



Instituto de
MATEMÁTICA
E ESTATÍSTICA

UFRGS



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

**POTENCIALIDADES NO ESTUDO DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS COM O
SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO MÉDIO**

MATHEUS LUCCA DE ROCCO

Porto Alegre

2019

MATHEUS LUCCA DE ROCCO

**POTENCIALIDADES NO ESTUDO DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS COM O
SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO MÉDIO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Márcia Rodrigues Notare

Porto Alegre

2019

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

**Potencialidades no estudo de funções de duas variáveis com o Software *GeoGebra* no
Ensino Médio**

Matheus Lucca de Rocco

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

UFRGS

Prof. Dr. Vandoir Stormowski

UFRGS

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer imensamente aos meus pais, Nilson de Rocco e Iára Regina Lucca, por sempre ficarem ao meu lado nos momentos mais difíceis da minha vida. Que possibilitaram eu viver a vida que escolhi, devo o mundo à vocês

Agradeço a minha irmã Isabela Lucca de Rocco por ser sangue do meu sangue, por sempre querer conversar mesmo quando estou de mal humor e por ser a melhor irmã do mundo.

Agradeço a minha namora Giovana Brancher, por ser a pessoa mais gentil desse planeta, por ter ficado noites acordada comigo me ajudando e dançando Bossa Nova Japonesa.

Agradeço ao meu amigo Guilhaer Antônio Santi, que me acompanhou desde o primeiro dia da faculdade até o último dia, e especialmente por me ceder pouso em sua casa em todos os momentos necessários.

Agradeço aos meus amigos Henrique Paredes, Henrique Moretto, Nicolás Walter e Wilson Fraga, por todos os anos de amizade.

Agradeço aos meus amigos que entraram na faculdade juntos comigo Lucas Schneider, Thor Franzen e Giuliana Gagg, por terem trilhado boa parte da faculdade junto comigo.

Agradeço aos meus professores Fabrício Indrusiak e Diego Zanella, por terem acreditado em mim mesmo antes de eu mesmo acreditar que seria professor.

Devo este trabalho de conclusão de curso à minha orientadora Márcia Rodrigues Notare, que me acolheu no pior dos momentos e me fez ficar feliz ao concluir este trabalho

Agradeço a Giovana Lenzi, por sempre me ajudar quando ia incomodar as pessoas da COMGRAD.

Agradeço a todos que impactaram na minha vida acadêmica direta ou indiretamente.

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso pretende analisar como o estudo de funções de duas variáveis pode potencializar o trabalho com funções de uma variável utilizando o software GeoGebra, com alunos do segundo ano do Ensino Médio. A motivação para realizar esse trabalho veio da vontade de desenvolver aulas que fazem uso de tecnologias digitais como fonte de construção de conhecimento. Essa proposta tem relação com Tecnologias Digitais, assim como, os conceitos de Matemática Dinâmica, ambos fazem as funções deixarem de ser representações estáticas. Já que queremos analisar o estudo dessas funções com os estudantes, a pesquisa se mostra qualitativa. A sequência de atividades está relacionada com movimentos de gráficos determinados por funções de uma e de duas variáveis. Essa investigação mostrou que trabalhar funções de duas variáveis com o GeoGebra no Ensino Médio pode contribuir para aprendizagem de funções.

Palavras-chave: Funções de duas variáveis. GeoGebra. Matemática Dinâmica.

ABSTRACT

This research intends to analyze how the study of two variable functions may potentialize work with one variable functions using software GeoGebra, with high school students. The motivation to accomplish this paper came from the desire to make classes that uses Digital Technologies as a knowledge source. This motion is related with Digital Technologies, as much with the concepts of Dynamic Mathematics, both give us the possibility to turn these functions into dynamics representations. Since we want to analyze the study of these functions with students, the research shows it self as qualitative. The sequence of activities are related with graphic translations determined by two and one variable functions. This investigation showed that working with two variable functions with GeoGebra in High School can contribute to the learning of functions.

Keywords: Two variable functions. GeoGebra. Dynamic Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Definição de função de duas variáveis.....	15
Figura 2: Definição de função de três variáveis.....	16
Figura 3: Definições de gráficos de funções de uma e de duas variáveis.....	16
Figura 4: Gráficos de funções de duas variáveis.....	17
Figura 5: Ponto criado sobre o gráfico da função $a(x, y) = x^2 + y^2$ e controle deslizante que define o coeficiente do gráfico da função $b(x, y) = ax^2 + ay^2$, com $a=0.5000000$	21
Figura 6: Layout do aplicativo <i>GeoGebra 3D Calculator</i>	25
Figura 7: Funções do aluno A.....	31
Figura 8: Funções do aluno B.....	32
Figura 9: Funções do aluno C.....	32
Figura 10: Funções do aluno D.....	32
Figura 11: Gráfico da função $c(x, y) = \frac{x}{2} + \text{sen}(x - 6y)$	34
Figura 12: Gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$	35
Figura 13: Gráfico da função $g(x, z) = x^2 + z^2$	35
Figura 14: Resposta escrita pelo aluno A.....	37
Figura 15: Resposta escrita pelo aluno B.....	37
Figura 16: Resposta escrita pelo aluno C.....	38
Figura 17: Resposta escrita pelo aluno D.....	38
Figura 18: Resposta do Aluno A para o exercício 2.1.....	40
Figura 19: Resposta do Aluno B para o exercício 2.1.....	40
Figura 20: Resposta do Aluno C para o exercício 2.1.....	40
Figura 21: Reflexão da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ no plano XOY.....	41
Figura 22: Resposta do Aluno A para o exercício 2.2.....	42
Figura 23: Resposta do Aluno B para o exercício 2.2.....	42
Figura 24: Resposta do Aluno C para o exercício 2.2.....	43
Figura 25: Gráfico da função $f(x, y) = x^2 - y^2$	43
Figura 26: Resposta do Aluno A para o exercício 2.3.....	45
Figura 27: Resposta do Aluno B para o exercício 2.3.....	45

Figura 28: Resposta do Aluno C para o exercício 2.3.....	46
Figura 29: Resposta do Aluno A para o exercício 2.4.....	46
Figura 30: Resposta do Aluno B para o exercício 2.4.....	47
Figura 31: Resposta do Aluno C para o exercício 2.4.....	47
Figura 32: Superfície determinada pela equação $z = 4 - x^2 - y^2$	48
Figura 33: Superfície determinada pela equação $z^2 = 4 - x^2 - y^2$	49
Figura 34: Gráfico da função $f(x) = 5\text{sen}(x)$	52
Figura 35: Gráfico da função $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{7}$	52
Figura 36: Resposta do Aluno B do exercício 1.2.....	53
Figura 37: Resposta do Aluno C do exercício 1.2.....	53
Figura 38: Resposta do Aluno D do exercício 1.2.....	53
Figura 39: Resposta do Aluno E do exercício 1.2.....	53
Figura 40: Resposta do Aluno B do exercício 1.3.....	54
Figura 41: Resposta do Aluno C do exercício 1.3.....	54
Figura 42: Resposta do Aluno D do exercício 1.3.....	54
Figura 43: Resposta do Aluno E do exercício 1.3.....	54
Figura 44: Resposta do Aluno B do exercício 1.4.....	55
Figura 45: Resposta do Aluno C do exercício 1.4.....	55
Figura 46: Resposta do Aluno D do exercício 1.4.....	55
Figura 47: Resposta do Aluno E do exercício 1.4.....	56
Figura 48: Experimento 1 para o exercício 3.5.....	57
Figura 49: Experimento 2 para o exercício 3.5.....	57
Figura 50: Resposta do Aluno E do exercício 1.5.....	58
Figura 51: Gráfico da função $(f(x) = 1 + 2\text{sen}(x))$	59
Figura 52: Gráfico da função $(g(x) = 1 - 2\text{sen}(x))$	59
Figura 53: Resposta do Aluno B do exercício 1.7.....	61
Figura 54: Resposta do Aluno C do exercício 1.7.....	61

Figura 55: Resposta do Aluno D do exercício 1.7.....	61
Figura 56: Resposta do Aluno E do exercício 1.7.....	61
Figura 57: Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(5x)$	62
Figura 58: Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(88x)$	62
Figura 59: Resposta do Aluno B do exercício 2.2.....	64
Figura 60: Resposta do Aluno B do exercício 2.3.....	65
Figura 61: Resposta do Aluno C do exercício 2.3.....	65
Figura 62: Resposta do Aluno D do exercício 2.3.....	65
Figura 63: Resposta do Aluno E do exercício 2.3.....	66
Figura 64: Resposta do Aluno B do exercício 2.4.....	67
Figura 65: Resposta do Aluno C do exercício 2.4.....	67
Figura 66: Resposta do Aluno D do exercício 2.4.....	67
Figura 67: Resposta do Aluno E do exercício 2.4.....	67
Figura 68: Resposta do Aluno B do exercício 2.5.....	68
Figura 69: Resposta do Aluno C do exercício 2.5.....	68
Figura 70: Resposta do Aluno D do exercício 2.5.....	68
Figura 71: Resposta do Aluno E do exercício 2.5.....	69
Figura 72: Resposta do Aluno B do exercício 2.6.....	69
Figura 73: Resposta do Aluno C do exercício 2.6.....	69
Figura 74: Resposta do Aluno D do exercício 2.6.....	70
Figura 75: Resposta do Aluno E do exercício 2.6.....	70

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Cronograma de atividades.....	26
Quadro 2: Diálogo sobre dimensões onde os gráficos de funções se encontram.....	30
Quadro 3: Diálogo sobre gráficos de funções de duas variáveis.....	33
Quadro 4: Diálogo sobre a troca de variável.....	36
Quadro 5: Diálogo a respeito da atividade 2.1.....	39
Quadro 6: Diálogo sobre casos do exercício 2.1.....	39
Quadro 7: Explicação do Aluno A caso mudar apenas um sinal.....	44
Quadro 8: Discussão que mudou o foco do exercício 2.2.....	44
Quadro 9: Diálogo sobre abordagem com equação no exercício 2.4.....	46
Quadro 10: Diálogo sobre como tirar uma raiz quadrada de uma equação.....	48
Quadro 11: Diálogo entre Pesquisador e Alunos.....	50
Quadro 12: Diálogo sobre exercício 1.2.....	51
Quadro 13: Diálogo sobre possibilidades de resposta do exercício.....	58
Quadro 14: Diálogo sobre o que é frequência.....	60
Quadro 15: Diálogo sobre exercício 2.2.....	64
Quadro 16: Diálogo sobre exemplo de imagem de função.....	66

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	12
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
2.1 Análise de livro didático	14
2.2 Tecnologias Digitais na Educação Matemática	16
2.3 Matemática Dinâmica	17
2.4 Trabalho correlato	20
3. PROCESSOS METODOLÓGICOS	21
3.1 Metodologia	21
3.2 Participantes e contexto da pesquisa	22
3.3 Materiais e atividades	23
3.3.1 <i>Atividade 1- Funções de duas variáveis</i>	24
3.3.2 <i>Atividade 2- Lei de Formação e gráfico de função de duas variáveis</i>	25
3.3.3 <i>Atividade 3-Translações de funções trigonométricas e quadráticas</i>	26
4. DISCUSSÃO E ANÁLISE DOS DADOS	26
4.1 Atividade 1	27
4.2 Atividade 2	28
4.2.1 <i>Seção 1</i>	28
4.2.2 <i>Seção 2</i>	35
4.3 Atividade 3	46
4.3.1 <i>Seção 1</i>	46
4.3.2 <i>Seção 2</i>	60
4.4 Resultados	67
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	68
6. REFERÊNCIAS	74
7. APÊNDICES	75

1. INTRODUÇÃO

Durante a minha vida pessoal e escolar, sempre me interessei por tecnologias, sejam referentes a jogos digitais, computadores ou *smartphones*. Vi-me crescendo em meio a esse desenvolvimento exponencial das tecnologias, nos mais diversos âmbitos, assim conforme os anos passavam eu aprendia a utilizar cada vez mais recursos tecnológicos.

Na escola básica havia momentos destinados exclusivamente para o uso de uma sala de informática, onde existiam diversos computadores. No entanto o uso desses recursos não parecia pensado como uma nova maneira de construir conhecimento, mas sim como uma ferramenta de reprodução de conhecimento, já que tudo que fazíamos com esses computadores poderia ser feito com papel e caneta.

No ensino superior, meu primeiro contato com o uso de tecnologias digitais foi na cadeira oferecida para alunos do primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática chamada: Computador na Matemática Elementar I. Utilizávamos o *software* chamado SuperLogo, no qual comandávamos o percurso que uma tartaruga faria, apelidada carinhosamente de “Tat”, que deixava um rastro por onde andava. Ao meu ver, o objetivo da cadeira era fazer os estudantes pensarem sobre como escrever comandos que juntos representariam algum objeto, seja matemático ou não. O começo da cadeira foi difícil, transformar uma ação, que eu conseguiria fazer com alguma facilidade, em comando era algo mais complexo do que parecia, produzir figuras geométricas com o programa não parecia ter o mesmo grau de complexidade que produzir com papel e caneta.

Depois de passar por essa experiência, consegui estabelecer uma relação que nunca havia concebido anteriormente: no auge dos meus dezoito anos, percebi que matemática e tecnologia têm muito em comum. Desde então meu conhecimento na área vem ficando mais vasto, diversas cadeiras da graduação permitiram-me vislumbrar várias conexões e aplicações da matemática na tecnologia, em especial com um *software* chamado *GeoGebra*, cujas funcionalidades nos permitem fazer construções geométricas, plotar gráficos, assim como outras opções de ação.

Vejo-me cada vez mais como um profissional que quer encontrar alguma maneira de incorporar o uso de tecnologias em suas atividades de sala de aula. Assim escolhi como tema deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) realizar uma pesquisa na área da Educação Matemática com tecnologias digitais. “Uma das forças mais poderosas no crescimento,

evolução e ensino matemático é o poder das novas tecnologias” (GOLDENBERG, 2000, p.1). Como Goldberg afirma, o uso de novas tecnologias no âmbito matemático, seja de ensino ou aprendizagem, é uma oportunidade de desenvolvimento.

Pensando nisso, decidi pesquisar como o uso dessas tecnologias pode potencializar a aprendizagem de funções no Ensino Médio. Ao pesquisar trabalhos anteriores que tratavam do mesmo assunto, reparei que todos usavam funções de uma variável como objeto de estudo. Assim decidi mudar esse foco, propondo um trabalho com funções de duas variáveis no *GeoGebra* como objeto de pesquisa. O motivo de tal decisão fundamenta-se em experiências pessoais vivenciadas como professor. Fazendo um paralelo com outros conteúdos, já ministrei diversas aulas sobre geometria plana e geometria espacial, sempre seguindo uma sequência didática que parece adequada, na qual primeiramente começo tratando de geometria plana, falando a respeito de retas, pontos, ângulos, polígonos, cálculos de área, etc. Em seguida ampliamos nosso estudo para mais uma dimensão, agora tratando de objetos geométricos que se mostram no espaço, que têm profundidade. Quando fazemos esse “aumento” de dimensão é possível perceber que a manipulação de objetos na terceira dimensão possibilita um entendimento mais simples de objetos que se encontram em duas dimensões. Ou seja, o estudo e análise de situações mais complexas permite a compreensão de casos mais elementares.

Então considerando essa percepção que tive como minhas experiências com o conteúdo de geometria, decidi fazer o mesmo movimento com o conteúdo de funções. Dessa forma, essa pesquisa propõe o trabalho com alunos do segundo ano do Ensino Médio sobre o conteúdo de funções de duas variáveis, contemplando uma análise sobre como os estudantes manipulam gráficos desse tipo de função, para posteriormente analisar se esse estudo de funções de duas variáveis potencializou o trabalho com funções de uma variável.

Como o estudo de funções de duas variáveis envolve análise de gráficos que são representados apenas no espaço, fazer essa representação com o uso de canetas muitas vezes torna-se muito difícil, já que esses gráficos assumem as mais diversas formas e exigem dos alunos a habilidade de visualização no espaço. Assim o uso de tecnologias digitais mostra-se importante, pois se não conseguirmos visualizar tais gráficos, não poderemos estudá-los e analisar seu comportamento. Para visualizar e manipular esses gráficos, usaremos o aplicativo para *smartphones GeoGebra 3D Calculator*, pois esse recurso pode ser usado como uma calculadora gráfica que projeta gráficos de funções de duas variáveis.

O uso do GeoGebra em smartphones é segmentado, visto que existem vários recursos a serem utilizados. Assim diferentes aplicativos para smartphones do GeoGebra, com foco nas diferentes funcionalidades e áreas da Matemática: Calculadora Gráfica GeoGebra abrange os recursos voltados exclusivamente para o trabalho com gráficos em duas dimensões; o GeoGebra Geometria disponibiliza ferramentas virtuais de régua e compasso para construção de figuras geométricas; o GeoGebra 3D Calculator traz os recursos destinados para o trabalho com gráficos em três dimensões. Dessa forma, os aplicativos, Calculadora Gráfica GeoGebra e o GeoGebra 3D Calculator foram utilizados ao decorrer desta pesquisa.

Esse trabalho foi desenvolvido, não apenas, para trabalhar com funções de duas variáveis, mas sim, para proporcionar uma visão mais interessante sobre o conteúdo. Visto que, por se tratar de uma matéria vista fora do Ensino Médio, pode gerar mais fascínio para os estudantes, possibilitando construir um conhecimento matemático que pode ser útil na aprendizagem de funções de uma variável.

Com essas considerações, a pergunta diretriz que delimita essa pesquisa é:

“Como o estudo de funções de duas variáveis com o uso do *GeoGebra 3D Calculator* pode potencializar o trabalho com funções de uma variável com alunos do segundo ano do Ensino Médio?”

Os próximos capítulos abordam fundamentação teórica que dá suporte a essa pesquisa, procedimentos metodológicos que apresentam o teor metodológico dessa pesquisa, assim como as atividades e discussões que possibilitaram a produção de dados para sua análise posterior e as considerações finais.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo é discutida a base teórica que sustenta essa pesquisa. É apresentada uma análise de livros didáticos; Tecnologias Digitais na Educação Matemática; Matemática Dinâmica e trabalhos correlatados.

2.1 Análise de livro didático

Para começarmos a investigar funções de duas variáveis, nos colocamos a olhar para os livros didáticos que são utilizados quando esse assunto é abordado. Como tal assunto é abordado, em grande parte, no ensino superior, analisamos um livro usado na disciplina de Cálculo Integral e Diferencial: Cálculo (ANTON, BIVENS, DAVIS, 2014)

O livro Cálculo (ANTON, BIVENS, DAVIS, 2014) aborda o assunto função de duas ou mais variáveis em seu décimo terceiro capítulo, cujo título é “Derivadas Parciais”. Primeiramente, são tratadas notações e terminologias referentes à dependência e independência de duas ou mais variáveis, assim como definindo domínio natural nesses tipos de função. É interessante que nesta parte o autor relata que a terminologia das funções de duas ou mais variáveis são análogas àsquelas para funções de uma variável, aproximando esses tipos de funções pelas suas estruturas.

Na mesma página podemos notar as definições dadas pelos autores para funções de duas e de três variáveis, ressaltando que os domínios dessas funções serão, respectivamente, “[...] algum conjunto D no plano xy .” (Figura 1) e “[...] algum conjunto D no espaço tridimensional” (Figura 2) (ANTON, BIVENS, DAVIS, 2014, p.907).

Figura 1: Definição de função de duas variáveis

13.1.1 DEFINIÇÃO Uma *função f de duas variáveis*, x e y , é uma regra que associa um único número real $f(x, y)$ a cada ponto (x, y) de algum conjunto D no plano $x y$.

Fonte: ANTON, BIVENS, DAVIS, 2014, p.907

Figura 2: Definição de funções de três variáveis

13.1.2 DEFINIÇÃO Uma *função f de três variáveis*, x , y e z , é uma regra que associa um único número real $f(x, y, z)$ a cada ponto (x, y, z) de algum conjunto D no espaço tridimensional.

