

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**MODELO DA LIGAÇÃO ENTRE CONCRETO E ARMADURA NA ANÁLISE DE
ESTRUTURAS DE CONCRETO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Mauren Aurich

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de
Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
para obtenção do título de *Mestre em Engenharia*.

Área de concentração: Estruturas

Porto Alegre

2001

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada na sua forma final pelo Orientador e pelo Programa de Pós-Graduação.

Prof. Américo Campos Filho
Orientador

Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Américo Campos Filho (Orientador)
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Prof. Mauro de Vasconcellos Real
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal
PhD. pela North Carolina State University

Prof. Luiz Carlos Pinto da Silva Filho
PhD. pela University of Leeds

Dedico esta dissertação a
meus pais, Egon e Magda, pelo
incentivo, paciência e amor
imensuráveis.

*“Olhe com o entendimento, descubra o que você
já sabe, e verá como voar”
R. Bach*

AGRADECIMENTOS

Desejo externar meu sincero reconhecimento e agradecimento por todo apoio que me foi dispensado no decorrer deste período de estudo, apoio este, imprescindível para a realização desta dissertação.

Agradeço ao Professor Américo Campos Filho a sua orientação. Seus valiosos ensinamentos, dedicação, colaboração e amizade foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos Professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS pelos ensinamentos ministrados durante o curso, e aos funcionários pelo auxílio e colaboração.

Aos amigos Marcus Vinicius Cerutti e Karen Ferreira Cerutti, obrigada pelo estímulo à realização deste trabalho, pelo apoio e pela amizade incondicionais dispensados neste período.

Aos Professores Almir Schäffer e Maria Regina Leggerini, agradeço os ensinamentos, o apoio e a amizade.

Ao colega Andriei José Beber agradeço o interesse, amizade e apoio prestados durante a elaboração desta dissertação.

Às amigas Letícia Fleck Wirth, Gabriela Maluf Medero e Sabrina Dalanhil Ballestrin Correa, obrigada pela força, pelo carinho e pela amizade. E aos colegas do curso de mestrado André Luís Rossa, Alessandra Dantas e Fabiana Camargo pelo companheirismo.

De forma muito especial agradeço a minha família, vó Ilza, Taís, Dindo e Dinda, Dri, Angela, Déa, Tio Léo, Inez, Lú e vó Elvira, pela paciência, apoio e amor.

E, a Deus, por iluminar meu caminho.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS.....	ix
LISTA DE FIGURAS.....	xiii
RESUMO.....	xvi
ABSTRACT.....	xvii

CAPÍTULO 1 – Introdução

1.1 HISTÓRICO.....	1
1.1.1 Armadura.....	5
1.1.2 Aderência.....	6
1.1.3 Fissuração.....	6
1.1.4 Concreto à compressão.....	7
1.2 OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA DO TRABALHO.....	8
1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO.....	8

CAPÍTULO 2 – Modelo para um Material Elasto-Viscoplástico

2.1 MODELOS REOLÓGICOS.....	10
2.2 COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO.....	13
2.2.1 Formulação do comportamento elasto-viscoplástico.....	14
2.2.1.1 Incremento de deformação viscoplástica.....	16
2.2.1.2 Incremento de tensão.....	17
2.2.1.3 Equações de equilíbrio.....	17
2.2.2 Modelo de camadas.....	19
2.3 IMPLEMENTAÇÃO DAS ETAPAS DE SOLUÇÃO.....	21

CAPÍTULO 3 – Modelo de elementos finitos para o concreto armado

3.1 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO.....	23
3.1.1 Elemento linear.....	23
3.1.2 Elemento quadrático.....	24
3.2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ARMADURA.....	25
3.2.1 Funções de forma para armadura.....	27
3.2.2 Formulação geométrica.....	28
3.2.3 Segmentos de armadura no interior de um elemento de concreto.....	32
3.3 MATRIZ DE RIGIDEZ PARA O ELEMENTO DE CONCRETO ARMADO.....	38

CAPÍTULO 4 – Modelos Constitutivos dos Materiais

4.1 MODELO ELASTOPLÁSTICO PARA O CONCRETO.....	46
4.1.1 Modelo para o concreto comprimido.....	46
4.1.1.1 Critério de ruptura.....	46
4.1.1.2 Critério de plastificação para o concreto.....	49
4.1.1.3 Regra de endurecimento.....	50
4.1.1.4 Vetor de fluxo plástico.....	51
4.1.2 Modelo para o concreto fissurado.....	53
4.1.2.1 Critério de fissuração.....	55
4.1.2.2 Colaboração do concreto entre as fissuras.....	56
4.1.2.3 Rigidez transversal do concreto fissurado.....	62
4.2 MODELO ELASTOPLÁSTICO PARA O AÇO.....	63
4.3 MODELO PARA AS LÂMINAS DE FIBRA DE CARBONO.....	64
4.4 MODELO VISCOELÁSTICO PARA O CONCRETO.....	65
4.4.1 Fluência.....	67
4.4.2 Retração.....	68
4.5 MODELO DE LIGAÇÃO ENTRE OS MATERIAIS.....	69

CAPÍTULO 5 – Implementação Computacional do Modelo de Aderência

5.1 FORMULAÇÃO DO MODELO.....	72
5.2 MATRIZ DE RIGIDEZ PARA O ELEMENTO DE CONCRETO ARMADO.....	72
5.2.1 Montagem da matriz de rigidez.....	75
5.2.2 Armazenamento da matriz de rigidez.....	76
5.2.3 Deslizamento ao longo de uma barra.....	77
5.3 IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO DE LIGAÇÃO ENTRE OS MATERIAIS.....	78

CAPÍTULO 6 – Aplicações Numéricas

6.1 CORPO DE PROVA ENSAIADO POR GROOT ET AL.....	81
6.2 VIGAS ENSAIADAS POR CAMPAGNOLO ET AL.....	84
6.3 VIGAS ENSAIADAS POR JUVANDES (1998) E SILVA (1999)	89
6.4 VIGAS ENSAIADAS POR BEBER.....	94
6.4.1 Deslocamento vertical na seção central.....	96
6.4.2 Deformação na armadura	98
6.4.3 Deformação no reforço.....	101
6.4.4 Tensão de aderência.....	103

CAPÍTULO 7 – Conclusões e Desenvolvimentos Futuros

7.1 CONCLUSÕES.....	108
7.2 DESENVOLVIMENTOS FUTUROS.....	109

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	110
--	------------

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras romanas maiúsculas:

- A área
- A_C área da seção transversal do concreto
- A_S área da seção transversal da armadura
- B matriz que relaciona deformações e deslocamentos nodais do elemento de concreto
- B_S vetor que relaciona deformações e deslocamentos nodais do elemento de aço
- D matriz constitutiva
- E módulo de elasticidade longitudinal
- E_C módulo de elasticidade longitudinal do concreto
- E_S módulo de elasticidade longitudinal do aço
- E_{μ} módulo de elasticidade longitudinal da camada de concreto
- F força; superfície de plastificação
- G módulo de elasticidade transversal do concreto
- G_C módulo de elasticidade transversal do concreto fissurado
- G_f energia de fratura
- H função de interpolação para o elemento de armadura
- H' taxa de endurecimento do concreto
- I_1 1º invariante do tensor de tensão
- I_1' 1º invariante do tensor de deformação
- J matriz jacobiana; função de fluência
- J_2 2º invariante do tensor desviador de tensão
- J_2' 2º invariante do tensor desviador de deformação

K	matriz de rigidez do elemento de concreto armado
K_c	matriz de rigidez do concreto
K_s	matriz de rigidez do aço
RH	umidade relativa do ar
T	temperatura
V	volume

Letras romanas minúsculas:

e	espessura total do elemento de concreto
e_i	espessura da camada de concreto
f_{cm}	resistência média à compressão do concreto
f_{tm}	resistência média à tração do concreto
f_y	tensão de escoamento da armadura
h	espessura fictícia da seção de concreto
m	número de nós da barra de armadura
n	número de nós do elemento de concreto
ng	número de pontos de integração de Gauss
s	constante que depende do tipo de cimento
t	tempo
u	campo de deslocamento
x	coordenada cartesiana
y	coordenada cartesiana
z	coordenada cartesiana
w	fator de peso

Letras gregas maiúsculas:

Δ incremento

Σ somatório

Π produtório

Letras gregas minúsculas:

α coeficiente; ângulo

β coeficiente; ângulo

γ coeficiente de fluidez do concreto; distorção

γ_s coeficiente de fluidez do aço

δ variação

ε deformação específica total

ε_{cs} deformação por retração do concreto

ε_e deformação elástica

ε_{vp} deformação viscoplástica do concreto

ε_{svp} deformação viscoplástica do aço

η coeficiente de viscosidade; coordenada normalizada

λ parâmetro

ν coeficiente de Poisson

ξ coordenada normalizada

σ tensão normal no concreto

σ_{ef} tensão efetiva no concreto

σ_o tensão uniaxial de plastificação inicial

- σ_s tensão normal na armadura
- τ tensão tangencial no concreto
- τ_μ tempo de relaxação da camada de concreto
- ϕ diâmetro da barra de armadura; coeficiente de fluência
- χ coordenada normalizada
- ξ coordenada normalizada
- φ forças residuais

Símbolos:

- { } vetor coluna
- ⟨ ⟩ vetor linha
- [] matriz
- []^T matriz transposta
- []⁻¹ matriz inversa

LISTA DE FIGURAS

2.1 Modelo elástico.....	10
2.2 Modelo plástico.....	11
2.3 Modelo viscoso.....	11
2.4 Modelos elastoplásticos.....	12
2.5 Modelo de Maxwell.....	12
2.6 Modelo elasto-viscoplástico.....	13
2.7 Analogia da técnica de camadas em duas dimensões.....	20
2.8 Fluxograma do programa.....	22
3.1 Elemento isoparamétrico linear de 8 nós.....	23
3.1 Elemento isoparamétrico quadrático de 20 nós.....	24
3.3 Modelo discreto.....	26
3.4 Modelo distribuído.....	26
3.5 Modelo incorporado.....	27
3.6 Barra de armadura no interior do elemento de concreto.....	29
3.7 Coordenada ao longo do eixo da armadura.....	30
3.8 Curva de definição da barra de aço.....	33
3.9 P_1 dentro do elemento de concreto.....	36
3.10 P_1 e P_{np} dentro do elemento de concreto.....	36
3.11 Segmento que liga P_1 e P_{np} intercepta o elemento.....	37
3.12 Segmento que liga P_1 e P_{np} não intercepta o elemento.....	37
3.13 Segmento de armadura dentro do elemento de concreto.....	38
4.1 Diagrama carga-deslocamento típico para uma peça fletida de concreto armado.....	45
4.2a Meridianos da superfície de ruptura.....	49
4.2b Seções transversais da superfície de ruptura.....	49
4.3 Superfícies de plastificação e ruptura.....	50
4.4 Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido.....	50
4.5 Modelos alternativos para modelar a fissuração.....	55
4.6 Ilustração do comprimento característico em um volume de controlo prismático.....	58
4.7 Curva tensão-deformação para o concreto tracionado.....	60
4.8 Curva tensão-deformação alternativa para o concreto tracionado.....	61
4.9 Diagrama tensão-deformação para o concreto tipo A.....	63

4.10 Diagrama tensão-deformação para o concreto tipo B.....	64
4.11 Evolução da deformação por fluência para tensão constante aplicada em t'	66
4.12 Curva de deformação por retração.....	67
4.13 Modelo de cadeias Maxwell.....	68
4.14 Relação tensão de aderência-deslizamento.....	69
5.1 Matriz de rigidez para o elemento de concreto armado, com um segmento de armadura em seu interior.....	74
5.2 Matriz de rigidez para o elemento de concreto armado, com n_b segmentos de armadura em seu interior.....	75
5.3 Nós do segmento de armadura no interior de um elemento de concreto.....	76
5.4 (a) (b) e (c) Trechos do arquivo de saída do programa.....	77
5.5 Continuidade da barra de armadura nº 3 ao longo da viga.....	78
6.1 Geometria e carregamento do corpo de prova.....	81
6.2 Malha de elementos finitos.....	82
6.3 Deformação no trecho não confinado das barras do corpo de prova.....	83
6.4 Deformações na armadura, ao longo do trecho de 30 cm, dentro do concreto, para uma carga de 215 kN.....	83
6.5 Tensão de aderência ao longo do trecho de 30 cm para diferentes níveis de carga.....	84
6.6 Geometria e carregamento das vigas V1 e V2.....	85
6.7 Malha de elementos finitos.....	85
6.8 Deslocamento vertical na seção central da viga V1.....	86
6.9 Deformação na armadura da viga V1.....	87
6.10 Deslocamento vertical na seção central da viga V2.....	87
6.11 Deformação na armadura da viga V2.....	88
6.12 Tensão de aderência na interface do reforço com a viga V2.....	88
6.13 Descolamento da chapa na extremidade da viga V2.....	89
6.14 Geometria e carregamento das vigas B6 e B9.....	90
6.15 Malha de elementos finitos.....	90
6.16 Deslocamento vertical na seção central da viga B6.....	91
6.17 Deslocamento vertical na seção central da viga B9.....	91
6.18 Deformação no reforço da viga B9.....	92
6.19 Curva teórico x experimental da tensão de aderência na interface do reforço com ϵ viga B9.....	92
6.20 Tensão de aderência na interface do reforço com a viga B9.....	93
6.21 Descolamento da chapa na extremidade da viga B9.....	93
6.22 Geometria e carregamento das vigas VT e VR.....	94
6.23 Malha de elementos finitos.....	95

6.24 Deslocamento vertical na seção central das vigas testemunhos.....	96
6.25 Deslocamento vertical na seção central das vigas reforçadas com uma camada.....	96
6.26 Deslocamento vertical na seção central das vigas reforçadas com quatro camadas.....	97
6.27 Deslocamento vertical na seção central das vigas reforçadas com sete camadas.....	97
6.28 Deslocamento vertical na seção central das vigas reforçadas com dez camadas.....	98
6.29 Deformação na armadura das vigas testemunho.....	98
6.30 Deformação na armadura das vigas reforçadas com uma camada.....	99
6.31 Deformação na armadura das vigas reforçadas com quatro camadas.....	99
6.32 Deformação na armadura das vigas reforçadas com sete camadas.....	100
6.33 Deformação na armadura das vigas reforçadas com dez camadas.....	100
6.34 Deformação no reforço das vigas reforçadas com uma camada.....	101
6.35 Deformação no reforço das vigas reforçadas com quatro camadas.....	101
6.36 Deformação no reforço das vigas reforçadas com sete camadas.....	102
6.37 Deformação no reforço das vigas reforçadas com dez camadas.....	102
6.38 Tensão de aderência na interface do reforço com a viga reforçada com uma camada.....	104
6.39 Ruptura da viga reforçada com uma camada.....	104
6.40 Tensão de aderência na interface do reforço com a viga reforçada com quatro camadas.....	105
6.41 Ruptura por descolamento na viga reforçada com quatro camadas.....	105
6.42 Tensão de aderência na interface do reforço com a viga reforçada com sete camadas.....	106
6.43 Ruptura por descolamento na viga reforçada com sete camadas.....	106
6.44 Tensão de aderência na interface do reforço com a viga reforçada com dez camadas.....	107
6.45 Ruptura por descolamento na viga reforçada com dez camadas.....	107

RESUMO

Este trabalho apresenta um modelo computacional para análise tridimensional de peças de concreto armado, utilizando o método dos elementos finitos.

São utilizados modelos constitutivos elasto-viscoplásticos para representar o comportamento dos materiais, quando submetidos a cargas de curta ou longa duração. Se a estrutura está submetida a cargas de curta duração, o modelo desenvolvido fornece, quando alcançado o estado estável, a solução do problema elastoplástico. Em contrapartida, se a estrutura está submetida a cargas de longa duração, o modelo pode representar o comportamento viscoelástico com envelhecimento do concreto.

Foi utilizado um modelo de camadas superpostas para assegurar uma representação adequada do comportamento real do concreto ao longo do tempo. Deste modo, admite-se que o concreto é constituído por um número conveniente de camadas, que apresentam a mesma deformação.

Para a fissuração do concreto, utilizou-se um modelo de fissuras distribuídas, que leva em consideração a contribuição do concreto entre fissuras.

O objetivo deste estudo é a modelagem da armadura e do reforço nas peças de concreto armado, através de um modelo de aderência entre o concreto e o material adjacente. A armadura é introduzida no modelo como uma linha de material mais rígido dentro do elemento de concreto. E, a consideração da degradação da aderência é realizada através de um modelo onde os efeitos da aderência imperfeita são incluídos pela introdução de graus de liberdade para os deslocamentos relativos entre os materiais.

Os resultados obtidos com este programa computacional são comparados com valores experimentais disponíveis na literatura, visando validar o modelo matemático e a metodologia numérica.

ABSTRACT

This work presents a computational model for the three dimensional analysis of reinforced concrete structures, using the finite element method.

Elasto-viscoplastic constitutive models are used to represent the materials' behavior, under short-term or long-term loading. If the structure is under short-term loading, the developed model provides the solution of the elasto-plastic problem when it reaches the steady state. On the other hand, if the structure is under long-term loading, the model can represent the concrete viscoelastic behavior with aging.

An overlay model is included to provide an adequate representation of the real concrete behavior at time. Thus, a concrete representation composed by a suitable number of layers, which have the same deformation, is adopted.

A smeared crack model is used for the concrete cracking, which considers the contribution of concrete between cracks (tension stiffening).

The aim of this study is the modeling of reinforcement (and strengthened) in concrete structures through a bond-slip model between the concrete and the adjacent material. The reinforcement is inserted into the model as a stiffer material line inside the concrete element. Also, the consideration of adherence debasement is shown through a new model where the effects of bond-slip are included by introducing bond-slip degrees of freedom for the displacements between the materials.

The results obtained through this computational program are compared with experimental data available in literature, to validate the mathematical model and the numeric methodology.

1 INTRODUÇÃO

Este primeiro capítulo contém um resumo sobre o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos para análise de estruturas de concreto armado, situando esta dissertação no contexto geral do que tem sido realizado nesta área, salientando o objetivo e a importância deste estudo.

Faz-se, também, comentários sobre a organização e os conteúdos que serão abordados neste trabalho.

1.1 HISTÓRICO

O concreto armado é um dos mais importantes materiais de construção da engenharia estrutural. Por concreto armado, entende-se o concreto com barras de aço nele imersas sendo, portanto, um material de construção composto, no qual a aderência entre o concreto e a armadura de aço é devida à adesão química, ao atrito e ao engrenamento mecânico de seus materiais componentes.

Segundo Leonhardt (1977), a cal hidráulica e o cimento pozolânico (de origem vulcânica) já eram conhecidos pelos romanos, desde a antiguidade, como aglomerantes, mas foi a invenção do cimento Portland pelo inglês Joseph Aspdin, no ano de 1824, que deu origem ao desenvolvimento em obras de concreto.

Em meados do século XIX, foram utilizadas pela primeira vez, na França, armaduras de aço em peças de concreto: em 1855, Jean Luis Lambot construiu um barco com argamassa de cimento reforçada com ferro; em 1861 Joseph Monier construiu um vaso de flores de concreto com armadura de arame (concreto Monier); no mesmo ano, François Coignet publicou os princípios básicos para as construções em concreto armado, e apresentou na Exposição Internacional de Paris, em 1867, vigas e tubos de concreto

armado. O americano Willian Ward construiu em Nova Iorque, em 1873, uma casa de concreto armado – o *Ward's Castle* – existente até hoje.

Emil Mörsch (professor na Universidade de Stuttgart, de 1916 até 1948) publicou, em 1902, por incumbência da firma Wayss & Freytag, uma descrição com bases científicas e fundamentadas, do comportamento do “concreto de ferro”. Partindo de resultados de ensaios, desenvolveu a primeira teoria realista sobre o dimensionamento de peças de concreto armado (a expressão “concreto armado” foi introduzida em 1920, em vez de “concreto de ferro”, porque o material empregado é o aço e não o ferro).

Atualmente, o concreto armado é empregado em todos os tipos de construção por suas vantagens. Estas incluem, por exemplo, o fato do mesmo ser facilmente moldável, adaptando-se a qualquer tipo de forma, ser resistente ao fogo, às influências atmosféricas e ao desgaste mecânico, e, principalmente, por ser econômico (matéria prima barata, como areia e brita).

Todavia, o comportamento do material concreto armado é bastante complexo, o que vem a criar dificuldades na análise destas estruturas, devidas, entre vários fatores, à significativa diferença entre as resistências à tração e à compressão do concreto (a resistência à tração é muito inferior à sua resistência à compressão); à aderência imperfeita entre o aço e o concreto adjacente; à não-linearidade da relação tensão-deformação já para níveis de tensão relativamente baixos; aos fenômenos da fluência e retração que dependem, entre outros fatores, da umidade ambiente e das dimensões do elemento estrutural; à fissuração do concreto e à transmissão de esforços através das fissuras.

A análise tradicional de estruturas de concreto é baseada em ensaios de estruturas ou de peças estruturais em laboratórios. Os resultados obtidos nessa forma de análise são limitados e, às vezes, de difícil interpretação. É necessário o desenvolvimento de modelos matemáticos para complementar a análise experimental e possibilitar a generalização dos resultados para diferentes estruturas e formas de carregamento.

O Método dos Elementos Finitos é seguramente o processo numérico que mais tem sido usado para a análise deste tipo de estrutura. A sua larga utilização se deve ao avançado grau de desenvolvimento alcançado pelo método na análise de estruturas de concreto armado, aliada à analogia física direta que se estabelece, com o seu emprego, entre o sistema físico real (a estrutura em análise) e o modelo (malha de elementos finitos).

Através dele pode-se simular numericamente o funcionamento das estruturas de concreto armado.

As primeiras aplicações do método dos elementos finitos a concreto armado remontam cerca de 30 anos atrás. Ngo e Scordelis publicaram, em 1967, um trabalho que incluía o efeito da fissuração em um modelo de elementos finitos de concreto armado. Nos anos que se seguiram a esta primeira aplicação, inúmeros aperfeiçoamentos têm sido realizados nesta área, para a obtenção de uma melhor representação do comportamento não-linear deste material. Aperfeiçoamentos estes realizados, principalmente, na modelagem da fissuração, da aderência entre a armadura e o concreto adjacente, e nos modelos constitutivos tanto da armadura quanto do concreto.

As primeiras formulações do método dos elementos finitos para concreto armado combinaram modelos constitutivos e elementos finitos para a representação da flexão no próprio plano (vigas, vigas paredes e pórticos). As formulações seguintes abrangeram flexão fora do plano do elemento, como é o caso de placas e cascas e, posteriormente, estruturas tridimensionais. Grande parte destes modelos foi idealizada para carregamentos monotônicos, mas com o passar dos anos, os modelos passaram a ser formulados também para carregamentos cíclicos.

Um estudo realizado por Darwin (1991) resume os trabalhos publicados até então, sobre aplicações de elementos finitos ao concreto armado. Neste estudo, observa-se que desde o desenvolvimento dos primeiros modelos computacionais, maior ênfase vem sendo dada à representação do modelo constitutivo do concreto. O trabalho de Darwin discorre a respeito das técnicas utilizadas para a análise de elementos finitos do concreto armado. É apresentada, também, uma tabela que relaciona as ocorrências de uso dos diferentes modelos nos trabalhos consultados, a qual foi transcrita nesta dissertação, na Tab. 1.1.

TABELA 1.1 - Sumário dos Modelos de Elementos Finitos
para Concreto Armado (cont.)

Fissuras distribuídas:
Fissuras ortogonais fixas: 1,2,5,6,8,19,20
Fissuras não ortogonais fixas: 3,7,9,10,11,12,16,18,24
Fissuras que possam girar: 1,2,4,12,13,14,15,20,22,23
Não aplicado: 17,21
Discreta
Modelo constitutivo do concreto à compressão:
Elástico linear: 7,13
Elástico não-linear: 1,2,3,4,5,6,8,11,12,14,15,18,19,20,21,22,23
Elasto-plástico: 9,10,16
Não utilizado: 17,24
Outros:
Importância da malha utilizada: 2,5,6,7,10,11,18
Importância do passo de carga utilizado: 2,7
Critério de convergência utilizado: 2,7

Referências:

- | | |
|---|----------------------------------|
| 1. Balakrishnan e Murray (1988) | 13. Gupta e Maestrini (1989a) |
| 2. Balakrishnan (1988) | 14. Gupta e Maestrini (1989b) |
| 3. Barzegar (1988) | 15. Hu e Schnobrich (1990) |
| 4. Barzegar (1989) | 16. Ignatakis et al. (1989) |
| 5. Bazant, Pan e Pijaudier-Cabot (1987) | 17. Keuser e Mehlhorn (1987) |
| 6. Bazant, Pijaudier-Cabot e Pan (1987) | 18. Kotsovovos (1986) |
| 7. Bédard e Ktsovovos (1985) | 19. Lewinski e Wojewodzki (1991) |
| 8. Cervenka (1985) | 20. Massicotte et al. (1990) |
| 9. Chang et al. (1987) | 21. Murtuza e Cope (1985) |
| 10. Channakeshava e Iyengar (1988) | 22. Stevens et al. (1991) |
| 11. Gajer e Dux (1990) | 23. Vecchio (1989) |
| 12. Gajer e Dux (1991) | 24. Wu et al. (1991) |

1.1.1 Armadura

Técnicas para a representação da armadura foram detalhadas nos trabalhos de alguns autores, como Balakrishnan e Murray (1988), Chang et al. (1987), Gajer e Dux (1990), Keuser e Mehlhorn (1987) e Wu et al. (1991).

As barras de armadura têm capacidade de suportar cargas tanto paralelas quanto perpendiculares ao seu comprimento. Esta capacidade de suportar esforços transversais à armadura é conhecida como “efeito de pino”. Entretanto, nos modelos mais simples, em geral desconsidera-se este efeito, e considera-se o aço como um material de comportamento uniaxial.

As formulações para a inclusão do aço no elemento de concreto dividem-se em três representações: discreta, onde se utilizam elementos de barra para representar a armadura; distribuída, que considera o aço distribuído uniformemente no elemento de concreto; e a incorporada, onde se considera que as barras de armadura são linhas de um material mais rígido no interior dos elementos de concreto.

1.1.2 Aderência

Nos trabalhos estudados por Darwin (1991), todos consideraram a representação do aço e do concreto como materiais distintos e, a maior parte deles (15 trabalhos no total de 24), consideraram como sendo perfeita a aderência entre a armadura e o concreto (Tab. 1.1).

A importância da aderência em estruturas de concreto armado tem sido bastante discutida. Van Miler (1987) observou que a aderência não era importante no estudo do comportamento carga-deslocamento de balanços curtos de concreto armado. Balakrishnan et al. (1988) notou ser muito importante a inclusão da aderência na representação de vigas com ruptura por corte.

Na modelagem do comportamento da aderência em estruturas, as representações tendem a considerá-la através da alteração das propriedades do material, ignorando o efeito do deslizamento relativo entre as barras de armadura e o concreto no cálculo das tensões laterais dentro do concreto, na vizinhança da barra de armadura. Na realidade, a aderência e o deslizamento não são considerados como propriedades dos materiais, mas sim como propriedades estruturais que são controladas pela geometria da estrutura e pelo carregamento atuante. Se a aderência é realmente significativa, como no caso de estudos de ancoragem e reforços estruturais, onde a falta da aderência é o modo de falha dominante, então, é necessário um modelo que represente este comportamento, como o que foi desenvolvido por Choi et al. (1991) para avaliar o desempenho das peças estruturais.

1.1.3 Fissuração

O primeiro modelo de elementos finitos para concreto armado, que incluía os efeitos da fissuração, foi desenvolvido por Ngo e Scordelis (1967), que, em uma análise

elástico-linear de vigas, consideraram a existência de fissuras pré-definidas. Este trabalho foi seguido por um grande número de outros estudos, que também consideraram o mesmo modelo para fissuração (Nilson, 1968).

A necessidade de um modelo de fissuras, que propusesse uma geração automática de fissuras, sem a redefinição da malha de elementos finitos, levou pesquisadores a adotarem o modelo de fissuras distribuídas. Este modelo, implementado por Rashid (1968), representa o concreto fissurado como um material ortotrópico. Após o aparecimento das fissuras (ocorridas quando a tensão de tração excede um valor pré-determinado), o módulo de elasticidade do concreto é reduzido a zero no sentido perpendicular à direção da máxima tensão de tração.

Mais preciso que a representação de fissuras discretas, esse modelo de fissuras distribuídas tem o efeito de representar as fissuras perpendicularmente à direção da tensão principal de tração. Atualmente a maioria dos modelos admite uma completa liberdade na direção das fissuras, ao contrário de alguns modelos mais antigos, que limitavam as fissuras a uma direção pré-selecionada (Scanlon, 1971).

1.1.4 Concreto à compressão

Os primeiros estudos de elementos finitos para concreto armado representaram o concreto como um material com comportamento elástico-linear à compressão. Entretanto, com o desenvolvimento dos trabalhos na área, passou-se à representação do concreto como um material de comportamento não-linear para tensões de compressão. Atualmente, com poucas exceções (ver Tab. 1.1), os modelos de elementos finitos utilizados para estudar o comportamento do concreto armado consideram representações de comportamento não-linear para o concreto submetido à compressão. O estudo de Darwin (1991) mostra que o modelo elástico não-linear é, certamente, o mais utilizado (17 trabalhos, no total de 24, escolheram este modelo para a representação do concreto à compressão). Salienta-se, entretanto, que a escolha do modelo constitutivo do concreto à compressão é consideravelmente menos importante que a escolha do modelo de fissuração ou de representação da armadura.

1.2 OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA DO TRABALHO

O objetivo desta dissertação consiste em desenvolver um modelo para armadura e do reforço em peças de concreto para análise pelo método dos elementos finitos. Para tanto, foi implementado computacionalmente um modelo de aderência entre concreto e aço, ou entre o concreto e o reforço, onde foi considerado o deslizamento relativo entre os dois materiais.

Os modelos geralmente utilizados para a inclusão das barras de armadura em um modelo de elementos finitos para análise de peças de concreto armado, consideram aderência perfeita entre o concreto e o aço. Mas, para níveis de tensão elevados, esta hipótese não é mais válida. Desta forma, se faz necessária a existência de um modelo que considere a degradação da aderência entre o concreto e a armadura. Elwi & Hrudey (1989) apresentaram um modelo onde os efeitos da aderência imperfeita são incluídos pela introdução de graus de liberdade para os deslocamentos relativos entre os materiais.

O programa computacional foi desenvolvido com base em um programa para análise dinâmica, não-linear e transiente de estruturas tridimensionais de concreto armado, apresentado por Hinton (1988). Posteriormente, foram incorporados, por Claire (1994), uma nova representação para a armadura e a determinação dos parâmetros do modelo viscoelástico com envelhecimento do concreto e aperfeiçoados os modelos elastoplásticos para os materiais. Na presente dissertação, o novo modelo de aderência foi implementado na versão de Claire (1994), com base na proposta de Elwi e Hrudey (1989).

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

O presente estudo descreve as etapas envolvidas na resolução do problema da aderência, através da introdução de graus de liberdade para os deslocamentos relativos entre os materiais.

O **capítulo 2** apresenta um modelo de elementos finitos para análise de uma estrutura de material elasto-viscoplástico. Demonstra, também, a aplicação deste modelo

para o estudo de situações com incremento de tempo (material viscoelástico) e com incremento de carga (material elastoplástico).

O **capítulo 3** é dedicado à formulação do modelo de aderência. Apresentam-se os modelos (de elementos finitos) utilizados para o concreto e para a armadura e reforço, e discute-se o procedimento para o cálculo da matriz de rigidez do elemento de concreto armado, considerando-se a inclusão dos novos graus de liberdades referentes à aderência imperfeita.

Os modelos constitutivos utilizados para o concreto, aço e reforço são descritos no **capítulo 4**. Destaca-se como foi realizada a modelagem do comportamento do concreto tracionado e comprimido, bem como o da armadura. Apresenta-se também o modelo de ligação entre os materiais, para a consideração do deslizamento entre os mesmos.

No **capítulo 5**, descreve-se a implementação computacional do modelo de aderência. São discutidos aspectos relacionados à inclusão do grau de liberdade adicional.

Os resultados teóricos do modelo proposto e valores obtidos experimentalmente são confrontados no **capítulo 6**. Estas comparações têm por finalidade validar o modelo numérico implementado.

A presente dissertação se encerra com o **capítulo 7**, onde se apresentam as principais conclusões, bem como sugestões para futuros trabalhos, visando a continuidade e complementação deste estudo.

2 MODELO PARA UM MATERIAL ELASTO-VISCOPLÁSTICO

O concreto armado, por ser um material composto, constituído por concreto e aço, possui um comportamento bastante complexo. Para analisá-lo computacionalmente, se faz necessário o estudo de um modelo teórico que possa representar este comportamento de forma adequada, como será discutido neste capítulo.

2.1 MODELOS REOLÓGICOS

Reologia é o ramo da física que estuda o comportamento dos materiais, através de suas equações constitutivas, relacionando tensões, deformações e tempo.

Os três tipos básicos de comportamentos reológicos são o elástico, o plástico e o viscoso. A combinação desses modelos básicos origina modelos conjugados, que podem representar o comportamento complexo de muitos materiais reais.

Elasticidade é o fenômeno do aparecimento de deformações instantâneas e reversíveis. As deformações aparecem simultaneamente com as tensões correspondentes e permanecem constantes no tempo se as tensões também permanecerem. As deformações elásticas se anulam ao se anularem as tensões que as originaram.

Para um caso de estado uniaxial de tensões, o comportamento elástico pode ser representado por uma mola, conforme ilustrado na Fig. 2.1.



FIGURA 2.1 - Modelo elástico

Para um material elástico linear, as tensões são proporcionais às deformações.

Plasticidade é a propriedade de um material apresentar deformações imediatas e não-reversíveis. Ou seja, as deformações não desaparecem ao serem removidas as forças que lhe deram origem. A tensão de plastificação é o limite a partir do qual surgem deformações permanentes.

Este comportamento pode ser representado por um bloco sobre uma superfície com atrito (“slider”), conforme a Fig. 2.2.



FIGURA 2.2 - Modelo plástico

Viscosidade é o fenômeno do aparecimento de deformações não imediatas. O material, com este comportamento, deforma-se ao longo do tempo quando submetido a uma força. Este comportamento pode ser representado por um amortecedor, como ilustrado na Fig. 2.3. Neste caso, no instante em que é aplicada uma tensão aparece uma velocidade de deformação.

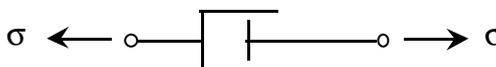


FIGURA 2.3 - Modelo viscoso

Por combinações dos modelos elástico e plástico, obtém-se o modelo elastoplástico. Este apresenta um comportamento elástico para tensões menores que a tensão de plastificação e um comportamento plástico após ser atingida esta tensão.

Neste modelo, chama-se endurecimento por deformação plástica ao aumento da tensão de plastificação com a deformação plástica ϵ_p , sendo caracterizado por sua taxa:

$$H'(\epsilon_p) = \frac{d\sigma}{d\epsilon_p} \quad (2.1)$$

Caso H' seja uma constante, tem-se um material com endurecimento linear. Ambos materiais são representados pelos modelos mecânicos da Fig. 2.4.

