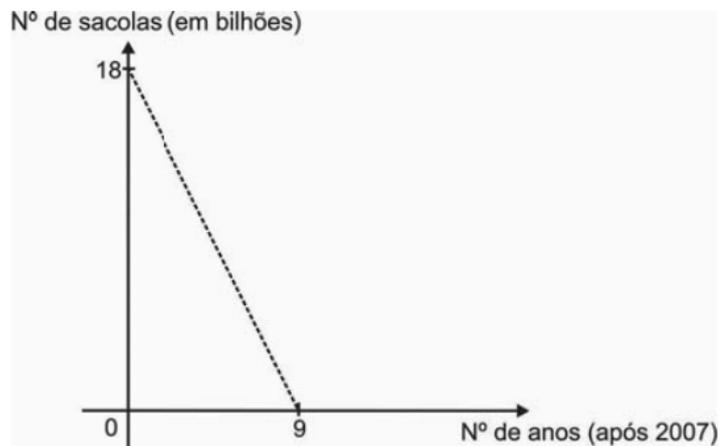
---

<sup>5</sup>Livro disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/199720>. Acesso em julho de 2020.

### Função Afim

As atividades abaixo podem ser resolvidas com o auxílio do aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator*.

**Problema 1.:** As sacolas plásticas sujam florestas, rios e oceanos e quase sempre acabam matando por asfixia peixes, baleias e outros animais aquáticos. No Brasil, em 2007, foram consumidas 18 bilhões de sacolas plásticas. Os supermercados brasileiros se preparam para acabar com as sacolas plásticas até 2016. Observe o gráfico a seguir, em que considera a origem como o ano de 2007.



Fonte: 2ª Aplicação Exame Nacional do Ensino Médio 2010

- a) De acordo com as informações, quantos bilhões de sacolas plásticas serão consumidos em 2011? Explore.

- b) Explore com seu grupo e indique as possíveis causas dessa diminuição do uso de sacolas plásticas.

- c) Em 2019, o número do consumo de sacolas plásticas foi erradicado? Explore com seu grupo e discutam como o consumo de sacolas plásticas situa-se em suas localidades, atualmente. O que está sendo feito para que esse consumo seja reduzido?

### Problema 2 (Funções Reais de uma Variável Real: um Curso EAD para Licenciatura):

Uma relação curiosa é sobre como obter uma estimativa para o número do sapato que usamos. A partir da medida do comprimento do pé ( $x$ ), é possível obter o número do calçado a ser usado por meio da relação:

$$N(x) = \frac{5x + 28}{4}$$

Se necessário utilize arredondamentos para “mais”.

- a) Meça o seu pé e verifique se a função fornece o número de calçado que você de fato usa.

- b) A pessoa que tem o comprimento do pé com 28 cm usa qual numeração de calçado de acordo com a relação  $N(x)$ ?

- c) Um calçado número 36 está relacionado com um pé de qual medida?

- d) Faça um esboço do gráfico de  $N(x)$  no GeoGebra e tente explicar o que seria  $N(0)$ .

Considere:  $f(x) = ax + b$

- 1) Plote no campo de entrada do aplicativo:  $f(x) = ax + b$ .

- 2) Varie o controle deslizante  $a$ . O que você pode afirmar sobre o movimento da imagem na tela?

- 3) Varie o controle deslizante  $b$ . O que você pode afirmar sobre o movimento da imagem na tela?

- 4) Qual o papel desempenhado pelo parâmetro  $a$ ?

- 5) Qual o papel desempenhado pelo parâmetro  $b$ ?

**Definição:** Uma função  $f$  real possui raiz real, quando  $f$  possui valores reais para  $x$  tal que  $f(x) = 0$ .

- 6) No aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator*, desenhe as funções abaixo e encontre suas raízes.

a)  $f(x) = x + 3$    b)  $g(x) = x - 9$    c)  $h(x) = 2x + 1$    d)  $i(x) = \frac{x}{4} - 5$

7) Analisando as funções  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  e  $i(x)$  do exercício anterior, você consegue determinar as raízes das funções sem efetuar nenhum tipo de cálculo? Explore.

8) Que definição poderíamos adotar para a função estudada? Quais suas características?

**Dia 3 e 4: Experimento final - Função quadrática**

**Sugestão aos professores:** Como na atividade anterior sobre função afim, na atividade sobre a função quadrática extraímos um problema do livro do curso EAD sobre funções de variável real citado na atividade anterior e um problema do ENEM (figura 10). A escolha desses problemas possui o mesmo objetivo já citado na atividade de função afim: Contextualizar os estudantes sobre a aplicação das equações, nesse caso do 2º grau, unindo à função quadrática. Além disso, como pesquisadora, o objetivo centra-se nas discussões dos estudantes durante a resolução desses problemas.

