



Instituto de
MATEMÁTICA
E ESTATÍSTICA

UFRGS



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

POTENCIALIDADES DO GRAFEQ NO ESTUDO DA FUNÇÃO AFIM

JOÃO VÍTOR GARCEZ FERREIRA

Porto Alegre

2019

João Vitor Garcez Ferreira

POTENCIALIDADES DO GRAFEQ NO ESTUDO DA FUNÇÃO AFIM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Márcia Rodrigues Notare

Porto Alegre

2019

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática

POTENCIALIDADES DO GRAFEQ NO ESTUDO DA FUNÇÃO AFIM

João Vitor Garcez Ferreira

Banca examinadora:

Prof. Dr^a. Débora da Silva Soares
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

Prof. Dr. Marcus Vinicius Azevedo de Basso
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

Prof. Dr^a. Márcia Rodrigues Notare
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por todas as oportunidades que me concede diariamente. Agradeço a Ele também por todas as pessoas que colocou em minha vida:

Mãe, tu és minha fonte de inspiração diária. Obrigado por tudo que tu me proporcionou durante meus 21 anos de vida. Puxei minhas melhores qualidades de ti e espero um dia poder ser só metade da pessoa e professora que tu és. Te amo.

Mana, obrigado por existir. Te ver crescer foi (é) uma das melhores experiências que eu tive (tenho), tu me ensinou (ensina) a ser uma pessoa melhor. Nunca esquecerei das nossas brigas infantis. Te amo.

Tony, tu és sensacional. Nunca vou esquecer que tu veio viver com nós e assumiu uma bronca que não era tua, mesmo sem precisar. Diretamente ou por exemplo, aprendo diariamente contigo. Obrigado pelo companheirismo. Te amo.

Vó,Vô e Bisa, obrigado por cuidarem de mim até hoje. Agradeço pelo apoio e incentivo diários, eu não sei como eu estaria hoje se não fosse por vocês. Amo vocês.

Agradeço também pelos amigos que recebi, dentro da Universidade e fora dela. Vargas, Dani, Amanda e Raquel, obrigado pela amizade, pela paciência com as minhas piadas ruins e com as minhas esquisitices. Paloma, Juliana e Matheus, obrigado por me acompanharem e me ajudarem durante esses quatro anos. Victória e Rosana, obrigado pelos cafés, conversas e conselhos. Yasmin e Giovana, obrigado pelo apoio, piqueniques, almoços e parceria. Mauricio, Emanuel, Andrey, Pedro, Jean, Cristian e Gustavo, obrigado por serem meus irmãos mais velhos dentro da Universidade e me aguentarem nos meus momentos mais insuportáveis. Guardo todos vocês em meu coração.

Professor Marcus e Professora Débora, agradeço por participarem da banca e pelas sugestões dadas.

Professora Márcia, agradeço pela orientação, pelo apoio e, principalmente, pela paciência.

Resumo

A finalidade deste Trabalho de Conclusão de Curso é pesquisar as potencialidades do *GrafEq* para o ensino da função afim. Foi motivado pela experiência pessoal do autor em sua escolarização e graduação. Sob a perspectiva de Raymond Duval e sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica, uma sequência didática foi planejada buscando trabalhar com os diferentes sistemas de representação encontrados na matemática, em especial, na função afim. Para observar as potencialidades do software no estudo da função afim, a sequência didática foi aplicada em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio em um instituto estadual público. A pesquisa apontou que utilizar o *GrafEq* no estudo da função afim pode auxiliar na aprendizagem, promovendo as conversões de registros descritas por Duval e que a proposta pode ser integrada às aulas de Matemática do Ensino Básico.

Palavras-chave: Função Afim, GrafEq, Representação Semiótica

Abstract

The purpose of this study is to research the potentialities of the GrafEq for the teaching of linear functions. It was motivated by the author's personal experience in his schooling and undergraduate degree. Under the perspective of Raymond Duval and his Theory of Registers of Semiotic Representation, a didactic sequence was planned seeking to work with the different systems of representation found in mathematics, especially in linear functions. To observe how the software works in the study of functions, the didactic sequence was applied with a third year high school class in a public state institute. The research pointed out that using GrafEq in the study of the affine function can help in learning, promoting the conversions of registers described by Duval and that the proposal can be integrated into basic school mathematics classes.

Keyword: Linear Function, GrafEq, Semiotic Representation

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Exemplo da representação gráfica e algébrica do mesmo objeto matemático	3
Figura 2: Interface do GrafEq com exemplo	8
Figura 3: Adição de uma nova relação e espaço das restrições	18
Figura 4: Exemplo de Liga-Pontos encontrado online.	19
Figura 5: Exemplo de decoração e sua representação digital	19
Figura 6: representação com a indicação e a lista de pontos	20
Figura 7: Configuração do plano	22
Figura 8: Plano modelo criado pelo software	23
Figura 9: Janela da relação e quadro de cores disponíveis.	23
Figura 10: Reta restringida no plano	25
Figura 11: Restrição junto de retas auxiliares paralelas ao eixo y	26
Figura 12: Restrição junto de retas auxiliares paralelas ao eixo x.	26
Figura 13: Representação com a legenda e lista.	27
Figura 14: Desenho obtido	28
Figura 15: Trabalho realizado por um dos alunos	29
Figura 16: Trabalho realizado por um dos alunos	29
Figura 17: Trabalho realizado por um dos alunos	30
Figura 18: Recorte da seleção de decorações	31
Figura 19: Decoração do exemplo	32
Figura 20: Exemplo feito no projetor	33
Figura 21: Réplica da aluna	35
Figura 22: Pássaro replicado pela aluna	35
Figura 23: Trabalho das alunas do excerto	36
Figura 24: Trabalho da Aluna A do Excerto 4	38

SUMÁRIO

1. Introdução	1
2. Referencial Teórico	3
2.1. Teoria dos Registros das Representações Semióticas	3
2.2 Tecnologia na aprendizagem de Matemática	9
2.3 BNCC: Função Afim e Tecnologias	11
2.4 Trabalhos Correlatos	14
3. Metodologia	17
3.1 Abordagem	17
3.2 Contexto	18
3.3 Sequência Didática	18
4. Relato e Análise	21
4.1 Primeiro encontro	22
4.2 Segundo encontro	31
4.3 Questionários	39
5. Considerações Finais	42
6. Referências	44
Apêndice A - Termo de Consentimento	46
Apêndice B - Termo de Assentimento	46
Apêndice C - Carta de apresentação	48
Apêndice D - Trabalhos do Segundo Encontro	49
Apêndice E - Materiais construídos para a sequência didática	56

1. Introdução

Nasci em 1998, há 21 anos atrás, e durante minha vida a computação teve um gigante avanço. De computadores lentos e demorados, passamos a tê-los em nossos bolsos, com os smartphones, e a utilizarmos diariamente, para comprar algo, olhar a previsão do tempo, horário do ônibus, entre outras coisas. Entretanto, por mais que a sociedade tenha se tornado dependente desses aparelhos, a sala de aula aparenta resistir a utilizá-los.

Durante minha jornada no Ensino Básico, tive poucos professores que utilizavam tecnologias em suas aulas, a maioria utilizava apenas o quadro e giz, no máximo, íamos para a sala de vídeo. Já na UFRGS, cursei disciplinas que me encantaram pelo uso de *softwares* aplicados à aprendizagem de Matemática, como *Superlogo*, *GeoGebra* e *GrafEq*, como também trabalhei com *softwares* onde a aprendizagem não era o foco, mas que igualmente me encantaram, como o *RStudio*, *Maple* e *Scilab*. Todos esses ampliaram os meus conhecimentos e mostraram-me um modo diferente de ver os conceitos.

Em especial, um dos conceitos matemáticos que creio ser um dos mais importantes é o de função. Silveira (2015, pg. 71), em um livro para o 9º ano, define o conceito de função da seguinte maneira: “quando relacionamos duas grandezas e para cada medida da primeira corresponde uma única medida da segunda, dizemos que a primeira é função da segunda.”. É um dos conceitos com mais aplicabilidade no dia a dia, podemos encontrar funções por todo lugar, desde os exemplos mais comuns, como conta de luz e de água, como também depreciação de um bem, dentre outros contextos.

Minha experiência pessoal me instiga a estudar as potencialidades do uso desses recursos em sala de aula e, em especial, neste trabalho, foquei na investigação das potencialidades do *GrafEq* no ensino de funções afim. O *GrafEq* é um software educacional produzido pela empresa *Pedagoguery Software Inc.*, descrito como “um programa de fácil utilização para representar graficamente equações encontradas no currículo de matemática do *secondary pre-calculus*” ([s.d.], tradução nossa) equivalente ao currículo de Matemática do Ensino Médio brasileiro.

Portanto, para investigar o tema, realizei um experimento prático com uma turma de terceiro ano de Ensino Médio do Instituto Estadual Dom Diogo de Souza, escola pública de Porto Alegre. Esse experimento foi composto por uma sequência didática utilizando o *GrafEq* junto de um questionário, elaborado por mim, aplicado ao final das atividades. O objetivo da presente pesquisa foi responder à seguinte questão: **Quais são as potencialidades do *GrafEq* no estudo de funções afins?**

Os capítulos seguintes trazem os autores que sustentam este trabalho, os processos metodológicos utilizados, a descrição da sequência de atividades, a discussão e análise dos dados, junto das considerações finais.

2. Referencial Teórico

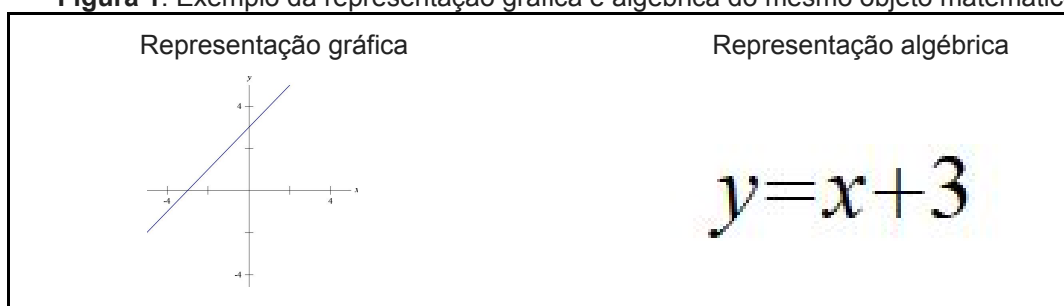
Neste capítulo, discutiremos sobre a teoria dos registros das representações semióticas de Duval, a tecnologia no ensino de Matemática, trabalhos correlatos e sobre a abordagem da Base Nacional Comum Curricular em relação a funções e o uso de tecnologia na sala de aula.

2.1. Teoria dos Registros das Representações Semióticas

Quando falamos, aprendemos, discutimos matemática e os objetos que a compõe, estamos tratando de elementos abstratos, elementos que não podem ser tocados nem sentidos fisicamente, ditos não “reais”, diferentemente de outras ciências clássicas, como química e biologia, onde se fazem experimentos e/ou estudos com amostras físicas. Então, como trabalhar com esses objetos? Como podemos manipulá-los? Utilizamos, portanto, as representações. Seja mediante a escrita, usando notações simbólicas, um gráfico, uma figura geométrica, todos esses registros constituem-se maneiras que temos de representar esses objetos inalcançáveis fisicamente.

Na verdade, sabemos que grande parte dos objetos matemáticos possuem mais que uma representação. Por exemplo, nosso objeto de estudo nesse trabalho, as funções afins, possuem uma representação algébrica, por meio de uma lei de formação, uma representação gráfica, por meio de seu gráfico no plano cartesiano, entre outras (Figura 1).

Figura 1: Exemplo da representação gráfica e algébrica do mesmo objeto matemático



Fonte: produção pessoal

Em Duval (2012), os conceitos de representação mental e representação semiótica são definidos como:

As representações **mentais** recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. As representações **semióticas** são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. (p. 269)

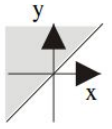
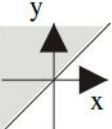
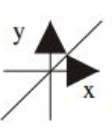
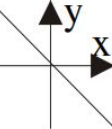
É imprescindível deixar claro que as representações semióticas não são meras exteriorizações das representações mentais, isto é, símbolos, signos, que serviriam para representar o pensamento do sujeito. Não se deve pensar que as representações semióticas são vassalas às mentais. Duval (2012, p.269) afirma que esta perspectiva é enganosa e que as representações semióticas não são apenas necessárias para a comunicação, são também cruciais à atividade cognitiva do pensamento. De outro modo, pode-se dizer que ambos tipos de representações são de mesmo valor e dependentes entre si e, então, a compreensão e/ou a produção de uma representação semiótica torna-se inseparável da compreensão conceitual de um objeto, ou seja, é necessário coordenar ambas.

Duval (2003, p.14) conta que parodia Descartes ao falar “registro” de representação para designar os diferentes tipos de sistemas de representações semióticas. Para o autor, um registro é um sistema de representações, um conjunto de traços e desenhos que nos permitem representar o objeto matemático. Essa designação torna-se necessária ao percebermos a grande diversidade de representações que a matemática possui, como os diferentes sistemas de numeração, as figuras geométricas, a escrita discursiva na linguagem corrente, a escrita algébrica, entre outros possíveis registros. Contudo, como lidar com as diferentes representações que também podem estar em registros diferentes? Como transitar entre elas, quais as possibilidades? Para o autor (2012, p.272),

“O tratamento de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro. (...) A conversão de uma representação é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial.”

Portanto, quando transformamos uma representação semiótica em outra, o que devemos considerar é se o registro mudou ou não. É fundamental observar que as duas transformações são independentes entre si e Duval verifica esse fato com um exemplo simples: operações aritméticas em diferentes registros. De acordo com o autor (2012), alunos podem efetuar somas com as representações decimais e com as representações fracionárias, mas nem sempre sabem converter de uma para outra, se necessário. Ainda, para operar $0,4 + 0,4 = 0,8$ ou $4/10 + 4/10 = 8/10$, os tratamentos necessários serão diferentes. Observe o Quadro 1.

Quadro 1: Conversão entre a expressão algébrica de uma relação e sua representação gráfica

I	II	III	I → III Hachurar	III → II Escolher a expressão
cuja ordenada é superior a abscissa (reta $y=x$ já traçada no gráfico)	$y > x$		38%	38%
cuja ordenada é superior a abscissa (reta $y=x$ não traçada no gráfico)	$y > x$		19%	25%
cuja ordenada é igual à abscissa	$y = x$		60%	75%
cuja ordenada é oposta a abscissa	$y = -x$		34%	58%

Fonte: Duval (2011, p. 108)

O Quadro 1 foi construído por Duval após pesquisa com três turmas de *seconde*¹¹ (equivalente ao primeiro ano do Ensino Médio) do primeiro trimestre de 1987 e ilustra bem a dificuldade que os alunos têm em conversão de registros. A tarefa que foi pedida aos alunos consistia em primeiro hachurar no plano cartesiano

¹ Ano escolar do Ensino Médio Francês, equivalente ao nosso primeiro ano.

a região descrita em I e depois, dentre as expressões algébricas disponíveis ($y = x$, $y > x$, $y < x$, $y = -x$, $xy > 0$, $x > 0$ e $y < 0$) indicar qual representava a região. A quarta e quinta coluna indicam a porcentagem de alunos que acertaram cada tarefa.

Mas, qual a importância da conversão? Voltando ao exemplo anterior, saber realizar a soma em cada caso não deveria ser o suficiente? A conversão era necessária no exemplo citado ou por se tratar de um exemplo simples não é necessário mudar de registro? Se considerarmos essa hipótese como a correta, que o exemplo era simples, é natural questionar o que acontece quando a dificuldade aumenta. Duval (2013) afirma que os fracassos dos alunos aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é requerida, isto é, cada vez que uma conversão é necessária.

O autor afirma que a compreensão em Matemática implica na capacidade de mudar de registro, pois não se deve jamais confundir um objeto com sua representação semiótica. Uma representação só servirá como uma verdadeira representação se permitir o acesso ao objeto em questão, se não, apenas atrapalhará na apreensão conceitual do objeto. Entretanto, surge aqui um problema. Como não confundir as representações com os objetos (matemáticos) visto que eles são inalcançáveis fisicamente? Para Duval, esse é o grande paradoxo da compreensão em Matemática.

Dessa forma, como solução, o autor traz que um sujeito só alcança a compreensão matemática quando consegue coordenar pelo menos dois registros de representação diferentes para um mesmo objeto, pois assim, poderá não confundir o conteúdo da representação com o objeto. Portanto, ao alcançar a coordenação entre os registros, o sujeito em aprendizagem atinge sua apreensão conceitual do objeto e compreende de fato o objeto matemático, não apenas um registro específico, levando à aprendizagem de Matemática. Logo, é necessário que as atividades propostas pelos professores promovam o uso de conversões entre os registros.

