UFRGS
EDITORA

Pré-Cálculo

Claus Ivo Doering
Liana Beatriz Costi Nácul
Luisa Rodríguez Doering
Organizadores

Terceira Edição

SÉRIE GRADUAÇÃO

Pré-Cálculo

UFRGS
EDITORA

Pré-Cálculo

Claus Ivo Doering
Liana Beatriz Costi Nácul
Luisa Rodríguez Doering
Organizadores

Terceira Edição

SÉRIE GRADUAÇÃO

1ª edição: 2012

Projeto Gráfico: Carla M. Luzzatto
Revisão e Editoração eletrônica: Claus Ivo Doering

Os autores são professores efetivos do Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS, com experiência no ensino das disciplinas de Cálculo oferecidas pelo Departamento. Todos têm se dedicado aos cursos de Pré-Cálculo da UFRGS.

P922 Pré-cálculo / organizado por Claus Ivo Doering, Liana Beatriz Costi Nácul [e] Luisa Rodríguez Doering.– 3. ed. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012.
140 p. : il. ; 21x25cm

(Série Graduação)

Reimpressão 2018

Inclui respostas selecionadas.

Inclui índice remissivo.

Inclui figuras, gráficos e quadros.

1. Matemática. 2. Cálculo – Pré-cálculo. 3. Álgebra elementar. 4. Funções reais. 5. Geometria analítica. 6. Polinômios. 7. Trigonometria. I. Doering, Claus Ivo. II. Nácul, Liana Beatriz Costi. III. Doering, Luisa Rodríguez Doering.

CDU 517.3

CIP-Brasil. Dados Internacionais de Catalogação na Publicação.
(Jaqueline Trombin – Bibliotecária responsável CRB10/979)

ISBN 978-85-386-0182-1

SUMÁRIO

Prefácio

O Curso de Pré-Cálculo é uma das ações do Programa Pró-Cálculo da UFRGS, que abriga diversas atividades oferecidas pelo Departamento de Matemática aos alunos das disciplinas de Cálculo pelo Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática. Esse programa oferece também ações de cunho exploratório, que visam proporcionar um contato com assuntos avançados que não são desenvolvidos usualmente em sala de aula, ações terapêuticas, dirigidas aos alunos com mais de uma reprovação na disciplina, que buscam resgatar seu interesse e proporcionar uma oportunidade mais efetiva de superação das dificuldades, e ações diagnósticas, que pretendem construir um conhecimento sistematizado sobre as necessidades e dificuldades dos alunos, visando o aprimoramento das abordagens no ensino do Cálculo.

O Curso de Pré-Cálculo foi ministrado pela primeira vez na UFRGS no segundo semestre de 2002. O consenso entre os vários professores que ministravam as diversas disciplinas de Cálculo oferecidas pelo Departamento de Matemática Pura e Aplicada era de que, no Ensino Médio, a maioria dos estudantes tenta resolver os exercícios com o objetivo primordial de concluir a penosa tarefa o mais rapidamente possível e encontrar a resposta certa, em geral sem o cuidado de considerar as situações em que valem as propriedades e as condições para que se possam aplicar determinadas regras e sem preocupar-se com a apresentação clara do raciocínio desenvolvido para resolver os problemas propostos.

Essa visão motivou a criação do Curso de Pré-Cálculo, cujo principal objetivo é propiciar uma experiência que facilite a transição da Matemática do Ensino Médio para a de nível superior, em especial o Cálculo, pelo incentivo à compreensão dos conteúdos e pelo estímulo à expressão escrita dos argumentos e raciocínios utilizados na solução dos problemas. Desta forma, se busca fortalecer a autonomia e a autocrítica, tanto no estudo como na superação das dificuldades.

Desde então, tem sido oferecido com 30 horas-aula, antes do início de cada semestre letivo, para os calouros de todos os cursos da Universidade, cuja grade curricular contenha alguma disciplina de Cálculo no primeiro semestre. Desde sua implantação, o Curso de Pré-Cálculo já sofreu várias modificações, algumas na metodologia de trabalho desenvolvida em sala de aula, outras na bibliografia utilizada.

O presente livro, fruto do trabalho de vários professores que vêm lecionando os cursos de Pré-Cálculo, visa atender aos objetivos do Curso de Pré-Cálculo, acima expostos, e é a consolidação de apostilas anteriormente elaboradas para esse curso. Em seus capítulos, escritos por diferentes professores em uma linguagem de transição entre a linguagem formal dos livros de Cálculo e a dos livros de Matemática do Ensino Médio, sempre que possível, a teoria é apresentada através de exemplos motivadores.

Finalmente, uma recomendação especial aos alunos que farão uso deste texto. Como se deve ler um texto de Matemática? Devagar e com cuidado! Com cuidado e atenção suficientes para compreender o texto e preencher as lacunas que certamente existem, fazendo uso de uma folha de rascunho ou, melhor ainda, das margens deste livro, para enfatizar pontos, levantar questões, fazer pequenos cálculos e corrigir erros de impressão. Falhas podem ser encaminhadas aos autores através do endereço eletrônico `mat-calculo@ufrgs.br`.

Bom curso.

Outubro de 2007

Os Organizadores

Prefácio da Terceira Edição

Depois de três anos, durante os quais foram oferecidas seis edições do Curso de Pré-Cálculo da UFRGS utilizando a segunda edição deste livro como texto, estamos apresentando esta terceira edição. Durante esse período foram apresentadas algumas sugestões e críticas, vindas de alunos, ex-alunos, monitores e professores envolvidos com o curso, aos quais estendemos nossos agradecimentos. Também nos foram encaminhadas várias correções, que foram sendo incorporadas numa errata publicada na página do Pré-Cálculo, em `www.ufrgs.br/procalculo/ErrataSegundaEdicao.pdf`.

Nesta terceira edição incorporamos todas essas sugestões e correções, mas possivelmente ainda haverá falhas e, acima de tudo, possibilidades de melhoria. Continuamos abertos para receber sugestões, críticas e informações sobre erros de impressão através do endereço eletrônico `mat-calculo@ufrgs.br`.

Bom curso.

Outubro de 2012

Os Organizadores

Geometria Analítica e Funções Reais

Alvino Alves Sant'Ana
Liana Beatriz Costi Nácul
Marilaine de Fraga Sant'Ana
Flávia Malta Branco
Maria Paula Gonçalves Fachin
Vânia Kraemer

A necessidade de apresentar modelos que permitam explicar e compreender o mundo físico tem sido um dos grandes fatores motivadores do desenvolvimento da Matemática. Números foram criados para contar e medir, ao passo que desigualdades foram introduzidas para comparar grandezas e funções foram inventadas para expressar dependência entre variáveis.

Inicialmente veremos algumas propriedades dos números reais e em seguida introduzimos conceitos fundamentais da Geometria Analítica. Atualmente, o uso desses conceitos é bastante comum. Entretanto, na época em que a Geometria Analítica estava sendo desenvolvida, a Geometria e a Álgebra – os dois grandes ramos da Matemática – eram praticamente independentes um do outro. As retas e os círculos pertenciam à Geometria, enquanto que as equações à Álgebra. Usar coordenadas para expressar os pontos de um círculo faz parte do que hoje é conhecido como Geometria Analítica. Nas últimas seções apresentamos as funções reais.

1.1 – NÚMEROS REAIS

Os números reais, suas propriedades e relações são conceitos básicos para o Cálculo. Os reais mais conhecidos são $\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, que formam o conjunto dos *números inteiros*, representado por $\mathbb{Z}$.

Considerando todas as frações $\dfrac{m}{n}$, com m e n números inteiros e $n \neq 0$, com a igualdade definida por $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ se, e somente se, $ad = bc$, obtemos o conjunto dos *números racionais*, representado por $\mathbb{Q}$. Note que duas frações com o mesmo denominador serão iguais se, e somente se, tiverem o mesmo numerador, isto é, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{b}$ se, e somente se, $a = c$. Também é verdade que são iguais as frações $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{ak}{bk}$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e $k \neq 0$. No entanto, os números racionais $\dfrac{3}{6}$ e $\dfrac{4}{8}$ são iguais, uma vez que $3 \times 8 = 24 = 6 \times 4$, mas não existe um número inteiro não nulo k para o qual valha $3 \times k = 4$ e $6 \times k = 8$.

Cada número racional $\dfrac{m}{n}$ possui, também, uma representação decimal. Para obtê-la, basta efetuar a divisão de m por n. Por exemplo,

$$\frac{1}{4} = 0{,}25, \qquad \frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857} \qquad \text{e} \qquad \frac{5}{12} = 0{,}41\overline{6},$$

onde a barra acima dos algarismos indica que aquele grupo de algarismos repete-se indefinidamente. Dizemos, nesse caso, que se trata de uma *dízima periódica.*

Reciprocamente, se x for uma dízima periódica, ou possuir uma representação decimal finita, x será um número racional.

Os exemplos a seguir podem ser generalizados para dízimas quaisquer e permitem entender como obter uma fração a partir de uma representação decimal.

Exemplo 1.1. $0{,}25 = \dfrac{2}{10} + \dfrac{5}{100} = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$.

Exemplo 1.2. Como $x = 0{,}\overline{142857}$ possui um período de 6 dígitos, multiplicamos por 10^6, para obter $10^6x = 142857{,}\overline{142857}$. Assim, $10^6x - x = 142857$, de modo que $(10^6 - 1)x = 142857$ e resulta

$$x = \frac{142857}{10^6 - 1} = \frac{142857}{999999} = \frac{47619}{333333} = \frac{15873}{111111} = \frac{1443}{10101} = \frac{111}{777} = \frac{1}{7}.$$

Regra Geral. $x = 0{,}\overline{c_1c_2\ldots c_t} = \dfrac{c_1c_2\ldots c_t}{99\ldots 9}$, onde o denominador tem tantos dígitos iguais a 9 quantos forem os algarismos do período (t, nesse caso).

Exemplo 1.3. Como os dois primeiros dígitos da parte decimal de $x = 0{,}41\overline{6}$ não fazem parte do período, multiplicamos x por 10^2 para obter $10^2x = 41{,}\overline{6} = 41 +\ 0{,}\overline{6} = 41 + \dfrac{6}{9} = 41 + \dfrac{2}{3}$. Logo, $100x = \dfrac{41 \times 3 + 2}{3}$ e, portanto, $x = \dfrac{125}{300} = \dfrac{5}{12}$.

Os números cuja expansão decimal não é finita e nem periódica são denominados *números irracionais.* Por exemplo, o número $2{,}101001000100001\ldots$, onde entendemos que em cada grupo de zeros aparece um zero a mais que no grupo de zeros imediatamente anterior, é um irracional, pois não é uma dízima finita nem periódica. Por razões análogas, também é irracional o número $34{,}67553737737773777773\ldots$.

Observamos que a justificativa de que um número x seja irracional não pode ser feita apresentando algumas (mesmo que muitas!) casas decimais de sua representação decimal.

Apenas para exemplificar, justificaremos a seguir que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Para isso, suporemos que $\sqrt{2}$ seja um número racional e então mostraremos que essa suposição nos levará a uma contradição; portanto, não poderá ser verdadeira.

Suponhamos que existam números inteiros m e n, com $n \neq 0$, tais que $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$.

É claro que podemos supor também que não existam fatores comuns entre m e n: se existissem, simplificaríamos a fração! Decorre, então, que $\sqrt{2}\,n = m$ e, elevando ao quadrado, obtemos $2n^2 = m^2$. Logo, m^2 é um número par e, consequentemente, m também é um número par, ou seja, existe um número inteiro z satisfazendo $m = 2z$.

Segue que $2n^2 = m^2 = (2z)^2 = 4z^2$. Assim, $n^2 = 2z^2$ e, como vimos acima, daí resulta que n é um número par.

Portanto, o número 2 é um fator comum de m e de n, o que é uma contradição, pois tomamos m e n sem fatores comuns. O que nos levou à essa contradição foi supormos que $\sqrt{2}$ seria um número racional. Assim, esta hipótese não pode ser verdadeira e concluímos que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

A união dos números racionais com os números irracionais forma o conjunto dos *números reais*, que representamos por $\mathbb{R}$.

Proposição 1.1. *Valem as afirmações seguintes.*

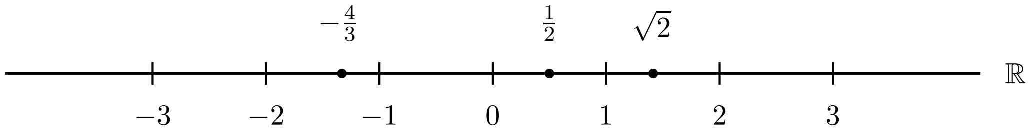
a) O resultado da adição de dois números racionais é um número racional.

b) O resultado da adição de um número racional com um número irracional é um número irracional.

c) O resultado da multiplicação de dois números racionais é um número racional.

d) O resultado da multiplicação de um número racional não nulo com um número irracional é um número irracional.

Podemos obter uma correspondência entre os números reais e os pontos de uma reta. Para tanto, escolhemos um ponto arbitrário da reta, que denominamos *origem*, e uma unidade de medida. A origem fica em correspondência com o número 0 (zero). Na semirreta da direita representamos os números reais positivos e, na outra semirreta, os números reais negativos, conforme a figura abaixo. Essa reta, provida da origem e da correspondência com os números reais, costuma ser denominada *reta real*, sendo denotada, também, por $\mathbb{R}$.



Em $\mathbb{R}$, definimos uma relação de ordem da seguinte forma: para quaisquer números reais a e b, dizemos que *a é menor do que b*, e denotamos isso por $a < b$, se, e somente se, $b - a$ for um número positivo; nesse caso, dizemos também que *b é maior do que a*, o que denotamos por $b > a$. Na correspondência com a reta real, $a < b$ significa que a fica à esquerda de b.

Além disso, utilizamos a notação $a \leq b$, que significa que $a < b$ ou $a = b$. De modo análogo, $b \geq a$ significa $b > a$ ou $b = a$. Dados quaisquer números reais a, b e c, a expressão $a < b < c$ significa que $a < b$ e $b < c$.

É possível provar que entre dois números reais distintos quaisquer sempre existem números racionais e, também, números irracionais. Por exemplo, dados os números reais $a = 0{,}123\overline{12}$ e $b = 0{,}123\overline{4}$, temos $a < b$, portanto, é possível encontrar um número racional r e um irracional t para os quais vale que $a < r < t < b$. De fato, escolhendo o racional $r = 0{,}123\overline{432}$ e o irracional $t = 0{,}12344393393339\ldots$, a desigualdade é válida.

Algumas propriedades de desigualdades são análogas a propriedades de igualdades, por exemplo, as seguintes.

Proposição 1.2. *Valem as afirmações seguintes.*

a) Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$.
b) Se $a < b$, então $a + c < b + c$ e $a - c < b - c$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$.
c) Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$, para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Entretanto, devemos prestar atenção ao multiplicarmos os dois lados de uma desigualdade por uma constante não nula. Temos duas situações distintas, uma para constantes positivas e outra para constantes negativas, conforme a proposição seguinte.

Proposição 1.3. *Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, de $a < b$ decorre*

$$ac < bc \text{ se } c > 0 \qquad \text{e} \qquad ac > bc \text{ se } c < 0.$$

Assim, uma desigualdade troca de sentido quando multiplicamos os dois lados por uma constante negativa.

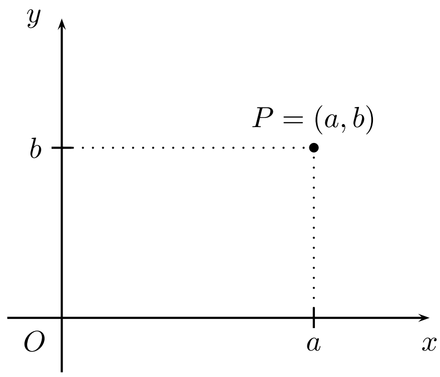
A relação de ordem em $\mathbb{R}$ nos permite definir intervalos, o que fazemos a seguir. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, temos os intervalos conforme o quadro a seguir.

Notação simbólica	Notação de conjuntos	Representação geométrica	Classificação
(a, b)	$\{x \in \mathbb{R}\,;\, a < x < b\}$		finito: aberto
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R}\,;\, a \leq x \leq b\}$		finito: fechado
$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R}\,;\, a \leq x < b\}$		finito: semiaberto

Notação simbólica	Notação de conjuntos	Representação geométrica	Classificação
$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R}\,;\, a < x \leq b\}$		finito: semiaberto
$(-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R}\,;\, x \leq b\}$		infinito: fechado
$(-\infty, b)$	$\{x \in \mathbb{R}\,;\, x < b\}$		infinito: aberto
$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R}\,;\, a \leq x\}$		infinito: fechado
$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R}\,;\, a < x\}$		infinito: aberto
$(-\infty, +\infty)$	$\mathbb{R}$		infinito: aberto

Da mesma forma que representamos os números reais por meio de pontos em uma reta, podemos representar pares ordenados de números reais por meio de pontos em um plano.

Para tanto, construímos um sistema de coordenadas para o plano, denominado *sistema de coordenadas retangulares*, desenhando duas retas perpendiculares, uma horizontal e outra vertical, que se cortam em seus pontos marcados com zero. Esse ponto é denominado a *origem* do sistema de coordenadas e é denotado por O. À reta horizontal damos o nome de *eixo horizontal*, *eixo x* ou *eixo das abscissas* e a reta vertical recebe o nome de *eixo vertical*, *eixo y* ou *eixo das ordenadas*.

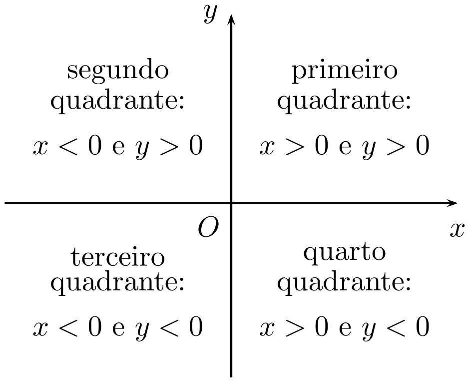


As coordenadas são identificadas por pontos marcados nesses dois eixos, mantendo-se em cada eixo uma mesma medida de distância entre os pontos identificados com os números inteiros. O *semieixo positivo x* está à direita da origem e o *semieixo negativo x* à esquerda, enquanto que o *semieixo positivo y* está acima da origem e o *semieixo negativo y* abaixo.

Consideremos, agora, um ponto P qualquer do plano. Desenhamos um segmento de reta, paralelo ao eixo y, de P até o eixo x, identificando esse ponto de interseção por a. Analogamente, desenhamos um outro segmento de reta, dessa vez paralelo ao eixo x, de P até o eixo y, identificando por b esse ponto de interseção. Os números a e b assim determinados são denominados a *coordenada* x, ou a *abscissa* de P e a *coordenada* y, ou *ordenada* de P. Também dizemos que P tem coordenadas (a, b), como na figura da página anterior. Note que o ponto $(0, 0)$ corresponde à origem O, que os pontos do tipo $(x, 0)$ estão no eixo x e que os pontos do tipo $(0, y)$ estão no eixo y.

Essa correspondência entre o ponto P e suas coordenadas é uma correspondência biunívoca entre todos os pontos do plano e todos os pares ordenados de números reais. De fato, para cada ponto P do plano temos um único par ordenado que representa suas coordenadas e, da mesma forma, a cada par ordenado de números reais podemos associar um único ponto P com tais coordenadas.

Os dois *eixos coordenados*, ou seja, o eixo x e eixo y, dividem o plano em quatro quadrantes, cuja caracterização é dada pelos sinais das coordenadas.



O plano, munido desse sistema de coordenadas, costuma ser denominado *plano coordenado*, *plano xy* ou, ainda, *plano cartesiano*.

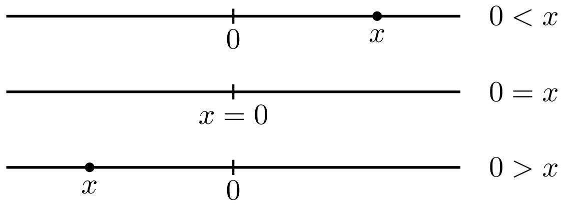
1.2 – VALOR ABSOLUTO

Definimos o *valor absoluto* ou *módulo* de x, que denotamos por $|x|$, da seguinte maneira:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

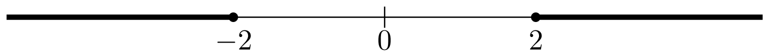
Observe que, se quisermos obter, para cada número real x, a distância entre x e a origem, devemos considerar os casos $x > 0, x = 0$ e $x < 0$. Nos dois primeiros casos, dizemos que a distância entre 0 e x é o próprio x. No terceiro caso, a distância é $-x$. Portanto, geometricamente, $|x|$ representa a distância entre 0 e x.

Vejamos alguns resultados que decorrem dessa interpretação geométrica do valor absoluto.



Exemplo 1.4. Determinemos todos os números reais x para os quais $|x| \geq 2$.

Para isso, marcamos na reta real os pontos 2 e -2, para os quais a distância até a origem é 2, ficando, então, fácil verificar que, para a distância entre x e 0 ser maior que 2, x deve estar à esquerda de -2 ou à direita de 2, como indica a figura.

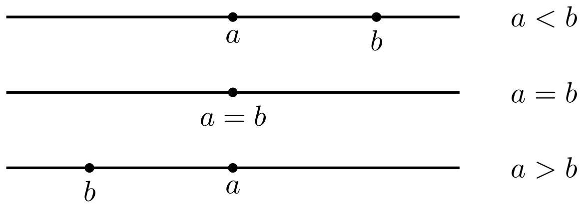


Portanto, $\{x \in \mathbb{R}\,;\,|\,x\,| \geq 2\} = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. Consequentemente, se quisermos determinar todos os valores reais de x para os quais $|\,x\,| < 2$, teremos como resposta o intervalo complementar $(-2, 2)$.

Em geral, dado $a > 0$, de maneira análoga ao que acabamos de fazer para $a = 2$, obtemos

$$\{x \in \mathbb{R}\,;\,|\,x\,| \geq a\} = (-\infty, -a] \cup [a, +\infty) \quad \text{e} \quad \{x \in \mathbb{R}\,;\,|\,x\,| < a\} = (-a, a). \qquad (1.1)$$

Para encontrarmos a distância entre dois números reais a e b quaisquer, devemos analisar três situações possíveis para pontos a e b arbitrários da reta real, a saber, $a < b, a = b$ ou $a > b$.



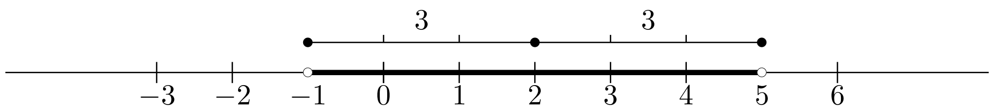
No primeiro caso, como $b - a > 0$, temos $|\,b - a\,| = b - a$; no segundo caso, como $b - a = 0$, temos $|\,b - a\,| = 0 = b - a$; finalmente, no terceiro caso, como $b - a < 0$, temos $|\,b - a\,| = -(b - a) = a - b$. Assim, em qualquer caso, temos

$$|\,b - a\,| = \text{distância entre } a \text{ e } b.$$

Exemplo 1.5. Escrevamos o conjunto $\{t \in \mathbb{R}\,; |\, t-2\,| < 3\}$ como um intervalo, ou união de intervalos.

Pela interpretação acima, esse conjunto consiste em todos números reais t para os quais a distância ao número real 2 é menor do que 3.

Considerando uma régua de comprimento 3, com uma das extremidades fixada em $a = 2$, os números reais t que são atingidos com essa régua estão a uma distância menor do que o comprimento da régua, ou seja, menor do que 3.



Obtemos, assim, a resposta $\{t \in \mathbb{R}\,; |\,t-2\,| < 3\} = (-1, 5)$.

Como poderíamos obter esse resultado algebricamente? Basta usarmos (1.1) com x substituído por $t - 2$, como segue.

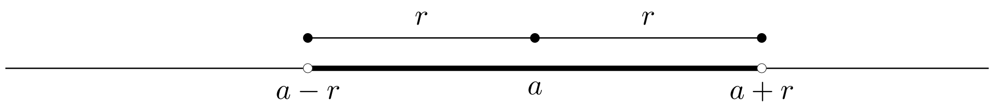
$$|\,t-2\,| < 3 \iff -3 < t-2 < 3 \iff -1 < t < 5.$$

Portanto, novamente concluímos que o conjunto solução é o intervalo $(-1, 5)$.

Generalizando o que foi feito no exemplo acima, vemos que, fixado um número real a e dado $r > 0$, os reais t que estão a uma distância de a menor do que r formam o intervalo aberto $(a-r, a+r)$. Assim,

$$\{t \in \mathbb{R}\,; |\,t-a\,| < r\} = (a-r, a+r),$$

como se observa na figura.



Terminamos esta seção relacionando o valor absoluto com a raiz quadrada de um número real.

Para um número positivo arbitrário a, o símbolo $\sqrt{a}$ representa o número real *positivo* cujo quadrado é a, ou seja,

$$\sqrt{a} = b \quad \iff \quad b \geq 0 \quad \text{e} \quad b^2 = a.$$

Por definição, não apenas o número a deverá ser positivo, para que possamos calcular sua raiz quadrada, mas também o resultado obtido ao calcularmos tal raiz deverá ser positivo.

Observações:

a) O resultado obtido ao calcularmos uma raiz quadrada será sempre um único número real. Assim, a afirmação $\sqrt{4} = \pm 2$ não está correta! O correto é afirmarmos que $\sqrt{4} = 2$.

b) As igualdades $x^2 = 4$ e $x = \sqrt{4}$ não são equivalentes, pois, a primeira é satisfeita pelos números reais 2 e -2 e a segunda é satisfeita apenas pelo número real 2.

Para um número real arbitrário x, teremos sempre que $x^2 \geq 0$, portanto, faz sentido calcularmos $\sqrt{x^2}$. O que obteremos nesse caso?

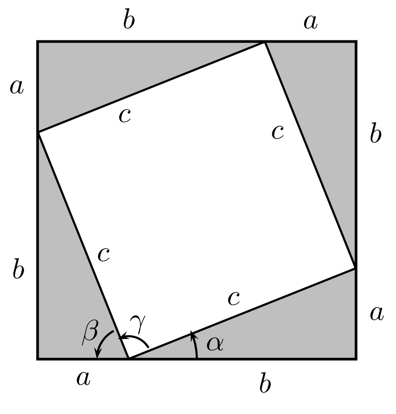
Sabemos que os números reais x e $-x$, são os únicos que, quando elevados ao quadrado, resultarão em x^2. Assim, ambos satisfazem *uma* das condições exigidas na definição dada acima. A raiz quadrada procurada será, então, o próprio x, se $x \geq 0$, ou $-x$, se $x < 0$. Portanto, pela definição de valor absoluto, podemos afirmar que

$$\sqrt{x^2} = |\,x\,|\,.$$

1.3 – DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS DO PLANO

Inicialmente provaremos o Teorema de Pitágoras sem fazer uso de coordenadas.

Teorema 1.4 (Teorma de Pitágoras)**.** *Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.*



Demonstração. Considere um triângulo retângulo cujos catetos medem a e b e a hipotenusa mede c. Vamos denotar por α o ângulo oposto ao cateto que mede a e por β o ângulo oposto ao cateto b. Lembre que, por se tratar de um triângulo retângulo, temos $\alpha + \beta = 90°$. Agora forme um quadrado cujo lado mede $a + b$, dispondo quatro réplicas do triângulo nos cantos desse quadrado, como mostra a figura ao lado.

Observe que, assim, obtemos um quadrilátero de lados c. De fato, esse quadrilátero é um quadrado, pois, denotando por γ qualquer um de seus ângulos internos, vemos que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ e, portanto, γ é um ângulo reto. A área do quadrado maior é igual a quatro vezes a área do triângulo inicial mais a área do quadrado menor, ou seja,

$$(a+b)^2 = 4\frac{ab}{2} + c^2 \Longleftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = c^2,$$

demonstrando o Teorema de Pitágoras. $\square$

A fórmula da distância entre dois pontos do plano cartesiano é uma aplicação direta do Teorema de Pitágoras.

Vamos considerar dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ no plano xy. O segmento que une esses pontos e cujo comprimento, que será identificado por d, nos dá a distância entre eles, é a hipotenusa de um triângulo retângulo. De acordo com a posição dos pontos dados, os catetos desse triângulo medem $x_2 - x_1$ ou $x_1 - x_2$ e $y_2 - y_1$ ou $y_1 - y_2$. Ou, simplesmente, $|x_2 - x_1|$ e $|y_2 - y_1|$.

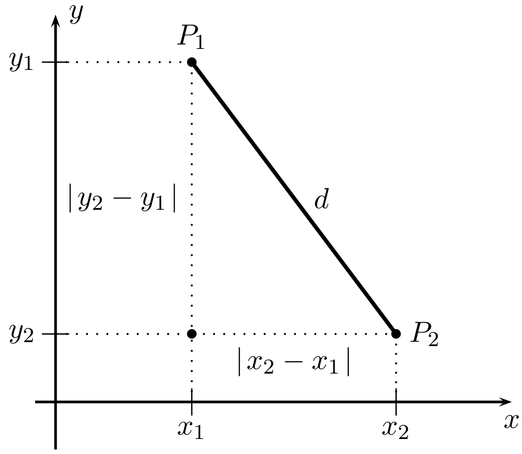
Observe que

$$|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$$

e

$$|y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2,$$

independentemente da posição ocupada pelos pontos P_1 e P_2 no plano xy. Assim, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos a fórmula da distância entre dois pontos, a saber,



$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \Longleftrightarrow d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

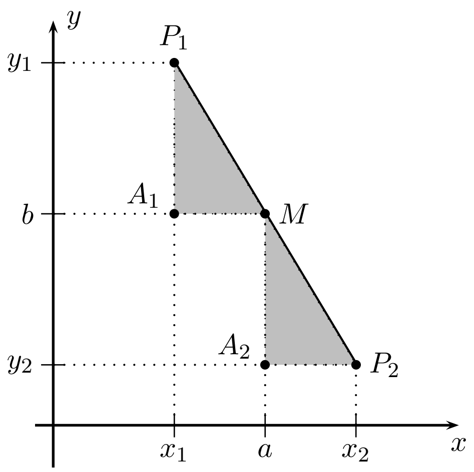
como ilustra a figura acima.

Dados dois pontos P_1 e P_2 no plano xy, pode-se perguntar quais são as coordenadas do ponto médio do segmento que os une. Primeiramente vamos considerar que esses pontos estão sobre o eixo x, isto é, $P_1 = (x_1, 0)$ e $P_2 = (x_2, 0)$, sendo $x_1 < x_2$. A metade desse segmento mede $\frac{1}{2}(x_2 - x_1)$ e, portanto, a coordenada x do ponto médio é dada por

$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(x_2 + x_1).$$

Se consideramos $x_2 < x_1$ também obtemos a mesma coordenada x para o ponto médio do segmento que une P_1 e P_2. Isso significa que, independentemente da posição desses pontos, a média aritmética de suas coordenadas define o ponto médio do segmento.

Consideremos, agora, dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ quaisquer do plano xy e seja $M = (a, b)$ o ponto médio do segmento definido por tais pontos. A partir de P_1, P_2 e M definimos os pontos $A_1 = (x_1, b)$ e $A_2 = (a, y_2)$, conforme figura.



Podemos verificar que o triângulo de vértices A_1, P_1 e M é semelhante ao triângulo de vértices A_2, M e P_2 e que, portanto, denotando por d a distância entre os pontos P_1 e P_2, temos

$$\frac{a - x_1}{d/2} = \frac{x_2 - a}{d/2} \iff \frac{2a}{d} = \frac{x_1 + x_2}{d}$$

$$\iff a = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

De forma análoga pode-se mostrar que

$$b = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Observe que a é o ponto médio de x_1 e x_2, no eixo x, e que b é o ponto médio de y_1 e y_2, no eixo y.

Assim, concluímos que o ponto médio $M = (a, b)$ do segmento de reta que une dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ do plano é dado por

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Exemplo 1.6. Calculemos a distância entre os pontos $P_1 = (-2, 3)$ e $P_2 = (2, 1)$, bem como as coordenadas do ponto médio do segmento de reta que une esses pontos.

Pelo visto, a distância entre esses dois pontos é dada por

$$d = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

e o ponto médio do segmento que une esses pontos é dado por

$$M = \left(\frac{-2 + 2}{2}, \frac{3 + 1}{2}\right) = (0, 2).$$

Faça um esboço no plano xy marcando esses pontos P_1 e P_2 e verifique, geometricamente, as coordenadas do ponto médio do segmento determinado por esses pontos.

A cada reta não vertical do plano está associado um número que especifica sua direção, denominado *coeficiente angular*, ou então, *inclinação*, *declividade*, ou ainda, *parâmetro angular* da reta. Esse número diz quantas unidades de crescimento (ou decaimento) vertical ocorrem quando fazemos uma variação de uma unidade na horizontal, da esquerda para a direita.

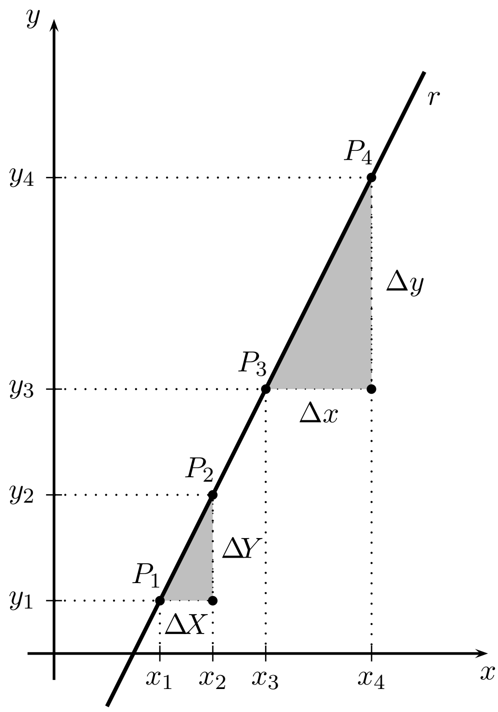
Dados dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, o coeficiente angular da reta que contém esses dois pontos (e contém também o segmento que os une) é dado por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

É comum simbolizar a variação na coordenada x por ΔX e a variação em y por ΔY. Assim, podemos reescrever o coeficiente angular de uma reta como

$$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

É importante salientar que cada reta possui um único coeficiente angular m e essa constante pode ser determinada por meio de quaisquer dois pontos sobre a reta. Podemos observar esse fato através da figura ao lado, onde temos quatro pontos sobre a mesma reta.



Considerando-se os pontos P_1 e P_2, temos $m = \Delta Y/\Delta X$. Por outro lado, se consideramos os pontos P_3 e P_4 concluímos que $m = \Delta y/\Delta x$. Entretanto, os dois triângulos retângulos determinados por esses pontos são semelhantes, o que nos permite concluir que as duas razões são iguais, ou seja,

$$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}.$$

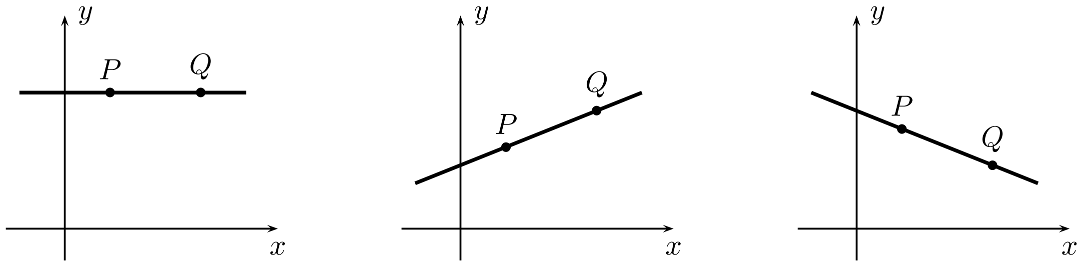
Observe, também, que a ordem em que tomamos os pontos P_1 e P_2 não faz diferença no cálculo de m, já que

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Entretanto, como já foi dito, é preciso manter a coerência com a escolha feita: uma vez escrito o numerador, só existe uma maneira correta de escrever o denominador.

Vamos estudar, agora, como identificar retas através do sinal do seu coeficiente angular. Observe as retas das figuras dadas. Na primeira, temos uma reta horizontal. Podemos verificar que dois pontos distintos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ quaisquer nessa reta têm a mesma ordenada, ou seja, $y_1 = y_2$. Assim, o coeficiente angular dessa reta é nulo, pois

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$$



Na segunda figura, temos uma reta inclinada para cima na direita. Considerando dois pontos distintos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ nessa reta, com $x_2 > x_1$, observamos que $y_2 > y_1$. Dessa forma, $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$ e $\Delta y = y_2 - y_1 > 0$. Assim, o coeficiente angular dessa reta é positivo,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0.$$

Já na terceira figura, temos uma reta inclinada para baixo na direita. Nesse caso, se $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ são dois pontos distintos nessa reta, com $x_2 > x_1$, então $y_2 < y_1$ e, portanto, $\Delta x > 0$ e $\Delta y < 0$. Assim, obtemos um coeficiente angular negativo,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0.$$

A inclinação de uma reta qualquer também pode ser determinada considerando-se dois pontos dessa reta tais que a diferença entre as suas abscissas seja 1. Por exemplo, tomando $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_1 + 1, y_2)$, o sinal do coeficiente angular da reta que contém esses dois pontos será dado pelo sinal de $y_2 - y_1$, pois

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 + 1 - x_1} = y_2 - y_1.$$

Dessa forma, fica fácil observar que $m = 0$ se a reta é horizontal, $m > 0$ se a reta é inclinada para cima, à direita, e $m < 0$ se a a reta é inclinada para baixo, à direita.

Exemplo 1.7. Determinemos o coeficiente angular da reta que contém os pontos $P_1 = (-2, 0)$ e $P_2 = (0, 3)$.

Pelo visto, o coeficiente angular é dado por $m = \dfrac{3 - 0}{0 - (-2)} = \dfrac{3}{2}$.

1.5 – EQUAÇÃO DE UMA RETA NO PLANO

Vamos iniciar esta seção apresentando um problema que foi bastante discutido e estudado não faz muito tempo.

Na década de 1990 houve uma discussão sobre a reforma do sistema previdenciário. Para efeitos da aposentadoria de um trabalhador desse sistema, foi estipulada uma combinação entre o seu tempo efetivo de contribuição e a sua idade, de acordo com uma regra, denominada "Fórmula 95". De acordo com essa regra, o trabalhador teria direito à sua aposentadoria quando a soma da sua idade com o número dos anos em que contribuiu comprovadamente para o sistema previdenciário fosse igual a 95.

Segundo essa regra, com que idade um trabalhador poderia se aposentar, considerando que ele iniciou sua vida profissional aos 25 anos e que sempre contribuiu regularmente para o sistema previdenciário? Para responder essa pergunta, denotemos por y a idade procurada. Dessa forma, o número de anos trabalhados deve ser $y - 25$ e, de acordo com a regra, devemos ter a soma de y com $y - 25$ igual a 95, ou seja,

$$y + (y - 25) = 95 \iff 2y = 95 + 25 \iff y = \frac{120}{2} \iff y = 60.$$

Portanto, um trabalhador que tivesse iniciado sua vida ativa aos 25 anos, poderia se aposentar aos 60 anos, desde que tivesse trabalhado durante 35 anos e contribuído regularmente para o sistema previdenciário.

