

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**O problema de Dirichlet para a equação de  
hipersuperfície mínima em  $M \times \mathbb{R}$  com bordo  
assintótico prescrito**

Dissertação de Mestrado

MIRIAM TELICHEVESKY

Porto Alegre, 16 de março de 2010

Dissertação submetida por Miriam Telichevesky <sup>1</sup> , como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll

Banca examinadora:

Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll (IM - UFRGS, ORIENTADOR)

Prof. Dr. Artur Oscar Lopes (IM - UFRGS)

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (IM - UFRGS)

Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira (UFC)

---

<sup>1</sup>Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

# Agradecimentos

Tenho muitas pessoas a agradecer. Por isso, decidi escrever de forma um pouco mais geral, citando algumas vezes apenas os nomes daqueles que tiveram envolvimento um pouco mais direto com meu trabalho.

Agradeço em primeiro lugar aos professores Eduardo Brietzke e Jaime Ripoll.

O Eduardo me acompanhou durante praticamente toda a minha formação matemática, me orientando durante 3 anos na iniciação científica e durante um pedaço do Mestrado, até eu decidir seguir pela Geometria. Grande parte da cultura matemática que tenho hoje na minha bagagem tem alguma relação com ele; ele é meu orientador do coração.

O Jaime me acolheu na Geometria SEMPRE com um sorriso no rosto e com MUITA disposição para ajudar. Trabalhar com ele durante esses meses foi muito agradável, até mesmo os vinte e tantos e-mails trocados em um único domingo porque as contas não estavam colaborando conosco! Foi um imenso prazer ser sua orientanda no mestrado e tenho certeza que não vai ser diferente no doutorado.

Falando de geômetras, tenho que agradecer a toda a comunidade brasileira de Geometria porque ao ficarem sabendo que eu estava começando a fazer parte dessa equipe, vários pesquisadores foram muito gentis me dizendo com entusiasmo “Bem vinda!”; um deles foi o próprio Manfredo do Carmo, a quem também devo agradecer porque muito do que aprendi de Geometria está nos seus livros. Tem um grupinho de geômetras em particular que eu preciso agradecer, a saber: Álvaro, Cinthya, Pati e Rodrigo ( $\pi$ ), com quem compartilhei estudos, livros, cadernos, muitos miolos queimados e o nosso próprio orientador.

E ainda falando de Geometria, devo também expressar meus agradecimentos aos professores Cydara Ripoll, Ivan Pan e Leonardo Bonorino. A professora Cydara desafiou tanto a turma de Geometria Analítica no começo da minha graduação que me sinto até hoje desafiada pela Matemática; junto com o professor Eduardo, ela me conduziu nos meus primeiros passos na Matemática. Foi com o professor Ivan que aprendi Geometria Algébrica, que é uma área que também muito me

encanta; com ele eu podia sempre trocar idéias sobre a beleza da Matemática, e isso sempre foi motivo de grande inspiração para mim. O professor Leonardo, além de ter sido um dos maiores responsáveis pela minha paixão pela Geometria, por ter ministrado o curso de Geometria Riemanniana em 2008, faz parte de maneira bastante expressiva, ao lado do Eduardo, da minha formação como analista. Ele sempre foi, além do excelente professor, uma pessoa muito prestativa e tenho uma gratidão muito grande por ele.

Outros professores do Instituto também tiveram sua parcela de responsabilidade na minha formação e no meu amor pela Matemática, por isso merecem meu agradecimento: Ada, Alexandre, Alveri, Artur, Diego Lieban, Flávia, Jairo Bochi, Luis Gustavo e Miguel; também tive nessas pessoas grandes inspiradores. Incluo nessa lista também os professores Francisco, Lisete e Marcus, inspiradores para o meu lado “educadora” que muito me movimenta. Agradeço também ao Alvino e à Marilaine que, mesmo sem nunca terem me dado aula, são pessoas muito importantes para mim, grandes incentivadores.

Devo também agradecer aos meus amigos da graduação e mestrado, com quem compartilhei momentos de estudo e muita diversão; com eles me sinto sempre muito à vontade. Meus sinceros agradecimentos em especial ao Diego Marcon e ao Nicolau, que desde o começo foram colegas de estudo, e sempre foram e serão grandes amigos. Novos amigos, como a Pati, o Patropy e a Thaísa Müller, fora o pessoal da Geometria e o Diego Lieban, que eu já citei antes, também devem fazer parte desta lista; com eles compartilho muitas idéias matemáticas e não-matemáticas e eles me deixam sempre muito alegre. Evidentemente muitos outros amigos fazem parte dessa lista enorme, e já peço desculpas por não ter incluído todos aqui.

Também devo muito às amigas Alana, Jamili, Laura, Patrícia, Rosângela e Vanessa, amigas de infância, que sempre estão na torcida e vibram comigo nas vitórias. Muitos professores do colégio também entram na minha lista de amigos; agradeço especialmente à professora Cristiane, que me inspira desde que tenho 10 anos de idade, ao professor Saul, porque foi nas aulas dele que tive os primeiros sintomas que indicavam a minha grande paixão pela Matemática, e à professora Marisa, por trocar confidências sobre o infinito e fazer eu querer seguir esse caminho.

Por fim, agradeço à minha família pela educação que me deram e por terem sempre feito eu buscar o meu melhor; também devo agradecer pela paciência durante os anos que venho matematicando por aí; os que convivem com um matemático sabem que às vezes vão lhe fazer mil perguntas sobre o que desejam comer ou fazer e não obterão respostas coerentes, e isso aconteceu algumas (muitas) vezes quando

eu estava trabalhando na dissertação. Foram eles que criaram a Miriam que hoje todos conhecem e eu devo grande parte da minha felicidade a eles.

Estendo os agradecimentos nesse sentido à família do Gabriel, que além de terem me acolhido como parte da vida deles, também tiveram que passar por essas situações típicas do matemático trabalhando!

E por último, agradeço àquele que tem sido a pessoa mais importante na minha vida, àquele que sempre está ao meu lado para o que quer que eu precise (e estava mais nervoso do que eu na hora da apresentação da dissertação), àquele que eu mais amo nesse mundo, e a quem dedico esse trabalho: ao Gabriel.

A todos aqueles que fazem parte de mim, mesmo que não tenham sido citados aqui, saibam que vocês são peças importantes nessa conquista, e que eu sempre serei muito grata por tudo. Obrigada, de coração.

## Resumo

O objetivo central deste trabalho consiste em demonstrar a existência de gráficos mínimos  $\mathcal{C}^{2,\alpha}$  com fronteira assintótica prescrita na variedade produto  $M \times \mathbb{R}$ , onde  $M$  é completa, simplesmente conexa, com curvatura seccional  $K_M$  satisfazendo  $K_M \leq -k^2 < 0$  e tal que, para algum  $p \in M$ , o subgrupo de isotropia de  $\text{Iso}(M)$  em  $p$  age de modo 2-pontos homogêneo nas esferas geodésicas centradas em  $p$ .

**Palavras-chave:** Problema de Dirichlet; gráficos mínimos; curvatura seccional negativa; equações diferenciais parciais elípticas.

## Abstract

The main purpose of this work consists on proving the existence of minimal  $\mathcal{C}^{2,\alpha}$  graphics with prescribed asymptotic boundary in the product manifold  $M \times \mathbb{R}$ , where  $M$  is a complete, simply connected manifold with sectional curvature  $K_M$  satisfying  $K_M \leq -k^2 < 0$  and such that, for some  $p \in M$ , the isotropy subgroup of  $\text{Iso}(M)$  in  $p$  acts in a 2-points homogeneous way in the geodesic spheres centered in  $p$ .

**Key-words:** Dirichlet problem; minimal graphics; negative seccional curvature; elliptic partial differential equations.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>3</b>
2.1	Entendendo a geometria do problema . . . . .	3
2.1.1	Curvatura média e gráficos mínimos . . . . .	3
2.1.2	Curvatura seccional e completude: algumas noções intuitivas	6
2.1.3	Grupo de isometrias e de isotropia . . . . .	8
2.1.4	Bordo assintótico . . . . .	9
2.1.5	Teoremas de Comparação . . . . .	10
2.2	Resultados em EDP . . . . .	16
2.2.1	Método da continuidade . . . . .	16
2.2.2	Barreiras e estimativas <i>a priori</i> . . . . .	23
<b>3</b>	<b>A prova do teorema</b>	<b>26</b>
3.1	Uma propriedade importante . . . . .	27
3.2	Lemas sobre $M$ . . . . .	28
3.3	Estimativas em $\mathcal{G}$ . . . . .	30
3.4	Estimativas para $\varphi$ . . . . .	32
3.5	Construção de barreiras . . . . .	37
3.6	Argumentos finais . . . . .	45
<b>4</b>	<b>O Plano Hiperbólico</b>	<b>49</b>
4.1	Alguns resultados sobre $\mathbb{H}^2$ . . . . .	49
4.1.1	Apresentando o plano hiperbólico: os modelos do hiperbolóide e do disco . . . . .	50
4.1.2	Geodésicas . . . . .	53
4.1.3	Verificando a terceira hipótese: transformações conformes e o grupo de isometrias . . . . .	54



4.2 Reformulando os Lemas . . . . .	54
4.3 A construção de barreiras . . . . .	59
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>64</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Com o desenvolvimento da Geometria Riemanniana, a busca por “superfícies” mínimas – bastante procuradas no  $\mathbb{R}^3$  – apenas teve uma extensão natural. Dada uma variedade riemanniana  $M$ , como encontrar nela *hipersuperfícies* minimizando áreas, ou como pelo menos garantir sua existência?

Dentro do conjunto das hipersuperfícies mínimas do  $\mathbb{R}^n$ , aquelas que são gráficos de funções têm se mostrado bastante interessantes. Inicialmente porque “reduzem” o problema à resolução de EDPs. Depois, por nos levarem a estudar mais profundamente o comportamento de tais EDPs, levando analistas e geômetras a trabalharem juntos, unindo ferramentas ou até mesmo traduzindo as ferramentas utilizadas no estudo clássico das EDPs, no ambiente conhecido e bem comportado do  $\mathbb{R}^n$ , a novos ambientes, como as variedades Riemannianas.

Passamos a escrever as EDPs de forma intrínseca à variedade, sem precisar fazer uso de parametrizações. No espaço euclidiano, por exemplo, temos o gradiente como o vetor composto pelas derivadas parciais e o divergente como a soma de derivadas parciais de um campo vetorial. Estes são essencialmente os dois operadores diferenciais que aparecem neste trabalho. A grande vantagem deles – o que permite pensar em hipersuperfícies mínimas em variedades riemannianas – é que eles são operadores *geométricos*, ou seja, podem ser definidos intrinsecamente em uma variedade, e portanto podem ser definidos globalmente. No contexto do nosso trabalho, ter definições de divergente e gradiente intrínsecas é fundamental. E o melhor de tudo é que ainda assim é possível aplicar a teoria de EDPs para fazer estimativas e obter resultados de compacidade e, no final das contas, de existência.

Consideramos aqui uma variedade riemanniana  $M$  com hipóteses topológicas e sobre curvatura e estudamos a existência de *gráficos mínimos* na variedade produto  $M \times \mathbb{R}$ , ou seja, de hipersuperfícies mínimas que são gráficos de funções com certa

regularidade.

O teorema central do trabalho, provado por Espírito-Santo, Fornari e Ripoll em [EFR] é o que segue:

**Teorema 1.0.1.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana satisfazendo as seguintes hipóteses:*

- (i)  $M$  é completa e simplesmente conexa, de dimensão  $n \geq 2$ ;
- (ii) A curvatura seccional  $K$  de  $M$  satisfaz a desigualdade  $K \leq -k^2$ , onde  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k > 0$ ;
- (iii) Existe um ponto  $p \in M$  tal que o subgrupo de isotropia do grupo de isometrias de  $M$  em  $p$  age de modo 2-pontos homogêneo nas esferas geodésicas centradas em  $p$ .

Seja  $\psi \in C^{2,\alpha}(\partial_\infty M)$ . Considere o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Q(u) := \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} u}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} u|^2}} = 0, & \text{em } B \\ u|_{\partial_\infty M} = \psi. \end{cases} \quad (1.1)$$

Existe  $u \in C^{2,\alpha}(M) \cap C^0(\overline{M})$  tal que  $u$  é solução de (1.1).

O teorema é uma extensão do Teorema 4 em [NR] para dimensões maiores e ambientes mais gerais. Por exemplo, os espaços hiperbólicos complexo e quaterniônico, como os planos de Cayley complexo e quaterniônico, estão contemplados nas hipóteses do teorema (veja [H]) para maiores detalhes.

A geometria das superfícies mínimas nas variedades produto da forma  $M \times \mathbb{R}$  tem sido estudada mais recentemente (veja, por exemplo [MRR]). O problema de Dirichlet para a equação de superfície mínima ou de curvatura média constante é estudada em [MR], [NR], [S] e [SY].

No Capítulo 2 apresentamos definições e ferramentas geométricas e analíticas de interesse independente e que são utilizadas para a compreensão e demonstração do Teorema 1.0.1. No Capítulo 3, demonstramos 1.0.1 com detalhes. E como no mundo das variedades riemannianas nem sempre temos o conforto de poder desenhar as situações, ou nem sequer visualizá-las, dedicamos o Capítulo 4 para fazer as contas explicitamente em uma variedade já bastante conhecida: o plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ .

# Capítulo 2

## Preliminares

Os principais resultados em Geometria e EDP em variedades utilizados como ferramentas na demonstração dos resultados do texto são apresentados neste capítulo. Supomos que o leitor já tem certa familiaridade com variedades riemannianas, campos de vetores em variedades, conexão de Levi-Civita, colchetes, geodésicas, campos de Jacobi, campos de Killing e isometrias. Também alguns conhecimentos de Análise e de resultados em EDPs elípticas lineares e quase-lineares de 2ª ordem são importantes.

### 2.1 Entendendo a geometria do problema

Dedicamos essa seção para aqueles leitores que não têm muita familiaridade com alguma das hipóteses do teorema. Indicamos maiores referências ao longo do texto para os mais curiosos.

#### 2.1.1 Curvatura média e gráficos mínimos

Embora o enunciado do Teorema (1.0.1) não deixe explícito, o que estamos procurando é uma hipersuperfície *mínima* na variedade produto  $M \times \mathbb{R}$  que seja o gráfico de alguma função  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ , e satisfazendo condição de fronteira no infinito. Vejamos então porque  $Q(u) = 0 \iff$  o gráfico de  $u$  é uma hipersuperfície mínima em  $M \times \mathbb{R}$ .

Seja  $N^{n+1}$  uma variedade riemanniana. Uma hipersuperfície  $\Sigma^n \subset N^{n+1}$  é dita orientável se existe um campo de vetores  $\eta$  em  $N$ , contínuo em  $\Sigma$ , unitário e normal a ela. Quando uma variedade é orientável e fixamos um campo normal

unitário  $\eta$  (sempre existem duas possibilidades), podemos definir sua *segunda forma fundamental* da seguinte forma:

Seja  $x \in \Sigma$ . Então a segunda forma fundamental de  $\Sigma$  em  $x$  é dada por  $A_x : T_x \Sigma \rightarrow T_x \Sigma$ ,  $A_x(v) = -\nabla_v \eta$ , onde  $\nabla$  é a conexão riemanniana de  $N$  (para o leitor pouco acostumado com conexões, no caso do  $\mathbb{R}^n$  a conexão nada mais é do que a derivação direcional, neste caso, estamos derivando o campo normal na direção do vetor  $v$ ).  $A_x(v)$  de fato é um elemento de  $T_x \Sigma$ , pois se  $V$  é uma extensão local do vetor  $v$  a um campo,

$$\langle \eta, \eta \rangle = 1 \Rightarrow V \langle \eta, \eta \rangle = 0 \Rightarrow 2 \langle \nabla_V \eta, \eta \rangle = 0$$

e assim  $A_x(v) \perp \eta$ , ou seja, é tangente a  $\Sigma$ .

Observamos que se  $\Sigma$  é, por exemplo, um plano no  $\mathbb{R}^{n+1}$ , então o campo normal é constante ao longo de qualquer direção, assim, a segunda forma fundamental é nula. Se, por outro lado,  $\Sigma$  “se curva” dentro do  $\mathbb{R}^{n+1}$  na direção de  $v$ , então  $A_x(v)$  deixa de ser nula. No caso geral de uma variedade  $N^{n+1}$  como ambiente, podemos pensar de forma análoga: a segunda forma fundamental de uma hipersuperfície  $\Sigma$  nos diz o quanto  $\Sigma$  está deixando de ser, no ponto e direção em questão, uma subvariedade *geodésica*. Uma subvariedade é dita *geodésica* quando toda geodésica em  $\Sigma$  é também uma geodésica em  $N^{n+1}$ . No caso do  $\mathbb{R}^{n+1}$ , as retas são geodésicas, assim como no plano. Já numa esfera em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , nem sequer temos retas definidas, de modo que as geodésicas são outras curvas; assim, uma esfera não pode ser geodésica em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Com a segunda forma fundamental em mãos, podemos definir curvatura média. Dado  $x \in \Sigma$ , a *curvatura média de  $\Sigma$  em  $x$  segundo o campo normal  $\eta$*  é dada por

$$H(x) := \frac{1}{n} \text{tr } A_x.$$

(Alguns autores utilizam uma expressão não normalizada, isto é,  $H(x) := \text{tr } A_x$ , mas para fins práticos, a verdade é que simplesmente *não faz a menor diferença*.)

Escolhendo uma base  $\{E_1, \dots, E_n\}$  ortonormal em  $T_x \Sigma$ , podemos representar o traço da maneira usual:

$$H(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle A_x(E_i), E_i \rangle = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \eta, E_i \rangle$$

$\Sigma$  é dita uma hipersuperfície *mínima* se  $H \equiv 0$ . A razão disso é que as hipersuperfícies de curvatura média nula minimizam áreas, de uma maneira que pode ser precisada, mas não a faremos aqui. Apenas queremos mostrar porque  $Q(u) = 0$  é

equivalente ao fato do gráfico de  $u$  (denotado por  $\text{Gr}(u)$ ) ser mínimo, ou seja, ter curvatura média constante igual a zero.

Voltamos então às hipóteses do Teorema 1.0.1 (embora os próximos passos possam ser feitos com  $M$  qualquer, vai facilitar nossas contas estar nas hipóteses do teorema). Vamos parametrizar  $\text{Gr}(u)$ . Como é visto na seção 2.1.2,  $M$  é globalmente difeomorfa ao  $\mathbb{R}^n$ , digamos, por um difeomorfismo  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow M$ . Parametrizamos  $\text{Gr}(u)$  por

$$\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Gr}(u)$$

$$\Psi(x) = (\phi(x), u(\phi(x))) \in M \times \mathbb{R}$$

Os vetores  $\frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(x)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , formam uma base para  $T_{\Psi(x)}\text{Gr}(u) \subset T_{\Psi(x)}(M \times \mathbb{R})$ . Pela definição de  $\Psi$ , tais vetores devem ser da forma

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(x) = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x), \left\langle \text{grad } u(\Psi(x)), \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) \right\rangle \right),$$

onde a decomposição em duas coordenadas é vendo  $T_{\Psi(x)}(M \times \mathbb{R})$  decomposto como soma direta  $T_{\Psi(x)}(M \times \mathbb{R}) = T_{\Psi(x)}\text{Gr}(u) \oplus T_{\Psi(x)}\mathbb{R}$ . Observando a “cara” dos vetores da base, é fácil ver que um vetor normal a  $\text{Gr}(u)$  em  $\Psi(x)$  pode ser da forma

$$\eta(\Psi(x)) = \frac{(\text{grad } u(\Psi(x)), -1)}{\sqrt{1 + |\text{grad } u(\Psi(x))|^2}}.$$

Tendo isso em mãos, podemos calcular a curvatura média de  $\text{Gr}(u)$ :

Seja  $\{E_1, \dots, E_n\}$  base ortonormal para  $T_x\text{Gr}(u)$ .  $\{(E_1, 0), \dots, (E_n, 0)\}$  é o “mesmo” conjunto de vetores, só que agora vistos em  $T_{\Psi(x)}(M \times \mathbb{R})$ , o que facilita nossas contas. Então

$$\begin{aligned} \nabla_{(E_i, 0)} \eta &= \nabla_{(E_i, 0)} \frac{(\text{grad } u, -1)}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|^2}} \\ &= (E_i, 0) \left( \frac{1}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|^2}} \right) (\text{grad } u, -1) + \frac{1}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|^2}} \nabla_{(E_i, 0)} (\text{grad } u, -1) \\ &= E_i \left( \frac{1}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|^2}} \right) (\text{grad } u, -1) + \frac{1}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|^2}} (\nabla_{E_i} \text{grad } u + \nabla_{(E_i, 0)}(-1)) \end{aligned}$$

onde nas contas utilizamos as propriedades da conexão, que muito se assemelham

às propriedades da derivação. Assim,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{(E_i, 0)} \eta, (E_i, 0) \rangle &= E_i \left( \frac{1}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|^2}} \right) \langle (\text{grad } u, -1), (E_i, 0) \rangle \\
&+ \frac{1}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|^2}} \langle \nabla_{E_i} \text{grad } u, (E_i, 0) \rangle \\
&= E_i \left( \frac{1}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|^2}} \right) \langle \text{grad } u, E_i \rangle \\
&+ \frac{1}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|^2}} \langle \nabla_{E_i} \text{grad } u, E_i \rangle \\
&= \left\langle \nabla_{E_i} \left( \frac{\text{grad } u}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|^2}} \right), E_i \right\rangle
\end{aligned}$$

Mas agora observamos que dado um campo de vetores  $C$ , podemos definir seu *divergente* por  $\text{div } C = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} C, E_i \rangle$  (veja, por exemplo, [dC1]). Assim, a expressão acima é na verdade

$$\text{div} \frac{\text{grad } u}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|^2}} = Q(u)$$

e mostramos, então, que estamos à procura de gráficos mínimos em  $M \times \mathbb{R}!$

Aproveitamos que estamos falando de curvatura média para dizer que ao longo do texto também calculamos a curvatura média de esferas geodésicas dentro de  $M$ . Como as esferas geodésicas são hipersuperfícies em  $M$ , isso faz todo sentido e não precisamos mais fazer grandes comentários a esse respeito.

## 2.1.2 Curvatura seccional e completude: algumas noções intuitivas

A *curvatura seccional* de uma variedade riemanniana, com frequência chamada simplesmente de *curvatura*, é uma generalização natural da curvatura gaussiana das superfícies. Sua expressão é dada em função do *tensor curvatura* da variedade, que por sua vez é definido a partir da métrica. A curvatura é, portanto, uma noção intrínseca à variedade.

Para o leitor pouco acostumado com esta terminologia, podemos explicar a curvatura seccional da seguinte forma: dados um ponto  $x \in M$  e um subespaço vetorial bidimensional  $\sigma$  contido em  $T_x M$ , considere o conjunto das geodésicas partindo de  $x$  que têm como vetor velocidade inicial um elemento de  $\sigma$ , com norma suficientemente pequena de tal forma que tudo “funcione bem” – e “funcionar bem” é

bastante preciso quando fazemos as definições matematicamente. Esse conjunto de curvas forma uma superfície (isto é, uma subvariedade de dimensão 2) dentro da variedade  $M$  passando por  $x$ . Assim, a *curvatura seccional no ponto  $x$  com relação ao plano  $\sigma$* ,  $K(x, \sigma)$ , é nada mais nada menos que a curvatura gaussiana da superfície obtida – que, sabemos a partir do Teorema Egregium de Gauss, só depende da primeira forma fundamental, ou seja, da métrica!

Nas hipóteses do Teorema 1.0.1, temos que  $K_M \leq -k^2$ . Isto significa que para todo ponto  $x \in M$  e todo  $\sigma \subset T_x M$  subespaço bidimensional, vale  $K(x, \sigma) \leq -k^2$ .