Para Duval (2011), três abordagens são possíveis ao se tratar de representações gráficas: a abordagem ponto a ponto, uma abordagem de extensão do traçado efetuado e a interpretação global de propriedades figurais. Cada uma das três leva em conta dados visuais diferentes e são guiadas por questões

diferentes, sendo assim, favorecendo contextos específicos. Por exemplo, quando se quer ler as coordenadas de algum ponto interessante, a abordagem ponto a ponto é preferível. Já quando lidamos com a terceira, queremos associar uma variável visual de representação com alguma unidade significativa da expressão algébrica. No caso do nosso objeto do estudo, as funções afins, Duval (2011) traz o seguinte quadro:

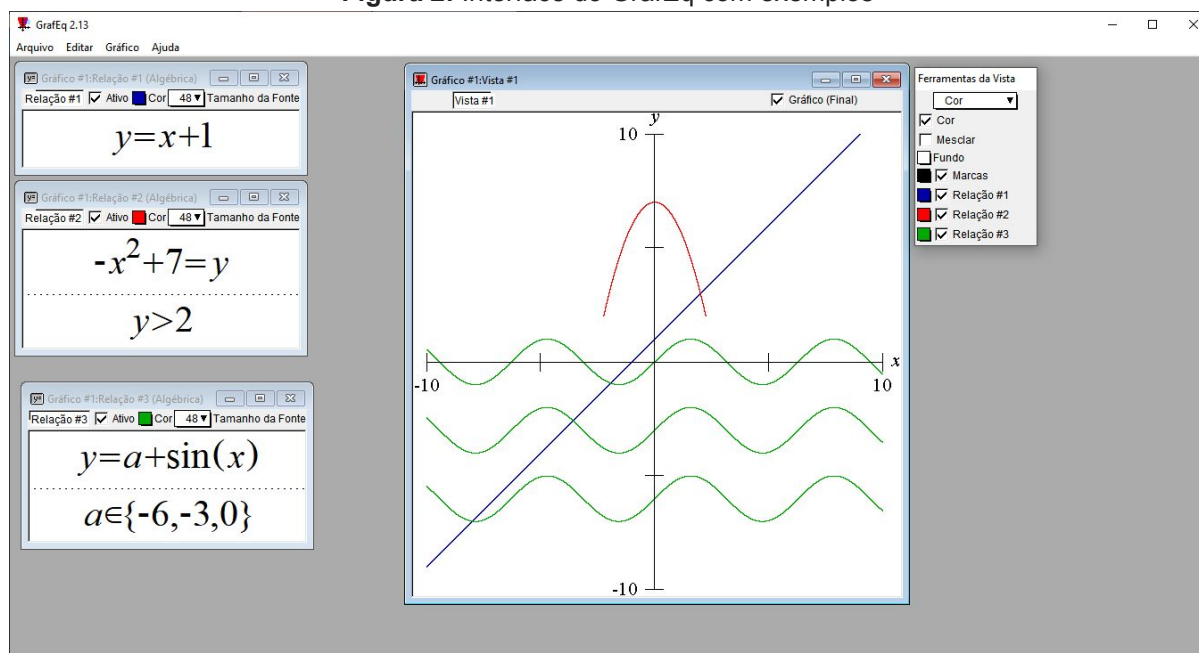
Quadro 2: Valores e variáveis visuais para $y = ax + b$ no plano cartesiano

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes
Sentido da inclinação	ascendente descendente	coeficiente > 0 e ausência de sinal coeficiente < 0 e presença de sinal -
Ângulo com os eixos	partição simétrica ângulo menor ângulo maior	coefic variável = 1 e não há coefic.escrito coefic variável < 1 e há coefic.escrito coefic variável > 1 e há coefic.escrito
Posição sobre o eixo	corta acima corta abaixo corta na origem	acresc. constante e sinal + subtrai-se constante e sinal - sem correção aditiva e ausência de sinal

Fonte: Duval (2011, p. 101)

Com base no quadro, o autor observa que é muito custoso transitar entre a expressão na forma simbólica e a representação gráfica. Mesmo que no sentido de simbólica para gráfica seja possível utilizar a abordagem ponto a ponto, utilizando valores específicos de x e encontrando pontos, o caso contrário não é tão simples. Para passar da representação gráfica para a forma simbólica, é necessário identificar os valores das variáveis visuais e integrá-las, coordenando-os. Isto é, a atenção deve estar centrada sob um conjunto de propriedades e não apenas de pontos tomados um a um. Em vista do que foi discutido anteriormente, decidimos utilizar o *GrafEq* nesta pesquisa pois, de acordo com Notare e Gravina (2013, p.5), as conversões descritas por Duval são produzidas com versatilidade por causa de sua interface, ilustrada na Figura 2.

Figura 2: Interface do GrafEq com exemplos



Fonte: produção pessoal

o *GrafEq* é um software educacional produzido pela empresa *Pedagoguery Software Inc.* É dividido entre uma janela algébrica, na qual se insere a relação matemática e suas restrições, e uma janela de visualização gráfica, denominada vista, janela na qual o plano cartesiano é criado. Neste trabalho não utilizaremos, mas é possível criar um plano polar também, facilitando o uso das coordenadas polares.

Além da escrita usual da função, é possível trabalhar com a utilização de parâmetros em cada janela algébrica. Assim, torna-se possível trabalhar com variadas funções da mesma família, como ilustrado na Figura 2 pela família de funções trigonométricas representadas em verde pela Relação 3. Ainda, podemos restringir cada função por meio de desigualdades, limitando seu gráfico. Cada desigualdade pode ser vista como uma restrição ao domínio ou imagem, dependendo da variável usada, explorando graficamente conceitos do nosso objeto de estudo. Para Notare *et al.* (2015, p. 7) o *GrafEq* provoca “[...] o desenvolvimento de habilidades em operar tanto no registro algébrico, quanto no registro gráfico”.

2.2 Tecnologia na aprendizagem de Matemática

No contexto da aprendizagem de Matemática, as discussões sobre o uso de tecnologias e mídias digitais nas aulas não são recentes. De acordo com Gravina e Notare (2013), Seymour Papert já pesquisava sobre o ensino de Matemática com o uso dos recursos didáticos digitais na década de 80, ainda assim, a sala de aula pouco mudou de lá pra cá. As autoras afirmam que um dos motivos para isso deve-se ao fato de que boa parte dos professores fez sua formação antes da ampla divulgação dos recursos didáticos digitais, e, portanto, se mantêm afastados pela falta de experiência no manejo dos mesmos.

Por conseguinte, é na formação continuada que esses professores podem adquirir a formação necessária para utilizar esses recursos em suas aulas mas, infelizmente, isso nem sempre ocorre. De acordo com o Comitê Gestor da Internet no Brasil, em pesquisa realizada no ano de 2018 com professores de todo o Brasil, 70% deles não participou de nenhum curso de formação continuada sobre o uso de computador e internet nas atividades de ensino. Tal número assusta, mas uma resposta para isso pode ser encontrada em Stormowski, Gravina e Lima (2015). Os autores consideram que um dos problemas nos cursos de formação são suas deficiências na execução. Por mais bem planejados que sejam, não possuem um resultado efetivo.

Em vista do que foi discutido acima, a inserção das mídias digitais no espaço da sala de aula é importante, contudo, isso não pode ocorrer de forma irresponsável. É necessário que as práticas didáticas incluam as mídias de maneira correta, não apenas para inovar. De acordo com Goldenberg (2000, p. 1):

“Nem tudo que pode ser feito deve ser feito. [...] as perguntas certas sobre tecnologia não são as amplas sobre qual hardware ou software usar, mas como cada um deles funciona em um certo currículo, incluindo até mesmo o efeito em cada problema individual proposto ao estudante. “

Então, existiria a maneira *correta* de utilizar tecnologias digitais nas aulas? Apesar de todas as pesquisas já feitas, o autor afirma que nenhum documento pode

prescrever uma boa ou má prática, tendo em vista que é um assunto dependente do julgamento pessoal e coletivo. Ainda, toda prática realizada em sala de aula depende de inúmeros fatores imensuráveis, visto que estamos sempre lidando com pessoas. A mesma prática, se realizada com a mesma turma, pode ter resultados diferentes em dias diferentes. Mesmo assim, existe um certo consenso sobre o uso de tecnologias, que permite ao autor enunciar seis princípios para serem utilizados no planejamento das atividades didáticas que envolvam mídias digitais. Seguem os princípios:

1. O Princípio do Estilo
2. O Princípio da Finalidade
3. O Princípio da Resposta versus Análise
4. O Princípio de Quem Faz o Pensamento
5. O Princípio de Alterar o Conteúdo com Cuidado
6. O Princípio da Ferramenta Fluente

Cada princípio aponta um cuidado a mais que o professor deve ter ao planejar suas atividades que envolvam tecnologias, podendo assim maximizar a chance de sucesso enquanto minimiza o risco. O primeiro atenta ao fato que precisamos estar conscientes dos diferentes papéis da tecnologia. Qual é o estilo da aula e/ou problema que teremos? Quais são as necessidades de cada estudante da sala de aula? A escolha de qual tecnologia incluir deve levar essas perguntas em consideração, pois uma má escolha pode ser até prejudicial para o objetivo do planejamento.

Sobre o segundo princípio, o autor traz o exemplo de uma aula sobre razões e proporções. O foco é desenvolver as ideias sobre esses conceitos e realizar uma longa divisão decimal apenas pode atrasar a aprendizagem do aluno. Portanto, nesse caso, uma calculadora seria útil. Se formos pensar em outro exemplo, como uma aula sobre operações aritméticas, o uso da calculadora atrapalha a finalidade da aula, que é desenvolver as habilidades operatórias dos alunos, o que nos leva ao terceiro princípio. Em alguns casos, a resposta de um problema não é o mais importante, na verdade, o processo é. Quando o propósito da aula é entender

melhor o processo que nos dá a resposta, uma tecnologia que corta o caminho acaba sendo prejudicial à aprendizagem do aluno.

Em sequência, sobre o quarto princípio, o autor pergunta se o papel da tecnologia durante uma aula é substituir uma capacidade que o aluno poderia precisar ter ou desenvolver a capacidade de pensar dele. Decidir quem deve “pensar” em cada atividade é necessário para o desenvolvimento do aluno. É importante esclarecer que os princípios não atuam de forma independentes, eles se intersectam em vários contextos dentro da sala de aula. Em suma, o autor afirma que todos os princípios apontam para o exame da finalidade da aula e como a tecnologia a ser utilizada adequa-se, sem esquecer das necessidades dos alunos.

2.3 BNCC: Função Afim e Tecnologias

Neste capítulo, buscamos explicitar o que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) define no que tange o ensino de funções afins e como a tecnologia pode ser utilizada na sala de aula de Matemática. Antes de realizar essa abordagem, é necessário conhecer o documento e sua estrutura. De acordo com Brasil (2018, p. 9):

“A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem [...]”

Organizada por meio de competências, definidas como “a mobilização de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo de trabalho.” (BRASIL, p. 10), o documento traz todas as competências que cada aluno deveria aprender em cada ano e/ou etapa do Ensino Básico, divididas entre gerais e específicas. As competências gerais são divididas por etapa, que em ordem são: a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio. As competências específicas são divididas por áreas dentro de cada etapa descrita anteriormente.

Na área de Matemática, há diferenças entre a estrutura do Ensino Fundamental e do Médio. No primeiro, existem oito competências específicas que devem ser atingidas ao longo dos nove anos que constituem essa fase. Ainda, cada ano escolar possui um conjunto de habilidades, relacionadas com as competências, a também serem atingidas. Essas habilidades são separadas em cinco unidades temáticas, que são as seguintes: Números, Probabilidade e estatística, Grandezas e medidas, Álgebra e Geometria. Já no segundo, há cinco competências específicas para a fase. Diferente do anterior, as habilidades são primeiramente separadas pelas competências, até há uma separação por unidades temáticas, mas é algo secundário, localizado ao final do capítulo.

Dentro do Ensino Fundamental, o ensino de funções deve-se iniciar no nono ano, sendo previsto na habilidade EF09MA06, descrita como:

(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependências unívoca entre duas variáveis e suas representações numéricas, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis. (BRASIL, p. 317)

É importante observar que existe um certo encadeamento de habilidades, em outras palavras, uma relação de dependência. Ao olharmos os anos anteriores, podemos observar habilidades que tratam linguagem algébrica, envolvendo os conceitos de variáveis, incógnitas e equações polinomiais de 1º grau. As menções sobre o uso de tecnologias na sala de aula são, dentro do Fundamental, tímidas. Certas habilidades mencionam a possibilidade de uso, sem nenhuma obrigatoriedade, enquanto que em algumas habilidades onde o uso poderia ser benéfico, menções são escassas ou inexistentes. Um bom exemplo é nas habilidades da Probabilidade e estatística, em cada ano, espera-se que o aluno consiga trabalhar com uma amostra cada vez maior, mas nunca se fala em softwares que possuem essa finalidade.

Deslocando-se agora ao Ensino Médio, antes de tratar das competências, é relevante atentar ao que a área de Matemática tem como proposta. Procurando aprofundar os conceitos vistos na fase anterior, o foco dessa fase é trazer os

conteúdos de forma mais relacionada, com o propósito de que os alunos construam uma visão mais integrada entre Matemática, com vistas às aplicações à realidade (BRASIL, p. 529). Nisso se explica a preferência por organizar as habilidades dentro das competências e não dentro das unidades temáticas citadas anteriormente. Observe abaixo o Quadro 3.

Quadro 3: Competências do Ensino Médio (adaptada da BNCC)

Competências específicas de Matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio
1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: Brasil, 2018

Com relação ao uso de tecnologias no Ensino Médio, a BNCC mostra preocupação com a aptidão dos alunos no uso delas. O documento evidencia a necessidade de organizar uma escola que satisfaça os alunos e a sociedade, que

deixe os alunos preparados integralmente para o futuro, pois, de acordo com o documento:

“É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos.” (BRASIL, p. 473)

O documento prevê que as competências gerais contemplem as habilidades necessárias ao jovem na questão tecnológica, pois as diferentes dimensões caracterizadoras da computação e das tecnologias foram tematizadas dentro das competências. Além disso, no Ensino Médio, o foco deverá ser no reconhecimento das possibilidades de uso das tecnologias nas diferentes áreas do conhecimento, seja na sala de aula, nas interações sociais ou no mundo do trabalho. Fica claro, portanto, que o documento traz a instrução tecnológica como algo necessário no mundo contemporâneo atual, devida a tamanha integração dos recursos digitais nas nossas vidas diárias.

2.4 Trabalhos Correlatos

Para investigar o que já foi estudado sobre a aprendizagem de Funções com mídias digitais, foi realizada uma pesquisa no Lume, o Repositório Digital da Universidade do Rio Grande do Sul. Nessa pesquisa, foi possível encontrar pesquisadores que já utilizaram o *GrafEq* para o ensino da função afim, além disso, há trabalhos focando na equação de reta, com viés para a geometria analítica. Dos quatro trabalhos apresentados a seguir, dois são trabalhos de conclusão do curso de especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática e os outros dois são trabalhos de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática.

Em Bonfada (2015), é relatada uma abordagem didática construída com base na teoria de Duval, utilizando o *GrafEq* como recurso didático. Neste trabalho, o software é utilizado no ensino e aprendizagem da equação da reta. Em cerca de quatro encontros, a prática das autoras possibilita a realização das transformações descritas por Duval (2012) e consideram que “o uso de representações semióticas

através do software *GrafEq* pode ser considerado um recurso que oportuniza a criação de espaços de análise, formulação de hipóteses e generalização [...]” (p.29).

Gauto (2012) relata uma abordagem, baseada na teoria das situações didáticas de Guy Brosseau, que utiliza o software a fim de contribuir para a aprendizagem da relação existente entre a lei de formação e seu gráfico. A sequência didática da autora possui quatro partes: uma atividade prévia, creio que para poder conhecer os alunos, seguido de três etapas que envolviam o software. A autora relata que “[...] o uso do software *GrafEq* foi fundamental para que os alunos associassem as representações algébrica e gráfica das funções afins [...]” (p.66).

Rampon (2015) expõe sua proposta que aborda o uso do *GrafEq* no ensino e aprendizagem das funções afins, utilizando David Tall e a Teoria dos Níveis de Sofisticação do Desenvolvimento Cognitivo como aporte teórico. Para Tall (1999, apud Rampon, 2015, p. 2), “os softwares são importantes na construção do conhecimento matemático, pois seus recursos [...] permitem que o aluno consiga transitar de um pensamento mais técnico para um pensamento mais formal.” Por meio da Engenharia Didática de Artigue, a autora levanta hipóteses a priori sobre os resultados de sua prática, que são a aquisição de conhecimentos sobre função afim, compreendendo a passagem algébrica para gráfica (e o contrário), e a compreensão rápida do software. Pela análise das atividades feitas pelos alunos, pode-se constatar que ambas hipóteses foram validadas, em especial, “o *GrafEq* [...] foi um facilitador na construção dos conceitos matemáticos que envolvem o conteúdo de função afim” (RAMPON, 2015, p. 27).

Em Hofart (2013), por meio de sua sequência didática, promove o ensino de equações e inequações no plano no Ensino Médio, buscando relacionar com geometria pela construção de figuras geométricas por meio das desigualdades. Utilizando o *GrafEq* nos encontros, a autora busca considerar as conversões descritas por Duval, pois acredita que o software facilitará conversões bem sucedidas por parte dos alunos, devido a sua interface simples e direta. Ao longo dos cinco encontros que ela teve com os alunos, pôde constatar que a proposta que construiu se mostrou válida e que “a maioria das duplas que participaram dos cinco encontros conseguiu realizar todas as atividades propostas, demonstrando boa aquisição de conhecimentos.” (HOFART, 2013, p. 112).

Em virtude dos trabalhos pesquisados, o uso de tecnologias na sala de aula se mostra favorável e com grandes possibilidades de bons resultados. Os autores demonstram que a tecnologia auxilia no desenvolvimento de habilidades relacionadas às representações algébrica e gráfica, promovendo uma coordenação entre os registros. Na presente pesquisa, tem-se como objetivo diferenciar a abordagem de utilização do GrafEq em relação às outras pesquisas pelo foco nos conceitos de domínio e imagem, por meio das restrições da janela algébrica que o *software* possui em sua interface. (Figura 2)

3. Metodologia

Neste capítulo, apresentaremos a abordagem metodológica que escolhemos, o contexto no qual se realizou a coleta de dados e a sequência didática preparada. Os materiais construídos para serem utilizados na sequência encontram-se no apêndice.

3.1 Abordagem

É relevante que, antes, lembremos da questão que procuramos responder com a presente pesquisa: **“Quais são as potencialidades do *GrafEq* no estudo de funções afins?”**. Para respondê-la, definiremos a abordagem metodológica utilizada como a da pesquisa qualitativa, pois os dados recolhidos são qualitativos. De acordo com Bogdan e Biklen (1994):

“Os dados recolhidos são designados por qualitativos, o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico. As questões a se investigar não se estabelecem mediante a operacionalização de variáveis, sendo, outrossim, formuladas com o objetivo de investigar os fenômenos em toda a sua complexidade e em contexto natural.” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 16)

Os dados consistem pelos seguintes materiais: observações do professor-pesquisador, dos trabalhos produzidos pelos alunos no *GrafEq* e de um questionário individual que foi realizado ao final da proposta. Tais dados, advindos da aplicação da sequência didática, são particulares àquela turma, aqueles alunos e aquele ambiente, pois são dependentes de inúmeras circunstâncias naturais.

A pesquisa qualitativa, para Bogdan e Biklen (1994), dispõe de cinco características: a fonte inicial dos dados é o ambiente natural, é descritiva, o interesse pelo processo é maior do que pelo resultado, tendência a ter uma análise indutiva e que o significado é de importância vital.

3.2 Contexto

A pesquisa foi realizada com uma turma do terceiro ano do Ensino Médio de um instituto estadual, localizado na zona norte de Porto Alegre. A turma possui mais de trinta alunos matriculados, mas parte estava ausente e não pôde participar da pesquisa. Ainda, não houve contato prévio entre os alunos e o pesquisador, que não se conheciam previamente e, conseqüentemente, não houve tempo suficiente para o pesquisador se familiarizar com a turma.