De acordo com a mesma regra, se o trabalhador começasse sua vida profissional aos 35 anos, poderia se aposentar com 65 anos, pois

$$y + (y - 35) = 95 \iff 2y = 95 + 35 \iff y = \frac{130}{2} \iff y = 65.$$

Trabalhamos acima com igualdades denominadas equações. Em geral, uma equação é uma igualdade que envolve uma ou mais grandezas desconhecidas.

Uma equação *de primeiro grau a uma variável* é aquela que pode ser escrita na forma $ay + b = 0$, onde a e b são constantes, $a \neq 0$ e y é a variável ou incógnita. Na equação acima utilizamos y para representar a variável, mas poderíamos ter escolhido qualquer outro símbolo como, por exemplo, a letra x, que é a mais usual. Lembre que o mais importante é manter a coerência, não utilizando mais do que um símbolo para a mesma incógnita.

As equações de primeiro grau a uma variável são de fácil resolução, conforme vimos nos casos acima. De fato,

$$ay + b = 0 \Longleftrightarrow ay = -b \Longleftrightarrow y = -\frac{b}{a}\,.$$

Como um exemplo, observe que a equação $3x - 40 = 104$ pode ser resolvida assim:

$$3x - 40 = 104 \Longleftrightarrow 3x = 104 + 40 \Leftrightarrow x = 48\,.$$

Voltando ao problema inicial, observamos que a idade de aposentadoria de um trabalhador varia de acordo com a idade com a qual ele iniciou sua atividade profissional; conforme vimos,

$$\begin{array}{lcl} \text{início aos 25 anos} & \Longrightarrow & \text{aposentadoria aos 60 anos;} \\ \text{início aos 35 anos} & \Longrightarrow & \text{aposentadoria aos 65 anos.} \end{array}$$

Como a idade de início da vida profissional é uma variável, vamos representá-la por x; continuaremos utilizando y para representar a idade com a qual o trabalhador pode se aposentar, segundo a "Fórmula 95". Desse modo, temos que o número de anos trabalhados é expresso por $y - x$ e a fórmula pode ser escrita como

$$y + (y - x) = 95 \Longleftrightarrow 2y = x + 95 \Longleftrightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{95}{2} \Longleftrightarrow \frac{x}{2} - y + \frac{95}{2} = 0.$$

Observe que essa equação é diferente das vistas nos exemplos anteriores, pois estabelece uma relação entre duas variáveis. Note que o par de números $x = 25$ e $y = 60$ satisfaz a equação $y = \dfrac{x}{2} + 47{,}5$, o mesmo acontecendo com $x = 35$ e $y = 65$. Qual o valor de y, se $x = 29$? E se $x = 30$? Verifique se existe outro par de números que satisfaz a equação acima. Quantos pares (x, y) satisfazem essa equação?

Vejamos um outro exemplo. Uma indústria paga por hora, a cada operário de um determinado setor produtivo, um valor fixo de 5 reais e mais um adicional de 70 centavos por unidade produzida durante a hora. Encontre a equação que fornece o salário-hora de um operário desse setor, que representaremos pela variável y, em termos do número x de unidades produzidas, por hora, nesse setor.

A solução é dada pela equação $y = 5 + 0{,}7x$. Note que y depende de x; assim, poderíamos escrever $y(x)$ em lugar de y, ficando mais clara a ideia de dependência.

E se o fixo mudasse para 7 reais por hora? E se, além disso, a unidade produzida fosse cotada em 1 real? Esses fatos mudariam a equação? Usando o que já foi estudado nas seções anteriores, tente estabelecer uma maneira de visualizar as respostas encontradas.

Nosso objetivo, a partir de agora, é relacionar equações a uma e duas variáveis com o ponto de vista geométrico de retas que vimos na seção anterior. É assim que vamos responder as questões propostas acima. O que queremos, na verdade, é estabelecer uma equação que identifique uma determinada reta no plano. Assim, dada uma reta poderemos representá-la analiticamente por meio de uma equação e também, dada tal equação, poderemos representá-la geometricamente no plano xy. Essa representação geométrica é conhecida também como o *gráfico* da equação da reta.

Vamos começar respondendo a seguinte pergunta: que condições as coordenadas de um ponto $Q = (x, y)$ devem satisfazer para que esse ponto pertença a uma reta r dada?

Iniciamos com as retas verticais, que têm a característica de que todos os seus pontos possuem a mesma abscissa. Assim, se a reta corta o eixo x num ponto $(x_0, 0)$, então todos os pontos que pertençam a essa reta também têm abscissa x_0, logo o ponto $Q = (x, y)$ pertence a essa reta se, e somente se, $x = x_0$, o que define a equação dessa reta vertical.

$$\text{Equação de reta vertical passando por } P_0 = (x_0, y_0): \qquad x = x_0$$

De maneira análoga, podemos pensar nas retas horizontais, em que todos pontos possuem a mesma ordenada. Dessa forma, se a reta horizontal passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$, então seus pontos podem possuir qualquer abscissa, mas precisam ter ordenada y_0, ou seja, um ponto $Q = (x, y)$ do plano pertence a essa reta se, e somente se, $y = y_0$. Essa é a equação procurada.

$$\text{Equação de reta horizontal passando por } P_0 = (x_0, y_0): \qquad y = y_0$$

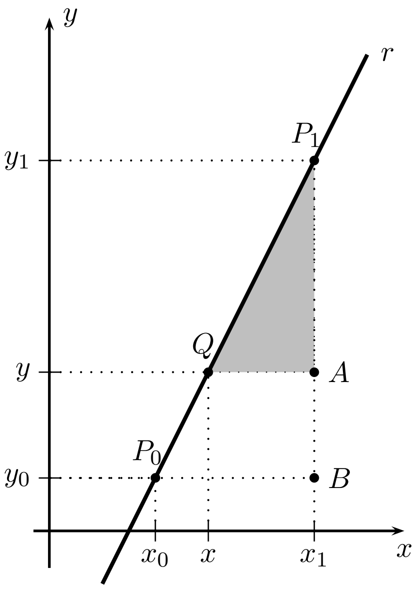
Vamos considerar, agora, uma reta r que não seja vertical nem horizontal e tomemos dois pontos distintos $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ pertencentes a essa reta r, conforme figura na página seguinte. A condição necessária e suficiente para que um ponto Q, distinto de P_0, pertença a essa reta r é que

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

ou seja, que

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \text{ declividade da reta } r.$$

De fato, se juntarmos aos pontos P_0, P_1 e Q os pontos $A = (x_1, y)$ e $B = (x_1, y_0)$, ficam determinados dois triângulos, T_1, com vértices P_0, B e P_1, e T_2, com vértices Q, A e P_1, que são retângulos (por possuírem catetos paralelos aos eixos coordenados).



Se o ponto Q pertence à reta r, então os triângulos T_1 e T_2 são semelhantes, conforme pode ser observado na figura, de modo que $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Reciprocamente, se $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, então, como esta proporcionalidade ocorre entre catetos de triângulos retângulos, tais triângulos são semelhantes. Portanto, o ângulo oposto ao lado QA no triângulo T_2 deve ser igual ao ângulo oposto ao lado P_0B no triângulo T_1.

Assim, a reta que passa pelos pontos P_1 e Q é igual à reta que passa por P_1 e P_0. Logo, o ponto Q pertence à reta r.

Notemos que a igualdade $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ é satisfeita por todos os pontos da reta r distintos de P_0. Porém, todos os pontos que satisfazem essa igualdade também devem satisfazer a igualdade $y - y_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$, sendo esta última satisfeita inclusive pelo ponto P_0. Por outro lado, todos os pontos (x, y) que satisfazem a igualdade $y - y_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$, com $x \neq x_0$, portanto, distintos de P_0, satisfazem também a igualdade $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ e, consequentemente, pertencem à reta r.

Assim, todos os pontos (x, y) da reta r, e apenas estes, satisfazem a igualdade $y - y_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$, que será, então, uma equação da reta r. Como vimos anteriormente, a expressão $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ é a inclinação da reta. Se a substituirmos por m nessa equação da reta, obtemos a *forma ponto-inclinação* da equação da reta.

Equação de reta passando por $P_0 = (x_0, y_0)$ com inclinação m:	$y - y_0 = m(x - x_0)$

Observe que a equação da reta horizontal pode ser obtida a partir da forma ponto-inclinação, pois ela passa pelo ponto $P = (x_0, y_0)$ com inclinação $m = 0$, resultando

$y - y_0 = 0$, ou seja, $y = y_0$.

A equação da reta que passa pelo ponto $P = (0, b)$ do eixo y com inclinação m é dada por

$$y - b = m(x - 0) \Longleftrightarrow y = mx + b.$$

Dizemos que $y = mx + b$ é a *equação reduzida* de uma reta. Qualquer reta que não seja vertical admite uma equação desse tipo. O ponto de interseção b da reta com o eixo y é denominado *coeficiente linear* ou *parâmetro linear* da reta.

Consideremos, agora, a *equação geral de primeiro grau a duas variáveis*

$$Ax + By + C = 0,$$

com A, B e C constantes reais, mas tais que A e B não sejam simultaneamente nulos. Essa é a forma geral de uma equação de primeiro grau com duas variáveis e é denominada *equação geral da reta*, de acordo com o resultado seguinte.

Proposição 1.5. *Toda equação geral de primeiro grau a duas variáveis representa uma reta. Reciprocamente, toda reta possui uma equação dessa forma.*

Demonstração. De fato, seja $Ax + By + C = 0$ uma equação geral de primeiro grau a duas variáveis.

- Se $B = 0$, então $A \neq 0$ e, nesse caso, $x = -\dfrac{C}{A}$, que é a equação de uma reta vertical.
- Se $A = 0$ então $B \neq 0$ e, nesse caso, $y = -\dfrac{C}{B}$, que é a equação de uma reta horizontal.
- Se ambos A e B são não nulos, podemos escrever $By = -Ax - C$ ou, equivalentemente,

  $$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

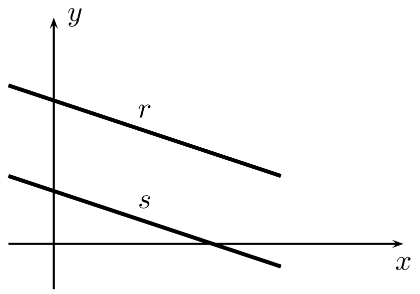
  que é a equação reduzida de uma reta com coeficiente angular $m = -\dfrac{A}{B}$ e coeficiente linear $b = -\dfrac{C}{B}$.

Reciprocamente, toda reta do plano pode ser representada por uma equação na forma geral. De fato, temos três situações.

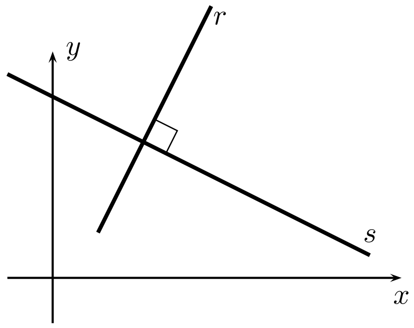
- Reta vertical: a equação $x = x_0$ dessa reta pode ser escrita como $1x + 0y - x_0 = 0$, ou seja, basta considerar $A = 1$, $B = 0$ e $C = -x_0$.

- Reta horizontal: a equação $y = y_0$ dessa reta pode ser escrita como $0x+y-y_0 = 0$, ou seja, basta considerar $A = 0$, $B = 1$ e $C = -y_0$.
- Demais retas: uma reta passando por um ponto $P = (x_0, y_0)$ com inclinação m tem sua equação dada por $y - y_0 = m(x - x_0)$ e essa equação pode ser reescrita como $-mx + y + (mx_0 - y_0) = 0$, que é a equação na forma geral, com $A = -m$, $B = 1$ e $C = mx_0 - y_0$.

Dessa forma, concluímos a demonstração da proposição. □



Retas Paralelas



Retas Perpendiculares

Valem os dois resultados a seguir; as demonstrações são deixadas como exercícios.

Proposição 1.6. *Consideremos duas retas quaisquer que não sejam verticais.*

a) As retas são paralelas se, e somente se, seus coeficientes angulares forem iguais.

b) As retas são perpendiculares se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares for igual a -1.

De acordo com essas condições, se duas retas r e s têm equações reduzidas dadas por $y = m_1x + b_1$ e $y = m_2x + b_2$, respectivamente, então

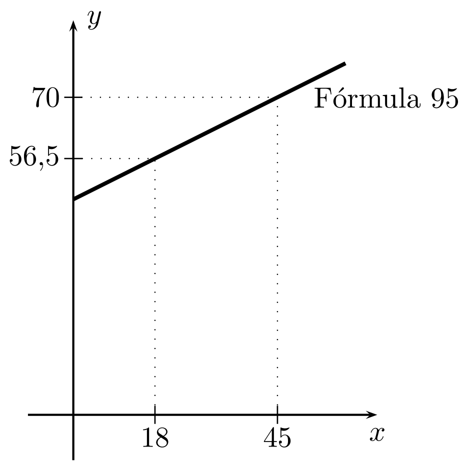
$$r \parallel s \Longleftrightarrow m_1 = m_2 \qquad\qquad r \perp s \Longleftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2} \tag{1.2}$$

Terminemos esta seção voltando ao nosso problema inicial, que apresentava a "Fórmula 95". Lembramos que um trabalhador que inicia sua vida profissional aos 25 anos pode se aposentar aos 60 ou, se iniciar aos 35, pode se aposentar aos 65. Vimos que os pares $(25, 60)$ e $(35, 65)$ satisfazem essa fórmula, dada pela equação

$$y = \frac{x}{2} + 47{,}5$$

conforme vimos à p. 23.

Observe que essa equação representa uma reta com inclinação $m = 1/2$, identificada como Fórmula 95 na figura ao lado, que nos mostra o gráfico dessa reta. No eixo horizontal x representamos a idade inicial de um trabalhador regularmente inserido no sistema previdenciário e, no eixo vertical y, a idade apta para o trabalhador se aposentar.



Supondo que a idade mínima para o início da vida profissional com contribuição previdenciária seja de 18 anos e que aos 70 o trabalhador deva se aposentar compulsoriamente, qual será o intervalo de idade com que um trabalhador deve iniciar sua vida profissional a fim de se aposentar "integralmente" segundo o plano previdenciário? A resposta, o intervalo $[18, 45]$, fica clara quando analisamos o gráfico acima.

Podemos também observar que, iniciando aos 18 anos, a idade mínima para a correspondente aposentadoria integral é de 56 anos e meio.

1.6 – CÍRCULOS OU CIRCUNFERÊNCIAS

Uma aplicação direta da fórmula da distância entre dois pontos num plano, vista na Seção 1.3, consiste no cálculo da equação de um círculo no plano.

Se $P_0 = (x_0, y_0)$ é um ponto dado no plano xy e r é um número real positivo, então definimos o *círculo* ou, então, a *circunferência* $C(P_0, r)$, de centro P_0 e raio r, como o conjunto de todos os pontos do plano xy, cuja distância até o centro P_0 é igual a r.

Assim, usando a fórmula da distância entre dois pontos, vista na Seção 1.3, podemos encontrar a equação desse círculo $C(P_0, r)$. De fato, um ponto P, de coordenadas (x, y), está no círculo $C(P_0, r)$ se, e somente se, $d(P, P_0) = r$, ou seja,

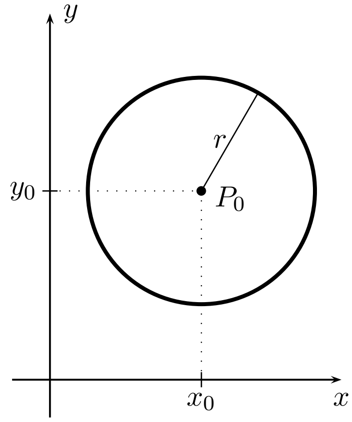
$$\begin{aligned} d((x,y),(x_0,y_0)) = r &\iff \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r \\ &\iff (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2, \end{aligned}$$

conforme figura na página seguinte. Dizemos que

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

é a *forma padrão* da equação do círculo de raio r e centro $P_0 = (x_0, y_0)$. Observe que todo círculo centrado na origem e de raio r tem sua equação padrão dada por

$$x^2 + y^2 = r^2.$$



Em particular, se $r = 1$, obtemos a equação do *círculo unitário* ou, então, *trigonométrico*, que é, simplesmente, $x^2 + y^2 = 1$.

Exemplo 1.8. Determinemos a equação do círculo de centro $P_0 = (-1, 2)$ e raio $\frac{3}{2}$.

Pelo que acabamos de ver, a forma padrão da equação desse círculo é

$$\big(x - (-1)\big)^2 + (y-2)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \iff (x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{9}{4}.$$

Como exercício, esboce o gráfico desse círculo.

De acordo com o que vimos acima, dado um círculo qualquer, digamos, de centro $P_0 = (x_0, y_0)$ e raio r, podemos representá-lo pela equação $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Será também verdade que a toda equação

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = k \tag{1.3}$$

podemos associar algum círculo? A resposta é não: essa equação só representa um círculo para valores de k maiores do que zero.

Proposição 1.7. *Valem as afirmações seguintes relativas à equação* (1.3).

a) Se $k > 0$, o gráfico dessa equação é o círculo de centro $P_0 = (x_0, y_0)$ e raio $\sqrt{k}$.

b) Se $k = 0$, essa equação só é satisfeita pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$, logo seu gráfico não representa um círculo.

c) Se $k < 0$, então essa equação não representa uma curva, pois não existem pontos no plano que satisfaçam essa condição.

Desse modo, é fácil saber quando a equação (1.3) representa, ou não, um círculo, bastando para isso observar o valor de k. No entanto, se desenvolvemos os quadrados dessa equação, ela pode ser representada por

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - k) = 0.$$

Observe que, dessa forma, temos um caso particular da equação

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0,$$

em que $A = B = 1$, $C = 0$, $D = -2x_0$, $E = -2y_0$ e $F = x_0^2 + y_0^2 - k$; nesse caso, $D^2 + E^2 - 4AF = 4k > 0$.

A equação $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, com A, B e C não sendo simultaneamente iguais a zero, é denominada *equação geral de segundo grau a duas variáveis.*

Cabe aqui perguntar: tomando $A = B$, $C = 0$ e $D^2 + E^2 - 4AF > 0$, essa equação sempre representa um círculo? Isso poderá ser respondido afirmativamente se conseguirmos reescrever a equação na forma $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = k$, com $k > 0$. A boa notícia é que podemos, sim, fazer isso, bastando utilizar um procedimento conhecido como *completamento de quadrados.* Esse método consiste em uma sucessão de operações, a partir da equação dada, tendo por objetivo escrever uma equação equivalente que contenha expressões envolvendo um ou mais quadrados perfeitos.

Nos três exemplos que seguem, exercitaremos essa técnica do completamento de quadrados, sendo que no primeiro deles faremos isto descrevendo detalhadamente cada passo dado; depois consideramos o caso geral.

Exemplo 1.9. Verifiquemos se $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 11 = 0$ representa, ou não, um círculo.

$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 11 = 0$	Equação do segundo grau em duas variáveis.
$(x^2 - 6x) + (y^2 + 8y) = -11$	Agrupamos os termos que dependem da mesma variável, isolando a constante -11 à direita da equação.
$(x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x) + (y^2 + 8y) = -11$	x^2 representa o quadrado do primeiro termo que, nesse caso, será x, e $-2 \cdot 3 \cdot x$ representa -2 vezes o produto do primeiro termo (x) pelo segundo que, nesse caso, será 3.
$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y) = -11 + 9$	Somamos, assim, o quadrado do segundo termo (9) aos dois lados da equação, a fim de não alterá-la.
$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y) = -2$	Observe que, agora, os três primeiros termos da equação formam um trinômio quadrado perfeito.
$(x - 3)^2 + (y^2 + 8y) = -2$	Substituímos os três primeiros termos pelo quadrado perfeito equivalente.

$(x-3)^2 + (y^2 + 2 \cdot 4 \cdot y) = -2$	Trabalhando agora com os termos que dependem de y, y^2 nos dá y como primeiro termo e $2 \cdot 4 \cdot y$ nos dá 4 como segundo termo.
$(x-3)^2 + (y^2 + 8y + 16) = -2 + 16$	Somamos o quadrado do segundo termo (16) aos dois lados da equação, novamente temos um trinômio quadrado perfeito.
$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 14$	Substituímos os três termos pelo quadrado perfeito equivalente e obtemos, assim, a equação do círculo na forma padrão.

Como $14 > 0$, temos que a equação obtida representa, efetivamente, o círculo de centro $(3, -4)$ e raio $\sqrt{14}$.

Exemplo 1.10. Escrevamos a equação $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$ na forma padrão da equação do círculo.

As igualdades seguintes são equivalentes.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 &= 0 \\ (x^2 + 8x) + (y^2 - 10y) &= -5 \\ (x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 10y + 25) &= -5 + 16 + 25 \\ (x+4)^2 + (y-5)^2 &= 36 \end{aligned}$$

Assim, concluímos que a equação representa o círculo de centro $(-4, 5)$ e raio 6. Como exercício, esboce o gráfico desse círculo.

Exemplo 1.11. Escrevamos a equação $3x^2 + 3y^2 - 9x + 16y - 10 = 0$ na forma padrão da equação do círculo.

As igualdades seguintes são equivalentes.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 - 9x + 16y - 10 &= 0 \\ (x^2 - 3x) + \left(y^2 + \frac{16}{3}\,y\right) &= \frac{10}{3} \\ \left[x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] + \left[y^2 + \frac{16}{3}\,y + \left(\frac{8}{3}\right)^2\right] &= \frac{10}{3} + \frac{9}{4} + \frac{64}{9} \end{aligned}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{457}{36}$$

Essa equação padrão representa o círculo de centro $\left(\frac{3}{2}, -\frac{8}{3}\right)$ e raio $\frac{\sqrt{457}}{6}$. Como exercício, esboce o gráfico desse círculo.

Vejamos, agora, o caso geral. Consideremos uma equação do segundo grau a duas variáveis, na qual os coeficientes de x^2 e de y^2 são iguais e não nulos e o coeficiente do termo em xy é nulo, portanto, uma equação que pode ser escrita na forma

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

que satisfaz também as condições $A \neq 0$ e $D^2 + E^2 - 4AF > 0$. Partindo dessa equação e utilizando o método do completamento dos quadrados, chegaremos à equação padrão do círculo.

Para tanto, basta observar que são equivalentes as seguintes igualdades.

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$A\left(x^2 + \frac{D}{A}\,x\right) + A\left(y^2 + \frac{E}{A}\,y\right) = -F$$

$$A\left(x^2 + \frac{D}{A}\,x + \frac{D^2}{4A^2}\right) + A\left(y^2 + \frac{E}{A}\,y + \frac{E^2}{4A^2}\right) = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4A}$$

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = -\frac{F}{A} + \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2}$$

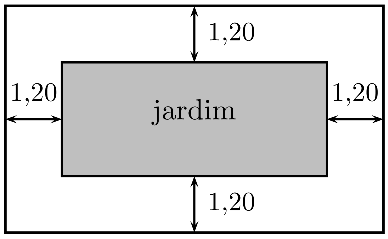
$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$$

A última igualdade representa o círculo de centro $P_0 = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$ e raio dado por $r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2\,|A|} > 0$.

1.7 – FUNÇÕES REAIS

Na Seção 1.5, vimos que é possível relacionar grandezas por meio de uma equação cujo gráfico é uma reta, como no exemplo da "Fórmula 95", onde a idade da aposentadoria de um trabalhador dependia de sua idade no início de sua vida profissional. Entretanto, em muitas situações do cotidiano, a dependência entre duas grandezas nem sempre pode ser expressa por meio de uma equação simples como a da reta. A seguir, apresentamos duas dessas situações.

- A Comissão de Obras de um condomínio decide construir uma calçada com 1,20 m de largura, que deverá contornar um jardim retangular, planejado para ter 50 m^2 de área. A área total da calçada a ser construída, que denotaremos por C, depende do comprimento x de um dos lados do jardim. Determine C



  a) se $x = 7{,}5$ m e também se $x = 10$ m;

  b) em termos do comprimento x, indicando os possíveis valores para $x \in \mathbb{R}$.

- Um fazendeiro possui 800 m lineares de cerca e pretende utilizá-la toda para cercar um curral retangular. A área A do curral dependerá do comprimento l de um dos lados do mesmo. Determine A

  a) se $l = 10$ m;

  b) em termos do comprimento l, indicando os possíveis valores com $l \in \mathbb{R}$.

Em geral, dizemos que uma variável y é uma *função* de uma variável x se, para *cada* valor de x num conjunto D, estiver associado um *único* valor de y. Nesse caso, x é denominada variável *independente* e y variável *dependente*.

No primeiro exemplo acima, o comprimento x de um dos lados do jardim é a variável independente e a área C a ser construída é a variável dependente. Nesse exemplo, temos

$$C = 2{,}4\,x + \frac{120}{x} + 5{,}76$$

e os possíveis valores de x formam o conjunto $D = (0, +\infty)$. Note que não se trata de uma equação da reta, pois temos um x no denominador. No segundo exemplo, o comprimento l de um dos lados do curral é a variável independente e a área A do mesmo é a variável dependente. Nesse exemplo,

$$A = 400\,l - l^2,$$

sendo l um número que pode tomar qualquer valor entre 0 e 400, isto é, os possíveis valores de l formam o conjunto $D = (0, 400)$. Note que, novamente, não se trata de uma equação da reta, pois temos um l ao quadrado.

Com a notação

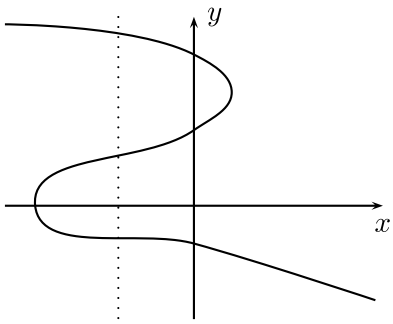
$$y = f(x),$$

que é lida "y é igual a f de x", expressamos o fato de que y é uma função de x e que o nome dessa função é f.

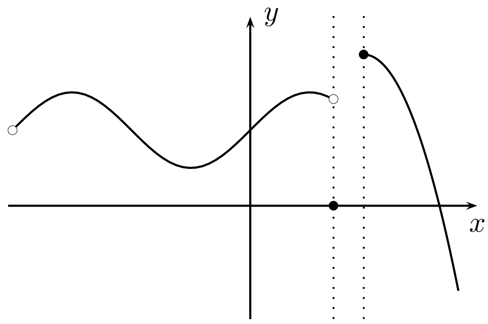
O conjunto D, formado por todos os possíveis valores que a variável independente x de f pode tomar, é denominado *domínio* de f e, aquele formado por todos os valores alcançados pela variável dependente y, é denominado *imagem* de f. O domínio e a imagem de uma função f são denotados por $\text{Dom}(f)$ e $\text{Im}(f)$, respectivamente. Observamos que, quando o domínio da função f não está explicitado, consideraremos como o domínio de f o chamado *domínio natural* de f, formado por *todos* os valores reais de x para os quais $f(x)$ também é um número real. Ou seja, excluiremos do domínio natural de f apenas aqueles valores de x para os quais $f(x)$ não resulte número real.

Neste texto, trabalharemos com funções cujo domínio é, sempre, um subconjunto de $\mathbb{R}$, geralmente um intervalo, ou uma união de intervalos, e que associam, a cada elemento desse domínio, um único número real. Essas funções são denominadas funções *reais de uma variável real.* Usa-se a notação $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ para indicar que f é uma função cujo domínio é o conjunto D e que, a cada elemento desse domínio, associa um número real.

O *gráfico* de uma função f é a representação, no plano coordenado xy, de todos os pares (x, y) para os quais $y = f(x)$, com x percorrendo $\text{Dom}(f)$.



Não é gráfico de função.



É gráfico de função.

Podemos representar uma função apenas pelo seu gráfico. Por exemplo, o resultado de um eletrocardiograma é um gráfico que mostra a atividade de um coração como uma função do tempo. O que realmente interessa aos médicos são os padrões de repetição que ali aparecem, e esses são mais facilmente detectados no gráfico do que por meio de uma fórmula. Além disso, dificilmente teríamos uma fórmula para expressar exatamente tal atividade.

Tabelas também aparecem naturalmente em algumas situações. É comum encontrarmos nos jornais tabelas apresentando, para cada dia do mês, a cotação que o dólar atingiu no fechamento do dia. Trata-se de um exemplo de função, na qual o dia é a variável independente e a cotação do dólar a variável dependente.

As funções também podem ser apresentadas verbalmente, ou por meio de um algoritmo. Em alguns casos, essa é a única maneira de fazê-lo, como ocorre quando queremos determinar, para cada número inteiro positivo n, qual o enésimo número primo. Nesse caso, não temos uma fórmula geral, porém, utilizando o algoritmo denominado “crivo de Eratóstenes”, podemos encontrar esse enésimo primo.

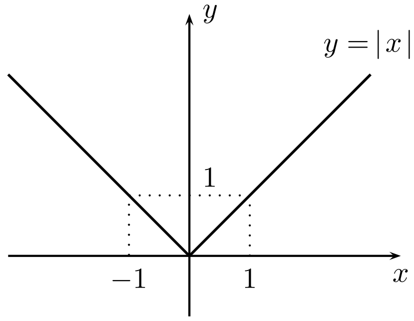
Para que uma curva do plano xy seja o gráfico de uma função, é preciso que se verifique o “teste da reta vertical”, ou seja, cada reta vertical do plano xy deve intersectar a curva em, *no máximo*, um único ponto (ver figuras na página ao lado).

Em algumas situações, é necessário mais de uma fórmula para definir a função desejada. Os dois exemplos seguintes apresentam situações desse tipo.

O primeiro exemplo é o da *função valor absoluto*, ou *função módulo*, dada por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{se} \quad x < 0, \end{cases}$$

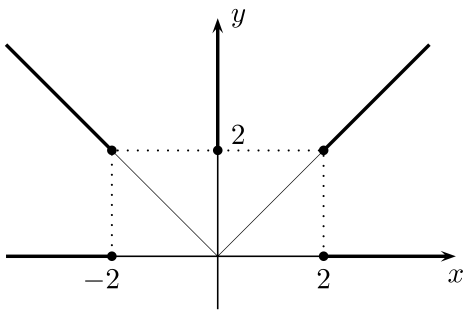
cujo gráfico aparece ao lado.



Se quisermos obter, para algum número real x, a distância entre x e a origem, devemos usar o valor absoluto de x, conforme vimos na Seção 1.2, ou então essa função valor absoluto. Voltemos ao Exemplo 1.4, apresentado à p. 15.

Exemplo 1.12. Determinemos todos os números reais x para os quais $|x|$ é maior do que ou igual a 2.

Para obter todos os números reais x para os quais $|x|$ é maior do que ou igual a 2, podemos usar sua interpretação como distância à origem, conforme visto na Seção 1.2, ou então o gráfico da função valor absoluto.



Usando o gráfico, observamos que tal conjunto é formado pelas abscissas dos pontos do gráfico cuja ordenada y é maior do que ou igual a 2. Verificamos, então, que com $x = 2$ ou $x = -2$, temos como ordenada $y = 2$ e que o conjunto procurado é formado pela união dos intervalos $(-\infty, -2]$ e $[2, +\infty)$, ou seja,

$$\{x \in \mathbb{R}\,;\, |x| \geq 2\} = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty),$$

utilizando a notação de união de conjuntos.

O segundo exemplo envolve uma situação do cotidiano.

Exemplo 1.13. Em um determinado ano, na página da Receita Federal, o contribuinte interessado em calcular um imposto devido encontrava a tabela seguinte.

Base de cálculo mensal em R$	Alíquota em %	Parcela a deduzir do imposto em R$
Até 1.257,12	—	—
De 1.257,13 até 2.512,08	15,0	188,57
Acima de 2.512,08	27,5	502,58

Essa tabela define uma função I que associa, a cada ganho mensal x, o imposto devido $I(x)$. Novamente, é necessário mais do que uma fórmula para definir essa função. O leitor é convidado a encontrar a expressão de $I(x)$ e interpretar a terceira coluna dessa tabela da Receita Federal no Exercício 1.42.

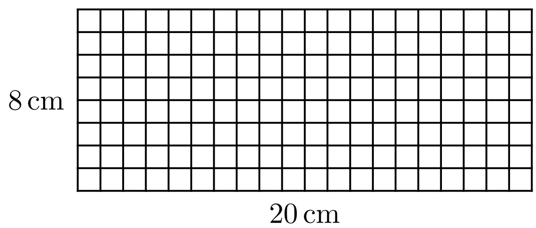
1.8 – UMA FUNÇÃO ÁREA (Leitura complementar)

Nesta última seção abordamos uma questão simples de Geometria Plana, usando uma equação de segundo grau específica, a que descreve uma parábola no plano. Essa equação será estudada no próximo capítulo do ponto de vista de polinômios e o leitor pode verificar (à p. 68) que a equação de segundo grau

$$y = Ax^2 + Dx + F$$

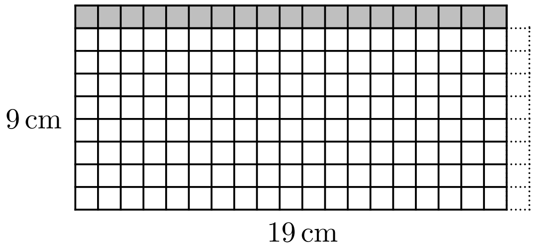
descreve uma parábola cujo vértice tem abscissa $x_v = \dfrac{-D}{2A}$ e cuja concavidade é voltada para baixo no caso $A < 0$. A questão que estudamos pode ser igualmente abordada usando derivadas e, com ferramentas de Cálculo a duas variáveis, pode ser estendida para um problema tridimensional.

Consideremos um retângulo medindo 8 cm de altura e 20 cm de base. Evidentemente, a área desse retângulo é igual a 160 cm^2, ou seja, nesse retângulo cabem 160 quadradinhos com área unitária de 1 cm^2.



Se, agora, diminuirmos uma unidade na medida da base e acrescentarmos uma unidade na altura, a área do retângulo será alterada? Em quantas unidades?

Nesse caso, observamos um aumento de 11 unidades na área (tiramos 8 unidades de área, pontilhadas na figura da página seguinte, e acrescentamos 19 unidades de área, na parte de cima do retângulo, que aparecem hachuradas na figura), de modo que a área fica alterada para $171\,\text{cm}^2$, ou seja, a área agora é de $19 \times 9\,\text{cm}$.

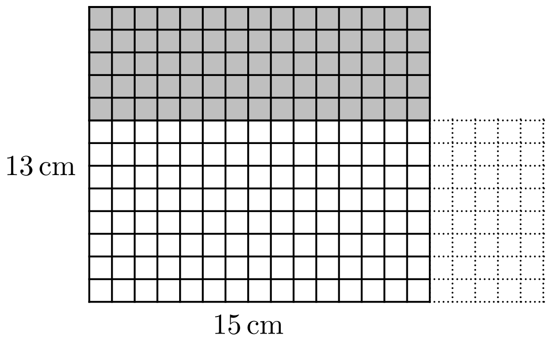


Essa área é maior do que a área original.

Se diminuirmos, no retângulo original, 5 cm na base e aumentarmos o mesmo na altura, o que acontecerá com a área?

Obteremos um retângulo de medidas 15 cm para a base e 13 cm para a altura, ou seja, de área igual a $195\,\text{cm}^2$, maior que as áreas dos dois retângulos anteriores.

Se diminuirmos, no retângulo original, 10 cm na base e aumentarmos o mesmo na altura, o que acontece com a área?



Obteremos um retângulo de medidas 10 cm para a base e 18 cm para a altura, ou seja, de área igual a $180\,\text{cm}^2$, que é maior do que a original e a segunda apresentada, mas é menor do que a do último retângulo acima, obtido retirando 5 cm na base.

Vejamos algumas questões mais gerais envolvendo esses retângulos.

Questão 1.1. Quais são as quantidades que podem ser retiradas da base e acrescentadas na altura?

Inicialmente, observamos que não faz sentido algum retirarmos valores negativos, logo, esses já podem ser excluídos. Poderemos retirar qualquer valor positivo menor do que a medida da base, nesse caso, menor do que 20 cm.

Nos resta apenas analisar os casos extremos, ou seja, a retirada de 20 ou 0 unidades. No caso de retirarmos 20 unidades, o retângulo se deformará, transformando-se num segmento de reta, ou na sobreposição de dois segmentos de reta, de comprimento igual a 28 cm e, evidentemente, com área nula. Sendo assim, podemos excluir esse valor de nossas possibilidades. Já a possibilidade de retirarmos 0 unidades da base é perfeitamente possível, não alterando a situação original.

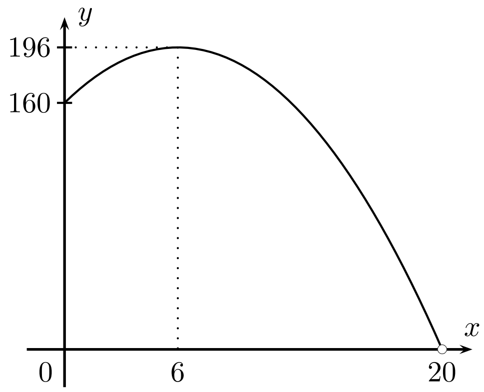
Questão 1.2. A área do retângulo pode ser obtida como uma função da quantidade retirada da base. Qual é a expressão desta função? Qual é o seu domínio? E sua imagem? Como representar graficamente esta função?

O retângulo original tem base medindo 20 cm e altura 8 cm. Portanto, ao retirarmos x unidades da base, obteremos para o novo retângulo uma base de $20 - x$ unidades e, ao acrescentarmos x unidades na altura, obteremos para o novo retângulo uma altura de $8 + x$ unidades. Assim, denotando por $A(x)$ a área do novo retângulo, obtemos:

$$A(x) = (20 - x)(8 + x) = -x^2 + 12x + 160, \quad \text{com} \quad 0 \le x < 20.$$

Como $A(x)$ é dada por uma equação de segundo grau com o coeficiente do termo de grau dois negativo, seu gráfico será parte de uma parábola com concavidade voltada para baixo. Essa parábola possui uma raiz igual a 20, intersecta o eixo y em 160 e seu vértice tem abscissa

$$x_v = \frac{-12}{2(-1)} = 6$$



e ordenada $A(6) = 196$. O gráfico da função $y = A(x)$ pode ser visto na figura.

Observamos que a área $A(x)$ toma valores positivos até o valor máximo, que ocorre no vértice da parábola, ou seja, quando $x = 6$. Nesse caso, o retângulo será um quadrado de lado igual a 14 cm e com área $A(x) = 196\,\text{cm}^2$. Assim, o conjunto de valores alcançados por $A(x)$, ou seja, a imagem de A, é o intervalo

$$\text{Im}(A) = \{y \in \mathbb{R}\,; 0 < y \le 196\} = (0, 196].$$

Questão 1.3. Supondo que desejássemos obter um retângulo com $160\,\text{cm}^2$ de área, quanto deveríamos retirar da base e acrescentar na altura?

Observamos no gráfico acima que $A(x) = 160\,\text{cm}^2$ para dois valores distintos de x, sendo o primeiro $x_1 = 0$ e o segundo, $x_2 = 12$, uma vez que a equação $A(x) = 160$ equivale a $-x^2 + 12x = 0$. Assim, um retângulo com $160\,\text{cm}^2$ de área é obtido na situação original ou retirando-se 12 unidades da base e acrescentando-as na altura.