Explicar o que é o tensor curvatura de uma variedade é um pouco mais complicado. Para ter certa intuição geométrica na maioria dos resultados que aqui obtemos, é suficiente recorrer à idéia intuitiva de curvatura seccional. Para saber mais sobre o assunto, pode-se buscar referências em [dC1] e [dC2].

O que o leitor precisa ter em mente nos próximos passos é que uma variedade de curvatura negativa tem uma característica bastante marcante: as geodésicas partindo de um ponto se afastam ao longo do tempo. Isso também acontece em variedades de curvatura zero, como é o caso do  $\mathbb{R}^n$ , onde as geodésicas são retas, no entanto esse afastamento ocorre com velocidade maior nas variedades de curvatura negativa. E em contraponto, nem sempre acontece naquelas de curvatura positiva, como é o caso da esfera: em algum momento as geodésicas voltam a se aproximar e, inclusive, se encontram em tempo finito.

O fato das geodésicas se afastarem mais rapidamente que no caso de curvatura nula nos permite obter resultados muito diferentes no caso de curvatura estritamente negativa do que aqueles obtidos no caso de curvatura nula. O próprio teorema principal deste trabalho nos mostra isso: a única chance de termos um gráfico mínimo, completo e definido em todo  $\mathbb{R}^2$  é se ele é o gráfico de uma função afim, como diz o conhecido Teorema de Bernstein (a título de curiosidade veja, por exemplo, [dC3]).

A hipótese de *completude* também é fundamental. Uma variedade riemanniana é *completa* quando a distância dada por sua métrica a torna um espaço métrico completo. Como consequência disso, diz o famoso Teorema de Hopf-Rinow, as geodésicas partindo de qualquer ponto estão definidas para todo tempo real. Isso nos dá muitos resultados bons de trabalhar: por exemplo, nunca precisamos nos preocupar com intervalos máximos de definição de geodésicas e ainda mais – também diz o Teorema de Hopf Rinow – quaisquer dois pontos da variedade podem ser ligados por uma geodésica cujo comprimento é exatamente a distância entre eles (e esta é chamada de geodésica minimizante).



Como boa consequência de unir as hipóteses de curvatura seccional não positiva com completude, temos que  $M$  é uma variedade *difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$* , conforme o Teorema de Hadamard (veja, por exemplo [dC1]). Isto também é fundamental para a demonstração do nosso teorema: caso contrário, não seria possível dar o primeiro passo, ou seja, identificar  $M$  isometricamente com uma bola, o que é uma redução bastante importante.

### 2.1.3 Grupo de isometrias e de isotropia

Dizemos que uma aplicação  $f : M \rightarrow M$  é uma *isometria* se  $\forall p \in M, \forall u, v \in T_p M$ , tem-se  $\langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)} = \langle u, v \rangle_p$ . O conjunto das isometrias de uma variedade riemanniana  $M$ , denotado por  $\text{Iso}(M)$ , é um *grupo de Lie*, isto é, um grupo que tem também uma estrutura de variedade riemanniana *compatível* com a de grupo, ou seja, as operações de grupo são aplicações diferenciáveis da variedade produto  $\text{Iso}(M) \times \text{Iso}(M)$  na variedade  $\text{Iso}(M)$ .

A estrutura de grupo de Lie de  $\text{Iso}(M)$  é bastante útil na demonstração do Teorema 1.0.1, por isso vamos explorar um pouco mais esse assunto nos próximos parágrafos.

Dado um grupo de Lie  $G$  e um elemento  $g$  de  $G$ , podemos definir a função  $L_g : G \rightarrow G$  por  $L_g(h) = gh$ , dita translação à esquerda pelo elemento  $g$ . De forma análoga, define-se a translação à direita; tudo que fazemos a partir daqui para um tipo de translação vale também para a outra.

Chamamos de  $e$  o elemento neutro de  $G$ . Dado um vetor  $v \in T_e G$ , podemos definir um campo de vetores em  $G$  a partir das translações, da seguinte forma:  $V(g) := d(L_g)_e(v)$ . Este campo, por construção, torna-se invariante à esquerda, isto é, bem comportado com relação às translações à esquerda; além disso,  $V(e) = v$ .

Também por uso das translações, podemos definir em  $T_e G$  uma operação a mais, a saber, o colchete entre dois vetores, operação que a princípio só temos definida para campos de vetores. Com essa operação adicional,  $T_e G$  passa a ser uma *álgebra de Lie*, denotada freqüentemente por  $\mathcal{G}$  (veja capítulo II de [H] para maiores referências).

$G \subset \text{Iso}(M)$  denota neste trabalho o *subgrupo de isotropia de  $\text{Iso}(M)$  em  $p$* , isto é, o grupo das isometrias de  $M$  que deixam  $p$  fixo. Todo vetor  $X \in \mathcal{G}$  determina um campo em  $G$ , que também chamamos de  $X$ , usando as translações.

A hipótese (iii) do Teorema 1.0.1 nos diz que  $G$  age de forma 2-pontos homogênea nas esferas geodésicas centradas em  $p$ . Damos a seguinte definição para que esta hipótese fique mais clara:

**Definição 2.1.1.** Dizemos que um grupo  $G$  age em uma variedade diferenciável  $M$  se existe uma aplicação  $\sigma : G \times M \rightarrow M$  satisfazendo:

- (i) Fixado  $g \in G$ , a aplicação  $\sigma(g, \cdot) : M \rightarrow M$  é um difeomorfismo e  $\sigma(e, \cdot)$  é a aplicação identidade, onde  $e$  é o elemento neutro de  $G$ .
- (ii) Se  $g, h \in G$ , então  $\sigma(gh, p) = \sigma(g, \sigma(h, p)) \forall p \in M$

A ação de  $G$  em  $S$  é dita 2-pontos homogênea se dados  $p, q \in S$  e dados  $V \in T_p S$  e  $W \in T_q S$ , existe  $g \in G$  tal que  $g(p) = q$  e  $dg_p(V) = W$ . Isto é equivalente a dizer que se  $d(a, b) = d(c, d)$ , existe  $g \in G$  tal que  $g(a) = c$  e  $g(b) = d$ , o que justifica o nome.

A terceira hipótese do Teorema 1.0.1, então, faz com que não só os pontos das esferas geodésicas sejam “igualmente importantes” como também as direções. Em particular, tais esferas são subconjuntos homogêneos de  $M$ . Essa hipótese é interessante porque através dela conseguimos estimar derivações nas direções radial e transversal. Além disso, fica muito mais natural construir barreiras radialmente simétricas para o problema. O fato de conseguirmos também levar um vetor tangente no outro é ferramenta bastante interessante na hora de fazer as contas, como é visto nas Seções 3.3 e 3.4.

Para alguns exemplos de variedades satisfazendo (iii), encaminhamos o leitor para [H].

### 2.1.4 Bordo assintótico

A discussão que fazemos aqui é para uma variedade riemanniana  $M$  completa, simplesmente conexa e de curvatura seccional  $K_M < 0$ .

Considere o conjunto  $\Gamma = \{\gamma : [0, \infty) \rightarrow M \text{ tal que } \gamma \text{ é geodésica, } |\dot{\gamma}(t)| \equiv 1\}$ . Os elementos de  $\Gamma$  são chamados de *raios geodésicos*. Defina em  $\Gamma$  a seguinte relação (que é fácil ver que é de equivalência):  $\gamma \sim \delta \iff \exists C > 0$  tal que  $d(\gamma(t), \delta(t)) < C \forall t \in [0, \infty)$ . O quociente  $\Gamma/\sim$  é o que chamamos de *bordo assintótico de  $M$* , e denotamos por  $\partial_\infty M$ . Intuitivamente, duas curvas estão relacionadas se elas “terminam no mesmo lugar no infinito”, e portanto é também intuitivo pensar que tal quociente representa o conjunto dos pontos de  $M$  que estão no infinito.

Fixado  $o \in M$ , é possível identificar de forma natural  $\partial_\infty M$  com a esfera geodésica  $S$  de raio 1 centrada em  $o$  da seguinte forma: dada uma classe  $c \in \partial_\infty M$ , existe um único raio geodésico  $\gamma_c \in \Gamma$  que representa  $c$  e tal que  $\gamma_c(0) = o$ . Assim, podemos associar a cada  $c \in \partial_\infty M$  o ponto  $\gamma_c(1) \in S$ , e reciprocamente, dado um

ponto  $q \in S$ , existe uma única geodésica  $\gamma_q$  tal que  $\gamma_q(1) = q$ , e então a  $q$  associamos a classe de  $\gamma_q$ . (veja [SY] para maiores detalhes).

Através desta correspondência podemos definir uma topologia em  $\partial_\infty M$ :  $W \subset \partial_\infty M$  é um aberto se seu correspondente pela bijeção acima é aberto de  $S$  ( $S$  munida da topologia induzida de  $M$ ). Mostra-se também que essa topologia independe da escolha de  $o$ .

Se  $W$  é aberto de  $\partial_\infty M$ , então

$$U := \left( \bigcup_{c \in W} \gamma_c(0, +\infty) \right) \cup W$$

é uma vizinhança aberta de  $W$  em  $\overline{M} = M \cup \partial_\infty M$ . Uma topologia para  $\overline{M}$  é dada pela união dos abertos de  $M$  com os abertos gerados por essas vizinhanças abertas. Com essa topologia,  $\overline{M}$  é um espaço topológico compacto;  $\overline{M}$  é uma compactificação de  $M$ . (Um exemplo disso são os espaços projetivos. Para quem tem mais familiaridade com esses espaços, é intuitivo pensar em  $P\mathbb{R}^n$  como compactificação de  $\mathbb{R}^n$ .)

A identificação feita com  $S$  nos permite *representar* o bordo assintótico, que é o que é feito nesse trabalho. Pelo Teorema de Hadamard,  $\exp_o : T_o M \rightarrow M$  é um difeomorfismo global. Além disso, se  $S_1$  é a esfera unitária em  $T_o(T_o M) = T_o T_o M$ ,  $\exp_o|_{S_1} : S_1 \rightarrow S$  é também um difeomorfismo global. Assim, se  $B$  é a bola aberta unitária de  $T_o M$  com centro em  $0$ , compondo  $\exp_o$  com um difeo radial de  $B$  em  $T_o M$ , temos um difeo  $Z$  de  $B$  em  $M$ . Deste modo,  $\partial B$  fica identificado com  $\partial_\infty M$  e considerando em  $B$  a métrica induzida por  $Z$ ,  $M$  e  $B$  ficam isometricamente identificadas.

A identificação entre  $\overline{M}$  e  $\overline{B}$  é, assim, uma aplicação contínua na topologia acima definida para  $\overline{M}$ . Desta forma, a condição de fronteira no enunciado do teorema ganha sentido:  $u|_{\partial_\infty M} = \psi$  significa que através da identificação  $M = Z(B)$  tem-se  $u|_{\partial B} = \psi$ .

### 2.1.5 Teoremas de Comparação

Os teoremas de comparação na Geometria têm um papel bastante relevante: oferecem resultados que são capazes de comparar propriedades geométricas de variedades riemannianas diferentes. Fazemos uso deles para, conhecendo propriedades do espaço hiperbólico de curvatura seccional (constante)  $-k^2$ , obter propriedades para  $M$ .

**Definição 2.1.2.** *Seja  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  geodésica. Seja  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\gamma) := \{\text{campos de vetores diferenciáveis por partes ao longo de } \gamma\}$ . Escolha  $t_0 \in [0, a]$ . Defina a forma índice em  $t_0$*

$$I_{t_0} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$V \mapsto \sum_{i=1}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{\langle V', V' \rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', V \rangle\} dt,$$

onde  $[t_i, t_{i+1}]$  são os intervalos onde  $V$  é diferenciável e  $R$  é o tensor curvatura de  $M$ .

O seguinte lema nos diz que os campos de Jacobi minimizam a Forma Índice. Omitimos aqui a demonstração do lema porque ela acaba não sendo muito instrutiva para os nossos propósitos. A prova encontra-se feita com detalhes em [dC1].

**Lema 2.1.3. (Lema do Índice)** *Seja  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  geodésica sem pontos conjugados a  $\gamma(0)$  em  $(0, a]$ . Sejam  $J$  um campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$  e  $V \in \mathcal{V}(\gamma)$  tais que*

- (i)  $J(0) = V(0) = 0$
- (ii)  $\langle J, \gamma' \rangle = \langle V, \gamma' \rangle = 0$
- (iii)  $J(t_0) = V(t_0)$  para certo  $t_0 \in (0, a]$

Então  $I_{t_0}(J) \leq I_{t_0}(V)$ . Além disso, se vale =, então  $J(t) = V(t) \forall t \in [0, a]$ .

■

Duas conseqüências do Lema do Índice são os dois teoremas de comparação a seguir. Desta vez fazemos a prova com todos os detalhes porque não só os resultados são importantíssimos, como algumas ferramentas utilizadas na prova são bastante interessantes. É aqui que vemos como é possível comparar duas variedades diferentes tendo apenas hipóteses sobre a curvatura ao longo de raios geodésicos.

Utilizamos a notação  $J'$  para a derivada covariante  $DJ/dt$  ao longo de uma geodésica dada, que o contexto sempre deixa claro de qual se trata.

**Teorema 2.1.4. (da Comparação, de Rauch)**

*Sejam  $M_1 = M_1^n$  e  $M_2 = M_2^{n+k}$  variedades riemannianas de dimensões  $n$  e  $n + k$ , respectivamente, com  $k \geq 0$ . Sejam  $\gamma_1 : [0, a] \rightarrow M_1$  e  $\gamma_2 : [0, a] \rightarrow M_2$  geodésicas. Suponha que  $|\gamma_1'| = |\gamma_2'|$  e que  $\gamma_2$  não tenha pontos conjugados.*

Suponha também que  $\forall t \in [0, a]$ ,  $\forall u_1 \in \{\gamma'_1(t)\}^\perp \subset T_{\gamma_1(t)}M_1$  e  $\forall u_2 \in \{\gamma'_2(t)\}^\perp \subset T_{\gamma_2(t)}M_2$  tenha-se

$$K_1(\gamma'_1(t), u_1) \leq K_2(\gamma'_2(t), u_2)$$

onde  $K_1$  e  $K_2$  denotam as curvaturas seccionais de  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente.

Sejam  $J_1$  campo de Jacobi ao longo de  $\gamma_1$  e  $J_2$  campo de Jacobi ao longo de  $\gamma_2$  tais que  $J_1(0) = 0 = J_2(0)$  e  $|J'_1(0)| = |J'_2(0)|$ .

Então  $\forall t \in [0, a]$

$$|J_1(t)| \geq |J_2(t)|. \quad (2.1)$$

Em particular,  $\gamma_1$  não tem pontos conjugados.

**dem.:** Inicialmente, observemos que podemos supor sem perda de generalidade que os campos de Jacobi são ortogonais às geodésicas. De fato, qualquer campo de Jacobi  $J$  ao longo de uma geodésica  $\gamma$  se decompõe em uma parte  $J^T$  tangente e outra parte  $J^\perp$  ortogonal a  $\gamma$ , onde a parte tangente tem a seguinte expressão:

$$J^T(t) = \langle J(0), \gamma'(0) \rangle + t \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle \gamma'(t)$$

Como estamos no caso  $J_i(0) = 0$ , temos  $J_i^T(t) = t \langle J'_i(0), \gamma'_i(0) \rangle \gamma'_i(t)$ , para  $i = 1, 2$ . Observe que  $(J_i^T)'(t) = \langle J'_i(0), \gamma'_i(0) \rangle \gamma'_i(t)$  e portanto  $J_i^T$  é paralelo a  $\gamma'_i$ , e assim  $|\langle J'_i(0), \gamma'_i(0) \rangle| = |J'_i(0)| |\gamma'_i(0)|$ . Como por hipótese as velocidades das geodésicas são iguais, bem como as derivadas dos campos em 0, temos que vale igualdade em (2.1). Assim, podemos prosseguir supondo que os campos são ortogonais às respectivas geodésicas.

Queremos mostrar que  $\frac{|J_1(t)|}{|J_2(t)|} \geq 1 \forall t \in [0, a]$ , ou, equivalentemente, elevando as normas ao quadrado (o que facilita as contas razoavelmente!). Note que não faz sentido pensar nessa desigualdade para  $t = 0$ , no entanto podemos provar que ela é válida no limite. Começaremos por aqui. Aplicando a Regra de L'Hôpital, calculamos tal limite:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|J_1(t)|^2}{|J_2(t)|^2} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\langle J_1(t), J_1(t) \rangle}{\langle J_2(t), J_2(t) \rangle} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\langle J'_1(t), J_1(t) \rangle}{\langle J'_2(t), J_2(t) \rangle} = \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\langle J'_1(t), J'_1(t) \rangle + \langle J_1(t), J''_1(t) \rangle}{\langle J'_2(t), J'_2(t) \rangle + \langle J_2(t), J''_2(t) \rangle} &= \frac{\langle J'_1(0), J'_1(0) \rangle + \langle J_1(0), J''_1(0) \rangle}{\langle J'_2(0), J'_2(0) \rangle + \langle J_2(0), J''_2(0) \rangle} = \frac{|J'_1(0)|^2}{|J'_2(0)|^2} = 1. \end{aligned}$$

Agora podemos provar que a derivada desta função é sempre  $\geq 0$ . Assim, teremos que a função é crescente e, portanto, a desigualdade vale. Temos

$$\left( \frac{|J_1(t)|^2}{|J_2(t)|^2} \right)' = \frac{\langle J'_1(t), J_1(t) \rangle |J_2(t)|^2 - \langle J'_2(t), J_2(t) \rangle |J_1(t)|^2}{|J_2(t)|^2}.$$

Esta expressão é  $\geq 0$  se e somente se seu numerador o é. Seja  $t_0 \in (0, a]$  fixo, porém arbitrário. Mostremos que a desigualdade vale para  $t = t_0$ . Podemos excluir o caso trivial onde  $|J_1(t_0)| = 0$ .

Note que a desigualdade que desejamos é equivalente a

$$\frac{\langle J'_1(t_0), J_1(t_0) \rangle}{|J_1(t_0)|^2} \geq \frac{\langle J'_2(t_0), J_2(t_0) \rangle}{|J_2(t_0)|^2}.$$

Aqui encontra-se o primeiro passo bastante importante na demonstração do teorema: expressar cada um dos quocientes na desigualdade acima como a Forma Índice de um campo no ponto  $t_0$ . Note que, usando o Teorema Fundamental do Cálculo,

$$J_i(t_0) = \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} \langle J'_i(t), J_i(t) \rangle dt = \int_0^{t_0} \{ \langle J'_i(t), J'_i(t) \rangle + \langle J''_i(t), J_i(t) \rangle \} dt.$$

Note que como  $J_i$  é de Jacobi,  $J''_i(t) = -R(\gamma'_i(t), J_i(t)) \gamma'_i(t)$ . Logo, substituindo no resultado acima, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\langle J'_i(t_0), J_i(t_0) \rangle}{|J_i(t_0)|^2} &= \frac{1}{|J_i(t_0)|^2} \int_0^{t_0} \{ \langle J'_i(t), J'_i(t) \rangle - \langle R(\gamma'_i(t), J_i(t)) \gamma'_i(t), J_i(t) \rangle \} dt = \\ &= \int_0^{t_0} \left\{ \left\langle \frac{J'_i(t)}{|J_i(t_0)|}, \frac{J_i(t)}{|J_i(t_0)|} \right\rangle - \left\langle R \left( \gamma'_i(t), \frac{J_i(t)}{|J_i(t_0)|} \right) \gamma'_i(t), \frac{J_i(t)}{|J_i(t_0)|} \right\rangle \right\} dt. \end{aligned}$$

Defina  $U_i$  campo ao longo de  $\gamma_i$  por  $U_i(t) := J_i(t)/|J_i(t_0)|$ . Então o que queremos mostrar é que

$$I_{t_0}(U_1, U_1) \geq I_{t_0}(U_2, U_2),$$

onde  $I_{t_0}$  denota a Forma Índice em  $t_0$ .

Agora estamos prontos para dar o segundo e provavelmente mais importante passo na demonstração deste teorema. Precisamos comparar índices de campos em variedades diferentes. Sabemos que os campos de Jacobi minimizam a Forma Índice. Então uma maneira natural de prosseguirmos é tentar de alguma forma enxergar o campo  $U_1$  como se ele fosse um campo ao longo da curva  $\gamma_2$ . Isso será feito utilizando uma construção bastante canônica em Geometria Riemanniana, utilizando apenas a existência de transporte paralelo (veja [dC1]) de vetores ao longo de uma curva.

Sejam  $E_1, \dots, E_n$  campos de vetores paralelos ao longo de  $\gamma_1$  e  $F_1, \dots, F_{n+k}$  campos de vetores paralelos ao longo de  $\gamma_2$ . Suponha também que tais campos são ortonormais e que satisfazem

$$E_1(t) = \frac{\gamma'_1(t)}{|\gamma'_1(t)|}, E_2(t_0) = U_1(t_0)$$

$$F_1(t) = \frac{\gamma'_2(t)}{|\gamma'_2(t)|}, F_2(t_0) = U_2(t_0)$$

A hipótese em  $t_0$  será utilizada apenas no final da demonstração, mas note que não há necessidade de considerá-la como adicional: tal suposição sempre pode ser feita!