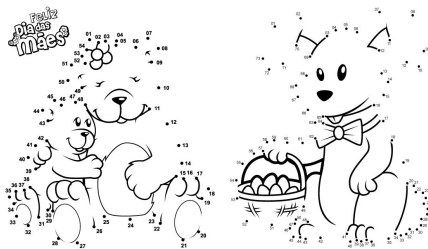
O Instituto atende mais de mil alunos, possuindo vagas em todo ensino básico, desde a Pré-Escola até o Ensino Médio. Também possui vagas de Ensino Técnico e de Magistério. A infraestrutura é visivelmente sucateada, os problemas vão desde janelas que não abrem a até ventiladores que não devem ser ligados, de acordo com os alunos.

Os laboratórios de informática estão desatualizados e problemáticos pela falta de verba e pessoal. O instituto possui dois laboratórios, um em cada dos dois andares que o prédio possui. Nos dois laboratórios, o acesso à internet é instável e parte das máquinas disponíveis era inutilizável, seja por não ligar, por falta de periféricos ou pela condição de utilização. Em especial, no que utilizamos, existe uma condição diferente: toda vez que os computadores são desligados, eles se restauram a um ponto específico, apagando os arquivos criados durante a sessão.

3.3 Sequência Didática

A sequência foi inspirada em uma atividade conhecida por muitas crianças, o Liga Pontos (Figura 3), na qual as crianças utilizam um conjunto de pontos enumerados para desenhar uma figura. Uma adaptação dessa atividade para a utilização de recursos tecnológicos faz parte da proposta desse trabalho, na qual o Liga Pontos será realizado a partir do estabelecimento de relações matemáticas no sistema de coordenadas cartesianas. A sequência foi pensada para uma turma de alunos que começou o estudo das funções afins anteriormente, portanto, não prevê aulas introdutórias. Está organizada em três etapas, descritas a seguir.

Figura 3: Exemplo de Liga-Pontos encontrado online.



Fonte: <https://www.espacoeducar.net/2018/06/20-atividades-de-liga-pontos-e-escrita.html>

Na primeira etapa, é feita a apresentação do software *GrafEq* aos alunos, dando um passo a passo da interface e dos comandos básicos. Mostramos as funcionalidades básicas do software, onde são escritas as relações algébricas das funções, como manipular o plano que vai ser criado, como alterar a cor da reta, como colocar uma relação adicional e como escrever as restrições para as relações matemáticas (Figura 4). Por meio de exemplos e exploração própria, os alunos iniciam sua habituação ao software.

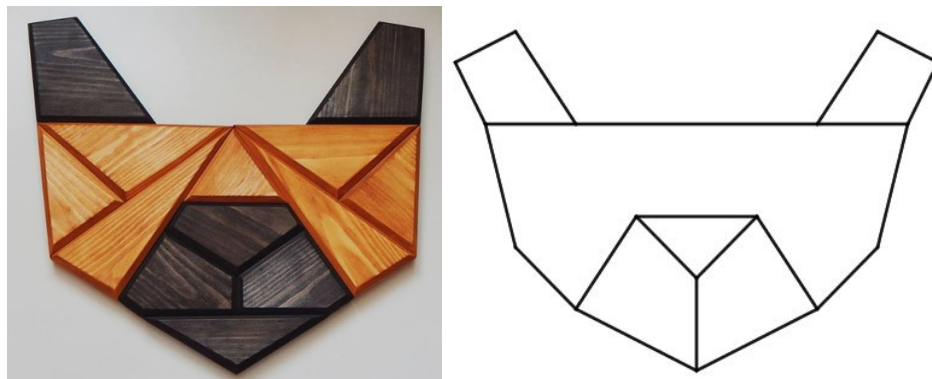
Figura 4: Adição de uma nova relação e espaço das restrições



Fonte: produção pessoal

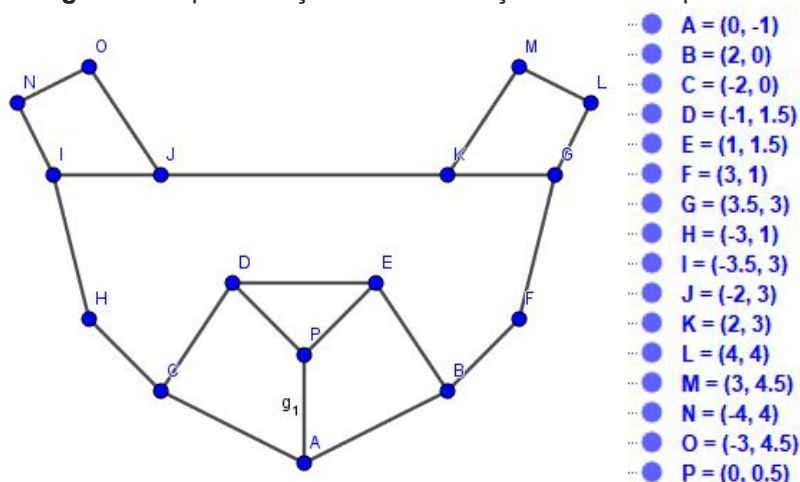
Na segunda etapa, os alunos recebem a seguinte atividade: realizar um Liga-Pontos por meio do software. Para isso, foi disponibilizado aos alunos um arquivo que continha uma lista de desenhos construídos no software e os objetos originais nos quais foram inspirados. Todos os objetos são decorações artesanais em madeira feitas pelo artesão Tomasz Ciurka e sua namorada. A lista de atividades contém também a lista de pontos coordenados e a representação gráfica com os pontos legendados (Figuras 5 e 6). Cada aluno deverá escolher o desenho a replicar, utilizando o software para representar os segmentos, sendo que cada segmento advém de uma restrição imposta a uma função afim.

Figura 5: Exemplo de decoração e sua representação digital



Fonte: <https://www.etsy.com/shop/POLIGON#> = e produção pessoal

Figura 6: Representação com a indicação e a lista de pontos



Fonte: produção pessoal

A terceira etapa começa com a apresentação da origem das decorações, indicando o site onde poderiam encontrar as demais, para poderem explorar os trabalhos realizados pelo artesão. Realizada a exploração, a atividade a ser feita nessa etapa é que escolham sua decoração favorita e construam sua versão no *GrafEq*, por meio de restrições a certas funções afim. Como algumas decorações apareceram na atividade anterior, é solicitado que escolham uma diferente.

Tais etapas podem (e devem) ser divididas e/ou adaptadas conforme a necessidade e realidade de cada contexto escolar. O software é gratuito e de fácil instalação, dificilmente causa problemas. Ainda, se houver problemas de acesso à internet no local, é possível separar as imagens previamente e exibi-las na aula. Nesse caso, é aconselhável disponibilizar esse material para cada aluno, para que possam explorá-los de forma livre. Consta no apêndice um material já organizado para as aplicações.

4. Relato e Análise

Nesta seção ocorrerá a descrição dos encontros realizados com a turma do Instituto Dom Diogo de Souza, com o objeto de analisar como os alunos realizaram as atividades, procurando observar se realizaram as conversões de registros descritas por Duval, essenciais para a compreensão dos objetos matemáticos. Descreveremos também as respostas ao questionário entregue ao final da terceira etapa, procurando avaliar a impressão dos alunos sobre a atividade.

A escolha do local deve-se ao fato de que ao cursar a disciplina de “[EDU02X15] ESTÁGIO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA III”, realizei meu estágio obrigatório nessa mesma instituição. Portanto, estava familiarizado com ela, seus diretores, supervisores e professores, facilitando as combinações referentes à prática.

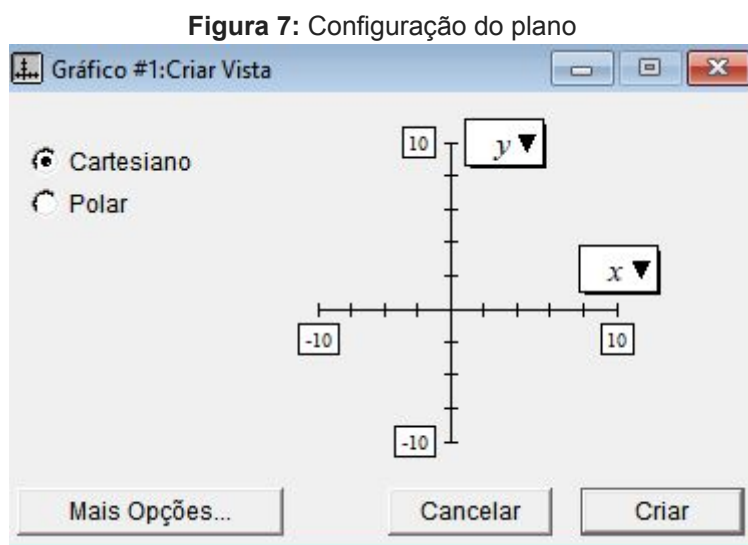
Para a nossa aplicação, devido ao planejamento da professora regente, realizamos a primeira e segunda etapas em um encontro, ao longo de dois períodos. A terceira etapa foi realizada na semana seguinte, ao longo dos mesmos dois períodos. Em função das condições específicas do laboratório que utilizamos, que não tínhamos certeza se teria ou não acesso à internet, disponibilizamos arquivos em formato Portable Document Format (.pdf) na área de trabalho. Para a segunda etapa, o arquivo continha decorações do artesão junto de suas representações digitais e da lista de pontos. Para a terceira etapa, o arquivo continha uma seleção de decorações retiradas do site do artesão. Durante a descrição, optei por escrever utilizando uma narrativa em primeira pessoa, para evitar confusões. Também optei por manter a anonimidade de cada aluno, e então irei indicar cada um durante os excertos pelas letras do alfabeto, recomeçando em cada excerto. Isto é, o aluno A de um certo excerto não é o mesmo de outro excerto.

4.1 Primeiro encontro

O primeiro encontro ocorreu no dia 23 de setembro de 2019, do terceiro período da manhã até o quarto, com o recreio entre eles. Foi combinado com a professora regente de matemática que eu esperaria a turma já no laboratório, pois

ela faria a chamada na sala antes. Chegaram no laboratório por volta de 10 minutos após o começo do período, estavam bem agitados e inquietos. Devido às condições do laboratório, pedi aos alunos que se distribuíssem apenas entre os computadores que estavam ligados, pois não consegui configurar os outros. Quando todos estavam bem acomodados, me apresentei à turma, dizendo o meu nome e o que faríamos naquele dia. Pedi então que abrissem o programa, que estava localizado na área de trabalho do computador de cada um. Então, comecei a apresentar o software a eles.

Por meio do meu computador pessoal, conectado ao projetor do laboratório, apresentei o software e os instruí sobre como utilizá-lo. Ao construir a primeira relação, o software abre uma janela para a configuração do plano que utilizará para representar as funções, conforme Figura 7. Aqui é possível escolher qual variável será representada e quais intervalos dos eixos serão utilizados. Nesse momento, surge uma primeira dificuldade por parte dos alunos.

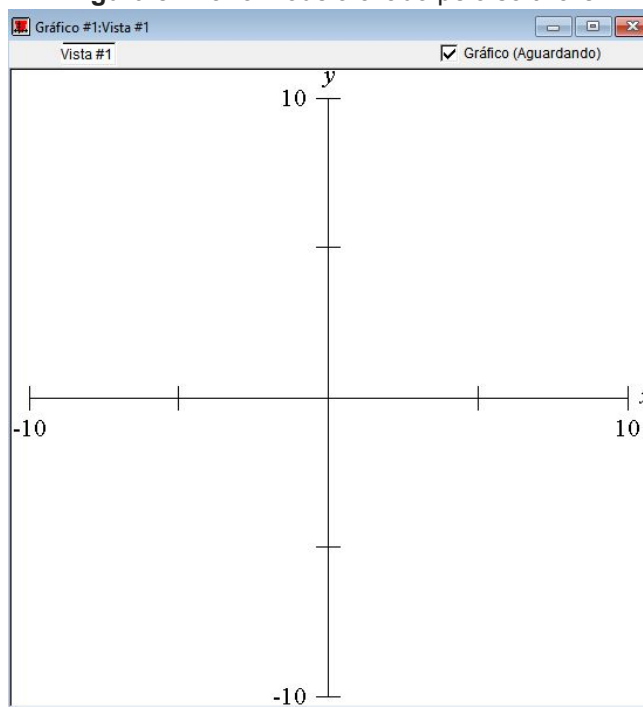


Fonte: produção pessoal

Surgiram questões em relação ao que o “x” e “y” eram e o que esses números abaixo e ao lado deles representavam. Falas como “que que é essas letras?” e “o que elas significam?” foram frequentes nesse momento da sala de aula, demonstraram que não reconheciam os eixos das abscissas e ordenadas neste registro específico. Em seguida, a professora regente, que estava acompanhando, entrevistou e os lembrou utilizando a linguagem que usou, creio eu, para ensiná-los:

“Lembram quando começamos a ver o plano cartesiano? O x é a horizontal e o y é a vertical”. Assim, muitos relembrou e compreenderam o que a janela do software significava, entretanto, tenho a impressão de que alguns alunos apenas deixaram de lado o significado e seguiram em frente. Isto é possível pois ao clicarmos o botão “Criar”, o plano cartesiano, limitado pelos valores anteriores, abre igualmente, como ilustra a Figura 8.

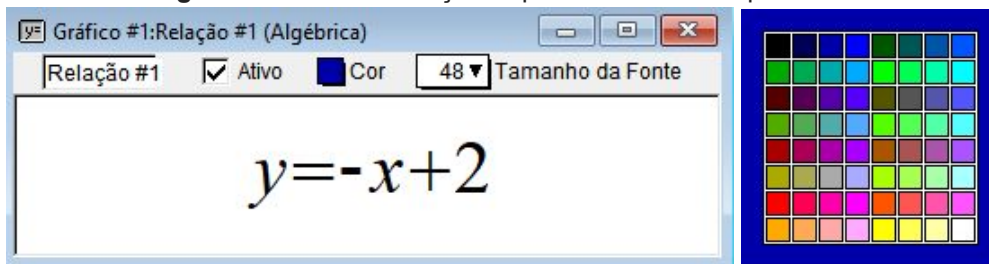
Figura 8: Plano modelo criado pelo software



Fonte: produção pessoal

Por meio de exemplos, apresentei à turma a possibilidade de ter múltiplos gráficos no mesmo plano. Junto disso, para evitar confusões entre as diferentes retas, apresentei também onde podemos controlar a cor de cada função, facilitando a visualização no plano, como mostra a Figura 9.

Figura 9: Janela da relação e quadro de cores disponíveis.



Fonte: produção pessoal

Por fim, iniciei a explicação sobre como delimitar as retas, por meio da janela de restrições do software. Utilizei a linguagem formal com a qual estou acostumado, mencionando os conceitos de domínio e imagem, exemplificando possíveis restrições a serem feitas. Neste momento, dúvidas e inquietações dos alunos surgiram.

Excerto 1

Aluno A: O que é domínio?

Aluno B: Domínio?

Aluno C: O que tu quer dizer com imagem?

Percebi então, pela fala dos alunos, que não sabiam o que tais conceitos significavam ou qual era seu registro gráfico. O registro “Domínio” e o registro “Imagem”, palavras da língua natural que é um sistema de representação já conhecido por eles, não possuíam significado matemático para os alunos. Isto é, para os alunos, Domínio e Imagem são registros da língua natural que representam outros objetos, os alunos não compreendem tais registros como os de algum objeto matemático. Nesse momento, a professora regente comunicou-me que não tinha trabalhado tais conceitos com os alunos, causando um certo desconforto momentâneo.

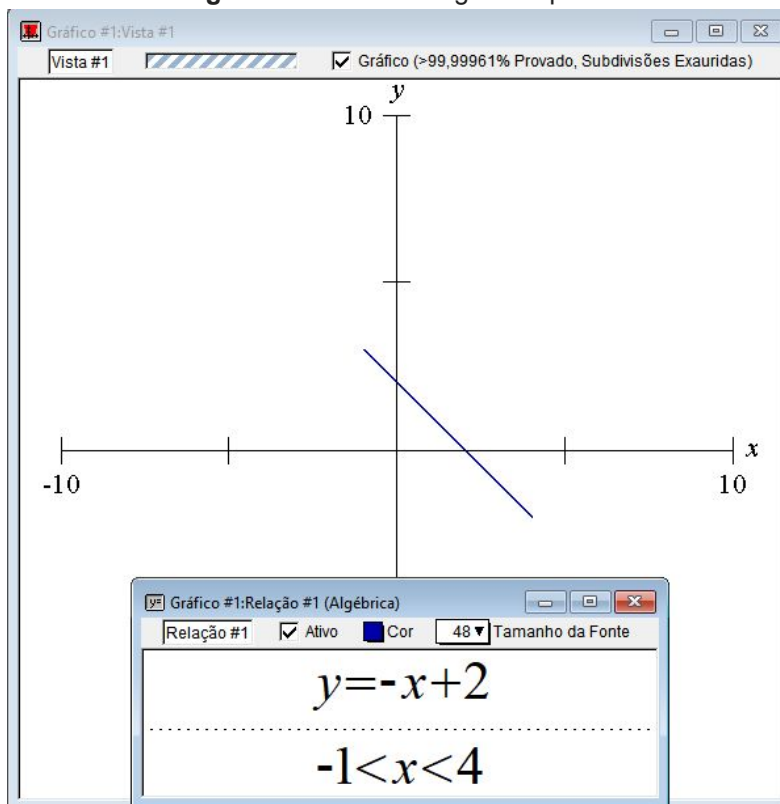
Para não causar um impedimento da atividade, trabalhei então com a ideia que já possuíam, demonstrada pela fala anterior da professora. Como “o x é a horizontal e o y é a vertical” utilizei tal registro para exemplificar as restrições das retas. Comecei utilizando uma restrição na função feita anteriormente, perguntando o porquê do gráfico se alterar (Figura 10). Para os alunos, era algo novo, não tinham se deparado com nada parecido anteriormente.

Excerto 2

Aluno A: Porque ficou só um pedaço?

Aluno B: E o resto da reta?