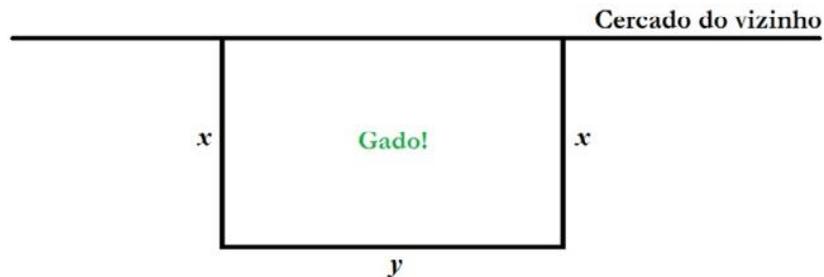
Nas 10 atividades seguintes os estudantes utilizam o aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator*. As questões têm como objetivo explorar os papéis dos parâmetros da função quadrática. Assim como nas atividades da função afim, objetivamos que os diálogos entre os estudantes ocorram para que a cooperação se faça presente e que o aplicativo utilizado possa auxiliar na elaboração das discussões e reflexões dos sujeitos.

A construção dessas atividades baseou-se nos aportes teóricos dessa pesquisa. Buscando favorecer e promover o diálogo entre os pares com a mediação da tecnologia digital para que as ações cooperativas possam ocorrer.

### Função quadrática

**Problema 1.** Um fazendeiro quer construir um cercado em forma de um retângulo para confinar gado. Com o dinheiro que ele tem é possível fazer apenas 200 metros de cerca. Resolveu, então, aproveitar uma parte da cerca do vizinho para economizar e construiu, com apenas 3 lances de cerca, um cercado retangular. Construa uma relação matemática que permita obter a área desse cercado, de acordo com as dimensões do retângulo, e conjecture sobre uma maneira de otimizar o problema, em termos da área cercada ser a maior possível.

Um esboço com a vista superior da situação pode ser visto na figura a seguir:




**Problema 2. (ENEM 2017)** A igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas (construção arqueada feita de concreto, pedras ou tijolos em forma de cunha, destinada a cobrir um espaço, apoiando-se sobre paredes, pilares ou colunas) parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

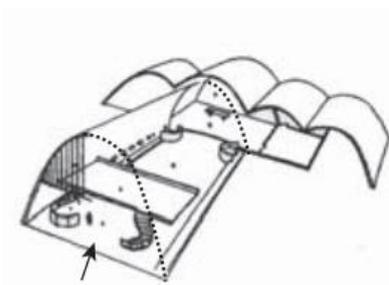


Figura 1

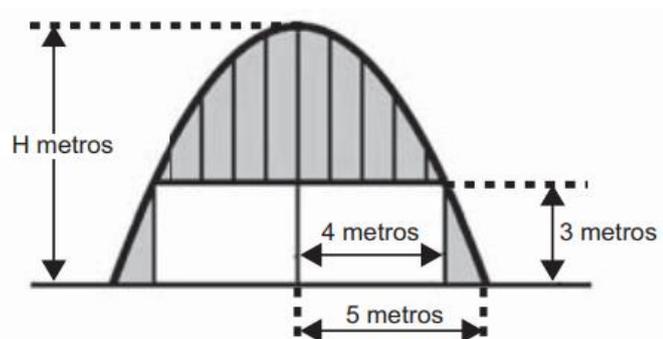


Figura 2

Qual a medida da altura  $H$ , em metro, indicada na Figura 2?

Exploração gráfica no *GeoGebra Graphing Calculator*:

Considere:  $f(x) = ax^2 + bx + c$

1) Plote no campo de entrada do aplicativo:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

2) Varie o controle deslizante  $a$ . O que você pode afirmar sobre o movimento da imagem na tela?

3) Varie o controle deslizante  $b$ . O que você pode afirmar sobre o movimento da imagem na tela?

4) Varie o controle deslizante  $c$ . O que você pode afirmar sobre o movimento da imagem na tela? Qual a relação desse movimento com o eixo  $y$ ?

5) Qual o papel desempenhado pelo parâmetro  $a$ ?

6) Qual o papel desempenhado pelo parâmetro  $b$ ?

7) Qual o papel desempenhado pelo parâmetro  $c$ ?

**Definição:** Uma função  $f$  real possui raiz real, quando  $f$  possui valores reais para  $x$  tal que  $f(x) = 0$ .

8) No aplicativo GeoGebra Graphing Calculator, desenhe as funções abaixo e encontre suas raízes.

a)  $f(x) = x^2 - 3x + 3$

b)  $g(x) = x^2 - 1$

c)  $h(x) = x^2 + 2x + 1$

d)  $i(x) = x^2 - 2x + 10$

9) O que você pode afirmar sobre as raízes das funções do exercício 8? Você encontra alguma relação entre os gráficos dessas funções e as equações já estudadas no trimestre anterior?

10) Que definição poderíamos adotar para a função estudada? Quais suas características?