Questão 1.4. E para obtermos um retângulo com área maior do que ou menor do que $160\,\text{cm}^2$, quanto deveríamos retirar da base e acrescentar na altura?

Como a concavidade da parábola é voltada para baixo, teremos $A(x) > 160$ quando $0 < x < 12$. Também $A(x) < 160$ quando x estiver fora do intervalo $[0, 12]$, ou seja, quando x pertencer ao intervalo $(12, 20)$.

Generalizando esse problema de área para o caso de um retângulo qualquer, de base b e altura h, surgem três perguntas naturais:

- Sempre obtemos uma equação de segundo grau para representar a área do retângulo em função da quantidade retirada da base e acrescentada na altura?
- É sempre possível determinar o valor de x que permita obter o retângulo com área máxima?
- Esse retângulo de área máxima será sempre um quadrado?

Para responder essas perguntas, observamos inicialmente que, retirando x unidades da base do retângulo original e acrescentando x unidades na altura, a área do novo retângulo será dada por

$$A(x) = (b - x)(h + x) = -x^2 + (b - h)x + bh, \quad \text{com} \quad 0 \leq x < b,$$

o que responde afirmativamente a primeira pergunta.

Para responder a segunda das três perguntas acima, sobre a expressão de $A(x)$, observamos que o gráfico de A é parte de uma parábola com concavidade voltada para baixo, uma vez que o coeficiente do termo de grau dois é negativo. Observamos, ainda, que o vértice dessa parábola tem abscissa

$$x_v = -\frac{b-h}{2(-1)} = \frac{b-h}{2}$$

e ordenada

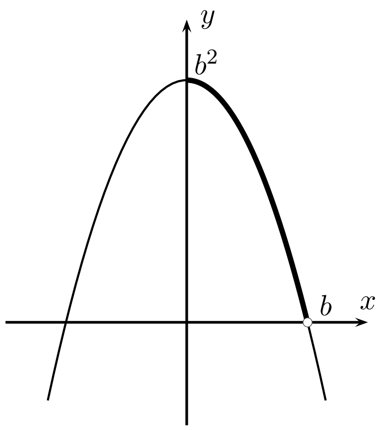
$$A(x_v) = \left(\frac{b+h}{2}\right)^2.$$

É claro que, se x_v pertencer ao domínio de A, ou seja, $0 \leq x_v < b$, então o vértice será o ponto de máximo do gráfico de $A(x)$. Dividimos a resposta em três casos.

- $\boxed{b = h.}$ Nesse caso,

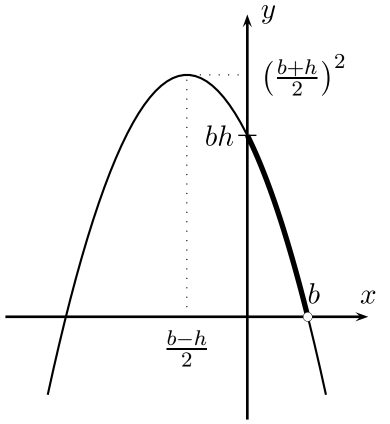
  $$A(x) = b^2 - x^2 \leq b^2$$

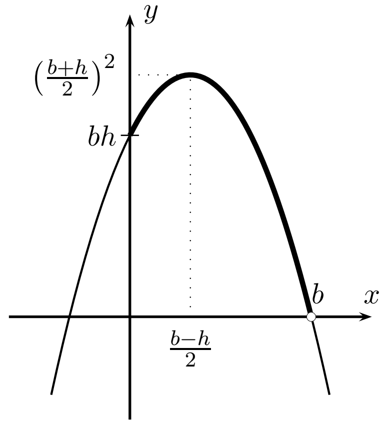
  e o valor máximo ocorre na abscissa do vértice, em $x_v = \dfrac{b-h}{2} = 0$, que pertence ao domínio de A, como pode ser visto na figura ao lado.



- $\boxed{b < h.}$ Nesse caso, $x_v = \dfrac{b-h}{2} < 0$, ou seja, a abscissa do vértice está fora do domínio da função. Para $0 \leq x < b$, a área estará sempre decrescendo, portanto o valor máximo ocorrerá no extremo $x = 0$ do intervalo, como pode ser visto na figura abaixo, à esquerda.

- $\boxed{b > h.}$ Nesse caso, temos $0 < x_v = \dfrac{b-h}{2}$, ou seja, a abscissa do vértice está no domínio de A, como no exemplo do retângulo com 20 cm de base e 8cm de altura, como pode ser visto na figura abaixo, à direita.





Assim, respondemos afirmativamente a segunda das três perguntas colocadas: sempre é possível determinar o valor de x cujo retângulo correspondente tem área máxima.

Respondemos a terceira pergunta, observando que o máximo da área ocorreu no vértice da parábola apenas no primeiro e terceiro casos, cujos retângulos correspondentes são quadrados. Já no segundo caso, o máximo ocorreu no retângulo original, que não é um quadrado. Assim, a terceira pergunta tem uma resposta negativa.

1.9 – EXERCÍCIOS

Exercício 1.1. Encontre um número racional c e um número irracional d tais que $a < c < d < b$, para os números reais a e b, com $a < b$, dados.

a) $a = \dfrac{1}{4}$ e $b = \dfrac{1}{3}$

b) $a = 0{,}994\overline{327}$ e $b = 0{,}994\overline{328}$

c) $a = 0{,}871\overline{479}$ e $b = 0{,}8714799\ldots$

d) $a = 0{,}10010001\ldots$ e $b = 0{,}10010002$

Exercício 1.2. Justifique os itens da Proposição 1.1 na Seção 1.1, à p. 11.

Exercício 1.3. "O resultado da soma de dois números irracionais é um número irracional." Verifique se é verdadeira ou falsa essa afirmação, justificando sua resposta.

Exercício 1.4. Determine todos os valores reais de x, para os quais temos

a) $3x - 2 < 8$ b) $2x - 1 > 11x + 9$ c) $(x+1)(x-2) > 0$

d) $\dfrac{1}{x+1} > 9$ e) $\dfrac{3x+1}{x-2} < 2$ f) $\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{3}{x-2}$

Exercício 1.5. Escreva usando valor absoluto o conjunto formado por todos

a) os números reais cuja distância até 7 é menor do que 9;

b) os números reais cuja distância até 3 é maior do que ou igual a 2;

c) os números reais cuja distância até -2 é maior do que 1.

Sugestão: Inicialmente represente os conjuntos na reta, usando uma "régua" de comprimento conveniente.

Exercício 1.6. Escreva os conjuntos seguintes na forma de intervalos ou uniões de intervalos.

a) $\{t \in \mathbb{R}\,;\, |t-1| < 2\}$ b) $\{t \in \mathbb{R}\,;\, |t+3| \leq 5\}$

c) $\{t \in \mathbb{R}\,;\, |t-3| \geq 3\}$ d) $\{t \in \mathbb{R}\,;\, |t+4| > 1\}$

Exercício 1.7. Escreva na forma de intervalo, ou união de intervalos, o conjunto formado por todos os números reais x que satisfazem as condições dadas.

a) $\sqrt{1+x^2}$ é um número real b) $\sqrt{1-x^2}$ é um número real

c) $\sqrt{(x-3)^2-9}$ é um número real d) $\sqrt{x^2+6x+8}$ é um número real

Sugestão: Em d), primeiro complete o quadrado dentro do radical.

Exercício 1.8. Faça um esboço no plano xy do conjunto de todos os pontos cujas coordenadas satisfazem

a) $x \leq 3$ b) $0 \leq x \leq 5$ e $-1 \leq y \leq 4$

c) $-3 < y \leq 2$ d) $x = 1$ e $y > 0$

e) $|\,x\,| < 1$ e $|\,y\,| < 1$ f) $|\,x\,| < |\,y\,|$

Exercício 1.9. Determine a tal que a distância entre os pontos $(1, -2)$ e $(a, 2)$ seja igual a 5.

Exercício 1.10. Determine b tal que a distância entre os pontos $(0, 0)$ e $(3, b)$ seja igual a 8.

Exercício 1.11. Mostre que o triângulo com vértices $(3, -3)$, $(-3, 3)$ e $(3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ é um triângulo equilátero.

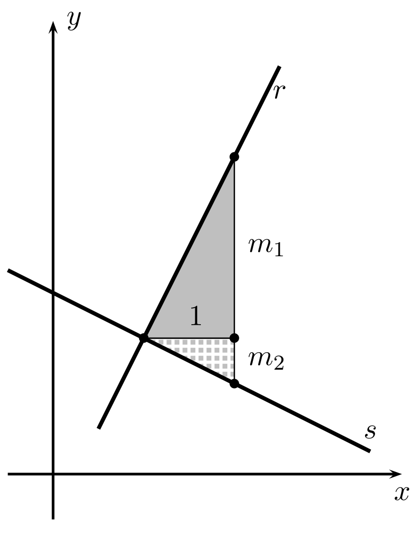
Exercício 1.12. Mostre que o triângulo com vértices $(5, -2)$, $(6, 5)$ e $(2, 2)$ é isósceles.

Exercício 1.13. Determine a e b sabendo que $(8, -10)$ é o ponto médio do segmento de reta entre $(-6, 4)$ e (a, b).

Exercício 1.14. Mostre que os pontos $A = (-2, 9)$, $B = (4, 6)$, $C = (1, 0)$ e $D = (-5, 3)$ são vértices de um quadrado.

Exercício 1.15. Mostre que vale a condição de perpendicularidade (1.2), à p. 27.

Sugestão: Considere uma reta r com inclinação m_1 e, usando semelhança de triângulos, tente determinar a inclinação da reta perpendicular s a partir da figura dada.



Exercício 1.15: Retas Perpendiculares

Nos Exercícios 1.16 a 1.27, também esboce a(s) reta(s) envolvida(s) no plano xy.

Exercício 1.16. Determine a equação geral da reta que passa pelo ponto $(3, -2)$ e tem coeficiente angular $m = -\dfrac{1}{2}$.

Exercício 1.17. Determine a equação reduzida da reta que passa pelos dois pontos $P_1 = (1, 5)$ e $P_2 = (-3, 4)$.

Exercício 1.18. Determine a equação geral da reta que passa por $(-4, 3)$ e é paralela à reta de equação $2x - 8y + 7 = 0$.

Exercício 1.19. Determine a equação da reta que

a) passa pelo ponto $(4, 5)$ e é paralela ao eixo x;

b) passa pelo ponto $(5, 4)$ e é paralela ao eixo y;

c) passa pelo ponto $(-1, -2)$ e é perpendicular à reta $2x + 5y = -8$.

Exercício 1.20. Determine, caso existam, os pontos de interseção dos pares de retas.

a) $2x + y - 3 = 0$ e $6x + 3y - 8 = 0$

b) $x - 2y - 8 = 0$ e $2x - y + 8 = 0$

c) $6x + 3y - 1 = 0$ e $2x + y - 3 = 0$

Exercício 1.21. Mostre que as retas $3x - 5y + 19 = 0$ e $10x + 6y - 50 = 0$ são perpendiculares e determine sua interseção.

Exercício 1.22. Determine a equação da reta r que é perpendicular à reta s, sabendo que s passa pelos pontos $P = (2, 8)$ e $Q = (-4, 6)$ e que r divide o segmento PQ ao meio.

Exercício 1.23. Determine a equação da reta que tem declividade -2 e passa pelo ponto de interseção das retas r e s, cujas equações são $3x - 5y - 9 = 0$ e $2x - y + 1 = 0$, respectivamente.

Exercício 1.24. A reta de equação $3x - 4y - 12 = 0$ e os eixos coordenados do plano xy formam um triângulo. Calcule a área desse triângulo.

Exercício 1.25. Determine um ponto sobre a reta $12x - 6y = -9$ que seja equidistante dos pontos $P = (2, 2)$ e $Q = (6, -2)$.

Sugestão: Comece determinando a equação da reta que divide o segmento de reta PQ ao meio e é perpendicular ao segmento. Ou então, utilize distância.

Exercício 1.26. Encontre a equação da reta que relaciona a temperatura em graus Celsius C e em graus Fahrenheit F, sabendo que a água congela a 0ºC (igual a 32ºF) e ferve a 100ºC (igual a 212ºF).

Exercício 1.27. Determine o valor da constante k para o qual a reta de equação

$$(5k - 3)\,x - (3k + 6)\,y + 2k - 1 = 0$$

a) é paralela ao eixo x;
b) é paralela ao eixo y;
c) passa pela origem;
d) é paralela à reta de equação $y = 3x - 16$;
e) é perpendicular à reta de equação $2x + y - 1 = 0$.

Exercício 1.28. Determine as equações (padrão e geral) do círculo

a) de centro $(-3, 5)$ e raio 4;
b) que tem um diâmetro com extremidades nos pontos $(-2, -1)$ e $(2, 3)$;
c) que contém os pontos $(0, 0)$, $(6, 0)$ e $(0, 8)$.

Exercício 1.29. Determine o centro e o raio dos círculos representados pelas equações.

a) $4x^2 + 4y^2 + 12x - 32y + 37 = 0$
b) $16x^2 + 16y^2 + 8x + 32y = -1$
c) $2x^2 + 2y^2 - x + y = 1$

Exercício 1.30. Determine a equação geral da reta que passa pelo centro do círculo de equação $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ e é perpendicular à reta de equação $3x + y - 10 = 0$.

Exercício 1.31. Determine a distância entre os centros dos círculos de equações

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 16 = 0 \qquad \text{e} \qquad x^2 + y^2 + 6x - 4y - 25 = 0.$$

Exercício 1.32. Determine a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 + 2x = 9$ no ponto $P = (2, -1)$.

Exercício 1.33. Dado o círculo $x^2 + y^2 = 20$, determine se o ponto $P = (-1, 2)$ está dentro, fora ou sobre esse círculo.

Exercício 1.34. Repita o exercício anterior, considerando o círculo $x^2+y^2-2y-4 = 0$ e $P = (3, 5/2)$.

Exercício 1.35. Um ponto (x, y) se move de tal forma que a soma dos quadrados de suas distâncias aos pontos $(4, 1)$ e $(2, -5)$ é 45. Mostre que o ponto se move ao longo de um círculo e determine o centro e o raio desse círculo.

Exercício 1.36. Determine os valores de c para os quais o sistema de equações dado tenha uma solução ou nenhuma solução.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ (x - c)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Exercício 1.37. Determine os valores de c para os quais o sistema de equações dado tenha uma solução, duas soluções ou nenhuma solução.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x - c)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Sugestão: Comece esboçando os gráficos dos círculos.

Exercício 1.38. Uma empresa paga a seus vendedores uma diária de R$ 60,00 para acomodações e refeições e ainda R$ 3,00 por quilômetro rodado. Obtenha uma função que forneça o custo diário C, para a empresa, de um vendedor em termos do número x de quilômetros percorridos. Faça também um esboço no plano da reta que representa o custo C.

Exercício 1.39. Uma fábrica compra uma máquina por R$ 3.000,00. Ao final de 10 anos, a máquina estará obsoleta e não terá mais valor algum. Representando o tempo em anos por t, obtenha uma função que expresse o valor V da máquina a cada ano que passa, durante o período desses 10 anos em que será utilizada, sabendo que o custo depende linearmente do tempo. Faça também um esboço no plano da reta que representa V.

Exercício 1.40. Uma companhia de telefones celulares oferece a seus clientes duas opções: na primeira opção, cobra R\$ 38,00 pela assinatura mensal e R\$ 0,60 por minuto de conversação; na segunda, não há taxa de assinatura, mas o minuto de conversação custa R\$ 1,10.

a) Qual a opção mais vantajosa para 1 hora de conversação mensal?
b) A partir de quanto tempo a outra opção torna-se mais vantajosa?

Exercício 1.41. Uma central de cópias está oferecendo a seguinte promoção.

- O preço da cópia é de R\$ 0,10 para até 100 cópias de um mesmo original.
- Caso o número de cópias de um mesmo original seja superior a 100, o preço será de R\$ 0,07 para as cópias que excederem 100, até 200 cópias.
- Caso o número de cópias de um mesmo original seja superior a 200, o preço baixa novamente e será de R\$ 0,05 para as cópias que excederem 200.

a) Determine o preço pago por 320 cópias de um mesmo original.
b) Obtenha a função que define o preço p em termos do número x de cópias de um mesmo original.

Exercício 1.42. Use a tabela da Receita Federal dada no Exemplo 1.13, à p. 36 para resolver as questões seguintes.

a) Calcule o imposto devido para um ganho mensal de R\$ 500,00. Calcule, também, o imposto devido para ganhos mensais de R\$ 1.500,00 e R\$ 3.000,00.
b) Encontre a função I que associa, a cada ganho mensal x, o imposto devido $I(x)$.
c) Dê uma interpretação para os valores da terceira coluna da tabela acima.

Exercício 1.43. Ao chegar a um aeroporto, um turista informou-se sobre locação de automóveis e condensou as informações recebidas na tabela seguinte.

Opções	Diária	Preço por km rodado
Locadora 1	R\$ 50,00	R\$ 0,20
Locadora 2	R\$ 30,00	R\$ 0,40
Locadora 3	R\$ 65,00	R\$ 0,00 (km livre)

a) Obtenha uma função que defina o preço y da locação por um dia, em termos do número x de quilômetros rodados, em cada uma das situações apresentadas na tabela.
b) Represente, no mesmo plano cartesiano, os gráficos dessas funções.

c) A partir de quantos quilômetros rodados num dia o cliente deve preferir a Locadora 1 ao invés da Locadora 2?

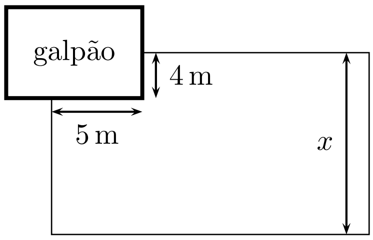
d) A partir de quantos quilômetros o cliente deve optar pela Locadora 3?

Exercício 1.44. Suponha que uma partícula desloca-se em linha reta, a uma velocidade constante, do ponto A até o ponto C, distante 200 cm de A. Esboce o gráfico da função que expressa, para cada tempo t, a distância entre a partícula e o ponto médio do segmento $\overline{AC}$, no instante t.

Exercício 1.45. Ingerindo uma mistura de soja e lentilha, uma pessoa deseja alcançar a quantidade diária adequada de 70 g de proteínas. Sabendo que cada 100 g de soja seca contêm 35 g de proteínas e que cada 100 g de lentilha seca contêm 25 g de proteínas, obtenha uma relação entre a quantidade x de soja e a quantidade y de lentilha que deverão ser ingeridas para totalizar 70 g de proteínas diárias. E se a pessoa quiser totalizar pelo menos 70 g de proteínas, como fica a relação, em gramas, entre as quantidades de soja e de lentilha?

Os últimos exercícios deste capítulo foram retirados de provas da disciplina MAT01353 Cálculo e Geometria Analítica IA. Alguns poderão ser resolvidos com os conteúdos apresentados neste texto. No entanto, as soluções dos que estão marcados com $\star$ requerem conteúdos que só serão desenvolvidos na disciplina. Para esses problemas, deverão ser resolvidos apenas os itens identificados com o sinal $\checkmark$.

Exercício 1.46.* Um terreno com área de $380\,\text{m}^2$ deve ser cercado. As paredes de um galpão, já construído no terreno vizinho, serão aproveitadas, segundo o esboço ao lado. Determine as dimensões do terreno que minimizem a quantidade de cerca usada. $\checkmark$ *Expresse o comprimento da cerca utilizada em função do comprimento x do lado do terreno indicado.*



Exercício 1.47. Uma caixa aberta é feita a partir de um pedaço retangular de cartolina, removendo em cada canto um quadrado de lado x e dobrando as abas. Sabendo que os lados da cartolina medem 8 e 6 cm, expresse o volume da caixa obtida como função de x.

Exercício 1.48.* Um holofote está no solo, a 20 m de um edifício de 9 m de altura. Um homem de 1,80 m de altura anda a uma velocidade de 1,5 m/s a partir do holofote, em direção ao edifício. ✓ *Resolva somente o item* a).

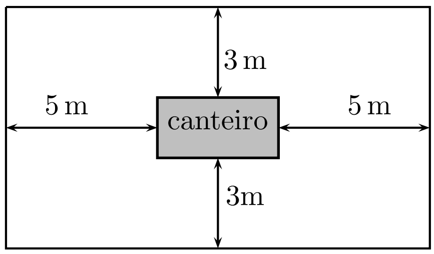
a) Expresse o comprimento s da sombra que o homem projeta sobre o edifício, em função de sua distância x ao holofote.

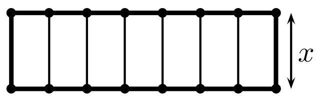
b) Determine a taxa de variação instantânea de s em relação ao tempo, quando o homem estiver a 17 m do edifício. (Indique a unidade da taxa.) Nesse instante, o comprimento da sombra está aumentando ou diminuindo ?

Exercício 1.49.* A areia que está caindo de uma calha de escoamento, cai de tal modo que forma um cone cuja altura é sempre igual ao diâmetro da base. Se a altura do cone cresce a uma taxa constante de 1,5 m/min, com que taxa a areia estará escoando quando a pilha tiver 3 m de altura? ✓ *Expresse o volume do cone em função da altura h do cone.*

Exercício 1.50. Uma caixa sem tampa, com base quadrada, deve ter um volume de 600 cm^3. O material usado para confeccionar a base da caixa custa 3 reais por cm^2 e o material usado nas laterais custa 5 reais por cm^2. Determine a função que expressa o custo C para fabricar a caixa, em termos da medida x de um dos lados da base dessa caixa.

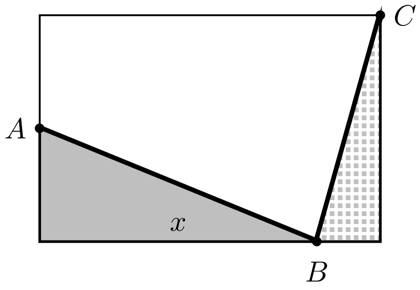
Exercício 1.51. Em uma praça, deseja-se construir um canteiro de 15 m^2 circundado por um gramado, conforme mostra a figura. Sabendo que cada m^2 da grama custa 20 reais, expresse o custo total do gramado em termos da medida x de um dos lados do canteiro. *Atenção: A figura dada é meramente ilustrativa, pois não está em escala!*





Exercício 1.52. Um veterinário deve cercar uma área de 140 m^2 para construir sete canis, primeiro cercando uma região retangular e, em seguida, subdividindo-a em sete retângulos menores, conforme a figura ao lado. Determine a função que expressa o custo total da cerca, em termos do comprimento x indicado na figura, sabendo que o custo da cerca externa é de R\$ 6,00 por metro e o custo da cerca usada nas divisórias internas é de R\$ 3,00 por metro.

Exercício 1.53. Num jardim retangular com lados de 10 e 15 metros será colocada uma cerca, fixando-a nos pontos A, B e C indicados na figura, para demarcar dois canteiros triangulares, que aparecem hachurados na figura dada. Sabendo que o ponto A está exatamente no meio do lado menor, expresse o comprimento L da cerca, como função da medida x do cateto indicado na figura. Não esqueça de indicar o domínio da função.



Atenção: A figura dada é meramente ilustrativa, pois não está em escala!

1.9.1 – EXERCÍCIOS da SEÇÃO 1.8 (Leitura Complementar)

Exercício 1.54. Considere, como no exemplo da Seção 1.8, um retângulo com 20 cm de base e 8 cm de altura. Dessa vez, retiramos x unidades da base e acrescentamos x unidades na altura. Com quais valores de x a área do novo retângulo é inferior ao dobro desse valor x?

Exercício 1.55. Refaça o exercício precedente, dessa vez usando um retângulo com b cm de base e h cm de altura, sendo $b > h$.

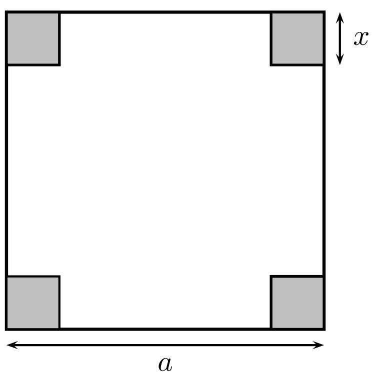
Polinômios

Capítulo 2

Ada Maria de Souza Doering
Luisa Rodríguez Doering

Muitos dos problemas práticos que surgem no cotidiano de uma pessoa ou de alguma empresa ou, ainda, provenientes de questões com que se depara um cientista ou um assistente de um centro tecnológico, podem ser *modelados* em termos matemáticos e ter, então, *a posteriori*, encontrada sua solução mediante a resolução de algum tipo de *equação matemática*. Essas equações matemáticas, por sua vez, podem ser de natureza diversa; o objeto principal neste capítulo é entender, e muitas vezes resolver, as equações *polinomiais*. Para isso, veremos algumas noções básicas sobre polinômios, mais precisamente, do ponto de vista de funções.

Iniciamos com um exemplo de problema prático que pode ser modelado, em termos matemáticos, através de uma equação polinomial.



Digamos que um fabricante necessite construir uma embalagem em forma de uma caixa sem tampa, de base quadrada, de tal maneira que o volume seja 1 (uma unidade de volume, que pode ser centímetros cúbicos, metros cúbicos, etc). Para tal fim será utilizada uma superfície quadrada de papelão com lados de comprimento a: dele devemos retirar quatro quadrados iguais de lados de comprimento x, como mostra a figura. O valor desconhecido de x deve, então, satisfazer a equação $x(a-2x)^2 = 1$, que pode ser escrita na forma

$$4x^3 - 4ax^2 + a^2x - 1 = 0, \tag{2.1}$$

o que constitui um exemplo de uma equação *polinomial* de grau 3.

Será possível construir uma tal caixa? Caso afirmativo, haverá diferentes maneiras de fazê-lo? Ou seja, diferentes valores de x para os quais obtenhamos essa caixa com 1 unidade de volume? Em termos matemáticos, essas perguntas equivalem a questionar a existência e, respectivamente, a unicidade de soluções dessa equação polinomial (2.1).

Para entendermos melhor essas questões, e para resolvê-las, necessitamos de algumas definições e resultados.

Expressões do tipo

$$3x^2 + 6x + 1, \qquad x^6, \qquad (x-2)^4, \qquad 4x^3 - \frac{2}{3}\,x^2 + \frac{7}{2}\,x + 5,$$

$$\frac{x^5}{3} + \frac{4}{5}\,x^4 + 5x^2, \qquad x^3 - \sqrt{3}x^2 + \sqrt{5}x - 7,$$

$$(x-3)(x-1)^3(x-5)^4 \qquad \text{e} \qquad 4x^6 - 2ix^4 + (4-i)x - 9$$

são exemplos de polinômios; todas podem ser reescritas na forma geral

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

onde x é uma variável e $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ são números reais (ou até, na última expressão, números *complexos*), denominados *coeficientes* do polinômio.

Dizemos que dois polinômios são *iguais* se, e somente se, os coeficientes dos termos de mesmo grau são iguais. Neste texto, tratamos principalmente com polinômios reais, ou seja, com coeficientes em $\mathbb{R}$, dando maior ênfase aos polinômios com coeficientes racionais, de $\mathbb{Q}$ (ver Seção 1.1).

Podemos interpretar os polinômios como funções reais. Dado um polinômio $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, dizemos que

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

com $x \in \mathbb{R}$, define uma *função* polinomial $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Por outro lado, $p(x) = 0$ define uma *equação* polinomial.

Dizemos que um polinômio $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ tem *grau* n se $a_n \neq 0$, o que denotamos por $\partial(p) = n$. Ao polinômio *nulo* $p(x) = 0x^n + \cdots + 0x + 0$, com todos coeficientes iguais a zero, não atribuímos grau algum. Entretanto, observe que todos os demais polinômios constantes $p(x) = k$, com $k \neq 0$, têm grau 0.

O produto de um polinômio por um número não nulo é um polinômio de mesmo grau, isto é, se p é um polinômio e k é uma constante não nula, então

$$\partial(k \cdot p) = \partial(p).$$

A soma e o produto de polinômios são, ainda, polinômios e o grau da soma e do produto dependem dos graus de cada um dos polinômios envolvidos, da seguinte maneira. Se p, q são duas funções polinomiais, então

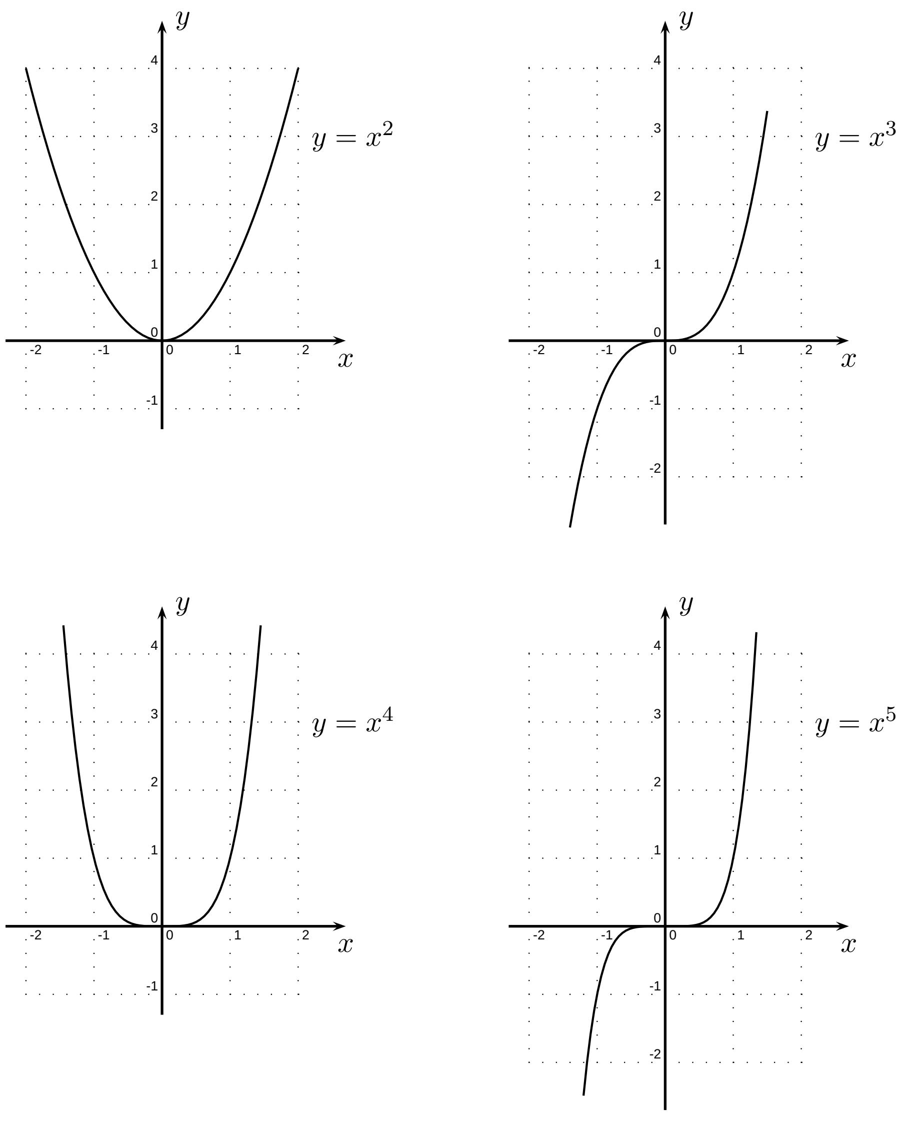
$$\partial(p+q) \leq \max\{\partial(p), \partial(q)\} \quad \text{e} \quad \partial(p \cdot q) = \partial(p) + \partial(q).$$

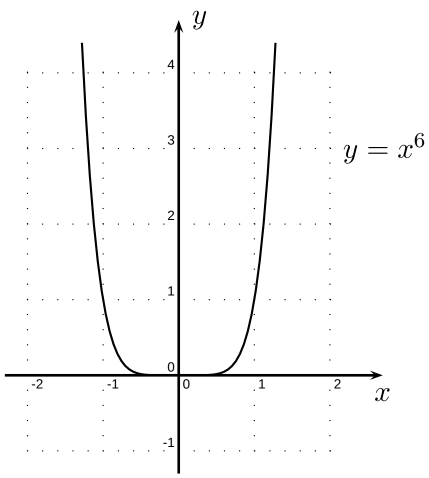
Uma outra noção importante sobre polinômios é a de raiz. Dizemos que um número α é uma *raiz* de um polinômio p se for uma solução da equação polinomial $p(x) = 0$, ou seja, se $p(\alpha) = 0$.

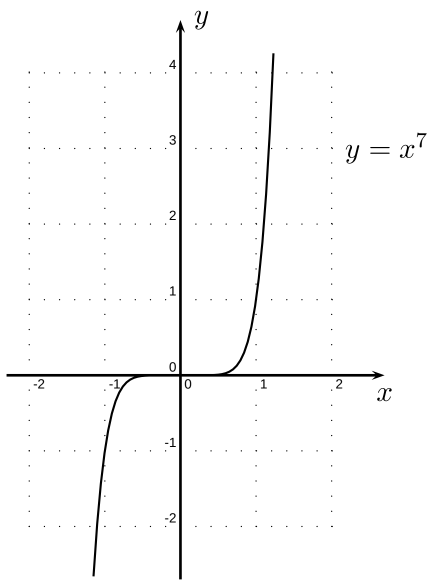
2.1 – A FAMÍLIA x^n

Iniciamos nosso estudo com polinômios bastante simples, as potências de x, que são polinômios do tipo $p(x) = x^n$, com $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

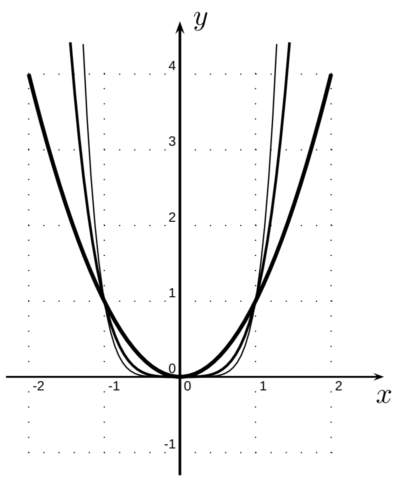
Vejamos os gráficos das funções $y = p(x) = x^n$, com n fixado, para $2 \leq n \leq 7$. Com a exceção de $n = 1$, ou seja, $y = x$, vemos que é possível classificar as potências de x em dois tipos: potência com n par e potência com n ímpar. Quando n for par, o gráfico de $y = x^n$ será "semelhante" ao gráfico da parábola $y = x^2$ e, quando n for ímpar, o gráfico de $y = x^n$ será "semelhante" ao gráfico da cúbica $y = x^3$.

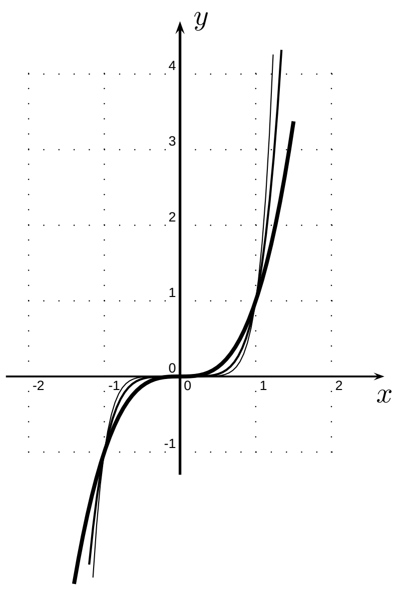




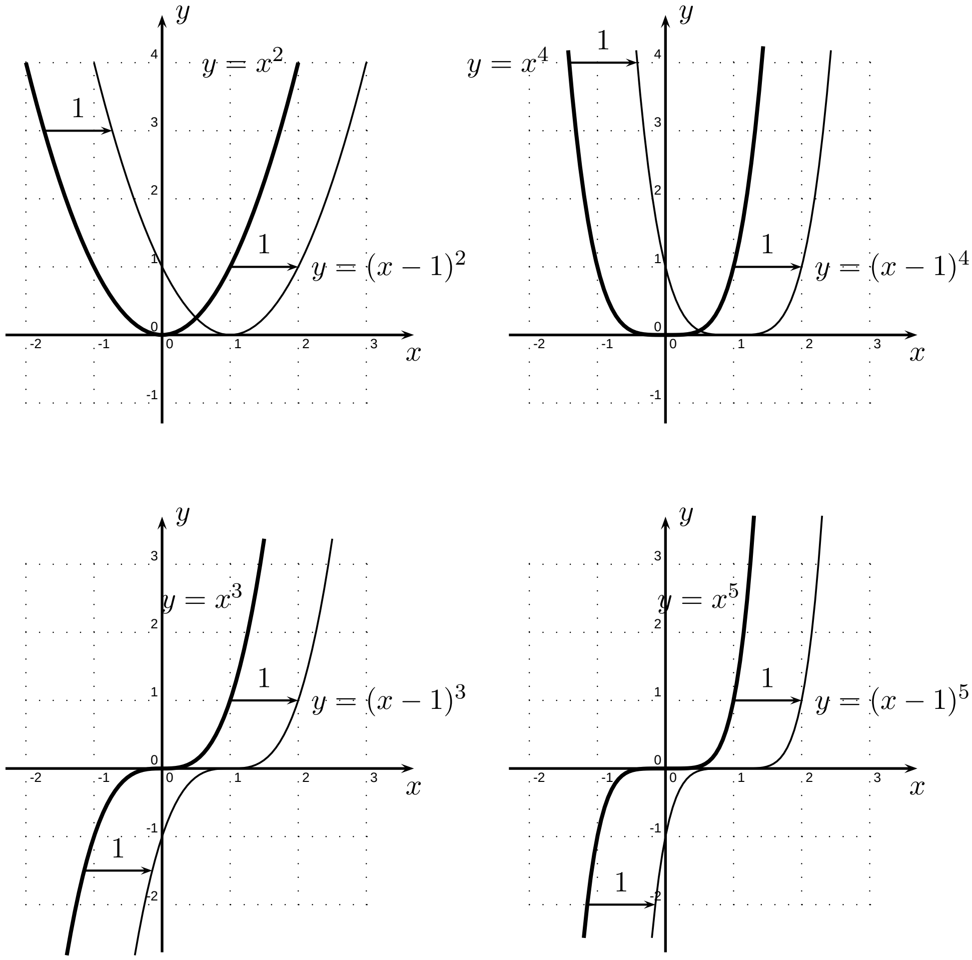


A seguir comparamos entre si os três gráficos das potências x^n, com n par, dados acima, esboçando-os no mesmo sistema de eixos, bem como os três com n ímpar. Identifique esses gráficos.



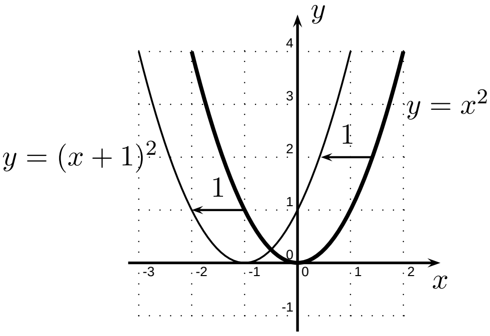


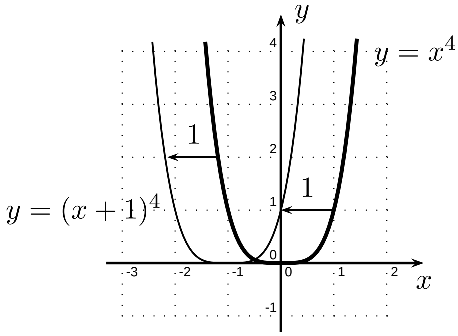
Os gráficos das potências de $(x - 1)$ podem ser esboçados utilizando os gráficos das potências de x, bastando transladar os respectivos gráficos de $y = x^n$ uma unidade para a direita, como podemos ver nas figuras seguintes.