Fonte: ANTON, BIVENS, DAVIS, 2014, p.907

Essa comparação entre funções de duas variáveis com funções de três variáveis pode contribuir para mostrar diferenças entre as funções, já que, podemos ver algumas diferenças diretas, como por exemplo, como será o conjunto domínio.

Logo depois temos exemplos e exercícios que mostram como podemos determinar o domínio natural de funções de duas e de três variáveis. Esses exercícios que fazem uso de funções de duas variáveis têm a possibilidade de serem representados com recursos digitais, que nos permitem visualizar esses domínios.

O próximo item deste capítulo, que se faz se mostra um aspecto que pode ser analisado, trata de gráficos de funções de duas variáveis. A primeira definição que destacamos é como o livro define os gráficos das funções (Figura 3). Novamente, podemos notar uma comparação direta com a definição análoga a funções de uma variável.

Figura 3: Definições de gráficos de funções de uma e de duas variáveis

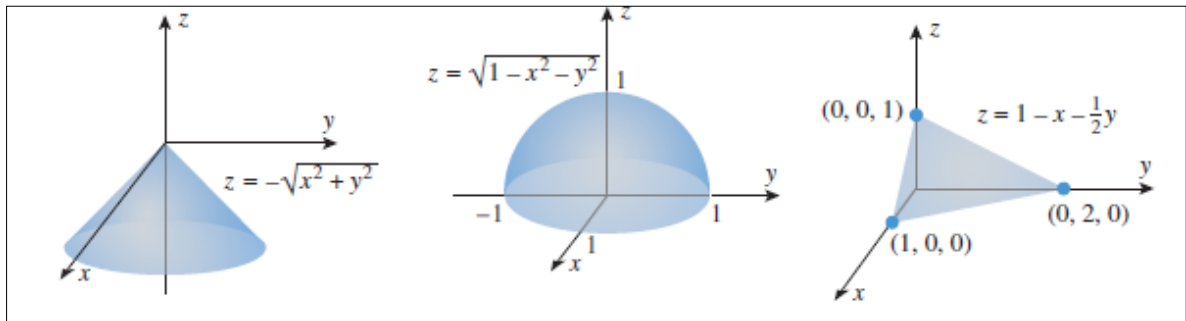
■ GRÁFICOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Lembre que, para uma função f de uma variável, o gráfico de $f(x)$ no plano xy foi definido como sendo o gráfico da equação $y = f(x)$. Analogamente, se f for uma função de duas variáveis, definimos o *gráfico* de $f(x, y)$ no espaço xyz como sendo o gráfico da equação $z = f(x, y)$. Em geral, tal gráfico será uma superfície no espaço tridimensional.

Fonte: ANTON, BIVENS, DAVIS, 2014, p.908

O livro dá atenção à equação algébrica que define o gráfico de uma função de duas variáveis. Temos alguns exemplos de gráficos na página seguinte do livro (Figura 4), assim como as equações os definem. No entanto, em nenhum momento foi tratado como esses gráficos se comportam no sistema de coordenadas cartesianas. Imaginamos que isso ocorra, pois determinar tais gráficos pode ser uma tarefa difícil sem suporte de algum recurso de visualização.

Figura 4: Gráficos de funções de duas variáveis



Fonte: ANTON, BIVENS, DAVIS, 2014, p.909

O uso de *softwares* que podem determinar esses tipos de gráficos traria uma versatilidade para o trabalho com essas funções, visto que, sem essa opção os alunos que estão em processo de aprendizagem apoiam-se apenas no que é mostrado no livro. Em outras palavras, os alunos ficam sem liberdade de explorar as possibilidades de gráficos que podem ser determinados.

2.2 Tecnologias Digitais na Educação Matemática

Profissionais que investigam a Educação Matemática têm discutido sobre o que pode ser considerado “fazer matemática”, ou seja, experimentar, manipular, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair e generalizar (GRAVINA, 2004). Retratamos os alunos que “fazem a matemática” como sendo participantes ativos e independentes, que podem fazer suas próprias explorações e descobertas e, nesse sentido, cada vez mais as tecnologias digitais estão sendo implementadas na Educação para proporcionar espaços para “fazer matemática”.

As Tecnologias Digitais (TD) têm tornado problemas e conteúdos matemáticos, até então complexos e de difícil representação, mais acessíveis, fazendo com que alguns objetos matemáticos se tornem mais palpáveis para serem analisados (GOLDENBERG, 2000). Basso e Notare (2015, p. 3) afirmam também que:

Hoje, com os recursos tecnológicos interativos e dinâmicos, temos um ganho de compreensão, proporcionado pelas representações agora acessíveis por meio desses ambientes. Os recursos tecnológicos e a possibilidade de representação e manipulação de objetos matemáticos abrem novas possibilidades para o pensamento matemático.

Pensando nisso, o professor deve estar cada vez mais atento a novas abordagens que fazem uso de TD, de modo que não sirva apenas para a substituição de uma tecnologia já utilizada anteriormente, como o lápis e papel, mas sim como uma fonte de conhecimento e criação, que faça o educador tirar o maior proveito desse novo tipo de abordagem (GARCIA, 2015).

Além da TD como fonte de construção de conhecimento, também há outro ponto importante quando utilizamos estes recursos, que é determinar até que ponto o uso dessas tecnologias está sendo benéfico, pois, segundo Goldenberg (2000, apud BASSO e NOTARE, 2015, p. 4):

É importante, no momento de pensar em atividades com o uso de tecnologias para a sala de aula, ter claro os objetivos que queremos alcançar e escolher a tecnologia de modo a atendê-los, ao invés de simplesmente utilizar a tecnologia para tornar a aula mais atraente, mas de forma tangente e superficial, ou até mesmo prejudicial.

Um desses objetivos, citado acima, é a possibilidade de acessar objetos matemáticos, que sem TD não conseguiríamos trabalhar sem ter certa dificuldade. Para Basso e Notare (2015), quando fazemos o uso de TD para criar versões digitais de objetos matemáticos produzimos uma sensação de existência material, que dá margem para manipular tais objetos. Ao trazer esse tipo de estudo, abrimos uma possibilidade para os alunos mudarem a maneira como eles pensam na Matemática.

A partir dessa ideia de como a tecnologia pode ser trabalhada com Educação Matemática, é preciso deixar claro que o uso de recursos tecnológicos não é proposto para facilitar o estudo de Matemática. Mas sim, como uma ferramenta que pode potencializar o desenvolvimento do pensamento matemático, assim como a construção de conhecimento, Valente (1993, p.40) afirma:

[...] o computador deve ser utilizado como um catalisador de uma mudança do paradigma educacional. Um novo paradigma que promove a aprendizagem ao invés do ensino, que coloca o controle do processo de aprendizagem nas mãos do aprendiz, e que auxilia o professor a entender que a educação não é somente a transferência de conhecimento, mas um processo de construção do conhecimento pelo aluno, como produto do seu próprio engajamento intelectual ou do aluno como um todo.

Assim, quando propomos o trabalho com TD, estamos mudando a forma como a Matemática é pensada, de modo que, favoreça a construção de conceitos e o pensar matemático. Dessa forma, a expressão usada por Shaffer e Clinton (2006) - “ferramentasparapensamentos (toolsforthoughts)”- a qual afirma que sujeito e recursos

tecnológicos se colocam em uma situação de simbiose, ou seja, assim como o sujeito afeta o recurso tecnológico, este também afeta o sujeito.

2.3 Matemática Dinâmica

Funções com uma variável dependente e outra independente da primeira envolvem relações dinâmicas entre elas. Gráficos dessas funções são determinados em sistemas de coordenadas cartesianas. Quando comparamos o trabalho que envolve esses conceitos matemáticos que podem ter representações estáticas, as quais são representadas com papel e caneta ou até mesmo em quadros com giz, existe um notável ganho quando os mesmos conceitos matemáticos são abordados em ambientes digitais, que utilizam *softwares* que possibilitam representações dinâmicas, como por exemplo, o GeoGebra. Esse ambiente possibilita trazer uma participação maior do aluno, já que ele tem o poder de manipular, controlar, observar, conjecturar e tirar suas próprias conclusões. (BASSO; NOTARE, 2015). Em outras palavras, quando utilizamos um ambiente que possibilita representações dinâmicas, tornando sua participação ativa.

A tecnologia leva os alunos em direção a um amplo espaço de experiências. Dessa forma, o ambiente de GD (Geometria Dinâmica) constitui-se como um espaço em que os alunos podem tornar possíveis suas ideias informais, para dar início a um processo de coordenação com ideias mais formalizadas sobre determinado assunto. (BASSO, NOTARE, 2015, p.5)

A disseminação dos ambientes digitais que trabalham com matemática dinâmica vem sendo fonte de renovação na perspectiva de objetos matemáticos, que antes eram vistos estáticos, agora podem ser analisados dinamicamente. Da mesma forma, são inovações que trazem novas propostas que podem ser trabalhadas com segmentos mais abrangentes.

O surgimento das tecnologias e dos ambientes dinâmicos proporcionou a evolução tanto da Matemática, quanto da Educação Matemática. Em Matemática, os computadores fomentaram a descoberta de novos campos. Na Educação Matemática, eles têm tornado mais acessível alguns problemas e ideias, proporcionando novas de representar e manipular objetos matemáticos. (BASSO, NOTARE, 2015, p.3)

Então para que esses ambientes sejam viabilizados, precisamos utilizar *softwares* que nos proporcionem o dinamismo procurado. O GeoGebra, é um dos *softwares* mais utilizados, pois abrange tanto representações geométricas, como representações algébricas, motivo pelo qual tem o seu nome. Nesse viés temos que:

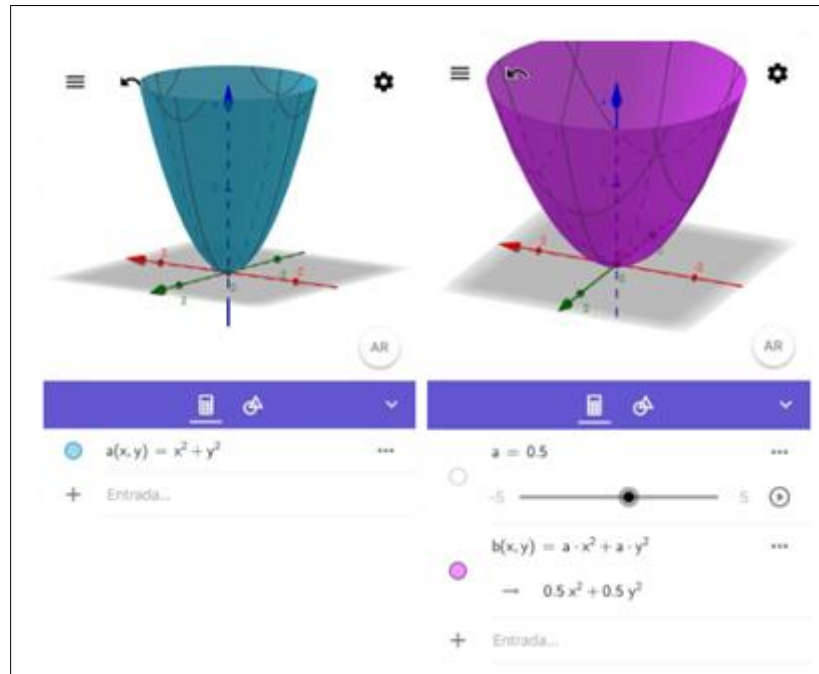
Os argumentos favoráveis ao uso desses softwares são bem diversificados. Experimentar, criar estratégias, fazer conjecturas, argumentar e deduzir propriedades matemáticas são, em verdade, ações desejáveis no ensino de matemática em qualquer domínio de conhecimento e nível de ensino. Nesse sentido, essas ferramentas computacionais são bem-vindas no ensino das funções reais. Em particular, o software GeoGebra, com excelente interface dinâmica entre os sistemas algébrico e geométrico de representações, se apresenta como uma poderosa ferramenta para o estudo do comportamento variacional das funções reais (REZENDE; PESCO; BORTOLOSSI, 2012, p.78)

Rezende, Pesco, Bortolossi (2012) trazem dois grandes motivos pelos quais o GeoGebra é um grande aliado para o trabalho de com matemática dinâmica quando queremos trabalhar com funções reais. São eles:

- Pontos que podem ser criados sobre gráficos de funções reais, de modo que quando movimentados, sempre ficam sobre o gráfico da função. Essas coordenadas dos pontos podem ser utilizadas para cálculos e guardadas para uso posterior, ou até mesmo na criação de outros elementos geométricos. Tal recurso permite o estudante analisar locais de função específicos.
- Nas funções podemos definir termos de parâmetros. Tais termos podem ser alterados dinamicamente por controles deslizantes, que permitem o usuário visualizar e perceber como, por exemplo, certas características da função são afetadas por esses parâmetros.

Tais características podem ser vistas na Figura 4, que são representadas por funções de duas variáveis (Figura 5).

Figura 5: Ponto criado sobre o gráfico da função $a(x, y) = x^2 + y^2$ e controle deslizante que define o coeficiente do gráfico da função $b(x, y) = ax^2 + ay^2$, com $a = 0,5$



Fonte: Arquivo Pessoal

Os motivos mencionados acima podem contribuir para um estudo dinâmico e autônomo por parte dos alunos (BASSO, NOTARE, 2015), ao mesmo passo que conversa com o movimento de “fazer matemática”, no qual os alunos podem tornar a matemática acessível e manipulável por meio de experimentos, testes, conjecturas (GRAVINA, 2004).

2.4 Trabalhos correlatos

A pesquisa por trabalhos correlatos foi realizada no repositório de trabalhos e teses da UFRGS (LUME), além de outros repositórios. No entanto, ao realizar a procura por trabalhos que abordassem o estudo de funções de duas variáveis com o GeoGebra no Ensino Médio não foram encontrados trabalhos com o foco que queríamos retratar nessa pesquisa. Os trabalhos encontrados abordavam o estudo de Cálculo Diferencial e Integral em nível superior, com o uso de outros recursos tecnológicos, como por exemplo, o *software* Maple. Assim, mencionamos um trabalho que mais se correlaciona com a nossa pesquisa.

Henriques e Almouloud (2016) trazem um trabalho sobre conceitos e definições da disciplina de Cálculo Integral e Diferencial com ênfase em funções de duas e três variáveis,

fazendo reflexões sobre a utilização da Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS), proposta por Duval. Seus objetivos eram explicitar as definições referentes á Cálculo, na tentativa de trazer contribuições para TRRS, assim como auxiliar os estudantes e pesquisadores em suas palestras/pesquisas na reflexão desse tema e, discutir técnicas instrumentais de representação do tipo funções em questão, utilizando o *software* Maple. Nos resultados da pesquisa apontou se que foi explicitada a compreensão das três habilidades cognitivas fundamentais, ligadas ao registro de semiótica.

Nessa pesquisa, abordamos funções de duas variáveis de maneira exploratória. Com uso do GeoGebra, *software* que pode viabilizar uma manipulação mais intuitiva que o Maple. O foco da investigação se afasta, já que, estamos trabalhando com uma ótica voltada para a matemática dinâmica.

3. PROCESSOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresentaremos os processos metodológicos da pesquisa, o contexto e os participantes da pesquisa, sequência de atividades propostas, assim como a forma de apresentação dos dados.

3.1 Metodologia

A pesquisa apresenta cunho qualitativo, já que queremos entender como se mostram o entendimento dos alunos em relação ao estudo de funções de duas variáveis com o *software* GeoGebra.

Bodgan e Bilken (1994) citam cinco características da pesquisa qualitativa:

Característica 1: Os dados vêm de um ambiente natural, constituindo o investigador como o instrumento principal.

Os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência. Os locais têm de ser entendidos no contexto da história das instituições a que pertencem. Quando os dados em causa são produzidos por sujeitos, como no caso de registos oficiais, os investigadores querem saber como e em que circunstâncias é que eles foram elaborados. (BODGAN e BILKEN, 1994, p. 48)

Característica 2: Os dados que são coletados para análise não são números, mais sim retratações de momentos que ilustram como a pesquisa se mostrou. (BODGAN e BILKEN, 1994). Queremos produzir, coletar e analisar dados que representem os significados que os alunos deram quando se colocaram no âmbito da pesquisa.

Característica 3: “Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos” (BODGAN e BILKEN, 1994, p. 49). O desenvolvimento do raciocínio dos participantes dessa pesquisa irá direcionar como os dados se mostrarão.

Característica 4: “Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva.” (BODGAN e BILKEN, 1994, p. 50). A análise dos dados dar-se-á dependendo da maneira como os participantes interagiram com as atividades, cada resposta será analisada de maneira específica.

Característica 5: “O significado é de importância vira/na abordagem qualitativa.” (BODGAN e BILKEN, 1994, p. 50). As respostas que os alunos retrataram ao longo da

pesquisa serão únicas para cada indivíduo, assim cada significado diferente ou equivalente será contemplado na análise dos dados.

“Os investigadores que fazem uso deste tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas.” (BODGAN e BILKEN, 1994, p. 50).

Com essa ótica, a pesquisa qualitativa se mostra adequada a essa pesquisa, pois queremos analisar como o pensamento de estudante do Ensino Médio se mostra no trabalho com funções de duas variáveis, observando as possíveis discussões entre os sujeitos da pesquisa. O pesquisador coletou todos os dados produzidos pelos estudantes, assim como, registrou áudios e vídeos das discussões feitos pelos integrantes da pesquisa, os quais foram extremamente importantes para definir o rumo dessa investigação.

3.2 Participante e contexto da pesquisa

A sequência de atividades foi aplicada com um grupo de inicialmente cinco participantes, que posteriormente foi reduzido para quatro alunos. Esses estudantes estavam cursando o segundo ano do Ensino Médio no Colégio Unificado¹, situado no município de Canoas, Rio Grande do Sul. É importante contextualizar a relação que esses estudantes têm com o pesquisador, no segundo semestre do ano de 2018 o pesquisador realizou seu estágio com turmas do colégio em questão, nas quais em uma das turmas se encontravam todos os integrantes dessa pesquisa.

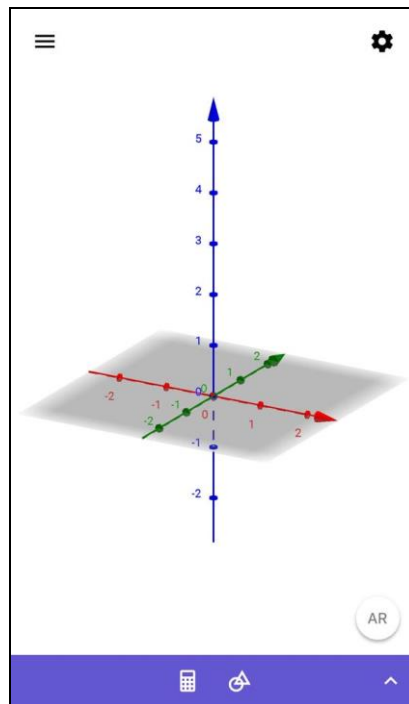
O Colégio Unificado Canoas, escola de rede privada, está situado no município de Canoas e atende turmas apenas do Ensino Médio¹, com duas turmas de primeiro ano, duas turmas de segundo ano e duas turmas de terceiro ano, totalizando 285 alunos. A escola trabalha no turno da manhã oferecendo o Ensino Médio e durante a tarde os alunos dos primeiros e segundos anos têm a opção de ter aulas de reforço de todas as matérias, durante três dias da semana.

Os alunos que fizeram as atividades dessa pesquisa estavam no segundo ano do Ensino Médio, totalizando de cinco alunos, entre os quais alguns não fizeram todas as atividades por motivos de força maior. Esses alunos foram nomeados de Aluno A, Aluno B, Aluno B, Aluno C, Aluno D e Aluno E, os respectivos responsáveis assinaram o termo de consentimento como pode ser visto no Apêndice 3.