Agora note que dado  $V$  campo ao longo de  $\gamma_1$ , existe uma maneira natural de associar um campo  $\phi V$  em  $\gamma_2$ :

$$V(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) E_i(t) \mapsto \phi V(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) F_i(t).$$

Esta associação satisfaz duas propriedades muito boas, que decorrem diretamente das propriedades dos campos paralelos:

$$\langle \phi V, \phi W \rangle = \langle V, W \rangle;$$

$$(\phi V)' = \phi(V').$$

Note também que devido às nossas hipóteses em  $E_1$ ,  $F_1$  e na velocidade das geodésicas, temos que  $\phi \gamma'_1 = \gamma'_2$ . Agora resta-nos saber se  $\phi$  nos ajuda da maneira que queremos, ou seja, se o índice não decresce quando aplicamos  $\phi$ . Vejamos:

$$\begin{aligned} I_{t_0}(\phi U_1, \phi U_1) &= \int_0^{t_0} \{ \langle \phi U'_1, \phi U'_1 \rangle - \langle R(\gamma'_2, \phi U_1) \gamma'_2, \phi U_1 \rangle \} dt = \\ &= \int_0^{t_0} \left\{ \langle \phi U'_1, \phi U'_1 \rangle - |\gamma'_2|^2 |\phi U_1|^2 \left\langle R \left( \frac{\gamma'_2}{|\gamma'_2|}, \frac{\phi U_1}{|\phi U_1|} \right) \frac{\gamma'_2}{|\gamma'_2|}, \frac{\phi U_1}{|\phi U_1|} \right\rangle \right\} dt = \\ &= \int_0^{t_0} \{ \langle \phi U'_1, \phi U'_1 \rangle - |\gamma'_2|^2 |\phi U_1|^2 K_2(\gamma'_2, \phi U_1) \} dt = \\ &= \int_0^{t_0} \{ \langle U'_1, U'_1 \rangle - |\gamma'_1|^2 |U_1|^2 K_2(\gamma_2, \phi U_1) \} dt \leq \\ &\leq \int_0^{t_0} \{ \langle U'_1, U'_1 \rangle - |\gamma'_1|^2 |U_1|^2 K_1(\gamma_1, U_1) \} dt = \\ &= \int_0^{t_0} \left\{ \langle U'_1, U'_1 \rangle - |\gamma'_1|^2 |U_1|^2 \left\langle R \left( \frac{\gamma'_1}{|\gamma'_1|}, \frac{U_1}{|U_1|} \right) \frac{\gamma'_1}{|\gamma'_1|}, \frac{U_1}{|U_1|} \right\rangle \right\} dt = \\ &= \int_0^{t_0} \{ \langle U'_1, U'_1 \rangle - \langle R(\gamma'_1, U_1) \gamma'_1, U_1 \rangle \} dt = I_{t_0}(U_1, U_1), \end{aligned}$$

ou seja,

$$I_{t_0}(\phi U_1, \phi U_1) \leq I_{t_0}(U_1, U_1).$$

Agora note que podemos comparar  $\phi U_1$  com  $U_2$  usando o Lema do Índice: de fato, basta notar que  $U_2$  é de Jacobi,  $\phi U_1(0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(0) F_i(0) = 0 = U_2(0)$  e  $\phi U_1(t_0) = \phi E_2(t_0) = F_2(t_0) = U_2(t_0)$ . Logo podemos aplicar o Lema do Índice para concluir que

$$I_{t_0}(U_2, U_2) \leq I_{t_0}(\phi U_1, \phi U_1).$$

Isso conclui a demonstração. ■

**Teorema 2.1.5. (da Comparação da Hessiana):** *Sejam  $M_1$  e  $M_2$  variedades riemannianas completas de dimensão  $n$ . Sejam  $\gamma_i : [0, a] \rightarrow M_i$  geodésicas tais que  $|\gamma'_i| = 1$  e que não possuem pontos conjugados a  $\gamma_i(0)$ . Sejam  $\rho_i$  as funções distância a  $\gamma_i(0)$  em  $M_i$  e  $K_i$  as curvaturas seccionais de  $M_i$ . Suponha que em  $\gamma_1(t)$  e  $\gamma_2(t)$ ,  $t \in [0, a]$ , tenhamos a seguinte desigualdade:*

$$K_1(u_1, \gamma'_1) \geq K_2(u_2, \gamma'_2),$$

onde  $u_i$  é um vetor unitário em  $T_{\gamma_i(t)}M_i$  ortogonal a  $\gamma'_i$ . Então

$$\text{Hess}(\rho_1)(u_1, u_1) \leq \text{Hess}(\rho_2)(u_2, u_2).$$

**dem.:** Afirmamos que

$$\text{Hess}(\rho_i)(u_i, u_i)(x) = I_{t_0}(J_i, J_i),$$

onde  $J_i$  é campo de Jacobi ao longo de  $\gamma_i$  tal que  $J_i \perp \gamma'_i$ ,  $J_i(0) = 0$  e  $J_i(t_0) = u_i$ ,  $t_0 \in [0, a]$ . Tendo isso em mãos, basta utilizar a mesma técnica da demonstração de 2.1.4 para obter o desejado.

Demonstramos a afirmação, omitindo subíndice para facilitar notação:

$$\begin{aligned} \text{Hess}(\rho)(x)(u, u) &= \langle \nabla_u \text{grad } \rho, u \rangle(x) = \langle \nabla_J \text{grad } \rho, J \rangle \\ &= \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} \langle \nabla_J \text{grad } \rho, J \rangle(\gamma(t)) dt \\ &= \int_0^{t_0} \{ \langle \nabla_{\gamma'} \nabla_J \text{grad } \rho, J \rangle + \langle \nabla_J \text{grad } \rho, \nabla_{\gamma'} J \rangle \} dt = \dots \end{aligned}$$

É importante observar que  $\nabla_J \text{grad } \rho - \nabla_{\text{grad } \rho} J = 0$ . De fato, se definimos a função  $f(s, t) := \exp_0(tv(s))$ , onde  $v(0) = \gamma'(0)$  e  $v'(0) = \nabla_{\gamma'} J(0)$ , temos que  $J(t) = f_s(0, t)$  e  $\text{grad } \rho(f(s, t)) = f_t(s, t)$  (veja [dC1] para maiores detalhes) e assim  $[J, \text{grad } \rho] = [f_s, f_t] = "f_{st} - f_{ts}" = 0$ .

Observamos ainda que  $\text{grad } \rho = \gamma'$  e que, seguindo a notação que estamos usando,  $\nabla_{\gamma'} J = J'$ .



Com estas duas observações, podemos concluir a afirmação:

$$\begin{aligned} \text{Hess}(\rho)(u, u)(x) &= \int_0^{t_0} \langle \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} J, J \rangle + \langle \nabla_{\gamma'} J, \nabla_{\gamma'} J \rangle dt = \int_0^{t_0} \langle J'', J \rangle + \langle J', J' \rangle dt \\ &= \int_0^{t_0} \langle J', J' \rangle + \langle R(\gamma', J)\gamma', J \rangle dt = I_{t_0}(J, J). \end{aligned}$$

■

## 2.2 Resultados em EDP

A demonstração do Teorema 1.0.1 requer algumas ferramentas de Equações Diferenciais Parciais. Alguns dos resultados são bastante conhecidos na teoria das EDPs elípticas, sejam elas lineares ou quase-lineares, como por exemplo princípios do máximo, teoremas de regularidade e de existência e unicidade. Optamos por fazer referência ao longo do texto para os teoremas em [GT], onde encontram-se seus enunciados e provas.

Em [GT], os teoremas são específicos para o caso do  $\mathbb{R}^n$ , no entanto eles valem para uma variedade como a que estamos trabalhando. Talvez seja mais fácil de acreditar nisso lembrando que a variedade  $M$  na qual estamos trabalhando é difeomorfa ao  $\mathbb{R}^n$  através de um difeo global, que é regular o suficiente para que possamos “ir e vir” sem preocupações demais. Chamamos a atenção ao longo do texto para hipóteses que são preciosas para que os teoremas sejam válidos.

### 2.2.1 Método da continuidade

Sejam  $M$  uma variedade riemanniana e  $\Omega \subset M$  um domínio limitado de classe  $\mathcal{C}^{2,\alpha}$  e considere a seguinte família, indexada por  $t \in [0, 1]$ , de problemas de Dirichlet:

$$\begin{cases} Q(u) = 0 \text{ em } \Omega, u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \\ u|_{\partial\Omega} = t\psi \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\partial\Omega) \end{cases} \quad (2.2)$$

Observe que para  $t = 0$ , o problema admite uma solução (a saber, a solução trivial) e que estamos interessados em decidir se há solução quando  $t = 1$ . O método da continuidade consiste em, partindo da solução existente para  $t = 0$ , obter a existência de solução para  $t = 1$ . Isto é feito mostrando que  $A := \{t \in [0, 1]; \exists u_t \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega}), Q(u_t) = 0 \text{ e } u_t|_{\partial\Omega} = t\psi\}$  é um subconjunto não-vazio de  $[0, 1]$  que é aberto e fechado em  $[0, 1]$ , e portanto é todo o intervalo. O método da continuidade pode ser usado em outros contextos em EDP, que não são a equação de gráfico mínimo (veja [GT]).

É possível provar que  $A$  é aberto para o caso particular da equação que temos em mãos. É o que fazemos nos próximos parágrafos desta seção. Também fica evidente no que vem a seguir que para provar o fechamento deste conjunto é necessário fazer algumas estimativas, que são discutidas na seção seguinte.

$V \neq \emptyset$  porque  $0 \in A$ , como dito anteriormente.

Seja  $t_0 \in A$ . É suficiente mostrar que  $\exists \varepsilon > 0$  tal que  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1] \subset A$ . É suficiente, para isso, utilizar o Teorema da Função Implícita para espaços de Banach.

Defina  $\tilde{\psi}$  uma extensão  $\mathcal{C}^{2,\alpha}$  de  $\psi$  a  $\bar{\Omega}$ . Por simplicidade, utilizamos a mesma notação,  $\psi$ , para tal extensão (para construí-la, pode-se utilizar a Forma Local das Submersões).

Defina então o seguinte operador:

$$\begin{aligned} T : \mathcal{C}_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) &\rightarrow \mathcal{C}^\alpha(\bar{\Omega}) \\ (v, t) &\mapsto Q(v + t\psi) \end{aligned}$$

Desta forma, se mostramos que  $\exists v_t \in \mathcal{C}_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  tal que  $T(v_t, t) = 0$ , então garantimos que  $t \in A$ . É por esse caminho que seguimos.

Seja  $t_0 \in A$ . Então existe  $u_{t_0} \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  tal que  $Q(u_{t_0}) = 0$  e  $u_{t_0}|_{\partial\Omega} = t_0\psi$ . Defina  $v_{t_0} := u_{t_0} - t_0\psi$ . Então  $Q(v_{t_0} + t\psi) = Q(u_{t_0}) = 0$  e  $(v_{t_0} + t\psi)|_{\partial\Omega} = t\psi$ .

A partir de agora utilizamos o Teorema da Função Implícita. Lembramos que dados espaços de Banach  $E, F$  e  $x_0 \in E$ , então uma função  $f : E \rightarrow F$  é dita *diferenciável em  $x_0$*  se existe uma aplicação linear  $l = l_{x_0}$  tal que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + l_{x_0}(h) + \|h\|o(h),$$

onde

$$\lim_{h \rightarrow 0} o(h) = 0.$$

Desta forma, vale (exatamente como em dimensão finita!) que

$$l_{x_0}(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}.$$

Se  $f$  tem derivada em todos os pontos de  $E$ , podemos falar na função

$$\begin{aligned} Df : E &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x_0 &\mapsto Df(x_0) = l_{x_0} \end{aligned}$$

Se tal função for contínua, dizemos que  $f$  é uma aplicação  $\mathcal{C}^1$ .

Sejam  $E, F$  e  $G$  espaços de Banach e  $f : E \times F \rightarrow G$  uma função  $\mathcal{C}^1$ , digamos,  $f = f(u, v)$ . Definimos a derivada em relação à primeira variável:

$$D_1 f(u_0, v_0)(h) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + th, v_0)}{t}$$

(também exatamente como em dimensão finita). O Teorema da Função Implícita nos diz que se existe  $(u_0, v_0) \in E \times F$  tal que  $f(u_0, v_0) = 0$  e que  $D_1 f(u_0, v_0) : E \rightarrow G$  é um homeomorfismo linear (isto é, aplicação linear contínua com inversa contínua), então existem abertos  $U$  vizinhança de  $u_0$  e  $V$  vizinhança de  $v_0$  tais que para todo  $v \in V$ , existe um único  $u = u(v) \in U$  com  $f(u(v), v) = 0$  e ainda  $u(v_0) = u_0$ . Além disso, o teorema também garante que a aplicação  $v \mapsto u(v)$  de  $V$  em  $U$  é uma aplicação de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Aplicamos então o Teorema da Função Implícita ao operador  $T : \mathcal{C}_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{C}^\alpha(\bar{\Omega})$  definido acima.

**Proposição 2.2.1.**  *$T$  é um operador  $\mathcal{C}^1$  e*

$$(D_1 T(v_0, t_0)(h))(x) = \left( \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(v_0 + t_0\psi) E_i(E_j(h)) + \sum_{i=1}^n B_i(v_0 + t_0\psi) E_i(h) \right) (x)$$

onde

$$A_{ij}(w) = (1 + |\text{grad } w|^2)^{-1/2} \delta_{ij} - (1 + |\text{grad } w|^2)^{-3/2} E_i(w) E_j(w)$$

e

$$B_i(w) = (1 + |\text{grad } w|^2)^{-3/2} \left[ \text{div grad } w - \sum_{j=1}^n E_j(w) E_i(E_j(w)) \right]$$

e  $\{E_1, \dots, E_n\}$  é um referencial geodésico em  $x$ .

**dem:** Observamos que  $T$  é  $\mathcal{C}^1$  se e somente se  $Q$  é  $\mathcal{C}^1$ , e este é um fato que tem demonstração um pouco maçante e por isso vamos omiti-la. No entanto, não é muito difícil de nos convenceremos disso.

Cada operador diferencial pode ser associado a uma função definida em  $\Omega \times \mathbb{R} \times TM \times (TM \times TM)$ ; esta função restrita a elementos da forma  $(x, u(x) \text{grad } u(x), D^2 u(x))$  nada mais é do que o operador diferencial aplicado na função  $u$  e calculado no ponto  $x$ . Algumas contas (um pouco extensas, especialmente devido à notação) mostram que quando esta função é  $\mathcal{C}^1$ , então o operador também o é. A função associada a  $Q$  é  $\mathcal{C}^1$  (o que também é uma conta um pouco extensa), então  $Q$  o é.

Supondo  $Q$   $\mathcal{C}^1$ , calculamos sua derivada (que é a derivada de  $T$  em relação à primeira variável) num ponto  $v$  onde  $Q(v) = 0$ . Começamos modificando convenientemente a expressão de  $Q$ :

$$\begin{aligned}
Q(u) &= \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} u}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} u|^2}} = \frac{\operatorname{div} \operatorname{grad} u}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} u|^2}} + \left\langle \operatorname{grad} \frac{1}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} u|^2}}, \operatorname{grad} u \right\rangle \\
&= \frac{\operatorname{div} \operatorname{grad} u}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} u|^2}} - \frac{1}{2} (1 + |\operatorname{grad} u|^2)^{-3/2} \langle \operatorname{grad} \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u \rangle, \operatorname{grad} u \rangle \\
&= (1 + |\operatorname{grad} u|^2)^{-3/2} \left[ (1 + |\operatorname{grad} u|^2) \operatorname{div} \operatorname{grad} u - \frac{1}{2} \langle \operatorname{grad} \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u \rangle, \operatorname{grad} u \rangle \right].
\end{aligned}$$

Sejam  $v, h \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega)$  e  $s$  pequeno, com  $Q(v) = 0$ . Então

$$\begin{aligned}
Q(v + sh) &= (1 + |\operatorname{grad}(v + sh)|^2)^{-3/2} \left[ (1 + |\operatorname{grad}(v + sh)|^2) \operatorname{div} \operatorname{grad}(v + sh) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \langle \operatorname{grad} \langle \operatorname{grad}(v + sh), \operatorname{grad}(v + sh) \rangle, \operatorname{grad}(v + sh) \rangle \right].
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{ds} Q(v + sh) \right|_{s=0} &= \left( \left. \frac{d}{ds} ((1 + |\operatorname{grad}(u + sh)|^2)^{-3/2}) \right|_{s=0} \right) (1 + |\operatorname{grad} v|^2)^{3/2} Q(v) \\
&\quad + (1 + |\operatorname{grad} v|^2)^{-3/2} \left[ \left. \frac{d}{ds} |\operatorname{grad}(u + sh)|^2 \right|_{s=0} \operatorname{div} \operatorname{grad} v \right. \\
&\quad + (1 + |\operatorname{grad} v|^2) \left. \frac{d}{ds} \operatorname{div} \operatorname{grad}(v + sh) \right|_{s=0} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\langle \left. \frac{d}{ds} \operatorname{grad} \langle \operatorname{grad}(v + sh), \operatorname{grad}(v + sh) \rangle \right|_{s=0}, \operatorname{grad} v \right\rangle \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\langle \operatorname{grad} \langle \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} v \rangle, \left. \frac{d}{ds} \operatorname{grad}(v + sh) \right|_{s=0} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(1 + |\operatorname{grad} v|^2)^{3/2} \left. \frac{d}{ds} Q(v + sh) \right|_{s=0} &= 2 \langle \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} h \rangle \operatorname{div} \operatorname{grad} v \\
&\quad + (1 + |\operatorname{grad} v|^2) \operatorname{div} \operatorname{grad} h \\
&\quad - \langle \operatorname{grad} \langle \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} h \rangle, \operatorname{grad} v \rangle \\
&\quad - \frac{1}{2} \langle \operatorname{grad} |\operatorname{grad} v|^2, \operatorname{grad} h \rangle.
\end{aligned}$$

Seja  $\{E_1, \dots, E_n\}$  um referencial geodésico em  $x$ . Então  $\operatorname{grad} u = \sum E_i(u) E_i$ , e

$\text{div grad } u = \sum E_i(E_i(u))$ , e analogamente para  $h$ .

$$\begin{aligned} (1 + |\text{grad } v|^2)^{3/2} \frac{d}{ds} Q(v + sh) \Big|_{s=0} &= 2 \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n E_j(E_j(v)) \right) E_i(v) E_i(h) \\ &+ (1 + |\text{grad } v|^2) \sum_{i=1}^n E_i(E_i(h)) \\ &- \left\langle \text{grad} \left( \sum_{i=1}^n E_i(v) E_i(h) \right), \sum_{j=1}^n E_j(v) E_j \right\rangle \\ &- \frac{1}{2} \left\langle \text{grad} \left( \sum_{j=1}^n E_j(v)^2 \right), \sum_{i=1}^n E_i(h) E_i \right\rangle. \end{aligned}$$

Observamos que

$$\text{grad} \left( \sum_{i=1}^n E_i(v) E_i(h) \right) = \sum_{i,j=1}^n (E_j(E_i(v)) E_i(h) + E_i(v) E_j(E_i(h))) E_j$$

e analogamente para  $\text{grad} \left( \sum_{j=1}^n E_j(v)^2 \right)$ . Desta forma,

$$\begin{aligned} \left\langle \text{grad} \left( \sum_{i=1}^n E_i(v) E_i(h) \right), \sum_{j=1}^n E_j(v) E_j \right\rangle \\ = \sum_{i,j=1}^n (E_j(E_i(v)) E_j(v) E_i(h) + E_i(v) E_j(v) E_i(E_j(h))) \end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{2} \left\langle \text{grad} \left( \sum_{j=1}^n E_j(v)^2 \right), \sum_{i=1}^n E_i(h) E_i \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n E_i(E_j(v)) E_j(v) E_i(h).$$

Assim,

$$\begin{aligned} (1 + |\text{grad } v|^2)^{3/2} \frac{d}{dt} Q(v + th) \Big|_{t=0} &= (1 + |\text{grad } u|^2) \sum_{i=1}^n E_i(E_i(h)) \\ &- \sum_{i,j=1}^n E_i(v) E_j(v) E_i(E_j(h)) + 2 \sum_{i,j=1}^n E_j(E_j(v)) E_i(v) E_i(h) \\ &- \sum_{i,j=1}^n E_j(E_i(v)) E_j(v) E_i(h) - \sum_{i,j=1}^n E_i(E_j(v)) E_j(v) E_i(h) \end{aligned}$$

ou ainda

$$(1 + |\text{grad } v|^2)^{3/2} \frac{d}{dt} Q(v + th) \Big|_{t=0} = \sum_{i,j=1}^n \tilde{A}_{ij}(v) E_i(E_j(h)) + \sum_{i=1}^n \tilde{B}_i(v) E_i(h),$$

onde

$$\tilde{A}_{ij}(v) = (1 + |\text{grad } v|^2)\delta_{i,j} - E_i(v)E_j(v)$$

e

$$\tilde{B}_i(v) = \sum_{j=1}^n (2E_j(E_j(v))E_i(v) - E_j(E_i(v))E_j(v) - E_i(E_j(v))E_j(v)),$$

o que conclui a demonstração.  $\square$

Assim,  $DQ(v_0, t_0) = D_1T(v_0, t_0) =: L$  é um operador diferencial linear que é estritamente elíptico, pois para  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ , temos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n A_{i,j}(v_0 + t_0\psi)\xi_i\xi_j &= (1 + |D_{v_0}|^2)\delta_{ij}\xi_i\xi_j - \sum_{i,j=1}^n D_i(v_0 + t\psi)D_j(v_0 + t\psi)\xi_i\xi_j \\ &= (1 + |D(v_0 + t_0\psi)|^2) \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - \sum_{i,j=1}^n \xi_i D_i(v_0 + t_0\psi)\xi_j D_j(v_0 + t_0\psi) \\ &= (1 + |D(v_0 + t_0\psi)|^2)\|\xi\|^2 - \sum_{i=1}^n \xi_i D_i(v_0 + t_0\psi) \sum_{j=1}^n \xi_j D_j(v_0 + t_0\psi) \\ &= (1 + |D(v_0 + t_0\psi)|^2)\|\xi\|^2 - \langle \xi, D(v_0 + t_0\psi) \rangle^2. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \langle \xi, D(v_0 + t_0\psi) \rangle &\leq \|\xi\| \|D(v_0 + t_0\psi)\| \Rightarrow -\langle \xi, D(v_0 + t_0\psi) \rangle^2 \geq -\|\xi\|^2 \|D(v_0 + t_0\psi)\|^2 \\ &\Rightarrow \sum_{i,j}^n A_{ij}\xi_i\xi_j \geq (1 + |D(v_0 + t_0\psi)|^2)\|\xi\|^2 - \|\xi\|^2 |D(v_0 + t + 0\psi)|^2 = \|\xi\|^2. \end{aligned}$$

Além disso,  $L$  satisfaz, conforme notação do [GT], a condição  $c = 0$ . Esta condição é crucial para que tenham validade, por exemplo, os princípios do máximo, o que faz toda a diferença. A mudança de coordenadas para  $\mathbb{R}^n$  poderia fazer com que perdêssemos esta propriedade, no entanto, isso não acontece.

Prosseguimos utilizando a teoria de operadores lineares uniformemente elípticos para  $L : \mathcal{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{C}^\alpha(\bar{\Omega})$ . É evidente que  $L$  é contínuo. Vejamos que é invertível com inverso contínuo.

$L$  é injetivo:  $L(h) = 0 \Rightarrow h$  é solução de  $L = 0$  em  $\Omega$ . Como  $h|_{\partial\Omega} = 0$  e  $L$  satisfaz o Princípio do Máximo (conforme Teorema 3.5 de [GT]), então  $h = 0$ .

$L$  é sobrejetivo: dada  $f \in \mathcal{C}^\alpha$ , o Teorema 6.14 do [GT] nos garante que  $\exists v \in \mathcal{C}^{2,\alpha}$  tal que  $L(v) = f$ .

$L^{-1}$  é contínuo: Sejam  $f, g \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega)$  e  $u = L^{-1}(f)$ ,  $v = L^{-1}(g) \in \mathcal{C}_0^{2,\alpha}$ . Então o Teorema 6.7 do [GT] nos dá

$$\|u - v\|_{2,\alpha} \leq C(\|u - v\|_0 + \|f - g\|_\alpha)$$

Mas o Teorema 3.7 do [GT] nos dá  $|u-v|_0 \leq C|f-g|_0$ , e então  $|L^{-1}(f)-L^{-1}(g)|_{2,\alpha} = |u-v|_{2,\alpha} \leq C|f-g|_{0,\alpha}$  e portanto  $L^{-1}$  é contínuo.

Aplicando o Teorema da Função Implícita, obtemos que  $A$  é aberto.

Agora nos perguntamos se  $A$  é fechado. Sejam  $t_m \in A$ ,  $t_m \rightarrow t \in [0, 1]$ . Nos perguntamos se  $t \in A$ . Mas  $t_m \in A \Rightarrow \exists u_m \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega)$  tal que  $Q(u_m) = 0$  e  $u_m|_{\partial\Omega} = t_m\psi$ . Um caminho a seguir é estudar a convergência de  $\{u_m\}$ , e seria interessante provar que esta seqüência contém uma subsequência convergindo, ao menos na norma  $\mathcal{C}^2$ , e em  $\bar{\Omega}$ , a uma função  $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ . Neste caso,

$$u|_{\partial\Omega} = \lim_{m \rightarrow +\infty} u_m|_{\partial\Omega} = \lim_{m \rightarrow +\infty} t_m\psi = t\psi$$

e

$$\begin{aligned} Q(u) &= T(u - t\psi, t) = T\left(\lim_{m \rightarrow +\infty} (u_m - t_m\psi, t_m)\right) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} T(u_m - t_m\psi, t_m) = \lim_{m \rightarrow +\infty} Q(u_m) = 0. \end{aligned}$$

Para provar que  $u_m$  converge a uma certa  $u \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$  na norma  $\mathcal{C}^0$ , é suficiente mostrar que  $\exists C > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} |u_m| &\leq C \\ \sup_{\Omega} |\text{grad } u_m| &\leq C \end{aligned}$$

ou mais forte que isso, que  $\exists C > 0$  tal que  $\forall u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega}), \forall t \in [0, 1]$  satisfazendo  $Q(u) = 0$  e  $u|_{\partial\Omega} = t\psi$ , valer  $|u|_1 \leq C$ , ou seja, temos uma estimativa *a priori*.