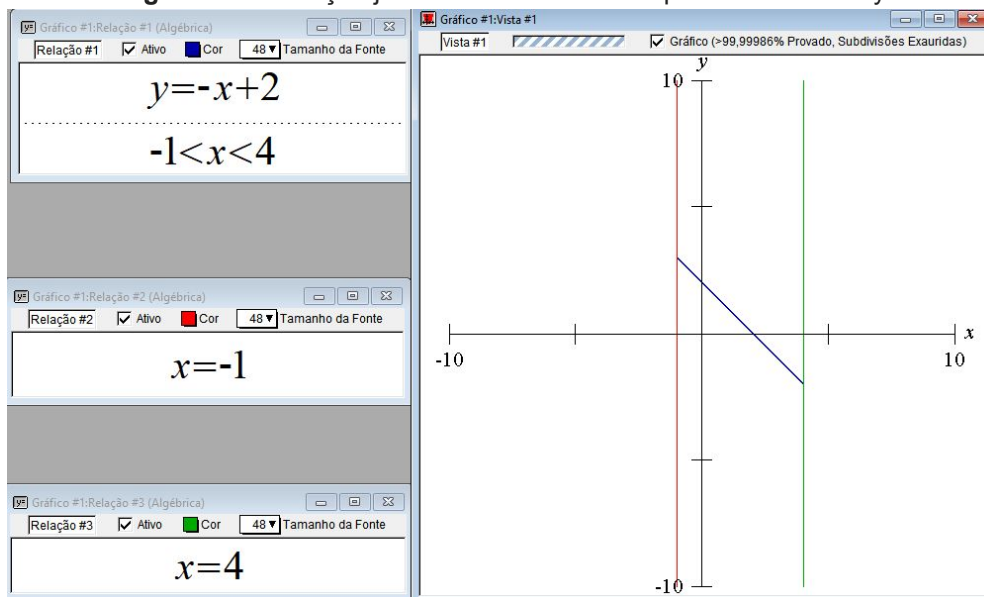
Figura 10: Reta restringida no plano



Fonte: produção pessoal

Perguntei então aos alunos o que aquele símbolo na restrição significava, o que representava? A maioria lembrou que significava uma desigualdade, que um número é menor ou maior que outro. Utilizei então este significado para ajudá-los a interpretar o gráfico representado pelo software e coordenar os registros gráfico e algébrico. Para auxiliar na visualização e compreensão, construí outras duas retas: $x = -1$ e $x = 4$, como mostra a Figura 11. Assim, puderam interpretar melhor o impacto da restrição na representação gráfica da função. Estou consciente de que tais retas não são, por definição, funções afim. Entretanto, como tinham trabalhado com funções afins constantes, o uso de tal retas não foi de grande surpresa para os alunos, mas houve uma certa confusão entre alguns. Após, tratei de exemplificar as restrições envolvendo o outro eixo, utilizando o mesmo processo, como mostra a Figura 12.

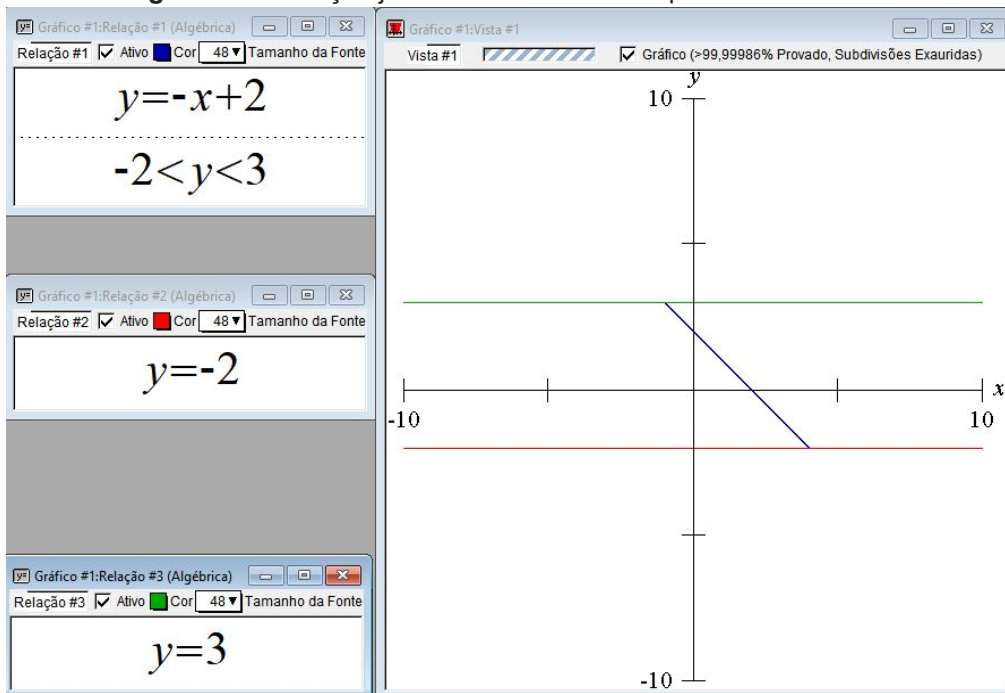
Figura 11: Restrição junto de retas auxiliares paralelas ao eixo y



Fonte: produção pessoal

Ao término da primeira etapa, de introdução ao software, pude perceber, pelas expressões dos estudantes, que a etapa tinha sido demasiadamente demorada. Felizmente, o término coincidiu com o sinal para o intervalo.

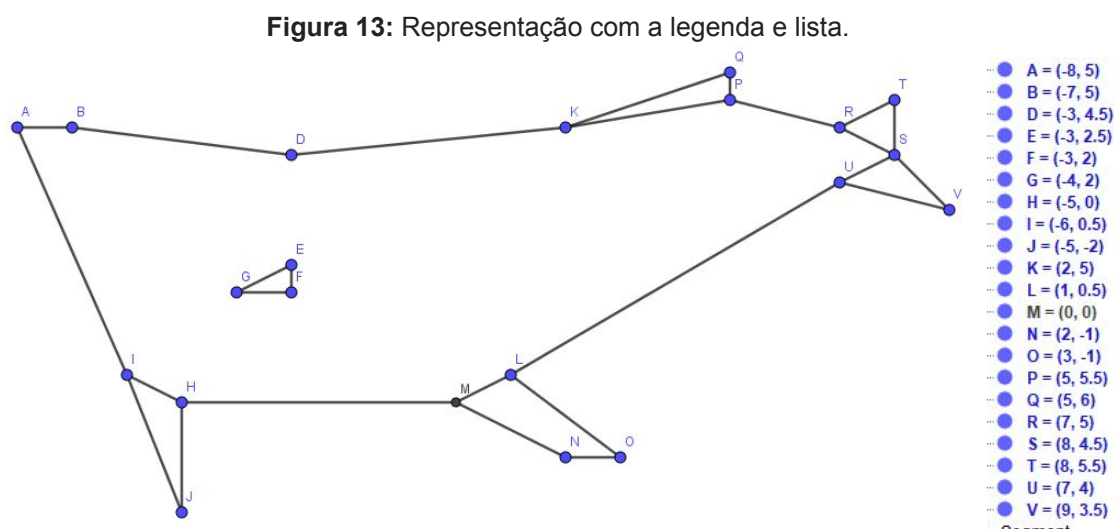
Figura 12: Restrição junto de retas auxiliares paralelas ao eixo x.



Fonte: produção pessoal

Na volta do intervalo, houve um compromisso inesperado que impossibilitou vários alunos de participarem da segunda etapa. A professora de Biologia aplicou a prova de recuperação em outra turma e falou aos alunos que aquela era a última oportunidade de recuperar a nota, com isso, vários alunos pediram à professora regente para sair da aula. Apenas quatro alunos permaneceram. Começamos então a segunda etapa.

Iniciamos explorando a primeira página do arquivo, que estava na área de trabalho de seus computadores, contendo as decorações e suas representações digitais. Conversamos sobre o que pensavam das decorações e das representações, se acharam bonitas, se gostaram, entre outras coisas. Fomos então a segunda e terceira página do arquivo, onde estavam a lista de pontos e a representação com as legendas nos pontos (Figura 13).



Fonte: produção pessoal

Nesse momento, contei aos alunos qual era a tarefa que deveriam realizar no restante do período: replicar uma das decorações no *GrafEq*. Deixei-os livremente pensando em como fazer isso, sem interromper ou intermediar as discussões. Após alguns minutos, um dos alunos pediu-me para começar um dos desenhos, como exemplo. Como todos apresentavam dúvidas sobre como começar, pedi a atenção para prestarem atenção no exemplo. Em conjunto com os alunos, escolhemos uma representação e por quais pontos começar. Dados os dois pontos, construí um sistema de duas equações a duas variáveis (Quadro 4) e foi quando as dúvidas

começaram a aparecer. Dos quatro alunos, nenhum deles reconheceu as equações apresentadas. Isto é, tal registro de representação não era familiar a eles, não conseguiam coordenar com outras representações.

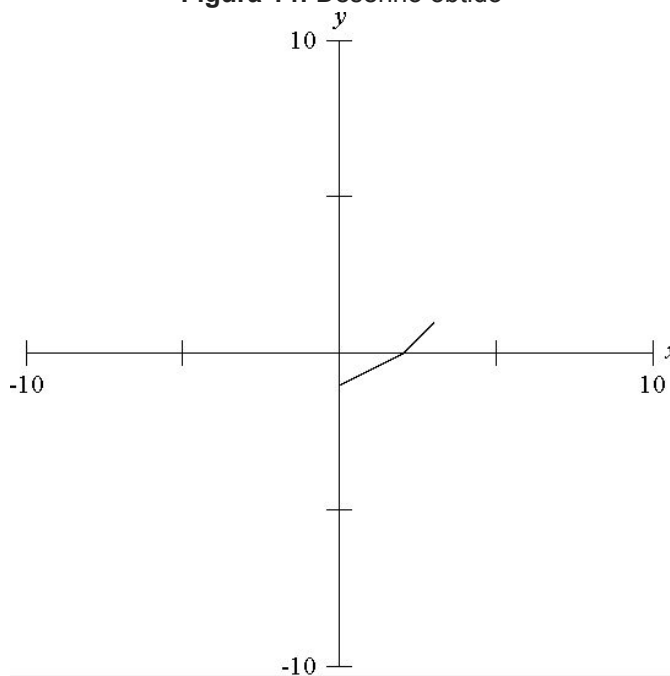
Quadro 4: Sistema de equações realizado em sala

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (-1) = a \cdot (0) + b \\ (0) = a \cdot (2) + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 = b \\ 0 = 2a + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 = b \\ 0 = 2a - 1 \end{cases} \\ & \rightarrow \begin{cases} -1 = b \\ 1 = 2a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 = b \\ \frac{1}{2} = a \end{cases} \rightarrow y = \frac{1}{2}x - 1 \end{aligned}$$

Fonte: produção pessoal

A professora regente, que estava no laboratório acompanhando, me assegurou que tinham trabalhado com sistemas e com a obtenção da lei algébrica por meio dos mesmos. Ainda, tratei de realizar mais um exemplo para a todos, com a esperança de que ajudasse. Para o segundo exemplo, continuei a traçar o mesmo desenho que começamos antes, onde obtivemos o seguinte desenho representado na Figura 14.

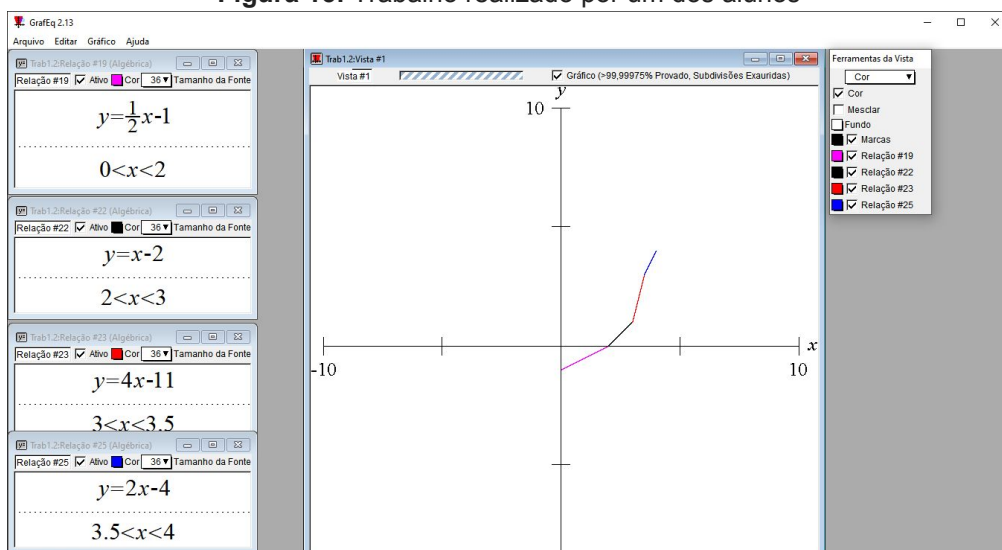
Figura 14: Desenho obtido



Fonte: produção pessoal

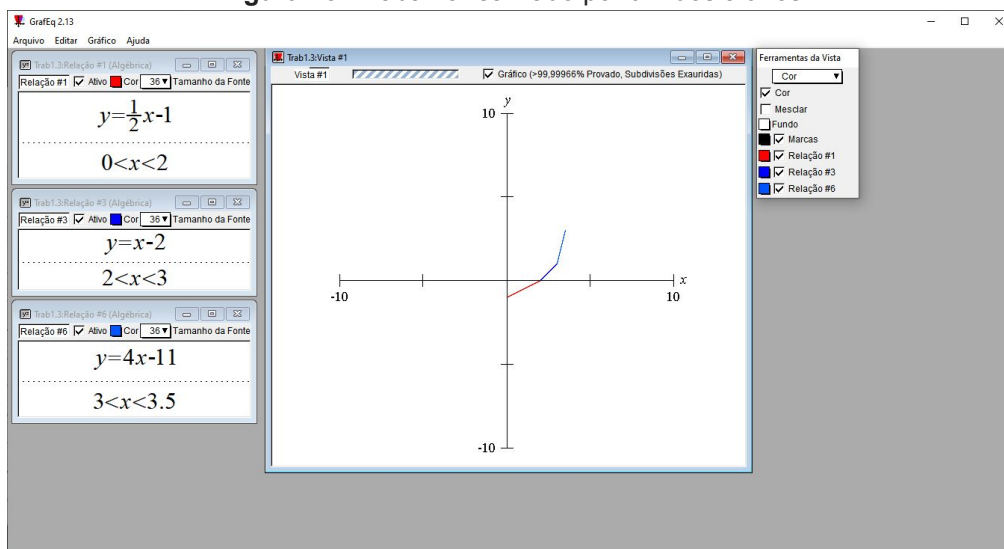
No tempo restante que tínhamos, por não querer influenciar demasiadamente, deixei os alunos trabalhando livremente. Dos quatro alunos, ao invés de escolherem um novo desenho, todos continuaram o exemplo que comecei. Ainda, dos quatro, um dos alunos não conseguiu avançar no tempo restante, permanecendo com o desenho igual a Figura 14, enquanto que os outros três avançaram de forma tímida, traçando mais um ou dois traços, como podemos ver nas Figuras 15, 16 e 17.

Figura 15: Trabalho realizado por um dos alunos



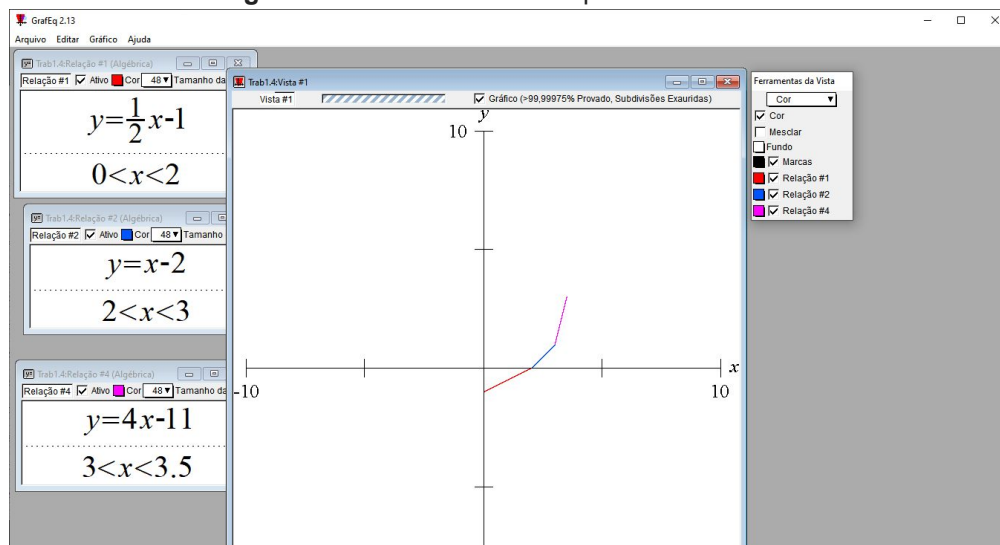
Fonte: acervo pessoal

Figura 16: Trabalho realizado por um dos alunos



Fonte: acervo pessoal

Figura 17: Trabalho realizado por um dos alunos



Fonte: acervo pessoal

Contudo, destacamos que, apesar da atividade não ter sido finalizada pelos estudantes e das dificuldades enfrentadas, é possível identificar um avanço na coordenação dos registros algébrico e gráfico: os alunos, na continuidade do desenho, analisaram a figura original e dela abstraíram informações pertinentes, como possíveis pontos que poderiam determinar as extremidades dos segmentos que compõem a figura, caracterizando uma atividade cognitiva de conversão do registro figural para o registro gráfico e, posteriormente, para o registro algébrico. Uma vez identificados os possíveis pontos, os alunos precisaram realizar a atividade cognitiva de tratamento ano registro algébrico, para determinar as relações matemáticas e as restrições no intervalo do domínio. Mesmo que necessitando de ajuda, e com os obstáculos de entendimento, percebemos avanços.

4.2 Segundo encontro

O segundo encontro ocorreu dia 30 de setembro, uma semana depois. O planejamento inicial era para que ocorresse no dia 27 de setembro, mas a professora regente avisou-me no dia anterior que teria um passeio da escola. A combinação do encontro passado permaneceu e esperei a turma vir de sua sala, por volta de dez minutos após o começo do período. Da mesma maneira que no outro encontro, os alunos distribuíram-se entre os computadores que já se encontravam ligados, pois pude configurar apenas esses.

Começamos o segundo encontro lembrando o que fizemos na semana anterior, pois alguns já tinham esquecido. Relembrei das possibilidades do software e de como poderíamos escrever as funções e as restrições. Pedi então aos alunos para abrirem o arquivo separado para esta etapa da sequência, que estava localizado na área de trabalho. Por algum motivo, alguns computadores não estavam configurados para abrir arquivos com extensão pdf, cerca de dez minutos foram perdidos com a configuração de todos. Resolvido este problema, começamos a explorar o arquivo com uma seleção de decorações, conversamos sobre elas e tiveram reações mistas, alguns gostaram e outros não.