¹ A Carta de Ciência e Concordância da escola encontra-se no Apêndice 4

A prática das atividades se deu em um horário no contra turno dos alunos, onde eles escolheram participar voluntariamente sem compensação de nota. Como o colégio não possui uma sala de informática e precisávamos usar o *GeoGebra 3D* para visualizarmos e manipular os gráficos propostos nas atividades, a solução foi usar o aplicativo de *smartphone* chamado *GeoGebra 3D Calculator*, que oferece quase todas as funções da versão do programa oferecido para computadores. Nesse aplicativo é possível esboçar gráficos de funções de uma e de duas variáveis, assim como o aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra*, que chamaremos de *GeoGebra 2D*, o qual viabiliza determinar gráficos de funções de uma variável, no plano xOy . Ambos são oferecidos para download na loja de aplicativos de *smartphones*.

Figura 6: Layout do aplicativo *GeoGebra 3D Calculator*



Fonte: Arquivo pessoal

Na Figura 6 mostra-se o layout do aplicativo quando aberto no celular. A decisão de utilizar esse aplicativo foi reforçada quando verificamos que todos os alunos tinham *smartphones* que poderiam ser utilizados para tal fim.

3.3 Materiais e atividades

Para começar a pesquisar como o estudo das funções de duas variáveis pode potencializar o entendimento de funções de uma variável, era preciso apresentar de fato o

conteúdo para os integrantes da pesquisa, já que esse conteúdo é trabalhado mais comumente em cadeiras de Cálculo II em cursos superiores.

Pensando nisso, dividimos os processos metodológicos em três partes, a primeira trata-se de uma aula expositiva comparando os conteúdos de funções de uma variável e funções de duas variáveis; a segunda aborda atividades que podem possibilitar a compreensão sobre como as leis de formação das funções de duas variáveis se relacionam com seus respectivos gráficos; e a terceira trata de abordar translações de funções trigonométricas, já que esse conteúdo estava sendo abordado nas aulas de Matemática desses estudantes.

O cronograma desses três segmentos foi pensado em função da disponibilidade dos alunos, e também para não haver conflito de atividades sendo oferecidas durante o mesmo horário. O Quadro 1 apresenta a organização das três atividades.

Quadro 1: Cronograma de atividades

Data das atividades	Duração	Atividade
28/10/2019	1h20min	Funções de duas variáveis
04/11/2019	2h	Relação entre lei de formação e gráfico de função de duas variáveis (Utilizando o <i>GeoGebra 3D Calculator</i>)
18/11/2019	2h	Translações de funções trigonométricas e quadráticas (Utilizando GeoGebra Calculadora Gráfica)

Fonte: Arquivo pessoal

A seguir apresentamos uma breve descrição das atividades.

3.3.1 Atividade 1- Funções de duas variáveis

Primeiramente, para que alunos de segundo ano do Ensino Médio pudessem desenvolver noções de translações de gráficos de funções de duas variáveis, eles precisariam conhecer essas funções de fato. Para solucionar essa situação, uma aula expositiva foi realizada, seguindo o modelo de aula que eles estão acostumados em sua escola. Essa aula foi

planejada em duas partes, que, em um primeiro momento, abordou elementos de funções de uma variável e posteriormente tratou de elementos de funções de duas variáveis.

Em relação ao momento em que abordamos funções de uma variável, vale ressaltar que o objetivo foi relembrar elementos importantes em funções, sejam eles: domínio, contradomínio, intervalos de domínios e de imagens, leis de formação, sistema de coordenadas cartesianas, variáveis dependentes e independentes. Outro motivo que fez o pesquisador optar por essa primeira seção, foi discutir as dimensões de alguns desses elementos, como por exemplo, que em funções de uma variável, tanto o domínio quanto a sua imagem são intervalos de uma reta, têm uma dimensão, que gráficos dessas funções são representados em um plano que contém dois eixos coordenados.

Seguindo para o próximo momento da aula, iniciamos a abordagem sobre funções de duas variáveis. A sequência lógica dessa parte teve a mesma estrutura da parte anterior: falamos do domínio, contradomínio, imagem, variáveis dependentes e independentes, leis de formação e gráficos. No entanto, o foco agora era identificar o que essas funções de duas variáveis ganham de novo ao ter uma nova variável. Assim, a primeira diferença discutida foi em relação ao domínio, enfatizando que agora os elementos desse conjunto eram pares ordenados, das variáveis independentes, e que os elementos da imagem continuavam sendo coordenadas da variável dependente. O próximo passo foi explorar a lei de formação $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ com os estudantes, e calcular valores numéricos dessa lei, tomando valores para as variáveis independentes e calculando o correspondente valor para a variável dependente. Feito isso, marcamos os elementos nos três eixos coordenados, elemento do domínio no plano determinado pelas variáveis independentes e elemento da imagem no eixo da variável dependente. Esse processo foi repetido mais algumas vezes para salientar que essas ternas estão no espaço formando assim um gráfico em três dimensões. O gráfico foi projetado no quadro, usando o *GeoGebra 3D*, utilizamos a opção do *software* que possibilita ser usado como calculadora. Feito isso, ressaltamos as principais diferenças: o acréscimo de uma nova variável faz o gráfico dessas funções ser determinado no espaço, que é formado por três eixos distintos, o domínio agora é uma região em um plano específico, a imagem continua sendo um intervalo em um determinado eixo.

3.3.2 Atividade 2- Lei de formação e gráfico de função de duas variáveis

A partir das noções apresentadas no encontro anterior sobre funções de duas variáveis a próxima questão a ser analisada seria como a lei de formação dessas funções afeta seus

gráficos (Apêndice 1). Essa atividade possibilita aos integrantes discutir e pensar sobre como podemos alterar os gráficos modificando a lei de formação, ampliando o entendimento sobre o comportamento dessas funções.

A seção 1 teve como objetivo familiarizar os alunos com o aplicativo *GeoGebra 3D Calculator*, dando algumas instruções para que eles explorem as possibilidades de gráficos de funções de duas variáveis, assim como observar de qual maneira eles representaram essas leis de formação baseadas no que foi discutido na atividade anterior.

Na segunda seção os questionamentos giram em torno do que acontece com esses gráficos quando alteramos algum elemento nas leis de formação, também discutindo como movimentos do gráfico alteram as leis de formação. O objetivo dessa seção é observar como os alunos elaboram maneiras de transladar esses gráficos e analisar como o ambiente do GeoGebra pode favorecer a exploração e compreensão dessas situações.

Vale ressaltar que no planejamento das atividades optamos por não utilizar o recurso de controle deslizante, pois não queríamos tirar a possibilidade dos participantes chegarem em certas conjecturas e conclusões a partir de experimentos próprios nos aplicativos

3.3.3 Atividade 3- Translações de funções trigonométricas e quadráticas

Essa última atividade (Apêndice 2) traz questionamentos para que os integrantes da pesquisa elaborem maneiras de fazer movimentos específicos com gráficos de funções trigonométricas. A escolha dessas funções foi feita, pois era o conteúdo que estava sendo abordado pela escola no momento da pesquisa, e as funções quadráticas foram escolhidas pois existem tipos de movimentos que se apresentam de modo diferente se comparadas às funções trigonométricas, ampliando o campo de estudo e análise. Como por exemplo, ao multiplicarmos uma constante real pela variável x na função $f(x) = \text{sen}(x)$, haverá uma mudança de período no gráfico descrito pela função, no entanto ao multiplicarmos uma constante pela variável x na função $g(x) = x^2$, haverá uma mudança na abertura da concavidade da parábola descrita pela função em questão.

Queremos observar como os alunos organizam seus pensamentos para realizar os movimentos descritos nas questões, e, principalmente, se o raciocínio utilizado para realizar tais movimentos tem semelhança com as translações feitas com funções de duas variáveis. A primeira seção será destinada a translações e, movimentos das funções trigonométricas, visando fazer alterações nas imagens e no período destas. Na segunda seção da atividade as

translações e, movimentos serão focadas nas funções quadráticas, abordando mudanças de imagem.

4. DISCUSSÃO E ANÁLISE DE DADOS

Este capítulo apresenta o relato dos dados coletados durante as atividades apresentadas no capítulo anterior, assim como a análise destes com base no referencial teórico.

4.1 Atividade 1

Esta primeira atividade foi uma aula expositiva feita para introduzir o assunto de funções de duas variáveis para os alunos. A aula foi conduzida em dois momentos, o primeiro, lembrando funções de uma variável e o segundo abordando o novo conteúdo de funções de duas variáveis.

Durante a primeira parte da aula, os alunos estavam quietos, pois eles já conheciam o conteúdo de funções de uma variável. Assim, não houve discussões durante a aula nesse momento.

Na segunda parte da aula, os alunos começaram a mostrar mais interesse pelo assunto, já que houve discussões durante esse momento. Quando o pesquisador estava apresentando os gráficos de funções de duas variáveis para os integrantes da pesquisa, o Aluno C levanta um questionamento logo após um gráfico de função de duas variáveis ser projetado no quadro, da sala de aula (Quadro 2).

Quadro 2: Diálogo sobre dimensões onde os gráficos de funções se encontram

Aluno C: Sor, essas funções com duas letras tem os gráficos no espaço né?

Pesquisador: Sim.

Aluno C: E as funções que a gente viu no colégio contigo fica naquele plano cartesiano, né?

Pesquisador: Sim.

Aluno C: Mas então se a gente tiver três letras dentro da função, o gráfico vai ta onde? Existe quarta dimensão?

Pesquisador: Isso! O gráfico desse tipo de função vai ta na quarta dimensão mesmo. Só que a gente não consegue enxergar a quarta dimensão, porque a nossa realidade só têm três dimensões.

Fonte: Arquivo pessoal

Nesse diálogo podemos perceber que o Aluno C conseguiu fazer uma relação entre o número de variáveis dependentes e o lugar no qual os gráficos dessas funções se encontram. Além disso, esse aluno fez uma relação entre os gráficos de funções de uma, duas e três

variáveis independentes, essa comparação só se mostrou possível visto que o GeoGebra possibilitou a visualização desses tipos de gráficos.

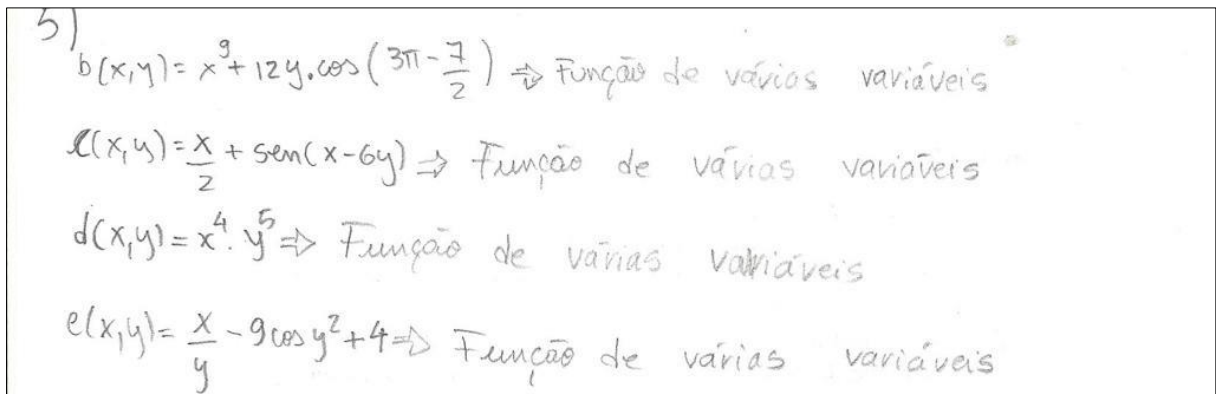
4.2 Atividade 2

Para começar essa atividade, os alunos antes deveriam se familiarizar com o aplicativo *GeoGebra 3D Calculator*, para que conseguissem dar continuidade ao trabalho. Assim, foi feito um pequeno tutorial mostrando como fazer uso das teclas que o aplicativo disponibiliza. O tutorial foi bem menos usado do que nossa expectativa, pois os alunos foram descobrindo as funções do aplicativo de maneira autônoma, ao passo disso questionavam sobre o significado de certas situações que surgiam na tela do aplicativo. Os alunos ficaram bem à vontade com o aplicativo muito rápido.

4.2.1 Seção 1

Na questão 4 os integrantes da pesquisa foram instruídos a escrever leis de formação de algumas funções de duas variáveis no *GeoGebra 3D*. Os alunos tiveram liberdade para criarem o que eles quisessem no aplicativo, surgindo várias funções que nem imaginaria em fazer, assim como é mostrado nas Figuras 7, 8, 9 e 10.

Figura 7: Funções do aluno A



Handwritten mathematical functions by student A:

$$5) \quad b(x, y) = x^3 + 12y \cdot \cos\left(3\pi - \frac{7}{2}\right) \Rightarrow \text{Função de várias variáveis}$$

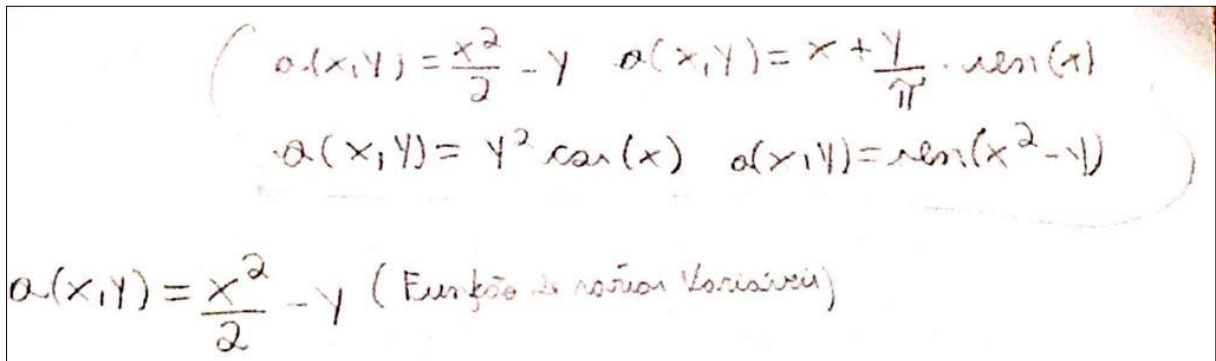
$$c(x, y) = \frac{x}{2} + \sin(x - 6y) \Rightarrow \text{Função de várias variáveis}$$

$$d(x, y) = x^4 \cdot y^5 \Rightarrow \text{Função de várias variáveis}$$

$$e(x, y) = \frac{x}{y} - 9\cos y^2 + 4 \Rightarrow \text{Função de várias variáveis}$$

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 8: Funções do aluno B



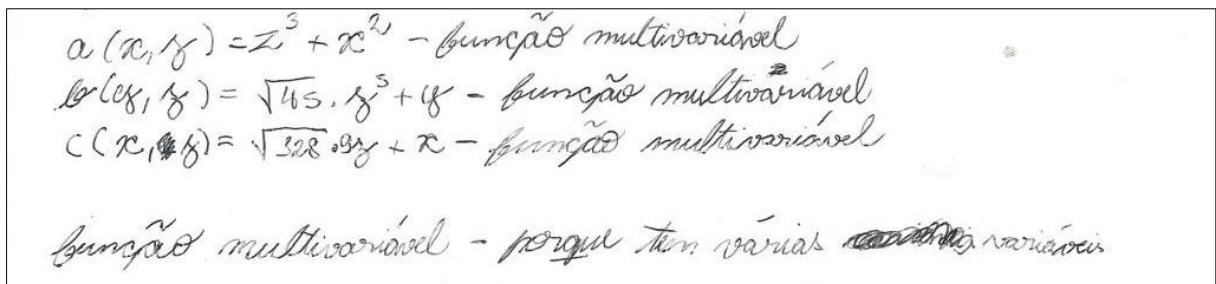
Handwritten mathematical functions by student B:

$$\left(\begin{array}{l} a(x,y) = \frac{x^2}{2} - y \quad a(x,y) = x + \frac{y}{\pi} \cdot \sin(x) \\ a(x,y) = y^2 \cos(x) \quad a(x,y) = \sin(x^2 - y) \end{array} \right)$$

$$a(x,y) = \frac{x^2}{2} - y \quad (\text{Função de várias variáveis})$$

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 9: Funções do aluno C



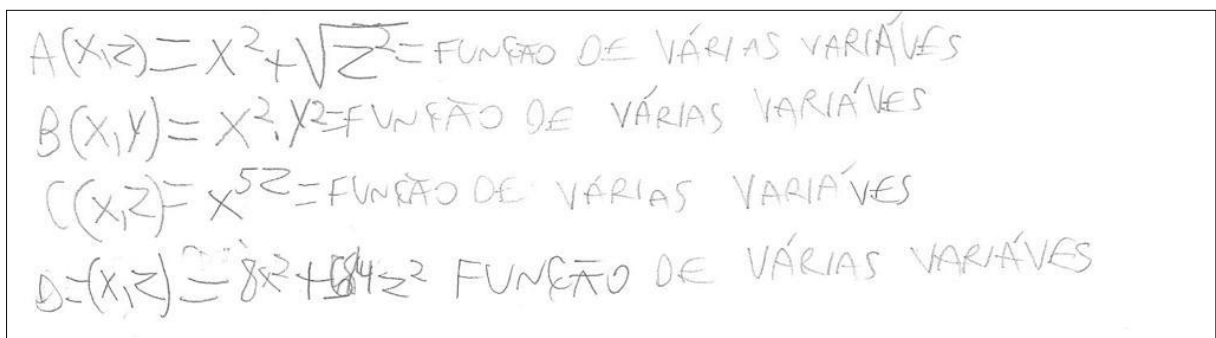
Handwritten mathematical functions by student C:

$$\begin{array}{l} a(x,y) = z^3 + x^2 - \text{função multivariável} \\ b(x,y) = \sqrt{45} \cdot y^3 + y - \text{função multivariável} \\ c(x,y) = \sqrt{328} \cdot y + x - \text{função multivariável} \end{array}$$

função multivariável - porque tem várias ~~variáveis~~ variáveis

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 10: Funções do aluno D



Handwritten mathematical functions by student D:

$$\begin{array}{l} A(x,z) = x^2 + \sqrt{z^2} = \text{FUNÇÃO DE VÁRIAS VARIÁVEIS} \\ B(x,y) = x^2 \cdot y^2 = \text{FUNÇÃO DE VÁRIAS VARIÁVEIS} \\ C(x,z) = x^{5z} = \text{FUNÇÃO DE VÁRIAS VARIÁVEIS} \\ D(x,z) = 8x^2 + 64z^2 = \text{FUNÇÃO DE VÁRIAS VARIÁVEIS} \end{array}$$

Fonte: Arquivo pessoal

Nessa parte os alunos estavam descobrindo gráficos muito “abstratos”, ou seja, gráficos que representavam curvas que eles nunca haviam visto antes, o que fica evidenciado no Quadro 3. Eles estavam usando relações trigonométricas, potências, raízes, entre outras operações para criar as funções em questão, tirando proveito das possibilidades de representações proporcionadas pelo GeoGebra, o que provavelmente seria difícil realizar com

lápiz e papel (GOLDENBERG, 2000). Ficamos algum tempo nessa primeira seção, os alunos puderam explorar livremente as diversas situações que criavam, pois esse momento de descoberta deve ser explorando no tempo de cada um.