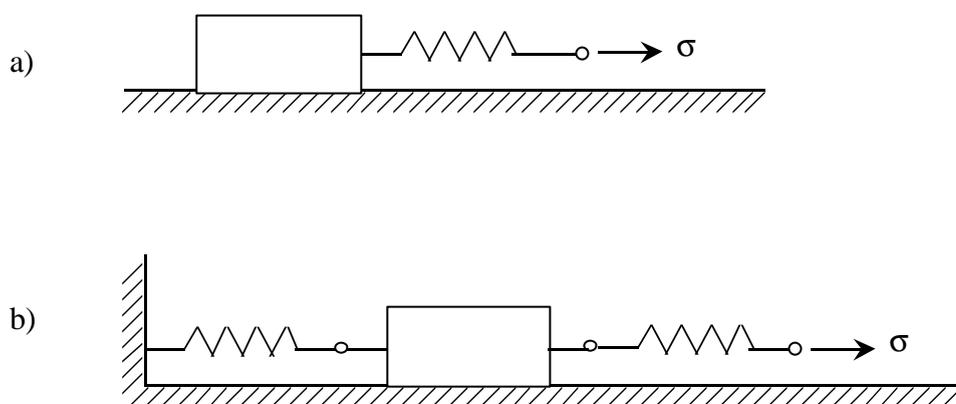


FIGURA 2.4 - Modelos elasto-plásticos

a) perfeito

b) com endurecimento linear

Combinando-se elementos elásticos e viscosos, obtém-se o comportamento viscoelástico, que se caracteriza por apresentar tanto deformações imediatas, como não imediatas. Este trabalho enfoca, em particular, o modelo viscoelástico de Maxwell, representado por uma mola em série com um amortecedor, como pode ser observado na Fig. 2.5.

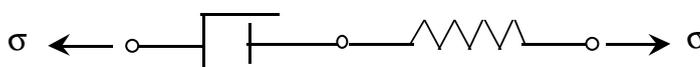


FIGURA 2.5 - Modelo de Maxwell

Um conjunto de elementos de Maxwell em paralelo possibilita a representação do comportamento do concreto sob cargas de serviço.

O comportamento de um material elasto-viscoplástico pode ser representado pelo modelo reológico unidimensional mostrado na Fig. 2.6.

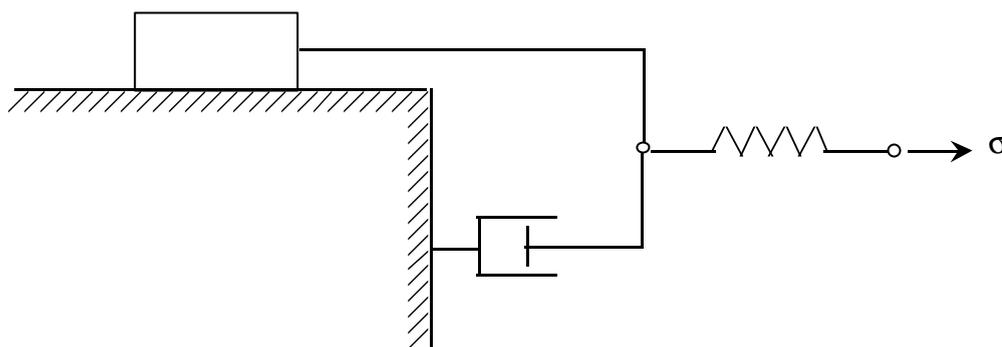


FIGURA 2.6 - Modelo elasto-viscoplástico

A resposta elástica instantânea é proporcionada pela mola linear. Tendo em vista que o amortecedor não sofre deformação instantânea, o elemento de atrito também apresentará deformação nula, pois ambos estão conectados em paralelo. O elemento de atrito torna-se ativo somente se a tensão corrente σ for maior que a tensão de plastificação σ_0 . Este excesso de tensão ($\sigma - \sigma_0$) é absorvido gradativamente pelo amortecedor, caracterizando desta maneira, o comportamento elasto-viscoplástico do material.

2.2 COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO

O programa computacional, desenvolvido neste trabalho, tem por objetivo analisar peças de concreto armado com comportamento elasto-viscoplástico. Como não há dados disponíveis para calibrar um modelo elasto-viscoplástico como um todo, foi necessário dividir o programa em duas etapas distintas.

Numa primeira etapa, faz-se a determinação da resposta da estrutura ao longo do tempo. Calcula-se o estado de deformação da estrutura, decorrido um período de tempo da

aplicação da carga. Há um processo de incremento no tempo real, onde ocorrem os efeitos ao longo do tempo na estrutura (fluência e retração do concreto). Considera-se que a tensão de plastificação é nula. Esta resposta representa um comportamento viscoelástico dos materiais, correspondente à etapa 1 no programa.

Na segunda fase, busca-se determinar a resposta da estrutura para um carregamento instantâneo. Isto é feito mediante a aplicação de um artifício, qual seja, supor a estrutura elasto-viscoplástica e procurar o seu estado de deformação quando o tempo (fictício) tende ao infinito.

Ocorre que, quando o tempo cresce indefinidamente e havendo endurecimento, a diferença de tensão ($\sigma - \sigma_0$), que ia sendo absorvida gradativamente pelo amortecedor vai diminuindo, ou seja, a influência do mesmo vai desaparecendo, ficando o elemento de atrito cada vez mais rígido. Como a parcela de tensão absorvida pelo amortecedor é proporcional à velocidade de deformação viscosa, esta última também começa a diminuir e, conseqüentemente, a deformação vai adquirindo um comportamento assintótico. Este estado estável corresponde à resposta de uma estrutura de comportamento elastoplástico, submetida a um carregamento instantâneo. Esta fase corresponde à etapa 2 do programa.

O programa permite a aplicação de diversos carregamentos, em datas distintas, entre as quais ocorrem os fenômenos decorrentes do tempo. Deste modo, as etapas 1 e 2 são executadas de forma sucessiva, à medida que são aplicadas as cargas nas datas especificadas pelo usuário.

2.2.1 Formulação do comportamento elasto-viscoplástico

Neste item, são apresentados os fundamentos para a formulação matemática de elementos finitos, considerando análise tridimensional não-linear e admitindo o material como sendo isótropico, homogêneo, de comportamento elasto-viscoplástico, conforme o modelo reológico da Fig. 2.6.

O programa básico para solução deste problema encontra-se apresentado em Hinton (1988). A partir deste programa, foram implementados, por Clauere (1994), os diversos modelos utilizados para representação dos materiais deste estudo.

De um modo geral, na formulação usual para problemas contínuos não-lineares, admite-se que as componentes de deformação total, em um dado ponto, são compostas por uma parcela elástica $\{\epsilon_e\}$, e outra viscoplástica $\{\epsilon_{vp}\}$

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_e\} + \{\epsilon_{vp}\} \quad (2.2)$$

ou diferenciando em relação ao tempo t

$$\{\dot{\epsilon}\} = \{\dot{\epsilon}_e\} + \{\dot{\epsilon}_{vp}\} \quad (2.3)$$

As tensões são produzidas unicamente pelas deformações elásticas,

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon_e\} \quad (2.4)$$

onde $[D]$ é a matriz constitutiva do material.

No espaço das tensões, tem-se uma superfície de plastificação expressa genericamente por:

$$F(\{\sigma\}) - F_0(\kappa) = 0 \quad (2.5)$$

onde F_0 é um valor que define a posição da superfície de plastificação, sendo uma função do parâmetro de endurecimento κ . Se $F < F_0$, tem-se um comportamento elástico, se $F = F_0$, plástico, e se $F > F_0$, viscoplástico.

É imperativo estabelecer uma lei específica para determinar as deformações viscoplásticas a partir do estado de tensões. Uma forma explícita para esta lei, conforme Hinton (1988), é

$$\{\dot{\epsilon}_{vp}\} = \gamma(\Phi(F)) \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}}, \text{ para } F > F_0$$

$$\{\dot{\epsilon}_{vp}\} = 0, \text{ para } F \leq F_0 \quad (2.6)$$

na qual

$\gamma = 1 / \eta$ é o coeficiente de fluidez;

$Q = Q(\{\sigma\}, \{\varepsilon_{vp}\}, \kappa)$ é a função de potencial plástico.

A expressão $\langle \Phi(F) \rangle$ é igual a $\Phi(F)$ para valores positivos de F , e é nula para os demais.

Limitando-se ao caso de plasticidade associada, na qual $F \equiv Q$, a equação (2.8) fica

$$\{\varepsilon_{vp}\} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \{a\} \quad (2.7)$$

onde $\{a\}$ é o vetor de fluxo plástico que define a direção do escoamento viscoplástico.

2.2.1.1 Incremento de deformação viscoplástica

A regra de escoamento viscoplástico, expressa em (2.7), é válida para todos os tempos t . Em um procedimento numérico passo por passo, esta relação será satisfeita somente para tempos discretos separados de Δt . A deformação viscoplástica é dada por

$$\{(\varepsilon_{vp})_{n+1}\} = \{(\varepsilon_{vp})_n\} + [(1 - \beta)\{\dot{\varepsilon}_{vp}\}_n + \beta\{\dot{\varepsilon}_{vp}\}_{n+1}]\Delta t_n \quad (2.8)$$

onde o intervalo de tempo é $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$.

Deste modo, o incremento de deformação viscoplástica, dentro de um intervalo, é definido em termos da regra de escoamento viscoplástico nas extremidades do intervalo. Para $\beta = 0$, obtém-se o esquema de integração explícito de Euler, onde apenas a regra de escoamento viscoplástico, no início do intervalo, é relevante

$$\{(\Delta \varepsilon_{vp})_n\} = \{\dot{\varepsilon}_{vp}\}_n \Delta t_n \quad (2.9)$$

Nesta dissertação, utilizou-se este esquema de integração.

2.2.1.2 Incrementos de tensão

Usando a forma incremental de (2.2) e (2.4), obtém-se

$$\{\Delta\sigma_n\} = [D]\{(\Delta\varepsilon_e)_n\} = [D]\left(\{\Delta\varepsilon_n\} - \{(\Delta\varepsilon_{vp})_n\}\right) \quad (2.10)$$

Expressando o incremento de deformação total em termos de incrementos de deslocamentos, têm-se

$$\{\Delta\varepsilon_n\} = [B]\{\Delta u_n\} \quad (2.11)$$

onde $[B]$ é a matriz de relações deformações-deslocamentos e $\{\Delta u_n\}$ é o vetor de incrementos de deslocamentos nas direções ortogonais x, y e z. Usando as equações (2.9) e (2.11), a expressão (2.10) resulta em

$$\{\Delta\sigma_n\} = [D_n] \left([B]\{\Delta u_n\} - \left\{ \left(\dot{\varepsilon}_{vp} \right)_n \right\} \Delta t_n \right) \quad (2.12)$$

2.2.1.3 Equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio a serem satisfeitas, a cada instante de tempo t_n , são

$$\int_V [B]^T \{\sigma_n\} dV - \{P_n\} = 0 \quad (2.13)$$

onde $\{P_n\}$ é o vetor de cargas nodais e nodais equivalentes devido as forças de superfície e de volume. Durante um incremento de tempo, as equações de equilíbrio que devem ser satisfeitas, são dadas pela forma incremental de (2.13), como segue

$$\int_V [B]^T \{\Delta\sigma_n\} dV - \{\Delta P_n\} = 0 \quad (2.14)$$

na qual $\{\Delta P_n\}$ representa a variação nas cargas durante o intervalo de tempo Δt_n . Na maioria dos casos, os incrementos de cargas são aplicados como passos discretos, e então, $\{\Delta P_n\} = 0$ para todos os passos de tempo, exceto para o primeiro dentro de um incremento de carga.

O incremento de deslocamento, ocorrido durante cada passo de tempo Δt_n , pode ser calculado como:

$$\{\Delta u_n\} = [K_n]^{-1} \{\Delta P_n\} \quad (2.15)$$

onde $[K_n]$ é a matriz de rigidez tangente global, dada por

$$[K_n] = \int_v [B]^T [D]_n [B] dV \quad (2.16)$$

$\{\Delta u_n\}$ é o vetor que contém os incrementos dos deslocamentos nodais;

$\{\Delta P_n\}$ é o vetor de incrementos de cargas nodais equivalentes de toda a estrutura no passo n .

Aplicando-se as condições de contorno, determinam-se os incrementos de deslocamentos $\{\Delta u_n\}$, que substituídos em (2.12), dão os incrementos de tensões $\{\Delta \sigma_n\}$. Assim,

$$\begin{aligned} \{\sigma_{n+1}\} &= \{\sigma_n\} + \{\Delta \sigma_n\} \\ \{u_{n+1}\} &= \{u_n\} + \{\Delta u_n\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Usando (2.10) e (2.11) resulta

$$\{(\Delta \epsilon_{vp})_n\} = [B]^T \{\Delta u_n\} - [D]^{-1} \{\Delta \sigma_n\} \quad (2.18)$$

e então

$$\{(\epsilon_{vp})_{n+1}\} = \{(\epsilon_{vp})_n\} + \{(\Delta \epsilon_{vp})_n\} \quad (2.19)$$

As condições de estado estacionário podem ser controladas pelo exame da variação dos deslocamentos nodais. A convergência é atingida quando esta quantidade torna-se adequadamente pequena.

O cálculo do incremento de deslocamento está baseado numa forma linearizada das equações incrementais de equilíbrio (2.15). Portanto, torna-se necessário efetuar correções iterativas sobre Δu , a fim de alcançar o equilíbrio no tempo $t + \Delta t$. Há vários

procedimentos de solução disponíveis para realizar as correções necessárias. Neste trabalho, utiliza-se um procedimento iterativo, que consiste em calcular as forças não equilibradas em cada iteração, e em seguida reaplicá-las na iteração subsequente.

2.2.2 Modelo de Camadas

O modelo reológico, correspondente ao comportamento elasto-viscoplástico, descrito no item 2.1, é constituído por uma mola em série com um elemento formado por um amortecedor viscoso em paralelo com um elemento de atrito (slider). A história de deformação com o tempo (curvas de fluência) de muitos materiais reais, como o concreto, não pode ser precisamente representada por um modelo elasto-viscoplástico tão simples.

Uma resposta de um material mais elaborado pode ser obtida pelo método das camadas superpostas (overlay models), conforme Pande e Owen (1977), no qual o sólido analisado é suposto como sendo composto de várias camadas de materiais simples, cada uma das quais apresentando a mesma deformação. O campo de tensões totais é obtido pela soma das contribuições de cada camada.

Mediante a introdução de um número conveniente de camadas superpostas, com a atribuição de diferentes características materiais a cada uma, pode-se reproduzir fielmente o comportamento experimental de materiais complexos como o concreto.

No caso mais geral, o modelo reológico é formado por um conjunto de elementos tipo Maxwell em paralelo. Tem-se como parâmetros as espessuras das camadas e_i , os módulos de elasticidade das molas E_i , as constantes dos amortecedores γ_i e as tensões de escoamento F_{0i} , nas quais começam a atuar os elementos de atrito. A maior dificuldade reside na determinação dos parâmetros para ajustar o modelo ao comportamento experimental do material.

Neste trabalho, aplicar-se-á o modelo de camadas superpostas para representar o comportamento viscoelástico com envelhecimento do concreto. Na Fig. 2.7 ilustra-se, esquematicamente, a situação de um modelo de camadas superpostas em duas dimensões.

Cada camada do modelo pode ter uma espessura e um comportamento material diferentes. Como os nós em todas as camadas coincidem, em cada uma delas tem-se a mesma deformação. Isto resulta em um campo de tensões $\{\sigma_i\}$ diferente em cada camada.

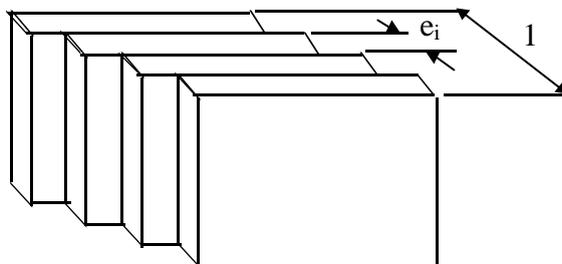


FIGURA 2.7 - Analogia da técnica de camadas em duas dimensões

A contribuição de cada camada, para o campo de tensões totais σ , é dada por

$$\{\sigma\} = \sum_{i=1}^k \{\sigma_i\} e_i \quad (2.20)$$

onde k é o número de camadas do modelo e,

$$\sum_{i=1}^k e_i = 1 \quad (2.21)$$

sendo e_i a espessura relativa de cada camada, isto é, sua espessura dividida pela espessura total.

A matriz de rigidez de cada elemento simples de concreto será obtida pela soma das contribuições de cada camada individualmente, ou seja:

$$[K_{ss}] = \sum_{i=1}^k \int_v [B]^T [D]_i [B] dv \quad (2.22)$$

onde $[D]_i$ é a matriz constitutiva de cada camada. Esta matriz será distinta para cada uma das camadas, dependendo de suas propriedades materiais. O processo de solução é idêntico ao descrito nas seções anteriores, com os termos de deformação e tensão sendo calculados para cada camada separadamente. É importante salientar que, embora as deformações viscoplásticas, em cada camada, possam ser diferentes, devido aos diferentes valores dos

do coeficiente de fluidez e do módulo de elasticidade, a deformação total deve ser a mesma.

2.3 IMPLEMENTAÇÃO DAS ETAPAS DE SOLUÇÃO

Na etapa 1, viscoelástica, adotou-se o modelo de cinco camadas idealizado por Bazant (1974) e que será visto em 5.2.1, onde são representadas a fluência e a retração. Nesta etapa, não se considera o efeito de endurecimento e a tensão de plastificação inicial do modelo é tomada como zero, desconsiderando o elemento de atrito do modelo da Fig. 1.6. Para os pontos de integração, onde atuam tensões de tração, admite-se que não surjam novas fissuras.

Na etapa 2, elastoplástica, é determinado o endurecimento do ponto de integração em que a tensão efetiva exceder a tensão de plastificação inicial. Utiliza-se uma única camada nesta fase de carregamento instantâneo. Quando se passa da etapa 1 para etapa 2, calcula-se, para cada ponto de integração, uma tensão equivalente em função das cinco tensões determinadas no final da etapa 1. Nesta fase, são verificados os pontos de integração quanto ao critério de fissuração, que será visto no capítulo 4.

É importante ressaltar ainda que, na etapa 1, as premissas para a consideração dos efeitos dependentes do tempo só permitem resultados confiáveis para as cargas em serviço, enquanto que, na etapa 2, pode-se analisar estruturas até a carga de ruptura.

Na Fig. 2.8 é apresentado um fluxograma geral, onde se ilustram as diversas fases que constituem a arquitetura básica do programa.

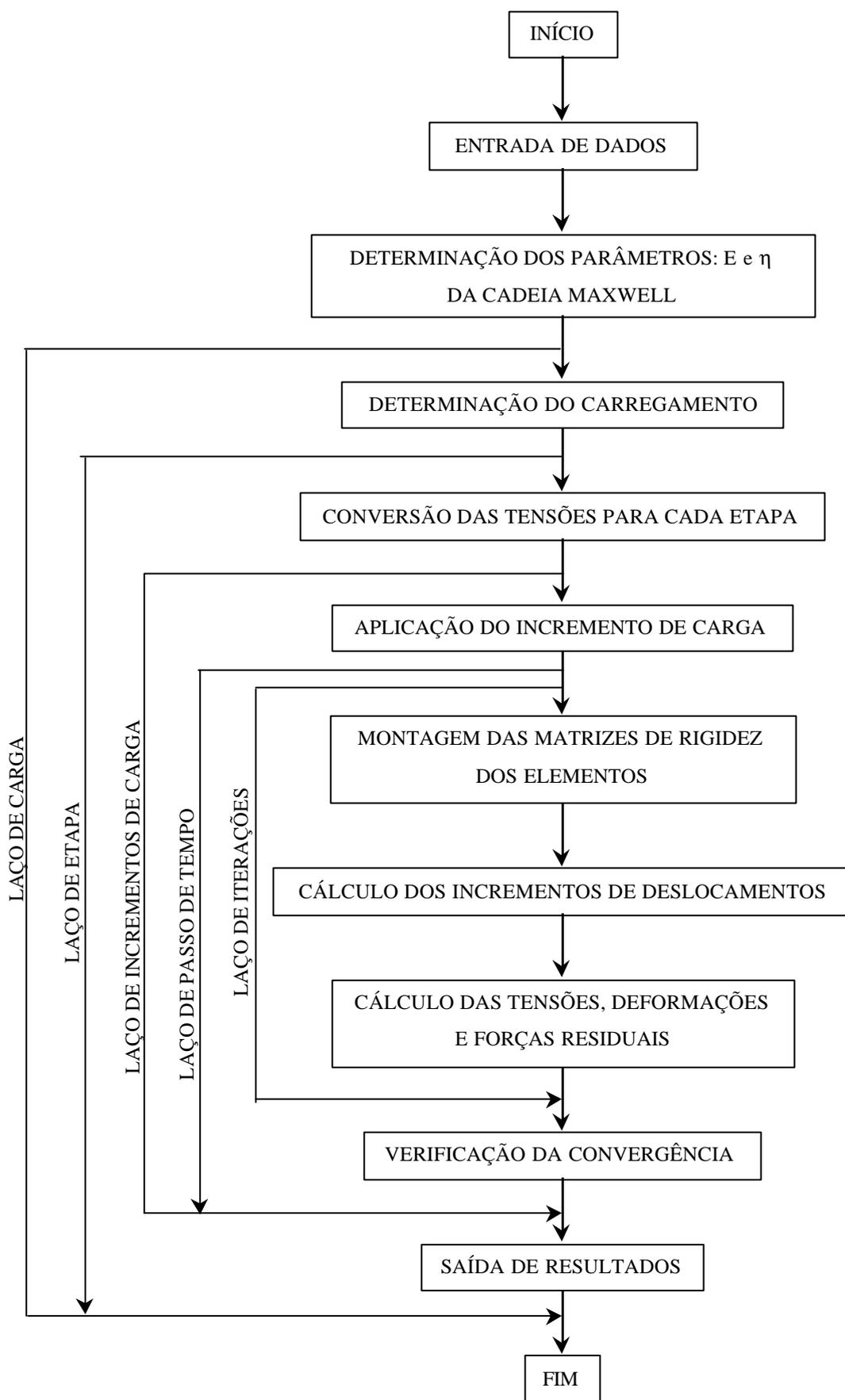


FIGURA 2.8 - Fluxograma do programa

3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO ARMADO

3.1 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO

Para a modelagem do elemento tridimensional de concreto, são empregados, neste trabalho, dois elementos finitos isoparamétricos da família Serendipity, um linear e um quadrático.

3.1.1 Elemento linear

O elemento linear utilizado (Fig. 3.1) possui 8 nós, com três graus de liberdade por nó, correspondentes às translações na direção dos eixos xyz do sistema global de coordenadas. Para este elemento, o campo de deslocamentos possui variação linear e os de tensões e deformações são constantes ao longo das bordas do elemento. Assim, são utilizadas funções de interpolação do tipo linear.

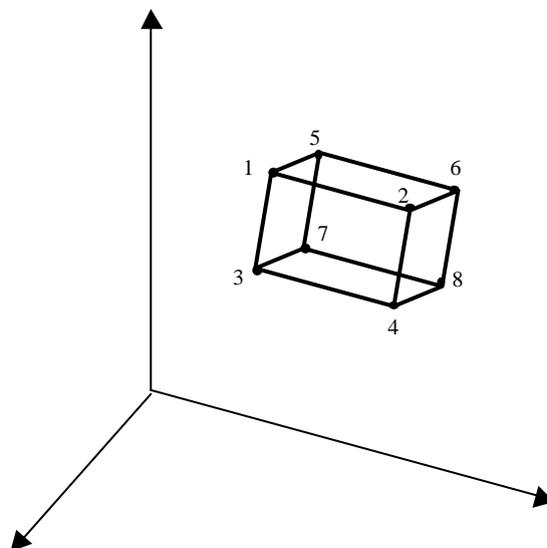


FIGURA 3.1 – Elemento isoparamétrico linear de 8 nós

As funções de interpolação (ou de forma) para este elemento, que têm como variáveis independentes as coordenadas normalizadas (ξ, η, ζ) e numeração dos nós conforme indicado na Fig. 3.1, são apresentadas por Zienkiewicz (1986) como:

$$N_i = \frac{1}{8} \cdot (1 + \xi_0) \cdot (1 + \eta_0) \cdot (1 + \zeta_0) \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (3.1)$$

onde: $\xi_0 = \xi \xi_i$, $\eta_0 = \eta \eta_i$, $\zeta_0 = \zeta \zeta_i$, e, (ξ_i, η_i, ζ_i) são as coordenadas naturais do nó em consideração.

3.1.2 Elemento quadrático

O elemento isoparamétrico quadrático possui 20 nós (Fig. 3.2), com 3 graus de liberdade por nó.

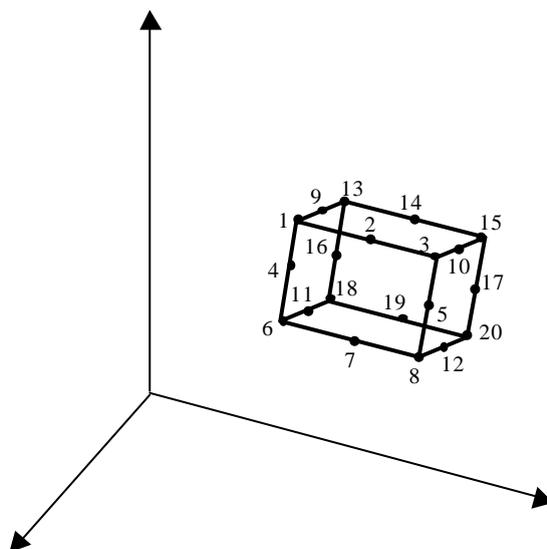


FIGURA 3.2 – Elemento isoparamétrico quadrático de 20 nós

Neste elemento, o campo de deslocamentos possui variação quadrática e os campos de tensões e deformações, variações lineares. São, portanto, empregadas funções de interpolação do tipo quadrática.

Segundo Zienkiewicz (1986), sendo ξ , η , ζ as coordenadas normalizadas (coordenadas naturais do elemento), as funções de forma dividem-se para:

a) Nós de canto

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2) \quad i = 1,3,6,8,13,15,18,20 \quad (3.2)$$

b) Nós intermediários

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \quad i = 2,7,14,19$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 + \xi_0)(1 + \zeta_0) \quad i = 4,5,16,17$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 + \xi_0)(1 + \eta_0) \quad i = 9,10,11,12 \quad (3.3)$$

As funções de interpolação são utilizadas para incógnitas e geometria a partir dos respectivos valores nodais. Conseqüentemente, para funções quadráticas ou de ordem superior, o elemento poderá representar superfícies curvas.

Utilizando elementos isoparamétricos, pode-se representar as coordenadas cartesianas (x, y, z), de um ponto no interior deste elemento, como

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

onde, N_i é a função de forma correspondente ao nó i do elemento de coordenadas cartesianas (x_i, y_i, z_i) e n é o número de nós do elemento.

3.2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ARMADURA

Em um modelo de elementos finitos para análise de peças de concreto armado existem três formas para a inclusão das barras de armadura: a discreta, a distribuída e a incorporada.

Na forma discreta, utilizam-se elementos de barra para representar a armadura, com nós coincidentes com os da malha de elementos finitos de concreto (Fig. 3.3). A armadura é representada por elementos unidimensionais tipo treliça. Este modo de representação da armadura tem a desvantagem de oferecer uma limitação na escolha da malha de elementos de concreto.

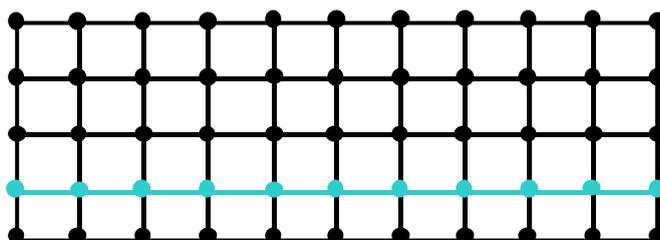


FIGURA 3.3 – Modelo discreto

Na forma distribuída, considera-se o aço distribuído uniformemente no elemento de concreto (Fig. 3.4). Cada conjunto de barras de armadura é substituído por uma camada bi-dimensional de espessura e área equivalente. É um modelo conveniente quando a armadura está densamente distribuída, como no caso de placas e cascas.

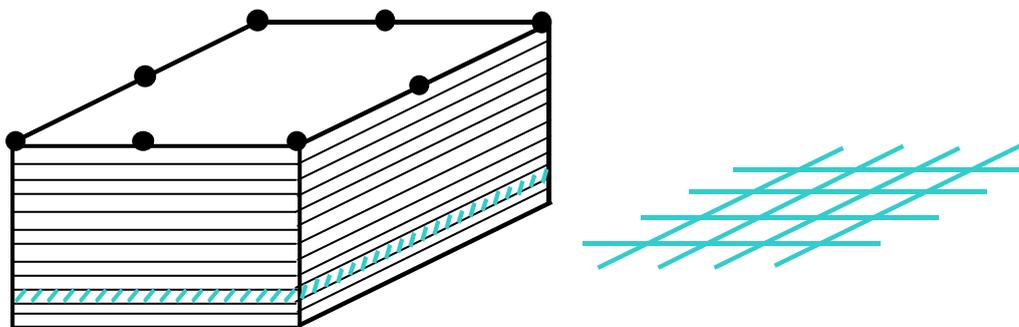


FIGURA 3.4 – Modelo distribuído

Na forma incorporada, considera-se que as barras de armadura são linhas de um material mais rígido no interior dos elementos de concreto. A geometria das armaduras é consistente com a geometria do elemento isoparamétrico em que se encontra disposta, resultando em um campo de deslocamentos único no domínio do elemento. Admite-se ainda, que a armadura resista apenas a tensões axiais atuantes na direção da barra. Desta forma, as barras de aço podem ser arbitrariamente colocadas no interior de um elemento de concreto, sem que novas incógnitas sejam introduzidas no sistema de equações de

equilíbrio (Fig. 3.5). Os deslocamentos ao longo dos segmentos de armadura são referenciados aos deslocamentos nodais do elemento finito de concreto.

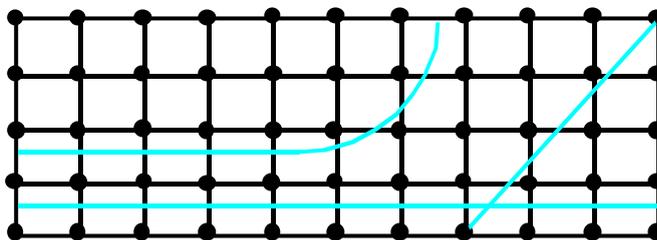


FIGURA 3.5 – Modelo incorporado

Tendo em vista as vantagens acima citadas, no presente estudo optou-se pela implementação computacional do modelo incorporado de armadura.

Neste modelo, as barras de armadura são representadas por elementos unidimensionais isoparamétricos, permitindo a modelagem de barras retas e curvas. A geometria das barras retas fica definida por dois pontos, enquanto que, para as barras curvas, são necessários três pontos para a sua definição.

3.2.1 Funções de forma para a armadura

As funções de interpolação para o elemento de armadura são polinômios de Lagrange, conforme proposto por Zienkiewicz (1986). São funções unidimensionais $H(\chi)$, que são expressas em termos de uma coordenada normalizada independente χ .

Estas funções de forma são geradas pela seguinte expressão:

$$H_k^m(\chi) = \frac{(\chi - \chi_1) \cdots (\chi - \chi_{k-1})(\chi - \chi_{k+1}) \cdots (\chi - \chi_n)}{(\chi_k - \chi_1) \cdots (\chi_k - \chi_{k-1})(\chi_k - \chi_{k+1}) \cdots (\chi_k - \chi_n)} \quad (3.5)$$

Esta função é um polinômio de grau $m = n - 1$ em χ , e tem valor unitário em $\chi = \chi_k$ e nulo para $\chi = \chi_1, \dots, \chi_{k-1}, \chi_{k+1}, \dots, \chi_n$, onde n é o número de nós do elemento.

Desta forma, para o elemento de 2 nós:

$$\begin{aligned} H_1(\chi) &= \frac{(1-\chi)}{2} \\ H_2(\chi) &= \frac{(1+\chi)}{2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para o elemento de 3 nós:

$$\begin{aligned} H_1(\chi) &= \frac{(\chi^2 - \chi)}{2} \\ H_2(\chi) &= (1 - \chi^2) \\ H_3(\chi) &= \frac{(\chi^2 + \chi)}{2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

O grau destas funções de interpolação e, deste modo, o número de pontos nodais, dependerá da complexidade da geometria do elemento de armadura, bem como da compatibilidade requerida com o elemento de concreto.

3.2.2 Formulação geométrica

Apresenta-se, a seguir, a formulação para incorporar as barras de armadura ao elemento tridimensional de concreto. As barras de armadura são posicionadas em coordenadas globais cartesianas, independentemente da malha de elementos finitos.

Durante a integração da expressão do trabalho virtual, para a determinação das matrizes de rigidez, é necessário utilizar coordenadas naturais locais, como será visto mais adiante.

O elemento de concreto, mostrado na Fig. 3.6, é descrito usando coordenadas globais (x, y, z) . As coordenadas naturais do elemento são (ξ, η, ζ) . A geometria no interior e bordos dos elementos de concreto é representada em função dos valores nodais das

coordenadas, empregando as mesmas funções de interpolação usadas para as variáveis incógnitas, ou seja

$$\begin{aligned}x &= \sum_{i=1}^n N_i \cdot x_i \\y &= \sum_{i=1}^n N_i \cdot y_i \\z &= \sum_{i=1}^n N_i \cdot z_i\end{aligned}\quad (3.8)$$

Os correspondentes diferenciais são:

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{Bmatrix}\quad (3.9)$$

onde,

$$[J] = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \left\langle \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} \quad \frac{\partial N_i}{\partial z} \right\rangle\quad (3.10)$$

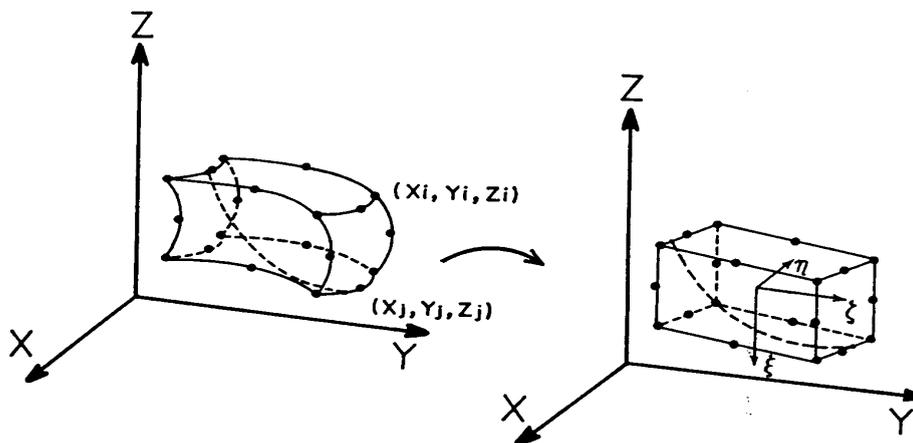


FIGURA 3.6 - Barra de armadura no interior do elemento de concreto

Uma importante vantagem da presente formulação é que a malha global de elementos finitos pode ser gerada sem se considerar previamente a localização e geometria da barra de armadura. Uma vez estabelecida a malha de elementos de concreto, a armadura deve ser especificada por um conjunto de pontos nodais. As coordenadas dos nós da barra

de aço, entre os nós de definição da mesma, são obtidas por interpolação. Desta forma, nós adicionais são colocados dentro do elemento de concreto.

