

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**UMA ABORDAGEM ANALÍTICA PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS  
MULTIDIMENSIONAIS DE SECAGEM BASEADOS NO  
MODELO DE LUIKOV**

por

Rogério Luis Thum

Tese para obtenção do Título de  
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Novembro de 2001

UMA ABORDAGEM ANALÍTICA PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS  
MULTIDIMENSIONAIS DE SECAGEM BASEADOS NO  
MODELO DE LUIKOV

por

Rogério Luis Thum

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Liliane Basso Barichello

Co-Orientador: Prof. Dr. Marco Túlio Menna Barreto de Vilhena

Aprovada por:

Prof. Dr. Júlio Wilson Ribeiro (UFC/CE)

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Angela Dewes Moura (UFRGS/RS)

Prof. Dr. Horácio Vielmo (Promec-UFRGS/RS)

Prof. Dr. Alberto Tamagna  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 27 de Novembro de 2001

Ao nosso DEUS, à essa pátria e à minha família.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à Liliane Basso Barichello pela sua orientação ao longo deste período.

Agradeço, igualmente, ao amigo e professor co-orientador Marco Túllio M. B. de Vilhena pela oportunidade de realização deste trabalho e pela forma tranqüila e segura de sua co-orientação.

Aos membros da banca, pelas sugestões que contribuíram na versão final desse trabalho.

Aos professores Renato M. Cotta e Hélcio R. B. Orlande pelas discussões, sugestões e contribuições para esse trabalho. À João B. F. Duarte e ao bolsista Guilherme A. Ramos pela contribuições na parte computacional Aos demais colegas que de forma direta ou indireta contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Ao CNPq pelo suporte financeiro e ao PROMEC representado em seu corpo de funcionários e docentes.

Especialmente à generosidade da minha família, base das nossas expansões.

20 de Dezembro de 2001

## RESUMO

### UMA ABORDAGEM ANALÍTICA PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS MULTIDIMENSIONAIS DE SECAGEM BASEADOS NO MODELO DE LUIKOV

A solução das equações de Luikov, para a análise de problemas de transferência simultânea de calor e de massa em meios capilares porosos, é derivada analiticamente pela aplicação da técnica da transformada integral generalizada (GITT) associada com a transformada de Laplace, a qual é aplicada e invertida analiticamente, para resolver o sistema diferencial linear de primeira ordem, dependente do tempo, que resulta da aplicação da GITT às variáveis espaciais. A aproximação proposta fornece uma solução que é analítica em todas as variáveis, eliminando o caráter híbrido normalmente associado à GITT. São apresentados a derivação da solução para um problema bidimensional, com condições de contorno acopladas. Os aspectos computacionais são discutidos para a formulação bidimensional, envolvendo autovalores reais, e para um caso unidimensional, com condições de contorno acopladas, possuindo autovalores complexos.

Autor: Rogério Luis Thum

Orientador: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Liliâne Basso Barichello

Co-Orientador: Prof. Dr. Marco Túlio Menna Barreto de Vilhena

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Tese de Doutorado em Engenharia

Porto Alegre, Novembro de 2001.

## **ABSTRACT**

### **AN ANALYTICAL APPROACH TO THE SOLUTION OF MULTIDIMENSIONAL DRYING PROBLEMS BASED ON LUIKOV'S MODEL**

The solution of the Luikov equations, for the analysis of simultaneous heat and mass diffusion problems in capillary porous media, is analytically derived by the application of the generalized integral transform technique associated with the Laplace transform, which is applied, and analytically inverted, to solve a linear time-dependent first order differential system that results of the application of the integral transform to the spatial variables. The proposed approach provides a solution that is analytical in all variables, suppressing the hybrid aspect in general associated to the GITT technique. In addition to the complete development of a two dimensional general formulation, computational aspects are discussed and numerical results are presented for two-dimensional and one-dimensional applications.

Autor: Rogério Luis Thum

Orientador: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Liliâne Basso Barichello

Co-Orientador: Prof. Dr. Marco Túllio Menna Barreto de Vilhena

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Tese de Doutorado em Engenharia

Porto Alegre, Novembro de 2001.

## ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>4</b>
2.1	O PROBLEMA DA SECAGEM .....	4
2.2	EQUAÇÕES DE LUIKOV .....	5
2.3	TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA .....	6
2.4	A TRANSFORMADA DE LAPLACE .....	10
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO MATEMÁTICA</b> .....	<b>12</b>
3.1	DECOMPOSIÇÃO DE SCHUR .....	18
3.2	DIAGONALIZAÇÃO .....	20
<b>4</b>	<b>FORMULAÇÃO BIDIMENSIONAL: AUTOVALORES REAIS</b> .....	<b>22</b>
4.1	USO DA DECOMPOSIÇÃO DE SCHUR .....	41
4.2	USO DA DIAGONALIZAÇÃO .....	46
4.3	O MÉTODO HÍBRIDO .....	49
4.4	UM PROBLEMA TESTE .....	53
<b>5</b>	<b>APLICAÇÃO UNIDIMENSIONAL: AUTOVALORES COMPLEXOS</b> ...	<b>58</b>
5.1	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA .....	58
5.2	RESULTADOS .....	61
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES</b> .....	<b>67</b>
	<b>APÊNDICE</b> .....	<b>75</b>
<b>I</b>	<b>OBTENÇÃO DOS POTENCIAIS NA FRONTEIRA EM FUNÇÃO DOS POTENCIAIS TRANSFORMADOS</b> .....	<b>75</b>

## LISTA DE SÍMBOLOS

### *Símbolos Romanos*

$\mathbf{A}$ [ <i>adimensional</i> ]	matriz coeficientes, definido na equação (3.32), página 17
$\mathbf{B}$ [ <i>adimensional</i> ]	matriz coeficientes, mostrado na equação (3.32), página 17
$\mathbf{C}$ [ <i>adimensional</i> ]	matriz, veja a equação (3.38), página 18
$\mathbf{C}_{i,n}$ [ <i>adimensional</i> ]	componente da matriz $\mathbf{C}$ , veja a equação (4.155), página 41
$\mathbf{C}_{i,n+N}$ [ <i>adimensional</i> ]	componente da matriz $\mathbf{C}$ , veja a equação (4.156), página 41
$\mathbf{C}_{j+N,m}$ [ <i>adimensional</i> ]	componente da matriz $\mathbf{C}$ , veja a equação (4.157), página 41
$\mathbf{C}_{j+N,m+N}$ [ <i>adimensional</i> ]	componente da matriz $\mathbf{C}$ , veja a equação (4.158), página 41
$\mathbf{D}$ [ <i>adimensional</i> ]	matriz autovalores, veja a equação (3.50), página 20
$\mathbf{F}(t)$ [ <i>adimensional</i> ]	vetor, veja a equação (3.54), página 21
$\mathbf{G}$ [ <i>adimensional</i> ]	matriz coeficientes, definido na equação (3.32), página 17
$\mathbf{H}$ [ <i>adimensional</i> ]	matriz coeficientes, veja a equação (3.33), página 17
$\mathbf{M}(t)$ [ <i>adimensional</i> ]	matriz coeficientes, veja a equação (3.36), página 18
$\mathbf{n}$ [ <i>adimensional</i> ]	normal projetada da superfície, veja a equação (3.5), página 13
$\mathbf{Q}$ [ <i>adimensional</i> ]	matriz unitária, veja a equação (3.38), página 18
$\mathbf{S}_k$ [ <i>adimensional</i> ]	matriz triangular superior genérica, veja a equação (3.43), página 19
$\mathbf{S}_k^{-1}$ [ <i>adimensional</i> ]	matriz inversa genérica, veja a equação (3.44), página 19
$\mathbf{U}$ [ <i>adimensional</i> ]	matriz triangular superior, veja a equação (3.38), página 18
$\mathbf{v}$ [ <i>adimensional</i> ]	vetor, definido na equação (3.45), página 19
$\mathbf{X}$ [ <i>adimensional</i> ]	matriz autovetores, veja a equação (3.50), página 20
$\mathbf{x}$ [ <i>adimensional</i> ]	variável espacial (x,y,z), veja a equação (3.1), página 12
$\mathbf{X}^{-1}$ [ <i>adimensional</i> ]	matriz inversa de autovetores, veja a equação (3.50), página 20
$\mathbf{z}$ [ <i>adimensional</i> ]	vetor, veja a equação (3.56), página 21
$\bar{g}_i$ [ <i>adimensional</i> ]	função transformada - não homogeneidade da equação diferencial ordinária, veja a equação (5.12), página 60



$\bar{g}_{1,i}$ [ <i>adimensional</i> ]	termo fonte transformado, mostrado na equação (3.28), página 16
$\bar{g}_{2,i}$ [ <i>adimensional</i> ]	termo fonte transformado, mostrado na equação (3.29), página 16
$\bar{h}_i$ [ <i>adimensional</i> ]	função transformada - não homogeneidade da equação diferencial ordinária, veja a equação (5.13), página 60
$\bar{W}(s)$ [ <i>adimensional</i> ]	função transformada de $W(t)$ , veja a equação (2.3), página 10
$a$ [ $m^2 s^{-1}$ ]	difusividade térmica do meio poroso, veja a equação (2.1), página 5
$a_m$ [ $m^2 s^{-1}$ ]	coeficiente de difusão da umidade, veja a equação (2.2), página 5
$A_{ij}$ [ <i>adimensional</i> ]	coeficiente bi-indexado (i,j), veja a equação (4.84), página 32
$A_{ij}^*$ [ <i>adimensional</i> ]	coeficiente bi-indexado, veja a equação (5.14), página 60
$B_1$ [ <i>adimensional</i> ]	bloco da matriz $\mathbf{U}$ , veja a equação (3.40), página 18
$B_2$ [ <i>adimensional</i> ]	bloco da matriz $\mathbf{U}$ , veja a equação (3.40), página 18
$B_3$ [ <i>adimensional</i> ]	bloco da matriz $\mathbf{U}$ , veja a equação (3.40), página 18
$B_k$ [ <i>adimensional</i> ]	operador diferencial, definido na equação (3.5), página 13
$b_{11}$ [ <i>adimensional</i> ]	coeficiente convectivo térmico (na direção espacial x), veja a equação (4.117), página 37
$b_{12}$ [ <i>adimensional</i> ]	coeficiente convectivo térmico (na direção espacial y), veja a equação (4.119), página 37
$b_{21}$ [ <i>adimensional</i> ]	coeficiente convectivo mássico (na direção espacial x), veja a equação (4.121), página 37
$b_{22}$ [ <i>adimensional</i> ]	coeficiente convectivo mássico (na direção espacial y), veja a equação (4.123), página 38
$B_{ij}^*$ [ <i>adimensional</i> ]	coeficiente bi-indexado, veja a equação (5.15), página 60
$Bi_m$ [ <i>adimensional</i> ]	número de Biot mássico, veja a equação (4.40), página 27
$Bi_m^*$ [ <i>adimensional</i> ]	número de Biot mássico modificado, definido na equação (4.41), página 27
$Bi_q$ [ <i>adimensional</i> ]	número de Biot térmico, veja a equação (4.39), página 26

$Bi_x$ [adimensional]	número de Biot térmico, na direção espacial x, veja a equação (4.42), página 27
$c$ [ $J kg^{-1}K^{-1}$ ]	calor específico do meio poroso, veja a equação (2.1), página 5
$c_m$ [ $kg_{(bu)} kg_{(bs)}^{-1} \circ M^{-1}$ ]	massa específica do meio poroso, veja a equação (4.4), página 22
$C_{mn}$ [adimensional]	coeficiente bi-indexado (n,m), veja a equação (4.85), página 32
$d_k(x)$ [adimensional]	coeficientes da condição de contorno, veja a equação (3.4), página 12
$f(t)$ [adimensional]	função da variável "t", veja a equação (2.6), página 11
$f_i(t)$ [adimensional]	componente do vetor $\mathbf{F}$ , veja a equação (3.55), página 21
$f_k$ [adimensional]	condição inicial, veja a equação (3.2), página 12
$f_k^*(x)$ [adimensional]	condição inicial, veja a equação (3.20), página 15
$g(t)$ [adimensional]	função da variável "t", veja a equação (2.6), página 11
$h_j(\xi)$ [adimensional]	componente do vetor $\mathbf{H}(t)$ , veja a equação (3.57), página 21
$h_m$ [adimensional]	coeficiente convectivo mássico, veja a equação (4.10), página 24
$h_y$ [adimensional]	coeficiente convectivo em "y", veja a equação (4.10), página 24
$K$ [adimensional]	razão de aspecto, mostrado na equação (4.18), página 24
$k$ [ $Wm^{-1}K^{-1}$ ]	condutividade termica do meio poroso, veja a equação (4.3), página 22
$K_k(x)$ [adimensional]	coeficientes da condição de contorno, veja a equação (3.4), página 12
$k_m$ [adimensional]	coeficiente difusivo mássico, veja a equação (4.14), página 24
$Ko$ [adimensional]	número de Kossovitch, definido na equação (4.28), página 25
$L_k$ [adimensional]	operador diferencial, definido na equação (3.4), página 12
$l_x$ [m]	espessura (na direção espacial x), veja a equação (4.15), página 24
$l_y$ [m]	espessura (na direção espacial y), veja a equação (4.16), página 24
$Lu$ [adimensional]	número de Luikov, definido na equação (4.26), página 25
$M_i$ [adimensional]	integral de normalização, veja a equação (3.15), página 14

$N$ [adimensional]	ordem de truncamento, veja a equação (3.32), página 17
$N_i$ [adimensional]	integral de normalização, veja a equação (3.14), página 14
$p_i$ [adimensional]	coeficiente da expansão de Heaviside, veja a equação (3.47), página 19
$P_j^*$ [adimensional]	coeficiente adimensional, veja a equação (4.90), página 34
$P_k$ [adimensional]	termo fonte, veja a equação (3.1), página 12
$P_k^*(\mathbf{x}, t, \theta_1, \theta_2)$ [adimensional]	termo fonte, veja a equação (3.22), página 15
$Pn$ [adimensional]	número de Possnov, definido na equação (4.27), página 25
$Q$ [adimensional]	fluxo de calor adimensional, veja a equação (4.43), página 27
$q$ [ $W\ m^{-2}$ ]	fluxo de calor, veja a equação (4.9), página 24
$r$ [ $J\ kg^{-1}$ ]	calor latente de vaporização do líquido, veja a equação (2.1), página 5
$t$ [s]	variável temporal ( tempo ), veja a equação (2.1), página 5
$T(\mathbf{x}, t)$ [K]	temperatura, veja a equação (2.1), página 5
$T_0$ [K]	temperatura inicial, veja a equação (4.5), página 23
$T_S$ [K]	temperatura na fronteira, veja a equação (4.19), página 25
$U(\mathbf{x}, t)$ [ $^{\circ}M$ ]	umidade, veja a equação (2.2), página 5
$U^*$ [ $^{\circ}M$ ]	umidade na fronteira, veja a equação (4.20), página 25
$U_0$ [ $^{\circ}M$ ]	umidade inicial, veja a equação (4.6), página 23
$u_{kk}$ [adimensional]	complemento da variável complexa “s”, veja a equação (3.43), página 19
$v_i(\xi)$ [adimensional]	vetor, veja a equação (3.57), página 21
$W(t)$ [adimensional]	função da variável “t” qualquer, veja a equação (2.3), página 10
$w_k(x)$ [adimensional]	coeficiente prescrito, veja a equação (3.1), página 12
$X$ [adimensional]	variável espacial adimensional, veja a equação (4.15), página 24
$x$ [m]	variável espacial, veja a equação (4.1), página 22
$Y$ [adimensional]	variável espacial adimensional, veja a equação (4.16), página 24

$y$ [ $m$ ]	variável espacial, veja a equação (4.1), página 22
$y_{i,j}$ [ <i>adimensional</i> ]	componente do vetor $\mathbf{X}^{-1}$ , veja a equação (3.57), página 21
$z_i$ [ <i>adimensional</i> ]	componente do vetor $\mathbf{z}$ , veja a equação (3.55), página 21

*Símbolos Gregos*

$\alpha$ [ <i>adimensional</i> ]	constante adimensional, veja a equação (4.24), página 25
$\beta$ [ <i>adimensional</i> ]	constante adimensional, veja a equação (4.25), página 25
$\delta$ [ $^{\circ}MK^{-1}$ ]	coeficiente termogradiante, veja a equação (2.2), página 5
$\delta_k(x)$ [ <i>adimensional</i> ]	coeficiente prescrito, veja a equação (3.5), página 13
$\eta_m$ [ <i>adimensional</i> ]	emésimo autovalor (Umidade na direção espacial $y$ ), veja a equação (4.137), página 39
$\Gamma_i(x)$ [ <i>adimensional</i> ]	autofunção-Umidade, veja a equação (3.7), página 13
$\gamma_k(x)$ [ <i>adimensional</i> ]	coeficiente prescrito, veja a equação (3.5), página 13
$\lambda_i$ [ <i>adimensional</i> ]	autovalor-Umidade, veja a equação (3.7), página 13
$\mu_i$ [ <i>adimensional</i> ]	autovalor-Temperatura, veja a equação (3.6), página 13
$\nabla^2$	operador Laplaciano, veja a equação (4.21), página 25
$\Omega_n$ [ <i>adimensional</i> ]	autofunção (Temperatura na direção espacial $y$ ), veja a equação (4.134), página 39
$\bar{\theta}_{1,i}(t)$ [ <i>adimensional</i> ]	distribuição da Temperatura transformada, definido na equação (3.10), página 13
$\bar{\theta}_{2,i}(t)$ [ <i>adimensional</i> ]	distribuição da Umidade transformada, definido na equação (3.12), página 14
$\bar{\theta}_{1,i}(0)$ [ <i>adimensional</i> ]	condição inicial transformada, veja a equação (3.30), página 16
$\bar{\theta}_{2,i}(0)$ [ <i>adimensional</i> ]	condição inicial transformada, veja a equação (3.31), página 16
$\bar{\bar{\theta}}_{1H_{in}}$ [ <i>adimensional</i> ]	transformada integral da temperatura, veja a equação (4.144), página 40
$\bar{\bar{\theta}}_{2H_{jm}}$ [ <i>adimensional</i> ]	transformada integral da umidade, veja a equação (4.146), página 40
$\bar{\bar{\theta}}_{1H}$ [ <i>adimensional</i> ]	temperatura transformada, definida na equação (4.75), página 31
$\bar{\bar{\theta}}_{2H}$ [ <i>adimensional</i> ]	umidade transformada, definida na equação (4.82), página 32
$\bar{\theta}_{1Hi}$ [ <i>adimensional</i> ]	potencial da temperatura transformada, veja a equação (5.10), página 60

$\bar{\theta}_{2Hi}$ [ <i>adimensional</i> ]	potencial da umidade transformada, veja a equação (5.11), página 60
$\phi(x, t)$ [ <i>adimensional</i> ]	condição de contorno, veja a equação (3.3), página 12
$\phi_k^*(\mathbf{x}, t, \theta_1, \theta_2)$ [ <i>adimensional</i> ]	termo fonte, veja a equação (3.23), página 15
$\phi_{ks}(\mathbf{x}, t, \theta_1, \theta_2)$ [ <i>adimensional</i> ]	termo fonte estacionário, veja a equação (3.18), página 15
$\Psi_i(x)$ [ <i>adimensional</i> ]	autofunção-Temperatura, veja a equação (3.6), página 13
$\rho$ [ $kg\ m^{-3}$ ]	densidade do meio poroso, veja a equação (4.3), página 22
$\sigma_n$ [ <i>adimensional</i> ]	enésimo autovalor (Temperatura na direção espacial y), veja a equação (4.134), página 39
$\tau$ [ <i>adimensional</i> ]	variável temporal adimensional, veja a equação (4.17), página 24
$\theta_1(x, t)$ [ <i>adimensional</i> ]	temperatura adimensional, veja a equação (3.1), página 12
$\theta_2(x, t)$ [ <i>adimensional</i> ]	umidade adimensional, veja a equação (3.1), página 12
$\theta_0$ [ <i>adimensional</i> ]	condição inicial, veja a equação (3.35), página 18
$\theta_1(X, Y, \tau)$ [ <i>adimensional</i> ]	temperatura adimensional, veja a equação (4.19), página 25
$\theta_2(X, Y, \tau)$ [ <i>adimensional</i> ]	umidade adimensional, veja a equação (4.20), página 25
$\theta_{1H}(x, y, \tau)$ [ <i>adimensional</i> ]	fórmula da inversão integral da temperatura, veja a equação (4.145), página 40
$\theta_{1H}$ [ <i>adimensional</i> ]	temperatura adimensional, veja a equação (4.112), página 37
$\theta_{1S}$ [ <i>adimensional</i> ]	temperatura adimensional estacionária, veja a equação (4.44), página 27
$\theta_{2H}(x, y, \tau)$ [ <i>adimensional</i> ]	fórmula da inversão integral da umidade, veja a equação (4.147), página 40
$\theta_{2H}$ [ <i>adimensional</i> ]	umidade adimensional, veja a equação (4.113), página 37
$\theta_{2S}$ [ <i>adimensional</i> ]	umidade adimensional estacionária, veja a equação (4.45), página 27
$\theta_{kh}(x, t)$ [ <i>adimensional</i> ]	potencial homogêneo, veja a equação (3.16), página 14
$\theta_{ks}(x : t)$ [ <i>adimensional</i> ]	potencial estacionário, veja a equação (3.16), página 14

$\varepsilon$ [ <i>adimensional</i> ]	critério de mudança de fase ( $\varepsilon=0$ significa toda a umidade está na fase líquida e $\varepsilon=1$ , toda a umidade está na fase vapor ), veja a equação (2.1), página 5
$\Xi_m$ [ <i>adimensional</i> ]	autofunção (Umidade na direção espacial $y$ ), veja a equação (4.137), página 39
$\zeta$ [ <i>adimensional</i> ]	constante adimensional, veja a equação (4.91), página 34
$\zeta_1$ [ <i>adimensional</i> ]	coeficiente adimensional, veja a equação (4.92), página 34
$\zeta_2$ [ <i>adimensional</i> ]	coeficiente adimensional, veja a equação (4.93), página 34
$\zeta_3$ [ <i>adimensional</i> ]	coeficiente adimensional, veja a equação (4.94), página 34
$\zeta_4$ [ <i>adimensional</i> ]	coeficiente adimensional, veja a equação (4.95), página 34
$\zeta_5$ [ <i>adimensional</i> ]	coeficiente adimensional, veja a equação (4.96), página 35
$\zeta_6$ [ <i>adimensional</i> ]	coeficiente adimensional, veja a equação (4.97), página 35
$\zeta_7$ [ <i>adimensional</i> ]	coeficiente adimensional, veja a equação (4.98), página 35
$\zeta_8$ [ <i>adimensional</i> ]	coeficiente adimensional, veja a equação (4.99), página 35
$\mathcal{L}^{-1}$	transformada inversa de Laplace, veja a equação (3.37), página 18
$\mathcal{L}$	transformada de Laplace, definida na equação (2.3), página 10

## ÍNDICE DE FIGURAS

4.1	Condições de contorno referentes à transferência de calor e massa no domínio bidimensional para o problema de secagem proposto - formulação geral.....	23
4.2	Domínio bidimensional para o problema de secagem [Duarte, 1995]; considere-se, por simetria, a região marcada para a simulação do processo. ....	36
4.3	Gráfico da variação da temperatura adimensional em função da posição X (em $Y=0,5$ ) para os tempos adimensionais, $\tau = 0,015$ ou $0,025$ ou $0,045$ . ....	45
4.4	Gráfico da variação da umidade adimensional em função da posição X (em $Y=0,5$ ) para os tempos adimensionais, $\tau = 7$ ou $15$ ou $26$ . ....	46
4.5	Gráfico da variação da temperatura adimensional em função da posição X (em $Y=0,5$ ) para os tempos adimensionais $0,015$ , $0,025$ e $0,045$ . Usando método híbrido e $N = 20$ . ....	52
4.6	Gráfico da variação da umidade adimensional em função da posição X (em $Y=0,5$ ) para os tempos adimensionais $7$ , $15$ e $26$ . Usando método híbrido e $N = 20$ . ....	53
4.7	Gráfico da variação da temperatura adimensional ( $\theta_1$ ) em função da posição X (em $Y=0,5$ ) para os tempos adimensionais $0,015$ , $0,025$ e $0,045$ , usando a diagonalização, $N=100$ , $Bi_q = 20$ , $Bi_m = 2$ . ....	56
5.1	Domínio unidimensional para o problema de secagem com condições de contorno acopladas. ....	58
5.2	Gráfico da variação da temperatura adimensional em função da coordenada adimensional X (unidimensional), $N=50$ e para $\tau$ (tempos adimensionais) de $0,1$ , $0,4$ e $0,8$ . ....	65



5.3	Gráfico da variação da umidade adimensional em função da coordenada adimensional $X$ (unidimensional), $N=50$ e para $\tau$ (tempos adimensionais) de 0,1, 0,4 e 0,8. ....	66
-----	--	----