Quadro 3: Diálogo sobre gráficos de funções de duas variáveis

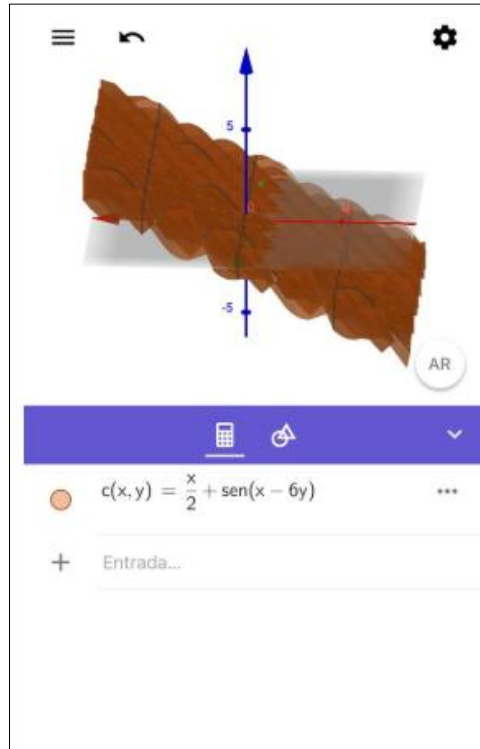
<p>Aluno C: Mas da pra colocar qualquer coisa aqui?</p> <p>Pesquisador: Isso. Vocês estão estudando funções trigonométricas né? Tentem colocar um seno ai no meio.</p> <p>Aluno A: Meu Deus, olha isso aqui velho. Tu não vai entender nada Sor.</p> <p>Pesquisador: Relaxa, vou entender sim. Continuem explorando ai, é isso que eu quero mesmo.</p> <p>Aluno C: Nossa.</p> <p>Aluno A: Ficou meio ondulado por que eu coloquei um seno ali né?</p>

Fonte: Arquivo pessoal

O Aluno A tem a reação descrita no diálogo após definir o gráfico da função $c(x, y) = \frac{x}{2} + \text{sen}(x - 6y)$, cujo gráfico podemos ver na Figura 6. Podemos perceber ainda que o aluno em questão percebe que o gráfico tem uma característica parecida com onda por causa da relação trigonométrica que coloca na sua lei de formação.

Ao visualizarem os gráficos pelo aplicativo, existia a possibilidade de explorar os gráficos com Realidade Aumentada, no entanto, apenas dois alunos conseguiram usar esse recurso do aplicativo, então foi decidido que não usaríamos tal possibilidade de visualização. Feito isso, os alunos enviaram *prinscreens* dos gráficos definidos por essas funções para o nosso grupo do *Whatsapp*, criado para comunicação e envio de atividades. Um desses gráficos está apresentado na Figura 11.

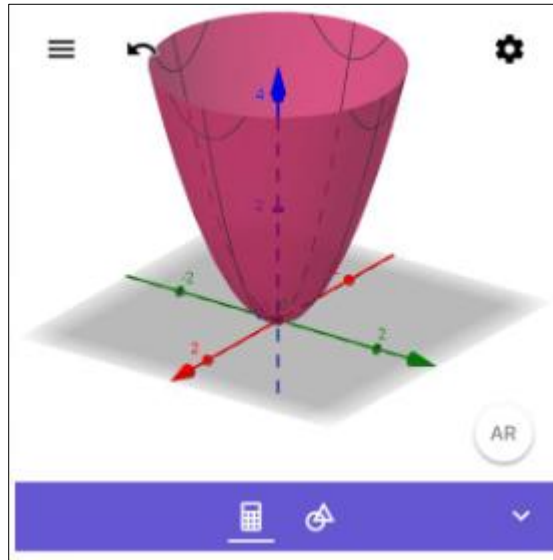
Figura 11: Gráfico da função $c(x, y) = \frac{x}{2} + \text{sen}(x - 6y)$



Fonte: Arquivo pessoal

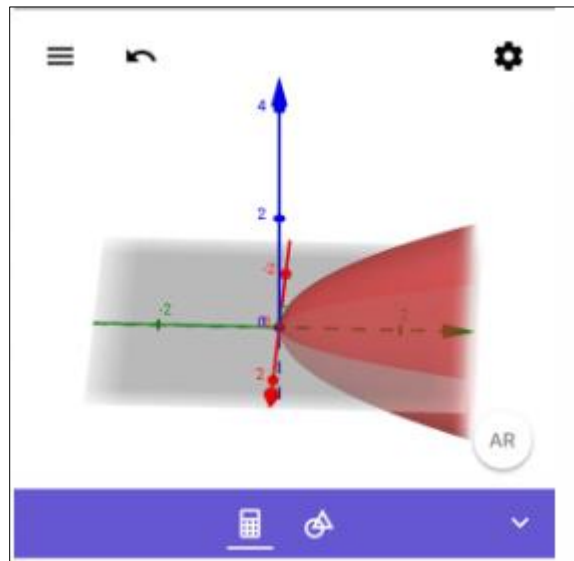
Como esperava que os integrantes não escrevessem funções de duas variáveis na primeira tentativa, mas sim equações, a questão 5 solicitava que eles acessassem as configurações do objeto que foi determinado pelo aplicativo e observassem o nome que foi atribuído. Todos construíram funções de várias variáveis, no entanto, os alunos C e D escreveram funções nas quais as variáveis independentes eram x e z . Nesse momento, o pesquisador selecionou duas funções ($f(x, y) = x^2 + y^2$; $g(x, z) = x^2 + z^2$) para visualizar os gráficos no GeoGebra 3D (Figura 12 e Figura 13) e proporcionar uma discussão e análise sobre seus comportamentos.

Figura 12: Gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$



Fonte: Arquivo pessoal

Figura 13: Gráfico da função $g(x, z) = x^2 + z^2$



Fonte: Arquivo pessoal

Quando os gráficos foram visualizados, pode-se notar que os gráficos representavam comportamentos semelhantes, só não estavam na mesma disposição no espaço. O Quadro 4 apresenta um diálogo entre o pesquisador e os estudantes.

Quadro 4: Diálogo sobre a troca de variável

Pesquisador: Existe algum problema em usarmos a variável z no lugar da variável y ? E isso afeta esses gráficos de alguma maneira?

Aluno C: Não, botei x e z ; y e z ; e x e z , e o aplicativo falou que tudo era função de várias variáveis e fez os desenhos.

Pesquisador: Todo mundo concorda com o aluno C então?

Aluno A: Aham.

Aluno B: Sim.

Aluno C: Sim.

Pesquisador: Então o que muda de uma função para outra?

Aluno A: O plano.

Pesquisador: Hmm.

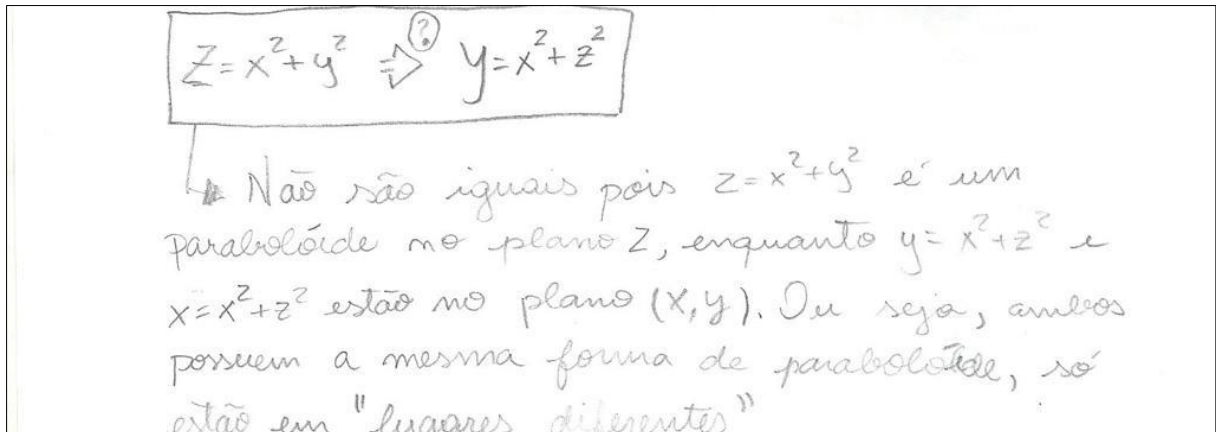
Aluno C: Mudou as letras.

Pesquisador: E o gráfico? Será que muda algo?

Fonte: Arquivo pessoal

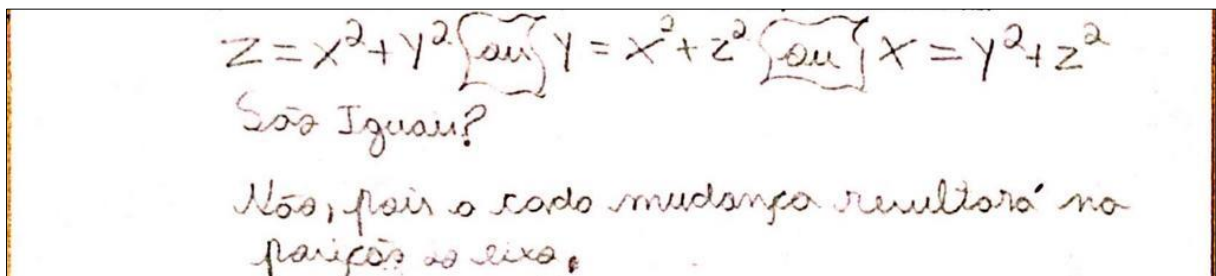
Após essa discussão, os alunos questionaram sobre onde apareceria a “terceira letra” nas funções, nesse caso a variável dependente, se seguiria a mesma ideia das funções de uma variável. Assim, o pesquisador ajustou as funções que foram mencionadas acima de modo que $f(x, y) = z$ e $g(x, z) = y$ foram reescritas como $z = x^2 + y^2$ e $y = x^2 + z^2$. Repetimos os mesmos procedimentos, os integrantes colocaram essas novas leis de formação no *GeoGebra 3D* para determinar os respectivos gráficos. Então, o pesquisador perguntou se as leis de formação eram iguais, e o que mudou no gráfico com essa troca. Em seguida solicitou para os alunos que descobrissem qual era o nome que o aplicativo estava atribuindo para essas novas leis de formação. As respostas dos integrantes da pesquisa estão evidenciadas nas Figuras 14, 15, 16 e 17.

Figura 14: Resposta escrita pelo aluno A



Fonte: Arquivo pessoal

Figura 15: Respostas escrita pelo aluno B



Fonte: Arquivo pessoal

Ao analisarmos as respostas dos alunos A e B, podemos notar que ambos responderam que são gráficos diferentes, pois estão em posições diferentes. O aluno A menciona em sua resposta que o nome do gráfico agora é parabolóide e, em sua explicação sobre o fato dos gráficos estarem em "lugares diferentes", pode-se verificar que ele usou equivocadamente a palavra "plano" para distinguir esses lugares. No entanto, supõe-se que o Aluno A quis se referir aos eixos centrais dessas superfícies. O aluno B tomou ainda um terceiro caso que não havia sido discutido ($x = y^2 + z^2$), respondendo que não eram iguais porque mudavam de posição em relação aos eixos.

Figura 16: Resposta escrita pelo aluno C

$$y = x^2 + y^2 \stackrel{?}{=} y = x^2 + y^2$$

↳ são iguais mas estão posicionados de feitos diferentes
 para demonstração de uma variável
 em função de outro

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 17: Resposta escrita pelo aluno D

$$z = x^2 + y^2 \stackrel{?}{=} y = x^2 + z^2 = \text{SIM, MAS ESTÃO EM DIREÇÃO DIFERENTE DO GRÁFICOS}$$

Fonte: Arquivo pessoal

Os alunos C e D responderam que os gráficos são iguais, só que estão em posições diferentes. Podemos notar que eles estão analisando o formato do gráfico em si, mostrando que conseguem relacionar que o formato é igual em ambos os gráficos pela estrutura das leis de formação, mas que ao trocar uma variável por outra, a posição dessas superfícies no sistema de coordenadas cartesianas é alterada.

4.2.2 Seção 2

Na seção 2, foram propostas funções previamente definidas. Agora que os integrantes já haviam discutido sobre funções de duas variáveis e sobre equações que definem superfícies, o objetivo é que eles manipulem e analisem as mudanças nos gráficos a partir das leis de formação no GeoGebra 3D Calculator.

Exercício 1

Na atividade 1 os alunos tinham que alterar os coeficientes da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ e explicar as respectivas alterações nos gráficos. A primeira dificuldade que se apresentou foi entender o conceito de coeficiente, pois os integrantes da pesquisa pensaram inicialmente que os coeficientes eram os expoentes das variáveis independentes. Essa atividade foi uma introdução aos alunos para começarem a perceber que alterações algébricas têm consequências gráficas. O Quadro 5 mostra um diálogo que evidencia a dificuldade inicial dos alunos para visualizar certas mudanças. Assim o pesquisador incentiva os alunos a usarem números maiores para observar se existe uma mudança de fato, já que alguns deles não

estavam identificando mudanças gráficas. Esses experimentos só foram possíveis, de forma rápida e versátil, pelas possibilidades de representação dos objetos matemáticos no GeoGebra 3D, evidenciando as novas formas de acessar e manipular objetos matemáticos proporcionadas pelas tecnologias digitais, em especial, pela matemática dinâmica.

Quadro 5: Diálogo a respeito da atividade 2.1

Aluno D: Sor, coloquei dois no x e no y e não mudou muito.

Pesquisador: Ta, tu mudou os dois né? Mas o que acontece se tu aumentar ainda mais (os coeficientes de x e de y)?

Aluno A: Não fica bem esférica.

Aluno C: O meu afinou.

Pesquisador: Escreve isso!

Fonte: Arquivo pessoal

Com o decorrer dos experimentos no GeoGebra, começaram a surgir conjecturas sobre as possíveis mudanças nos gráficos, revelando um processo parcial de “fazer matemática” no qual os alunos exploram, observam, analisam e elaboram conjecturas, que posteriormente poderão ser confirmadas ou refutadas (GRAVINA, 2004). Esse movimento de fazer matemática aqui se mostra em momentos nos quais os participantes começam a perceber que algo não está ocorrendo como eles esperavam, que suas conjecturas devem ser refutadas e novas conjecturas e testes devem ser explorados.

Os estudantes começaram a dividir em casos cada tipo de experimento, como fica evidenciado no diálogo do Quadro 6.

Quadro 6: Diálogo sobre casos do exercício 2.1

Aluno C: Quanto maior o número mais fino fica o gráfico.

Aluno A: Mas isso só rola se os números forem diferentes.

Aluno B: Pois é, afina diferente.

Pesquisador: Onde que vai afinar o gráfico? Onde que tu vai colocar esses números? No x ou no y?

Fonte: Arquivo pessoal

Assim depois que a discussão foi finalizando, as respostas refletiram essa separação em casos, mas não tão claro quando se havia pensado anteriormente. Os casos apresentados nas Figuras 18, 19 e 20 mostram que os alunos, de fato, notaram que com um tipo específico de coeficiente o gráfico apresentava um determinado comportamento.

Figura 18: Resposta do aluno A para o exercício 2.1

2 → exercício 1) Após dobrar e dividir pela metade os coeficientes de x e y em $z = x^2 + y^2$, obteve-se parabolóides com aberturas diferentes, onde $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ possui a maior abertura e $2x^2 + 2y^2$ a menor.

Fonte: Arquivo pessoal

Na Figura 18, o aluno A relatou apenas os casos em que ele alterou os coeficientes igualmente, tanto para números maiores que um quanto para números menores que um, dando ainda um exemplo de cada caso descrito. Esses casos fizeram alusão apenas à abertura do parabolóide em questão, aumentando e diminuindo tal abertura.

Figura 19: Resposta do aluno B para o exercício 2.1

* Ao mudar o coeficiente de uma função, quanto maior for ele, menor será a abertura dela.

Fonte: Arquivo pessoal

O aluno B também relata o mesmo tipo de caso, mas não explicitando se os coeficientes de x e de y devem ser alterados igualmente, de modo que sempre sejam iguais (Figura 19).

Figura 20: Resposta do Aluno C para o exercício 2.1

2.1)

$$f(x,y) = 5x^2 + 4y^2$$

$$f(x,y) = 5x^2 + 32y^2 \rightarrow \text{afinizar} \rightarrow \text{quanto maior o número, mais fina}$$

$$f(x,y) = 45x^2 + 328y^2$$

Fonte: Arquivo pessoal

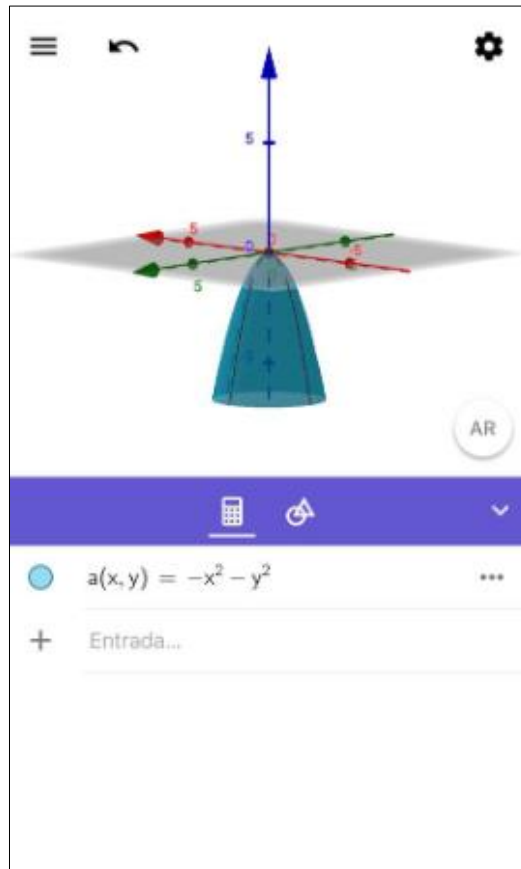
Na Figura 20, o aluno C mostra o caso que começou a ser evidenciado no Quadro 6. No exemplo apresentado pelo Aluno C, é ilustrado que, quando os coeficientes das variáveis independentes são diferentes, a abertura do gráfico é afinada. No entanto, não temos informações se esse afinamento está se manifestando em relação ao eixo x ou ao eixo y.

Exercício 2

Agora que os alunos já haviam identificado como suas decisões em relação às leis de formação geram consequências gráficas, começamos uma abordagem de translação dos gráficos, sem alterar o formato deles de fato, mas sim, mudar suas posições no espaço.

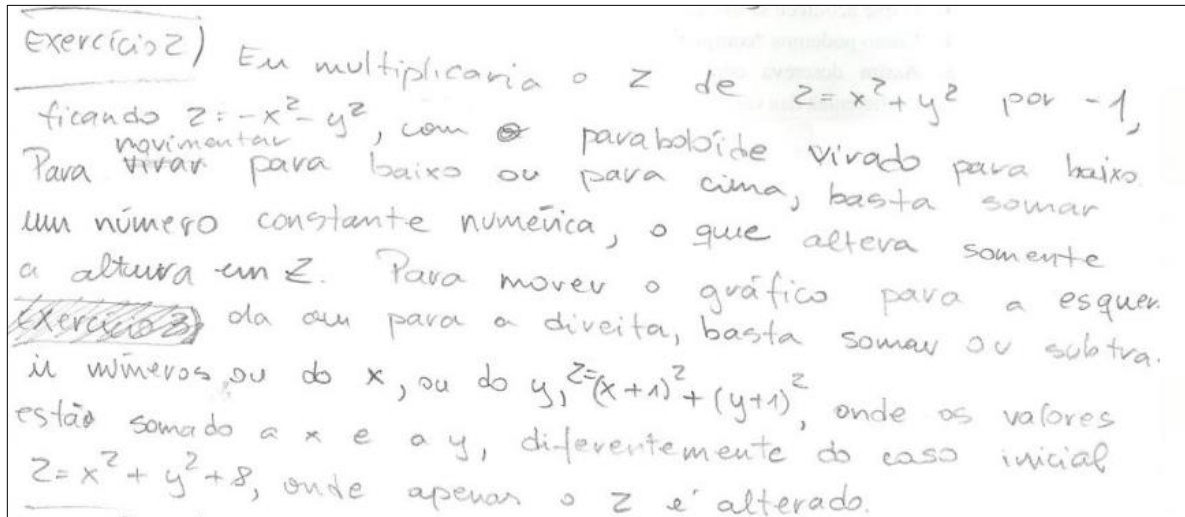
A principal dificuldade que se mostrou na discussão dessa atividade foi como os alunos poderiam caracterizar o “movimento” que o gráfico faz quando se direciona para baixo, na vertical. A partir das ideias exploradas no exercício anterior, os alunos escolheram coeficientes negativos para as variáveis independentes, fazendo assim uma reflexão em relação o plano XOY (Figura 21).