Sendo $\{x_j\}$, $\{y_j\}$ e $\{z_j\}$ os vetores que contêm as coordenadas globais dos nós da barra, associados com um único elemento, as coordenadas de qualquer outro ponto na barra são dadas pela expressão abaixo, onde $H(\chi)$ são as funções de interpolação do elemento de armadura.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} H_j & 0 & 0 \\ 0 & H_j & 0 \\ 0 & 0 & H_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

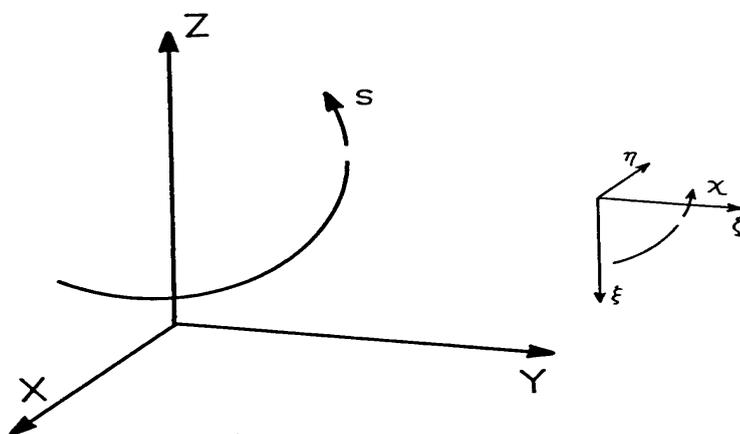


FIGURA 3.7 - Coordenada ao longo do eixo da armadura

Os vários termos da rigidez associada com a armadura requerem integrações ao longo da mesma. Para tanto, necessita-se de um elemento diferencial de comprimento ds , disposto ao longo da armadura, que pode ser obtido a partir da expressão (3.11), conforme ilustra a Fig. 3.7. A orientação da tangente a barra é dada pelos ângulos α , β , γ , onde:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\chi} \frac{d\chi}{ds} \\ \cos \beta &= \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{d\chi} \frac{d\chi}{ds} \\ \cos \gamma &= \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{d\chi} \frac{d\chi}{ds} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Segue que

$$\frac{ds}{d\chi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\chi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\chi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\chi}\right)^2} \quad (3.13)$$

onde:

$$\begin{Bmatrix} \frac{dx}{d\chi} \\ \frac{dy}{d\chi} \\ \frac{dz}{d\chi} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} \frac{dH_j}{d\chi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dH_j}{d\chi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dH_j}{d\chi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Deste modo, os cossenos diretores da reta tangente, em qualquer ponto ao longo da armadura, bem como o fator de mapeamento $ds/d\chi$, podem ser facilmente calculados usando as equações desenvolvidas anteriormente.

Um elemento diferencial de volume dV_s da barra de aço, pode ser expresso em termos de ds e da área da seção transversal da barra, resultando:

$$dV_s = A_s \cdot ds \quad (3.15)$$

E um elemento diferencial de área lateral dS_s da barra de aço, pode ser expresso em termos de ds e do perímetro da barra de armadura:

$$dS_s = O_s \cdot ds \quad (3.16)$$

Usando o fator de mapeamento descrito na Eq. (3.13), integrais envolvendo elementos de volume e de área da superfície ao longo da armadura podem ser escritas em termos da coordenada normalizada χ como

$$\int_{V_s} C \cdot dV_s = \int_{\chi} C \cdot A_s \cdot \frac{ds}{d\chi} d\chi \quad (3.17)$$

$$\int_{S_s} D \cdot dS_s = \int_{\chi} D \cdot O_s \cdot \frac{ds}{d\chi} d\chi \quad (3.18)$$

na qual C e D são funções de posição ao longo da barra de armadura.

3.2.3 Segmentos de armadura que ficam no interior de um elemento de concreto

As barras de armadura são posicionadas pelas coordenadas globais (x,y,z) de seus pontos de extremidade. Para a obtenção da matriz de rigidez total de um determinado elemento, precisa-se saber quais barras interceptam este elemento.

O programa computacional implementado, neste trabalho, calcula de forma automática os segmentos destas barras que ficam situados no interior do elemento de concreto.

Como primeira etapa, deve-se proceder a transformação de coordenadas globais P_j (x,y,z) , dos pontos que definem as extremidades da barra, para coordenadas naturais locais P_j (ξ, η, ζ) dos mesmos. A relação entre estas coordenadas para elementos isoparamétricos é dada por

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta, \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(\xi, \eta, \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

onde (x, y, z) são as coordenadas globais de um ponto qualquer, (x_i, y_i, z_i) são as coordenadas globais dos nós do elemento de concreto e $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ suas funções de forma.

A forma explícita para a relação inversa a (3.19), em geral, não é facilmente encontrada. Entretanto, o mapeamento inverso pode ser feito numericamente usando o algoritmo de Newton-Raphson, como sugerem Elwi e Hrudey (1989). Desta forma, a determinação aproximada das coordenadas (ξ_p, η_p, ζ_p) está baseada no fato de que estas coordenadas são as raízes do seguinte sistema de equações não lineares

$$\{f(\xi, \eta, \zeta)\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_p - \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.20)$$

Usando o método de Newton-Raphson, tem-se, após $k+1$ iterações,

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}_p^{k+1} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}_p^k + \begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \\ \Delta\zeta \end{Bmatrix}_p^{k+1} \quad (3.21)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \\ \Delta\zeta \end{Bmatrix}_p^{k+1} = [J^k]^{T-1} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_p - \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i^k & 0 & 0 \\ 0 & N_i^k & 0 \\ 0 & 0 & N_i^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

com $[J] = [J(\xi, \eta, \zeta)]$ sendo a matriz Jacobiana e $\langle N_i \rangle = \langle N_i(\xi, \eta, \zeta) \rangle$, as funções de forma do elemento de concreto na iteração k .

Determinadas as coordenadas naturais dos pontos de definição da geometria da barra, referenciadas ao sistema natural do elemento de concreto em análise, parte-se para uma segunda etapa de definição da curva que passa por estes pontos, como ilustrado pela Fig. 3.8.

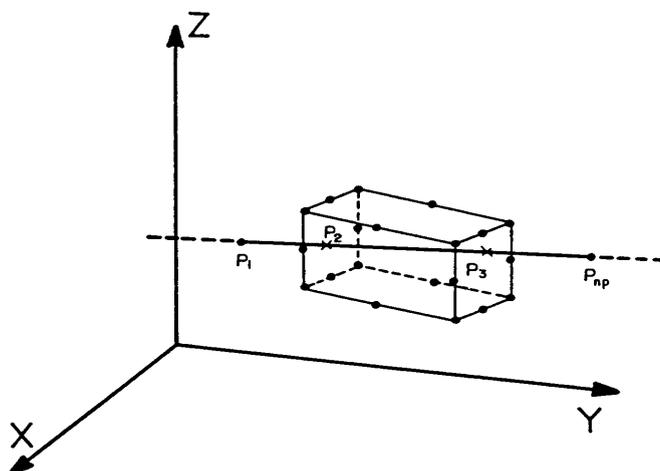


FIGURA 3.8- Curva de definição da barra de aço

Esta etapa consiste, mais especificamente, em determinar as coordenadas naturais da intersecção do plano que contém a face do elemento de concreto com a barra de armadura. Os lados do elemento de concreto são definidos fixando-se uma das coordenadas naturais como 1 ou -1. Portanto, cada lado é definido por uma coordenada natural fixa e as outras podendo assumir valores entre -1 e 1.

Segundo Zienkiewicz (1986), quando a coordenada ξ é conhecida, calculam-se η e ζ pelas expressões:

$$\begin{aligned}\eta &= \sum_{i=1}^{n_p} f_i(\xi) \eta_i \\ \zeta &= \sum_{i=1}^{n_p} f_i(\xi) \zeta_i\end{aligned}\quad (3.23)$$

De forma análoga, quando a coordenada η é conhecida, ξ e ζ são determinados por

$$\begin{aligned}\xi &= \sum_{i=1}^{n_p} g_i(\eta) \xi_i \\ \zeta &= \sum_{i=1}^{n_p} g_i(\eta) \zeta_i\end{aligned}\quad (3.24)$$

E, finalmente, quando a coordenada ζ é conhecida, ξ e η são dados por

$$\begin{aligned}\xi &= \sum_{i=1}^{n_p} h_i(\zeta) \xi_i \\ \eta &= \sum_{i=1}^{n_p} h_i(\zeta) \eta_i\end{aligned}\quad (3.25)$$

As funções f , g , h , que aparecem nas equações (3.23), (3.24) e (3.25), são calculadas pelas seguintes expressões (onde n_p é o número de pontos que definem a barra de armadura):

$$\begin{aligned}f_i(\xi) &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_p} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)} \\ g_i(\eta) &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_p} \frac{(\eta - \eta_j)}{(\eta_i - \eta_j)} \\ h_i(\zeta) &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_p} \frac{(\zeta - \zeta_j)}{(\zeta_i - \zeta_j)}\end{aligned}\quad (3.26)$$

A terceira etapa consiste em verificar se existe intersecção da curva P_1, P_2, \dots, P_{n_p} , com cada uma das seis faces que definem o elemento de concreto. Para tal, fixa-se a coordenada $\xi = \pm 1$ do elemento de concreto e calculam-se as coordenadas η e ζ da intersecção face do concreto-curva da barra. Caso $-1 \leq \eta \leq 1$ e $-1 \leq \zeta \leq 1$ implica dizer que a barra intercepta esta face do elemento. Define-se, então, um elemento unidimensional representativo da parte de armadura situada no interior deste elemento de concreto. Repete-se o procedimento de maneira análoga, fixando-se a coordenada $\eta = \pm 1$ ou $\zeta = \pm 1$ e verificando os limites das coordenadas que variam na face em análise do elemento de concreto.

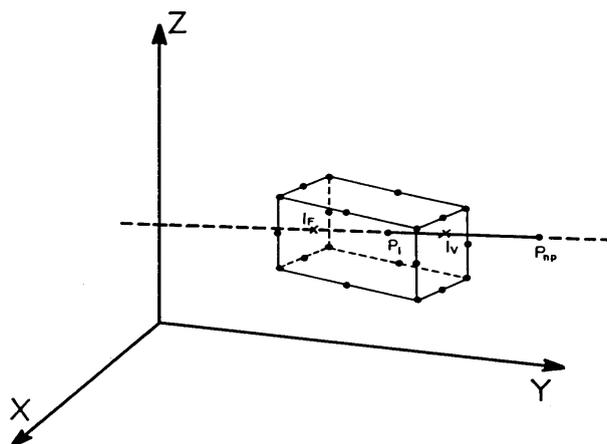
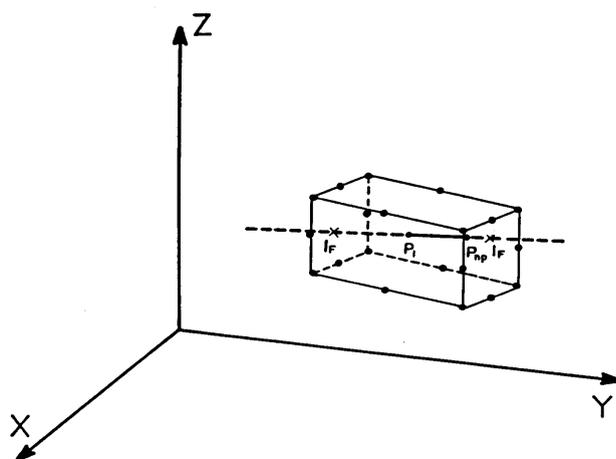
Neste estágio do programa, considera-se a possibilidade de existir um único ponto de intersecção com o elemento de concreto. Esta situação corresponde ao caso em que a barra intercepta somente um vértice do elemento. Neste caso, o programa considera que a barra não intercepta o elemento de concreto.

A quarta etapa consiste na verificação do trecho de armadura efetivamente contido no elemento de concreto. Destacam-se os seguintes casos possíveis :

a) Um dos nós, que definem as extremidades do elemento de armadura, encontra-se localizado dentro do elemento de concreto. Isto se evidencia quando as coordenadas naturais de P_1 ou P_{n_p} , em módulo, são menores que 1.

Neste caso, o programa se encarrega de distinguir a intersecção verdadeira da falsa e assim obter, de forma correta, o comprimento real do segmento de armadura contido no interior do elemento de concreto. A Fig. 3.9 ilustra esta situação onde I_v é a intersecção verdadeira e I_f é a falsa.

b) Os dois nós que definem a geometria da barra encontram-se localizados no interior do elemento de concreto. Neste caso, o programa toma, para as coordenadas naturais dos pontos de intersecção, as mesmas coordenadas naturais dos pontos P_1 e P_{n_p} já obtidas anteriormente. A Fig. 3.10 ilustra esta situação.

FIGURA 3.9 – P_1 dentro do elemento de concretoFIGURA 3.10 - P_1 e P_{np} dentro do elemento de concreto

c) Nenhum dos nós de definição da barra está situado dentro do elemento de concreto. Neste caso cabe salientar duas possibilidades: a primeira, quando o segmento que liga os dois pontos P_1 e P_{np} intercepta o elemento (Fig. 3.11) e a segunda, em caso contrário (Fig. 3.12).

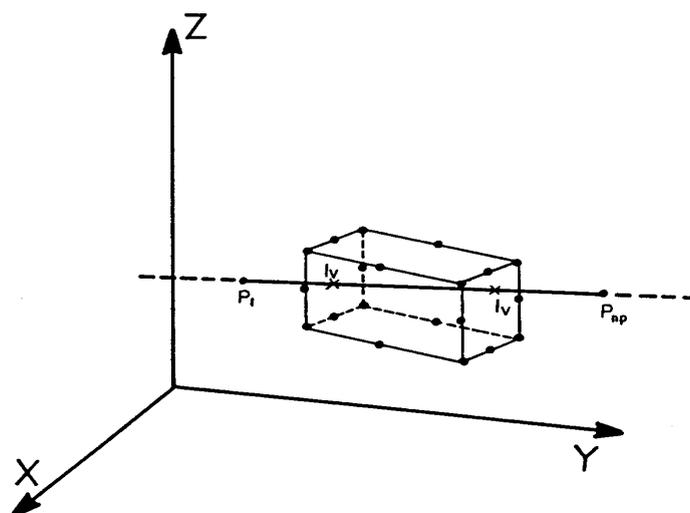


FIGURA 3.11 - Segmento que liga P_1 e P_{np} intercepta o elemento

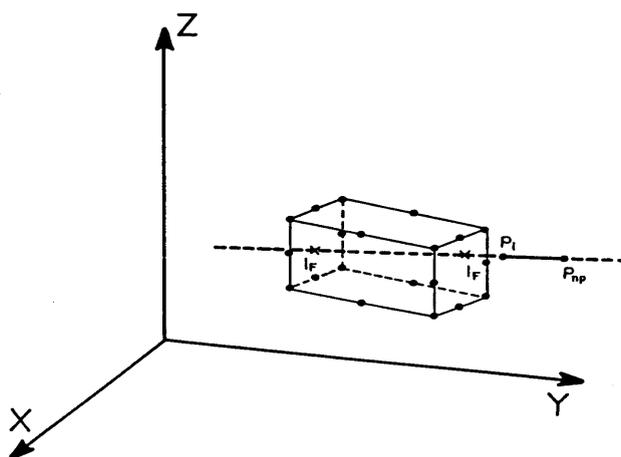


FIGURA 3.12 - Segmento que liga P_1 e P_{np} não intercepta o elemento

A quinta etapa consiste na criação, quando o elemento utilizado for o quadrático, de um nó intermediário no segmento de armadura contido no interior do elemento de concreto e posterior determinação das coordenadas globais e naturais dos nós extremos do segmento, bem como do nó intermediário. Quando o elemento isoparamétrico em análise for o linear, não se processa a geração do nó intermediário. A Fig. 3.13 ilustra esta etapa.

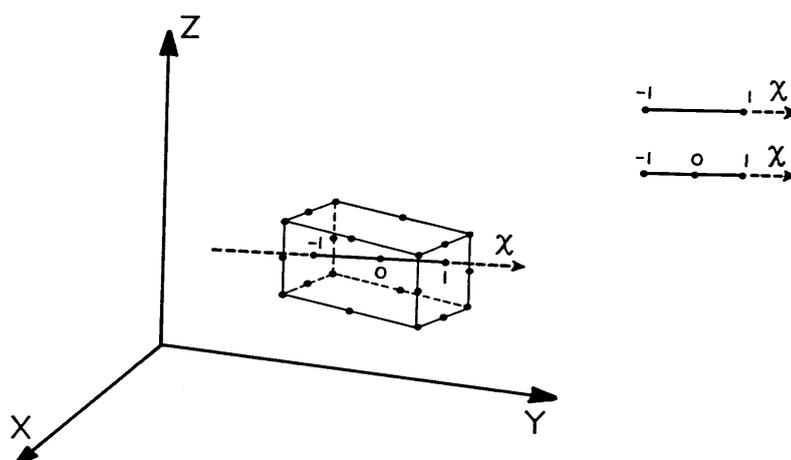


FIGURA 3.13 - Segmento de armadura dentro do elemento de concreto

A sexta e última etapa, consiste em verificar se a barra se encontra disposta ao longo de uma face ou ao longo de uma aresta, num determinado elemento.

3.3 MATRIZ DE RIGIDEZ PARA O ELEMENTO DE CONCRETO ARMADO

O campo de deformações, dentro de um elemento de armadura, pode ser definido de diversas maneiras. Segundo Zienkiewicz e Philips (1974), a deformação ao longo da barra de aço é igual à deformação normal, no elemento de concreto, na direção tangente ao segmento de armadura.

No presente estudo, a expressão para a deformação é proposta em uma forma incremental, como demonstram Elwi e Hrudey (1989):

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_s = & \frac{d\Delta w_b}{ds} + \Delta \epsilon_x \cdot \cos^2 \alpha + \Delta \epsilon_y \cdot \cos^2 \beta + \Delta \epsilon_z \cdot \cos^2 \gamma + \\ & \Delta \gamma_{xy} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + \Delta \gamma_{xz} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma + \Delta \gamma_{yz} \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \end{aligned} \quad (3.27)$$

Os incrementos de deformações $\Delta\varepsilon_x$, $\Delta\varepsilon_y$, $\Delta\varepsilon_z$, $\Delta\gamma_{xy}$, $\Delta\gamma_{xz}$, $\Delta\gamma_{yz}$ são obtidos diretamente do campo de incremento de deslocamentos do elemento de concreto. O primeiro termo da expressão (3.27) representa a contribuição do deslizamento.

O incremento devido à aderência imperfeita ao longo do segmento de armadura é dado por:

$$\Delta w_b(\chi) = \langle H(\chi) \rangle \cdot \{\Delta w_b^*\} \quad (3.28)$$

onde $H(\chi)$ são as funções de interpolação em termo de uma coordenada normalizada χ e $\{\Delta w_b^*\}$ é o vetor que inclui os graus de liberdade devido à aderência imperfeita.

O incremento de deformações pode ser descrito como:

$$\Delta \varepsilon_s = \langle \langle B_b \rangle \rangle \cdot \begin{Bmatrix} \{\Delta w_b^*\} \\ \{\Delta q\} \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

onde

$$\{B_b\} = \frac{d\chi}{ds} \cdot \{H(\chi)\} \quad (3.30)$$

A derivada da coordenada normalizada independente χ em relação ao comprimento s é:

$$\frac{d\chi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\chi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\chi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\chi}\right)^2}} \quad (3.31)$$

O vetor de deslocamentos nodais do elemento de concreto é expresso como:

$$\{\Delta q\} = \begin{Bmatrix} \{\Delta u\} \\ \{\Delta v\} \\ \{\Delta w\} \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

E, o vetor das relações deformações-deslocamentos para a armadura, B_s , pode ser dado por:

$$\{B_s\} = \begin{Bmatrix} \cos^2 \alpha \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} + \cos \alpha \cos \beta \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} + \cos \alpha \cos \gamma \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} \\ \cos^2 \beta \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} + \cos \alpha \cos \beta \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} + \cos \beta \cos \gamma \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} \\ \cos^2 \gamma \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} + \cos \alpha \cos \gamma \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} + \cos \beta \cos \gamma \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

As derivadas das funções de forma em relação às coordenadas cartesianas x , y e z são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \sum [J]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

A formulação apresentada a seguir é baseada na forma incremental do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Admite-se que, em relação ao segmento de barra de armadura, a deformação ocorre somente na direção ao longo da barra.

Quando o efeito da aderência imperfeita é incluído, a forma incremental de trabalho interno pode ser dada por:

$$\delta \Delta W = \int_{V_s} (\sigma_s + \Delta \sigma_s) \cdot \delta \Delta \epsilon \cdot dV + \int_{S_1} (\tau_b + \Delta \tau_b) \cdot \delta \Delta w_b \cdot ds \quad (3.35)$$

onde σ_s é a tensão normal na armadura, τ_b , a tensão de aderência; V_s e S_s , o volume e a área da superfície da armadura, respectivamente.

A forma incremental das relações constitutivas para a armadura pode ser escrita, segundo Balakrishnan and Murray (1986), como

$$\Delta\sigma_s = E_s \cdot \Delta\varepsilon_s \quad (3.36)$$

$$\Delta\tau_b = E_b \cdot \Delta w_b \quad (3.37)$$

onde E_s é o módulo de elasticidade longitudinal do aço e E_b é a relação tensão de aderência-deslizamento.

Pode-se, então, reescrever a equação (3.35), como:

$$\begin{aligned} \delta\Delta W = & \int_s (\delta\Delta\varepsilon_s \cdot E_s \cdot \Delta\varepsilon_s \cdot A_s) \cdot ds + \int_s (\delta\Delta\varepsilon_s \cdot \sigma_s \cdot A_s) \cdot ds + \\ & \int_s (\delta\Delta w_b \cdot E_b \cdot \Delta w_b \cdot O_s) \cdot ds + \int_s (\delta\Delta w_b \cdot \tau_b \cdot O_s) \cdot ds \end{aligned} \quad (3.38)$$

A primeira integral da equação (3.38), pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} & \int_s (\delta\Delta\varepsilon_s \cdot E_s \cdot \Delta\varepsilon_s \cdot A_s) \cdot ds = \\ & \int_s \langle\langle B_b \rangle\rangle \langle\langle B_s \rangle\rangle \left\{ \begin{array}{c} \{\delta\Delta w_b^*\} \\ \{\delta\Delta q\} \end{array} \right\} \cdot E_s \cdot \langle\langle B_b \rangle\rangle \langle\langle B_s \rangle\rangle \left\{ \begin{array}{c} \{\Delta w_b^*\} \\ \{\Delta q\} \end{array} \right\} \cdot A_s \cdot ds = \\ & \int_\chi \langle\langle \delta\Delta w_b^* \rangle\rangle \langle\langle \delta\Delta q \rangle\rangle \left\{ \begin{array}{c} \{B_b\} \\ \{B_s\} \end{array} \right\} \cdot E_s \cdot \langle\langle B_b \rangle\rangle \langle\langle B_s \rangle\rangle \left\{ \begin{array}{c} \{\Delta w_b^*\} \\ \{\Delta q\} \end{array} \right\} \cdot A_s \cdot \frac{ds}{d\chi} \cdot d\chi \end{aligned} \quad (3.39)$$

e, pode ser dividida em quatro termos:

$$\begin{aligned} & \langle\langle \delta\Delta w_b^* \rangle\rangle \langle\langle \delta\Delta q \rangle\rangle \int_\chi \{B_b\} \cdot E_s \cdot \langle\langle B_b \rangle\rangle \cdot A_s \cdot t \cdot \frac{ds}{d\chi} \cdot d\chi \left\{ \begin{array}{c} \{\Delta w_b^*\} \\ \{\Delta q\} \end{array} \right\} \\ & \langle\langle \delta\Delta w_b^* \rangle\rangle \langle\langle \delta\Delta q \rangle\rangle \int_\chi \{B_s\} \cdot E_s \cdot \langle\langle B_s \rangle\rangle \cdot A_s \cdot t \cdot \frac{ds}{d\chi} \cdot d\chi \left\{ \begin{array}{c} \{\Delta w_b^*\} \\ \{\Delta q\} \end{array} \right\} \\ & \langle\langle \delta\Delta w_b^* \rangle\rangle \langle\langle \delta\Delta q \rangle\rangle \int_\chi \{B_b\} \cdot E_s \cdot \langle\langle B_s \rangle\rangle \cdot A_s \cdot t \cdot \frac{ds}{d\chi} \cdot d\chi \left\{ \begin{array}{c} \{\Delta w_b^*\} \\ \{\Delta q\} \end{array} \right\} \\ & \langle\langle \delta\Delta w_b^* \rangle\rangle \langle\langle \delta\Delta q \rangle\rangle \int_\chi \{B_s\} \cdot E_s \cdot \langle\langle B_b \rangle\rangle \cdot A_s \cdot t \cdot \frac{ds}{d\chi} \cdot d\chi \left\{ \begin{array}{c} \{\Delta w_b^*\} \\ \{\Delta q\} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.40)$$

A segunda integral, por sua vez, é descrita da forma:

$$\begin{aligned}
 & \int_s (\delta \Delta \varepsilon_s \cdot \sigma_s \cdot A_s) \cdot ds = \\
 & \int_s \langle \langle B_b \rangle \rangle \langle \langle B_s \rangle \rangle \left\{ \begin{array}{l} \{ \delta \Delta w_b^* \} \\ \{ \delta \Delta q \} \end{array} \right\} \cdot \sigma_s \cdot A_s \cdot ds = \\
 & \int_\chi \langle \langle \delta \Delta w_b^* \rangle \rangle \langle \langle \delta \Delta q \rangle \rangle \left\{ \begin{array}{l} \{ B_b \} \\ \{ B_s \} \end{array} \right\} \cdot \sigma_s \cdot A_s \cdot \frac{ds}{d\chi} \cdot d\chi
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

que também divide-se em dois termos:

$$\begin{aligned}
 & \langle \langle \delta \Delta w_b^* \rangle \rangle \langle \langle \delta \Delta q \rangle \rangle \int_\chi \{ B_b \} \cdot \sigma_s \cdot A_s \cdot \frac{ds}{d\chi} \cdot d\chi \\
 & \langle \langle \delta \Delta w_b^* \rangle \rangle \langle \langle \delta \Delta q \rangle \rangle \int_\chi \{ B_s \} \cdot \sigma_s \cdot A_s \cdot \frac{ds}{d\chi} \cdot d\chi
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Sucessivamente, a terceira integral fica:

$$\begin{aligned}
 & \int_s (\delta \Delta w_b \cdot E_b \cdot \Delta w_b \cdot O_s) \cdot ds = \\
 & \int_s \langle H(\chi) \rangle \cdot \{ \delta \Delta w_b^* \} \cdot E_b \cdot \langle H(\chi) \rangle \cdot \{ \Delta w_b^* \} \cdot O_s \cdot ds = \\
 & \langle \delta \Delta w_b^* \rangle \int_\chi \{ H(\chi) \} \cdot E_b \cdot \langle H(\chi) \rangle \cdot O_s \cdot \frac{ds}{d\chi} \cdot d\chi \cdot \{ \Delta w_b^* \}
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

E, a quarta integral, é expressa por:

$$\begin{aligned}
 & \int_s (\delta \Delta w_b \cdot \tau_b \cdot O_s) \cdot ds = \\
 & \int_s \langle H(\chi) \rangle \cdot \{ \delta \Delta w_b^* \} \cdot \tau_b \cdot O_s \cdot ds = \\
 & \langle \delta \Delta w_b^* \rangle \int_\chi \{ H(\chi) \} \cdot \tau_b \cdot O_s \cdot \frac{ds}{d\chi} \cdot d\chi
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

A expressão (3.38) pode, portanto, ser apresentada da seguinte forma matricial:

$$\delta\Delta W = \langle\langle \delta\Delta w_b^* \rangle\rangle \langle\delta\Delta q\rangle \left\{ \begin{bmatrix} [K_{bb}] & [K_{bs}] \\ [K_{sb}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta w_b^*\} \\ \{\Delta q\} \end{Bmatrix} \right\} + \begin{Bmatrix} \{Q_b\} \\ \{Q_s\} \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

onde

$$[K_{bb}] = \int_{\chi} \{H(\chi)\} \cdot E_b \cdot \langle H(\chi) \rangle \cdot O_s \cdot \frac{ds}{d\chi} \cdot d\chi + \int_{\chi} \{B_b\} \cdot E_s \cdot \langle B_b \rangle \cdot A_s \cdot \frac{ds}{d\chi} \cdot d\chi \quad (3.46)$$

$$[K_{ss}] = \int_{\chi} \{B_s\} \cdot E_s \cdot \langle B_s \rangle \cdot A_s \cdot \frac{ds}{d\chi} \cdot d\chi \quad (3.47)$$

$$[K_{bs}] = \int_{\chi} \{B_b\} \cdot E_s \cdot \langle B_s \rangle \cdot A_s \cdot \frac{ds}{d\chi} \cdot d\chi \quad (3.48)$$

$$[K_{sb}] = \int_{\chi} \langle B_b \rangle \cdot E_s \cdot \{B_s\} \cdot A_s \cdot \frac{ds}{d\chi} \cdot d\chi \quad (3.49)$$

$$[Q_s] = \int_{\chi} \{B_s\} \cdot \sigma_s \cdot A_s \cdot \frac{ds}{d\chi} \cdot d\chi \quad (3.50)$$

$$[Q_b] = \int_{\chi} \{B_b\} \cdot \sigma_s \cdot A_s \cdot \frac{ds}{d\chi} \cdot d\chi + \int_{\chi} \{H(\chi)\} \cdot \tau_b \cdot O_s \cdot \frac{ds}{d\chi} \cdot d\chi \quad (3.51)$$

As matrizes K_{ss} , K_{bs} , K_{sb} representam a contribuição da armadura e os vetores Q_b e Q_s as forças internas equilibradas, associadas com as tensões τ_b e σ_s . As partições “b” são associadas com os graus de liberdade devido ao deslizamento e as partições “s” são associadas aos graus de liberdade do elemento de concreto.

Combinando o incremento do trabalho virtual interno da barra de armadura (incluindo a contribuição do deslizamento) com o mesmo devido ao elemento de concreto, tem-se o seguinte:

$$\delta\Delta W_{elem} = \langle\langle \delta\Delta w_b^* \rangle\rangle \langle\delta\Delta q\rangle \left(\begin{bmatrix} [K_{bb}] & [K_{bs}] \\ [K_{sb}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta w_b^*\} \\ \{\Delta q\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{Q_b\} \\ \{Q_s\} - \{F\} - \{\Delta F\} \end{Bmatrix} \right) \quad (3.52)$$

Os vetores F e ΔF são a contribuição da força de volume do elemento de concreto.

Os graus de liberdade devidos ao deslizamento $\{\Delta w_b^*\}$ devem ser considerados como graus de liberdade globais e, quando houver armadura na interface entre dois elementos de concreto, os graus de liberdade serão comuns aos dois elementos (no sentido daqueles associados com nós no contorno entre elementos, os graus de liberdade serão vinculados a mais de um elemento). Esta aproximação mantém a compatibilidade entre elementos adjacentes.

Salienta-se, todavia, que estes graus de liberdade globais adicionais têm um efeito desfavorável na montagem da matriz de rigidez, pois a largura da banda aumenta substancialmente.

4 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

Os estados característicos do comportamento de uma peça fletida de concreto armado podem ser ilustrados por um diagrama carga-deslocamento típico, conforme a Fig. 4.1. Este comportamento, altamente não-linear, pode ser dividido em três fases: uma etapa elástica-linear, com o concreto não fissurado, uma etapa de formação de fissuras e uma fase plástica.

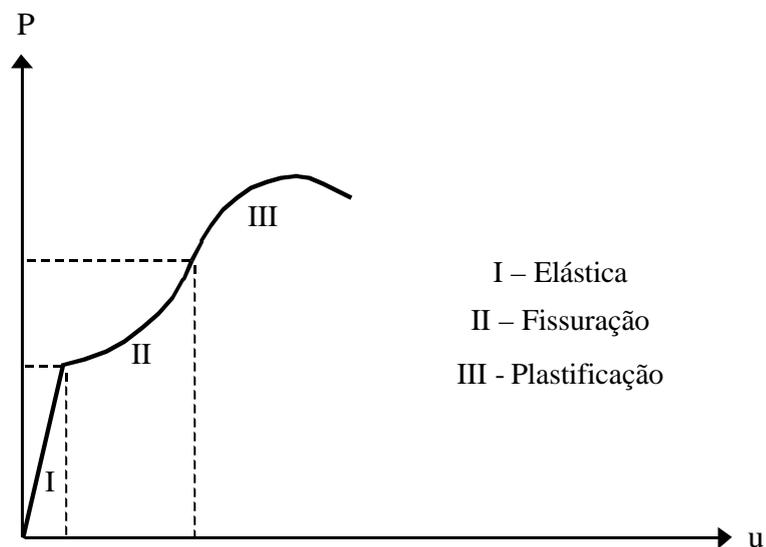


FIGURA 4.1 - Diagrama carga-deslocamento típico de uma peça fletida de concreto armado

A resposta não-linear é causada principalmente, por dois efeitos físicos: a fissuração do concreto e a plastificação do aço e do concreto comprimido.

Independentemente do tempo, outras não-linearidades surgem nos materiais, como o deslizamento das barras de aço na matriz do concreto, o engrenamento dos agregados e o efeito de pino das barras de aço no concreto fissurado. Os efeitos dependentes do tempo, como fluência e retração do concreto, também contribuem significativamente na resposta não-linear.

4.1 MODELO ELASTOPLÁSTICO PARA O CONCRETO

Evidências experimentais indicam que a deformação não-linear do concreto é basicamente de natureza inelástica e, portanto, o comportamento tensão-deformação pode ser separado em uma componente recuperável e outra irrecuperável. A componente de deformação irrecuperável deve ser tratada no contexto da teoria clássica da plasticidade.

Neste estudo foi empregado um modelo elastoplástico com endurecimento para descrever o comportamento do concreto comprimido. Este modelo corresponde à solução estável do modelo elasto-viscoplástico, descrito no capítulo 2. Para o concreto, sob tensões de tração, considera-se um comportamento elástico-linear até a ruptura. Após a ruptura admite-se uma colaboração do concreto entre fissuras, devido às forças de aderência entre o concreto e o aço, possibilitando uma análise mais realista da estrutura.

A seguir serão descritos os modelos constitutivos utilizados para representar o concreto.

4.1.1 Modelo para o concreto comprimido

Para representar o comportamento do concreto não fissurado, adotou-se um modelo elastoplástico com endurecimento, composto por um critério de ruptura, por um critério de plastificação e por uma regra de endurecimento.

4.1.1.1 Critério de ruptura

O critério de ruptura escolhido foi o de Ottosen (1977), dado pela seguinte expressão

$$\alpha \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \beta \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \quad (4.1)$$

onde f_{cm} é a resistência média à compressão do concreto e α, β são parâmetros.

