Caminho: Um Grafo Determinado Pelo Seu Espectro.

Autor: Lucas Siviero Sibemberg
Orientadores: Luiz Emilio Allem e Vilmar Trevisan

Introdução

Na Teoria de Grafos, pode parecer fácil verificar se dois Grafos são (ou não) isomorfos, principalmente quando estes possuem poucos vértices, porém é muito difícil fazer isso para um grafo com muitos vértices. Neste trabalho apresentaremos o conceito de grafo determinado pelo seu espectro, onde uma de suas aplicações deixa mais fácil, em alguns casos, responder a pergunta: **Dados dois grafos, eles são isomorfos?**

Grafos

Definição 1: Um **grafo** é uma estrutura $G = G(V, E)$, constituída por um conjunto finito e não vazio V, que chamamos de vértices, e um conjunto E de arestas, em que cada aresta está associada à dois vértices.
Dados dois vértices do grafo se existir uma aresta entre eles, dizemos que eles são **adjacentes**.

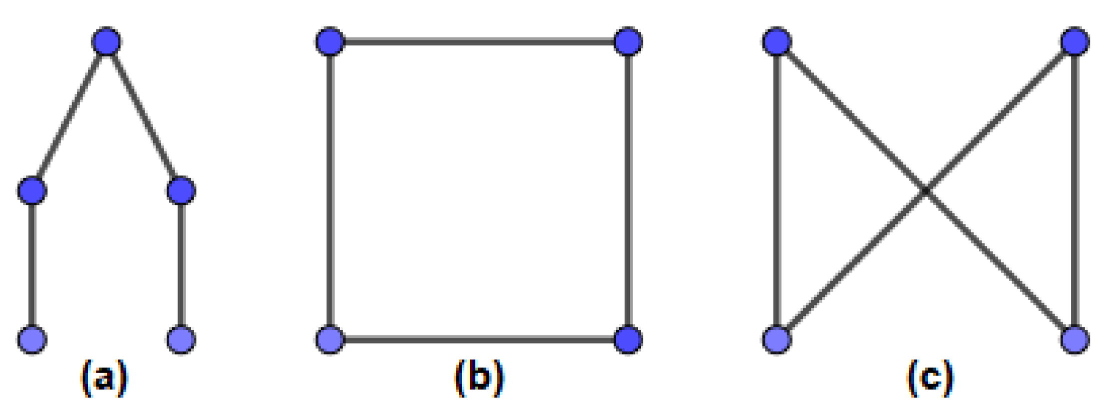

Figura 1: Exemplo de três grafos: (a) de 5 vértices e 4 arestas; (b) e (c) com 4 vértices e 4 arestas.

Isomorfismo

Na Teoria de Grafos há diversas formas de representarmos um mesmo grafo, isso acontecerá se, dados G_1 e G_2 grafos, pudermos obter um a partir de uma permutação dos vértices do outro, quando isso acontecer dizemos que existe um **isomorfismo** entre G_1 e G_2 e que estes são isomorfos.
Os grafos na Figura 1-(b) e Figura 1-(c) são isomorfos.

A Matriz de Adjacência

As matrizes são grandes aliadas aos Grafos, visto que, através delas, dado um grafo, podemos representá-lo como uma matriz. Dado um grafo G de n vértices uma maneira de representá-lo é através da **matriz de adjacência**, em que esta é uma matriz quadrada $n \times n$ tal que a entrada a_{ij} da matriz é 1, se v_i e v_j são adjacentes, e 0, caso contrário.

O Polinômio Característico

Definição 2: O **polinômio característico** da matriz de adjacência $A(G)$ é o $det(\lambda I - A(G))$, denotado por $p_G(\lambda)$.

λ é dito um autovalor de G se λ é raiz de $p_G(\lambda)$. Chamamos de **espectro de** G o conjunto dos autovalores de G e o denotamos por $Spect(G)$.

Definição 3: G_1 e G_2 são ditos co-espectrais quando $Spect(G_1) = Spect(G_2)$.

OBS: Dois grafos isomorfos sempre são co-espectrais, porém a recíproca nem sempre é verdade, como o exemplo que segue.

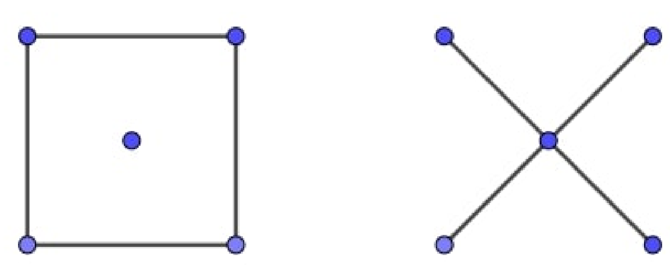

Figura 2: Ambos os grafos possuem espectro igual a $\{0^3, -2, +2\}$, porém não são isomorfos visto um possui um vértice isolado (que não possui arestas conectadas à ele) e o outro não.

Isso motiva a seguinte definição:
Definição 4: Dizemos que um grafo G é **determinado pelo seu espectro (DS)** se os grafos co-espectrais com G são isomorfos a G.

OBS: Se um grafo G é DS, notamos que dado qualquer outro grafo H basta verificar se o espectro de H é o mesmo de G para dizer se G e H são isomorfos. Uma tarefa muito mais fácil do que procurar um isomorfismo entre dois grafos.

O Caminho é Determinado pelo seu Espectro

Definição 5: Dizemos que há um **caminho** entre dois vértices u e v se existir uma sequência de vértices distintos começando em u e terminando em v, tal que cada termo da sequência é adjacente ao próximo.

Assim, chamamos de **ciclo** um caminho que começa e termina no mesmo vértice.

Um grafo é **conexo** se existir um caminho entre quaisquer dois vértices do grafo.

Agora possuímos os conceitos necessário para definir o grafo que chamamos de **Caminho**. Chamamos de **Caminho** de n vértices um grafo conexo sem ciclos. E denotamos por P_n. Na Fig. 1-(a) temos um exemplo de P_5.

A seguir enunciamos uma propriedade interessante sobre o Caminho.

Proposição: Seja G um grafo com n vértices, onde $Spect(G) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, são equivalentes:

(i) $G = P_n$;
(ii) $Spect(P_n) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$;
(iii) G não possui ciclos, com $tr A^4(G) = tr A^4(P_n)$, onde $A(G)$ e $A(P_n)$ são as matrizes de adjacência de G e P_n, respectivamente.

Deste resultado segue que $(ii) \rightarrow (i)$ e, portanto, dado qualquer grafo G que possua o mesmo espectro que P_n, então G é isomorfo à P_n. Concluíndo que P_n é **determinado pelo seu espectro**.

Referências

[1] ABREU N. M. M. A., DEL-VECCHIO R. R., VINAGRE C. T. M., STEVANOVIC D., **27 Introdução à teoria espectral de grafos com aplicações**, 2007