## ÍNDICE DE TABELAS

4.1	Valores de $\theta_1$ (temperatura adimensional), com $Y = 0,5$ e $\tau = 0,015$ para o problema bidimensional. ....	42
4.2	Valores de $\theta_1$ (temperatura adimensional), com $Y = 0,5$ e $\tau = 0,025$ para o problema bidimensional. ....	43
4.3	Valores de $\theta_1$ (temperatura adimensional), com $Y = 0,5$ e $\tau = 0,045$ para o problema bidimensional. ....	43
4.4	Valores de $\theta_2$ (umidade adimensional), com $Y = 0,5$ e $\tau=7,0$ para o problema bidimensional.....	44
4.5	Valores de $\theta_2$ (umidade adimensional), com $Y = 0,5$ e $\tau=15,0$ para o problema bidimensional.....	44
4.6	Valores de $\theta_2$ (umidade adimensional), com $Y = 0,5$ e $\tau=26,0$ para o problema bidimensional.....	45
4.7	Valores calculados de $\theta_1$ (temperatura adimensional) e de $\theta_2$ (umidade adimensional), com $Y = 0,5$ e $N = 10$ . ....	47
4.8	Valores calculados de $\theta_1$ (temperatura adimensional) e de $\theta_2$ (umidade adimensional), com $Y = 0,5$ e $N = 100$ . ....	47
4.9	Valores calculados de $\theta_1$ (temperatura adimensional) e de $\theta_2$ (umidade adimensional), com $Y = 0,5$ e $N = 200$ . ....	48
4.10	Valores de tempo de cpu no calculo de $\theta_1$ e de $\theta_2$ .....	48
4.11	Valores calculados de $\theta_1$ (temperatura adimensional) , com $Y = 0,5$ e $N = 10$ . Usa-se método híbrido (GITT). ....	50
4.12	Valores calculados de $\theta_2$ (umidade adimensional) , com $Y = 0,5$ e $N = 10$ . Usa-se método híbrido (GITT). ....	50
4.13	Valores calculados de $\theta_1$ (temperatura adimensional), com $Y = 0,5$ e $N = 20$ . Usa-se método híbrido (GITT). ....	51

4.14	Valores calculados de $\theta_2$ (umidade adimensional), com $Y = 0,5$ e $N = 15$ . Usa-se método híbrido (GITT). . . . .	51
4.15	Valores de $\theta_1$ (temperatura adimensional), com $N=100$ , $Bi_q = Bi_m = 200$ . . . . .	55
4.16	Valores de $\theta_2$ (umidade adimensional), com $N=100$ , $Bi_q = Bi_m = 200$ . . . . .	55
4.17	Valores de $\theta_1$ (temperatura adimensional), e de $\theta_2$ (umidade adimensional), com $N = 10$ , $Bi_q = 20$ , $Bi_m = 2$ , usando a diagonalização. . . . .	57
4.18	Valores de $\theta_1$ (temperatura adimensional) e de $\theta_2$ (umidade adimensional), com $N = 200$ , $Bi_q = 20$ , $Bi_m = 2$ , usando a diagonalização. . . . .	57
5.1	Valores de $\theta_1$ (temperatura adimensional), com $\tau = 0,1$ para o problema unidimensional. . . . .	62
5.2	Valores de $\theta_2$ (umidade adimensional), com $\tau = 0,1$ para o problema unidi- mensional. . . . .	62
5.3	Valores de $\theta_1$ (temperatura adimensional), com $\tau = 0,4$ para o problema unidimensional. . . . .	63
5.4	Valores de $\theta_2$ (umidade adimensional), com $\tau = 0,4$ para o problema unidi- mensional. . . . .	63
5.5	Valores de $\theta_1$ (temperatura adimensional), com $\tau = 0,8$ para o problema unidimensional. . . . .	64
5.6	Valores de $\theta_2$ (umidade adimensional), com $\tau = 0,8$ para o problema unidi- mensional. . . . .	64

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Os avanços tecnológicos, bem como as exigências das indústrias, fazem com que os problemas complexos na área de engenharia necessitem de soluções mais precisas em tempos de processamento mais reduzidos. Um conhecimento maior dos processos, via simulação, permite uma avaliação e uma conseqüente adequação às necessidades locais. Na simulação destes parte-se do modelamento matemático, baseado no problema físico, e usam-se em geral hipóteses simplificadoras. Os métodos adotados para obtenção de soluções podem ser numéricos, analíticos ou híbridos.

Houve um contínuo avanço no desenvolvimento de métodos, na maior parte associados à solução de sistemas diferenciais parciais, sendo comuns aos procedimentos gerais da simulação computacional de problemas físicos de diversas aplicações e interesse prático. Entretanto, muito há ainda a ser investigado, especificamente levando em conta o desenvolvimento contínuo de ferramentas computacionais. Nesse sentido, o uso da computação simbólica e a redução dos custos computacionais associados trouxeram mudanças importantes e melhorias às aproximações baseadas nos procedimentos analíticos, anteriormente associados apenas à geração de soluções do tipo “benchmark”. A técnica da transformada integral generalizada, GITT [Cotta, 1993], derivada originalmente da definição clássica [Mikhailov e Özisik, 1984], pode ser referenciada neste contexto. Essa técnica apresenta aspectos híbridos (analíticos e numéricos) e tem sido usada em uma larga classe de problemas, tanto de aspectos teóricos como práticos [Cotta, 1998], destacando o uso da computação simbólica [Cotta e Mikhailov, 1997]. Seu aspecto numérico é associado geralmente à solução de sistemas diferenciais ordinários que resultam da aplicação da transformada integral em algumas das variáveis envolvidas no problema original.

Propõe-se uma modificação nos procedimentos empregados nessa técnica, no que

se reporta à solução do sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) resultante da aplicação da transformada integral (GITT) às variáveis espaciais. A abordagem resulta numa solução analítica do sistema através da transformada de Laplace. A aplicação dessa última ao sistema ordinário gera um sistema linear algébrico que é resolvido, por dois procedimentos diferentes :

- combinação de decomposição de Schur [Datta, 1995] e método de particionamento com posterior inversão analítica da transformada pela técnica da expansão de Heaviside [Özisik, 1980];
- uso da diagonalização com posterior inversão analítica da transformada de Laplace.

Esses procedimentos são desenvolvidos pela aplicação em problemas de secagem. O transporte simultâneo de calor e massa em meios porosos não saturados ocorre tanto em fenômenos naturais como em processos industriais, desempenhando um papel fundamental e não podendo ser desprezado. O fenômeno da migração da umidade devido às presenças de gradientes térmicos torna-se significativo, estando presente em aplicações como resfriamento de cabos elétricos enterrados, isolamento térmico de construções subterrâneas, cozimento de alimentos, controle de ciclos térmicos em processos metalúrgicos, controle de aquecimento e desumidificação de chips de computadores, controle de tensões térmicas em indústrias cerâmicas e controle térmico de culturas para produção de vacinas e antibióticos.

Parte-se de uma formulação geral do sistema de Luikov, sem aproximações numéricas ao longo da derivação, apresenta-se uma solução analítica em todas as variáveis, para os casos onde o sistema diferencial ordinário final é linear. Ou seja, o sistema é tratado pela GITT e depois pela transformada de Laplace, obtendo-se uma solução analítica (apenas com erro de truncamento); aplica-se ao problema de secagem em meios porosos capilares, modelados pelas equações de Luikov.

O trabalho é desenvolvido da seguinte forma: no capítulo dois, apresentam-se as revisões bibliográficas da técnica da transformada integral generalizada (GITT) e do processo de secagem.

No capítulo três, desenvolve-se a formulação geral para problemas parabólicos acoplados, mostrando duas maneiras de resolver o sistema de EDO, resultante da transformação integral.

Nos capítulos quatro e cinco faz-se a aplicação da técnica proposta em problemas de secagem bidimensionais e unidimensionais, apresentando o problema físico, a modelagem matemática, método de solução e resultados, incluindo casos de autovalores reais e complexos presentes na solução do sistema de EDO.

Finalmente, no capítulo seis, apresentam-se as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

## CAPÍTULO 2

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 2.1 O PROBLEMA DA SECAGEM

O processo de secagem pode ser visto como um movimento relativo de umidade do interior de uma matriz sólida capilar porosa não-saturada para sua superfície externa. Na secagem da matriz porosa, supõe-se que a mesma esteja exposta a um gás em escoamento, comumente o ar atmosférico, ocorrendo na interface dos dois meios uma transferência simultânea de calor e massa. No início do processo, a temperatura do produto e sua taxa de secagem sofrerão variações até o sistema atingir um estado estacionário. A primeira etapa do processo de secagem, dependendo do produto, do gás e das condições do meio, representa diferentes frações do intervalo de tempo total necessário à secagem [Ribeiro, 1992].

Na interface de separação sólido-gás, em regime permanente, há uma acomodação de temperatura; o gás aquecido que se aproxima da interface sofre uma queda de temperatura, enquanto o sólido molhado perde umidade, por difusão líquida ou gasosa. O calor é transferido ao sólido para o processo de vaporização e difusão do líquido superficial e ainda, parte do calor é transferido para o interior do sólido. Há ainda uma parcela de calor transferido equivalente à entalpia química de hidratação molecular. Durante todo processo de secagem, a transferência de calor total necessária à retirada de umidade sofre uma variação, devido às mudanças de propriedades do produto.

Transferência de vapor e gás inerte processam-se por diferentes caminhos: por difusão (transporte molecular) e por filtração, sob efeito de gradientes de pressão (transporte molar). Durante o processo de secagem, há uma variação na porosidade do meio devido à variação de teor de umidade do produto o que pode alterar bastante o processo difusivo, como no caso da formação de “barreira de vapor” na interface entre o material poroso e o

ar seco, quando os poros superficiais se contraem devido à progressiva diminuição do teor de umidade causado por incidência de fluxos de calor mais intensos.

Luikov, 1975b, supõe que a transferência de massa no interior de um meio capilar poroso não-saturado, homogêneo e isotrópico, e sujeito a gradientes de temperatura suaves é função da temperatura,  $T$ , e do teor de umidade,  $U$ . O teor ou conteúdo de umidade do meio poroso, ou ainda simplesmente denominado umidade do meio poroso (base seca),  $U$ , é expresso pela razão entre sua massa total de umidade (líquido mais vapor) e a massa da estrutura porosa desidratada. Luikov utiliza princípios da termodinâmica de processos irreversíveis para estabelecer os balanços de massa e energia na matriz porosa, desprezando efeitos de campo gravitacional, de reações químicas e variações geométricas na matriz porosa. Admite também que em um elemento de volume infinitesimal, a temperatura da estrutura capilar e da mistura água/vapor seja a mesma, bem como a umidade transportada seja uma mistura água/vapor e considera nulo o gradiente de pressão no meio poroso.

## 2.2 EQUAÇÕES DE LUIKOV

As equações de Luikov são um modelo bem estabelecido para análise de vários problemas de difusão simultânea de calor e massa em meios capilares porosos. As aplicações pertinentes são secagem de madeira, cozimento de material cerâmico e de tijolos, migração de umidade no solo (terra) e análise de tubo de calor.

O sistema linear das equações de Luikov [Mikhailov e Özisik, 1984]), com propriedades termofísicas constantes (calor específico,  $c$  e coeficiente termogradiente,  $\delta$ ) e coeficientes de transportes (condutividade térmica,  $a$  e difusividade de umidade,  $a_m$ ) constantes pode ser escrito como

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T + \frac{r\varepsilon}{c} \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (2.1)$$

e

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a_m \nabla^2 U + a_m \delta \nabla^2 T. \quad (2.2)$$

A solução deste sistema de equações diferenciais parciais descreve a distribuição de temperatura e umidade em meios porosos capilares, válido somente em processos de secagem



com gradientes de temperatura de baixa intensidade e com temperaturas menores que cem graus Centígrados ( $T \leq 100^\circ \text{C}$ ), onde não existe efeito da pressão no transporte de massa no meio poroso.

Trabalhos pioneiros nessa área foram, em ordem cronológica, os de Krischer, 1942, DeVries e Philip, 1957, e Luikov, 1966, onde apresentam o fenômeno da secagem modelado na forma de sistemas de equações diferenciais parciais acopladas. O modelo de Luikov é apresentado nas Equações 2.1 e 2.2. Contudo, diversos trabalhos destacam a revisão da teoria da secagem [Fulford, 1969; Luikov, 1975b; Luikov, 1975a]. Ressalta-se que no trabalho de Luikov, 1975a, faz referência a bibliografia soviética sobre transferência de calor e massa até 1975; continuando, podem ser citados ainda Whitaker, 1977, Rossen e Hayakawa, 1977, Fortes, 1978, Moyne, 1987, Lobo, 1988, Eckert, 1988, Martynenko, 1988, Massarani, 1988 e Bories, 1990.

O problema de secagem de madeira não saturada, que representa um processo de transferência de calor e massa em meios capilares porosos, também já foi tratado pela técnica da GITT, como será listado na seção seguinte.

### 2.3 TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

Constitui um método híbrido analítico-numérico, que possui sua origem no método da transformada integral clássica, onde obtém-se soluções exatas de problemas de difusão linear. Nasce nos trabalhos pioneiros de Özisik e Murray, 1974 e Mikhailov, 1975 que tratavam da solução de problemas difusivos com parâmetros variáveis nas condições de contorno. Problemas mais sofisticados e complexos foram abordados em decorrência dos avanços da computação numérica e simbólica, como visto em Cotta e Mikhailov, 1997. Também, Cotta, 1993 e 1998, apresenta uma compilação de problemas resolvidos por essa técnica, onde se encontra uma grande variedade de problemas não transformáveis, a priori, incluindo formulações não lineares. O método abrange :

- 1) problemas com coeficientes variáveis nas equações, exemplificando, a condução de calor multidimensional com dissipação variável na superfície [Cotta et al., 1992a] e escoamento em plenamente desenvolvido tubo [Campos Silva et al., 1992] ;
- 2) problemas com coeficientes variáveis na condição de contorno, do tipo condução de

- calor com número de Biot dependente do tempo [Cotta e Santos, 1992], convecção forçada laminar interna em tubos aletados externamente [Santos et al., 1988] e problemas do tipo aleta, com coeficiente de transferência de calor variável [Cotta, 1986b];
- 3) problemas com fronteira móvel, aplicado na oxidação de metais em altas temperaturas [Cotta, 1986a];
  - 4) problemas que envolvem dificuldades no problema auxiliar, incluindo a secagem de uma placa porosa úmida [Ribeiro et al., 1993], problemas de convecção-difusão linear [Cotta et al., 1990] e análise de trocadores de calor bi-tubular [Scofano Neto e Cotta, 1992b; Scofano Neto e Cotta, 1992a];
  - 5) problemas não lineares, quando o termo fonte da equação e/ou da condição de contorno dependem do potencial que se deseja obter. Cita-se formulação de camada limite [da Silva, 1994; Machado e Cotta, 1995], equações de Navier-Stokes [Cotta et al., 1992b; Leal, 1996; Machado, 1998; Perez Guerrero e Cotta, 1992; Perez Guerrero et al., 1993] e problemas não lineares de secagem [Ribeiro e Cotta, 1995]. Ainda a condução do calor com condutividade térmica variável [Serfaty e Cotta, 1990] e o problema de fluxo em cavidade com placa deslizante [Cotta et al., 1992b; Perez Guerrero e Cotta, 1992].

Ainda de acordo com Dantas, 2000, podem ser citados outros trabalhos, abaixo descritos: Lima, 1995, aplicou a técnica às equações de Navier-Stokes para escoamento turbulento em canais retangulares; Perez Guerrero e Cotta, 1996, estudaram o problema de escoamento sobre um degrau, através da solução das equações de Navier-Stokes em formulação de função de corrente, obtendo resultados para uma ampla faixa de números de Reynolds; Leal, 1996, estudou o problema de convecção natural em cavidades retangulares, tanto para regime permanente como para transiente; Quaresma, 1997, resolveu o problema de escoamento permanente em uma cavidade retangular tridimensional; Machado, 1998, investigou o problema de convecção natural em cavidade retangular com propriedades variáveis. Diversos outros trabalhos podem ser encontrados em Cotta, 1998.

Os passos para se obter a solução via GITT compreendem inicialmente encontrar problemas auxiliares (de onde surgem os autovalores e as autofunções), em seguida desenvolver o par transformada-inversa apropriado e aplicar a transformada integral ao problema

original de equação diferencial parcial e às condições de contorno, obtendo-se, sem perda de generalidade, um sistema ordinário transformado. Resolve-se o sistema de equações diferenciais ordinárias resultantes, geralmente usando rotinas numéricas, e, finalmente, aplica-se a fórmula de inversão para reconstruir o potencial original.

Com o objetivo de melhorar o desempenho da técnica são usados alguns passos intermediários, dependendo da dificuldade oferecida pelo problema:

- aplicação de filtros para acelerar a convergência [Macedo et al., 1999];
- reordenamento de autovalores e potenciais [Leal, 1996; Correa et al., 1997; Machado, 1998; Dantas e Orlande, 1998].

A natureza híbrida ocorre na solução numérica (utilizando rotinas de bibliotecas numéricas, como o IMSL [Library, 1997]) de uma variável (normalmente a variável temporal) já que foram eliminadas as variáveis espaciais, via uma abordagem analítica, reduzindo o problema principal a um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO).

Com relação ao uso da GITT associada ao problema de secagem, na formulação linear para coeficiente de transporte constante, algumas soluções analíticas foram propostas há alguns anos, baseadas no método da transformada integral clássica [Cotta, 1993]. Foi posteriormente observado, que resultados numéricos obtidos através de tais análises poderiam estar errados, devido à existência de autovalores complexos associados ao problema auxiliar acoplado [Ribeiro et al., 1993; Ribeiro e Cotta, 1995]. Então, os efeitos da inclusão de um par de autovalores complexos foi criticamente investigado [Lobo et al., 1987]. Especialmente para tempos curtos, a necessidade de considerar os autovalores complexos é crucial, desde que o comportamento qualitativo da solução é erroneamente predito. Isto pode ser verificado em Guigon et al., 1992. Lobo et al., 1987, estudaram a influência de um único par de autovalores complexos conjugados sobre a precisão das distribuições de temperatura e umidade, até então negligenciados. Eles concluíram que, especialmente para tempos curtos, as expansões baseadas em autovalores reais poderiam fornecer resultados completamente errados; posteriormente, Liu e Cheng, 1991, chegaram às mesmas conclusões.

Em outra revisão recente, Dantas, 2000, faz referência aos seguintes autores, comentando os trabalhos desenvolvidos. Liu, 1991, resolveu as equações de transferência de calor e massa do sistema de Luikov, analiticamente, na sua forma adimensional, tanto para

a transferência de calor quanto para transferência de massa, com condições de terceiro tipo, transientes. No trabalho de Ribeiro et al., 1993, uma solução alternativa é proposta para as equações de Luikov lineares, através da GITT, com transferência simultânea de calor e massa no interior de meios capilares porosos. Para a temperatura e umidade foi escolhido um par de problemas de autovalores independentes, do tipo de Sturm-Liouville, que evita a existência de autovalores complexos através da adoção de problemas auxiliares desacoplados. Apresentam um conjunto de resultados de referência, que foi comparado com soluções anteriormente publicadas. Em Ribeiro e Cotta, 1995, as equações de Luikov não-lineares que governam a secagem no interior de meios capilares porosos são tratadas com a GITT, a fim de obter soluções híbridas analítico-numéricas. Eles consideraram uma placa úmida porosa sujeita à troca de calor combinada no contorno (convecção-radiação), sendo constantes todas as propriedades e dados físicos. A não-linearidade do problema era proveniente da condição de contorno, que envolvia troca de calor com o ambiente por radiação. Também utilizaram, para a temperatura e umidade, dois problemas de autovalores desacoplados. Duarte et al., 1995, empregaram a GITT para resolver, em geometria plana bidimensional, o modelo de Luikov com transferência simultânea de calor e massa. Observaram que, passando de um problema unidimensional para um bidimensional, o aumento no custo computacional para o cálculo da solução foi sensivelmente menor que o dobro do outro. Desta forma confirmaram, para problemas multidimensionais, a vantagem da GITT sobre técnicas puramente numéricas. Em Duarte e Ribeiro, 1998, o sistema de equações de Luikov tridimensional com transferência simultânea de calor e massa é resolvido, com condições de contorno do primeiro e segundo tipo, onde a transferência de calor e massa nas superfícies ficam desacoplados. A fim de acelerar a convergência da solução pela GITT, foram usadas técnicas de filtragem e método adaptativo para controle automático do erro numérico. Posteriormente, Duarte et al., 1999, analisaram as variações das distribuições de temperatura e umidade, utilizando esta mesma formulação e metodologia de solução, quando se empregam diferentes valores para o número de Luikov ( $\mathbf{Lu}$ ). Notaram que à medida que  $\mathbf{Lu}$  cresce, o meio poroso seca mais rapidamente e a temperatura torna-se mais baixa, para o mesmo tempo. Para que a umidade seja retirada mais rapidamente, uma taxa maior de energia é retirada do corpo, o que é esperado fisicamente. Guigon et al., 1999, usaram a Técnica de Transformação Integral Clássica [Mikhailov e Özisik, 1984] para resolver a formulação clássica de secagem em meios porosos,

baseada no modelo de Luikov, considerando todos os autovalores complexos existentes. O problema de autovalor associado, é resolvido através da GITT, de modo a se obter todas as raízes complexas, as quais, não foram consideradas na maioria dos trabalhos anteriores. O mesmo problema abordado por Mikhailov, 1975, Ribeiro et al., 1993 e Guigon et al., 1999, é estudado por Pandey et al., 1999b, onde foi desenvolvido uma nova técnica para o cálculo dos autovalores reais e complexos. Esta técnica fornece soluções satisfatórias e completas para o sistema linear de equações de Luikov. Ela avalia simultaneamente as raízes reais e complexas, sendo uma combinação dos métodos de Newton-Raphson e da bisseção. Eles também demonstraram a influência das raízes complexas sobre a distribuição de temperatura e umidade adimensional. Pandey, 1999, e Pandey, 2000, adotam esta mesma metodologia de solução, sendo que em coordenadas esféricas, para resolver o mesmo problema físico.

## 2.4 A TRANSFORMADA DE LAPLACE

O uso da transformada de Laplace é indicado, em especial, para problemas de valor inicial. Em problemas de difusão, a aplicação dessa transformada pode eliminar a derivada relativa à variável temporal. Como essa técnica será usada neste trabalho é conveniente ressaltar alguns conceitos básicos. Assim define-se a transformada de Laplace de uma função  $W(t)$ ,  $t > 0$ , de ordem exponencial, como [Özisik, 1980]

$$\mathcal{L}[W(t)] \equiv \overline{W}(s) = \int_{\xi=0}^{\infty} e^{-s\xi} W(\xi) d\xi, \quad (2.3)$$

e a fórmula de inversão é dada por

$$W(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s=\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \overline{W}(s) ds, \quad (2.4)$$

onde  $s$  é uma variável complexa.

A propriedade da derivada da transformada de Laplace é mostrada a seguir

$$\mathcal{L}[W'(t)] = s \overline{W}(s) - W(0), \quad (2.5)$$

bem como a convolução de duas funções:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\xi)g(\xi) d\xi = \int_0^t f(\xi)g(t-\xi) d\xi, \quad (2.6)$$

cuja a transformada de Laplace, corresponde simplesmente a

$$\mathcal{L} [f * g] = \bar{f}(s) \bar{g}(s). \quad (2.7)$$

No próximo capítulo apresenta-se a formulação matemática do processo de transferência simultânea de calor e de massa em meios porosos capilares e propõe-se um método de solução utilizando a GITT e a Transformada de Laplace. Salienta-se que a utilização da transformada de Laplace na solução de sistemas diferenciais ordinários já foi estudado [Vilhena e Barichello, 1999], para casos associados à problemas de valor de contorno.

## CAPÍTULO 3

### FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

A modelagem do processo de transferência simultânea de calor e de massa, relacionada a problemas de secagem em meios porosos capilares, é presentemente associada ao sistema acoplado, denominado equações de Luikov [Luikov, 1975b], como citado no Capítulo 2. Uma formulação geral para este modelo, seguindo Ribeiro e Cotta, 1995, pode ser escrita na sua forma adimensional como um conjunto de duas equações difusivo-convectivas, segundo as distribuições  $\theta_k(\mathbf{x}, t)$ ,  $k = 1, 2$ , em uma região  $\mathbf{V}$  com superfície  $\mathbf{S}$  de fronteira, acopladas com termos não-lineares de fonte nas equações e nas condições de contorno,

$$w_k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial t} \theta_k(\mathbf{x}, t) + L_k \theta_k(\mathbf{x}, t) = P_k(\mathbf{x}, t, \theta_1, \theta_2), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{V}, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

com condição inicial e condições de contorno, para  $k=1, 2$ , respectivamente dado por

$$\theta_k(\mathbf{x}, 0) = f_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{V}, \quad (3.2)$$

e

$$B_k \theta_k(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t, \theta_1, \theta_2), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{S}. \quad (3.3)$$

Aqui os termos não-lineares, denominados  $P_k(\mathbf{x}, t, \theta_1, \theta_2)$  e  $\phi_k(\mathbf{x}, t, \theta_1, \theta_2)$ , podem incorporar o acoplamento entre os dois potenciais, bem como outros aspectos não-lineares relacionados aos termos da fonte ou aos coeficientes variáveis. Assim, os operadores  $L_k$  e  $B_k$  são definidos ( para  $k = 1, 2$  ) como

$$L_k = -\nabla K_k(\mathbf{x}) \nabla + d_k(\mathbf{x}), \quad (3.4)$$

e

$$B_k = \left[ \gamma_k(\mathbf{x}) + \delta_k(\mathbf{x}) K_k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \right], \quad (3.5)$$

onde  $K_k(\mathbf{x})$  e  $d_k(\mathbf{x})$  definem os coeficientes das condições de contorno,  $\mathbf{n}$  a normal projetada da superfície  $\mathbf{S}$  e os coeficientes  $\gamma_k(\mathbf{x})$ ,  $\delta_k(\mathbf{x})$  e  $w_k(\mathbf{x})$  são prescritos.