A função λ depende do ângulo θ , de acordo com

$$\lambda = c_1 \cos \left[\frac{1}{3} \cdot \arccos(-c_2 \sin 3\theta) \right], \text{ para } \sin 3\theta \leq 0$$

$$\lambda = c_1 \cos \left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos(c_2 \sin 3\theta) \right], \text{ para } \sin 3\theta > 0 \quad (4.2)$$

com

$$\sin 3\theta = -\frac{3\sqrt{3} J_3}{2 J_2^{3/2}} \quad (4.3)$$

e

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$

$$J_3 = (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m)$$

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} \quad (4.4)$$

As eqs. (4.1) e (4.2), que definem o critério de ruptura, contêm quatro parâmetros α , β , c_1 e c_2 . Estes parâmetros são determinados a partir da resistência média à compressão uniaxial do concreto f_{cm} e da resistência média à tração uniaxial do concreto f_{tm} , dada por

$$f_{tm} = \bar{\alpha} \left[\frac{f_{cm} - 8}{10} \right]^{2/3}, \quad \text{em MPa} \quad (4.5)$$

sendo $0,95 \leq \bar{\alpha} \leq 1,85$

De acordo com o Código Modelo CEB-FIP (1990), a resistência à tração do concreto é mais variável que a sua resistência à compressão e pode ser reduzida

substancialmente por efeitos ambientais. Desta forma, o valor médio proposto é por demais cauteloso e, em virtude de comparações com valores experimentais, preferiu-se adotar $\bar{\alpha} = 1,85$ (Claure, 1994). Concomitantemente, a diferença de 8 MPa entre f_{cm} e f_{ck} , proposta pelo CEB, é exagerada para concretos de baixa resistência. Achou-se mais conveniente adotar para este valor, uma fração de f_{cm} (20%). Sendo assim, a resistência média à tração adotada no modelo foi

$$f_{tm} = 1,85 \left(\frac{0,8f_{cm}}{10} \right)^{2/3} \quad (4.6)$$

Os parâmetros do critério de Ottosen são, então, calculados conforme o Código Modelo CEB-FIP (1990), como

$$\alpha = \frac{1}{9k^{1,4}}$$

$$\beta = \frac{1}{3,7k^{1,1}}$$

$$c_1 = \frac{1}{0,7k^{0,9}}$$

$$c_2 = 1 - 6,8[k - 0,07]^2$$

onde

$$k = \frac{f_{tm}}{f_{cm}} \quad (4.7)$$

Para se estudar a superfície de ruptura de um material, em um espaço tridimensional de tensões, analisa-se as suas seções transversais nos planos desviadores e seus meridianos nos planos meridianos. As seções transversais da superfície de ruptura são as curvas de intersecção entre a superfície de ruptura e um plano desviador, que é perpendicular ao eixo hidrostático, com ξ constante. Os meridianos da superfície de ruptura são as curvas de intersecção entre a superfície de ruptura e um plano meridiano, que contém o eixo hidrostático, com θ constante. Os meridianos determinados por valores de θ iguais a 0° , 30° , e 60° são chamados, respectivamente, de meridiano de tração, de cisalhamento e de compressão.

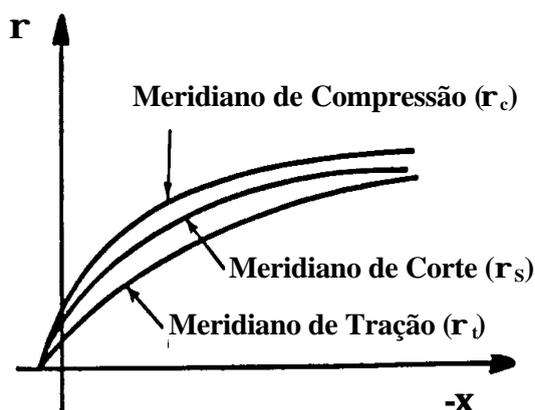


FIGURA 4.2a - Meridianos da superfície de ruptura

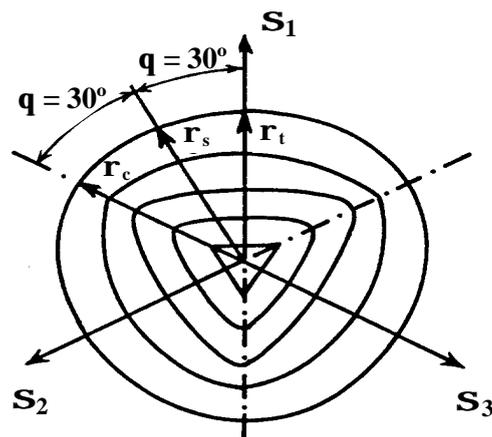


FIGURA 4.2b – Seções transversais da superfície de ruptura

Se o material for isotrópico, os índices 1, 2, 3, associados aos eixos coordenados, são arbitrários. Isto resulta na tríplice simetria, que representa a superfície de ruptura. Assim, torna-se necessário estudar apenas o setor compreendido entre $\theta = 0^\circ$ e 60° , ficando os demais setores conhecidos por simetria.

A superfície de ruptura do concreto, segundo evidências experimentais, apresenta as seguintes características num plano desviador:

- a superfície de ruptura é suave e convexa, com exceção do seu vértice;
- os meridianos são parabólicos e abrem no sentido do eixo hidrostático negativo;
- a curva de ruptura é aproximadamente triangular para tensões de tração e baixas tensões de compressão, ficando mais circular à medida que as tensões de compressão aumentam.

4.1.1.2 Critério de plastificação para o concreto

Admite-se, neste trabalho, que o concreto comprimido tenha um endurecimento isotrópico e que as superfícies de plastificação tenham a mesma forma da superfície de ruptura. Considerando a tensão efetiva ou uniaxial equivalente $\sigma_{ef} = f_{cm}$ e manipulando a equação (4.1), obtém-se a seguinte expressão para a superfície de plastificação:

$$F = \left[\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1 + \sqrt{(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4\alpha J_2} \right] / 2 = \sigma_{ef} \quad (4.8)$$

O domínio elástico, para o concreto comprimido, é definido para tensões efetivas menores que 30% da tensão de ruptura. Para superfícies de carregamento subsequentes à superfície de plastificação inicial ($0,3f_{cm} \leq \sigma_{ef} \leq f_{cm}$) ocorre o domínio plástico, onde o material possui um comportamento elastoplástico com endurecimento, conforme visto na Fig. 4.3.

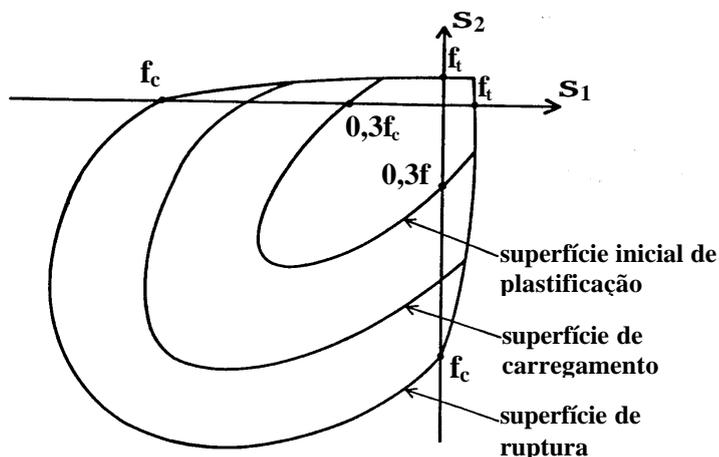


FIGURA 4.3 – Superfícies de plastificação e ruptura

4.1.1.3 Regra de endurecimento

A regra de endurecimento define o movimento das superfícies de plastificação subsequentes (superfícies de carregamento) durante a deformação plástica. É determinada pela relação entre a tensão efetiva e a deformação plástica acumulada ou deformação plástica. Através de conceitos de tensão efetiva e deformação plástica efetiva é possível extrapolar os resultados de um simples ensaio uniaxial para uma situação multiaxial.

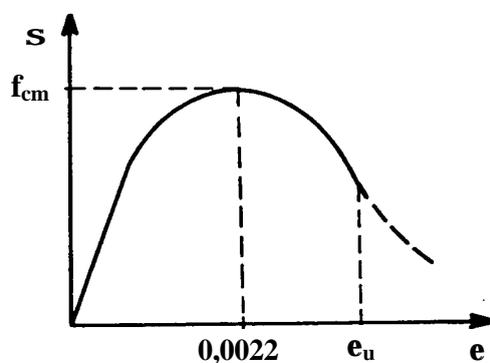


FIGURA 4.4 – Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido

Neste trabalho, adotou-se a curva tensão-deformação, proposta pelo Código Modelo CEB-FIP (1990), conforme visto na Fig. 4.4, para representar o comportamento do concreto sob compressão uniaxial, de acordo com a seguinte expressão

$$\sigma = - \frac{-\frac{E}{f_{cm}}\varepsilon - \left[\frac{\varepsilon}{0,0022}\right]^2}{1 + \left[\frac{E}{f_{cm}}0,0022 - 2\right]\frac{\varepsilon}{-0,0022}} f_{cm} \quad (4.9)$$

Considerando-se que a componente de deformação elástica é σ/E obtém-se, para $0,3f_{cm} \leq \sigma \leq f_{cm}$, a partir de (4.9), uma relação $\sigma = \sigma(E, f_{cm}, \varepsilon_p)$.

4.1.1.4 Vetor de fluxo plástico

Na relação tensão-deformação, para o domínio plástico, é comum considerar o vetor taxa de deformação plástica normal à superfície de plastificação. Esta regra de fluxo é considerada para o concreto, predominantemente por razões de ordem prática, uma vez que há pouca evidência experimental disponível sobre a validade da mesma. Sendo assim, pela equação (2.9)

$$\{\dot{\varepsilon}_{vp}\} = \gamma \Phi(F) \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = \gamma \Phi(F) \{a\} \quad (4.10)$$

onde $\{a\}$ é um vetor gradiente, perpendicular à superfície de plastificação, que define a direção do escoamento plástico. A função tensão efetiva F é a condição de plastificação ou as funções de carregamento subsequentes no modelo de plasticidade com endurecimento. O vetor de fluxo plástico é dado por

$$\{a\} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}} \quad (4.11)$$

com

$$\langle \sigma \rangle = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}\}$$

O vetor $\{a\}$ pode ser transformado em

$$\{a\} = C_1 \{a_1\} + C_2 \{a_2\} + C_3 \{a_3\} \quad (4.12)$$

onde

$$\{a_1\} = \frac{\partial I_1}{\partial \{\sigma\}} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\} \quad (4.13)$$

$$\{a_2\} = \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \{\sigma\}} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \{s_x, s_y, s_z, 2\tau_{yz}, 2\tau_{zx}, 2\tau_{xy}\} \quad (4.14)$$

$$\{a_3\} = \frac{\partial J_3}{\partial \{\sigma\}} = \left\{ \left(s_y s_z - \tau_{yz}^2 + \frac{J_2}{3} \right) \left(s_x s_z - \tau_{xz}^2 + \frac{J_2}{3} \right) \left(s_x s_y - \tau_{xy}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \right. \\ \left. 2(\tau_{xz} \tau_{xy} - s_x \tau_{yz}), 2(\tau_{xy} \tau_{yz} - s_y \tau_{xz}), 2(\tau_{yz} \tau_{xz} - s_z \tau_{xy}) \right\} \quad (4.15)$$

Os valores s_x , s_y e s_z são as tensões desviadoras dadas por

$$s_x = \frac{(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)}{3}$$

$$s_y = \frac{(2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z)}{3}$$

$$s_z = \frac{(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y)}{3} \quad (4.16)$$

Os coeficientes C_1 , C_2 e C_3 são

$$C_1 = \frac{\partial F}{\partial I_1}$$

$$C_2 = \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{\text{tag} 3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \theta}$$

$$C_3 = - \frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \frac{1}{(\sqrt{J_2})^3} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (4.17)$$

As derivadas da função de plastificação F em relação aos invariantes de tensão I_1 , J_2 e θ são

$$\frac{\partial F}{\partial I_1} = \frac{\beta}{2} \left[1 + \frac{\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1}{\sqrt{(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4\alpha J_2}} \right] \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} = \frac{1}{2} \left[\lambda + \frac{\lambda(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1) + 4\alpha \sqrt{J_2}}{\sqrt{(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4\alpha J_2}} \right] \quad (4.19)$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \quad (4.20)$$

Para $\sin 3\theta \leq 0$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = \frac{c_1 c_2 \cos 3\theta \sin[1/3 \arccos(-c_2 \sin 3\theta)]}{\sin[\arccos(-c_2 \sin 3\theta)]} \quad (4.21)$$

Para $\sin 3\theta > 0$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = \frac{c_1 c_2 \cos 3\theta \sin[\pi/3 - 1/3 \arccos(c_2 \sin 3\theta)]}{\sin[\arccos(c_2 \sin 3\theta)]} \quad (4.22)$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\sqrt{J_2}}{2} \left[1 + \frac{\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1}{\sqrt{(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4\alpha J_2}} \right] \quad (4.23)$$

4.1.2 Modelo para o concreto fissurado

Em geral, nas estruturas de concreto armado, as fissuras aparecem já nas condições de serviço. Isto decorre do fato da resistência à tração do concreto ser muito inferior à sua resistência à compressão. A fissuração do concreto é significativa para uma análise precisa de uma estrutura de concreto armado, pois induz um acentuado comportamento não-linear.

Os modelos para descrever o funcionamento do concreto armado fissurado geralmente consideram uma perda da capacidade de carga do concreto causada pela fissuração.

No contexto do método dos elementos finitos, basicamente duas aproximações têm sido usadas para representar a fissuração: modelo de fissuras discretas e o modelo de fissuras distribuídas.

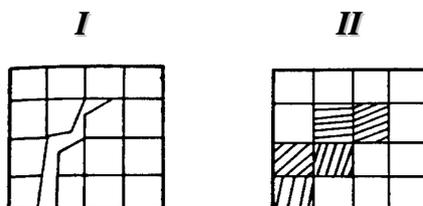
O modelo de fissuras discretas representa cada fissura individualmente, como uma descontinuidade real na malha de elementos finitos. Esta aproximação foi primeiramente usada por Ngo e Scordelis (1967), para analisar uma viga de concreto armado simplesmente apoiada. No presente estudo, as fissuras foram modeladas por separação de nós, que inicialmente ocupavam a mesma posição no espaço. Uma restrição óbvia a este modelo é que as fissuras deveriam se formar ao longo da borda dos elementos. Desta forma, a resposta é fortemente dependente da malha de elementos finitos. Além disso, após a formação da fissura a topologia da malha varia, exigindo procedimentos de atualização desta, que demandam muito tempo computacional. Mais recentemente, têm sido usados refinamentos de malha, através de métodos auto-adaptativos, de forma que novos elementos de fronteira são inseridos ao longo da propagação das fissuras.

Estas duas situações correspondem a um compromisso entre a sofisticação do modelo, que leva a resultados que sejam suficientemente precisos, e o tempo de cálculo do modelo de análise do sistema, de modo a torná-la exeqüível. Por isso, este modelo é apropriado apenas para problemas envolvendo somente poucas fissuras dominantes.

Já o modelo de fissuras distribuídas não leva em conta a descontinuidade real da malha. Pelo contrário, o concreto fissurado permanece contínuo e as propriedades materiais são modificadas para considerar o dano devido à fissuração. O concreto é inicialmente isotrópico, porém a fissuração induz-lhe anisotropia. Depois de fissurado, admite-se que o concreto torna-se ortotrópico, com os eixos materiais principais orientados no sentido das direções de fissuração. As propriedades materiais variam dependendo do estado de deformação e de tensão. O módulo de elasticidade longitudinal reduz-se na direção perpendicular ao plano da fissura e o efeito de Poisson é usualmente desprezado. O módulo de elasticidade transversal, paralelo ao plano da fissura, também é reduzido. O modelo de fissuras distribuídas (smearred crack) é atrativo do ponto de vista computacional, uma vez

que a topologia da malha não muda no decorrer da análise, e só a relação tensão-deformação deve ser atualizada quando ocorre a fissuração.

A Fig. 4.5 ilustra os dois modelos alternativos descritos para modelar as fissuras numa direção não conhecida "a priori".



I – fissuras discretas
II – fissuras distribuídas

FIGURA 4.5 - Modelos alternativos para modelar a fissuração

Foi adotado, neste trabalho, um modelo de fissuras distribuídas. A seguir faz-se a descrição deste modelo, abrangendo os seguintes itens:

- a) um critério de fissuração;
- b) uma regra para consideração da colaboração do concreto entre fissuras (tension stiffening);
- c) um modelo para transferência de tensões de corte (shear transfer).

4.1.2.1 Critério de fissuração

Antes de fissurar, o concreto tracionado é um material elástico-linear, e sua lei constitutiva é dada pela versão isotrópica da relação $\{\sigma\} = [D].\{\varepsilon\}$.

A avaliação da fissuração do concreto, no programa desenvolvido neste trabalho, é feita através do nível de tensões dos pontos de integração dos elementos de concreto. Verifica-se, deste modo, se o estado de tensão correspondente a cada ponto de integração alcançou a superfície de ruptura, apresentada no item 4.1.1.1.

A tensão principal σ_1 de tração, é determinada utilizando os invariantes de tensões I_1, J_2 e o ângulo de similaridade θ

$$\sigma_1 = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3} \quad (4.24)$$

Para distinguir se o ponto atingiu a superfície de ruptura por fissuração ou por esmagamento do concreto, adotou-se o critério proposto pelo boletim nº 156 do CEB (1983):

se $\sigma_1 \geq \frac{f_{tm}}{2}$, o ponto de integração fissurou;

se $\sigma_1 < \frac{f_{tm}}{2}$, o ponto de integração esmagou.

Caso o ponto de integração tenha fissurado, admite-se que uma fissura tenha se formado num plano ortogonal a tensão σ_1 . Portanto, o comportamento do concreto não é mais isotrópico e sim ortotrópico, e os eixos materiais locais coincidem com as direções principais de tensões.

Para carregamentos posteriores, uma fissura secundária pode ocorrer no ponto de integração que estava previamente fissurado em uma direção. Neste caso, utiliza-se o procedimento da fissura fixa, onde se mantém a direção do primeiro conjunto de fissuras fixa e determina-se a tensão de tração na direção perpendicular ao plano da fissura. Se esta tensão exceder a resistência do concreto à tração, então um novo conjunto de fissuras será formado, perpendicular ao já existente, e todas as componentes de tensão serão zeradas.

4.1.2.2 Colaboração do concreto entre fissuras

O comportamento carga-deslocamento do concreto armado é fortemente influenciado pela interação de seus dois componentes: o concreto e o aço. A aderência entre estes materiais é que torna possível a transmissão de esforços.

O efeito da aderência evidencia-se a partir da fissuração do concreto. No estado não-fissurado, o carregamento produz tensões principais de tração e compressão nos

materiais. Com o aumento da carga, atinge-se a resistência à tração do concreto. Neste momento, ocorre uma ruptura local do material e a fissura se forma. Após a fissuração, o concreto entre as fissuras continua resistindo a esforços de tração. Estes esforços são transmitidos ao concreto pelos mecanismos de aderência. Negligenciar esta capacidade de resistência implica subestimar significativamente a rigidez pós-fissuração a níveis de carga de serviço. Este fenômeno é conhecido como "efeito da rigidez à tração" (tension stiffening effect). Portanto, na análise de estruturas de concreto armado sob cargas de serviço, é fundamental a consideração da capacidade resistente do concreto entre as fissuras.

A qualidade da aderência é decisiva para a distribuição e para a abertura das fissuras. Ela depende das características das barras da armadura (conformação superficial e diâmetro), da história de carga (especialmente se ocorrerem carregamentos cíclicos), da resistência do concreto e das tensões normais à superfície da barra.

A possibilidade de incorporação da aderência nos cálculos, através do método dos elementos finitos, depende da forma de conectar os elementos de aço aos de concreto. Existem duas formas distintas para se modelar esta ligação.

Na primeira alternativa, os elementos de concreto e aço são ligados diretamente. Neste caso, admite-se completa compatibilidade de deformações entre o aço e o concreto, e modifica-se a lei do material (concreto ou aço), para considerarem-se os mecanismos de interação. Este foi o modelo desenvolvido por Clure (1994), que considera aderência perfeita entre o concreto e o aço. Este efeito foi modelado indiretamente pela introdução de um ramo descendente suave na curva tensão-deformação do concreto tracionado. Desse modo, admite-se que as perdas de resistência à tração no concreto ocorrem gradualmente depois da fissuração. Isto é equivalente a considerar o concreto como um material com amolecimento em tração.

Na segunda forma de incorporar este efeito, usam-se elementos especiais de aderência. Nestes, as propriedades da aderência são modeladas por relações tensão de aderência-deslizamento. As relações entre a tensão de aderência e o deslizamento relativo entre os materiais considerados, apresentadas pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), serão apresentadas no item 4.5.

Segundo a formulação desenvolvida por Claure (1994), admitindo-se que a tensão σ , transmitida através da fissura, é uma função de sua abertura de fissura w , a energia de fratura é definida como

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma(w) dw \quad (4.25)$$

onde G_f representa a energia necessária para propagar uma fissura de tração de área unitária.

O modelo de fissuras distribuídas não é adequado para representar fissuras individuais. Sendo assim, a abertura de fissura w deve ser distribuída, ao longo de um certo comprimento, na forma de uma deformação de fissura equivalente, ϵ_c . Esta deformação está relacionada com o quociente da abertura de fissura física pelo seu comprimento característico, l_c . Obtém-se esta relação idealizando um volume de controle V contendo uma fissura com área S , conforme ilustrado na Fig. 4.6.

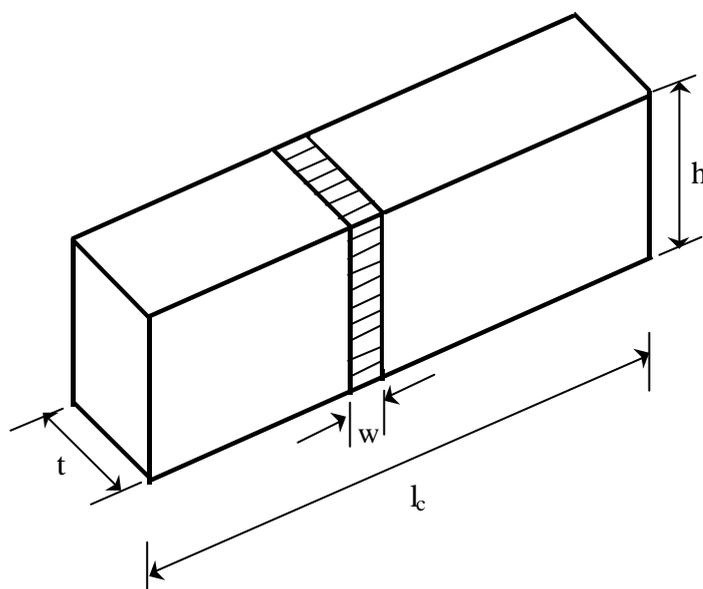


FIGURA 4.6 - Ilustração do comprimento característico em um volume de controle prismático

Admite-se que, uma vez formada a fissura, toda deformação inelástica, sob o volume de controle, ocorre na fissura e o resto do volume mantém-se elástico.

A taxa de energia dissipada na fissura é dada por

$$\dot{\pi}_s = \int_s \sigma \cdot \dot{w} \cdot ds \quad (4.26)$$

Pela hipótese de que o volume de controle fica submetido ao mesmo estado de tensões que a fissura, mas afetado pela deformação equivalente ϵ_c , a taxa de dissipação de energia no volume é

$$\dot{\pi}_v = \int_v \sigma \dot{\epsilon}_c dv \quad (4.27)$$

Supõe-se que a tensão, as taxas de deformação e de abertura de fissura são constantes no volume a considerar. Então, as equações da taxa de energia dissipada na fissura e no volume de controle fornecem a relação entre a taxa de abertura de fissura e a taxa de deformação de fissura:

$$\dot{w} s = \dot{\epsilon}_c v \Rightarrow dw = \left(\frac{v}{s} \right) d\epsilon_c = l_c d\epsilon_c \quad (4.28)$$

Esta relação define o comprimento característico como o quociente entre o volume de controle e a superfície da fissura

$$l_c = \frac{v}{s} \quad (4.29)$$

Aqui, é usada uma função exponencial para simular o efeito de amolecimento (strain-softening), de modo que

$$\sigma = E_0 \epsilon_0 \left(\exp \left(- \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{\alpha} \right) \right) \text{ para } \epsilon_0 \leq \epsilon \leq \epsilon_m \quad (4.30)$$

onde:

E_0 é o módulo de elasticidade longitudinal;

ϵ é a deformação na fissura; α é o parâmetro de amolecimento e;

$\epsilon_0 = f_t / E_0$ é a deformação de tração nominal na zona fissurada.

A curva adotada é mostrada na Fig. 4.7.

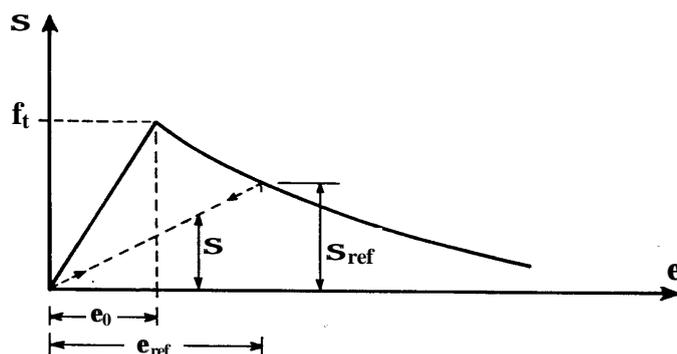


FIGURA 4.7 - Curva tensão-deformação para o concreto tracionado

O parâmetro de amolecimento α' fica determinado pelo cálculo da integral da equação (4.25) e pela introdução da relação entre a abertura de fissura w e a deformação de fissura ϵ_c . Isto conduz a

$$\alpha' = \frac{\left(G_f - \frac{E_0 \epsilon_0^2 l_c}{2} \right)}{E_0 \epsilon_0 l_c} > 0 \quad (4.31)$$

No cálculo por elementos finitos, o volume de controle, correspondente à fissura, é o volume associado com o ponto de integração em um dado elemento. No presente trabalho, o comprimento característico é determinado, para cada ponto de integração, por $l_c = dV^{1/3}$, onde dV é o volume de concreto representado pelo ponto de integração.

A redistribuição de tensões, devido à fissuração em outros pontos de integração ou carregamentos posteriores, pode eventualmente forçar algum ponto previamente fissurado a fechar total ou parcialmente. Esta possibilidade é considerada neste modelo. Se a deformação atual ϵ é pequena comparada com a deformação ϵ_{ref} , armazenada como a máxima deformação de tração alcançada através da fissura pelo ponto de integração em questão; a tensão normal à fissura, σ , é calculada por

$$\sigma = \frac{\sigma_{ref}}{\epsilon_{ref}} \epsilon \quad (4.32)$$

onde σ_{ref} é a tensão interpolada correspondente à deformação ϵ_{ref} . A trajetória desta "descarga" secante é visualizada pela Fig. 4.7. A reabertura da fissura segue a mesma trajetória até ϵ_{ref} ser excedida. Depois a tensão é calculada por (4.30). O programa

implementado permite, alternativamente, a utilização do diagrama tensão-deformação apresentado por Prates Júnior (1992), para simular a colaboração do concreto entre as fissuras. A Fig. 4.8 ilustra este diagrama.

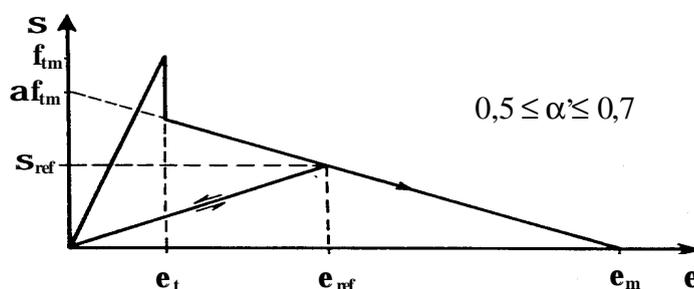


FIGURA 4.8 - Curva tensão-deformação alternativa para o concreto tracionado

No processo computacional, as componentes de tensão e deformação para um ponto no interior de uma peça de concreto são expressas em função do sistema de coordenadas x , y , z . Para obtenção da tensão no concreto fissurado, deve-se determinar as direções principais de deformações, visto que a fórmula (4.30) é válida somente no sistema local dos eixos materiais. Torna-se, portanto, necessária a rotação para a direção da fissura.

É possível determinar, a partir das componentes de tensão, referidas ao sistema x , y , z , as componentes de tensão para a direção da fissura, através da matriz de rotação do sistema global para o sistema local

$$\{\sigma^L\} = [R^L] \{\sigma^G\} \quad (4.33)$$

onde o índice L denota o sistema local e o índice G denota o global.

No sistema local, aplicam-se as fórmulas (4.30) ou (4.32), para calcular as tensões normais ao plano da fissura. A componente de tensão tangencial local é $\tau^L = G_c \gamma^L$, onde G_c é o módulo de elasticidade transversal reduzido e será definido no próximo item.

Com as tensões ajustadas do ponto fissurado, retomam-se as componentes de tensões no sistema global de coordenadas

$$\{\sigma^G\} = [R^G] \{\sigma^L\} \quad (4.34)$$

4.1.2.3 - Rigidez transversal do concreto fissurado

Como uma regra geral, as primeiras fissuras, que aparecem no concreto sob carga, são perpendiculares à direção da mais alta tensão principal de tração do concreto. As direções principais se modificam, por mudanças no carregamento ou por não-linearidades da estrutura, produzindo deslocamentos relativos das faces rugosas da fissura. Isto causa o surgimento de tensões de corte no plano da fissura. O valor destas tensões de corte depende das condições locais na fissura. O principal mecanismo de transferência de esforços transversais é o engrenamento dos agregados e as principais variáveis envolvidas são o tipo e a granulometria dos mesmos. Além disto, o efeito de pino da armadura que cruza a fissura (dowell effect) tem também importância nesta transferência de esforços, sendo as principais variáveis envolvidas o diâmetro das barras, a taxa de armadura e a inclinação das barras em relação ao plano de fissura. Ambos mecanismos são controlados pela abertura da fissura. A capacidade de transferência de corte é reduzida com o aumento da abertura da fissura.

A inclusão direta destes mecanismos num modelo de fissuras distribuídas é complexa. Emprega-se, geralmente, uma aproximação simplificada para levar em conta a capacidade de transferência de corte no concreto fissurado. O processo consiste em atribuir ao módulo de elasticidade transversal, correspondente ao plano fissurado, um valor reduzido, G_c , definido segundo Hinton (1988) como:

$$G_c = \beta G_0 \quad (4.35)$$

onde G_0 é o módulo de elasticidade transversal do concreto fissurado e β é um fator de redução compreendido entre 0 e 1. Se a fissura fechar o módulo G_0 é adotado, novamente.

Um valor constante para o fator de redução foi usado em diversas análises. Contudo, é mais coerente relacionar o valor de β com uma medida distribuída da abertura da fissura, ou seja, com a deformação de tração normal ao plano da fissura. No presente trabalho, usa-se a seguinte expressão, proposta por Hinton (1988),

$$\beta = 1 - \left(\frac{\varepsilon_t}{0,005} \right)^{k_t} \quad (4.36)$$

onde ε_t é a deformação de tração fictícia normal ao plano da fissura e k_1 é um parâmetro que, segundo Cervenka (1985), varia de 0,3 até 1,0. Nas aplicações do programa, apresentadas neste trabalho, foi utilizado o valor mínimo para k_1 .

4.2 MODELO ELASTOPLÁSTICO PARA O AÇO

Nas estruturas de concreto armado, as barras de aço resistem, fundamentalmente, a esforços na sua direção. Desta forma, necessita-se apenas de um modelo uniaxial para descrever seu comportamento.

No modelo implementado, o aço é representado por um diagrama tensão-deformação bilinear. O aço é considerado um material elastoplástico com endurecimento. Admite-se que o aço possui o mesmo comportamento em tração e compressão.

O valor do módulo de elasticidade longitudinal adotado para o aço, E_s , é tomado como sendo igual a 210.000 MPa. Para o aço de classe A, com dureza natural, adotou-se um diagrama elastoplástico perfeito, onde o material possui um comportamento elástico linear até atingir a tensão de escoamento f_y , conforme visto na Fig. 4.9. Após este limite, o aço deforma-se plasticamente até atingir a ruptura, com tensão $\sigma_s = f_y$ e endurecimento nulo ($H'_s = 0$).

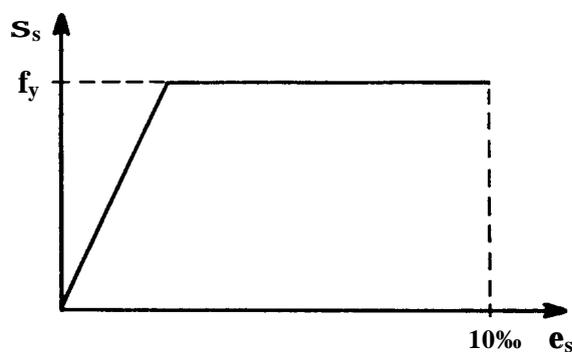


FIGURA 4.9 - Diagrama tensão-deformação para o aço tipo A

O aço da classe B, encruado a frio, possui comportamento elastoplástico com endurecimento. Por simplificação, adotou-se um diagrama tensão-deformação com endurecimento linear, conforme ilustra a Fig. 4.10.

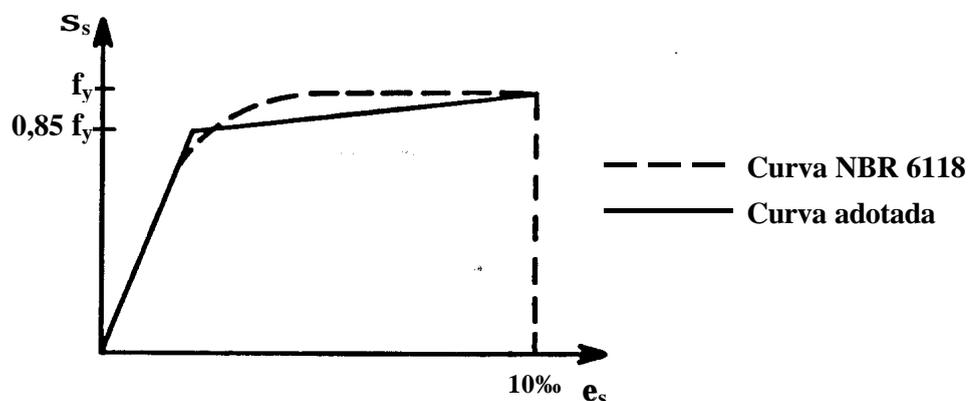


FIGURA 4.10 - Diagrama tensão-deformação para o aço tipo B

Deste modo, após atingir o limite de escoamento, admite-se que as deformações no aço tem um endurecimento definido por

$$H'_s = \frac{d\sigma_s}{d\varepsilon_p} = \frac{\Delta\sigma_s}{\Delta\varepsilon_p} = \frac{0,15f_y}{\left(10\% - \frac{0,85f_y}{E_s}\right) - \frac{0,15f_y}{E_s}}$$

$$H'_s = \frac{0,15f_y}{10\% - \frac{f_y}{E_s}} \quad (4.37)$$

4.3 MODELO PARA AS LÂMINAS DE FIBRA DE CARBONO

As lâminas de fibra de carbono são um material relativamente novo, caracterizado por uma combinação de baixo peso, de alta resistência e de grande rigidez. O seu módulo de elasticidade e a sua resistência dependem do grau de orientação das fibras, ou seja, do paralelismo entre os eixos das mesmas.

As fibras de carbono são fabricadas através da pirólise de fibras orgânicas em uma atmosfera inerte. A temperatura de pirólise pode variar entre 1000° e 3000° C, sendo que, temperaturas de processo mais altas geralmente conduzem a fibras com maior módulo de elasticidade.

As lâminas de fibra de carbono têm sido utilizadas para reforço de vigas, substituindo as chapas de aço, por suas vantagens, como:

- ✓ facilidade e rapidez de instalação, por ser um material de fácil manuseio e bastante leve, podendo ser coladas sem necessidade de escoramento;
- ✓ durabilidade, visto que sistemas de reforço com fibra de carbono em serviço por dez anos não apresentaram nenhuma deterioração, acrescentando-se que não há necessidade de proteção contra corrosão;
- ✓ desempenho, podendo ser constatado sua grande capacidade de resistência a flexão e ao cisalhamento dos componentes reforçados.