Como boa parte da turma não estava no segundo período da semana anterior, contei da atividade inspirada no Liga-Pontos que realizamos. Novamente, obtive reações mistas, não teve maioria de nenhuma opinião. Propus então a atividade que teriam para aquele encontro, a replicação dentro do *GrafEq* de alguma das decorações, de forma livre.

Figura 18: Recorte da seleção de decorações



Fonte: <https://drewniany-poligon.tumblr.com/>

No começo da atividade, tive que auxiliar vários alunos sobre como utilizar o software novamente, pois estavam apresentando dificuldades, cerca de metade dos presentes. Acredito que a recuperação de Biologia foi uma quebra brusca de ritmo e fez com que vários alunos não pudessem trabalhar corretamente com o software, pois tiveram as instruções de como utilizá-lo, mas não tiveram a oportunidade de explorar sozinhos. Passados cerca de dez minutos do começo da atividade, ocorreu o mesmo do encontro passado, pediram para realizar um exemplo para se guiarem. Para o exemplo, utilizei a decoração abaixo (Figura 19).

Figura 19: Decoração do exemplo

Fonte: <https://drewniany-poligon.tumblr.com/>

Comecei então o exemplo no meu computador pessoal, que estava ligado ao projetor. Expliquei que começaria pela parte inferior direita da decoração, desenhando o contorno dela. Primeiramente, escolhi os pontos (0,3) e (3,0), que seriam os pontos pela qual a reta passaria, e resolvi um sistema linear, de mesma maneira que no encontro passado (Quadro 5).

Quadro 5: Resolução do sistema linear

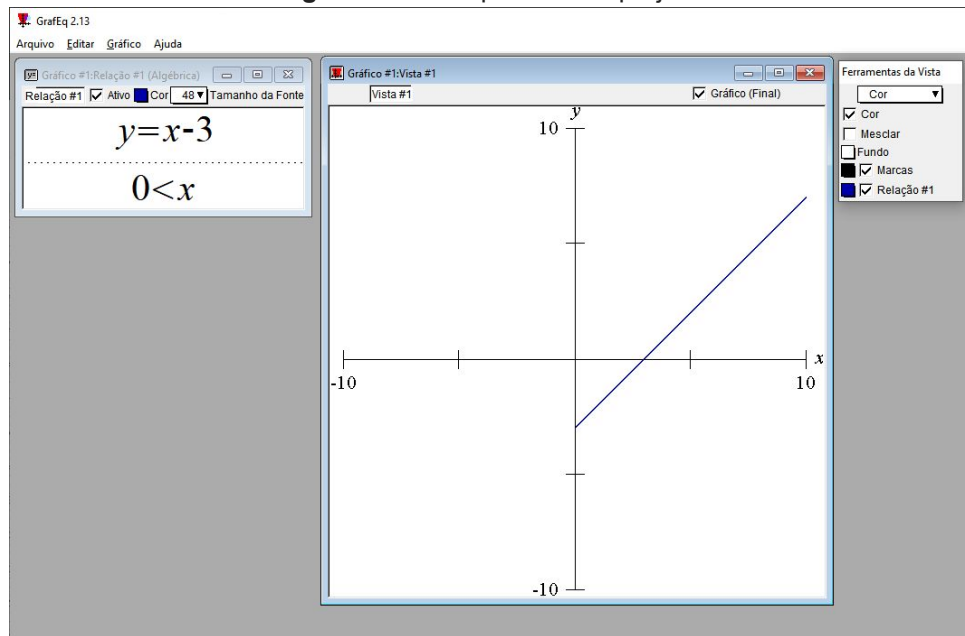
$$\begin{cases} 0=3 \cdot a + b \\ -3=0 \cdot a + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0=3a + b \\ -3=b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0=3a + b \\ -3=b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0=3a - 3 \\ -3=b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3=3a \\ -3=b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1=a \\ -3=b \end{cases} \rightarrow y=x-3$$

Fonte: produção pessoal

Inseri a função obtida no software e coloquei a restrição inicial $0 < x$, pois pensei em ter a decoração simétrica em relação ao eixo Y. Fiz a seguinte indagação para os alunos: Eu preciso colocar outra restrição? Se sim, qual eu coloco? Em um primeiro momento, não entenderam o que eu quis dizer com “restrição”. Reformulei para: “Eu preciso que essa linha pare em algum lugar? Ou ela pode seguir?”. Neste momento, a resposta foi que sim, pois precisaria realizar os outros traços que partiriam das extremidades (Figura 20).

Figura 20: Exemplo feito no projetor



Fonte: acervo pessoal

Nessa situação, por mais que ambas perguntas fossem referentes à mesma imagem criada pelo software, é como se cada uma fosse referente a um sistema de representação diferente. Ver a imagem como uma representação gráfica de uma função e perguntar sobre restrição está distante de ver a imagem como o começo de um desenho e perguntar até onde uma linha deve ir. A necessidade de reformulação na pergunta demonstra uma inabilidade de realizar essa conversão nesse momento. Em seguida, continuei o exemplo, utilizando outra forma para resolver. Dada uma das extremidades, lembrei aos alunos que poderíamos agora trabalhar a obtenção da reta de uma maneira diferente. Ao invés de resolvermos sistemas, apresentei a eles a seguinte fórmula descrita no Quadro 6. Por meio dela, mostrei aos alunos que eu poderia escolher o ponto por onde eu queira que passe e, após isso, ver qual inclinação desejo.

Quadro 6: Obtenção da lei algébrica da função com um ponto e o coeficiente linear.

$$P = (x_0, y_0), \text{ coeficiente angular} = a \Rightarrow y = a(x - x_0) + y_0$$

Fonte: Dante (2012, pg. 60)

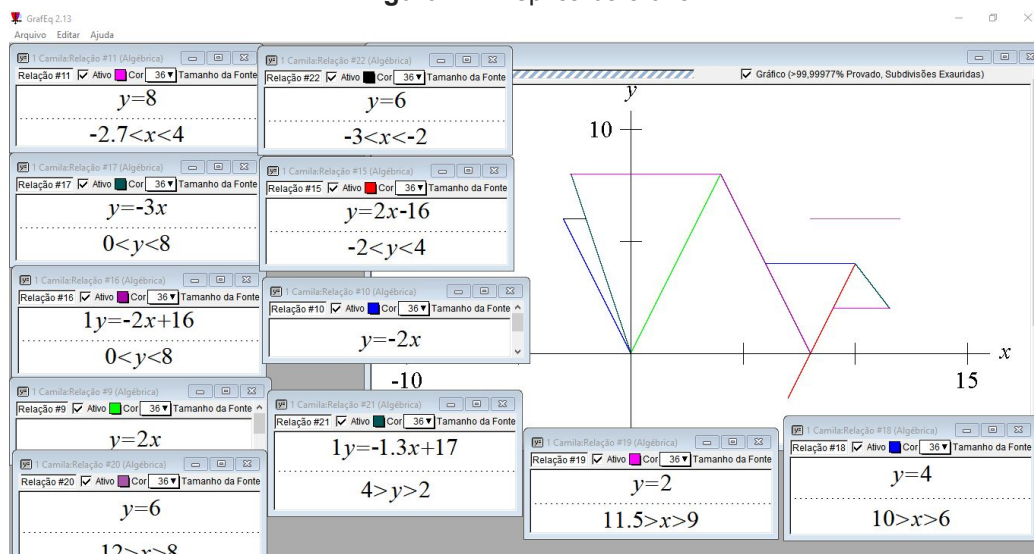
Ao final do exemplo, os alunos começaram a trabalhar de forma mais autônoma. A escolha sobre qual decoração representar ocorreu de maneira parecida com a última aula, muitos dos alunos continuaram o exemplo que fiz. Tiveram o restante do primeiro período, que foi cerca de 10 minutos, e todo o período seguinte. Antes de aprofundar-me sobre os trabalhos, é relevante dizer que as etapas planejadas para a sequência foram uma imposição da professora regente, que tinha um planejamento apertado. Acredito que o tempo que tiveram disponível não foi o ideal e que pelo menos mais um encontro era necessário para poderem trabalhar em suas réplicas digitais. Enquanto trabalhavam em suas réplicas, cada grupo ia chamando para perguntar sobre as dúvidas que fossem surgindo ou se o que estavam fazendo era “correto”.

Como falar em “correto” em relação à uma réplica? Um desenho? Uma das respostas possíveis é que uma réplica *correta* deve lembrar ou se assemelhar ao original, mas quando falamos de retas e linhas, se cada segmento do desenho está correto ou não, a resposta se torna mais complicada. É claro que possa vir a ter um dos contornos do desenho que está inclinado demais ou de menos, que não se assemelha ao original, mas não era o importante ali. É estranho como os alunos estão, de certa forma, configurados a seguir um padrão e é difícil trabalharem de forma independente.

Por estar atendendo os alunos constantemente, não pude prestar atenção em muitas das falas e discussões dentre os grupos durante os trabalhos. Acredito que essas falas, essas trocas de experiências e significados são importantes para observar como lidam com os registros, os sistemas de representação e as conversões. Ainda assim, pude observar algumas estratégias e ferramentas que alguns montaram para construir suas réplicas.

Quando chegaram no laboratório e se distribuíram pelos computadores, alguns preferiam trabalhar sozinhos. Em especial, uma das alunas que pediu para ficar sozinha e falou instantaneamente que não gostava de Matemática e que não tinha vindo no outro encontro. Preocupei-me que ela não conseguisse lidar com o software sem a colaboração de algum colega, já que seria a primeira experiência da aluna com o GrafEq. Entretanto, sua réplica (Figura 21) é uma das mais impressionantes, mesmo sem ter acabado.

Figura 21: Réplica da aluna



Fonte: acervo pessoal

Ela optou por replicar um pássaro construído pelo artesão, que pode ser observado na Figura 22. Pude observar que a estratégia da aluna era utilizar a fórmula descrita no Quadro 6, mas com uma certa aleatoriedade. Sem identificar por qual ponto a reta passaria, ela aplicava alguns valores de coeficiente angular e testava no software. Pela réplica apresentada, é possível perceber que em algum nível, ela identificou as variáveis visuais, descritas por Duval, presentes dentro da fórmula, relacionando o que a mudança em algum valor aplicado influenciava no gráfico. Isto é, ela conseguiu realizar as conversões descritas por Duval, mas ainda que não as coordenava completamente.

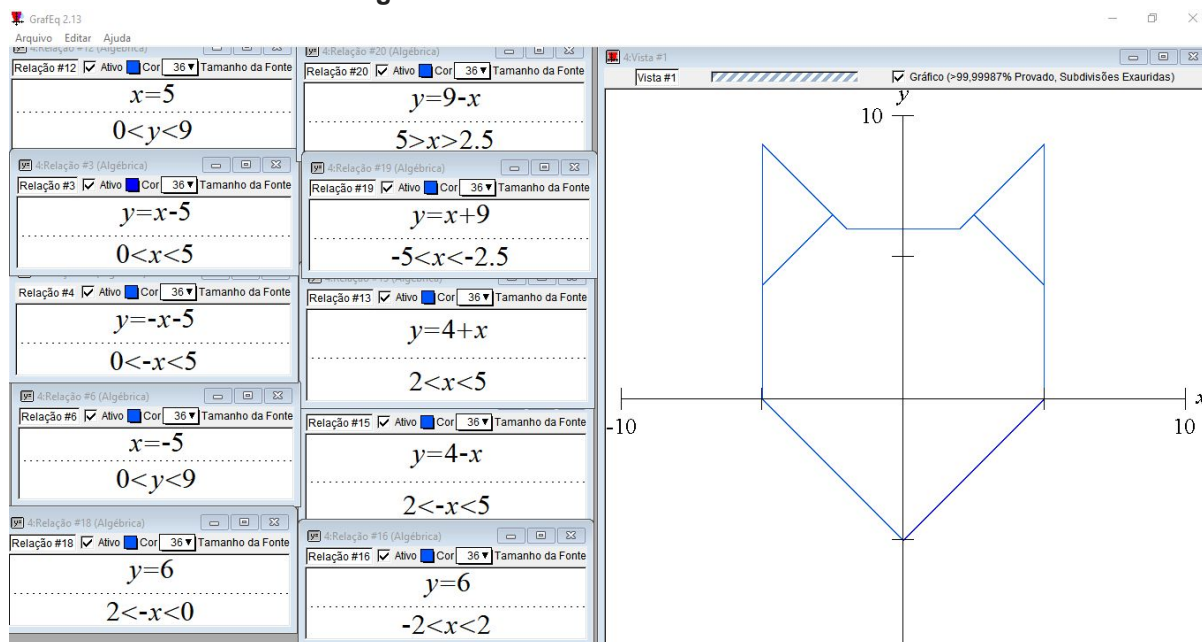
A estratégia usada pela aluna foi algo inesperado, pois tinha a expectativa de que os alunos fizessem um caminho semelhante ao apresentado, de pensar em quais pontos ligariam, como se estivessem com um Liga-Pontos. Porém, essa situação demonstra a versatilidade do software, indicada por Notare e Gravina (2013). A rapidez com que ela pôde testar cada valor, avaliando o que acontecia com a representação gráfica, advém do software. Tal possibilidade é inexistente quando trabalhamos da maneira usual, com quadro e caderno.

Figura 22: Pássaro replicado pela aluna

Fonte: <https://drewniany-poligon.tumblr.com/>

Dentre os outros alunos, pude perceber que outras estratégias foram usadas. Alguns alunos seguiram resolvendo sistemas lineares, dentro desses, teve alunos que tinham muitas dúvidas sobre quais pontos utilizar, pois, para replicar a decoração escolhida, cada reta necessita ter uma determinada inclinação para manter a proporção do desenho. Logo, muitos estavam com dificuldade em identificar os pontos que proporcionariam a inclinação desejada, ou seja, a conversão do registro figural para o registro algébrico a partir da identificação de elementos pertinentes, como no exemplo, a inclinação da reta e os pontos que a determinam. Ainda, percebi que muitos deles tinham dificuldades em resolver sistemas lineares e só conseguiam com meu apoio ou da professora, revelando dificuldades na atividade cognitiva de tratamento algébrico de sistemas de equações lineares. Teve também alunos que trabalhavam apenas com a forma geral da equação, avaliando valores de coeficiente linear e angular, procurando quais duplas de valores encaixavam com o desenho. Desses alunos, teve uma fala que chama a atenção (Excerto 3), com relação a uma das relações algébricas da Figura 23.

Figura 23: Trabalho das alunas do excerto



Fonte: acervo pessoal

Excerto 3

Aluna A: “A gente quer que essa linha fique no outro lado”

Aluna B: “É só trocar y e x, deu certo antes”

Aluna A: “Não rolou”

Aluna B: “Bota um menos que vai”

Pela fala delas, percebemos que as alunas começaram o desenho em uma das metades do plano cartesiano, onde o eixo x assume valores positivos, e gostariam de replicar as retas já construídas para o outro lado, devido à simetria do desenho escolhido. De imediato, já assumem que podem partir da mesma representação algébrica, mas que deverão modificar algum de seus elementos, realizando tratamento nessa relação. Estarem cientes da necessidade de modificação demonstra que existe uma certa coordenação entre os registros e que conseguem converter de um para outro, mas que não dominam completamente, pois ainda não identificam de forma antecipada os elementos que devem ser alterados. Uma outra fala, agora de outra aluna, retrata uma identificação de uma variável visual em uma relação algébrica da Figura 24.

Excerto 4

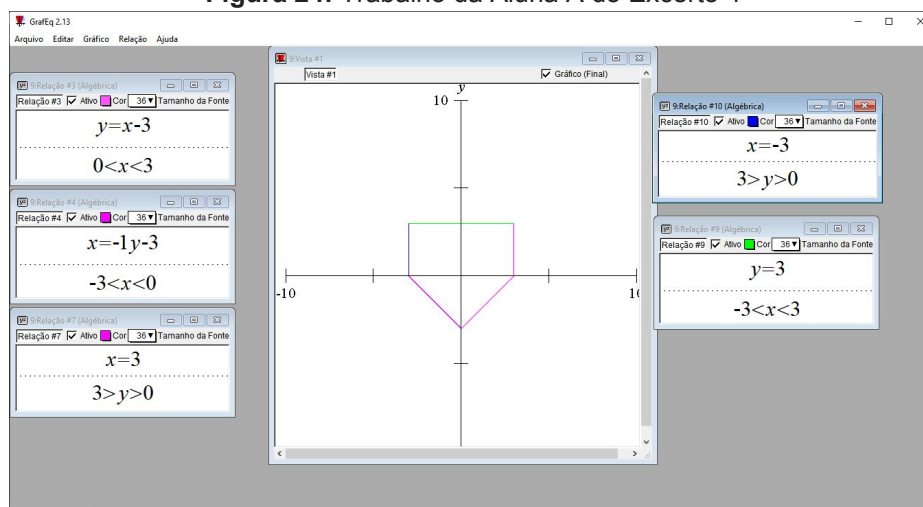
Aluna A: “Preciso que essa linha vá pra baixo”

Professor: “Como se faz isso?”

Aluna A: “É só botar um menos que vai pra baixo né?”

Nessa fala, podemos perceber que a aluna identifica que aquela variável tem sua influência na representação gráfica, isso demonstra, novamente, a capacidade de conversão entre os registros e um nível de coordenação, requisitos necessários para a apreensão conceitual do objeto. A aluna faz referência à segunda janela algébrica da coluna localizada à esquerda na Figura 24.

Figura 24: Trabalho da Aluna A do Excerto 4



Fonte: acervo pessoal

Por fim, o final do encontro ocorreu sem nenhuma complicação. Os professores do instituto possuem um estranho hábito de liberarem os alguns minutos mais cedo, logo, muitos começaram a ir embora por volta de onze horas e cinquenta minutos e antes do meio dia não havia mais ninguém. No Apêndice D constam os trabalhos dos alunos nesse segundo encontro.

4.3 Questionários

Ao final do segundo encontro, entreguei a cada aluno um questionário para preencherem em suas casas. O questionário contém dez perguntas sobre as atividades que realizaram no *GrafEq* e seus efeitos sobre eles. A finalidade dessas

perguntas é proporcionar aos alunos uma oportunidade de *feedback*, onde possam exteriorizar sua opinião sobre a atividade, apontando onde existe a possibilidade de melhora, onde errei no planejamento e o que está bom. Pretendo, nesta subseção, trazer algumas respostas interessantes: respostas onde percebi que o software auxiliou nas conversões, que dão *insights* sobre os próximos trabalhos e que trazem perspectivas inimaginadas. O modelo do questionário pode ser encontrado no Apêndice E. Nesta subseção, a legenda para cada aluno se mantém durante os quadros diversos, isto é, as respostas do aluno A de quadros diferentes são todas do mesmo aluno.