A seleção de problemas auxiliares apropriados para a construção das expansões das autofunções pode ser considerada como ponto de partida à aplicação da técnica da transformada integral generalizada. Problemas auxiliares acoplados ou desacoplados, dependendo dos casos específicos, foram investigados [Mikhailov e Özisik, 1984; Lobo et al., 1987; Ribeiro et al., 1993; Dantas, 2000]. Aqui segue-se a derivação apresentada por Ribeiro e Cotta, 1995, e a escolha que considera problemas clássicos de autofunções, desacoplados, do tipo Sturm-Liouville para representar o comportamento espacial dos potenciais. Conseqüentemente, cada componente da variável espacial de  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$  deve satisfazer aos problemas de autovalores, cuja solução aqui é suposta ser conhecida, escolhidos como

$$L_1 \Psi_i(\mathbf{x}) = \mu_i^2 w_1(\mathbf{x}) \Psi_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{V}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.6)$$

$$L_2 \Gamma_i(\mathbf{x}) = \lambda_i^2 w_2(\mathbf{x}) \Gamma_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{V}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.7)$$

com as condições de contorno

$$B_k \Psi_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{S}, \quad k = 1, 2, \quad (3.8)$$

e

$$B_k \Gamma_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{S}, \quad k = 1, 2. \quad (3.9)$$

O par resultante da transformação integral (transformada-inversa) é definido, respectivamente, como

$$\bar{\theta}_{1,i}(t) = \int_{\mathbf{V}} w_1(\mathbf{x}) N_i^{-1/2} \Psi_i(\mathbf{x}) \theta_1(\mathbf{x}, t) d\mathbf{V}, \quad (3.10)$$



e

$$\theta_1(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} N_i^{-1/2} \Psi_i(\mathbf{x}) \bar{\theta}_{1,i}(t), \quad (3.11)$$

para a temperatura, e

$$\bar{\theta}_{2,i}(t) = \int_{\mathbf{V}} w_2(\mathbf{x}) M_i^{-1/2} \Gamma_i(\mathbf{x}) \theta_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{V}, \quad (3.12)$$

e

$$\theta_2(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} M_i^{-1/2} \Gamma_i(\mathbf{x}) \bar{\theta}_{2,i}(t), \quad (3.13)$$

para umidade.

Nas Equações 3.10, 3.11, 3.12 e 3.13, as integrais de normalização são dadas

$$N_i = \int_{\mathbf{V}} w_1 \Psi_i^2(\mathbf{x}) d\mathbf{V}, \quad (3.14)$$

e

$$M_i = \int_{\mathbf{V}} w_2 \Gamma_i^2(\mathbf{x}) d\mathbf{V}. \quad (3.15)$$

Como um segundo passo associado ao método da transformada integral, é sugerida uma apropriada decomposição do problema original (“processo de filtragem”, [Cotta, 1993]), para contornar os efeitos indesejados dos termos não homogêneos (lenta convergência, comportamento anômalo na fronteira) na determinação numérica da solução, a qual é baseada em expansões como mostrado nas Equações 3.11 e 3.13. A solução (decomposta) é então escrita

$$\theta_k(\mathbf{x}, t) = \theta_{ks}(\mathbf{x}; t) + \theta_{kh}(\mathbf{x}, t), \quad (3.16)$$

tal que  $\theta_{ks}$ , soluções quase estacionárias, são obtidas da solução dos seguintes problemas simples, para  $k=1,2$

$$L_k \theta_{ks} = P_{ks}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{V}, \quad (3.17)$$

e

$$B_k \theta_{ks} = \phi_{ks}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{S}. \quad (3.18)$$

E então, o potencial (“filtrado”) resultante  $\theta_{kh}$  é obtido da solução da equação

$$w_k \frac{\partial}{\partial t} \theta_{kh}(\mathbf{x}, t) + L_k \theta_{kh}(\mathbf{x}, t) = P_k^*(\mathbf{x}, t, \theta_1, \theta_2), \quad \mathbf{x} \in V, t > 0, \quad (3.19)$$

para  $k = 1, 2$ , com condições,

$$\theta_{kh}(\mathbf{x}, 0) = f_k^*(\mathbf{x}) \equiv f_k(\mathbf{x}) - \theta_{ks}(\mathbf{x}; 0), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{V}, \quad (3.20)$$

e

$$B_k \theta_{kh}(\mathbf{x}, t) = \phi_k^*(\mathbf{x}, t, \theta_1, \theta_2), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{S}. \quad (3.21)$$

Aqui

$$P_k^*(\mathbf{x}, t, \theta_1, \theta_2) = P_k - P_{ks} - w_k \frac{\partial}{\partial t} \theta_{ks}, \quad (3.22)$$

e

$$\phi_k^*(\mathbf{x}, t, \theta_1, \theta_2) = \phi_k - \phi_{ks}, \quad (3.23)$$

A particular escolha  $\phi_{ks} \equiv \phi_k$  é uma conveniente condição de contorno, uma vez que a torna homogênea. Alternativamente, procedimentos baseados no balanço analítico do sistema de equações diferenciais ordinários original [Cotta, 1993] também podem ser usados com o objetivo de melhorar a representação das séries para os potenciais, especialmente quando  $\phi_k^* \neq 0$ .

Neste ponto, operando a Equação 3.19, respectivamente para  $k=1,2$ , resulta,

$$\int_{\mathbf{V}} N_i^{-1/2} \Psi_i(\mathbf{x}) d\mathbf{V}, \quad (3.24)$$

e

$$\int_{\mathbf{V}} M_i^{-1/2} \Gamma_i(\mathbf{x}) d\mathbf{V}, \quad (3.25)$$

o processo de transformação integral conduz a um sistema diferencial ordinário de primeira ordem a ser resolvido :

$$\frac{d}{dt}\bar{\theta}_{1,i}(t) + \mu_i^2\bar{\theta}_{1,i}(t) = \bar{g}_{1,i}(t, \theta_{1,j}, \theta_{2,j}) \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \quad t > 0. \quad (3.26)$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\theta}_{2,i}(t) + \lambda_i^2\bar{\theta}_{2,i}(t) = \bar{g}_{2,i}(t, \theta_{1,j}, \theta_{2,j}) \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \quad t > 0. \quad (3.27)$$

Os termos de fonte ( não lineares ), descritos por,

$$\begin{aligned} \bar{g}_{1,i} = & -\frac{1}{N_i^{1/2}} \left[ \int_{\mathbf{V}} P_1^*(\mathbf{x}, t, \theta_{1,j}, \theta_{2,j}) \Psi_i(\mathbf{x}) d\mathbf{V} \right. \\ & \left. + \int_{\mathbf{S}} \phi_1^*(\mathbf{x}, t, \theta_{1,j}, \theta_{2,j}) \left( \frac{\Psi_i(\mathbf{x}) - K_1(\mathbf{x}) (\partial\Psi_i/\partial n)}{\gamma_1(\mathbf{x}) + \delta_1(\mathbf{x})} \right) d\mathbf{S} \right], \end{aligned} \quad (3.28)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{g}_{2,i} = & -\frac{1}{M_i^{1/2}} \left[ \int_{\mathbf{V}} P_2^*(\mathbf{x}, t, \theta_{1,j}, \theta_{2,j}) \Gamma_i(\mathbf{x}) d\mathbf{V} \right. \\ & \left. + \int_{\mathbf{S}} \phi_2^*(\mathbf{x}, t, \theta_{1,j}, \theta_{2,j}) \left( \frac{\Gamma_i(\mathbf{x}) - K_2(\mathbf{x}) (\partial\Gamma_i/\partial n)}{\gamma_2(\mathbf{x}) + \delta_2(\mathbf{x})} \right) d\mathbf{S} \right], \end{aligned} \quad (3.29)$$

acumulam as informações da fronteira e da fonte. Similarmente, as condições iniciais, Equações 3.20, são transformadas para obter

$$\bar{\theta}_{1,i}(0) = \bar{f}_{1,i} \equiv \int_{\mathbf{V}} w_1(\mathbf{x}) N_i^{-1/2} \Psi_i(\mathbf{x}) f_1^* d\mathbf{V}, \quad (3.30)$$

e

$$\bar{\theta}_{2,i}(0) = \bar{f}_{2,i} \equiv \int_{\mathbf{V}} w_2(\mathbf{x}) M_i^{-1/2} \Gamma_i(\mathbf{x}) f_2^* d\mathbf{V}. \quad (3.31)$$

As Equações 3.26 e 3.27 formam um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias acopladas, o qual é resolvido para os potenciais transformados,  $\bar{\theta}_{k,i}$ ,  $k=1,2$ .

Naturalmente, do ponto de vista geral, como a derivação tem sido feita até este ponto, o sistema acima é não-linear, e a sua solução é incluída em uma ampla classe de

problemas (e de dificuldades), necessitando freqüentemente de uma análise mais cuidadosa para os casos específicos. Assim, neste ponto, uma condição tem que ser imposta: embora o procedimento desenvolvido até aqui possa ser considerado geral com respeito à definição do termo da fonte (como será visto em seguida), é aplicado somente aos casos lineares. Nota-se, entretanto, que isto não significa que o modelo, desde o início, tenha de omitir aspectos não lineares, uma vez que é comum usar-se condições físicas ou outras relações no tratamento de problemas não lineares para obter a linearização. Como no caso, por exemplo, do tratamento associado ao comportamento não linear para as condições de contorno radiativas num problema de secagem [Ribeiro e Cotta, 1995], onde o sistema ordinário resultante dado pelas Equações 3.26 e 3.27 é linearizado.

Agora procedemos ao desenvolvimento da solução para o sistema descrito pelas Equações 3.26 e 3.27, para um termo de fonte linear genérico, o qual é associado às aplicações da transformada integral generalizada para muitos casos, mesmo partindo de diferentes geometrias [Dantas, 2000] e relacionado com outras aplicações além dos problemas de secagem.

Para fins computacionais, observando um critério de convergência exigido [Cotta, 1993], as Equações 3.26 e 3.27 são truncadas. E assim, a fim de desenvolver uma solução analítica (sem nenhuma aproximação ao longo de sua derivação) para o sistema linear associado, representado pelas Equações 3.26 e 3.27, o mesmo é rescrito na forma

$$\mathbf{A} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\theta}(t) + \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{G}(t), \quad t > 0, \quad (3.32)$$

de maneira que a ordem do truncamento ( $N$ ) é escolhida como sendo a mesma para ambas Equações 3.26 e 3.27. Uma matriz  $\mathbf{A}$  é usada para representar as Equações 3.26 e 3.27 devido ao acoplamento das condições de contorno ser descrito por uma função no lado direito da equação, e um apropriado balanço e processo de parâmetros concentrados [Ribeiro et al., 1993] pode introduzir termos adicionais relacionados com termos das derivadas. De toda maneira, a inversão da matriz  $\mathbf{A}$ , de ordem  $2N \times 2N$ , permite rescrever o sistema como

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\theta}(t) + \mathbf{C} \boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{H}(t), \quad t > 0, \quad (3.33)$$

onde

$$\boldsymbol{\theta}(t) = [\bar{\theta}_{1,1}(t) \quad \dots \quad \bar{\theta}_{1,N}(t) \quad \bar{\theta}_{2,1}(t) \quad \dots \quad \bar{\theta}_{2,N}(t)]^T, \quad (3.34)$$

com condições iniciais requeridas, definidas nas Equações 3.30,

$$\boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_0. \quad (3.35)$$

Aqui o superescrito T denota operação de transposição. A aplicação da transformada de Laplace na Equação 3.33 resulta na solução para qualquer  $t > 0$ .

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{M}(t) \boldsymbol{\theta}_0 + \int_0^t \mathbf{M}(t - \xi) \mathbf{H}(\xi) d\xi, \quad (3.36)$$

onde a matriz  $\mathbf{M}(t)$  é definida como

$$\mathbf{M}(t) = \mathcal{L}^{-1} [(s\mathbf{I} + \mathbf{C})^{-1}] (t), \quad (3.37)$$

e  $\mathcal{L}^{-1}$  denota a transformada de Laplace inversa.

A seguir apresentam-se duas maneiras de avaliar a matriz  $\mathbf{C}$  da Equação 3.37, as quais foram usadas para gerar os resultados numéricos que serão apresentados posteriormente neste trabalho.

### 3.1 DECOMPOSIÇÃO DE SCHUR

O primeiro procedimento usado para inversão da matriz simbólica parte da decomposição de Schur [Datta, 1995], na matriz  $\mathbf{C}$ ,

$$\mathbf{C} = \mathbf{Q}^T \mathbf{U} \mathbf{Q}, \quad (3.38)$$

resultando que

$$(s\mathbf{I} + \mathbf{C})^{-1} = \mathbf{Q}^T (s\mathbf{I} + \mathbf{U})^{-1} \mathbf{Q}, \quad (3.39)$$

onde  $\mathbf{U}$  agora é uma matriz triangular superior e  $\mathbf{Q}$  matriz unitária ( $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ). Para determinação da inversa da matriz  $(s\mathbf{I} + \mathbf{U})$  usa-se um resultado válido para inversão de matriz em blocos [Faddeev e Faddeeva, 1963], segundo o qual, definindo matrizes blocos  $B_1, B_2$  e  $B_3$ ,

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B_1^{-1} & -B_1^{-1} B_2 B_3^{-1} \\ 0 & B_3^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

estabelece-se, no caso do problema (3.39), um processo recursivo tal que

$$\mathbf{S}_1 = [s + u_{11}], \quad (3.41)$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} s + u_{11} & s + u_{12} \\ 0 & s + u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & s + u_{12} \\ 0 & s + u_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

e assim sucessivamente

$$\mathbf{S}_k = \begin{bmatrix} s + u_{11} & s + u_{12} & s + u_{13} & \dots & s + u_{1k} \\ 0 & s + u_{22} & s + u_{23} & \dots & s + u_{2k} \\ 0 & 0 & s + u_{33} & \dots & s + u_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s + u_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & s + u_{1k} \\ & & & & s + u_{2k} \\ & \mathbf{S}_{k-1} & & & s + u_{3k} \\ & & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & s + u_{kk} \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Portanto, por (3.40)

$$\mathbf{S}_k^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{k-1}^{-1} & -\frac{\mathbf{S}_{k-1}^{-1} \mathbf{v}}{s + u_{kk}} \\ 0 & \frac{1}{s + u_{kk}} \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

para  $k = 2, \dots, N$ , sendo  $\mathbf{v}$  definido como

$$\mathbf{v} = [s + u_{1,k}, s + u_{2,k}, \dots, s + u_{k-1,k}]^T. \quad (3.45)$$

Agora, pela técnica de expansão de Heaviside, a transformada inversa de Laplace ( $\mathcal{L}^{-1}$ ) é

$$\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} + \mathbf{U})^{-1}] = \sum_{i=1}^N p_i e^{u_{ii} t}, \quad (3.46)$$

onde  $u_{ii}$  são os elementos da diagonal de  $\mathbf{U}^{-1}$  e

$$p_i = \frac{Adj(s\mathbf{I} + \mathbf{U})}{\frac{d}{ds}(\det(s\mathbf{I} + \mathbf{U}))} \Big|_{u_{ii}}. \quad (3.47)$$

A definição de matriz adjunta é

$$Adj(\mathbf{S}_k) = \mathbf{S}_k^{-1} \det(\mathbf{S}_k). \quad (3.48)$$

Finalmente, utilizando a fórmula de inversão dada pelas Equações 3.11 e 3.13, obtêm-se uma representação analítica do potencial nas demais variáveis independentes eliminadas durante a etapa da transformação integral. De uma maneira mais clara, pode-se escrever a Equação 3.37, levando em conta a transformação apresentada em Vilhena e Barichello, 1999, como sendo

$$\mathbf{M}(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}^T \left[ \sum_{i=1}^N \frac{Adj(s\mathbf{I} + \mathbf{U})}{\frac{d}{ds}(\det(s\mathbf{I} + \mathbf{U}))} \Big|_{u_{ii}} e^{u_{ii}t} \right] \mathbf{Q}. \quad (3.49)$$

Note-se que o determinante é o produto da diagonal da matriz  $\mathbf{U}$ .

Em trabalho anterior, [Thum et al., 1998], esse procedimento foi usado para resolver um problema de secagem conforme resultados apresentados na seção 4.1. Embora essa aproximação parecesse resultar em um algoritmo estável [Cotta, 1998], uma capacidade de armazenamento de dados considerável é necessária, pois um processo recursivo é envolvido na inversão.

### 3.2 DIAGONALIZAÇÃO

Em um segundo procedimento, uma simples e usual decomposição é usada para escrever

$$\mathbf{C} = \mathbf{X} \mathbf{D} \mathbf{X}^{-1}, \quad (3.50)$$

onde  $\mathbf{D}$  é matriz diagonal, cujos elementos  $d_i$ ,  $i=1, \dots, 2N$  são os autovalores da matriz  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{X}$  é a matriz de autovetores associada, assumindo que  $\mathbf{C}$  é uma matriz diagonalizável. Assim a Equação 3.37 é agora rescrita como

$$\mathbf{M}(\mathbf{t}) = \mathbf{X} \mathcal{L}^{-1} [(\mathbf{sI} + \mathbf{D})^{-1}] \mathbf{X}^{-1}, \quad (3.51)$$

e assim

$$\mathbf{M}(\mathbf{t}) = \mathbf{X} \mathbf{e}^{-\mathbf{D}t} \mathbf{X}^{-1}. \quad (3.52)$$

Observe-se que,  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{X}^{-1}$  são matrizes numéricas que podem ser obtidas a partir de softwares conhecidos de álgebra linear [Datta, 1995]. Ainda,

$$\mathbf{e}^{-\mathbf{D}t} = \text{diag} \{e^{-d_1 t}, \dots, e^{-d_{2N} t}\}. \quad (3.53)$$

As Equações 3.52 e 3.53 são usadas para avaliar a Equação 3.36 e definem a solução completa do sistema (3.33) como

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{X} \mathbf{F}(t), \quad (3.54)$$

onde os componentes do vetor  $\mathbf{F}(t)$  são definidos, para  $i=1, \dots, 2N$ , como

$$f_i(t) = z_i e^{-d_i t} + \int_0^t e^{-d_i(t-\xi)} v_i(\xi) d\xi. \quad (3.55)$$

Aqui  $z_i$ ,  $i=1, \dots, 2N$ , são os componentes do vetor  $\mathbf{z}$ , tal que

$$\mathbf{X} \mathbf{z} = \boldsymbol{\theta}_0, \quad (3.56)$$

e

$$v_i(\xi) = \sum_{j=1}^{2N} h_j(\xi) y_{i,j}, \quad (3.57)$$

onde  $h_j(\xi)$  são os componentes do vetor  $\mathbf{H}(t)$ , na Equação 3.33, no qual para sistemas homogêneos são iguais a zero. Além disso,  $y_{i,j}$  são definidos como componentes da matriz  $\mathbf{X}^{-1}$ .

Substitui-se a Equação 3.54 nas expressões da transformada inversa da GITT, Equações 3.11 e 3.13, e obtêm-se a solução analítica em todas as variáveis. Assim, está formulado o objetivo principal do trabalho, que constitui-se em apresentar um método modificado, baseado nas transformações integrais.

No próximo capítulo, as abordagens apresentadas nestas seções serão aplicadas a um problema bidimensional de secagem e comparado com os resultados do método híbrido (na qual usa-se a sub-rotina da biblioteca do IMSL - DIVPAG, que é associada ao compilador FORTRAN [Fortran90, 1990]). No capítulo seguinte, aplica-se esta metodologia a um problema unidimensional de secagem.



## CAPÍTULO 4

### FORMULAÇÃO BIDIMENSIONAL: AUTOVALORES REAIS

A formulação geral apresentada no capítulo anterior será agora desenvolvida em detalhes para um problema bidimensional com condições de contorno acopladas. Para isso, considera-se o sistema cartesiano bidimensional que representa o sistema de Luikov [Luikov, 1966], sendo que  $T(x, y, t)$  e  $U(x, y, t)$  são os potenciais associados à temperatura e a umidade. A temperatura inicial é definida como  $T_0$  e a umidade inicial como  $U_0$ . Na fronteira definem-se  $T_S$  e  $U^*$  como temperatura e umidade prescritas, respectivamente. A modelagem do problema de transferência de calor e massa em meios capilares porosos é apresentada a seguir, baseada na abordagem em coordenadas cilíndricas, proposta por Dantas, 2000.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] + \varepsilon \frac{r}{c} \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a_m \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right] + a_m \delta \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right], \quad (4.2)$$

válidos nos domínios  $0 < x < l_x$ ,  $0 < y < l_y$  e  $t > 0$ .

Onde

$$a = \frac{k}{\rho c}, \quad (4.3)$$

e

$$a_m = \frac{k_m}{\rho c_m}. \quad (4.4)$$

Os parâmetros  $k$ ,  $c$ ,  $\rho$ ,  $c_m$  e  $k_m$  correspondem respectivamente a condutividade térmica do meio poroso, calor específico do meio poroso, densidade do meio poroso, massa específica do

meio poroso e coeficiente difusivo mássico. Os parâmetros  $\delta$  e  $\varepsilon$  correspondem ao coeficiente termogradiante e critério de mudança de fase, respectivamente. Como condições iniciais tem-se

$$T(x, y, 0) = T_0, \quad (4.5)$$

e

$$U(x, y, 0) = U_0. \quad (4.6)$$

O modelo descrito é ilustrado na Figura 4.1 e Equações 4.7 a 4.14.

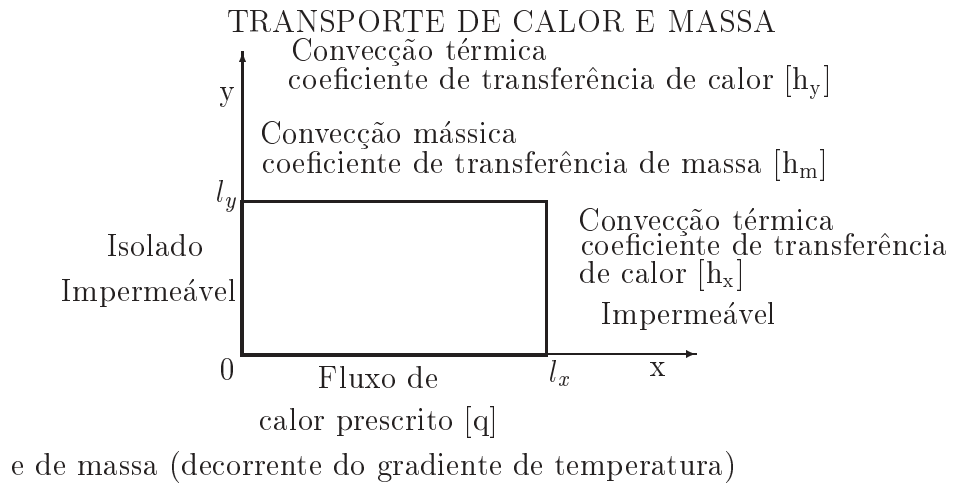


Figura 4.1 – Condições de contorno referentes à transferência de calor e massa no domínio bidimensional para o problema de secagem proposto - formulação geral.

Para as condições de contorno, considera-se impermeável (não ocorre a transferência de massa no contorno) e isolada térmicamente na parede em  $x = 0$  (com isso os fluxos de calor e de massa são nulos); um fluxo de calor é suprido em  $y = 0$  e esta fronteira permite fluxo de massa; em  $x = l_x$ , ocorre a perda de calor por convecção e é impermeável; em  $y = l_y$ , a superfície é livre, permitindo perda de calor e massa por convecção. Assim, as equações de balanço de energia no contorno, segundo a teoria de Luikov, são

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, y, t) = 0, \quad (4.7)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x}(l_x, y, t) + h_x T(l_x, y, t) = h_x T_S, \quad (4.8)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0, t) = q, \quad (4.9)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial y}(x, l_y, t) + h_y T(x, l_y, t) = h_y T_S + (1 - \varepsilon) r h_m [U^* - U(x, l_y, t)]. \quad (4.10)$$

Analogamente, as equações de balanço para o transporte de massa são

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0, y, t) + \delta \frac{\partial T}{\partial x}(0, y, t) = 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(l_x, y, t) + \delta \frac{\partial T}{\partial x}(l_x, y, t) = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, 0, t) + \delta \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0, t) = 0, \quad (4.13)$$

$$k_m \left[ \frac{\partial U}{\partial y}(x, l_y, t) + \delta \frac{\partial T}{\partial y}(x, l_y, t) \right] + h_m U(x, l_y, t) = h_m U^*. \quad (4.14)$$

A adimensionalização é feita conforme as seguintes relações :

$$X = \frac{x}{l_x}, \quad (4.15)$$

$$Y = \frac{y}{l_y}, \quad (4.16)$$

$$\tau = \frac{a}{l_x^2} t, \quad (4.17)$$

e a razão de aspecto,

$$K = \frac{l_x}{l_y}. \quad (4.18)$$

Na Equação 4.17,  $\tau$  é definido como número de Fourier.