Posteriormente, serão analisados nesta dissertação exemplos de vigas reforçadas com lâminas de fibra de carbono. Segundo estudos realizados por Beber (1999) e Silva (1999), este material têm como principal característica a elevada resistência a tração, apresentando comportamento linear até atingir a ruptura.

Desta forma, o comportamento das lâminas de fibra de carbono é um caso particular do modelo elastoplástico com endurecimento, definido anteriormente para o aço.

4.4 MODELO VISCOELÁSTICO PARA O CONCRETO

O concreto, submetido a cargas de longa duração, sofre uma deformação instantânea, seguida por uma deformação devida à fluência (creep), que se desenvolve ao longo do tempo. Desta forma, mesmo sob tensões constantes, as deformações no concreto aumentam no decorrer do tempo, conforme ilustrado na Fig. 4.11.

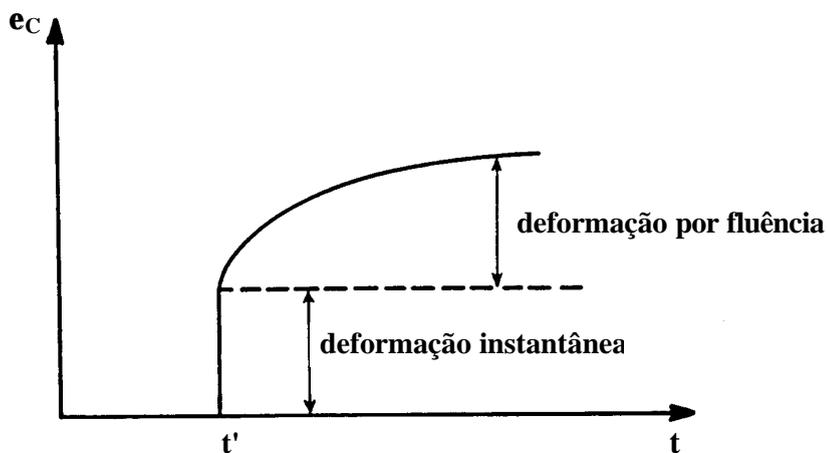


FIGURA 4.11 - Evolução da deformação por fluência para tensão constante aplicada em t'

Este fenômeno manifesta-se mais acentuadamente nas idades imediatamente posteriores ao aparecimento das tensões, estando ligado a fenômenos de diversos tipos, relacionados com a circulação de água na massa de concreto e sua dissipação para o exterior. Por isto, em sua magnitude e desenvolvimento no tempo, influem fundamentalmente a umidade e temperatura ambiente, a idade de carregamento e o tempo transcorrido após sua aplicação, as dimensões da peça, as condições de cura, a composição do concreto e a velocidade de endurecimento do cimento.

Após a concretagem e a cura do concreto, pode-se encontrar água em seu interior, alojada em pequenos vasos capilares. Essa água é o resíduo da reação de hidratação do cimento, resíduo esse que sempre irá existir, uma vez que a relação água-cimento necessária para realizar a reação é menor que a relação água-cimento mínima adotada para que o concreto seja trabalhável. Com o tempo, essa água irá evaporar e os vasos capilares, sem a pressão interna da mesma, serão esmagados, provocando uma perda de volume denominada retração (shrinkage), conforme visto na Fig. 4.12.

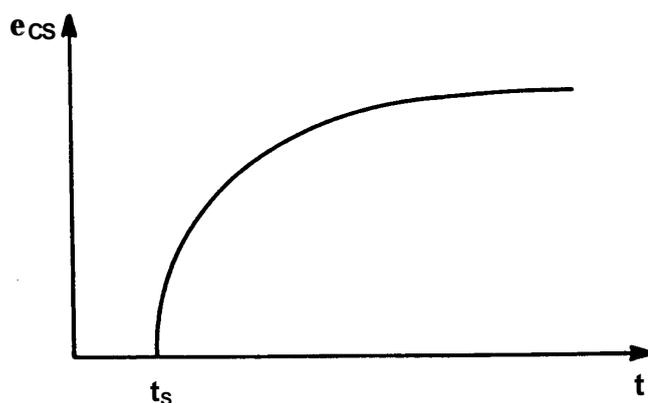


FIGURA 4.12 - Curva de deformação por retração

Esta deformação ao longo do tempo é independente da tensão aplicada e está ligada a fenômenos semelhantes aos da fluência, relacionados com a água que em parte hidrata os componentes do cimento e, em parte, fica livre dentro da massa de concreto.

No estudo de estruturas de concreto, a consideração das deformações por fluência e retração é de indiscutível relevância, pois seus valores são da mesma ordem de grandeza das deformações imediatas, para níveis usuais de tensão. A seguir discute-se com maiores detalhes como foram considerados estes fenômenos.

4.4.1 Fluência

No domínio das tensões de utilização, as deformações por fluência, devidas a tensões aplicadas em dois instantes diferentes, são consideradas como aditivas (hipótese da superposição de efeitos). Desta hipótese, tem-se que a deformação por fluência, sob tensão constante, está ligada linearmente à tensão.

De acordo com o código modelo de 1990 do CEB, a superposição linear é normalmente aceita para níveis de tensões menores que $0,4f_{cm}$ (resistência à compressão média do concreto). Neste estudo, por trabalhar-se nesta faixa de tensões, adotou-se este comportamento linear.

A inclusão da fluência no modelo computacional e sua respectiva formulação, bem como a determinação dos parâmetros necessários, foram apresentadas por Clauere (1994), que adotou um modelo reológico tomado por uma cadeia de elementos Maxwell para representar o comportamento dependente do tempo do concreto (Fig. 4.13).

Esta cadeia é constituída por uma associação, em paralelo, de elementos compostos por uma mola em série com um amortecedor viscoso.

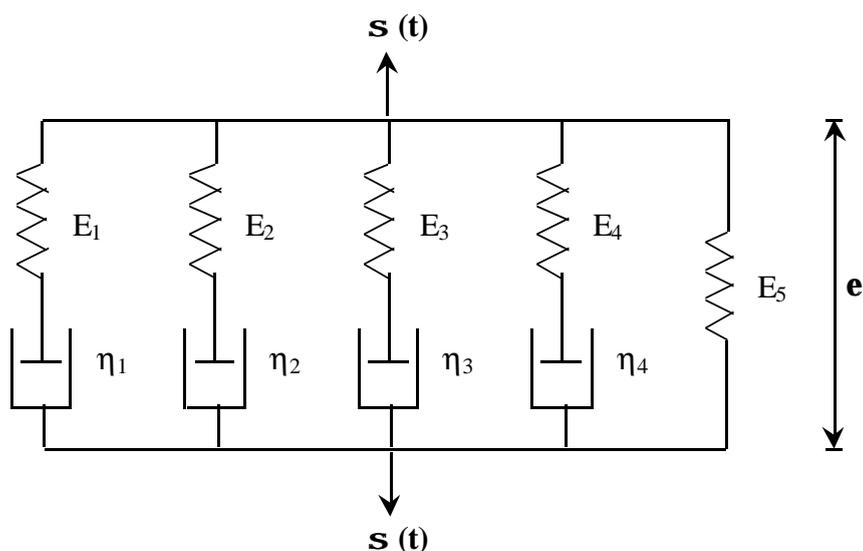


FIGURA 4.13 - Modelo de cadeias Maxwell

Este modelo pode ser obtido, como um caso particular do modelo elasto-viscoplástico (Fig 2.6), admitindo-se que todos os elementos de atrito possuam tensão de plastificação nula.

4.4.2 Retração

A redução de volume do concreto, provocada pela perda gradual de umidade por evaporação, depende de diversos fatores, sendo os mais importantes o tipo de cimento, as dimensões do elemento, a umidade e a temperatura ambientes, e a estrutura de poros.

O valor da retração varia consideravelmente com o tamanho e a forma das peças, porque a evaporação ocorre na superfície do concreto, sendo uma função da relação área/volume. A retração diminui com o aumento das dimensões.

As deformações por retração do concreto são tratadas como deformações impostas à estrutura. A exemplo da fluência, a retração não produz diretamente tensões no concreto. Por isso, para avaliação da tensão no concreto, desconta-se do valor da deformação total, obtida a partir do vetor de deslocamentos, a parcela de deformação que foi originada diretamente pela retração.

A determinação dos parâmetros de retração pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), bem como sua formulação para a implementação computacional, encontram-se descritas por Claire (1994).

4.5 MODELO DA LIGAÇÃO ENTRE OS MATERIAIS

O modelo de aderência entre os materiais adotado neste estudo segue a relação tensão de aderência x deslizamento, indicada pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), como mostra a Fig. 4.14. Para preservar a notação utilizada no Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) será utilizado “ τ ”, para representar a tensão de aderência, e “ s ”, como o deslizamento. No capítulo 3 utilizou-se para estas grandezas a notação “ τ_b ” e “ w_b ”, respectivamente.

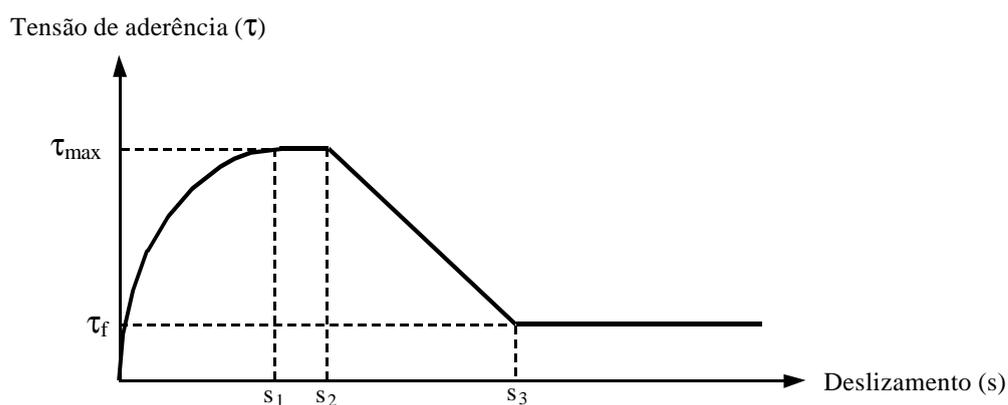


FIGURA 4.14 – Relação tensão de aderência-deslizamento

A determinação da tensão de aderência entre o concreto e as barras de armadura (τ), Fig. 4.14, pode ser feita em função do deslizamento relativo s , de acordo com as seguintes expressões:

$$\tau = \tau_{\text{máx}} \cdot \left(\frac{s}{s_1} \right)^\alpha \quad \text{para } 0 \leq s \leq s_1 \quad (4.38)$$

$$\tau = \tau_{\text{máx}} \quad \text{para } s_1 < s \leq s_2 \quad (4.39)$$

$$\tau = \tau_{\text{máx}} - (\tau_{\text{máx}} - \tau_f) \cdot \left(\frac{s - s_2}{s_3 - s_2} \right) \quad \text{para } s_2 < s \leq s_3 \quad (4.40)$$

$$\tau = \tau_f \quad \text{para } s_3 < s \quad (4.41)$$

O Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) fornece os valores dos parâmetros necessários para a definição da tensão de aderência entre o concreto e a armadura, como mostram os quadros 4.1 e 4.2.

QUADRO 4.1 – Parâmetros para a definição da tensão de aderência

	Concreto não Confinado ①		Concreto Confinado ②	
	Boas condições de aderência	Outras condições de aderência	Boas condições de aderência	Outras condições de aderência
s_1	0,6 mm	0,6 mm	1,0 mm	1,0 mm
s_2	0,6 mm	0,6 mm	3,0 mm	3,0 mm
s_3	1,0 mm	2,5 mm	Espaçamento livre entre as nervuras	Espaçamento livre entre as nervuras
α	0,4	0,4	0,4	0,4
$\tau_{\text{máx}}$	$2,0 \cdot \sqrt{f_{\text{ck}}} \text{ [MPa]}$	$1,0 \cdot \sqrt{f_{\text{ck}}} \text{ [MPa]}$	$2,5 \cdot \sqrt{f_{\text{ck}}} \text{ [MPa]}$	$1,25 \cdot \sqrt{f_{\text{ck}}} \text{ [MPa]}$
τ_f	$0,15 \cdot \tau_{\text{máx}}$	$0,15 \cdot \tau_{\text{máx}}$	$0,40 \cdot \tau_{\text{máx}}$	$0,40 \cdot \tau_{\text{máx}}$

① Falha por separação do concreto e da armadura.

② Falha por cisalhamento do concreto entre as nervuras.

QUADRO 4.2 – Parâmetros para a definição da tensão de aderência para barras lisas

	fio encruado a frio		barra laminada a quente	
	Boas condições de aderência	Outras condições de aderência	Boas condições de aderência	Outras condições de aderência
$s_1 = s_2 = s_3$	0,01 mm	0,01 mm	0,01 mm	0,01 mm
α	0,5	0,5	0,5	0,5
$\tau_{\text{máx}} = \tau_f$	$0,1 \cdot \sqrt{f_{ck}}$ [MPa]	$0,05 \cdot \sqrt{f_{ck}}$ [MPa]	$0,3 \cdot \sqrt{f_{ck}}$ [MPa]	$0,15 \cdot \sqrt{f_{ck}}$ [MPa]

Os parâmetros utilizados para o cálculo da tensão de aderência entre o concreto e o reforço de fibra de carbono foram obtidos através de estudos realizados por Silva (1999), e são resumidos no quadro 4.3.

QUADRO 4.3 - Parâmetros para a definição da tensão de aderência para lâminas de fibra de carbono

	CFRP
s_1	0,08 mm
s_2	0,08 mm
s_3	0,65 mm
α	0,6
$\tau_{\text{máx}}$	3,5 MPa
τ_f	$0,1 \cdot \tau_{\text{máx}}$

5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MODELO DE ADERÊNCIA

A etapa de implementação do novo modelo de aderência compreendeu a formulação do modelo, a montagem da matriz de rigidez para o elemento de concreto armado e a implementação do modelo de ligação entre os materiais. Este capítulo discute como ocorrerem estes passos.

5.1 FORMULAÇÃO DO MODELO

A formulação do modelo de aderência proposto por Elwi & Hrudey (1989), considera o deslizamento que ocorre entre o concreto e a armadura ou o reforço através da inclusão de um grau de liberdade adicional na direção do eixo longitudinal da barra

Nesta formulação, a deformação, na forma incremental, é obtida através do campo de incremento de deslocamentos do elemento de concreto e do deslizamento ao longo do segmento de armadura, como foi detalhado no item 3.3.

5.2 MATRIZ DE RIGIDEZ PARA O ELEMENTO DE CONCRETO ARMADO

Na consideração de aderência perfeita entre os materiais constitutivos do concreto armado (concreto e aço), Clure (1994) demonstra que os deslocamentos ao longo da barra de armadura são obtidos a partir dos deslocamentos nodais dos elementos de concreto correspondentes. Por conseguinte, a matriz de rigidez da armadura tem dimensão idêntica à matriz de rigidez do elemento de concreto. Logo, sendo $[K_C]$ a matriz de rigidez do concreto e $[K_S]$ a da armadura, a matriz de rigidez total resulta da superposição, termo a termo, das duas matrizes:

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_c] + \sum_{i=1}^{n_b} [\mathbf{K}_s] \quad (5.1)$$

onde n_b denota o número de segmentos da barra no interior do elemento de concreto.

Nesta dissertação, considerou-se o deslizamento relativo entre o aço e o concreto (aderência imperfeita) e este efeito de deslocamento relativo entre os dois materiais será modelado pela introdução de novos graus de liberdade ao sistema.

Como se pode observar na expressão (3.45), a matriz de rigidez total para cada elemento resulta da matriz de rigidez do concreto $[\mathbf{K}_{ss}]$, acrescida na sua diagonal de uma matriz $[\mathbf{K}_{bb}]$, referente aos novos graus de liberdades impostos na direção da barra de armadura, e outras duas matrizes $[\mathbf{K}_{sb}]$ e $[\mathbf{K}_{bs}]$, referentes ao cruzamento dos graus de liberdade do elemento de concreto com os novos graus de liberdade decorrentes da aderência imperfeita.

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{ss}] & [\mathbf{K}_{sb}] \\ [\mathbf{K}_{bs}] & [\mathbf{K}_{bb}] \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Na presente dissertação, para a implementação computacional do modelo proposto por Elwi e Hrudey (1989), surge uma dificuldade: definir qual relação constitutiva adotar para o concreto. A partir da fissuração do concreto, o deslizamento entre concreto e armadura torna-se mais significativo, aumentando a importância desta relação constitutiva. Nesta situação, o modelo constitutivo para o concreto passa a depender, entre outros fatores, da abertura das fissuras, da taxa de armadura, do diâmetro e da direção das barras em relação às fissuras, da granulometria dos agregados e da resistência do concreto.

Para contornar esta dificuldade, adotou-se a solução de desacoplar os graus de liberdade relativos às tensões normais e de aderência nas barras de armadura. Isto é feito anulando-se as matrizes $[\mathbf{K}_{bs}]$ e $[\mathbf{K}_{sb}]$, em (3.45). Assim, relativamente às tensões normais, emprega-se um modelo que considera aderência perfeita entre concreto e armadura. A relação constitutiva para o concreto, neste caso, é amplamente conhecida e utilizada (modelos de “*tension stiffening*”). Neste trabalho, adotou-se a relação empregada por Claire (1994), ilustrada na Fig. 4.7.

Por outro lado, preserva-se a condição de equilíbrio entre tensões normais e de aderência estabelecida pela relação (3.35). Obtém-se, desta maneira, um modelo que traz previsões confiáveis para as tensões normais na armadura e que possibilita a determinação dos deslizamentos entre concreto e armadura, bem como das tensões de aderência

Em função do desacoplamento dos graus de liberdade relativos às tensões normais e de aderência nas barras de armadura, foram anuladas as matrizes $[K_{bs}]$ e $[K_{sb}]$, sendo, portanto, a expressão (5.3) como a da matriz de rigidez para o elemento de concreto armado

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{ss}] & [0] \\ [0] & [K_{bb}] \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Deste modo, observa-se que, para cada segmento de armadura localizado dentro de um elemento de concreto, a matriz de rigidez total será a matriz de rigidez do concreto acrescida de outra matriz $[K_{bb}]$, como é ilustrado pela Fig. 5.1.

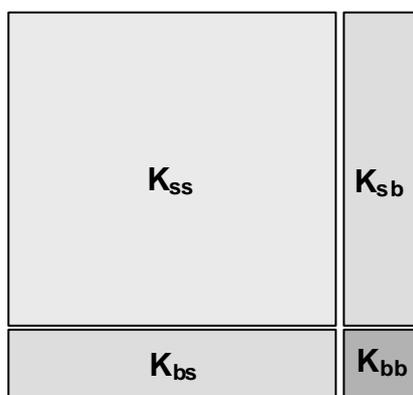


FIGURA 5.1 – Matriz de rigidez para o elemento de concreto armado, com um segmento de armadura em seu interior.

E, sucessivamente, para n_b segmentos de armadura incorporados no interior do elemento de concreto, tem-se a forma apresentada na Fig. 5.2.

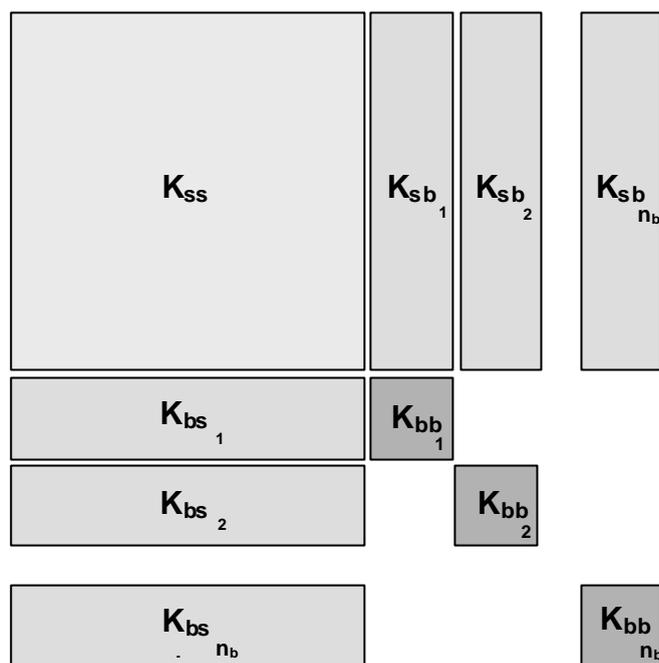


FIGURA 5.2 - Matriz de rigidez para o elemento de concreto armado, com n_b segmentos de armadura em seu interior.

5.2.1 Montagem da matriz de rigidez do elemento de concreto armado

O programa computacional utilizado para a implementação do modelo de aderência, desenvolvido por Claire (1994), montava a matriz de rigidez total para cada elemento de concreto armado como uma dimensão dependente do número de nós do elemento de concreto e do número de graus de liberdade. Dimensão esta, portanto, que era constante para todos os elementos analisados.

No presente modelo, que considera a degradação da aderência entre as barras de armadura ou reforço e o concreto adjacente, através da consideração de graus de liberdade adicionais, se fez necessária a criação de uma variável para realizar o redimensionamento da matriz de rigidez total para cada elemento de concreto analisado. As dimensões desta matriz dependem do número de segmentos de armadura, que terão o deslizamento considerado, incorporados no interior deste elemento.

Para tanto, foi acrescentado como dado de entrada no programa, juntamente com a geometria e a posição da armadura ou reforço, um índice que mostra, para cada um destes elementos, se o deslizamento deveria ser, ou não, considerado.

O programa executa inicialmente, um laço que percorre os elementos de concreto, detectando em cada elemento o número de barras localizadas em seu interior, como já foi descrito na capítulo 3, e registrando quais barras terão o deslizamento considerado.

Se o elemento finito utilizado para a armadura é o quadrático, cada segmento encontrado acrescenta três nós a mais ao elemento de concreto, aumentando, deste modo, a dimensão da matriz de rigidez do referido elemento. As barras que não tem o deslizamento considerado, não acrescentam nó algum ao elemento de concreto, não causando acréscimo às dimensões da matriz de rigidez.

Para cada segmento que terá o deslizamento considerado são criados 3 nós: dois nas extremidades e um intermediário, como mostra a Fig. 5.3.

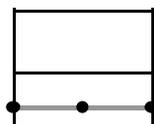


FIGURA 5.3 – Nós do segmento de armadura no interior de um elemento de concreto

Estes nós terão o deslocamento liberado pelo programa apenas na direção do eixo longitudinal do segmento, representando, assim, o deslizamento que ocorre quando há degradação da aderência.

5.2.2 Armazenamento da matriz de rigidez do elemento de concreto armado

A forma de resolução do sistema, conforme Claire (1994), prevê o armazenamento em submatrizes com dimensão até $[3 \times 3]$. Estas submatrizes, cujas dimensões dependem do número de graus de liberdade, correspondem às partições nodais da matriz de rigidez.

Observa-se que a matriz $[K_{bb}]$ incluída no fim da diagonal da matriz do concreto, possui a mesma dimensão das submatrizes particionadas, uma vez que ela considera os graus de liberdade na direção da barra, de cada um dos nós do segmento.

5.2.3 Deslizamento ao longo de uma barra

Ao percorrer cada elemento de concreto para contabilizar o número de segmentos de barra de armadura ali localizados, que terão o deslizamento considerado, o programa numera estes segmentos, e os armazena em um vetor.

Após a resolução do sistema, de posse dos deslocamentos nodais nos pontos considerados, o programa executa um laço sobre cada uma das barras que terá o deslizamento considerado, percorrendo todos os segmentos pertencentes àquela determinada barra, ao longo dos diferentes elementos de concreto.

O arquivo de saída do programa imprime, então, para cada uma das barras considerada, o número do elemento de concreto no qual ela se encontra, bem como os números dos segmentos pertencentes a ela, e o número dos nós intermediários que foram criados. A Fig. 5.4 mostra um trecho deste arquivo, para um exemplo que teve o deslizamento considerado em três barras de armadura.

```

>>>> Barra numero: 1
Numero de segmentos: 5
* Segmento numero: 46
Conetividades: 110 167 168
* Segmento numero: 34
Conetividades: 168 169 170
* Segmento numero: 22
Conetividades: 170 171 172
* Segmento numero: 13
Conetividades: 172 173 174
* Segmento numero: 1
Conetividades: 174 175 109

```

FIGURA 5.4 (a)

```

>>>> Barra numero: 2
Numero de segmentos: 5
* Segmento numero: 47
Conetividades: 112 176 177
* Segmento numero: 35
Conetividades: 177 178 179
* Segmento numero: 23
Conetividades: 179 180 181
* Segmento numero: 14
Conetividades: 181 182 183
* Segmento numero: 2
Conetividades: 183 184 111

```

FIGURA 5.4 (b)

```

>>>> Barra numero: 3
Numero de segmentos: 5
* Segmento numero: 48
Conetividades: 114 185 186
* Segmento numero: 36
Conetividades: 186 187 188
* Segmento numero: 24
Conetividades: 188 189 190
* Segmento numero: 15
Conetividades: 190 191 192
* Segmento numero: 3
Conetividades: 192 193 113

```

FIGURA 5.4 (c)

FIGURA 5.4 (a) (b) e (c) – Trechos do arquivo de saída do programa

Note-se que o nó final de cada segmento coincide com o nó inicial do segmento que lhe é adjacente. Desta forma, unem-se os nós intermediários de cada segmento, criados para aumentar a matriz de rigidez do elemento de concreto armado, de modo que haja garantia da continuidade do deslizamento na armadura como uma barra inteira, e não como vários segmentos aleatórios dentro da peça de concreto, como ilustra a Fig. 5.5.

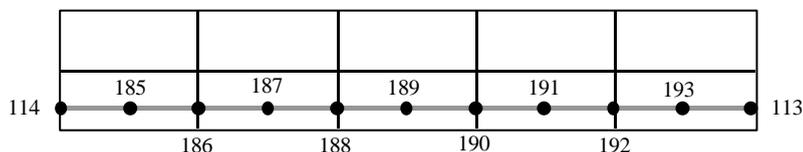


FIGURA 5.5 – Continuidade da barra de armadura nº 3 ao longo da viga

5.3 IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO DE LIGAÇÃO ENTRE OS MATERIAIS

Para o cálculo da tensão de aderência ao longo da armadura ou da interface do reforço com a estrutura de concreto, implementaram-se as equações (4.38) a (4.41). O Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) fornece os valores dos parâmetros necessários para a definição da tensão de aderência nas barras de aço lisas e nervuradas. Para o reforço com lâminas de fibra de carbono foram adotados os parâmetros indicados por Silva (1999).

O objetivo do programa é a modelagem da aderência entre o concreto e materiais adjacentes. Sendo assim, a tensão de aderência deve ser calculada tanto para barras de armadura quanto para reforço, seja este de chapa de aço ou lâmina de fibra de carbono.

Para tanto, uma vez que tanto as barras de armadura quanto o reforço tem o mesmo tipo de entrada no programa (nós e conectividades), foi necessário introduzir nos dados de entrada dois novos índices:

- ❖ O primeiro índice mostra o tipo de elemento que será considerado: barra de armadura (neste caso o programa lê o diâmetro da barra) ou reforço (quando será lida a largura e a espessura do mesmo), e se estes terão o deslizamento considerado ou não.
- ❖ O segundo índice aponta quais parâmetros (s_1 , s_2 , s_3 , α ...) deverão ser utilizados para o cálculo da tensão de aderência, do referido material, no diagrama da Fig 4.14 (barra lisa ou nervurada, ou lâmina de fibra de carbono).

6 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

No presente capítulo, o modelo numérico desenvolvido é aplicado na análise de vigas de concreto armado. Comparam-se os resultados obtidos pelo programa computacional com os resultados de análises experimentais disponíveis com o intuito de avaliar a validade do modelo proposto.

Os exemplos foram testados com uma malha de elementos finitos de concreto com dez elementos tridimensionais de vinte nós. Malhas mais refinadas não apresentaram diferenças significativas com relação a esta malha.

O programa foi desenvolvido de modo a tornar os resultados dos testes independentes de ajustes de parâmetros. Desta forma, como entrada de dados, necessitam-se somente dados referentes à geometria e topologia da peça, ao tipo de carregamento, às propriedades do concreto, aço e elemento de reforço, e às condições ambientais.

Para os exemplos, aplicou-se uma regra de integração numérica, recomendada por Hinton (1988), que utiliza apenas 15 pontos de integração, dispostos simetricamente no domínio tridimensional do elemento. Esta regra diminui, consideravelmente, o esforço computacional e apresenta ótimos resultados quando comparada à regra de integração numérica convencional.

Foram analisados quatro exemplos. No primeiro, foram comparados resultados experimentais de Groot (1981), para corpos de prova representando extremidades de vigas, com os teóricos fornecidos pelo programa computacional. No segundo, duas vigas, ensaiadas por Campagnolo et al. (1997), foram estudadas. Uma viga serviu de testemunho e outra foi reforçada com chapa de aço. No terceiro, compararam-se os resultados do programa com as vigas ensaiadas por Silva (1999). E, finalmente, fez-se a análise dos resultados comparativos de um terceiro conjunto de vigas, ensaiadas por Beber (1999). Os dois últimos conjuntos de vigas referem-se a estudos sobre reforço com lâminas de fibra de carbono.

Adotou-se para todos os exemplos um valor fixo, igual a 0,2, para o coeficiente de Poisson do concreto e considerou-se o cimento como sendo de endurecimento normal.

6.1 CORPO DE PROVA ENSAIADO POR GROOT ET AL. (1981)

Groot et al. (1981) ensaiaram um corpo de prova, simulando a situação de extremidade de viga. A Fig. 6.1 mostra o corpo de prova ensaiado, cujas dimensões externas são 25 cm x 45 cm x 95 cm.

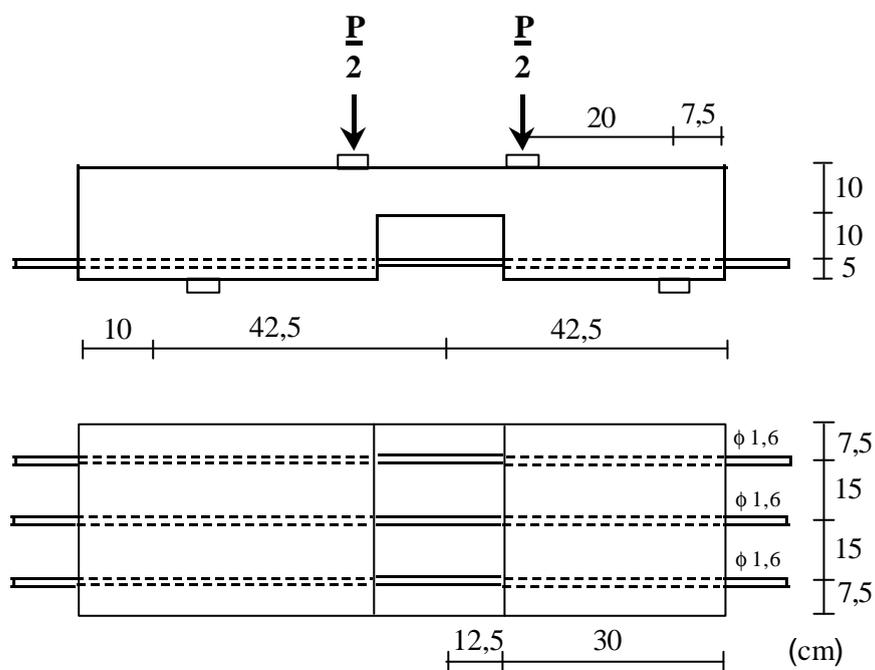


FIGURA 6.1 - Geometria e carregamento do corpo de prova

O corpo de prova tem duas partes de 42,5 cm, simetricamente dispostas em relação uma a outra, com um comprimento adicional de 10 cm de um dos lados. Este comprimento adicional tem o propósito de assegurar que a ruptura ocorreria do lado direito do corpo de prova, onde as medições foram realizadas.

O quadro 6.1 apresenta as propriedades dos materiais utilizados na execução do bloco.

QUADRO 6.1 - Propriedades dos materiais

Concreto	$\phi 1,6$
$E_c = 30,0 \text{ GPa}$	$E_s = 210 \text{ GPa}$
$f_c = 27,6 \text{ MPa}$	$f_y = 400 \text{ MPa}$
$f_t = 2,30 \text{ MPa}$	Aço A

A malha de elementos finitos, utilizada para a análise computacional, encontra-se representada na Fig. 6.2.

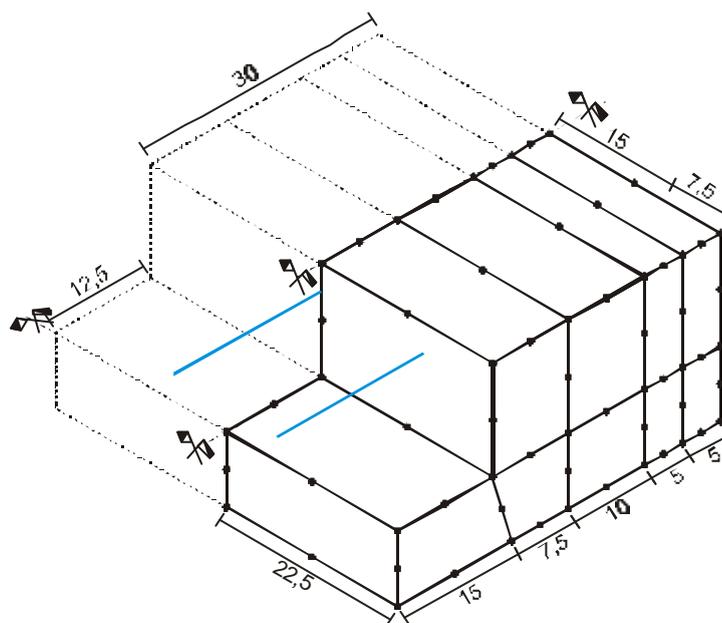


FIGURA 6.2 - Malha de elementos finitos

Comparam-se, a seguir, os resultados teóricos com os experimentais. A Fig. 6.3 mostra a curva *carga x deformação* para o trecho não confinado das barras do corpo de prova. As deformações ao longo do comprimento de 30 cm, dentro do concreto, das barras do exemplo analisado, para um nível de carga de 215 kN, são mostradas na Fig. 6.4. Na Fig. 6.5 é mostrada a curva da tensão de aderência ao longo do comprimento das barras, determinada pelo modelo implementado nesta dissertação.