A primeira pergunta era: “Você já conhecia o *GrafEq?*”. Por ser um software relativamente antigo e sabendo que é raro ter aulas que envolvam tecnologias, não foi nenhuma surpresa que nenhum dos alunos respondeu que sim. A segunda pergunta era: “O que você acha da matemática? Ama? Odeia?”. Nessa pergunta, pude perceber o quão a matemática é vista negativamente por parte de vários alunos. Houve sim respostas positivas, mas foram em menor número. Algumas respostas chamam a atenção (Quadro 7):

Quadro 7: Respostas selecionadas da segunda pergunta

Alunos	Respostas para a segunda pergunta
Aluno A	“A considero uma ciência admirável, imprescindível, mas sou um pouco incompetente nela“
Aluno G	“Gosto quando entendo”
Aluno K	Acho uma matéria complexa e difícil, por isso odeio.“

Fonte: acervo pessoal

A terceira e a quarta perguntas possuem os seguintes enunciados: “Você encontrou dificuldades para trabalhar com o software?” e “Se sim, quais dificuldades?”. Acreditava que as respostas para essas perguntas seriam mistas, que alguns alunos se adaptariam melhor com o software enquanto que outras não. Me surpreendi, pois parte das respostas levam ao fato de que os alunos não estão acostumados a usar o computador. Creio que com a popularização do celular, o computador tornou-se segundo plano para várias pessoas.

Quadro 8: Respostas selecionadas da quarta pergunta

Alunos	Respostas para a quarta pergunta
Aluno C	Não to acostumado com computador, não recebi ensinamento
Aluno F	Um pouco para me achar no computador, pois não estou acostumada
Aluno I	No computador

Fonte: acervo pessoal

Algumas respostas da sétima e da oitava questão trazem alguns apontamentos de que o software realizou o que foi proposto, de auxiliar na coordenação dos registros e promover a apreensão conceitual das funções. (Quadro 9). Tinham os seguintes enunciados: “Você considera que aprendeu algo com a atividade?” e “Você acha que utilizar um software para construir os gráficos fez diferença na sua aprendizagem? Boa ou ruim?” Além disso, fiquei surpreso pois alguns dos jovens nem sabiam que existem softwares voltados à produção dos gráficos de funções.

Quadro 9: Respostas selecionadas da oitava pergunta

Alunos	Respostas para a oitava pergunta
Aluno A	Sim, ajuda na compreensão do que significa os cálculos
Aluno B	Sim, foi o que mais gostei na atividade
Aluno J	Sim, porque nem sabia que tinha como
Aluno H	Sim, facilita entender os gráficos
Aluno K	Faz! Ele propõe um melhor atendimento através da tecnologia

Fonte: acervo pessoal

A seguir, apresento as considerações finais da pesquisa realizada.

5. Considerações Finais

A Matemática é uma ciência que estuda os objetos abstratos, que não podemos tocar, sentir ou cheirar. Portanto, construímos símbolos e notações que atuam como representações desses objetos e nos permitem manipulá-los. Entretanto, tal manipulação não é livre. Cada uma das representações de um objeto está ligada ao sistema que foi construída.

Por exemplo, as funções. Possuem uma representação gráfica no plano cartesiano, uma outra representação gráfica por meio de Diagramas de Venn e setas, como também possuem sua representação algébrica, por meio da lei de formação. Cada representação possível traz diferentes nuances, características do objeto ao foco. Portanto, para que se compreenda um objeto matemático, é necessário saber coordenar tais representações e se locomover de uma a outra, apenas assim a compreensão será total.

Sendo assim, a necessidade da coordenação e a vontade de utilizar tecnologias digitais na sala de aula motivou a pesquisar sobre a seguinte questão: **Quais são as potencialidades do *GrafEq* no estudo de funções afins?** Como foi dito anteriormente, tal software possui uma interface direta e clara, exibindo ambas representações, gráfica e algébrica. Tínhamos como hipótese que tal fato pode facilitar a coordenação entre as representações, promovendo assim a compreensão do conteúdo escolhido, o que de fato foi verificado a partir dos dados produzidos e analisados.

Para responder a questão, organizamos uma sequência didática sobre as funções afins, utilizando o *GrafEq* nas atividades. Essa sequência foi aplicada em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio de um instituto estadual, localizado em Porto Alegre. Por meio dos dados coletados, foi possível observar uma melhora na coordenação dos registros e, subsequente, compreensão conceitual da função afim de vários alunos. Observamos que os alunos puderam identificar as variáveis visuais pertinentes ao objeto de estudo, compreendendo sua influência nos registros algébrico e gráfico.

Entretanto, a autocrítica é necessária: há pontos a se melhorar e outros pontos a se considerar. Perante as três etapas propostas, acredito que o tempo que

se utilizou para realizá-las foi insuficiente pois as atividades eram complexas demais para tempo que tínhamos. Junto disso, a atividade da segunda etapa pode ter sido muito grande e complexa para um primeiro contato com o software. Talvez seja necessária atividades preliminares que habituem os alunos ao software.

As condições de infraestrutura tiveram impacto também. Por causa delas, muitos alunos tiveram que trabalhar em grupos pequenos, de 2 a 3 alunos. Isso é uma faca de dois gumes, pois vários grupos trabalharam bem juntos, se auxiliando e enriquecendo a aprendizagem de cada uma enquanto que em outros grupos, alunos ficavam tirando a atenção um dos outros. É necessário avaliar também o questionário, teve perguntas que poderiam ter sido escritas de maneira mais aberta. Algumas delas foram muito sugestivas, não dando oportunidade para refletirem. Perguntar se amam ou odeiam matemática foi um dos meus maiores erros dentro do questionário.

Acredito que a ação “ser professor” necessita de uma constante reflexividade perante nossas ações. Um professor deve se autoavaliar constantemente, mas não de maneira pessimista, e sim, procurando estar sempre melhorando em sua docência. Ainda, a motivação deste trabalho continua aqui, a vontade de integrar as tecnologias e as mídias digitais na sala de aula é um desejo pessoal existente antes mesmo de entrar para a Universidade. Portanto, carrego comigo os acertos e os erros desse trabalho, utilizando-os como ferramentas para minhas futuras aulas e querendo, cada vez mais, mostrar as boas possibilidades que existem com o uso de tecnologias.

6. Referências

- BONFADA, Elisete Maria. **Equação da reta: a matemática e o fantástico mundo das artes**. 2015. Trabalho de conclusão de curso (Especialização) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Matemática. Curso de Matemática, Mídias Digitais e Didática : tripé para formação do professor de matemática., Porto Alegre, 2015. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/134121>. Acesso em: 20 jun. 2019.
- DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2012. 264 p. v. 3. ISBN 978 85 08 12913-3.
- DUVAL, Raymond. Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica** - 8a ed. Campinas, São Paulo. Papirus, p. 11- 33. 2013.
- DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat**. Florianópolis: v.07, n.2, p.266-297, 2012.
- DUVAL, Raymond; MORETTI, Trad. Mércles Thadeu. Gráficos e equações: a articulação de dois registros Graphiques et équations: L'articulation de deux registres. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 96-112, maio 2012. ISSN 1981-1322. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/24514>>. Acesso em: 20 nov. 2019. doi:<https://doi.org/10.5007/1981-1322.2011v6n2p96>.
- ESPAÇO EDUCAR. **20 atividades de liga pontos e escrita grátis para alfabetização ou educação infantil**. [S. l.], 2018. Disponível em: <https://www.espacoeducar.net/2018/06/20-atividades-de-liga-pontos-e-escrita.html>. Acesso em: 26 jun. 2019.
- GAUTO, Natássia Knecht. **GrafEq no processo de ensino e aprendizagem de funções afins**. 2012. Trabalho de conclusão de curso (Curso de Matemática: Licenciatura) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Matemática., Porto Alegre, 2012. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/66865>. Acesso em: 17 jun. 2019.
- HOFART, Margareth Moraes. **Desenhando retângulos, paralelogramas, triângulos e círculos através da álgebra : uma possibilidade do software GrafEq**. Orientador: Maria Alice Gravina. 2013. 125 p. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande Do Sul, Porto Alegre, 2013. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/88276>. Acesso em: 9 jun. 2019.
- NOTARE, Márcia Rodrigues; FIOREZE, L.A. ; HALBERSTADT, F. F. . **O SOFTWARE GRAFEQ E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: UMA ANÁLISE DE TRABALHOS COM ILUSÃO DE ÓTICA**. In: XIV Conferencia

Interamericana de Educação Matemática - XIV CIAEM, 2015, Tuxtla. XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, 2015.

NOTARE, Márcia Rodrigues; GRAVINA, Maria Alice. **A formação continuada de professores de matemática e a inserção de mídias digitais na escola.** In: VI COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA (VI HTEM), 2013, São Carlos, SP, Brasil. **Anais [...].** [S. l.: s. n.], 2013.

PEDAGOGUERY SOFTWARE. **GrafEq:** description. Página inicial. [s.d.]. Disponível em <<http://www.peda.com/grafeq/description.html>>. Acesso em: 9 jun. 2019.

RAMPON, Marina. **Contribuições do software GrafEq nos processos de ensino e aprendizagem do conteúdo de função afim.** Orientador: Leandra Anversa Fioreze. 2015. 35 p. Trabalho de conclusão de especialização (Especialização) - Polo Picada Café, [S. l.], 2015. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/134124>. Acesso em: 9 jun. 2019.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática:** compreensão e prática. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015. 296 p. v. 9.

STORMOWSKI, Vandoir; GRAVINA, Maria Alice; LIMA, **José Valdeni de.** **Formação de professores de matemática para o uso efetivo de tecnologias em sala de aula.** RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação, Porto Alegre, ano 2, v. 13, n. 1, p. 1-10, 2015. DOI <https://doi.org/10.22456/1679-1916.61455>. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/61455>. Acesso em: 15 out. 2019.

Apêndice A - Termo de Consentimento



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA



TERMO DE ASSENTIMENTO INFORMADO

Eu, _____, aluno(a) da turma _____, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada: **Potencialidades do GrafEq no estudo da função afim**, desenvolvida pelo(a) pesquisador **João Vítor Garcez Ferreira**. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por **Marcia Notare Meneghetti**, professora acadêmica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Tenho ciência de que a minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação, a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) do objetivo estritamente acadêmico do estudo, que é:

- Estudar as potencialidades do ensino de funções afins utilizando o software *GrafEq* com a perspectiva da teoria de Raymond Duval.

A minha colaboração se fará por meio de questionário, bem como da participação nas aulas, em que serei observado(a) e minha produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a minha participação, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. Porém, para que não ocorram constrangimentos, estou ciente de que será mantido o anonimato dos dados. Além disso, estou ciente de que poderei deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação.

Como benefícios, é esperado desde estudo, produzir informações importantes sobre Tecnologias Digitais na Educação Matemática, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes à educação.

Ciente também, de que minha colaboração se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Porto Alegre, _____ de _____ de _____.

Assinatura do aluno:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa:

Apêndice B - Termo de Assentimento



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
 INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
 PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA



TERMO DE ASSENTIMENTO INFORMADO

Eu, _____, aluno(a) da turma _____, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada: **Potencialidades do *GrafEq* no estudo da função afim**, desenvolvida pelo(a) pesquisador **João Vítor Garcez Ferreira**. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por **Marcia Notare Meneghetti**, professora acadêmica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Tenho ciência de que a minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação, a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) do objetivo estritamente acadêmico do estudo, que é:

- Estudar as potencialidades do ensino de funções afins utilizando o software *GrafEq* com a perspectiva da teoria de Raymond Duval.

A minha colaboração se fará por meio de questionário, bem como da participação nas aulas, em que serei observado(a) e minha produção analisada. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a minha participação, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. Porém, para que não ocorram constrangimentos, estou ciente de que será mantido o anonimato dos dados. Além disso, estou ciente de que poderei deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação.

Como benefícios, é esperado desde estudo, produzir informações importantes sobre Tecnologias Digitais na Educação Matemática, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes à educação.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável pelo e-mail j.vitorgferreira@gmail.com

Porto Alegre, ____ de _____ de _____.

Assinatura do aluno:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa:

Apêndice C - Carta de apresentação



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Porto Alegre, 25 de junho de 2019.

Prezado(a) Diretor(a)

O aluno **João Vítor Garcez Ferreira** atualmente é graduando regularmente matriculado no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Como parte das exigências do curso, o graduando está desenvolvendo a pesquisa intitulada: **Potencialidades do *GrafEq* no estudo de função afim**, para o desenvolvimento de seu trabalho de conclusão, no qual é exigido para que possa adquirir o título de licenciada em Educação Matemática.

O trabalho de conclusão de curso produzido deve resultar em material didático de qualidade que possa ser utilizado por outros professores de Matemática. Neste sentido, torna-se extremamente importante realizar experimentos educacionais e, por esta razão, estamos solicitando a sua autorização para que este trabalho possa ser desenvolvido na escola sob sua Direção.

Em caso de manifestação de sua concordância, por favor, registre sua ciência ao final deste documento, o qual está sendo encaminhado em duas vias.

Enquanto orientadora responsável, reiteramos nosso compromisso ético com os sujeitos dessa pesquisa nos colocamos à disposição para quaisquer esclarecimentos durante e após a realização da coleta de dados. Para tanto, deixamos à disposição o seguinte telefone de contato: (51) 3308.6212, e o seguinte e-mail: marcia.notare@ufrgs.br.

Agradecemos a sua atenção.

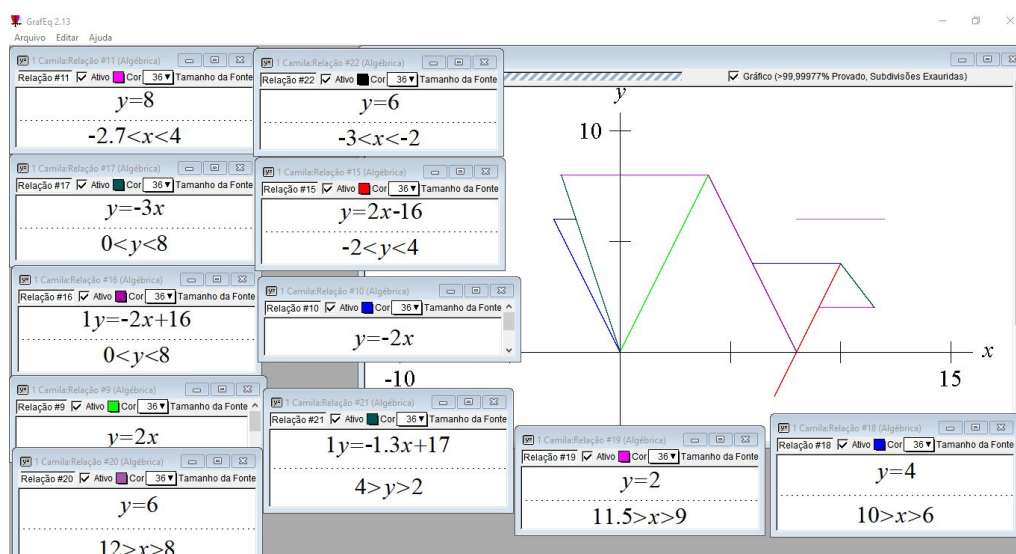
Cordialmente,

Márcia Notare
Professora do IME/PPGEMat/UFRGS

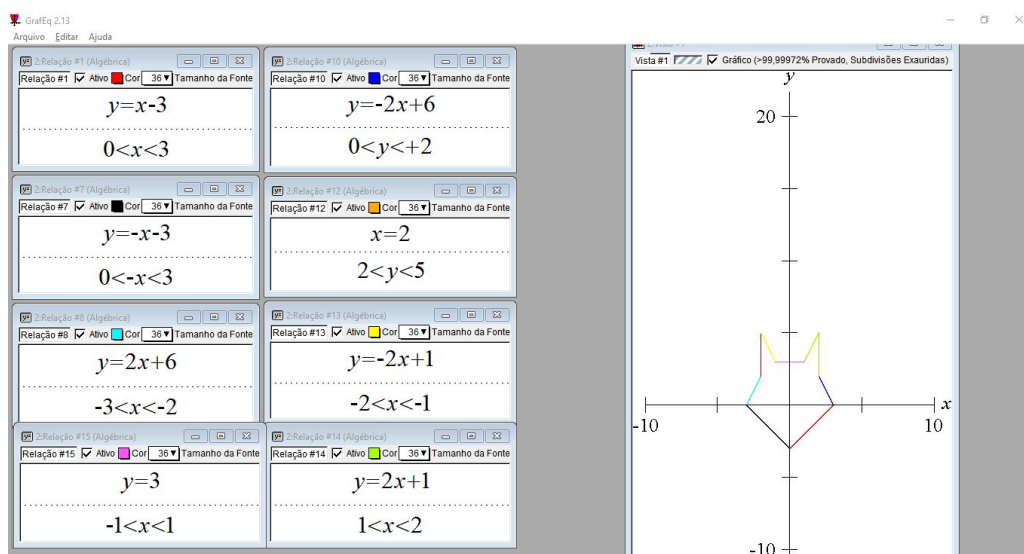
Apêndice D - Trabalhos do Segundo Encontro

Neste apêndice se encontram as reproduções realizadas pelos alunos durante a terceira etapa da atividade, que foi no meu segundo encontro com eles. Cada reprodução foi realizada por um ou mais alunos, que se organizaram por preferência pessoal.