Figura 21: Reflexão da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ no plano XOY



Assim os alunos tomaram esse caso como uma translação do gráfico para baixo, conforme mostram as Figura 22, 23 e 24, que representam as respostas dos Alunos A, B e C.

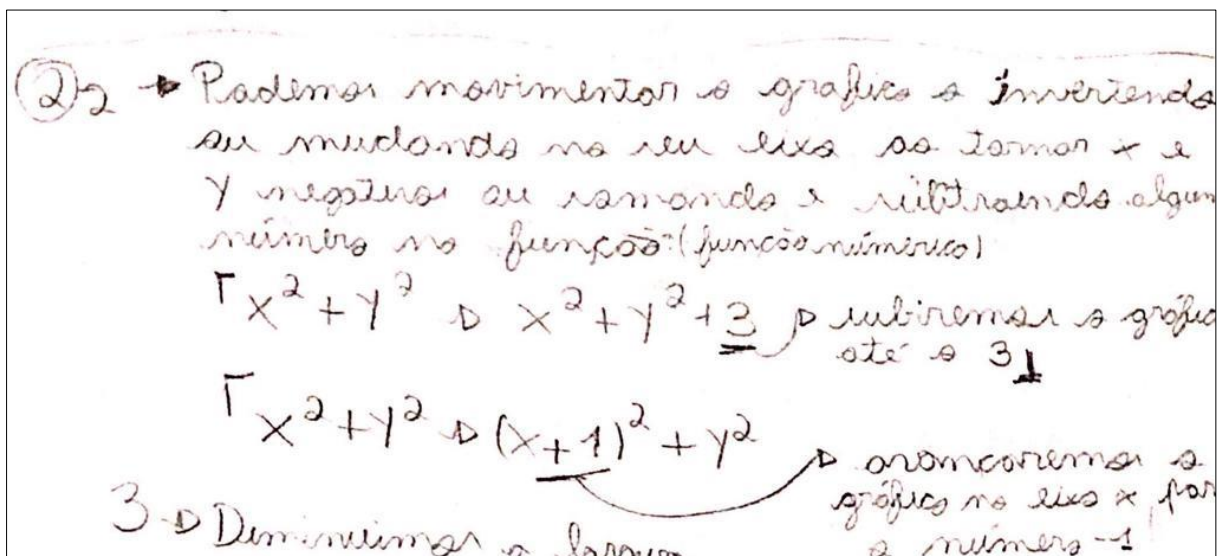
Figura 22: Resposta do Aluno A para o exercício 2.2



Fonte: Arquivo pessoal

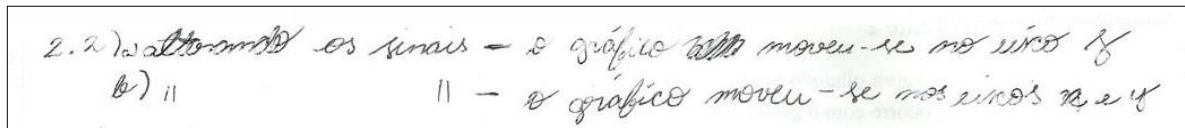
Ainda sobre esse caso, notamos que o Aluno A comenta sobre multiplicar a variável z por -1 , no entanto, ele não efetua a multiplicação de fato na variável z .

Figura 23: Resposta do Aluno B para o exercício 2.2



Fonte: Arquivo pessoal

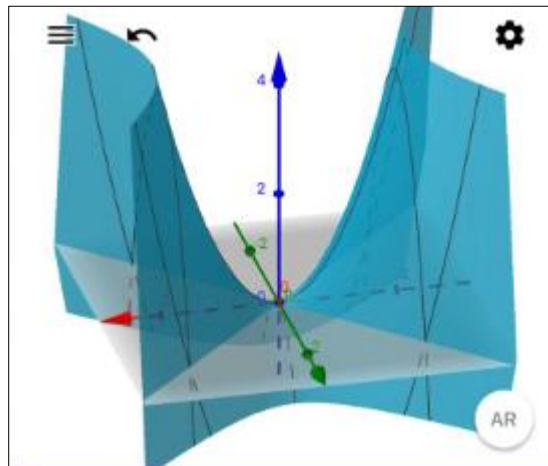
Figura 24: Resposta do Aluno C para o exercício 2.2



Fonte: Arquivo pessoal

Por sua vez, os alunos B e C mencionam apenas sobre trocar o sinal das variáveis x e y para fazer essa reflexão. No momento em que os alunos realizaram seus experimentos no GeoGebra 3D, notaram que o gráfico havia mudado, essa mudança ficou evidenciada como uma mudança de posição, já que não estavam na mesma disposição antes de trocarem os sinais. Essa tomada de decisão para realizar experimentos no aplicativo mostra o ambiente que traz matemática dinâmica possibilita autonomia do aluno para comprovar, ou não, suas conjecturas (BASSO, NOTARE, 2015).

Neste exercício, quando o Aluno A estava chegando à conclusão descrita acima houve um momento em que ele alterou apenas o sinal de uma das variáveis independentes (Figuras 25).

Figura 25: Gráfico da função $f(x, y) = x^2 - y^2$ 

Fonte: Arquivo pessoal

Tal mudança resultou em um gráfico diferente, suas impressões acerca disso são mostradas no Quadro 7.

Quadro 7: Explicação do Aluno A caso mudar apenas um sinal

Aluno A: Sor, olha só uma coisa que eu percebi que achei muito da hora. Ta, vamo pega esse exemplo aqui do $z = x^2 + y^2$, eu percebi quando eu fiz sem querer eu mudei esse mais pra menos ($z = x^2 - y^2$), ao invés do gráfico preencher o parabolóide preencheu tudo que não era ele.

Fonte: Arquivo pessoal

Destacamos que as constatações do Aluno A foram proporcionadas pela manipulação do GeoGebra. O aluno A conseguiu afirmar isso, pois ao determinar os gráficos dessas funções, notou que esses não se interceptavam em nenhum momento.

Com o desenvolver da discussão e pelas explorações proporcionadas pelo aplicativo, o foco de interesse dos alunos mudou naturalmente e, ao invés de pensar no impacto dos coeficientes no comportamento gráfico das funções, como estava sendo analisado no exercício anterior, os alunos começaram a somar constantes às leis de formação ou equações, como podemos ver no diálogo do Quadro 8.

Quadro 8: Discussão que mudou o foco do exercício 2.2

Aluno A: Já sei Sor, a gente vai multiplicar a função 1 por menos. E deu certo, ficou pra baixo.
 Pesquisador: Beleza, realmente, ficou pra baixo. Mas isso pra vocês é movimentar o gráfico para baixo?
 Aluno B: De uma forma é né.
 Aluno A: Não, porque eu não tirei do lugar, o vértice continua onde tava antes.
 Aluno B: Então tu ta invertendo o gráfico né velho.
 Pesquisador: É um tipo de movimento no fim das contas sim. Mas como vocês tirariam do lugar ele?
 Aluno A: Ah, pra tirar do lugar, eu somaria com alguma coisa.
 Pesquisador: Ta, ok. Vê o que vai acontecer no GeoGebra.

Fonte: Arquivo pessoal

Então, a partir desse diálogo, os integrantes do grupo perceberam que para transladar os gráficos, deveriam somar constantes em certos lugares das leis de formação ou equações. O movimento mais intuitivo foi movimentar os gráficos em relação ao eixo z, já que bastava adicionar uma constante no fim da expressão que estava no aplicativo. Transladar o gráfico para a esquerda e para a direita não foi tão simples assim, pois agora era necessário notar que as constantes deveriam ser adicionadas ou subtraídas das variáveis independentes dentro dos parênteses. Quanto às respostas, ilustradas nas Figuras 22, 23 e 24, verificamos que apenas o

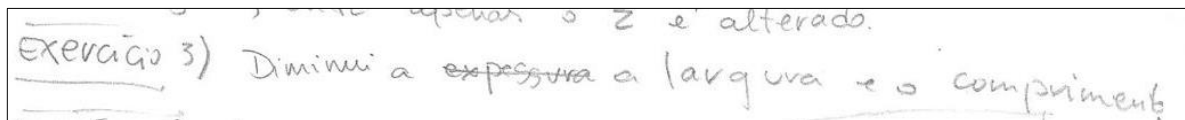
aluno B determinou que quando temos a função $f(x, y) = (x + 1)^2 + y^2$ o gráfico vai ser movido para o ponto $(-1, 0, 0)$ do eixo das abcissas.

Exercício 3

Nesta atividade, voltamos para a análise de coeficientes em uma função, no entanto, a função em questão tinha um gráfico que formava uma semiesfera. Então ao mudarmos esses coeficientes mudaríamos esse formato esférico para um formato oval. Esse exercício serviu de introdução para trabalhar com uma equação de fato, que tornaria a semiesfera em uma esfera completa.

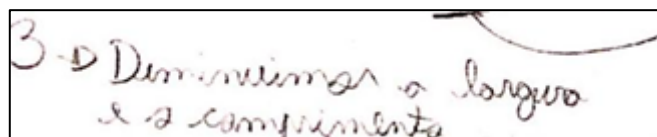
Os resultados foram imediatos, pois como já havíamos feito algo semelhante em exercícios anteriores, os alunos já tinham uma ideia sobre o que iria acontecer e, ao fazer seus experimentos no *GeoGebra 3D Calculator*, suas suspeitas se concretizaram, configurando o aplicativo como um espaço para validar suas conjecturas. Nas Figuras 26, 27 e 28 fica claro que eles determinaram uma mudança na abertura da semiesfera, ou como alguns responderam uma mudança na largura e no comprimento.

Figura 26: Resposta do Aluno A para o exercício 2.3



Fonte: Arquivo pessoal

Figura 27: Resposta do Aluno B para o exercício 2.3



Fonte: Arquivo pessoal

Neste exercício os alunos estavam realizando um processo de generalização, já que ocorreram testes de conjecturas no exercício anterior, só que agora com uma situação diferente. Essa mudança fez os estudantes darem nomes para essas conjecturas, como por exemplo, quando o Aluno A e o Aluno B ressaltam que a largura e o comprimento da semiesfera são alterados, não apenas uma alteração na abertura que o gráfico tem.

Figura 28: Resposta do Aluno C para o exercício 2.3

2.3) reduzir ou aumentar as aberturas

Fonte: Arquivo pessoal

Conseguimos ver que os através de conjecturas feitas pelo GeoGebra 3D os alunos conseguiram determinar relações nas leis de formação com os gráficos dessa função.

Exercício 4

Neste exercício, o objetivo era trabalhar com reflexão de gráficos de funções e superfícies, mas os alunos chegaram nesse ponto antes do esperado. Então, quando começaram a resolver este exercício, já estavam cientes de como poderiam fazer. Por esse motivo, propus uma abordagem diferente. Trouxe a abordagem de equação para trabalhar com essa superfície, trocando $f(x, y)$ por z , conforme mostra o Quadro 9.

Quadro 9: Diálogo sobre abordagem com equação no exercício 2.4

Pesquisador: Porque a equação $z = \sqrt{-x^2 - y^2} + 4$ faz aparecer uma semiesfera só na parte positiva do eixo z ?

Aluno A: Não é porque tem uma raiz quadrada ali?

Pesquisador: Como assim? Que que tem aquela raiz quadrada?

Aluno B: Ele falou isso porque só pode ter número positivo dentro dessa raiz.

Pesquisador: Então se a raiz sumir vai mudar algo?

Fonte: Arquivo pessoal

Com esse último questionamento, os alunos passaram a pensar sobre como poderiam eliminar a raiz para observar se haveria mudança na superfície em questão. Nas Figuras 29, 30 e 31 podemos ver as respostas dos alunos A, B e C.

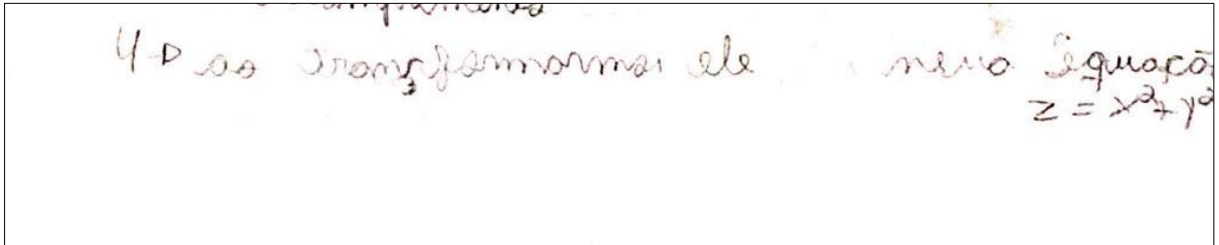
Figura 29: Resposta do Aluno A para o exercício 2.4

Exercício 4) elevando os dois lados por 2. $z^2 = 4 - x^2 - y^2$

Fonte: Arquivo pessoal

Na Figura 29, o aluno A elevou os dois lados da equação ao quadrado para eliminar a raiz quadrada, o que gera uma esfera completa.

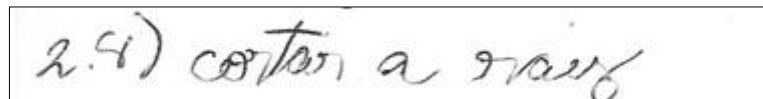
Figura 30: Resposta do Aluno B para o exercício 2.4



Fonte: Arquivo pessoal

Na Figura 30, o aluno B confundiu a função 2 com a função 1, escrevendo uma resposta que não cabe nessa pergunta específica.

Figura 31: Resposta do Aluno C para o exercício 2.4

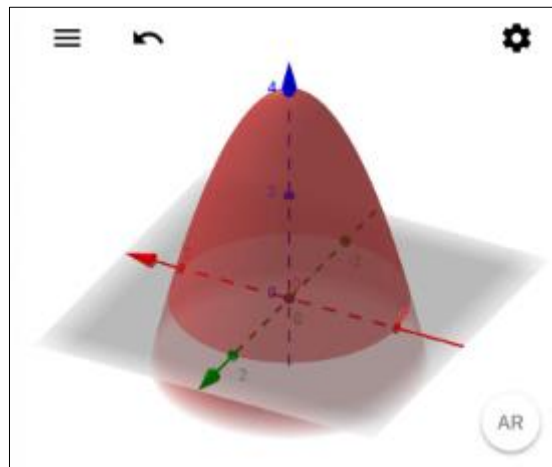


Fonte: Arquivo pessoal

Na Figura 30, o aluno B confundiu a função 2 com a função 1, escrevendo uma resposta que não cabe nessa pergunta específica. Na Figura 31, o aluno C apresentou uma resposta muito simples, afirmando que para completar a figura basta “cortar” a raiz quadrada.

Para chegarem às suas conclusões, os alunos fizeram uso do GeoGebra 3D para verificar suas conjecturas. Quando provoquei os alunos sobre o motivo da raiz quadrada estar na lei de formação e, o que aconteceria se tirássemos-la, os integrantes fizeram diversos testes com o aplicativo, como por exemplo, a função da Figura 31, onde os alunos literalmente tiraram a raiz da equação ($z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$) para testar se era o suficiente para que o gráfico determinasse uma esfera (Figura 32).

Figura 32: Superfície determinada pela equação $z = 4 - x^2 - y^2$



Fonte: Arquivo pessoal

No entanto, o gráfico dessa função não determinou a esfera, assim os alunos começaram a discutir porque não aconteceu o que eles tinham em mente, como podemos ver no Quadro 10:

Quadro 10: Diálogo sobre como tirar uma raiz quadrada de uma equação

Aluno B: Não deu certo Sor, tirei a raiz, mas não formou a esfera.

Pesquisador: Como tu fez pra tirar a raiz?

Aluno B: Eu só tirei ela da função ($f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$).

Pesquisador: Vamo coloca aquele z no lugar de $f(x, y)$, como a gente falou antes. Agora a gente têm $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, como da pra tirar a raiz em uma equação?

Aluno A: Tem que elevara raiz ao quadrado.

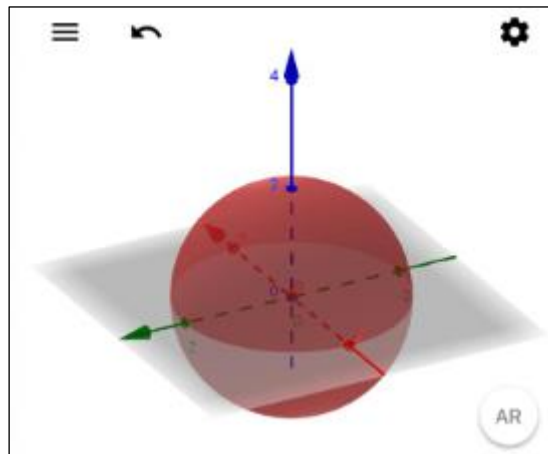
Pesquisador: Colocar só o lado da raiz ao quadrado? Em uma equação?

Aluno A: Ah, tem que elevar dos dois lados.

Fonte: Arquivo pessoal

Após essa nova provocação do pesquisador, os alunos voltaram a fazer experimentos no GeoGebra 3D, elevando os dois lados da equação ao quadrado. Esse experimento gerou a equação $z^2 = 4 - x^2 - y^2$, quando colocada no GeoGebra a superfície determinada foi a esfera completa de fato (Figura 33).

Figura 33: Superfície determinada pela equação $z^2 = 4 - x^2 - y^2$



Fonte: Arquivo pessoal

O GeoGebra 3D foi essencial para os alunos perceberem que suas primeiras conjectura não condiziam com o que esperavam. Esta visualização os fez voltarem a se questionar sobre como deveriam escrever a equação que determina uma esfera no sistema cartesiano. Toda essa reflexão sobre a respeito como tal equação deveria ser só foi possível através do GeoGebra.

4.3 Atividade 3

A terceira atividade consistiu em fazer uma série de perguntas sobre funções de duas variáveis, que provocavam alguns questionamentos que haviam sido abordados na atividade anterior. Como foi relatada na metodologia, essa atividade está dividida em duas partes, uma que trata de funções trigonométricas, e outra que trata de funções quadráticas. O objetivo desse momento foi tentar perceber similaridades nas respostas em relação à atividade anterior, para podermos verificar que se os raciocínios utilizados no trabalho de funções de duas variáveis podem ter potencializado o entendimento de funções de uma variável.

Como nessa parte da pesquisa estamos trabalhando com funções que têm seus gráficos no plano, utilizaremos o aplicativo de *smartphone*, GeoGebra Calculadora Gráfica que, diferente do aplicativo utilizado na atividade anterior, nos permite trabalhar apenas em duas dimensões. Se a atividade continuasse no aplicativo *GeoGebra 3D Calculator*, os gráficos que são abordados nessa atividade poderiam prejudicar a análise que será feita, já que os gráficos em questão não estariam no espaço.

No último encontro da pesquisa, um dos integrantes que participou da atividade 2 não compareceu na atividade 3 (Aluno A). Assim como tivemos um aluno que estava presente na Atividade 1, que foi a aula introdutória a funções de duas variáveis, mas que não conseguiu comparecer na atividade 2, chamaremos essa pessoa de aluno E.

4.3.1 Seção 1

A seção 1 traz perguntas sobre a função seno, abordando translações, intervalos de imagem assim como características do seu gráfico.

Exercício 1

Esse primeiro exercício foi pensado exclusivamente para os alunos se familiarizarem com o novo aplicativo. Como esse aplicativo tem a mesma interface do aplicativo utilizado anteriormente, não ocorreram problemas para escrever as leis de formação.

O aluno E, que não pode comparecer na última atividade em grupo, apresentou alguma dificuldade para utilizar o aplicativo. No entanto os demais integrantes, que já sabiam como ajustar seu pensamento com esse *software*, o ajudaram rapidamente, assim como o pesquisador, conforme evidenciado no Quadro 11.

Quadro 11: Diálogo entre Pesquisador e Alunos

Pesquisador: Ta gente, então vamos utilizar esse outro aplicativo do GeoGebra, escrevam a função que está na folha e escrevam tudo que a gente discutir aqui.

Aluno E: Mas Sor, como que vou colocar o seno aqui?

