Uma generalização para o último Teorema de Fermat para expoentes inteiros Gaussianos

Universidade: presente! XXXI SIC 21. 25. OUTUBRO • CAMPUS DO VALE

Maurício Dutra Fonseca de Almeida

Resumo

Conjecturado em 1637, o Último Teorema de Fermat afirma que $x^n + y^n = z^n$ não possui solução inteira não trivial para $n \geq 3$. Após permanecer aberto por mais de 350 anos, foi provado em 1994 por Andrew Wiles. Supondo que vale o Teorema vamos provar uma das generalizações para o Último Teorema de Fermat, para expoentes inteiros Gaussianos.

Trabalho orientado por Bárbara Seelig Pogorelsky, Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Introdução Histórica

Em 1673, Pierre de Fermat conjecturou uma generalização do Teorema de Pitágoras afirmando que a equação $x^n + y^n = z^n$ não possui solução inteira não trivial para $n > 2$. Grandes nomes da matemática trabalharam sobre o problema, como o matemático suiço Leonhard Euler (1707-1783) que constatou a veracidade para $n = 3$, o alemão Gustav Lejeune Dirichilet (1805-1859), que conseguiu até a potência 5. Mais recentemente, computadores modernos estenderam a prova do Teorema até a potência 4 milhões. Finalmente em 1994, o matemático inglês e professor de Oxford Andrew Wiles conseguiu provar o Teorema com seu trabalho entitulado Formas Modulares, curvas elípticas e representação de Galois [2].

Inteiro Gaussiano

Seja $z = a + bi$ um número complexo, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Dizemos que z é um inteiro Gaussiano se $a, b \in \mathbb{Z}$ (lembre que $i = \sqrt{-1}$).

O Último Teorema de Fermat

Se $n \in \mathbb{Z}$, $n > 2$, então a equação $x^n + y^n = z^n$ não possui solução inteira com x, y e z diferentes de zero.

Lema 1

Para todo θ pertencente aos reais vale a equação:

$$e^{2i\theta} - 2\cos(\theta)e^{i\theta} + 1 = 0.$$

Prova do Lema 1

Note inicialmente que

$$(i)\ e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

De fato, expandindo $e^{i\theta}$ em séries de potência obtemos

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}(i\theta)^k\right).$$

Expandindo essa soma e separando a parte real da imaginaria obtemos $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!}\right) + i\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)$ que são respectivamente as séries de potências do cosseno e do seno, e portanto vale (i). Considere $e^{2i\theta} - 2\cos(\theta)e^{i\theta} + 1 = (e^{i\theta})^2 - 2\cos(\theta)e^{i\theta} + 1 =$ $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2 - 2\cos(\theta)(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) + 1 =$ $\cos(\theta)^2 +)2i\sin(\theta)\cos(\theta) + i^2\sin(\theta)^2 - 2\cos(\theta)^2 - 2i\sin(\theta)\cos(\theta) + 1 =$ $\cos(\theta)^2 + 2i\sin(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)^2 - 2\cos(\theta)^2 - 2i\sin(\theta)\cos(\theta) + 1 =$ $-\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 + 1 = -(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2) + 1 = -1 + 1 = 0$. Portanto vale o Lema 1.

Teorema de Gelfond-Schneider

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que, α e β são algébricos, $\alpha \neq 0$,1 e $\beta \notin \mathbb{Q}$. Então α^β é transcendente.

Considerações sobre o Teorema de Gelfond-Schneider

Este Teorema, que não será provado nesse trabalho, corresponde ao sétimo problema da lista dos 23 problemas de Hilbert apresentados na Conferência do congresso internacional de Matemática de Paris em 1900. Para sua prova veja [3].

Lema 2

Sejam $n,m \in \mathbb{Z}$, com $m \neq 0$. Então:

(i) $|x^{n+im} + y^{n+im}|^2 = x^{2n} + y^{2n} + 2x^ny^n\cos\theta$,com $\theta = m \cdot \log\left(\frac{x}{y}\right)$;

(ii) $|z^{n+im}|^2 = z^{2n}$.