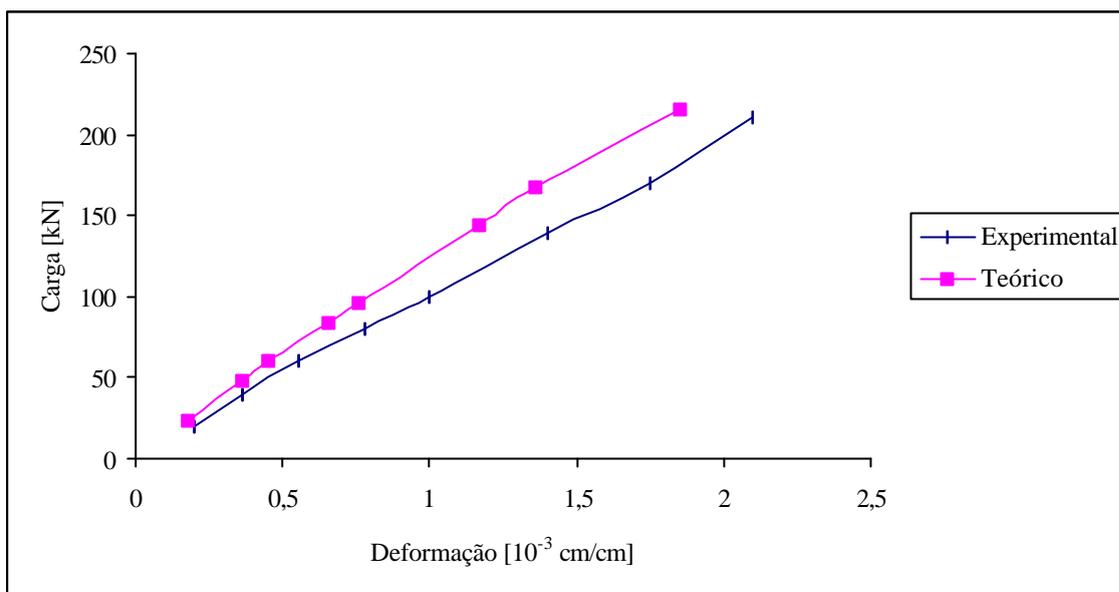


FIGURA 6.3 - Deformação no trecho não confinado das barras do corpo de prova

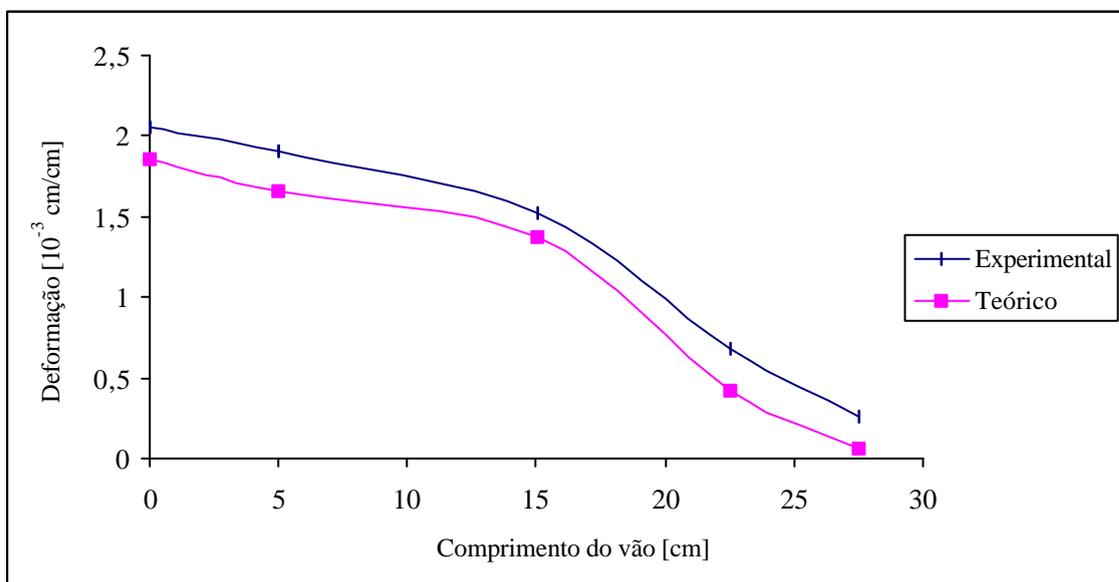


FIGURA 6.4 - Deformações na armadura, ao longo do trecho de 30 cm, dentro do concreto, para uma carga de 215 kN

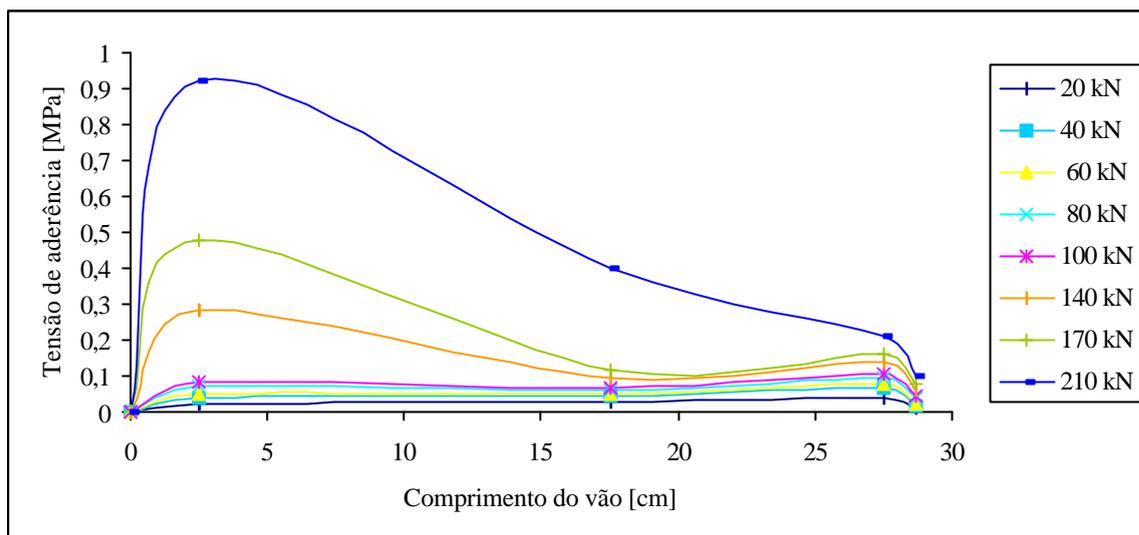


FIGURA 6.5 - Tensão de aderência ao longo do trecho de 30 cm para diferentes níveis de carga

Não houve o arrancamento das barras de armadura, pois antes de ser atingida a tensão última de aderência ocorreu o escoamento da mesma

6.2 VIGAS ENSAIADAS POR CAMPAGNOLO ET AL. (1997)

Campagnolo et al. (1997) ensaiaram duas vigas, referenciadas por V1 e V2, cujo detalhamento é mostrado na Fig. 6.6. Ambas apresentavam as mesmas dimensões e armaduras. O cobrimento mínimo, adotado para as barras de armadura, foi de 1,5 cm. A viga V2 caracteriza-se por possuir um reforço de chapa de aço, fixado na face inferior da viga por resina epóxi.

O quadro 6.2 apresenta as propriedades dos materiais.

QUADRO 6.2 - Propriedades dos materiais

Concreto	$\phi 10$	$\phi 6,3$	Chapa de aço
$E_c = 38,2 \text{ GPa}$ $f_c = 33,26 \text{ MPa}$ $f_t = 3,28 \text{ MPa}$	$E_s = 210 \text{ GPa}$ $f_y = 549 \text{ MPa}$ Aço A	$E_s = 210 \text{ GPa}$ $f_y = 657 \text{ MPa}$ Aço B	$E_s = 210 \text{ GPa}$ $f_y = 326 \text{ MPa}$ largura = 12 cm espessura = 0,28 cm Aço A

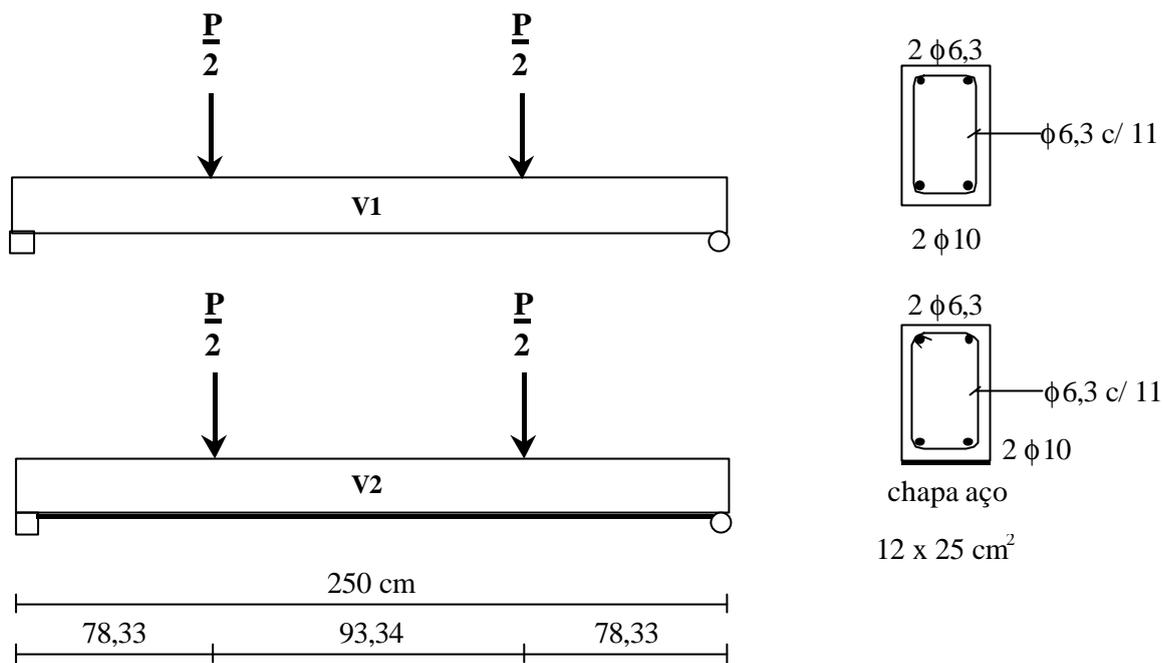


FIGURA 6.6 - Geometria e carregamento das vigas V1 e V2

Devido à simetria de carregamento e de geometria deste exemplo, modelou-se apenas metade da viga. Este procedimento também foi adotado para os demais exemplos. A malha de elementos finitos encontra-se representada na Fig. 6.7. Salienta-se que foi considerado, apenas, o deslizamento relativo entre o concreto e a chapa de aço. Para as barras de armadura, admitiu-se aderência perfeita.

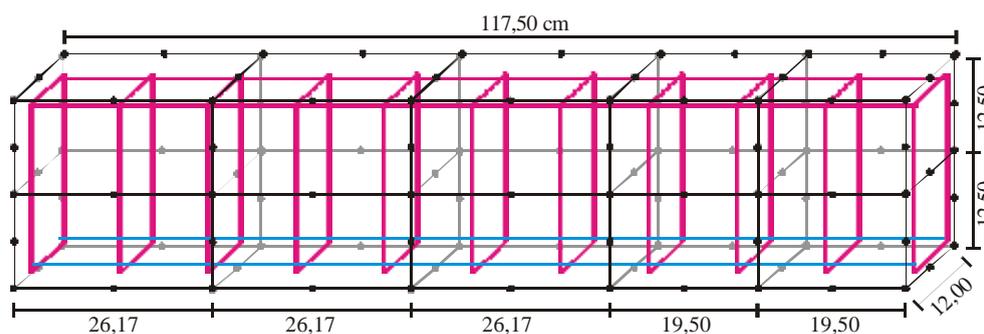


FIGURA 6.7 - Malha de elementos finitos

Os resultados do programa são avaliados através da comparação com resultados experimentais de três parâmetros: deslocamentos, deformação específica na armadura e deformação no concreto.

As curvas *carga x deslocamento*, para as vigas V1 e V2, são apresentadas nas figuras 6.8 e 6.9, respectivamente.

A Fig. 6.10 apresenta a comparação dos resultados experimental e computacional da deformação na armadura longitudinal inferior, para a viga V1.

Os resultados de deformações específicas, computacionais e experimentais, podem diferir bastante, principalmente após a fissuração do concreto. De certa forma, esta discordância entre os resultados era esperada, uma vez que os valores de deformações, previstos pelo programa computacional, correspondem a um comportamento “médio” dos materiais ao longo de um certo trecho.

Naturalmente, logo após a fissuração, a deformação em uma barra de armadura longitudinal, exatamente em uma seção fissurada, será muito maior do que a deformação, nesta mesma barra, na região entre duas fissuras.

A deformação no reforço da viga V2 é apresentada na Fig. 6.11.

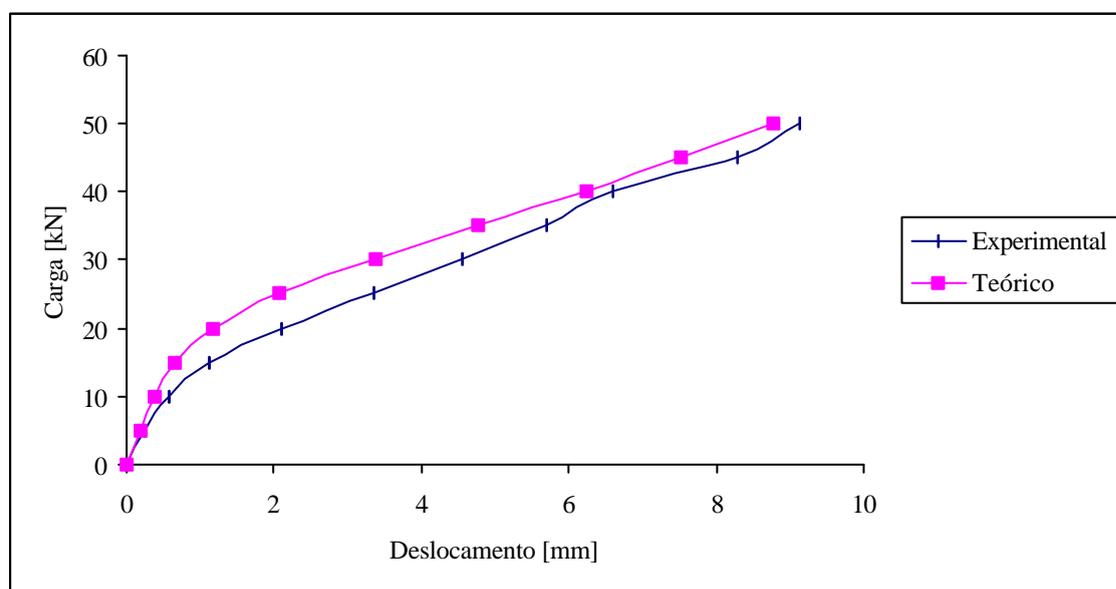


FIGURA 6.8 - Deslocamento vertical na seção central da viga V1

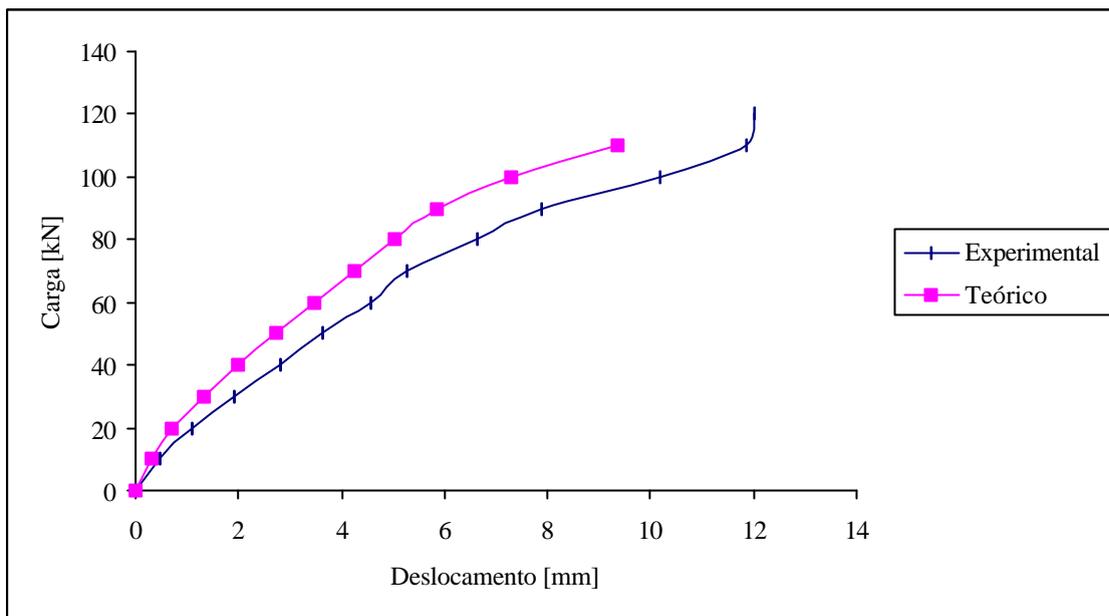


FIGURA 6.9 - Deslocamento vertical na seção central da viga V2

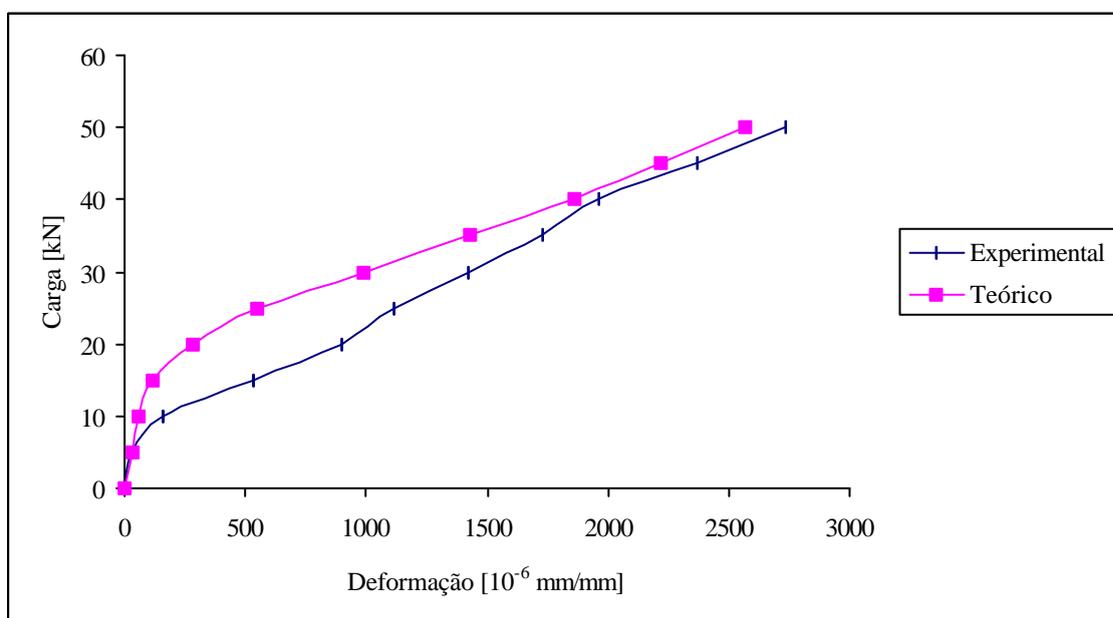


FIGURA 6.10 - Deformação na armadura da viga V1

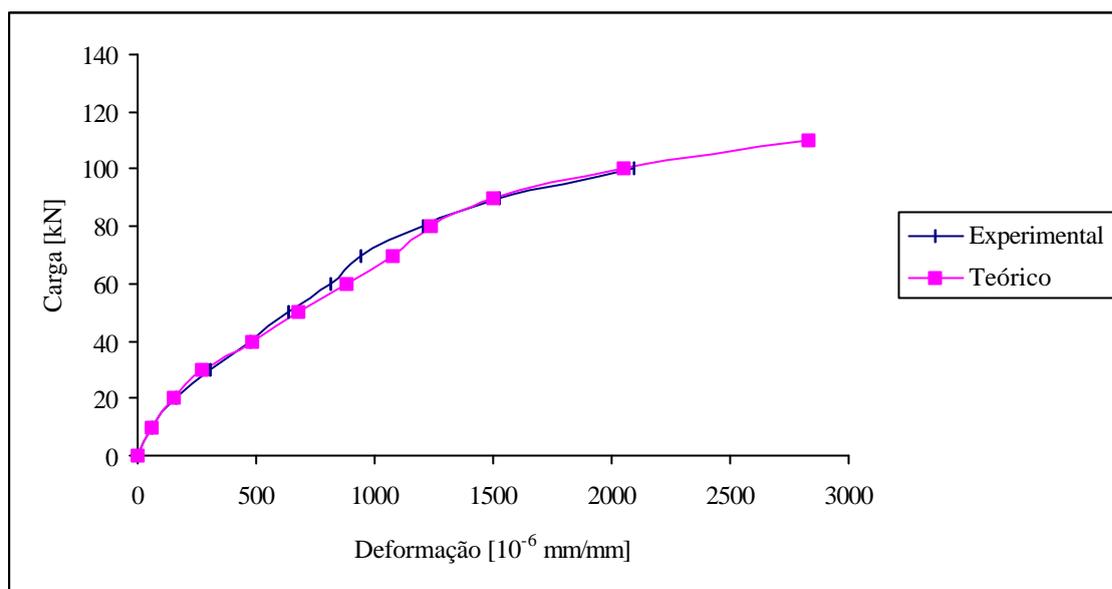


FIGURA 6.11 - Deformação no reforço da viga V2

A Fig. 6.12 apresenta o resultado computacional da tensão de aderência na interface do reforço ao longo do comprimento da viga V2, para diferentes níveis de carga.

Os resultados numéricos confirmam os resultados medidos em laboratório. A tensão última de aderência é atingida no trecho junto ao apoio, o que leva a viga à ruptura por descolamento da chapa, como ilustra a Fig. 6.13.

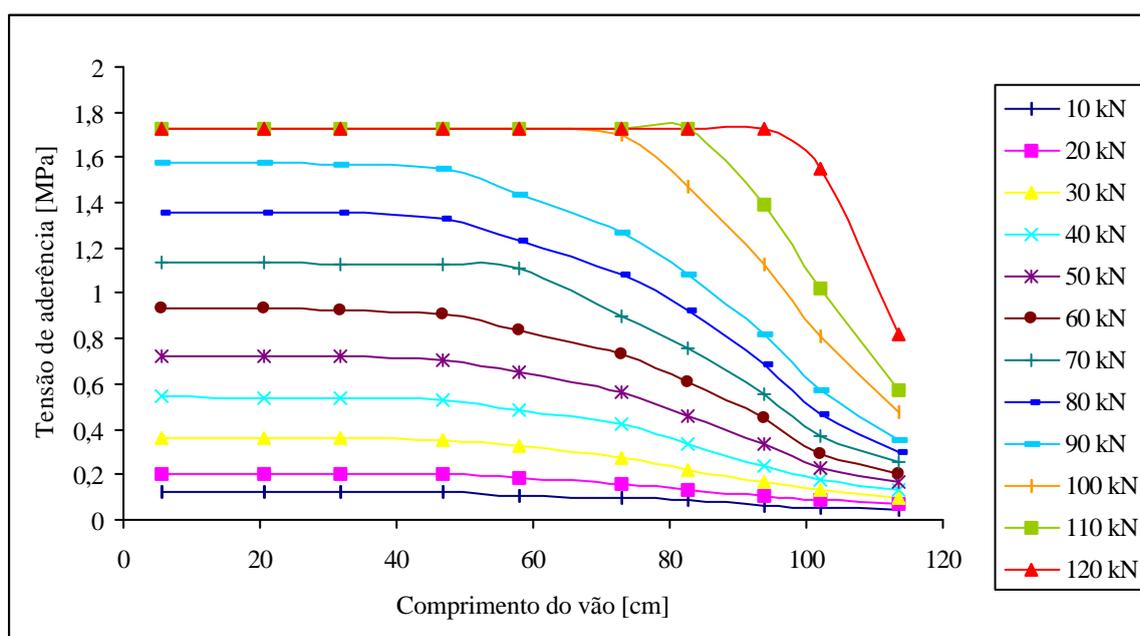


FIGURA 6.12 - Tensão de aderência na interface do reforço com a viga V2

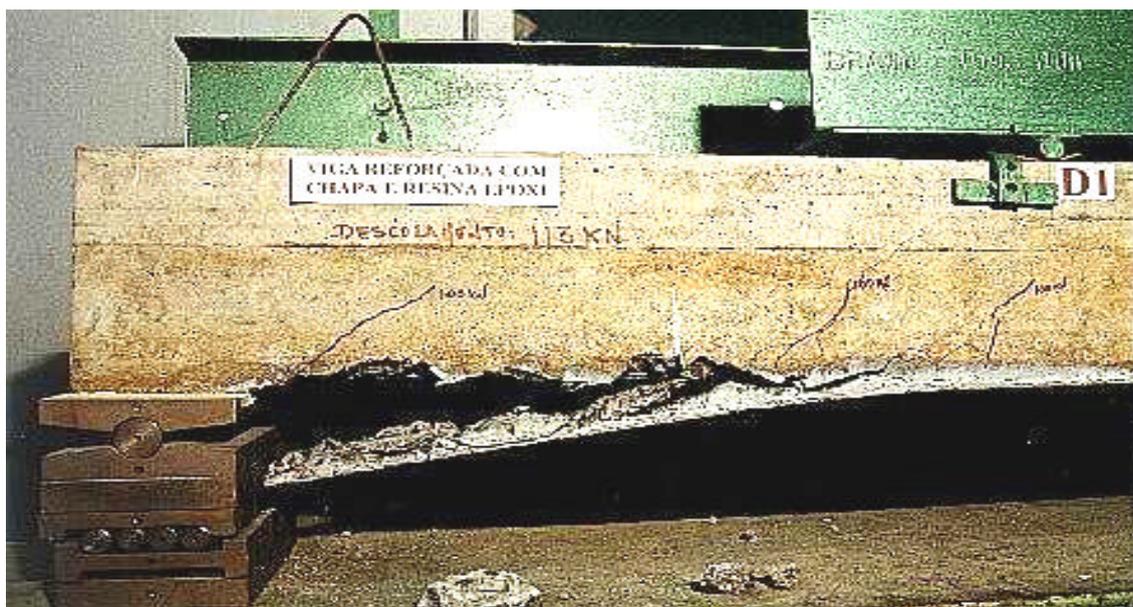


FIGURA 6.13 - Descolamento da chapa na extremidade da viga V2

6.3 VIGAS ENSAIADAS POR JUVANDES (1998) E SILVA (1999)

Foram analisadas, neste exemplo, duas vigas. A primeira, referenciada por B6, é uma viga testemunho de concreto armado, e foi ensaiada por Juvandes (1998) e a segunda, B9, possui reforço de lâmina de fibra de carbono, e foi ensaiada por Silva (1999). Ambas apresentam a mesma geometria e carregamento, com mostra a Fig. 6.14. Considerou-se um cobrimento mínimo de 1,5 cm para as armaduras.

O quadro 6.3 apresenta as propriedades dos materiais utilizados na execução das vigas.

QUADRO 6.3 - Propriedades dos materiais

Concreto B6	Concreto B9	$\phi 8$	$\phi 3$	CFRP
$E_c = 34 \text{ GPa}$	$E_c = 32,9 \text{ GPa}$	$E_s = 210 \text{ GPa}$	$E_s = 210 \text{ GPa}$	$E_L = 160 \text{ GPa}$
$f_c = 41,6 \text{ MPa}$	$f_c = 37,8 \text{ MPa}$	$F_y = 497,1 \text{ MPa}$	$f_y = 192,3 \text{ MPa}$	$F_L = 3100 \text{ MPa}$
$f_t = 4,2 \text{ MPa}$	$f_t = 3,9 \text{ MPa}$	Aço A	Aço B	largura = 5 cm espessura = 0,12 cm

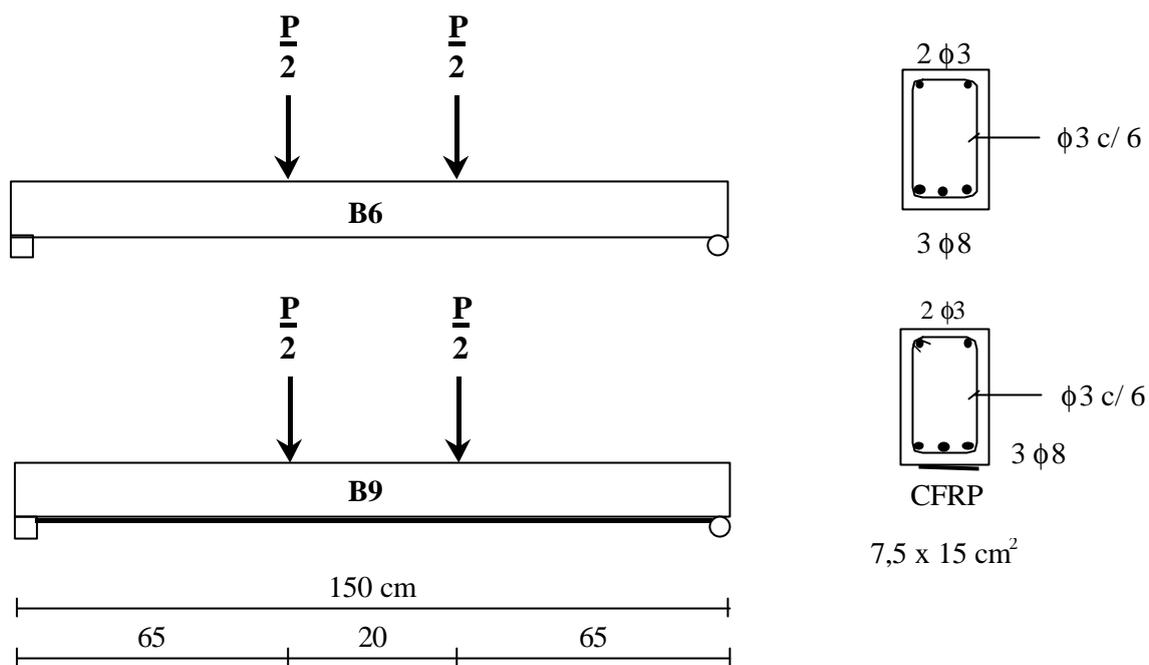


FIGURA 6.14 - Geometria e carregamento das vigas B6 e B9

A malha de elementos finitos utilizada no programa encontra-se na Fig 6.15.

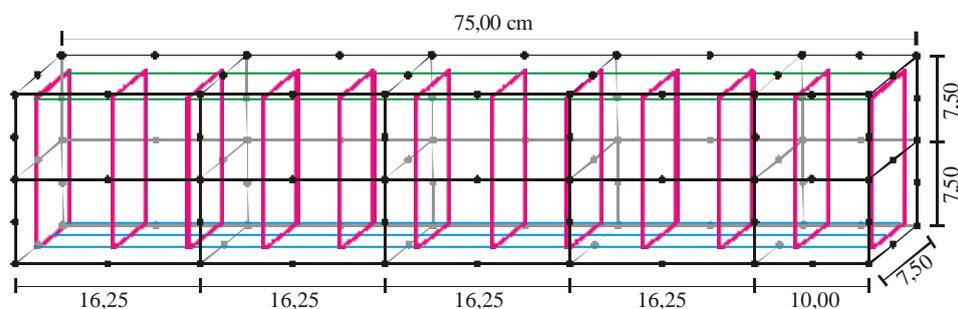


FIGURA 6.15 - Malha de elementos finitos

Comparam-se a seguir resultados experimentais e teóricos obtidos através do programa computacional.

Os gráficos *carga x deslocamento* vertical na seção central das vigas B6 e B9 são apresentados nas figuras 6.16 e 6.17, respectivamente.

A Fig 6.18 mostra a curva *carga x deformação* no reforço da viga B9.

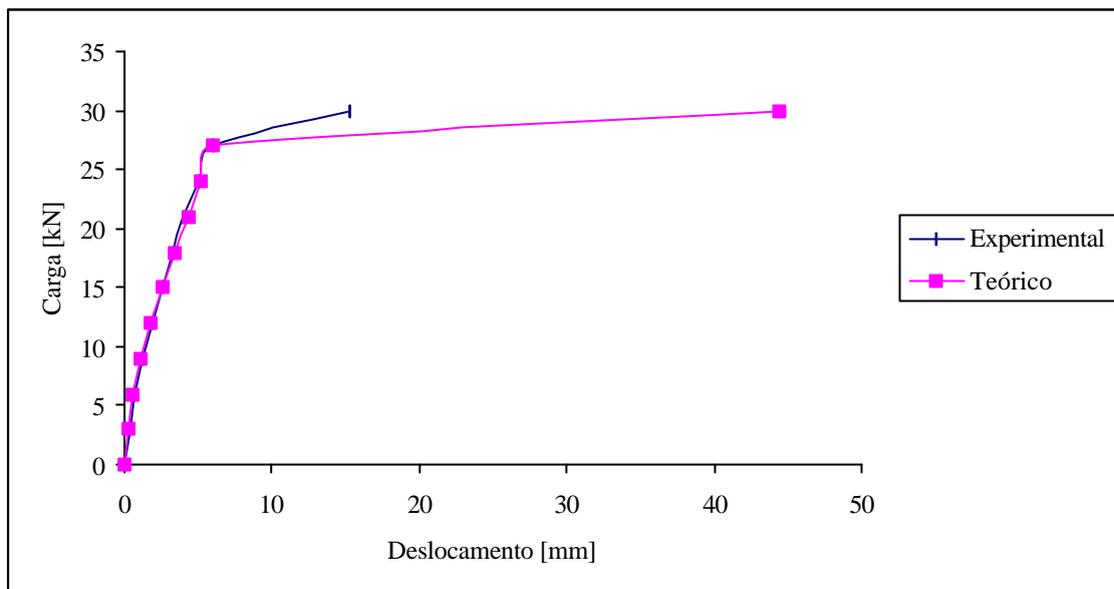


FIGURA 6.16 - Deslocamento vertical na seção central da viga B6

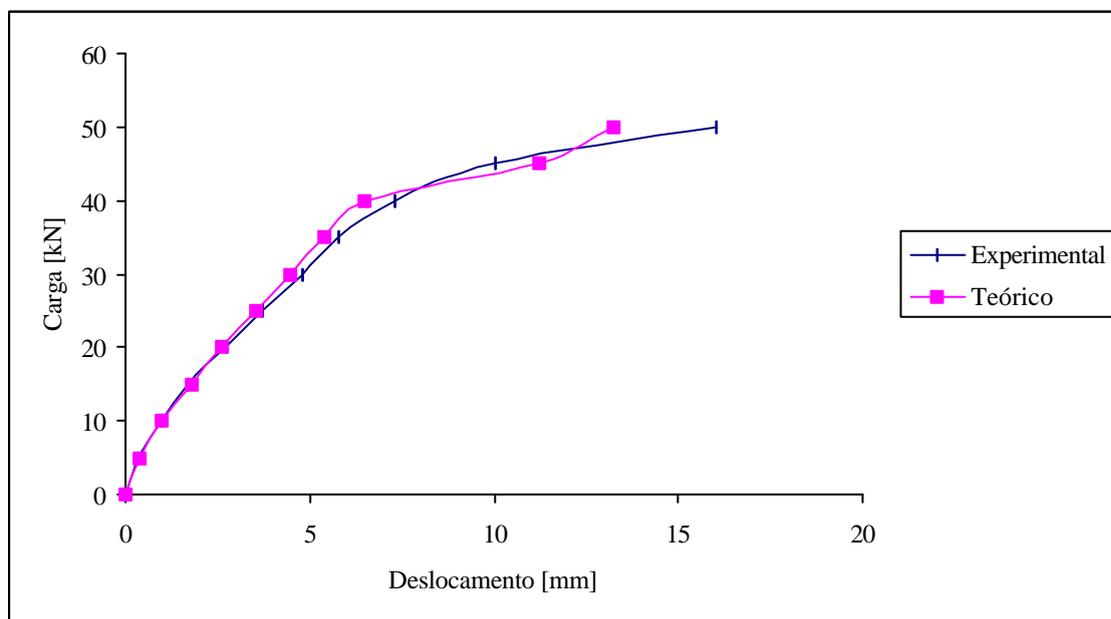


FIGURA 6.17 - Deslocamento vertical na seção central da viga B9

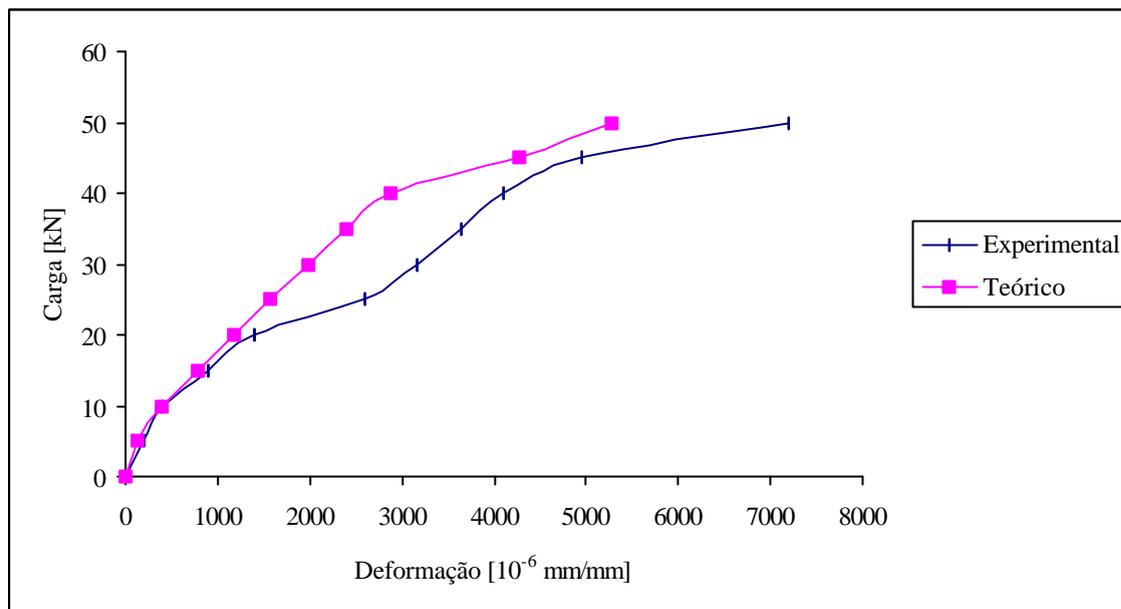


FIGURA 6.18 - Deformação no reforço da viga B9

A Fig. 6.19 mostra a comparação entre o ensaio experimental, realizado por Silva (1999), e o resultado teórico do programa desenvolvido nesta dissertação, para a tensão de aderência na interface do reforço ao longo do comprimento do vão da viga B9, para o nível de carga de 50 kN.