Os potenciais adimensionalizados assumem as seguintes fórmulas

$$\theta_1(X, Y, \tau) = \frac{T(x, y, t) - T_0}{T_S - T_0}, \quad (4.19)$$

e

$$\theta_2(X, Y, \tau) = \frac{U_0 - U(x, y, t)}{U_0 - U^*}. \quad (4.20)$$

Definindo agora o seguinte operador

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial X^2} + K^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2}. \quad (4.21)$$

A forma adimensional do problema (4.1)-(4.2) fica

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = \alpha \nabla^2 \theta_1 - \beta \nabla^2 \theta_2, \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = Lu \nabla^2 \theta_2 - LuPn \nabla^2 \theta_1, \quad (4.23)$$

válido no domínio  $0 < X < 1$ ,  $0 < Y < 1$  e  $\tau > 0$ . Onde

$$\alpha = 1 + \varepsilon KoLuPn, \quad (4.24)$$

$$\beta = \varepsilon KoLu, \quad (4.25)$$

$$Lu = \frac{a_m}{a}, \quad (\text{número de Luikov}) \quad (4.26)$$

$$Pn = \delta \left[ \frac{T_S - T_0}{U_0 - U^*} \right], \quad (\text{número de Possnov}) \quad (4.27)$$

e

$$Ko = \frac{r U_0 - U^*}{c T_S - T_0} \quad (\text{número de Kossovitch}). \quad (4.28)$$

As condições iniciais tornam-se

$$\theta_1 (X, Y, 0) = 0, \quad (4.29)$$

e

$$\theta_2 (X, Y, 0) = 0. \quad (4.30)$$

As condições de contorno passam a ser

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial X} (0, Y, \tau) = 0, \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial X} (0, Y, \tau) = 0, \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial X} (1, Y, \tau) + Bi_x \theta_1 (1, Y, \tau) = Bi_x, \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial X} (1, Y, \tau) = Pn \frac{\partial \theta_1}{\partial X} (1, Y, \tau), \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial Y} (X, 0, \tau) = -Q, \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial Y} (X, 0, \tau) = -PnQ, \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial Y} (X, 1, \tau) + Bi_q \theta_1 (X, 1, \tau) = Bi_q + (1 - \varepsilon)KoLuBi_m [\theta_2 (X, 1, \tau) - 1], \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial Y} (X, 1, \tau) + Bi_m^* \theta_2 (X, 1, \tau) = Bi_m^* + PnBi_q [1 - \theta_1 (X, 1, \tau)]. \quad (4.38)$$

Onde define-se

$$Bi_q = \frac{h_y l_y}{k}, \quad (4.39)$$

$$Bi_m = \frac{h_m l_y}{k_m}, \quad (4.40)$$

$$Bi_m^* = Bi_m - Bi_m P n (1 - \varepsilon) K o L u, \quad (4.41)$$

$$Bi_x = \frac{h_x l_x}{k}, \quad (4.42)$$

$$Q = \frac{q l_y}{k (T_S - T_0)}. \quad (4.43)$$

Como mencionado no Capítulo 3, é conveniente uma decomposição nos potenciais, para melhorar a taxa de convergência da solução numérica e se obter um problema homogêneo e um problema estacionário necessário.

Neste trabalho, se propõe a seguinte decomposição:

$$\theta_1 (X, Y, \tau) = 1 + \theta_{1S} (X, Y) + \theta_{1H} (X, Y, \tau), \quad (4.44)$$

e

$$\theta_2 (X, Y, \tau) = 1 + \theta_{2S} (X, Y) + \theta (X, Y, \tau), \quad (4.45)$$

tal que os problemas estacionários são apresentados da forma descrita a seguir.

Para a temperatura tem-se

$$\nabla^2 \theta_{1S} = 0, \quad (4.46)$$

na variável X

$$\frac{\partial \theta_{1S}}{\partial X} (0, Y) = 0, \quad (4.47)$$

e

$$\frac{\partial \theta_{1S}}{\partial X} (1, Y) + Bi_x \theta_{1S} (1, Y) = 0, \quad (4.48)$$

e na variável  $Y$

$$\frac{\partial \theta_{1S}}{\partial Y}(X, 0) = -Q, \quad (4.49)$$

e

$$\frac{\partial \theta_{1S}}{\partial Y}(X, 1) + Bi_x \theta_{1S}(X, 1) = 0. \quad (4.50)$$

Agora para a umidade, torna-se

$$\nabla^2 \theta_{2S} = 0, \quad (4.51)$$

na variável  $X$

$$\frac{\partial \theta_{2S}}{\partial X}(0, Y) = 0, \quad (4.52)$$

e

$$\frac{\partial \theta_{2S}}{\partial X}(1, Y) = Pn \frac{\partial \theta_{1S}}{\partial X}(1, Y), \quad (4.53)$$

e na variável  $Y$

$$\frac{\partial \theta_{2S}}{\partial Y}(X, 0) = -PnQ, \quad (4.54)$$

e

$$\frac{\partial \theta_{2S}}{\partial Y}(X, 1) + Bi_m^* \theta_{2S}(X, 1) = -Pn Bi_q \theta_{1S}(X, 1). \quad (4.55)$$

As soluções dos problemas estacionários podem ser obtidas por separação de variáveis [Özisik, 1980]. Elas deverão ser usadas nas condições iniciais do problema homogêneo, Equações 4.66 e 4.67, em decorrência da decomposição mostrada nas Equações 4.44 e 4.45.

Assim, o problema homogêneo resultante assume a seguinte formulação para a equação da temperatura

$$\frac{\partial \theta_{1H}}{\partial \tau} = \alpha \nabla^2 \theta_{1H} - \beta \nabla^2 \theta_{2H}, \quad (4.56)$$

e com as condições de contorno,

$$\frac{\partial \theta_{1H}}{\partial X}(0, Y, \tau) = 0, \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial \theta_{1H}}{\partial X}(1, Y, \tau) + Bi_x \theta_{1H}(1, Y, \tau) = 0, \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial \theta_{1H}}{\partial Y}(X, 0, \tau) = 0, \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial \theta_{1H}}{\partial Y}(X, 1, \tau) + Bi_q \theta_{1H}(X, 1, \tau) = (1 - \varepsilon) KoLuBi_m [\theta_{2H}(X, 1, \tau) + \theta_{2S}(X, 1)], \quad (4.60)$$

e analogamente para a equação da umidade

$$\frac{\partial \theta_{2H}}{\partial \tau} = Lu \nabla^2 \theta_{2H} - LuPn \nabla^2 \theta_{1H}, \quad (4.61)$$

e suas condições de contorno correspondentes,

$$\frac{\partial \theta_{2H}}{\partial X}(0, Y, \tau) = 0, \quad (4.62)$$

$$\frac{\partial \theta_{2H}}{\partial X}(1, Y, \tau) = Pn \frac{\partial \theta_{1H}}{\partial X}(1, Y, \tau), \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial \theta_{2H}}{\partial Y}(X, 0, \tau) = 0, \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial \theta_{2H}}{\partial Y}(X, 1, \tau) + Bi_m \theta_{2H}(X, 1, \tau) = -Pn Bi_q \theta_{1H}(X, 1, \tau). \quad (4.65)$$

As respectivas condições iniciais são

$$\theta_{1H}(X, Y, 0) = -[1 + \theta_{1S}(X, Y)], \quad (4.66)$$

e

$$\theta_{2H}(X, Y, 0) = -[1 + \theta_{2S}(X, Y)]. \quad (4.67)$$



Note-se que pela decomposição proposta, uma não homogeneidade permanece apenas no problema da temperatura (em  $Y=1$ ), sem que no entanto, se tenha problemas estacionários de extrema dificuldade.

Sem perda de generalidade, utilizam-se os formalismos da GITT e, procede-se, operando a Equação 4.56 com as expressões a seguir para obter o problema transformado

$$\int_0^1 N_i^{-1/2} \Psi_i(X) dX, \quad (4.68)$$

e

$$\int_0^1 N_n^{-1/2} \Omega_n(Y) dY. \quad (4.69)$$

A solução dos problemas auxiliares fornece as autofunções  $\Psi_i$  e  $\Omega_n$ ,

$$\frac{d^2 \Psi_i(X)}{dX^2} + \mu_i^2 \Psi_i(X) = 0, \quad (4.70)$$

$$\frac{d^2 \Omega_n(Y)}{dY^2} + \sigma_n^2 \Omega_n(Y) = 0, \quad (4.71)$$

as equações acima estão, respectivamente, submetidas às condições de contorno,

$$\frac{d\Psi_i(0)}{dX} = 0, \quad \frac{d\Psi_i(1)}{dX} + Bi_x \Psi_i(1) = 0, \quad (4.72)$$

e

$$\frac{d\Omega_n(0)}{dY} = 0, \quad \frac{d\Omega_n(1)}{dY} + Bi_q \Omega_n(1) = 0. \quad (4.73)$$

O procedimento é semelhante ao obtido das expressões 3.24 e 3.25, onde as autofunções provêm dos problemas do tipo Sturm-Liouville, apresentadas nas Equações 3.6 e 3.7 e obtém-se a equação diferencial ordinária (EDO) relativa à temperatura adimensional

$(\bar{\bar{\theta}}_{1H}),$

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{\bar{\theta}}_{1H}(\tau)}{d\tau} + \alpha (\mu_i^2 + K^2 \sigma_n^2) \bar{\bar{\theta}}_{1H}(\tau) - \beta (\mu_i^2 + K^2 \sigma_n^2) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{ij} C_{mn} \bar{\bar{\theta}}_{2H_{jm}}(\tau) = \\
K^2 \frac{\Omega_n(1)}{N_n^{1/2}} \int_0^1 \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \left\{ \alpha \left[ \frac{d\theta_{1H}(X, 1, \tau)}{dY} + Bi_q \theta_{1H}(X, 1, \tau) \right] \right. \\
\left. - \beta \left[ \frac{d\theta_{2H}(X, 1, \tau)}{dY} + Bi_m \theta_{2H}(X, 1, \tau) \right] \right\} dX \\
- \beta \frac{\Psi'_i(1)}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \frac{\Omega_n(Y)}{N_n^{1/2}} (Pn \theta_{1H}(1, X, \tau) - \theta_{2H}(1, X, \tau)) dY.
\end{aligned} \tag{4.74}$$

onde  $\Psi'_i(1)$  representa a derivada da autofunção  $\Psi_i$  no ponto  $X = 1$ .

Usam-se as condições de contorno, Equações 4.57 a 4.60, desta maneira tem-se somente os potenciais na fronteira a serem determinados,

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{\bar{\theta}}_{1H}(\tau)}{d\tau} + \alpha (\mu_i^2 + K^2 \sigma_n^2) \bar{\bar{\theta}}_{1H}(\tau) - \beta (\mu_i^2 + K^2 \sigma_n^2) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{ij} C_{mn} \bar{\bar{\theta}}_{2H_{jm}}(\tau) = \\
K^2 \frac{\Omega_n(1)}{M_n^{1/2}} \int_0^1 \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \left\{ [\alpha (1 - \varepsilon) KoLuBi_m - \beta (Bi_q - Bi_m^*)] \theta_{2H}(X, 1, \tau) \right. \\
\left. + \beta PnBi_q \theta_{1H}(X, 1, \tau) + (1 - \varepsilon) KoLuBi_m \theta_{2S}(X, 1) \right\} dX \\
+ \beta Bi_x \frac{\Psi_i(1)}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \frac{\Omega_n(Y)}{M_n^{1/2}} [Pn \theta_{1H}(1, Y, \tau) - \theta_{2H}(1, Y, \tau)] dY.
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Da mesma forma, operando a Equação 4.61 com as expressões

$$\int_0^1 N_j^{-1/2} \Gamma_j(X) dX, \tag{4.76}$$

e

$$\int_0^1 N_m^{-1/2} \Xi_m(Y) dY. \tag{4.77}$$

Aqui os problemas auxiliares fornecem as autofunções  $\Gamma_j$  e  $\Xi_m$ ,

$$\frac{d^2 \Gamma_j(X)}{dX^2} + \lambda_j^2 \Gamma_j(X) = 0, \tag{4.78}$$

$$\frac{d^2 \Xi_m(Y)}{dY^2} + \eta_m^2 \Xi_m(Y) = 0, \tag{4.79}$$

as equações acima estão submetidas às condições de contorno,

$$\frac{d\Gamma_j(0)}{dX} = 0, \quad \frac{d\Gamma_j(1)}{dX} = 0, \quad (4.80)$$

e

$$\frac{d\Xi_m(0)}{dY} = 0, \quad \frac{d\Xi_m(1)}{dY} + Bi_m^* \Xi_m(1) = 0. \quad (4.81)$$

O procedimento é semelhante aos das expressões 3.24 e 3.25, só que agora se utilizam outras autofunções, relacionadas ao potencial da umidade, em  $X$  e em  $Y$  têm-se a equação diferencial ordinária (EDO) relativa ao potencial da umidade adimensional ( $\bar{\theta}_{2H}$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\theta}_{2H}(\tau)}{d\tau} + Lu(\lambda_j^2 + K^2\eta_m^2)\bar{\theta}_{2H}(\tau) - LuPn(\lambda_j^2 + K^2\eta_m^2) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{ij}C_{mn}\bar{\theta}_{1H_{in}}(\tau) = \\ LuK^2 \frac{\Xi_m(1)}{N_m^{1/2}} \int_0^1 \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \left[ \frac{d\theta_{2H}(X, 1, \tau)}{dY} + Bi_m\theta_{2H}(X, 1, \tau) \right] dX \\ - LuPnK^2 \frac{\Xi_m(1)}{N_m^{1/2}} \int_0^1 \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \left[ \frac{d\theta_{1H}(X, 1, \tau)}{dY} + Bi_m^*\theta_{1H}(X, 1, \tau) \right] dX. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Usa-se as condições de contorno, Equações 4.62 a 4.65, desta maneira têm-se somente os potenciais na fronteira a serem determinados.

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\theta}_{2H}(\tau)}{d\tau} + Lu(\lambda_j^2 + K^2\eta_m^2)\bar{\theta}_{2H}(\tau) - LuPn(\lambda_j^2 + K^2\eta_m^2) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{ij}C_{mn}\bar{\theta}_{1H_{in}}(\tau) = \\ -K^2LuPn \frac{\Xi_m(1)}{M_m^{1/2}} \int_0^1 \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} [Bi_m\theta_{1H}(X, 1, \tau) \\ + (1 - \varepsilon)KoBi_m(Lu\theta_{2H}(X, 1, \tau) + Lu\theta_{2S}(X, 1))] dX. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Onde os coeficientes  $A_{ij}$  e  $C_{mn}$  são definidos como

$$A_{ij} = \int_0^1 \frac{\Psi_i(X)\Gamma_j(X)}{N_i^{1/2}N_j^{1/2}} dX, \quad (4.84)$$

e

$$C_{mn} = \int_0^1 \frac{\Omega_n(Y)\Xi_m(Y)}{M_n^{1/2}M_m^{1/2}} dY. \quad (4.85)$$

Ou de outra forma,

$$\begin{aligned}
& \frac{d\bar{\theta}_{1H_{in}}}{d\tau} + (\mu_i^2 + \sigma_n^2 K^2) \left( \alpha \bar{\theta}_{1H_{in}} - \beta \sum_j \sum_m A_{ij} C_{mn} \bar{\theta}_{2H_{jm}} \right) = \\
& K^2 \frac{\Omega_n(1)}{N_n^{1/2}} \left\{ [\alpha(1-\varepsilon) KoLuBi_m - \beta(Bi_q - Bi_m^*)] \int_0^1 \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \theta_{2H}(X, 1, \tau) dX \right. \\
& + \beta PnBi_q \int_0^1 \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \theta_{1H}(X, 1, \tau) dX + (1-\varepsilon) KoLuBi_m \int_0^1 \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \theta_{2S}(X, 1) dX \left. \right\} \\
& + \beta Bi_x \frac{\Psi_i(1)}{N_i^{1/2}} \left\{ Pn \int_0^1 \frac{\Omega_n(Y)}{N_n^{1/2}} \theta_{1H}(1, Y, \tau) dY - \int_0^1 \frac{\Omega_n(Y)}{N_n^{1/2}} \theta_{2H}(1, Y, \tau) dY \right\}, \tag{4.86}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \frac{d\bar{\theta}_{2H_{jm}}}{d\tau} + (\lambda_j^2 + \eta_m^2 K^2) \left( Lu \bar{\theta}_{2H_{jm}} - LuPn \sum_i \sum_n A_{ij} C_{mn} \bar{\theta}_{1H_{in}} \right) = \\
& -LuPnK^2 \frac{\Xi_m(1)}{N_m^{1/2}} \left\{ Bi_m^* \int_0^1 \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \theta_{1H}(X, 1, \tau) dX \right. \\
& + (1-\varepsilon) KoBi_m \left[ Lu \int_0^1 \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \theta_{2H}(X, 1, \tau) dX + Lu \int_0^1 \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \theta_{2S}(X, 1) dX \right] \left. \right\}. \tag{4.87}
\end{aligned}$$

Após algumas manipulações (vide Apêndice I), onde relaciona-se o potencial nas fronteiras em  $X=1$  e em  $Y=1$  com os potenciais transformados ( $\bar{\theta}_{1H_{in}}$  e  $\bar{\theta}_{2H_{jm}}$ ) e suas derivadas ordinárias. Então,

$$\begin{aligned}
& \frac{d\bar{\theta}_{1H_{in}}}{d\tau} + (\mu_i^2 + \sigma_n^2 K^2) \left( \alpha \bar{\theta}_{1H_{in}} - \beta \sum_j \sum_m A_{ij} C_{mn} \bar{\theta}_{2H_{jm}} \right) = \\
& \zeta_1 \int_0^1 \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \theta_{2S}(X, 1) dX \\
& - \frac{1}{K^2 Bi_q} \sum_i \sum_n \bar{g}_n \frac{d\bar{\theta}_{1H_{in}}}{d\tau} - \beta \frac{\Psi_i(1)}{N_i^{1/2}} Pn \sum_i \sum_n \bar{f}_i \frac{d\bar{\theta}_{1H_{in}}}{d\tau} \\
& + \zeta_2 \sum_j \sum_m \bar{g}_m^* A_{ij} \frac{d\bar{\theta}_{2H_{jm}}}{d\tau} - \beta \frac{\Psi_i(1)}{N_i^{1/2}} \alpha \sum_j \sum_m \bar{f}_j^* C_{nm} \frac{d\bar{\theta}_{2H_{jm}}}{d\tau} \\
& + \zeta_3 \sum_i \sum_n \mu_i^2 \bar{g}_n \bar{\theta}_{1H_{in}} + \zeta_4 \sum_j \sum_m \lambda_j^2 \bar{g}_m^* \bar{\theta}_{2H_{jm}} - \beta \frac{\Psi_i(1)}{N_i^{1/2}} \frac{K^2}{Pn} \sum_j \sum_m \eta_m^2 \bar{f}_j^* \bar{\theta}_{2H_{jm}} \\
& - \beta \frac{\Psi_i(1)}{N_i^{1/2}} Bi_x \sum_j \sum_m \left( P_j^* C_{nm} + \bar{f}_j^* \right) \bar{\theta}_{2H_{in}}, \tag{4.88}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \frac{d\bar{\theta}_{2H_{jm}}}{d\tau} + (\lambda_j^2 + \eta_m^2 K^2) \left( Lu\bar{\theta}_{2H_{jm}} - LuPn \sum_i \sum_n A_{ij} C_{mn} \bar{\theta}_{1H_{in}} \right) = \\
& \zeta_5 \int_0^1 \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \theta_{2S}(X, 1) dX + LuPn \frac{\Xi_m(1)}{M_m^{1/2}} Bi_m^* Bi_q \sum_i \sum_n \bar{g}_n \frac{d\bar{\theta}_{1H_{in}}}{d\tau} \\
& + \zeta_6 \sum_j \sum_m \bar{g}_m^* \frac{d\bar{\theta}_{2H_{jm}}}{d\tau} + \zeta_7 \sum_i \sum_n \mu_i^2 \bar{g}_n \bar{\theta}_{1H_{in}} + \zeta_8 \sum_j \sum_m \lambda_j^2 \bar{g}_m^* \bar{\theta}_{2H_{jm}}.
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Os diversos coeficientes das Equações 4.88 e 4.89 são

$$P_j^* = \int_0^1 \left( \int_x^1 \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} dX \right) dx, \tag{4.90}$$

$$\zeta = (1 - \varepsilon) KoLuBi_m, \tag{4.91}$$

e ainda

$$\zeta_1 = K^2 \frac{\Omega_n(1)}{M_n^{1/2}} \left[ \frac{Pn \zeta (\alpha \zeta - \beta (Bi_q - Bi_m^*))}{\zeta - Bi_m^*} + \beta Pn \zeta \left( 1 - \frac{Pn \zeta}{\zeta - Bi_m^*} \right) + (1 - \varepsilon) KoLuBi_m \right], \tag{4.92}$$

$$\zeta_2 = \frac{\Omega_n(1)}{M_n^{1/2}} \left[ \frac{\alpha \zeta - \beta (Bi_q - Bi_m^*)}{Lu (Pn \zeta - Bi_m^*)} - \beta Pn \left( \frac{\beta}{Lu} + \frac{K^2 \zeta}{Pn \zeta - Bi_m^*} \right) \right], \tag{4.93}$$

$$\zeta_3 = -\frac{\Omega_n(1)}{M_n^{1/2}} Pn \left( \frac{\alpha \zeta - \beta (Bi_q - Bi_m^*)}{Pn \zeta - Bi_m^*} \right) - \frac{\beta Pn}{K^2} \left( \frac{\zeta Pn}{Pn \zeta - Bi_m^*} - 1 \right), \tag{4.94}$$

$$\zeta_4 = \frac{\Omega_n(1)}{M_n^{1/2}} \left( \frac{\alpha \zeta - \beta (Bi_q - Bi_m^*)}{Pn \zeta - Bi_m^*} \right) - \frac{\beta Pn}{K^2} \left( \frac{\zeta Pn}{Pn \zeta - Bi_m^*} \right), \tag{4.95}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_5 = & -LuPnK^2 \frac{\Xi_m(1)}{M_m^{1/2}} \left[ \frac{Bi_m^* \zeta}{Bi_q} \left( 1 - \frac{Pn \zeta}{Pn \zeta - Bi_m^*} \right) \right. \\
& \left. + \zeta \frac{Pn \zeta}{Pn \zeta - Bi_m^*} + (1 - \varepsilon) KoLuBi_m \right],
\end{aligned} \tag{4.96}$$

$$\zeta_6 = Pn \frac{\Xi_m(1)}{M_m^{1/2}} \left[ \frac{Bi_m^*}{Bi_q} \left( \frac{\zeta}{Pn \zeta - Bi_m^*} + \beta \right) - \frac{\zeta}{Pn \zeta - Bi_m^*} \right], \quad (4.97)$$

$$\zeta_7 = LuPn \frac{\Xi_m(1)}{M_m^{1/2}} \left[ -\frac{Bi_m^*}{Bi_q} \left( \frac{Pn \zeta}{Pn \zeta - Bi_m^*} + 1 \right) + \frac{Pn \zeta}{Pn \zeta - Bi_m^*} \right], \quad (4.98)$$

$$\zeta_8 = LuPn \frac{\Xi_m(1)}{M_m^{1/2}} \left[ \frac{Bi_m^* \zeta}{Bi_q (Pn \zeta - Bi_m^*)} - \left( \frac{\zeta}{Pn \zeta - Bi_m^*} \right) \right]. \quad (4.99)$$

Toda a formulação genérica bidimensional acoplada, do ponto-de-vista teórico, está apresentada em caráter inédito. Para fins de comparação numérica entre os métodos de solução a serem abordados, adota-se a variante do problema de Luikov, descrito a seguir [Duarte, 1995].

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \theta_1 = \alpha \left[ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \theta_1 + K^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \theta_1 \right] - \beta \left[ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \theta_2 + K^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \theta_2 \right], \quad (4.100)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \theta_2 = Lu \left[ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \theta_2 + K^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \theta_2 \right] - LuPn \left[ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \theta_1 + K^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \theta_1 \right]. \quad (4.101)$$

com as condições iniciais dadas, para  $0 < X < 1$ ,  $0 < Y < 1$ , como funções constantes

$$\theta_1 = -1, \quad \tau = 0, \quad (4.102)$$

$$\theta_2 = -1, \quad \tau = 0, \quad (4.103)$$

e condições de contorno,

$$\frac{\partial}{\partial X} \theta_1 = 0, \quad X = 0; \quad 0 < Y < 1, \quad (4.104)$$

$$\theta_1 = 0, \quad X = 1; \quad 0 < Y < 1, \quad (4.105)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} \theta_1 = 0, \quad Y = 0; \quad 0 < X < 1, \quad (4.106)$$

$$\theta_1 = 0, \quad Y = 1; \quad 0 < X < 1, \quad (4.107)$$

$$\frac{\partial}{\partial X}\theta_2 = 0, \quad X = 0; \quad 0 < Y < 1, \quad (4.108)$$

$$\theta_2 = 0, \quad X = 1; \quad 0 < Y < 1, \quad (4.109)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y}\theta_2 = 0, \quad Y = 0; \quad 0 < X < 1, \quad (4.110)$$

$$\theta_2 = 0, \quad Y = 1; \quad 0 < X < 1, \quad (4.111)$$

Observe que agora as condições de contorno na interface com o fluído secante são de primeiro tipo.