Prova do Lema 2

$|x^{n+im} + y^{n+im}|^2 = |x^n \cdot x^{im} + y^n \cdot y^{im}|^2 = |x^n e^{\log(x^{im})} + y^n e^{\log(y^{im})}|^2 =$ $|x^n e^{i\cdot(m\cdot \log x)} + y^n e^{i\cdot(m\cdot \log y)}|^2 = |x.[\cos(m \cdot logx) + i \cdot \sin(m \cdot logx)] +$ $y.[\cos(m \cdot logy) + i \cdot \sin(m \cdot logy)]\,|^2 =$ $|\,[x^n\cos(m \cdot logx) + y^n\cos(m \cdot logy)] + i \cdot$ $[x^n\sin(m \cdot logx) + y^n\sin(m \cdot logy)]\,|^2 =$ $[x^n\cos(m \cdot logx) + y^n\cos(m \cdot logy)]^2 +$ $[x^n\sin(m \cdot logx) + y^n\sin(m \cdot logy)]^2 =$ $x^{2n}\cos^2(m \cdot logx) + 2x^ny^n\cos(m \cdot logx)\cos(m \cdot logy) + y^{2n}\cos^2(m \cdot logy) +$ $x^{2n}\sin^2(m \cdot logx) + 2x^ny^n\sin(m \cdot logx)\sin(m \cdot logy) + y^{2n}\sin^2(m \cdot logy) =$ $x^{2n}\left[\cos^2(m \cdot logx) + \sin^2(m \cdot logx)\right] +$ $2x^ny^n[\cos(m \cdot logx)\cos(m \cdot logy) + \sin(m \cdot logx)\sin(m \cdot logy)] +$ $y^{2n}\left[\cos^2(m \cdot logy) + \sin^2(m \cdot logy)\right] =$ $x^{2n} + y^{2n} + 2x^ny^n\cos(m \cdot [logx - logy]) =$ $x^{2n} + y^{2n} + 2x^ny^n\cos\left(m \cdot log\left(\frac{x}{y}\right)\right) = x^{2n} + y^{2n} + 2x^ny^n\cos\theta$. Logo vale (i). Considere por fim, $|z^{n+im}|^2 = |z^n \cdot z^{im}|^2 = |z^n e^{log(z^{im})}|^2 = |z^n e^{im\cdot log(z)}|^2 =$ $|z^n[\cos(m \cdot logz) + i \cdot \sin(m \cdot logz)]\,|^2 = z^{2n}\cos^2(m \cdot logz) + z^{2n}\sin^2(m \cdot$ $logz) = z^{2n}\left[\cos^2(m \cdot logz) + \sin^2(m \cdot logz)\right] = z^{2n}$. E isso conclui a prova do Lema 2.

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$, com $m \neq 0$. Então a equação

$$x^{n+im} + y^{n+im} = z^{n+im}$$

não possui soluções inteiras não nulas.

Demonstração do Teorema

Suponhamos por absurdo que existem $x, y, z \in \mathbb{Z}$ não nulos tais que o Teorema é válido. Então $|x^{n+im} + y^{n+im}|^2 = |z^{n+im}|^2$ e pelo Lema 2 segue que

$$x^{2n} + y^{2n} + 2x^ny^n\cos\theta = |x^{n+im} + y^{n+im}|^2 = |z^{n+im}|^2 = z^{2n}.$$

Logo $\dfrac{z^{2n} - x^{2n} - y^{2n}}{2x^ny^n} = \cos\theta \in \mathbb{Q}$, com $\theta = m \cdot log\left(\frac{x}{y}\right)$. Mas Pelo Lema 1 $e^{i\theta}$ é raiz de $x^2 - 2\cos\theta x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ e portanto $e^{i\theta}$ é algébrico. Mas note que

$$(*)\ e^{i\theta} = e^{im\cdot log\left(\frac{x}{y}\right)} = \left(e^{log\left(\frac{x}{y}\right)}\right)^{im} = \left(\frac{x}{y}\right)^{im}$$

e $im \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ algébrico. Então pelo Teorema de Gelfond-Schneider temos que $\alpha = \dfrac{x}{y} = 1$, uma vez que $x, y, z \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ implica que $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{im}$ é transcendente. Contradição, pois $(*)$ é algébrico. Logo $x = y$. Mas então $2x^{n+im} = z^{n+im}$ e portanto $2 = \left(\dfrac{z}{x}\right)^{n+im}$. Analogamente, pela argumentação acima segue que $z = x$. Logo $2x^{n+im} = x^{n+im}$, com $x \neq 0$. Absurdo. Isso conclui a prova do Teorema.

Referências

- Pogorelsky, B. S., *Algumas generalizações para o Ùltimo Teorema de Fermat*, Dissertação de mestrado - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2005.
- Willes, A. *Modular Elipt Curves and Fermat's Last Theorem* , Ann.Math. 141: 443-551, 1995.
- Gelfond, A. O, *Sur le Septième problème de Hilbert* , I.A.N.7 (1934),623-30; D.A.N.2 (1934),2-6.