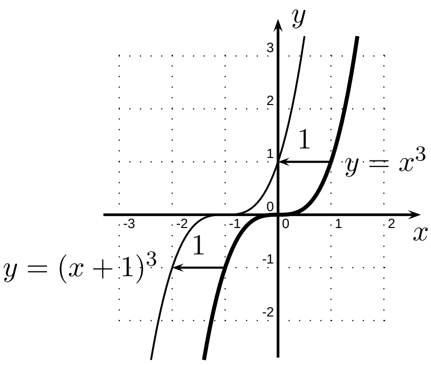


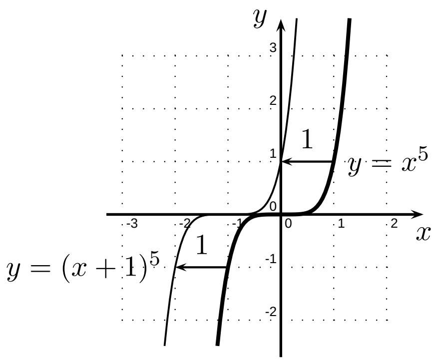
Esse procedimento é válido para um número real qualquer, ou seja, os gráficos das potências de $(x - a)$ são obtidos transladando, horizontalmente, os gráficos das potências de x para a direita ou esquerda, dependendo de a ser positivo ou negativo.

Vejamos os gráficos das potências de $(x + 1)$. Note que, aqui, a translação é para a esquerda, pois $a = -1$, já que $x + 1 = x - (-1)$.

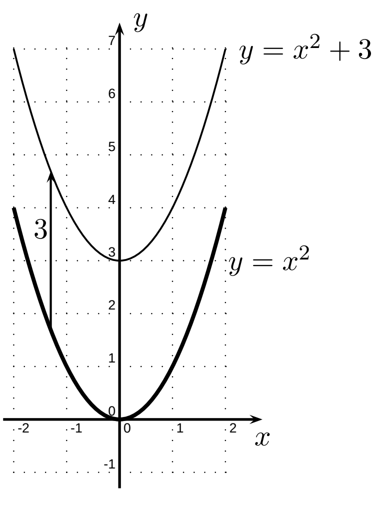


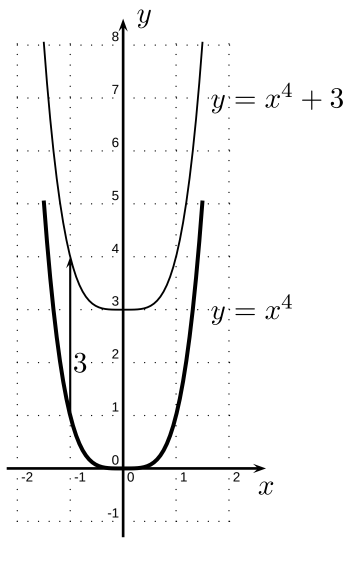


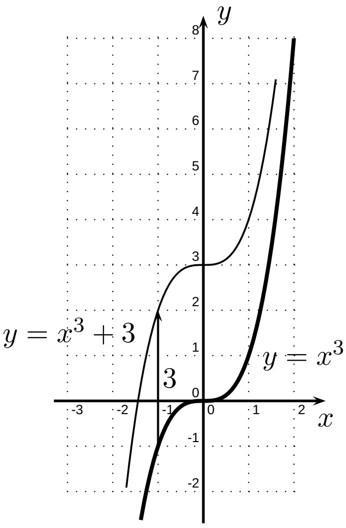


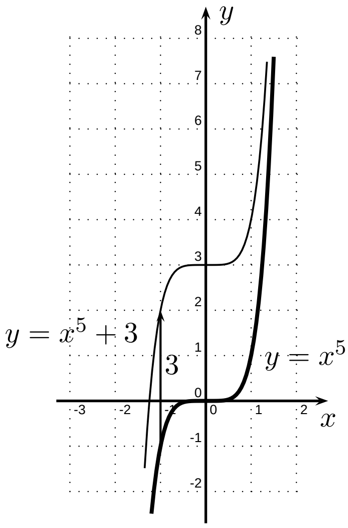


Também podemos fazer translações verticais dos gráficos das potências de x, caso em que a constante aparece fora da potência. Observe os exemplos seguintes.







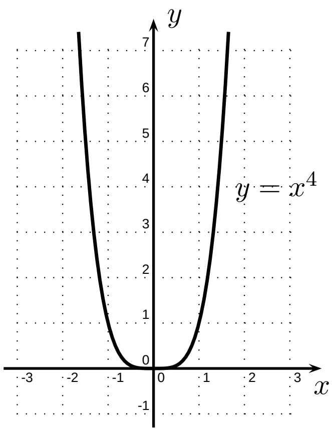


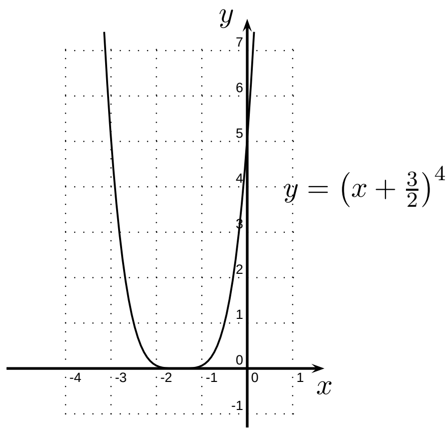
Assim, o gráfico da função polinomial $y = x^n + k$ é uma translação vertical por k unidades do gráfico de $y = x^n$, para cima ou para baixo, dependendo de k ser positivo ou negativo, respectivamente.

Exemplo 2.1. Esbocemos o gráfico do polinômio $p(x) = \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^4 - 16$, indicando os pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados.

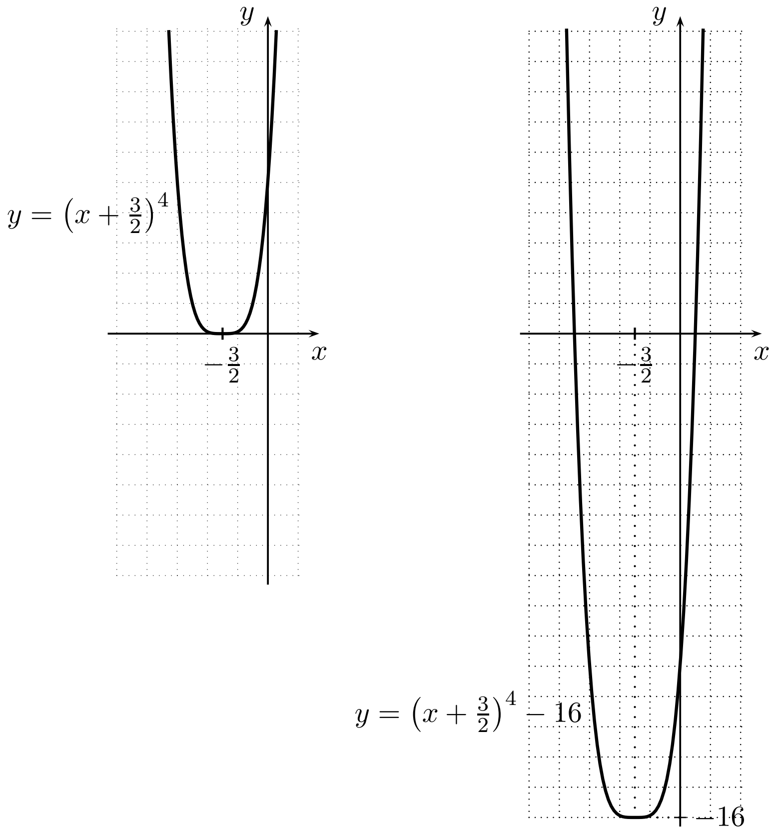
Combinando as duas técnicas, podemos ver que o gráfico desse polinômio $p(x)$ vem a ser uma translação horizontal, seguida de uma translação vertical, do gráfico de $y = x^4$.

Inicialmente, efetuamos uma translação para a esquerda de $\frac{3}{2}$ de unidade no gráfico de $y = x^4$, conforme figuras abaixo.





Em seguida, efetuamos uma translação vertical para baixo de 16 unidades no gráfico translasdado que acabamos de obter, ou seja, no de $y = \left(x + \frac{3}{2}\right)^4$.



Determinemos os pontos de interseção do gráfico de p com os eixos coordenados. O corte do gráfico com o eixo y ocorre exatamente com $x = 0,$ ou seja, em

$$p(0) = \left(0 + \frac{3}{2}\right)^4 - 16 = \frac{81}{16} - 16 = \frac{81 - 256}{16} = -\frac{175}{16},$$

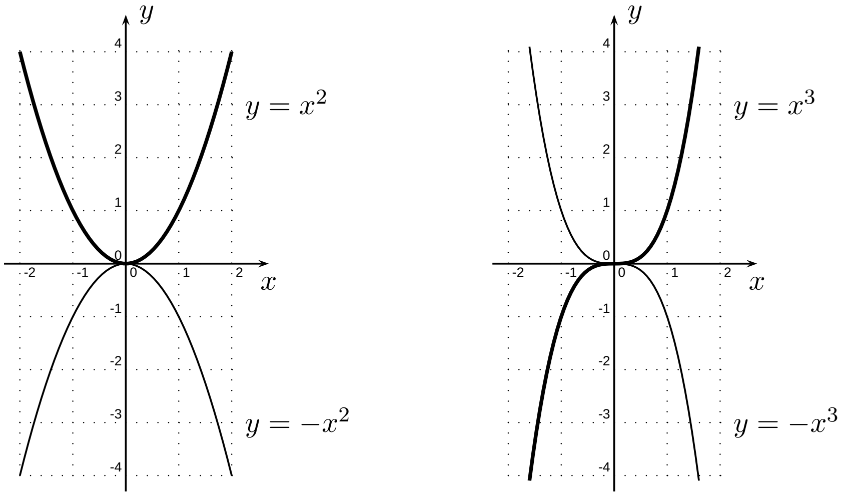
na proximidade de $y = -11$, como pode ser observado no último gráfico acima. Já os cortes do gráfico de p com o eixo x são as *raízes* de $p,$ ou seja, as soluções da equação $p(x) = 0$ ou, equivalentemente, as raízes de $\left(x + \frac{3}{2}\right)^4 - 16 = 0$. Como

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{3}{2}\right)^4 - 16 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(x + \frac{3}{2}\right)^4 = 16 \quad \Longleftrightarrow \quad \left|x + \frac{3}{2}\right| = \sqrt[4]{16} = 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad x + \frac{3}{2} = 2 \quad \text{ou} \quad x + \frac{3}{2} = -2, \end{aligned}$$

temos que as raízes de p são $x = 2 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$ e $x = -2 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{7}{2}$, o que também é coerente com o último gráfico acima.

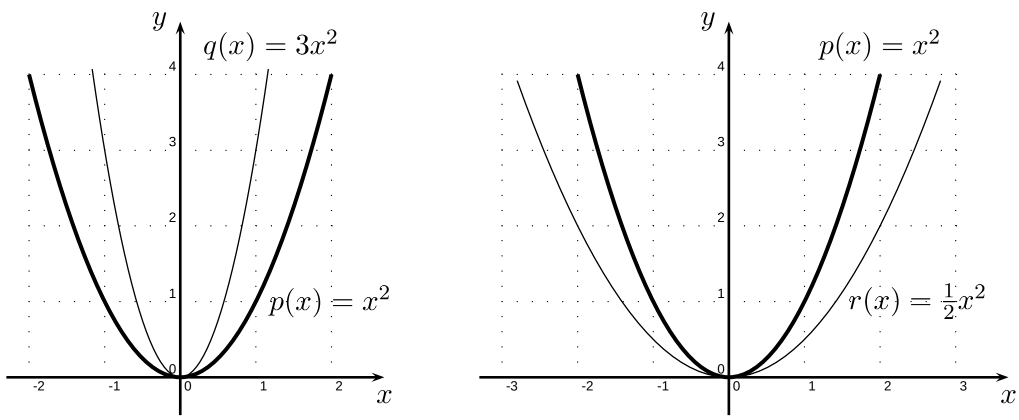
2.3 – REFLEXÃO EM TORNO DO EIXO x

Vejamos o esboço do gráfico de $y = -x^2$. É fácil constatar que esse gráfico é o que chamamos de uma *reflexão* do gráfico de $y = x^2$ pelo eixo x, pois a função polinomial aplicada em cada ponto tem o mesmo valor, só que com o sinal oposto, ao de $y = x^2$. Isso vale também para as outras potências de x, como era de se esperar.



2.4 – ALONGAMENTO E COMPRESSÃO

A ideia, agora, é entender o que acontece quando multiplicamos o polinômio $p(x) = x^n$ por uma constante. Por exemplo, comparemos o gráfico de $p(x) = x^2$ com o dos polinômios $q(x) = 3x^2$ e $r(x) = \frac{1}{2}x^2$.



Como $p(x) = x^2 < 3x^2 = q(x)$ para cada x, verificamos que o gráfico de $y = 3x^2$ está sempre acima do de $y = x^2$, exceto na origem, onde ocorre uma interseção, já que

$$3x^2 = x^2 \iff 2x^2 = 0 \iff x = 0.$$

Dizemos que o gráfico de $q(x) = 3x^2$ é um *alongamento* (vertical) do gráfico de $y = x^2$, conforme o gráfico da esquerda ao pé da página anterior.

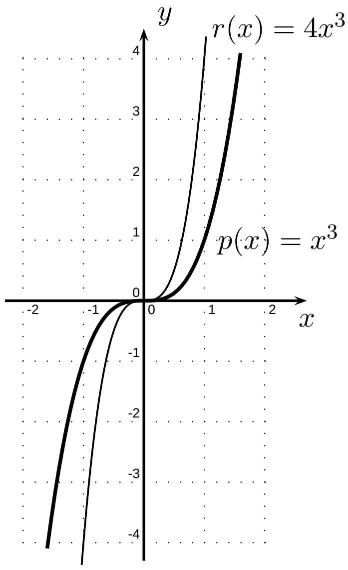
De maneira análoga podemos verificar que o gráfico de $r(x) = \frac{1}{2}x^2$ está sempre abaixo do gráfico de $p(x) = x^2$, pois a única interseção entre os dois gráficos ocorre em $x = 0$, já que

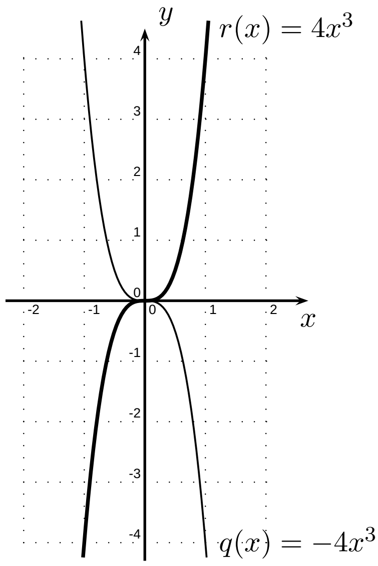
$$y = \frac{1}{2}x^2 = x^2 \iff -\frac{1}{2}x^2 = 0 \iff x = 0$$

e $p(1) = 1 > 0{,}5 = r(1)$. Dizemos, então, que o gráfico de $r(x) = \frac{1}{2}x^2$ é uma *compressão* (vertical) do gráfico de $y = x^2$, conforme o gráfico da direita ao pé da página anterior.

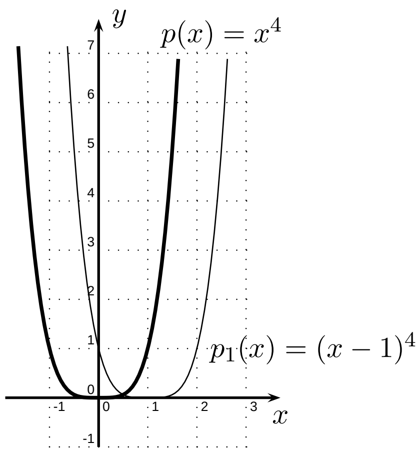
Em geral, o gráfico de $q(x) = k \cdot x^n$ é um alongamento ou uma compressão do gráfico de $p(x) = x^n$, dependendo do valor do módulo de k; se $|k| > 1$, é um alongamento e, se $0 < |k| < 1$, é uma compressão. Além disso, se k for negativo, então temos, ainda, uma reflexão em torno do eixo x.

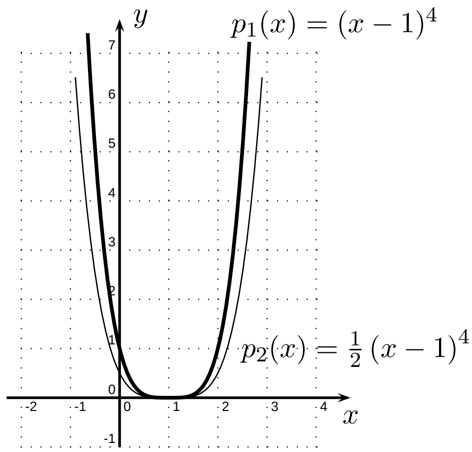
Por exemplo, observe os gráficos de $p(x) = x^3$, $q(x) = -4x^3$ e de $r(x) = 4x^3$ a seguir.



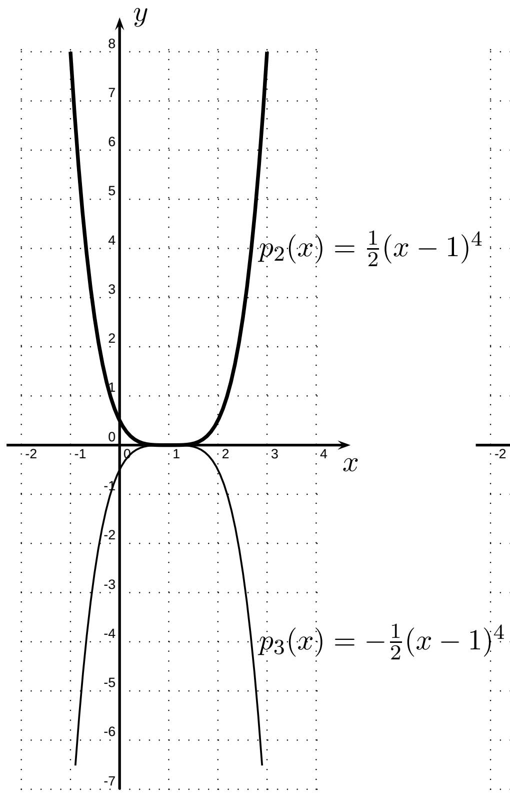


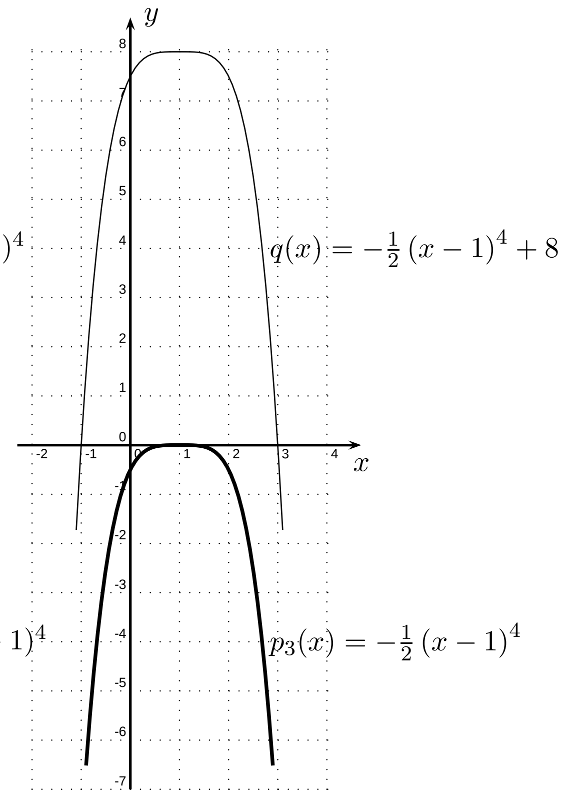
Exemplo 2.2. Esbocemos o gráfico de $q(x) = -\dfrac{1}{2}(x-1)^4 + 8$, indicando os pontos de interseção com os eixos coordenados.





Combinando todas as técnicas desenvolvidas até aqui, partimos do gráfico de $p(x) = x^4$ e obtemos, com uma translação horizontal de 1 unidade para a direita, o gráfico de $p_1(x) = (x-1)^4$, como pode ser visto na figura acima, à esquerda. Em seguida, multiplicamos essa última função por $\frac{1}{2}$, obtendo o gráfico da compressão $p_2(x) = \frac{1}{2}(x-1)^4$ de $p_1(x)$, como pode ser visto na figura acima, à direita.





Agora efetuamos uma reflexão desse gráfico em torno do eixo x, obtendo o gráfico de $p_3(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^4$ e, finalmente, transladamos esse último gráfico verticalmente 8 unidades para cima, chegando ao gráfico de $q(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^4 + 8$, conforme a última figura, na página precedente.

Determinemos os cortes do gráfico de q com os eixos coordenados. O corte do gráfico de q com o eixo y ocorre com $x = 0$, ou seja, o gráfico cruza o eixo y em

$$q(0) = -\frac{1}{2}(0-1)^4 + 8 = -\frac{1}{2} + 8 = \frac{-1+16}{2} = \frac{15}{2},$$

o que é coerente com a figura dada. Já os cortes do gráfico de q com o eixo x são as raízes de q, ou seja, as soluções de $q(x) = 0$ ou, então, de $-\dfrac{1}{2}(x-1)^4 + 8 = 0$. Como

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(x-1)^4 + 8 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2}(x-1)^4 = -8 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x-1)^4 = (-8)(-2) = 16 \quad \Longleftrightarrow \quad |x-1| = \sqrt[4]{16} = 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad x - 1 = 2 \quad \text{ou} \quad x - 1 = -2 \end{aligned}$$

temos que as raízes de q são $x = 2 + 1 = 3$ e $x = -2 + 1 = -1$, o que também pode ser conferido no gráfico esboçado acima.

Observe que podemos expandir a expressão polinomial $q(x) = -\dfrac{1}{2}(x-1)^4 + 8$ do exemplo precedente usando a fórmula do binômio, como segue[1].

$$\begin{aligned} q(x) &= -\frac{1}{2}(x-1)^4 + 8 \\ &= -\frac{1}{2}\Big(x^4 + 4\,(-1)\,x^3 + 6\,(-1)^2\,x^2 + 4\,(-1)^3\,x + (-1)^4\Big) + 8 \\ &= -\frac{1}{2}\left(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1\right) + 8 = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + \frac{15}{2}\,. \end{aligned}$$

Assim, podemos dizer que no último exemplo obtivemos o gráfico do polinômio

$$q(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + \frac{15}{2}$$

através de uma translação horizontal do gráfico de $y = x^4$, seguida de uma compressão, seguida de uma reflexão em torno do eixo x, seguida de uma translação vertical.

---

[1]Com a fórmula do binômio calculamos as potências de um binômio, a saber,

$$(a+b)^n = a^n + \tbinom{n}{1}a^{n-1}b + \tbinom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \tbinom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \tbinom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n,$$

onde $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ é a combinação de n elementos, tomados k a k, com $k < n$.

Entretanto, devemos ressaltar que só foi possível obter, com relativa facilidade, o gráfico de $q(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + \frac{15}{2}$ a partir do gráfico de $y = x^4$ porque foi possível expressar $q(x)$ na forma $q(x) = k\,(x-c)^4 + d$ (que foi, aliás, a expressão da qual partimos).

Será que todo polinômio $p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ de grau 4 pode ser reescrito na forma

$$p(x) = k\,(x-c)^4 + d,$$

para certas constantes reais k, c, d? Ocorre que, em geral, isso não é possível, pois os polinômios desse tipo terão, no máximo, duas raízes reais, já que são translações verticais do polinômio x^4. Por exemplo, o polinômio $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ é um polinômio de grau 4 com quatro raízes distintas que não pode ser expresso na forma $k\,(x-c)^4 + d$.

Além disso, mesmo para polinômios que podem ser assim reescritos, em geral não há um método que nos forneça tal expressão. A exceção são os polinômios de grau 2. O *método do completamento de quadrados*, que já vimos na Seção 1.6, sempre nos permite expressar qualquer polinômio de grau 2 na forma $k\,(x-c)^2 + d$.

2.5 – POLINÔMIOS DE GRAU 2

As funções polinomiais de grau 2, ou *funções quadráticas* a 1 variável, são funções do tipo $p(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Já sabemos esboçar o gráfico de várias funções polinomiais de grau 2, usando translações, reflexões, alongamentos e compressões do gráfico do polinômio de grau 2 básico, a saber, $y = x^2$.

Vimos na seção anterior que se soubermos escrever um polinômio de grau 2 na forma

$$p(x) = k(x-c)^2 + d, \tag{2.2}$$

então saberemos esboçar seu gráfico, usando translações, reflexões, alongamentos ou compressões do gráfico de $y = x^2$. Será que sempre é possível escrever um polinômio de grau 2 na forma (2.2)? Vejamos um exemplo.

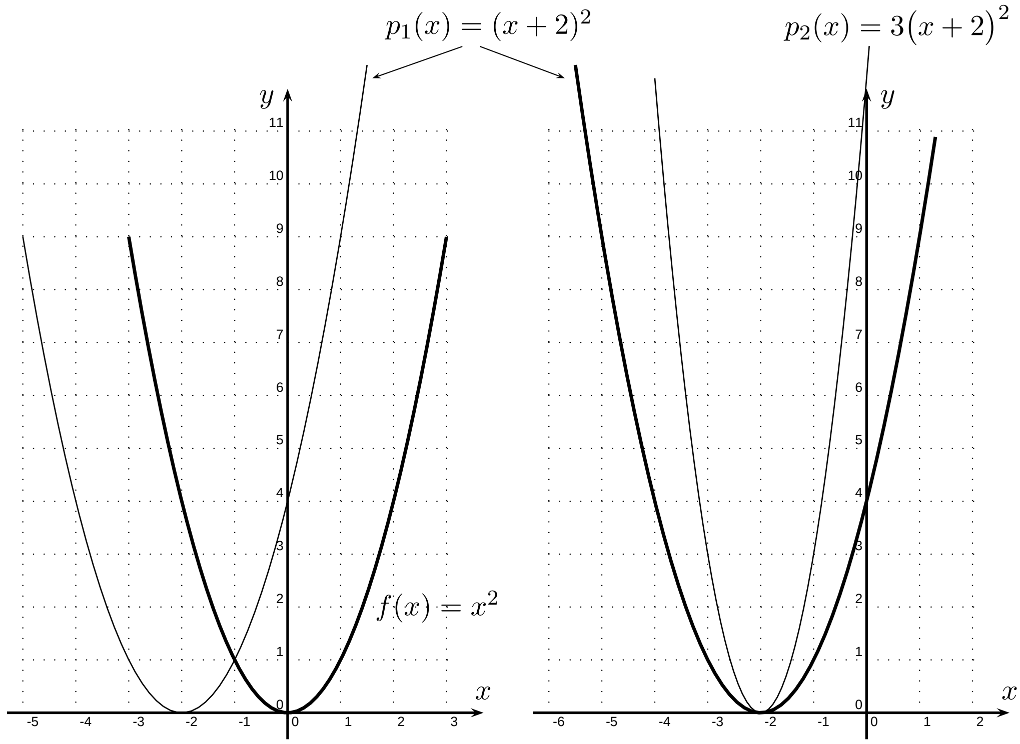
Exemplo 2.3. Esbocemos o gráfico do polinômio $p(x) = 3x^2 + 12x + 7$.

Primeiramente evidenciamos o 3 para obter um alongamento.

$$p(x) = 3x^2 + 12x + 7 = 3\left(x^2 + 4x + \frac{7}{3}\right).$$

Agora, para obter uma translação horizontal, completamos quadrados em $x^2 + 4x$ e a translação vertical aparecerá naturalmente. O coeficiente do termo em x é 4, logo devemos olhar para o quadrado de $x+2$. Como $(x+2)^2 = x^2+4x+4$, temos que $x^2+4x = (x+2)^2 - 4$, portanto, substituindo essa igualdade em $p(x)$, resulta

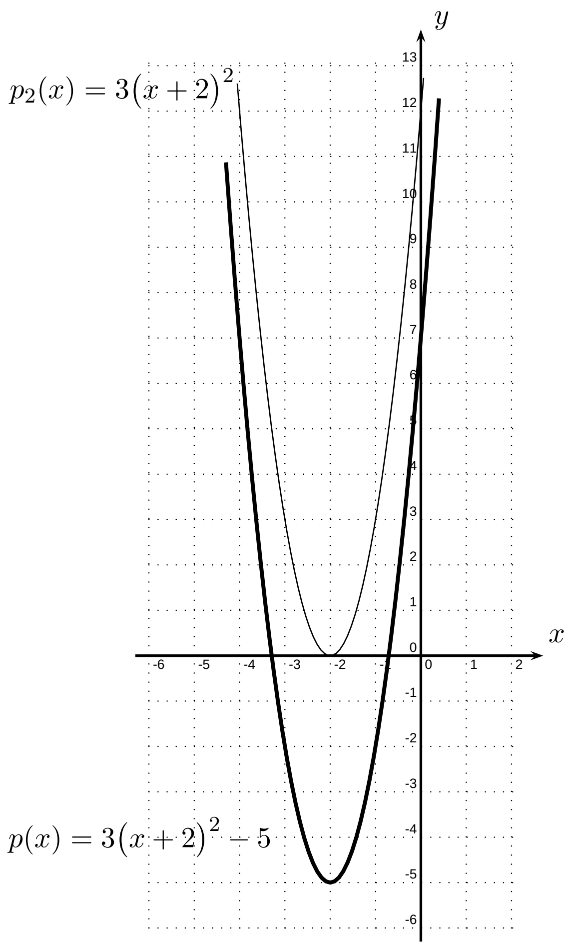
$$
\begin{aligned}
p(x) = 3x^2+12x+7 &= 3\Big[\big(x^2+4x\big)+\frac{7}{3}\Big] = 3\Big[\Big((x+2)^2-4\Big)+\frac{7}{3}\Big] \\
&= 3\Big[(x+2)^2+\Big(-4+\frac{7}{3}\Big)\Big] = 3(x+2)^2+3\Big(-4+\frac{7}{3}\Big) \\
&= 3(x+2)^2+\cancel{3}\Big(-\frac{5}{\cancel{3}}\Big) = 3(x+2)^2-5.
\end{aligned}
$$



Assim, o gráfico de $p(x) = 3x^2+12x+7 = 3(x+2)^2-5$ é dado por uma translação horizontal de 2 unidades para a esquerda do gráfico de $f(x) = x^2$, resultando $p_1(x) = (x+2)^2$, seguido de um alongamento de 3 unidades, resultando $p_2(x) = 3(x+2)^2$, conforme gráficos acima. Finalmente, efetuamos uma translação vertical de 5 unidades para baixo, obtemos o gráfico de $p(x)$, como na figura da página seguinte.

Note que o vértice na origem da parábola inicial $f(x) = x^2$ foi transladado para o vértice de $p(x)$, de coordenadas $(-2,-5)$. As raízes de p, agora, também são fáceis de calcular. De fato, temos

$$\begin{aligned} p(x) = 3(x+2)^2 - 5 = 0 \quad &\iff \quad 3(x+2)^2 = 5 \quad \iff \quad (x+2)^2 = \frac{5}{3} \\ \iff \quad |(x+2)| = \sqrt{\frac{5}{3}} \quad &\iff \quad (x+2) = \sqrt{\frac{5}{3}} \quad \text{ou} \quad (x+2) = -\sqrt{\frac{5}{3}} \\ \iff \quad x = \sqrt{\frac{5}{3}} - 2 \quad &\text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{5}{3}} - 2. \end{aligned}$$



Dado um polinômio quadrático qualquer $p(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, vamos seguir um raciocínio similar ao do exemplo anterior para responder afirmativamente a questão associada a (2.2).

Como $a \neq 0$, podemos evidenciar a, obtendo

$$p(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Agora, como no exemplo acima, completamos o quadrado de $\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$; como o coeficiente do termo em x é $\frac{b}{a}$, devemos olhar para o quadrado de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)$. Como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$, resulta

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\,.$$

Substituindo essa igualdade em $p(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}
p(x) = ax^2 + bx + c &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left(-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \cancel{a}\left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a^{\cancel{2}}}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).
\end{aligned}$$

Assim, o gráfico de $p(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ é dado por uma translação horizontal do gráfico de $y = x^2$ de $-\frac{b}{2a}$ unidades para a esquerda ou a direita, dependendo de $-\frac{b}{2a}$ ser positivo ou negativo, seguido de um alongamento ou compressão desse gráfico de a unidades (com reflexão se $a < 0$), seguido de uma translação vertical de $\left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ unidades para cima ou para baixo, dependendo do sinal de $\left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$. Note que o vértice de p tem coordenadas $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

Antes de proceder ao esboço do gráfico, vejamos como se comportam as raízes do polinômio quadrático p. Temos

$$\begin{aligned}
p(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) &= 0 \\
\iff \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \\
\iff \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).
\end{aligned}$$

O lado esquerdo da igualdade na última equação acima, por ser um quadrado, é sempre positivo ou nulo e, portanto, o mesmo deve ocorrer com o lado direito, se quisermos que $p(x) = 0$ tenha solução. Como $4a^2 > 0$, estabelecemos que $p(x) = 0$ se, e somente se, $b^2 - 4ac \geq 0$ e valer a última igualdade acima.

Assim, se $b^2 - 4ac \geq 0$, nossa equação tem solução e, para obtê-la, extraímos a raiz quadrada dos dois lados da última equação acima,

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|} = \left|\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right|$$

ou seja,

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{ou} \qquad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e, portanto,

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que é a conhecida *fórmula de Bhaskara* do Ensino Médio.

Para facilitar a escrita, denotemos $\Delta = b^2 - 4ac$. Temos três casos.

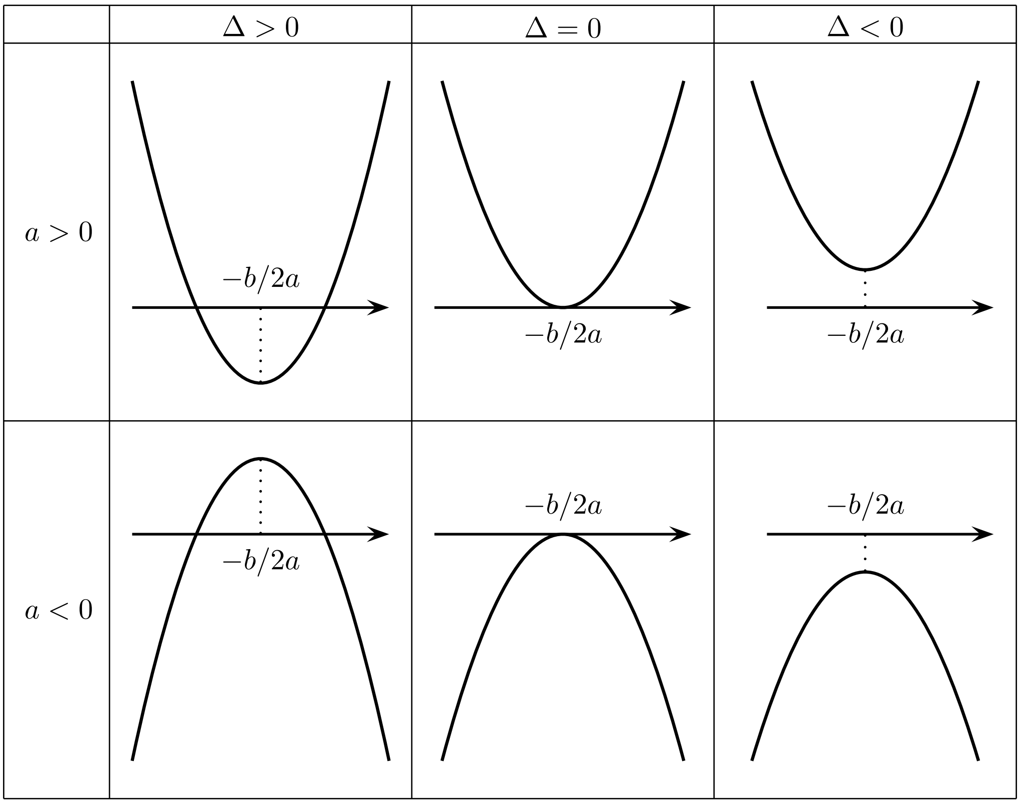
Se $\Delta < 0$, então $p(x) = 0$ não tem solução real, ou seja, p não tem raízes reais. Como $p(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$ e $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a translação vertical será para cima ou para baixo, dependendo somente do sinal de a, que também indicará se há uma reflexão pelo eixo x, ou não.

Se $\Delta = 0$, então $p(x) = 0$ tem uma única solução, ou seja, p só tem a única raiz $-\frac{b}{2a}$ e sua equação é da forma $p(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, não havendo a translação vertical, de modo que o gráfico de p tangencia o eixo x em $-\frac{b}{2a}$ e haverá, ou não, uma reflexão pelo eixo x, dependendo do sinal de a.

Se $\Delta > 0$, então $p(x) = 0$ tem duas soluções distintas (explicitadas acima) e, nessas raízes, o gráfico de p não tangenciará o eixo x mas sim atravessará esse eixo. Note que, nesse caso, p tomará tanto valores positivos quanto negativos (o que não ocorre nos demais casos). Como $p(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$ e $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, a translação vertical será para cima ou para baixo, dependendo somente do sinal de a, que também indicará se há uma reflexão pelo eixo x, ou não.

Resumimos os resultados com uma tabela contendo todos os possíveis gráficos de

$$p(x) = ax^2 + bx + c = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 + \Big(\frac{-b^2 + 4ac}{4a}\Big).$$



Note que, nessa tabela, não traçamos o eixo y, já que não analisamos o sinal de $-\dfrac{b}{2a}$. Vemos, assim, que sempre podemos esboçar o gráfico de um polinômio de grau 2, usando apenas translações, reflexões e alongamentos ou compressões do gráfico de $y = x^2$. Além disso, quando houver raízes reais (caso $\Delta \geq 0$), essas poderão ser computadas pela fórmula de Bhaskara, demonstrada acima. Isso tudo porque sempre podemos escrever

$$p(x) = ax^2 + bx + c = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 + \Big(-\frac{b^2 - 4ac}{4a}\Big).$$

Para polinômios de grau 3 já não teremos tanta sorte: não será possível representá-los apenas através de translações, reflexões e alongamentos ou compressões do gráfico de $y = x^3$ e tampouco teremos suas raízes expressas de uma maneira simples em termos dos coeficientes do polinômio.

Nas próximas seções, apresentaremos um resultado fundamental no estudo de polinômios, que nos permitirá entender melhor os polinômios de grau maior do que ou igual a 3, a saber, o algoritmo da divisão, bem como algumas de suas consequências.