Generalizando o problema apresentado pelas Equações 4.56 a 4.67, tem-se uma solução para um problema específico em duas dimensões, em coordenadas cartesianas. A figura 4.2 apresenta o domínio físico do problema de secagem de uma placa porosa não saturada.

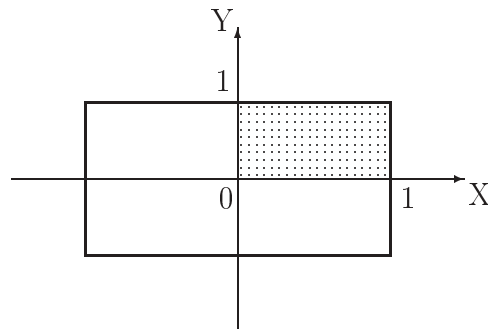


Figura 4.2 – Domínio bidimensional para o problema de secagem [Duarte, 1995]; considera-se, por simetria, a região marcada para a simulação do processo.

Desde que se aborda um caso previamente estudado por Duarte et al., 1995, e Thum et al., 1998, partimos do problema adimensional (“filtrado”), para  $0 < (X, Y) < 1$ ,  $\tau > 0$ ,

escrito na forma geral como

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \theta_{1H} = \alpha \left[ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \theta_{1H} + K^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \theta_{1H} \right] - \beta \left[ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \theta_{2H} + K^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \theta_{2H} \right], \quad (4.112)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \theta_{2H} = Lu \left[ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \theta_{2H} + K^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \theta_{2H} \right] - LuPn \left[ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \theta_{1H} + K^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \theta_{1H} \right]. \quad (4.113)$$

com as condições iniciais dadas, para  $0 < X, Y < 1$ , como funções constantes

$$\theta_{1H} = -1, \quad \tau = 0, \quad (4.114)$$

$$\theta_{2H} = -1, \quad \tau = 0, \quad (4.115)$$

e condições de contorno, para  $\tau > 0$ ,  $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} \neq 0$ ,

$$\frac{\partial}{\partial X} \theta_{1H} = 0, \quad X = 0; \quad 0 < Y < 1, \quad (4.116)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \theta_{1H} + b_{11} \theta_{1H} = 0, \quad X = 1; \quad 0 < Y < 1, \quad (4.117)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} \theta_{1H} = 0, \quad Y = 0; \quad 0 < X < 1, \quad (4.118)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} \theta_{1H} + b_{12} \theta_{1H} = 0, \quad Y = 1; \quad 0 < X < 1, \quad (4.119)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \theta_{2H} = 0, \quad X = 0; \quad 0 < Y < 1, \quad (4.120)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \theta_{2H} + b_{21} \theta_{2H} = 0, \quad X = 1; \quad 0 < Y < 1, \quad (4.121)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} \theta_{2H} = 0, \quad Y = 0; \quad 0 < X < 1, \quad (4.122)$$



$$\frac{\partial}{\partial Y}\theta_{2H} + b_{22}\theta_{2H} = 0, \quad Y = 1; \quad 0 < X < 1, \quad (4.123)$$

Observe que  $Lu$  e  $Pn$  são os números de Luikov e Possnov,  $Ko$  é o número de Kossovitch e  $\varepsilon$  é o critério de mudança de fase [Duarte et al., 1995]. Esse problema é um caso particular, apresentado pelas Equações 4.100-4.111. É conveniente escolher o problema auxiliar como o problema de Sturm-Liouville clássico (desacoplado). Aqui os autovalores  $\mu_i, \lambda_j$ ,  $i, j=1, 2, \dots, N$  satisfazem

$$\frac{d^2}{dX^2}\Psi_i + \mu_i^2\Psi_i = 0, \quad (4.124)$$

$$\frac{d}{dX}\Psi_i(0) = 0, \quad (4.125)$$

$$\frac{d}{dX}\Psi_i(1) + b_{11}\Psi_i(1) = 0, \quad (4.126)$$

e

$$\frac{d^2}{dX^2}\Gamma_j + \lambda_j^2\Gamma_j = 0, \quad (4.127)$$

$$\frac{d}{dX}\Gamma_j(0) = 0, \quad (4.128)$$

$$\frac{d}{dX}\Gamma_j(1) + b_{21}\Gamma_j(1) = 0, \quad (4.129)$$

de modo que

$$\Psi_i(X) = \cos(\mu_i X), \quad (4.130)$$

$$\Gamma_j(X) = \cos(\lambda_j X), \quad (4.131)$$

e os autovalores são as raízes das equações transcendentais,

$$\mu_i \tan(\mu_i) = b_{11}, \quad (4.132)$$

$$\lambda_j \tan(\lambda_j) = b_{21}. \quad (4.133)$$

Da mesma forma, em termos da variável  $Y$ , os autovalores  $\sigma_n, \eta_m$ ,  $n, m=1, 2, \dots, N$  satisfazem

$$\frac{d^2}{dY^2} \Omega_n + \sigma_n^2 \Omega_n = 0, \quad (4.134)$$

$$\frac{d}{dY} \Omega_n(0) = 0, \quad (4.135)$$

$$\frac{d}{dY} \Omega_n(1) + b_{12} \Omega_n(1) = 0, \quad (4.136)$$

e

$$\frac{d^2}{dY^2} \Xi_m + \eta_m^2 \Xi_m = 0, \quad (4.137)$$

$$\frac{d}{dY} \Xi_m(0) = 0, \quad (4.138)$$

$$\frac{d}{dY} \Xi_m(1) + b_{22} \Xi_m(1) = 0, \quad (4.139)$$

de modo que

$$\Omega_n(Y) = \cos(\sigma_n Y), \quad (4.140)$$

$$\Xi_m(Y) = \cos(\eta_m Y), \quad (4.141)$$

e os autovalores são as raízes das equações transcendentais,

$$\sigma_n \tan(\sigma_n) = b_{12}, \quad (4.142)$$

$$\eta_m \tan(\eta_m) = b_{22}. \quad (4.143)$$

Estas autofunções são então usadas atuando sobre as Equações 4.112 e 4.113, como

genericamente descrito nas Equações 3.24 e 3.25, para obter os pares transformada integral resultante, escritas como

$$\bar{\bar{\theta}}_{1H_{in}}(\tau) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Psi_i(x) \Omega_n(y)}{N_i^{1/2} M_n^{1/2}} \theta_{1H}(x, y, \tau) dx dy, \quad (4.144)$$

$$\theta_{1H}(x, y, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_i(x) \Omega_n(y)}{N_i^{1/2} M_n^{1/2}} \bar{\bar{\theta}}_{1H_{in}}(\tau), \quad (4.145)$$

$$\bar{\bar{\theta}}_{2H_{jm}}(\tau) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Gamma_j(x) \Xi_m(y)}{N_j^{1/2} M_m^{1/2}} \theta_{2H}(x, y, \tau) dx dy, \quad (4.146)$$

$$\theta_{2H}(x, y, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma_j(x) \Xi_m(y)}{N_j^{1/2} M_m^{1/2}} \bar{\bar{\theta}}_{2H_{jm}}(\tau). \quad (4.147)$$

Continuando, o sistema diferencial ordinário associado, para  $i, n=1, \dots, N$  e  $j, m=1, \dots, N$  e agora escrito como

$$\frac{d}{d\tau} \bar{\bar{\theta}}_{1H} = -\alpha [\mu_i^2 + K^2 \sigma_n^2] \bar{\bar{\theta}}_{1H} + \beta \left[ (K^2 \sigma_n^2 + \mu_i^2) \sum_j \sum_m A_{ij} C_{mn} \bar{\bar{\theta}}_{2H} \right], \quad (4.148)$$

$$\frac{d}{d\tau} \bar{\bar{\theta}}_{2H} = -Lu [\lambda_j^2 + K^2 \eta_m^2] \bar{\bar{\theta}}_{2H} + Lu Pn \left[ (\lambda_j^2 + K^2 \eta_m^2) \sum_i \sum_n A_{ji} C_{nm} \bar{\bar{\theta}}_{1H} \right]. \quad (4.149)$$

Aqui,  $\bar{\bar{\theta}}_{1H_{in}} \equiv \bar{\bar{\theta}}_{1H}$ ,  $\bar{\bar{\theta}}_{2H_{jm}} \equiv \bar{\bar{\theta}}_{2H}$ , as integrais de normalização ( $A_{ij}$  e  $C_{nm}$ ) são definidas como nas Equações 3.14 e 3.15 e foram mostradas nas Equações I.10 e I.11.

As condições iniciais completam a definição do sistema

$$\bar{\bar{\theta}}_{1H_{i,n}}(0) = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Psi_i(x) \Omega_n(y)}{N_i^{1/2} M_n^{1/2}} dx dy, \quad (4.150)$$

$$\bar{\bar{\theta}}_{2H_{j,m}}(0) = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Gamma_j(x) \Xi_m(y)}{N_j^{1/2} M_m^{1/2}} dx dy. \quad (4.151)$$

Pela escolha de um critério de convergência adequado, as Equações 4.148 e 4.149 são truncadas [Cotta e Mikhailov, 1997], depois da associação de cada par  $[i, n]$  ao índice I e

[j,m] ao J. E assim, o sistema acima, para I,J=1,...,N é da forma definida pela Equação 3.33, para o caso homogêneo ( $\mathbf{H}(t)=0$ ).

A equação diferencial ordinária (EDO) escrita na forma matricial, resultante da aplicação da GITT na Equação 3.19 com  $w_k = 1$  e  $P_k^* = 0$ , k=1,2; que corresponde a Equação 3.33, pode ser escrita como

$$\frac{d}{d\tau} \overline{\overline{\boldsymbol{\theta}}} + \mathbf{C} \overline{\overline{\boldsymbol{\theta}}} = \mathbf{0} \quad ; \quad \overline{\overline{\boldsymbol{\theta}}}(0) = \overline{\overline{\boldsymbol{\theta}_0}}. \quad (4.152)$$

Onde as duas componentes do vetor

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\theta}}}_{1H_{i_n}}(0) = -\frac{1}{\sqrt{N_i} \sqrt{N_n}} \frac{\text{sen}(\mu_i) \text{sen}(\sigma_n)}{\mu_i \sigma_n}, \quad (4.153)$$

e

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\theta}}}_{2H_{j_m}}(0) = -\frac{1}{\sqrt{N_j} \sqrt{N_m}} \frac{\text{sen}(\lambda_j) \text{sen}(\eta_m)}{\lambda_j \eta_m}, \quad (4.154)$$

e a matriz  $\mathbf{C}$  de ordem  $2N \times 2N$  é formada pelos blocos de ordem  $N \times N$

$$\mathbf{C}_{i,n} = \alpha(\mu_i^2 + K^2 \sigma_n^2), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (4.155)$$

$$\mathbf{C}_{i,n+N} = -\beta(\sigma_n^2 K^2 + \mu_i^2), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (4.156)$$

$$\mathbf{C}_{j+N,m} = -Lu Pn(K^2 \eta_m^2 + \lambda_j^2), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (4.157)$$

e

$$\mathbf{C}_{j+N,m+N} = Lu(\lambda_j^2 + K^2 \eta_m^2), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (4.158)$$

Na seção seguinte utiliza-se a decomposição de Schur na matriz  $\mathbf{C}$ . Desta maneira é possível proseguir na resolução da EDO, representada pela Equação 4.152.

#### 4.1 USO DA DECOMPOSIÇÃO DE SCHUR

Abaixo apresenta-se os resultados, conforme mostrado em Thum et al., 1998, para diferentes valores de X, Y e tempo que foram comparados com Duarte, 1995. Da mesma

referência, os valores adimensionais usados são:  $\alpha = 1,021426$ ;  $\beta = 0,003856$ ;  $K = 4$ ;  $Lu=0,001834$ ;  $Pn=5,556$ . Em todas as tabelas o valor da coordenada adimensional “Y” é de 0,5.

Na primeira coluna das Tabelas 4.1-4.6 indica-se a coordenada adimensional “X” , nas segunda e quarta colunas são valores da referência de Duarte, 1995, respectivamente para  $N=6$  e  $N=12$ ; nas terceira e quinta colunas são valores calculados pela técnica apresentada (também com  $N=6$  e  $N=12$ , respectivamente). Na sexta coluna é apresentado os valores da referência com  $N=24$ . Cabe salientar, relativamente aos resultados abaixo apresentados, que para cada valor de “X” e “ $\tau$ ” fixados, com  $Y=0,5$ , os valores da tabela foram obtidos com tempo máximo de cpu 0,85 segundos em microcomputador com processador K6, 233 MHz, 64 Mb RAM e HD de 3 Gb. As Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 correspondem ao valor da temperatura adimensionalizado ( $\theta_1$ ), para três valores de tempo: 0,015, 0,025 e 0,045. E as Tabelas 4.4, 4.5 e 4.6, ao valor da umidade adimensionalizada ( $\theta_2$ ) , usando os valores de tempo igual a 7, 15 e 26. Os valores aqui escolhidos para N foram os usados na referência.

Tabela 4.1 – Valores de  $\theta_1$  (temperatura adimensional), com  $Y = 0,5$   
e  $\tau = 0,015$  para o problema bidimensional.

X	N = 6		N = 12		N = 24
	[Duarte, 1995]	Schur	[Duarte, 1995]	Schur	[Duarte, 1995]
0,0	0,394	0,39604897	0,393	0,39605390	0,393
0,2	0,423	0,42529368	0,423	0,42528541	0,423
0,4	0,509	0,51020510	0,508	0,51022977	0,508
0,6	0,643	0,64355495	0,642	0,64359832	0,642
0,8	0,812	0,81260630	0,812	0,81259077	0,812
1,0	1,000	1,00000000	1,000	1,00000000	1,000

.  
.  
.  
.  
.

Tabela 4.2 – Valores de  $\theta_1$  (temperatura adimensional), com  $Y = 0,5$   
e  $\tau = 0,025$  para o problema bidimensional.

	N = 6		N = 12		N = 24
X	[Duarte, 1995]	Schur	[Duarte, 1995]	Schur	[Duarte, 1995]
0,0	0,604	0,60494092	0,604	0,60494565	0,604
0,2	0,623	0,62409967	0,623	0,62409158	0,623
0,4	0,679	0,67963528	0,679	0,67965434	0,679
0,6	0,767	0,76693417	0,767	0,76696952	0,767
0,8	0,877	0,87758256	0,877	0,87756739	0,877
1,0	1,000	1,00000000	1,000	1,00000000	1,000

Tabela 4.3 – Valores de  $\theta_1$  (temperatura adimensional), com  $Y = 0,5$   
e  $\tau = 0,045$  para o problema bidimensional.

	N = 6		N = 12		N = 24
X	[Duarte, 1995]	Schur	[Duarte, 1995]	Schur	[Duarte, 1995]
0,0	0,829	0,83010673	0,829	0,83011100	0,829
0,2	0,838	0,83824636	0,837	0,83823913	0,837
0,4	0,862	0,86181937	0,861	0,86183081	0,861
0,6	0,899	0,89931104	0,899	0,89933506	0,899
0,8	0,947	0,94716830	0,947	0,94715491	0,947
1,0	1,000	1,00000000	1,000	1,00000000	1,000

Tabela 4.4 – Valores de  $\theta_2$  (umidade adimensional), com  $Y = 0,5$  e  $\tau=7,0$  para o problema bidimensional.

	N = 6		N = 12		N = 24
X	[Duarte, 1995]	Schur	[Duarte, 1995]	Schur	[Duarte, 1995]
0,0	0,3134	0,31775195	0,3134	0,31775195	0,3134
0,2	0,3466	0,35073701	0,3466	0,35073701	0,3466
0,4	0,4433	0,44679863	0,4433	0,44679863	0,4433
0,6	0,5947	0,59726282	0,5947	0,59726282	0,5947
0,8	0,7866	0,78792287	0,7866	0,78792287	0,7866
1,0	1,0000	1,00000000	1,0000	1,00000000	1,000

Tabela 4.5 – Valores de  $\theta_2$  (umidade adimensional), com  $Y = 0,5$  e  $\tau=15,0$  para o problema bidimensional.

	N = 6		N = 12		N = 24
X	[Duarte, 1995]	Schur	[Duarte, 1995]	Schur	[Duarte, 1995]
0,0	0,6259	0,62590040	0,6259	0,62590040	0,6259
0,2	0,6442	0,64420834	0,6442	0,64420834	0,6442
0,4	0,6973	0,69734154	0,6973	0,69734154	0,6973
0,6	0,7801	0,78010217	0,7801	0,78010217	0,7801
0,8	0,8844	0,88439134	0,8844	0,88439134	0,8844
1,0	1,0000	1,00000000	1,0000	1,00000000	1,000

Observa-se nesses resultados uma convergência nos dois ou três primeiros dígitos significativos entre os valores da referência e os calculados, tanto para a temperatura como para a umidade.

Os Gráficos 4.3 e 4.4 apresentam os valores calculados de temperatura e umidade adimensionais em função da posição  $X$ , em  $Y = 0,5$ , semelhantes aos mostrados na referência Duarte, 1995.

Tabela 4.6 – Valores de  $\theta_2$  (umidade adimensional), com  $Y = 0,5$  e  $\tau=26,0$  para o problema bidimensional.

X	N = 6		N = 12		N = 24
	[Duarte, 1995]	Schur	[Duarte, 1995]	Schur	[Duarte, 1995]
0,0	0,8366	0,83661618	0,8366	0,83661618	0,8366
0,2	0,8446	0,84461275	0,8446	0,84461275	0,8446
0,4	0,8678	0,86781971	0,8678	0,86781971	0,8678
0,6	0,9040	0,90396539	0,9040	0,90396539	0,9040
0,8	0,9495	0,94951162	0,9495	0,94951162	0,9495
1,0	1,0000	1,00000000	1,0000	1,00000000	1,000

O comportamento das curvas concorda com o fenômeno físico da secagem em meios capilares porosos. Com o passar do tempo, ( $t \rightarrow \infty$ ) as soluções tendem para o estado estacionário; quanto mais próximo da superfície ( $X=1$ ) maior é a influência das condições de contorno.

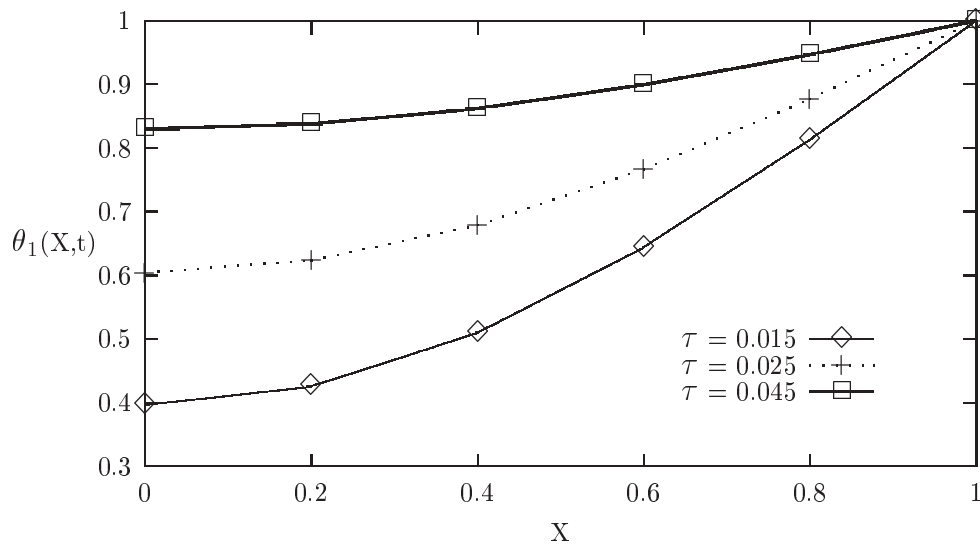


Figura 4.3 – Gráfico da variação da temperatura adimensional em função da posição  $X$  (em  $Y=0,5$ ) para os tempos adimensionais,  $\tau = 0,015$  ou  $0,025$  ou  $0,045$ .



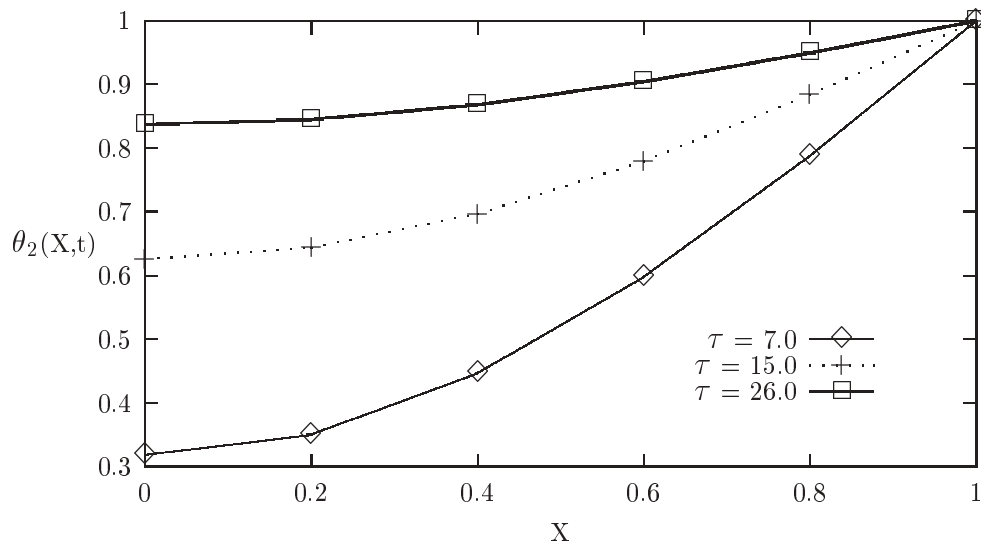


Figura 4.4 – Gráfico da variação da umidade adimensional em função da posição  $X$  (em  $Y=0,5$ ) para os tempos adimensionais,  $\tau = 7$  ou  $15$  ou  $26$ .

Na seção seguinte, faz-se a decomposição da matriz  $\mathbf{C}$  usando a técnica da diagonalização.

## 4.2 USO DA DIAGONALIZAÇÃO

Agora usa-se a diagonalização apresentada na seção 3.2 para o problema descrito pelas Equações 4.112 a 4.123. No trabalho de Thum et al., 2001 essa técnica da diagonalização é aplicada. Usa-se também ordenamento dos autovalores visando melhor convergência. Obteve-se os resultados apresentados nas Tabelas 4.7 a 4.9. O tempo de cpu ( $t_{cpu}$ ) em cada coluna corresponde ao tempo acumulado (em segundos) desde o início do processamento ( $\tau=0,015$ ) até o final ( $\tau=26.0$ ). O código computacional, construído em linguagem FORTRAN, é executado para os seis tempos adimensionais, uma vez que os dados de entrada do programa (como ordem de truncamento ( $N$ ), posição no eixo vertical ( $Y$ ), razão de aspecto ( $K$ ) e demais números adimensionais ( $Lu$ ,  $Pn$ ,  $Ko$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ )) são os mesmos em cada caso.

Tabela 4.7 – Valores calculados de  $\theta_1$  (temperatura adimensional) e de  $\theta_2$  (umidade adimensional), com  $Y = 0,5$  e  $N = 10$ .

X	$\theta_1$			$\theta_2$		
	$\tau = 0,015$	$\tau = 0,025$	$\tau = 0,045$	$\tau = 7,0$	$\tau = 15,0$	$\tau = 26,0$
0,0	0,39605242	0,60494438	0,83011015	0,31775196	0,62590041	0,83661618
0,2	0,42528235	0,62408927	0,83823783	0,35073702	0,64420835	0,84461275
0,4	0,51022349	0,67964989	0,86182858	0,44679864	0,69734155	0,86781971
0,6	0,64359045	0,76696408	0,89933245	0,59726283	0,78010217	0,90396540
0,8	0,81258523	0,87756359	0,94715311	0,78792287	0,88439134	0,94951162
1,0	1,00000000	1,00000000	1,00000000	1,00000000	1,00000000	1,00000000
$t_{cpu}(s)$	0,88	1,54	2,20	2,86	3,52	4,18

Tabela 4.8 – Valores calculados de  $\theta_1$  (temperatura adimensional) e de  $\theta_2$  (umidade adimensional), com  $Y = 0,5$  e  $N = 100$ .