Provamos a seguir que  $A$  é fechado admitindo que temos uma estimativa *a priori*. Na Seção 2.2.2, discutimos como encontrar tais estimativas.

Suponhamos sem perda de generalidade que  $C$  satisfaz também  $|\psi|_2 \leq C$ . Pelo Teorema 13.7 do [GT], existe  $\beta = \beta(C, n, \Omega)$  tal que  $|u_m|_{1,\beta} \leq C$ . Defina  $\gamma := \min\{\alpha, \beta\}$ . Então  $\Omega$  é um domínio  $\mathcal{C}^{2,\gamma}$ .

Definimos, para  $v \in \mathcal{C}^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$ ,

$$L_v(h) := \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(Dv)D_{ij}h$$

com  $A_{ij}$  como definidos anteriormente. Então  $u_m \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  é solução de  $L_{u_m} = 0$ . Pelo Teorema 6.6 do [GT] existe  $C = C(n, \Omega, \gamma)$  tal que

$$|u_m|_{2,\gamma} \leq C \forall m \in \mathbb{N}.$$

Por Arzelá-Ascoli,  $\{u_m\}$  contém uma subsequência convergente na norma  $\mathcal{C}^2$  a  $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ . Ainda, tem-se  $Q(u) = 0$  e  $u|_{\partial\Omega} = t\psi$ . Além disso, o Teorema 6.19 do [GT]

nos dá a regularidade desejada, isto é,  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ , e portanto  $t \in A$ , o que prova que  $V$  é fechado, e portanto o problema (2.2) tem solução para  $t = 1$ .

### 2.2.2 Barreiras e estimativas *a priori*

Conforme visto na Seção 2.2.1, para provar que o problema (2.2) tem solução para  $t = 1$  (que é nosso interesse), é suficiente encontrar estimativas *a priori* para a norma  $C^1$  das soluções dos problemas com  $t$  variando.

O seguinte lema é provado em [DR] para o caso  $n = 3$ , com demonstração um pouco mais simples, e na Seção 5 de [DHL] para o caso geral. Também omitimos a demonstração por se tratar de um lema bastante técnico e sem muitas intuição geométrica.

**Lema 2.2.2.** *Seja  $\Omega \subset M$  um aberto limitado e suave. Seja  $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$  uma solução da equação  $Q(u) = 0$  em  $\Omega$ .*

*Suponha que  $\sup_{\Omega} |u| < \infty$  e que  $|\text{grad } u|$  é limitado em  $\partial\Omega$ .*

*Então  $\exists C = C\left(\sup_{\Omega} |u|, \sup_{\partial\Omega} |\text{grad } u|\right)$  tal que  $\sup_{\Omega} |\text{grad } u| < C$ .*

Observe que a constante obtida *não depende do domínio  $\Omega$* , apenas das constantes que limitam a altura da função e do gradiente na fronteira. Na demonstração do teorema, utilizamos fortemente este fato.

Precisamos, então, estimar  $|u|$  em  $\Omega$  e  $|\text{grad } u|$  em  $\partial\Omega$ . Uma maneira de obter essas estimativas é construindo *barreiras*. Uma maneira de obter barreiras é encontrar *supersoluções* e *subsoluções* para o problema. Sejamos mais precisos:

**Definição 2.2.3.** *Uma função  $v \in C^2(\Omega)$  é dita uma supersolução para o problema  $Q = 0$  se  $Q(v) \leq 0$ . Analogamente,  $v$  é dita uma subsolução se  $Q(v) \geq 0$ .*

A motivação destas definições é que através dos princípios do máximo (veja Capítulo III em [GT]) é possível provar que qualquer supersolução com condição de fronteira maior ou igual àquela dada no problema está de fato *acima* da solução, se esta existir (análogo para subsolução).

A definição anterior é bastante útil em vários contextos, mas precisamos também de uma definição mais geral, que engloba uma classe maior de funções.

**Definição 2.2.4.** *Uma função  $v \in C^0(\Omega)$  é dita uma supersolução (generalizada) para o problema  $Q = 0$  se, do qualquer aberto limitado  $A \subset \Omega$  e dada uma solução  $u$  do problema em  $A$ , a condição  $u \leq v$  em  $\partial A$  implicar em  $u \leq v$  em todo  $A$ . Análogo para subsolução, apenas invertendo as desigualdades.*



O Princípio do Máximo nos dá que toda supersolução é supersolução generalizada. Além disso, esta nova definição nos permite obter boas propriedades:

**Proposição 2.2.5.** *Se  $v_1$  e  $v_2$  são supersoluções para o problema  $Q = 0$ , então  $v := \min\{v_1, v_2\}$  é também supersolução. Análogo para o máximo entre subsoluções.*

**dem.:** Seja  $A \subset \Omega$  um aberto limitado, e seja  $u$  tal que  $Q(u) = 0$  e  $u \leq v$  em  $\partial A$ . Como  $v \leq v_i$ ,  $i = 1, 2$ , então  $u \leq v_i$  em  $\partial A$ . Então  $u \leq v_i$  em  $A$ , e portanto  $u \leq \min\{v_1, v_2\}$  em  $A$  ■

Outra propriedade, um tanto menos trivial, é a que segue:

**Proposição 2.2.6.** *Sejam  $B, C$  abertos de  $\Omega$  com  $\bar{C} \subset B$  e  $\bar{B} \subset \Omega$ . Suponha que  $\Omega \setminus \partial C$  tem duas componentes conexas, uma delas sendo obviamente  $C$ . Suponha que  $v_1 \in \mathcal{C}^0(\Omega)$  e  $v_2 \in \mathcal{C}^0(B)$  sejam supersoluções generalizadas para o operador  $Q$  em  $\Omega$  e que satisfaçam*

$$\begin{aligned} v_1 &\leq v_2 \text{ em } \bar{B} \setminus C \\ v_2 &\leq v_1 \text{ em } C. \end{aligned}$$

Defina  $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$w(x) = \begin{cases} v_1(x) & \text{se } x \in \Omega \setminus C \\ v_2(x) & \text{se } x \in C. \end{cases}$$

Então  $w \in \mathcal{C}^0(\Omega)$  é supersolução generalizada de  $Q$  em  $\Omega$ .

**dem.:** Seja  $A$  aberto limitado de  $\Omega$  e seja  $u \in \mathcal{C}^2(A) \cap \mathcal{C}^0(\bar{A})$  solução de  $Q = 0$  em  $A$  satisfazendo  $u|_{\partial A} \leq w|_{\partial A}$ . A mostrar:  $u \leq w$  em  $A$ .

Observe inicialmente que  $w$  é contínua pois em  $\partial C$  temos  $v_1 = v_2$ . Observe também que se  $A \subset C$  ou  $A \subset \Omega \setminus C$ , então não há o que fazer.

Note que pela definição de  $w$ , temos que  $w \leq v_1$  em todo  $\Omega$ . Então, como  $v_1$  é supersolução, temos que  $u \leq v_1$  em  $A$ . Resta mostrar que  $u \leq v_2$  em  $A \cap C$ .

Defina  $S := \partial C \cap A$  e  $T := \partial(A \cap C) \setminus S$ . Então  $\partial(A \cap C) = S \cup T$ . Note que em  $S$  temos que  $v_1 = v_2$  e portanto já vale que  $u \leq v_2$ . Já em  $T$ , temos por hipótese que  $u \leq w$ , mas  $w = v_2$  em  $C$  e portanto em  $T$ . Desta forma,  $u \leq v_2$  em  $\partial(A \cap C)$  e como  $v_2$  é supersolução, vale que  $u \leq v_2$  em  $(A \cap C)$ . ■

Uma proposição análoga evidentemente pode ser feita para subsoluções, com as devidas adaptações.

Já as barreiras podem ser definidas localmente; dado  $x_0 \in \partial\Omega$ , dizemos o problema admite uma barreira superior em  $x_0$  se existe uma vizinhança  $\mathcal{N}_{x_0}$  de  $x_0$  em  $\bar{\Omega}$  e uma função  $w \in \mathcal{C}^2(\bar{\mathcal{N}}_{x_0})$  tais que  $Q(w) < 0$  em  $\mathcal{N}_{x_0} \cap \Omega$  e toda vez que  $u$  satisfizer  $Q(u) = 0$  em  $\Omega$ , tem-se  $w(x_0) = u(x_0)$  e  $u \leq w$  no conjunto  $\partial(\mathcal{N}_{x_0})$ .

Com super e subsoluções obtemos estimativas da altura de uma solução (segue da definição). Com as barreiras, obtemos estimativas para a altura do gradiente no bordo. Assim, quando construímos super e subsoluções que servem como barreiras superior e inferior, conseguimos aplicar o Lema 2.2.2 e obter, assim, estimativas *a priori* da norma  $C^1$  de uma solução.

# Capítulo 3

## A prova do teorema

As hipóteses de completude e de curvatura seccional negativa de  $M$  nos garantem, via Teorema de Hadamard, que para qualquer  $q \in M$  a aplicação  $\exp_q : T_qM \rightarrow M$  é um difeomorfismo global. Note também que a aplicação que leva a bola unitária  $B = \{u \in T_qM \text{ tal que } \|u\| < 1\} \subset T_qM$  em  $T_qM$  dada por

$$u \mapsto \frac{u}{1 - \|u\|}$$

também é um difeomorfismo, onde  $\|\cdot\|$  denota a norma euclidiana no espaço vetorial  $T_qM$ . Em particular, escolhemos  $p \in M$  tal que o grupo de isotropia de  $p$  age transitivamente nas esferas geodésicas centradas em  $p$ . Fazendo então a composição dos difeomorfismos acima, obtemos um novo difeomorfismo  $Z : B \rightarrow M$ , a saber,

$$Z(x) = \exp_p \frac{x}{1 - \|x\|}$$

Através dele, identificamos  $M$  isometricamente com  $B \subset T_pM$ , ou seja, induzimos em  $B$  a métrica

$$\langle u, v \rangle_x := \langle dZ_x(u), dZ_x(v) \rangle_{Z(x)}$$

onde o produto interno no lado direito da igualdade é o da métrica riemanniana em  $M$  e  $dZ_x$  denota a diferencial de  $Z$  no ponto  $x$ . Através desta identificação, obtemos também que a fronteira assintótica de  $M$ ,  $\partial_\infty M$ , fica identificada com a fronteira topológica  $\partial B$  de  $B$ .

Feita esta redução, podemos trabalhar com  $B$  no lugar de  $M$ . Ou seja, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $M = B$ , sendo que  $B$  deve ser dotada de uma métrica riemanniana que a torna uma variedade riemanniana satisfazendo as hipóteses do Teorema 1.0.1, com fronteira assintótica coincidindo com a fronteira topológica  $\partial B$  de  $B$ .

### 3.1 Uma propriedade importante

Seja  $G$  o subgrupo de  $\text{Iso}(M)$  de isotropia de  $0 \in B$  e seja  $\mathcal{G}$  a álgebra de Lie de  $G$ . Seja  $\phi : \mathcal{G} \rightarrow G$  a aplicação exponencial Lie de  $G$ , isto é, a aplicação exponencial de  $G$  na identidade  $e$ ,  $\phi_t = \exp_e tX =: \text{exp}_e tX$ . Dado  $X \in \mathcal{G}$ , defina o seguinte campo em  $B$ :

$$\tilde{X}(x) := \left. \frac{d}{dt} \phi_t(x) \right|_{t=0}.$$

Para facilitar a notação, denotamos  $\tilde{X}$  por  $X$  também.

Observe que desta forma  $X$  é um campo de Killing em  $B$ . De fato, o fluxo de  $X$  é  $\{\phi_t\}_t$ , que é isometria para todo  $t$ .

Definimos também a partir de  $X \in \mathcal{G}$  o seguinte campo de Killing (euclidiano) em  $T_0B$ : seja  $\psi_t = d(\phi_t)_0 : T_0B \rightarrow T_0B$ . Então definimos um campo em  $T_0B$  dado por

$$X^*(u) := \left. \frac{d}{dt} \psi_t(u) \right|_{t=0}.$$

**Proposição 3.1.1.** *Dados  $X \in \mathcal{G}$  e  $u \in T_0B$ , vale*

$$X(\text{exp}_0 u) = d(\text{exp}_0)_u(X^*(u)) \quad (3.1)$$

**dem.:** Afirmamos inicialmente que  $\phi_t(\text{exp}_0 u) = \text{exp}_0 \psi_t(u) \forall t$ . De fato, defina  $\gamma(s) := \phi_t(\text{exp}_0 su)$ . Então  $\gamma(0) = 0$  e

$$\gamma'(0) = \left. \frac{d}{ds} \phi_t(\text{exp}_0 su) \right|_{s=0} = d(\phi_t)_0 \left( \left. \frac{d}{ds} \text{exp}_0(su) \right|_{s=0} \right) = d(\phi_t)_0(u) = \psi_t(u).$$

Além disso, como  $\phi_t$  é isometria,  $\gamma$  é geodésica.

Por outro lado, defina  $\tilde{\gamma}(s) := \text{exp}_0(s\psi_t(u))$ . Então  $\tilde{\gamma}(0) = 0$  e  $\tilde{\gamma}'(0) = \psi_t(u)$ . Além disso,  $\tilde{\gamma}$  é evidentemente uma geodésica. Por unicidade de geodésicas partindo de um ponto com velocidade inicial dada, temos que  $\gamma = \tilde{\gamma}$ , o que conclui a afirmação.

Então

$$X(\text{exp}_0 u) = \left. \frac{d}{dt} \phi_t(\text{exp}_0 u) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (\text{exp}_0 \psi_t(u)) \right|_{t=0} = d(\text{exp}_0)_u(X^*(u))$$

o que conclui a demonstração. ■

A propriedade demonstrada acima é crucial em algumas passagens da demonstração do teorema. Com ela conseguimos estimar normas de maneira bastante eficiente. Note ao longo do texto quando será feita menção à equação (3.1).

## 3.2 Lemas sobre $M$

**Lema 3.2.1.** *Dado  $u \in T_0B$  com  $\|u\| = 1$ , temos*

$$\exp_0(su) = \frac{s}{1+s}u, \quad s \in [0, \infty).$$

**dem:** Note que como  $Z$  é uma isometria, leva geodésicas em geodésicas, e portanto a curva

$$\gamma(s) := Z^{-1}(\exp_p su)$$

é uma geodésica em  $B$ , que satisfaz  $\gamma(0) = 0$  e  $\gamma'(0) = u$ . Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} Z\left(\frac{s}{1+s}u\right) &= \exp_p\left(\frac{\frac{s}{1+s}u}{1 - \left\|\frac{s}{1+s}u\right\|}\right) = \exp_p\left(\frac{\frac{s}{1+s}u}{1 - \frac{s}{1+s}\|u\|}\right) = \exp_p\left(\frac{\frac{s}{1+s}u}{\frac{1+s-s}{1+s}}\right) \\ &\implies Z\left(\frac{s}{1+s}u\right) = \exp_p(su) \end{aligned}$$

e portanto  $\gamma(s) = \frac{s}{1+s}u$ . Como  $s \mapsto \exp_0(su)$  também é geodésica satisfazendo as mesmas condições iniciais, o resultado segue pela unicidade de geodésicas com ponto e velocidade iniciais dados. ■

**Lema 3.2.2.** *Seja  $d$  a distância riemanniana em  $B$  dada pela métrica obtida a partir de  $M$  e  $\|\cdot\|$  a distância euclidiana até 0. Então  $\forall x \in B$ , vale*

$$\|x\| = \frac{d(x, 0)}{1 + d(x, 0)}.$$

**dem:** Escreva  $d(x, 0) = s$ . Então  $\exists u \in B$  com  $|u|_0 = \|u\| = 1$  tal que  $x = \exp_0(su) = \frac{s}{1+s}u$ . Segue imediatamente que

$$\|x\| = \left\|\frac{s}{1+s}u\right\| = \frac{s}{1+s}.$$

■

Seja  $x \in B$  então, vendo  $x$  como um elemento de  $\mathbb{R}^n$ , podemos entender  $x \in T_xB$ . Denotamos por  $\mu(x)$  a norma de  $x$  em  $T_xB$  em relação à métrica riemanniana não euclidiana, isto é,  $\mu(x) := |x|_x$ .

**Lema 3.2.3.** *Seja  $r := \|x\|$ . Então*

$$\mu(x) = \frac{r}{(1-r)^2}. \quad (3.2)$$

**dem:** Defina  $\gamma(s) := \exp_0 \left( s \frac{r}{1-r} \frac{x}{\|x\|} \right)$ . Pelo Lema 3.2.1, temos que

$$\gamma(s) = \frac{\frac{sr}{1-r}}{1 + \frac{sr}{1-r}} \frac{x}{r} = \frac{s}{sr - r + 1} x.$$

Desta forma,  $\gamma$  é tal que  $\gamma(1) = x$  e  $\gamma'(1) = (1-r)x$ . Além disso, como  $\gamma$  é geodésica,  $|\gamma'|$  é constante. Por fim, note que  $|\gamma'(0)| = \frac{r}{1-r}$ . Logo

$$|x| = \left| \frac{\gamma'(0)}{1-r} \right| = \left| \frac{\gamma'(1)}{1-r} \right| = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Isso conclui a demonstração de (3.2). ■

**Lema 3.2.4.** *Seja  $H_r$  a curvatura média da esfera geodésica  $S_r$  em  $B$  de raio  $\frac{r}{1-r}$ , orientada pelo campo normal exterior. Então*

$$\inf_{r>0} -H_r \geq k,$$

onde  $k$  é dado nas hipóteses do teorema.

**dem.:** Um possível vetor normal exterior à esfera geodésica  $S_r$  é o vetor gradiente da função distância a 0; denotaremos tal função por  $\rho$ . Sejam  $X_1, \dots, X_{n-1}$  vetores ortonormais e tangentes à esfera geodésica  $S_r$  pertencentes a  $T_x S_r$ . Então podemos escrever

$$H_r = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle -\nabla_{X_i} \text{grad } \rho, X_i \rangle.$$

Observe que  $\langle \nabla_{X_i} \text{grad } \rho, X_i \rangle = \text{Hess}(\rho)(X_i, X_i)$ .

Seja  $\mathbb{H}_k^n$  o espaço hiperbólico  $n$ -dimensional de curvatura  $-k^2$ . Por hipótese, a curvatura seccional  $K$  de  $B$  satisfaz  $K \leq -k^2$ . Pelo Lema de Comparação da Hessiana (veja Teorema 2.1.5), temos que, se  $\rho_k$  é a função distância a um ponto fixo de  $\mathbb{H}_k^n$ , se  $\rho_k(y) = \rho(x)$  e se  $Y_i \in T_y \mathbb{H}_k^n$  é o ortogonal a  $\text{grad } \rho_k$  e unitário, vale que

$$\text{Hess}(\rho)(X_i, X_i) \geq \text{Hess}(\rho_k)(Y_i, Y_i) = \langle \nabla_{Y_i} \text{grad } \rho_k, Y_i \rangle.$$

Somando em para  $i = 1, \dots, n-1$ , temos que o lado esquerdo vale  $-(n-1)H_r$  enquanto que o lado direito nos dá a curvatura média não normalizada de uma esfera geodésica centrada na origem de  $\mathbb{H}_k^n$ , ou seja,  $(n-1)k \cotgh(k\rho_k)$  (veja o Lema 4.2.4' para o caso  $k = 1$ ; o caso geral é feito analogamente).

Então

$$-(n-1)H_r \geq (n-1)k \cotgh(k\rho_k) \geq (n-1)k \implies \inf_{r>0} (-H_r) \geq k. \quad \blacksquare$$

### 3.3 Estimativas em $\mathcal{G}$

**Definição 3.3.1.** (i) Para  $r \in (0, 1)$  e  $X \in \mathcal{G}$ , seja

$$|X|_{S_r} := \max_{x \in S_r} |X(x)|$$

(ii) Dados  $u, V$  e  $W \in T_0B$ , defina

$$D^2(\exp_0)_u(V, W) := \left. \frac{D}{dt} d(\exp_0)_{\alpha(t)}(V) \right|_{t=0},$$

onde  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow T_0B$  é uma curva tal que  $\alpha(0) = u$  e  $\alpha'(0) = W$  e a derivada covariante é ao longo de  $\alpha$ .

(iii) Defina as seguintes normas:

$$\|d(\exp_0)\|_{\bar{S}_r} := \max \{ |d(\exp_0)_u(V)|; u, V \in T_0B, u \in \bar{S}_r, |V| = 1 \}$$

$$\|D^2(\exp_0)\|_{\bar{S}_r} := \max \{ |D^2(\exp_0)_u(V, W)|; u, V, W \in T_0B, u \in \bar{S}_r, |V| = |W| = 1 \}$$

**Notação:** Quando  $\frac{r}{1-r} = 1$ , ou seja, quando  $r = 1/2$ , omitimos o subíndice nas normas:

$$\|d(\exp_0)\|_{\bar{S}_{1/2}} = \|d(\exp_0)\|$$

$$\|D^2(\exp_0)\|_{\bar{S}_{1/2}} = \|D^2(\exp_0)\|$$

**Lema 3.3.2.** As seguintes desigualdades são satisfeitas  $\forall r \in (0, 1)$  e  $\forall X, Y \in \mathcal{G}$  com  $|X|_{S_r}, |Y|_{S_r} \leq 1$ :

$$|X|_{S_{1/2}} \leq \|d(\exp_0)\| \frac{k}{\sinh \frac{rk}{1-r}} \quad (3.3)$$

$$|\nabla_Y X|_{S_{1/2}} \leq (\|D^2(\exp_0)\| + \|d(\exp_0)\|) \frac{k^2}{\sinh^2 \frac{rk}{1-r}} \quad (3.4)$$

$$|\nabla_Y X|_{S_r} \leq \|d(\exp_0)\| \frac{k}{\sinh \frac{rk}{1-r}}. \quad (3.5)$$

**dem.:** Prova de (3.3): Seja  $u \in T_0B$  unitário. Seja  $s = r/(1-r)$ . Definimos o seguinte campo de Jacobi ao longo da geodésica  $t \mapsto \exp_0(tu)$ :

$$J(t) := d(\exp_0)_{tu}(tX^*(u)).$$

Então

$$J(s) = d(\exp_0)_{su}(sX^*(u)) = X(\exp_0(su))$$

e  $J$  satisfaz  $J(0) = 0$ ,  $J'(0) = X^*(u)$ .

Utilizamos então o Teorema da Comparação de Rauch (Teorema 2.1.4). Seja  $\tilde{J}$  um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica do espaço hiperbólico de curvatura  $-k^2$  satisfazendo  $\tilde{J}(0) = 0$  e  $|\tilde{J}'(0)| = |X^*(u)|$ . Então devido ao teorema,  $|\tilde{J}(s)| \leq |J(s)|$ .