Aluno B: É só tu clicar aqui nessa parte e clicar na tecla “sen” e botar o x depois.

Pesquisador: Isso, tu tens que usar essa parte do aplicativo que te da umas funções prontas já.

Aluno E: Assim Sor?

Pesquisador: Isso!

Fonte: Arquivo pessoal

Após esse momento, com um breve tutorial para o Aluno E, o uso do aplicativo ficou mais acessível para todos.

Exercício 2

Nesse exercício, a proposta era determinar como as leis de formação deveriam ser alteradas para que seus gráficos fossem transladados para cima ou para baixo.

Novamente houve discussão sobre o significado de mover o gráfico, assim como já havia ocorrido na atividade anterior. No entanto, a dúvida nesse momento estava relacionada com a questão de se deixar o gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$ “maior”, ou seja, aumentar a amplitude da onda poderia ser considerado um movimento, como mostra o Quadro 12.

Quadro 12: Diálogo sobre exercício 1.2

Aluno C: Quando tu fala mover o gráfico, tu diz pra mover o tamanho da onda ou só a onda?

Pesquisador: Beleza, tu percebe que são coisas diferentes que tu falou né? Quando tu diz mover o tamanho da onda, que tu quer dizer com isso? Me explica melhor.

Aluno C: Ah, mover o tamanho da onda é fazer ela ficar maior.

Pesquisador: Mas quando tu faz isso, o que muda na lei de formação? O lugar onde a onda começa no eixo y muda de lugar quando tu faz isso?

Aluno C: Pra fazer isso a gente tem que multiplicar um número.

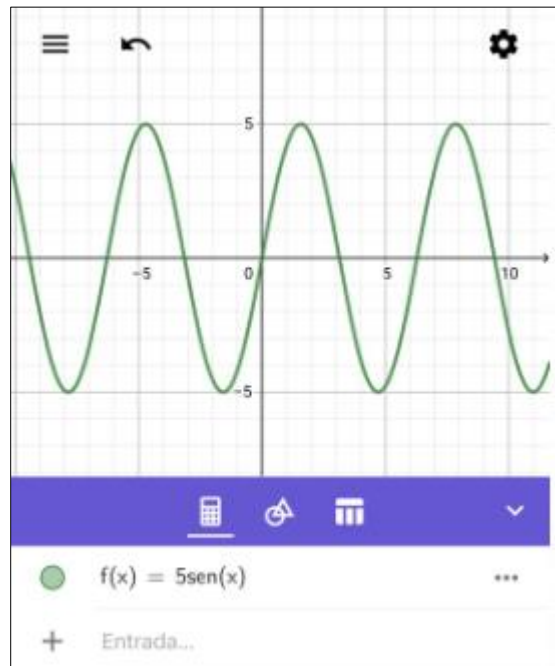
Aluno B: Mas pra mover não tem que somar um número? A gente fez isso da outra vez também.

Fonte: Arquivo pessoal

Após essa discussão, os alunos começaram a discutir que deveriam somar uma constante na lei de formação, mas não tinham certeza do local onde deveriam somar essa constante. Então o Aluno B relembra do encontro anterior, no qual eles realmente tiveram que fazer o mesmo movimento, só que com funções diferentes.

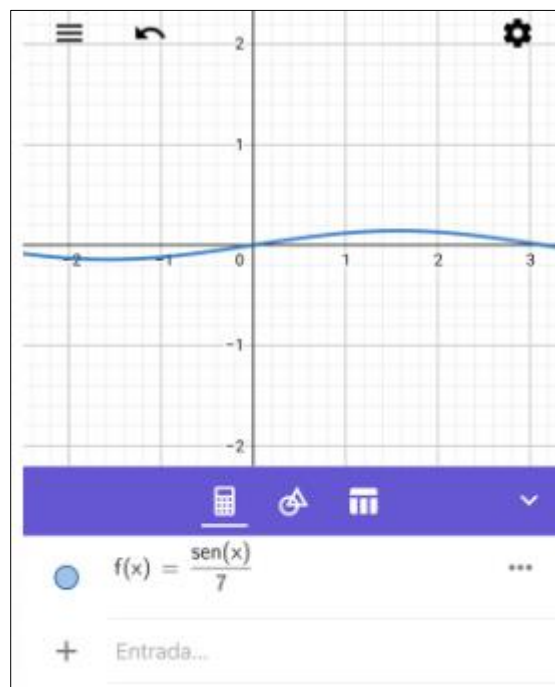
O Aluno C respondeu esse exercício pensando que a mudança da amplitude de onda era a mudança de movimento para cima ou para baixo do gráfico. Este aluno respondeu a questão com a concepção que para mover o gráfico para cima ou para baixo deve-se multiplicar o $\text{sen}(x)$ por uma constante, houve experimentos que esse aluno fez no GeoGebra (Figura 34 e 35), esses gráficos têm a amplitude da onda alterada. O que levou esse aluno a responder de tal maneira foi uma má interpretação do conceito de mover o gráfico da função, ou seja, transladar o gráfico verticalmente.

Figura 34: Gráfico da função $f(x) = 5\text{sen}(x)$



Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 35: Gráfico da função $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{7}$



Fonte: Arquivo Pessoal

As respostas dos Alunos B, C, D e E estão, respectivamente nas Figuras 36, 37, 38 e 39. Podemos ver que, mesmo tendo ocorrido essa discussão sobre o movimento do gráfico.

Figura 36: Resposta do Aluno B do exercício 1.2

2) Podemos mover os adicionamos/subtraímos. ex: $f(x) = \text{sen}(x) + 2$

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 37: Resposta do Aluno C do exercício 1.2

2) Utilizando a multiplicação/divisão na função

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 38: Resposta do Aluno D do exercício 1.2

2) PARA PODER MOVER PARA CIMA/ABAIXO ADICIONAR OU SUBTRAIR APÓS O X.

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 39: Resposta do Aluno E do exercício 1.2

8) Somando ou subtraindo um número do seno, o gráfico "anda" para cima ou para baixo.

Fonte: Arquivo pessoal

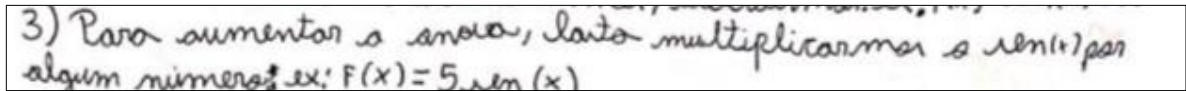
Durante a resolução desse exercício, os alunos ficaram discutindo entre eles sobre o problema, mais do que experimentando possibilidades no aplicativo, mesmo assim houve momentos de experimentação. Mais uma vez, podemos perceber a liberdade que esse ambiente pode proporcionar.

Exercício 3

O exercício 3 foi abordado na discussão do Quadro 9 também, assim a resposta foi imediata para todos os alunos que estavam respondendo o questionário. Na gravação de áudio feita para gravar os dados, existe alguns minutos de silêncio, que revela que os estudantes

estão respondendo sem questionamentos ou discussões. Seguem as respostas dos alunos nas Figuras 40, 41, 42 e 43.

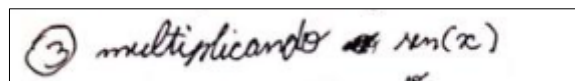
Figura 40: Resposta do Aluno B do exercício 1.3



3) Para aumentar a amplitude, basta multiplicarmos o seno(x) por algum número. ex: $f(x) = 5 \cdot \text{sen}(x)$

Fonte: Arquivo pessoal

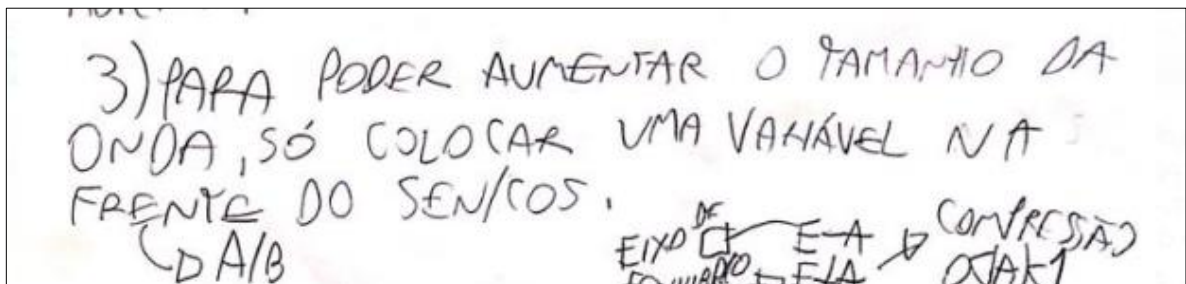
Figura 41: Resposta do Aluno C do exercício 1.3



3) multiplicando o seno(x)

Fonte: Arquivo pessoal

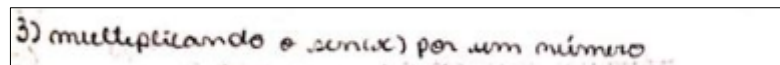
Figura 42: Resposta do Aluno D do exercício 1.3



3) PARA PODER AUMENTAR O TAMANHO DA ONDA, SÓ COLOCAR UMA VARIÁVEL NA FRENTE DO SEN/COS.
(D A/B) EIXO DE E-A (COMPRESSÃO) OXAK1

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 43: Resposta do Aluno E do exercício 1.3



3) multiplicando o seno(x) por um número

Fonte: Arquivo pessoal

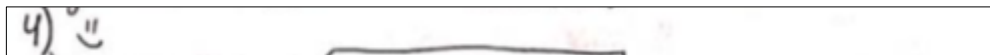
Novamente houve pouca experimentação nesse exercício, os alunos ficaram mais tempo conversando uns com os outros sobre como responder as questões, assim como em outras situações. Isso pode revelar que os conceitos matemáticos estão sendo compreendidos pelos alunos, e que as experimentações vão tornando-se cada vez menos necessárias, levando o pensamento para outro patamar.

Exercício 4

O objetivo desse exercício era provocar os alunos a explicar com suas palavras o que entendiam por imagem de uma função. Isso é considerado importante visto que o próximo exercício exige uma ideia do que é a imagem de uma função. As respostas dos alunos seguem nas Figuras 44, 45, 46 e 47.

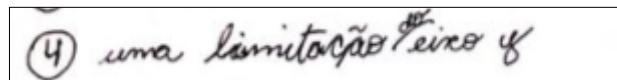
Podemos ver que os alunos C e E responderam determinando um intervalo no eixo das ordenadas. O aluno B não respondeu à questão por escrito.

Figura 44: Resposta do Aluno B do exercício 1.4



Fonte: Arquivo pessoal

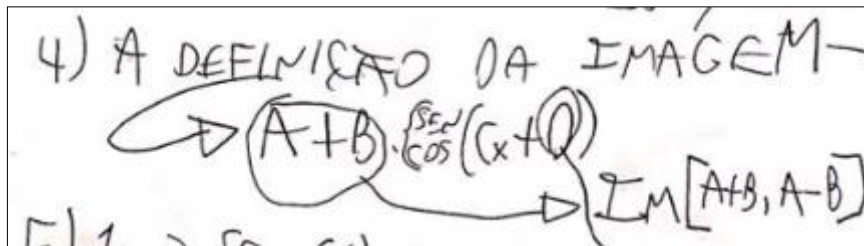
Figura 45: Resposta do Aluno C do exercício 1.4



Fonte: Arquivo pessoal

O aluno C respondeu de maneira mais geral, falando que a imagem é uma limitação no eixo y , entendemos que a ideia de intervalo de imagem está presente nessa resposta.

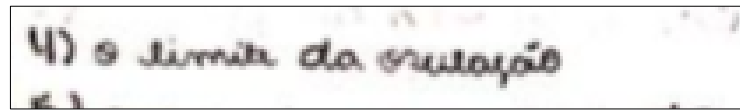
Figura 46: Resposta do Aluno D do exercício 1.4



Fonte: Arquivo pessoal

Quanto ao Aluno D, ao responder a questão ele olhou em seu caderno como seu professor do turno da manhã havia passado para a turma. Ele retrata todos os coeficientes que fazem alguma alteração no gráfico da função, dando destaque aos coeficientes “a” e “b” para determinar que a imagem de uma função que tem aquela estrutura será o intervalo $[a+b, a-b]$.

Figura 47: Resposta do Aluno E do exercício 1.4



Fonte: Arquivo pessoal

Quanto ao aluno E, ele respondeu que a imagem de uma função é o limite da oscilação, percebemos que ele elaborou sua resposta baseado na função da seção 1. Percebemos que a ideia de intervalo também está presente na resposta de E, quando ele fala sobre oscilação, no entanto, não fica claro em sua resposta se esse limite das oscilações está sendo abordado no eixo x ou no eixo y .

Após todos terem respondido com suas palavras, fizemos uma discussão na qual todos trouxeram suas opiniões e elaboraram uma boa definição de imagem, seja ela, o intervalo no eixo y onde o gráfico se encontra. Nesse exercício houve pouca experimentação no GeoGebra.

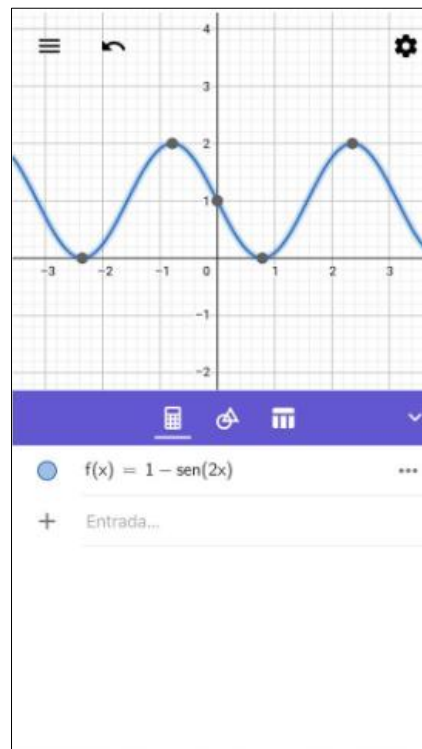
Exercício 5

Esse exercício proporcionou um espaço para que os alunos colocassem em prática os movimentos de translações que haviam estudado até o momento. Foi solicitado aos alunos que determinassem uma lei de formação, para uma função seno, que tivesse como imagem o intervalo $[-1, 3]$.

Não estava explícito como os alunos deveriam determinar essa lei de formação, apenas que eles poderiam fazer experimentos com o GeoGebra para visualizar os gráficos que iriam surgir dependendo do que eles alterassem na lei de formação. Nesse momento, o GeoGebra se constitui um recurso essencial para criar uma relação direta entre as mudanças algébricas que são feitas ao longo do raciocínio com os respectivos gráficos gerados, já que sem esse *software*, o estabelecimento de relações não seria tão imediato.

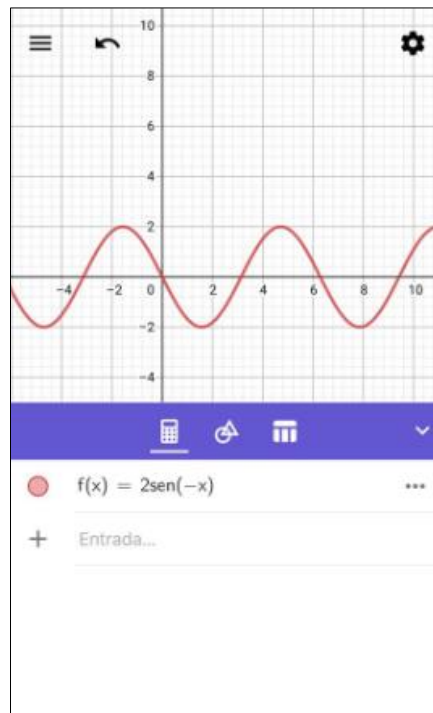
Analisando o comportamento dos alunos na resolução da atividade, como tinham liberdade para explorar as leis de formação, notamos que houve perda de foco do objetivo do exercício, como se não soubessem como estruturar seu pensamento para alcançar o objetivo. Nas figuras 48 e 49 podemos ver experimentos que o aluno B realizou no GeoGebra.

Figura 48: Experimento 1 para o exercício 3.5



Fonte: Arquivo pessoal

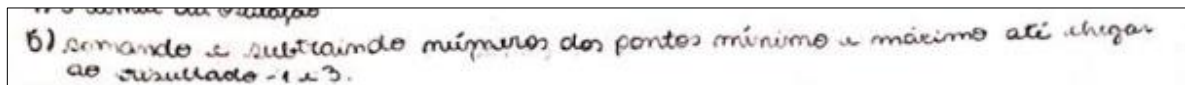
Figura 49: Experimento 2 para o exercício 3.5



Fonte: Arquivo pessoal

Ao final da atividade, houve dois tipos de respostas, sejam elas, $f(x) = 1 - 2\text{sen}(x)$, cuja imagem é o intervalo $[-1,3]$, e $g(x) = 1 + 2\text{sen}(x)$, cuja imagem é o intervalo $[-2,2]$. No entanto, o Aluno E não apresentou uma lei de formação como os demais, mas sim uma maneira genérica de determinar uma lei de formação em questão, como mostra a Figura 50.

Figura 50: Resposta do Aluno E do exercício 1.5



6) somando e subtraindo números das pontas mínimo e máximo até chegar ao resultado -1 e 3.

Fonte: Arquivo pessoal

Esse aluno demonstrou uma abordagem mais algébrica que os demais alunos, não podemos deixar de ressaltar que tal diferença de resposta pode ser justificada pelo trabalho que os demais fizeram na atividade 2, que pode ter potencializado suas análises gráficas.

Exercício 6

O objetivo dessa questão era fazer com que os alunos percebessem que não existe uma única lei de formação que satisfaz uma determinada condição. Como esse trabalho estava sendo realizado em grupo, os alunos discutiram sobre as leis de formação do exercício 5 e, assim, a resposta que haviam colocado para a função $f(x)$ anteriormente, colocaram para a função $g(x)$ neste, e vice e versa.

Neste exercício ficou claro que os alunos entenderam como multiplicar ou somar um coeficiente com $\text{sen}(x)$, pode alterar o gráfico da função. Já que houve discussão entre os alunos para determinar se haviam outras possibilidades de coeficientes que não fossem os já utilizados como podemos notar no Quadro 13.

Quadro 13: Diálogo sobre possibilidades de resposta do exercício

Aluno B: Vocês colocaram algum número diferente de 2 e 1 multiplicando e somando?

Aluno E: Acho que só pode ser esses dois.

Aluno B: Mas porque o Sor ia colocar essa questão então?

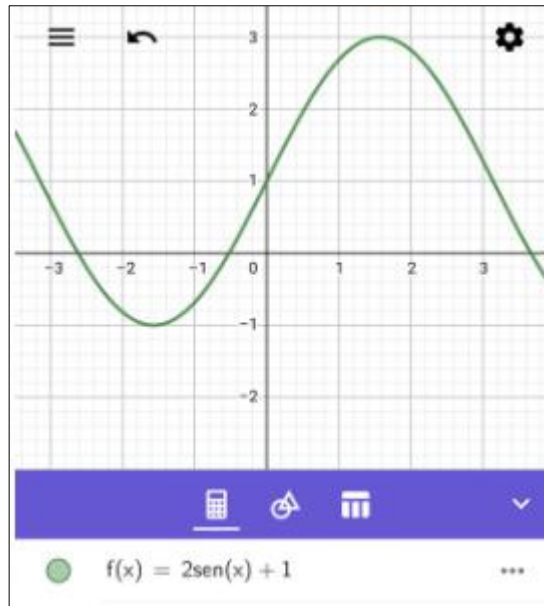
Aluno E: Eu coloquei diferente na real. Eu mudei o sinal do 2 pra menos, aí só não mudou o tamanho da onda, mas é um número diferente. Da pra ver aqui no aplicativo isso.

Aluno B: Hmm, entendi.