2.6 – O ALGORITMO DA DIVISÃO

O algoritmo da divisão polinomial é muito semelhante ao algoritmo da divisão de números naturais. Ao dividirmos dois números naturais, por exemplo, quando dividimos 3275 por 15, encontramos um quociente, que nesse caso é 218, e um resto, que exigimos ser menor que 15 (caso contrário, ainda poderíamos continuar a divisão) e que, nesse caso é 5. Escreve-se, então,

$$3275 = 15 \cdot 218 + 5. \tag{2.3}$$

Com polinômios com coeficientes reais (ou complexos, ou racionais) acontece o mesmo. O exemplo abaixo mostra como efetuar a divisão do polinômio de grau 5 $4x^5 + 6x^4 + (2\sqrt{2} - 1)x^2 + 2x - 1$ pelo quadrático $2x^2 + 2x - 1$.

$$\begin{array}{rrrlll|l}
4x^5 & +6x^4 & +0x^3 & +(2\sqrt{2}-1)x^2 & +2x & -1 & \ 2x^2+2x-1 \\ \cline{7-7}
-4x^5 & -4x^4 & +2x^3 & & & & 2x^3+x^2+\sqrt{2} \\ \cline{1-3}
 & +2x^4 & +2x^3 & +(2\sqrt{2}-1)x^2 & & & \\
 & -2x^4 & -2x^3 & +x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & & +2\sqrt{2}x^2 & +2x & -1 & \\
 & & & -2\sqrt{2}x^2 & -2\sqrt{2}x & +\sqrt{2} & \\ \cline{4-6}
 & & & & (2-2\sqrt{2})x & +(\sqrt{2}-1) &
\end{array}$$

Portanto, o quociente da divisão é $2x^3 + x^2 + \sqrt{2}$ e o resto é $(2 - 2\sqrt{2})x + (\sqrt{2} - 1)$. Analogamente a (2.3), podemos escrever

$$\begin{aligned}
&4x^5 + 6x^4 + (2\sqrt{2} - 1)x^2 + 2x - 1 \\
&\qquad = (2x^2 + 2x - 1)(2x^3 + x^2 + \sqrt{2}) + \Big[\big(2 - 2\sqrt{2}\big)\, x + \big(\sqrt{2} - 1\big)\Big].
\end{aligned}$$

Confira! Essa divisão sempre pode ser feita, segundo o *algoritmo da divisão de polinômios*, que podemos enunciar da seguinte forma.

Teorema 2.1 (Divisão de Polinômios). *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ dois polinômios com coeficientes reais, sendo $g(x) \neq 0$. Existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$ com coeficientes reais tais que $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ e $r(x) = 0$ ou $\partial r < \partial g$. Além disso, esses polinômios são únicos.*

Note que, quando $g(x)$ tem grau 1 então, ou o resto da divisão é nulo ou é um polinômio de grau zero. Logo, se o divisor $g(x)$ tem grau 1, então o resto é um polinômio constante. Observamos, também, que o teorema é válido para polinômios $f(x)$ e $g(x)$ com coeficientes complexos, caso em que o quociente e o resto terão coeficientes reais ou complexos.

Exemplo 2.4. Determinemos o quociente e o resto da divisão de

$$f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 5x + 6$$

por a) $(x - 1)$ e b) $(x - 3)$.

a) $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 5x + 6 = (x - 1) \cdot (x^3 - x - 6)$, pois o quociente é $x^3 - x - 6$ e o resto é zero, já que

$$\begin{array}{rrrrrl}
x^4 & -x^3 & -x^2 & -5x & +6 & \quad \underline{\big|\; x-1 \quad} \\
\underline{-x^4} & \underline{+x^3} & & & & \quad x^3 - x - 6 \\
 & 0x^3 & -x^2 & -5x & & \\
 & & \underline{+x^2} & \underline{-x} & & \\
 & & & -6x & +6 & \\
 & & & \underline{+6x} & \underline{-6} & \\
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Assim, obtivemos

$$f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 5x + 6 = (x - 1) \cdot (x^3 - x - 6) \tag{2.4}$$

Observe que se calcularmos o valor de $f(x)$ quando $x = 1$ em (2.4), teremos

$$f(1) = (1 - 1)(1^3 - 1 - 6) = 0.$$

Logo, 1 é raiz de $f(x)$.

b) $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 5x + 6 = (x - 3) \cdot (x^3 + 2x^2 + 5x + 10) + 36$, pois o quociente é $x^3 + 2x^2 + 5x + 10$ e o resto é 36, já que

$$\begin{array}{rrrrrl}
x^4 & -x^3 & -x^2 & -5x & +6 & \quad \underline{\big|\; x-3 \qquad\qquad} \\
\underline{-x^4} & \underline{+3x^3} & & & & \quad x^3 + 2x^2 + 5x + 10 \\
 & +2x^3 & -x^2 & & & \\
 & \underline{-2x^3} & \underline{+6x^2} & & & \\
 & & +5x^2 & -5x & & \\
 & & \underline{-5x^2} & \underline{+15x} & & \\
 & & & +10x & +6 & \\
 & & & \underline{-10x} & \underline{+30} & \\
 & & & & 36 &
\end{array}$$

Assim, obtivemos

$$f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 5x + 6 = (x - 3) \cdot (x^3 + 2x^2 + 5x + 10) + 36 \tag{2.5}$$

Observe que se calcularmos o valor de $f(x)$ quando $x = 3$ em (2.5), teremos

$$f(3) = (3 - 3)(3^3 + 2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 10) + 36 = 36,$$

portanto, $f(3) = 36 \neq 0$, e 3 não é raiz de $f(x)$.

O que acabamos de ver nesse exemplo vale de maneira geral.

Proposição 2.2. *Sejam $f(x)$ um polinômio de grau n e α um número qualquer (que pode até ser complexo). O resto da divisão de $f(x)$ por $(x - \alpha)$ é $f(\alpha)$.*

É fácil justificar essa afirmação, pois quando dividimos $f(x)$ por $(x - \alpha)$, obtemos um quociente $q(x)$ e um resto r, que sabemos ser constante (pelo que vimos acima). Escrevemos, então, $f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x) + r$ e segue que

$$f(\alpha) = (\alpha - \alpha)\, q(\alpha) + r = 0 + r = r$$

é o resto da divisão de $f(x)$ por $(x - \alpha)$.

Em particular, decorre daí que α é raiz de $f(x)$ se, e somente se, $r = 0$. Assim, temos o seguinte resultado importantíssimo sobre polinômios.

Proposição 2.3. *Sejam $p(x)$ um polinômio de grau n e α um número qualquer (que pode ser complexo). Então, α é uma raiz de $p(x)$ se, e somente se, existe um polinômio $q(x)$, de grau $n - 1$, tal que $p(x) = q(x) \cdot (x - \alpha)$.*

Decorre dessa proposição que se $p(x)$ é um polinômio de grau n e α é uma raiz de $p(x)$, então existe um polinômio $q_1(x)$, de grau $n - 1$, tal que $p(x) = q_1(x) \cdot (x - \alpha)$. Se α também é raiz de $q_1(x)$, existe um outro polinômio $q_2(x)$, de grau $n - 2$, tal que $q_1(x) = q_2(x) \cdot (x - \alpha)$ e, consequentemente, $p(x) = q_2(x) \cdot (x - \alpha)^2$. Se α também é raiz de $q_2(x)$, existe um outro polinômio $q_3(x)$, de grau $n - 3$, tal que $q_2(x) = q_3(x) \cdot (x - \alpha)$ e, consequentemente, $p(x) = q_3(x) \cdot (x - \alpha)^3$. Prosseguindo dessa maneira, acabamos encontrando um polinômio $q_k(x)$ de grau $n - k$ que **não** tem α como raiz e satisfaz $p(x) = q_k(x) \cdot (x - \alpha)^k$. Nesse caso, dizemos que k é a multiplicidade da raiz α.

Assim, dizemos que uma raiz α de um polinômio $p(x)$ de grau n é uma raiz de *multiplicidade* $k \geq 1$ se existir um polinômio $q(x)$ de grau $n - k$ tal que $q(\alpha) \neq 0$ e

$$p(x) = q(x) \cdot (x - \alpha)^k.$$

Exemplo 2.5. Fatoremos o polinômio $p(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 12x + 4$.

Uma raiz desse polinômio é 1 pois $p(1) = 1^5 - 3 \cdot 1^4 - 1^3 + 11 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 4 = 0$. Procedemos à divisão.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & -3x^4 & -x^3 & +11x^2 & -12x & +4 & x-1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & +x^4 & & & & & x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 \\ \cline{1-2}
 & -2x^4 & -x^3 & & & & \\
 & +2x^4 & -2x^3 & & & & \\ \cline{2-3}
 & & -3x^3 & +11x^2 & & & \\
 & & +3x^3 & -3x^2 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 8x^2 & -12x & & \\
 & & & -8x^2 & +8x & & \\ \cline{4-5}
 & & & & -4x & +4 & \\
 & & & & +4x & -4 & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Assim, $p(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 12x + 4 = (x-1)(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4)$. Também é fácil ver que 1 é raiz de $q(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$, pois $q(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 4 = 0$. Procedemos, agora, à divisão de $q(x)$ por $(x-1)$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2x^3 & -3x^2 & +8x & -4 & x-1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & & & & x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ \cline{1-2}
 & -x^3 & -3x^2 & & & \\
 & +x^3 & -x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & -4x^2 & +8x & & \\
 & & +4x^2 & -4x & & \\ \cline{3-4}
 & & & +4x & -4 & \\
 & & & -4x & +4 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Desse modo, $q(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x^3 - x^2 - 4x + 4)$ e, portanto, $p(x) = (x-1)(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4) = (x-1)^2(x^3 - x^2 - 4x + 4)$. Só que 1 também é raiz de $t(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, já que $q(1) = 1^3 - 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 0$. Agora,

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -x^2 & -4x & +4 & x-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2 - 4 \\ \cline{1-2}
 & 0 & -4x & +4 & \\
 & & +4x & -4 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

de modo que $t(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x^2-4)$ e, portanto, $p(x) = (x-1)(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4) = (x-1)^2(x^3 - x^2 - 4x + 4) = (x-1)^3(x^2-4)$. Mas o polinômio (x^2-4) é uma diferença de quadrados e podemos fatorá-lo como o produto da soma pela diferença, $(x^2-4) = (x-2)(x+2)$.

Assim, concluímos que $p(x) = (x-1)^3(x-2)(x+2)$ tem três raízes distintas, a saber, 1, 2 e -2, sendo $\alpha_1 = 1$ uma raiz de multiplicidade 3 e $\alpha_2 = 2$ e $\alpha_3 = -2$ de multiplicidade 1.

Será que sempre é possível fatorar um polinômio totalmente, como no exemplo precedente?

Iniciamos com o caso mais simples possível, o de polinômios de grau 1. Tomando $p(x) = 4x + 3$, sua raiz é $-\frac{3}{4}$. Pela Proposição 2.3, existe um polinômio $q(x)$ de grau 0 (logo, uma constante) tal que $p(x) = \left(x + \frac{3}{4}\right) q(x)$. Podemos proceder com a divisão mostrada acima, só que nesse caso é mais fácil evidenciar o 4 em $p(x)$ para obter

$$p(x) = 4x + 3 = 4\left(x + \frac{3}{4}\right).$$

Assim, com polinômios de grau 1, a multiplicidade da raiz é sempre 1. Se $p(x) = a\,x + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, então $p(x) = a\,x + b = a\left(x + \dfrac{b}{a}\right)$.

Agora, vejamos como funciona essa fatoração para polinômios de grau 2 e 3 tomando, inicialmente, exemplos.

Exemplo 2.6. Fatoremos $p(x) = 5x^2 - 6x + 1$.

É fácil ver que $\alpha = 1$ é raiz de $p(x)$, uma vez que $p(1) = 5 - 6 + 1 = 0$, de modo que $p(x)$ é divisível por $x - 1$. Procedemos à divisão.

$$\begin{array}{rrr|l}
5x^2 & -6x & +1 & \;x-1 \\ \cline{4-4}
-5x^2 & +5x & & \;5x-1 \\ \cline{1-2}
 & -x & +1 & \\
 & +x & -1 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

Desse modo, $q(x) = 5x - 1$ e escrevemos $p(x) = 5x^2 - 6x + 1 = (x-1)(5x-1)$. Já sabemos como fatorar $q(x) = 5x - 1 = 5\left(x - \frac{1}{5}\right)$, logo

$$p(x) = 5x^2 - 6x + 1 = (x-1)(5x-1) = 5\,(x-1)\left(x - \frac{1}{5}\right).$$

Se usarmos a fórmula de Bhaskara para determinar as raízes de $p(x)$, também encontraremos $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = \frac{1}{5}$. Logo, para obter a fatoração de $p(x)$ em termos de suas raízes, basta multiplicar os fatores $(x-1)$ e $\left(x - \frac{1}{5}\right)$ pelo coeficiente do termo de maior grau que, no caso, é 5.

Assim, para fatorar um polinômio $p(x)$ de grau 2, determinamos suas raízes α_1 e α_2 e escrevemos $p(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$, onde a é o coeficiente de x^2. No caso em que $\Delta > 0$, cada raiz tem multiplicidade 1. Se $\Delta = 0$, temos $\alpha_1 = \alpha_2$ e $p(x) = a(x-\alpha_1)^2$, logo α_1 tem multiplicidade 2. Se $\Delta < 0$, esse tipo de fatoração não é possível nos reais.

Note que, no exemplo acima, $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ que é o termo independente dividido pelo coeficiente do termo em x^2 (termo de maior grau). Também a soma, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ é o simétrico do coeficiente do termo em x dividido pelo coeficiente do termo em x^2. Esse é mais um resultado que vale em geral.

Proposição 2.4. *Sejam $p(x) = x^2 + bx + c$ um polinômio com $b, c \in \mathbb{R}$ e α e β suas raízes. Então $b = -(\alpha+\beta)$ e $c = \alpha \cdot \beta$.*

De fato, como α e β são raízes de $p(x)$, sabemos que, $p(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$; mas $(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - \beta x - \alpha x + \alpha \cdot \beta = x^2 - (\beta+\alpha)x + \alpha\cdot\beta$. Agora basta igualar os coeficientes de mesmo grau.

E se o coeficiente de x^2 do polinômio $p(x)$ for diferente de 1? Como no exemplo precedente, observe que $p(x) = ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ e, agora, $q(x) = x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ tem coeficiente de x^2 igual a 1.

Exemplo 2.7. Fatoremos o polinômio $p(x) = 15x^3 + 17x^2 + x - 1$.

É fácil ver que -1 é raiz, pois

$$p(-1) = 15(-1)^3 + 17(-1)^2 - 1 - 1 = -15 + 17 - 2 = 0$$

e, portanto, $p(x)$ é divisível por $x - (-1) = x + 1$. Efetuemos a divisão.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
15x^3 & +17x^2 & +x & -1 & x+1 \\ \cline{5-5}
-15x^3 & -15x^2 & & & 15x^2+2x-1 \\ \cline{1-2}
 & 2x^2 & +x & & \\
 & -2x^2 & -2x & & \\ \cline{2-3}
 & & -x & -1 & \\
 & & +x & +1 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Assim, escrevemos $p(x) = 15x^3 + 17x^2 + x - 1 = (x+1)\cdot(15x^2+2x-1)$. Será que $p(x)$ tem outras raízes? Se tiver, elas serão as raízes de $q(x) = 15x^2 + 2x - 1$. As raízes de $q(x)$ são fáceis de determinar, pela fórmula de Bhaskara; como $\Delta = 2^2 - 4(15)(-1) = 4(1+15) = 4 \cdot 16$, temos

$$\alpha_1 = \frac{-2+8}{2 \cdot 15} = \frac{6}{2 \cdot 15} = \frac{1}{5} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{-2-8}{2 \cdot 15} = -\frac{10}{2 \cdot 15} = -\frac{1}{3}$$

Assim, pelo que vimos no exemplo precedente, tanto $\left(x - \frac{1}{5}\right)$ quanto $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ são divisores de $q(x)$ e podemos escrever $q(x) = 15\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$.

Voltando ao polinômio $p(x)$ original, obtivemos

$$p(x) = 15x^3 + 17x^2 + x - 1 = 15\,(x+1)\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right).$$

Observe que, pensando da mesma maneira, podemos mostrar que um polinômio $p(x)$ de grau 3 qualquer tem, no máximo, três raízes e, se esse polinômio tiver as três raízes α_1, α_2 e α_3, podemos escrevê-lo como

$$p(x) = k(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3),$$

onde k é o coeficiente de x^3 em $p(x)$. Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, temos $p(x) = k(x - \alpha_1)^3$ e α_1 tem multiplicidade 3. Se $\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3$, temos $p(x) = k(x - \alpha_1)^2(x - \alpha_3)$ e α_1 tem multiplicidade 2 e α_3 tem multiplicidade 1. Se α_1, α_2 e α_3, são duas a duas distintas, temos $p(x) = k(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$ e todas as raízes têm multiplicidade 1.

Note que, também nesse caso, o termo independente é o simétrico do produto das raízes multiplicado por k (que é o coeficiente do termo de maior grau) e que, agora, a soma das raízes é o simétrico do coeficiente em x^2 dividido por k. Verifique!

Exemplo 2.8. Fatoremos o polinômio $p(x) = 2x^3 + 2$.

Esse polinômio admite -1 como raiz, pois $p(-1) = 2(-1)^3 + 2 = 0$ e, portanto, $p(x) = 2x^3 + 2$ é divisível por $(x - (-1))$. Efetuemos essa divisão.

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +0x^2 & +0x & +2 & \; x+1 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & -2x^2 & & & 2x^2 - 2x + 1 \\ \cline{1-2}
 & -2x^2 & +0x & & \\
 & +2x^2 & +2x & & \\ \cline{2-3}
 & & +2x & +2 & \\
 & & -2x & -2 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Podemos, então, escrever $p(x) = 2x^3 + 2 = (x+1)(2x^2 - 2x + 1)$. Como $q(x) = 2x^2 - 2x + 1$ não tem raízes reais, já que $\Delta = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4 < 0$, então $p(x) =$

$2x^3+2=(x+1)(2x^2-2x+1)$ não pode ser fatorado como produto de polinômios com coeficientes reais de grau 1. Resulta que esse polinômio tem apenas *uma* raiz real.

Esse resultado vale em geral.

Proposição 2.5. *Um polinômio $p(x)$ de grau n, com coeficientes reais, possui, no máximo, n raízes reais. Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são todas as raízes reais distintas de $p(x)$ e $n_1, n_2, \ldots, n_k$ suas respectivas multiplicidades, então podemos escrever*

$$p(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\cdots(x-\alpha_k)^{n_k}\, t(x),$$

onde t é uma função polinomial de grau $n-(n_1+n_2+\cdots+n_k)$, desprovida de raízes reais. Se $p(x)$ possuir exatamente n raízes reais, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, então

$$p(x) = a\,(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n),$$

onde a é o coeficiente de x^n.

2.7 – RAÍZES RACIONAIS DE POLINÔMIOS COM COEFICIENTES INTEIROS

Vimos na seção anterior que, se conhecermos as raízes de um polinômio não nulo, sua fatoração é facilmente determinada através do algoritmo da divisão. Uma pergunta que surge de maneira natural é a seguinte: dado um polinômio qualquer, será que existem raízes? Como determinar uma dessas raízes?

Para polinômios de grau 2, essa pergunta já foi respondida em seções anteriores. No entanto, é muito difícil respondê-la no caso geral, mesmo para polinômios de graus pequenos como 3 ou 4, por exemplo. Para polinômios de grau maior do que ou igual a 5 não existe uma fórmula que funcione sempre, como a fórmula de Bhaskara funciona para grau 2. Assim, vamos nos limitar a casos particulares.

Exemplo 2.9. Fatoremos o polinômio $p(x) = 9x^5+18x^4+8x^3+16x^2-x-2$.

Observe que todos os coeficientes de $p(x)$ estão em $\mathbb{Z}$, ou seja, são inteiros. Inicialmente vamos tentar determinar as possíveis raízes inteiras de $p(x)$. Se $\alpha \in \mathbb{Z}$ é uma raiz de $p(x)$, então

$$0 = p(\alpha) = 9\alpha^5+18\alpha^4+8\alpha^3+16\alpha^2-\alpha-2.$$

Podemos reescrever essa equação colocando todas as parcelas que têm α de um mesmo lado da igualdade, obtendo

$$\alpha(9\alpha^4+18\alpha^3+8\alpha^2+16\alpha-1) = 9\alpha^5+18\alpha^4+8\alpha^3+16\alpha^2-\alpha = 2.$$

Como $9\alpha^4 + 18\alpha^3 + 8\alpha^2 + 16\alpha - 1 \in \mathbb{Z}$, podemos concluir que α é um divisor de 2, logo α é igual a $-1, 1, -2$ ou 2. Temos, assim, que apenas 4 números inteiros podem ser raízes de p. Testando, verificamos que

$$\begin{aligned}
p(-1) &= 9(-1)^5 + 18(-1)^4 + 8(-1)^3 + 16(-1)^2 - (-1) - 2 \\
&= -9 + 18 - 8 + 16 + 1 - 2 = 16 \neq 0, \\
p(1) &= 9(1)^5 + 18(1)^4 + 8(1)^3 + 16(1)^2 - (1) - 2 \\
&= 9 + 18 + 8 + 16 - 1 - 2 = 48 \neq 0, \\
p(2) &= 9(2)^5 + 18(2)^4 + 8(2)^3 + 16(2)^2 - (2) - 2 = 2^5(9 + 9 + 2 + 2) - 4 \\
&= 32 \cdot 22 - 4 = 740 + 74 - 4 = 810 \neq 0, \\
p(-2) &= 9(-2)^5 + 18(-2)^4 + 8(-2)^3 + 16(-2)^2 - (-2) - 2 \\
&= 2^5(-9 + 9 - 2 + 2) + 0 \\
&= 2^5 \cdot 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Logo, -2 é a única raiz de $p(x)$ em $\mathbb{Z}$. Dividindo $p(x)$ por $(x-(-2)) = (x+2)$, obtemos

$$p(x) = (x + 2) \cdot (9x^4 + 8x^2 - 1).$$

Agora, para obter as outras raízes de $p(x)$ é necessário (e também suficiente) obter as raízes do polinômio quociente $q(x) = 9x^4 + 8x^2 - 1$. Note que $q(x) = 9x^4 + 8x^2 - 1$ só possui potências pares de x. Assim, para obter suas raízes, ou seja, as soluções da equação $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$, podemos fazer uma mudança de variáveis, denotando x^2 por z e, com isso, essa equação fica equivalente a $9z^2 + 8z - 1 = 0$. Mas essa equação, por sua vez, é uma equação do segundo grau, que já sabemos resolver. Pela fórmula de Bhaskara, as soluções de $9z^2 + 8z - 1 = 0$ são

$$\begin{aligned}
z &= \frac{-8 + \sqrt{64 - 4 \cdot 9 \cdot (-1)}}{2 \cdot 9} = \frac{-8 + 10}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} \quad \text{e} \\
z &= \frac{-8 - \sqrt{64 - 4 \cdot 9 \cdot (-1)}}{2 \cdot 9} = \frac{-8 - 10}{18} = -\frac{18}{18} = -1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$x^2 = z = \frac{1}{9} \qquad \text{ou} \quad x^2 = z = -1$$

e as soluções de $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$ são

$$x = \frac{1}{3}, \quad x = -\frac{1}{3}, \quad x = i \quad \text{e} \quad x = -i.$$

Portanto, conhecemos as quatro raízes de $q(x)$ e obtemos

$$\begin{aligned}
q(x) = 9x^4 + 8x^2 - 1 &= 9 \cdot \left[x^4 + \frac{8}{9}x^2 - \frac{1}{9}\right] \\
&= 9 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - i)(x + i).
\end{aligned}$$

Assim,

$$p(x) = (x+2)\cdot(9x^4+8x^2-1) = (x+2)\cdot 9\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-i)(x+i)$$

e obtivemos todas as raízes de $p(x)$. Note que o passo inicial foi descobrir se $p(x)$ tinha, ou não, raízes inteiras e, para isso, o que fizemos foi selecionar as possíveis raízes inteiras de $p(x)$.

O método utilizado vale no caso geral e temos o seguinte resultado.

Proposição 2.6. *Seja $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ um polinômio com coeficientes inteiros, ou seja $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$. Se $p(x)$ possui uma raiz α em $\mathbb{Z}$ então α deve ser um divisor de a_0.*

É fácil justificar essa proposição, mesmo no caso geral, bastando seguir os passos do exemplo. Se $\alpha \in \mathbb{Z}$ é uma raiz de $p(x)$, então

$$p(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \cdots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0.$$

Reescrevendo essa expressão, como no exemplo, resulta

$$\alpha\big(a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + a_{n-2}\alpha^{n-3} + \cdots + a_2\alpha + a_1\big) = -a_0$$

e, como $a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + a_{n-2}\alpha^{n-3} + \cdots + a_2\alpha + a_1 \in \mathbb{Z}$, podemos concluir que α é um divisor de $-a_0$, logo um divisor de a_0.

Exemplo 2.10. Determinemos, se existirem, as raízes inteiras do polinômio

$$p(x) = 3x^5 + 2x^4 - 16x^3 + 8x^2 - 19x + 6.$$

Primeiramente, vemos que $a_0 = 6$ e que, então, as possibilidades para a(s) raiz(es) α inteira(s) de $p(x)$ são os divisores de 6, que são $-1,\ 1,\ -2,\ 2,\ -3,\ 3,\ -6$ e 6. Agora testamos esses valores em $p(x)$ (ou, então, podemos dividir $p(x)$ por $(x-\alpha)$), obtendo

$$p(1)\neq 0;\quad p(-1)\neq 0;\quad p(2)=0;\quad p(-2)\neq 0;$$

$$p(3)\neq 0;\quad p(-3)=0;\quad p(6)\neq 0;\quad p(-6)\neq 0.$$

Assim, vemos que as raízes inteiras de $p(x)$ são 2 e -3. Podemos tentar determinar, agora, se $p(x)$ possui raízes racionais. Seja $\dfrac{c}{d}$ um número racional com c e $d \neq 0$ números inteiros relativamente primos. Se $\dfrac{c}{d}$ for raiz de $p(x)$, teremos

$$p\left(\frac{c}{d}\right) = 3\cdot\frac{c^5}{d^5} + 2\cdot\frac{c^4}{d^4} - 16\cdot\frac{c^3}{d^3} + 8\cdot\frac{c^2}{d^2} - 19\cdot\frac{c}{d} + 6 = 0.$$

Multiplicando essa igualdade por d^5 obtemos

$$3c^5 + 2c^4d - 16c^3d^2 + 8c^2d^3 - 19cd^4 + 6d^5 = 0,$$

que tanto pode ser reescrito como

$$c\big(3c^4 + 2c^3d - 16c^2d^2 + 8cd^3 - 19d^4\big) = -6d^5 \tag{2.6}$$

quanto também como

$$\big(2c^4 - 16c^3d + 8c^2d^2 - 19cd^3 + 6d^4\big)d = -3c^5 \tag{2.7}$$

Como c e d são números inteiros relativamente primos, podemos concluir de (2.6) que c é divisor de 6 e, de (2.7), que d é divisor de -3. Logo, c pode ser $-1, -2, -3, -6, 1$, 2, 3 ou 6 e d pode ser $-1, -3, 1$ ou 3.

Desse modo, as possibilidades para $\dfrac{c}{d}$ são

$$-1,\ -2,\ -3,\ -6,\ 1,\ 2,\ 3,\ 6,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{3}{3},\ \frac{3}{3},\ -\frac{6}{3},\ \frac{6}{3}$$

e, retirando as duplicidades, restam apenas

$$-1,\ -2,\ -3,\ -6,\ 1,\ 2,\ 3,\ 6,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}.$$

Observe que $-1, -2, -3, -6, 1, 2, 3$ e 6 já haviam aparecido antes, como candidatos a raízes inteiras de $p(x)$. Como já conhecemos as raízes inteiras de $p(x)$, que são 2 e -3, podemos concluir que os únicos possíveis números racionais não inteiros que têm chances de ser raízes de $p(x)$ são

$$-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}.$$

Aplicamos, agora, o polinômio $p(x)$ nesses pontos, obtendo

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) \neq 0, \quad p\left(\frac{1}{3}\right) = 0, \quad p\left(-\frac{2}{3}\right) \neq 0 \quad \text{e} \quad p\left(\frac{2}{3}\right) \neq 0.$$

Logo, $\dfrac{1}{3}$ é a única raiz racional não inteira de $p(x)$.

Se repetirmos esse argumento para o caso geral teremos o seguinte resultado.

Proposição 2.7. *Seja* $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *um polinômio com coeficientes inteiros, isto é,* $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$. *Se* c *e* $d \neq 0$ *são números inteiros relativamente primos tais que* $\dfrac{c}{d}$ *é uma raiz de* $p(x)$, *então* c *é um divisor de* a_0 *e* d *é um divisor de* a_n.

Exemplo 2.11. Determinemos, se existirem, as raízes racionais do polinômio

$$p(x) = 6x^3 + 17x^2 + 11x + 2.$$

Pela proposição acima, sabemos que se $\dfrac{c}{d}$ é uma raiz de $p(x)$, então c é um divisor de 2, de modo que pode ser $-2, -1, 1$ ou 2, e d é um divisor de 6, de modo que pode ser $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3$ ou 6. Assim, as possibilidades para $\dfrac{c}{d}$ são

$$-2,\ 2,\ -1,\ 1,\ -\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{2}{6},\ \frac{2}{6},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{2},\ \frac{2}{2}$$

e, retirando as duplicidades, restam apenas

$$-2,\ 2,\ -1,\ 1,\ -\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\,.$$

Note que podemos reduzir essas possibilidades pela metade, pois como o polinômio possui todos os coeficientes positivos, suas raízes só podem ser negativas; desse modo, só restam as possibilidades

$$-2,\ -1,\ -\frac{1}{6},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3}\,.$$

Aplicando esses valores no polinômio, obtemos

$$p(-2) = p\left(-\frac{1}{3}\right) = p\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

e

$$p(-1) \neq 0, \quad p\left(-\frac{1}{6}\right) \neq 0 \quad \text{e} \quad p\left(-\frac{2}{3}\right) \neq 0.$$

Assim, as raízes racionais de $p(x)$ são -2, $-\dfrac{1}{3}$ e $-\dfrac{1}{2}$. Observe que, como o polinômio $p(x)$ tem grau 3, essas são todas as raízes de $p(x)$, e, portanto, podemos escrever

$$p(x) = 6 \cdot (x+2)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

2.8 – O SINAL DE UM POLINÔMIO

Em Cálculo, para estudar o comportamento de um polinômio e esboçar seu gráfico, é muito importante analisar o sinal do polinômio. No caso de polinômios lineares $p(x) = ax + b$, já vimos que trocam de sinal em sua raiz, que é dada por $\alpha = -\dfrac{b}{a}$.

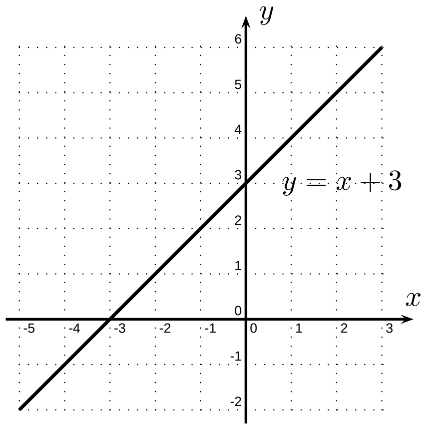
Exemplo 2.12. Determinar o sinal do polinômio $p(x) = x + 3$ de grau 1.

Se $p(x) = x + 3$, temos que $\alpha = -3$ é a raiz de $p(x)$ e sabemos que o sinal de $p(x)$ depende somente de $x > -3$ ou $x < -3$, conforme a figura dada. Nesse caso, é fácil resolver a desigualdade $x + 3 > 0$, que equivale a $x > -3$. Assim,

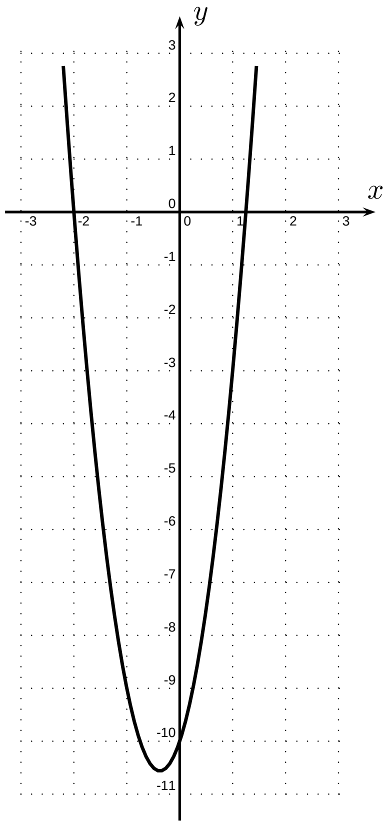
$$p\,(x) > 0 \text{ se } x \in (-3, +\infty)$$

e

$$p\,(x) < 0 \text{ se } x \in (-\infty, -3).$$



Os polinômios de grau 2 também têm a mesma característica: quando trocam de sinal (embora isso nem sempre aconteça; confira na Seção 2.5), fazem isso em suas raízes.



$p(x) = 4x^2 + 3x - 10$

Exemplo 2.13. Determinar o sinal do polinômio $p(x) = 4x^2 + 3x - 10$ de grau 2.

As raízes $\alpha_1 = -2$ e $\alpha_2 = \dfrac{5}{4}$ de $p(x)$ podem ser obtidas pela fórmula de Bhaskara. Como o coeficiente do termo em x^2 é $4 > 0$ sabemos, pela Seção 2.5, que o gráfico de $p(x)$ é como o dado na figura ao lado. Pelo gráfico, podemos concluir que $p\,(x) > 0$ se

$$x \in (-\infty, -2) \bigcup \Big(\frac{5}{4}, +\infty\Big)$$

e $p\,(x) < 0$ se

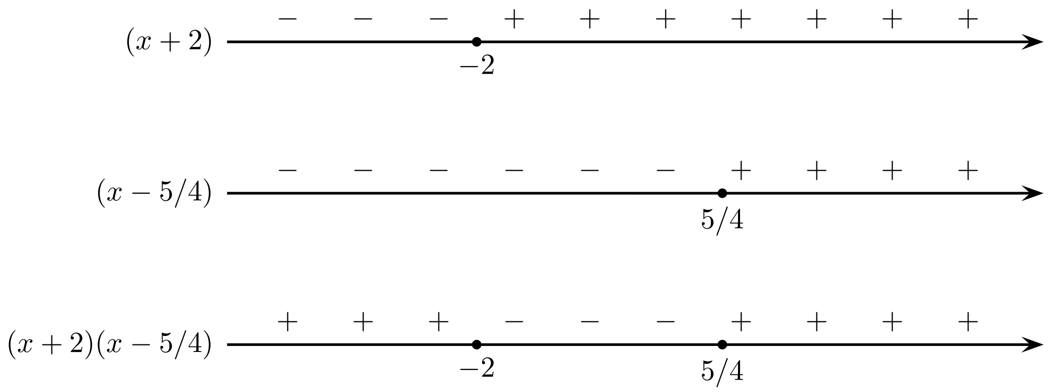
$$x \in \Big(-2, \frac{5}{4}\Big).$$

A diferença agora é que não podemos isolar o x na desigualdade $4x^2 + 3x - 10 > 0$, como o fizemos no exemplo precedente.

Uma outra maneira de determinar o sinal de $p(x)$ é utilizar a regra de sinais de um produto. Para isso, escrevemos $p(x)$ em termos de suas raízes, $p(x) = 4x^2 + 3x - 10 = 4\,(x+2)\big(x - \frac{5}{4}\big)$. Como $4 > 0$, temos que

$$p(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x+2)\left(x - \frac{5}{4}\right) > 0.$$

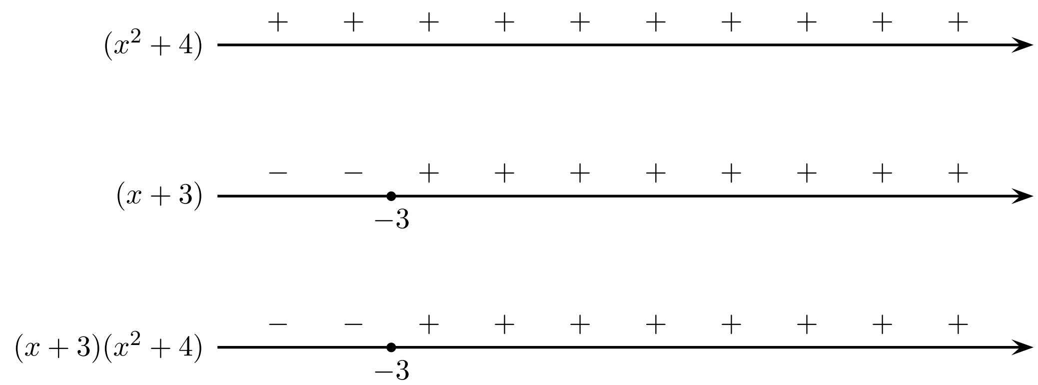
Agora, analisamos o sinal de cada fator linear separadamente e, depois, usamos a regra de sinais do produto, representada esquematicamente da seguinte maneira.



É claro que obtivemos o mesmo resultado que utilizando o gráfico, só que esse último procedimento pode ser generalizado, mesmo quando o polinômio tiver raízes complexas não reais, conforme veremos no próximo exemplo.

Exemplo 2.14. Determinar o sinal do polinômio de grau 3 dado por

$$p(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = (x+3)(x^2+4).$$



Desse modo, temos que

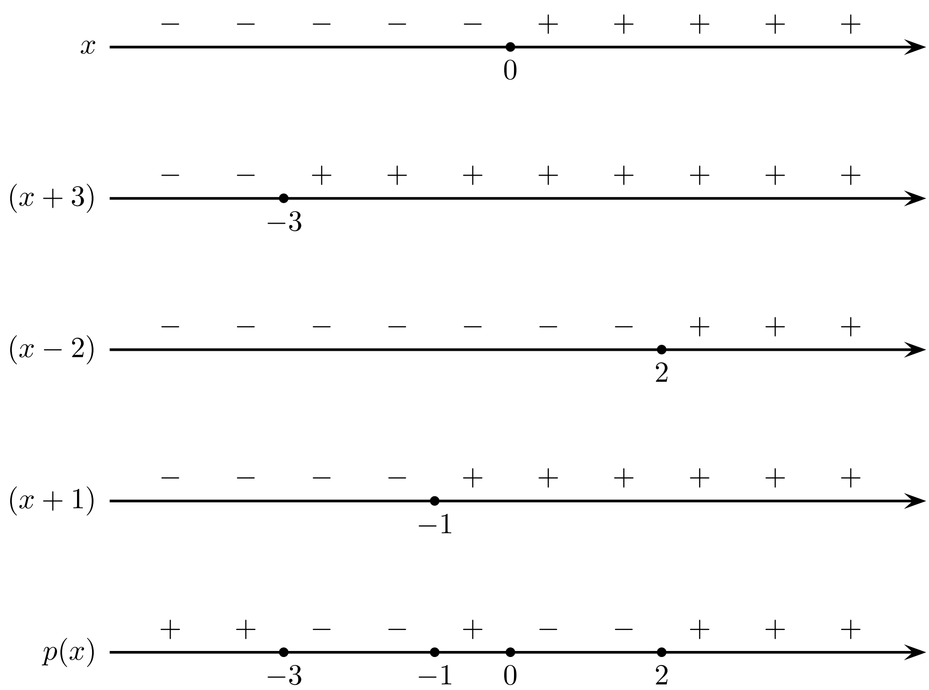
$$p(x) < 0 \quad \text{se} \quad x \in (-\infty, -3) \quad \text{e} \quad p(x) > 0 \quad \text{se} \quad x \in (-3, +\infty)$$

Neste exemplo, $x^2 + 4 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo, nesse caso, o sinal de $p(x)$ é o mesmo que o sinal de $x + 3$. Observe que um polinômio de grau 2 que não tem raízes reais não muda de sinal (ver Seção 2.5) e, portanto, é sempre ou positivo ou negativo.