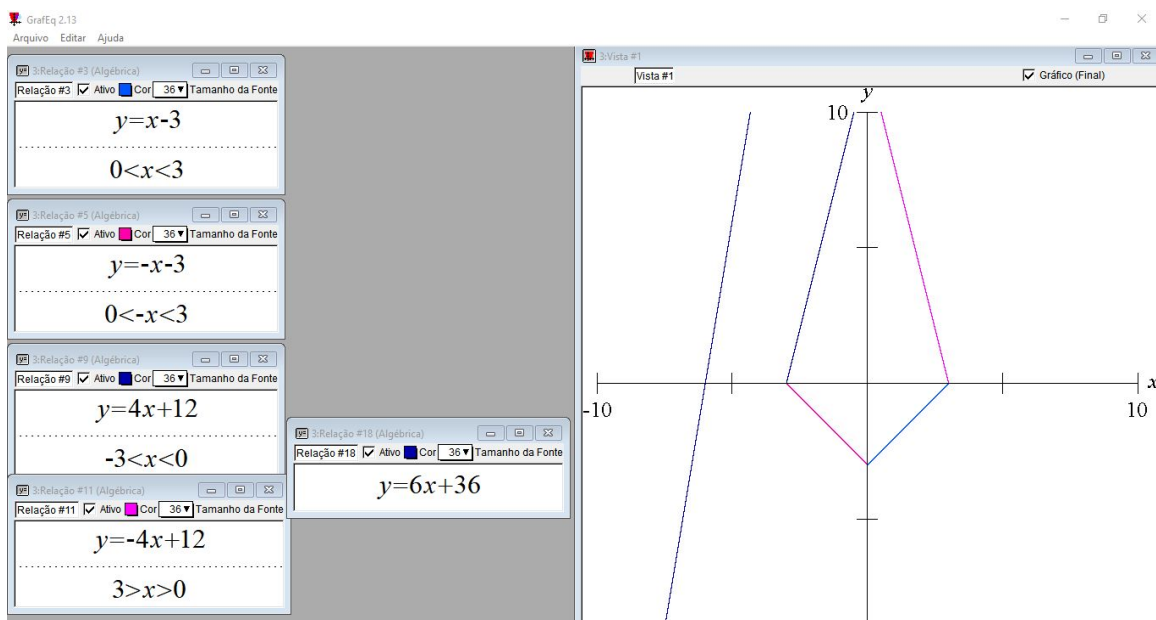
Reprodução 1



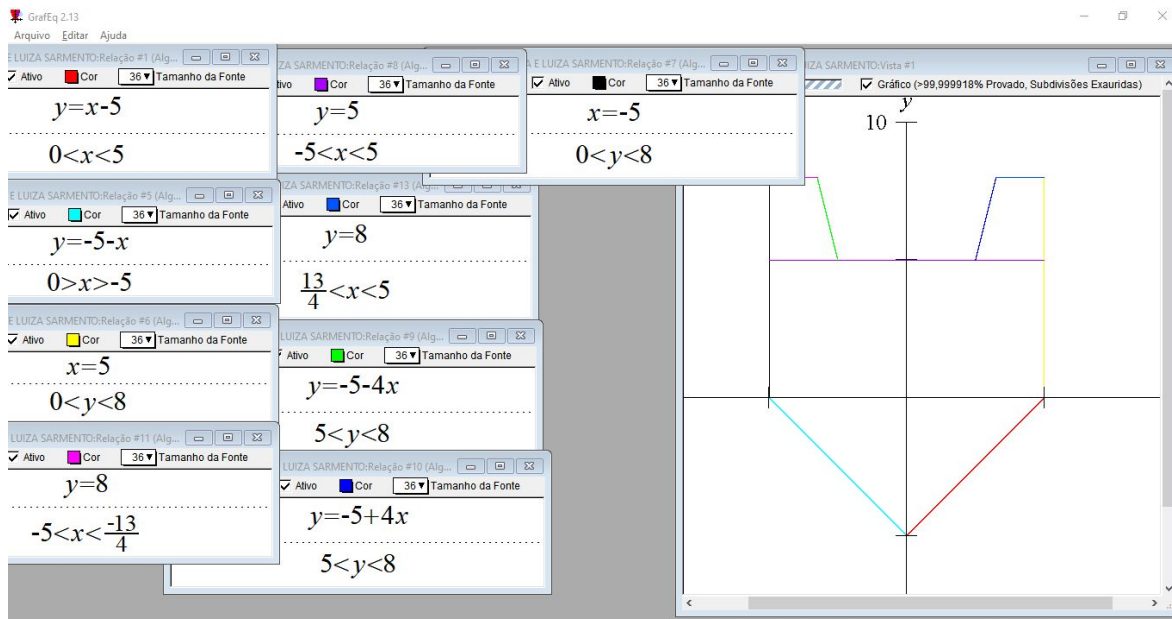
Reprodução 2



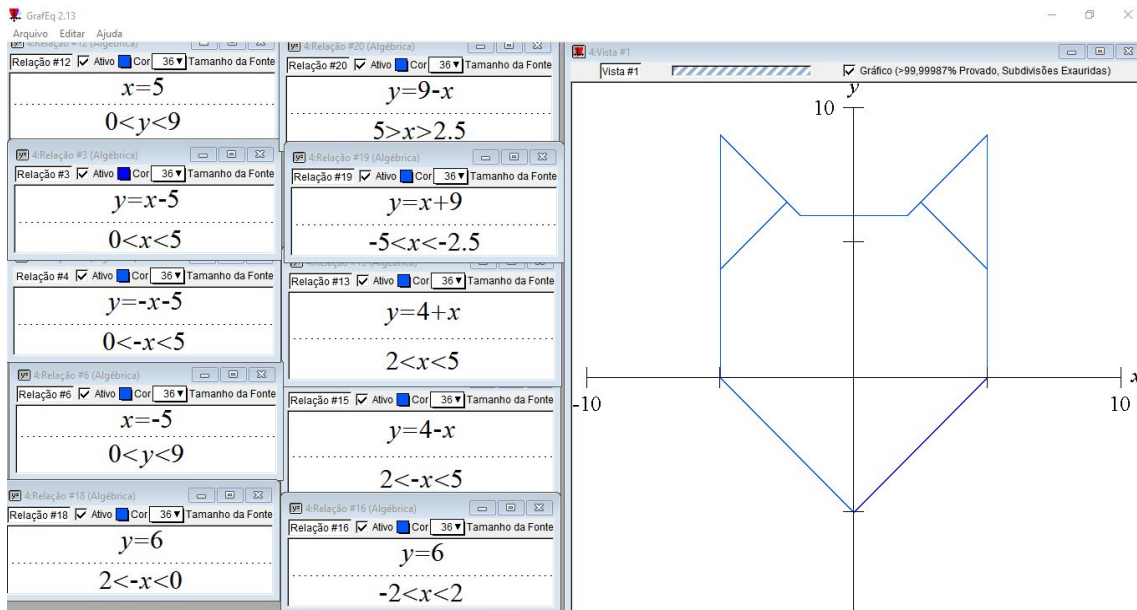
Reprodução 3



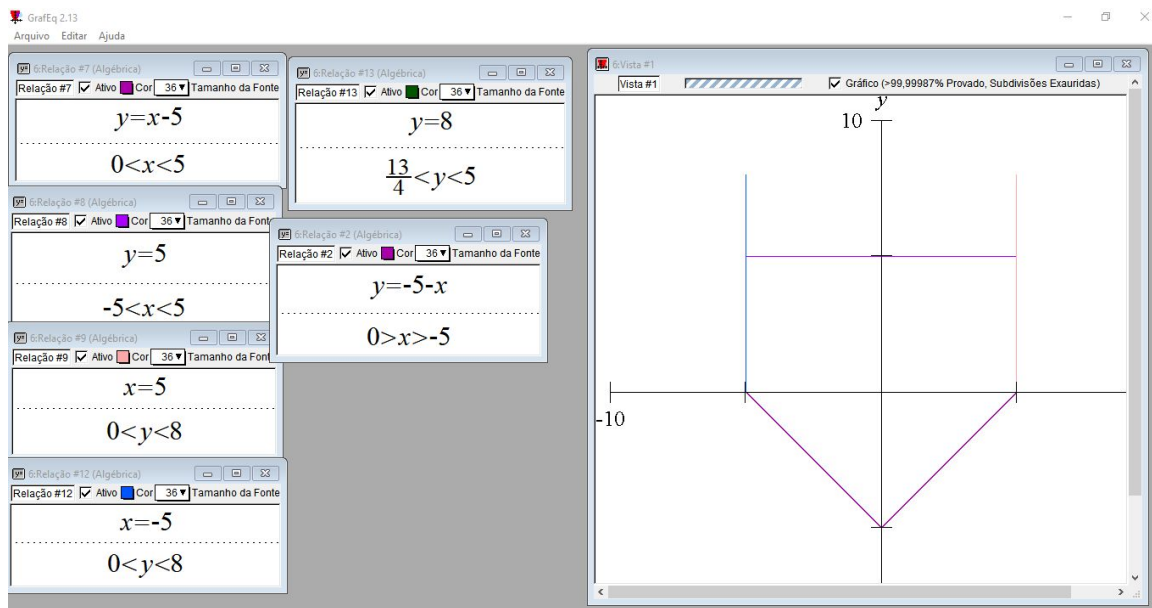
Reprodução 4



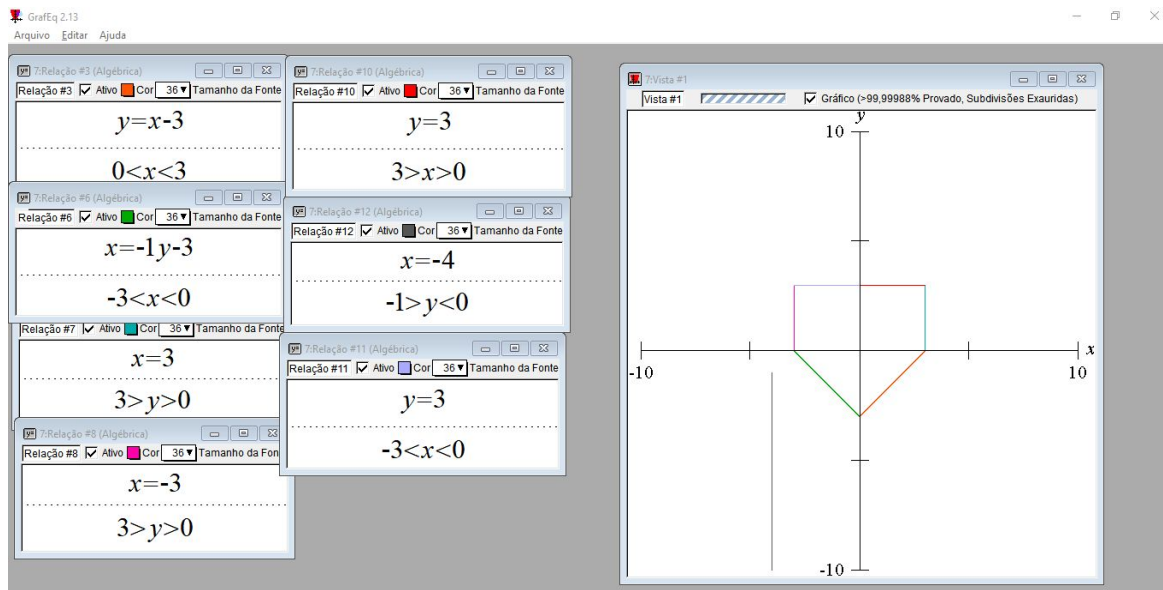
Reprodução 5



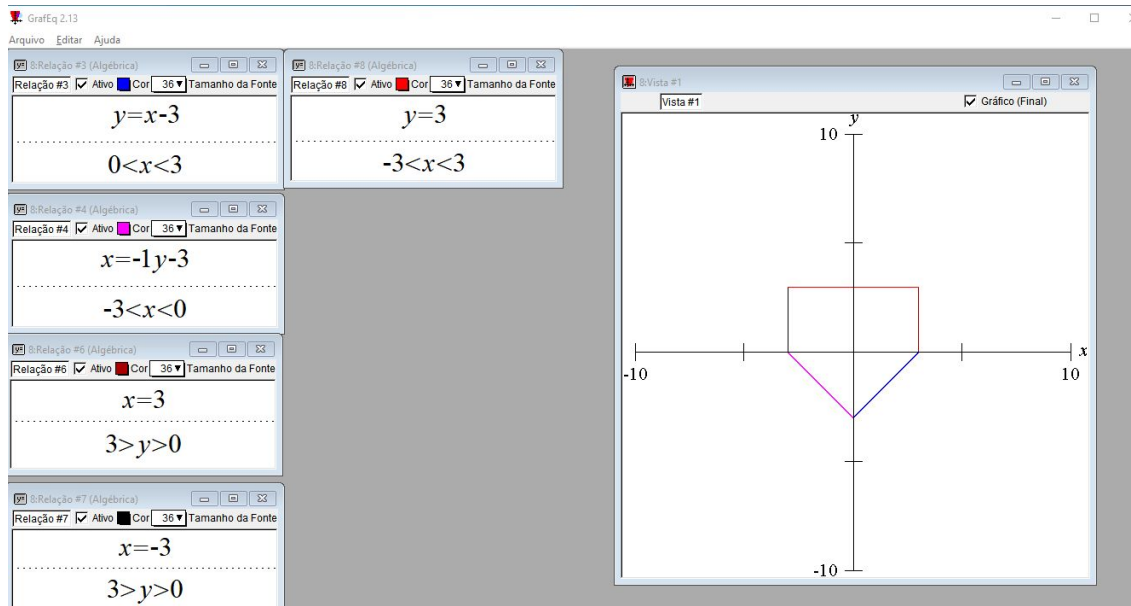
Reprodução 6



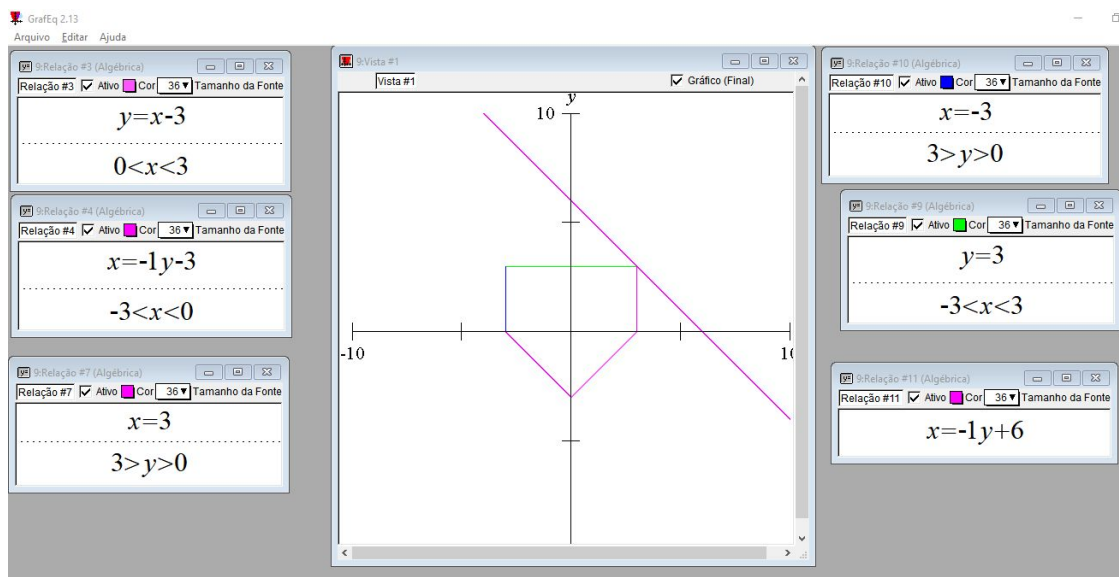
Reprodução 7



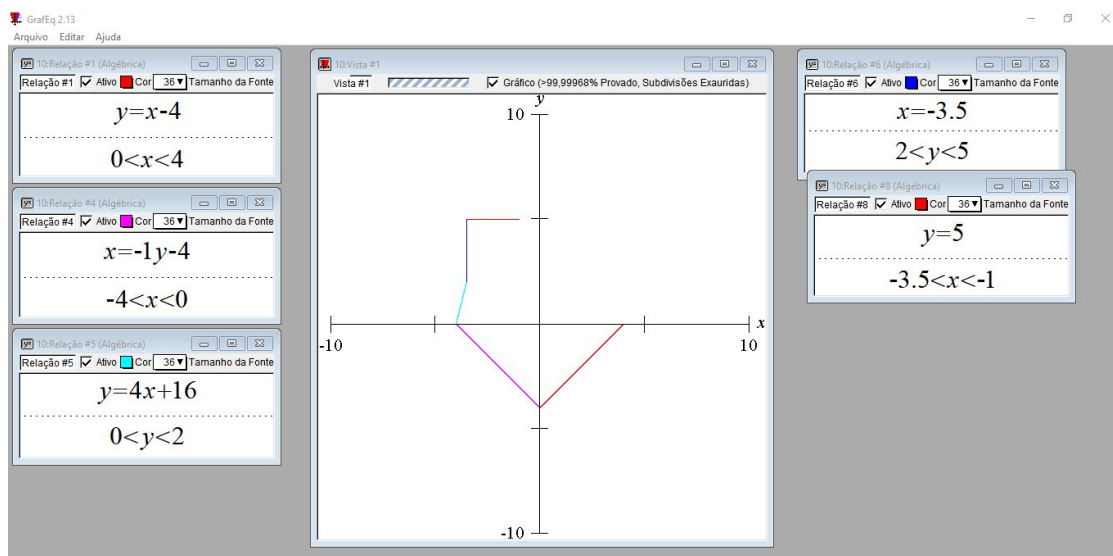
Reprodução 8



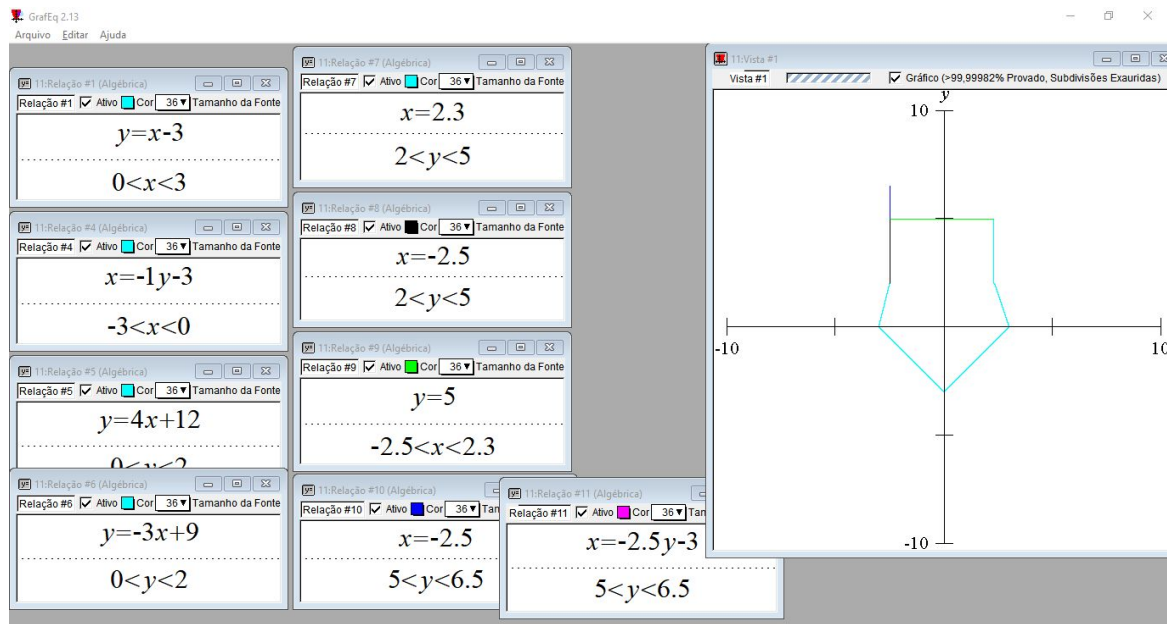
Reprodução 9



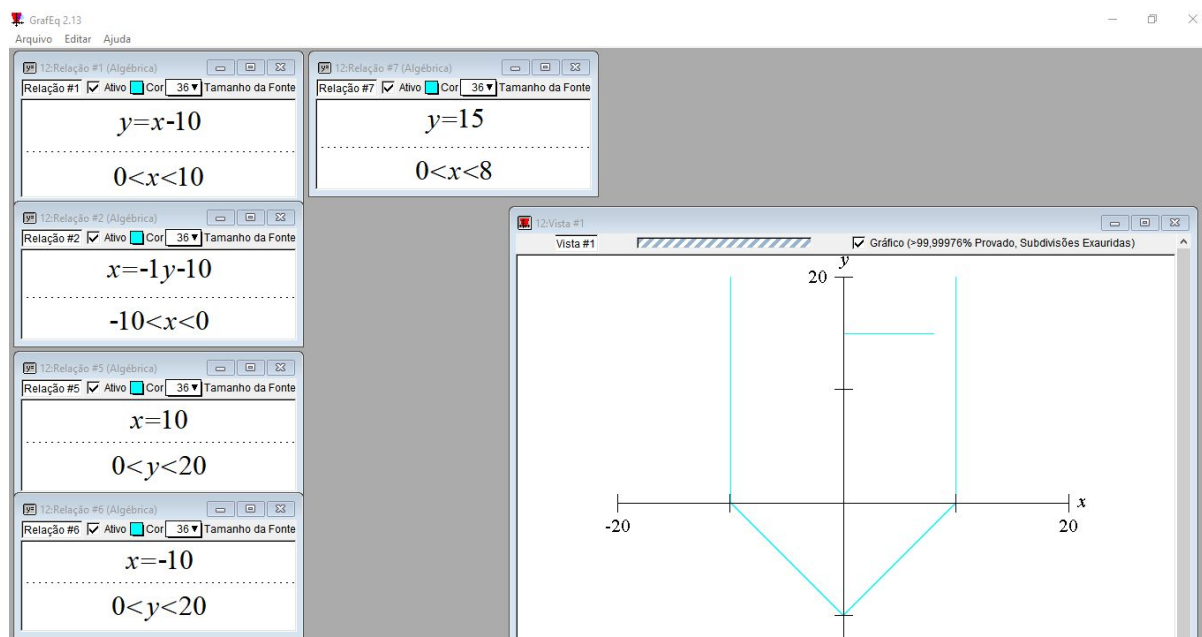
Reprodução 10



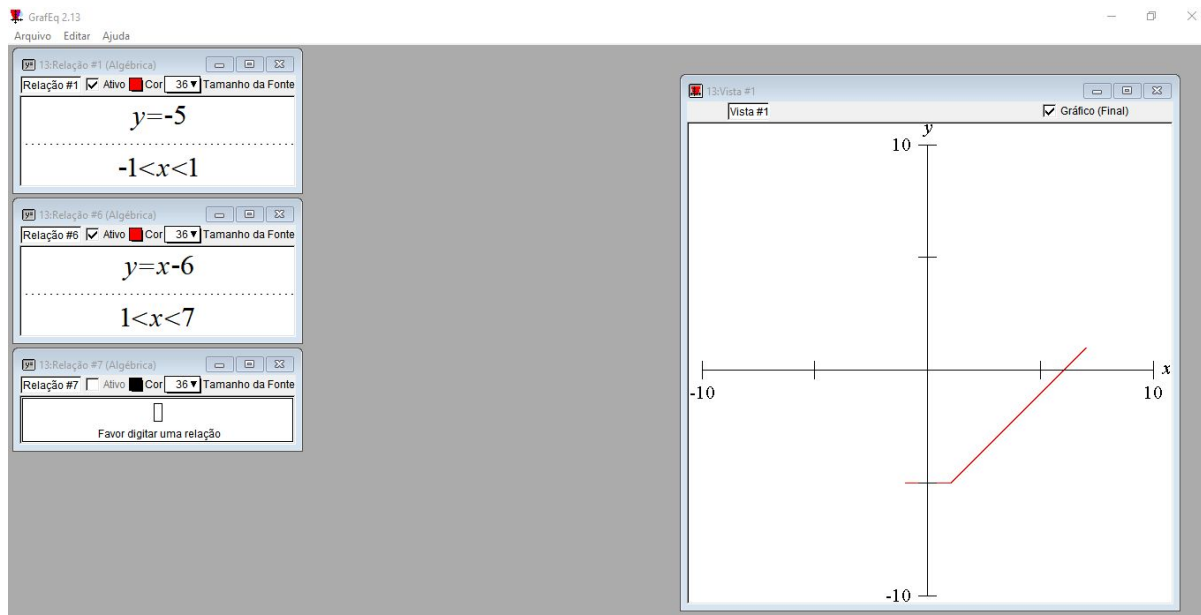
Reprodução 11



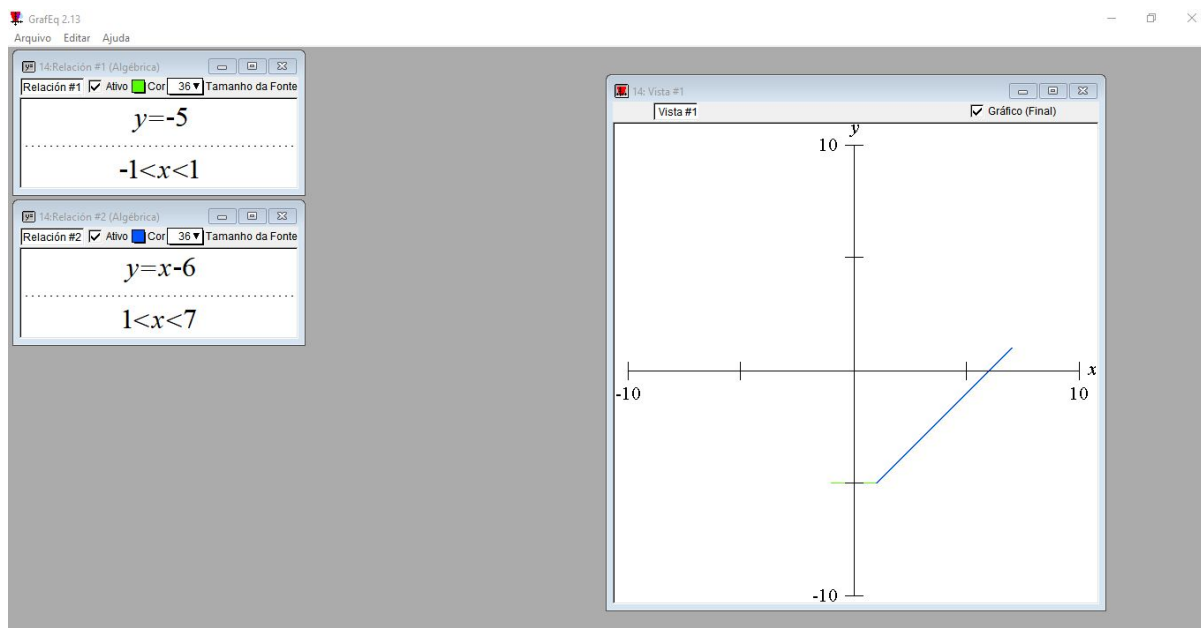
Reprodução 12



Reprodução 13



Reprodução 14



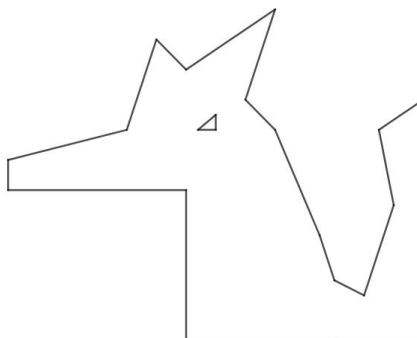
Apêndice E - Materiais construídos para a sequência didática

Neste apêndice estão os materiais digitais construídos para a segunda e terceira etapa, constituídos pelas fotos das decorações selecionadas, as representações construídas digitalmente e as listas de pontos. Para a terceira etapa, é possível também apenas indicar o site para os alunos acessarem, mas, como o acesso a internet era instável no instituto, separei as fotos previamente. O download do software *GrafEq* pode ser realizado no site <http://www.peda.com/grafeq/>. O