Fonte: Arquivo pessoal

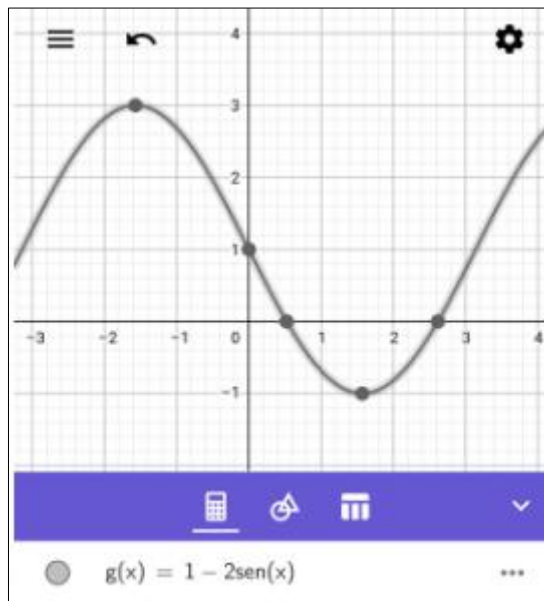
Vale ressaltar, que a fala do Aluno E é justificado por um experimento feito no GeoGebra. Onde ele usa sua resposta da questão anterior ($f(x) = 1 + 2\text{sen}(x)$) e troca o sinal do coeficiente que multiplica o $\text{sen}(x)$ ($g(x) = 1 - 2\text{sen}(x)$) para determinar que a imagem dessa funções não mudam de fato, como podemos ver nas Figuras 51 e 52.

Figura 51: Gráfico da função ($f(x) = 1 + 2\text{sen}(x)$)



Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 52: Gráfico da função ($g(x) = 1 - 2\text{sen}(x)$)



Fonte: Arquivo Pessoal

Exercício 7

No estudo de funções trigonométricas, determinar o período da função é algo muito abordado, e que se aproxima do nosso estudo sobre translações. Como o objetivo era trazer questionamentos que provocassem os alunos a utilizar o GeoGebra, substituímos período por frequência, conceitos que são inversamente proporcionais.

À princípio, os alunos apresentaram dúvidas sobre como poderiam definir frequência, então o pesquisador traz uma provocação para que os alunos dessem exemplos de como eles conhecem o conceito de frequência no mundo, como fica evidenciado no Quadro 14.

Quadro 14: Diálogo sobre o que é frequência

<p>Aluno C: O que é frequência Sor? Tem algo haver com período?</p> <p>Pesquisador: Tem sim. Antes de eu te falar o que é frequência, quero que vocês tentem lembrar de alguma coisa que vocês já ouviram com frequência.</p> <p>Aluno E: Tipo frequência de alguma coisa?</p> <p>Pesquisador: Pode ser!</p> <p>Aluno B: Tem a frequência cardíaca. Que aparece naquelas máquinas do Grey's Anatomy.</p> <p>Pesquisador: Isso! Existe sim, mas como que tu pode me explicar o que é frequência cardíaca?</p> <p>Aluno B: É algo com os batimentos do coração.</p> <p>Aluno C: Batimentos por segundo? Não é isso?</p> <p>Pesquisador: É isso mesmo, pensem agora como a gente pode deixar isso mais genérico. Vocês me deram um exemplo, agora tentem definir pra qualquer coisa.</p>

Fonte: Arquivo pessoal

O aluno B citou a série “Greys’s Anatomy” que retrata a vida de cirurgiões em um hospital, fazendo referência a um monitor cardíaco que mostra a frequência cardíaca, entre outros sinais vitais de um paciente.

Depois dessa provocação, os alunos chegaram a um consenso que frequência era o número de vezes que algo acontece em um determinado tempo. Assim para mudar a frequência da onda, eles deveriam fazer o gráfico da função trigonométrica ter mais oscilações, fazendo a onda aparecer mais. Nesse caso, visualizar uma parte do gráfico foi essencial para os alunos entenderem que a onda em questão deveria ter mais oscilação.

Então ficou determinado pelos alunos que o gráfico deveria ter mais oscilações, os estudantes decidiram multiplicar uma constante em algum local da lei de formação. Como já

sabiam o que acontecia quando multiplicavam o $\sin(x)$ por um número, decidiram multiplicar apenas a variável x em $\sin(x)$, como podemos verificar nas Figuras 53, 54, 55 e 56.

Figura 53: Resposta do Aluno B do exercício 1.7

4) Podemos aumentar a frequência ao multiplicarmos um número da x ex: $f(x) = \sin(5x)$

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 54: Resposta do Aluno C do exercício 1.7

③ multiplicando ~~por~~ por algum n^o de $\sin(x)$

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 55: Resposta do Aluno D do exercício 1.7

7) PARA PODER AUMENTAR AS OCULTAÇÕES
EX: $f(x) = \sin(x) \rightarrow$ POIS A VARIÁVEL VAI ESTAR
FREQUENTE.

Fonte: Arquivo pessoal

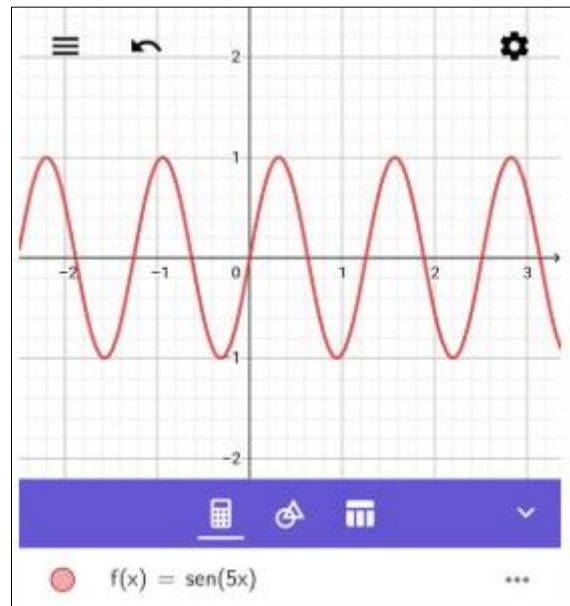
Figura 56: Resposta do Aluno E do exercício 1.7

7) se multiplicar o x por qualquer número, ela vai aparecer mais vezes, como
por exemplo, $f(x) = \sin(5x)$

Fonte: Arquivo pessoal

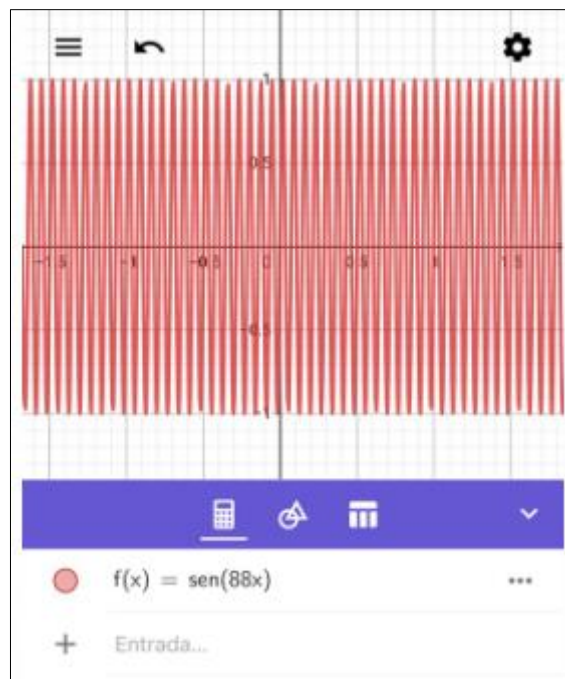
No final desse exercício não houve tanta experimentação gráfica, pois os alunos já estavam cientes dos vários movimentos. Assim, só restava um local para multiplicar uma constante, com isso, eles fizeram alguns experimentos no GeoGebra para compreender o que eles suspeitavam que ia acontecer, o que fica evidência nos experimentos das Figuras 57 e 58.

Figura 57: Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(5x)$



Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 58: Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(88x)$



Fonte: Arquivo Pessoal

Exercício 8

Esse exercício da seção 1 trouxe o questionamento sobre como transladar os gráficos de funções trigonométricas em relação ao eixo das abscissas. A resolução desse exercício não

levou muito tempo para os alunos, já que haviam determinado quase todos os demais movimentos com funções. Foi de imediato que os participantes decidiram somar ou subtrair uma constante de x em $\sin(x)$.

Houve certa dúvida entre os participantes, pois como moveríamos um gráfico que é periódico para a esquerda ou para direita, já que em determinado momento não faria diferença alguma mover uma onda para a esquerda ou para direita. Tal questionamento foi possibilitado pelo GeoGebra, porque eles realizaram experimentos somando e subtraindo constantes para chegar nessa conclusão. Mais uma vez, o aplicativo GeoGebra possibilitou agilidade para explorações e testes, proporcionando a validação das conjecturas dos alunos.

4.3.2 Seção 2

Esta seção também propõe o estudo de translações, só que agora com uma função polinomial de uma variável, $f(x) = x^2$. Escolhemos a função quadrática, pois lembra a função de duas variáveis que foi trabalhada na Atividade 2, $g(x) = x^2 + y^2$.

Exercício 2

O exercício começa pela última translação na seção 1 desta atividade: Como podemos mover o gráfico dessa função para a direita ou para a esquerda? Os alunos já estavam acostumados a fazer experimentos no GeoGebra nesse momento da aplicação, sem que o pesquisador precisasse provocar essa reação neles.

Durante os experimentos, o aluno D questiona sobre o funcionamento do GeoGebra, afirmando que o aplicativo não estaria funcionando direito. No entanto, o aluno estava equivocado com a forma de escrever a lei da função no GeoGebra de modo que ocorresse o que ele queria, como fica evidenciado no Quadro 15.

Quadro 15: Diálogo sobre exercício 2.2

Aluno D: O meu só ta subindo aqui. O aplicativo não ta funcionando.

Pesquisador: Pode crer, o aplicativo ta funcionando direitinho. O que ta acontecendo ta obedecendo o que tu escreveu. Me explica o que tu fez ai.

Aluno D: Eu somei um número com o x pra mexer o gráfico pra esquerda.

Pesquisador: Perfeito, o que tu me disse ta certo. Mas olha o que tu colocou no GeoGebra.

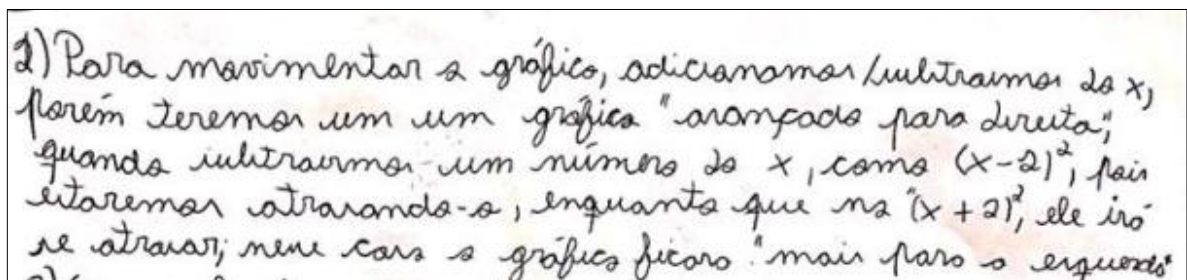
Pesquisador: Pelo o que tu me falou agora tu tinha que somar com x né, mas pelo que ta escrito na lei de formação tu ta somando com o x^2 .

Fonte: Arquivo pessoal

A lei de formação que o Aluno D estava escrevendo era, $f(x) = x^2 + 1$, mas depois do diálogo com o pesquisador, percebeu que deveria adicionar a constante somente com o x para obter o resultado esperado. O Aluno B comenta sobre como elaborou a resposta do exercício análogo para as funções de duas variáveis e, ao lembrar-se disso, imediatamente testa no GeoGebra a seguinte função $f(x) = (x + 2)^2$, confirmando seu raciocínio.

A resposta do aluno B traz semelhanças ao exercício da atividade 2, que faz alusão ao mesmo tipo de movimento, ainda assim o aluno traz uma explicação sobre porque os gráficos deslocam-se para a esquerda do eixo x quando adicionamos de uma constante ao x, assim como quando os gráficos deslocam-se para a direita do eixo x quando subtraímos uma constante ao x, como podemos notar na Figura 59.

Figura 59: Resposta do Aluno B do exercício 2.2



2) Para movimentar o gráfico, adicionamos/subtraímos de x, porém teremos um gráfico "arrastado para direita", quando subtraímos um número de x, como $(x-2)^2$, pois iremos atrasar o gráfico, enquanto que na $(x+2)^2$, ele irá se atrasar, nesse caso o gráfico ficará "mais para a esquerda".

Fonte: Arquivo pessoal

No entanto, podemos observar que o Aluno B utiliza a expressão “atrasar” em ambas as situações. Acreditamos que, como na primeira análise foi utilizada a ideia de “atrasar”, na segunda análise o aluno deveria ter usado a ideia de “adiantar”. Podemos ver que o raciocínio

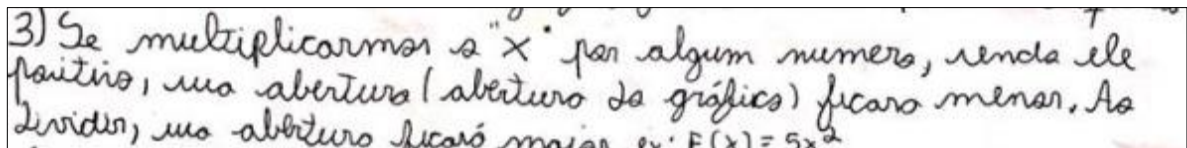
elaborado para esse movimento tem fortes semelhanças com sua resposta para o exercício 2.2 da atividade 2, como pode ser visto na Figura 23, sugerindo que os experimentos realizados anteriormente e as respectivas conclusões já validadas estão refletindo-se nas atividades de agora.

O restante dos alunos apresentou respostas semelhantes, com a diferença que os outros não foram tão específicos ao determinar como o gráfico era movido para a esquerda e como o gráfico era movido para direita.

Exercício 3

Nesse exercício, queremos que os alunos analisem como o coeficiente de x^2 afeta o gráfico da função. A resolução dessa questão foi feita da mesma maneira que o exercício 2.1 da Atividade 2. Todos os alunos perceberam, a partir de experimentos no GeoGebra, que quando eles alteram o coeficiente de x^2 , a abertura da parábola fica mais aberta ou mais fechada, como podemos ver nas Figuras 60, 61, 62 e 63.

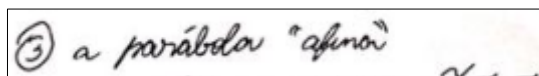
Figura 60: Resposta do Aluno B do exercício 2.3



3) Se multiplicarmos o "x" por algum numero, sendo ele positivo, sua abertura (abertura da grafico) ficara menor. Ao dividir, sua abertura ficara maior ex: $f(x) = 5x^2$

Fonte: Arquivo pessoal

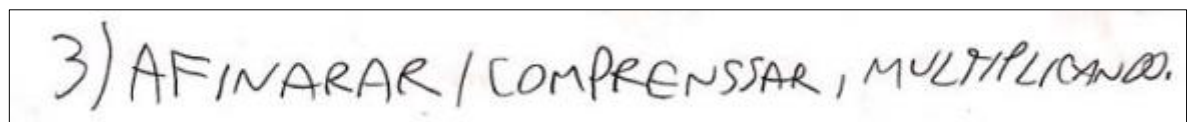
Figura 61: Resposta do Aluno C do exercício 2.3



3) a parábola "afina"

Fonte: Arquivo pessoal

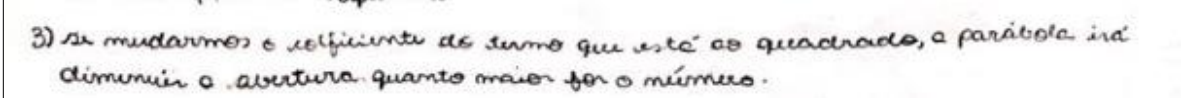
Figura 62: Resposta do Aluno D do exercício 2.3



3) AFINARAR / COMPRESSAR, MULTIPLICANDO.

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 63: Resposta do Aluno E do exercício 2.3



3) se mudarmos o coeficiente de termo que está no quadrado, a parábola irá diminuir a abertura quanto maior for o número.

Fonte: Arquivo pessoal

Isso revela que as conjecturas validadas com funções de duas variáveis estão sendo utilizadas no desenvolvimento destes exercícios. Então podemos perceber a atividade com funções de duas variáveis teve alguma influência no pensamento desses alunos ao responderem esse exercício, trazendo traços do pensamento de atividades realizadas em três dimensões, para atividades realizadas em duas dimensões.

Exercício 4

Essa questão teve como objetivo analisar e a imagem de funções quadráticas, questionando se a imagem dessas funções seria restrita.

Então uma discussão iniciou acerca da palavra restrita. Para ajudar os alunos nesse questionamento, foi feita uma provocação pelo pesquisador, como podemos ver no Quadro 16.

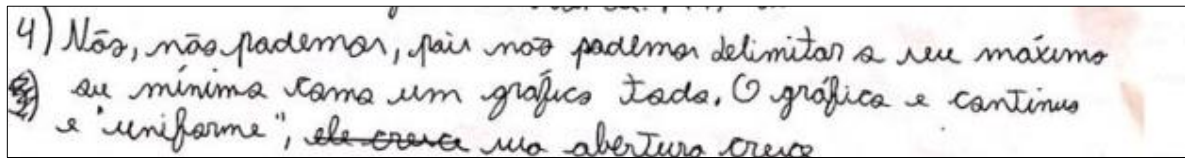
Quadro 16: Diálogo sobre exemplo de imagem de função

<p>Aluno C: Como que eu vou saber quando a imagem é restrita ou não?</p> <p>Pesquisador: Ta, vamos olhar para imagens que a agente trabalhou antes. As imagens de funções trigonométricas por exemplo, como elas são?</p> <p>Aluno E: Tem ponto máximo e ponto mínimo.</p> <p>Aluno B: Tem começo e fim então.</p> <p>Pesquisador: Então isso é uma coisa restrita?</p> <p>Aluno C: Olha Sor, acho que é né.</p> <p>Pesquisador: Então olhem pra imagem da função quadrática agora, vai ter a mesma estrutura do exemplo que vocês acabaram de falar?</p>

Fonte: Arquivo pessoal

A partir disso os alunos foram analisar os intervalos no GeoGebra e responderam conforme as Figuras 64, 65, 66 e 67.

Figura 64: Resposta do Aluno B do exercício 2.4

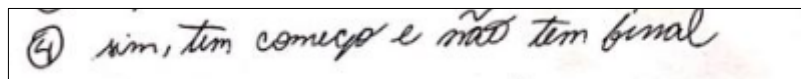


4) Não, não podemos, pois não podemos delimitar o seu máximo ou mínimo como um gráfico todo. O gráfico é contínuo e "uniforme", ele cresce na abertura cresce

Fonte: Arquivo pessoal

O aluno B respondeu que a imagem não é restrita, pois não tem começo nem fim, e ressaltou que o gráfico é contínuo e uniforme. Tais afirmações nos fazem conjecturar que ele estava observando o intervalo no eixo das abcissas, ou seja, o domínio da função, evidenciando certa confusão na análise do gráfico no GeoGebra. O mesmo erro pode ser visto na resposta do Aluno E, que fala do eixo x em sua resposta.

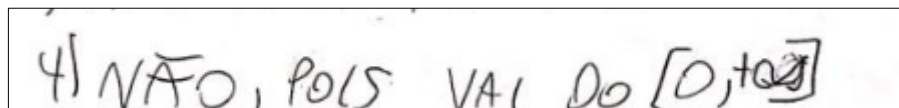
Figura 65: Resposta do Aluno C do exercício 2.4



4) sim, tem começo e não tem final

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 66: Resposta do Aluno D do exercício 2.4

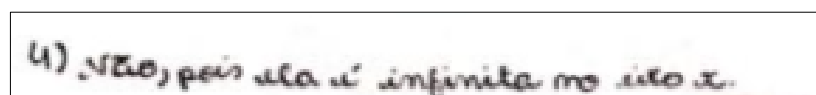


4) NÃO, POIS VAI DO $[0, +\infty]$

Fonte: Arquivo pessoal

Quanto aos alunos C e D, suas respostas foram baseadas no intervalo que estava no eixo y, assim como havíamos definido na seção 1 dessa atividade. No entanto, para o aluno C, por esse intervalo ter começo e não ter fim, esta imagem se caracterizava como algo restrito, enquanto o aluno E respondeu o contrário, dando a mesma justificativa.