Exemplo 2.15. Determinar o sinal do polinômio de grau 4 dado por

$$p(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x = x(x + 3)(x - 2)(x + 1).$$

Para determinar o sinal de $p(x)$ analisamos o sinal de cada fator linear e, depois, usamos a regra de sinais do produto, como no exemplo anterior.



Desse modo, temos que

$$p(x) > 0 \quad \text{se} \quad x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (2, +\infty)$$

$$\text{e} \quad p(x) < 0 \quad \text{se} \quad x \in (-3, -1) \cup (0, 2).$$

Assim, para analisar o sinal de um polinômio, é fundamental conhecer sua fatoração.

Confira, agora, todos os exemplos de gráficos com translações que vimos anteriormente, e verifique se ocorrem trocas de sinais: observe que isso sempre ocorre nas raízes. Essa característica decorre do fato das funções polinomiais serem funções contínuas, ou seja, seus gráficos não tem saltos ou cortes (o conceito de continuidade será visto na disciplina de Cálculo). Podemos resumir nossas observações da maneira seguinte.

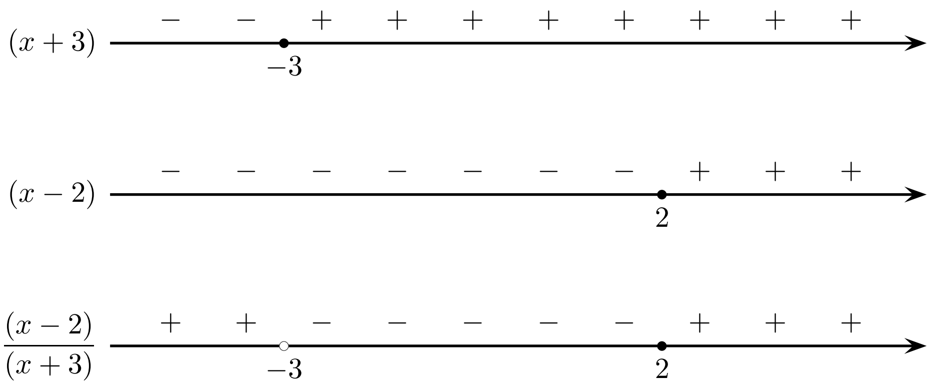
Proposição 2.8. *Uma função polinomial só pode trocar de sinal nas suas raízes.*

Entretanto, observe que uma função polinomial nem sempre troca de sinal numa raiz, por exemplo, $y = x^2$.

A regra de sinais utilizada nos exemplos anteriores também é válida para o quociente de polinômios.

Exemplo 2.16. Analisemos o sinal da função $Q(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$.

Observe que $Q(x)$ não está definida em $x = -3$.



Desse modo, temos que

$$Q(x) > 0 \quad \text{se} \quad x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$$

$$\text{e} \quad Q(x) < 0 \quad \text{se} \quad x \in (-3, 2).$$

Uma observação importante e, também, interessante é que essa regra de sinais que utilizamos vale não só para produtos e quocientes de polinômios, mas também para produtos e quocientes de funções quaisquer.

Uma função como a do último exemplo é denominada *função racional*, ou seja, uma função racional é o quociente de dois polinômios. Como o polinômio constante 1 pode ser um denominador de tal quociente, vemos que os próprios polinômios estão incluídos entre as funções racionais. São exemplos de funções racionais,

$$Q_1(x) = \frac{5}{x-2}, \quad Q_2(x) = \frac{x^3 - 7x}{x^2 - 2}, \quad Q_3(x) = x^5 - 7x, \quad Q_4(x) = \frac{5x^4 - 4x^3}{2x^5 - 2x + 8}.$$

Uma função racional é dita *própria* se o grau de seu numerador é menor que o grau de seu denominador; caso contrário, essa função racional é dita *imprópria*. Sempre podemos expressar uma função racional imprópria como uma soma de um polinômio com uma função racional própria (preservando-se o denominador da função imprópria); ver Exercício 2.13. Por esse resultado, é suficiente estudar as funções racionais próprias.

No Ensino Médio, aprendemos como reduzir frações a um mesmo denominador. Por exemplo, é fácil ver que

$$\frac{3}{x+1} + \frac{5}{x-2} = \frac{3(x-2) + 5(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{8x-1}{(x+1)(x-2)}.$$

A ideia, agora, é inverter esse processo e escrever uma dada fração como uma soma de frações, cada uma das quais tendo um denominador mais simples. Esse procedimento é denominado *decomposição em frações parciais* e é um dos métodos mais importantes para calcular integrais de funções racionais que você verá em Cálculo.

Vejamos, por exemplo, como partir do lado direito da expressão dada acima e chegar no lado esquerdo.

Exemplo 2.17. Determinemos a decomposição em frações parciais de $\dfrac{8x-1}{(x+1)(x-2)}$.

O objetivo é encontrar constantes A e B tais que

$$\frac{8x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}. \tag{2.8}$$

Ora, já sabemos que $A = 3$ e $B = 5$ mas, para entendermos o método, calcularemos A e B como se não soubéssemos seus valores. Somando as frações de (2.8), obtemos

$$\frac{8x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x+1)}{(x+1)(x-2)}.$$

Assim, temos duas frações iguais com o mesmo denominador; decorre que essas frações também têm necessariamente o mesmo numerador e, portanto, temos a seguinte igualdade de polinômios.

$$8x - 1 = A(x-2) + B(x+1) = (A+B)x + (-2A + B).$$

Resolvendo a igualdade de polinômios, chegamos ao sistema seguinte,

$$\begin{aligned} A + B &= 8 \\ -2A + B &= -1, \end{aligned}$$

cuja solução não é difícil de encontrar, $A = 3$ e $B = 5$. Assim, obtivemos a decomposição em frações parciais da nossa função racional, isto é,

$$\frac{8x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{3}{x+1} + \frac{5}{x-2}.$$

Exemplo 2.18. Determinemos a decomposição em frações parciais de

$$\frac{6x^2 - 24x - 18}{(x-1)(x+2)(x-4)}.$$

Considere

$$\begin{aligned} \frac{6x^2 - 24x - 18}{(x-1)(x+2)(x-4)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-4} \\ &= \frac{A(x+2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-4)} \end{aligned}$$

Novamente, temos duas frações iguais com o mesmo denominador, portanto ambas também têm o mesmo numerador, de modo que chegamos à seguinte igualdade de polinômios.

$$\begin{aligned} 6x^2 - 24x - 18 &= A(x+2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x+2) \\ &= A(x^2 - 2x - 8) + B(x^2 - 5x + 4) + C(x^2 + x - 2) \\ &= (A + B + C)x^2 + (-2A - 5B + C)x + (-8A + 4B - 2C), \end{aligned}$$

que nos leva ao sistema seguinte,

$$\begin{aligned} A + B + C &= 6 \\ -2A - 5B + C &= -24 \\ -8A + 4B - 2C &= -18. \end{aligned}$$

Somando as três linhas acima obtemos $-9A = -36$ e, portanto, $A = 4$. Substituindo o valor de A e subtraindo a primeira linha da segunda, obtemos $6B = 18$, ou seja, $B = 3$. Substituindo o valor de A e B na primeira linha, resulta que $C = -1$. Assim,

$$\frac{6x^2 - 24x - 18}{(x-1)(x+2)(x-4)} = \frac{4}{x-1} + \frac{3}{x+2} + \frac{-1}{x-4}.$$

Esse método vale para um número qualquer de fatores lineares distintos. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ números reais distintos e consideremos o polinômio

$$q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)$$

e um polinômio não nulo $p(x)$, de grau menor do que n. Então existem números $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - \alpha_n}.$$

A demonstração dessa afirmação é semelhante à resolução dos exemplos precedentes.

A afirmação que acabamos de apresentar tem um requisito importante: os fatores devem ser *lineares distintos*. E se não forem? Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.19. Determinemos a decomposição em frações parciais de

$$\frac{-4x^3 + 10x^2 - 3x + 3}{(x-1)^3(x+2)}.$$

Procuramos constantes A, B, C e D tais que

$$\frac{-4x^3 + 10x^2 - 3x + 3}{(x-1)^3(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+2}.$$

Daqui em diante, procedemos da mesma maneira que nos exemplos anteriores. A partir do desenvolvimento

$$\frac{-4x^3 + 10x^2 - 3x + 3}{(x-1)^3(x+2)} = \frac{A(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)^2(x+2) + D(x-1)^3}{(x-1)^3(x+2)}$$

podemos verificar que são iguais os numeradores

$$\begin{aligned}
&-4x^3 + 10x^2 - 3x + 3 \\
&\qquad = A(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)^2(x+2) + D(x-1)^3 \\
&\qquad = A(x+2) + B(x^2 + x - 2) + C(x^3 - 3x + 2) + D(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \\
&\qquad = (C+D)x^3 + (B - 3D)x^2 + (A + B - 3C + 3D)x + (2A - 2B + 2C - D),
\end{aligned}$$

o que nos leva ao sistema seguinte,

$$\begin{aligned}
C + D &= -4 \\
B - 3D &= 10 \\
A + B - 3C + 3D &= -3 \\
2A - 2B + 2C - D &= 3.
\end{aligned}$$

Substituindo a primeira e a segunda linhas na terceira e na quarta linhas, obtemos

$$\begin{aligned} A + 9D &= -25 \\ 2A - 9D &= 31. \end{aligned}$$

Somando essas linhas, obtemos $3A = 6$, ou seja, $A = 2$ e, então, $D = -3, B = 1$ e $C = -1$. Assim,

$$\frac{-4x^3 + 10x^2 - 3x + 3}{(x-1)^3(x+2)} = \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{x-1} + \frac{-3}{x+2}.$$

Tente entender a generalização desse procedimento.

E se o polinômio do denominador tiver raízes complexas não reais? Espere por Cálculo!

2.10 – RAÍZES COMPLEXAS (Leitura complementar)

A Proposição 2.5 do final da Seção 2.6 diz que um polinômio $p(x)$ de grau n, com coeficientes reais, possui, no máximo, n raízes reais. Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são todas as raízes reais distintas de $p(x)$, e $n_1, n_2, \ldots, n_k$ suas respectivas multiplicidades, então podemos escrever

$$p(x) = (x - \alpha_1)^{n_1} \cdot (x - \alpha_2)^{n_2} \cdots (x - \alpha_k)^{n_k} \cdot t(x),$$

onde t é uma função polinomial de grau $n - (n_1 + n_2 + \cdots + n_k)$, desprovida de raízes reais.

Agora vamos investigar essa função polinomial $t(x)$.

Voltando ao polinômio $p(x) = 2x^3 + 2 = (x+1)(2x^2 - 2x + 1)$ do Exemplo 2.8 e usando a fórmula de Bhaskara para $t(x) = 2x^2 - 2x + 1$, vemos que

$$\alpha_1 = \frac{2 + \sqrt{-4}}{4} = \frac{2 + 2i}{4} = \frac{1+i}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{2 - \sqrt{-4}}{4} = \frac{2 - 2i}{4} = \frac{1-i}{2},$$

são as raízes de $t(x)$. Assim, escrevemos,

$$p(x) = 2x^3 + 2 = 2(x+1)\Big(x - \frac{1+i}{2}\Big)\Big(x - \frac{1-i}{2}\Big).$$

De fato, o que se mostrou nesse exemplo vale em geral, sendo uma consequência do Teorema Fundamental da Álgebra, como segue.

Teorema 2.9. *Se $p(x)$ é um polinômio com coeficientes reais e de grau $n \geq 1$, então $p(x)$ possui exatamente n raízes em $\mathbb{C}$.*

Olhando mais uma vez para o polinômio $p(x) = 2x^3 + 2$, vemos que suas raízes são $-1, \frac{1}{2}(1+i)$ e $\frac{1}{2}(1-i)$. Observe que as duas raízes complexas são conjugadas. Isso ocorre em geral.

Proposição 2.10. *Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ um polinômio com todos coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ reais. Se o número complexo $\alpha = a + bi$ for uma raiz de $p(x)$, então o complexo conjugado $\overline{\alpha} = a - bi$ de α também é uma raiz de $p(x)$.*

Podemos justificar essa afirmação do seguinte modo. Como $\alpha = a + bi$ é raiz de $p(x)$, temos

$$p(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \cdots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$$

e, portanto,

$$\overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \cdots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0} = \overline{0}.$$

Usando que o conjugado da soma é a soma dos conjugados, obtemos

$$\overline{a_n\alpha^n} + \overline{a_{n-1}\alpha^{n-1}} + \overline{a_{n-2}\alpha^{n-2}} + \cdots + \overline{a_2\alpha^2} + \overline{a_1\alpha} + \overline{a_0} = \overline{0}$$

e usando que o conjugado do produto é o produto dos conjugados, resulta

$$\overline{a_n} \cdot \overline{\alpha}^n + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{\alpha}^{n-1} + \overline{a_{n-2}} \cdot \overline{\alpha}^{n-2} + \cdots + \overline{a_2} \cdot \overline{\alpha}^2 + \overline{a_1} \cdot \overline{\alpha} + \overline{a_0} = \overline{0}.$$

Finalmente, usando que o conjugado de um número real é ele mesmo, concluímos que

$$a_n \cdot \overline{\alpha}^n + a_{n-1} \cdot \overline{\alpha}^{n-1} + a_{n-2} \cdot \overline{\alpha}^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot \overline{\alpha}^2 + a_1 \cdot \overline{\alpha} + a_0 = 0.$$

Assim, $p(\overline{\alpha}) = 0$, ou seja, $\overline{\alpha}$ também é raiz de $p(x)$.

Como consequência, temos que, num polinômio com coeficientes reais, as raízes complexas que não são reais aparecem conjugadas, aos pares, de modo que o número total dessas raízes é, sempre, um número par. Em particular, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 2.11. *Todo polinômio com coeficientes reais de grau ímpar possui, pelo menos, uma raiz real.*

Exemplo 2.20. Sem efetuar qualquer cálculo, já podemos afirmar que o polinômio

$$p(x) = x^5 + 3x^4 - 6x^2 + 7x + 1$$

possui, pelo menos, uma raiz real.

Continuando, se $\alpha = a + bi$ é um número complexo, com $a, b \in \mathbb{R}$, e $\overline{\alpha} = a - bi$, então o polinômio $f(x) = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha})$ tem coeficientes reais. De fato,

$$\begin{aligned} f(x) = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) &= \big(x - (a+bi)\big)\big(x - (a-bi)\big) \\ &= x^2 - x(a-bi) - x(a+bi) + (a+bi)(a-bi) \\ &= x^2 + (-a + bi - a - bi)x + (a^2 - abi + abi - b^2 i^2) \\ &= x^2 - 2ax + (a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Esse resultado pode ser utilizado para fatorar polinômios, pois, se $\alpha = a + bi$ é raiz de um polinômio $p(x)$ com coeficientes reais, então $\overline{\alpha} = a - bi$ também é raiz e, portanto,

$$p(x) = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha})\, g(x) = f(x)\, g(x),$$

onde $f(x)$ é o polinômio de grau 2 obtido acima.

Exemplo 2.21. As raízes do polinômio $p(x) = x^4 + 1$ satisfazem a equação $x^4 = -1$. Como todo número real elevado a uma potência par é sempre positivo, ou zero, temos que as quatro raízes de $p(x)$ são complexas, sendo duas a duas conjugadas. Pela observação acima, sabemos que $p(x) = f(x)\, g(x)$, onde $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios de grau 2. Como o coeficiente de x^4 em $x^4 + 1$ é 1, podemos escolher $f(x)$ e $g(x)$ com essa mesma propriedade, isto é, podemos supor que seus coeficiente de x^2 sejam iguais a 1. Nesse caso, existem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$x^4 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d).$$

Como

$$\begin{aligned} &(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \\ &\qquad = x^4 + cx^3 + dx^2 + ax^3 + acx^2 + adx + bx^2 + bcx + bd \\ &\qquad = x^4 + (a+c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \\ &= x^4 + (a+c)x^3 + (d + ac + b)x^2 + (ad + bc)x + bd. \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau somos levados ao seguinte sistema.

$$\begin{aligned} a + c &= 0 && \text{coeficiente do termo } x^3 \\ ac + b + d &= 0 && \text{coeficiente do termo } x^2 \\ ad + bc &= 0 && \text{coeficiente do termo } x \\ bd &= 1 && \text{termo independente} \end{aligned}$$

Da primeira equação obtemos $a = -c$. Substituindo nas demais equações, resulta o sistema

$$-a^2 + b + d = 0 \tag{2.9}$$

$$ad - ab = 0 \tag{2.10}$$

$$bd = 1 \tag{2.11}$$

Como $ad - ab = a(d - b)$, vemos que (2.10) é equivalente a $a(d - b) = 0$ e, portanto, $a = 0$ ou $d = b$. Se $a = 0$, substituindo em (2.9) obtemos $d + b = 0$, ou seja, $b = -d$. Substituindo em (2.11), obtemos $b^2 = -1$, mas, como procuramos coeficientes reais, essa solução não serve.

Assim, $a \neq 0$ e, portanto, $b = d$. Substituindo em (2.10) e (2.11), obtemos $a^2 = 2b$ e $b^2 = 1$. Se $b = -1$, então $a^2 = -2$ e isso, novamente, não nos serve, por não possuir solução em $\mathbb{R}$. Desse modo, estabelecemos que $b = d = 1$ e, portanto, $a^2 = 2$. Logo, $a = \sqrt{2}$ ou $a = -\sqrt{2},$.

Como $a = -c$, se $a = \sqrt{2}$, temos $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ e, se $a = -\sqrt{2}$, temos $x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$. Vemos que, nos dois casos temos a mesma decomposição de $x^4 + 1$. Assim,

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

e, se você quiser determinar as raízes complexas desse polinômio, basta aplicar a fórmula de Bhaskara nos dois fatores encontrados.

Concluímos esta seção com uma proposição que descreve o polinômio $t(x)$ da Proposição 2.5, a saber, que $t(x)$ sempre pode ser fatorado em potências de fatores quadráticos.

Proposição 2.12. *Seja $p(x)$ um polinômio de grau n, com coeficientes reais. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ todas suas raízes reais distintas, com respectivas multiplicidades $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Então existem $s, m_1, m_2, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$ e $a, a_1, \ldots, a_s, b_1 \ldots, b_s, \in \mathbb{R}$ tais que*

$$p(x) = (x - \alpha_1)^{n_1}(x - \alpha_2)^{n_2} \cdots (x - \alpha_k)^{n_k}\, t(x),$$

com

$$t(x) = a(x^2 + a_1x + b_1)^{m_1}(x^2 + a_2x + b_2)^{m_2} \cdots (x^2 + a_sx + b_s)^{m_s}.$$

Exemplo 2.22. Temos

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 3x - 3 \\ &= 3(x-1)\,(x^4 + 2x^2 + 1) = 3(x-1)\,(x^2+1)^2. \end{aligned}$$

Observamos que, embora esses fatores tenham sua existência assegurada pela proposição, sua efetiva determinação para polinômios específicos dados ainda pode dar muito trabalho, sendo objeto de estudo até hoje.

Exercício 2.1. Faça o esboço do gráfico das funções polinomiais abaixo usando translações horizontais e/ou verticais, alongamentos ou compressões e reflexões, conforme necessário.

a) $f(x) = x^3 - 8$

b) $f(x) = (x+3)^4$

c) $f(x) = (x-1)^5 - 4$

d) $f(x) = 5(x-2)^6$

e) $f(x) = -3(x + \frac{1}{2})^3 + 5$

Exercício 2.2. Faça o esboço do gráfico das parábolas abaixo usando translações horizontais e/ou verticais, alongamentos ou compressões e reflexões, conforme necessário.

a) $f(x) = x^2 + 4x + 5$

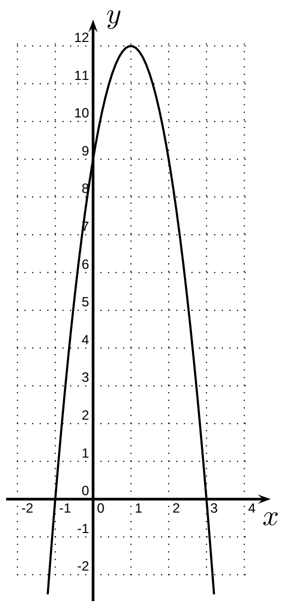
b) $f(x) = x^2 - 3x + 3$

c) $f(x) = 5 - 6x - x^2$

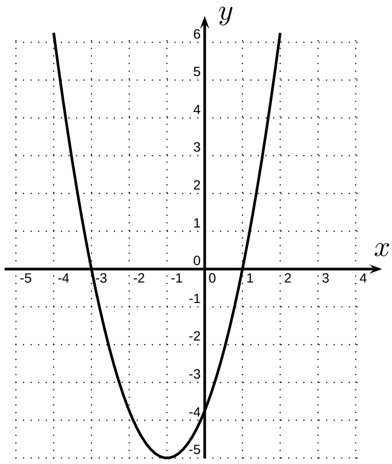
d) $f(x) = 2x^2 + 8x + 10$

Exercício 2.3. Determine as expressões das parábolas cujos gráficos, dados ao lado e a seguir, foram obtidos através de translações horizontais e/ou verticais, alongamentos ou compressões e reflexões do gráfico de $y = x^2$.

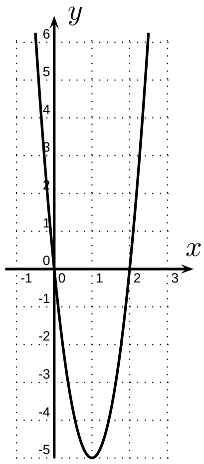
c)



a)

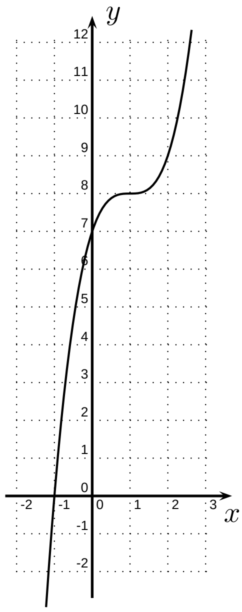


b)

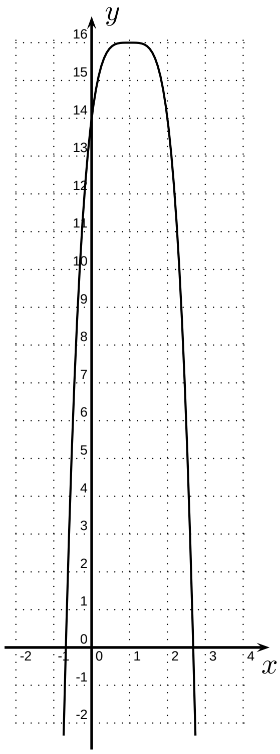


Exercício 2.4. Determine a expressão da função polinomial $p(x)$ cujo gráfico, dado a seguir, foi obtido através de translações horizontais e/ou verticais, alongamentos ou compressões e reflexões dos gráficos das funções $g(x) = x^3$ e $g(x) = x^4$.

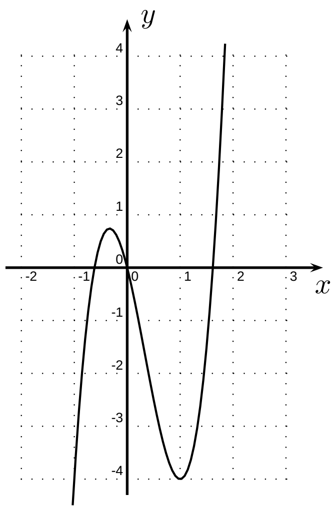
a)



b)



Exercício 2.5. O gráfico do polinômio $p(x) = 4x^3 - 4\ x^2 - 4x$ é dado ao lado. Faça um esboço do gráfico dos polinômios definidos a seguir.



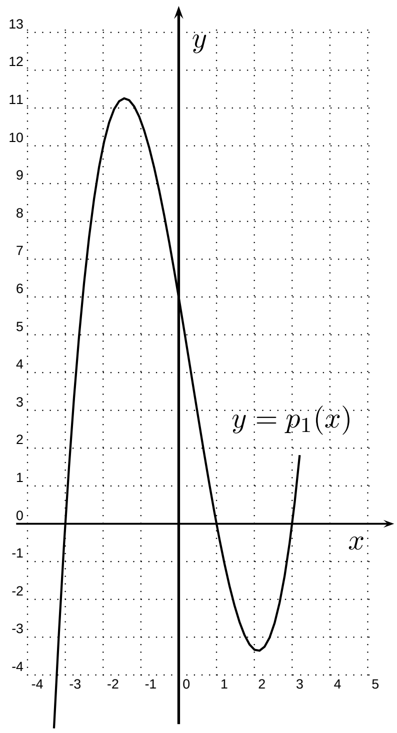
a) $p_1(x) = p(x) + 4$ e determine suas raízes.

b) $p_2(x) = p(x) + 6$. Quantas raízes reais $p_2(x)$ possui?

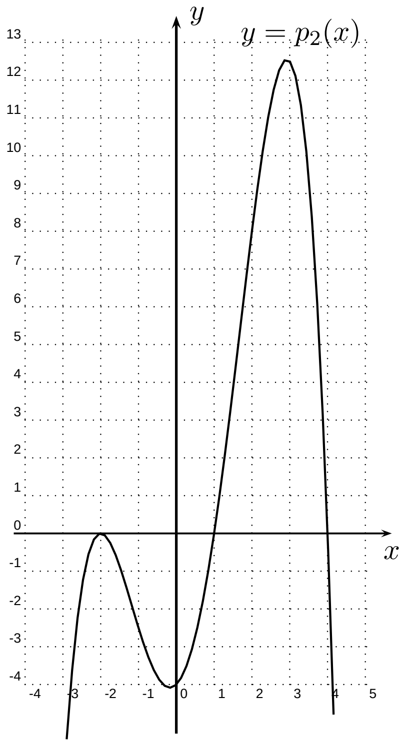
c) $p_3(x) = p(x) - 3$. Quantas raízes reais $p_3(x)$ possui?

Exercício 2.6. Determine a expressão do polinômio de grau mínimo cujo gráfico é dado na figura.

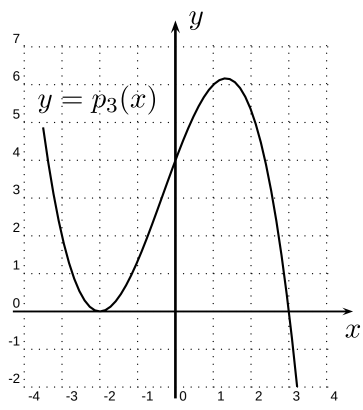
a)



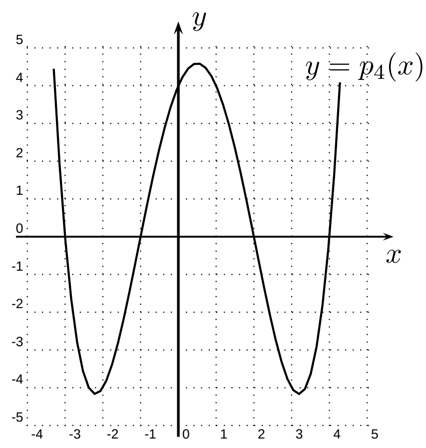
b)



c)



d)



Exercício 2.7. Determine o quociente e o resto na divisão de $f(x)$ por $g(x)$.

a) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 20x + 4$ e $g(x) = x^2 - 4x + 5$

b) $f(x) = 10x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 8x^2$ e $g(x) = 2x^3 + 4x^2 - 17x - 6$

Exercício 2.8. Determine o resto da divisão de $f(x)$ por $g(x)$.

a) $f(x) = x^4 + 5x^3 - 20x^2 + 4$ e $g(x) = x + 1$

b) $f(x) = x^5 + 5x^4 - x^3 - 8x$ e $g(x) = x - 3$

c) $f(x) = x^6 + 3x^4 + x^2$ e $g(x) = x - \sqrt{5}$

d) $f(x) = 3x^7 + 5x^5 + 2x^3 - 2x + 1$ e $g(x) = x - i$

Exercício 2.9. Fatore completamente os polinômios dados a seguir.

a) $x^3 + x^2 - 17x + 15$

b) $3x^4 + 18x^3 - 27x^2 - 42x$

c) $10x^5 + 27x^4 - 10x^3 - 3x^2$

d) $3x^5 + 4x^4 - 14x^3 - 2x^2 - 17x - 6$

e) $4x^4 + 3x^2 - 1$

f) $9x^5 - 51x^4 + 94x^3 - 74x^2 + 25x - 3$

Exercício 2.10. Determine todos os valores reais de x que satisfazem as desigualdades dadas.

a) $x^2 - 5 < 0$

b) $4 - x^2 > 0$

c) $x^2 - 5x + 6 > 0$

d) $4x^4 - 64 < 0$

e) $x^3 - 2x^2 + x < 0$

f) $x^3 - x^2 - 22x + 40 > 0$

g) $2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 2 > 0$

h) $3x^5 - 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 7x - 2 < 0$

i) $(x^2 + 4)(-x^2 - x - 1) < 0$

j) $(2x^2 + x + 5)(x^2 + x + 1) < 0$

Exercício 2.11. Tente justificar a afirmação da Proposição 2.7.

Exercício 2.12. Estude o sinal das funções racionais seguintes.

a) $\dfrac{x-2}{x^2+3}$

b) $\dfrac{2x-5}{x^2-2x+1}$

c) $\dfrac{2x^2-10x+12}{x^3+4x}$

d) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^3+x^2}$

Exercício 2.13. Dados os polinômios $f(x)$ e $g(x)$ com $g(x) \neq 0$ e $\partial f > \partial g$, temos que a função racional $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (imprópria) pode ser reescrita como a soma de um polinômio com uma função racional *própria*, cujo grau do numerador é menor do que o grau do denominador. Para determinar esses polinômios, fazemos a divisão de $f(x)$ por $g(x)$ e encontramos os polinômios $q(x) \neq 0$ e $r(x)$ tais que $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, com $r(x) = 0$ ou $\partial r < \partial g$. Agora é só substituir na função racional,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) \cdot q(x) + r(x)}{g(x)} = \frac{\cancel{g(x)} \cdot q(x)}{\cancel{g(x)}} + \frac{r(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}.$$

Utilize esse procedimento para reescrever as funções racionais seguintes como somas de polinômios com funções racionais próprias.

a) $\dfrac{x^4 + x^3 - 2x^2 + 4}{x^3 + 3}$

b) $\dfrac{3x^5 + x^4 - 2x^3 - 8x}{x^2 - 2x + 1}$

c) $\dfrac{x^6 - 5x^4 + 2x^2}{x^3 + 4x}$

d) $\dfrac{x^7 - 3x^5 + 2x^3 - x + 5}{x^3 + 2x^2 + x}$

Exercício 2.14. Faça a decomposição em frações parciais das seguintes funções racionais.

a) $\dfrac{8x + 4}{x^2 + 4x - 5}$

b) $-\dfrac{x^3 - 5x^2 + 22x + 18}{x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8}$

c) $\dfrac{9x^2 - 4x + 3}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$

d) $\dfrac{x^3 + 5x^2 - x + 3}{x^4 - 2x^2 + 1}$

Nos Exercícios 2.15 e 2.16 utilizamos o conceito de velocidade média, como segue.

Em Cinemática, um conceito importante é o de *velocidade* de uma partícula em movimento retilíneo. Se uma partícula tem sua posição no instante t dada por $p(t)$, a *velocidade média* $v_{\{t_1,t_2\}}$ entre um tempo inicial t_1 e um tempo final t_2, distinto de t_1, é definida por

$$v_{\{t_1,t_2\}} = \frac{p(t_2) - p(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Com o conceito de derivada, que desenvolveremos na disciplina de Cálculo, poderemos definir também a *velocidade instantânea* da partícula, como um *limite* dessas velocidades médias quando $t_2 - t_1$ *tende* a 0.

Exercício 2.15. Uma partícula em movimento retilíneo tem sua posição, no instante t, dada por

$$p(t) = \frac{t^3 - 5t^2 + 6t}{t^2 + 1}, \qquad \text{para } t \geq 0.$$

Determine

a) os instantes em que $p(t) = 0$;

b) os intervalos de tempo nos quais a partícula encontra-se à direita de zero e aqueles nos quais encontra-se à esquerda de zero;

c) a velocidade média $v_{\{2,t\}}$ entre o tempo inicial 2 e o tempo final t;

d) os valores de $t \geq 0$ para os quais $v_{\{2,t\}} \leq 0$ e aqueles onde $v_{\{2,t\}} > 0$.

e) o que ocorre com $v_{\{2,t\}}$, à medida que t se aproxima de 2?

Exercício 2.16. As partículas A e B movimentam-se em linha reta; no instante t, a partícula A encontra-se na posição $p_A(t) = t^3 - t^2$ e a partícula B na posição $p_B(t) = t^3 - 2t$.

a) Encontre a posição de cada uma delas no instante $t = 1$.

b) Encontre a velocidade média de cada uma delas entre os tempos $t = 1$ e $t = x$, que denotaremos por $v_{A\{1,x\}}$ e $v_{B\{1,x\}}$, respectivamente.

c) Determine os valores de x para os quais $v_{A\{1,x\}} \geq v_{B\{1,x\}}$.

d) À medida que x se aproxima de 1, o que ocorre com as velocidades $v_{A\{1,x\}}$ e $v_{B\{1,x\}}$? Dê uma interpretação para os valores encontrados.

e) Resolva o mesmo problema substituindo $t = 1$ por $t = 3$.

Exercício 2.17. Após s minutos do início de uma reação química, a temperatura da mistura resultante é dada por $T(s) = s^4 - 4s^3 + 7s^2 - 16s + 12$, para $s \geq 0$.

a) Determine os valores de $s > 0$ para os quais $T(s) = 0$.

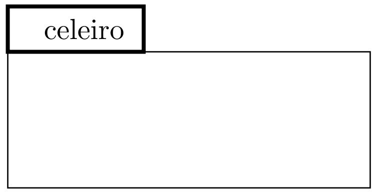
b) Determine quando a temperatura é negativa.

Exercício 2.18. Um campo será delimitado no formato de um retângulo. Determine as dimensões do campo de área máxima que poderá ser cercado utilizando 100 m lineares de cerca.

Exercício 2.19. Mostre que, dentre todos retângulos de perímetro p, o que possui maior área é o quadrado.

Observação: Este problema é um modelo matemático que generaliza o anterior e, uma vez resolvido, dá as soluções para todos os possíveis valores do perímetro.

Exercício 2.20. Um fazendeiro tem 500 m lineares de tela para cercar um terreno retangular. Um celeiro de 20 m de largura será usado como parte da cerca, conforme a figura ao lado. Determine as dimensões do terreno de área máxima que poderá ser cercado.



Exercício 2.21. Um terreno retangular deverá ser cercado de modo que dois lados opostos recebam uma cerca reforçada, que custa R$ 5,00 por metro, enquanto que os outros dois lados receberão uma cerca padrão que custa R$ 3,00 por metro. Determine as medidas dos lados do terreno de maior área com estas características, sabendo que custo total para cercá-lo será de R$ 8.000,00.

2.11.1 – EXERCÍCIOS da SEÇÃO 2.10 (Leitura Complementar)

Exercício 2.22. Determine um polinômio com coeficientes reais de grau 3 que admita 2 e $2 - i$ como raízes. Quantos polinômios desses existem?

Exercício 2.23. Construa um polinômio com coeficientes reais de grau 5 com

a) apenas uma raiz real;

b) apenas uma raiz real e que tenha multiplicidade 1;

c) apenas uma raiz real e que tenha multiplicidade 3.

É possível construir um polinômio com coeficientes reais de grau 5 que possui apenas uma raiz real e que tenha multiplicidade 2? Porquê?

Trigonometria

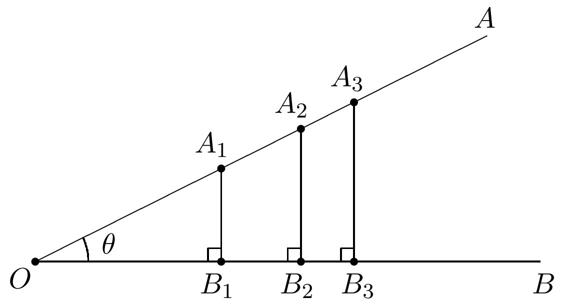
Capítulo 3

Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Elisabete Zardo Búrigo

Iniciamos revendo a Trigonometria no triângulo retângulo. Nesse primeiro momento, estaremos tratando então, necessariamente, com ângulos agudos. Mais tarde, trataremos de funções trigonométricas definidas em toda reta real.

3.1 – AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Consideremos um ângulo agudo $A\widehat{O}B = \theta$, com $0 < \theta < 90°$ e, a partir dos pontos A_1, A_2, $A_3, \ldots$ na semirreta OA, tracemos perpendiculares A_1B_1, A_2B_2, $A_3B_3, \ldots$ à semirreta OB.



Cada um desses triângulos OA_1B_1, OA_2B_2, $OA_3B_3, \ldots$ tem um ângulo reto, um ângulo igual a θ e um terceiro ângulo igual a $180° - (90° + \theta)$. Portanto, os triângulos OA_1B_1, OA_2B_2, $OA_3B_3, \ldots$ são todos semelhantes, pois têm os três ângulos iguais, e segue que

$$\frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2} = \frac{A_3B_3}{OA_3} = \cdots .$$

*C*onclusão: A razão $\dfrac{AB}{OA}$ depende apenas do ângulo θ e não dos comprimentos que forem considerados. Em outras palavras, essa razão é uma *função* do ângulo θ.

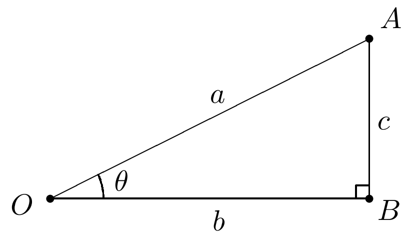
Dados um ângulo agudo $A\widehat{O}B = \theta$, com $0 < \theta < 90°$, e um ponto A_1 na semirreta OA, tracemos a perpendicular A_1B_1 à semirreta OB. O *seno* de θ é definido como sendo a razão

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{A_1B_1}{OA_1} .$$

Essa definição faz sentido, pois vimos que a razão não depende do particular ponto A_1 que for escolhido para construir a razão. Da mesma forma, são definidas as funções *cosseno* e *tangente* de um ângulo agudo, por

$$\cos\theta = \frac{OB_1}{OA_1} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{A_1B_1}{OB_1}\,.$$

Segue dessas considerações que, num triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, respectivamente adjacente e oposto ao ângulo θ, como o da figura dada, valem as seguintes relações trigonométricas.