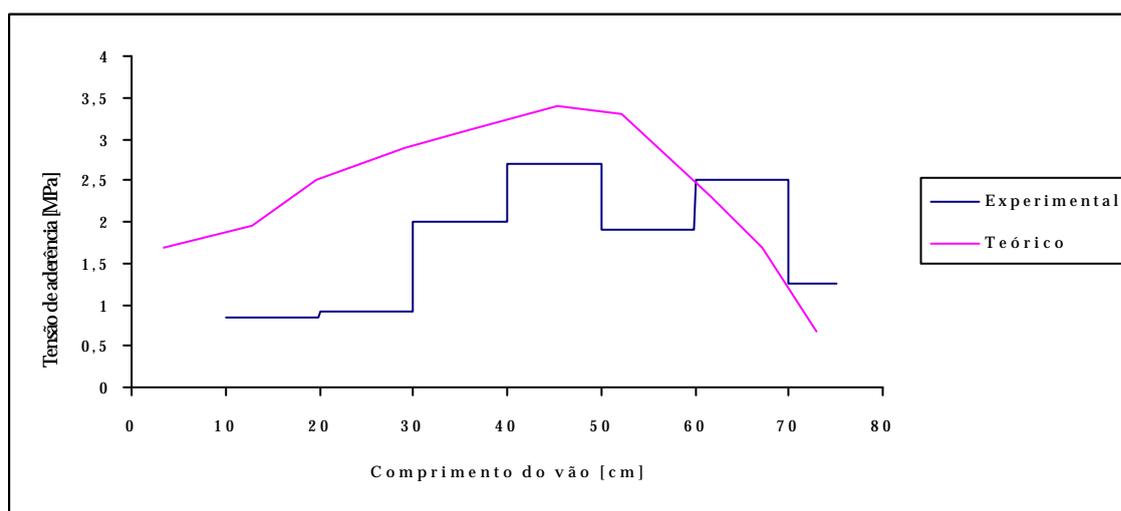


FIGURA 6.19 - Curva teórico x experimental da tensão de aderência na interface do reforço com a viga B9

O gráfico da Fig. 6.20 mostra a evolução da tensão de aderência na interface do reforço, ao longo do comprimento do vão da viga B9, para diferentes níveis de carregamento. Observa-se que a tensão última de aderência é atingida no trecho junto ao apoio, o que leva a viga à ruptura por descolamento da chapa, como ilustra a Fig. 6.21.

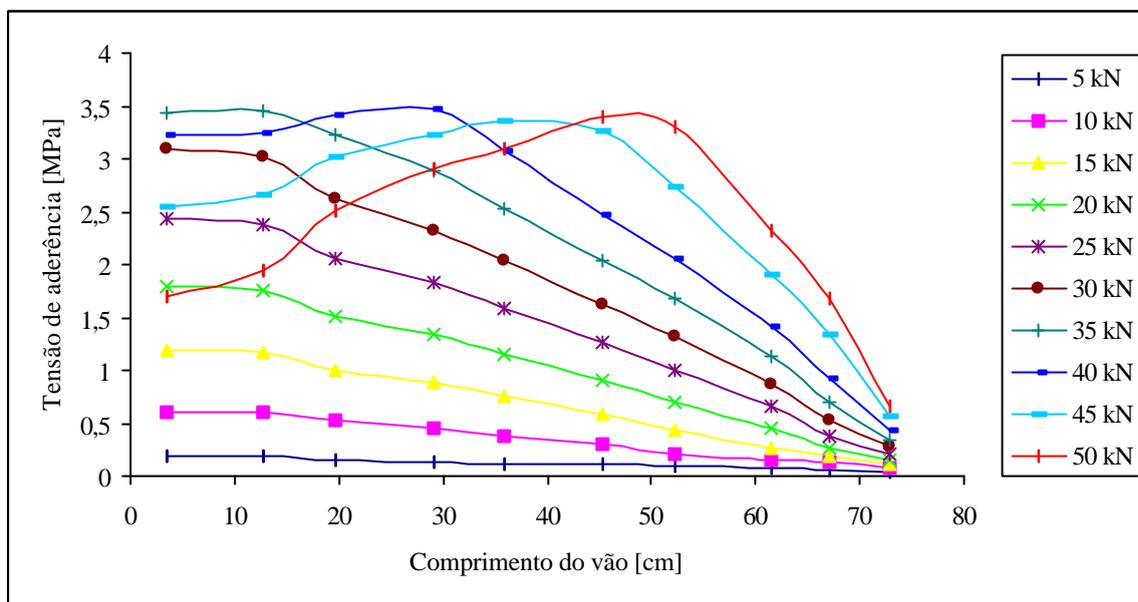


FIGURA 6.20 - Tensão de aderência na interface do reforço com a viga B9

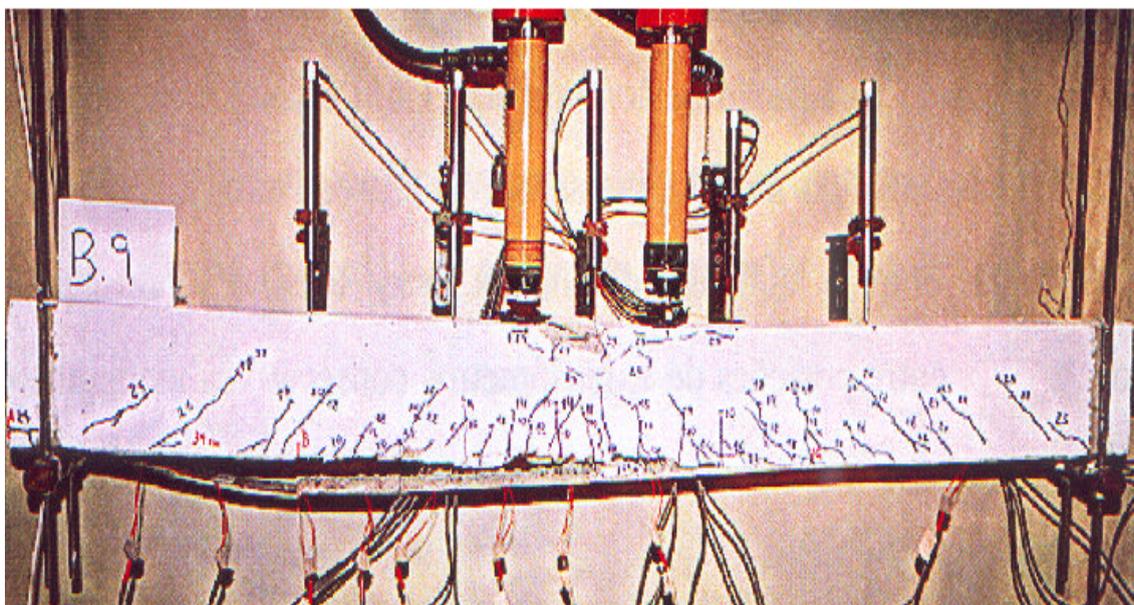


FIGURA 6.21 - Descolamento da chapa na extremidade da viga B9

6.4 VIGAS ENSAIADAS POR BEBER (1999)

Neste exemplo, comparam-se os resultados obtidos pelo programa computacional desenvolvido com os resultados experimentais apresentados por Beber (1999), para vigas de concreto armado reforçadas com lâminas de fibra de carbono.

Foram comparados cinco grupos de vigas: vigas testemunho (referenciadas como VT), vigas reforçadas com uma camada de lâmina de fibra de carbono (referenciadas como VR1), vigas reforçadas com quatro camadas de lâmina de fibra de carbono (VR4), vigas reforçadas com sete camadas lâminas de fibra de carbono (VR7) e vigas reforçadas com dez camadas de fibra (VR10). Para cada um dos grupos anteriormente mencionados, foram ensaiadas duas vigas.

O detalhamento das vigas está ilustrado na Fig. 6.22. O cobrimento mínimo, utilizado para as armaduras, foi de 1,5 cm.

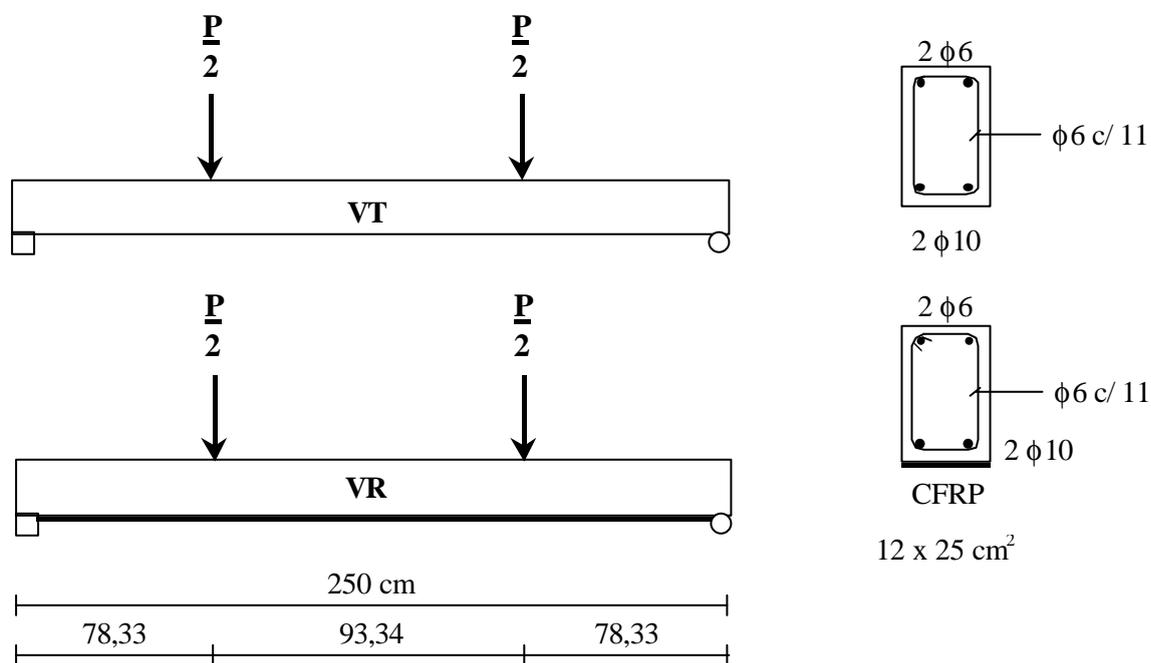


FIGURA 6.22 - Geometria e carregamento das vigas VT e VR

No que concerne às propriedades dos materiais (concreto, armaduras e laminado de CFRP), estas se encontram especificadas no quadro 6.4.

QUADRO 6.4 - Propriedades dos materiais

Concreto	$\phi 10$	$\phi 6$	CFRP
$E_c = 38,3 \text{ GPa}$ $f_c = 33,58 \text{ MPa}$ $f_t = 3,14 \text{ MPa}$	$E_s = 210 \text{ GPa}$ $f_y = 565 \text{ MPa}$ Aço A	$E_s = 210 \text{ GPa}$ $f_y = 738 \text{ MPa}$ Aço B	$E_L = 230 \text{ GPa}$ $f_L = 3400 \text{ MPa}$ largura = 12 cm espessura = 0,011 cm (cada lâmina)

Para a análise computacional, adotou-se a malha da Fig. 6.23, representando a metade da viga, uma vez que esta apresenta simetria de carga e geometria.

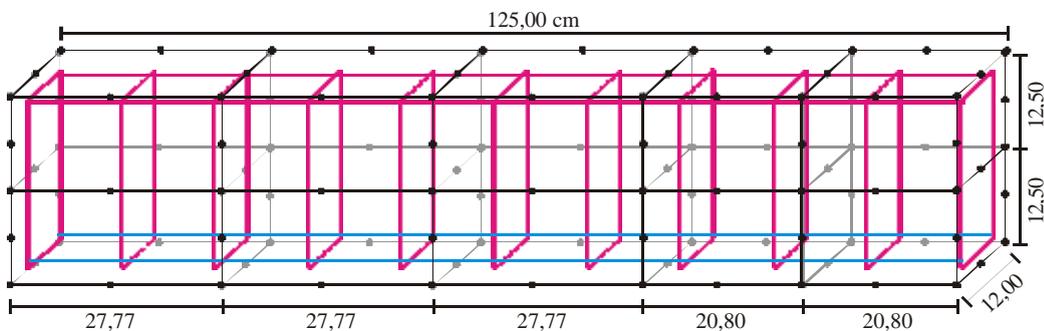


FIGURA 6.23 - Malha de elementos finitos

São comparados, para cada um dos grupos de vigas ensaiadas por Beber (1999), resultados, experimentais e teóricos, de deslocamentos verticais e de deformações específicas, na armadura longitudinal inferior, na seção central das vigas. Da mesma forma, comparam-se deformações no reforço e conclui-se com os valores da tensão de aderência ao longo da interface, das vigas reforçadas com uma, quatro, sete e dez camadas.

6.4.1 Deslocamento vertical na seção central

Nas figuras 6.24 a 6.28, são apresentadas as curvas *carga x deslocamento* teóricas e experimentais para cada um dos cinco grupos de vigas.

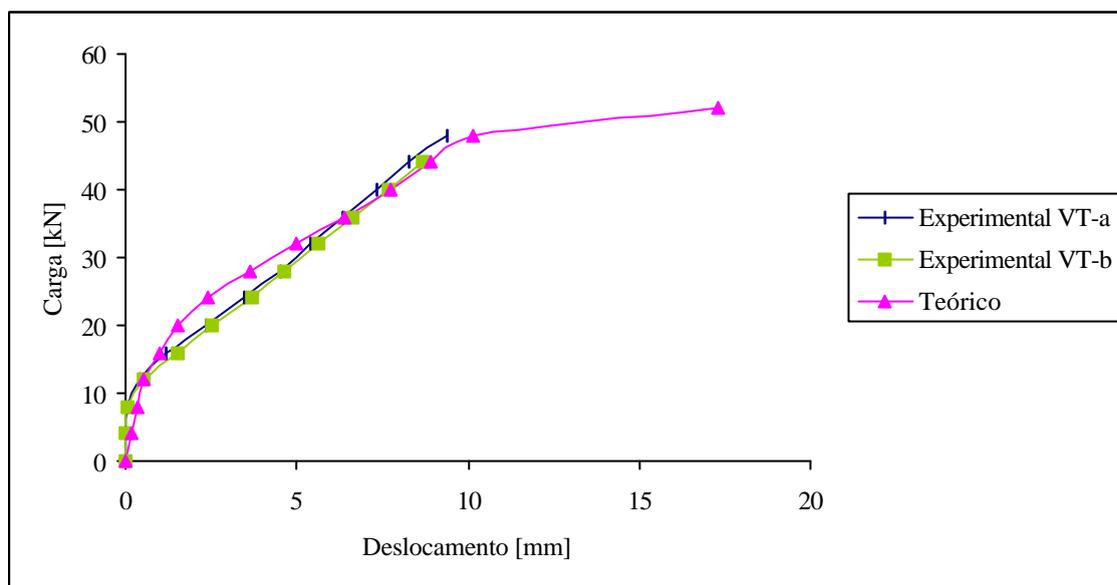


FIGURA 6.24 - Deslocamento vertical na seção central das vigas testemunhos

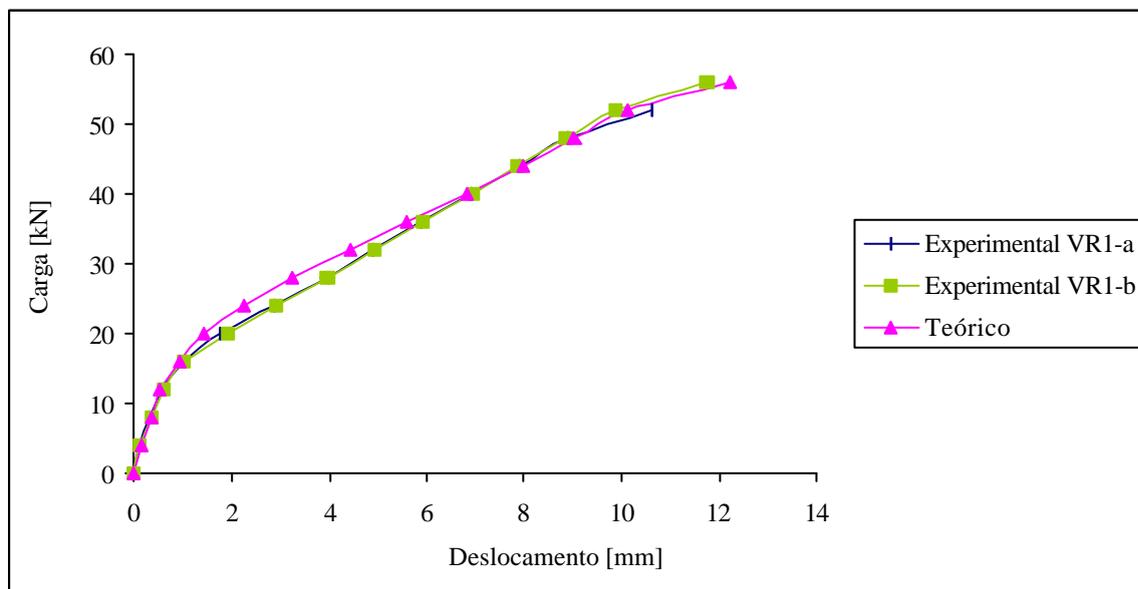


FIGURA 6.25 - Deslocamento vertical na seção central das vigas reforçadas com uma camada

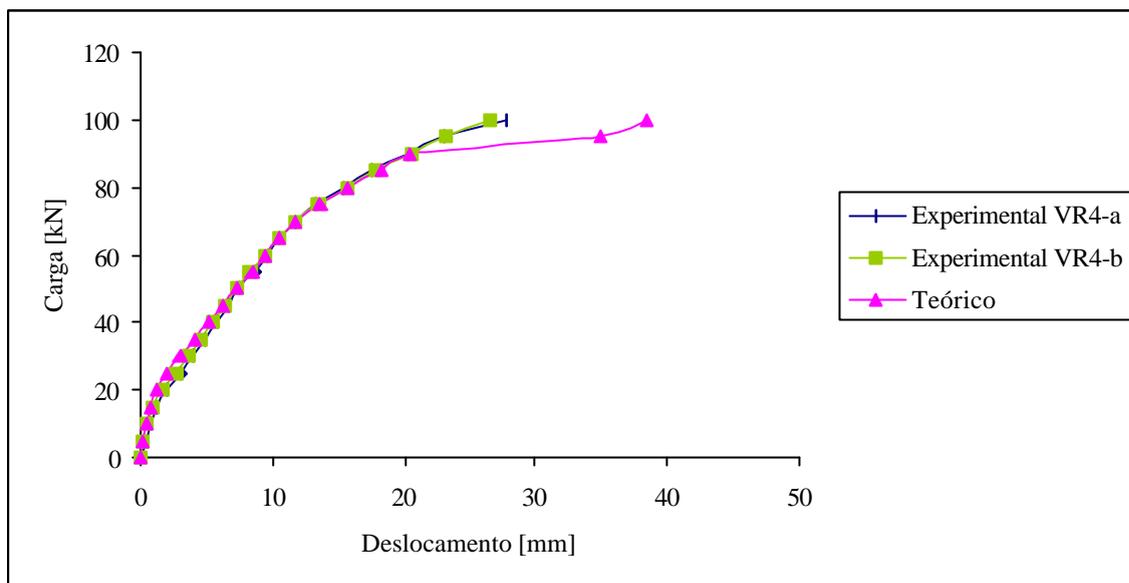


FIGURA 6.26 - Deslocamento vertical na seção central das vigas reforçadas com quatro camadas

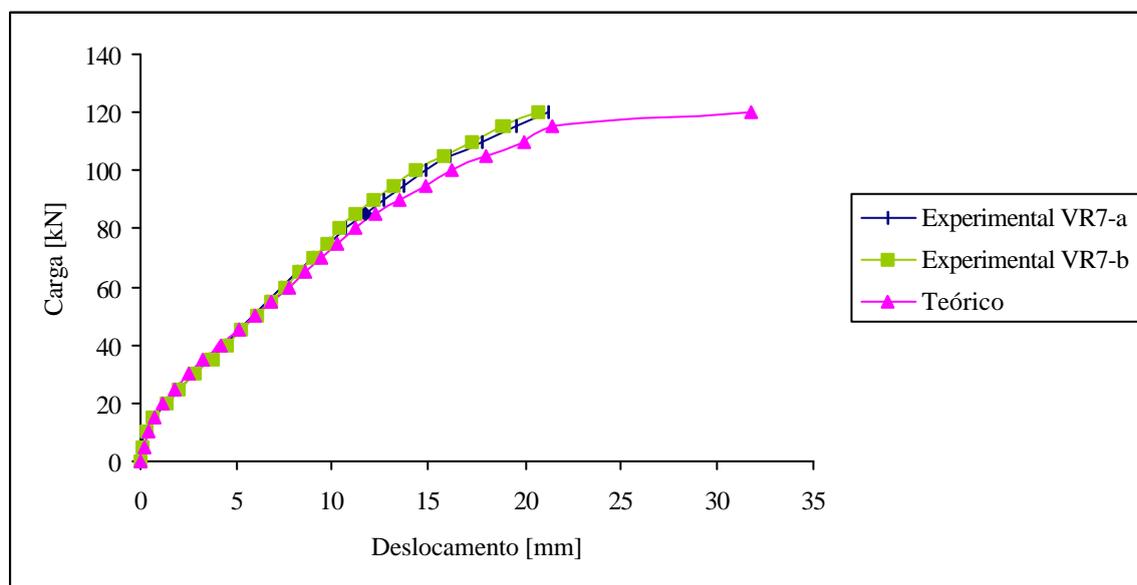


FIGURA 6.27 - Deslocamento vertical na seção central das vigas reforçadas com sete camadas

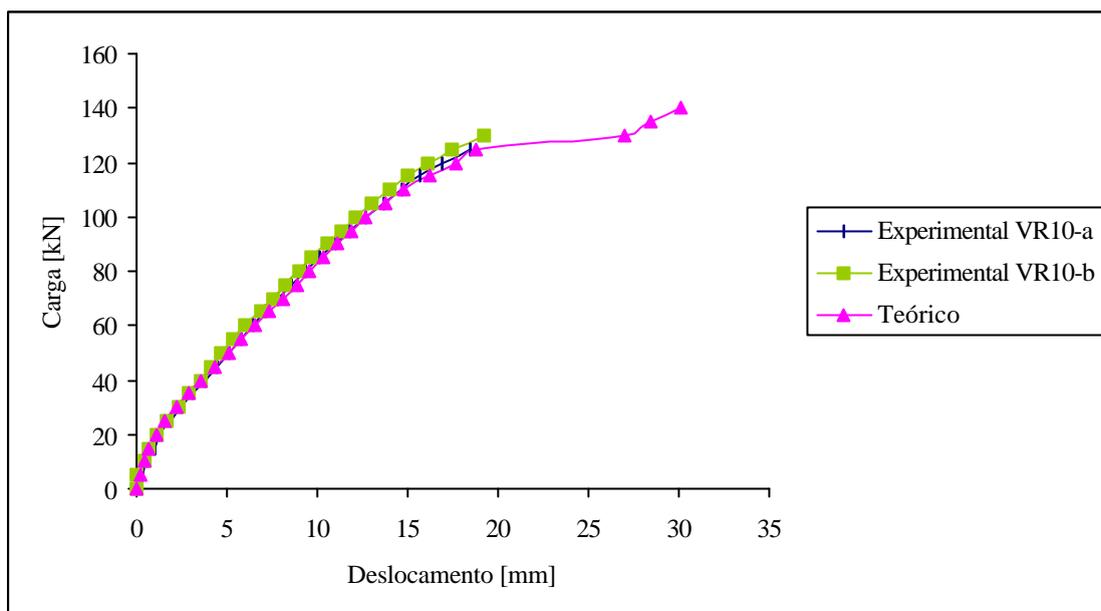


FIGURA 6.23 - Deslocamento vertical na seção central das vigas reforçadas com dez camadas

6.4.2 Deformação na armadura

Nas figuras 6.29 a 6.33, comparam-se resultados experimentais e obtidos pelo programa. Estas figuras mostram, respectivamente, a deformação na armadura para as vigas testemunho e para as vigas reforçadas com uma, quatro, sete e dez camadas de lâminas de fibra de carbono.

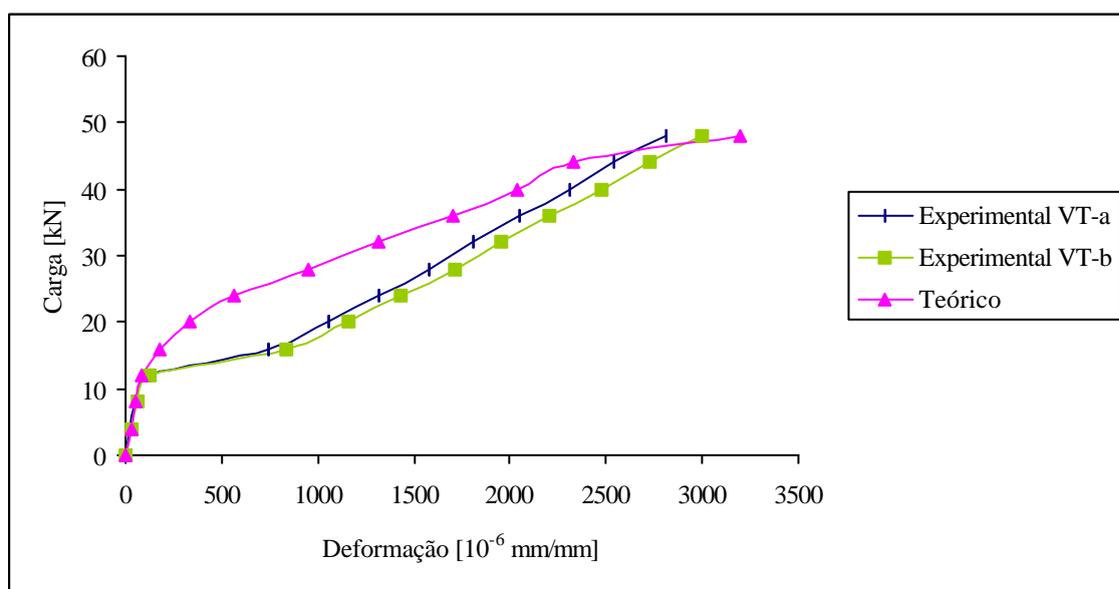


FIGURA 6.29 - Deformação na armadura das vigas testemunhos

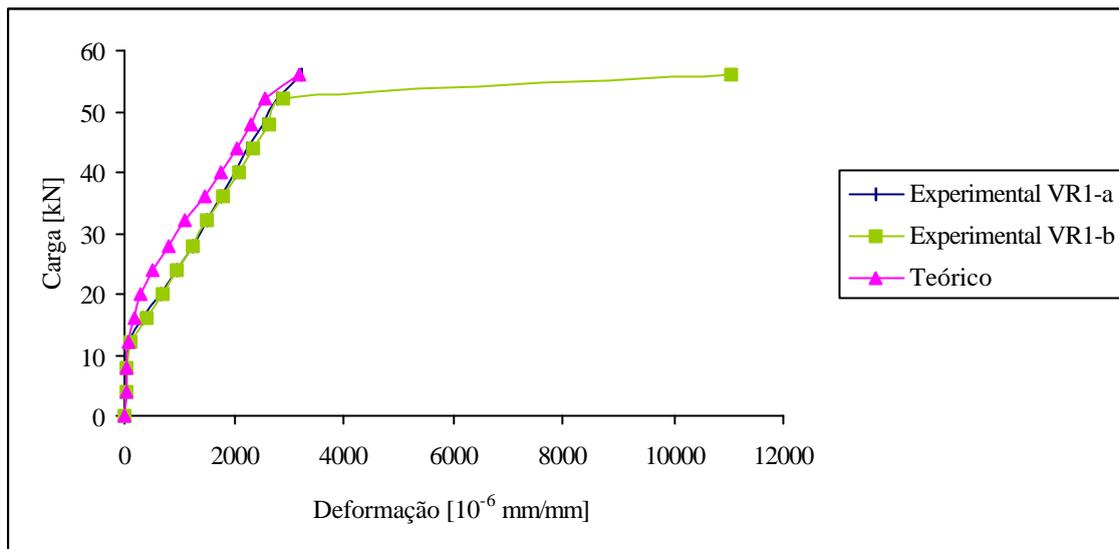


FIGURA 6.30 - Deformação na armadura das vigas reforçadas com uma camada

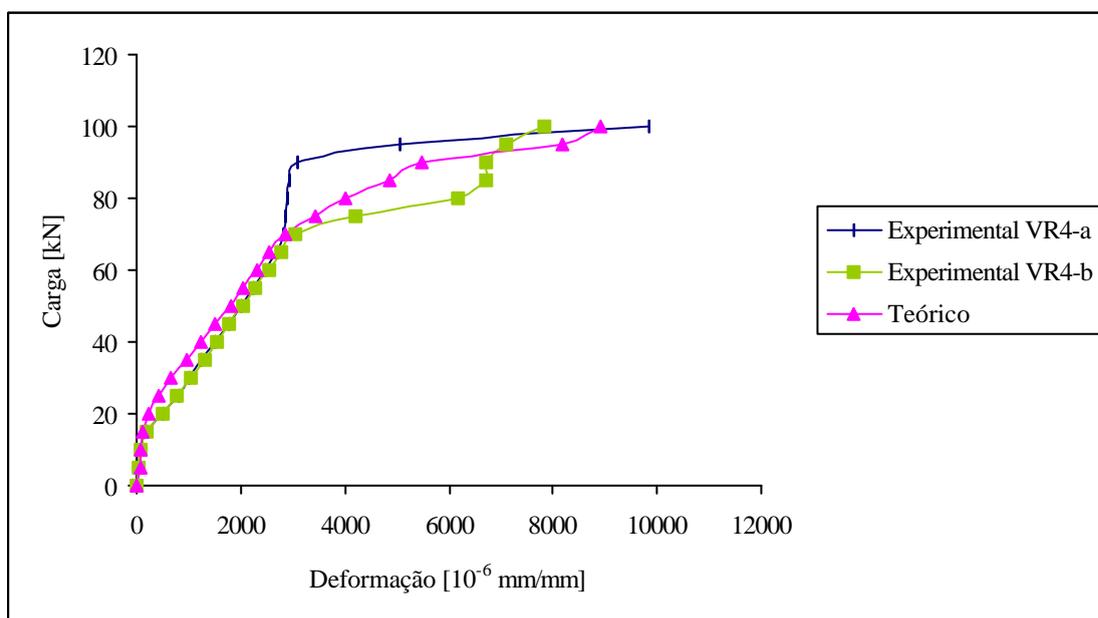


FIGURA 6.31 - Deformação na armadura das vigas reforçadas com quatro camadas

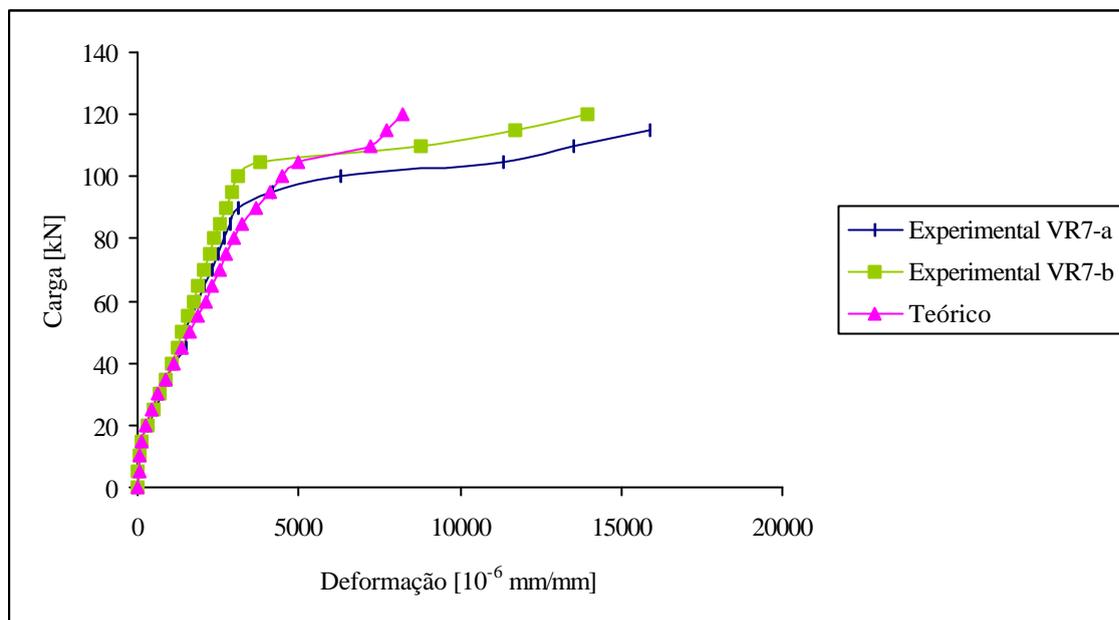


FIGURA 6.32 - Deformação na armadura das vigas reforçadas com sete camadas

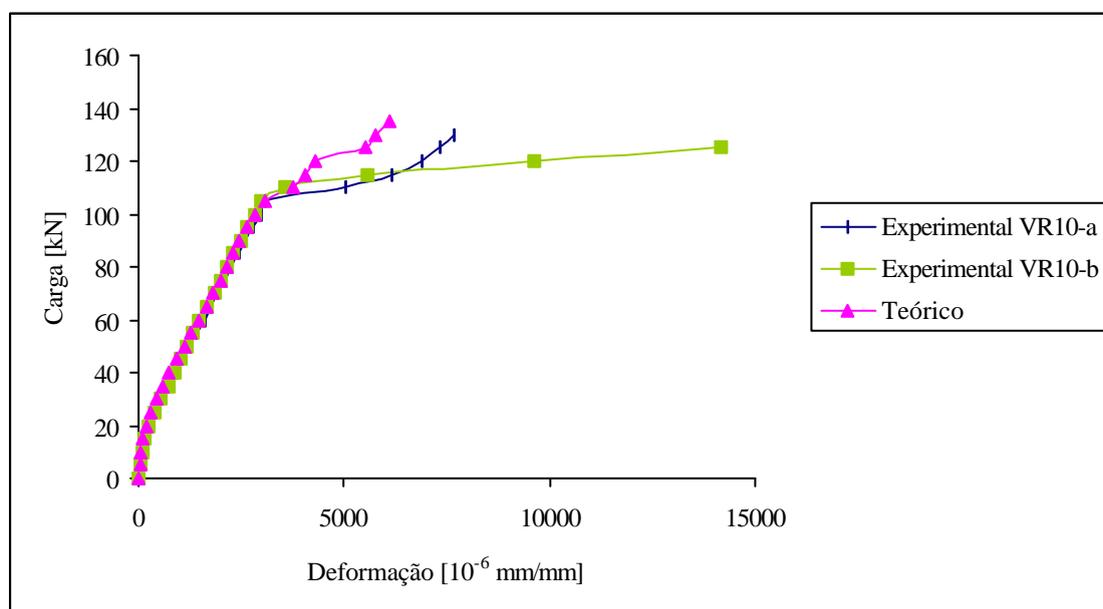


FIGURA 6.33 - Deformação na armadura das vigas reforçadas com dez camadas

6.4.3 Deformação no reforço

Os resultados comparativos dos gráficos *carga x deformação* no reforço são mostrados nas figuras 6.34 a 6.37.