Figura 67: Resposta do Aluno E do exercício 2.4



4) NÃO, pois ela é infinita no eixo x.

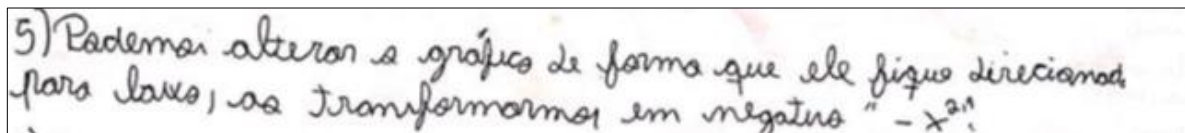
Fonte: Arquivo pessoal

Talvez o uso da palavra restrito não tenha sido a melhor escolha, visto que dois alunos interpretaram a palavra de maneira diferente dando a mesma justificativa.

Exercício 5

O penúltimo exercício da atividade perguntava como poderíamos alterar o intervalo da imagem da função quadrática. Novamente existiu uma liberdade entre os estudantes para fazerem experimentos no GeoGebra como quisessem, com o intuito de estimular uso das translações estudadas nas questões anteriores. Seguem as respostas feitas pelos alunos nas Figuras 68, 69, 70 e 71.

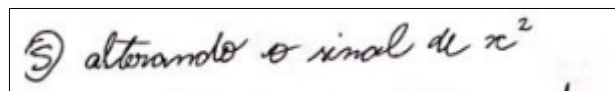
Figura 68: Resposta do Aluno B do exercício 2.5



5) Podemos alterar o gráfico de forma que ele fique direcionado para baixo, se transformarmos em negativo " $-x^2$ ".

Fonte: Arquivo pessoal

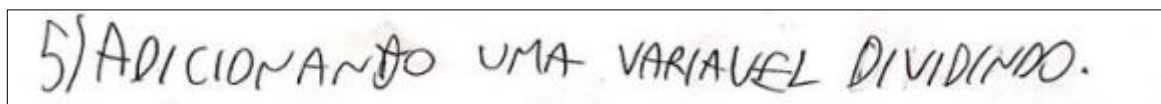
Figura 69: Resposta do Aluno C do exercício 2.5



5) alterando o sinal de x^2 .

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 70: Resposta do Aluno D do exercício 2.5

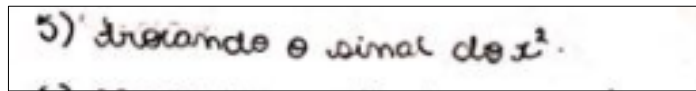


5) ADICIONANDO UMA VARIÁVEL DIVIDINDO.

Fonte: Arquivo pessoal

O aluno D respondeu que se colocássemos uma variável dividindo a função a imagem seria alterada. Aqui o aluno respondeu com a expressão “variável” retratando uma constante que estava sendo mudada a cada experimento feito no GeoGebra. Tal resposta pode ser validada se essa constatare que ele sugere para dividir x^2 por um número negativo, assim resultaria no mesmo caso descrito pelos demais alunos.

Figura 71: Resposta do Aluno E do exercício 2.5



5) deslocando o sinal de x^2 .

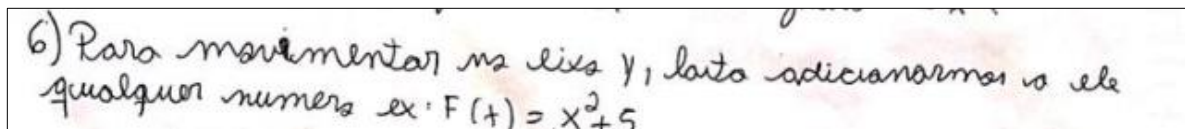
Fonte: Arquivo pessoal

Os alunos B, C e E, responderam essa questão conforme as expectativas do pesquisador, utilizando os movimentos trabalhados anteriormente. Porém, os alunos decidiram apenas trocar o sinal da função realizando uma reflexão do gráfico em relação ao eixo das abscissas e, de fato, alterando a imagem da função. Outra expectativa era resolver a questão a partir de translações, a qual o gráfico seria deslocado para cima ou para baixo.

Exercício 6

No último exercício da atividade foi trabalhada a translação em relação ao eixo das ordenadas. Nessa questão, os alunos responderam rapidamente visto que no exercício 2.2 eles já haviam realizado uma discussão sobre esse caso de movimento de gráfico. Dessa forma, os alunos responderam à questão com base em seus experimentos realizados anteriormente no GeoGebra, sugerindo um processo de generalização do movimento para outra família de funções, como seguem nas Figuras 72, 73, 74 e 75.

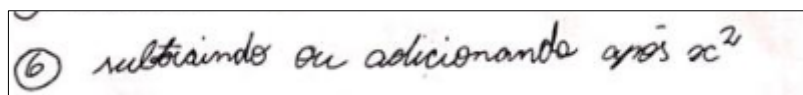
Figura 72: Resposta do Aluno B do exercício 2.6



6) Para movimentar no eixo y , basta adicionarmos ou subtrairmos qualquer número ex: $F(x) = x^2 + 5$

Fonte: Arquivo pessoal

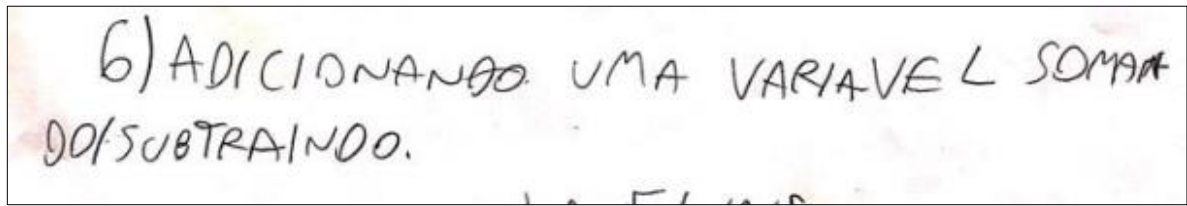
Figura 73: Resposta do Aluno C do exercício 2.6



6) subtraindo ou adicionando após x^2

Fonte: Arquivo pessoal

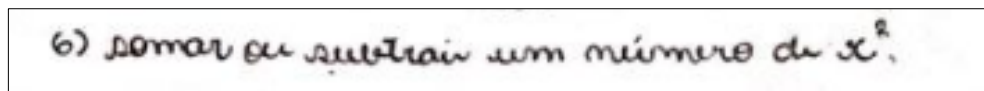
Figura 74: Resposta do Aluno D do exercício 2.6



6) ADICIONANDO UMA VARIÁVEL SOMA DO/SUBTRAINDO.

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 75: Resposta do Aluno E do exercício 2.6



6) somar ou subtrair um número de x^R .

Fonte: Arquivo pessoal

O aluno E novamente responde esse exercício com a palavra “variável”. Podemos analisar o uso dessa palavra da mesma maneira como fizemos no exercício anterior.

4.4 Resultados

Após analisar o experimento prático dessa pesquisa, retomamos aqui os seus resultados, assim como algumas considerações sobre como esse trabalho foi aplicado.

Durante o planejamento da pesquisa, houve momentos em que ficamos pensando muito sobre como abordar o conteúdo de maneira apropriada para os alunos de Ensino Médio, fazendo e refazendo atividades. Tal movimento mostrou-se válido, no entanto, ao iniciar a aplicação das atividades, foi possível observar que os alunos apresentaram um interesse acima de nossa expectativa. A expectativa que tínhamos era que os participantes da pesquisa tivessem alguma relutância em trabalhar com um conteúdo que é estudado, mais usualmente, no Ensino Superior.

Atribuímos esse interesse inesperado aos aplicativos de *smartphones*, que trouxeram os recursos do GeoGebra para viabilizar a manipulação dos gráficos de funções de duas variáveis de forma versátil e dinâmica. Uma das propriedades mais pragmáticas do GeoGebra é como podemos representar dinamicamente objetos matemáticos, que antes se mostravam estáticos. A manipulação dos gráficos nesses aplicativos possibilitou a criação de um ambiente de estudo para os alunos que permite autonomia a respeito de como irão encarar problemas propostos. Tal autonomia permitiu os alunos testarem o que lhes vinha a mente,

fazer conjecturas, experimentar, testar, refutar ideias, discutir com os colegas, que contribuiu para a compreensão do conteúdo.

A partir dessas experiências, vale ressaltar que o trabalho com conteúdos que costumam ser vistos no Ensino Superior podem, de fato, ser abordados no Ensino Médio. Não existem pré-requisitos, já que o uso do GeoGebra traz a possibilidade da exploração de seus pensamentos, subvertendo assim a ordem de como alguns conteúdos matemáticos são costumeiramente vistos. Podemos afirmar, a partir da análise de dados, que houveram ganhos significativos na aprendizagem desses alunos. Recursos como o GeoGebra podem ser utilizados como catalisadores de descobertas, já que fazem os alunos saírem do seu local de costume, fazem essas pessoas procurar respostas por si só, não dependendo de terceiros.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O foco dessa pesquisa era procurar evidências que o estudo de funções de duas variáveis com o uso do *software* GeoGebra pode potencializar o trabalho com funções de uma variável, através de uma sequência de atividades que tratavam de movimentos que podemos fazer com os gráficos, de funções de uma ou de duas variáveis, visando transformarmos objetos anteriormente estáticos e objetos dinâmicos. A investigação se deu em um colégio privado de Ensino Médio, com alunos do segundo ano, a metodologia foi planejada para mostrar como o pensamento matemático e aprendizagem desses alunos se apresentam quando devem fazer uso de tecnologias digitais para construir conhecimento.

A partir da análise dos dados do capítulo anterior foi possível evidenciar que estudando do Ensino Médio podem trabalhar com conteúdos que são visto no Ensino Superior. Nessa investigação trabalhamos com um desses conteúdos de forma exploratória, para que os estudantes conseguissem entender como funções de duas variáveis são estruturadas, como se mostram seus gráficos e como translações/movimentos se mostram nesses gráficos, tal análise não teria sido possível sem recursos digitais que promovessem representações dinâmicas onde os alunos puderam explorar com autonomia própria. Nesse sentido as atividades foram bem mais demoradas que foram antecipadas, já que os alunos tinham muito liberdade para experimentar possibilidades no GeoGebra, por vezes o foco era perdido. Então existe uma linha muito tênue entre dar liberdade para os alunos experimentarem o que lhes vier na cabeça e a perda de foco nas atividades.

Conseguimos perceber que todo o estudo que se voltou para funções de duas variáveis repercutiu com muito interesse pelos alunos, a descoberta de algo novo que detêm várias regras desconhecidas para eles pareceu fomentar o pensamento matemático deles. O *software* GeoGebra também trouxe esse interesse, já que por ele os integrantes do grupo conseguiram visualizar gráficos que não sabiam que poderiam existir, e ainda mais, explorar tais objetos fazendo experimentos para criar conjecturas. O desenvolvimento dos alunos nesse novo conteúdo gerou as consequências que estávamos procurando. Os dados referentes às resoluções dos exercícios de funções de uma variável mostram que houve similaridades no raciocínio desses alunos quando trabalharam com funções de duas variáveis.

O desenvolvimento das atividades se mostrou muito eficiente com o uso do GeoGebra, os estudantes mostraram-se animados à trabalhar com um recurso digital em sala de aula,

talvez por que o colégio não proporciona atividades desse tipo, focando em aulas expositivas e estéticas.

Os dados produzidos por essa pesquisa nos mostram o como é importante trazer a tecnologias digitais para dentro da Educação Matemática. Esses recursos quebram barreiras que nos impossibilitavam de estudar certos conteúdos, como gráficos em três dimensões, dificilmente alguém é capaz de desenhar um gráfico desse tipo com tamanha exatidão. Além do mais, sem não houvessem *softwares* como o GeoGebra a matemática não evoluiria como está evoluindo atualmente. Não podemos deixar de trabalhar com tecnologias em salas de aulas, independente do conteúdo, independente do público.

6. REFERÊNCIAS

- ANTON, Howard; IRL, Bivis; STEPHEN, Davis. **Cálculo**. Volume 2, 10. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.
- BASSO, Marcus; NOTARE, Márcia Rodrigues. **Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica**. RENOTE, v. 13, n. 2, 2015.
- BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.
- GARCIA, Rosangela Silveira. **Educação e Tecnologia: Desafios, Limites e Possibilidades**. In: CONGRESSO INTERNACIONAL ABED DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA, 21, 2015. Bento Gonçalves. Anais eletrônicos... Bento Gonçalves: ABED, 2015.
- GOLDENBERG, P. **Thinking (And Talking) About Technology in Math Classrooms**. In: Education Development Center, 2000. Disponível em: http://www2.edc.org/mcc/PDF/iss_tech.pdf
- GRAVINA, Maria Alice. **A Matemática na escola informatizada**, IMUFRGS, II BIENAL DA SBM, 2004.
- HENRIQUES, Afonso; ALMOULOU, Saddo Ag. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciênc. educ. (Bauru)**, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, June 2016. Available from
- VALENTE, José Armando. Por quê o computador na educação. **Computadores e Conhecimento: repensando a educação**. Campinas: Gráfica da Unicamp, p.24-44, 1993.
- REZENDE, Wanderley Moura; PESCO, Dirceu Uesu; BORTOLOSSI, Humberto José. Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra. **1ª Conferência Latino Americana de GeoGebra. ISSN 2237-9657, pp.74- 89, 2012.**
- SHAFFER, W. David; CLINTON A. Katherine. **Toolforthoughts: Reexamining Thinking in the Digital Age**. Mind, Culture and Activity, vol. 13, n. 4, California, 2006.

7. APÊNDICES

APÊNDICE 1 – ATIVIDADE 2: RELAÇÃO ENTRE LEI DE FORMAÇÃO E GRÁFICO DE FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS

ATIVIDADE 2:

Seção 1

- 1) Abra o aplicativo *Calculator 3*;
- 2) Digite na área “Entrada” algumas leis de formação de funções, uma por vez, e visualize o gráfico correspondente;
- 3) Após visualizar o gráfico da função, tire um *printscreen* da tela do smartphone, de modo que apareça o gráfico e a lei de formação correspondente;
- 4) Após tirar o *print-screen* de cada lei de formação e seu respectivo gráfico, um de cada vez, enviar a imagem pelo grupo “TCC, só os confirmados” no *WhatsApp*;
- 5) Acesse as “configurações” da função, pelos três pontinhos que se encontram ao lado das leis de formação, e visualize qual o nome que o aplicativo atribuiu para o comando que você escreveu;
- 6) O nome que o aplicativo atribuiu para a lei de formação digitada, por você, apresenta a palavra “função”? Se não, qual o nome apresentado? Porque você acha que não foi apresentado o nome “função”?

Seção 2

Função 1: $f(x, y) = x^2 + y^2$

Função 2: $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Usando o *Calculator 3D* determine os gráficos das funções e responda às questões abaixo:

- 1) Agora olhando para a Função 1, se mudarmos os coeficientes de x e de y, o que ocorre com o gráfico de tal função?
- 2) Como podemos movimentar o gráfico da Função 1 para cima ou para baixo?
- 3) Como podemos movimentar o gráfico da Função 1 para a esquerda? E para a direita?
- 4) O que acontece se mudarmos os coeficientes da Função 2?
- 5) Como podemos “completar” o gráfico da Função 2?

APÊNDICE 2: ATIVIDADE 3- TRANSLAÇÕES DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E QUADRÁTICAS

ATIVIDADE 3:

Com base na experiência que você adquiriu durante as outras duas atividades, responda as questões explicando a justificativa por trás da resposta.

Baixe o aplicativo **Calculadora Gráfica GeoGebra** para visualizar os gráficos das funções apresentadas aqui.

Seção 1

Função 1: $f(x) = \text{sen}(x)$

- 1) Utilize o aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra para visualizar o gráfico da função 1.
- 2) Como podemos mover o gráfico dessa função para cima e para baixo?
- 3) Como podemos “aumentar” a onda desse gráfico?
- 4) Como definimos a Imagem das funções?
- 5) Defina uma função cuja a Imagem tenha o intervalo $[-1,3]$; tire um *printscreen* e manda pra o grupo de *Whatsapp* “TCC, só os confirmados”;
- 6) Na questão 4, você acha que existe apenas uma função que satisfaz aquela condição? Se você acha que existe outra função escreva a lei de formação e tire um *printscreen* e manda pra o grupo de *Whatsapp* “TCC, só os confirmados”;
- 7) Como podemos deixar a onda definida pelo gráfico da função 1 mais frequente?
- 8) Como podemos mover o gráfico da função 1 para a direita ou para a esquerda?

Seção 2

Função 2: $g(x) = x^2$

- 1) Utilize o aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra para visualizar o gráfico da função 2;
- 2) Como podemos mover esse gráfico para a direita? E para a esquerda?
- 3) Caso mudarmos o coeficiente do termo que está ao quadrado, o que acontecerá com o gráfico? Utilize o aplicativo para verificar se existe mudança.
- 4) Essa função tem uma Imagem restrita?
- 5) Como podemos alterar a Imagem da função 2?
- 6) Como podemos mover o gráfico da função para cima ou para baixo?

APÊNDICE 3- Termo de Consentimento



TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, _____, R.G. _____, responsável pelo(a) aluno(a) _____, da turma _____, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada O Ensino de Funções de Duas Variáveis Utilizando o Software GeoGebra, desenvolvida pelo pesquisador Matheus Lucca de Rocco.

Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Márcia Rodrigues Notare Meneghetti, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário do e-mail marcia.notare@ufrgs.br. Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa.

Fui informado(a) do objetivo estritamente acadêmico do estudo, que, em linhas gerais, é: observar a potencialidade do ensino de funções de duas variáveis utilizando recursos computacionais, em específico, o software GeoGebra. Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade. A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio da participação em aula, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação. Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação.

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre o uso de tecnologias como forma de aprendizagem, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado. Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no telefone 55 51 9985XXXXX ou no e-mail roccomatheus08@gmail.com.

Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av. Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como telefone 55 51 3308 3738 e e-mail etica@propeq.ufrgs.br. Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos. Porto Alegre, ____ de _____ de _____.

Assinatura do(a) responsável:

Assinatura do pesquisador:

Assinatura da orientadora da pesquisa:

APÊNDICE 4- Termo de Consentimento Informado da escola



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA



Porto Alegre, ____ de _____ de _____.

Prezada Professora _____
Diretora do Colégio Unificado Canoas

O aluno **Matheus Lucca de Rocco**, atualmente é graduando(a) regularmente matriculado(a) no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Como parte das exigências do Departamento de Matemática Pura e Aplicada para obtenção do título de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, o(a) graduando(a) está desenvolvendo um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). O TCC produzido deve resultar em material didático de qualidade que possa ser utilizado por outros professores de Matemática. Neste sentido, torna-se extremamente importante realizar experimentos educacionais e, por esta razão, estamos solicitando a sua autorização para que este trabalho possa ser desenvolvido na escola sob sua Direção.

Em caso de manifestação de sua concordância, por favor, registre sua ciência ao final deste documento, o qual está sendo encaminhado em duas vias.

Enquanto pesquisador e professor responsável pela orientação do desenvolvimento do TCC pelo graduando, reitero nosso compromisso ético com os sujeitos dessa pesquisa colocando-nos à disposição para quaisquer esclarecimentos durante e após a realização da coleta de dados. Para tanto, deixo à disposição o seguinte telefone de contato: marcia.notare@ufrgs.br (e-mail da orientadora).

Agradecemos a sua atenção.

Cordialmente,

Márcia Notare
Professora do Departamento de Matemática e Estatística da UFRGS