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{c}{a}, \quad \text{ou seja,} \quad c = a \cdot \operatorname{sen}\theta \tag{3.1}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{a}, \quad \text{ou seja,} \quad b = a \cdot \cos\theta \tag{3.2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{c}{b} \tag{3.3}$$

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \tag{3.4}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \tag{3.5}$$

As propriedades (3.1), (3.2) e (3.3) são a própria definição das funções seno, cosseno e tangente. Para justificar a propriedade (3.4), basta aplicar o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo OBA, como segue.

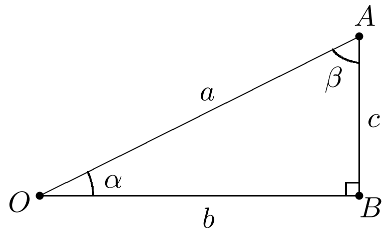
$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1\,.$$

Quanto à afirmação (3.5), podemos prová-la utilizando (3.1), (3.2) e (3.3), como segue.

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{c}{b} = \frac{a\operatorname{sen}\theta}{a\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,.$$

Proposição 3.1. *Se dois ângulos* α *e* β *são* complementares*, isto é, se* $\alpha + \beta = 90°$*, então*

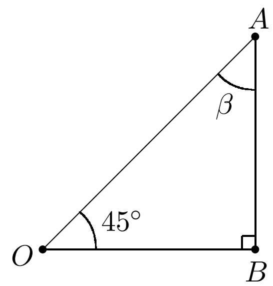
$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta,$$
$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta \quad \text{e}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}.$$



Demonstração. A justificativa para a validade dessa proposição usa o fato que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°. No caso de um triângulo retângulo, como um dos ângulos mede 90°, a soma dos outros dois tem que valer 90°, ou seja, os dois ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares. Sejam α e β dois ângulos agudos complementares e consideremos um triângulo retângulo OBA cujos ângulos agudos sejam precisamente α e β. Então, por exemplo, o seno de α é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa. Mas é evidente a partir da figura que o cateto que é oposto a α é adjacente a β. Por essa razão $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$. O mesmo tipo de argumento se aplica às outras duas propriedades. □

Por causa desse último resultado, é suficiente que se tenha uma tabela de senos e cossenos para arcos entre 0 e 45 graus. Por exemplo, se quisermos saber o valor de $\cos 72°$, consideramos o arco complementar $90 - 72 = 18$ e $\cos 72° = \operatorname{sen} 18°$.

Vamos, agora, calcular as funções trigonométricas de alguns ângulos bem comuns. Começando por 45°, consideremos um triângulo retângulo OBA com o ângulo $A\widehat{O}B = 45°$. Como o triângulo tem um ângulo reto e a soma dos três ângulos deve ser igual a 180°, concluímos que o ângulo $\beta = B\widehat{A}O = 45°$. Portanto, nosso triângulo OBA é isósceles, ou seja, tem dois lados iguais, $OB = BA$. Aplicando o Teorema de Pitágoras,



$$OA^2 = OB^2 + BA^2 = BA^2 + BA^2 = 2 \cdot BA^2.$$

Segue que $OA = BA \cdot \sqrt{2}$ e, então,

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{BA}{OA} = \frac{BA}{BA \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Também,

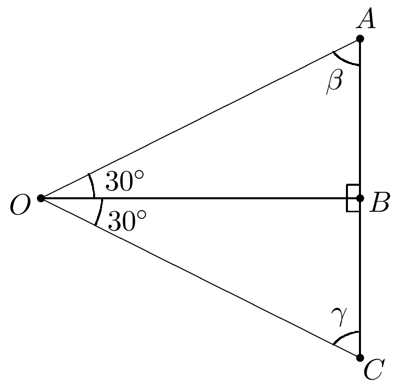
$$\cos 45° = \frac{OB}{OA} = \frac{BA}{OA} = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Decorre dessas duas últimas relações que

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1\,.$$

Nosso próximo passo será calcular as funções trigonométricas do ângulo de 30°.

Usaremos o truque engenhoso de justapor dois triângulos retângulos congruentes OBA e OCB, de ângulos iguais a $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$, como na figura ao lado (note que esse triângulo existe, pois $30 + 60 + 90 = 180$). Então, o triângulo OCA tem os três ângulos iguais a 60°, sendo, portanto, equilátero. Segue daí que



$$AB = \frac{AC}{2} = \frac{OA}{2}\,.$$

Portanto,

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{AB}{OA} = \frac{\frac{1}{2}\cdot OA}{OA} = \frac{1}{2}\,.$$

Para obter o valor de $\cos 30^\circ$, utilizamos a relação fundamental (3.4), ou seja, $\cos^2 30^\circ + \operatorname{sen}^2 30^\circ = 1$, portanto,

$$\cos^2 30^\circ + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{ou, ainda,} \quad \cos^2 30^\circ = \frac{3}{4}\,,$$

de modo que

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Levando em conta que 30° e 60° são complementares, pois $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$, e utilizando a Proposição 3.1, temos

$$\cos 60^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen} 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

3.2 – SENO E COSSENO DO ARCO DUPLO E ARCO METADE

A fim de construirmos uma tabela um pouco mais completa de senos e cossenos, necessitamos conhecer mais algumas propriedades das funções trigonométricas.

Suponha que conheçamos $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ e vejamos como se pode a partir daí obter $\cos(2\,\theta)$ e $\operatorname{sen}(2\,\theta)$. Um erro muito comum é o aluno ingenuamente pensar que $\operatorname{sen}(2\,\theta) =$

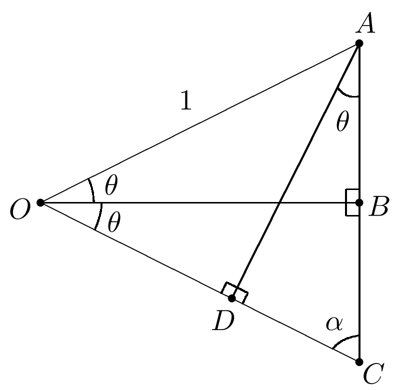
$2 \cdot \operatorname{sen}\theta$. Mas se isso fosse verdade, o seno de $60°$, por exemplo, seria o dobro do seno de $\theta = 30°$. Isso não ocorre, pois $\operatorname{sen}(2\,\theta) = \operatorname{sen} 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, enquanto que $2 \cdot \operatorname{sen}\theta = 2 \cdot \operatorname{sen} 30° = 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$. Logo, em geral, $\operatorname{sen}(2\,\theta) \neq 2 \cdot \operatorname{sen}\theta$.

Os resultados que seguem apresentam algumas fórmulas, inicialmente com a restrição que $0° < \theta < 45°$, mas que, como veremos mais adiante, valem para qualquer ângulo θ.

Proposição 3.2. *Se* $0° < \theta < 45°$, *então*

$$\operatorname{sen}(2\,\theta) = 2 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta\,. \tag{3.6}$$

Demonstração. Considere a figura ao lado. Os triângulos retângulos OBA e OCB são congruentes e têm um ângulo igual a θ, sendo o lado $OA = 1$.



Traçamos a perpendicular AD ao lado OC. Então, $\operatorname{sen}(2\,\theta) = AD$. Note que o dobro da área do triângulo OAC é igual a $OC \cdot AD$, mas essa área também é igual a $OB \cdot AC$. Logo,

$$OC \cdot AD = OB \cdot AC\,.$$

Levando em conta que

$$OC = 1, \qquad AD = \operatorname{sen}(2\,\theta),$$

$$OB = \cos\theta \quad \text{e} \quad AC = 2 \cdot AB = 2 \cdot \operatorname{sen}\theta,$$

obtemos

$$1 \cdot \operatorname{sen}(2\,\theta) = \cos\theta \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}\theta\,,$$

o que demonstra a proposição. □

Proposição 3.3. *Se* $0° < \theta < 45°$, *então*

$$\cos(2\,\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\,. \tag{3.7}$$

Demonstração. Na figura acima, vemos que α e θ são complementares, logo $\operatorname{sen}\theta = \cos\alpha$. Também $AC = 2 \cdot \operatorname{sen}\theta$ e, portanto,

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\theta = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{2 \cdot \operatorname{sen}\theta}\,,$$

resultando

$$2 \cdot \operatorname{sen}^2 \theta = 2 \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \alpha = CD.$$

Assim,

$$\cos(2\,\theta) = OD = 1 - CD = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2\ \theta = \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 \theta\,,$$

ou seja,

$$\cos(2\,\theta) = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta\,,$$

demonstrando a proposição. □

Proposição 3.4. *Se* $0° < \theta < 90°$, *então*

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \tag{3.8}$$

$$\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}\ . \tag{3.9}$$

Demonstração. Somando (3.4) com (3.7), obtemos

$$\begin{array}{r} \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1 \\ \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = \cos(2\,\theta) \\ \hline 2 \cos^2 \theta = 1 + \cos(2\,\theta)\,. \end{array}$$

Segue que

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\,\theta)}{2}}\ .$$

Substituindo θ por $\dfrac{\theta}{2}$ nessa última equação, resulta (3.8).

Subtraindo (3.7) de (3.4), obtemos

$$\begin{array}{r} \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1 \\ -\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = -\cos(2\,\theta) \\ \hline 2 \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos(2\,\theta)\,. \end{array}$$

Segue que

$$\operatorname{sen} \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\,\theta)}{2}}\ .$$

Substituindo θ por $\dfrac{\theta}{2}$ nessa última equação, resulta (3.9). □

Observe que (3.6) e (3.7) poderiam ter sido deduzidas das equações (3.10) e (3.11) a seguir, fazendo $\beta = \alpha$.

Proposição 3.5. *Sejam* $\alpha, \beta \geq 0$ *tais que* $0° < \alpha + \beta < 90°$. *Então,*

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \tag{3.10}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta\,. \tag{3.11}$$

Na próxima seção estudaremos senos e cossenos de ângulos não necessariamente positivos, quando veremos que

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

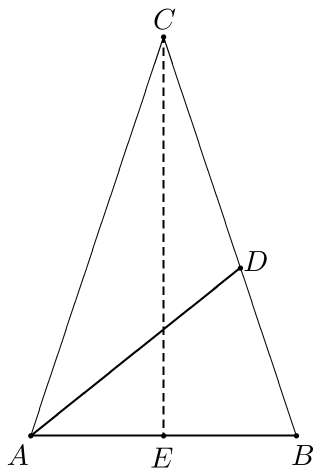
Então, substituindo β por $-\beta$ em (3.10) e (3.11), teremos também

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \tag{3.12}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta\,. \tag{3.13}$$

Como exemplo, vamos agora mostrar como se pode construir uma tabela de valores de funções trigonométricas, a partir dos resultados que obtivemos até aqui. Historicamente, foi assim que foram construídas as *tabelas trigonométricas.* Hoje em dia, é claro, quando necessitamos de tabelas mais completas, é mais cômodo utilizar uma calculadora científica.

Exemplo 3.1. Determinemos as funções trigonométricas dos ângulos de 18° e 36°.



Considere um triângulo ABC, como na figura ao lado, cujos ângulos internos medem 36°–72°–72°. É importante notar que isso é possível, pois $36+72+72 = 180$. Esse triângulo tem dois ângulos iguais, portanto tem dois lados iguais, ou seja, é isósceles, $AC = BC$. Note que o ângulo $C\widehat{A}B$ mede 72° e que a metade de 72 é 36. Considere o segmento AD que divide o ângulo $C\widehat{A}B$ ao meio, portanto, em duas partes de 36°. Como o ângulo $A\widehat{B}C$ mede 72°, o triângulo ABD tem um ângulo de 36° e outro de 72°. Portanto o terceiro ângulo de triângulo ABD mede $180-(36+72) = 72$ graus. Logo, os triângulos ABC e ABD são semelhantes, pois têm os ângulos iguais.

Podemos supor que $AC = BC = 1$. Chamemos AB de x. Como ABD é isósceles, então $AD = x$. Mas o triângulo ADC também é isósceles, pois tem dois ângulos iguais a $36°$, os ângulos $B\widehat{C}A$ e $C\widehat{A}B$. Logo $CD = AD = AB = x$. Da semelhança dos triângulos ABC e ABD decorre que

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BD} \quad \text{ou seja,} \quad \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}\,.$$

Assim, $1 - x = x^2$, ou seja, $x^2 + x - 1 = 0$. Resolvendo essa equação do segundo grau, encontramos as raízes

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Somente a raiz positiva serve, pois $x = AB > 0$. Portanto, $AB = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Traçando a perpendicular CE ao lado AB, temos que ela divide o ângulo $B\widehat{C}A$ em duas partes iguais de $18°$. Considerando o triângulo AEC, temos

$$\operatorname{sen} 18° = \frac{AE}{AC} = AE = \frac{AB}{2} = \frac{x}{2}\,.$$

Assim,

$$\operatorname{sen} 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\,. \tag{3.14}$$

Utilizando a relação fundamental (3.4), segue que

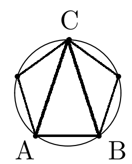
$$\begin{aligned}\cos^2 18° = 1 - \operatorname{sen}^2 18° &= 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{16} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}\end{aligned}$$

e, extraindo a raiz quadrada, resulta

$$\cos 18° = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}\,. \tag{3.15}$$

Pergunta: De onde saiu essa ideia de considerar um triângulo de ângulos $36°$–$72°$–$72°$?

Considere um pentágono regular inscrito em um círculo, como na figura ao lado. Então, o triângulo ABC mostrado na figura tem ângulos de $36°$–$72°$–$72°$. Você consegue provar essa afirmação? Os polígonos regulares com um número pequeno de lados, sempre foram muito estudados, desde a antiguidade.



Portanto, o triângulo com ângulos de $36°$–$72°$–$72°$ era bem conhecido.

Exemplo 3.2. Determinemos as funções trigonométricas dos ângulos de $15°$ e $3°$.

Utilizando as relações (3.8) e (3.9) e os valores já encontrados do seno e cosseno de $30°$, temos $\cos 15° = \cos\left(\frac{30°}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$, ou seja,

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}. \tag{3.16}$$

Analogamente, $\operatorname{sen} 15° = \operatorname{sen}\left(\frac{30°}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$, ou seja,

$$\operatorname{sen} 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}. \tag{3.17}$$

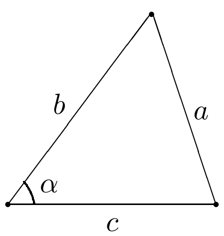
Agora, tendo obtido (3.14), (3.15), (3.16) e (3.17), podemos obter os valores do seno e cosseno de $3°$. Escrevendo $3° = 18° - 15°$ e aplicando (3.12) e (3.13), temos

$$\begin{aligned}
\cos 3° &= \cos(18° - 15°) = \cos 18° \cdot \cos 15° + \operatorname{sen} 18° \cdot \operatorname{sen} 15° \\
&= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}, \\
\operatorname{sen} 3° &= \operatorname{sen}(18° - 15°) = \operatorname{sen} 18° \cdot \cos 15° - \cos 18° \cdot \operatorname{sen} 15° \\
&= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.
\end{aligned}$$

A partir daí, utilizando as Proposições 3.2, 3.3 e 3.5, podemos calcular, sucessivamente, o seno e o cosseno de $6°$, $9°$, $12°$, etc.

Construímos, assim, uma tabela contendo todos os senos e cossenos dos arcos de 3 em 3 graus. Utilizando as mesmas idéias, podemos construir tabelas mais completas.

3.3 – LEI DOS SENOS E LEI DOS COSSENOS



Teorema 3.6 (Lei dos Cossenos). *Num triângulo de lados a, b e c qualquer, temos*

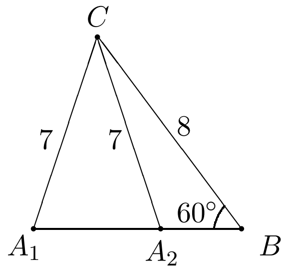
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha, \tag{3.18}$$

onde α denota o ângulo no vértice oposto ao lado a.

Esse teorema vale mesmo se o ângulo α for obtuso (entre 90° e 180°). Nesse caso, o seu cosseno será negativo, conforme Seção 3.4. A Lei dos Cossenos é muito empregada em Trigonometria. Ela é usada, por exemplo, quando conhecemos os lados de um triângulo e queremos determinar os ângulos (mais precisamente, os *cossenos* dos ângulos).

A Lei dos Cossenos também é usada se forem conhecidos dois lados de um triângulo e o ângulo por eles formado.

Exemplo 3.3. Calculemos o comprimento de AB sabendo que, no triângulo ABC, valem $BC = 8$, $AC = 7$ e $\beta = A\widehat{B}C = 60°$.



Utilizando a Lei dos Cossenos na forma

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\beta\,,$$

resulta $7^2 = AB^2 + 8^2 - 2 \cdot AB \cdot 8 \cdot \cos 60°$. Obtemos, assim, a equação do segundo grau

$$AB^2 - 8AB + 15 = 0,$$

que tem duas raízes, $AB = 3$ e $AB = 5$.

Cabe a pergunta: por que encontramos duas respostas? Como em muitos problemas, se uma das raízes fosse negativa, ela seria descartada, pois o comprimento AB deve ser positivo. Mas na presente situação encontramos duas raízes positivas. O problema considerado nesse exemplo realmente tem duas soluções diferentes, representadas na figura acima. Temos duas possibilidades para esse triângulo, que tanto pode ser A_1BC, com $A_1B = 5$, ou então A_2BC, com $A_2B = 3$.

Teorema 3.7 (Lei dos Senos). *Num triângulo qualquer, temos*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}\,, \tag{3.19}$$

onde α, β e γ denotam os ângulos dos vértices opostos aos lados de comprimentos a, b e c, respectivamente.

Esse teorema afirma que, num triângulo qualquer, cada lado é proporcional ao seno do ângulo oposto.

Exemplo 3.4. Calculemos as medidas dos lados e dos ângulos do mesmo triângulo ABC do Exemplo 3.3, em que $BC = 8$, $AC = 7$ e $\beta = A\widehat{B}C = 60°$.

Aplicando a Lei dos Senos ao triângulo ABC do Exemplo 3.3 e $\alpha = C\widehat{A}B$, obtemos

$$\frac{7}{\operatorname{sen} 60°} = \frac{8}{\operatorname{sen}\alpha}\,.$$

Assim,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7} \cong 0{,}9897.$$

Usando uma calculadora científica, encontramos que $\alpha = 81{,}8°$, aproximadamente. Estendendo a definição do seno para ângulos obtusos (ver Seção 3.4), vemos que existe um arco no segundo quadrante que tem o mesmo seno, a saber, aproximadamente $\operatorname{sen}(180° - 81{,}8°) = \operatorname{sen} 98{,}2°$. Assim, temos as duas soluções, $C\widehat{A_1}B \cong 81{,}8°$ e $C\widehat{A_2}B \cong 98{,}2°$. Como $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, onde $\gamma = B\widehat{C}A$, encontramos para C também duas soluções, $B\widehat{C}A_1 \cong 38{,}2°$ e $B\widehat{C}A_2 \cong 21{,}8°$. Utilizando novamente a Lei dos Senos, temos

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{7}{\operatorname{sen} 60°}, \quad \text{logo,} \quad AB = \frac{14 \cdot \operatorname{sen}\gamma}{\sqrt{3}}\,.$$

Utilizando uma calculadora científica obtemos

$$\operatorname{sen} 38{,}2° \cong 0{,}6184 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen} 21{,}8° \cong 0{,}3713.$$

A partir daí, resultam

$$A_1B \cong 4{,}9984 \qquad \text{e} \qquad A_2B \cong 3{,}0011,$$

que são os mesmos valores encontrados anteriormente, com uma boa aproximação. Note que ao resolver o problema dessa segunda forma, é preciso ter cuidado para não esquecer de considerar a possibilidade de que o ângulo em questão seja obtuso.

Observe que, num triângulo em que conhecemos dois ângulos, mas somente um lado, não podemos aplicar a Lei dos Cossenos e necessariamente devemos usar a Lei dos Senos.

Para finalizar, é bom assinalar que as únicas fórmulas que o aluno necessita memorizar são as sete que seguem abaixo, pois todas as outras podem ser facilmente deduzidas dessas.

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \qquad \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Um bom exercício é deduzir todas as outras fórmulas apresentadas neste capítulo, pois é bom ter firmeza quanto a isso.

Quando medimos um ângulo em graus, tomamos como referência a divisão de um círculo em 360 partes iguais. Esse número de partes, 360, é uma convenção.

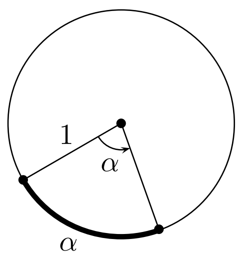
Uma outra unidade de medida de ângulos, o *radiano*, pode ser adotada quando tomamos o ângulo como ângulo central de um círculo. Sabemos que a razão entre o comprimento de uma circunferência qualquer e seu diâmetro é constante. Essa razão, que denominamos π, é conhecida através de aproximações: por exemplo, sabemos que $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

A razão entre o comprimento s do arco e o comprimento C da circunferência é igual à razão entre a medida θ do ângulo em graus e 360, isto é, $\dfrac{s}{C} = \dfrac{\theta}{360}$. Como $C = 2\pi r$, podemos escrever também $\dfrac{s}{r} = \dfrac{2\pi}{360}\,\theta$. A razão $\dfrac{s}{r}$, que expressa "quantos raios cabem no arco", é a *medida do ângulo em radianos.* Essa razão será $\pi/2$ quando o ângulo for reto, $\pi/3$ quando o ângulo medir 60°, e assim por diante.

Mais ainda: se tomarmos um círculo de raio unitário, a razão $\dfrac{s}{r}$ será igual a s e, portanto, a medida de um ângulo em radianos também pode ser definida como *o comprimento do arco* determinado por esse ângulo, quando esse for o *ângulo central* de um círculo de *raio unitário.*

Podemos, portanto, medir um ângulo em graus ou em radianos, conforme a situação em que estivermos trabalhando. Se α é a medida de um ângulo em radianos e θ é a medida do ângulo em graus, então

$$\alpha = \frac{2\pi}{360}\theta = \frac{\pi}{180}\theta.$$



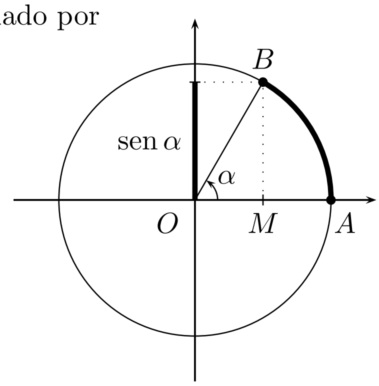
Partindo do fato de que a medida de um ângulo em radianos é igual ao comprimento do arco determinado por esse ângulo num círculo unitário, podemos estender a definição das funções trigonométricas, tomando como referência arcos de círculo.

Daqui em diante, por conveniência, estaremos sempre nos referindo ao círculo unitário.

Observe que, se um arco tem comprimento menor que $\pi/2$, as funções trigonométricas do ângulo central correspondente já foram definidas na Seção 3.1, pois trata-se de um ângulo agudo.

Se inserirmos um sistema de eixos perpendiculares cuja origem O coincida com o centro do círculo e de modo que uma extremidade A desse arco esteja sobre o eixo horizontal, então teremos que o seno do ângulo α é dado por

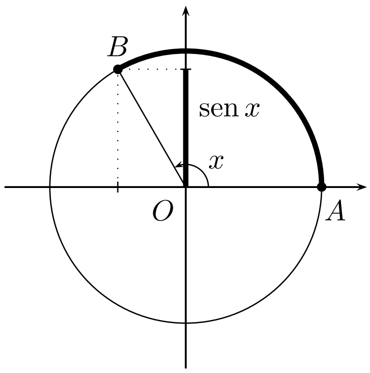
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{BM}{OB} = \frac{BM}{1} = BM\,,$$

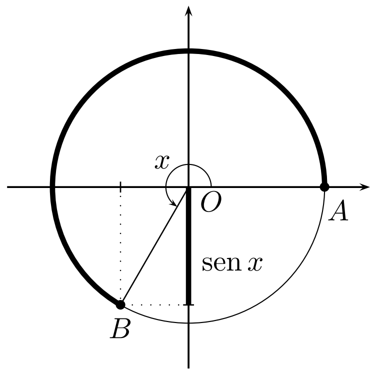


onde B é a outra extremidade do arco e M é a projeção de B sobre o eixo horizontal. A medida do segmento BM é o módulo da ordenada de B. Para que o valor do seno de α coincida com a ordenada de B, definimos uma orientação no círculo: o arco será considerado *positivo* quando for percorrido no sentido anti-horário.

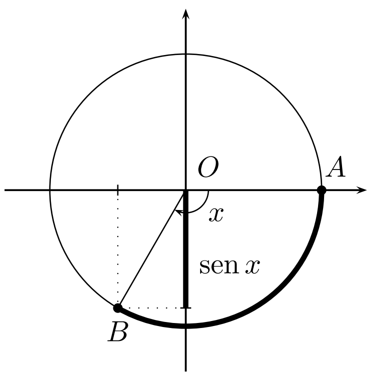
Se x é um número real positivo menor que $\pi/2$, podemos agora definir o *seno de* x como sendo a *ordenada* de B, para um arco AB de comprimento x percorrido no sentido *anti-horário* (num círculo unitário, onde a origem dos eixos coincide com o centro do círculo, com a extremidade A do arco sobre o eixo horizontal).

Essa definição pode ser facilmente estendida para valores de x maiores que $\pi/2$.





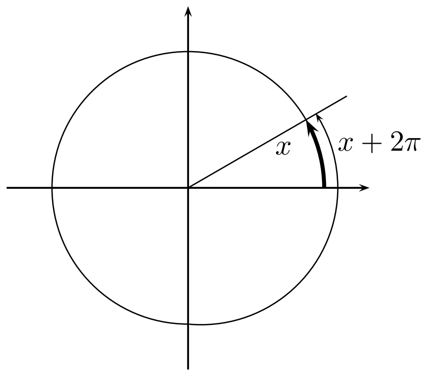
Para qualquer valor de x no intervalo $[0, 2\pi]$ podemos definir *seno de* x como a ordenada de B, para um arco AB de comprimento x percorrido no sentido *anti-horário*.



A definição pode ser, novamente, estendida para valores de x maiores do que 2π. Tomamos B como o ponto de chegada de um percurso de comprimento x realizado a partir de A no sentido anti-horário.

Podemos também estender a definição de seno de x *para valores negativos de* x. Basta tomar agora a extremidade B como ponto de chegada de um percurso de comprimento $|\,x\,|$ percorrido a partir de A no sentido *horário*.

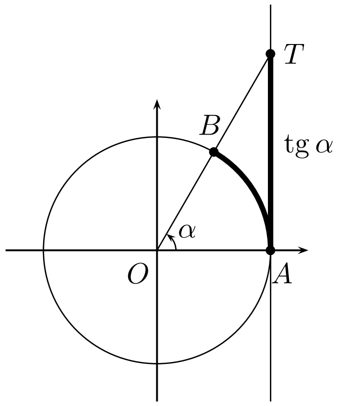
A cada número real x associamos um ponto do círculo. É como se a reta que corresponde aos números reais estivesse "enrolada" no círculo, com a origem sobre o ponto A e o sentido positivo sendo o anti-horário. Entretanto, não há mais uma correspondência biunívoca entre pontos e números reais, como havia na reta: quando somamos 2π a um número real x, completamos uma volta no círculo e recaímos no mesmo ponto de onde havíamos partido. O mesmo ocorre quando diminuímos 2π, e a volta é percorrida no sentido horário.



Como podemos percorrer infinitas voltas tanto num como noutro sentido, a cada ponto do círculo correspondem infinitos números reais.

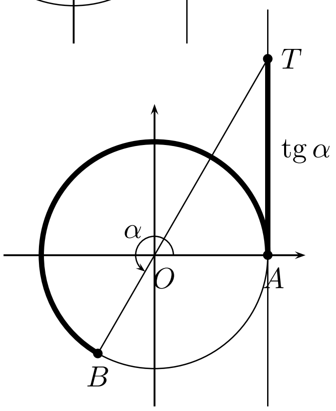
Se um ponto do círculo corresponde ao número real x, corresponde a todos os números reais dados por $x + k2\pi$, para valores inteiros de k.

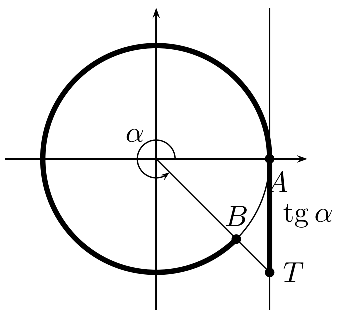
As demais funções trigonométricas podem ser estendidas do mesmo modo. Vejamos o caso da *função tangente*.



Tomamos, novamente, o círculo unitário, com centro na origem e um arco AB de comprimento menor do que $\frac{\pi}{2}$ e a extremidade A do arco sobre o eixo horizontal. Tomamos a reta tangente ao círculo passando por A. Seja T a interseção dessa reta com o prolongamento do raio OB. Então, se α é o ângulo central correspondente ao arco AB, temos

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT.$$





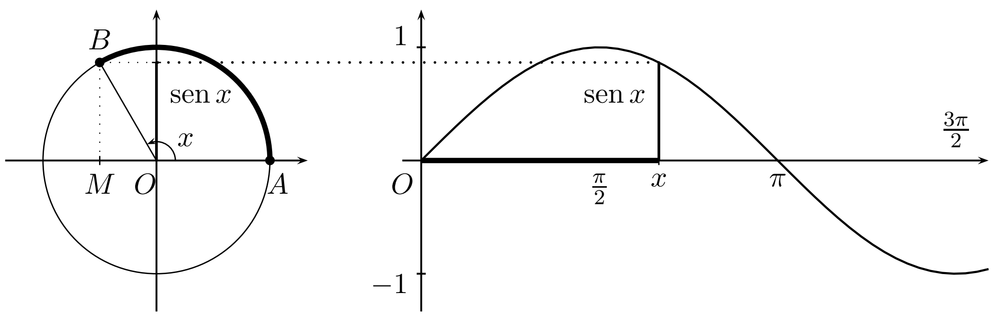
Observe que não podemos definir a tangente para arcos de comprimento $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ e, em geral, para arcos de comprimento $\dfrac{k\pi}{2}$, com k inteiro ímpar.

Para um arco AB de comprimento menor do que $\dfrac{\pi}{2}$, a tangente de α é, então, a ordenada de T. Para qualquer x real, que não seja igual a $\dfrac{k\pi}{2}$ para algum k inteiro, podemos definir tangente de x como a *ordenada de* T, para um arco AB de comprimento $|\,x\,|$ percorrido no sentido anti-horário, para x positivo, e no sentido horário, para x negativo.

3.5 – GRÁFICO DA FUNÇÃO SENO

O esboço do gráfico da função seno é importante para nos ajudar a compreender seu comportamento. Para esse esboço, vamos considerar alguns de seus elementos.

Definimos a função seno de modo que seu *domínio* é o conjunto dos números reais. É fácil observar que a *imagem* dessa função está contida no intervalo $[-1, 1]$, uma vez que o seno é a ordenada de um ponto do círculo unitário centrado na origem. A *imagem* da função seno é, de fato, o intervalo $[-1, 1]$: qualquer altura no intervalo $[-1, 1]$ é a ordenada de pelo menos um ponto do círculo unitário e, portanto, é a imagem de infinitos números reais.



Os valores de $\operatorname{sen} x$ repetem-se a cada volta percorrida no círculo. Para qualquer número real x, temos

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x + 4\pi) = \cdots$$

e, também,

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x - 2\pi) = \operatorname{sen}(x - 4\pi) = \cdots$$

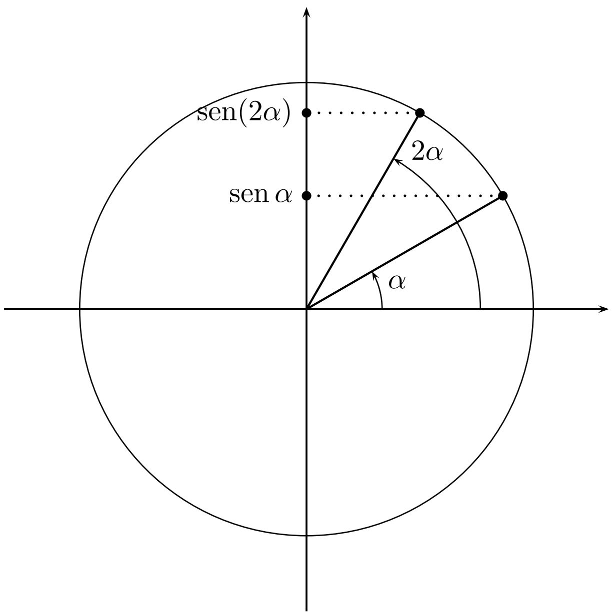
Podemos escrever, então, que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2k\pi)$, para qualquer k inteiro e dizer que a função seno é uma função *periódica*, de *período* 2π.

Além disso, podemos esboçar o gráfico para o intervalo $[0, 2\pi)$ do domínio e depois "colar pedaços" do gráfico idênticos a esse, à esquerda e à direita.

O comprimento do intervalo considerado é 2π. O traçado desse intervalo equivale a uma operação de "desenrolar o círculo", como podemos observar na figura da página precedente.

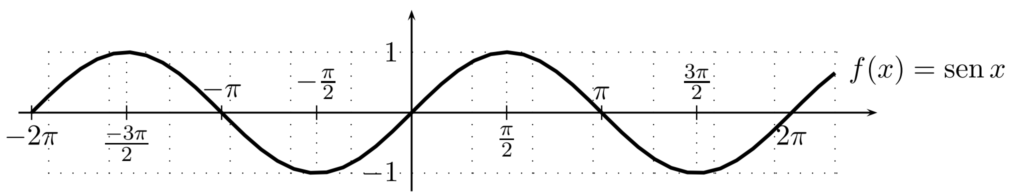
Sabemos que nesse intervalo o valor máximo da função, que é 1, é atingido quando $x = \pi/2$ e o valor mínimo, -1, é atingido quando $x = 3\pi/2$. Os zeros da função nesse intervalo são 0 e π. Mas, como a função varia em cada um dos quatro intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ e $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$?

Começamos observando que a função seno é crescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ e decrescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Pode-se intuir que, no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{sen} x$ cresce cada vez mais lentamente conforme se aproxima de $\pi/2$. Já no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\operatorname{sen} x$ decresce cada vez mais rapidamente conforme se aproxima de π.



Isso significa que esse crescimento do seno em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *não é* linear ou, então, que a taxa de variação *não é* constante. Observe que, quando percorremos arcos de mesmo comprimento, a variação do seno não é a mesma, como já vimos na Proposição 3.2 e como também pode ser observado na figura acima.

Enfim, pode-se intuir que o seno de x varia continuamente em função de x. Na figura abaixo temos um esboço do gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$.

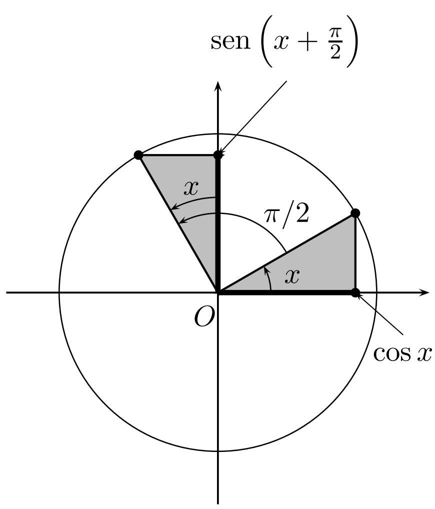


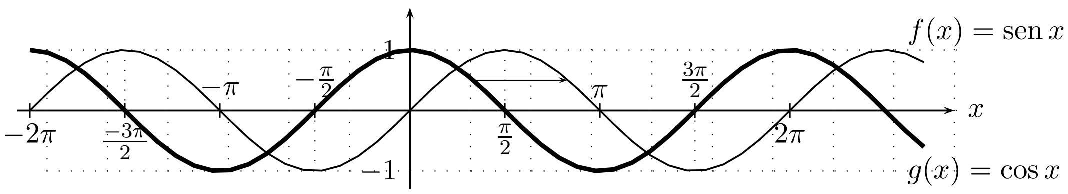
3.6 – TRANSLAÇÕES, ALONGAMENTOS E COMPRESSÕES

A partir do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$, podemos obter o gráfico de uma infinidade de funções. Por exemplo, podemos obter o gráfico de $g(x) = \cos x$ usando o fato de que, para qualquer valor real de x,

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

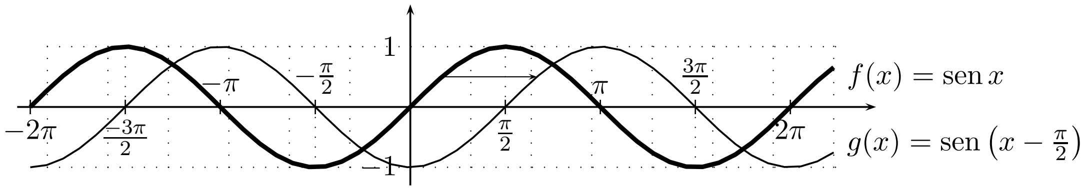
como ilustra a figura ao lado. Como a função cosseno está "adiantada" $\pi/2$ em relação à função seno, o traçado do gráfico de $g(x) = \cos x$ pode ser imaginado como um deslocamento do eixo vertical para a direita, de $\pi/2$ unidades, sobre o gráfico da função seno.



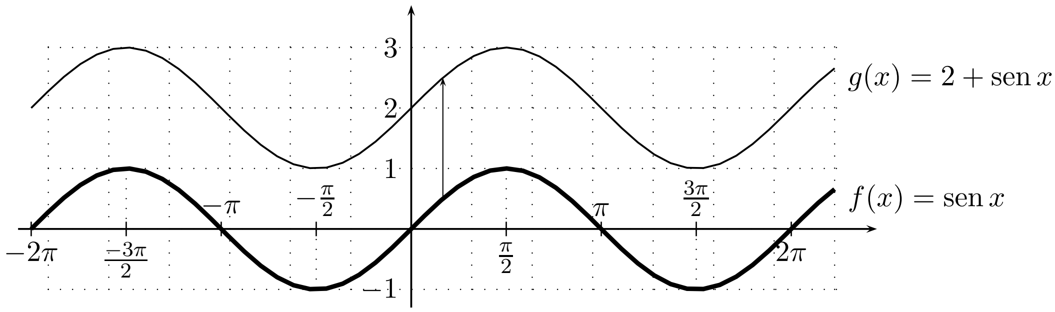


Também podemos ver o gráfico do cosseno como um deslocamento do gráfico da função seno de $\pi/2$ unidades para a esquerda. Na figura acima, temos um esboço do gráfico da função $g(x) = \cos x$ junto com o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Em geral, dado um valor real d qualquer, o gráfico da função $g(x) = \operatorname{sen}(x - d)$ pode ser obtido a partir do gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$, com um deslocamento desse gráfico d unidades *para a direita*. Na figura abaixo, temos um esboço do gráfico da função $g(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

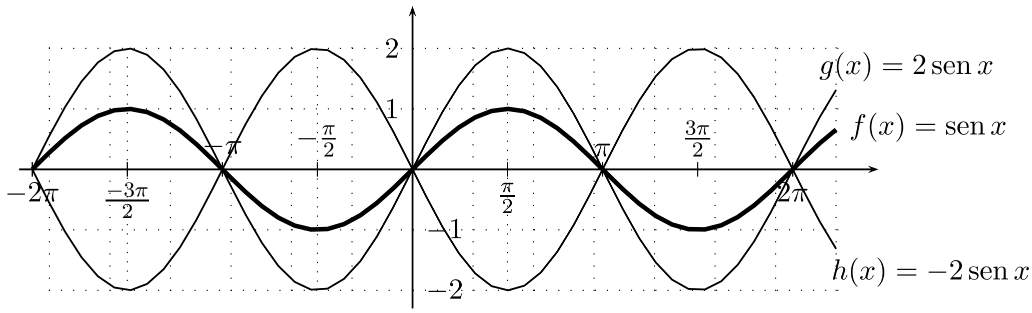


Para um número real qualquer a, o gráfico da função $g(x) = a + \operatorname{sen} x$ pode ser obtido a partir do gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$, com um deslocamento *vertical* desse gráfico de a unidades. A imagem dessa função g será o intervalo $[-1 + a, 1 + a]$. Na figura abaixo, temos um esboço do gráfico da função $g(x) = 2 + \operatorname{sen} x$.