Poligon, empresa que faz as decorações, pode ser encontrada nos seguintes sites <https://www.facebook.com/drewnianyapoligon>, https://www.instagram.com/poligon_/ e <https://www.etsy.com/shop/POLIGON>.

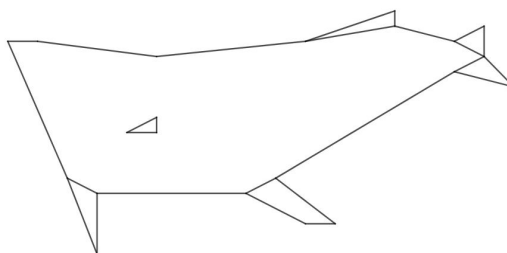
Segunda Etapa

Decorações em madeira e sua representação digital.

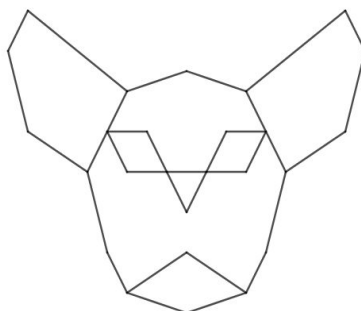
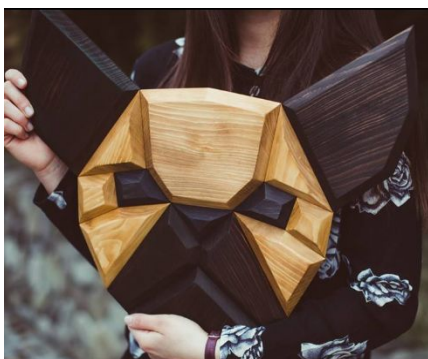
Raposa



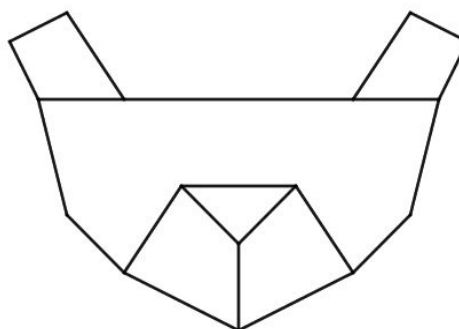
Baleia



Cachorro 1



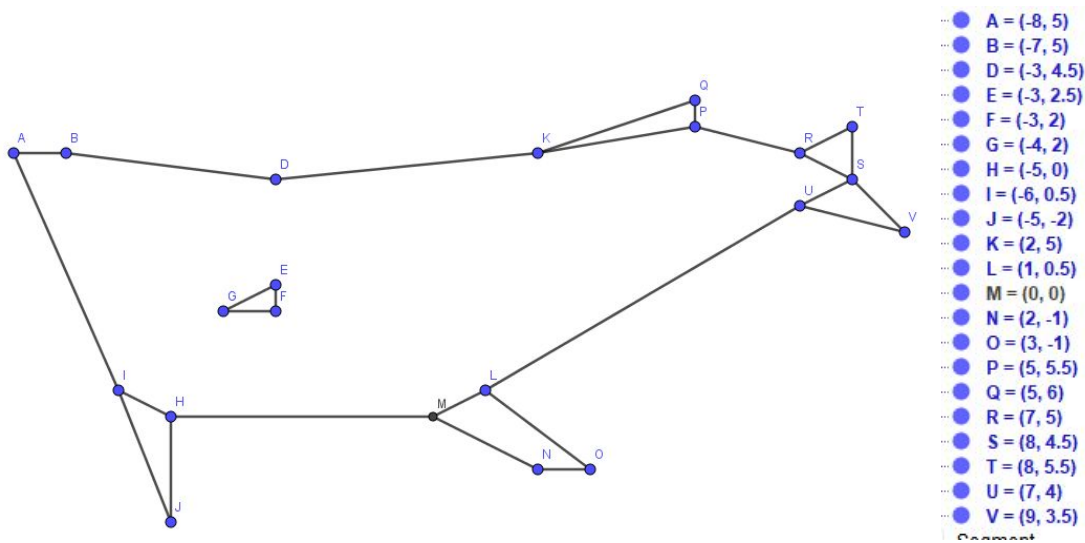
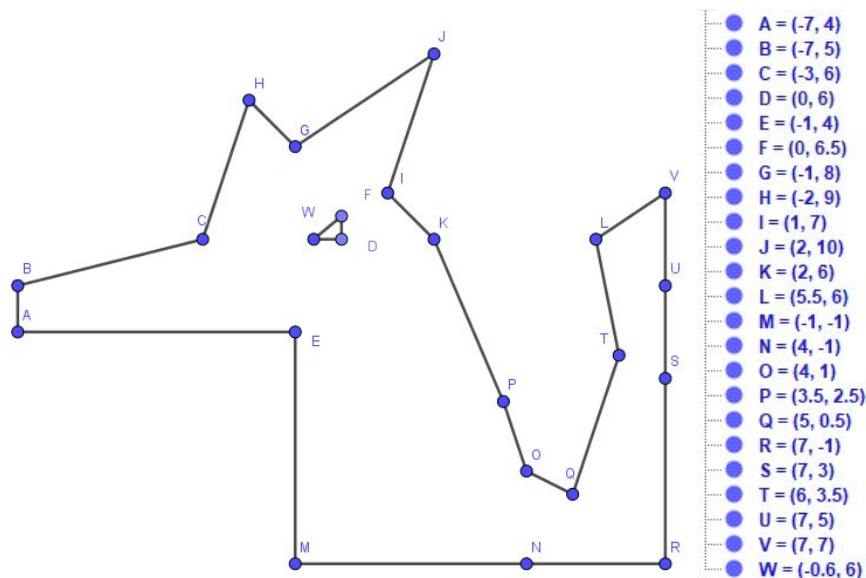
Cachorro 2

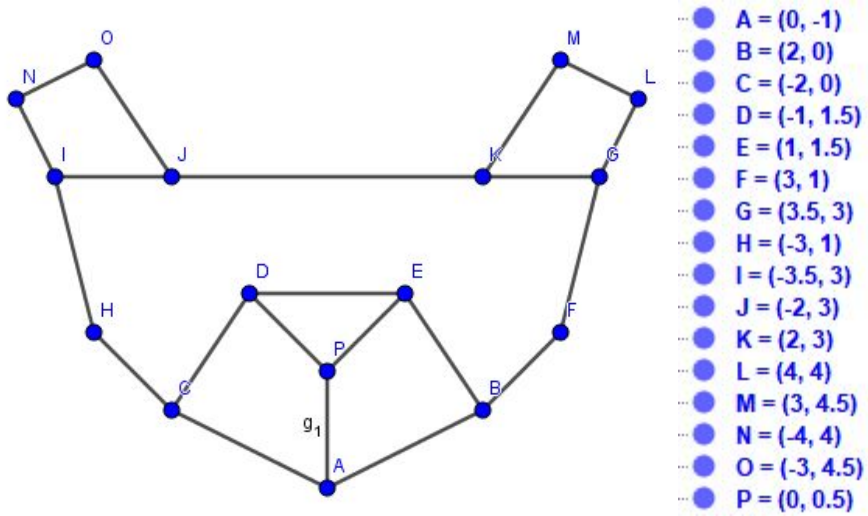
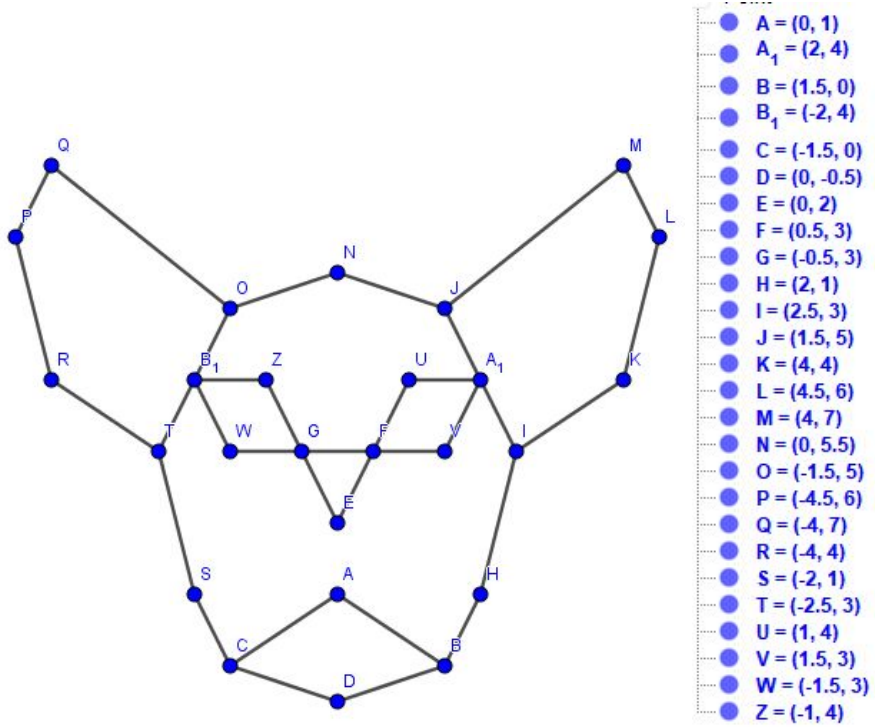


Qual o seu favorito?

Escolha uma das decorações e copie sua representação no *GrafEq*. Para isso, utilize as listas de pontos nas páginas seguintes.

Cada uma das representações apresentadas em cima é apresentada detalhadamente abaixo, onde é possível observar as coordenadas de cada vértice dos segmentos que constituem as representações.





Terceira Etapa

Decorações construídas por Tomasz Czurka e sua namorada. São vendidas na plataforma online Esty, no seguinte link <https://www.etsy.com/fr/shop/POLIGON>





Qual tu gostou mais?

Por meio de funções afim, faça sua réplica de alguma decoração apresentada acima no *GrafEq*.