Para  $\tilde{J}$  cumprindo estas condições iniciais, é sabido que vale (veja o capítulo V de [dC1] para maiores detalhes)

$$|\tilde{J}(t)| = \frac{\sinh tk}{k} |X^*(u)|.$$

Desta forma,

$$\frac{\sinh sk}{k} \|X^*(u)\| \leq |J(s)| = |X(\exp_0(su))| \leq 1$$

e, portanto,

$$\|X^*(u)\| \leq \frac{k}{\sinh sk}. \quad (3.6)$$

Agora podemos, então, estimar  $|X(\exp_0 u)|$ :

$$|X(\exp_0 u)| = |d(\exp_0)_u(X^*(u))| \leq \|d(\exp_0)\| \|X^*(u)\| \leq \|d(\exp_0)\| \frac{k}{\sinh \frac{rk}{1-r}}.$$

*Prova de (3.4):* Denote por  $\xi_t := \exp_t Y$ ,  $\delta_t = d(\xi_t)_0$ . Então

$$\begin{aligned} X(\xi_t(\exp_0 u)) &= \left. \frac{d}{ds} \phi_s(\xi_t(\exp_0 u)) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{ds} \exp_0 \Psi_s(\delta_t(u)) \right|_{s=0} = d(\exp_0)_{\delta_t(u)}(X^*(\delta_t(u))). \end{aligned}$$

Assim,

$$(\nabla_Y X)(\exp_0 u) = \left. \frac{D}{dt} d(\exp_0)_{\delta_t(u)}(X^*(\delta_t(u))) \right|_{t=0},$$

onde  $\frac{D}{dt}$  é a derivada covariante ao longo da curva  $t \mapsto \xi_t(\exp_0 u)$ , e conseqüentemente

$$\begin{aligned} (\nabla_Y X)(\exp_0 u) &= \left. \frac{D}{dt} d(\exp_0)_{\delta_t(u)}(X^*(u)) \right|_{t=0} + d(\exp_0)_u \left. \frac{d}{dt} X^*(\delta_t(u)) \right|_{t=0} \\ &= D^2(\exp_0)_u(X^*(u), Y^*(u)) + d(\exp_0)_u(X^*(Y^*(u))). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} |(\nabla_Y X)(\exp_0 u)| &\leq \|D^2(\exp_0)\| \|X^*(u)\| \|Y^*(u)\| \\ &\quad + \|d(\exp_0)\| \left\| X^* \left( \frac{Y^*(u)}{\|Y^*(u)\|} \right) \right\| \|Y^*(u)\|. \end{aligned}$$



Então, usando mais uma vez (3.6), obtemos

$$|(\nabla_Y X)(\exp_0 u)| \leq \frac{k^2}{\sinh^2 \frac{rk}{1-r}} (\|D^2(\exp_0)\| + \|d(\exp_0)\|).$$

*Prova de (3.5):* Continuamos com  $x = \exp_0(\frac{r}{1-r}u)$ , onde  $u \in T_0B$  unitário.

Utilizamos um resultado forte, presente em [MS]. Para isso, consideramos uma bola geodésica  $\overline{B}_R$ , fechada, centrada em 0 e de raio suficientemente grande de modo que  $x$  pertença a seu interior. Desta forma,  $B_R$  é uma variedade compacta, com bordo e  $G$ -invariante e é possível utilizar o resultado principal de [MS]: podemos supor sem perda de generalidade que  $\overline{B}_R$  está contida em algum  $\mathbb{R}^N$ , para  $N$  bem grande, de tal forma que a métrica de  $\overline{B}_R$  é induzida de  $\mathbb{R}^N$  e, o que é mais importante, que  $G$  é um subgrupo de Lie de  $\mathcal{O}(N) = \text{Iso}(\mathbb{S}^{N-1})$ .

A vantagem de enxergar  $B_R$  dentro de  $\mathbb{R}^N$  é que a conexão de  $B_R$  nada mais é que a conexão do  $\mathbb{R}^N$  tangenciada. Mas a conexão no  $\mathbb{R}^N$  é a derivada usual!

Além disso,  $X$  e  $Y$  são restrições de campos de Killing no  $\mathbb{R}^N$ , que nada mais são do que matrizes antissimétricas  $N \times N$ . Desta forma,  $(\nabla_Y X)(x) = [X(Y(x))]^T$  e, portanto,

$$|\nabla_Y X(x)| \leq |X(Y(x))| \leq |X||Y(x)| = |X|$$

onde a última igualdade vem do fato que escolhemos  $|Y(x)| = 1$ .

Observe que  $G$  deixa 0 fixo em  $B$  e deixa, pela derivada,  $T_0B$  fixo, então podemos supor que, em  $\mathbb{R}^N$ , 0 é a origem e  $T_0B$  é um plano  $n$ -dimensional. Como o mergulho em  $\mathbb{R}^N$  é equivariante,  $G$  deixa 0 fixo e suas derivadas, que são os próprios elementos de  $G$ , visto que são agora transformações lineares, deixam  $T_0B$  fixo. Assim, os campos de Killing em  $\mathbb{R}^N$  provenientes daqueles em  $B$  são “tangentes” a  $T_0B$ , e portanto a norma deles resume-se à norma em  $T_0B$ . Conseqüentemente, podemos afirmar que  $|X| = \max_{y \in B, |y|=1} |X(y)| = |X|_{S_{1/2}}$ . Este valor já foi estimado em (3.3), concluindo a demonstração.  $\square$

### 3.4 Estimativas para $\varphi$

Seja  $\varphi \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{B} \setminus \{0\})$  a extensão radial de  $\psi$  dada por

$$\varphi(x) = \psi\left(\frac{x}{\|x\|}\right).$$

Fazemos nesta seção estimativas para  $\varphi$  e suas derivadas em  $B$ . O primeiro lema nos ajuda a fazer as contas nos lemas seguintes, que por sua vez nos dão as estimativas usadas na construção de barreiras.

Aqui utilizamos a terceira hipótese do teorema: dados  $v_1, \dots, v_{n-1}$  vetores em  $T_x S_r$ , em princípio não temos garantia alguma de que existam campos em  $\mathcal{G}$  que em  $x$  assumam os valores  $v_1, \dots, v_{n-1}$ . No entanto, com a hipótese da ação de  $G$  ser 2-pontos homogênea nas esferas geodésicas, temos que tais campos existem. Assim, a terceira hipótese torna-se indispensável para as contas que seguem.

Denotamos por  $E$  o campo em  $B$  dado por

$$E(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Observamos que  $E(\varphi) \equiv 0$ . Com efeito,  $E(\varphi)(x)$  pode ser calculado derivando  $\varphi$  ao longo de curvas que têm  $E(x)$  como vetor tangente em  $x$ . Em particular, podemos tomar geodésicas normalizadas partindo de 0. Ao longo destas temos que  $\varphi$  é constante, e, portanto, sua derivada é nula. Feitas essas observações, podemos provar o seguinte resultado:

**Lema 3.4.1.** *Seja  $x \in B \setminus \{0\}$ . Seja  $\{E_2, \dots, E_n\}$  referencial ortonormal em uma vizinhança de  $x$  ortogonais a  $E$  e geodésicos em  $x$ , ou seja,  $\nabla_u E_i(x) = 0 \forall u \in T_x B$ . Sejam  $X_2, \dots, X_n$  campos quaisquer tais que  $X_i(x) = E_i(x)$ . Então  $\forall i, j \in \{2, \dots, n\}$ , temos*

$$E_k(E_i(\varphi))(x) = X_k(X_i(\varphi))(x) - \langle \text{grad } \varphi, \nabla_{X_k} X_i \rangle(x).$$

**dem.:** Sejam  $X_2, \dots, X_n$  tais que  $X_2(x), \dots, X_n(x)$  são ortogonais a  $E(x)$ , formando uma base para  $T_x B$ . Em uma vizinhança de  $x$  podemos expressar  $E_i, i = 2, \dots, n$ , da seguinte forma:

$$E_i = \sum_{j=2}^n a_{ij} X_j + b_i E,$$

com  $a_{ij}(x) = b_i(x) = 0$  se  $j \neq i$  e  $a_{ii} = 1$ .

Para  $i, k \in \{2, \dots, n\}$ , temos

$$\nabla_{X_k} E_i = \sum_{j=2}^n X_k(a_{ij}) X_j + \sum_{j=2}^n a_{ij} \nabla_{X_k} X_j + X_k(b_i) E + b_i \nabla_{X_k} E.$$

Assim, calculando em  $x$  e lembrando também que  $\{E_i\}$  é um referencial geodésico, temos, para  $2 \leq i, k \leq n$ ,

$$0 = \sum_{j=2}^n X_k(a_{ij}) X_j + \nabla_{X_k} X_j + X_k(b_i) E.$$

Fazendo o produto interno dos dois lados da igualdade por  $X_j$ , temos

$$X_k(a_{ij})(x) = -\langle \nabla_{X_k} X_i, X_j \rangle(x)$$

para  $2 \leq i, j, k \leq n$ .

Com as observações feitas antes do lema, temos,

$$\begin{aligned} E_k(E_i(\varphi)) &= E_k\left(\left(\sum_{j=2}^n a_{ij} X_j + b_i E\right)(\varphi)\right) \\ &= E_k\left(\left(\sum_{j=2}^n a_{ij} X_j\right)(\varphi)\right) = \sum_{j=2}^n E_k(a_{ij} X_j(\varphi)) \\ &= \sum_{j=2}^n (E_k(a_{ij}) X_j(\varphi) + a_{ij} E_k(X_j(\varphi))). \end{aligned}$$

Então, calculando em  $x$ , obtemos,

$$\begin{aligned} E_k(E_i(\varphi)) &= \sum_{j=2}^n X_k(a_{ij}) X_j(\varphi) + X_k(X_i(\varphi)) \\ &= -\sum_{j=2}^n \langle \nabla_{X_k} X_i, X_j \rangle \langle \text{grad } \varphi, X_j \rangle + X_k(X_i(\varphi)) \\ &= -\langle \text{grad } \varphi, \nabla_{X_k} X_i \rangle + X_k(X_i(\varphi)). \end{aligned}$$

■

O Lema 3.4.1 foi enunciado com campos  $X_2, \dots, X_n$  quaisquer. No entanto, para fins práticos, é necessário que eles sejam campos de Killing muito especiais, a saber, campos de Killing tais que  $X_i(x) = E_i(x)$  e  $|X_i|_{S_r} \leq 1$ . Aqui a terceira hipótese do Teorema 1.0.1 é fundamental.

De fato, seja  $X$  um campo de Killing qualquer. Como  $S_r$  é compacta,  $|X|_{S_r}$  é assumida em um ponto  $y \in S_r$ . Seja  $c := |X(y)|$ . Então  $\tilde{X} := (1/c)X$  é um campo de Killing tal que  $|\tilde{X}| \leq 1$ . Seja agora  $x \in S_r$ . Então, como  $G$  opera de modo 2-pontos homogêneo em  $S_r$ , existe  $g \in G$  tal que  $g(y) = x$  e  $dg_y(\tilde{X}(y)) = E_i(x)$ . Defina então

$$X_i := \text{Ad}_g(\tilde{X}),$$

onde  $\text{Ad}_g$  é a conjugação em  $\mathcal{G}$ , definida por  $d(a_g)_e$ , para  $a_g(h) := ghg^{-1}$  (veja, por exemplo [AB]). Assim, temos garantia que  $X_i(x) = E_i(x)$ , o que nos permite aplicar o Lema 3.4.1, e que  $|X_i|_{S_r} \leq 1$ , o que nos permite utilizar o Lema 3.3.2.

Com essas observações, prosseguimos.

**Definição 3.4.2.** *Defina as seguintes normas para  $\varphi$  e suas derivadas:*

$$\begin{aligned} |\varphi|_{0,S_r} &:= \sup_{x \in S_r} |\varphi(x)| \\ |\varphi|_{1,S_r} &:= \sup_{\substack{x \in S_r, \\ F(x) \in T_x S_r, \\ |F|=1}} |F(\varphi)(x)| = \sup_{S_r} |\text{grad } \varphi| \\ |\varphi|_{2,S_r} &:= \sup_{\substack{x \in S_r, \\ F_1(x), F_2(x) \in T_x S_r, \\ |F_1|=|F_2|=1, \\ F_1, F_2 \text{ geodésicos em } x}} |F_1(F_2(\varphi))(x)| \end{aligned}$$

O próximo lema nos dá estimativas destas normas para  $r \approx 1$ , indispensáveis na construção de barreiras para o problema.

**Lema 3.4.3.**

$$|\varphi|_{1,S_r} \leq \|d(\text{exp}_0)\| \max_{S_{1/2}} |\text{grad } \varphi| \frac{k}{\sinh \frac{rk}{1-r}} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} |\varphi|_{2,S_r} &\leq 2 \left[ \|d(\text{exp}_0)\|^2 \max_{S_{1/2}} |D\text{grad } \varphi| \right. \\ &\quad \left. + (\|D^2(\text{exp}_0)\| + \|d(\text{exp}_0)\| + \|d(\text{exp}_0)\|^2) \max_{S_{1/2}} |\text{grad } \varphi| \right] \frac{k^2}{\sinh^2 \frac{rk}{1-r}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde  $\max_{S_{1/2}} |D\text{grad } \varphi| = \sup_{Z \in \mathcal{G}, |Z|_{S_{1/2}}=1} |\nabla_Z \text{grad } \varphi|_{S_{1/2}}$ .

**dem.:** Novamente, seja  $s := r/(1-r)$ . Seja  $u \in T_0 B$  unitário e sejam  $X, Y \in \mathcal{G}$  tais que  $|X(\text{exp}_0(su))| = |Y(\text{exp}_0(su))| = 1$  e que  $|X|_{S_r}, |Y|_{S_r} \leq 1$ . Usando a invariância radial de  $\varphi$ , combinada com (3.1), temos

$$\begin{aligned} X(\varphi)(\text{exp}_0 su) &= \left. \frac{d}{dt} [\varphi(\phi_t(\text{exp}_0 su))] \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} [\varphi(\text{exp}_0 s \psi_t(u))] \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} [\varphi(\text{exp}_0 \psi_t(u))] \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} [\varphi(\phi_t(\text{exp}_0 u))] \right|_{t=0} \\ &= d\varphi_{(\text{exp}_0 u)} \left( \left. \frac{d}{dt} \phi_t(\text{exp}_0 u) \right|_{t=0} \right) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$X(\varphi)(\text{exp}_0 su) = \langle \text{grad } \varphi(\text{exp}_0 u), X(\text{exp}_0 u) \rangle$$

e então, usando (3.3), obtemos

$$|X(\text{exp}_0 su)| \leq \max_{S_{1/2}} |\text{grad } \varphi| \|d(\text{exp}_0)\| \frac{k}{\sinh \frac{rk}{1-r}}.$$

Para estimar  $X(Y(\varphi))$ , fazemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
Y(X(\varphi))(\exp_0 su) &= \frac{d}{dt} [X(\varphi)(\xi_t(\exp_0 su))] \Big|_{t=0} = [X(\varphi)(\exp_0 s \delta_t(u))] \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d}{d\lambda} [\varphi(\phi_{t+\lambda}(\exp_0 s \delta_t(u)))] \Big|_{\lambda=0} \right\} \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d}{d\lambda} [\varphi(\exp_0 s \Psi_{t+\lambda}(u))] \Big|_{\lambda=0} \right\} \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d}{d\lambda} [\varphi(\exp_0 \Psi_{t+\lambda}(u))] \Big|_{\lambda=0} \right\} \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d}{d\lambda} [\varphi(\phi_{t+\lambda}(\xi_t(\exp_0(u))))] \Big|_{\lambda=0} \right\} \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d}{d\lambda} [\varphi(\phi_{t+\lambda}(\xi_t(\exp_0 u)))] \Big|_{\lambda=0} \right\} \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \langle \text{grad } \varphi(\phi_t(\xi_t(\exp_0 u))), X(\phi_t(\xi_t(\exp_0 u))) \rangle \Big|_{t=0} \\
&= \langle \nabla_X \text{grad } \varphi(\exp_0 u), X(\exp_0 u) \rangle + \langle \text{grad } \varphi(\exp_0 u), \nabla_X(\exp_0 u) \rangle \\
&\quad + \langle \nabla_Y \text{grad } \varphi(\exp_0 u), X(\exp_0 u) \rangle + \langle \text{grad } \varphi(\exp_0 u), \nabla_Y(\exp_0 u) \rangle.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

E então,

$$\begin{aligned}
|Y(X(\varphi))(\exp_0 su)| &\leq 2|X|_{S_{1/2}} |Y|_{S_{1/2}} \max_{S_{1/2}} |D \text{grad } \varphi| \\
&\quad + \left( |\nabla_Y X|_{S_{1/2}} + |\nabla_X X|_{S_{1/2}} \right) \max_{S_{1/2}} |\text{grad } \varphi|.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Agora, usando (3.3) e (3.4), obtemos

$$\begin{aligned}
|Y(X(\varphi))(\exp_0 su)| &\leq 2 \|d(\exp_0)\|^2 \max_{S_{1/2}} |D \text{grad } \varphi| \frac{k^2}{\sinh^2 \frac{rk}{1-r}} \\
&\quad + 2 \max_{S_{1/2}} |\text{grad } \varphi| \frac{k^2}{\sinh^2 \frac{rk}{1-r}} (\|D^2(\exp_0)\| + \|d(\exp_0)\|).
\end{aligned}$$

Por fim, precisamos voltar ao referencial geodésico. Sejam  $E_i, E_j$  geodésicos em  $x$  e unitários. Usando o Lema 3.4.1, obtemos

$$|E_i(E_j(\varphi))| \leq |X_i(X_j(\varphi))| + |\langle \nabla_{X_i} X_j, \text{grad } \varphi \rangle| \leq |X_i(X_j(\varphi))| + |\nabla_{X_i} X_j| |\text{grad } \varphi|.$$

A primeira parcela no lado direito acaba de ser estimada,  $|\text{grad } \varphi|$  está estimado por (3.8) e  $|\nabla_{X_i} X_j|$  está estimado por (3.5). Juntando estes resultados, obtemos o desejado.

### 3.5 Construção de barreiras

Com estes lemas em mãos, estamos prontos para provar a existência de solução para o problema através da construção de barreiras.

Seja  $F_h : \bar{B} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F_h(x) = h(1 - \|x\|)$ , onde  $h \in \mathbb{R}$ . Desta forma, escrevendo

$$G_h := F_h + \varphi$$

temos que  $G_h \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\bar{B} \setminus \{0\})$  e satisfaz  $G_h|_{\partial B} = \psi$ .

Omitiremos nos cálculos a seguir o subíndice  $h$  para facilitar notação; quando for necessário, voltaremos a utilizá-lo.

Utilizamos a notação  $E_1$  para o campo  $E$  definido no Lema 3.2.3. Fixamos  $x \in B$ . Sejam  $E_2, \dots, E_n$  campos ortonormais e ortogonais a  $E_1$  geodésicos em  $x$ .

Começamos observando que

$$Q(G)(x) = \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} F}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} F|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2}}(x) + \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} \varphi}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} F|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2}}(x). \quad (3.12)$$

Também observamos que  $\operatorname{grad} F = E_1(F)E_1$ : de fato,

$$\operatorname{grad} F = \sum_{i=1}^n \langle \operatorname{grad} F, E_i \rangle E_i$$

mas da definição de gradiente, temos  $\langle \operatorname{grad} F, E_i \rangle(x) = dF_x(E_i) = \left. \frac{d}{dt} F(\alpha(t)) \right|_{t=0}$ , onde  $\alpha(0) = x$  e  $\alpha'(0) = E_i$ . Se  $i \geq 2$ , então  $\alpha$  é tangente à esfera geodésica que contém  $x$ , e portanto  $F(\alpha(t))$  é constante. Logo,  $\operatorname{grad} F$  não tem componentes nas direções  $E_2, \dots, E_n$ , e portanto  $\operatorname{grad} F(x) = dF_x(E_1)E_1 = E_1(F)E_1$ . Um raciocínio análogo nos dá que  $\operatorname{grad} \varphi$  só tem componentes nas direções  $E_2, \dots, E_n$ , e como em  $x$  estes campos são geodésicos, podemos escrever  $\operatorname{grad} \varphi = \sum_{i=2}^n E_i(\varphi)E_i$  (veja [dC1]). Feitas estas observações, podemos prosseguir.

**Lema 3.5.1.**

$$E_1(F)(x) = -h(1 - \|x\|)^2$$

$$E_1(E_1(F))(x) = 2h(1 - \|x\|)^3$$

**dem.:** Seja  $r := \|x\|$ . Consideramos a curva

$$\alpha(t) = \exp_0 \left( t \frac{x}{1-r} \right).$$

Então  $\alpha(1) = \exp_0\left(\frac{x}{1-r}\right) = x$ , conforme o Lema 3.2.1. Além disso, repetindo as contas do Lema 3.2.3, temos que

$$\alpha(t) = \frac{t}{1-r+tr}x$$

e, portanto,  $\alpha'(1) = (1-r)x$ . Desta forma,

$$E_1(x) = \frac{1}{\mu} \frac{1}{1-r} \alpha'(1) = \left(\frac{(1-r)^2}{r}\right) \left(\frac{1}{1-r}\right) \alpha'(1) = \frac{1-r}{r} \alpha'(1).$$

Por definição de campo aplicado em uma função, temos

$$E_1(F)(x) = dF_x(E_1(x)) = dF_x\left(\frac{1-r}{r}\alpha'(1)\right) = \frac{1-r}{r} \frac{d}{dt}F(\alpha(t)) \Big|_{t=1}. \quad (3.13)$$

Por outro lado,  $F(\alpha(t)) = h(1 - \|\alpha(t)\|)$  e  $\|\alpha(t)\| = d(0, \alpha(t))/(1 + d(0, \alpha(t)))$ . Mas observe também que  $d(0, \alpha(t))$  é a norma do vetor  $v$  tal que  $\exp_0(v) = \alpha(t)$ , que no nosso caso é  $tr/(1-r)$ . Assim,

$$\begin{aligned} F(\alpha(t)) &= h\left(1 - \frac{\frac{tr}{1-r}}{1 + \frac{tr}{1-r}}\right) = h\left(1 - \frac{tr}{1-r+tr}\right) \\ &= h\left(\frac{1-r+tr-tr}{1-r+tr}\right) = h\frac{1-r}{1-r+tr}. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(F(\alpha(t))) \Big|_{t=1} &= h \frac{d}{dt} \frac{1-r}{1-r+tr} \Big|_{t=1} = h \left( \frac{-r(1-r)}{(1-r+tr)^2} \right) \Big|_{t=1} \\ &\implies \frac{d}{dt}F(\alpha(t)) \Big|_{t=1} = -r(1-r)h. \end{aligned}$$

Substituindo em (3.13), obtemos

$$E_1(F)(x) = \left(\frac{1-r}{r}\right) (-r(1-r)h) = -(1-r)^2h.$$

O cálculo da derivada segunda é análogo e será omitido aqui. ■

**Lema 3.5.2.**

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 1} \frac{E_i(E_j(\varphi))(x)}{(1 - \|x\|)^2} = 0 = \lim_{\|x\| \rightarrow 1} E_i(\varphi)(x)$$

Em particular, existe  $r_1 < 1$  tal que

$$\|x\| \geq r_1 \implies \sum_{i=2}^n \left| \frac{E_j(E_i(\varphi))(x)}{(1 - \|x\|)^2} \right| \leq 1$$

e

$$\sum_{i,j=2, i \neq j}^n \left| \frac{E_i(\varphi)E_j(\varphi)E_i(E_j(\varphi))(x)}{(1 - \|x\|)^2} \right| \leq 1.$$