Para um número real positivo qualquer b, o gráfico da função $g(x) = b \operatorname{sen} x$ pode ser obtido a partir do gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$, com um alongamento ou compressão *vertical* desse gráfico. A imagem dessa função g será o intervalo $[-b, b]$.

Quando b for um número real negativo, teremos além do alongamento vertical uma *reflexão* do gráfico da função em relação ao eixo horizontal. Na figura abaixo, temos um esboço dos gráficos das funções $g(x) = 2 \operatorname{sen} x$ e $h(x) = -2 \operatorname{sen} x$.

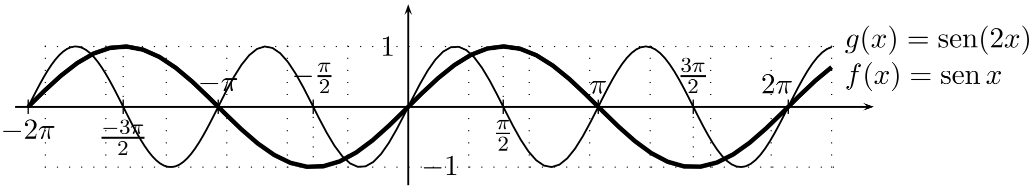


Para valores reais não nulos de c, o gráfico da função $g(x) = \operatorname{sen}(c\,x)$ pode ser obtido a partir do gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$. A imagem dessa função g ainda é o intervalo $[-1, 1]$, mas a frequência da função, isto é, a "quantidade de períodos" percorridos num mesmo intervalo, fica multiplicada por $|\,c\,|$. O comprimento do período é inversamente proporcional à frequência.

Se o módulo de c for maior do que 1, a frequência da função $g(x) = \operatorname{sen}(c\,x)$ será maior do que a da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ e o período da função g será menor do que o da função f. Por exemplo, com $c = 2$, temos

$$g(x) = \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(2x + 2\pi) = \operatorname{sen}[2(x + \pi)] = g(x + \pi),$$

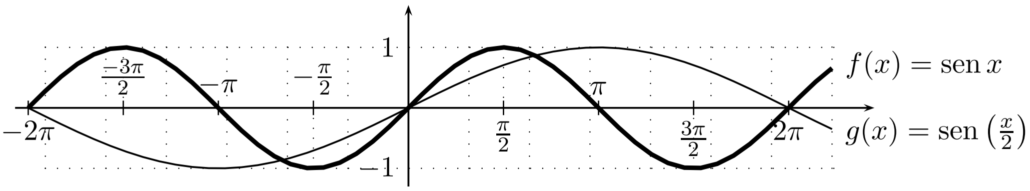
para qualquer x real e, portanto, o período de $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$ é π. Na figura abaixo, temos um esboço do gráfico da função $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$.



Se o módulo de c for menor do que 1, a frequência da função $g(x) = \operatorname{sen}(c\,x)$ será menor do que a da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ e o período da função g será maior do que o da função f. Por exemplo, com $c = \frac{1}{2}$, temos

$$g(x) = \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}x\right) = \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}x + 2\pi\right) = \operatorname{sen}\left[\tfrac{1}{2}(x + 4\pi)\right] = g(x + 4\,\pi),$$

para qualquer x real e, portanto, o período de $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ é $4\,\pi$. Na figura abaixo, temos um esboço do gráfico da função $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$.



Generalizando o que foi mostrado nos dois últimos exemplos, podemos concluir que o período da função $g(x) = \operatorname{sen}(c\,x)$, para valores de c diferentes de 0 é, sempre, $\frac{2\pi}{|\,c\,|}$.

Resumindo, se c for diferente de 0, 1 e -1, o gráfico da função $g(x) = \operatorname{sen}(c\,x)$ é um alongamento ou compressão *horizontal* do gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$. Além disso, se c for um número negativo, ocorre também uma *reflexão* do gráfico da função em relação ao eixo horizontal, uma vez que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$, para qualquer valor real de x.

Exercício 3.1. O topo de uma torre vertical é visto de um ponto P do solo segundo um ângulo de $30°$. A distância do ponto P à base da torre é $150\,\mathrm{m}$. Calcule a altura da torre.

Exercício 3.2. Sabe-se que θ é um ângulo entre $0°$ e $90°$ e que $\operatorname{sen}\theta = 0{,}6$. Calcule $\cos\theta$ e $\operatorname{tg}\theta$.

Exercício 3.3. Sabe-se que $0° < \theta < 90°$ e que $\operatorname{tg}\theta = 5$. Calcule $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$.

Exercício 3.4. Verifique que

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \qquad \operatorname{sen} 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tg} 15° = 2-\sqrt{3}\,.$$

Exercício 3.5. Verifique que

$$\cos 22,5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \qquad \operatorname{sen} 22,5° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tg} 22,5° = \sqrt{2}-1\,.$$

Exercício 3.6. Verifique que

$$8\ \operatorname{sen} 3° = \sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{9-3\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{15+3\sqrt{5}}.$$

Obtenha uma expressão análoga para o valor de $\cos 3°$.

Exercício 3.7. Usando as Fórmulas (3.10) e (3.11), deduza a igualdade

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta}\,.$$

Exercício 3.8. Utilize o exercício anterior para deduzir uma fórmula para $\operatorname{tg}(2\,\theta)$.

Exercício 3.9. Se dois ângulos agudos α e β são tais que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$, mostre que $\alpha+\beta = 45°$.

Exercício 3.10. Utilizando as Fórmulas (3.6), (3.7), (3.10) e (3.11) deduza expressões para $\cos(3\,\theta)$ e $\operatorname{sen}(3\,\theta)$ em termos de $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$.

Exercício 3.11. Utilizando o resultado obtido no exercício precedente, escreva $\operatorname{sen}(3\,\theta)$ em função de $\operatorname{sen}\theta$. A partir daí, obtenha um polinômio de grau 3 com coeficientes inteiros que tenha $x = \operatorname{sen} 10^\circ$ como raiz. Procurando as possíveis raízes racionais do polinômio encontrado, prove que $\operatorname{sen} 10^\circ$ é um número irracional.

Exercício 3.12. Verifique se a afirmação dada é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

a) $\operatorname{sen} 2 > 0$ b) $\cos 4 < 0$ c) $\operatorname{sen} 3 > \operatorname{sen} 2$

d) $\cos 3 > \cos 2$ e) $\operatorname{tg} 5 > \operatorname{tg} 6$ f) $\cos\sqrt{3} < 0$

g) $\cos\dfrac{\pi}{4} > \cos 1$ h) $2\operatorname{sen} 1 = \operatorname{sen} 2$

Exercício 3.13. Encontre todos os valores de x que satisfazem a igualdade dada.

a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\operatorname{sen}(3x) = \dfrac{1}{2}$ c) $\operatorname{tg}^2 x = 3$

Exercício 3.14. Verifique se a afirmação dada é verdadeira ou falsa para qualquer número real x, justificando sua resposta.

a) $\operatorname{sen}(-x) = \operatorname{sen} x$ b) $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$

c) $\operatorname{sen}(\pi + x) = \operatorname{sen} x$ d) $\cos(-x) = \cos x$

e) $\cos(\pi - x) = \cos x$ f) $\cos(\pi + x) = \cos x$

Exercício 3.15. Encontre todos os valores de x que satisfazem a desigualdade dada.

a) $\operatorname{sen} x \geq 0$ b) $\operatorname{sen} x < \dfrac{1}{2}$ c) $\cos x < -\dfrac{1}{2}$.

Exercício 3.16. Resolva a desigualdade $2\operatorname{sen}^2 x + 7\operatorname{sen} x + 3 \leq 0$.

Exercício 3.17. Resolva a equação $\operatorname{sen}(2x) = \cos x$.

Exercício 3.18. Encontre todos os valores de x para os quais $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x$.

Exercício 3.19. Determine o número de soluções de cada uma das equações dadas.

a) $\operatorname{sen}(3x) = \cos(2x)$, em $[0, 2\pi]$.

b) $\operatorname{sen} x = x$

c) $\operatorname{sen} x = (x-5)^2$

Exercício 3.20. Para cada uma das funções dadas, determine o domínio, a imagem e o período (se houver) e esboce o gráfico.

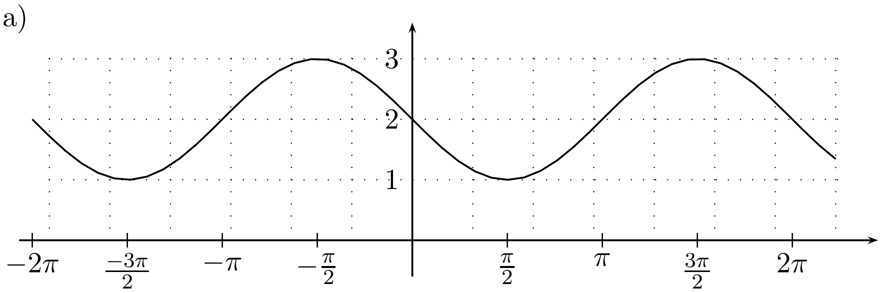
a) $f(x) = \operatorname{sen}(x + \pi/4)$	b) $f(x) = 1 + \cos x$	c) $f(x) = 1 - \operatorname{sen} x$
d) $f(x) = -2\ \operatorname{sen}(x/2)$	e) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x$	f) $f(x) = -\operatorname{sen} x$
g) $f(x) = 1 - \cos x$	h) $f(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x$	i) $f(x) = \frac{1}{2}\cos x$

Exercício 3.21. Para cada uma das funções dadas, determine o domínio e a imagem e verifique se é periódica.

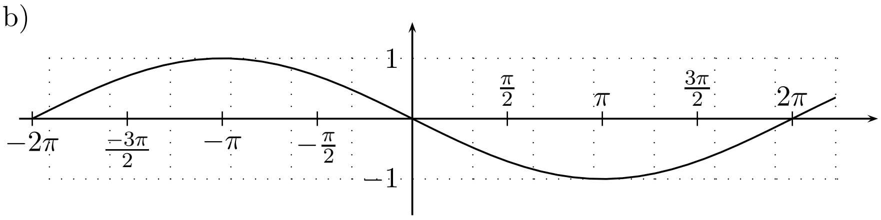
a) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$	b) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$
c) $f(x) = \sqrt{\lvert \operatorname{sen} x \rvert}$	d) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercício 3.22. Para cada um dos gráficos abaixo, obtenha uma função correspondente na forma $f(x) = a + b\ \operatorname{sen}(cx - d)$, para certos a, b, c e d reais especificados.

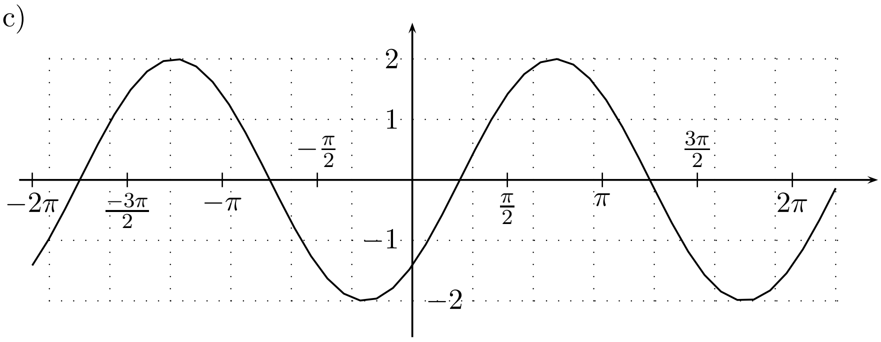
a)



b)



c)



Exercício 3.23. Uma população de animais varia de forma senoidal entre um valor máximo de 900, em 1º de janeiro, e um valor mínimo de 700, em 1º de julho.

a) Esboce um gráfico da população em função do tempo.
b) Encontre uma fórmula para essa função, sendo o tempo dado em meses, a partir do começo do ano.

Exercício 3.24. A profundidade da água numa baía varia de forma senoidal, em ciclos de quatro meses, entre um valor máximo de 36 metros e um valor mínimo de 20 metros.

a) Esboce um gráfico da profundidade em função do tempo.
b) Encontre uma fórmula para essa função, sendo o tempo dado em meses, e tomando como instante zero o momento em que a profundidade atingiu o valor máximo.

Exercício 3.25. A voltagem de uma saída de eletricidade em uma residência é dada em função do tempo t (em segundos) por $V(t) = V_0 \cos(120\,\pi\, t)$.

a) Qual é o período da oscilação?
b) O que representa V_0?
c) Esboce o gráfico de $V(t)$.

Exercício 3.26. Você sabe que duas funções trigonométricas têm, cada uma, período π e que seus gráficos se intersectam em $x = 3{,}64$, mas você não tem nenhuma outra informação sobre as funções.

a) Você sabe dizer se os gráficos se intersectam em algum valor positivo menor do que 3,64?
b) Obtenha um valor maior do que 3,64 onde os gráficos se intersectam.
c) Encontre um valor negativo de x no qual os gráficos se intersectam.

Exercício 3.27. Quando se estudam fenômenos periódicos, por exemplo, o movimento harmônico simples, é comum precisarmos usar funções do tipo

$$f(x) = A\ \mathrm{sen}(cx) + B\ \cos(cx)$$

para modelar esses fenômenos. O objetivo do presente exercício é desenvolver um método para ter uma ideia do gráfico e do comportamento desse tipo de função.

a) Considere a função $g(x) = \mathrm{sen}\, x + \cos x$. Mostre que

$$g(x) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}\, x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right).$$

Utilize esse fato para mostrar que $g(x) = \sqrt{2}\ \mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Utilizando essa última expressão, faça um esboço do gráfico da função $g(x)$.

b) Seja $f(x) = A \operatorname{sen}(cx) + B \cos(cx)$. Confira que

$$f(x) = C\left[a \operatorname{sen}(cx) + b \cos(cx)\right],$$

com $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $a = A/C$ e $b = B/C$.

Em seguida, considere um ponto P de coordenadas (a, b) no plano cartesiano. Mostre que $a^2 + b^2 = 1$, portanto P está no círculo unitário. Seja φ o ângulo do semieixo positivo dos x com a semirreta OP, onde O é a origem. Mostre que $a = \cos\varphi$ e $b = \operatorname{sen}\varphi$. Mostre que a expressão de $f(x)$ pode ser reescrita na forma

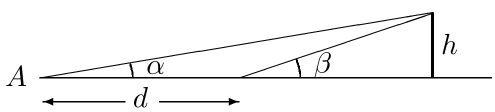
$$f(x) = C \operatorname{sen}(cx + \varphi) = C \operatorname{sen}\left(c\left[x + \tfrac{\varphi}{c}\right]\right).$$

A partir daí, descreva o gráfico de f em termos de compressões, dilatações e translações verticais e horizontais.

Exercício 3.28. Sejam a e b os comprimentos de dois lados de um triângulo e seja θ o ângulo agudo formado por eles. Prove que a área desse triângulo vale $S = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen}\theta$.

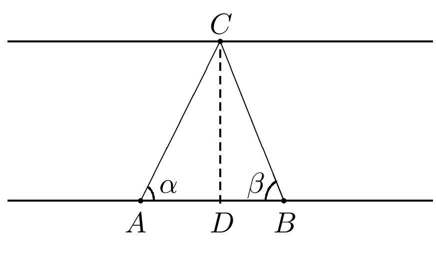
Exercício 3.29. Um observador, situado no ponto A, vê o cume de uma montanha distante segundo um ângulo de $\alpha = 10°$, medido com um teodolito. Desejando conhecer a altura da montanha, e tendo à sua frente um terreno plano, o observador desloca-se uma distância $d = 800\,\text{m}$ em direção à montanha e faz nova medição. Constata que agora vê o topo da montanha segundo um ângulo de $\beta = 15°$. Determine a altura da montanha, usando que

$$\operatorname{sen} 5° \cong 0{,}0871 \quad \text{e} \quad \cos 5° \cong 0{,}9961.$$



Generalize esse exercício, encontrando a expressão de h em função de α, β e d para α, β e d quaisquer.

Exercício 3.30. Desejando estimar a largura de um grande rio, um observador, situado em uma das margens, seleciona um marco bem visível na margem oposta. A partir de um ponto A, como na figura ao lado, o observador mede, então, o ângulo α indicado na figura. Em seguida, deslocando-se até o ponto B, também na margem do rio e distando 500 m do ponto A, faz uma medição do ângulo β.

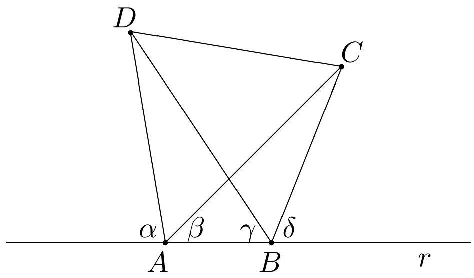


Sabendo que $\alpha = 68°$ e $\beta = 74°$, determine a largura CD do rio.

Sugestão: Use uma calculadora científica para obter os valores das funções trigonométricas dos arcos que precisar.

Exercício 3.31. A reta r na figura dada representa um trecho retilíneo da costa. Um observador deseja obter uma estimativa para a distância entre duas ilhas, representadas pelos pontos C e D.

A partir de pontos A e B situados na costa e distantes 1800 m um do outro, o observador mede os ângulos que AD, AC, BD e BC fazem com a linha da costa, encontrando os valores $\alpha = 80°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$ e $\delta = 75°$. Determine a distância CD entre as duas ilhas.



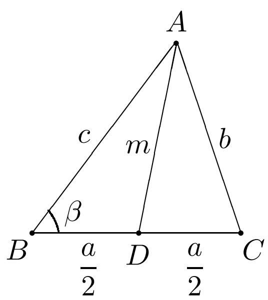
Exercício 3.32. Calcule os comprimentos das diagonais de um paralelogramo que tem lados de comprimento 3 e 4 e um ângulo de 60°.

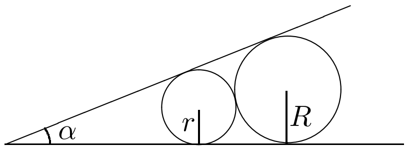
Exercício 3.33. Sabendo que os lados de um paralelogramo $ABCD$ medem $AB = CD = 2$ e $BC = AD = 1$ e que o ângulo $D\widehat{A}B = 60°$, determine o cosseno do ângulo agudo formado pelas diagonais de $ABCD$.

Exercício 3.34. Calcule o cosseno do ângulo agudo formado por duas diagonais de um cubo.

Exercício 3.35. De um ponto que dista 5 cm de um círculo de 3 cm de raio são traçadas duas retas tangentes ao círculo. Calcule o seno do ângulo agudo formado por essas duas retas.

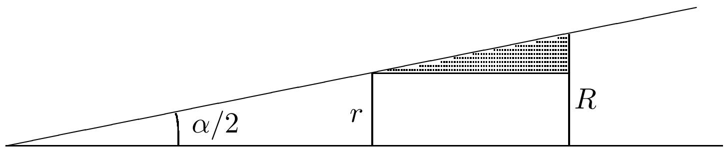
Exercício 3.36. Uma *mediana* de um triângulo é um segmento de reta unindo um vértice ao ponto médio do lado oposto. Considere o triângulo ABC na figura ao lado. Aplicando a Lei dos Cossenos nos triângulos ABC e ABD, obtenha a expressão da mediana $m = \overline{AD}$ em função dos lados a, b e c.





Exercício 3.37. Considere dois círculos tangentes entre si exteriormente e tangentes a duas retas, como mostra a figura. Expresse o raio R do círculo maior em função do raio r do círculo menor e do cosseno do ângulo α entre as duas retas.

Sugestão: Trace a reta que passa pelos centros dos círculos, formando a figura abaixo. Considere o triângulo retângulo hachurado. Quanto vale a hipotenusa desse triângulo?



Exercício 3.38. Os lados de um triângulo ABC medem $AB = 6, AC = 5$ e $BC = 4$. Mostre que $B\widehat{C}A = 2\,C\widehat{A}B$.

Respostas Selecionadas

RESPOSTAS DE EXERCÍCIOS DO CAPÍTULO 1

Exercício 1.1

a) $c = \dfrac{7}{24}$ e $d = 0{,}29202002000200002\ldots$

b) $c = 0{,}9943274$ e $d = 0{,}994327414114111411114\ldots$

c) $c = 0{,}8714795$ e $d = 0{,}8714795678910111213\ldots$

d) $c = 0{,}100100011$ e $d = 0{,}1001000121221222122221\ldots$

Exercício 1.3

Falsa. Contra-exemplo: $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$, que é racional.

Exercício 1.4

a) $\left(-\infty, \frac{10}{3}\right)$ b) $\left(-\infty, \frac{-10}{9}\right)$ c) $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

d) $\left(-1, -\frac{8}{9}\right)$ e) $(-5, 2)$ f) $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup (-1, 2)$

Exercício 1.5

a)$\{x \in \mathbb{R}; |x - 7| < 9\}$ b)$\{x \in \mathbb{R}; |x - 3| \geq 2\}$ c)$\{x \in \mathbb{R}; |x + 2| > 1\}$

Exercício 1.6

a) $t \in (-1, 3)$ b) $t \in [-8, 2]$

c) $t \in (-\infty, 0] \cup [6, +\infty)$ d) $t \in (-\infty, -5) \cup (-3, +\infty)$

Exercício 1.7

a) para todo x real b) $x \in [-1, 1]$

c) $x \in (-\infty, 0] \cup [6, +\infty)$ d) $x \in (-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$

Exercício 1.9

$a = 4$ ou $a = -2$.

Exercício 1.10

$b = \sqrt{55}$ ou $b = -\sqrt{55}$.

Exercício 1.11

Mostre que a distância de A até B é igual às distâncias de A a C e de B a C.

Exercício 1.16

$x + 2y + 1 = 0$

Exercício 1.17

$y = \frac{1}{4}x + \frac{19}{4}$

Exercício 1.18

$x - 4y + 16 = 0$

Exercício 1.20

a) Não há.

b) $(-8, -8)$

c) Não há.

Exercício 1.23

$y = -2x - 7$

Exercício 1.24

A área é 6 unidades.

Exercício 1.26

$9\mathrm{C} - 5\mathrm{F} + 160 = 0$

Exercício 1.27

a) $\frac{3}{5}$ b) -2 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{21}{4}$ e) $\frac{12}{7}$

Exercício 1.28

a) $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 16$ e $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$

b) $x^2 + (y-1)^2 = 8$ e $x^2 + y^2 - 2y - 7 = 0$

c) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ e $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

Exercício 1.29

a) Centro $\left(-\frac{3}{2}, 4\right)$ e raio 3;

b) Centro $\left(-\frac{1}{4}, -1\right)$ e raio 1;

c) Centro $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ e raio $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Exercício 1.30

$x - 3y = 0$

Exercício 1.31

$\sqrt{41}$

Exercício 1.38

$C(x) = 60 + 3x$, com $x \geq 0$.

Exercício 1.39

$V(t) = 3000 - 300t$, $0 \leq t \leq 10$.

Exercício 1.40

a) Opção 2. b) Para um tempo maior do que 76 minutos.

Exercício 1.41

a) R\$ 23,00.

b) $p(x) = \begin{cases} 0{,}10x, & \text{para } x \in \{1, 2, \ldots, 100\}; \\ 10{+}0{,}07(x-100), & \text{para } x \in \{101, \ldots, 200\}; \\ 17{+}0{,}05(x-200), & \text{para } x \in \{201, \ldots\}. \end{cases}$

Exercício 1.43

a) Para $x \in \{1, 2, 3, \ldots, \}$,
Locadora 1: $y(x) = 50 + 0{,}2x$;
Locadora 2: $y(x) = 30 + 0{,}4x$;
Locadora 3: $y(x) = 65$.

c) A partir de 101 km rodados.

d) A partir de 88 km rodados, considerando que a variável x toma apenas valores inteiros.

Exercício 1.45

$0{,}25x + 0{,}35y = 70$ e $0{,}25x + 0{,}35y \geq 70$, com $x, y \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Exercício 1.46

$$C(x) = 2x + \frac{800}{x} - 9, \text{ com } 4 < x < 80.$$

Exercício 1.48

$V(x) = 4x(4-x)(3-x)$, com $0 < x < 3$.

Exercício 1.49

$V = \frac{1}{12}\pi h^3$, com $h > 0$.

Exercício 1.48

a) $s = 9$, se $0 < x \leq 4$; $s = \dfrac{36}{x}$, se $4 < x < 20$.

RESPOSTAS DE EXERCÍCIOS DO CAPÍTULO 2

Exercício 2.3

a) $\frac{5}{4}(x+1)^2 - 5$

b) $5(x-1)^2 - 5$

c) $-3(x-1)^2 + 12$

Exercício 2.4

a) $(x-1)^3 + 8$

b) $-2(x-1)^4 + 16$

Exercício 2.5

a) Raízes: 1 (dupla) e -1

b) Uma raiz real.

c) Uma raiz real.

Exercício 2.6

a) $p_1(x) = \dfrac{2}{3}(x-1)(x-3)(x+3)$

b) $p_2(x) = -\dfrac{1}{4}(x+2)^2(x-1)(x-4)$

c) $p_3(x) = -\dfrac{1}{3}(x+2)^2(x-3)$

d) $p_4(x) = \dfrac{1}{6}(x+3)(x+1)(x-2)(x-4)$

Exercício 2.7

a) $q(x) = x+9$ e $r(x) = 11x - 41$

b) $q(x) = 5x^2 - \dfrac{5}{2}x + \dfrac{85}{2}$ e $r(x) = -\dfrac{381}{2}x^2 + \dfrac{1415}{2}x + 255$

Exercício 2.8

a) -20 b) 597 c) 205 d) $-2i+1$

Exercício 2.9

a) $(x-1)(x-3)(x+5)$

b) $3x(x+1)(x-2)(x+7)$

c) $10x^2(x+3)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{5}\right)$

d) $3(x-2)(x+3)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)(x^2+1)$

e) $4(x+\dfrac{1}{2})\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x^2+1)$

f) $9(x-3)(x-1)^2\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2$

Exercício 2.10

a) $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$

b) $-2 < x < 2$

c) $x < 2$ ou $x > 3$

d) $-2 < x < 2$

e) $x < 0$

f) $-5 < x < 2$ ou $x > 4$

g) $x \neq 1$

h) $x < -1$ ou $-\dfrac{1}{3} < x < 2$

i) Todo x real.

j) Não existe x real.

Exercício 2.12

a) $Q(x) > 0$ com $x > 2$; $Q(x) < 0$ com $x < 2$; $Q(x) = 0$ em $x = 2$.

b) $Q(x) > 0$ com $x > \dfrac{5}{2}$; $Q(x) < 0$ com $x < \dfrac{5}{2}$ e $x \neq 1$; $Q(x) = 0$ em $x = \dfrac{5}{2}$.

c) $Q(x) > 0$ com $0 < x < 2$ ou $x > 3$; $Q(x) < 0$ com $x < 0$ ou $2 < x < 3$;

$Q(x) = 0$ em $x = 2$ e $x = 3$.

d) $Q(x) > 0$ com $-1 < x < 0$ ou $0 < x < 1$ ou $x > 3$;

$Q(x) < 0$ com $x < -1$ ou $1 < x < 3$; $Q(x) = 0$ em $x = 1$ e $x = 3$;

$Q(x)$ não está definida em $x = 0$ e $x = -1$.

Exercício 2.13

a) $x + 1 + \dfrac{1 - 3x - 2x^2}{x^3 + 3}$

b) $3x^3 + 7x^2 + 9x + 11 + \dfrac{5x - 11}{x^2 - 2x + 1}$

c) $x^3 - 9x + \dfrac{38x^2}{x^3 + 4x}$

d) $x^4 - 2x^3 + 2x - 2 + \dfrac{2x^2 + x + 5}{x^3 + 2x^2 + x}$

Exercício 2.14

a) $\dfrac{6}{x + 5} + \dfrac{2}{x - 1}$

b) $\dfrac{2}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{1}{x - 4} - \dfrac{3}{x + 2}$

c) $\dfrac{2}{(x - 1)^2} + \dfrac{3}{x - 1} + \dfrac{6}{x + 3}$

d) $\dfrac{2}{(x + 1)^2} + \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{2}{(x - 1)^2}$

Exercício 2.15

a) $t = 0, 2$ e 3.

b) $p(t) > 0$ para t em $(0, 2) \cup (3, +\infty)$; $p(t) < 0$ para t em $(2, 3)$.

c) $v_{\{2,t\}} = \dfrac{t(t - 3)}{t^2 + 1}$, para $t \geq 0$ e $t \neq 2$.

d) $v_{\{2,t\}} \leq 0$ em $[0, 2) \cup (2, 3]$; $v_{\{2,t\}} > 0$ em $(3, +\infty)$.

e) $v_{\{2,t\}}$ se aproxima de $-\dfrac{2}{5}$.

Exercício 2.17

a) $s = 1$ e $s = 3$.

b) $T(s) < 0$, com $1 < s < 3$.

Exercício 2.18

25×25 metros

Exercício 2.20

130×130 metros

Exercício 2.21

400×667 metros

RESPOSTAS DE EXERCÍCIOS DO CAPÍTULO 3

Exercício 3.1

$h = 50\sqrt{3}\,\text{m} \cong 86{,}60\,\text{m}.$

Exercício 3.2

$\cos\theta = 0{,}80\,; \quad \operatorname{tg}\theta = 0{,}75.$

Exercício 3.3

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{26}}\,; \quad \operatorname{sen}\theta = \dfrac{5}{\sqrt{26}}\,.$

Exercício 3.4

Basta usar $15° = 60° - 45°$.

Exercício 3.5

Basta usar $22{,}5° = \dfrac{45°}{2}\,.$

Exercício 3.8

$\operatorname{tg}(2\,\theta) = \dfrac{2\operatorname{tg}\,\theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta}$

Exercício 3.9

Os ângulos α e β são agudos e $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 1$, portanto $\alpha + \beta = 45°$.

Exercício 3.10

$\cos 3\,\theta = \cos^3\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta \cdot \cos\theta; \quad \operatorname{sen} 3\,\theta = 3\operatorname{sen}\theta \cdot \cos^2\theta - \operatorname{sen}^3\theta$

Exercício 3.11

$\operatorname{sen} 3\,\theta = -4\operatorname{sen}^3\theta + 3\operatorname{sen}\theta$ e $p(x) = -8x^3 + 6x - 1.$

Como nenhuma das possíveis raízes racionais de p é uma raiz de p e como $\operatorname{sen} 10°$ é uma raiz de p, resulta que $\operatorname{sen} 10°$ não pode ser racional.

Exercício 3.12

a) V b) V c) F d) F e) F f) V g) V h) F

Exercício 3.13

a) $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ e $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

b) $x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3}$ e $x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

c) $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$ e $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 3.14

a) F b) V c) F d) V e) F f) F

Exercício 3.15

a) $2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

b) $-\dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

c) $\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 3.16

$\dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 3.17

$x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, ou $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 3.18

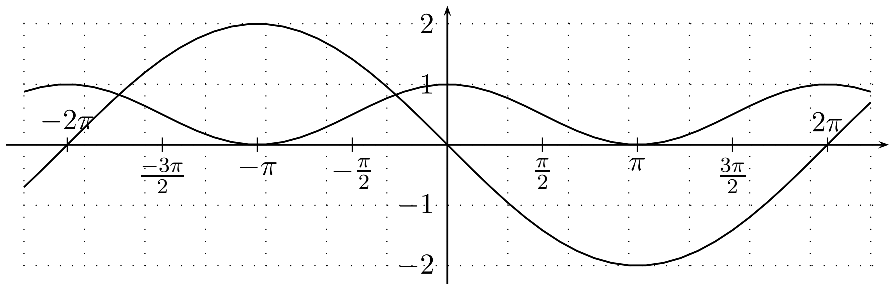
$x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 3.19

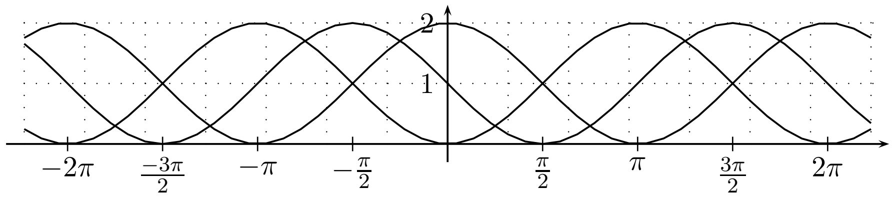
a) Cinco soluções.
b) Uma solução.
c) Não existe solução.

Exercício 3.20

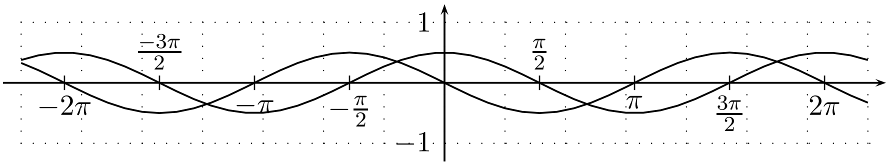
As nove funções têm domínio $\mathbb{R}$. Uma tem imagem $[-2, 2]$ com período π e uma outra tem imagem $[0, 1]$ com período 2π, ambas com seus gráficos esboçados a seguir. Identifique-as.



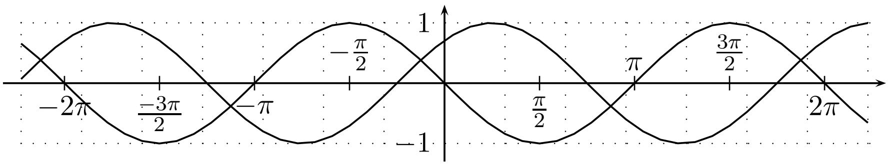
Três têm imagem $[0, 2]$, período 2π e gráficos esboçados a seguir. Identifique-as.



Duas têm imagem $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, período 2π e gráficos dados a seguir. Identifique-as.



Duas têm imagem $[-1, 1]$, período 2π e gráficos esboçados a seguir. Identifique-as.



Exercício 3.21

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = [0, 1]$, é periódica.

b) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$, não é periódica.

c) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = [0, 1]$, é periódica.

d) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$, não é periódica.

Exercício 3.22

a) $y = 2 - \operatorname{sen} x$ b) $y = -\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ c) $y = 2\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Exercício 3.29

$h \cong 412{,}32\,\mathrm{m}$; em geral, $h = d\,\dfrac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}$

Exercício 3.30

$CD \cong 723{,}83\,\mathrm{m}$

Exercício 3.31

$CD \cong 3.831{,}96\,\mathrm{m}$

Exercício 3.32

$d_1 = \sqrt{13} \cong 3{,}61$ e $d_2 = \sqrt{37} \cong 6{,}08$.

Exercício 3.33

$\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{21}}$

Exercício 3.34

$\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$

Exercício 3.35

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{3\sqrt{55}}{32}$$

Exercício 3.36

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

Exercício 3.37

$$R = \frac{1 + \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}}{1 - \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}} \cdot r = \frac{3 - \cos\alpha + 4\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}}{1+\cos\alpha} \cdot r$$

Exercício 3.38

Pela Lei dos Cossenos, $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ (verifique); pela Lei dos Senos, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3}\operatorname{sen}\gamma$ (verifique). Assim, pela Proposição 3.2,

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot\tfrac{2}{3}\operatorname{sen}\gamma\cdot\tfrac{3}{4} = \operatorname{sen}\gamma.$$

Logo, $\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}\gamma$. Como α e γ são agudos, resulta $2\alpha = \gamma$.

Índice Remissivo

Série Graduação

Físico-química
Um estudo dirigido sobre equilíbrio entre fases, soluções e eletroquímica
Yeda Pinheiro Dick e Roberto Fernando de Souza

Físico-química I
Termodinâmica química e equilíbrio químico
Luiz Pilla

Histologia
Texto, atlas e roteiro de aulas práticas
Tatiana Montanari

Introdução à bioquímica clínica veterinária
Félix H. Díaz González e Sérgio Ceroni da Silva

Métodos numéricos
Alejandro Borche

Ciências Humanas: pesquisa e método
Celi Regina Jardim Pinto e Cesar A. Barcellos Guazzelli (Org.)

Pesquisa quantitativa nas Ciências Sociais
Marcello Baquero

Físico-química II: equilíbrio entre fases, soluções líquidas e eletroquímica (2. ed. rev. e atual.)
Luiz Pilla

Introdução à cefalometria radiográfica (4. ed. rev. e ampl.)
Cléber Bidegain Pereira, Carlos Alberto Mundstock e Telmo Bandeira Berthold (Org.)

Pré-Cálculo (3. ed.)
Claus Ivo Doering, Liana Beatriz Costi Nácul e Luisa Rodríguez Doering (Org.)

Gestão ambiental em bibliotecas: aspectos interdisciplinares sobre ergonomia, segurança, condicionantes ambientais e estética nos espaços de informação
Jussara Pereira Santos (Org.)

Planejamento em saúde coletiva: teoria e prática para estudantes e profissionais da saúde
Deison Alencar Lucietto, Sonia Maria Blauth de Slavutzky e Vania Maria Aita de Lemos

Joulliard, 12
Off set 90g
Gráfica da UFRGS

Editora da UFRGS · Ramiro Barcelos, 2500 – Porto Alegre, RS – 90035-003 – Fone/fax (51) 3308-5645 – admeditora@ufrgs.br – www.editora.ufrgs.br · Direção: Alex Niche Teixeira · Editoração: Luciane Delani (coordenadora), Clarissa Felkl Prevedello, Cláudio Marzo da Silva, Cristina Thumé Pacheco e Lucas Ferreira de Andrade · Administração: Aline Vasconcelos da Silveira, Cláudio Oliveira Rios, Fernanda Kautzmann, Gabriela Campagna de Azevedo, Heloísa Polese Machado, Jaqueline Trombin e Laerte Balbinot Dias · Apoio: Luciane Figueiredo

Este livro abrange, essencialmente, o conteúdo apresentado nos cursos de Pré-Cálculo que são oferecidos, a cada início de semestre letivo, pelo Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da UFRGS. Foi escrito em uma linguagem de transição entre a exposição formal dos livros de Cálculo e a dos livros de Matemática do Ensino Médio e, sempre que possível, a leitura é apresentada através de exemplos motivadores.

UFRGS EDITORA

ISBN 978-85-3860-182-1

9 788538 601821