X	$\theta_1$			$\theta_2$		
	$\tau = 0,015$	$\tau = 0,025$	$\tau = 0,045$	$\tau = 7,0$	$\tau = 15,0$	$\tau = 26,0$
0,0	0,39605338	0,60494523	0,83011076	0,31775196	0,62590041	0,83661618
0,2	0,42528391	0,62409064	0,83823878	0,35073702	0,64420835	0,84461275
0,4	0,51023112	0,67965574	0,86183154	0,44679864	0,69734155	0,86781971
0,6	0,64359797	0,76696982	0,89933533	0,59726283	0,78010217	0,90396540
0,8	0,81258639	0,87756460	0,94715380	0,78792287	0,88439134	0,94951162
1,0	1,00000000	1,00000000	1,00000000	1,00000000	1,00000000	1,00000000
$t_{cpu}(s)$	4,12	8,02	11,87	15,71	19,55	23,40

Tabela 4.9 – Valores calculados de  $\theta_1$  (temperatura adimensional) e de  $\theta_2$  (umidade adimensional), com  $Y = 0,5$  e  $N = 200$ .

X	$\theta_1$			$\theta_2$		
	$\tau = 0,015$	$\tau = 0,025$	$\tau = 0,045$	$\tau = 7,0$	$\tau = 15,0$	$\tau = 26,0$
0,0	0,39605338	0,60494523	0,83011076	0,31775196	0,62590041	0,83661618
0,2	0,42528391	0,62409064	0,83823878	0,35073702	0,64420835	0,84461275
0,4	0,51023112	0,67965574	0,86183154	0,44679864	0,69734155	0,86781971
0,6	0,64359797	0,76696982	0,89933533	0,59726283	0,78010217	0,90396540
0,8	0,81258639	0,87756460	0,94715380	0,78792287	0,88439134	0,94951162
1,0	1,00000000	1,00000000	1,00000000	1,00000000	1,00000000	1,00000000
$t_{cpu}(s)$	30,98	61,35	91,73	122,10	152,97	197,57

Percebe-se a coincidência de quatro a cinco primeiros dígitos significativos entre as Tabelas 4.7 a 4.9 (usando diagonalização) com as Tabelas 4.1 a 4.6 (usando decomposição de Schur). Com aumento dos termos no somatório (truncamento da série) observa-se estabilidade do método desde  $N=10$  até  $N=200$ . Na seção anterior, o maior valor de  $N$  trabalhado foi 20.

O tempo de processamento (cpu) necessário para o cálculo para cada  $N$  (ordem de truncamento) e para cada  $\tau$  (tempo adimensional) é mostrado na Tabela 4.10. Na última coluna é mostrado o tempo total consumido em cada caso, tempo dado em segundos.

Tabela 4.10 – Valores de tempo de cpu no cálculo de  $\theta_1$  e de  $\theta_2$ .

N	$\theta_1$			$\theta_2$			total
	$\tau = 0,015$	$\tau = 0,025$	$\tau = 0,045$	$\tau = 7,0$	$\tau = 15,0$	$\tau = 26,0$	
10	0,88	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	4,18
20	0,94	0,65	0,72	0,77	0,66	0,68	4,45
50	1,48	0,94	0,98	0,94	0,93	0,94	6,21
100	4,12	3,90	3,85	3,84	3,84	3,85	23,40
200	30,98	30,37	30,38	30,37	30,87	44,6	197,57

Na segunda coluna ( $\tau = 0,015$ ) o valor é maior em relação as outras colunas por incluir a geração e operações de matrizes necessárias no processamento computacional, enquanto que nas outras colunas o tempo corresponde somente aos cálculos nos pontos ( $X = 0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8$  e  $1,0$ ). O aumento da ordem de truncamento implica em um dimensionamento maior das matrizes envolvidas e com isso um natural aumento no tempo de processamento (cpu).

Na próxima seção apresenta-se resultados em que o sistema de EDO's é submetido a um esquema numérico.

### 4.3 O MÉTODO HÍBRIDO

O método híbrido da GITT, na variável temporal, utiliza na solução do sistema resultante da aplicação das transformadas integrais um esquema numérico. Computacionalmente usa-se a DIVPAG, numa programação em linguagem FORTRAN, para avaliar a solução do sistema. Implementando a DIVPAG, sub-rotina do IMSL [Library, 1997], neste problema de secagem, obtêm-se os resultados esperados, observando que o tempo de processamento aumenta em relação as duas técnicas anteriores.

Fixa-se a variação do tempo ( $\Delta T$ ) em  $0,001$ . O tempo de processamento ( $t_{cpu}$ ) é dada em segundos e diferentemente dos casos anteriores, não estão acumulados em cada coluna. O número de iterações também é apresentado, na última linha das Tabelas 4.11 e 4.12.

Inicialmente faz-se  $N = 10$ . Os resultados são mostrados nas Tabelas 4.11 e 4.12.

Tabela 4.11 – Valores calculados de  $\theta_1$  (temperatura adimensional) , com  $Y = 0,5$  e  $N = 10$ . Usa-se método híbrido (GITTT).

X	$\tau = 0,015$	$\tau = 0,025$	$\tau = 0,045$
0,0	0,39755034	0,60721751	0,83321551
0,2	0,42689335	0,62643816	0,84137806
0,4	0,51216758	0,68222115	0,86506671
0,6	0,64528331	0,76911340	0,90196453
0,8	0,81339339	0,87861335	0,94845989
1,0	1,00000000	1,00000000	1,00000000
$t_{cpu}^*(s)$	6.64	9.56	19,05
iterações	15	25	45

Tabela 4.12 – Valores calculados de  $\theta_2$  (umidade adimensional) , com  $Y = 0,5$  e  $N = 10$ . Usa-se método híbrido (GITTT).

X	$\tau = 7.0$	$\tau = 15.0$	$\tau = 26.0$
0,0	0,32677103	0,63444648	0,84246321
0,2	0,35934634	0,65233643	0,85017361
0,4	0,45419269	0,70425632	0,87255006
0,6	0,60269823	0,78512661	0,90740220
0,8	0,79080735	0,88703308	0,95131845
1,0	1,00000000	1,00000000	1,00000000
$t_{cpu}^*(s)$	1113,60	2145,45	4441,87
iterações	7000	15000	26000

Os valores de tempo de processamento computacional ( $t_{cpu}^*$ ) mostrados nas tabelas acima correspondem em cada coluna ao tempo consumido em uma execução do programa. Como o passo de tempo é fixo (0,001), quanto maior o tempo final ( $\tau$ ), maior é o número de iterações que serão necessárias.

E agora usa-se  $N = 20$  para a temperatura (com tempos curtos) e  $N = 15$  para a umidade (com tempos maiores). Os resultados são mostrados respectivamente nas Tabelas 4.13 e 4.14.

Tabela 4.13 – Valores calculados de  $\theta_1$  (temperatura adimensional), com  $Y = 0,5$  e  $N = 20$ . Usa-se método híbrido (GITT).

X	$\tau = 0,015$	$\tau = 0,025$	$\tau = 0,045$
0,0	0,39670824	0,60598555	0,83158685
0,2	0,42599839	0,62517390	0,83973656
0,4	0,51112062	0,68086350	0,86339019
0,6	0,64438069	0,76798809	0,90060817
0,8	0,81295635	0,87806047	0,94778456
1,0	1,00000000	1,00000000	1,00000000
$t_{cpu}(s)$	64.75	97.31	447.53

Tabela 4.14 – Valores calculados de  $\theta_2$  (umidade adimensional), com  $Y = 0,5$  e  $N = 15$ . Usa-se método híbrido (GITT).

X	$\tau = 7.0$	$\tau = 15.0$	$\tau = 26.0$
0,0	0,32677196	0,63444770	0,84246413
0,2	0,35934726	0,65233759	0,85017448
0,4	0,45419358	0,70425731	0,87255080
0,6	0,60269897	0,78512733	0,90740273
0,8	0,79080778	0,88703346	0,95131874
1,0	1,00000000	1,00000000	1,00000000
$t_{cpu}$	5718.77	12357.46	18336.00

Nas Tabelas 4.13 e 4.14 os tempos de processamento aumentaram em relação as Tabelas 4.11 e 4.12 em decorrência do aumento do tamanho do sistema com o aumento da ordem de truncamento ( $N$ ).

Verifica-se nas tabelas acima o tempo computacional ( $t_{cpu}$ ) gasto, empregando a “DIVPAG” (que é utilizada no método híbrido GITT), e conclui-se que o método empregado (diagonalização) é mais rápido, atingindo os valores próximos aos mostrados na Tabela 4.1-4.6. Nota-se que não se tem familiaridade com a “DIVPAG” e que existem numa série de parâmetros a serem definidos para uma boa implementação computacional. Os Gráficos 4.5 e 4.6 apresentam os valores calculados de temperatura e umidade adimensional, respectivamente, em função da posição  $X$ , com  $Y = 0,5$  e  $N = 10$ .

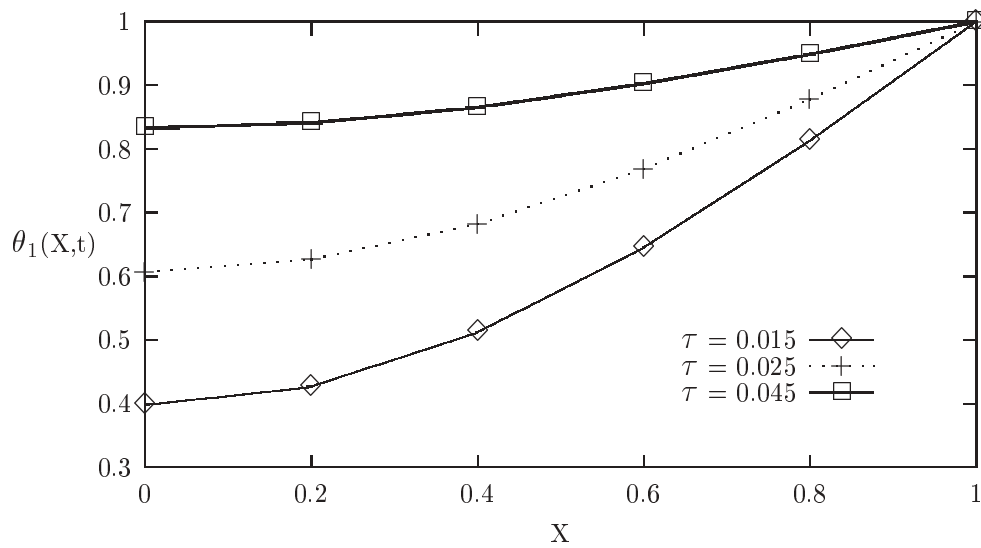


Figura 4.5 – Gráfico da variação da temperatura adimensional em função da posição  $X$  (em  $Y=0,5$ ) para os tempos adimensionais 0,015, 0,025 e 0,045. Usando método híbrido e  $N = 20$ .

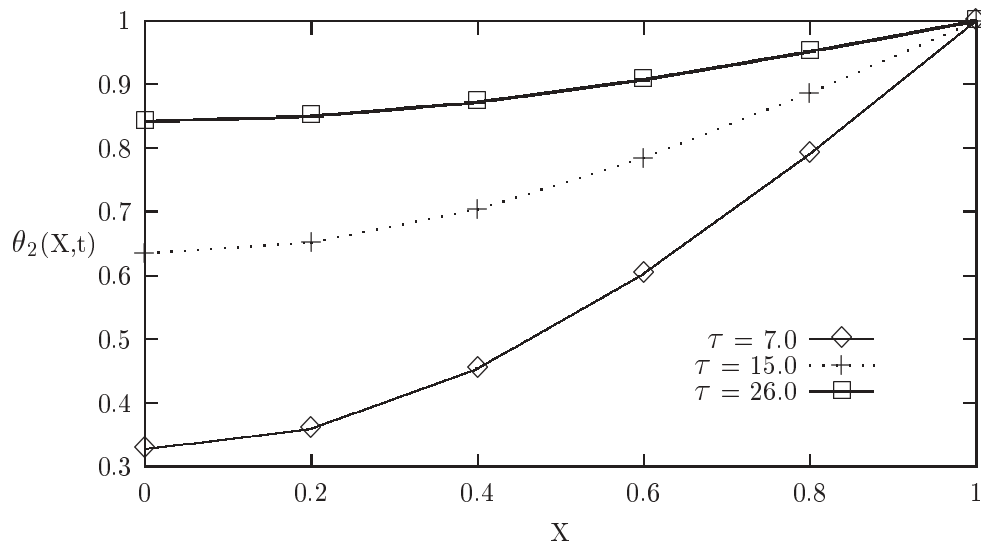


Figura 4.6 – Gráfico da variação da umidade adimensional em função da posição  $X$  (em  $Y=0,5$ ) para os tempos adimensionais 7, 15 e 26. Usando método híbrido e  $N = 20$ .

Os Gráficos 4.5 e 4.6 apresentam semelhanças com os Gráficos 4.3 e 4.4, como era esperado.

Na próxima seção, trabalha-se com um problema teste, utilizando a metodologia da diagonalização.

#### 4.4 UM PROBLEMA TESTE

Com o objetivo de tornar mais geral a aplicação da GITT, associada ao problema de Luikov, toma-se um caso teste com as condições de contorno modificadas. Os números de Biot ( $\mathbf{Bi}$ ), que relacionam os coeficientes convectivo e difusivo, para a transferência de calor e massa, são diferentes neste caso. Mantêm-se a abordagem bidimensional e as equações de Luikov, modificando as condições de contorno. Entretanto, este problema não tem significado físico, mas torna-se um teste para a metodologia apresentada neste trabalho.

Neste capítulo, o procedimento é idêntico ao apresentado no Capítulo 4. Toma-se o mesmo sistema de equações diferenciais parciais (EDP) e de condições iniciais, modificando



as condições de contorno. Elas passam a ser

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial X}(0, Y, \tau) = 0, \quad (4.159)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial Y}(X, 0, \tau) = 0, \quad (4.160)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial X}(0, Y, \tau) = 0, \quad (4.161)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial Y}(X, 0, \tau) = 0, \quad (4.162)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial X}(1, Y, \tau) + Bi_q \theta_1(1, Y, \tau) = 0, \quad (4.163)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial Y}(X, 1, \tau) + Bi_q \theta_1(X, 1, \tau) = 0, \quad (4.164)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial X}(1, Y, \tau) + Bi_m \theta_2(1, Y, \tau) = 0, \quad (4.165)$$

e

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial Y}(X, 1, \tau) + Bi_m \theta_2(X, 1, \tau) = 0. \quad (4.166)$$

Fez-se  $Bi_q = b_{11} = b_{12}$  e  $Bi_m = b_{21} = b_{22}$ , das Equações 4.117, 4.119, 4.121 e 4.123, referidas no Capítulo 4. Note-se que o tipo de problemas auxiliares aqui propostos são os que aparecem na formulação mais geral (acoplada), conforme as Equações 4.70, 4.71, 4.78 e 4.79.

Com o objetivo de validar o método, atribuiu-se aos valores de  $Bi_q$  e de  $Bi_m$  o valor de 200 (significativamente grande para que as condições de contorno desse problema se aproximem as do problema abordado no Capítulo 4), de maneira que os resultados ficassem próximos do mostrado na Tabela 4.9, do Capítulo 4.

As Tabelas 4.15 e 4.16 mostram os perfis de temperatura e umidade, para  $N=100$ .

Tabela 4.15 – Valores de  $\theta_1$  (temperatura adimensional), com  $N=100$ ,  
 $Bi_q = Bi_m = 200$ .

	$\theta_1$		
X	$\tau = 0,015$	$\tau = 0,025$	$\tau = 0,045$
0,0	0,38858603	0,59893485	0,82674194
0,2	0,42710009	0,62556183	0,84011247
0,4	0,49725487	0,66868039	0,85527578
0,6	0,63352161	0,75829052	0,89441748
0,8	0,81078383	0,87606169	0,94707193
1,0	0,99522320	0,99685635	0,99863933

Tabela 4.16 – Valores de  $\theta_2$  (umidade adimensional), com  $N=100$ ,  
 $Bi_q = Bi_m = 200$ .

	$\theta_2$		
X	$\tau = 7.0$	$\tau = 15.0$	$\tau = 26.0$
0,0	0,31948480	0,62897643	0,83853086
0,2	0,36296463	0,65248535	0,84876126
0,4	0,44072927	0,69443960	0,86701824
0,6	0,59273882	0,77707520	0,90298037
0,8	0,79018995	0,88496551	0,94993494
1,0	0,99470091	0,99709306	0,99873484

O Gráfico 4.7 apresenta os valores calculados de temperatura e umidade adimensional em função da posição X (0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8 e 1,0).

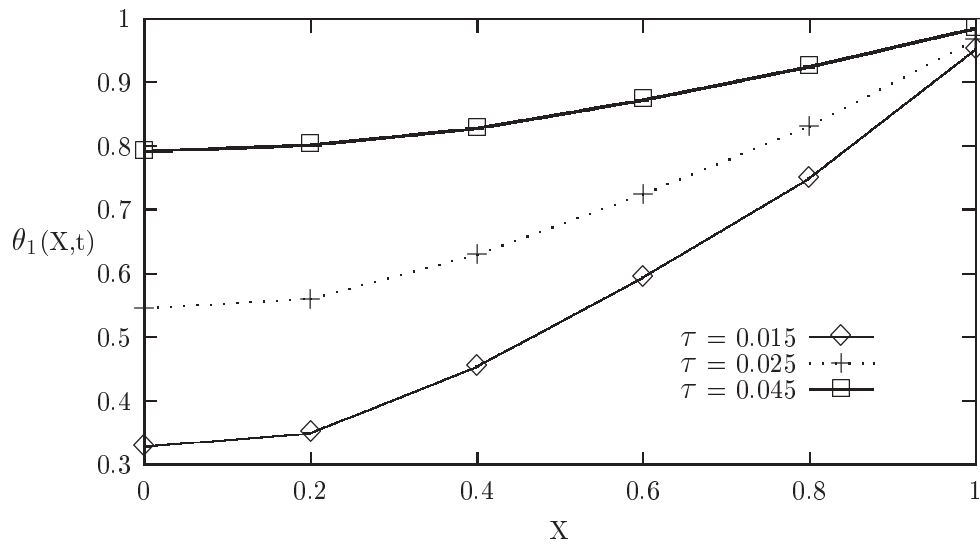


Figura 4.7 – Gráfico da variação da temperatura adimensional ( $\theta_1$ ) em função da posição X (em  $Y=0,5$ ) para os tempos adimensionais 0,015, 0,025 e 0,045, usando a diagonalização,  $N=100$ ,  $Bi_q = 20$ ,  $Bi_m = 2$ .

As Tabelas 4.17 e 4.18 mostram os perfis de temperatura e umidade, para  $N = 10$  e  $N = 200$ , respectivamente. O tempo de processamento ( $t_{cpu}$ ) é dado em segundos e tempo em cada coluna corresponde a cada caso individualmente.

A comparação entre as tabelas indica coincidência de um a dois dígitos para a temperatura. Por outro lado, os valores da umidade não estabilizaram. Desde que não havia comparativo na literatura, o problema foi usado como um caso teste e permitiu explorar as etapas que constituem o método apresentado. Desde a geração dos autovalores do problema auxiliar, a implementação do ordenamento desses autovalores, a decomposição de matrizes, a obtenção dos autovalores (reais e complexos) e dos autovetores e a inversão de matrizes.

Tabela 4.17 – Valores de  $\theta_1$  (temperatura adimensional), e de  $\theta_2$  (umidade adimensional), com  $N = 10$ ,  $Bi_q = 20$ ,  $Bi_m = 2$ , usando a diagonalização.

X	$\theta_1$			$\theta_2$		
	$\tau = 0,015$	$\tau = 0,025$	$\tau = 0,045$	$\tau = 7,0$	$\tau = 15,0$	$\tau = 26,0$
0,0	0,32671217	0,54314208	0,78885231	-0,08457104	0,18347415	0,44560387
0,2	0,35667480	0,56328334	0,79807693	-0,02515344	0,22758185	0,47553042
0,4	0,44347515	0,62169133	0,82472433	0,09536664	0,31687633	0,53610977
0,6	0,57917057	0,71331185	0,86656966	0,34253675	0,50208959	0,66183439
0,8	0,75252349	0,83099884	0,92084204	0,61980995	0,71133817	0,80392484
1,0	0,94899533	0,96505163	0,98342443	0,93172114	0,94804933	0,96470853
$t_{cpu}(s)$	0,66	0,71	1,37	2,09	2,80	3,46

Tabela 4.18 – Valores de  $\theta_1$  (temperatura adimensional) e de  $\theta_2$  (umidade adimensional), com  $N = 200$ ,  $Bi_q = 20$ ,  $Bi_m = 2$ , usando a diagonalização.

X	$\theta_1$			$\theta_2$		
	$\tau = 0,015$	$\tau = 0,025$	$\tau = 0,045$	$\tau = 7,0$	$\tau = 15,0$	$\tau = 26,0$
0,0	0,31762975	0,54011927	0,79245377	-0,00982790	0,23288292	0,47290255
0,2	0,35526114	0,56514572	0,80232774	0,08555525	0,30491151	0,52237990
0,4	0,45395855	0,63086454	0,82943539	-0,06401003	0,18967182	0,44314198
0,6	0,59647901	0,72746325	0,87423402	0,36104709	0,51221945	0,66475742
0,8	0,75618582	0,83508180	0,92464022	0,52750875	0,63891056	0,75181684
1,0	0,94542093	0,96321652	0,98415021	1,01213835	1,00891887	1,00611804
$t_{cpu}(s)$	32,00	62,29	116,28	150,11	185,65	221,02

No próximo capítulo aborda-se o problema unidimensional com condições de contorno acopladas, que levam à solução do sistema de EDO onde surgem autovalores complexos.

## CAPÍTULO 5

### APLICAÇÃO UNIDIMENSIONAL: AUTOVALORES COMPLEXOS

Neste capítulo, o procedimento para a solução de um problema unidimensional, apresentado pela referência Ribeiro et al., 1993, é submetido ao método de solução mostrado no Capítulo 3, seção 3.2. O problema consiste na secagem de uma placa porosa úmida em contato com uma superfície aquecida que atua como uma fonte de calor (com o fluxo de magnitude  $Q$ ). Na outra extremidade, fluxo de ar seco transporta calor e umidade da superfície. Este problema também é apresentado em Mikhailov e Özisik, 1984.

A figura 5.1 mostra o domínio físico deste problema de secagem unidimensional.

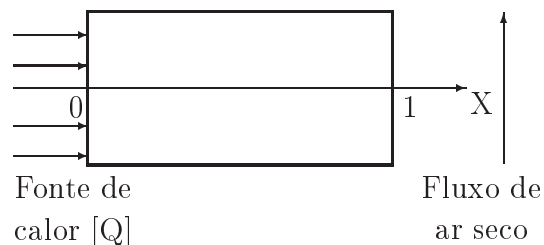


Figura 5.1 – Domínio unidimensional para o problema de secagem com condições de contorno acopladas.

#### 5.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

As equações diferenciais parciais que descrevem o fenômeno de transferência de calor e massa unidimensional em meios capilares porosos, nas suas formas adimensionais

(caso unidimensional do problema apresentado no Capítulo 4), são

$$\frac{\partial \theta_1(X, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \theta_1^2(X, \tau)}{\partial X^2} - \varepsilon K o \frac{\partial \theta_2(X, \tau)}{\partial \tau}, \quad (5.1)$$

e

$$\frac{\partial \theta_2(X, \tau)}{\partial \tau} = Lu \frac{\partial \theta_2^2(X, \tau)}{\partial X^2} - Lu P n \frac{\partial \theta_1^2(X, \tau)}{\partial X^2}, \quad (5.2)$$

no domínio  $0 < X < 1$  e  $\tau > 0$ . As condições iniciais são

$$\theta_1(X, 0) = 0, \quad (5.3)$$

e

$$\theta_2(X, 0) = 0. \quad (5.4)$$

As condições de contorno são

$$\frac{\partial \theta_1(0, \tau)}{\partial X} = -Q, \quad (5.5)$$

e

$$\frac{\partial \theta_2(0, \tau)}{\partial X} - P n \frac{\partial \theta_1(0, \tau)}{\partial X} = 0, \quad (5.6)$$

e

$$\frac{\partial \theta_1(1, \tau)}{\partial X} - B i q [1 - \theta_1(1, \tau)] + (1 - \varepsilon) K o L u B i m [1 - \theta_2(1, \tau)] = 0, \quad (5.7)$$

e

$$-\frac{\partial \theta_2(1, \tau)}{\partial X} + P n \frac{\partial \theta_1(1, \tau)}{\partial X} + B i m [1 - \theta_2(1, \tau)] = 0. \quad (5.8)$$

Usam-se os problemas auxiliares desacoplados e assim evita-se o aparecimento de autovalores complexos.