**dem.:** Conforme o Lema 3.4.3, se  $x \in S_r$ , vale

$$|E_i(E_j(\varphi))| \leq C(\varphi) \frac{k^2}{\sinh^2 \frac{rk}{1-r}}.$$

Afirmamos que

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{(1-r)^2} \frac{k^2}{\sinh^2 \frac{rk}{1-r}} = 0,$$

e isto é facilmente verificado: o crescimento de  $\sinh$  no infinito é exponencial; o outro fator tem crescimento polinomial. Podemos obter esse resultado aplicando a Regra de L'Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{(1-r)^2} \frac{k^2}{\sinh^2 \frac{rk}{1-r}} &= k^2 \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{(1-r)^2}}{\sinh^2 \frac{rk}{1-r}} \\ &= k^2 \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{(1-r)^3}}{2k \sinh \left( \frac{rk}{1-r} \right) \cosh \left( \frac{rk}{1-r} \right) \left( \frac{1}{(1-r)^2} \right)} \\ &= k \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{1-r}}{\sinh \frac{kr}{1-r} \cosh \frac{kr}{1-r}} = k \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\cancel{(1-r)^2}}}{k \left( \sinh^2 \left( \frac{kr}{1-r} \right) + \cosh^2 \left( \frac{kr}{1-r} \right) \right) \cancel{\left( \frac{1}{(1-r)^2} \right)}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{\sinh^2 \frac{kr}{1-r} + \cosh^2 \frac{kr}{1-r}} = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_i(E_j(\varphi))}{(1 - \|x\|)^2} = 0.$$

A outra igualdade é trivial, também utilizando as estimativas do Lema 3.4.3. A existência de  $r_1$  satisfazendo as desigualdades seguem da definição de limite. ■

**Lema 3.5.3.**

$$\frac{(1 + |\text{grad } G|^2)^{3/2}(x)}{(1 - \|x\|)^2} \left( \text{div} \frac{\text{grad } F}{\sqrt{1 + |\text{grad } G|^2}} \right) (x) =$$

$$h(1 + |\text{grad } \varphi|^2)(2(1 - \|x\|) + (n-1)H_r) + h^3(n-1)H_r(1 - \|x\|)^4.$$

Em particular, se  $h > 0$  e se  $\|x\| \geq r_2 := 1 - \frac{k(n-1)}{4}$ , então

$$\frac{(1 + |\text{grad } G|^2)^{3/2}(x)}{(1 - \|x\|)^2} \text{div} \frac{\text{grad } F}{\sqrt{1 + |\text{grad } G|^2}} \leq -h(n-1) \frac{k}{2} + h^3(n-1)H_r(1 - \|x\|)^4.$$



**dem.:**

$$\begin{aligned} & \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} F}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} F|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2}} = \\ & = \frac{\operatorname{div} \operatorname{grad} F}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} F|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2}} + \left\langle \operatorname{grad} \frac{1}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} F|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2}}, \operatorname{grad} F \right\rangle. \end{aligned}$$

Temos que

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} F = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} E_1(F) E_1, E_i \rangle = \sum_{i=1}^n E_i(E_1(F)) \langle E_1, E_i \rangle + E_1(F) \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} E_1, E_i \rangle.$$

Mas observe que  $E_i(E_1(F)) = 0, \forall i \neq 1$  e também que, como  $E_1$  é campo normal exterior às esferas geodésicas,  $\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} E_1, E_i \rangle = -(n-1)H_r$ . Desta forma,

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} F = E_1(E_1(F)) - (n-1)E_1(F)H_r.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} & \operatorname{grad} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} F|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2}} \right) \\ & = -\frac{1}{2}(1 + |\operatorname{grad} F|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2)^{-3/2} (\operatorname{grad} (E_1(F)^2 + E_2(\varphi)^2 + \dots + E_n(\varphi)^2)). \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} (E_1(F)^2 + E_2(\varphi)^2 + \dots + E_n(\varphi)^2) & = \sum_{j=1}^n E_j \left( E_1(F)^2 + \sum_{i=2}^n E_i(\varphi)^2 \right) E_j \\ & = \sum_{j=1}^n 2E_1(F)E_j(E_1(F))E_j + \sum_{j=1}^n \sum_{i=2}^n 2E_i(\varphi)E_j(E_i(\varphi))E_j. \end{aligned}$$

Como  $E_j(E_1(F)) = 0 \forall j \neq 1$ , então

$$\operatorname{grad} \left( E_1(F)^2 + \sum_{i=2}^n E_i(\varphi)^2 \right) = 2 \left( E_1(F)E_1(E_1(F))E_1 + \sum_{i=2}^n E_i(\varphi) \sum_{j=1}^n E_j(E_i(\varphi))E_j \right).$$

Daí

$$\begin{aligned} & \operatorname{grad} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} F|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2}} \right) \\ & = -(1 + |\operatorname{grad} F|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2)^{-3/2} \left( E_1(F)E_1(E_1(F))E_1 + \sum_{i=2}^n E_i(\varphi) \sum_{j=1}^n E_j(E_i(\varphi))E_j \right) \end{aligned} \tag{3.14}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} & \left\langle \operatorname{grad} \frac{1}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} F|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2}}, \operatorname{grad} F \right\rangle \\ &= -(1 + E_1(F) + \sum_{i=2}^n E_i(\varphi)^2)^{-3/2} E_1(F)^2 E_1(E_1(F)) \end{aligned}$$

o que nos dá

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} F}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} G|^2}} &= (1 + |\operatorname{grad} G|^2)^{-3/2} \{ (1 + |\operatorname{grad} G|^2) [E_1(E_1(F)) \\ &\quad - (n-1)E_1(F)H_r] - E_1(F)^2 E_1(E_1(F)) \}. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} (1 + |\operatorname{grad} G|^2)^{3/2} \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} F}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} G|^2}} &= (1 + |\operatorname{grad} \varphi|^2) [E_1(E_1(F)) - (n-1)E_1(F)H_r] \\ &\quad + E_1(F)^2 [E_1(E_1(F)) - (n-1)E_1(F)H_r] - E_1(F)^2 E_1(E_1(F)) \\ &= (1 + |\operatorname{grad} \varphi|^2) (E_1(E_1(F)) - (n-1)E_1(F)H_r) - (n-1)E_1(F)^3 H_r. \end{aligned}$$

Agora, substituindo na expressão acima o que foi obtido no Lema 3.5.1, obtemos:

$$\begin{aligned} & (1 + |\operatorname{grad} G|^2)^{3/2} \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} F}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} G|^2}} \\ &= (1 + |\operatorname{grad} \varphi|^2) (2h(1 - \|x\|)^3 + h(n-1)(1 - \|x\|)^2 H_r) + h^3(n-1)(1 - \|x\|)^6 H_r. \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + |\operatorname{grad} G|^2)^{3/2}}{(1 - \|x\|)^2} \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} F}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} G|^2}} \\ &= (1 + |\operatorname{grad} G|^2) (2h(1 - \|x\|) + h(n-1)H_r) + h^3(n-1)(1 - \|x\|)^4 H_r. \end{aligned}$$

Para provar a desigualdade que vem a seguir, seja  $x$  tal que  $\|x\| \geq 1 - \frac{k(n-1)}{4}$ . Então

$$\begin{aligned} 2(1 - \|x\|) + (n-1)H_r &\leq 2 \left( 1 - \left( 1 - \frac{k(n-1)}{4} \right) \right) + (n-1)H_r \\ &= \frac{(n-1)k}{2} + (n-1)H_r \leq -(n-1) \frac{k}{2} \end{aligned}$$

onde a última desigualdade vem do Lema 3.2.4, que nos dá  $H_r \leq -k$  e, portanto,

$$\frac{k}{2} + H_r = -\frac{k}{2} + k + H_r \leq -\frac{k}{2}.$$

Além disso, note que  $(1 + |\text{grad } \varphi|^2) \geq 1$ . Então multiplicando ambos os lados por um valor negativo, obtemos

$$h(1 + |\text{grad } \varphi|^2)(2(1 - \|x\|) + (n-1)H_r) \leq h(2(1 - \|x\|) + (n-1)H_r) \leq -h(n-1)\frac{k}{2}$$

o que conclui a demonstração.  $\blacksquare$

**Lema 3.5.4.**

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + |\text{grad } G|^2)^{3/2}(x)}{(1 - \|x\|)^2} \left( \text{div} \frac{\text{grad } \varphi}{\sqrt{1 + |\text{grad } G|^2}} \right) (x) = \\ & (1 + h^2(1 - \|x\|)^4) \sum_{i=2}^n \frac{E_i(E_i(\varphi))(x)}{(1 - \|x\|)^2} - \sum_{i,j=2, i \neq j}^n \frac{E_i(\varphi)E_j(\varphi)E_i(E_j(\varphi))(x)}{(1 - \|x\|)^2}. \end{aligned}$$

Em particular, se  $\|x\| \geq r_1$ , então

$$\frac{(1 + |\text{grad } G|^2)^{3/2}(x)}{(1 - \|x\|)^2} \text{div} \frac{\text{grad } \varphi}{\sqrt{1 + |\text{grad } G|^2}}(x) \leq 2 + h^2(1 - \|x\|)^4.$$

**dem.:**

$$\text{div} \frac{\text{grad } \varphi}{\sqrt{1 + |\text{grad } G|^2}} = \frac{\text{div grad } \varphi}{\sqrt{1 + |\text{grad } G|^2}} + \left\langle \text{grad} \frac{1}{\sqrt{1 + |\text{grad } G|^2}}, \text{grad } \varphi \right\rangle.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \text{div grad } \varphi &= \sum_{j=1}^n \left\langle \nabla_{E_j} \sum_{i=2}^n E_i(\varphi)E_i, E_j \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=2}^n \langle E_j(E_i(\varphi))E_i, E_j \rangle + \sum_{j=1}^n \sum_{i=2}^n E_i(\varphi) \langle \nabla_{E_j} E_i, E_j \rangle \\ &= \sum_{i=2}^n E_i(E_i(\varphi)) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=2}^n E_i(\varphi) \langle \nabla_{E_j} E_i, E_j \rangle. \end{aligned}$$

Lembrando que  $\{E_i\}_{i=2}^n$  é geodésico em  $x$ , calculando neste ponto, obtemos

$$\text{div } \varphi(x) = \sum_{i=2}^n E_i(E_i(\varphi)).$$

Quanto à segunda parcela, usando (3.14), obtemos que

$$\left\langle \text{grad} \frac{1}{\sqrt{1 + |\text{grad } G|^2}}, \text{grad } \varphi \right\rangle = -(1 + |\text{grad } G|^2)^{-\frac{3}{2}} \left( \sum_{i,j=2}^n E_i(\varphi)E_j(\varphi)E_i(E_j(\varphi)) \right)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
& (1 + |\text{grad } G|^2)^{3/2} \text{div} \frac{\text{grad } \varphi}{\sqrt{1 + |\text{grad } F|^2 + |\text{grad } \varphi|^2}} \\
&= \left\{ (1 + |\text{grad } F|^2 + |\text{grad } \varphi|^2) \left( \sum_{i=2}^n E_i(E_i(\varphi)) \right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i,j=2}^n E_i(\varphi) E_j(\varphi) E_i(E_j(\varphi)) \right\} \\
&= (1 + |\text{grad } F|^2) \sum_{i=2}^n E_i(E_i(\varphi)) + |\text{grad } \varphi|^2 \left( \sum_{i=2}^n E_i(E_i(\varphi)) \right) \\
&\quad - \sum_{i=2}^n E_i(\varphi)^2 \left( \sum_{i=2}^n E_i(E_i(\varphi)) \right) - \sum_{i,j=2, i \neq j}^n E_i(\varphi) E_j(\varphi) E_i(E_j(\varphi)).
\end{aligned}$$

Substituimos, então,  $|\text{grad } F|^2 = E_1(F)^2 = h^2(1 - \|x\|)^4$  e dividimos a expressão por  $(1 - \|x\|)^2$ , obtendo a igualdade desejada.

Quanto à desigualdade, seja  $x$  tal que  $\|x\| \geq r_1$  dado no Lema 3.5.2. Então

$$\begin{aligned}
& \frac{(1 + |\text{grad } G|^2)^{3/2}}{(1 - \|x\|)^2} \text{div} \frac{\text{grad } \varphi}{\sqrt{1 + |\text{grad } G|^2}} \\
&\leq \left| \frac{(1 + |\text{grad } G|^2)^{3/2}}{(1 - \|x\|)^2} \text{div} \frac{\text{grad } \varphi}{\sqrt{1 + |\text{grad } G|^2}} \right| \\
&\leq (1 + h^2(1 - \|x\|)^4) \sum_{i=2}^n \left| \frac{E_i(E_i(\varphi))(x)}{(1 - \|x\|)^2} \right| + \sum_{i,j=2, i \neq j}^n \left| \frac{E_i(\varphi) E_j(\varphi) E_i(E_j(\varphi))(x)}{(1 - \|x\|)^2} \right| \\
&\leq (1 + h^2(1 - \|x\|)^4) + 1 = 2 + h^2(1 - \|x\|)^4.
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Juntando os Lemas 3.5.3 e 3.5.4 e a expressão (3.12), obtemos que para  $h > 0$  e  $\|x\| \geq r_0 := \max\{r_1, r_2\}$ ,

$$\frac{(1 + |\text{grad } G|^2)^{3/2}}{(1 - \|x\|)^2} Q(G)(x) \leq \left[ 2 - h(n-1) \frac{k}{2} \right] + h^2(1 - \|x\|)^4 [h(n-1)H_{\|x\|} + 1]. \tag{3.15}$$

**Teorema 3.5.5.** *Se  $h \geq \frac{6}{(n-1)k}$  e se  $\|x\| \geq r_0$ , então*

$$\frac{(1 + |\text{grad } G|^2)^{3/2}}{(1 - \|x\|)^2} Q(G)(x) \leq -1.$$

**dem.:** Com  $h \geq \frac{6}{(n-1)k}$  fixado, olhamos para cada uma das parcelas do lado direito de (3.15):

$$2 - h(n-1)\frac{k}{2} \leq 2 - \frac{6}{(n-1)k}(n-1)\frac{k}{2} = 2 - 3 = -1$$

e

$$h(n-1)H_{\|x\|} + 1 \leq \frac{4}{(n-1)k}(n-1)H_{\|x\|} + 1 = \frac{4H_{\|x\|}}{k} + 1.$$

Mas, como  $H_{\|x\|} \leq -k$ , temos que

$$\frac{H_{\|x\|}}{k} \leq -1$$

e, portanto,

$$\frac{4H_{\|x\|}}{k} + 1 \leq -3.$$

Multiplicando ambos os lados por  $h^2(1 - \|x\|)^4$ , obtemos

$$h^2(1 - \|x\|)^4(h(n-1)H_{\|x\|} + 1) \leq -3h^2(1 - \|x\|)^4 \leq 0$$

(note que quando  $\|x\| \rightarrow 1$ , perdemos o controle desta cota superior, ela se aproxima de zero. O importante é que a primeira parcelas do lado direito de (3.15) está sempre limitada superiormente por  $-1$ ).

Desta forma,

$$\frac{(1 + |\text{grad } G|^2)^{3/2}}{(1 - \|x\|)^2} Q(G)(x) \leq -1$$

como queríamos demonstrar!! ■

O resultado acima obtido nos dá que  $Q(G)(x) < 0$  para todo  $x$  com  $\|x\| \geq r_0$ . Como  $G$  não está definida em toda a bola, e nem sequer satisfaz  $Q(G) < 0$  em toda a bola, ela não é uma supersolução para o problema. No entanto, pronomos  $G$  continuamente por toda a bola de forma que teremos uma supersolução generalizada.

Seja  $U$  a  $(1 - r_0)$ -vizinhança de  $\partial B$  em  $\bar{B}$ , isto é,

$$U := \{x \in \bar{B}; r_0 < \|x\| \leq 1\}.$$

Agora escolha  $h_0$  suficientemente grande tal que

$$h_0 \geq \frac{6}{(n-1)k}$$

e

$$\min_{\partial U \setminus \partial B} G_{h_0} > \max \varphi.$$

Desta forma, existe um aberto limitado  $V$  de  $B$  tal que  $\overline{B \setminus U} \subset V$  e  $m := \min_{\partial V} G_{h_0} > \max \varphi$ .

A partir de agora, chamamos  $G_{h_0}$  simplesmente de  $G$ . Definimos a seguinte função em  $B$ :

$$w(x) := \begin{cases} \min\{G(x), m\} & \text{se } x \in U \\ m & \text{se } x \in B \setminus U \end{cases}$$

Então, conforme discussão na Seção 2.2.2,  $w$  é supersolução generalizada para o problema.

De forma totalmente análoga ao que fizemos para encontrar  $h_0$ , podemos, *para o mesmo valor de  $r_0$* , encontrar  $\tilde{h} \ll 0$  tal que

$$\frac{(1 + |\text{grad } \tilde{G}|^2)^{3/2}}{(1 - \|x\|)^2} Q(\tilde{G}) \geq 1$$

onde  $\tilde{G}(x) = \tilde{h}(1 - \|x\|) + \varphi(x)$  e de modo que  $M := \max_{\partial V} \tilde{G} < \min \varphi$ . Desta forma, podemos também definir a função

$$\tilde{w}(x) := \begin{cases} \max\{G(x), M\} & \text{se } x \in U \\ M & \text{se } x \in B \setminus U \end{cases}$$

e mais uma vez conforme discussão na seção 2.2.2, esta é uma subsolução generalizada.

### 3.6 Argumentos finais

Acabamos de encontrar super e subsolução para o problema. Isso nos leva a querer aplicar o método da continuidade. No entanto, para aplicá-lo, precisamos estar trabalhando em um conjunto limitado. Prosseguimos então da seguinte forma:

Seja  $B_l$  a bola euclidiana centrada em 0 e de raio  $1 - 1/l$  de tal forma que  $1 - 1/l > r_0$ . Considere o problema de Dirichlet em  $B_l$ :

$$\begin{cases} Q(u) = 0 & \text{em } B_l \\ u|_{\partial B_l} = G|_{\partial B_l} \end{cases} \quad (3.16)$$

Utilizando o método da continuidade, como faremos a seguir, é possível mostrar que para cada  $l$  existe  $u_l$  solução de (3.16).

Para  $t \in [0, 1]$ , defina  $G_t := F + t\varphi$ . Seja

$$m_t := \min_{\partial V} G_t.$$

Observe que  $\min_{\partial V} F + \min_{\partial V} \varphi = \min_{\partial V} G > \max_{\partial V} \varphi$  e, portanto,  $\min_{\partial V} F > \max_{\partial V} \varphi - \min_{\partial V} \varphi \geq t(\max_{\partial V} \varphi - \min_{\partial V} \varphi) \Rightarrow \min_{\partial V} F + \min_{\partial V} t\varphi > \max_{\partial V} t\varphi$ . Assim,  $m_t > \max t\varphi$  e, portanto, podemos definir uma função  $w_t : B \rightarrow \mathbb{R}$  da mesma forma que definimos  $w$ , ou seja,

$$w_t(x) := \begin{cases} m_t & \text{se } x \in B \setminus U \\ \min\{m_t, G_t(x)\} & \text{se } x \in U \end{cases}$$

Analogamente, definimos, para  $M_t := \max_{\partial V} G_t$  (que da mesma forma satisfaz  $M_t < \min t\varphi$ ):

$$\tilde{w}_t := \begin{cases} M_t & \text{se } x \in B \setminus U \\ \max\{M_t, G_t(x)\} & \text{se } x \in U \end{cases}$$

Fixamos  $l$  e consideramos a família de problemas de Dirichlet em  $B_l$  indexada por  $t$ :

$$\begin{cases} Q(u) = 0 & \text{em } B_l \\ u|_{\partial B_l} = w_t|_{\partial B_l} \end{cases} \quad (3.17)$$

Considere o conjunto

$$A_l := \{t \in [0, 1]; \exists u_t \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{B_l}) \text{ solução de (3.17)}\}.$$

Através do método da continuidade, mostramos que  $A_l = [0, 1]$ . Para isso, conforme visto na Seção 2.2.2, precisamos apenas obter barreiras que tenham limitação uniforme da altura e também do gradiente na fronteira de  $B_l$ .

Acontece que  $w_t$  tem uma limitação por cima para a sua altura uniforme em  $t \in [0, 1]$ . De fato,

$$m_t = \min_{\partial V} F + \min_{\partial V} t\varphi \leq \begin{cases} \min_{\partial V} F & \text{se } \min \varphi \leq 0 \\ \min_{\partial V} F + \min \varphi = m & \text{se } \min \varphi \geq 0 \end{cases}$$

Além disso,

$$G_t(x) = F(x) + t\varphi(x) \leq \begin{cases} F(x) & \text{se } \varphi(x) \leq 0 \\ F + \varphi(x) = m & \text{se } \varphi(x) \geq 0 \end{cases}$$

Analogamente,  $\tilde{w}_t$  tem limitação por baixo da altura uniforme em  $t$ .

Mais do que isso,  $w_t$  e  $\tilde{w}_t$  estão sempre situadas entre  $w$  e  $\tilde{w}$ , até a fronteira de  $B$ , o que nos dá a certeza de que seus gradientes também ficam uniformemente limitados em  $\partial B_l$ . Desta forma, podemos aplicar o método da continuidade e encontrar  $u_l \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(B_l)$  solução de (3.16).

Tendo a seqüência  $u_l$  em mãos, precisamos fazer  $l$  tender a infinito e ter certeza de que o limite existe e é solução de (1.1). Fazemos isso utilizando alguns argumentos de compacidade e regularidade presentes na teoria de EDPs. Utilizamos mais uma vez diversos teoremas de [GT].

Uma vez que temos  $u_l$  solução do problema em  $B_l$ ,  $u_l$  satisfaz  $\tilde{w} \leq u_l \leq w$ , e, portanto, temos uma limitação uniforme em  $l$  para  $|u_l|_{1,B_l}$ . Desta forma, por Ascoli-Arzelá, podemos extrair uma seqüência convergente em compactos de  $B$  a uma função  $u$  contínua em  $B$ . Como temos as barreiras em  $\bar{B}$  que satisfazem também  $\tilde{w}|_{\partial B} = w|_{\partial B} = \psi$ ,  $u$  se estende continuamente a  $\bar{B}$  e  $u|_{\partial B} = \psi$ .

Agora precisamos mostrar que  $u \in C^{2,\alpha}(B)$  e  $Q(u) = 0$ .

Fixe  $K$  um compacto de  $B$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $K$  é uma bola geodésica de raio  $r_K$ . Existe  $l_K$  tal que  $l \geq l_K \Rightarrow K \subset B_l$  e, portanto,  $u_l$  está definida em  $K$ . Denotamos por  $\tilde{K}$  a bola de raio  $r_K/2$  centrada no mesmo ponto que  $K$ .

O Teorema 13.6 de [GT] nos dá que existem  $\beta_l = \beta_l(n, |u_l|_{1,K}, \text{coeficientes de } Q)$  e  $C_l = C_l(n, |u_l|_{1,K}, \text{coeficientes de } Q)$  tais que

$$\sup_{x,y \in \tilde{K}, x \neq y} \frac{|Du_l(x) - Du_l(y)|}{|x - y|^{\beta_l}} =: [Du_l]_{\beta_l, \tilde{K}} \leq C_l \left(\frac{r_K}{2}\right)^{-\beta_l}.$$

Uma vez que temos uma limitação uniforme para  $|u_l|_{1,B_l}$  em todo  $B$ , e em particular em  $K$ , temos que  $\beta_l$  e  $C_l$  podem ser escolhidos uniformemente para todos os valores de  $l \geq l_K$ . Então existem  $\beta$  e  $C$  dependendo de  $n$ ,  $\sup_l |u_l|_{1,K}$  e dos coeficientes de  $Q$  tais que (renomeando sempre constantes por  $C$ )

$$|u_l|_{1,\beta,\tilde{K}} \leq C \left(\frac{r_K}{2}\right)^{-\beta} =: C.$$

Agora defina os operadores lineares uniformemente elípticos em  $C^{2,\delta}(\tilde{K})$ , onde  $\delta := \min\{\alpha, \beta\}$ :

$$L_l(h) := \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} h}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} u_l|^2}}.$$

Como  $u_l \in C^{1,\delta}(B_l)$ , os coeficientes de  $L_l$  pertencem a  $C^{0,\delta}(B_l)$ . Além disso,  $u_l$  satisfaz  $L_l(u_l) = 0$ . Por fim, notamos também que a família  $L_l$ , de acordo com o feito até agora, tem coeficientes uniformemente limitados na norma  $C^{0,\delta}$ .