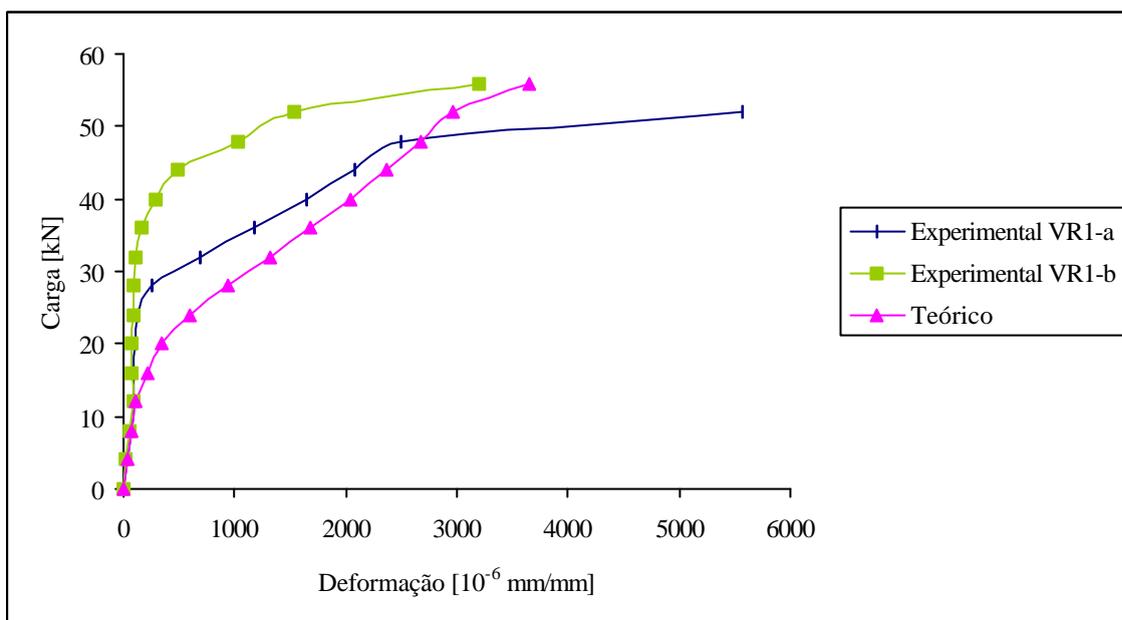


FIGURA 6.34 - Deformação no reforço das vigas reforçadas com uma camada

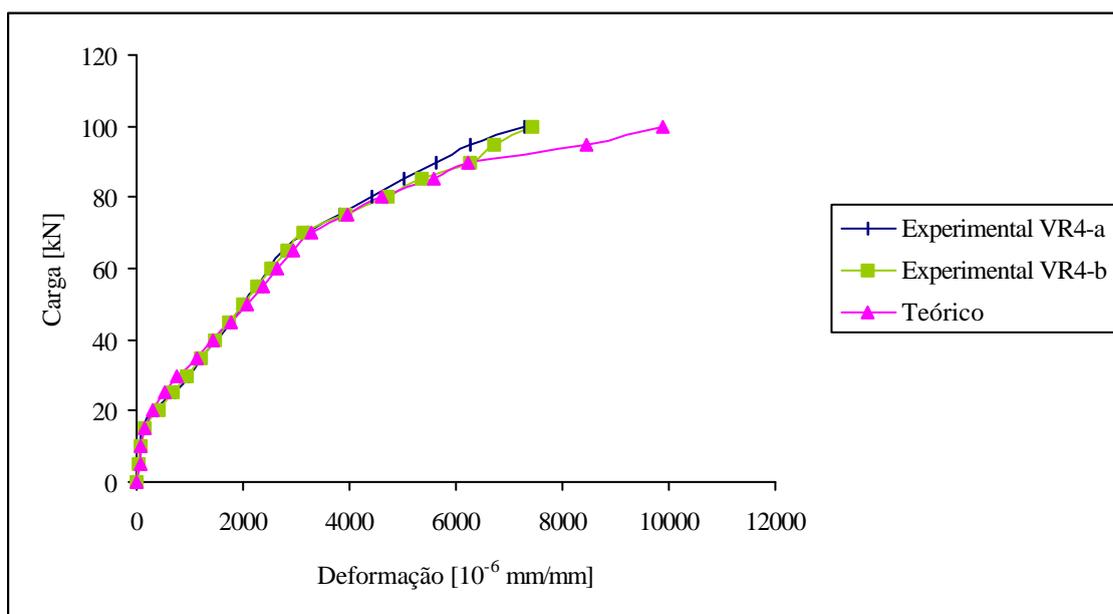


FIGURA 6.35 - Deformação no reforço das vigas reforçadas com quatro camadas

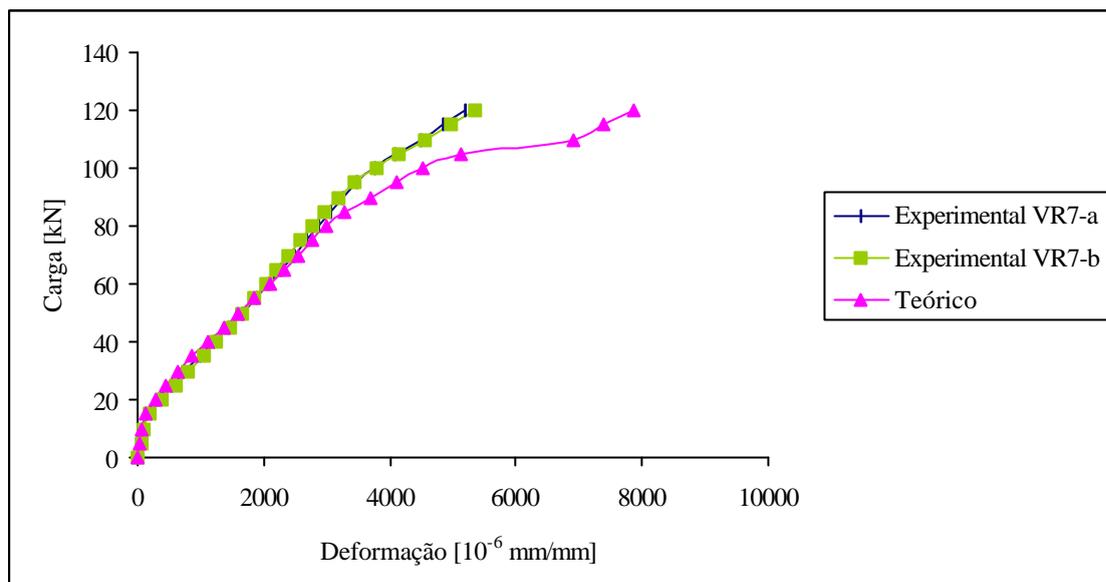


FIGURA 6.36 - Deformação no reforço das vigas reforçadas com sete camadas

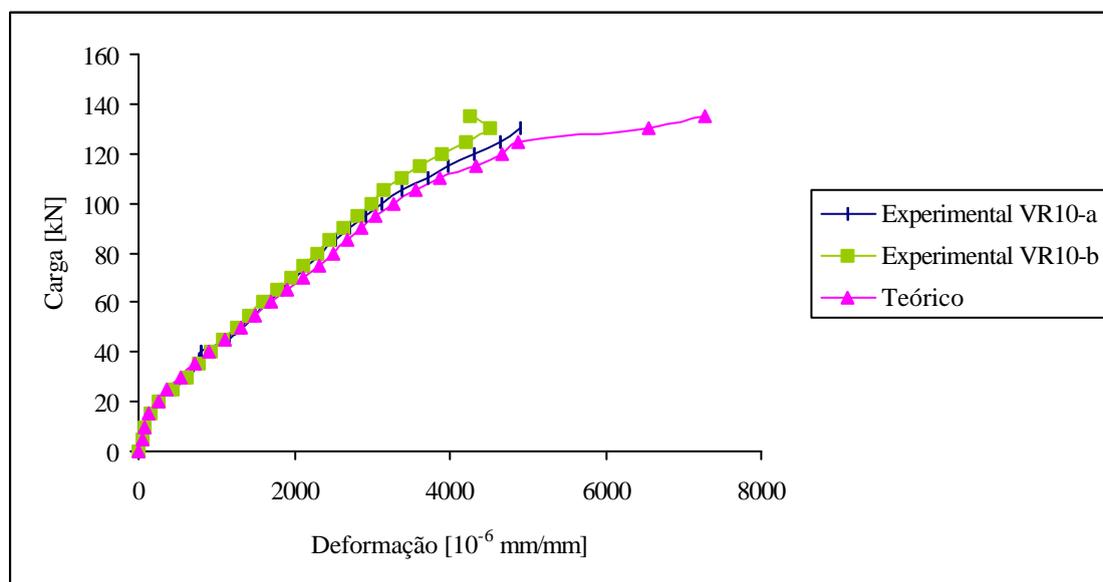


FIGURA 6.37 - Deformação no reforço das vigas reforçadas com dez camadas

6.4.4 Tensão de aderência

De acordo com Beber (1999), o modo de falha das vigas reforçadas com uma camada foi o escoamento da armadura, não havendo descolamento no reforço das referidas vigas.

Observa-se, na Fig. 6.38, que a tensão última de aderência não atingiu o valor máximo, ou seja, não ocorre o descolamento do reforço, com ilustra a Fig. 6.39.

Por outro lado, as figuras 6.40, 6.42 e 6.44 mostram, para as vigas reforçadas com quatro, sete e dez camadas, respectivamente, que a tensão última de aderência foi atingida, demonstrando que ocorre o descolamento das lâminas do reforço.

Estes resultados reproduzem exatamente o comportamento observado nos ensaios realizados por Beber (1999), como ilustram as figuras 6.41, 6.43 e 6.45.

Nas vigas reforçadas com sete e dez camadas, conforme se pode observar nas figuras 6.43 e 6.45, foi colocado um reforço lateral na região da extremidade das lâminas. Este reforço introduz um mecanismo adicional para a transferência de esforços entre as lâminas e a viga, aumentando o nível de carga do descolamento.

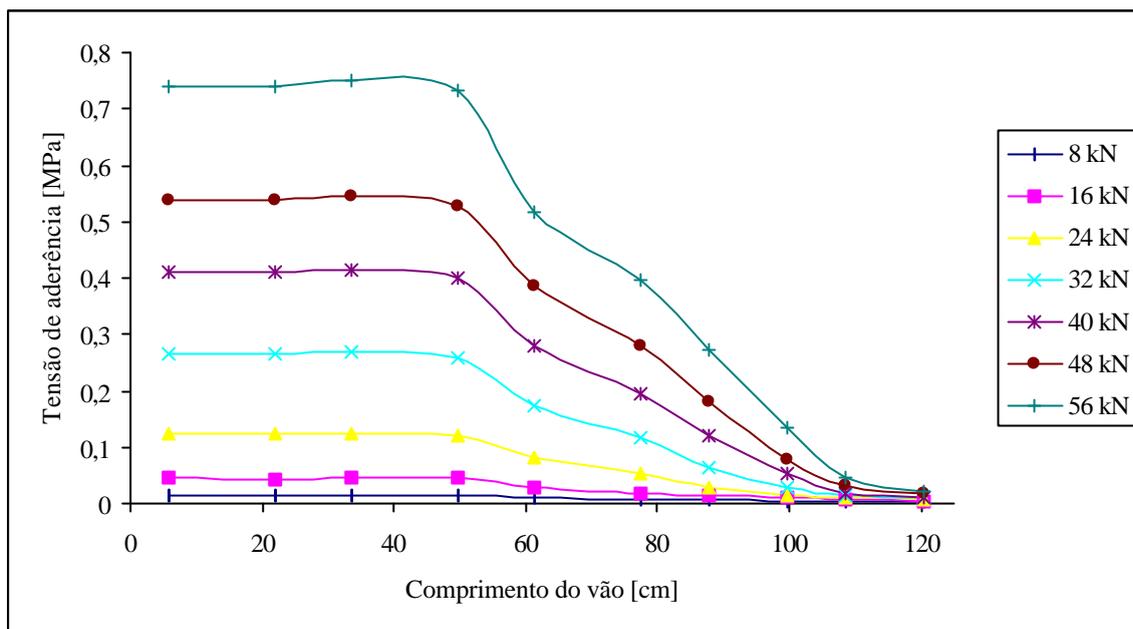


FIGURA 6.38 - Tensão de aderência na interface do reforço com a viga reforçada com uma camada



FIGURA 6.39 - Ruptura da viga reforçada com uma camada

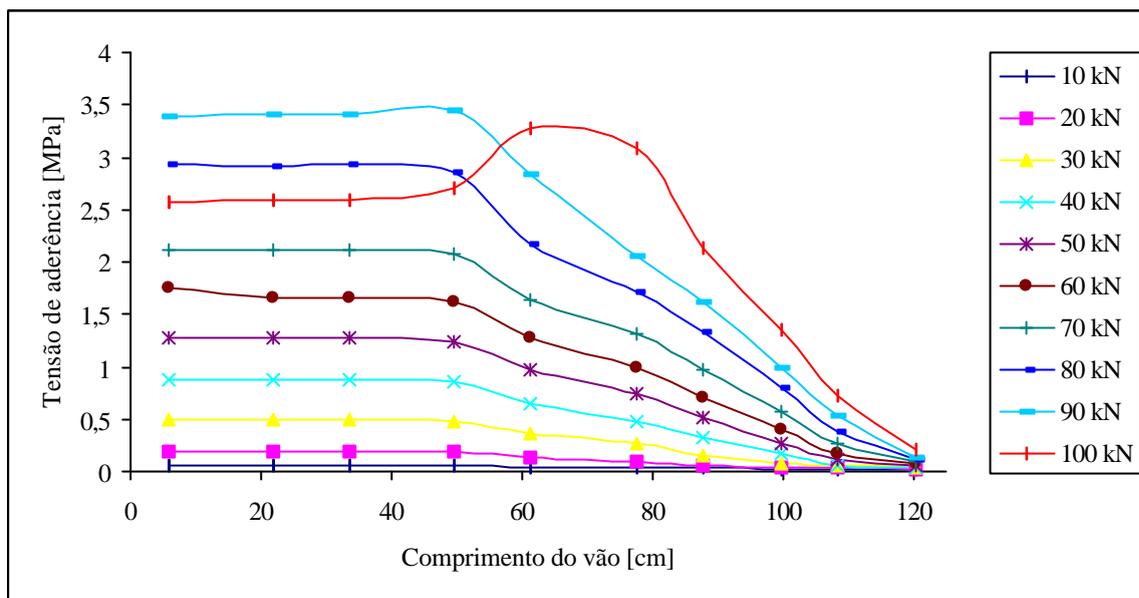


FIGURA 6.40 - Tensão de aderência na interface do reforço com a viga reforçada com quatro camadas

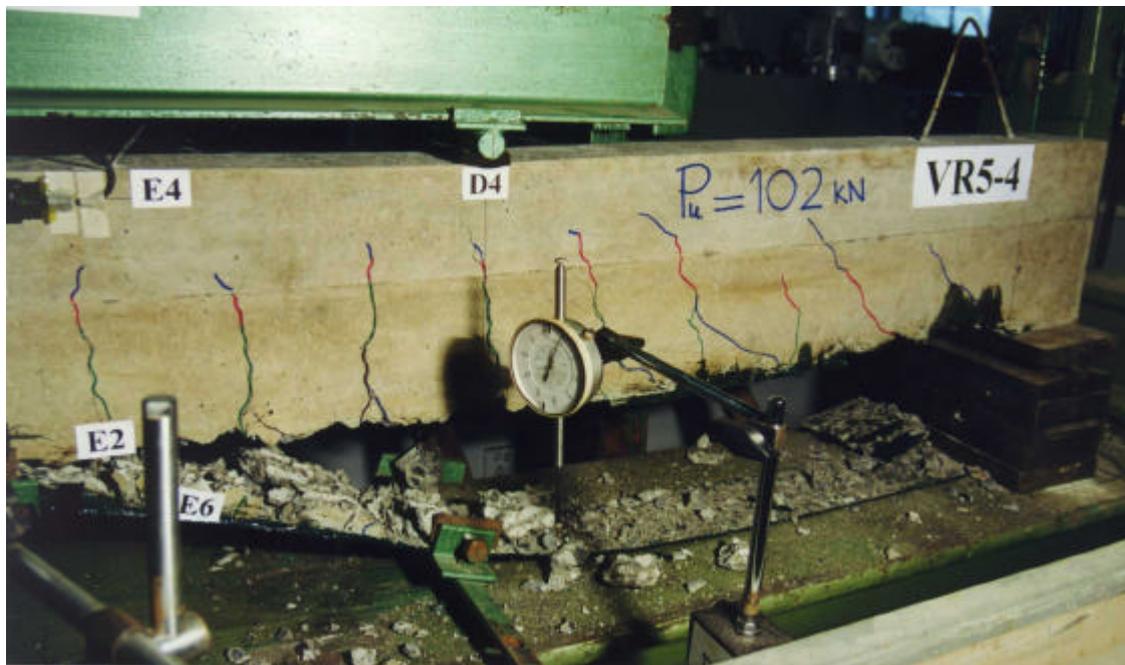


FIGURA 6.41 - Ruptura por descolamento na viga reforçada com quatro camadas

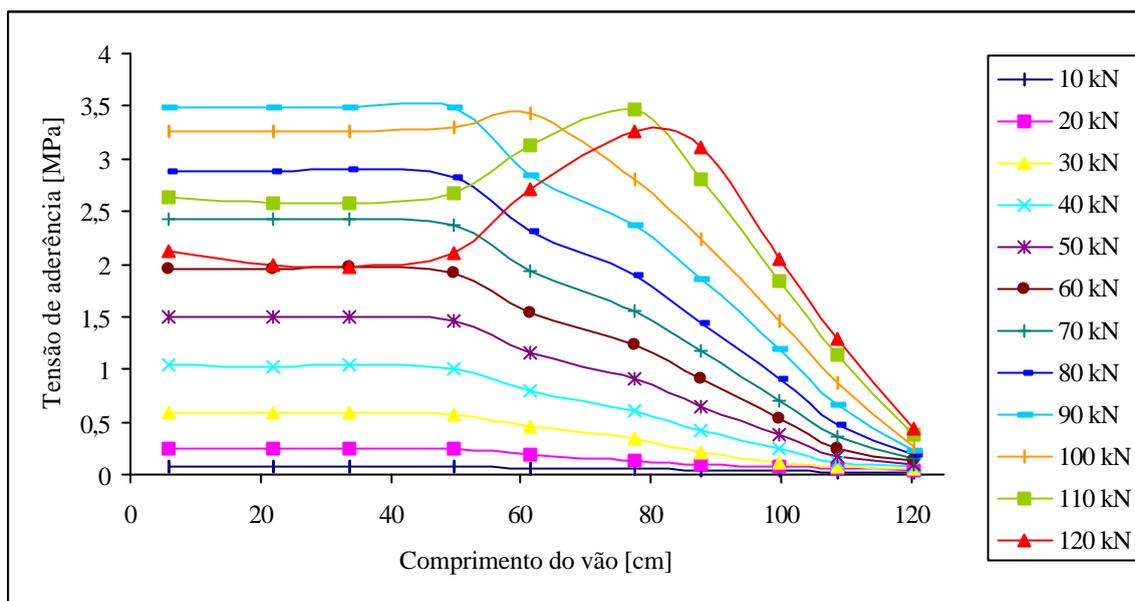


FIGURA 6.42 - Tensão de aderência na interface do reforço com a viga reforçada com sete camadas



FIGURA 6.43 - Ruptura por descolamento na viga reforçada com sete camadas

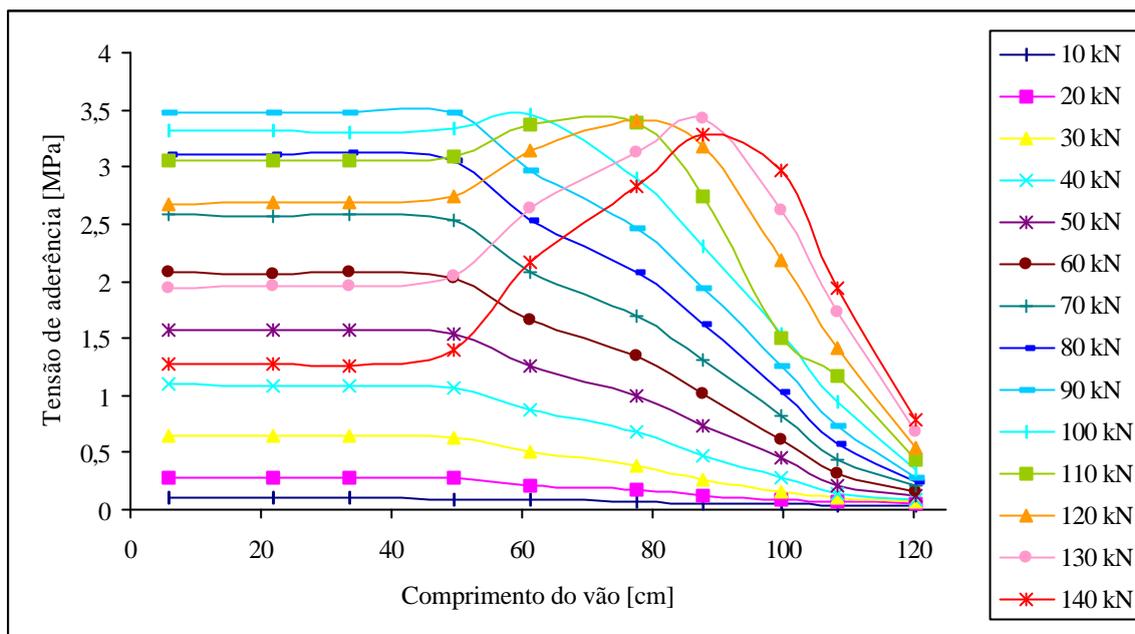


FIGURA 6.44 - Tensão de aderência na interface do reforço com a viga reforçada com dez camadas



FIGURA 6.45 - Ruptura por descolamento na viga reforçada com dez camadas

7 CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

7.1 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi implementado um modelo computacional, baseado no método dos elementos finitos, para análise tridimensional de peças de concreto armado. A principal característica deste é permitir a previsão dos deslizamentos relativos e das tensões de aderência na interface entre as barras de armadura/reforço e o concreto.

O programa computacional foi desenvolvido com base em um programa para análise dinâmica, não-linear e transiente de estruturas tridimensionais de concreto armado, apresentado por Hinton (1988). Posteriormente, foram incorporadas modificações propostas por Claire (1994), que incluem uma nova representação para a armadura, a determinação dos parâmetros do modelo viscoelástico com envelhecimento do concreto e o aperfeiçoamento dos modelos elastoplásticos para os materiais. Na presente dissertação, o novo modelo de aderência foi implementado a partir da versão de Claire (1994), com base na proposta de Elwi e Hrudey (1989).

Considerando-se a variabilidade inerente ao comportamento de peças de concreto armado, alcançou-se excelente aproximação frente à maioria dos resultados experimentais analisados. O estudo evidenciou uma ótima precisão do modelo implementado para a previsão das tensões normais e de aderência ao longo das barras de armadura e elementos de reforço. A concordância entre os valores confrontados é uma indicação da validade do modelo proposto para o estudo de outras situações nas estruturas de concreto armado.

Deve-se observar, ainda, que nos três conjuntos de vigas analisadas – Campagnolo et al. (1997), Silva (1999) e Beber (1999) – não foi aplicado o modelo de aderência nas barras de armadura, tanto longitudinais quanto transversais. Esta opção deveu-se a presença, nestas barras, de outros mecanismos de transferência de esforços (dispositivos mecânicos de ancoragem, como ganchos), além da aderência entre os materiais.

7.2 DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Os resultados alcançados incentivam aperfeiçoamentos futuros do modelo proposto, com o intuito de estender sua aplicabilidade.

Deve-se aprofundar o estudo do modelo constitutivo para o concreto, de forma a evitar o desacoplamento dos graus de liberdade relativos às tensões normais e de aderência nas barras de armadura.

Seria interessante, também, implementar outras formas de transferência de esforços entre os materiais, através da simulação da presença de dispositivos mecânicos de ancoragem, como ganchos, laços ou reforços laterais.

Outro aspecto que merece atenção é o estudo da variação das condições de aderência ao longo do tempo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- BALAKRISHNAM, S., MURRAY, D. W. **Finite element prediction of reinforced concrete behavior.** Structural Engineering Report N° 87, p. 367-387, Apr. 1986.
- BALAKRISHNAN, S., MURRAY, D. W. **Concrete constitutive model for NLFE analysis of structures.** Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 114, n. 7, p. 1449-1466, 1988.
- BALAKRISHNAN, S., MURRAY, D. W. **Effect of modeling on NLFE analysis of concrete structures.** Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 114, n. 7, p.1467-1487, 1988.
- BARZEGAR, F. **Analysis of RC membrane elements with anisotropic reinforcement.** Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 115, n. 3, p. 647-665, 1989.
- BARZEGAR, F. **Layering of RC membrane and plate elements in nonlinear analysis.** Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 114, n. 11, p. 2474-2492, 1988.
- BAZANT, Z. P., PAN, J., PIJAUDIER-CABOT, G. **Softening in reinforced concrete beams and frames.** Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 113, n. 12, p.2333-2347, 1987.
- BAZANT, Z. P., PIJAUDIER-CABOT, G. PAN, J. **Ductility, snapback, size effect, and redistribution in softening beams or frames.** Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 113, n. 12, p. 2348-2364, 1987.
- BEBER, A. J. **Avaliação do desempenho de vigas de concreto armado reforçadas com lâminas de fibra de carbono.** Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CPGEC, 1999. 145p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
- BÉDARD, C., KOTSOVOS, M., D. **Application of NLFEA to concrete structures.** Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 111, n. 12, p. 2691-2707, 1985.

- CAMPAGNOLO, J. L., CAMPOS FILHO, A., SILVA FILHO, L. C. P. **Análise teórico-experimental de vigas de concreto armado reforçadas**. CONPAT, 4., 1997, Porto Alegre, Anais... UFRGS/CPGEC, 1997. 2v. v2, p. 127-134.
- CAMPOS FILHO, A. **Análise teórico-experimental de elementos de concreto armado para obtenção de modelo matemático**. São Paulo: Escola Politécnica da USP, 1987. 293 p. Tese de Doutorado em Engenharia Civil.
- CERVENKA, V. **Constitutive Model for Cracked Reinforced Concrete**. Journal of American Concrete Institute, v. 82, n. 6, p. 877-882, 1985.
- CHANG, T. Y., TANIGUCHI, H., CHEN, W. F. **Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete**. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 113, n. 1, p. 122-140, 1987.
- CHANNAKESHAHA, C., IYENGAR, K. T. S. R. **Elasto-plastic cracking analysis of reinforced concrete**. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 114, n. 11, p. 2421-2438, 1990.
- CHOI, O. C., HADJE-GHAFFARI, H., DARWIN, D., MCCABE, S. L. **Bond strength of epoxy-coated reinforcement: Bar parameters**. ACI Mts. J., v. 88, n. 2, p. 207-217, 1991.
- CLAURE, J. D. **Análise tridimensional elasto-viscoplástica de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CPGEC, 1994. 145p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **Concrete under multiaxial states of stress constitutive equations for practical design**. Paris, 1983. (Bulletin d'Information, 156)
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **Application of the finite element method to two-dimensional reinforced concrete structures**. Paris, 1983. (Bulletin d'Information, 159)
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP Model Code 1990**. Lausanne, 1993. (Bulletin d'Information, 213/214)

- DARWIN, D. **Reinforced concrete**. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures II: Proceedings of International Workshop. Ed. J. Isenberg, p. 203-232, 1991.
- ELWI, A. E., HRUDEY, T. M. **Finite element model for curved embedded reinforcement**. Journal of Engineering Mechanics Division , ASCE , v. 115 , n. 4, p. 740-754 , Apr. 1989.
- GAJER, G., DUCS, P. F. **Crack band based model for FEM analysis of concrete structures**. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 116, n. 6, p. 1696-1714, 1990.
- GAJER, G., DUCS, P. F. **Simplified orthogonal crack model for concrete**. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 117, n.1, p. 149-164, 1991.
- GOMES, H. M. **Análise da confiabilidade de estruturas de concreto armado usando o método dos elementos finitos e processos de simulação**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CPGEC, 1997. 108 p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
- GROOT, A. K., KUSTERS, G. M. A., MONNIER, T. **Numerical modelling of bond-slip behavior**. Heron, v. 26, n.1B, 1981.
- GUPTA, A. Q., MAESTRINI, S. R. **Post-cracking behavior of membrane reinforced concrete elements including tension-stiffening**. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 115, n. 4, p. 957-976, 1989a.
- GUPTA, A. Q., MAESTRINI, S. R. **Unified approach to modeling post-cracking membrane behavior of reinforced concrete**. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 115, n. 4, p. 977-993, 1989b.
- HINTON, E. **Numerical methods and software for dynamic analysis for plates and shells**. Swansea: Pineridge Press, 1988. 550 p.
- HINTON, E., OWEN, D. R. J. **Finite element software for plates and shells**. Swansea: Pineridge Press, 1984. 403 p.
- HU, H., SCHNOBRICH, W. C. **Nonlinear analysis of cracked reinforced concrete**. ACI Structural Journal, v. 87, n. 2, p. 199-207, 1990.

- IGNATAKIS, C. E., STAVRAKAKIS, E. G., PENELIS, G. G. **Parametric analysis of reinforced concrete columns under axial and shear loading using the finite element method**. ACI Structural Journal, v. 86, n. 4, p. 413-418, 1989.
- JUVANDES, L. et al. **Comportamento experimental de vigas de betão armado reforçadas com laminados de CFRP**. Relatório técnico, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1998.
- KEUSER, M., MEHLHORN, G. **Finite element models for bond problems**. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 113, n. 10, p. 2160-2173, 1987.
- KOTSOVOS, M. D. **Behavior of beams with shear span-to-depth ratios greater than 2.5**. Journal of American Concrete Institute, v. 83, n. 6, p. 1026-1034, 1986.
- LEONHARDT, F., MÖNNING, E. **Construções de concreto**. Rio de Janeiro, Interciência, 1977. 6 v.
- LEWINSKI, P. M., WOJEWÓDZKI, W. **Integrated finite element model for reinforced concrete slabs**. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 117, n.4, p. 1017-1038, 1991.
- MASSICOTTE, B., ELWI, A. E., MCGREGOR, P. G. **Tension-stiffening model for planar reinforced concrete members**. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 116, n. 11, p. 3039-3058, 1990.
- MÖRSCH, E. **Der Eisenbetonbau – Seine Theorie und Anwendung**. Konrad Wittwer, Stuttgart, 1923.
- MUFTI, A. A., MIRZA, M. S., MCCUTCHEON, J. O., HOUD, J. **A study of the behavior of reinforced concrete elements**. Structure Concrete Series 70-5, McGill University, 1970
- MURTUZA, M. A., R. J. COPE. **Investigation of concrete spine beam bridge decks**. Journal of American Concrete Institute, v. 80, n. 2, p. 162-169, 1985.
- NGO, D., SCORDELIS, A. C. **Finite element analysis of reinforced concrete beams**. Journal of American Concrete Institute, v. 64, n. 3, p. 152-163, 1967.

- NILSON, A. H. **Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method.** Journal of American Concrete Institute, v. 65, n. 9, p. 757-766, 1968.
- OTTOSEN, N. S. **A failure criterion for concrete.** Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, v. 103, n. 4, p. 527-535, Aug. 1977.
- OWEN, D. R. J., HINTON, E. **Finite element programming.** London: Academic Press, 1977. 305 p.
- PANDE, G. N., OWEN, D. R. J., ZIENKIEWICZ, O. C. **Overlay models in time-dependent non-linear material analysis.** Computers and structures, v. 7, n. 3, p. 435-443, 1977.
- PRATES JÚNIOR, N. P. **Um modelo elasto-viscoplástico para análise de peças de concreto estrutural, submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos.** Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CPGEC, 1992. 130 p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
- RASHID, Y. R. **Analysis of prestressed concrete pressure vessels.** Nuclear Engineering and Design, v. 7, n. 4, p. 334-344, 1968.
- SILVA, P. A. S. C. M. **Modelação e análise de estruturas de betão reforçadas com FRP.** Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1999. 254 p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
- STEVENS, N. J., UZUMERI, S. M., COLLINS, M. P., WILL, G. T. **Constitutive model for reinforced concrete finite element analysis.** ACI Structure Journal, v. 88, n. 1, p. 49-59, 1991.
- VAN MIER, J. G. M. **Examples of non-linear analysis of reinforced concrete structures with DIANA.** Netherlands: Heron, v. 32, n. 3, 1987.
- VECCHIO, F. J. **Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete membranes.** ACI Structure Journal, v. 86, n. 1, p. 26-35, 1989.
- WU, Z., YOSHIKAWA, H., TANABE, T. A. **Tension stiffness model for cracked reinforced concrete.** Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 117, n. 3, p.715-732, 1991.

ZIENKIEWICZ, O. C. **The finite element method.** London: McGraw-Hill, 1986, 787p.

ZIENKIEWICZ, O. C., PHILLIPS, D. V., OWEN, D. J. R. **Finite element analysis of some concrete non-linearities: theory and examples.** Seminar on concrete structures subjected to triaxial stresses. Papers. Bergamo: IABSE, 1974. p. 1-21