Ao aplicar a transformada integral, levando em conta a decomposição (“filtro”),

$$\theta_k(X, \tau) = \theta_{kS}(X) + \theta_{kH}(X, \tau), \quad k = 1, 2, \quad (5.9)$$

onde surgem os problemas homogêneo e estacionário, obtêm-se

$$\frac{d\bar{\theta}_{1Hi}(\tau)}{d\tau} + \alpha\mu_i^2\bar{\theta}_{1Hi}(\tau) - \beta \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}^* \bar{\theta}_{2Hj}(\tau) = \bar{g}_i(\tau), \quad (5.10)$$

e

$$\frac{d\bar{\theta}_{2Hi}(\tau)}{d\tau} + Lu\lambda_i^2\bar{\theta}_{2Hi}(\tau) - LuPn \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij}^* \bar{\theta}_{1Hj}(\tau) = \bar{h}_i(\tau), \quad (5.11)$$

onde

$$\bar{g}_i(\tau) = \frac{\alpha\Psi_i(1)}{N_i^{1/2}} \left[ \frac{\partial\theta_{1H}(1,\tau)}{\partial X} + Biq\theta_{1H}(1,\tau) \right] - \frac{\beta\Psi_i(1)}{N_i^{1/2}} \left[ \frac{\partial\theta_{2H}(1,\tau)}{\partial X} + Biq\theta_{2H}(1,\tau) \right], \quad (5.12)$$

e

$$\bar{h}_i(\tau) = \frac{Lu\Gamma_i(1)}{M_i^{1/2}} \left[ \frac{\partial\theta_{2H}(1,\tau)}{\partial X} + Bim^*\theta_{2H}(1,\tau) \right] - \frac{LuPn\Gamma_i(1)}{M_i^{1/2}} \left[ \frac{\partial\theta_{1H}(1,\tau)}{\partial X} + Bim^*\theta_{1H}(1,\tau) \right], \quad (5.13)$$

e os coeficientes bi-indexados são

$$A_{ij}^* = \frac{\mu_i^2}{N_i^{1/2}N_j^{1/2}} \int_0^1 \Psi_i(x)\Gamma_j(x)dx, \quad (5.14)$$

e

$$B_{ij}^* = \frac{\lambda_j^2}{N_j^{1/2}N_i^{1/2}} \int_0^1 \Gamma_j(x)\Psi_i(x)dx. \quad (5.15)$$

As condições iniciais tornam-se

$$\bar{\theta}_{1Hi}(0) = -\frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \theta_{1S}(X)\Psi_i(X)dX, \quad (5.16)$$

e

$$\bar{\theta}_{2Hi}(0) = -\frac{1}{M_i^{1/2}} \int_0^1 \theta_{2S}(X)\Gamma_i(X)dX. \quad (5.17)$$

Os problemas estacionários apresentam as seguintes soluções,

$$\theta_{1S}(X) = \left( 1 + \frac{1+Biq}{Biq}Q \right) - QX, \quad (5.18)$$

e

$$\theta_{2S}(X) = (1 + PnQ) - PnQX. \quad (5.19)$$

A solução deste sistema de equação diferencial ordinária (EDO) é apresentada no Capítulo 3. Usa-se a diagonalização (mostrada na seção 3.2), de modo que a fórmula de inversão fica

$$\theta_{1Hi}(X, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i^{1/2}} \Psi_i(X) \bar{\theta}_{1Hi}(\tau), \quad (5.20)$$

e

$$\theta_{2Hi}(X, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{M_i^{1/2}} \Gamma_i(X) \bar{\theta}_{2Hi}(\tau). \quad (5.21)$$

Um fato característico é a existência de autovalores complexos da matriz  $\mathbf{C}$  (na Equação 3.33), quando aplicado o método de diagonalização (apresentado no Capítulo 3).

## 5.2 RESULTADOS

Os parâmetros aplicados às equações adimensionais assumem os valores : Lu=0,4; Pn=0,6; Ko=5,0;  $\varepsilon = 0,2$ ; Q=0,9;  $Bi_q=2,5$ ;  $Bi_m=2,5$ ;  $\alpha = 1,24$ ;  $\beta = 0,4$ ;  $Bi_m^*=0,1$ .

As Tabelas 5.1 a 5.6 mostram os perfis de temperatura e umidade adimensionais para os tempos adimensionais de 0,1, 0,4 e 0,8. O tempo de processamento ( $t_{cpu}$ ) é dado em segundos. A máquina usada para a calcular os resultados é um microcomputador K6-II, 450 MHz, 128 Mb RAM e HD de 6,4 Gb. O problema foi também desenvolvido utilizando o software Maple, além da programação em Fortran.



Tabela 5.1 – Valores de  $\theta_1$  (temperatura adimensional), com  $\tau = 0,1$  para o problema unidimensional.

X	Ref.[Ribeiro et al., 1993]		Calculado c/ diagonalização		
	N=10	N=30	N=10	N=50	N=100
0,0	0,2850	0,2850	0,28768727	0,28511198	0,28503536
0,2	0,1330	0,1330	0,13569694	0,13307910	0,13300215
0,4	0,02408	0,02405	0,02692615	0,02415678	0,02407869
0,6	-0,06179	-0,06179	-0,05851173	-0,06168452	-0,06176585
0,8	-0,1197	-0,1169	-0,11466692	-0,11951358	-0,11961066
1,0	-0,1106	-0,1106	-0,57063529	-0,10034148	-0,10548758
$t_{cpu}(s)$	–	–	11,65	34,93	70,91

Tabela 5.2 – Valores de  $\theta_2$  (umidade adimensional), com  $\tau = 0,1$  para o problema unidimensional.

X	Ref.[Ribeiro et al., 1993]		Calculado c/ diagonalização		
	N=10	N=30	N=10	N=50	N=100
0,0	0,07725	0,07726	0,07463825	0,07716851	0,07723877
0,2	0,00987	0,00988	0,00724436	0,00979176	0,00986214
0,4	0,00368	0,00370	0,00098475	0,00360776	0,00367867
0,6	0,03431	0,03436	0,03137784	0,03426669	0,03433956
0,8	0,1304	0,1305	0,12625036	0,13037976	0,13046367
1,0	0,3769	0,3770	0,33104490	0,36799815	0,37250094
$t_{cpu}(s)$	–	–	11,65	34,93	70,91

Observa-se que com aumento da ordem de truncamento (N) os valores de temperatura e umidade adimensionais tendem para os valores apresentado pela referência, com dois a três dígitos significativos.

O tempo de processamento ( $t_{cpu}$ ) em cada coluna está associado ao cálculo nas

posições em  $X$  (nos pontos 0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8 e 1,0), incluindo a geração e manipulação de matrizes.

Tabela 5.3 – Valores de  $\theta_1$  (temperatura adimensional), com  $\tau = 0,4$  para o problema unidimensional.

X	Ref.[Ribeiro et al., 1993]		Calculado c/ diagonalização		
	N=10	N=30	N=10	N=50	N=100
0,0	0,4858	0,4859	0,48768566	0,48592488	0,48587131
0,2	0,3283	0,3283	0,33018596	0,32839869	0,32834491
0,4	0,2168	0,2168	0,21876614	0,21687695	0,21682237
0,6	0,1539	0,1539	0,15620362	0,15401965	0,15396270
0,8	0,1420	0,1420	0,14552452	0,14212609	0,14205779
1,0	0,1794	0,1794	0,21710132	0,18662728	0,18300673
$t_{cpu}(s)$	–	–	11,48	35,86	70,36

Tabela 5.4 – Valores de  $\theta_2$  (umidade adimensional), com  $\tau = 0,4$  para o problema unidimensional.

X	Ref.[Ribeiro et al., 1993]		Calculado com a diagonalização		
	N=10	N=30	N=10	N=50	N=100
0,0	0,2014	0,2014	0,19930869	0,20133840	0,20139474
0,2	0,1269	0,1269	0,12475724	0,12680367	0,12686013
0,4	0,1214	0,1215	0,11927520	0,12138499	0,12144189
0,6	0,1906	0,1906	0,18825701	0,19055973	0,19061809
0,8	0,3389	0,3389	0,33555664	0,33880676	0,33887370
1,0	0,5618	0,5618	0,52493809	0,55461801	0,55823513
$t_{cpu}(s)$	–	–	11,48	35,86	70,36

Tabela 5.5 – Valores de  $\theta_1$  (temperatura adimensional), com  $\tau = 0,8$  para o problema unidimensional.

X	Ref.[Ribeiro et al., 1993]		Calculado com a diagonalização		
	N=10	N=30	N=10	N=50	N=100
0,0	0,7771	0,7771	0,77861581	0,77720666	0,77716342
0,2	0,6196	0,6169	0,62107967	0,61964655	0,61960313
0,4	0,5063	0,5064	0,50794839	0,50642605	0,50638194
0,6	0,4356	0,4356	0,43746740	0,43569805	0,43565198
0,8	0,4037	0,4037	0,40652203	0,40376388	0,40370859
1,0	0,4044	0,4044	0,43489942	0,41025309	0,40732618
$t_{cpu}(s)$	–	–	11,37	32,02	66,68

Tabela 5.6 – Valores de  $\theta_2$  (umidade adimensional), com  $\tau = 0,8$  para o problema unidimensional.

X	Ref.[Ribeiro et al., 1993]		Calculado com a diagonalização		
	N=10	N=30	N=10	N=50	N=100
0,0	0,3710	0,3710	0,36934001	0,37098958	0,37103523
0,2	0,2982	0,2982	0,29645542	0,29811522	0,29816094
0,4	0,2946	0,2946	0,29283283	0,29453548	0,29458151
0,6	0,3569	0,3569	0,35500154	0,35685115	0,35689830
0,8	0,4780	0,4780	0,47532322	0,47793538	0,47798946
1,0	0,6458	0,6458	0,61594092	0,63994821	0,64287586
$t_{cpu}(s)$	–	–	11,37	32,02	66,68

Nas Tabelas 5.1 a 5.6 é possível verificar que os valores calculados conferem com os resultados mostrados na referência Ribeiro et al., 1993. Nessa referência, os valores apresentados foram resultantes de expressões manipuladas analiticamente para obter aceleração na convergência. Aqui utiliza-se a fórmula de inversão apresentada nas Equações

5.20 e 5.21, por esse motivo aproximações de mais alta ordem de truncamento ( $N$ ) devem ser usadas na tentativa de se obter a mesma precisão. No entanto, uma vez que o procedimento proposto nesse trabalho deve ser aplicado em sistemas de mais alta ordem, isso pode ser usado em detrimento de um maior trabalho analítico quando a GITT é aplicada.

Os gráficos (5.2) e (5.3) ilustram os valores obtidos de temperatura e umidade adimensionais em função da posição  $X$  (nos pontos 0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8 e 1,0).

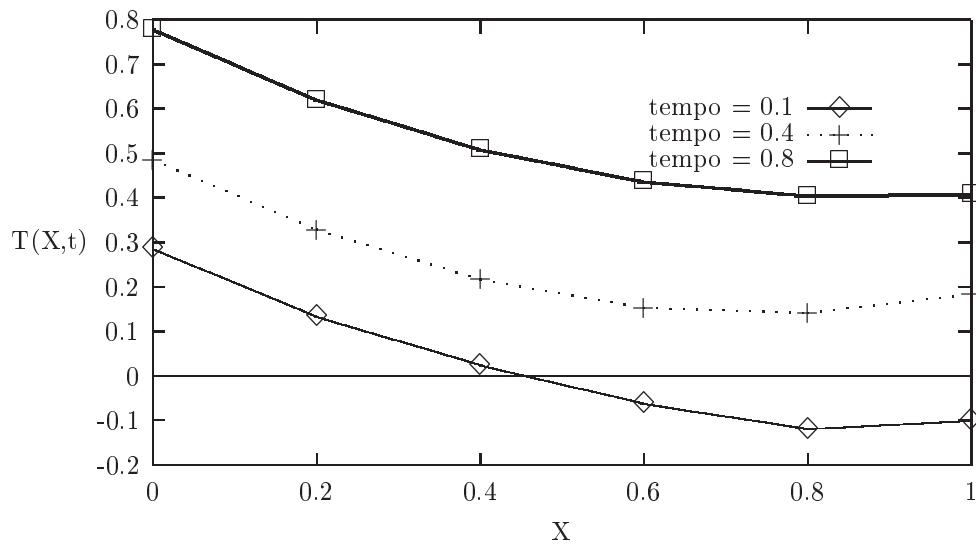


Figura 5.2 – Gráfico da variação da temperatura adimensional em função da coordenada adimensional  $X$  (unidimensional),  $N=50$  e para  $\tau$  (tempos adimensionais) de 0,1, 0,4 e 0,8.

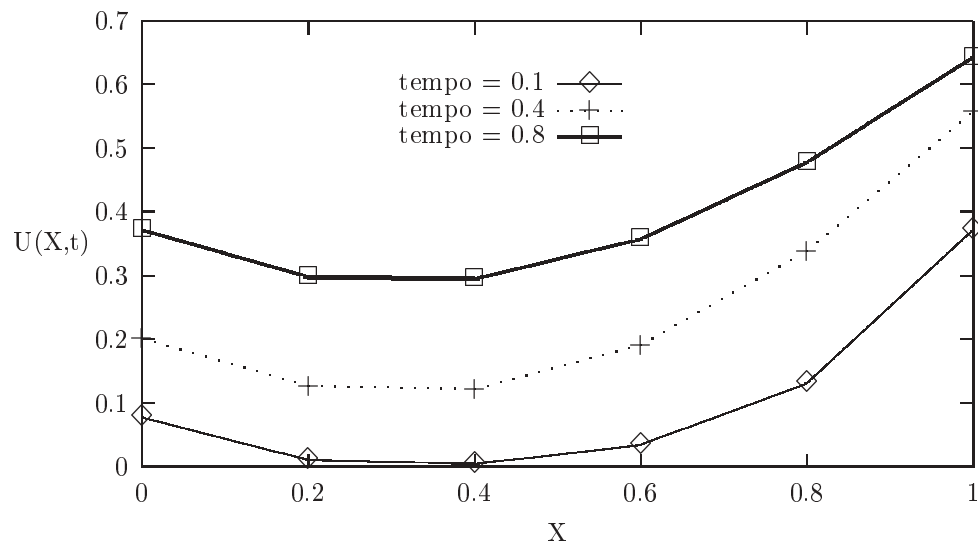


Figura 5.3 – Gráfico da variação da umidade adimensional em função da coordenada adimensional  $X$  (unidimensional),  $N=50$  e para  $\tau$  (tempos adimensionais) de 0,1, 0,4 e 0,8.

No capítulo seguinte, apresentam-se as conclusões do trabalho.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O principal objetivo do trabalho foi obter uma solução, analítica em todas as variáveis, através da utilização da transformada de Laplace no sistema transformado de EDO's resultante da aplicação da GITT aos problemas de transferência de calor e massa em meios porosos capilares, representadas pelas equações de Luikov, transientes, com condições de contorno acopladas e não acopladas, nos casos uni e bidimensional. Assim, elimina-se o caráter híbrido da GITT com o uso da Transformada de Laplace na variável temporal. Na solução resultante, o único erro esperado é o do truncamento do somatório.

As duas formas apresentadas de decompor uma matriz, Schur e Diagonalização, mostraram ser satisfatórias em função da comparação dos resultados com as referências citadas. Com a decomposição de Schur trabalhou-se com ordem de truncamento (N) até 20, por conter um método recursivo que exige disponibilidade de memória computacional. Com a Diagonalização é possível atingir ordem de truncamento (N) maiores, nos casos até 200 (sistemas de ordem 400 x 400). Foram abordados sistemas com autovalores reais e complexos. No caso unidimensional o problema foi também desenvolvido com o uso do software Maple.

O tempo computacional consumido no processamento é menor com a abordagem proposta, comparado com o método híbrido, mostado na seção 4.3, onde implementa-se a sub-rotina "DIVPAG" do IMSL.

A formulação bidimensional acoplada foi desenvolvida.

Sugere-se como trabalhos a serem futuramente desenvolvidos a implementação dos resultados numéricos para o sistema bidimensional acoplado e o tratamento de sistemas não homogêneos ( $\mathbf{H}(t) \neq 0$ ).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bories, S., 1990. "Recent advances in modelisation of coupled heat and mass transfer in capillary porous bodies (Review)", pages 46–62.

Campos Silva, J., Cotta, R., and Aparecido, J., 1992. "Analytical solutions to simultaneously developing flow inside parallel-plates channel", **Int. J. Heat & Mass Transfer**, vol. 35(4), pp. 887–895.

Correa, E. J., Cotta, R. M., and Orlande, H. R. B., 1997. "On the reduction of computational costs in eigenfunctions expansions of multidimensional diffusion problems", **Int. J. Num. Meth. Heat & Fluid Flow**, vol. 7(7), pp. 675–695.

Cotta, R., 1986a. "Diffusion in media with prescribed moving boundaries:-Application to metals oxidation at high temperatures", **Proc. of the 2nd Latin American Congress of Heat & Mass Transfer**, vol. 1, pp. 502–513.

Cotta, R., 1986b. "Steady-state diffusion with space-dependent boundary condition parameters", **Proc. of the 1 st National Thermal Sciences Meeting - ENCIT-86**, pages 163–166.

Cotta, R., Leiroz, A., and Aparecido, J., 1992a. "Steady-state diffusion problems with variable equation coefficients", **Int. J. Heat & Technology**, vol. 10(3-4), pp. 104.

Cotta, R., Perez Guerrero, J. S., and Scofano Neto, F., 1992b. "Hybrid solution of the incompressible Navier-Stokes equation via integral transformation", **Proc. of the 2nd Int. Conf. Advanced Computational Methods in Heat Transfer - Heat Transfer 92**, vol. 1, pp. 735–750.

Cotta, R. and Santos, C., 1992. "Transient diffusion problems with time-dependent boundary condition coefficients", **J. Eng. Physics**, vol. 6(5), pp. 1411–1418.

Cotta, R., Serfaty, R., and Guedes, R., 1990. "Integral transform solution of a class of transient convection-diffusion problems", **Proc. of the Int. Conf. on Advances Computational Methods in Heat Transfer - Heat Transfer 90**, vol. 1, pp. 239–250.

Cotta, R. M., 1993. **"Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow"**. CRC Press, Boca Raton-USA.

Cotta, R. M., 1998. **"The Integral Transform Method in Thermal & Fluids , Sciences & Engineering"**. Begell House Inc., New York - USA.

Cotta, R. M. and Mikhailov, M., 1997. **"Heat Conduction : Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation"**. John Wiley, New York.

da Silva, E. F., 1994. **"Transformação Integral das Equações de Camada Limite em Convecção Interna nas Formulações Função Corrente e Variáveis Primitivas"**, Dissertação de mestrado, PEM/COOPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Dantas, L. B., 2000. **"Comparação de técnicas de solução e estimativa de parâmetros para a formulação de Luikov em meios porosos capilares"**, Tese de doutorado, PEM/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Dantas, L. B. and Orlande, H. R. B., 1998. "Heat conduction in plastic encapsulated chips", **The Integral Transform Method in Thermal & Fluids , Sciences & Engineering**, vol. .

Datta, B. N., 1995. **"Numerical Linear Algebra and Applications"**. Brooks/Cole Publishing Co, Pacific Grove - USA.

DeVries, D. and Philip, J., 1957. "Moisture movement in porous materials under temperature gradients", **Trans. Am. Geophys. Union**, vol. 38, pp. 222–232.

Duarte, J. B. and Ribeiro, J., 1998. "Generalized Integral Transform Solution of 3-D Luikov Problems", **Advanced Computational Methods in Heat Transfer V - Computational Mechanics Publications**, pages 439–448.



Duarte, J. B., Ribeiro, J., and Cotta, R., 1995. "An integral transform solution of two-dimensional drying of moisture porous media", **Proc. of the 3 rd Int. Congress on Industrial and Applied Mathematics, ICIAM 95**.

Duarte, J. B., Ribeiro, J. W., and Pandey, R. N., 1999. "Heat and mass transport mechanisms in 3D capillary medium", **XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM99**.

Duarte, J. B. F., 1995. "**Solução Numérica da Difusão de Calor e Massa em Meios Bidimensionais Capilares Porosos**", Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil.

Duarte, J. B. F., 1998. "**Abordagem Analítico-Numérica em Meios Multidimensionais Capilares Porosos**", Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil.

Eckert, E., 1988. "Heat transfer - a review of 1987 literature", **Int. J. Heat & Mass Transfer**, vol. 31(12), pp. 2401–2488.

Faddeev, D. and Faddeeva, V., 1963. "**Computational Method of Linear Algebra**". W.H. Freeman and Company, San Francisco - USA.

Fortes, M., 1978. "**A non-equilibrium thermodynamics approach to transport phenomena in capillary-porous media with special reference to drying of grains and foods**", Tese de doutorado, Purdue University, Purdue, EUA.

Fortran90, 1990. "**Microsoft Fortran Powerstation**". Number versão 4.0.

Fulford, G., 1969. "A survey of recent Soviet research on the drying of solids", **Can. J. Chem. Eng.**, vol. 47, pp. 378–391.

Guigon, S., Dantas, L., Scofano Neto, F., and Cotta, R., 1999. "Exact solution of Luikov's equations for drying in capillary porous media", **Hybrid Methods in Engineering**, vol. 1(4), pp. 365–387.

Krischer, O., 1942. "**Der warme-und stoffaustausch im trocknungsgut**". VDI-Forschungsheft.

Leal, M. A., 1996. "**Convecção Natural em Cavidades para Regimes Permanente e Transiente - O Método de Transformação Integral**", Tese de doutorado, PEM/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Library, I., 1997. "**MATH - LIB**". Houston - Texas.

Lima, J. A., 1995. "**Solução das Equações de Navier-Stokes médias para escoamento turbulento via transformação integral**", Dissertação de mestrado, PEM/COOPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Liu, J. Y., 1991. "Drying of porous materials in a medium with variable potentials", **J. Heat Transfer**, vol. 133, pp. 757–762.

Liu, J. Y. and Cheng, S., 1991. "Solutions of Luikov equations of heat and mass transfer in capillary-porous bodies", **Int. J. Heat & Mass Transfer**, vol. 34(7), pp. 1747–1754.

Lobo, P., 1988. "**On the solution of a nonlinear combined heat and mass transfer problems**", Tese de doutorado, North Carolina State University, Raleigh, EUA.

Lobo, P., Mikhailov, M., and Özisik, M., 1987. "On the complex eigenvalues of Luikov system of equations", **Drying Technology**, vol. 5(2), pp. 273–286.

Luikov, A., 1975a. "Heat and mass transfer bibliography - Soviet works", **Int. J. Heat & Mass Transfer**, vol. 18, pp. 151–158.

Luikov, A., 1975b. "System of differential equations of heat and mass transfer in capillary porous bodies (Review)", **Int. J. Heat & Mass Transfer**, vol. 18, pp. 1–14.

Luikov, A. V., 1966. "**Heat and Mass Transfer in Capillary-Porous Bodies**". Pergamon Press, Oxford - UK.

Macedo, E. N., Cotta, R. M., and Orlande, H. R. B., 1999. "Local-instantaneous filtering in the integral transform solution of non-linear diffusion problems", **Computational Mechanics**, vol. 23, pp. 524–532.

Machado, H. and Cotta, R. M., 1995. "Integral transform method for boundary layer equation in simultaneous heat and fluid flow problems", **Int. J. Num. Meth. Heat and Fluid Flow**, vol. 5, pp. 225–237.

Machado, H. A., 1998. "**Soluções em Convecção Térmica com Propriedades Variáveis via Transformação Integral**", Tese de doutorado, PEM/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Martynenko, O., 1988. "Heat and mass transfer bibliography - Soviet works", **Int. J. Heat & Mass Transfer**, vol. 31(12), pp. 2488–2503.

Massarani, G., 1988. "Aspectos da fluidodinâmica em meios porosos", **Revista Brasileira de Engenharia**.

Mikhailov, M. and Özisik, M. N., 1984. "**Unified Analysis and Solution of Heat and Mass Diffusion**". John Wiley, New York.

Mikhailov, M. D. and Shishedjev, B. K., 1975. "Temperature and Moisture Distributions During Contact Drying of a Moist Porous Sheet", **Int. J. Heat & Mass Transfer**, vol. 18, pp. 15–24.

Moyne, C., 1987. "**Transferts couples chaleur-masse lors du sechage: prise en compte du mouvement de la phase gazeuse**", Tese de doutorado, INPL, Lorraine, France.

Pandey, R., Srivastava, S., and Mikhailov, M., 1999. "Solutions of Luikov equations of heat and mass transfer in capillary porous bodies through matrix calculus : a new approach", **Int. J. Heat & Mass Transfer**, vol. 42, pp. 2649–2660.

Perez Guerrero, J. and Cotta, R., 1996. "Benchmark integral transform results for flow over a backward-facing step", **Computer & Fluids**, vol. 25, pp. 527–540.

Perez Guerrero, J., Cotta, R., and Scofano Neto, F., 1993. "Integral transformation of Navier-Stokes equation for incompressible laminar flow in channels", **Proc. of the 8th Conf. Num. Methods in Laminar and Turbulent Flow**, vol. 2, pp. 1195–1206.

Perez Guerrero, J. S. and Cotta, R., 1992. "Integral transform method for Navier-Stokes equation in stream-function only formulation", **Int. J. Num. Meth. In Fluids**, vol. 15, pp. 399–409.

Quaresma, J. N. N., 1997. "**Transformação Integral das equações de Navier-Stokes para escoamentos laminares tridimensionais**", Tese de doutorado, PEM/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Ribeiro, J., Cotta, R., and Mikhailov, M., 1993. "Integral transform solution of Luikov's equation form heat and mass transfer in capillary porous media", **Int. J. Heat & Mass Transfer**, vol. 36(18), pp. 4467–4475.

Ribeiro, J. W., 1992. "**Solução das equações de Luikov para secagem em meios capilares porosos pela técnica da transformada integral**", Tese de doutorado, ITA, São Paulo, Brasil.