Utilizando o Teorema 6.2 (lembrando a observação dada em (4.17)”) de [GT], obtemos que

$$|u_l|_{2,\delta,\hat{K}} \leq C,$$

onde  $\hat{K}$  é agora a bola de raio  $r_K/4$ , centrada no mesmo ponto que  $K$ .



Então, a menos de subsequência, temos que  $u_l|_{\text{int } \hat{K}} \rightarrow u|_{\text{int } \hat{K}} \in \mathcal{C}^2(\text{int } \hat{K})$  na norma  $\mathcal{C}^2$  e também que  $Q(u) = 0$  em  $\text{int } \hat{K}$ . Usando a teoria de regularidade, temos que  $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\hat{K})$ . Como  $K$  é arbitrário, segue o resultado.

# Capítulo 4

## O Plano Hiperbólico

O plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  é o primeiro exemplo de variedade riemanniana de curvatura seccional negativa. Além disso,  $\mathbb{H}^2$  é completo e não é muito difícil verificar, como fazemos na Seção 4.1.3, que a terceira hipótese do Teorema 1.0.1 também é satisfeita.

O Teorema 1.0.1 foi demonstrado para o caso particular  $M = \mathbb{H}^2$  em 2002 por B. Nelli e H. Rosenberg em [NR] usando técnicas diferentes daquelas que apresentamos no Capítulo 3 para provar o caso geral. Trazemos aqui uma demonstração “parecida” com a do caso geral com o objetivo de recuperar alguma intuição geométrica, já que trabalhar com desigualdades envolvendo conexões riemannianas, esferas geodésicas, curvatura seccional variável, entre tantos outros elementos bastante abstratos, nem sempre consegue nos dar uma idéia do comportamento geométrico da demonstração.

Começamos com alguns resultados sobre  $\mathbb{H}^2$ . Provamos então que a terceira hipótese do teorema é satisfeita. A seguir, reformulamos convenientemente os lemas necessários e por fim, concluímos a demonstração. Procuramos sempre fazer comentários que nos dão a “intuição” desejada.

### 4.1 Alguns resultados sobre $\mathbb{H}^2$

Para trabalharmos com o caso particular  $M = \mathbb{H}^2$ , precisamos fazer uso de alguns fatos, nem todos muito conhecidos, sobre ele. Esta seção dedica-se a estudar tais resultados.

### 4.1.1 Apresentando o plano hiperbólico: os modelos do hiperbolóide e do disco

Embora nosso trabalho seja praticamente de Geometria Riemanniana, para introduzir o espaço hiperbólico faremos uso de um pouquinho de geometria pseudo-riemanniana. Se acreditarmos no Teorema de Levi-Civita (ou seja, da existência de uma conexão, agora *pseudo-riemanniana*, simétrica e compatível com a pseudo-métrica) para variedades pseudo-riemannianas, apresentar o espaço hiperbólico fica muito mais simples do que fazer as contas utilizando parametrizações, por exemplo.

O que diferencia as variedades riemannianas das pseudo-riemannianas é que no lugar de termos para cada ponto uma *forma bilinear simétrica positiva-definida* (também conhecida por *produto interno!*) definida no espaço tangente a esse ponto, passamos a ter associada a cada ponto  $x$  uma forma bilinear simétrica *não degenerada* em  $T_x M$ , que denotaremos por  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_x$ , ou seja, uma forma bilinear simétrica que satisfaz a seguinte propriedade:

$$u \in T_x M, \langle\langle u, v \rangle\rangle_x = 0 \forall v \in T_x M \Rightarrow u = 0.$$

Isto é equivalente a dizer que a matriz da forma quadrática associada à forma bilinear  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_x$  (que é simétrica) não possui autovalores nulos.

Introduzimos em  $\mathbb{R}^3$  a seguinte estrutura pseudo-riemanniana: se  $u = (u_1, u_2, u_3)$  e  $v = (v_1, v_2, v_3)$ , então

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3.$$

Munido desta pseudo-métrica,  $\mathbb{R}^3$  passa a ser conhecido como *Espaço de Lorentz* e denotado por  $\mathbb{L}^3$ . Omitimos o subíndice na definição da pseudo-métrica porque ela é a mesma em todos os pontos.

Como conseqüência da independência da métrica com relação ao ponto, temos um primeiro resultado que será bastante útil: a conexão de  $\mathbb{L}^3$  coincide com a derivação usual do  $\mathbb{R}^3$ , o que facilita consideravelmente nossas contas. Afirmamos que a conexão  $\bar{\nabla}$  de Levi-Civita de  $\mathbb{L}^3$  satisfaz  $\bar{\nabla}_Y X = Y(X)$ . De fato, basta observar que se  $g_{ij}$  são os coeficientes da pseudo-métrica e  $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ , então os símbolos de Christoffel da conexão são dados por (veja [dC1], por exemplo)

$$\langle\langle \bar{\nabla}_{E_i} E_j, E_m \rangle\rangle =: \Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \{E_i(g_{jk}) + E_j(g_{ki}) - E_k(g_{ij})\} g^{km}.$$

Podemos escolher a parametrização identidade de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{L}^3$ . Neste caso,  $g_{11} = g_{22} = 1, g_{33} = -1$  e  $g_{ij} = 0, i \neq j$ . Então os símbolos de Christoffel são todos nulos.

Daí se  $X = \sum a_i E_i$ ,  $Y = b_j E_j$ , temos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_Y X, E_k \rangle &= \left\langle \sum_{ij} \{b_j E_j (a_i) E_i + a_i b_j \bar{\nabla}_{E_j} E_i\}, E_k \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{ij} b_j E_j (a_i) E_i, E_k \right\rangle + \sum_{ij} a_i b_j \langle \bar{\nabla}_{E_j} E_i, E_k \rangle \\ &= \left\langle \sum_j b_j E_j \left( \sum_i a_i E_i \right), E_k \right\rangle = \langle Y(X), E_k \rangle \end{aligned}$$

o que mostra a afirmação.

Defina o seguinte conjunto:

$$H := \{x \in \mathbb{L}^3; \langle x, x \rangle = -1; x_3 > 0\}.$$

$H$  funciona como uma esfera no espaço de Lorentz, e o interessante é que ela pode ser visualizada em  $\mathbb{R}^3$ : nada mais é que a parte superior do hiperbolóide de duas folhas  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1\}$ . Note ainda que  $H$  pode ser visto como uma componente conexa da imagem inversa do valor regular  $-1$  pela função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ , logo  $H$  é uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ .

Induzimos em  $H$  a pseudo-métrica de  $\mathbb{L}^3$ . Surpreendentemente  $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$  restrita a  $H$  passa a ser uma métrica! De fato:

Seja  $x \in H$ . Então  $\eta(x) := x$  é um vetor normal a  $H$  em  $x$ : se  $u \in T_x H$  e  $U$  é uma extensão de  $u$  em uma vizinhança de  $x$ , então

$$0 = U \langle \eta, \eta \rangle = 2 \langle \bar{\nabla}_u \eta, \eta \rangle,$$

onde  $\bar{\nabla}$  é a conexão pseudo-riemanniana de  $\mathbb{L}^3$ . Mas como esta coincide com a derivação usual do  $\mathbb{R}^3$  e  $\eta = \text{id}$ , então  $\bar{\nabla}_u \eta = D\eta(x)(u) = \text{id}(u) = u$ . Ou seja,  $0 = \langle u, \eta \rangle$ . Assim,  $\eta \perp T_x H$ . Então  $\eta$  é normal a  $H$ . Além disso,  $\langle \eta, \eta \rangle = -1$ .

Afirmamos que  $\langle u, u \rangle \geq 0 \forall u \in T_x H$ . De fato, note que

$$\langle \langle u, v \rangle \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} u, v \right\rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

Dados  $u \in T_x H$  e  $\eta \in \{T_x H\}^\perp$  não nulos,  $\eta$  unitário, eles geram um plano em  $\mathbb{R}^3$ . Note que  $u$  não é paralelo a  $e_3 = (0, 0, 1)$  pois  $u \in T_x H$  e  $e_3$  nunca pertence a algum plano tangente a  $H$  (de fato, se pertencesse a  $T_y H$ , teríamos  $y$  com terceira

coordenada nula, e, portanto,  $\langle\langle y, y \rangle\rangle \geq 0 > -1$ , absurdo!). Escolha no plano gerado por  $u$  e  $\eta$  um vetor  $v$  ortogonal a  $e_3$  (e conseqüentemente  $Av = v$ , onde  $A$  é a matriz que dá o produto interno), unitário (em  $\mathbb{R}^3$ ) e não ortogonal a  $u$ . Escreva  $v = \alpha u + \beta \eta$ . Então

$$1 = \langle v, v \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle Av, v \rangle_{\mathbb{R}^3} = \alpha^2 \langle Au, u \rangle_{\mathbb{R}^3} + 2\alpha\beta \langle Au, \eta \rangle + \beta^2 \langle A\eta, \eta \rangle = \alpha^2 \langle\langle u, u \rangle\rangle - \beta^2$$

$$\Rightarrow \langle\langle u, u \rangle\rangle = \frac{1 + \beta^2}{\alpha^2} > 0.$$

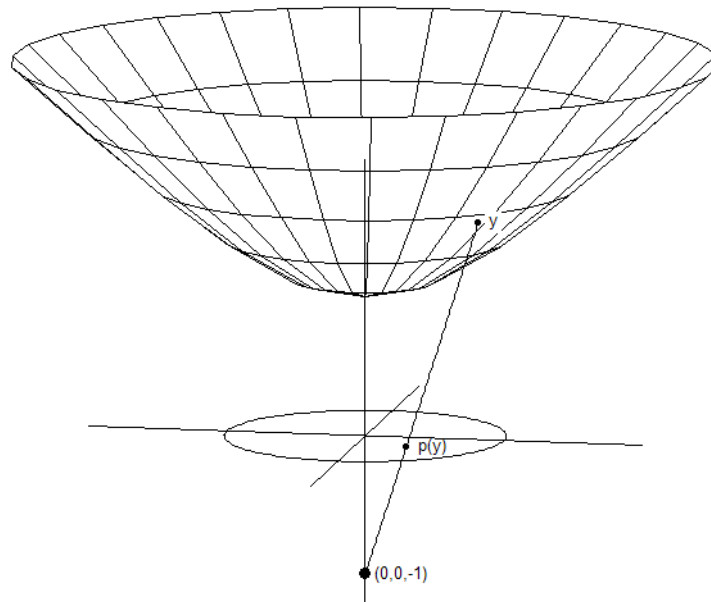
Denotamos por  $\mathcal{H}^2$  a variedade (agora riemanniana) obtida desta maneira. Em alguns momentos será necessário recorrer a este modelo do plano hiperbólico para fazer algumas contas, mas na maior parte do tempo estaremos trabalhando com outro modelo de  $\mathbb{H}^2$ : o modelo do disco.

Para isso consideramos a seguinte aplicação:

$$\pi : \mathcal{H}^2 \rightarrow D^2$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{(x_1, x_2)}{1 + x_3}.$$

Geometricamente, podemos entender essa aplicação como a projeção da componente superior do hiperbolóide no disco segundo o ponto  $(0, 0, -1)$ . Veja a figura a seguir:



Dotado da métrica induzida pela aplicação  $\pi$ ,  $D^2$  é isométrico a  $\mathcal{H}^2$  e, portanto, é outro modelo do plano hiperbólico. Passamos a denotá-lo por  $\mathbb{D}^2$ .

### 4.1.2 Geodésicas

**Proposição 4.1.1.** *Sejam  $x \in \mathcal{H}^2$  e  $v \in T_x\mathcal{H}$ , com  $\langle v, v \rangle = 1$ . Então a geodésica partindo de  $x$  com velocidade  $v$  é dada por*

$$\begin{aligned}\gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{H} \subset \mathbb{L}^3 \\ \gamma(t) &= (\cosh t)x + (\sinh t)v.\end{aligned}$$

Na proposição acima vemos  $x$  e  $v$  como triplas ordenadas em  $\mathbb{L}^3$ , mas como é ver que  $\langle \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle \rangle = -1$  e, portanto,  $\gamma(t) \in \mathcal{H} \forall t \in \mathbb{R}$ . Além disso, tais geodésicas estão definidas em toda reta porque  $\mathbb{H}^2$  é completa.

**dem.:** Precisamos verificar que  $\frac{D}{dt}\gamma'(t) \equiv 0$ , onde a derivada covariante é tomada na própria curva  $\gamma$ , ou seja, precisamos verificar que  $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$ , sendo  $\nabla$  a componente tangencial de  $\bar{\nabla}$ . Como esta coincide com a derivação usual do  $\mathbb{R}^3$ , vamos apenas derivar duas vezes e fazer a projeção.

$$\gamma'(t) = (\sinh t)x + (\cosh t)v \Rightarrow \bar{\nabla}_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = \gamma''(t) = (\cosh t)x + (\sinh t)v = \gamma(t).$$

Agora note que, conforme o que provamos na seção anterior,

$$\langle \langle \gamma(t), u \rangle \rangle = 0 \forall u \in T_{\gamma(t)}\mathcal{H}^2.$$

Assim,  $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) =$  componente tangencial de  $\gamma''(t) = 0$  e, portanto,  $\gamma$  é geodésica. Além disso,  $\gamma(0) = x$  e  $\gamma'(0) = v$ , o que conclui a demonstração. ■

**Corolário 4.1.2.** *As geodésicas partindo de  $p = (0, 0) \in \mathbb{D}^2$  e com velocidade inicial  $u \in T_p\mathbb{D}^2$ ,  $|u|_p = 1$  são dadas por*

$$t \mapsto \operatorname{tgh} \left( \frac{t}{2} \right) u.$$

**dem.:** Observe que  $p$  é imagem de  $(0, 0, 1)$  pela projeção  $\pi$ . Assim, basta projetar as geodésicas de  $\mathcal{H}$  partindo de  $(0, 0, 1)$  em  $\mathbb{D}^2$ . Se  $u \in T_{(0,0,1)}\mathcal{H}^2$ , então  $u = (u_1, u_2, 0)$  e é naturalmente identificado com  $(u_1, u_2) \in T_p\mathbb{D}^2$ . A geodésica partindo de  $(0, 0, 1)$  com velocidade inicial  $u$  é dada por  $(u_1 \sinh t, u_2 \sinh t, \cosh t)$ . Então sua projeção em  $\mathbb{D}^2$  é dada por

$$\frac{(u_1 \sinh t, u_2 \sinh t)}{1 + \cosh t} = \frac{\sinh t}{1 + \cosh t} (u_1, u_2) = \frac{\sinh t}{1 + \cosh t} u.$$

Mas

$$\frac{\sinh t}{1 + \cosh t} = \frac{2 \sinh(t/2) \cosh(t/2)}{2 \cosh^2(t/2)} = \operatorname{tgh} \left( \frac{t}{2} \right).$$

■

### 4.1.3 Verificando a terceira hipótese: transformações conformes e o grupo de isometrias

A verificação da terceira hipótese é bastante simples. Pensamos novamente no modelo do hiperbolóide.

Para  $a, t \in \mathbb{R}$ , considere as transformações em  $\mathbb{R}^3$  dadas pelas matrizes

$$R_{at} := \begin{bmatrix} \cos at & \operatorname{sen} at & 0 \\ -\operatorname{sen} at & \cos at & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elas preservam a pseudo-métrica  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  em  $\mathbb{L}^3$  (isso verifica-se diretamente da definição). Em particular, como a métrica em  $\mathcal{H}^2$  é induzida por esta pseudo-métrica, obtemos que a restrição ao hiperbolóide da transformação dada acima é uma isometria em  $\mathcal{H}^2$ . Projetando em  $\mathbb{D}^2$ , obtemos rotações centradas na origem. Desta forma, tais rotações são isometrias de  $\mathbb{D}^2$  deixando  $p$  fixo.

Na verdade, enxergando  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  (“*O caminho mais curto entre duas verdades do campo real passa através do campo complexo.*”, J. Hadamard) e usando alguns resultados bastante conhecidos da Variável Complexa é possível provar que não só as rotações de  $\mathbb{D}^2$  que deixam  $(0, 0)$  fixo são isometrias como *esgotam todas as isometrias que o deixam fixo*. O leitor mais curioso pode dar uma olhada em algum livro de Variável Complexa e combinar os resultados com algumas proposições e exercícios de [dC1].

O grupo de rotações centradas na origem age de forma 2-pontos homôlogia  $\frac{1}{2}$  nos círculos geodésicos de  $\mathbb{D}^2$ . Sejam  $x, y \in S_r$  e  $V \in T_x S_r$  e  $W \in T_y S_r$ . Observe que  $V$  e  $W$  são tangentes a círculos, portanto “apontam” no sentido horário ou no sentido anti-horário, e que  $|W| = \lambda|V|$ ,  $\lambda > 0$ . Se  $V$  e  $W$  “apontarem” para o mesmo “sentido”, escolha  $a = \lambda$ ; se apontarem para sentidos contrários, escolha  $a = -\lambda$ , e para um  $t_0$  apropriado vale que  $R_{at_0}$  leva  $x$  em  $y$  e sua derivada leva  $V$  em  $W$ .

Desta forma, a terceira hipótese do Teorema 1.0.1 é satisfeita por  $\mathbb{D}^2$  e podemos prosseguir.

## 4.2 Reformulando os Lemas

Na demonstração do Teorema 1.0.1, utilizamos o difeomorfismo

$$Z : B \rightarrow M, \quad Z(x) = \exp_p \left( \frac{x}{1 - \|x\|} \right)$$

para identificar  $M$  e  $B$  isometricamente. Esse difeomorfismo não tem nada de especial. Note que ele é a composição do difeomorfismo  $v \mapsto v/(1 - \|v\|)$  com a aplicação exponencial, que é um difeomorfismo global, via Teorema de Hadamard. O primeiro difeo, que mapeia  $B$  em  $T_pM$ , é aqui convenientemente substituído por

$$v \mapsto 2 \operatorname{arctgh} \|v\| \frac{v}{\|v\|}.$$

A razão disso é que se tomamos o modelo do disco para  $\mathbb{H}^2$  temos que a aplicação exponencial no ponto  $p = (0, 0)$  é dada por

$$\exp_p(v) = \operatorname{tgh} \left( \frac{\|v\|}{2} \right) \frac{v}{\|v\|}.$$

Desta forma, fazendo a composição do novo difeomorfismo pela aplicação exponencial, obtemos a aplicação identidade, que é a maneira canônica de identificar  $B$  com  $\mathbb{H}^2$ .

Essa escolha de um outro difeomorfismo faz com que precisemos fazer algumas adaptações nos lemas que precedem a demonstração do teorema, e é o que será feito a partir de agora. Alguns lemas se tornam triviais e por isso omitiremos a demonstração dos mesmos. Note que agora  $B = \mathbb{D}^2$ , então a aplicação  $\exp_0 : T_0B \rightarrow B$  coincide com  $\exp_p : T_p\mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ . Utilizaremos a notação  $\exp_p$  para evitar confusões do ponto  $(0, 0) \in \mathbb{D}^2$  com o vetor nulo. Além disso, a notação  $\|\cdot\|$  será utilizada tanto para denotar a norma de vetores em  $T_p\mathbb{D}^2$  quanto para denotar a distância euclidiana de pontos de  $\mathbb{D}^2$  à origem.

**Lema 4.2.1.**

$$\exp_p(su) = \operatorname{tgh} \left( \frac{s}{2} \right) u, \quad \forall u \in T_p\mathbb{D}^2, \|u\| = 1, \quad \forall s \in [0, \infty).$$

**Lema 4.2.2.** *Seja  $d$  a distância não euclidiana em  $\mathbb{D}^2$ . Então*

$$\|x\| = \operatorname{tgh} \left( \frac{d(x, p)}{2} \right).$$

**dem.:** Note que  $x = \exp_p(d(x, p)u)$  para algum  $u \in T_pM$  unitário. Então

$$\|x\| = \left\| \operatorname{tgh} \left( \frac{d(x, p)}{2} \right) \right\| = \operatorname{tgh} \left( \frac{d(x, p)}{2} \right).$$

■

**Novas notações:** Seja  $r \in (0, 1)$  Então denotamos por  $S_r$  círculo geodésico de raio  $2 \operatorname{arctgh} r$ , que coincide com o círculo euclidiano de raio  $r$ . Denotaremos por  $\bar{S}_r$  o



círculo euclidiano em  $T_p M$  de raio  $2 \operatorname{arctgh} r$ , ou seja, é aquele que é levado em  $S_r$  pela aplicação exponencial. Finalmente, mantemos a notação  $\mu(x) := |x|$  para a norma de  $x$  proveniente da métrica riemanniana não euclidiana de  $\mathbb{D}^2$ .

**Lema 4.2.3.**

$$\mu(x) = \frac{2\|x\|}{1 - \|x\|^2}$$

**dem.:** Sejam  $x \in \mathbb{D}^2$  com  $\|x\| = r$  e

$$\gamma(s) = \exp_p \left( 2s \operatorname{arctgh} r \frac{x}{r} \right) = \operatorname{tgh} (s \operatorname{arctgh} r) \frac{x}{r}.$$

Então  $\gamma$  é geodésica com velocidade inicial (e, portanto, velocidade)  $2 \operatorname{arctgh} r$  e tal que

$$\gamma(1) = x \text{ e } \gamma'(1) = \operatorname{sech}^2(\operatorname{arctgh} r) \operatorname{arctgh} r \frac{x}{r}.$$

Notando que  $\operatorname{sech}^2(\operatorname{arctgh} r) = 1 - r^2$ , obtemos

$$\gamma'(1) = \left( \frac{1 - r^2}{r} \operatorname{arctgh} r \right) x \Rightarrow 2 \operatorname{arctgh} r = |\gamma'(1)| = \frac{1 - r^2}{r} \operatorname{arctgh} r |x|.$$

Isolando  $|x|$ , obtemos o resultado.

Outra maneira de obter este resultado (mais intuitiva) é notando que o produto interno em  $y \in \mathbb{D}^2$  é dado por

$$\langle u, v \rangle_{y \in \mathbb{D}^2} = \frac{4}{(1 - \|y\|^2)^2} \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

onde  $\|y\|$  é a norma euclidiana de  $y$ . Agora basta notar que o vetor  $x$  satisfaz  $\langle x, x \rangle_{\mathbb{R}^2} = \|x\|^2$ , obtendo o resultado. ■

**Lema 4.2.4.**

$$\inf_{r>0} (-H_r) \geq 1.$$

No lugar de demonstrar a desigualdade, vamos aproveitar para demonstrar um fato mais forte:

$$H_r = -\operatorname{cotgh}(2 \operatorname{arctgh} r).$$

Tal fato é utilizado também na demonstração do teorema principal, com a única diferença que passamos a trabalhar com dimensão  $n$  no lugar de dimensão 2. Faremos a demonstração apenas para dimensão 2 porque isso facilita a notação. No entanto, os passos são os mesmos para  $n$  qualquer. Reformulamos então o lema:

**Lema 4.2.4:** A curvatura média  $H_r$  de  $S_r$  no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  é dada por

$$H_r = -\operatorname{cotgh}(2 \operatorname{arctgh} r).$$

**dem.:** Para demonstrar este resultado, vamos utilizar o modelo do hiperbolóide  $\mathcal{H}^2$ , pois assim podemos calcular conexões como se estivéssemos derivando em  $\mathbb{R}^3$ , e não é preciso dizer que isto é uma grande vantagem para qualquer um!

As geodésicas em  $\mathcal{H}^2$  partindo de  $o = (0, 0, 1)$ , que é o ponto que corresponde à origem no modelo do disco, têm a seguinte expressão: se  $u = (u_1, u_2, 0) \in \mathbb{L}^3$  é unitário (note que este vetor é tangente ao hiperbolóide em  $o$ ), então

$$\gamma(t) = (u_1 \sinh t, u_2 \sinh t, \cosh t)$$

é uma geodésica partindo de  $o$  com velocidade  $u = (u_1, u_2, 0)$ . Logo se  $y = \exp_o(su) = (u_1 \sinh s, u_2 \sinh s, \cosh s) \in \mathcal{H}^2$  então o vetor normal a  $\mathcal{H}^2$  em  $y$  é dado por

$$\begin{aligned} \eta(y) &= \frac{(u_1 \cosh s, u_2 \cosh s, \sinh s)}{\langle\langle (u_1 \cosh s, u_2 \cosh s, \sinh s), (u_1 \cosh s, u_2 \cosh s, \sinh s) \rangle\rangle} \\ &= \frac{(u_1 \cosh s, u_2 \cosh s, \sinh s)}{\cosh^2 s - \sinh^2 s} = (u_1 \cosh s, u_2 \cosh s, \sinh s). \end{aligned}$$

A curvatura média de  $\mathbb{H}^2$  em  $y$  com relação a este normal é dada por  $-\langle \bar{\nabla}_{E_2} \eta, E_2 \rangle$  onde  $E_2$  é vetor unitário ortogonal a  $\eta$ . No caso geral, esta expressão é substituída por um somatório envolvendo  $n - 1$  vetores ortonormais e ortogonais a  $\eta$ . Aqui parametrizamos uma curva que tem  $E_2$  como tangente, isso em dimensão maior começa a complicar notação, mas a idéia é a mesma: parametrizar a esfera unitária em  $T_o \mathcal{H}^2$ , que no nosso caso é um círculo, e tomar vetores tangentes.

Observe que como  $\bar{\nabla}$  é a derivação usual do  $\mathbb{R}^3$ , então

$$(\bar{\nabla}_{E_2} \eta)(y) = \left. \frac{d}{dt} \eta(\alpha(t)) \right|_{t=0},$$

onde  $\alpha$  é uma curva com  $\alpha(0) = y$  e  $\alpha'(0) = E_2$ . No nosso caso, podemos tomar

$$\alpha(t) = \frac{(\cos(\theta + t) \sinh s, \sin(\theta + t) \sinh s, \cosh s)}{\sinh s},$$

onde  $u = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ . Então,

$$\eta(\alpha(t)) = \frac{(\cos(\theta + t) \cosh s, \sin(\theta + t) \cosh s, \sinh s)}{\sinh s}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{d}{dt} \eta(\alpha(t)) \right|_{t=0} = \frac{(-\operatorname{sen} \theta \cosh s, \cos \theta \operatorname{senh} s, 0)}{\operatorname{senh} s}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle (\bar{\nabla}_{E_2} \eta), E_2 \rangle (y) &= \left\langle \frac{(-\operatorname{sen} \theta \cosh s, \cos \theta \cosh s, 0)}{\operatorname{senh} s}, \frac{(-\operatorname{sen} \theta \operatorname{senh} s, \cos \theta \operatorname{senh} s, 0)}{\operatorname{senh} s} \right\rangle \\ &= \frac{\cosh s \operatorname{senh} s}{\operatorname{senh}^2 s} \Rightarrow \langle (\bar{\nabla}_{E_2} \eta), E_2 \rangle (y) = \frac{\cosh s}{\operatorname{senh} s} = \operatorname{cotgh} s. \end{aligned}$$

Agora note que se  $y \in S_r$ , então  $s = 2 \operatorname{arctgh} r$ , o que conclui a demonstração. ■

**Obs.:** Já que falamos na curvatura média  $H_r$ , vejamos que é possível obter uma expressão bem simples para ela:

$$H_r = -\operatorname{cotgh}(2 \operatorname{arctgh} r) = -\frac{e^{\ln(\frac{1+r}{1-r})} + e^{-\ln(\frac{1+r}{1-r})}}{e^{\ln(\frac{1+r}{1-r})} - e^{-\ln(\frac{1+r}{1-r})}} = -\frac{\frac{1+r}{1-r} + \frac{1-r}{1+r}}{\frac{1+r}{1-r} - \frac{1-r}{1+r}} = -\frac{1+r^2}{2r}. \quad (4.1)$$

Aproveitando que já falamos nessa identidade trigonométrica hiperbólica, observamos também a seguinte identidade, utilizada no próximo resultado:

$$\operatorname{senh}(2 \operatorname{arctgh} r) = \frac{e^{\ln(\frac{1+r}{1-r})} - e^{-\ln(\frac{1+r}{1-r})}}{2} = \frac{\frac{1+r}{1-r} - \frac{1-r}{1+r}}{2} = \frac{2r}{1-r^2}. \quad (4.2)$$

**Lema 4.2.5.** *Sejam  $r \in (0, 1)$  e  $X, Y \in \mathcal{G}$  tais que  $|X|_{S_r}, |Y|_{S_r} \leq 1$ . Então,*

$$|X|_{S_{\operatorname{tgh} 1/2}} \leq \|d(\exp_p)\| \frac{1}{\operatorname{senh}(2 \operatorname{arctgh} r)} = \|d(\exp_p)\| \frac{1-r^2}{2r}; \quad (4.3)$$

$$|\nabla_Y X|_{S_{\operatorname{tgh} 1/2}} \leq \frac{(1-r^2)^2}{4r^2} (\|D^2(\exp_p)\| + \|d(\exp_p)\|); \quad (4.4)$$

$$|\nabla_Y X|_{S_r} \leq \|d(\exp_p)\| \frac{1-r^2}{2r}. \quad (4.5)$$

**dem.:** A demonstração é idêntica à do caso geral; apenas substituímos  $\frac{r}{1-r}$  por  $2 \operatorname{arctgh} r$  e utilizamos a identidade (4.2). ■

**Obs.:** Para provar (4.5), não precisamos utilizar o resultado de [MS]; mais uma vez podemos voltar ao modelo do hiperbolóide, onde enxergamos  $X$  e  $Y$  como campos de Killing definidos em  $\mathbb{L}^3$ : são matrizes antissimétricas  $3 \times 3$ . Ou seja, são da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -c & -b & 0 \end{bmatrix}.$$

Como tais campos devem ter trajetórias que deixam fixo o ponto  $p \approx (0, 0, 1)$ , eles devem se anular em  $(0, 0, 1)$ , o que nos dá  $b = c = 0$ , ou seja, eles devem ser da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observamos também que se tomamos as matrizes  $R_{at}$  definidas anteriormente, derivamos em relação a  $t$  e calculamos em 0, o resultado é o mesmo.

A reformulação do Lema 3.4.1 é trivial; basta fazer  $n = 2$ .

**Lema 4.2.6.**

$$|\varphi|_{1,S_r} \leq \|d(\exp_p)\| \max_{S_{1/2}} |\text{grad } \varphi| \frac{1-r^2}{2r}; \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} |\varphi|_{2,S_r} &\leq 2 \left[ \|d(\exp_0)\|^2 \max_{S_{1/2}} |D\text{grad } \varphi| \right. \\ &\quad \left. + (\|D^2(\exp_0)\| + \|d(\exp_0)\| + \|d(\exp_0)\|^2) \max_{S_{1/2}} |\text{grad } \varphi| \right] \frac{(1-r^2)^2}{4r^2} \\ &\quad . \end{aligned} \quad (4.7)$$

**dem:** Novamente a demonstração é análoga ao caso geral, por isso a omitimos aqui. ■

### 4.3 A construção de barreiras

Embora estejamos trabalhando na bola unitária em ambos os casos, a métrica agora é outra. A mudança de métrica implica na necessidade de alterar também as barreiras.

Lembramos que a terceira hipótese do teorema nos garante que as esferas geodésicas são “homogêneas” e é isso que nos permite construir barreiras radiais. Observamos que a família de funções para o caso geral,  $F_h$ , é da forma  $F_h = h(1-r)$ . O fator  $(1-r)$  pode ser relacionado com a métrica em  $B$  da seguinte forma.

Considere  $x \in S_r$  (e não importa quem é  $x$ , somente que ele está em  $S_r$ !). O vetor  $x/\|x\|$  é unitário vendo  $B$  dentro de  $\mathbb{R}^n$ , enquanto que sua norma em  $T_x B$  é

$$\frac{|x|}{\|x\|} = \frac{\mu(x)}{r} = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

Então à medida que nos aproximamos de  $\partial_\infty B$ , os vetores euclidianamente unitários, normais às esferas centradas em 0, têm norma crescendo com velocidade  $1/(1-r)^2$ .

Observe que  $(1 - r)$  multiplicando  $h$  na barreira é exatamente a raiz quadrada do inverso desse crescimento!! Então para o caso particular  $M = \mathbb{D}^2$ , onde o crescimento é dado por  $1/(1 - r^2)$ , escolhamos  $F_h(x) = h\sqrt{1 - r^2}$  e, portanto, temos a família  $G_h : \overline{\mathbb{D}^2} \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$G_h(x) := h\sqrt{1 - r^2} + \varphi(x).$$

Mantemos a notação do caso geral, isto é,  $E_1 = E$  e  $E_2$  ortonormal a  $E$  em uma vizinhança de  $x$ , e geodésico em  $x$ , assim como as notações sem subíndice nem indicação do ponto  $x$ .

Como antes,

$$Q(G) = \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} F}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} G|^2}} + \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} \varphi}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} G|^2}}$$

e vamos calcular separadamente cada um dos termos.

**Lema 4.3.1.** *Para  $x \in S_r$ , temos*

$$E_1(F)(x) = -hr\sqrt{1 - r^2}$$

$$E_1(E_1(F))(x) = -h \left[ (1 - r^2)^{3/2} - r^2\sqrt{1 - r^2} \right]$$

**dem.:** Note que, mais uma vez,

$$E_1(F)(x) = dF_x(E_1(x)) = dF_x\left(\frac{1}{\mu(x)}x\right) = \frac{1 - r^2}{r}dF_x(x).$$

Escolha a curva

$$\gamma(s) = \exp_p\left(2s \operatorname{arctgh} r \frac{x}{r}\right) = \operatorname{tgh}(s \operatorname{arctgh} r) \frac{x}{r}$$

como no Lema 4.2.3. Neste caso  $\gamma(1) = x$  e

$$\gamma'(1) = \left(\frac{1 - r^2}{r} \operatorname{arctgh} r\right) x.$$

Assim, reescrevemos  $x \in T_x\mathbb{D}^2$  da seguinte forma:

$$x = \frac{r}{(1 - r^2) \operatorname{arctgh} r} \gamma'(1) \implies E_1(F)(x) = \frac{1 - r^2}{r \operatorname{arctgh} r} dF_x\left(\frac{r}{(1 - r^2) \operatorname{arctgh} r} \gamma'(1)\right)$$

e, portanto,

$$E_1(F)(x) = \frac{1}{\operatorname{arctgh} r} \left. \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \right|_{t=1}. \quad (4.8)$$

$F(\gamma(t)) = h\sqrt{1 - \|\gamma(t)\|^2}$  e  $\|\gamma(t)\|^2 = \operatorname{tgh}^2(t \operatorname{arctgh} r)$  nos dão que  $1 - \|\gamma(t)\|^2 = 1 - \operatorname{tgh}^2(t \operatorname{arctgh} r) = \operatorname{sech}^2(t \operatorname{arctgh} r)$  e, portanto,

$$F(\gamma(t)) = h\sqrt{\operatorname{sech}^2(t \operatorname{arctgh} r)} = h \operatorname{sech}(t \operatorname{arctgh} r).$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(\gamma(t)) &= -h \operatorname{tgh}(t \operatorname{arctgh} r) \operatorname{sech}(t \operatorname{arctgh} r) \operatorname{arctgh} r \\ \implies \frac{d}{dt}F(\gamma(t)) \Big|_{t=1} &= -hr(\operatorname{arctgh} r) \operatorname{sech}(\operatorname{arctgh} r) = -hr\sqrt{1-r^2} \operatorname{arctgh} r. \end{aligned}$$

Substituindo em (4.8), obtemos

$$E_1(F)(x) = -hr\sqrt{1-r^2}.$$

$E_1(E_1(F))$  pode ser calculado de maneira totalmente análoga a  $E_1(F)$ :

$$E_1(E_1(F))(x) = \frac{1}{\operatorname{arctgh} r} \frac{d}{dt}(E_1(F))(\gamma(t)) \Big|_{t=1},$$

mas  $(E_1(F))(\gamma(t)) = -h\|\gamma(t)\|\sqrt{1 - \|\gamma(t)\|^2} = -h \operatorname{tgh}(t \operatorname{arctgh} r) \operatorname{sech}(t \operatorname{arctgh} r)$  e então derivando em relação a  $t$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(E_1(F))(\gamma(t)) &= -h [\operatorname{sech}^3(t \operatorname{arctgh} r)(\operatorname{arctgh} r) \\ &\quad - \operatorname{sech}(t \operatorname{arctgh} r) \operatorname{tgh}^2(t \operatorname{arctgh} r)(\operatorname{arctgh} r)] \\ \implies \frac{d}{dt}(E_1(F))(\gamma(t)) \Big|_{t=1} &= -h(\operatorname{arctgh} r) ((1-r^2)^{3/2} - r^2\sqrt{1-r^2}). \end{aligned}$$

Assim,  $E_1(E_1(F))(x) = -h((1-r^2)^{3/2} - r^2\sqrt{1-r^2})$ . ■

**Lema 4.3.2.**

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 1} \frac{E_2(E_2(\varphi))}{(1 - \|x\|^2)^{3/2}} = 0.$$

Em particular, existe  $r_1 < 1$  tal que para  $x$  com  $\|x\| \geq r_1$ , vale

$$\left| \frac{E_2(E_2(\varphi))}{(1 - \|x\|^2)^{3/2}} \right| \leq 1.$$

**dem.:** Pelo Lema 4.2.6, temos que  $|E_2(E_2(\varphi))(x)| \leq C(\varphi) \frac{(1 - \|x\|^2)^2}{4\|x\|^2}$ . Basta dividir ambos os lados da desigualdade por  $(1 - \|x\|^2)^{3/2}$  que obtemos o resultado. ■

**Lema 4.3.3.**

$$\frac{(1 + |\text{grad } G|^2)^{3/2}}{(1 - r^2)^{3/2}} \text{div} \frac{\text{grad } F}{\sqrt{1 + |\text{grad } G|^2}} = \frac{-3h}{2} (1 + |\text{grad } G|^2) - h^3 r^2 \frac{1 + r^2}{2}.$$

**dem.:** Como no Lema 3.5.3, temos

$$\text{div} \frac{\text{grad } F}{\sqrt{1 + |\text{grad } G|^2}} = (1 + |\text{grad } G|^2)^{-3/2} [(1 + |\text{grad } G|^2) \text{div} \text{grad } F - E_1(F)^2 E_1(E_1(F))]$$

e também  $\text{div} \text{grad } F = E_1(E_1(F)) - E_1(F) H_{\|x\|}$ . Assim, substituindo e simplificando, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{div} \frac{\text{grad } F}{\sqrt{1 + |\text{grad } G|^2}} &= (1 + |\text{grad } G|^2)^{-3/2} [(1 + |\text{grad } \varphi|^2) (E_1(E_1(F)) \\ &\quad - E_1(F) H_{\|x\|}) - E_1(F)^3 H_{\|x\|}]. \end{aligned}$$

Substituindo pelas expressões obtidas no Lema 4.3.1 e chamando  $r = \|x\|$ , obtemos

$$\begin{aligned} &(1 + |\text{grad } G|^2)^{3/2} \text{div} \frac{\text{grad } F}{\sqrt{1 + |\text{grad } G|^2}} \\ &= (1 + |\text{grad } \varphi|^2) (-h(1 - r^2)^{3/2} + hr^2 \sqrt{1 - r^2} + hr \sqrt{1 - r^2} H_r) + h^3 r^3 (1 - r^2)^{3/2} H_r \end{aligned}$$

Agora usamos a expressão para  $H_r$  obtida em (4.1):

$$\begin{aligned} &-h(1 - r^2)^{3/2} + hr^2 \sqrt{1 - r^2} + hr \sqrt{1 - r^2} H_r \\ &= -h(1 - r^2)^{3/2} + h(r^2 + r H_r) \sqrt{1 - r^2} \\ &= -h(1 - r^2)^{3/2} + h \left( r^2 - \frac{1 + r^2}{2} \right) \sqrt{1 - r^2} \\ &= -h(1 - r^2)^{3/2} + h \left( \frac{r^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 - r^2} \\ &= -h(1 - r^2)^{3/2} - \frac{h}{2} (1 - r^2)^{3/2} = \frac{-3h}{2} (1 - r^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{(1 + |\text{grad } G|^2)^{3/2}}{(1 - r^2)^{3/2}} \text{div} \frac{\text{grad } F}{\sqrt{1 + |\text{grad } G|^2}} = \frac{-3h}{2} (1 + |\text{grad } \varphi|^2) - h^3 r^2 \frac{1 + r^2}{2}$$

como queríamos! ■

**Lema 4.3.4.**

$$\frac{(1 + |\text{grad } G|^2)^{3/2}}{(1 - \|x\|^2)^{3/2}} \text{div} \frac{\text{grad } \varphi}{\sqrt{1 + |\text{grad } G|^2}} = (1 + h^2 \|x\|^2 (1 - \|x\|^2)) \frac{E_2(E_2(\varphi))}{(1 - \|x\|^2)^{3/2}}.$$

Em particular, para  $\|x\| \geq r_1$ , temos

$$\frac{(1 + |\text{grad } G|^2)^{3/2}}{(1 - \|x\|^2)^{3/2}} \text{div} \frac{\text{grad } \varphi}{\sqrt{1 + |\text{grad } G|^2}} \leq 1 + h^2 \|x\|^2 (1 - \|x\|^2).$$

**dem.:** Como no lema do caso geral,

$$\operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} \varphi}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} G|^2}} = (1 + |\operatorname{grad} \varphi|^2)^{-3/2} (1 + |\operatorname{grad} F|^2) E_2(E_2(\varphi))$$

e então, substituindo a expressão de  $|\operatorname{grad} F|^2$ , obtemos a igualdade desejada.  $\blacksquare$

Agora juntando as desigualdades obtidas nos Lemas 4.3.3 e 4.3.4, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + |\operatorname{grad} G|^2)^{3/2}}{(1 - \|x\|^2)^{3/2}} \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} G}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} G|^2}}(x) \\ & \leq \frac{-3h}{2} (1 + |\operatorname{grad} \varphi|^2) - h^3 \|x\|^2 \frac{1 + \|x\|^2}{2} + 1 + h^2 \|x\|^2 (1 - \|x\|^2) \\ & = 1 - \frac{3h}{2} (1 + |\operatorname{grad} \varphi|^2) - h^2 \|x\|^2 \left( \frac{h}{2} + \frac{h\|x\|^2}{2} - 1 + \|x\|^2 \right). \end{aligned}$$

Para  $h \geq 2$ , temos

$$\frac{h}{2} + \frac{h\|x\|^2}{2} - 1 + \|x\|^2 \geq 0$$

e, então,

$$-h^2 \|x\|^2 \left( \frac{h}{2} + \frac{h\|x\|^2}{2} - 1 + \|x\|^2 \right) \leq 0.$$

Além disso,

$$1 - \frac{3h}{2} (1 + |\operatorname{grad} \varphi|^2) \leq 1 - \frac{3h}{2} \leq 1 - 3 = -2.$$

Logo, para  $h \geq 2$  e  $\|x\| \geq r_1$ , temos

$$\frac{(1 + |\operatorname{grad} G|^2)^{3/2}}{(1 - \|x\|^2)^{3/2}} \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} G}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} G|^2}}(x) \leq -2. \quad (4.9)$$

Note que  $h \geq 2$  já está superestimando  $h$ . Poderíamos obter  $h$  menor verificando qual é a maior raiz do polinômio em  $h$  (de grau 3 e com coeficiente líder negativo) acima.

Observamos também que as estimativas obtidas foram bem diferentes daquelas no caso geral. A mudança da métrica fez com que as estimativas ficassem mais fracas: o crescimento dos vetores euclidianamente unitários na norma de  $\mathbb{D}^2$  acompanhou o crescimento das barreiras bem mais de perto. No entanto, como temos uma expressão explícita para  $H_r$ , é possível encontrar com mais precisão qual o valor de  $h$  a partir do qual devemos começar.

Uma vez que temos (4.9), a demonstração para o plano hiperbólico segue com os mesmos argumentos finais que o caso geral, o que conclui a demonstração.



# Referências Bibliográficas

- [AB] Alexandrino, M. e Bettiol, R. G.: “*Introduction to Lie groups, adjoint action and its generalization*”. II Encontro Paulista de Geometria (2009).
- [ADR] Alías, L. J., Dajczer, M. e Ripoll, J.: “*A Bernstein-type theorem for Riemannian manifolds with a Killing field*”, disponível em [http://www.preprint.impa.br/FullText/370\\_Mon\\_Apr\\_24\\_09\\_09\\_52\\_BRST\\_2006/AliasDajczerRipollNoFormato.pdf](http://www.preprint.impa.br/FullText/370_Mon_Apr_24_09_09_52_BRST_2006/AliasDajczerRipollNoFormato.pdf)
- [BP] Benedetti, R. e Petronio, C. “*Lectures on Hyperbolic Geometry*”, Springer-Verlag (1992).
- [DHL] Dajczer, M.; Hinojosa, P. A.; Lira, J. H. S. “*Killing graphs with prescribed mean curvature.*” *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* **33** (2008), 231-248.
- [DR] Dajczer, M. e Ripoll, J. “*An extension of a theorem of Serrin to graphs in Warped products*”, *J. of Geometric Analysis* **15** (2)(2005), 195-205.
- [dC1] do Carmo, Manfredo Perdigão: “*Geometria Riemmanina*” 3ed. IMPA (2005).
- [dC2] do Carmo, Manfredo Perdigão: “*Geometria Diferencial de curvas e superfícies*”, SBM, 2ed. (2005).
- [dC3] do Carmo, Manfredo Perdigão: “*Superfícies Mínimas*” Rio de Janeiro: IMPA (1987).
- [EFR] do Espírito-Santo, N, Fornari, S. e Ripoll, J.: “*The Dirichlet problem for the minimal hypersurface equation in  $M \times \mathbb{R}$  with prescribed asymptotic boundary*”. a aparecer em *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (2010).
- [ER] Elbert, M. F. e Rosenberg, H. : “*Minimal graphs in  $M \times \mathbb{R}$* ”, *Annals of Global Analysis and Geometry* **34** (1) (2008).

- [H] Helgason, S.: “*Differential Geometry, Lie groups and symmetric spaces*”, Academic Press (1978).
- [GT] Gilbarg, D., Trudinger, N.: “*Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*”, Springer-Verlag (1998).
- [MR] Meeks, W. H., Rosenberg, H.: “*The theory of minimal surfaces in  $M \times \mathbb{R}$* ”, Comment. Math. Helv. **80** (2005).
- [MRR] Mazet, L., Rodríguez, M. M., Rosenberg, H.: “*The Dirichlet problem for the minimal surface equation with possible infinite boundary data over domains in a Riemannian surface*”, preprint.
- [MS] Moore, J.D, Schläfli R.: “*On equivariant embeddings*”, Math. Z. **173** (1980), 119-133.
- [NR] Nelli, B e Rosenberg, H.: “*Minimal surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* ”, Bull. Braz. Math. Soc. **33** (2002), 263-292.
- [SY] Schoen, R. e Yau, S-T: “*Lectures on Differential Geometry*”, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, Vol I, International Press (1994).
- [S] Spruck, J. “*Interior gradient estimates and existence theorems for constant mean curvature graphs in  $M^n \times \mathbb{R}$* ”, preprint.