Ribeiro, J. W. and Cotta, R. M., 1995. "On The Solution Of Non-Linear Drying Problems In The Capillary Porous Media Through Integral Transformation Of Luikov Equations", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 38, pp. 1001–1020.

Rossen, J. and Hayakawa, K., 1977. "Simultaneous heat and moisture transfer in dehydrated food: - a review of theoretical models", **Symp. Series of the AIChE**, vol. 163, pp. 71–81.

Santos, C., Cotta, R., and Özisik, M., 1988. "Laminar forced convection inside externally finned tubes", **Proc. of the 2 nd National Thermal Sciences Meeting - ENCIT-88**, pages 87–90.

Scofano Neto, F. and Cotta, R., 1992a. "Counterflow double-pipe heat exchanger analysis through a mixed lumped-differential formulation", **Int. J. Heat Transfer**, vol. 35(7), pp. 1723–1731.

Scofano Neto, F. and Cotta, R., 1992b. "Lumped-differential analysis of concurrent flow double-pipe heat exchanger", **Can. J. Chem. Eng.**, vol. 70, pp. 592–595.

Serfaty, R. and Cotta, R., 1990. "Integral transform solutions of diffusion problems with nonlinear equation coefficients", **Int. Comm. Heat & Mass Transfer**, vol. 17(6), pp. 852–864.

Thum, R., Barichello, B., Vilhena, M., and Cotta, R., 1998. "Solução do problema de Luikov por Transformada Integral (GITT) e Transformada de Laplace", **Proc. of the 7 th National Thermal Sciences Meeting - ENCIT-98**, vol. 1, pp. 43–46.

Thum, R., Barichello, L., Vilhena, M., and Cotta, R., 2001. "An Analytical Approach to the Solution of Multidimensional Drying Problems", **Proc. of the 2 th International Conference on Computational Heat and Mass Transfer - em CD**, vol. 3(2), pp. 68.

Vilhena, M. and Barichello, L., 1999. "A closed-form Solution to the One Dimensional Linear and Nonlinear Problem in Radiative Transfer", **Hybrid Methods in Engineering**, vol. 1(1), pp. 1–17.

Whitaker, S., 1977. "Simultaneous heat, mass and momentum transfer in porous media : a theory of drying", **Advances in Heat Transfer**, vol. 13, pp. 119–203.

Özisik, M. and Murray, R., 1974. "On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Condition Parameters", **J. Heat Transfer**, vol. 96C, pp. 48–51.

Özisik, M. N., 1980. "**Heat Conduction**". John Wiley, New York - USA.

## APÊNDICE I

### OBTENÇÃO DOS POTENCIAIS NA FRONTEIRA EM FUNÇÃO DOS POTENCIAIS TRANSFORMADOS

Parte-se das equações

$$\begin{aligned}
 & \frac{d\bar{\theta}_{1H_{in}}}{d\tau} + (\mu_i^2 + \sigma_n^2 K^2) \left( \alpha \bar{\theta}_{1H_{in}} - \beta \sum_j \sum_m A_{ij} C_{mn} \bar{\theta}_{2H_{jm}} \right) = \\
 & K^2 \frac{\Omega_n(1)}{N_n^{1/2}} \left\{ [\alpha(1-\varepsilon) KoLu^*Bim - \beta(Biq - Bim^*)] \int_0^1 \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \theta_{2H}(X, 1, \tau) dX \right. \\
 & + \beta PnBiq \int_0^1 \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \theta_{1H}(X, 1, \tau) dX + (1-\varepsilon) KoLuBim \int_0^1 \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \theta_{2S}(X, 1) dX \left. \right\} \\
 & + \beta Bix \frac{\Psi_i(1)}{N_i^{1/2}} \left\{ Pn \int_0^1 \frac{\Omega_n(Y)}{N_n^{1/2}} \theta_{1H}(1, Y, \tau) dY - \int_0^1 \frac{\Omega_n(Y)}{N_n^{1/2}} \theta_{2H}(1, Y, \tau) dY \right\},
 \end{aligned} \tag{I.1}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \frac{d\bar{\theta}_{2H_{jm}}}{d\tau} + (\lambda_j^2 + \eta_m^2 K^2) \left( Lu \bar{\theta}_{2H_{jm}} - LuPn \sum_i \sum_n A_{ij} C_{mn} \bar{\theta}_{1H_{in}} \right) = \\
 & -LuPnK^2 \frac{\Xi_m(1)}{N_m^{1/2}} \left\{ Bim^* \int_0^1 \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \theta_{1H}(X, 1, \tau) dX \right. \\
 & + (1-\varepsilon) KoBim \left[ Lu^* \int_0^1 \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \theta_{2H}(X, 1, \tau) dX + Lu \int_0^1 \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \theta_{2S}(X, 1) dX \right] \left. \right\}.
 \end{aligned} \tag{I.2}$$

Observa-se algumas relações importantes. As EDP's,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \theta_{1H} = \alpha \left[ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \theta_{1H} + K^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \theta_{1H} \right] - \beta \left[ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \theta_{2H} + K^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \theta_{2H} \right], \tag{I.3}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \theta_{2H} = Lu \left[ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \theta_{2H} + K^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \theta_{2H} \right] - LuPn \left[ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \theta_{1H} + K^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \theta_{1H} \right]. \tag{I.4}$$

As condições de contorno em  $X = 1$ ,

$$\frac{\partial \theta_{1H}}{\partial X}(1, Y, \tau) + Bi_x \theta_{1H}(1, Y, \tau) = 0, \quad (\text{I.5})$$

e

$$\frac{\partial \theta_{2H}}{\partial X}(1, Y, \tau) = Pn \frac{\partial \theta_{1H}}{\partial X}(1, Y, \tau), \quad (\text{I.6})$$

As condições de contorno em  $Y = 1$ ,

$$\frac{\partial \theta_{1H}}{\partial Y}(X, 1, \tau) + Biq \theta_{1H}(X, 1, \tau) = (1 - \varepsilon) KoLuBim \theta_{2H}(X, 1, \tau) + (1 - \varepsilon) KoLuBim \theta_{2S}(X, 1), \quad (\text{I.7})$$

e

$$\frac{\partial \theta_{2H}}{\partial Y}(X, 1, \tau) + Bim \theta_{2H}(X, 1, \tau) = -Pn Biq \theta_{1H}(X, 1, \tau). \quad (\text{I.8})$$

As condições de contorno para  $X = 0$  e  $Y = 0$  são iguais a zero.

$$\alpha - Pn\beta = 1 \quad (\text{I.9})$$

$$A_{ij} = \int_0^1 \frac{\Psi_i(X) \Gamma_j(X)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dX, \quad (\text{I.10})$$

$$C_{mn} = \int_0^1 \frac{\Omega_n(Y) \Xi_m(Y)}{M_n^{1/2} M_m^{1/2}} dY. \quad (\text{I.11})$$

$$\bar{f}_i = \int_0^1 \frac{\Psi_i(x)}{N_i^{1/2}} dx, \quad (\text{I.12})$$

$$\bar{f}_j^* = \int_0^1 \frac{\Gamma_j(x)}{N_j^{1/2}} dx, \quad (\text{I.13})$$

$$\bar{g}_n = \int_0^1 \frac{\Omega_n(y)}{M_n^{1/2}} dy, \quad (\text{I.14})$$

$$\bar{g}_m^* = \int_0^1 \frac{\Xi_m(y)}{M_m^{1/2}} dy. \quad (\text{I.15})$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{1H}}{\partial X^2} = \sum_i^\infty \sum_n^\infty -\mu_i^2 \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \frac{\Omega_n(Y)}{M_n^{1/2}} \bar{\bar{\theta}}_{1H_{in}}(\tau) \quad (\text{I.16})$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{2H}}{\partial X^2} = \sum_j^\infty \sum_m^\infty -\lambda_j^2 \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \frac{\Xi_m(Y)}{M_m^{1/2}} \bar{\bar{\theta}}_{2H_{jm}}(\tau) \quad (\text{I.17})$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{1H}}{\partial Y^2} = \sum_i^\infty \sum_n^\infty -\sigma_n^2 \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \frac{\Omega_n(Y)}{M_n^{1/2}} \bar{\bar{\theta}}_{1H_{in}}(\tau) \quad (\text{I.18})$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{2H}}{\partial Y^2} = \sum_j^\infty \sum_m^\infty -\eta_m^2 \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \frac{\Xi_m(Y)}{M_m^{1/2}} \bar{\bar{\theta}}_{2H_{jm}}(\tau) \quad (\text{I.19})$$

Então,

$$\int_0^1 \frac{\partial \bar{\bar{\theta}}_{1H_{in}}}{\partial \tau} dY = \sum_i^\infty \sum_n^\infty \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \bar{g}_n \frac{d \bar{\bar{\theta}}_{1H_{in}}}{d\tau} \quad (\text{I.20})$$

$$\int_0^1 \frac{\partial \bar{\bar{\theta}}_{2H_{jm}}}{\partial \tau} dY = \sum_j^\infty \sum_m^\infty \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \bar{g}_m^* \frac{d \bar{\bar{\theta}}_{2H_{jm}}}{d\tau} \quad (\text{I.21})$$

$$\int_0^1 \frac{\partial \bar{\bar{\theta}}_{1H_{in}}}{\partial \tau} dX = \sum_i^\infty \sum_n^\infty \frac{\Omega_n(Y)}{M_n^{1/2}} \bar{f}_i \frac{d \bar{\bar{\theta}}_{1H_{in}}}{d\tau} \quad (\text{I.22})$$

$$\int_0^1 \frac{\partial \bar{\bar{\theta}}_{2H_{jm}}}{\partial \tau} dX = \sum_j^\infty \sum_m^\infty \frac{\Xi_m(Y)}{M_m^{1/2}} \bar{f}_j^* \frac{d \bar{\bar{\theta}}_{2H_{jm}}}{d\tau} \quad (\text{I.23})$$

Os passos são os seguintes:

- integrar a equação I.3 em relação a Y, de 0 a 1, aparecendo os potenciais na fronteira  $[\partial \theta_{1H} / \partial Y (X, 1, \tau)]$  e  $[\partial \theta_{2H} / \partial Y (X, 1, \tau)]$ ;



- isola-se  $[\partial\theta_{1H}/\partial Y (X, 1, \tau)]$  ; integrar a equação I.4 em relação a Y, de 0 a 1, aparecendo os potenciais na fronteira  $[\partial\theta_{1H}/\partial Y (X, 1, \tau)]$  e  $[\partial\theta_{2H}/\partial Y (X, 1, \tau)]$ ;
- isola-se  $[\partial\theta_{2H}/\partial Y (X, 1, \tau)]$ , e substitui  $[\partial\theta_{1H}/\partial Y (X, 1, \tau)]$  na expressão;
- então substitui  $[\partial\theta_{2H}/\partial Y (X, 1, \tau)]$  na expressão inicial de  $[\partial\theta_{1H}/\partial Y (X, 1, \tau)]$ .

Obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta_{1H}}{\partial Y} (X, 1, \tau) &= \frac{1}{K^2} \sum_i^\infty \sum_n^\infty \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \bar{g}_n \frac{d\bar{\theta}_{1H_{in}}}{d\tau} \\ &+ \frac{\beta}{LuK^2} \sum_j^\infty \sum_m^\infty \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \bar{g}_m^* \frac{d\bar{\theta}_{2H_{jm}}}{d\tau} \\ &+ \frac{1}{K^2} \sum_i^\infty \sum_n^\infty \mu_i^2 \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \bar{g}_n \bar{\theta}_{1H_{jm}}, \end{aligned} \quad (I.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta_{2H}}{\partial Y} (X, 1, \tau) &= \frac{Pn}{K^2} \sum_i^\infty \sum_n^\infty \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \bar{g}_n \frac{d\bar{\theta}_{1H_{in}}}{d\tau} \\ &+ \frac{\alpha}{LuK^2} \sum_j^\infty \sum_m^\infty \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \bar{g}_m^* \frac{d\bar{\theta}_{2H_{jm}}}{d\tau} \\ &+ \frac{1}{K^2} \sum_j^\infty \sum_m^\infty \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \bar{g}_m^* \bar{\theta}_{2H_{jm}}. \end{aligned} \quad (I.25)$$

Agora, da mesma maneira :

- integrar a equação I.3 em relação a X, de 0 a 1, aparecendo os potenciais na fronteira  $[\partial\theta_{1H}/\partial X (1, Y, \tau)]$  e  $[\partial\theta_{2H}/\partial X (1, Y, \tau)]$ ;
- isola-se  $[\partial\theta_{1H}/\partial X (1, Y, \tau)]$  ;
- integrar a equação I.4 em relação a X, de 0 a 1, aparecendo os potenciais na fronteira  $[\partial\theta_{1H}/\partial X (1, Y, \tau)]$  e  $[\partial\theta_{2H}/\partial X (1, Y, \tau)]$ ;
- isola-se  $[\partial\theta_{2H}/\partial X (1, Y, \tau)]$ , e substitui  $[\partial\theta_{1H}/\partial X (1, Y, \tau)]$  na expressão;
- então substitui  $[\partial\theta_{2H}/\partial X (1, Y, \tau)]$  na expressão inicial de  $[\partial\theta_{1H}/\partial X (1, Y, \tau)]$ .

Similarmente, obtêm-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta_{1H}}{\partial X}(1, Y, \tau) &= \sum_i \sum_n \bar{f}_i \frac{\Omega_n(Y)}{M_n^{1/2}} \frac{d\bar{\bar{\theta}}_{1H_{in}}}{d\tau} \\
&+ \frac{\beta}{\alpha} \sum_j \sum_m \bar{f}_j^* \frac{\Xi_m(Y)}{M_m^{1/2}} \frac{d\bar{\bar{\theta}}_{2H_{jm}}}{d\tau} \\
&+ K^2 \sum_i \sum_n \sigma_n^2 \bar{f}_i \frac{\Omega_n(Y)}{M_n^{1/2}} \bar{\theta}_{1H_{jm}},
\end{aligned} \tag{I.26}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta_{2H}}{\partial X}(1, Y, \tau) &= Pn \sum_i \sum_n \bar{f}_i \frac{\Omega_n(Y)}{M_n^{1/2}} \frac{d\bar{\bar{\theta}}_{1H_{in}}}{d\tau} \\
&+ \frac{\alpha}{Lu} \sum_j \sum_m \bar{f}_j^* \frac{\Xi_m(Y)}{M_m^{1/2}} \frac{d\bar{\bar{\theta}}_{2H_{jm}}}{d\tau} \\
&+ K^2 \sum_j \sum_m \eta_m^2 \bar{f}_j^* \frac{\Xi_m(Y)}{M_m^{1/2}} \bar{\theta}_{2H_{jm}}.
\end{aligned} \tag{I.27}$$

A partir das relações acima, multiplica-se  $[\partial \theta_{1H} / \partial Y(X, 1, \tau)]$  por  $\Psi_i(X) N_i^{-1/2}$  e integra-se em X, de 0 a 1 :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial \theta_{1H_{in}}}{\partial Y} dX &= \frac{1}{K^2} \sum_i \sum_n \bar{g}_n \frac{d\bar{\bar{\theta}}_{1H_{in}}}{d\tau} \\
&+ \frac{\beta}{Lu} \sum_j \sum_m \bar{g}_m^* A_{ij} \frac{d\bar{\bar{\theta}}_{2H_{jm}}}{d\tau} \\
&+ \frac{1}{K^2} \sum_i \sum_n \mu_i^2 \bar{g}_n \bar{\theta}_{1H_{in}},
\end{aligned} \tag{I.28}$$

e também para  $[\partial \theta_{2H} / \partial Y(X, 1, \tau)]$  :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial \theta_{2H_{jm}}}{\partial Y} dX &= \frac{Pn}{K^2} \sum_i \sum_n \bar{g}_n \frac{d\bar{\bar{\theta}}_{1H_{in}}}{d\tau} \\
&+ \frac{\alpha}{LuK^2} \sum_j \sum_m \bar{g}_m^* A_{ij} \frac{d\bar{\bar{\theta}}_{2H_{jm}}}{d\tau} \\
&+ \frac{1}{K^2} \sum_j \sum_m \lambda_j^2 A_{ij} \bar{g}_m^* \bar{\theta}_{2H_{jm}}
\end{aligned} \tag{I.29}$$

O mesmo procedimento é feito, mudando o elemento multiplicador para  $\Gamma_j(X) N_j^{-1/2}$  e assim :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \frac{\partial \theta_{1H_{in}}}{\partial Y} dX &= \frac{1}{K^2} \sum_i^\infty \sum_n^\infty \bar{g}_n A_{ij} \frac{d\bar{\theta}_{1H_{in}}}{d\tau} \\ &+ \frac{\beta}{LuK^2} \sum_j^\infty \sum_m^\infty \bar{g}_m^* \frac{d\bar{\theta}_{2H_{jm}}}{d\tau} \\ &+ \frac{1}{K^2} \sum_i^\infty \sum_n^\infty \mu_i^2 \bar{g}_n A_{ij} \bar{\theta}_{1H_{in}} \end{aligned} \quad (I.30)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \frac{\partial \theta_{2H_{jm}}}{\partial Y} dX &= \frac{Pn}{K^2} \sum_i^\infty \sum_n^\infty \bar{g}_n A_{ij} \frac{d\bar{\theta}_{1H_{in}}}{d\tau} \\ &+ \frac{\alpha}{LuK^2} \sum_j^\infty \sum_m^\infty \bar{g}_m^* \frac{d\bar{\theta}_{2H_{jm}}}{d\tau} \\ &+ \frac{1}{K^2} \sum_j^\infty \sum_m^\infty \lambda_j^2 \bar{g}_m^* \bar{\theta}_{2H_{jm}} \end{aligned} \quad (I.31)$$

Operando em  $[\partial \theta_{1H} / \partial X (1, Y, \tau)]$  e  $[\partial \theta_{2H} / \partial X (1, Y, \tau)]$ , multiplicando por  $\Omega_n(Y) M_n^{-1/2}$  e integrando em Y, de 0 a 1, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\Omega_n(Y)}{M_n^{1/2}} \frac{\partial \theta_{1H_{in}}}{\partial X} dY &= \sum_i^\infty \sum_n^\infty \bar{f}_i \frac{d\bar{\theta}_{1H_{in}}}{d\tau} \\ &+ \frac{\beta}{\alpha} \sum_j^\infty \sum_m^\infty \bar{f}_j^* C_{nm} \frac{d\bar{\theta}_{2H_{jm}}}{d\tau} \\ &+ K^2 \sum_i^\infty \sum_n^\infty \sigma_n^2 \bar{f}_i \bar{\theta}_{1H_{in}} \end{aligned} \quad (I.32)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\Omega_n(Y)}{M_n^{1/2}} \frac{\partial \theta_{2H_{jm}}}{\partial X} dY &= Pn \sum_i^\infty \sum_n^\infty \bar{f}_i \frac{d\bar{\theta}_{1H_{in}}}{d\tau} \\ &+ \frac{\alpha}{Lu} \sum_j^\infty \sum_m^\infty \bar{f}_j^* C_{nm} \frac{d\bar{\theta}_{2H_{jm}}}{d\tau} \\ &+ K^2 \sum_j^\infty \sum_m^\infty \eta_m^2 C_{nm} \bar{f}_j^* \bar{\theta}_{2H_{jm}} \end{aligned} \quad (I.33)$$

Utilizando-se as condições de contorno I.5, I.6, I.7 e I.8 obtêm-se três sistemas li-

neares, cada um deles composto por duas equações, com duas incógnitas a determinar ( no caso as integraais dos potenciais na fronteira ).

Assim,

$$\int_0^1 \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial \theta_{1H_{in}}(X, 1, \tau)}{\partial Y} dX = -Biq \int_0^1 \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \theta_{1H_{in}}(X, 1, \tau) dX$$

$$+ (1 - \varepsilon) KoLuBim \left[ \int_0^1 \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \theta_{2H_{jm}}(X, 1, \tau) dX + \int_0^1 \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \theta_{2S}(X, 1) dX \right], \quad (I.34)$$

e

$$\int_0^1 \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial \theta_{2H_{jm}}(X, 1, \tau)}{\partial Y} dX = -PnBiq \int_0^1 \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \theta_{1H_{in}}(X, 1, \tau) dX$$

$$- Bim^* \int_0^1 \frac{\Psi_i(X)}{N_i^{1/2}} \theta_{2H_{jm}}(X, 1, \tau) dX \quad (I.35)$$

E também,

$$\int_0^1 \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \frac{\partial \theta_{1H_{in}}(X, 1, \tau)}{\partial Y} dX = -Biq \int_0^1 \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \theta_{1H_{in}}(X, 1, \tau) dX$$

$$+ (1 - \varepsilon) KoLuBim \left[ \int_0^1 \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \theta_{2H_{jm}}(X, 1, \tau) dX + \int_0^1 \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \theta_{2S}(X, 1) dX \right] \quad (I.36)$$

e

$$\int_0^1 \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \frac{\partial \theta_{2H_{jm}}(X, 1, \tau)}{\partial Y} dX = -PnBiq \int_0^1 \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \theta_{1H_{in}}(X, 1, \tau) dX$$

$$- Bim^* \int_0^1 \frac{\Gamma_j(X)}{N_j^{1/2}} \theta_{2H_{jm}}(X, 1, \tau) dX \quad (I.37)$$

Mas, em

$$\int_0^1 \frac{\Omega_n(Y)}{M_n^{1/2}} \frac{\partial \theta_{1H_{in}}(1, Y, \tau)}{\partial X} dY = -Bix \int_0^1 \frac{\Omega_n(Y)}{M_n^{1/2}} \theta_{1H_{in}}(1, Y, \tau) dY \quad (I.38)$$

e

$$\int_0^1 \frac{\Omega_n(Y)}{M_n^{1/2}} \frac{\partial \theta_{2H_{jm}}(1, Y, \tau)}{\partial X} dY = -PnBix \int_0^1 \frac{\Omega_n(Y)}{M_n^{1/2}} \theta_{1H_{in}}(1, Y, \tau) dY \quad (I.39)$$

não foi possível determinar, desta maneira,  $\int_0^1 \Omega_n(Y) M_n^{-1/2} \theta_{2H_{jm}}(1, Y, \tau) dY$ .

Então, por outro processo, tem-se

$$\int_0^1 \frac{\Omega_n(Y)}{M_n^{1/2}} \theta_{2H_{jm}}(1, Y, \tau) dY = \sum_j \sum_m \left( P_j^* C_{nm} + \bar{f}_j^* \right) \bar{\theta}_{2H}(\tau) \quad (\text{I.40})$$

O passo seguinte é substituir as expressões de :

- $\int_0^1 \Psi_i(X) N_i^{-1/2} \theta_{1H_{in}}(X, 1, \tau) dY,$
- $\int_0^1 \Psi_i(X) N_i^{-1/2} \theta_{2H_{jm}}(X, 1, \tau) dY,$
- $\int_0^1 \Gamma_j(X) N_j^{-1/2} \theta_{1H_{in}}(X, 1, \tau) dY,$
- $\int_0^1 \Gamma_j(X) N_j^{-1/2} \theta_{2H_{jm}}(X, 1, \tau) dY,$
- $\int_0^1 \Omega_n(Y) M_n^{-1/2} \theta_{1H_{in}}(1, Y, \tau) dY$

e a expressão de I.40 nas equações I.1 e I.2.

Chega-se então nas equações (4.88) e (4.89). q.e.d.

## Rev-Bib

[Luikov, 1975b], [Mikhailov e Özisik, 1984]),

[Krischer, 1942], [DeVries e Philip, 1957] e [Luikov, 1966], onde

[Luikov, 1975a]

[Whitaker, 1977], [Rossen e Hayakawa, 1977], [Fortes, 1978], [Moyné, 1987], [Lobo, 1988], [Eckert, 1988], [Martynenko, 1988], [Massarani, 1988] e [Bories, 1990].

[Özisik e Murray, 1974], [Mikhailov e Shishedjev, 1975]

[Cotta e Mikhailov, 1997]. [Dantas, 2000], [Lima, 1995] [Perez Guerrero e Cotta, 1996] [Leal, 1996] [Quaresma, 1997] [Machado, 1998] citeL:Cotta:1998. [Correa et al., 1997], [Machado, 1998], [Dantas e Orlande, 1998]). [Guigon et al., 1999]. [Lobo et al., 1987] [Liu e Cheng, 1991], [Dantas, 2000] [Liu, 1991] [Ribeiro et al., 1993] [Ribeiro e Cotta, 1995] [Duarte et al., 1995] [Duarte e Ribeiro, 1998], [Duarte et al., 1999] [Guigon et al., 1999] [Pandey et al., 1999],

## Form-Mat

[Ribeiro e Cotta, 1995], [Lobo et al., 1987]; [Ribeiro et al., 1993]; [Dantas, 2000]). [Ribeiro e Cotta, 1995] [Vilhena e Barichello, 1999],

## Bidimen

[Özisik, 1980]. [Thum et al., 1998], [Duarte, 1995]. [Duarte et al., 1995] e [Thum et al., 1998], [Duarte, 1995], [Duarte, 1995] e [Duarte, 1998]. [Thum et al., 2001]

## Uni-D

[Ribeiro et al., 1993], [Mikhailov e Özisik, 1984]. [Ribeiro et al., 1993].